



HAL
open science

Modélisation mathématique et simulations numériques des écoulements sanguins dans des artères avec ou sans stents

Mohamed Amine Bey

► **To cite this version:**

Mohamed Amine Bey. Modélisation mathématique et simulations numériques des écoulements sanguins dans des artères avec ou sans stents. Analyse numérique [math.NA]. Université Sorbonne Paris Cité, 2015. Français. NNT : 2015USPCD027 . tel-01525821

HAL Id: tel-01525821

<https://theses.hal.science/tel-01525821v1>

Submitted on 22 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XIII

Discipline : **Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement par

Mohamed Amine BEY

le 08 Octobre 2015

Modélisation mathématique et simulations numériques des écoulements sanguins dans des artères avec ou sans stents

Directeur de thèse : **M. Olivier LAFITTE**

Rapporteurs : M. Didier Bresch Directeur de recherche à l'Université de Savoie
M. Sébastien Tordeux Maître de conférences habilité à l'INRIA-UPPA

Jury : M. Didier Bresch Directeur de recherche à l'Université de Savoie
M. Houssem Haddar Directeur de recherche à l'École Polytechnique
Mme. Laurence Halpern Professeure à l'Université Paris 13
M. Olivier Lafitte Professeur à l'Université Paris 13
M. Sébastien Tordeux Maître de conférences habilité à l'INRIA-UPPA
M. Maher Zerzeri Maître de conférences à l'Université Paris 13

Invité : M. Vincent Lorent Directeur de l'École doctorale Galilée

*À ma douce maman Rafika, pour son amour, son dévouement sans égal
À mon père et mes deux amours Zouhour et Houda.*

Remerciements

Trouver les bons mots pour dire "Merci" est une chose difficile, d'autant plus dans une langue qui n'est pas sa langue maternelle. Je voudrais exprimer ici toute ma gratitude aux gens qui m'ont permis d'effectuer ma thèse. Sur le plan humain, j'ai trouvé que ces quatre années étaient passionnantes parce que j'ai côtoyé et rencontré des nombreuses personnes qui forçaient le respect et l'admiration. Qu'elles trouvent dans ce travail l'expression de mes plus sincères remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Professeur Olivier Lafitte pour m'avoir offert la possibilité de réaliser ce travail et pour sa confiance. Je le remercie également de m'avoir laissé beaucoup de liberté dans mes recherches au cours de ces quatre années de travail. J'espère avoir été digne de la confiance qu'il m'avait accordée.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Didier Bresch et à Sébastien Tordeux d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter sur ma thèse et pour le temps consacré à ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Merci d'avoir accepté de venir de loin pour ma soutenance. Je tiens à remercier Housseem Haddar, Professeure Laurence Halpern, Maher Zerzeri d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je suis sensible à l'honneur que me fait le directeur de l'école doctorale Galilée, Monsieur Vincent Lorent en ayant accepté de participer au Jury de ma soutenance en tant que professeur invité. Ce travail n'aurait bien sûr pas pu être mené à bien sans sa bonne implication. Sans oublier son soutien moral et ses encouragements. Il a su m'apporter l'optimisme et la confiance en moi nécessaires à la réalisation d'un tel projet et plus particulièrement dans les moments difficiles, où le doute m'effleurait. Tous mes déplacements ont été pris en charge par l'école doctorale Galilée, il m'a donné l'opportunité de participer au workshop Libanais en mécanique

des fluides 2012 et à l'école Cimpa-Tunisie 2015. Pour tout cela, merci beaucoup.

Je suis extrêmement reconnaissant au directeur du laboratoire LAGA, Professeur Philippe Souplet d'avoir bien voulu me faire confiance et de me permettre de travailler avec les membres des équipes « Modélisation et Calcul Scientifique » et « Physique Mathématique & Équations aux Dérivées Partielles ».

Je pense que je n'en serai pas là aujourd'hui sans les conseils avisés de Maher Zerzeri. Je suis très honoré de sa participation au Jury de ma soutenance. Sans lui, je n'aurais jamais continué dans la réalisation de cette thèse. Sa rigueur scientifique et son sens pédagogique m'ont permis de découvrir et apprécier un champ d'investigation nouveau pour moi. Il m'a appris à structurer mes idées et être plus rigoureux dans mes démarches mathématiques. C'est pourquoi, je te remercie beaucoup, Maher, pour les nombreuses discussions scientifiques échangées et les nombreux conseils prodigués.

De surcroît, je veux exprimer ma gratitude à Hatem Zaag qui a été pour moi d'un très grand soutien continu tout au long de ma thèse sur tous les points de vue, et plus que de simples amis. Sans son soutien je ne serais pas arrivé au stade où je suis aujourd'hui. Ses conseils, ses propositions et nos nombreux échanges scientifiques m'ont largement inspirée. Il m'a vraiment transmis son goût et sa curiosité pour les biomathématiques. Par ailleurs, sa qualité humaine m'a permis de surmonter les moments difficiles pendant ma thèse. Je lui suis infiniment reconnaissant.

Je tiens encore une fois à remercier Housseem Haddar dont j'admire la compétence scientifique et les qualités humaines, étant donné qu'on se connaissait bien avant la thèse. Il m'a fait l'honneur d'être parmi les membres du Jury. Malgré son emploi du temps trop chargé, il a su trouver du temps pour participer au Jury de ma soutenance. Merci Housseem pour m'avoir initié aux théories asymptotiques pendant mon stage de mastère.

Un très grand merci tout particulier à Mickael Balabane pour sa bonne humeur, sa gentillesse, et sa serviabilité. Merci de m'avoir accueilli chaleureusement à Beyrouth pendant ma participation au workshop en mécanique des fluides à l'Université Libanaise. Je le remercie également pour toutes les discussions qui ont été toujours fructueuses, ses encouragements, son soutien notamment dans les moments difficiles où je croyais être au point mort. Je lui suis extrêmement reconnaissant.

Je remercie chaleureusement Gilles Scarella pour ses précieux conseils en informatique scientifique et pour les discussions que nous avons eues sur le FreeFem++. Je le remercie aussi pour

sa disponibilité et l'aides apportée aux difficultés que j'ai confrontées.

Mention spéciale à Linda El Alaoui et Emmanuel Audusse qui n'ont cessé de demander toujours de mes nouvelles. Je voudrais remercier plus particulièrement Linda qui a toujours répondu à mes multiples questions et pour ses encouragements.

Je remercie tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est, aussi bien par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, que pour leurs suggestions ou contributions. Je pense ici en particulier à cher professeur Nader Masmoudi.

J'ai eu l'occasion d'enseigner à l'université Paris-Dauphine en tant qu'ATER et Vacataire, ce qui a été une expérience tout à fait enrichissante. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui de près ou de loin, m'ont soutenu à l'université Paris-Dauphine. Je ne citerais pas de noms de peur d'en oublier. Un merci tout particulier à Guillaume Legendre et Rémi Rhodes qui ont su me transmettre leurs connaissances pédagogiques et pour leur aide amicale dans mes enseignements. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec eux. Un enseignement, c'est aussi des étudiants, et j'ai beaucoup apprécié l'enthousiasme et la motivation de mes étudiants Dauphinois. J'aimerais les remercier tous et j'espère que mon enseignement et mon expérience pédagogique était à la hauteur de leurs ambitions.

Je souhaite remercier très sincèrement cher professeur Abbas Bahri et sa femme Diana Nunzianta et à leur témoigner toute ma reconnaissance pour l'hospitalité dont ils ont fait preuve envers moi lors de ma participation à l'école de recherche Cimpa-Hammamet 2015 pour célébrer le 60eme anniversaire du Professeur BAHRI.

Mes remerciements s'adressent à tous les membres du laboratoire LAGA avec une pensée particulière à la petite équipe proba-stat (Ben Alaya, Kebaier, Mrad) et à Yolande Jimenez (Yoyo) pour sa réactivité, son efficacité et sa bonne humeur toujours communicative. Merci chère Yoyo pour toute l'aide que tu m'as apportée et t'inquiète je garde toujours le meilleur souvenir.

Toute ma gratitude envers mes camarades et amis doctorants pour l'intérêt qu'ils m'ont porté durant ces années de thèse et pour les échanges scientifiques que nous avons eus. Par ordre ni alphabétique ni d'importance, et en oubliant sûrement la moitié des gens au passage, qu'ils me pardonnent : Rémi, Emilie, Tarek, Tej-Eddine, Annalauran, Eva, Julien, Lisa, Taiwang, Alexandre, Guiseppe, Ahmed, Bakari, Van Tien, Irène, Salomé, Linglong, Nejib, Hattab, David, Anh Tuan. C'est grâce à vous tous, j'ai réussi à organiser avec un très grand plaisir le séminaire des doctorants du LAGA.

Je remercie le gouvernement de mon pays : la Tunisie pour la bourse d'excellence qui a servi à

Remerciements

financer cette thèse. J'ai une dette envers la chef d'équipe Professeure Amel Ben Abda sous la direction duquel j'ai commencé l'étude et la recherche en mastère mathématique appliquées au sein du laboratoire Lamsin et qui veille à ce qu'on travaille toujours dans de bonnes conditions à l'Enit.

"Les anges existent mais des fois ils n'ont pas d'ailes... Nous les appelons alors « amis »".

Une dédicace spéciale à tous les frères amis à Paris que j'ai eu le plaisir de partager avec eux toutes les difficultés et les victoires de ma thèse, à savoir, Kaouther (spéciale dédicace à Zako!), Farah, Abderahman, Amal, Saida. Je tiens beaucoup à vous remercier pour votre fidélité, votre soutien psychologique. Je vous remercie également pour vos encouragements et pour les beaux moments que j'ai passés avec vous.

Mes longues années à Paris n'auraient pas été si joyeuses sans mes chers amis Tunisiens. Un grand merci à chaque membre de notre groupe des balades, pour les bons moments familiaux, notamment à Anouer et Mokhtar.

Je n'oublie pas de remercier ma deuxième famille à Paris : Maher, Saida, Salem, Mona, Samy et ... Aucun mot ne saurait décrire ma pensée! Une pensée particulière également à Chedli Chtita pour les discussions sympathiques et les divers conseils qu'il m'a donnés.

Je profite également de cette page pour remercier une chère amie à qui je dois beaucoup : Sinda Khalfallah (spéciale dédicace également à Kanzouza!). Merci Sinda pour les nombreuses années d'amitié qui nous lient (depuis 2002 je pense!). Je ne cesse de te remercier pour ta fidélité et ta bonne humeur.

Pour finir, un immense merci à la solide équipe de soutien de toujours : ma famille pour leurs encouragements, leur amour indéfectible et tous les sacrifices qu'ils ont faits pour moi. Ceci s'applique surtout à m'a **mère Rafika Sghaier**, la plus douce des mamans qui ma soutenu et insisté que je fasse cette thèse. Je n'oserais prétendre que ce travail soit à la hauteur des longues nuits de veille que tu as endurées pendant mes années d'études. Que ce travail lui soit un humble témoignage de mon grand amour et ma gratitude. (À toi seule maman, il te faudrait un chapitre de remerciement!) Mon père **Jemail**, j'aimerais profiter pour te dire merci pour tout! A mes belles et adorables soeurs **Zouhour** et **Houda** pour leur encouragements, leur amour, leur soutien constant et le support moral qu'ils m'ont accordé. Que dieu les protège et leur donne chance, santé et longue vie. Il n'y aura pas assez de mots pour dire tout le bien que je pense d'eux, alors je m'arrête...

Résumé

Cette thèse est consacrée à la modélisation mathématique et simulations numériques des écoulements sanguins dans des artères en présence d'une endoprothèse vasculaire de type stent. La présence de stent peut être considérée comme une perturbation locale d'un bord lisse d'écoulement, plus précisément les parois de l'artère sont assimilées à une surface fortement rugueuse. Nous nous sommes principalement intéressés au contrôle de la régularité H^2 sur un modèle simplifié permettant de prendre en compte l'effet de ces stents lorsque le flux sanguin est gouverné par une équation de Laplace (en lien avec la composante axiale de la vitesse d'écoulement) avec une condition aux limites de type Dirichlet, dans un domaine à bord rugueux (en fonction d'un petit paramètre ε). Dans une première partie, nous soulevons la question d'existence et d'unicité de la solution de ce modèle d'écoulement sanguin et nous traitons la régularité H^2 par des techniques d'analyse variationnelle. Une étude minutieuse permet de contrôler la régularité H^2 en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Le deuxième axe est dédié à l'étude de la régularité H^2 par des analyse asymptotiques multiéchelles. Nous montrons que la norme H^2 de la solution de ce modèle d'écoulement sanguin est singulière en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. D'autre part, nous améliorons les ordres de convergence des résultats existants concernant la construction des approximations multiéchelles. Dans un troisième temps, nous présentons des estimations d'erreur et des résultats numériques. Ces résultats illustrent le bien fondé des estimations d'erreur sur le plan pratique. Nous montrons bien l'importance des méthodes asymptotiques qui se révèlent plus efficaces qu'un calcul direct.

Mots clés : Domaine rugueux, régularité H^2 , écoulement sanguin, tuteur vasculaire, artère, anévrisme, lois de paroi, opérateur de Laplace, analyse asymptotique, approximation couche limite, méthodes d'éléments finis.

Table des matières

Principales notations	1
Introduction générale	7
1 Motivation biologique	7
2 Le cadre mathématique	11
3 Etat de l'art et principaux résultats	14
4 Plan et démarche suivie	15
I Un modèle d'écoulement sanguin	21
1 Modélisation mathématique	21
2 Résultats préliminaires	23
2.1 Formulation variationnelle sur Ω_ε	23
2.2 Existence et unicité	25
2.3 Formulation variationnelle sur Ω_0 après redressement global	27
3 Inégalité de type Poincaré dans la couche rugueuse	30
4 Inégalité de type trace dans un domaine rugueux	31
II Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux	35
1 Introduction	35
2 Partition de l'unité et Système de carte locale	36
3 Régularité H^2 à l'intérieur de Ω_ε	37
4 Régularité H^2 au voisinage des bords lisses $\Gamma^\infty \cup \Sigma_e \cup \Sigma_s$	39
5 Régularité H^2 au voisinage du bord rugueux γ_ε	43

5.1	Redressement du bord rugueux	44
5.2	Formulation variationnelle après redressement du bord rugueux	48
5.3	Choix de la fonction test	50
5.4	Minoration de la forme bilinéaire dans la formulation variationnelle	51
5.5	Majoration de la forme linéaire de la formulation variationnelle	58
5.6	Régularité H^2 dans le domaine redressé	59
5.7	Estimation locale de la norme H^2 près du bord rugueux	61
6	Conclusion et quelques réflexions	64
7	Résultats techniques	67
III Méthodes de construction d'approximation couche limite		75
1	Introduction	75
2	Loi de paroi d'ordre 1	77
2.1	Extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille	77
2.2	Problème cellulaire	81
2.3	Existence et unicité du problème cellulaire	84
2.4	Propriétés fondamentales de la solution microscopique du problème cellulaire	85
2.5	Approximation couche limite d'ordre 1 par l'approche d'Achdou et al.	94
2.6	Moyenne de l'approximation couche limite d'ordre 1 dans la direction axiale	102
3	Loi de paroi d'ordre 2	106
3.1	Extension d'ordre 2 du profil de Poiseuille	106
3.2	Problème cellulaire d'ordre 2	107
3.3	Existence et unicité du problème cellulaire d'ordre 2	108
3.4	Approximation couche limite d'ordre 2 par l'approche d'Achdou et al.	109
3.5	Moyenne de l'approximation couche limite d'ordre 2 dans la direction axiale	111
4	Loi de paroi multi-échelle	114
4.1	Loi de paroi explicite d'ordre 1	114
4.2	Loi de paroi explicite d'ordre 2	118
4.3	Loi de paroi implicites	119
5	Appendice	128
5.1	Construction des nouvelles lois de paroi	128
5.2	Rappels sur l'homogénéisation d'EDP elliptiques	131

IV Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites	137
1 Introduction	137
2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1	139
2.1 Régularité H^2 de l'extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille	140
2.2 Régularité H^2 de correcteur couche limite à l'ordre 1	141
2.3 Norme H^2 de l'approximation couche limite à l'ordre 1	150
2.4 Norme H^2 de l'estimation d'erreur d'ordre 1	152
2.5 Premier résultat par l'approximation couche limite d'ordre 1	155
3 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 2	156
4 Conclusion	162
V Étude asymptotique de la régularité H^2 : Application au problème de Laplace	165
1 Introduction	165
2 Description de la technique de construction des Ansatz	167
3 Loi de paroi d'ordre 1 pour le problème de Laplace	169
4 Loi de paroi d'ordre 2 pour le problème de Laplace	174
5 Vers l'étude de la régularité H^2 au problème modèle de Laplace	180
5.1 Existence et unicité de l'approximation d'ordre 1 dans Ω_0	180
5.2 Régularité H^2 de l'approximation d'ordre 1 dans Ω_0	182
5.3 Quelques estimations du correcteur cellulaire d'ordre 1	184
5.4 Régularité H^2 de la loi de paroi d'ordre 1	185
5.5 Norme H^2 de l'estimation d'erreur d'ordre 1	186
6 Conclusion	191
VI Estimations d'erreur et Résultats numériques	195
1 Préliminaires	196
1.1 Le problème approché	196
1.2 Estimation d'erreur a priori : lemme de Aubin-Nitsche dans un domaine non rugueux	197
2 Généralisation : Lemme de type Aubin-Nitsche dans un domaine rugueux	198
3 Analyse d'erreur a priori par éléments finis	201
4 Analyse d'erreur de la solution microscopique	202
4.1 Domaine cellulaire tronqué	203
4.2 Estimations d'erreur du correcteur cellulaire	204

Table des matières

5	Analyse d'erreur a priori par la méthode asymptotique	214
6	Validation numérique	218
6.1	Domaine de discrétisation	218
6.2	Simulation numérique des résultats théoriques du chapitre III	221
6.3	Illustration numérique des estimations d'erreur du chapitre VI	227
7	Appendice	235
7.1	Résultats techniques	235
7.2	Quelques rappels sur les éléments finis	243
	Conclusion générale et perspectives	245
	Bibliographie	247

Principales notations

Modèle d'écoulement sanguin

u_ε	Solution exacte du problème
g	Terme source
Ω_ε	Domaine rugueux
Γ^∞	Frontière lisse du domaine Ω_ε
γ_ε	Paroi rugueuse du domaine Ω_ε
Σ_e	Entrée verticale du domaine Ω_ε
Σ_s	Sortie verticale du domaine Ω_ε
Ω_0	Domaine lisse
γ^0	Interface entre la couche rugueuse et le domaine lisse
\vec{n}	Vecteur normal unitaire extérieur au domaine de travail
$\mathcal{H}_{\text{per},0}$	Sous espace fermé de $H^1(\Omega_\varepsilon)$
$C_P(\varepsilon)$	Constante de Poincaré
α_ε	Constante de coercivité
\mathcal{L}_ε	Redressement global qui transforme Ω_ε en Ω_0
Δ	Opérateur laplacien
∇	Opérateur gradient
(E)	Problème aux limites avec g le terme source

Technique variationnelle

V_{int}	Ouvert strictement inclus dans Ω_ε pour traiter la régularité H^2 à l'intérieur de Ω_ε
V_e	Disque pour traiter la régularité H^2 au voisinage du bord Σ_e
V_s	Disque pour traiter la régularité H^2 au voisinage du bord Σ_s
V_∞	Disque pour traiter la régularité H^2 au voisinage du bord Γ^∞
V_{rug}	Disque pour traiter la régularité H^2 près du bord rugueux γ_ε
φ_{int}	Partition de l'unité dans le domaine V_{int}
φ_e	Partition de l'unité dans le domaine V_e
φ_s	Partition de l'unité dans le domaine V_s
φ_∞	Partition de l'unité dans le domaine V_∞
φ_{rug}	Partition de l'unité dans le domaine V_{rug}

Lu	Opérateur aux dérivées partielles sous la forme divergence.
u_{int}	Solution faible sur Ω_ε vérifiant $u_{\text{int}} = \varphi_{\text{int}}u_\varepsilon$
u_∞	Solution faible sur Ω_ε vérifiant $u_\infty = \varphi_\infty u_\varepsilon$
u_s	Solution faible sur Ω_ε vérifiant $u_s = \varphi_s u_\varepsilon$
u_e	Solution faible sur Ω_ε vérifiant $u_e = \varphi_e u_\varepsilon$
$u_{\text{rug}}^\varepsilon$	Solution faible sur Ω_ε vérifiant $u_{\text{rug}} = \varphi_{\text{rug}}u_\varepsilon$
v	Fonction test
D_∞	Intersection entre le domaine Ω_ε et le disque V_∞
D_s	Intersection entre le domaine Ω_ε et le disque V_s
D_e	Intersection entre le domaine Ω_ε et le disque V_e
D_{rug}	Intersection entre le domaine Ω_ε et le disque V_{rug}
G_{int}	Terme source de l'équation de Laplace sur V_{int}
G_s	Terme source de l'équation de Laplace sur D_s
G_e	Terme source de l'équation de Laplace sur D_e
F_{rug}	Terme source de l'équation de Laplace sur D_{rug}
ϕ	La fonction redressement local du bord rugueux
ψ	La fonction réciproque de ϕ
$\widetilde{D}_{\text{rug}}$	Image de D_{rug} par l'application ϕ
\widetilde{U}	Un ouvert qui recouvre $\widetilde{D}_{\text{rug}}$
\widetilde{V}	Demi-disque inclus dans \widetilde{U}
V	Image de \widetilde{V} par l'application ψ
Sp	Ensemble des valeurs propres
G_ε	Matrice de redressement du domaine D_{rug}
$\lambda_{\min}(\varepsilon)$	Petite valeur propre de la matrice G_ε
$\lambda_{\max}(\varepsilon)$	La grande valeur propre de la matrice G_ε
α_0	Constante d'ellipticité (minorant de la petite valeur propre de G_ε)
α_1	Majorant de la plus grande valeur propre de G_ε
$\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon$	Fonction composée de $u_{\text{rug}}^\varepsilon$ par ψ
\tilde{v}	Fonction composée de v par ψ
\tilde{F}_{rug}	Fonction composée de F_{rug} par ψ
D_1^h	Quotient différentiel
ξ	Fonction de troncature
$A(\cdot, \cdot)$	Forme bilinéaire à la formulation variationnelle
$B(\cdot)$	Forme linéaire à la formulation variationnelle
\widehat{G}_ε	Différentiel tangentiel de la métrique G_ε

$\widehat{\lambda}_{\min}$	Petite valeur propre de \widehat{G}_ε
$\widehat{\lambda}_{\max}$	Grande valeur propre de \widehat{G}_ε
\mathcal{F}_ε	Redressement d'une couche rugueuse de taille $\mathcal{O}(\varepsilon)$

Méthodes d'approximation couche limite

$Z^+ \cup P$	Domaine cellulaire
P^0	Paroi curviligne de la cellule $Z^+ \cup P$
Γ_f	Interface fictive de la cellule $Z^+ \cup P$
Γ_l	Entrée verticale de la cellule $Z^+ \cup P$
Γ_r	Sortie verticale de la cellule $Z^+ \cup P$
$\tilde{\gamma}$	Paramétrisation du bord P^0
$\bar{\Gamma}$	Moyenne de la fonction $(-\tilde{\gamma})$ sur une période 2π
$D^{1,2}(Z^+ \cup P)$	Espace fonctionnel
$D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$	Espace fonctionnel
u_0	Profil de Poiseuille
$u_{\text{ext},1}^0$	Extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille
$u_{\text{ext},2}^0$	Extension d'ordre 2 du profil de Poiseuille
β_1	Correcteur cellulaire d'ordre 1
$\overline{\beta_1}$	Moyenne de la solution β_1 dans la direction axiale
β_2	Correcteur cellulaire d'ordre 2
d	Contre-flot
$u_{\text{Ach},1}^1$	Approximation d'ordre 1 par l'approche d'Achdou à l'itération 1
$u_{\text{Ach},1}^N$	Approximation d'ordre 1 par l'approche d'Achdou à l'itération N
$u_{\text{Ach},1}^\infty$	Approximation couche limite d'ordre 1 par l'approche d'Achdou et al.
$u_{\text{Ach},2}^1$	Approximation d'ordre 2 par l'approche d'Achdou à l'itération 1
$u_{\text{Ach},2}^N$	Approximation d'ordre 2 par l'approche d'Achdou à l'itération N
$u_{\text{Ach},2}^\infty$	Approximation couche limite d'ordre 2 par l'approche d'Achdou et al.
u^1	Moyenne de l'approximation couche limite d'ordre 1 dans la direction axiale
u^2	Moyenne de l'approximation couche limite d'ordre 2 dans la direction axiale
$\mathcal{U}_{\text{exp}}^1$	Loi de paroi explicite d'ordre 1
$\mathcal{U}_{\text{exp}}^2$	Loi de paroi explicite d'ordre 2
Υ_{imp}^1	Loi de paroi d'ordre 1 implicite
Υ_{imp}^2	Loi de paroi d'ordre 2 implicite
$\mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}(\Omega_0)$	Espace fonctionnel

$\mathcal{H}^1(\Omega_0)$	Espace fonctionnel
$u_{\text{Jäg}}^0$	Extension du profil de Poiseuille par l'approche de Jäger
$\beta_{\text{Jäg},1}$	Correcteur cellulaire d'ordre 1 par la théorie de Jäger
$\overline{\beta_{\text{Jäg},1}}$	Moyenne de la solution $\beta_{\text{Jäg},1}$ dans la direction axiale
$u_{\text{Jäg},1}^1$	Approximation de Jäger d'ordre 1 à l'itération 1
$E(\cdot)$	Partie entière
D_x^2	Hessienne dans le domaine macroscopique
D_y^2	Hessienne dans le domaine microscopique
∇_x	Gradient dans le domaine macroscopique
∇_y	Gradient dans le domaine microscopique

Loi de paroi pour le problème de Laplace

\tilde{u}_0	Approximation d'ordre zéro de la solution u_ε
u_1	Loi de paroi d'ordre 1 pour le problème de Laplace
\tilde{u}_1	Perturbation à l'ordre 1 de la solution \tilde{u}_0
\tilde{v}_0	Pseudo-correcteur d'ordre 1
χ^0	Solution cellulaire d'ordre 1 du problème de Laplace
$\overline{\chi^0}$	Moyenne de la solution cellulaire χ^0
u_2	Loi de paroi d'ordre 2 pour le problème de Laplace
\tilde{u}_2	Perturbation à l'ordre 2 de la solution \tilde{u}_0
\tilde{v}_1	Pseudo-correcteur d'ordre 2
χ^1	Solution cellulaire d'ordre 2 du problème de Laplace
$\overline{\chi^1}$	Moyenne de la solution cellulaire χ^1

Analyse Numérique

W, V	Espaces fonctionnels
h	Diamètre maximal de la triangulation
$a(\cdot, \cdot)$	Forme bilinéaire, continue, coercive définie sur $W \times V$
$l(\cdot)$	Forme linéaire, continue définie sur V
V_h	Espace test discret ($V_h \subset V$)
W_h	Espace d'approximation ($W_h \subset W$)
$a_h(\cdot, \cdot)$	Forme bilinéaire, continue, coercive définie sur $W_h \times V_h$
$l_h(\cdot)$	Forme linéaire, continue définie sur V_h

$a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$	Forme bilinéaire, continue, coercive définie sur $\mathcal{H}_{\text{per},0} \times \mathcal{H}_{\text{per},0}$
$l_\varepsilon(\cdot)$	Forme linéaire, continue définie sur $\mathcal{H}_{\text{per},0}$
$u_{\varepsilon,h}$ ou u_ε^h	Solution approchée de u_ε par la méthode des éléments fini
$V_{\varepsilon,h}$	Sous-espace de dimension finie de l'espace $\mathcal{H}_{\text{per},0}$
$a_{\varepsilon,h}(\cdot, \cdot)$	Forme bilinéaire, continue, coercive issue de l'approximation de la forme $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$
$l_{\varepsilon,h}(\cdot)$	Forme linéaire, continue issue de l'approximation de la forme $l_\varepsilon(\cdot)$
C_s	Constante de stabilité
C_i	Constante d'interpolation
J_h^{Lag}	Interpolé de Lagrange
Z_R	Domaine cellulaire tronqué
Γ_R	Troncature du domaine cellulaire
β_1^R	Solution du problème cellulaire tronqué
\mathcal{E}^R	Erreur entre le correcteur β_1 et le correcteur tronqué β_1^R dans Z_R
\tilde{Q}	Domaine du redressement de la cellule tronquée Z_R
$\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$	Forme bilinéaire à la formulation variationnelle dans \tilde{Q}
$\mathcal{B}(\cdot)$	Forme linéaire à la formulation variationnelle dans \tilde{Q}
\tilde{D}	Demi-disque qui recouvre \tilde{Q}
\tilde{D}'	Demi-disque $\subset \tilde{Q}$
G_R	Matrice de redressement de la cellule tronquée Z_R
$g_R^{11}, g_R^{12}, g_R^{21}, g_R^{22}$	Coefficients de la métrique G_R
α_R	Constante d'ellipticité de la métrique G_R
M_R	Majorant de la grande valeur propre de la matrice G_R
$\lambda_{\min}(R)$	Petite valeur propre de la matrice G_R
$\lambda_{\max}(R)$	La grande valeur propre de la matrice G_R
\widehat{G}_R	Différentiel tangentiel de la métrique G_R
$\widehat{\lambda}_{\min}(R)$	Petite valeur propre de la matrice \widehat{G}_R
$\widehat{\lambda}_{\max}(R)$	La grande valeur propre de la matrice \widehat{G}_R
$\tilde{\mathcal{E}}$	Erreur entre le correcteur β_1 et le correcteur tronqué β_1^R dans \tilde{Q}
$D^{1,2}(Z_R)$	Espace fonctionnel
$a_c(\cdot, \cdot)$	Forme bilinéaire, continue, coercive définie sur Z_R
$l_c(\cdot)$	Forme linéaire, continue définie sur Z_R
$V_{\beta,h}$	Espace d'approximation $V_{\beta,h} \subset D^{1,2}(Z_R)$
$a_{c,h}(\cdot, \cdot)$	Forme bilinéaire, continue, coercive issue de l'approximation de la forme $a_c(\cdot, \cdot)$
$l_{c,h}(\cdot)$	Forme linéaire, continue issue de l'approximation de la forme $l_c(\cdot)$
$\beta_{1,h}^R$	Solution approchée de β_1^R par la méthode des éléments fini

\mathcal{J}_h^{Lag}	Opérateur d'interpolation de Lagrange
$(u_{\text{ext},1}^0)_h$	Extension approchée d'ordre 1 du profil de Poiseuille
$(u_{\text{Ach},1}^1)_h$	Approximation couche limite approchée d'ordre 1 à l'itération 1
$\beta_{1,h}$	Solution approchée du problème cellulaire
$\beta_{1,h}^R$	Solution approchée du problème cellulaire tronqué
$u_{\text{ext},1}^{0,h}$	Extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille
$u_{\text{Ach},1}^{\infty,h}$	Approximation couche limite approchée d'ordre 1 par l'approche d'Achdou et al.
$u_{\text{Ach},2}^{\infty,h}$	Approximation couche limite approchée d'ordre 2 par l'approche d'Achdou et al.
$u^{1,h}$	Moyenne approchée de l'approximation couche limite d'ordre 1 dans la direction axiale
$u^{2,h}$	Moyenne approchée de l'approximation couche limite d'ordre 2 dans la direction axiale
$\mathcal{U}_{\text{exp}}^{1,h}$	Loi de paroi explicite approchée d'ordre 1
$\mathcal{U}_{\text{exp}}^{2,h}$	Loi de paroi explicite approchée d'ordre 2
$\Upsilon_{\text{imp}}^{1,h}$	Loi de paroi d'ordre 2 implicite approchée
\mathbb{P}_2	Espace d'approximation par éléments finis

Introduction générale

1 Motivation biologique

La biomathématique sous-entend la coalition de deux sciences : la biologie et les mathématiques. De façon pertinente, les mathématiques appliquées aux sciences biologiques et médicales sont déterminées par l'ensemble des techniques et concepts mathématiques, numériques et informatiques qui permettent de modéliser et d'analyser les phénomènes biologiques. Il s'agit donc bien d'une science fortement multidisciplinaire qui irrigue largement des équipes de mathématiciens et de biologistes. De plus en plus de chercheurs en mathématiques fondamentales et appliquées s'intéressent à ces mécanismes biologiques et de façon symétrique, de plus en plus de médecins et de biologistes éprouvent le besoin d'une telle approche et font appel à des méthodes mathématiques et numériques pour étudier les problèmes de difficulté inextricable auxquels ils sont confrontés. Les mathématiques appliquées à la médecine ont des applications tant pratiques que théoriques dans de nombreux domaines comme l'étude du système cardiovasculaire qui est en plein essor depuis quelques années. L'étude de la circulation sanguine dans le corps humain (l'hémodynamique) intéresse beaucoup de scientifiques dès le XVII^{ème} siècle. En effet, les écoulements des fluides dans des tuyaux cylindriques ont été traités par le physicien et médecin J.-L.-M. Poiseuille [64] qui, afin d'étudier le mouvement du sang dans les veines et vaisseaux, a établi « les lois de l'écoulement laminaire des fluides visqueux dans les tuyaux cylindriques » dans son ouvrage « Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres ». De ce fait, le médecin français J.-L.-M. Poiseuille propose au milieu du XIX^{ème} siècle l'un des premiers modèles d'écoulement sanguin dans les artères et met en évidence un profil caractéristique laminaire et permanent d'écoulement : le profil de Poiseuille.



Figure 1 – Jean Leonard Marie Poiseuille (1797-1869)

Il existe plusieurs phénomènes pouvant affecter l'écoulement sanguin, et qui sont à l'origine de pathologies mortelles courantes du système cardio-vasculaire. Parmi ces phénomènes, on peut citer l'athérosclérose et les ruptures d'anévrisme. En fait, un anévrisme¹ est une turgescence localisée de la paroi d'une artère, qui peut être provoquée par le dépôt de graisse dans l'artère. Ce dépôt engendre la formation d'une poche de taille variable qui communique avec l'artère au moyen d'une zone étranglée que l'on nomme « collet ». Cette poche peut grossir sous la pression sanguine, son diamètre pouvant atteindre plusieurs centimètres. En termes précis, l'artère au lieu de prendre la forme d'un tuyau forme une boule [15, 58].

Les anévrismes artériels sont déterminés principalement par la perte de parallélisme des parois de l'artère et l'augmentation de son calibre. L'aorte est la plus ample artère de l'organisme et répartie ses branches vers la presque totalité des organes ainsi que les 4 membres. Elle éclot du coeur, transperce le thorax et plonge dans l'abdomen où elle se divise finalement pour irriguer les jambes, à la hauteur du nombril. Au voisinage du ventre, le calibre de l'aorte oscille habituellement entre 2 et 3 cm. Le destin des anévrismes de l'aorte a été l'objet de beaucoup de recherches. Il en ressort que malheureusement tous les anévrismes de l'aorte du coeur sont destinés à enfler de taille (généralement 0,3 cm de diamètre annuellement) et à exploser. Le risque de rupture devenant plus important quand l'anévrisme touche ou excède 5 centimètre de diamètre au niveau de l'aorte abdominale (la plus ample artère de l'organisme).

La rupture d'anévrisme représente environ 10% des accidents vasculaires cérébraux (AVC) dans les pays occidentaux. Lorsqu'elle survient brusquement, la mort est souvent inexorable.

1. Voir <https://fr.wikipedia.org/wiki/Anévrisme>

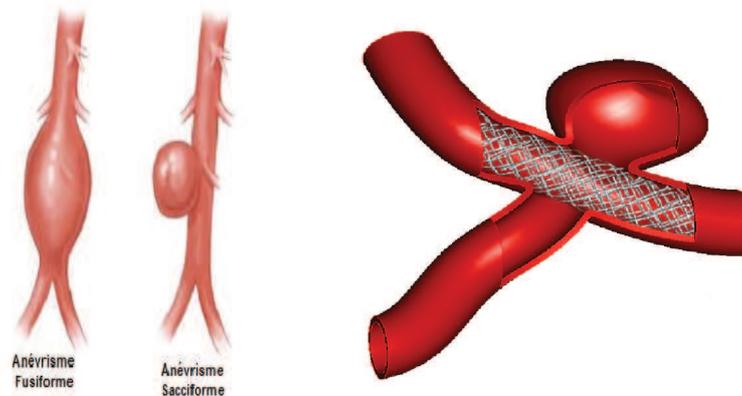


Figure 2 – Schéma d'un anévrisme (gauche), un exemple 3D d'un stent dans l'anévrisme (droite)

Des indices précurseurs peuvent néanmoins attirer l'attention dans les heures et même les jours qui précèdent l'AVC, et un traitement médical est prévisible. La rupture d'anévrisme est une urgence vitale redoutable, gravissime chez les malades arrivant vivant à l'hôpital et opérés, elle affecte environ 50 à 75 % des patients. Tout l'intérêt est donc d'opérer cette pathologie mortelle avant la rupture. Une thérapie chirurgicale possible consiste à introduire un fil métallique multi-couches appelé «stent» (endoprothèse vasculaire ou tuteur vasculaire), comme une protection supplémentaire de la paroi artérielle afin de ralentir les tourbillons dans l'anévrisme et de favoriser la coagulation de la poche. Un tuteur vasculaire est en fait une pièce métallique maillée et tubulaire mise en place dans un vaisseau. Son aspect extérieur ressemble à un ressort, voir [15, 58]. Nous précisons qu'il en existe deux sortes :

- Les stents non couverts : appui endovasculaire destiné dans le cadre des dilatations des étranglements (« ou sténoses ») des vaisseaux de façon à prévenir la récurrence (« resténose »). Dans ce cas le maillage tubulaire est poreux.

- Les stents couverts : il s'agit de stents recouverts d'un tissu prothétique par dessus le maillage. Ils sont inaccessibles et peuvent donc être exploités pour anticiper ou bien soigner les hémorragies. En effet, implantés dans un vaisseau, ils peuvent : calfeutrer une plaie, être introduits dans un vaisseau dont les parois sont anévrismales pour que l'écoulement sanguin arrête de circuler dans l'artère proprement dite mais passe dans l'endoprothèse. La paroi artérielle de l'anévrisme est alors totalement débranchée de la circulation sanguine et l'anévrisme est dit « exclu » : il ne dispose plus de risque évolutif de rupture.

Expérimentalement, la pose d'un stent semble permettre de modérer l'évolution (le grossissement) des collets d'anévrisme, tout en y laissant circuler le sang et diminuant les effets turbulents de l'écoulement sanguin à leurs abords [15, 58]. D'un point de vue mathématique,

la recherche sur les pathologies du système cardio-vasculaire se modélisent par un système d'équations mathématiques rendant compte de toutes les données expérimentales connues du mécanisme biologique traité. Le modèle permet entre autres de mieux déchiffrer un phénomène biologique, d'agir sur le système d'équations de façon optimale. Il existe de nombreux modèles mathématiques d'écoulement sanguin dans des artères sans stent, la présence de la rugosité dans le domaine d'écoulement engendre des difficultés techniques supplémentaires, au niveau mathématique comme numérique, liées à l'aspect multi-échelles du problème. En effet, la petite taille du l'endoprothèse vasculaire (« stent ») constitue une échelle «microscopique» qui vient s'ajouter à l'échelle «macroscopique» globale de l'artère.



Figure 3 – Dissection du tissu croissant sur le stent (gauche et milieu) microscopie à balayage près d'une jonction avec une artère collatérale (droite)

Cependant, le cas du stent dans l'artère se caractérise par les propriétés suivantes :

- Diamètre de l'artère fémorale : $\varnothing_A = 6mm$.
- Epaisseur totale du stent : $\varepsilon = 0.25mm$.
- Epaisseur d'une spire métallique : $\varepsilon' = 0.04mm$.
- Diamètre d'un globule rouge : $\varnothing_{RC} = 0.008mm$

$$\frac{\varepsilon}{\varnothing_A} = \frac{0.25}{6} \sim \%4.15$$

Ces données sont importantes pour la dynamique du fluide, qui entraîne un flux sur les écoulements sanguins. De façon précise, présente une perturbation sur les parois artérielles. En effet, il est fondamental de prendre en compte correctement la rugosité du domaine dans les équations afin de traiter l'influence effective du tuteur vasculaire. En outre, d'un point de vue numérique, nous devons considérer une alternative au maillage direct du domaine rugueux, trop coûteux.

2 Le cadre mathématique

L'objet de très nombreux travaux de recherche, ces toutes dernières années, est la modélisation mathématique et le calcul des solutions de systèmes biologiques et médicaux, et plus exactement, le développement de nouveaux systèmes d'équations aux dérivées partielles pour l'étude de modèles biologiques ou de pathologies du systèmes cardio-vasculaires chez l'humain et leur simulation numérique effective, en vue d'applications médicales ou biologiques.

L'un des objectifs de cette thèse est de faire un état de l'art forcément non exhaustif des différentes recherches effectuées dans ce domaine.

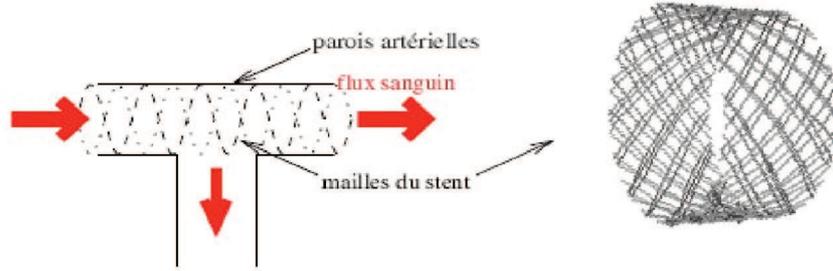


Figure 4 – Schéma d'une artère stentée avec artère collatérale (gauche), un exemple 3D d'un stent métallique tressé multi-couche (droite)

Nous nous intéressons à un canal 2D limité par des parois horizontales (voir figure 4), la paroi lisse est donnée par $\Gamma^\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in [0, L] \text{ et } x_2 = 1\}$, et celle rugueuse est paramétrisée par $\gamma_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = \varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})\}$, où $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ une fonction périodique. Nous appelons $\Sigma_e := \{0\} \times [\varepsilon \tilde{\gamma}(0), 1]$ l'entrée verticale du domaine et $\Sigma_s := \{L\} \times [\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{L}{\varepsilon}), 1]$ sa sortie. Les rugosités sont de taille ε aussi bien dans la direction verticale que horizontale (voir figure 5).

En général, l'écoulement d'un fluide est modélisé par les équations de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\eta \Delta u + \nabla p = 0 & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ u \times \nu = 0 & \text{sur } \{0, L\} \times [\varepsilon \tilde{\gamma}(0), 1] \\ p - \eta \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \nu = p_e & \text{sur } \Sigma_e \\ p - \eta \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Sigma_s \\ (u, p) \in H^1(\Omega_\varepsilon) \times L_0^2(\Omega_\varepsilon) & \text{avec } L_0^2(\Omega_\varepsilon) = \{p \in L_0^2(\Omega_\varepsilon), \int_{\Omega_\varepsilon} p \, dx = 0\}, \end{array} \right.$$

où u est le vecteur vitesse, p la pression, ν est la normale extérieure à $\partial\Omega_\varepsilon$ et η la viscosité dynamique du fluide. L'étude des écoulements sur les parois rugueuses constitue un sujet im-

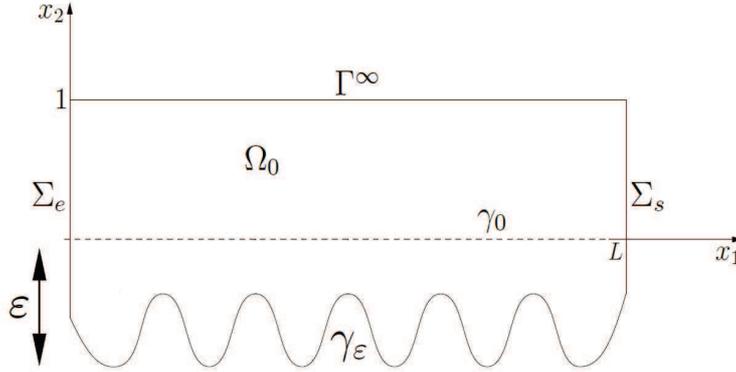


Figure 5 – Domaine rugueux Ω_ε

portant dans les pathologies du système cardio-vasculaire. En effet, nous trouvons des difficultés pour ces équations puisqu'on traite des échelles de longueur différentes, en-outre, en raison du coût élevé pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans tels domaines. De ce fait, dans ce document nous nous concentrons sur les problèmes liés uniquement à la rugosité elle-même et non sur le caractère mixte du problème de Stokes. Pour cela, on considère un cadre simplifié qui exclut des difficultés techniques liées à la non-linéarité par exemple. Nous construisons un problème de Poisson qui ne prend en compte que la composante axiale de la vitesse. Nous supposons ainsi que le gradient de la pression est constant. Nous noterons dans toute la thèse $C = -\frac{1}{\eta}\partial_{x_1}p$ (plus précisément dans les chapitres III et IV). Dans un premier temps, nous nous intéressons au problème aux limites suivant (le terme source est une constante réelle) :

$$\text{Trouver } u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que } \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = C & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ u_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases}$$

Notons qu'on a fait une hypothèse supplémentaire de périodicité sur les bords latéraux $\Sigma_e \cup \Sigma_s$, elle est nécessaire pour simplifier les calculs et éviter les phénomènes de couche limite verticale qui réduisent le degré d'approximation des correcteurs couches limites.

En terme de méthodologie, il existe plusieurs étapes pour l'approximation par les correcteurs couches limites (CCL). Nous expliquons brièvement la démarche de la construction des lois de paroi d'ordre 1 dans un domaine rugueux. Nous commençons par l'approximation macroscopique d'ordre zéro, ce qui revient à considérer un écoulement de Poiseuille dans Ω_0 « un

écoulement laminaire dans une canalisation cylindrique horizontale et le champ de vitesses est partout parallèle à l'axe horizontal ». Nous introduisons ensuite les correcteurs couches limites à l'échelle microscopique dans $Z^+ \cup P$ (voir figure 6). La frontière rugueuse γ_ε est décrite comme une répétition périodique du bord d'une cellule microscopique P^0 . Cette dernière est paramétrée comme le graphe d'une fonction bornée 2π -périodique $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ telle que

$$P^0 = \{(y_1, y_2) \in [0, 2\pi] \times [-1, 0[, y_2 = \tilde{\gamma}(y_1)\}.$$

Signalons que le correcteur couche limite d'ordre 1 est la solution du problème cellulaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta\beta_1 = 0 & \text{sur } Z^+ \cup P \\ \beta_1 = -y_2 & \text{sur } P^0 \\ \beta_1 \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{cases}$$

Enfin nous établissons l'approximation couche limite en premier ordre à l'échelle macroscopique dans Ω_ε (voir chapitre III).

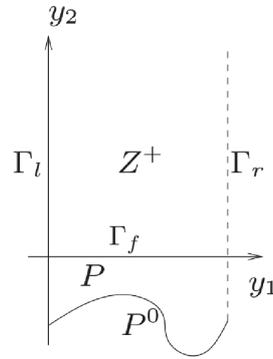


Figure 6 – Cellule de périodicité

Toute perturbation du flux des écoulements sanguins entraîne une perturbation sur les parois artérielles. Dans les articles [27, 28], les auteurs ont présenté une approche unifiée des approximations de type couche limite pour l'opérateur du Poisson dans un domaine à bord rugueux périodique. Ils ont obtenu des lois de paroi avec des ordres de convergence élevés par rapport à la taille de rugosité ε . Ils ont prouvé que les lois de paroi ne pouvaient pas satisfaire cet objectif sans inclure sur le bord des oscillations microscopiques. Ils ont remplacé les oscillations géométriques par des oscillations de la condition aux limites. Ils ont démontré une certaine stabilité en normes L^2 et H^1 de la solution approchée obtenue par correcteurs couches limites

et la solution exacte.

Remarquons que la présence de «stent» peut être considérée comme une perturbation locale d'un bord lisse d'écoulement, qui entraîne une certaine singularité si nous nous intéressons à un niveau de régularité plus élevé. C'est principalement ce phénomène biologique qui a conduit à ce sujet de thèse. Précisément dans cette thèse, nous nous intéressons à la régularité H^2 sur les problèmes de rugosité par différentes techniques.

3 Etat de l'art et principaux résultats

L'étude de la modélisation mathématique et la simulation des écoulements sur des domaines rugueux a commencé au début du dix-neuvième siècle par les travaux de Nikuradze [63]. Les études expérimentales sont destinées à l'influence de la forme des rugosités sur l'écoulement quand celles-ci sont disposées sur la paroi d'un canal. Par la suite, ces résultats ont été étendus par Prandtl et Schlichting [65] à des écoulements sur des plaques rugueuses. Ces derniers temps, plusieurs études expérimentales et plusieurs méthodes de modélisation du phénomène sont présentées (voir [38] et [43] par exemple), particulièrement dans le cadre des écoulements turbulents.

D'un point de vue analytique, la démarche couramment utilisée pour répondre à ce problème est l'utilisation de la loi de paroi. Historiquement, les lois de paroi ont premièrement été établies dans le cadre des écoulements turbulents sur des plaques lisses [33] (lois logarithmiques). Par la suite, l'application de lois de paroi a été étendue à des domaines rugueux, en modifiant certaines constantes (voir [38]). Néanmoins, encore une fois, la démarche manque de généralité, car elle ne peut être employée de façon automatique pour différentes formes de rugosité. De plus, ces lois de paroi ont l'inconvénient de conserver un coût de calcul élevé, puisqu'elles sont imposées à une distance constante de la paroi : donc, même si une partie de la couche limite est enlevée, les lois de paroi adoptent la forme de la rugosité [72].

A nos connaissances, la première tentative d'implanter une méthode plus générale pour construire des lois de paroi a été exposée par Carrau [30] et Carrau-LeTallec [31] dans le cadre d'écoulements laminaires compressibles sur des parois rugueuses périodiques. La stratégie est fondée sur une approche par homogénéisation, à partir de la décomposition du domaine en une partie locale, contenant des rugosités périodiques, et une partie globale où est imposée la loi de paroi. Toutefois, la mise en oeuvre est coûteuse et le cadre mathématique suggéré n'est pas adapté à l'analyse d'erreur.

A mes yeux, les premiers travaux proposant une analyse rigoureuse de lois de parois concernent

le problème de Poisson avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet sur tout le bord d'un domaine rugueux sont : les articles d'Y. Achdou, O. Pironneau, F. Valentin et P. Le Tallec [4, 5, 8]. En effet, à partir de l'idée originale de Carrau-LeTallec, une deuxième approche a été présentée par Pironneau et Achdou [3] pour l'équation de Laplace. À partir de cette approche, les lois de paroi sont établies, de façon analytique, dans un cadre mathématique adapté à l'analyse d'erreur. Par la suite, Achdou et al. [5] l'ont étendue au problème de Stokes à l'ordre un et deux.

D'autre part, nous mettons en évidence que W. Jäger et A. Mikelić [49, 50, 52] se sont intéressés au contact entre un fluide visqueux et un milieu poreux. Les auteurs y étudient le même type de conditions aux limites que dans les articles précédemment cités. Néanmoins, les techniques d'extension de la solution à l'ordre 0 du domaine lisse au domaine rugueux diffèrent. Malgré cela, les deux dernières stratégies mènent aux mêmes lois de parois implicites moyennées. En effet, dans [27, 28], D. Bresch et V. Milišić réunissent les deux approches, dérivent des lois de parois et établissent des estimations d'erreurs pour un modèle d'artère avec stent avec la géométrie de la Figure 5, périodique. Ils examinent le problème de Poisson particulier pour la composante axiale $u_\varepsilon \in \mathbb{R}$ de la vitesse du fluide, avec des conditions sur les bords γ_ε et Γ^∞ de type Dirichlet, ainsi que des conditions entrantes et sortantes périodiques en vitesse sur les bords latéraux Σ_e et Σ_s .

Le cas de l'écoulement d'un fluide dirigé en pression (plus concret dans le contexte de l'écoulement sanguin) est aussi traité par W. Jäger et A. Mikelić [49, 51], pour un écoulement laminaire type Poiseuille.

Pour le contexte de l'écoulement sanguin dans des artères avec stent, dans l'article de D. Bresch et al. [22], les auteurs appliquent leurs résultats précédents au cas non périodique, avec des conditions aux limites latérales de type Neumann. La présence des conditions de Neumann entrave la généralisation directe des résultats pour les conditions de Dirichlet et exige des estimations plus compliquées, dites très faibles [61]. Les estimations a priori sont perfectionnées ensuite par V. Milišić [59]. Enfin, pour des travaux portant sur une géométrie avec bifurcation, nous renvoyons à l'article de V. Milišić [60], dans lequel l'auteur traite un problème de Stokes, éternellement stationnaire et dirigé en pression.

4 Plan et démarche suivie

Nous décrivons à présent plus en détail le contenu de cette thèse. Celle-ci se compose de six chapitres. Le lecteur trouvera au début de la thèse une nomenclature qui résume les principales

notations utilisées.

Modèle d'écoulement sanguin : chapitre I. Le premier chapitre est consacré à la modélisation mathématique de l'écoulement sanguin en présence d'une endoprothèse vasculaire « stent ». Dans notre cas, le modèle retenu s'inscrit dans le cadre d'une problématique médicale. L'analyse complète de ce modèle permet notamment de justifier ou de démontrer la question d'existence et unicité, mais aussi un cadre pour présenter des justifications rigoureuses des résultats de convergence que nous avons améliorés dans cette thèse.

Étude variationnelle de la régularité H^2 : chapitre II. Le second volet traite l'analyse mathématique de la régularité H^2 de notre modèle mathématique en utilisant une formulation variationnelle. Cette première méthode développée s'articule essentiellement autour la partition de l'unité et système de carte locale, ainsi que sur des majorations et des minorations de la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle en choisissant des fonctions tests bien particulières. Cette technique s'appuie sur l'ouvrage d'Evans [40]. Nous concluons ce chapitre par une brève discussion de cette technique variationnelle et quelques réflexions pour la généralisation de cette méthode sur des problèmes aux limites dans des domaines à bord rugueux singulier.

Méthodes de construction d'approximation couche limite : chapitre III. Un troisième point, réside dans une synthèse des différentes méthodes des développements asymptotiques et de construction d'approximation couche limite que l'on peut trouver dans la littérature scientifique ainsi que dans les travaux de D. Bresch et V. Milišić [27, 28]. Dans le contexte plus particulier de notre modèle d'écoulement (avec un terme source réel), nous améliorons plusieurs résultats théoriques illustrant des estimations d'erreur de la solution exacte par rapport à une approchée. Nous détaillons la technique asymptotique mise en oeuvre tout au long de la thèse afin de l'expliciter.

Étude asymptotique de la régularité H^2 : chapitres IV et V. Dans le quatrième chapitre, pour des questions techniques nous sommes partis d'un problème simple (modèle mathématique « simplifié » avec un terme source réel) et nous avons détaillé à fond les calculs pour prendre en compte les petits obstacles. Nous démontrons en particulier que les approximations couches limites pour la norme H^2 sont singulières en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$.

Dans le cinquième chapitre nous exposons les principes généraux de calcul sur lesquels repose l'étude asymptotique de la régularité H^2 pour le problème de Laplace dans un domaine rugueux (modèle mathématique « non simplifié »). Il s'agit des mêmes calculs que dans le quatrième chapitre mais appliqués dans un contexte un peu plus général. Ce cinquième chapitre doit se lire à la lumière de l'exemple du chapitre IV. Cette étude de la régularité H^2 nous a conduit à nous plonger dans les affres et les délices des techniques asymptotiques.

Estimations d'erreur et Résultats numériques : chapitres VI. Enfin, nous proposons dans le dernier chapitre un éclairage mathématique, conforté par des simulations numériques. Nous présentons plusieurs validations numériques qui illustrent les conclusions formulées lors de l'analyse.

*L'important est de faire en sorte
que tout soit aussi simple
que possible mais pas
plus simple.*

Albert Einstein.

Chapitre I

Un modèle d'écoulement sanguin

Le modèle qui nous préoccupe provient d'une problématique médicale : nous souhaitons mettre en évidence l'influence de la pose d'un stent (aussi appelé endoprothèse ou tuteur vasculaire) dans une artère sur l'écoulement sanguin. Nous commençons donc ce chapitre par une modélisation mathématique. Un aspect majeur de cette modélisation est la présence de deux échelles spatiales dans le problème. En effet, la petite taille du stent (disons ε) constitue une échelle microscopique relativement à la taille de l'artère, c'est-à-dire le domaine «macroscopique ». Puis nous soulevons la question d'existence et d'unicité de la solution de ce modèle. Enfin, nous évoquons quelques inégalités de type Poincaré dans un domaine rugueux dont nous aurons besoin dans le reste de cette thèse.

1 Modélisation mathématique

Commençons par remarquer que la situation qui nous intéresse ici appartient à une famille de problèmes mathématiques largement étudiés : les problèmes rugueux en mécanique des fluides. La littérature concernant l'étude des effets d'une rugosité sur l'écoulement d'un fluide est extrêmement riche. Nous pouvons citer par exemple les travaux d'Y. Achdou, O. Pironneau, F. Valentin [4, 5, 8], ceux d'Y. Amirat et J. Simon [10] ou encore ceux D. Gérard-Varet, N. Masmoudi et A. Basson [19, 41]. Dans ce contexte, il apparaît un phénomène de couche limite au voisinage du bord rugueux qui modifie le comportement du fluide. Cela constitue essentiellement un enjeu numérique, car en général, les grilles de discrétisation ne sont pas assez fines pour capturer correctement les rugosités de taille ε (très petit) du domaine. Une possibilité pour surmonter cette difficulté numérique est une modification des équations au niveau continu, à savoir la dérivation de lois de parois. Il s'agit de conditions aux limites artificielles sur le bord d'un domaine fictif «lisse », à l'intérieur du domaine rugueux. Alors les effets de la rugosité seront transcrits dans de nouvelles équations, elles-mêmes posées dans un

Chapitre I. Un modèle d'écoulement sanguin

domaine géométrique lisse, facile à discrétiser. Précisons les hypothèses et notations pour la modélisation de notre domaine rugueux, l'artère stentée. Comme dit précédemment, il convient d'en décrire l'aspect double échelle, grâce au paramètre $\varepsilon > 0$, taille caractéristique de la rugosité (tuteur vasculaire). Nous choisissons, pour simplifier, de ne pas prendre en compte l'élasticité des parois des artères et de considérer des géométries $2D$, qui peuvent cependant être vues comme des coupes longitudinales d'artères $3D$ (il est raisonnable de considérer un écoulement à symétrie cylindrique). La variable x_1 désigne la direction horizontale, x_2 la direction verticale. Pour cela, nous considérons dans toute la suite le problème aux limites suivant :

$$(E) : \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = g & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ u_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s, \end{cases}$$

où Ω_ε est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 donné dans la figure ci-dessous et $g \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. La paroi lisse est donnée par $\Gamma^\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in [0, L] \text{ et } x_2 = 1\}$, et celle rugueuse est paramétrée par $\gamma_\varepsilon = \{x_1 \in [0, L]; x_2 = \varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})\}$, où $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ périodique de classe C^∞ (au moins de classe C^2). On appelle $\Sigma_e := \{0\} \times [\varepsilon \tilde{\gamma}(0), 1]$ l'entrée verticale du domaine Ω_ε , et $\Sigma_s := \{L\} \times [\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{L}{\varepsilon}), 1]$ sa sortie.

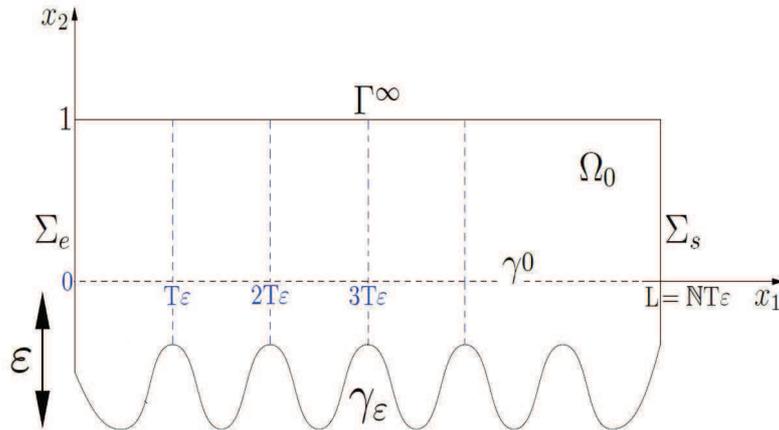


Figure I.1 – Domaine rugueux Ω_ε

Nous remarquons que le tuteur vasculaire (stent) est modélisé par le graphe d'une fonction périodique ou quasi-périodique, ou encore par une succession périodique de petites billes circulaires de taille ε , cela constitue le bord rugueux γ_ε du domaine.

2 Résultats préliminaires

2.1 Formulation variationnelle sur Ω_ε

Soit $\mathcal{H}_{\text{per},0}$ le sous espace fermé de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u \nabla v + u v) dy, \quad (\text{I.1})$$

et de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ tel que

$$\mathcal{H}_{\text{per},0} = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon); v = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon, v \text{ est } x_1\text{-périodique sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s\}. \quad (\text{I.2})$$

L'espace $\mathcal{H}_{\text{per},0}$ est un espace de Hilbert.

Le résultat de la proposition suivante est la formulation variationnelle de (E) :

Proposition 1. *La fonction u est une solution du problème aux limites (E) si et seulement si u appartient à $\mathcal{H}_{\text{per},0}$ et vérifie l'égalité*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) v(x) dx \quad \text{pour toute fonction } v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}. \quad (\text{I.3})$$

Notation 1. *En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle (I.3) sous la forme suivante :*

$$a_\varepsilon(u, v) = l(v) \quad \text{pour toute fonction } u, v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}, \quad (\text{I.4})$$

où

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u(x) \nabla v(x) dx, \quad \text{et} \quad l(v) = \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) v(x) dx.$$

Preuve. Soit u une solution du problème aux limites (E). Alors $u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}$. On multiplie l'équation du système (E) par $v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}$ et on utilise la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) d\sigma,$$

où n est la normale sortante à Ω_ε . On pose $I_b = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) d\sigma$.

Nous avons

$$I_b = - \int_{\Sigma_e} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) v(x) dx_2 + \int_{\Sigma_s} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) v(x) dx_2 + \int_{\Gamma^\infty} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) v(x) dx_1 + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) d\sigma.$$

Chapitre I. Un modèle d'écoulement sanguin

Or $v = 0$ sur $\Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon$ et car $v|_{\Sigma_\varepsilon} = v|_{\Sigma_s}$ donc $I_b = 0$.

Par conséquent, on obtient

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

Réciproquement pour vérifier que toute solution faible est une solution de l'edp au sens des distributions, nous considérons une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$. De (I.3), nous déduisons que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) \varphi(x) dx \quad \text{pour toute fonction } \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon). \quad (\text{I.5})$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, nous concluons

$$-\Delta u = g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon).$$

Par ailleurs, comme $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$, nous retrouvons la condition aux limites $u = 0$ sur $\Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon$, u est x_1 -périodique sur $\Sigma_\varepsilon \cup \Sigma_s$, c'est-à-dire que u est solution du problème aux limites (E). \square

Nous montrons maintenant une inégalité de type Poincaré. C'est un outil fondamental pour établir l'existence et l'unicité de la solution de notre problème dans un domaine rugueux.

Proposition 2 (Inégalité de Poincaré). *Soit le domaine Ω_ε définie dans la Figure I.1. Alors, il existe une constante $C_P(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)$ strictement positive telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_P(\varepsilon) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}.$$

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}$. Nous pouvons alors écrire que :

$$u(x_1, x_2) - u\left(x_1, \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right) = \int_{\varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) dt,$$

comme $u|_{\gamma_\varepsilon} = 0$ alors

$$|u(x_1, x_2)| \leq \int_{\varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right| dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|u(x_1, x_2)| \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons

$$|u(x_1, x_2)|^2 \leq (1 + \varepsilon) \left(\int_{\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt \right).$$

Nous intégrons sur Ω_ε nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 &\leq (1 + \varepsilon) \int_{\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^1 \int_0^L \int_{\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt dx_1 dx_2 \\ &\leq (1 + \varepsilon)^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt dx_1. \end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (1 + \varepsilon) \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt dx_1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci termine la preuve. □

2.2 Existence et unicité

Dans le lemme suivant nous montrons la coercivité de la forme $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$, qu'est un argument essentiel pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (I.4).

Lemme 1 (Coercivité). *La forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $\mathcal{H}_{\text{per},0}$. Il existe $\alpha_\varepsilon := \frac{1}{4(1+\varepsilon)^2+1} > 0$ tel que*

$$a_\varepsilon(u, u) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \alpha_\varepsilon \|u\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}}^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}. \quad (\text{I.6})$$

Preuve. Soit $u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u, u) &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u(x)|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &= \theta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + (1 - \theta) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2, \quad \forall \theta \in]0, 1[, \\ &\geq \theta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{(1 - \theta)}{4(1 + \varepsilon)^2} \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2, \quad \forall \theta \in]0, 1[, \\ &\geq \frac{1}{4(1 + \varepsilon)^2 + 1} \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) = \frac{1}{4(1 + \varepsilon)^2 + 1} \|u\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}}^2. \end{aligned}$$

Ce qui fournit le résultat. □

Chapitre I. Un modèle d'écoulement sanguin

Remarque 1. Nous avons plus, pour tout $\varepsilon_0 > 0, \exists \alpha(\varepsilon_0) > 0$ tel que

$$a_\varepsilon(u, u) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \alpha(\varepsilon_0) \|u\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}}^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}, \quad (\text{I.7})$$

uniformément par rapport à $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Théorème 1. Le problème variationnel (I.4) admet une unique solution dans $\mathcal{H}_{\text{per},0}$. De plus nous avons la majoration suivante

$$\|u\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}} \leq \left(4(1 + \varepsilon)^2 + 1\right) \|g\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}. \quad (\text{I.8})$$

Notons u_ε la solution du problème (E).

Démonstration. Nous appliquons le théorème de Lax-Milgram (voir [29]). Vérifions les hypothèses de ce théorème

1. $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{H}_{\text{per},0}$, en effet $u \rightarrow a_\varepsilon(u, v)$ est une forme linéaire de $\mathcal{H}_{\text{per},0}$ dans \mathbb{R} pour tout $v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}$, et a est symétrique.
2. $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est continue, en effet (par Cauchy-Schwarz) :

$$|a_\varepsilon(u, v)| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \right| \leq \|u\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}} \|v\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}} \quad \text{pour tout } v, u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}.$$

3. $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $\mathcal{H}_{\text{per},0}$ (voir lemme 1, (I.19)).
4. $l(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}_{\text{per},0}$, en effet $v \rightarrow l(v)$ est linéaire de $\mathcal{H}_{\text{per},0}$ dans \mathbb{R} et il existe $C = \|g\|_{L^2} > 0$ tel que

$$|l(v)| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) v(x) dx \right| \leq \|g\|_{L^2} \|v\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}}.$$

Par le théorème de Lax-Milgram, nous concluons que le problème variationnel (I.4) admet une unique solution dans $\mathcal{H}_{\text{per},0}$. De plus nous avons

$$\alpha_\varepsilon \|u\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}}^2 \leq |a_\varepsilon(u, u)| = |l(u)| \leq \|g\|_{L^2} \|u\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}} \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}.$$

Par suite nous montrons finalement que $\|u\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}} \leq \frac{1}{\alpha_\varepsilon} \|g\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$, avec $\alpha_\varepsilon = \frac{1}{(4(1 + \varepsilon)^2 + 1)}$.

Ceci achève la démonstration. \square

2.3 Formulation variationnelle sur Ω_0 après redressement global

Nous considérons la formulation variationnelle du problème aux limites (E) :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) \varphi(x) dx \quad \text{pour toute fonction } \varphi \in \mathcal{H}_{\text{per},0}. \quad (\text{I.9})$$

Nous allons effectuer ici un changement de variable qui va permettre de transformer Ω_ε en Ω_0 , en transformant γ_ε en γ^0 (voir Figure I.2). Pour cela, nous considérons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon : \quad \Omega_\varepsilon &\longrightarrow \Omega_0 \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow \left(x_1, \frac{x_2 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}{1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)} \right), \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

tel que

$$\nabla \mathcal{L}_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(x_2 - 1) \tilde{\gamma}'\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}{\left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right)^2} & \frac{1}{1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det \nabla \mathcal{L}_\varepsilon(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}.$$

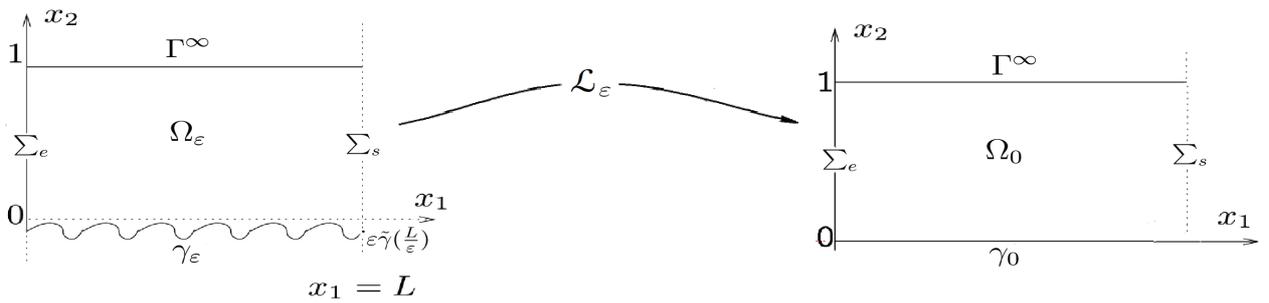


Figure I.2 – Redressement du domaine rugueux Ω_ε vers le domaine lisse Ω_0

\mathcal{L}_ε est un C^2 -difféomorphisme. Le C^2 -difféomorphisme réciproque est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon^{-1} : \quad \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_\varepsilon \\ (X_1, X_2) &\longrightarrow \left(X_1, X_2 + \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right) (1 - X_2) \right) \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Chapitre I. Un modèle d'écoulement sanguin

Nous posons $v_\varepsilon(X) = u_\varepsilon \circ \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X)$ et $\psi(X) = \varphi \circ \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X)$. Nous avons :

$$\nabla_X v_\varepsilon(X) = \nabla \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X) \cdot \nabla_x u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & (1 - X_2) \tilde{\gamma}'\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right) \\ 0 & 1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} \nabla_x u_\varepsilon. \quad (\text{I.12})$$

Donc

$$\nabla_x u_\varepsilon(x) = (\nabla \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X))^{-1} \cdot \nabla_X v_\varepsilon(X). \quad (\text{I.13})$$

L'équation (I.9) devient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} [(\nabla \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X))^{-1} \nabla_X v_\varepsilon(X)] \cdot [(\nabla \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X))^{-1} \nabla_X \psi(X)] \left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) dX \\ &= \int_{\Omega_0} (g \circ \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X)) \psi(X) \left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) dX, \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\int_{\Omega_0} (A_\varepsilon(X) \nabla_X v_\varepsilon(X)) \cdot \nabla_X \psi(X) dX = \int_{\Omega_0} (g \circ \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X)) \psi(X) \left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) dX, \quad (\text{I.15})$$

où

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(X) &= \left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) (\nabla \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X))^{-1T} (\nabla \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) & -(1 - X_2) \tilde{\gamma}'\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right) \\ -(1 - X_2) \tilde{\gamma}'\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right) & \frac{1 + (1 - X_2)^2 \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right)^2}{1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

L'équation (I.15) est la formulation variationnelle du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } v_\varepsilon \in H^1(\Omega_0) \text{ tel que} & \\ -\text{div}(A_\varepsilon(X) \nabla v_\varepsilon(X)) = (g \circ \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X)) \left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) & \text{sur } \Omega_0 \\ v_\varepsilon(X) = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma^0 \\ u_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{I.17})$$

Pour simplifier la présentation de la formulation variationnelle (I.15), notons $\tilde{a}_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ la forme

bilinéaire et $\tilde{l}_\varepsilon(\cdot)$ la forme linéaire telles que :

$$\begin{cases} \tilde{a}_\varepsilon(v_\varepsilon, \psi) = \int_{\Omega_0} (A_\varepsilon(X) \nabla_X v_\varepsilon(X)) \cdot \nabla_X \psi(X) dX \\ \tilde{l}_\varepsilon(\psi) = \int_{\Omega_0} (g \circ \mathcal{L}_\varepsilon^{-1}(X)) \psi(X) \left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) dX. \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Soit $\tilde{\gamma}$ est une fonction de $C^1_{per}([0, 1])$. Nous notons $\sup_{X_1 \in [0, L]} \left(\tilde{\gamma} \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) = -\alpha$, $\inf_{X_1 \in [0, L]} \left(\tilde{\gamma} \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) = -\delta$ et $\sup_{X_1 \in [0, L]} \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) = \tau$.

Hypothèses : Nous supposons que $\alpha > 0$ et la constante $k = \min \left(1 - \tau, \frac{1}{1 + \delta} - \tau\right) > 0$.

Lemme 2 (Coercivité dans le domaine lisse Ω_0). *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$ la forme bilinéaire $\tilde{a}_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $\mathcal{H}_{per,0}(\Omega_0)$ et vérifie*

$$\tilde{a}_\varepsilon(v_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq k \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)}^2, \quad \forall v_\varepsilon \in \mathcal{H}_{per,0}(\Omega_0). \quad (\text{I.19})$$

Preuve. Soient $X \in \Omega_0$ et le vecteur $U^T = (U_1, U_2) \in \mathbb{R}^2$. Par un simple calcul matriciel nous avons

$$U^T A_\varepsilon(X) U = \left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) U_1^2 - \left(2(1 - X_2) \tilde{\gamma}' \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) U_1 U_2 + \left(\frac{1 + (1 - X_2)^2 (\tilde{\gamma}' \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right))^2}{1 - \varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)}\right) U_2^2.$$

Avec les notations de l'énoncé du lemme 2, nous constatons que

$$\left(1 - \varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) \geq 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1 + (1 - X_2)^2 (\tilde{\gamma}' \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right))^2}{1 - \varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)}\right) \geq \frac{1}{1 + \delta}.$$

D'autre part, nous utilisons le fait que pour tous réels a et b tels que $2ab \leq a^2 + b^2$, il vient

$$\left(2(1 - X_2) \tilde{\gamma}' \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) U_1 U_2 \leq 2 \sup_{X_1 \in [0, L]} \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) U_1 U_2 \leq \tau (U_1^2 + U_2^2).$$

Bien entendu, ce qui permet de déduire que

$$-\left(2(1 - X_2) \tilde{\gamma}' \left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right)\right) U_1 U_2 \geq -\tau (U_1^2 + U_2^2).$$

En regroupant toutes les inégalités obtenues ci-dessus, nous obtenons

$$U^T A_\varepsilon(X) U \geq (1 - \tau) U_1^2 + \left(\frac{1}{1 + \delta} - \tau\right) U_2^2.$$

Chapitre I. Un modèle d'écoulement sanguin

En posant $k = \min\left(1 - \tau, \frac{1}{1+\delta} - \tau\right) > 0$ d'après les hypothèses de l'énoncé, nous pouvons écrire :

$$\tilde{a}_\varepsilon(v_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq k \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

La preuve est complète. \square

Remarque 2. *Nous mettons l'accent sur le fait que nous pouvons montrer autrement l'existence et l'unicité de notre modèle mathématique après redressement. Signalons que le domaine Ω_0 est régulier indépendant de ε . En appliquant le théorème énoncé dans [35, page 81, Theorem 4.26] nous montrons que le problème (I.17) admet une unique solution dans*

$$\mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0); v = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty \cup \gamma^0, v \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s\}.$$

Il nous faut maintenant montrer quelques résultats dont nous aurons besoin par la suite.

3 Inégalité de type Poincaré dans la couche rugueuse

L'inégalité ci-dessous, dite «inégalité de type Poincaré dans la couche rugueuse » joue un rôle important dans le reste de la thèse pour l'établissements des estimations d'erreurs.

Proposition 3 (Inégalité de Poincaré dans la couche rugueuse). *Soient le domaine rugueux Ω_ε défini dans la Figure I.1 et le domaine lisse Ω_0 défini dans la Figure I.2. Alors nous avons l'inégalité suivante*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \leq \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)}, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}. \quad (\text{I.20})$$

Preuve. Etant donné $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}$, on peut alors écrire que :

$$u(x_1, x_2) - u\left(x_1, \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right) = \int_{\varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) dt.$$

En tenant compte que $u|_{\gamma_\varepsilon} = 0$ alors

$$|u(x_1, x_2)| \leq \int_{\varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}^0 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right| dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|u(x_1, x_2)| \leq \sqrt{\varepsilon} \left(\int_{\varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}^0 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

I.4 Inégalité de type trace dans un domaine rugueux

Donc

$$|u(x_1, x_2)|^2 \leq \varepsilon \int_{\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt.$$

Nous intégrons sur $\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0$, il vient

$$\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} |u(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \varepsilon \int_{\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt dx_1 dx_2 \leq \varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt dx_1.$$

Bien entendu, si nous extrayons la racine carrée, alors

$$\left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} |u(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt dx_1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci conclut la preuve. □

4 Inégalité de type trace dans un domaine rugueux

Nous terminons ce chapitre par présenter le concept «Inégalité de type trace dans un domaine rugueux » dans la proposition suivante :

Proposition 4. *Soient le domaine rugueux Ω_ε défini dans la Figure I.1 et le domaine lisse Ω_0 défini dans la Figure I.2 limité en bas par l'interface $\gamma^0 = \{x_1 \in [0, L]; x_2 = 0\}$. Alors nous avons l'inégalité suivante*

$$\|u\|_{L^2(\gamma^0)} \leq \sqrt{\varepsilon} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)}, \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}. \quad (\text{I.21})$$

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{H}_{\text{per},0}$. Par une simple soustraction nous avons

$$u(x_1, 0) - u\left(x_1, \varepsilon\tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right) = \int_{\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) dt.$$

Or la solution u est nulle sur la paroi rugueuse γ_ε , d'où

$$|u(x_1, 0)| \leq \int_{\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right| dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

Chapitre I. Un modèle d'écoulement sanguin

$$|u(x_1, 0)|^2 \leq \varepsilon \int_{\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt.$$

Nous intégrons sur γ^0 , il suit

$$\int_0^L |u(x_1, 0)|^2 dx_1 \leq \varepsilon \int_0^L \int_{\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right|^2 dt dx_1.$$

Nous extrayons la racine carrée, il vient

$$\left(\int_0^L |u(x_1, 0)|^2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\varepsilon} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)}.$$

Ceci achève la preuve. □

Tout art et toute recherche, de même que toute action et toute délibération réfléchie, tendent, semble-t-il, vers quelque bien, toutefois il paraît bien qu'il y a une différence entre les fins

ARISTOTE
"Ethique à Nicomaque"

Chapitre II

Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

1 Introduction

Ce deuxième chapitre est consacré à l'analyse mathématique de la régularité H^2 de notre modèle mathématique présenté dans le premier chapitre grâce à sa la formulation variationnelle. Cette première méthode repose essentiellement sur la partition de l'unité et système de carte locale ainsi que sur des majorations et des minoration de la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle en choisissant des fonctions tests bien particulières. Elle fait l'objet d'une première tentative pour l'étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux, en particulier par la compréhension de l'influence de la paroi rugueuse sur la régularité. Cette dépendance en ε joue un rôle très important sur la singularité de la solution en norme H^2 . Du point de vue de l'étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux, les choses semblent sous contrôle, mais en fait nous disposons de très peu de résultats pleinement satisfaisants.

Nous rappelons le problème aux limites introduit dans le chapitre I :

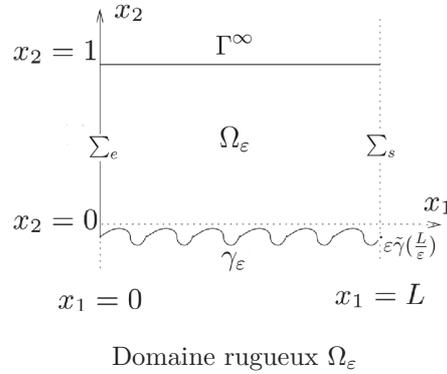
$$(E) : \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = g & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ u_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \cup \Sigma_s, \end{cases}$$

où Ω_ε est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 donné dans la figure ci-dessous et $g \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. La paroi lisse est donnée par $\Gamma^\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in [0, L] \text{ et } x_2 = 1\}$, et celle rugueuse est paramétrisée par $\gamma_\varepsilon = \{x_1 \in [0, L]; x_2 = \varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})\}$, où $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ est une fonction périodique. On appelle $\Sigma_\varepsilon := \{0\} \times [\varepsilon \tilde{\gamma}(0), 1]$ l'entrée verticale du domaine Ω_ε , et $\Sigma_s := \{L\} \times [\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{L}{\varepsilon}), 1]$ sa sortie.

Dans ce chapitre, notons qu'à fin d'éviter toute difficulté technique lors de redressement de la couche rugueuse dans le cas d'un bord rugueux lipschitzien, nous supposons que la fonction

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ est **régulière** de classe C^∞ (au moins de classe C^2).



Grâce à l'inégalité [Chapitre I, Théorème 1, (I.8)] nous avons une certaine stabilité en $\mathcal{O}(1)$ pour la norme H^1 de la solution du problème aux limites (E). Remarquons que la présence de «stent » peut être considérée comme une perturbation locale d'un bord lisse de l'écoulement, qui entraîne une certaine singularité si on s'intéresse à un niveau de régularité plus élevé. Le résultat principal de ce chapitre est le Théorème suivant :

Théorème 2. *La solution u_ε du problème aux limites (E) est dans $H^2(\Omega_\varepsilon)$. De plus, il existe une constante C strictement positive telle que nous avons la majoration suivante :*

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

L'idée directrice pour prouver que la norme H^2 est majorée en $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$ est l'utilisation de la technique variationnelle (Voir Evans [40]). Nous suivrons le plan suivant pour la discussion de cette technique :

2 Partition de l'unité et Système de carte locale

Le domaine Ω_ε est un ouvert borné régulier dont la frontière $\partial\Omega_\varepsilon$ est compacte, donc on peut utiliser un argument de «carte locale » et il existe un recouvrement fini de Ω_ε par des ouverts $(V_p)_{0 \leq p \leq N_0}$ (avec N_0 un nombre fixé indépendant de ε). On introduit alors une partition de l'unité associée à ce recouvrement, c'est à dire des fonctions $\{\varphi_p\}_{p=0}^{N_0}$ de $C_c^\infty(V_p, [0, 1])$ telles que

$$\varphi_p \in C_c^\infty(V_p), \quad 0 \leq \varphi_p \leq 1, \quad \sum_{p=0}^{N_0} \varphi_p = 1 \quad \text{dans } \overline{\Omega_\varepsilon}.$$

Remarque 3. *L'existence d'une telle partition de l'unité est classique, (voir [21, Théorème 3.2.9]).*

Dans toute la suite, nous choisissons

1. $V_{\text{int}} \subset\subset \Omega_\varepsilon$. V_{int} est un ouvert strictement inclus dans Ω_ε pour traiter la régularité H^2 à l'intérieur de Ω_ε «loin du bord»).
2. $V_\infty = D(x_\infty, \frac{L^2+1}{4})$ le disque de centre x_∞ de coordonnée $(\frac{L}{2}, \frac{L^2+3}{4})$ et de rayon $\frac{L^2+1}{4}$ pour traiter la régularité H^2 au voisinage du bord Γ^∞ .
3. $V_e = D(x_e, r_e)$ le disque de centre $x_e \in \Sigma_e$ et de rayon $r_e > 0$ pour traiter la régularité H^2 au voisinage du bord Σ_e .
4. $V_s = D(x_s, r_s)$ le disque de centre $x_s \in \Sigma_s$ et de rayon $r_s > 0$ pour traiter la régularité H^2 au voisinage du bord Σ_s .
5. $\gamma_\varepsilon \subset V_{\text{rug}} = D(x_{\text{rug}}, R_{\text{rug}})$ le disque de centre x_{rug} de coordonnée $(\frac{L}{2}, \varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{L}{2\varepsilon}) + \frac{1-L^2}{4})$ et de rayon $R_{\text{rug}} = \frac{L^2+1}{4}$ pour traiter la régularité H^2 près du bord rugueux γ_ε .

Par suite nous pouvons écrire la solution u_ε du problème aux limites (E) sous la forme suivante :

$$u_\varepsilon = \varphi_{\text{int}} u_\varepsilon + \varphi_s u_\varepsilon + \varphi_e u_\varepsilon + \varphi_\infty u_\varepsilon + \varphi_{\text{rug}} u_\varepsilon := u_{\text{int}} + u_s + u_e + u_\infty + u_{\text{rug}}^\varepsilon, \quad (\text{II.1})$$

avec $\varphi_{\text{int}} \in C_c^\infty(V_{\text{int}}, [0, 1])$, $\varphi_\infty \in C_c^\infty(V_\infty, [0, 1])$, $\varphi_e \in C_c^\infty(V_e, [0, 1])$, $\varphi_s \in C_c^\infty(V_s, [0, 1])$, $\varphi_{\text{rug}} \in C_c^\infty(V_{\text{rug}}, [0, 1])$ et vérifiant : $\varphi_{\text{int}} + \varphi_e + \varphi_s + \varphi_\infty + \varphi_{\text{rug}} = 1$ dans $\overline{\Omega_\varepsilon}$.

3 Régularité H^2 à l'intérieur de Ω_ε

Nous consacrons cette section à l'étude de la régularité H^2 à l'intérieur du domaine Ω_ε . Pour cela, rappelons tout d'abord un résultat de régularité intérieure énoncé dans [40, EVANS].

Théorème 3 ([40, p.309, Theorem 1]). *Soit U un ouvert borné de \mathbb{R}^n . On considère L l'opérateur aux dérivées partielles sous la forme divergence défini comme suit*

$$L u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

avec $a_{ij} \in C^1(U)$, $b^i, c \in L^\infty(U)$ ($i, j = 1, \dots, n$) et $\forall x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n$ il existe $\theta > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2.$$

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

Nous supposons que $u \in H^1(U)$ est une solution faible du problème elliptique

$$Lu = f \quad \text{dans } U \quad \text{avec } f \in L^2(U).$$

Alors $u \in H_{loc}^2(U)$. De plus pour tout ouvert $V \subset\subset U$ nous avons la majoration suivante :

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right),$$

avec C une constante strictement positive qui dépend des domaines V et U , ainsi que des coefficients de l'opérateur L .

Appliquons maintenant ce théorème à notre cas. Prenons $n = 2$:

Soit $V_{\text{int}} \subset\subset \Omega_\varepsilon$ un ouvert strictement inclus dans Ω_ε , voir figure ci-dessous. Nous vérifions

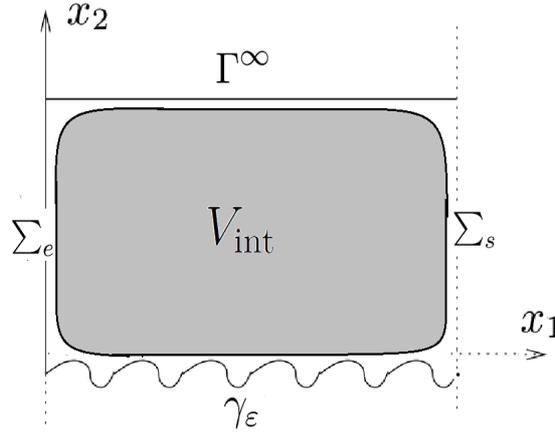


Figure II.1 – Domaine intérieur $V_{\text{int}} \subset\subset \Omega_\varepsilon$

aisément que $u_{\text{int}} = \varphi_{\text{int}} u_\varepsilon$ est une solution faible sur Ω_ε de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} -\Delta u_{\text{int}} &= -\Delta(\varphi_{\text{int}} u_\varepsilon) = -\varphi_{\text{int}}(\Delta u_\varepsilon) - 2\nabla\varphi_{\text{int}} \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta\varphi_{\text{int}})u_\varepsilon \\ &= \varphi_{\text{int}} g - 2\nabla\varphi_{\text{int}} \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta\varphi_{\text{int}})u_\varepsilon := G_{\text{int}}. \end{aligned}$$

On a $G_{\text{int}} \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. En effet $\|G_{\text{int}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left[\|g\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right] < +\infty$, pour tout $g \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $u_\varepsilon \in \mathcal{H}_{\text{per},0}$, (voir (I.2)).

On en déduit grâce au théorème 3, qu'il existe une constante C strictement positive telle que $u_{\text{int}} \in H_{loc}^2(\Omega_\varepsilon)$ et on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|u_{\text{int}}\|_{H^2(V_{\text{int}})} &= \|\varphi_{\text{int}} u_\varepsilon\|_{H^2(V_{\text{int}})} \leq C \left(\|G_{\text{int}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right) \\ &\leq C \left(\|g\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right) \leq C \left(\|g\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

4 Régularité H^2 au voisinage des bords lisses $\Gamma^\infty \cup \Sigma_e \cup \Sigma_s$

Nous présentons de même que dans la section précédente un résultat démontré dans [40, EVANS] pour l'étude de la régularité H^2 des opérateurs elliptiques dans un domaine assez régulier.

Théorème 4 ([40, p.317, Theorem 4]). *Soit U un ouvert borné de \mathbb{R}^n tel que ∂U de C^2 . On considère L l'opérateur aux dérivées partielles sous la forme divergence défini comme suit*

$$L u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

avec $a_{ij} \in C^1(\bar{U})$, $b^i, c \in L^\infty(U)$ ($i, j = 1, \dots, n$) et $\forall x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n$ il existe $\theta > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2.$$

Nous supposons $u \in H_0^1(U)$ une solution faible du problème elliptique

$$\begin{cases} L u = f & \text{dans } U \text{ avec } f \in L^2(U), \\ u = 0 & \text{sur } \partial U. \end{cases}$$

Alors $u \in H^2(U)$, et nous avons la majoration suivante

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right),$$

avec C une constante strictement positive dépendant du domaine U et des coefficients de l'opérateur L .

Remarque 4. Avant d'appliquer le Théorème de la régularité H^2 des opérateurs elliptiques dans un domaine assez régulier nous allons tout d'abord étudier plus en détail la forme géométrique des cartes locales au voisinage des bords lisses $\Gamma^\infty \cup \Sigma_e \cup \Sigma_s$. Nous remarquons dans chacun des domaines D_∞ , D_e et D_s (illustrés respectivement dans les figures II.3, II.4 et II.5) sont « à bord régulier » sauf en deux points anguleux d'ouvertures $\omega < \frac{\pi}{2}$. Pour pouvoir rentrer dans le cadre des difficultés techniques en ces points anguleux, nous choisissons d'illustrer sur un exemple particulier le fait que la régularité de la solution d'un problème de Dirichlet peut être limitée par la régularité de l'ouvert sur lequel est posée l'équation aux dérivées partielles. Considérons l'ouvert Ω représenté dans la figure II.2 et défini en coordonnées polaires par

$$\Omega = \{(r, \theta) / r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \omega\}.$$

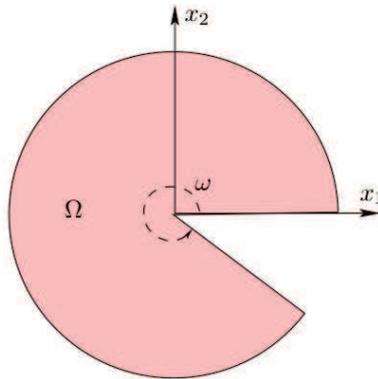


Figure II.2 – Ω est une portion de disque d'angle $\omega \in]0, 2\pi[$

Sur le bord $\partial\Omega$ on se donne la fonction g définie en coordonnées polaires (r, θ) par $g(\theta) = \sin \frac{\pi\theta}{\omega}$. Cependant, calculant explicitement la solution du problème de Dirichlet non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \Omega \\ u = g & \partial\Omega, \end{cases}$$

on cherche une solution sous la forme d'un développement en série de Fourier en θ

$$u(r, \theta) = \sum_k a_k(r) \sin \frac{k\pi\theta}{\omega}.$$

En remplaçant le développement en série de Fourier de u dans l'expression du laplacien en coordonnées polaires et en identifiant terme à terme on obtient l'équation :

$$\frac{1}{r} (r a_k')' - \left(\frac{k\pi}{\omega}\right)^2 \frac{a_k}{r^2} = 0,$$

D'autre part, cette dernière équation différentielle admet des solutions particulières en r^β qui doivent vérifier

$$\frac{1}{r} (r \beta r^{\beta-1})' - \frac{k^2 \pi^2}{\omega^2} r^{\beta-2} = 0,$$

ou encore

$$\beta^2 r^{\beta-2} - \frac{k^2 \pi^2}{\omega^2} r^{\beta-2} = 0.$$

Il faut donc que

$$\beta = \pm \frac{k\pi}{\omega}.$$

Nous obtenons la solution nulle en 0 de l'équation différentielle en prenant le signe positif

II.4 Régularité H^2 au voisinage des bords lisses $\Gamma^\infty \cup \Sigma_e \cup \Sigma_s$

(car $u \in L^2(\Omega)$), il vient donc $a_k(r) = a_k r^{\beta k}$, avec $\beta k = \frac{k\pi}{\omega}$. Finalement, nous obtenons l'expression :

$$u(r, \theta) = \sum_k a_k r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\omega}\right) \quad \forall r \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \omega.$$

Nous montrons alors que si $\omega > \pi$ nous avons $u \notin H^2(\Omega)$. Il suffit pour cela de vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \notin L^2(\Omega)$. Nous ferons également référence régulièrement aux travaux de Dauge et al. [36]. De ce fait, en vertu du calcul ci-dessus nous pouvons justifier la régularité H^2 aux points anguleux d'ouvertures $\omega < \pi$ dans les cartes locales D_∞ , D_e et D_s .

Appliquons à présent ce théorème à notre opérateur associé au problème aux limites (E).

Au voisinage du bord Γ^∞

On sait que le bord lisse ∂D_∞ est de classe C^2 (sauf en deux points anguleux d'ouvertures $\omega < \frac{\pi}{2}$). On définit le point x_∞ de coordonnées $(\frac{L}{2}, \frac{L^2+3}{4})$.

On considère $D_\infty = \Omega_\varepsilon \cap D(x_\infty, \frac{L^2+1}{4})$ l'intersection entre le domaine Ω_ε et le disque de centre x_∞ et de rayon $\frac{L^2+1}{4}$. On vérifie aisément que $u_\infty = \varphi_\infty u_\varepsilon \in H_0^1(D_\infty)$ et que u_∞ est solution

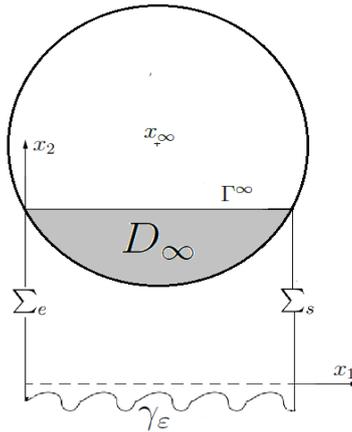


Figure II.3 – Carte locale au voisinage du bord Γ^∞

faible sur D_∞ de l'équation $-\Delta u_\infty = G_\infty$ où G_∞ est donnée par

$$G_\infty = -\varphi_\infty (\Delta u_\varepsilon) - 2\nabla\varphi_\infty \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta\varphi_\infty)u_\varepsilon = \varphi_\infty g - 2\nabla\varphi_\infty \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta\varphi_\infty)u_\varepsilon,$$

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

et telle que $G_\infty \in L^2(D_\infty)$. On déduit grâce au Théorème 4, qu'il existe une constante C strictement positive telle que $u_\infty \in H^2(D_\infty)$ et on a la majoration suivante

$$\begin{aligned} \|u_\infty\|_{H^2(D_\infty)} = \|\varphi_\infty u_\infty\|_{H^2(D_\infty)} &\leq C \left[\|G_\infty\|_{L^2(D_\infty)} + \|u_\infty\|_{L^2(D_\infty)} \right] \\ &\leq C \left[\|g\|_{L^2(D_\infty)} + \|\nabla u_\infty\|_{L^2(D_\infty)} + \|u_\infty\|_{L^2(D_\infty)} \right] \\ &:= C \left[\|g\|_{L^2(D_\infty)} + \|u_\infty\|_{H^1(D_\infty)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Au voisinage du bord Σ_e

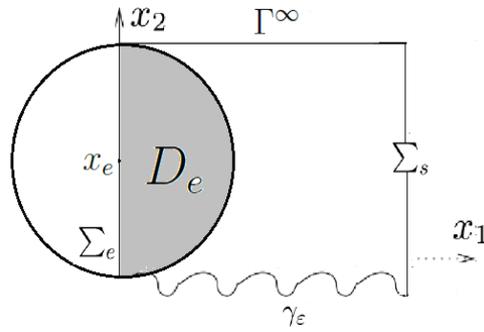


Figure II.4 – Carte locale au voisinage du bord Σ_e

Soit $x_e \in \Sigma_e$. Nous considérons $D_e = \Omega_\varepsilon \cap D_e(x_e, r_e)$ l'intersection entre le domaine Ω_ε et le disque de centre x_e et de rayon $r_e > 0$. Il est trivial que $u_e = \varphi_e u_\varepsilon \in H_0^1(D_e)$ et que u_e est solution faible sur D_e de l'équation :

$$-\Delta u_e = -\varphi_e (\Delta u_\varepsilon) - 2\nabla \varphi_e \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta \varphi_e) u_\varepsilon = \varphi_e g - 2\nabla \varphi_e \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta \varphi_e) u_\varepsilon := G_e, \quad (\text{II.4})$$

avec $G_e \in L^2(D_e)$. Comme ∂D_e est de classe C^2 (sauf en deux points anguleux d'ouvertures $\omega < \frac{\pi}{2}$), donc grâce au Théorème 4 il existe une constante C strictement positive et indépendante de ε telle que $u_e \in H^2(D_e)$ ainsi que nous avons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|u_e\|_{H^2(D_e)} = \|\varphi_e u_\varepsilon\|_{H^2(D_e)} &\leq C \left[\|G_e\|_{L^2(D_e)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(D_e)} \right] \\ &\leq C \left[\|g\|_{L^2(D_e)} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(D_e)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(D_e)} \right] \\ &:= C \left[\|g\|_{L^2(D_e)} + \|u_\varepsilon\|_{H^1(D_e)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Au voisinage du bord Σ_s

Pour finir nous considérons $x_s \in \Sigma_s$ et nous désignons par $D_s = \Omega_\varepsilon \cap D_s(x_s, r_s)$ l'intersection

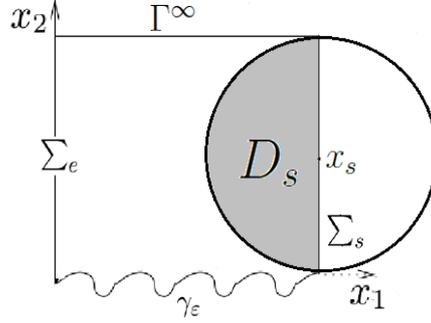


Figure II.5 – Carte locale au voisinage du bord Σ_s

entre le domaine Ω_ε et le disque de centre x_s et de rayon $r_s > 0$. Il est immédiat que $u_s = \varphi_s u_\varepsilon \in H_0^1(D_s)$ et que u_s est solution faible sur D_s de l'équation :

$$-\Delta u_s = -\varphi_s (\Delta u_\varepsilon) - 2\nabla \varphi_s \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta \varphi_s) u_\varepsilon = \varphi_s g - 2\nabla \varphi_s \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta \varphi_s) u_\varepsilon := G_s, \quad (\text{II.6})$$

avec $G_s \in L^2(D_s)$. Par suite comme ∂D_s est de classe C^2 (sauf en deux points anguleux d'ouvertures $\omega < \frac{\pi}{2}$), nous appliquons le Théorème 4 alors il existe une constante C strictement positive telle que $u_s \in H^2(D_s)$ et nous avons l'estimation suivante

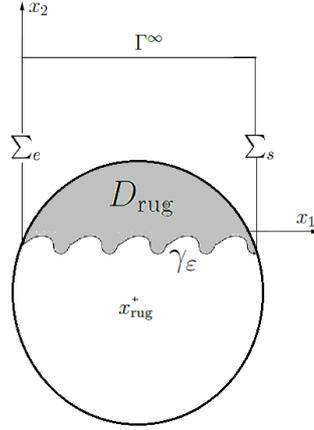
$$\begin{aligned} \|u_s\|_{H^2(D_s)} = \|\varphi_s u_\varepsilon\|_{H^2(D_s)} &\leq C \left[\|G_s\|_{L^2(D_s)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(D_s)} \right] \\ &\leq C \left[\|g\|_{L^2(D_s)} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(D_s)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(D_s)} \right] \\ &:= C \left[\|g\|_{L^2(D_s)} + \|u_\varepsilon\|_{H^1(D_s)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

5 Régularité H^2 au voisinage du bord rugueux γ_ε

Nous étudions dans cette section la régularité H^2 au voisinage de la frontière rugueuse γ_ε . Nous présentons notre démarche. Tout d'abord nous allons effectuer un changement de variable pour redresser le bord rugueux de Ω_ε en un domaine ne dépendant plus de ε (par carte locale). C'est un peu plus délicat car en redressant le bord par cartes locales nous avons changé les coefficients de l'opérateur elliptique (le Laplacien devient un opérateur à coefficients variables dépendant de ε). Ensuite, nous établissons la formulation variationnelle dans le domaine redressé afin de majorer et minorer la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle en choisissant des fonctions tests particulières. Après établissement de l'estimation a priori de la norme H^2 de la solution dans le domaine redressé, nous pouvons montrer le résultat de la régularité H^2 en revenant au domaine rugueux.

5.1 Redressement du bord rugueux

Nous considérons le point x_{rug} de coordonnées $(\frac{L}{2}, \varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{L}{2\varepsilon}) + \frac{1-L^2}{4})$ et notons le domaine $D_{\text{rug}} = \Omega_\varepsilon \cap D(x_{\text{rug}}, R_{\text{rug}})$ l'intersection entre le domaine Ω_ε et le disque de centre x_{rug} et de rayon $R_{\text{rug}} = \frac{L^2+1}{4} > 0$. Rappelons que $\varphi_{\text{rug}} \in C_c^\infty(D(x_{\text{rug}}, R_{\text{rug}}))$. Bien entendu, puisque φ_{rug}



est à support compact dans D_{rug} nous vérifions que $u_{\text{rug}}^\varepsilon = \varphi_{\text{rug}} u_\varepsilon \in H_0^1(D_{\text{rug}})$ et que $u_{\text{rug}}^\varepsilon$ est solution faible sur D_{rug} de l'équation

$$\begin{aligned} -\Delta u_{\text{rug}}^\varepsilon &= -\varphi_{\text{rug}} (\Delta u_\varepsilon) - 2\nabla\varphi_{\text{rug}} \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta\varphi_{\text{rug}})u_\varepsilon \\ &= \varphi_{\text{rug}} g - 2\nabla\varphi_{\text{rug}} \cdot \nabla u_\varepsilon - (\Delta\varphi_{\text{rug}})u_\varepsilon := F_{\text{rug}} , \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

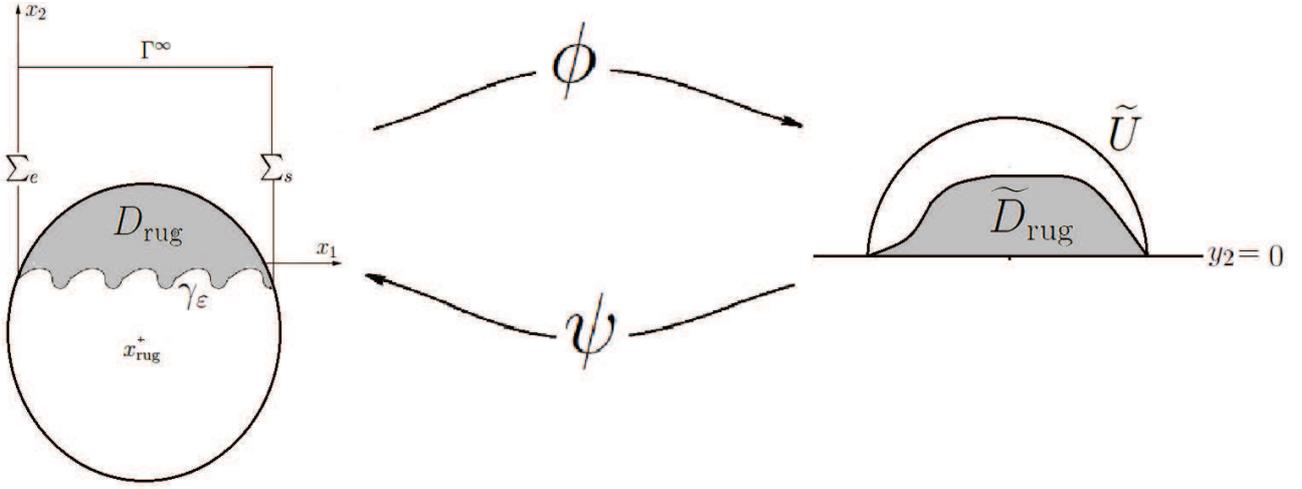
avec $F_{\text{rug}} \in L^2(D_{\text{rug}})$ et en vertu des inégalités variationnelles nous avons $\|F_{\text{rug}}\|_{L^2} \leq C\|g\|_{L^2}$. En multipliant l'équation (II.8) par une fonction test régulière $v \in H_0^1(D_{\text{rug}})$, nous intégrons par parties, alors la formule de Green donne

$$\int_{D_{\text{rug}}} \nabla u_{\text{rug}}^\varepsilon \nabla v \, dx = \int_{D_{\text{rug}}} F_{\text{rug}} v \, dx, \quad (\text{II.9})$$

le domaine D_{rug} vérifiant $D_{\text{rug}} = \Omega_\varepsilon \cap D(x_{\text{rug}}, R_{\text{rug}}) = \{x \in D(x_{\text{rug}}, R_{\text{rug}}) ; x_2 > \tilde{\gamma}_\varepsilon(x_1)\}$, avec la fonction $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_\varepsilon : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{de } C^\infty \\ x_1 &\longmapsto \gamma_\varepsilon(x_1) = \varepsilon\tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

On définit maintenant l'application $\phi(x) = y = (\phi^1(x), \phi^2(x))$ le C^2 -difféomorphisme tel que


 Figure II.6 – Redressement de la frontière rugueuse γ_ε

$$\begin{cases} \phi^1(x) = y_1 = x_1 \\ \phi^2(x) = y_2 = x_2 - \tilde{\gamma}_\varepsilon(x_1) = x_2 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

et $\phi^{-1} = \psi : \tilde{D}_{\text{rug}} \longrightarrow D_{\text{rug}}$ tel que :

$$\begin{cases} \psi^1(y) = x_1 = y_1 \\ \psi^2(y) = x_2 = y_2 + \tilde{\gamma}_\varepsilon(y_1) = y_2 + \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right). \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Dans la suite, nous choisissons le réel $s > 0$ strictement positif de tel sorte que le demi disque $\tilde{U} = D(0, s) \cap \{y_2 > 0\}$ recouvre \tilde{D}_{rug} , c'est à dire $\phi(D_{\text{rug}}) \subset \tilde{U}$. Et nous définissons le demi disque $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ tel que $\tilde{V} = D(0, \frac{s}{2}) \cap \{y = (y_1, y_2); y_2 > 0\}$.

Après redressement du bord rugueux par cartes locales, notre opérateur Laplacien associé au problème aux limites (E) devient un opérateur à coefficients variables dépendant de ε . C'est pourquoi, avant d'établir la formulation variationnelle dans le domaine redressé nous serons amenés à donner quelques résultats dont nous aurons besoin dans la suite.

Proposition 5. *Soit la matrice $G_\varepsilon(y_1)$ telle que*

$$G_\varepsilon(y_1) = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \\ -\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) & 1 + (\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right))^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.13})$$

Alors l'ensemble des valeurs propres de $G_\varepsilon(y_1)$ est : $\text{Sp}(G_\varepsilon(y_1)) = \{\lambda_{\min}(\varepsilon, y_1), \lambda_{\max}(\varepsilon, y_1)\}$

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

avec

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(\varepsilon, y_1) &= \frac{[2 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2] - \sqrt{[2 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2]^2 - 4}}{2}, & \text{la petite valeur propre de } G_\varepsilon(y_1), \\ \lambda_{\max}(\varepsilon, y_1) &= \frac{[2 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2] + \sqrt{[2 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2]^2 - 4}}{2}, & \text{la grande valeur propre de } G_\varepsilon(y_1).\end{aligned}\tag{II.14}$$

Preuve. La métrique $G_\varepsilon(y_1)$ est une matrice symétrique réelle définie positive, admet deux valeurs propres vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_{\min}(\varepsilon, y_1) + \lambda_{\max}(\varepsilon, y_1) = \text{Tr}(G_\varepsilon(y_1)) = 2 + \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2, \\ \lambda_{\min}(\varepsilon, y_1) \lambda_{\max}(\varepsilon, y_1) = \det(G_\varepsilon(y_1)) = 1, \end{cases}$$

ce qui donne après résolution

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(\varepsilon, y_1) &= \frac{[2 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2] - \sqrt{[2 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2]^2 - 4}}{2}, & \text{la petite valeur propre de } G_\varepsilon(y_1), \\ \lambda_{\max}(\varepsilon, y_1) &= \frac{[2 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2] + \sqrt{[2 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2]^2 - 4}}{2}, & \text{la grande valeur propre de } G_\varepsilon(y_1).\end{aligned}$$

D'où, nous obtenons le résultat annoncé dans la proposition 5. □

Proposition 6. *Il existe deux constantes α_0 et α_1 strictement positives indépendantes de ε telles que :*

$$\alpha_1 \|w\|_{L^2}^2 \geq \langle G_\varepsilon(y_1) w, w \rangle \geq \alpha_0 \|w\|_{L^2}^2, \quad \forall w \in C_c^0(\tilde{U}).$$

Remarque 5. α_0 est une constante d'ellipticité donnée par $\alpha_0 := \frac{1}{2 + \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2}$. C'est un minorant de la petite valeur propre de $G_\varepsilon(y_1)$, (Voir [Proposition 5, II.13]). D'autre part, on peut prendre $\alpha_1 := 2 + \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2$. C'est un majorant de la plus grande valeur propre de $G_\varepsilon(y_1)$.

Preuve. Grâce à la proposition 5, nous en déduisons que

$$\lambda_{\max}(\varepsilon, y_1) \|w\|_{L^2}^2 \geq \langle G_\varepsilon(y_1) w, w \rangle \geq \lambda_{\min}(\varepsilon, y_1) \|w\|_{L^2}^2.$$

Or, par une simple majoration de la plus grande valeur propre de $G_\varepsilon(y_1)$ nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\varepsilon, y_1) &= \frac{\left(2 + \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2\right) + \sqrt{\left[2 + \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2\right]^2 - 4}}{2} \leq 1 + \frac{\|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{\|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2}{2}\right)^2 - 1} \\ &\leq 2 + \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2. \end{aligned}$$

Grâce à la relation $\lambda_{\min}(\varepsilon, y_1) \lambda_{\max}(\varepsilon, y_1) = 1$ nous pouvons minorer la petite valeur propre de $G_\varepsilon(y_1)$ telle que

$$\lambda_{\min}(\varepsilon, y_1) = \frac{1}{\lambda_{\max}(\varepsilon, y_1)} \geq \frac{1}{2 + \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2}.$$

Si nous définissons les quantités α_0 et α_1 telles que

$$\alpha_0 := \left(\frac{1}{2 + \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2}\right) \quad \text{et} \quad \alpha_1 := (2 + \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2), \quad (\text{II.15})$$

nous concluons donc que

$$\alpha_1 \|w\|_{L^2}^2 \geq \lambda_{\max}(\varepsilon, y_1) \|w\|_{L^2}^2 \geq \langle G_\varepsilon(y_1) w, w \rangle \geq \lambda_{\min}(\varepsilon, y_1) \|w\|_{L^2}^2 \geq \alpha_0 \|w\|_{L^2}^2.$$

Ceci achève la preuve. □

Proposition 7. *Pour tout réel α strictement positif nous avons :*

$$|\langle G_\varepsilon(y_1) w_1, w_2 \rangle| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_1|^2 dy + \frac{\alpha_1^2}{\alpha} \int |w_2|^2 dy, \quad \text{pour } w_1, w_2 \in C_c^0(\tilde{U}). \quad (\text{II.16})$$

On rappelle que $\alpha_1 = (2 + \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2)$ est un majorant de la plus grande valeur propre de $G_\varepsilon(y_1)$, et $\tilde{U} = D(0, s) \cap \{y_2 > 0\}$.

Preuve. Par une simple majoration, il vient

$$|\langle G_\varepsilon(y_1) w_1, w_2 \rangle| \leq \max(\lambda_{\max}(\varepsilon, y_1)) \int |w_1| |w_2| dy \leq \alpha_1 \int |w_1| |w_2| dy, \quad \text{pour } w_1, w_2 \in C_c^0(\tilde{U}).$$

Nous considérons un réel $\alpha > 0$, alors l'inégalité de Cauchy donne : $ab \leq \frac{\alpha}{4}a^2 + \frac{b^2}{\alpha}$, avec a et b deux réels positifs. Par conséquent, compte tenu de cette dernière inégalité, nous obtenons

$$|\langle G_\varepsilon(y_1) w_1, w_2 \rangle| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_1|^2 dy + \frac{\alpha_1^2}{\alpha} \int |w_2|^2 dy.$$

Ceci termine la preuve. □

5.2 Formulation variationnelle après redressement du bord rugueux

Le but de cette sous section est de trouver la formulation variationnelle dans le domaine redressé. Pour cela, nous effectuons le changement de notations suivant

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y) = u_{\text{rug}}^\varepsilon(\psi(y)) & \text{pour } y \in \tilde{U} \\ \tilde{v}(y) = v(\psi(y)) & \text{pour } y \in \tilde{U}, \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(\phi(x)) = u_{\text{rug}}^\varepsilon(x) & \text{pour } x \in D_{\text{rug}} \\ \tilde{v}(\phi(x)) = v(x) & \text{pour } x \in D_{\text{rug}}. \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Le lemme fondamental suivant montre que l'équation (II.9) devient une équation elliptique du second ordre sur \tilde{U} .

Lemme 3. *Avec les notations ci-dessus (II.17) et (II.18), nous avons $\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \in H_0^1(\tilde{U})$ et*

$$\langle G_\varepsilon(y_1) \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \nabla \tilde{v} \rangle = \langle \tilde{F}_{\text{rug}}, \tilde{v} \rangle \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(\tilde{U}), \quad (\text{II.19})$$

où $\tilde{F}_{\text{rug}} = (F_{\text{rug}} \circ \psi) |J\psi| \in L^2(\tilde{U})$ et $G_\varepsilon(y_1)$ la métrique définie dans (II.13).

Preuve. Rappelons d'abord l'expression (II.9) de la formulation variationnelle dans le domaine D_{rug} :

$$\int_{D_{\text{rug}}} \nabla_x u_{\text{rug}}^\varepsilon \nabla_x v \, dx = \int_{D_{\text{rug}}} F_{\text{rug}} v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(D_{\text{rug}}).$$

Grâce aux notations ci-dessus (voir (II.17) et (II.18)), on a

$$\int_{D_{\text{rug}}} \nabla_x u_{\text{rug}}^\varepsilon(x) \nabla_x v(x) \, dx = \int_{\tilde{U}} (\nabla_x u_{\text{rug}}^\varepsilon)(\phi^{-1}(y)) \cdot (\nabla_x v)(\phi^{-1}(y)) \, dy, \quad (\text{II.20})$$

avec $\psi = \phi^{-1}$ l'application inverse de ϕ , dont la matrice jacobienne n'est pas singulière. En effet,

$$|J\psi(y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi^1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi^2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

L'approche variationnelle dans le domaine redressé est sensiblement différente de celle présentée dans (II.9). C'est pourquoi nous détaillons tous les calculs effectués afin que cette approche soit licite. Par un simple calcul nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_1}(\phi^{-1}(y)) \\ \frac{\partial u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_2}(\phi^{-1}(y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1}(y) \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2}(y) \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_2}(\phi^{-1}(y)) = \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2}(y) \\ \frac{\partial u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_1}(\phi^{-1}(y)) = \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1}(y) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2}(y) \cdot \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Nous remplaçons l'expression (II.21) dans (II.20), alors il suit

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{U}} (\nabla_x u_{\text{rug}}^\varepsilon)(\phi^{-1}(y)) \cdot (\nabla_x v)(\phi^{-1}(y)) dy \\ &= \int_{\tilde{U}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \cdot \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right] \cdot \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \cdot \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right] dy + \int_{\tilde{U}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} dy \\ &= \int_{\tilde{U}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} dy - \int_{\tilde{U}} \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} dy - \int_{\tilde{U}} \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} dy \\ & \quad + \int_{\tilde{U}} \left(1 + \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2 \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} dy \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \\ -\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) & 1 + \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

D'après les formules de changement de variables dans les intégrales, il vient

$$\int_{D_{\text{rug}}} F_{\text{rug}}(x) v(x) dx = \int_{\tilde{U}} F_{\text{rug}}(\psi(y)) v(\psi(y)) |J\psi(y)| dy = \int_{\tilde{U}} \tilde{F}_{\text{rug}}(y) \tilde{v}(y) dy, \quad (\text{II.23})$$

avec $\tilde{F}_{\text{rug}} = (F_{\text{rug}} \circ \psi) |J\psi| = (F_{\text{rug}} \circ \psi) \in L^2(\tilde{U})$.

Pour achever la démonstration, nous remplaçons les expressions (II.22) et (II.23) dans (II.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{U}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \left(1 + \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2\right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right] dy \\ &= \int_{\tilde{U}} \tilde{F}_{\text{rug}} \tilde{v} dy, \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(\tilde{U}). \end{aligned}$$

D'où la formulation variationnelle voulue. □

5.3 Choix de la fonction test

Nous définissons le quotient différentiel D_1^h donné par

$$D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon = \frac{\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y + he_1) - \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y)}{h} \quad \forall h \in \mathbb{R}_+^*,$$

et nous notons ∇ le gradient tel que $\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon = \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1}, \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right)$. Pour des raisons techniques, nous définissons dans la suite la fonction de troncature $\xi \in C_c^\infty(D(0, s), [0, 1])$ comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi \equiv 1 & \text{dans } D\left(0, \frac{s}{2}\right) \\ 0 \leq \xi \leq 1 & \text{dans } D(0, s) \setminus D\left(0, \frac{s}{2}\right) \\ \xi \equiv 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus D(0, s). \end{array} \right. \quad (\text{II.24})$$

Nous remarquons en particulier que $\xi \equiv 1$ dans $\tilde{V} = D(0, \frac{s}{2}) \cap \{y = (y_1, y_2); y_2 > 0\}$.

Le but de cette énumération est de dégager une fonction test $\tilde{v} \in H_0^1(\tilde{U})$. Pour cela, pour $|h|$ assez petit nous choisissons la fonction test suivante

$$\boxed{\tilde{v} = -D_1^{-h}(\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)} \quad (\text{II.25})$$

Nous développons cette dernière relation (II.25), il vient

$$\begin{aligned} \tilde{v}(y) &= \frac{-1}{h} D_1^{-h} \left(\xi^2(y) [\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y + he_1) - \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y)] \right) \\ &= \frac{-1}{h^2} \left(\xi^2(y - he_1) [\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y) - \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y - he_1)] - \xi^2(y) [\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y + he_1) - \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y)] \right). \end{aligned}$$

Il est essentiel ici d'observer que si $\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \in H_0^1(\tilde{U})$ alors $D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \in H_0^1(\tilde{U})$, autrement dit $H_0^1(\tilde{U})$ est invariant par translations tangentielles.

Notation 2. Nous introduisons à présent afin de simplifier l'exposé de cette technique, l'expression $A(\cdot, \cdot)$ associée à la forme bilinéaire à la formulation variationnelle (II.19) :

$$A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{v}) = \int_{\tilde{U}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \left(1 + \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right)^2 \right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right] dy. \quad (\text{II.26})$$

Par ailleurs, nous notons dans toute la suite la quantité $B(\tilde{v})$ pour simplifier l'écriture de la forme linéaire dans la formulation variationnelle (II.19) :

$$B(\tilde{v}) = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{F}_{\text{rug}} \tilde{v} \, dy. \quad (\text{II.27})$$

5.4 Minoration de la forme bilinéaire dans la formulation variationnelle

L'objet de cette sous section est d'exploiter une minoration de la forme bilinéaire dans la formulation variationnelle. Nous commençons par donner rapidement et sans démonstration une autre écriture de la forme bilinéaire. Pour montrer ceci, il suffit d'injecter la fonction test (II.25) dans l'expression (II.26) de $A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{v})$ et utiliser les opérations classiques sur le quotient différentiel D_1^h . Pour plus de détail au sujet de la preuve de la proposition ci-dessous ainsi qu'aux propriétés du quotient D_1^h , nous renvoyons le lecteur à la section 7 de ce chapitre.

Proposition 8. *L'expression de $A(\cdot, \cdot)$ (voir (II.26)) se découpe sous la forme suivante :*

$$A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = A_1(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) + A_2(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) + A_3(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon), \text{ où}$$

$$A_1(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = \left\langle \xi^2 \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \\ -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) & 1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (\text{II.28})$$

$$A_2(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = \left\langle 2 \xi \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \\ -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) & 1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (\text{II.29})$$

et

$$\begin{aligned} A_3(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) &= \left\langle \xi^2 \begin{pmatrix} 0 & D_1^h \left(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \right) \\ D_1^h \left(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \right) & D_1^h \left(1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle 2\xi \begin{pmatrix} 0 & D_1^h \left(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \right) \\ D_1^h \left(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \right) & D_1^h \left(1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Remarquons que la nouvelle forme ci-dessus de l'expression de $A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$ dépend de la métrique $G_\varepsilon(y_1)$ ainsi que de son différentiel tangentiel D_1^h . Pour donner un aperçu intuitif, nous constatons que le différentiel tangentiel de la métrique $G_\varepsilon(y_1)$ est singulier à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

Pour cela, avant de donner le résultat principal de cette sous section, nous allons établir et démontrer quelques résultats dont nous aurons besoin dans la suite.

Proposition 9. *Soit la métrique $\widehat{G}_\varepsilon(y_1)$ telle que*

$$\widehat{G}_\varepsilon(y_1) = \begin{pmatrix} 0 & D_1^h \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right) \\ D_1^h \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right) & D_1^h \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.31})$$

Alors l'ensemble des valeurs propres de $\widehat{G}_\varepsilon(y_1)$ est : $\text{Sp} (\widehat{G}_\varepsilon(y_1)) = \{\widehat{\lambda}_{\min}(\varepsilon, y_1), \widehat{\lambda}_{\max}(\varepsilon, y_1)\}$, avec

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}_{\min}(\varepsilon, y_1) = \frac{I_2 - \sqrt{I_2^2 + 4I_1^2}}{2\varepsilon}, & \text{la petite valeur propre de } \widehat{G}_\varepsilon(y_1), \\ \widehat{\lambda}_{\max}(\varepsilon, y_1) = \frac{I_2 + \sqrt{I_2^2 + 4I_1^2}}{2\varepsilon}, & \text{la grande valeur propre de } \widehat{G}_\varepsilon(y_1), \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

$$\text{où } I_1 = \int_0^1 \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 2 \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds.$$

Preuve. Tout d'abord, nous commençons par calculer les coefficients de la métrique $\widehat{G}_\varepsilon(y_1)$. Par un simple changement de variable en calcul intégral, il vient :

$$\begin{aligned} D_1^h \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right) &= \frac{\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1+h}{\varepsilon} \right) - \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\frac{y_1}{\varepsilon}}^{\frac{y_1+h}{\varepsilon}} \tilde{\gamma}''(t) dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds, \quad \text{avec } t = \frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

de même nous obtenons que

$$\begin{aligned} D_1^h \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) &= \frac{\left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1+h}{\varepsilon} \right) \right)^2 - \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2}{h} = \frac{1}{h} \int_{\frac{y_1}{\varepsilon}}^{\frac{y_1+h}{\varepsilon}} 2 \tilde{\gamma}'(t) \tilde{\gamma}''(t) dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 2 \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds, \quad \text{avec } t = \frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

À ce stade, nous proposons de simplifier les calculs. Notons dans la suite, les intégrales I_1 et I_2 telles que :

$$I_1 = \int_0^1 \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 2 \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds.$$

Nous adaptons maintenant les notations ci-dessus, alors la métrique $\widehat{G}_\varepsilon(y_1)$ s'écrit :

$$\widehat{G}_\varepsilon(y_1) = \begin{pmatrix} 0 & D_1^h \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right) \\ D_1^h \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right) & D_1^h \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ I_1 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Nous explicitons à présent le polynôme caractéristique de la matrice à droite ci-dessus. Étant donné un réel X , alors $\det \left(\varepsilon \widehat{G}_\varepsilon(y_1) - X \text{Id}_2 \right) = X^2 - I_2 X - I_1^2$. Nous montrons finalement que la métrique $\widehat{G}_\varepsilon(y_1)$ admet deux valeurs propres $\widehat{\lambda}_{\min}(\varepsilon, y_1)$ et $\widehat{\lambda}_{\max}(\varepsilon, y_1)$ telles que

$$\widehat{\lambda}_{\min}(\varepsilon, y_1) = \frac{I_2 - \sqrt{I_2^2 + 4I_1^2}}{2\varepsilon} < 0 \quad \text{et} \quad \widehat{\lambda}_{\max}(\varepsilon, y_1) = \frac{I_2 + \sqrt{I_2^2 + 4I_1^2}}{2\varepsilon} > 0.$$

Ceci termine la preuve. □

Remarque 6. *Le spectre de la métrique $\widehat{G}_\varepsilon(y_1)$ ne dépend pas du quotient différentiel D_1^h , en effet nous trouvons le même résultat pour un accroissement de la variable de la forme $h = \varepsilon^s$, $\forall s > 0$.*

Nous invitons maintenant le lecteur à observer dans la proposition suivante le rôle central des valeurs propres de la métrique $\widehat{G}_\varepsilon(y_1)$.

Proposition 10. *Soient $w_3, w_4, w_5 \in C_c^0(\widetilde{U})$. Alors il existe une constante $C_1(\alpha)$ strictement positive indépendante de ε telle que pour tout réel α strictement positif nous avons :*

$$\left| \langle \widehat{G}_\varepsilon(y_1) w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_5|^2 dy + \frac{1}{2} \int |w_4|^2 dy + \frac{C_1}{\varepsilon^2} \int |w_3|^2 dy. \quad (\text{II.33})$$

Preuve. Étant donné $w_3, w_4, w_5 \in C_c^0(\widetilde{U})$. Par l'inégalité triangulaire nous avons

$$\left| \langle \widehat{G}_\varepsilon(y_1) w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \left| \langle \widehat{G}_\varepsilon(y_1) w_3, w_4 \rangle \right| + \left| \langle \widehat{G}_\varepsilon(y_1) w_3, w_5 \rangle \right|.$$

Par une simple majoration, il suit

$$\left| \langle \widehat{G}_\varepsilon(y_1) w_3, w_4 \rangle \right| \leq \max \left(\left| \widehat{\lambda}_{\max}(\varepsilon, y_1) \right|, \left| \widehat{\lambda}_{\min}(\varepsilon, y_1) \right| \right) \int |w_3| |w_4| dy.$$

Par ailleurs, nous avons

$$\left| \langle \widehat{G}_\varepsilon(y_1) w_3, w_5 \rangle \right| \leq \max \left(\left| \widehat{\lambda}_{\max}(\varepsilon, y_1) \right|, \left| \widehat{\lambda}_{\min}(\varepsilon, y_1) \right| \right) \int |w_3| |w_5| dy.$$

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

Alors grâce à ces deux inégalités, nous en déduisons

$$\left| \langle \widehat{G_\varepsilon}(y_1) w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \max \left(\left| \widehat{\lambda}_{\max}(\varepsilon, y_1) \right|, \left| \widehat{\lambda}_{\min}(\varepsilon, y_1) \right| \right) \int |w_3| (|w_4| + |w_5|) dy. \quad (\text{II.34})$$

Rappelons que la plus grande valeur propre de la métrique $\widehat{G_\varepsilon}(y_1)$ est donnée par $\widehat{\lambda}_{\max}(\varepsilon, y_1) = \frac{I_2 + \sqrt{I_2^2 + 4I_1^2}}{2\varepsilon}$ et la petite valeur propre de la métrique $\widehat{G_\varepsilon}(y_1)$ satisfait l'expression $\widehat{\lambda}_{\min}(\varepsilon, y_1) = \frac{I_2 - \sqrt{I_2^2 + 4I_1^2}}{2\varepsilon}$, avec $I_1 = \int_0^1 \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1 + sh}{\varepsilon} \right) ds$ et $I_2 = \int_0^1 2 \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1 + sh}{\varepsilon} \right) \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1 + sh}{\varepsilon} \right) ds$. Si nous définissons la constante \widehat{C} strictement positive indépendante de ε telle que $\widehat{C} = (|I_1| + |I_2|)$, alors nous pouvons établir que

$$\max \left(\left| \widehat{\lambda}_{\max}(\varepsilon, y_1) \right|, \left| \widehat{\lambda}_{\min}(\varepsilon, y_1) \right| \right) \leq \frac{\widehat{C}}{\varepsilon}. \quad (\text{II.35})$$

Nous combinons les deux inégalités (II.34) et (II.35), il vient

$$\left| \langle \widehat{G_\varepsilon}(y_1) w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \frac{\widehat{C}}{\varepsilon} \int |w_3| (|w_4| + |w_5|) dy.$$

En utilisant le fait que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ avec a et b deux réels positifs, ainsi que l'inégalité de Cauchy $ab \leq \frac{\alpha}{4} a^2 + \frac{1}{\alpha} b^2$ avec α un réel strictement positif, nous obtenons

$$\left| \langle \widehat{G_\varepsilon}(y_1) w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_5|^2 dy + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\widehat{C}}{\varepsilon} \right)^2 \int |w_3|^2 dy + \frac{1}{2} \int |w_4|^2 dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\widehat{C}}{\varepsilon} \right)^2 \int |w_3|^2 dy.$$

Ce qui donne après simplification

$$\left| \langle \widehat{G_\varepsilon}(y_1) w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_5|^2 dy + \frac{1}{2} \int |w_4|^2 dy + \left(\frac{\widehat{C}}{\varepsilon} \right)^2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \int |w_3|^2 dy.$$

En supposant la constante $C_1 = \left(\frac{\widehat{C}}{\varepsilon} \right)^2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right)$, nous achevons la preuve. \square

Maintenant, grâce aux résultats ci-dessus, nous pourrions avoir une minoration de la forme bilinéaire (II.26) :

Proposition 11. *Soit la solution $\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \in H_0^1(\tilde{U})$. Alors il existe une constante $C_A(\alpha)$ strictement positive indépendante de ε telle que la quantité $A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$ (voir (II.26)) vérifie l'inégalité*

suivante

$$A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \geq \left(\alpha_0 - \frac{\alpha}{2}\right) \int \xi(y)^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy - \frac{C_A}{\varepsilon^2} \int |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy, \quad \forall \alpha > 0, \quad (\text{II.36})$$

où α_0 est la constante d'ellipticité donnée dans la proposition 6.

Preuve. La démonstration découle directement des résultats des propositions 6, 7 et 10.

1. Tout d'abord, nous commençons par rappeler l'expression (II.28) de $A_1(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$

$$A_1(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = \left\langle \xi^2 \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \\ -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) & 1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Appliquons la proposition 6 au vecteur $w = \xi \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix}$, alors il vient

$$A_1(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \geq \alpha_0 \int \xi(y)^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy. \quad (\text{II.37})$$

Notons que α_0 est la constante d'ellipticité donnée dans la proposition 6.

2. Rappelons maintenant l'expression (II.29) de $A_2(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$:

$$A_2(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = \left\langle 2 \xi \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \\ -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) & 1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si nous notons les vecteurs w_1 et w_2 tels que

$$w_1 = \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w_2 = 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \end{pmatrix},$$

et si nous appliquons la proposition 7 aux vecteurs w_1 et w_2 ci-dessus, alors il existe une constante C_{A_2} strictement positive telle que pour tout réel α strictement positif nous avons

$$A_2(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \geq -\frac{\alpha}{4} \int \xi(y)^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy - \frac{C_{A_2}}{\alpha} \int |D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy.$$

Plus précisément, la constante C_{A_2} est donnée par $C_{A_2} = 2 \left\| \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\|_{L^\infty} (2 + \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2)$.

Par ailleurs, d'après [29, page 184, lemme IX.6] nous avons l'estimation

$$\int |D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy \leq \int |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy. \quad (\text{II.38})$$

Par application de (II.38), nous déduisons que

$$A_2(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \geq -\frac{\alpha}{4} \int \xi(y)^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy - \frac{C_{A_2}}{\alpha} \int |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy, \quad \forall \alpha > 0. \quad (\text{II.39})$$

3. Traitons finalement la quantité (II.30). L'expression de $A_3(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$ s'écrit

$$\begin{aligned} A_3(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) &= \left\langle \xi^2 \begin{pmatrix} 0 & D_1^h(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon})) \\ D_1^h(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon})) & D_1^h(1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle 2\xi \begin{pmatrix} 0 & D_1^h(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon})) \\ D_1^h(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon})) & D_1^h(1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Posons les vecteurs w_3 , w_4 et w_5 tels que

$$w_3 = \xi \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \quad w_4 = 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w_5 = \xi \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix}.$$

Nous adaptons les notations des vecteurs w_3 , w_4 et w_5 ci-dessus et par application de la proposition 10, nous montrons qu'il existe une constante $C_1(\alpha)$ strictement positive telle que pour tout réel α strictement positif nous avons

$$A_3(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \geq -\frac{\alpha}{4} \int \xi(y)^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy - \frac{1}{2} \int \left| 2 \frac{\partial \xi}{\partial y} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right|^2 dy - \frac{C_1}{\varepsilon^2} \int |\xi \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy.$$

Précisons avant de passer à la suite que la constante C_1 est indépendante de ε . En s'appuyant sur les démarches de la démonstration de la proposition 10, nous pouvons établir que $C_1(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\right) (|I_1| + |I_2|)^2$ où I_1 et I_2 sont les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 2 \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds.$$

Grâce à l'inégalité (II.38) et après simplification, nous montrons qu'il existe une constante C_{A_3} strictement positive telle que pour tout réel α strictement positif nous avons

II.5 Régularité H^2 au voisinage du bord rugueux γ_ε

$$A_3 \left(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right) \geq -\frac{\alpha}{4} \int \xi(y)^2 \left| D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right|^2 dy - \frac{C_{A_3}}{\varepsilon^2} \int \left| \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right|^2 dy. \quad (\text{II.40})$$

Signalons que la constante C_{A_3} est donnée par $C_{A_3} = \max \left(C_1(\alpha), \left\| \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\|_{L^\infty} \right)$.

En tenant compte du découpage de la forme bilinéaire sous la forme $A \left(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right) = A_1 \left(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right) + A_2 \left(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right) + A_3 \left(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right)$ et en combinant les inégalités (II.37), (II.39) et (II.40), il existe une constante C_A strictement positive indépendante de ε telle que pour tout réel α strictement positif nous avons

$$A \left(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right) \geq \left(\alpha_0 - \frac{\alpha}{2} \right) \int \xi(y)^2 \left| D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right|^2 dy - \frac{C_A}{\varepsilon^2} \int \left| \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right|^2 dy.$$

La constante C_A est donnée par $C_A = \left(\frac{1}{\alpha} C_{A_2} + C_{A_3} \right)$. La preuve est complète. \square

Remarque 7. Pour simplifier la présentation nous avons rassemblé toutes les constantes dans ce tableau récapitulatif :

Constantes	Valeurs
α	un réel strictement positif
α_0	$\left(\frac{1}{2 + \ \tilde{\gamma}'\ _{L^\infty}^2} \right)$
α_1	$(2 + \ \tilde{\gamma}'\ _{L^\infty}^2)$
I_1	$\int_0^1 \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds$
I_2	$\int_0^1 2 \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} + \frac{sh}{\varepsilon} \right) ds$
C_{A_2}	$2 \left\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\ _{L^\infty} (2 + \ \tilde{\gamma}'\ _{L^\infty}^2)$
C_1	$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) (I_1 + I_2)^2$
C_{A_3}	$\max \left(C_1, \left\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\ _{L^\infty} \right)$
C_A	$\left(\frac{1}{\alpha} C_{A_2} + C_{A_3} \right)$

5.5 Majoration de la forme linéaire de la formulation variationnelle

Contrairement à la sous section précédente, l'objectif de ce paragraphe est d'établir une majoration de la forme linéaire $B(\tilde{v})$ (II.27). Le résultat principal de cette sous section est traduit dans la proposition suivante :

Proposition 12. *Soit la solution $\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \in H_0^1(\tilde{U})$. Alors il existe une constante C_B strictement positive indépendante de ε telle que la quantité $B(\cdot)$ (voir (II.27)) vérifie l'inégalité suivante*

$$|B(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)| \leq \frac{\alpha}{4} \int \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy + \frac{\alpha}{4} \int |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy + \frac{C_B}{\alpha} \int |\tilde{F}_{\text{rug}}|^2 dy, \quad \forall \alpha > 0. \quad (\text{II.41})$$

Preuve. Nous considérons \tilde{v} la fonction test définie dans (II.25). Par un simple calcul et grâce à l'inégalité (II.38), nous avons

$$\begin{aligned} \int |\tilde{v}|^2 dy &= \int |D_1^{-h}(\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)|^2 dy \leq \int |D(\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)|^2 dy \\ &\leq \int |\nabla(\xi^2) D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon + \xi^2 \nabla(D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)|^2 dy. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ avec a et b deux réels positifs ainsi que la fonction troncature $\xi \in [0, 1]$, nous prouvons qu'il existe une constante C_B strictement positive telle que

$$\begin{aligned} \int |\tilde{v}|^2 dy &\leq 2 \int \left(|\nabla(\xi^2) D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 + |\xi^2 \nabla(D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)|^2 \right) dy \\ &\leq 2 \int \left(\left| 2\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \right|^2 + \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 \right) dy \leq C_B \int \left(|D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 + \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 \right) dy \end{aligned}$$

Nous mettons l'accent sur le fait que la constante C_B est donnée par $C_B = 2 \max \left(1, 4 \left\| \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right\|_{L^\infty} \right)$.

Par application à présent de l'inégalité de Cauchy suivante $ab \leq \frac{\alpha}{4C_B} a^2 + \frac{C_B}{\alpha} b^2$ avec α un réel strictement positif, a et b deux réels positifs et C_B la constante strictement positive définie ci-dessus, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |B(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)| &= \left| \int \tilde{F}_{\text{rug}} \tilde{v} dy \right| \leq \int |\tilde{F}_{\text{rug}}| |\tilde{v}| dy \leq \frac{\alpha}{4C_B} \int |\tilde{v}|^2 dy + \frac{C_B}{\alpha} \int |\tilde{F}_{\text{rug}}|^2 dy \\ &\leq \frac{\alpha}{4} \int \left(|D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 + \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 \right) dy + \frac{C_B}{\alpha} \int |\tilde{F}_{\text{rug}}|^2 dy \\ &\leq \frac{\alpha}{4} \int \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy + \frac{\alpha}{4} \int |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy + \frac{C_B}{\alpha} \int |\tilde{F}_{\text{rug}}|^2 dy. \end{aligned}$$

Ceci fournit le résultat de la proposition. □

Même remarque que précédemment, ce dernier résultat sera précieux pour en démontrer un autre.

5.6 Régularité H^2 dans le domaine redressé

Une démarche classique après majoration de la forme linéaire et minoration de la forme bilinéaire dans le domaine redressé par cartes locales est le calcul de la majoration de la norme H^2 de la solution du problème variationnel (II.19). Nous rappelons brièvement notre géométrie après redressement, le domaine \tilde{U} est le demi disque positif tel que $\tilde{U} = D(0, s) \cap \{y_2 > 0\}$ ainsi que \tilde{V} est le demi disque $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ tel que $\tilde{V} = D(0, \frac{s}{2}) \cap \{y_2 > 0\}$.

En vertu des résultats des deux dernières propositions 11 et 12 nous établissons dans cette sous section une majoration en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ de la Hessienne de la solution de l'opérateur elliptique après redressement.

Proposition 13. *Soit $\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon$ la solution du problème variationnel (II.19), alors il existe une constante C_R strictement positive indépendante de ε telle que nous avons l'inégalité suivante*

$$\sum_{l,k=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_k \partial y_l} \right\|_{L^2(\tilde{V})} \leq C_R \left(\frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon\|_{L^2(\tilde{U})} + \|\tilde{F}_{\text{rug}}\|_{L^2(\tilde{U})} \right). \quad (\text{II.42})$$

Preuve. Sachant que la solution $\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon$ du problème variationnel (II.19) vérifie l'égalité des expressions introduits dans notation 2 que nous avons adoptée à la fin de la sous-section 5.3 . Autrement dit, nous avons $A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{v}) = B(\tilde{v})$ pour tout $\tilde{v} \in H_0^1(\tilde{U})$. Alors si nous remplaçons le réel α par α_0 la constante d'ellipticité dans les inégalités (II.36) et (II.41) associées respectivement aux Proposition 11 et Proposition 12, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0}{2} \int_{\tilde{U}} \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy - \frac{C_A}{\varepsilon^2} \int_{\tilde{U}} |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y)|^2 dy \\ \leq \frac{\alpha_0}{4} \left(\int_{\tilde{U}} \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy + \int_{\tilde{U}} |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy \right) + \frac{C_B}{\alpha_0} \int_{\tilde{U}} |\tilde{F}_{\text{rug}}|^2 dy. \end{aligned}$$

Ce qui donne après simplification que

$$\int_{\tilde{U}} \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy \leq \frac{4}{\alpha_0} \left(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{C_A}{\varepsilon^2} \right) \int_{\tilde{U}} |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy + \frac{4C_B}{\alpha_0^2} \int_{\tilde{U}} |\tilde{F}_{\text{rug}}|^2 dy.$$

Puisque la fonction de troncature $\xi \equiv 1$ dans \tilde{V} , alors il est assez immédiat que

$$\int_{\tilde{V}} |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy \leq \int_{\tilde{U}} \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy \leq \frac{4}{\alpha_0} \left(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{C_A}{\varepsilon^2} \right) \int_{\tilde{U}} |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy + \frac{4C_B}{\alpha_0^2} \int_{\tilde{U}} |\tilde{F}_{\text{rug}}|^2 dy.$$

À ce stade, en vertu du quotient différentiel D_1^h selon la direction tangentielle \vec{e}_1 , nous avons exploité trois éléments de la matrice Hessienne de la solution du problème variationnel (II.19). D'où, il existe deux constantes C_{R_1} et C_{R_2} strictement positives indépendantes de ε telles que

$$\sum_{\substack{l,k=1 \\ k+l < 4}}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_k \partial y_l} \right\|_{L^2(\tilde{V})} \leq \left(\frac{C_{R_1}}{\varepsilon} + 1 \right) \left(\int_{\tilde{U}} |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + C_{R_2} \left(\int_{\tilde{U}} |\tilde{F}_{\text{rug}}|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{II.43})$$

Plus précisément les constantes C_{R_1} , C_{R_2} sont données par $C_{R_1} = \frac{2\sqrt{C_A}}{\sqrt{\alpha_0}}$ et $C_{R_2} = \frac{2\sqrt{C_B}}{\alpha_0}$. Rappelons que α_0 présente la constante d'ellipticité ainsi que C_A et C_B sont deux constantes strictement positives définies explicitement dans les preuves des propositions 11 et 12.

Traisons à présent le dernier élément de la matrice Hessienne de la solution du problème variationnel (II.19). Pour cela, nous considérons une fonction test \tilde{v} de $C_c^1(\tilde{U})$ tel que :

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{U}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right] dy \\ & = \int_{\tilde{U}} \tilde{F}_{\text{rug}} \tilde{v} dy, \quad \text{où } \tilde{F}_{\text{rug}} = (F_{\text{rug}} \circ \psi) |J\psi| \in L^2(\tilde{U}). \end{aligned}$$

Nous écrivons astucieusement la formulation variationnelle (II.19), nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{U}} \tilde{F}_{\text{rug}} \tilde{v} dy - \int_{\tilde{U}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right] dy \\ & = \int_{\tilde{U}} \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} dy. \end{aligned}$$

Remarquons que $1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 > 1$. D'où, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\left| \int_{\tilde{U}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} dy \right| \leq \left| \int_{\tilde{U}} \tilde{F}_{\text{rug}} \tilde{v} dy - \int_{\tilde{U}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right] dy \right|.$$

Par application de l'inégalité triangulaire, il vient

$$\left| \int_{\tilde{U}} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} dy \right| \leq \left| \int_{\tilde{U}} \tilde{F}_{\text{rug}} \tilde{v} dy \right| + \left| \int_{\tilde{U}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right] dy \right|$$

$$\leq \max \left(1, \left\| \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^\infty} \right) \int_{\tilde{U}} \left(\left| \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \right| \right) dy + \int_{\tilde{U}} |\tilde{F}_{\text{rug}} \tilde{v}| dy. \quad (\text{II.44})$$

Finalement, en combinant les deux inégalités (II.43) et (II.44), il existe une constante C_R strictement positive indépendante de ε telle que

$$\sum_{l,k=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_k \partial y_l} \right\|_{L^2(\tilde{V})} \leq C_R \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\tilde{U}} |\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\tilde{U}} |\tilde{F}_{\text{rug}}|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Ceci achève la preuve. □

Revenant au domaine rugueux, nous pouvons énoncer dans la sous section suivante le résultat principal concernant la régularité H^2 .

5.7 Estimation locale de la norme H^2 près du bord rugueux

Notre but est à présent de calculer localement, près du bord rugueux γ_ε , la norme H^2 de la solution du problème variationnel (II.19). Ce résultat mathématique est obtenu par des techniques classiques. Notre lecteur est invité à consulter l'annexe de la section 7.

Nous repréciserons dans un premier temps le cadre géométrique dans lequel nous nous plaçons. Les éléments essentiels sont :

- Le domaine V est défini comme suit $V = \psi(\tilde{V})$, où \tilde{V} est le demi disque positif tel que $\tilde{V} = D(0, \frac{s}{2}) \cap \{y_2 > 0\}$ et ψ la fonction C^2 -difféomorphisme réciproque définie dans (II.12).
- Le domaine $D_{\text{rug}} = \Omega_\varepsilon \cap D(x_{\text{rug}}, R_{\text{rug}})$ est l'intersection entre le domaine rugueux Ω_ε et le disque de centre x_{rug} de coordonnées $(\frac{L}{2}, \varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{L}{2\varepsilon}) + \frac{1-L^2}{4})$ et de rayon $R_{\text{rug}} = \frac{L^2+1}{4}$.

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 5. *Soit $u_{\text{rug}}^\varepsilon$ la solution du problème variationnel (II.19), alors il existe une constante C_F strictement positive indépendante de ε telle que nous avons l'inégalité suivante*

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(V)} \leq C_F \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \left\| \nabla u_{\text{rug}}^\varepsilon \right\|_{L^2(D_{\text{rug}})} + \|g\|_{L^2(D_{\text{rug}})} \right]. \quad (\text{II.45})$$

Démonstration. Pour traiter les éléments de la matrice Hessienne de la solution du problème variationnel (II.19) près du bord rugueux γ_ε , nous préconisons d'appliquer dans notre cas le

lemme technique 4 démontré en annexe (voir section 7). Nous obtenons donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1 \partial y_1} - 2 \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2 \partial y_2} - \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\gamma}'' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \\ \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1 \partial y_2} - \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1 \partial y_2} - \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_2 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2 \partial y_2} \end{array} \right. \quad (\text{II.46})$$

En calculant les normes des quantités de (II.46), nous obtenons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_1} \right\|_{L^2(V)}^2 \leq 2 \max \left(1, 4 \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2, \|(\tilde{\gamma}')^2\|_{L^\infty}^2 \right) \sum_{l,n=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_n \partial y_l} \right\|_{L^2(\tilde{V})}^2 + \frac{2 \|\tilde{\gamma}''\|_{L^\infty}^2}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\tilde{V})}^2 \\ \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} \right\|_{L^2(V)}^2 \leq 2 \max \left(1, \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2 \right) \sum_{l,n=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_n \partial y_l} \right\|_{L^2(\tilde{V})}^2 \\ \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{L^2(V)}^2 \leq 2 \max \left(1, \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}^2 \right) \sum_{l,n=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_n \partial y_l} \right\|_{L^2(\tilde{V})}^2 \\ \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_2 \partial x_2} \right\|_{L^2(V)}^2 = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2 \partial y_2} \right\|_{L^2(\tilde{V})}^2 \end{array} \right.$$

Notre but maintenant est d'obtenir des estimations a priori pour les normes des expressions ci-dessus. Par des majorations brutales, il existe deux constantes C_{F_1} et C_{F_2} strictement positives indépendantes de ε telles que

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(V)} \leq C_{F_1} \sum_{l,n=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_n \partial y_l} \right\|_{L^2(\tilde{V})} + \frac{C_{F_2}}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\tilde{V})}. \quad (\text{II.47})$$

Ces deux constantes sont données explicitement par $C_{F_1} = \sqrt{2} \max \left(1, 2 \|\tilde{\gamma}'\|_{L^\infty}, \|(\tilde{\gamma}')^2\|_{L^\infty} \right)$ et $C_{F_2} = \sqrt{2} \|\tilde{\gamma}''\|_{L^\infty}$. Si nous remplaçons l'inégalité [Proposition 13, (II.42)] dans l'expression (II.47), alors il existe une constante C_{F_3} strictement positive telle que nous avons

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(V)} \leq C_{F_3} \left(\frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon\|_{L^2(\tilde{U})} + \|\tilde{F}_{\text{rug}}\|_{L^2(\tilde{U})} \right) + \frac{C_{F_2}}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\tilde{V})}. \quad (\text{II.48})$$

Plus précisément, $C_{F_3} = C_R C_{F_1}$ où nous rappelons que la constante C_R est définie dans la

proposition 13 et est indépendante de ε . Il est alors naturel de traiter le terme à droite de l'inégalité (II.48). Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon\|_{L^2(\tilde{V})}^2 &= \sum_{k=1}^2 \int_{\tilde{V}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon(y)}{\partial y_k} \right)^2 dy = \sum_{k=1}^2 \int_V \left(\frac{\partial u_{\text{rug}}^\varepsilon(\psi(x))}{\partial y_k} \right)^2 |J\phi(x)| dx \\ &= \sum_{i,k=1}^2 \int_V \left(\frac{\partial u_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \psi^i}{\partial y_k} \right)^2 dx \leq C_{F_4} \|\nabla u_{\text{rug}}^\varepsilon\|_{L^2(V)}^2. \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Précisons que C_{F_4} est une constante strictement positive indépendante de ε donnée explicitement par $C_{F_4} = \max\left(1, \left\| (\tilde{\gamma}')^2 \right\|_{L^\infty} \right)$. Nous reprenons le même calcul, et montrons que $\|\nabla \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon\|_{L^2(\tilde{U})}^2 \leq C_{F_4} \|\nabla u_{\text{rug}}^\varepsilon\|_{L^2(U)}^2$. Par un calcul similaire nous avons aussi

$$\|\tilde{F}_{\text{rug}}\|_{L^2(\tilde{U})}^2 = \int_{\tilde{U}} (\tilde{F}_{\text{rug}}(y))^2 dy = \int_U (F_{\text{rug}}(x))^2 |J\phi(x)| dx = \|F_{\text{rug}}\|_{L^2(U)}^2. \quad (\text{II.50})$$

Il reste à rassembler toutes les estimations obtenues. Pour résumer, il suffit de remplacer les inégalités (II.49) et (II.50) dans (II.48). Il existe deux constantes \hat{C}_F et C_F strictement positives indépendantes de ε telles que :

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{rug}}^\varepsilon(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(V)} \leq \hat{C}_F \left[\frac{1}{\varepsilon} \|\nabla u_{\text{rug}}^\varepsilon\|_{L^2(U)} + \|F_{\text{rug}}\|_{L^2(U)} \right] \leq C_F \left[\frac{1}{\varepsilon} \|\nabla u_{\text{rug}}^\varepsilon\|_{L^2(D_{\text{rug}})} + \|g\|_{L^2(D_{\text{rug}})} \right].$$

Nous en tirons finalement l'estimation voulue. □

Fin de la technique variationnelle

Pour définitivement clore la technique variationnelle et prouver le Théorème 2, il reste simplement à rassembler les résultats (II.2), (II.3), (II.5) ainsi que (II.7), et à utiliser la majoration en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ près du bord rugueux donnée par le Théorème 5. Ceci démontre également l'inégalité suivante qui justifie qu'on parle de «majoration en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ » au sujet de l'étude de la régularité H^2 de la solution du problème aux limites modèle (E) introduit dans le premier chapitre.

Soit $u_\varepsilon \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon)$. Pour tout $g \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, il existe une constante C strictement positive telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left(\|g\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right).$$

(II.51)

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

Le travail contenu dans cette technique variationnelle a laissé une question naturelle concernant l'ordre de majoration du $\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$:

Question 1. *Peut-on optimiser l'ordre de majoration en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ de la norme $\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$, en changeant les cartes locales ? Autrement dit, l'ordre de majoration de la régularité H^2 de la solution du problème aux limites (E) dépend-t-il du redressement choisi ?*

Pour répondre à cette question, nous considérons le changement de variables suivant \mathcal{L}_ε qui transforme Ω_ε en Ω_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon : \quad \Omega_\varepsilon &\longrightarrow \Omega_0 \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow \left(x_1, \frac{x_2 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}{1 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Nous rappelons que Ω_ε est le domaine rugueux défini dans la Figure I.1 et $\Omega_0 = [0, L] \times [0, 1]$ est simplement le domaine lisse présenté dans la Figure I.2.

Nous avons traité cette question dans le cas du changement de variables ci-dessus. La réponse est que la régularité H^2 ne dépend pas du redressement choisi, mais nous le démontrons pas ici en général.

Par ailleurs, comme il serait intéressant d'explorer de nouveaux redressements qui diffèrent des deux transformations citées dans ce chapitre ((II.11) et (II.52)), nous effectuons une analyse plus raffinée en se limitant au niveau de la couche rugueuse. Pour cela, nous définissons Λ_ε la couche rugueuse telle que $\Lambda_\varepsilon = [0, L] \times \left[\varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), k_0 \varepsilon \right]$, avec $k_0 \gg 1$ et le domaine redressé $\mathcal{R}_\varepsilon = [0, L] \times [0, k_0 \varepsilon]$. Puis nous considérons \mathcal{F}_ε le redressement suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon : \quad \Lambda_\varepsilon &\longrightarrow \mathcal{R}_\varepsilon \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow \left(x_1, k_0 \varepsilon \left(\frac{x_2 - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)}{k_0 \varepsilon - \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Après examen de ce changement de variables pour notre cas, la réponse est encore «la régularité H^2 ne dépend pas du redressement », et nous précisons alors ce que nous appellerons «pas trop grand ».

6 Conclusion et quelques réflexions

En conclusion, dans ce chapitre nous avons étudié la régularité H^2 dans des domaines rugueux de la solution du problème aux limites (E) à l'aide de la technique variationnelle. Nous avons

détaillé les différentes étapes permettant de mettre en oeuvre cette technique et justifié mathématiquement cette régularité H^2 . Nous avons ainsi obtenu une dépendance en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ de la norme H^2 de la solution exacte du problème (E). Nous sommes conscients que cette technique est difficile à présenter et peut parfois paraître obscure au lecteur. Toutefois, nous pensons qu'elle nous a permis d'obtenir de très nombreuses précisions sur les propriétés de la solution du problème modèle introduit dans le premier chapitre. En développant d'une façon rigoureuse et même parfois explicite et calculatoire certains résultats, nous espérons avoir amélioré la compréhension de cette technique par formulation variationnelle dans le cas d'un bord rugueux assez régulier.

Notons qu'en présence du tuteur vasculaire «stent » sur l'écoulement sanguin, la donnée de la régularité de la solution de cet écoulement dépend de la régularité du bord du «stent ». Afin de généraliser de cette technique variationnelle en soulevant de nouvelles difficultés, nous considérons une paroi rugueuse **à coins**, autrement dit un bord rugueux γ_ε **Lipschitzien**.

Dans ce dernier cadre, cette question semble à première vue épineuse. Mais sur la base de l'étude que nous avons présentée dans ce chapitre ainsi que les travaux de Olivier Lafitte et al. [46, 56] et ceux de Monique Dauge et al. [36] pour le traitement des problèmes elliptiques à coefficients constants à coins, nous nous proposons quelques réflexions.

Revenons tout d'abord sur le point des recherches de Dauge et al. [36] par transformation de Fourier partielle. Nous donnons une présentation simplifiée pour notre cas, cette technique consiste à redresser le domaine rugueux Ω_ε vers un tore. Ensuite, nous utilisons la transformation de Fourier partielle et nous étudions le comportement de l'opérateur pour les hautes fréquences ainsi que pour les basses fréquences. Bien entendu, nous finissons par retourner au domaine rugueux. Cette technique par transformation de Fourier partielle semble s'appliquer, mais pas immédiatement. On peut le considérer comme un problème ouvert.

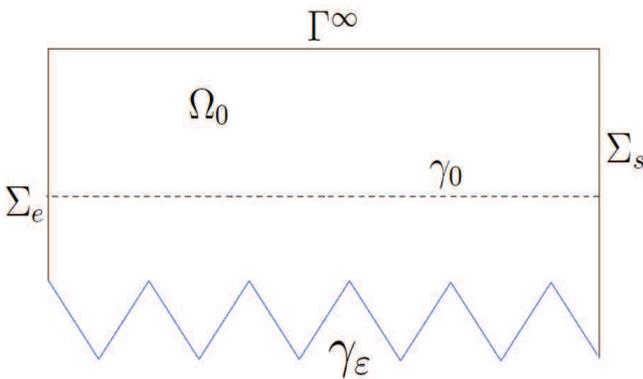


Figure II.7 – Domaine rugueux Ω_ε avec un bord γ_ε Lipschitzien

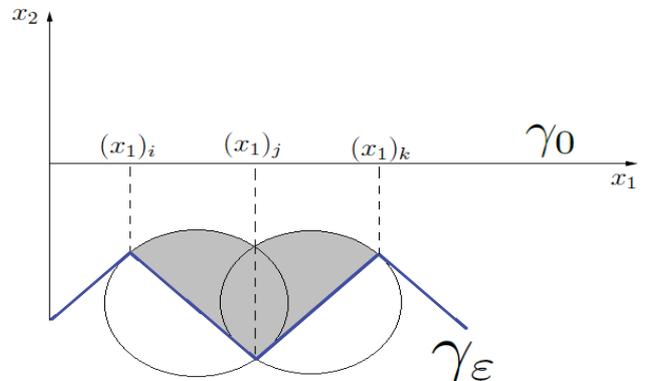


Figure II.8 – Partition de l'unité près du bord rugueux Lipschitzien γ_ε

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

Nous présentons dans la suite une approche théorique pour répondre à la question dans le cas d'une paroi rugueuse lipschitzienne (voir Figure II.7), tout en nous contentant d'indiquer quelques points qui n'ont pu être abordés par manque de temps.

Nous introduisons un recouvrement du bord rugueux lipschitzien γ_ε par des disques de telle sorte que les deux extrémités de chaque arête appartiennent à la frontière de chaque disque (afin d'éviter les points anguleux) comme il l'est illustré à la Figure II.8 ci-dessus, et nous définissons une partition de l'unité associée à ce recouvrement. Nous mettons l'accent sur le fait que le nombre de disques est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Plus précisément, si nous considérons un bord rugueux lipschitzien paramétré par $\gamma_\varepsilon = \left\{ x_1 \in [0, L] \text{ et } x_2 = -\varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right\}$, où $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1]$ est une application T -périodique lipschitzienne (voir Figure II.9), alors le nombre de disques explicite qui recouvre le bord γ_ε vaut $\frac{2L}{T\varepsilon}$.

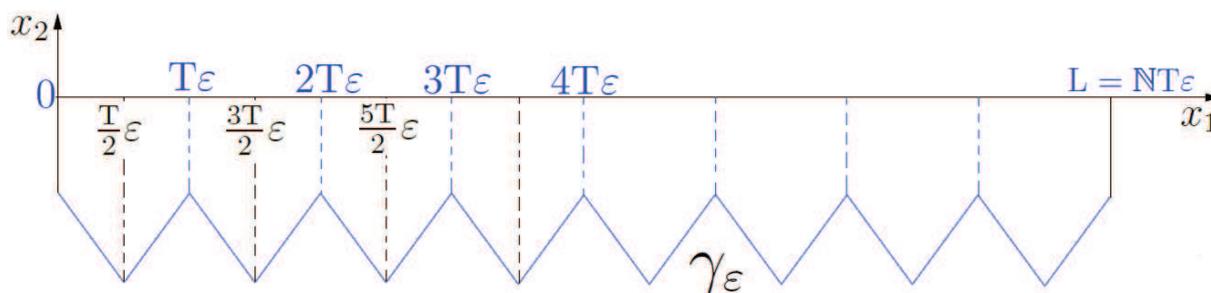


Figure II.9 – Périodicité du bord rugueux lipschitzien γ_ε

À présent, afin de traiter la régularité H^2 sur chaque petite portion de disque (voir Figure II.8), nous reprendrons pour ceci la démarche que nous avons adoptée dans ce chapitre pour l'étude de la régularité H^2 au voisinage des bords lisses (voir section 4). Finalement, en regroupant toutes les estimations obtenus localement, nous aurons la dépendance en ε de l'ordre de majoration de la solution exacte du problème (E) en norme H^2 .

Dans cette philosophie, nous espérons ainsi donner une bonne vue d'ensemble d'une voie de recherche possible.

7 Résultats techniques

L'objet de cette première annexe est de présenter les différents résultats calculatoires que nous avons utilisé dans ce chapitre pour l'étude de la régularité H^2 par la formulation variationnelle dans des domaines rugueux. Cette annexe sera structurée en trois parties. Nous commençons par un lemme technique :

Lemme 4. *Soit f une fonction de $C^\infty(D_{\text{rug}})$. Posons $\tilde{f}(\phi(x)) = f(x)$ pour tout $x \in D_{\text{rug}}$, avec ϕ le C^2 -difféomorphisme définie dans (II.11). Alors nous avons :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_1 \partial y_1} - 2 \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_2 \partial y_2} - \boxed{\frac{1}{\varepsilon} \tilde{\gamma}''\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_1 \partial y_2} - \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_2 \partial y_2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_1 \partial y_2} - \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_2 \partial y_2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_2 \partial y_2}. \end{array} \right. \quad (\text{II.54})$$

Preuve. Par un calcul de la dérivée d'une composée nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}(y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi^{-1}(y)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\phi^{-1}(y)) \cdot \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}(y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi^{-1}(y)) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\phi^{-1}(y)) \cdot 1 \end{array} \right.$$

Ce qui donne après simplification

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\phi^{-1}(y)) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}(y) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi^{-1}(y)) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}(y) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}(y) \cdot \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \end{array} \right.$$

En tenant compte que la matrice jacobienne de l'inverse de C^2 -difféomorphisme ϕ est donnée par

$$|J\psi| = |J\phi^{-1}| = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi^1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi^2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) & 1 \end{pmatrix},$$

par un simple calcul, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}(y) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}(y) \cdot \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right] \\
 &= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_1 \partial y_1} - 2 \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_2 \partial y_2} - \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\gamma}''\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}(y) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}(y) \cdot \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right] = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_1 \partial y_2} - \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_2 \partial y_2}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}(y) \right] = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_1 \partial y_2} - \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_2 \partial y_2}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_2 \partial y_2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_1 \partial y_2} \cdot 0 = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_2 \partial y_2}.
 \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Dans le paragraphe suivant, nous démontrons quelques propriétés du quotient différentiel.

Quotient Différentiel

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^N et (e_1, \dots, e_N) une base de \mathbb{R}^N . Pour tous $u \in C_c^0(U)$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $\text{supp}(u) + B(0, |h|) \subset U$, le quotient différentiel D_k^h est donné par :

$$[D_k^h u](y) = \frac{u(y + h e_k) - u(y)}{h}, \quad \text{pour tout } y \in \text{supp}(u), \quad k = 1, \dots, N.$$

Ici $C_c^0(U)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à support compact inclus dans l'ouvert U et $B(0, |h|)$ est la boule de \mathbb{R}^N de centre 0 et de rayon $|h|$.

Lemme 5. *Pour tous $v, w \in C_c^0(U)$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $\text{supp}(v) + B(0, |h|)$ et $\text{supp}(w) + B(0, |h|)$ soient inclus dans U , nous avons*

$$\int_U v D_k^{-h} w \, dx = - \int_U w D_k^h v \, dx. \quad (\text{II.55})$$

Preuve. Soient $v, w \in C_c^0(U)$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $\text{supp}(v) + B(0, |h|)$ et $\text{supp}(w) + B(0, |h|)$ soient inclus dans U .

$$\begin{aligned}
 \int_U v(x) [D_k^{-h} w](x) \, dx &= \int_U v(x) \frac{w(x - h e_k) - w(x)}{-h} \, dx \\
 &= - \int_U \frac{v(x) w(x - h e_k)}{h} \, dx + \int_U \frac{w(x) v(x)}{h} \, dx.
 \end{aligned}$$

Posons $y = x - he_k$, nous obtenons

$$-\int_U \frac{v(x)w(x - he_k)}{h} dx = -\int_{U+he_k} \frac{v(y + he_k)w(y)}{h} dy = -\int_U \frac{v(y + he_k)w(y)}{h} dy.$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $\text{supp}(v) + B(0, |h|) \subset U$. Par suite,

$$\begin{aligned} \int_U v(x)[D_k^{-h}w](x) dx &= -\int_U \frac{w(x)v(x + he_k)}{h} dx + \int_U \frac{w(x)v(x)}{h} dx, \\ &= -\int_U w(x) \frac{v(x + he_k) - v(x)}{h} dx = -\int_U [D_k^h v](y)w(y) dy. \end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat voulu. \square

Lemme 6. Soient $v, w \in C_c^0(U)$ et $h \in \mathbb{R}^*$. Nous avons la relation suivante :

$$D_k^h(vw) = v^h D_k^h(w) + w D_k^h(v), \quad \text{avec } v^h(x) := v(x + he_k). \quad (\text{II.56})$$

Preuve. Soient $v, w \in C_c^0(U)$ et $h \in \mathbb{R}^*$. Un simple calcul donne

$$\begin{aligned} [D_k^h(vw)](x) &= \frac{v(x + he_k)w(x + he_k) - v(x)w(x)}{h}, \\ &= v(x + he_k) \frac{w(x + he_k) - w(x)}{h} + \frac{v(x + he_k)w(x)}{h} - \frac{v(x)w(x)}{h}, \\ &= v(x + he_k)[D_k^h(w)](x) + w(x)[D_k^h(v)](x) = [v^h D_k^h(w) + w D_k^h(v)](x). \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu. \square

Signalons que ces dernières propriétés du quotient Différentiel seront précieuses pour démontrer d'autres résultats techniques. Dans la dernière partie de cette annexe nous donnons une preuve de la proposition 8, qui fournit un découpage de la forme bilinéaire (II.26).

Preuve de la proposition 8

Nous rappelons tout d'abord l'expression de la forme bilinéaire de la formulation variationnelle $A(\cdot, \cdot)$ définie dans (II.26) :

$$A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = \int_{\tilde{U}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \left(1 + \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right)^2 \right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_2} \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_1} \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right] dy.$$

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

Nous injectons la fonction test suivante $\tilde{v} = -D_1^{-h}(\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$ dans l'expression de $A(\cdot, \cdot)$ ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) &= - \int \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial D_1^{-h}(\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)}{\partial y_1} dy + \int \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \frac{\partial D_1^{-h}(\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)}{\partial y_2} dy \\ &\quad + \int \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial D_1^{-h}(\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)}{\partial y_1} dy - \int \left(1 + \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2 \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \frac{\partial D_1^{-h}(\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)}{\partial y_2} dy. \end{aligned}$$

Nous mettons l'accent sur le fait que les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport y_1 et y_2 commutent avec le quotient différentiel D_1^h . Maintenant nous utilisons les opérations classiques ci-dessous sur le quotient différentiel, démontrées dans les lemmes 5 et 6 :

$$\begin{cases} \int \tilde{v} D_1^{-h} \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon dy = - \int \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon D_1^h \tilde{v} dy \\ D_1^h(\tilde{v} \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = \tilde{v}^h D_1^h(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) + \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon D_1^h(\tilde{v}), \quad \text{où } \tilde{v}^h = \tilde{v}(y + h e_1), \end{cases}$$

Après calculs, nous en déduisons que l'expression $A(\cdot, \cdot)$ se décompose sous la forme suivante

$$\begin{aligned} A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) &= \int D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \frac{\partial}{\partial y_1} (\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) dy + \int D_1^h \left(\left(1 + \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right)\right)^2 \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \frac{\partial}{\partial y_2} (\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) dy \\ &\quad - \int D_1^h \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \frac{\partial}{\partial y_1} (\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) dy - \int D_1^h \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \frac{\partial}{\partial y_2} (\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) dy, \\ &:= T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \end{aligned}$$

où les quantités T_1 , T_2 , T_3 et T_4 sont données par

$$T_1 = \int D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \frac{\partial}{\partial y_1} (\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) dy = \int D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \left[2\xi \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon + \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right] dy.$$

$$\begin{aligned} T_2 &= - \int D_1^h \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \frac{\partial}{\partial y_2} (\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) dy, \\ &= - \int \left[D_1^h \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} + \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \right] \cdot \left[2\xi \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon + \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right] dy, \\ &= - \int \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} dy - \int 2\xi \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) D_1^h \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} dy \\ &\quad - \int 2\xi \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) dy - \int \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} D_1^h \left(\tilde{\gamma}'\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \right) \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_3 &= - \int D_1^h \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \frac{\partial}{\partial y_1} (\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) dy, \\
 &= - \int \left[D_1^h \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} + \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \right] \cdot \left[2\xi \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon + \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right] dy, \\
 &= - \int \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} dy - \int 2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h (\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) D_1^h \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} dy \\
 &\quad - \int 2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h (\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) dy - \int \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} D_1^h \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right) \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} dy.
 \end{aligned}$$

Et finalement l'expression de T_4 est définie par

$$\begin{aligned}
 T_4 &= \int D_1^h \left(\left[1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right] \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \frac{\partial}{\partial y_2} (\xi^2 D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) dy, \\
 &= \int \left[D_1^h \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} + \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \right] \cdot \\
 &\quad \left[2\xi \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon + \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right] dy, \\
 &= \int \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} dy \\
 &\quad + \int 2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h (\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) D_1^h \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} dy \\
 &\quad + \int 2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h (\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) dy \\
 &\quad + \int \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} D_1^h \left(1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) \xi^2 \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} dy.
 \end{aligned}$$

Pour finir, nous aurons besoin de donner à cette dernière expression une forme plus propice aux calculs algébriques. Après réorganisation des termes de telle sorte que l'expression $A(\cdot, \cdot)$ s'écrit avec des quantités qui dépendront de la métrique $G_\varepsilon(y_1)$ et avec d'autres du différentiel tangentiel de la métrique $G_\varepsilon(y_1)$, nous définissons $A_1(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$, $A_2(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$ et $A_3(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$ telles que $A(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = A_1(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) + A_2(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) + A_3(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon)$, où

$$A_1(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = \left\langle \xi^2 \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \\ -\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) & 1 + \left(\tilde{\gamma}' \left(\frac{y_1}{\varepsilon} \right) \right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

Chapitre II. Étude variationnelle de la régularité H^2 dans des domaines rugueux

$$A_2(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) = \left\langle 2 \xi \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \\ -\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) & 1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon \end{pmatrix} \right\rangle,$$

et

$$\begin{aligned} A_3(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon, \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) &= \left\langle \xi^2 \begin{pmatrix} 0 & D_1^h \left(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \right) \\ D_1^h \left(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \right) & D_1^h \left(1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial D_1^h \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle 2\xi \begin{pmatrix} 0 & D_1^h \left(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \right) \\ D_1^h \left(\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}) \right) & D_1^h \left(1 + (\tilde{\gamma}'(\frac{y_1}{\varepsilon}))^2 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} D_1^h(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} D_1^h(\tilde{u}_{\text{rug}}^\varepsilon) \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Avec ceci nous achevons la preuve. □

*La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.
Ici, nous avons réuni théorie et pratique : rien ne fonctionne et personne ne sait pourquoi!*

Albert Einstein.

Chapitre III

Méthodes de construction d'approximation couche limite

1 Introduction

Ce chapitre présente une synthèse des différentes méthodes multi-échelles et de construction d'approximation couche limite que l'on peut trouver dans la littérature scientifique ainsi que dans les travaux de D. Bresch et V. Milišić [27, 28], afin de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = C & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ u_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s, \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où l'ouvert Ω_ε (voir Figure V.1) est un canal 2D limité par des parois horizontales : la paroi lisse est donnée par $\Gamma^\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in [0, L] \text{ et } x_2 = 1\}$, et celle rugueuse est paramétrisée par $\gamma_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = \varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})\}$, où $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ périodique. L'entrée verticale du domaine est représentée par $\Sigma_e := \{0\} \times [\varepsilon \tilde{\gamma}(0), 1]$ et sa sortie par $\Sigma_s := \{L\} \times [\varepsilon \tilde{\gamma}(0), 1]$. Nous mettons l'accent que dans tout ce chapitre le bord rugueux γ_ε est **lipschitzien**, autrement la fonction $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ est périodique, lipschitzienne.

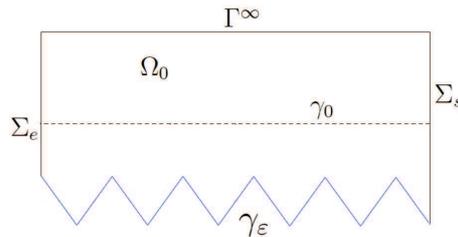


Figure III.1 – Domaine rugueux Ω_ε avec un bord γ_ε lipschitzien

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

Le problème aux limites ci-dessus est similaire à notre modèle d'écoulement sanguin modélisé mathématiquement par le problème (E) (voir Chapitre I, Section 1), mais avec un terme source réel.

Chacune des approximations présentées dans les deux premières sections suit l'approche d'Achdou et al. Dans une première partie, nous construisons les lois de paroi d'ordre 1 et nous améliorons la vitesse de la convergence entre l'approximation couche limite d'ordre 1 et la solution exacte u_ε . Nous montrons un taux de convergence en $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ pour la norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$ et en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ pour la norme $L^2(\Omega_0)$. Nous établissons mathématiquement pour la loi moyennée d'ordre 1 un taux de convergence inférieur à celui de l'approximation couche limite d'ordre 1 (en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ pour la norme $L^2(\Omega_0)$).

La seconde partie du chapitre est consacrée aux lois de paroi d'ordre 2, nous obtenons des approximations exactes sur la paroi rugueuse au deuxième ordre. Pour ces approximations entièrement oscillantes, nous montrons une convergence exponentielle. Malgré ce taux de convergence élevé, la loi de paroi macroscopique correspondante se comporte mal et ne conserve pas l'ordre de l'approximation complète (en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ pour la norme $L^2(\Omega_0)$).

Ensuite dans la troisième section de ce chapitre et afin de contourner la difficulté du résultat négatif pour la loi de paroi moyennée du second ordre, nous proposons des nouvelles lois multi-échelles incluant les oscillations microscopiques sur la frontière fictive. Elles sont explicites et s'expriment comme des conditions de Dirichlet non-homogènes. Dans un premier temps, nous améliorons les résultats de convergence pour la loi de paroi explicite d'ordre 1 (en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ dans la norme $L^2(\Omega_0)$ et en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ pour la norme $H^1(\Omega_0)$). Dans un second temps, nous établissons une convergence exponentielle pour la loi de paroi explicite d'ordre 2. Enfin, nous dérivons une loi multi-échelle implicite d'ordre 1 de type SAFFMAN-JOSEPH mais à coefficient variable et qui contient des oscillations microscopiques. Nous montrons un taux de convergence en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ pour la norme $L^2(\Omega_0)$ qui est moins bon que les résultats pour la loi de paroi explicite d'ordre 1 car cette dernière contient des informations exactes des correcteurs couche limite sur l'interface fictive macroscopique γ^0 .

Terminons ce chapitre par un appendice dans lequel nous résumons brièvement le développement asymptotique obtenu par W. Jäger, A. Mikelić [50]. Par la même méthodologie, nous améliorons les ordres de convergence obtenus dans [27]. Nous explorons la relation liant les approches d'Achdou et al. ainsi que Jäger et al, nous montrons qu'elles peuvent être déduites l'une de l'autre et que de plus leur différence est d'ordre plus élevé que l'effet de rugosité. Ceci prouve que les deux approximations mènent aux mêmes lois de parois.

2 Loi de paroi d'ordre 1

2.1 Extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille

On commence par considérer le profil de Poiseuille, c'est-à-dire un profil parabolique de vitesse en la variable verticale x_2 . C'est un profil typique de l'écoulement d'un fluide visqueux dans un tube droit en régime permanent et laminaire [64]. C'est la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = C & \text{sur } \Omega_0 \\ u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma^0 \\ u_0 \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s, \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

et pour construire une première approximation de u_ε on prolonge u_0 à Ω_ε de façon affine (par son développement de Taylor à l'ordre 1). On a ainsi construit une approximation d'ordre 0 :

$$\begin{aligned} u_{\text{ext},1}^0(x) &= u_0 \mathbb{1}_{[\Omega_0]} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) x_2 \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} = u_0 \mathbb{1}_{[\Omega_0]} + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \frac{x_2}{\varepsilon} \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} \\ &= u_0 \mathbb{1}_{[\Omega_0]} + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) y_2 \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]}, \quad \text{ici } y_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

où $\mathbb{1}_{[\cdot]}$ est la fonction indicatrice. Nous pouvons écrire $u_{\text{ext},1}^0$ explicitement

$$u_{\text{ext},1}^0(x) = \begin{cases} \frac{C}{2} x_2 (1 - x_2) & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{C}{2} x_2 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0. \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Cette approximation s'avère insuffisante pour des rugosités de tailles plus importantes. En effet, nous avons le résultat de convergence suivant :

Proposition 14. *La solution $u_{\text{ext},1}^0$ converge fortement dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ vers u_ε et*

$$\|u_\varepsilon - u_{\text{ext},1}^0\|_{1,\Omega_\varepsilon} \leq C_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad (\text{III.5})$$

où C_0 est une constante strictement positive indépendante de ε .

Preuve. Nous notons la différence $r_\varepsilon^0 = u_\varepsilon - u_{\text{ext},1}^0$. Alors r_ε^0 est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^0 = C \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \\ r_\varepsilon^0 = -\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) x_2 = -\frac{C}{2} x_2 & \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ r_\varepsilon^0 \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

Remarquons que sur γ_ε l'erreur r_ε^0 est non nulle, d'où nous définissons les quantités suivantes :

$$z = r_\varepsilon^0 - s \quad \text{avec} \quad s = -\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) x_2 \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} = -\frac{C}{2} x_2 \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]},$$

où z est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta z = C \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} - \delta_{\gamma^0} & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ z \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s, \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

δ_{γ^0} désignant la mesure de Dirac sur l'interface $\gamma^0 = \{x_1 \in [0, L]; x_2 = 0\}$. Dans une deuxième étape, nous cherchons la formulation variationnelle du problème aux limites (III.7). Pour cela, nous considérons une fonction test $v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon)$. Par la formule de Green, nous avons

$$\langle -\Delta z, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle \nabla z, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle \nabla r_\varepsilon^0, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} - \langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon}. \quad (\text{III.8})$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \langle \nabla r_\varepsilon^0, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} &= -\langle \nabla u_{\text{ext},1}^0, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} + \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \\ &= -\langle \nabla u_{\text{ext},1}^0, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} - \langle \Delta u_\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = -\langle \nabla u_{\text{ext},1}^0, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} + \int_{\Omega_\varepsilon} C v dx \\ &= -\langle \nabla u_{\text{ext},1}^0, \nabla v \rangle_{\Omega_0} - \langle \nabla u_{\text{ext},1}^0, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} + \int_{\Omega_\varepsilon} C v dx \\ &= \left(\langle \Delta u_{\text{ext},1}^0, v \rangle_{\Omega_0} - \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial n} v d\sigma \right) - \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \left(\frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} C v dx \\ &= \left(-\int_{\Omega_0} C v dx + \int_{\gamma^0} \frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2} v dx_1 \right) - \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \left(\frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} C v dx \\ &= \left(-\int_{\Omega_0} C v dx + \int_{\gamma^0} \frac{C}{2} v dx_1 \right) - \frac{C}{2} \int_0^L \int_{\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2 dx_1 + \int_{\Omega_\varepsilon} C v dx \\ &= \left(-\int_{\Omega_0} C v dx + \int_{\gamma^0} \frac{C}{2} v dx_1 \right) - \frac{C}{2} \int_0^L v(x_1, 0) dx_1 + \int_{\Omega_\varepsilon} C v dx = C \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} v dx, \end{aligned}$$

et

$$\langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = -\frac{C}{2} \int_0^L \left(\int_{\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 = -\frac{C}{2} \int_0^L v(x_1, 0) dx_1 = -\int_{\gamma^0} \frac{C}{2} v dx_1.$$

Nous additionons ces deux expressions, nous obtenons :

$$\langle \nabla z, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle \nabla r_\varepsilon^0 - \nabla s, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = C \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} v \, dx + \frac{C}{2} \int_{\gamma^0} v \, dx_1.$$

Par l'inégalité triangulaire ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} |\langle \nabla z, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon}| &= \left| C \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} v \, dx + \frac{C}{2} \int_{\gamma^0} v \right| \leq \left| C \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} v \, dx \right| + \left| \frac{C}{2} \int_{\gamma^0} v \right| \\ &\leq C \sqrt{\text{mes}(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} v^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\text{mes}(\gamma^0)} \frac{C}{2} \left(\int_{\gamma^0} v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 \left(\sqrt{\varepsilon} \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \|v\|_{L^2(\gamma^0)} \right). \end{aligned}$$

Précisons que C_1 est une constante strictement positive indépendante de ε égale à $\sqrt{L}C$.

Nous utilisons les inégalités (I.20) et (I.21), nous montrons qu'il existe une constante C_2 strictement positive indépendante de ε telle que

$$|\langle \nabla z, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon}| \leq 2C_1 \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\varepsilon} \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \leq C_2 \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{III.9})$$

En prenant $z = v$ dans (III.9) et par le lemme 1, nous avons

$$\alpha_\varepsilon \|z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|\nabla z\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C_2 \sqrt{\varepsilon} \|z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \text{avec} \quad \alpha_\varepsilon := \frac{1}{4(1+\varepsilon)^2 + 1},$$

ainsi que par l'inégalité triangulaire nous avons

$$\|r_\varepsilon^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|s\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_2}{\alpha_\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} + \|s\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{III.10})$$

Calculons maintenant l'expression de s dans la norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \|s\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &= \|s\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla s\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C}{2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} x_2^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C}{2} \sqrt{L} \left(\int_{\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 x_2^2 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{2} \sqrt{\text{mes}(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \\ &\leq \frac{C}{2} \sqrt{L} \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\varepsilon} \right) \leq C \sqrt{L} \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

En conclusion nous injectons cette dernière inégalité dans (III.10), nous avons montré le résultat

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

suisant : Il existe une constante C_0 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|r_\varepsilon^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_0 \sqrt{\varepsilon}.$$

La preuve est complète. □

Par la technique de transposition et grâce à la dernière proposition 14, nous montrons le résultat suivant

Proposition 15. *La solution $u_{\text{ext},1}^0$ converge fortement dans $L^2(\Omega_0)$ vers u_ε et il existe une constante \widetilde{C}_0 strictement positive indépendante de ε telle que*

$$\|u_\varepsilon - u_{\text{ext},1}^0\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \widetilde{C}_0 \varepsilon. \quad (\text{III.11})$$

Preuve. De la même manière que pour la démonstration de la dernière proposition, posons la différence $r_\varepsilon^0 = u_\varepsilon - u_{\text{ext},1}^0$ c'est la solution du problème (III.6). Pour estimer l'erreur r_ε^0 dans la norme $L^2(\Omega_0)$, la technique de dualité (ou de transposition) nous ramène à estimer $\|u_\varepsilon - u_{\text{ext},1}^0\|_{L^2(\Omega_0)}$. Pour ce faire nous partons du problème dual. Pour $\varphi \in L^2(\Omega_0)$, nous étudions le problème suivant

$$\begin{cases} v \in H^2(\Omega_0) \\ -\Delta v = \varphi & \text{sur } \Omega_0 \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma^0 \\ v \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases}$$

Rappelons que l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_0)$ est le dual topologique de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_0)$. Notons alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}}$ le crochet de dualité correspondant. Nous cherchons la formulation variationnelle, par la formule de Green nous avons

$$\begin{aligned} \langle \varphi, r_\varepsilon^0 \rangle_{\Omega_0} &= -\langle \Delta v, r_\varepsilon^0 \rangle_{\Omega_0} = \langle \nabla r_\varepsilon^0, \nabla v \rangle_{\Omega_0} - \left\langle r_\varepsilon^0, \frac{\partial v}{\partial n} \right\rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_0), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_0)} \\ &= -\langle \Delta r_\varepsilon^0, v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\partial\Omega_0} v \frac{\partial r_\varepsilon^0}{\partial n} d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} r_\varepsilon^0 \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \\ &= -\int_{\gamma^0} r_\varepsilon^0 \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = \int_{\gamma^0} r_\varepsilon^0 \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1. \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Précisons que $\frac{\partial v}{\partial n}$ désignera toujours la dérivée par rapport à la normale sortante du domaine lisse Ω_0 . De l'expression (III.12) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous tirons que

$$\left| \langle \varphi, r_\varepsilon^0 \rangle_{\Omega_0} \right| \leq \left| \int_{\gamma^0} r_\varepsilon^0 \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1 \right| \leq \|r_\varepsilon^0\|_{L^2(\gamma^0)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\gamma^0)}. \quad (\text{III.13})$$

Ainsi, grâce à l'inégalité de Rellich [61, p 261-263] il existe une constante K strictement positive telle que

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\gamma^0)} \leq K \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.14})$$

D'après l'inégalité (I.21) dans la proposition 3, il existe une constante C_1 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|r_\varepsilon^0\|_{L^2(\gamma^0)} \leq \sqrt{\varepsilon} \|\nabla r_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon} \|r_\varepsilon^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{III.15})$$

En regroupant toutes les estimations obtenues précédemment (III.14) et (III.15) dans (III.13), nous obtenons

$$\left| \langle \varphi, r_\varepsilon^0 \rangle_{\Omega_0} \right| \leq KC_1 \sqrt{\varepsilon} \|r_\varepsilon^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

En prenant $r_\varepsilon^0 = \varphi$ et à l'aide de l'inégalité (III.5) dans la proposition 14, nous concluons qu'il existe une constante \widetilde{C}_0 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|r_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_0)} \leq KC_1 \sqrt{\varepsilon} \|r_\varepsilon^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \widetilde{C}_0 \varepsilon.$$

La preuve est complète. □

Dans la suite, on s'intéresse à développer des approximations d'ordre plus élevé en introduisant des correcteurs, en particulier des approximations à l'ordre un.

De plus la fonction $u_{\text{ext},1}^0$ vérifie bien le problème aux limites (III.2) sur Ω_0 , mais ne vérifie pas la condition de Dirichlet sur γ_ε . Il faut donc introduire un correcteur couche limite qui va corriger à l'ordre ε cette erreur sur γ_ε .

2.2 Problème cellulaire

On débute par l'introduction d'un pseudo-correcteur $v_1(x, y) = v_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$ défini dans Ω_ε à l'ordre ε tel que le développement asymptotique à deux échelles de u_ε s'écrit

$$u_\varepsilon(x) \simeq u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon v_1(x, y) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon.$$

On substitue notre Ansatz dans (III.1), le nouveau pseudo-correcteur v_1 satisfait :

$$-\Delta_y v_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \quad (\text{III.16})$$

De plus, la condition aux limites à la paroi $u_\varepsilon = 0$ doit être satisfaite à l'ordre ε et donc

$$u_\varepsilon = u_{\text{ext},1}^0 + \varepsilon v_1 = 0 \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon. \quad (\text{III.17})$$

On remarque que, si on étend $u_{\text{ext},1}^0$ sur le domaine $\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0$ par un développement de Taylor, la condition aux limites (III.17) s'écrit

$$\varepsilon v_1 |_{\gamma_\varepsilon} = -u_{\text{ext},1}^0 |_{\gamma_\varepsilon} = -x_2 \frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2}(x_1, 0) = -\varepsilon \frac{x_2}{\varepsilon} \frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2}(x_1, 0) = -\varepsilon y_2 \frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2}(x_1, 0),$$

et donc

$$v_1(x, y) = -y_2 \frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2}(x_1, 0) \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon. \quad (\text{III.18})$$

Le nouveau pseudo-correcteur v_1 doit à la fois être solution de l'équation (III.16), et vérifier la condition aux limites (III.18). Donc par linéarité, on définit

$$v_1(x, y) = \beta_1(y) \frac{\partial u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2}(x_1, 0) = \beta_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{C}{2} \beta_1(y) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad (\text{III.19})$$

avec $\beta_1(y)$ solution du problème cellule suivant

$$\begin{cases} -\Delta \beta_1 = 0 & \text{sur } Z^+ \cup P \\ \beta_1 = -y_2 & \text{sur } P^0 \\ \beta_1 \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r, \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

dont les définitions de Z^+ , P et P^0 sont rappelées dans la figure III.2 ci-dessous, avec $y_1 \in [0, 2\pi]$ et $y_2 \in [\tilde{\gamma}(y_1), +\infty[$. Le bord P^0 est paramétré comme le graphe d'une fonction bornée 2π -périodique $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ de classe C^∞ telle que

$$P^0 = \{(y_1, y_2) \in [0, 2\pi] \times [-1, 0[, y_2 = \tilde{\gamma}(y_1)\}, \quad \text{avec } \frac{L}{\varepsilon} = 2\pi k, \text{ pour un } k \in \mathbb{N}^*.$$

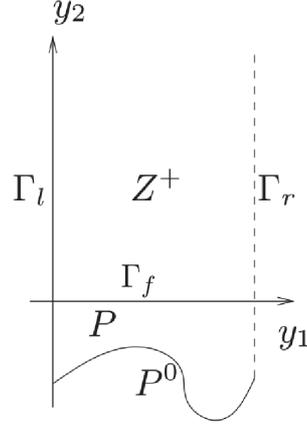


Figure III.2 – Cellule de périodicité

Lemme 7. *Le problème (III.20) est harmonique sur une bande infinie dans la direction verticale y_2 , β_1 tend vers une constante non nulle à l'infini. Cette constante est égale à la moyenne de β_1 dans la direction axiale (interface fictive) :*

$$\lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \beta_1(y) = \overline{\beta_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_1(y_1, 0) dy_1. \quad (\text{III.21})$$

Preuve. Soit β_1 la solution du problème cellulaire dans Z^+ .

$$\begin{cases} -\Delta \beta_1 = 0 & \text{dans } Z^+, \\ \beta_1(y) = \beta_1(y_1, 0) & \text{sur } \Gamma_f. \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

On décompose β_1 en série de Fourier dans Z^+ , alors la solution du (III.22) s'écrit sous la forme suivante :

$$\beta_1(y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(\beta_1(y_2)) e^{iky_1}, \quad \text{pour tout } y \in Z^+. \quad (\text{III.23})$$

On injecte (III.23) dans (III.22), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} c_k''(\beta_1(y_2)) - k^2 c_k(\beta_1(y_2)) = 0, & y_2 \in \mathbb{R}_+, \\ c_k(\beta_1(0)) = \eta_k, & \text{si } y_2 = 0, \end{cases} \quad \text{avec } \eta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_1(y_1, 0) e^{iky_1} dy_1.$$

Alors la solution β_1 dans Z^+ s'écrit explicitement

$$\beta_{|Z^+} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k e^{-|k|y_2 + ik y_1}, \quad \text{pour tout } y \in Z^+. \quad (\text{III.24})$$

Pour achever, on fait tendre $y_2 \rightarrow +\infty$ on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \beta_1(y) &= \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k e^{-|k|y_2+iky_1} = \eta_0 + \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \eta_k e^{-|k|y_2+iky_1} \\ &= \eta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_1(y_1, 0) dy_1 = \overline{\beta_1}. \end{aligned}$$

La preuve est complète. □

2.3 Existence et unicité du problème cellulaire

Nous définissons l'espace fonctionnel $D^{1,2}(Z^+ \cup P)$ tel que

$$D^{1,2}(Z^+ \cup P) = \left\{ v \in L^1_{loc}(Z^+ \cup P) \text{ tel que } \nabla v \in L^2(Z^+ \cup P), v \text{ est } y_1\text{-périodique sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r \right\}, \quad (\text{III.25})$$

et nous considérons $D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$ le sous-espace de $D^{1,2}(Z^+ \cup P)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle u, v \rangle = \int_{Z^+ \cup P} \nabla u(y) \nabla v(y) dy, \quad (\text{III.26})$$

et de la norme $\|u\|_{D_0^{1,2}} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ tel que

$$D_0^{1,2}(Z^+ \cup P) = \left\{ v \in D^{1,2}(Z^+ \cup P) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } P^0 \right\}. \quad (\text{III.27})$$

Proposition 16. *Le problème (III.20) admet une unique solution β_1 dans $D^{1,2}(Z^+ \cup P)$.*

Preuve. On pose $s = y_2 \mathbb{1}_{[P]}$, où $\mathbb{1}_{[\cdot]}$ représente la fonction caractéristique. La fonction $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 - s$ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\beta}_1 = \delta_{\Gamma_f} & \text{dans } Z^+ \cup P \\ \tilde{\beta}_1 = 0 & \text{sur } P^0, \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

avec δ_{Γ_f} désigne la mesure de Dirac sur l'interface fictive $\Gamma_f = \{y_1 \in [0, 2\pi]; y_2 = 0\}$. On peut écrire la formulation variationnelle du problème (III.28) sous la forme :

$$a(\tilde{\beta}_1, v) = l(v) \quad \text{telles que } \tilde{\beta}_1, v \in D_0^{1,2}(Z^+ \cup P),$$

$$\text{avec } a(\tilde{\beta}_1, v) = \int_{Z^+ \cup P} \nabla \tilde{\beta}_1(y) \nabla v(y) dy \quad \text{et} \quad l(v) = \int_P \nabla s(y) \nabla v(y) dy.$$

Vérifions maintenant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (voir [29]).

1. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur $D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$, en effet $\tilde{\beta}_1 \rightarrow a(\tilde{\beta}_1, v)$ est une forme linéaire de $D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$ dans \mathbb{R} pour tout $v \in D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$, et $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique.
2. $a(\cdot, \cdot)$ est continue, en effet pour tout $v, \tilde{\beta}_1 \in D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$ nous avons

$$|a(\tilde{\beta}_1, v)| = \left| \int_{Z^+ \cup P} \nabla \tilde{\beta}_1(y) \nabla v(y) dy \right| \leq \| \tilde{\beta}_1 \|_{D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)} \|v\|_{D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)} .$$

3. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$, en effet pour tout $\tilde{\beta}_1 \in D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$ nous avons

$$a(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_1) = \int_{Z^+ \cup P} |\nabla \tilde{\beta}_1(y)|^2 dy = \| \tilde{\beta}_1 \|_{D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)}^2 .$$

4. $l(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur $D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$, en effet $v \rightarrow l(v)$ est linéaire de $D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$ dans \mathbb{R} et il existe une constante K strictement positive telle que

$$|l(v)| = \left| \int_P \nabla s(y) \nabla v(y) dy \right| \leq K \| \nabla s \|_{L^2(P)} \|v\|_{D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)} .$$

Par le théorème de Lax-Milgram, on conclut que le problème variationnel (III.28) admet une unique solution $\tilde{\beta}_1$ dans $D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$. □

2.4 Propriétés fondamentales de la solution microscopique du problème cellulaire

Nous allons montrer dans cette sous-section deux propositions fondamentales pour la solution microscopique β_1 du problème cellulaire en terme de normes à poids dans $Z^+ \cup P$. Dans la suite (Chapitre IV), nous utilisons ces propriétés pour étudier le comportement de correcteur couche limite en norme $H^2(Z^+ \cup P)$. Tout d'abord, introduisons la moyenne $\bar{\Gamma}$ de la fonction $(-\tilde{\gamma})$ sur une période 2π définie par

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\tilde{\gamma}(y_1)) dy_1. \tag{III.29}$$

Proposition 17. *Pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe une constante \tilde{C} strictement positive dépendant de α telle que*

$$\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma} \|_{L^2(P, e^{\alpha y_2})} + \| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})} \leq \tilde{C} \| \nabla_y \beta_1 \|_{L^2(Z^+ \cup P, e^{\alpha y_2})}. \tag{III.30}$$

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

Preuve. Nous commençons par développer les intégrales suivantes avec poids

$$\begin{aligned} & \left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma} \right\|_{L^2(P, e^{\alpha y_2})} + \left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})} \\ &= \left(\int_P e^{2\alpha y_2} \left| \beta_1 - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{Z^+} e^{2\alpha y_2} \left| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Notons dans toute la suite de cette preuve les quantités I_1 et I_2 égales à

$$I_1 = \int_{Z^+} e^{2\alpha y_2} \left| \beta_1(y_1, y_2) - \bar{\beta}_1 \right|^2 dy_1 dy_2 \quad \text{et} \quad I_2 = \int_P e^{2\alpha y_2} \left| \beta_1(y_1, y_2) - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma} \right|^2 dy_1 dy_2.$$

1) Nous nous intéressons tout d'abord à l'expression I_1 . La solution microscopique β_1 dans Z^+ s'écrit explicitement

$$\beta_{|Z^+} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\eta_k e^{-|k|y_2} \right) e^{iky_1} \quad \text{avec} \quad \eta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_1(y_1, 0) e^{iky_1} dy_1.$$

Par un simple calcul intégral, nous avons

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2 = \int_{Z^+} e^{2\alpha y_2} \left| \beta_1(y_1, y_2) - \bar{\beta}_1 \right|^2 dy_1 dy_2 \\ &= \int_{Z^+} e^{2\alpha y_2} \left| \beta_1(y_1, y_2) - \eta_0 \right|^2 dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\eta_k|^2 e^{-2|k|y_2} e^{2\alpha y_2} dy_1 dy_2 \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\eta_k|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2(|k|-\alpha)y_2} dy_2. \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Rappelons que $I_1 = \left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2 < +\infty$ si seulement si

$$\int_0^{+\infty} e^{-2(|k|-\alpha)y_2} dy_2 < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad |k| - \alpha > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*.$$

Par suite l'intégrale $I_1 = \left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2$ est finie pour tout $\alpha < 1$. Par ailleurs, les calculs des dérivées partielles d'ordre 1 de la solution cellulaire β_1 dans Z^+ donnent

$$\frac{\partial \beta_1(y)}{\partial y_1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} ik \left(\eta_k e^{-|k|y_2} \right) e^{iky_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \beta_1(y)}{\partial y_2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} -|k| \left(\eta_k e^{-|k|y_2} \right) e^{iky_1}.$$

En vertu des calculs ci-dessus, nous imposons l'hypothèse suivante $\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |k|^2 |\eta_k|^2 < +\infty$. Par

des majorations brutales de l'expression (III.32) nous avons donc

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\eta_k|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2(|k|-\alpha)y_2} dy_2 \leq 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |k|^2 |\eta_k|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2(|k|-\alpha)y_2} dy_2 \\ &\leq \int_{Z^+} e^{2\alpha y_2} |\nabla_y \beta_1|^2 dy_1 dy_2 = \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2. \end{aligned}$$

A l'issue de cette première partie, nous concluons que

$$I_1 = \|\beta_1 - \bar{\beta}_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2 \leq \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2 \quad \forall \alpha \in]0, 1[. \quad (\text{III.33})$$

2) Examinons à présent l'intégrale $I_2 = \|\beta_1 - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma}\|_{L^2(P, e^{\alpha y_2})}^2$. Pour cela, nous considérons la fonction $s = y_2 \mathbb{1}_P$. Nous définissons la solution $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 - s$ telle qu'elle vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\beta}_1 &= \delta_{\Gamma_f} & \text{dans } Z^+ \cup P \\ \tilde{\beta}_1 &= 0 & \text{sur } P^0, \end{cases}$$

où δ_{Γ_f} est la mesure de Dirac sur l'interface fictive Γ_f . Par application de l'inégalité suivante $(a + b + c)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)$ où a, b et c sont des réels quelconques, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_P e^{2\alpha y_2} |\beta_1 - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma}|^2 dy_1 dy_2 = \int_P e^{2\alpha y_2} |\tilde{\beta}_1 + s - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma}|^2 dy_1 dy_2 \\ &\leq 4 \left(\int_P e^{2\alpha y_2} |\tilde{\beta}_1|^2 dy + \int_P e^{2\alpha y_2} |s|^2 dy + \int_P e^{2\alpha y_2} |\bar{\beta}_1 - \bar{\Gamma}|^2 dy \right). \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Pour simplifier la présentation, nous notons les intégrales T_1, T_2 et T_3 telles que :

$$T_1 = \int_P e^{2\alpha y_2} |\tilde{\beta}_1|^2 dy, \quad T_2 = \int_P e^{2\alpha y_2} |s|^2 dy, \quad \text{et} \quad T_3 = \int_P e^{2\alpha y_2} |\bar{\beta}_1 - \bar{\Gamma}|^2 dy. \quad (\text{III.35})$$

Dans le reste de cette deuxième partie, nous nous intéressons aux expressions T_1, T_2 et T_3 . Nous commençons par traiter l'intégrale T_1 . Soit $\tilde{\beta}_1 \in D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$. Nous avons

$$\tilde{\beta}_1(y_1, y_2) - \tilde{\beta}_1(y_1, \tilde{\gamma}(y_1)) = \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^{y_2} \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial y_2}(y_1, t) dt.$$

En tenant compte que $\tilde{\beta}_1|_{P^0} = 0$ alors

$$\left| \tilde{\beta}_1(y_1, y_2) \right| \leq \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^{y_2} \left| \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right| dt \leq \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \left| \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right| dt.$$

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\tilde{\beta}_1(y_1, y_2)| \leq \sqrt{|\tilde{\gamma}(y_1)|} \left(\int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \left| \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \left| \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant par $e^{2\alpha y_2}$ dans la dernière inégalité et en intégrant sur P , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_P e^{2\alpha y_2} |\tilde{\beta}_1(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 &\leq \int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 e^{2\alpha y_2} \left(\int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \left| \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt \right) dy_2 dy_1 \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 (e^{2\alpha y_2} e^{-2\alpha t}) e^{2\alpha t} \left(\int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \left| \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt \right) dy_2 dy_1. \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Un calcul simple montre que $e^{-2\alpha t} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 e^{2\alpha y_2} dy_2 = e^{-2\alpha t} \left(\frac{1 - e^{2\alpha \tilde{\gamma}(y_1)}}{2\alpha} \right)$. Il est assez clair qu'il existe une constante strictement positive $\tilde{C}_0(\alpha) = \frac{e^{2\alpha} sh(\alpha)}{\alpha}$ telle que pour tout $t \in [\tilde{\gamma}(y_1), 0]$ nous avons

$$e^{-2\alpha t} \left(\frac{1 - e^{2\alpha \tilde{\gamma}(y_1)}}{2\alpha} \right) = e^{-2\alpha t + \alpha \tilde{\gamma}(y_1)} \left(\frac{2 sh(-\alpha \tilde{\gamma}(y_1))}{2\alpha} \right) \leq \frac{e^{2\alpha} sh(\alpha)}{\alpha}, \quad \text{pour tout } 0 < \alpha < 1.$$

Utilisant de cette dernière inégalité dans (III.36), nous avons

$$\int_P e^{2\alpha y_2} |\tilde{\beta}_1(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 \leq \tilde{C}_0 \int_P e^{2\alpha t} \left| \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt dy_1.$$

On conclut que l'intégrale T_1 satisfait l'inégalité suivante

$$T_1 \leq \tilde{C}_0 \left\| e^{\alpha y_2} \nabla_y \tilde{\beta}_1 \right\|_{L^2(P)}^2.$$

Étudions maintenant l'intégrale T_2 . Par une majoration brutale, nous avons

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_P e^{2\alpha y_2} |s|^2 dy = \int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 e^{2\alpha y_2} |y_2|^2 dy_1 dy_2, \quad \text{avec } -1 \leq \tilde{\gamma}(y_1) < 0 \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 e^{2\alpha y_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 |\nabla s|^2 e^{2\alpha y_2} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de déduire que

$$T_2 \leq \left\| e^{\alpha y_2} \nabla_y s \right\|_{L^2(P)}^2.$$

Il nous reste maintenant qu'à examiner l'intégrale T_3 . Par des majorations simples, nous montrons que pour tout $0 < \alpha < 1$:

$$T_3 = \int_P e^{2\alpha y_2} |\bar{\beta}_1 - \bar{\Gamma}|^2 dy \leq \int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 |\bar{\beta}_1 - \bar{\Gamma}|^2 dy_2 dy_1 \leq 2\pi (\bar{\beta}_1 - \bar{\Gamma})^2. \quad (\text{III.37})$$

Nous venons de vérifier que l'intégrale T_3 est majorée par une constante strictement positive dépendant de la moyenne de la solution microscopique sur l'interface fictive et de la moyenne $\bar{\Gamma}$ de la fonction $(-\tilde{\gamma})$. Cherchons une relation entre les moyennes $\bar{\beta}_1$, $\bar{\Gamma}$ et la norme $\|e^{\alpha y_2} \nabla_y \beta_1\|_{L^2(P)}$. Par la formule de Taylor à l'ordre 1, nous avons

$$\beta_1(y_1, 0) - \beta_1(y_1, \tilde{\gamma}(y_1)) = \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, t) dt.$$

En tenant compte que $\beta_1|_{P^0} = -y_2 = -\tilde{\gamma}(y_1)$ alors

$$\beta_1(y_1, 0) + \tilde{\gamma}(y_1) = \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, t) dt.$$

La majoration nous donne

$$\beta_1(y_1, 0) + \tilde{\gamma}(y_1) \leq |\beta_1(y_1, 0) + \tilde{\gamma}(y_1)| \leq \left| \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, t) dt \right| \leq \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right| dt.$$

Nous intégrons sur l'interface fictive $\Gamma_f = \{y_1 \in [0, 2\pi] \text{ et } y_2 = 0\}$, nous obtenons :

$$\int_0^{2\pi} \beta_1(y_1, 0) dy_1 - \int_0^{2\pi} (-\tilde{\gamma}(y_1)) dy_1 \leq \int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right| dt dy_1.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\int_0^{2\pi} \beta_1(y_1, 0) dy_1 - \int_0^{2\pi} (-\tilde{\gamma}(y_1)) dy_1 \leq \sqrt{2\pi |\tilde{\gamma}(y_1)|} \left(\int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt dy_1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III.38})$$

Nous multiplions l'inégalité (III.38) par l'inverse de la période 2π , il suit

$$\bar{\beta}_1 - \bar{\Gamma} \leq \left(\int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt dy_1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout $-1 < \tilde{\gamma}(y_1) < t < 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \overline{\beta_1} - \overline{\Gamma} &\leq \left(\int_P \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt dy_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_P e^{-2\alpha t} \left| e^{\alpha t} \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt dy_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^\alpha \|e^{\alpha y_2} \nabla_y \beta_1\|_{L^2(P)}. \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Nous injectons cette dernière inégalité (III.39) dans (III.37), alors il existe une constante strictement positive $\widetilde{C}_1 = 2\pi e^{2\alpha}$ telle que pour tout $0 < \alpha < 1$, nous avons

$$T_3 \leq 2\pi (\overline{\beta_1} - \overline{\Gamma})^2 \leq \widetilde{C}_1 \|e^{\alpha y_2} \nabla_y \beta_1\|_{L^2(P)}^2. \quad (\text{III.40})$$

Pour finir la deuxième partie de cette preuve, nous remplaçons les inégalités des expressions T_1, T_2 et T_3 dans l'inégalité (III.34), nous montrons qu'il existe une constante strictement positive $\widetilde{C}_2 = 4 \max(1, \widetilde{C}_0, \widetilde{C}_1)$ dépendante de α telle que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 4(T_1 + T_2 + T_3) \leq 4 \left(\widetilde{C}_0 \|e^{\alpha y_2} \nabla_y \tilde{\beta}_1\|_{L^2(P)}^2 + \|e^{\alpha y_2} \nabla_y s\|_{L^2(P)}^2 + \widetilde{C}_1 \|e^{\alpha y_2} \nabla_y \beta_1\|_{L^2(P)}^2 \right) \\ &\leq 4 \left(\max(1, \widetilde{C}_0) \|e^{\alpha y_2} \nabla_y (\tilde{\beta}_1 + s)\|_{L^2(P)}^2 + \widetilde{C}_1 \|e^{\alpha y_2} \nabla_y \beta_1\|_{L^2(P)}^2 \right) \\ &\leq \widetilde{C}_2 \|e^{\alpha y_2} \nabla_y \beta_1\|_{L^2(P)}^2. \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

Finalement, en regroupant les inégalités (III.33) et (III.41) dans (III.31), il vient

$$\|\beta_1 - \overline{\beta_1} + \overline{\Gamma}\|_{L^2(P, e^{\alpha y_2})} + \|\beta_1 - \overline{\beta_1}\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})} = \sqrt{I_1 + I_2} \leq \sqrt{2\widetilde{C}_2} \|e^{\alpha y_2} \nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z \cup P)}.$$

La preuve est complète. \square

Proposition 18. *Pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, il existe une constante \widetilde{K} strictement positive dépendante de α telle que*

$$\|e^{\alpha y_2} \nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z \cup P)} = \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z \cup P, e^{\alpha y_2})} \leq \widetilde{K}. \quad (\text{III.42})$$

Preuve. Soit $s = y_2 \mathbf{1}_{[P]}$. On définit $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 - s$ solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\beta}_1 = \delta_{\Gamma_f} & \text{dans } Z^+ \cup P \\ \tilde{\beta}_1 = 0 & \text{sur } P^0, \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

où δ_{Γ_f} la mesure de Dirac sur l'interface fictive Γ_f . On peut écrire la formulation faible du problème (III.43) sous la forme :

$$a(\tilde{\beta}_1, v) = l(v) \quad \text{pour toute fonction } \tilde{\beta}_1, v \in D_0^{1,2}(Z^+ \cup P),$$

avec

$$\begin{aligned} a(\tilde{\beta}_1, v) &= \int_{Z^+ \cup P} \nabla \tilde{\beta}_1(y) \nabla v(y) dy \\ &= \int_{Z^+} \nabla \tilde{\beta}_1(y) \nabla v(y) dy + \int_P \nabla \tilde{\beta}_1(y) \nabla v(y) dy := a_1(\tilde{\beta}_1, v) + a_2(\tilde{\beta}_1, v), \end{aligned}$$

et

$$l(v) = \int_P \nabla s(y) \nabla v(y) dy.$$

Soit la fonction $v(y)$ définie par

$$v(y) = \begin{cases} e^{2\alpha y_2} (\beta_1(y) - \bar{\beta}_1) & \text{dans } Z^+ \\ \tilde{\beta}_1(y) & \text{sur } P. \end{cases}$$

Par construction nous avons $v \in D_0^{1,2}(Z^+ \cup P)$ si et seulement si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. En dérivant la fonction $v(y)$ dans Z^+ nous avons

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = e^{2\alpha y_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial y_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y_2} = e^{2\alpha y_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} + 2\alpha e^{2\alpha y_2} (\beta_1 - \bar{\beta}_1).$$

Nous remplaçons les dérivées de la fonction $v(y)$ dans l'expression de $a_1(\cdot, \cdot)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |a_1(\tilde{\beta}_1, v)| &= |a_1(\beta_1, v)| = \left| \int_{Z^+} \nabla \beta_1(y) \nabla v(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{Z^+} e^{2\alpha y_2} \left[\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} \right)^2 \right] dy + \int_{Z^+} 2\alpha e^{2\alpha y_2} (\beta_1 - \bar{\beta}_1) \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} dy \right| \\ &\geq \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2 - 2\alpha \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})} \left(\int_{Z^+} e^{2\alpha y_2} (\beta_1 - \bar{\beta}_1)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Or d'après l'estimation (III.33) nous avons

$$\int_{Z^+} e^{2\alpha y_2} (\beta_1 - \bar{\beta}_1)^2 dy \leq \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2 \quad \text{avec } \alpha \in]0, 1[.$$

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

Par conséquent $|a_1(\beta_1, v)| \geq (1 - 2\alpha) \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2$, et donc pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, il existe une constante $c_0 = (1 - 2\alpha)$ strictement positive telle que

$$a_1(\tilde{\beta}_1, v) \geq c_0 \|\nabla_y \tilde{\beta}_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2. \quad (\text{III.44})$$

Cependant, $e^{2\alpha y_2} \leq 1 \quad \forall y \in P$. Donc

$$\int_P e^{2\alpha y_2} |\nabla \tilde{\beta}_1(y)|^2 dy \leq a_2(\tilde{\beta}_1, v) = a_2(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_1) = \int_P |\nabla \tilde{\beta}_1(y)|^2 dy,$$

ce qui prouve que

$$a_2(\tilde{\beta}_1, v) \geq \|\nabla_y \tilde{\beta}_1\|_{L^2(P, e^{\alpha y_2})}^2. \quad (\text{III.45})$$

Grâce aux inégalités (III.44) et (III.45), on déduit que

$$\begin{aligned} a(\tilde{\beta}_1, v) &= a_1(\tilde{\beta}_1, v) + a_2(\tilde{\beta}_1, v) \geq \min(1, c_0) \|\nabla_y \tilde{\beta}_1\|_{L^2(Z^+ \cup P, e^{\alpha y_2})}^2 \\ &= c_0 \|\nabla_y \tilde{\beta}_1\|_{L^2(Z^+ \cup P, e^{\alpha y_2})}^2. \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_P \nabla s(y) \nabla v(y) dy \right| = \left| \int_P \nabla s(y) \nabla \tilde{\beta}_1(y) dy \right| = \left| \int_P e^{-\alpha y_2} \nabla s(y) e^{\alpha y_2} \nabla \tilde{\beta}_1(y) dy \right| \\ &\leq \left(\int_P e^{2\alpha y_2} |\nabla \tilde{\beta}_1(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_P e^{-2\alpha y_2} |\nabla s(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{Z^+ \cup P} e^{2\alpha y_2} |\nabla \tilde{\beta}_1(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_P e^{-2\alpha y_2} |\nabla s(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\nabla_y \tilde{\beta}_1\|_{L^2(Z^+ \cup P, e^{\alpha y_2})} \|\nabla_y s\|_{L^2(P, e^{-\alpha y_2})}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\|\nabla_y s\|_{L^2(P, e^{-\alpha y_2})}^2 = \int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 e^{-2\alpha y_2} |\nabla s(y)|^2 dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 e^{-2\alpha y_2} dy_1 dy_2 \leq \frac{\pi(e^{2\alpha} - 1)}{\alpha}.$$

Alors la forme linéaire $l(\cdot)$ satisfait

$$l(v) \leq \left(\frac{\pi(e^{2\alpha} - 1)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla_y \tilde{\beta}_1\|_{L^2(Z^+ \cup P, e^{\alpha y_2})} \quad \text{avec } 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \quad (\text{III.47})$$

En utilisant les deux inégalités (III.46) et (III.47), il suit $\|\nabla_y \tilde{\beta}_1\|_{L^2(Z^+ \cup P, e^{\alpha y_2})} \leq \left(\frac{\pi(e^{2\alpha} - 1)}{\alpha c_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Cela permet immédiatement que

$$\|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z+\cup P, e^{\alpha y_2})} \leq \left(\frac{\pi(e^{2\alpha} - 1)}{\alpha c_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla_y s\|_{L^2(P, e^{\alpha y_2})}.$$

Comme

$$\|\nabla_y s\|_{L^2(P, e^{\alpha y_2})} = \left(\int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 e^{2\alpha y_2} |\nabla s(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^0 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi}.$$

On en conclut donc qu'il existe une constante \widetilde{K} strictement positive telle que

$$\|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z+\cup P, e^{\alpha y_2})} \leq \widetilde{K} \quad \text{avec} \quad \widetilde{K} = \left(\frac{\pi(e^{2\alpha} - 1)}{\alpha c_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2\pi} \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

La preuve est complète. □

Dans la suite, nous aurons également besoin des résultats suivants :

Lemme 8. *Dans le domaine macroscopique Ω_0 , le correcteur couche limite β_1 à l'ordre 1 satisfait*

$$\left\| \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \sqrt{\varepsilon} \left\| \beta_1(\cdot, 0) - \overline{\beta_1} \right\|_{L^2([0, 2\pi])}, \quad (\text{III.48})$$

avec K une constante strictement positive indépendante de ε .

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_0^1 \int_0^L \left| \beta_1(x_1, x_2) - \overline{\beta_1} \right|^2 dx_1 dx_2 = \varepsilon^2 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{L}{\varepsilon}} \left| \beta_1(y_1, y_2) - \overline{\beta_1} \right|^2 dy_1 dy_2 \\ &= \varepsilon^2 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{L}{\varepsilon}} \left| \beta_1(y_1, y_2) - \eta_0 \right|^2 dy_1 dy_2 \\ &\leq \varepsilon^2 \left(\left[\frac{L}{2\pi\varepsilon} \right] \right) \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\eta_k|^2 e^{-2|k|y_2} dy_2 dy_1 \\ &\leq \varepsilon^2 \left(\left[\frac{L}{2\pi\varepsilon} \right] \right) \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\eta_k|^2 \left(\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-y_2} dy_2 \right) dy_1 \\ &\leq \varepsilon^2 \left(\left[\frac{L}{2\pi\varepsilon} \right] \right) (1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}) \left\| \beta_1(\cdot, 0) \right\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 \\ &\leq K \varepsilon \left\| \beta_1(\cdot, 0) - \overline{\beta_1} \right\|_{L^2([0, 2\pi])}^2. \end{aligned}$$

Nous obtenons l'estimation voulue, ce qui termine la preuve. □

Proposition 19. *Nous avons*

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi\varepsilon} \beta_1 \left(\frac{x_1+t}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) dt = \overline{\beta_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_1(y_1, 0) dy_1, \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\varepsilon.$$

2.5 Approximation couche limite d'ordre 1 par l'approche d'Achdou et al.

On revient maintenant à notre approximation d'ordre 0, (III.3). Pour corriger l'erreur sur γ_ε , on soustrait la constante $\overline{\beta_1}$ à la fonction β_1 dans l'approximation globale, cela donne :

$$u_{\text{Ach},1}^1(x) = u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right). \quad (\text{III.49})$$

Lorsque l'on s'approche de l'interface γ^0 , l'influence de la constante à l'infini devient importante car elle n'est plus contrebalancée par la solution. Pour éviter cela, on corrige cette erreur par l'ajout d'un « contre-flot » solution de

$$\begin{cases} -\Delta d = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ d = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \\ d = 1 & \text{sur } \gamma^0 \\ d \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

La solution est explicite et est donnée par : $d(x) = (1 - x_2)$, pour tout $x \in \Omega_0$. On prolonge la solution $d(x)$ linéairement à tout $x = (x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon$. Ajouté au correcteur global cela s'écrit :

$$\begin{aligned} u_{\text{Ach},1}^1(x) &= u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon \overline{\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) (1 - x_2) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) \\ &= u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

On remarque alors qu'il reste encore une erreur en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ sur γ_ε , en effet $u_{\text{Ach},1}^1|_{\gamma_\varepsilon} = \varepsilon \left(-\overline{\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2} |_{\gamma^0} \right) x_2 = \varepsilon^2 \left(-\overline{\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2} |_{\gamma^0} \right) y_2 = \varepsilon^2 \left(-\overline{\beta_1} \frac{c}{2} \right) y_2$. Pour construire une approximation d'ordre 1 qui s'annule sur γ_ε , on répète alors le même procédé N fois et on obtient :

$$\begin{aligned} u_{\text{Ach},1}^N(x) &= u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) - \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \varepsilon \overline{\beta_1} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) (\varepsilon \overline{\beta_1})^2 \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) - \dots + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) (-\varepsilon \overline{\beta_1})^{N-1} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) (-\varepsilon \overline{\beta_1})^N \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \\
 & = u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(\sum_{k=0}^N (-\varepsilon \overline{\beta_1})^k \right) - \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \overline{\beta_1} x_2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} (-\varepsilon \overline{\beta_1})^k \right) \\
 & = u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} (-\varepsilon \overline{\beta_1})^k \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^N).
 \end{aligned}$$

Faisons tendre N vers l'infini, alors la série géométrique de terme $-\varepsilon \overline{\beta_1}$ est convergente pour ε suffisamment petit, de limite $\frac{1}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}}$. Ceci donne l'approximation couche limite exacte sur γ_ε qui s'écrit :

$$u_{\text{Ach},1}^\infty(x) = u_{\text{ext},1}^0(x) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right). \quad (\text{III.52})$$

Cette approximation satisfait la condition sur le bord γ_ε . Elle est ainsi solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_{\text{Ach},1}^\infty = C \mathbf{1}_{[\Omega_0]} & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_{\text{Ach},1}^\infty = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) & \text{sur } \Gamma^\infty \\ u_{\text{Ach},1}^\infty = 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ u_{\text{Ach},1}^\infty \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{III.53})$$

Nous améliorons dans les deux propositions suivantes, les résultats obtenus dans [28] (estimations successives loi de paroi d'ordre 1). En effet dans [28, page 8], D. Bresch et V. Milišić ont montré que l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},1}^\infty$ converge vers u_ε dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ et dans $L^2(\Omega_0)$ en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$.

L'amélioration de la vitesse de la convergence repose essentiellement sur l'inégalité de Poincaré dans la partie rugueuse (voir Chapitre I, Section 3, Proposition 3). Nous montrons un taux de convergence en $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ pour la norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$ et en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ pour la norme $L^2(\Omega_0)$.

Proposition 20. *Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors l'approximation $u_{\text{Ach},1}^\infty$ satisfait*

$$\|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}}, \quad (\text{III.54})$$

avec K_1 une constante strictement positive indépendante de ε .

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

Preuve. La stratégie est la même que celle dans la proposition 14. Posons la différence $r_\varepsilon^{1,\infty} = u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty$. Donc $r_\varepsilon^{1,\infty}$ est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta r_\varepsilon^{1,\infty} = C \mathbf{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^{1,\infty} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) & \text{sur } \Gamma^\infty \\ r_\varepsilon^{1,\infty} = 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ r_\varepsilon^{1,\infty} \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right.$$

Nous constatons que sur la paroi lisse Γ^∞ l'erreur $r_\varepsilon^{1,\infty}$ est non homogène. Pour cela, nous définissons astucieusement l'erreur $\mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty}$ telle que

$$\mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty} = r_\varepsilon^{1,\infty} - s \quad \text{avec } s = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) x_2 \mathbf{1}_{[\Omega_0]}. \quad (\text{III.55})$$

En raisonnant au sens des distributions, il est assez clair que la solution $\mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty}$ satisfaisant à des conditions de Dirichlet homogènes sur $\Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon$, c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty} = -\Delta r_\varepsilon^{1,\infty} + \Delta s & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty} = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty} \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{III.56})$$

Pour trouver la formulation variationnelle, nous multiplions la première équation du problème (III.56) par une fonction test $v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon)$ et nous appliquons la formule de Green :

$$\langle \nabla \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty}, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle -\Delta \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle -\Delta r_\varepsilon^{1,\infty} + \Delta s, v \rangle_{\Omega_\varepsilon}. \quad (\text{III.57})$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} \langle -\Delta r_\varepsilon^{1,\infty}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} &= -\langle r_\varepsilon^{1,\infty}, \Delta v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = -\langle u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty, \Delta v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle u_{\text{Ach},1}^\infty, \Delta v \rangle_{\Omega_\varepsilon} - \langle u_\varepsilon, \Delta v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \\ &= \left(-\langle \nabla u_{\text{Ach},1}^\infty, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u_{\text{Ach},1}^\infty \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \right) - \left(-\langle \nabla u_\varepsilon, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \right) \\ &= \left(-\langle \nabla u_{\text{Ach},1}^\infty, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} + \int_{\Gamma^\infty} u_{\text{Ach},1}^\infty \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \right) + \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \\ &= \left(\langle \Delta u_{\text{Ach},1}^\infty, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} + \int_{\Gamma^\infty} u_{\text{Ach},1}^\infty \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \right) + \langle -\Delta u_\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \\ &= \left(\langle -C \mathbf{1}_{\Omega_0}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} + \int_0^L u_{\text{Ach},1}^\infty(x_1, 1) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) dx_1 \right) + \langle C, v \rangle_{\Omega_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Signalons que n est la normale extérieure à $\partial\Omega_\varepsilon$. Examinons le laplacien de s .

$$\begin{aligned} \langle \Delta s, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} &= \langle s, \Delta v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle s, \Delta v \rangle_{\Omega_0} = -\langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\partial\Omega_0} s \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \\ &= -\langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\Gamma^\infty} \left(-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\bar{\beta}_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) dx_1. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème (III.56) est à présent

$$\langle \nabla \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty}, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle -\Delta \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle C, v \rangle_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} - \langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_0}.$$

Par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\left| \langle \nabla \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty}, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| \leq \left| \langle C, v \rangle_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \right| + \left| \langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_0} \right|. \quad (\text{III.58})$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à

$$\left| \langle \nabla \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty}, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| \leq C \sqrt{\text{mes}(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla s\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.59})$$

Par l'inégalité de type Poincaré (I.20), nous montrons une estimation du terme source dans la partie rugueuse dans $\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0$. En effet,

$$\left| \langle C, v \rangle_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \right| \leq C \sqrt{\text{mes}(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \leq C \sqrt{L} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)}. \quad (\text{III.60})$$

À présent, nous nous intéressons à la norme $\|\nabla s\|_{L^2(\Omega_0)}$. Un calcul explicite du gradient de s nous donne :

$$\nabla s = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\bar{\beta}_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) x_2 \mathbb{1}_{[\Omega_0]} \\ -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\bar{\beta}_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \mathbb{1}_{[\Omega_0]} \end{pmatrix}.$$

Grâce à la décomposition en série de Fourier du correcteur couche limite β_1 ainsi que par un simple changement de variable, nous prouvons une estimation de la quantité $\beta_1 - \bar{\beta}_1$ sur le bord Γ^∞ :

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right)^2 dx_1 &= \varepsilon \int_0^{\frac{L}{\varepsilon}} \left(\beta_1 \left(y_1, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right)^2 dy_1 \\ &\leq \varepsilon \left(\left[\frac{L}{2\pi\varepsilon} \right] \right) \int_0^{2\pi} \left| \beta_1 \left(y_1, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right|^2 dy_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \varepsilon \left(\left[\frac{L}{2\pi\varepsilon} \right] \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} e^{-\frac{2|k|}{\varepsilon}} |\eta_k|^2 \right) dy_1 \right. \\
 &\leq \varepsilon \left(\left[\frac{L}{2\pi\varepsilon} \right] e^{-\frac{2}{\varepsilon}} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\eta_k|^2 dy_1 \right. \\
 &:= \varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}} \left(\left[\frac{L}{2\pi\varepsilon} \right] \left\| \beta_1(\cdot, 0) - \overline{\beta_1} \right\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 \right),
 \end{aligned} \tag{III.61}$$

les crochets $[\cdot]$ désignant bien entendu la partie entière. Cette inégalité (III.61) nous permet d'estimer la norme $L^2(\Omega_0)$ de la deuxième composante du gradient de s , en effet :

$$\int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial s}{\partial x_2} \right|^2 dx \leq \frac{C}{2} \frac{\varepsilon^2 e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{(1 + \varepsilon \overline{\beta_1})} \left(\left[\frac{L}{2\pi\varepsilon} \right] \left\| \beta_1(\cdot, 0) - \overline{\beta_1} \right\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 \right). \tag{III.62}$$

Il nous reste à étudier la première composante du gradient de s . De la même manière que précédemment, la décomposition en série de Fourier de correcteur couche limite β_1 nous permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial s}{\partial x_1} \right|^2 dx &= \int_0^1 \int_0^L \left| \frac{1}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) x_2 \right|^2 dx_1 dx_2 \\
 &\leq \frac{1}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{C}{2} \left(\int_0^1 x_2^2 dx_2 \int_0^L \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx_1 \right) \\
 &\leq \frac{1}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{C}{2} \left(\int_0^1 x_2^2 dx_2 \int_0^L \left| \sum_{k \in \mathbb{N}^*} ik \eta_k e^{-\frac{|k|}{\varepsilon}} e^{ik \frac{x_1}{\varepsilon}} \right|^2 dx_1 \right) \\
 &\leq \frac{L}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \left(\frac{C}{6} \right) \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^2 |\eta_k|^2 e^{-\frac{2|k|}{\varepsilon}}.
 \end{aligned} \tag{III.63}$$

Nous constatons que la borne supérieure de la suite $U_k \in \mathbb{N}^*$ définie par $U_k = k e^{-\frac{2|k|}{\varepsilon}}$ est décroissante, majorée par son premier U_1 sous la condition que $\varepsilon \in]0, \frac{2}{\ln(2)}[$. Autrement dit, nous avons :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} \left(k e^{-\frac{2|k|}{\varepsilon}} \right) \leq e^{-\frac{2}{\varepsilon}}, \quad \text{pour tout } 0 < \varepsilon < \frac{2}{\ln(2)}.$$

Si nous imposons que $\beta_1(\cdot, 0) \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)$, alors en vertu de (III.63) nous obtenons

$$\int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial s}{\partial x_1} \right|^2 dx \leq \frac{L}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \left(\frac{C}{6} \right) \left(\sup_{k \in \mathbb{N}^*} k e^{-\frac{2|k|}{\varepsilon}} \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |k| |\eta_k|^2 \right) \leq e^{-\frac{2}{\varepsilon}} \left\| \beta_1(\cdot, 0) - \overline{\beta_1} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)}^2. \tag{III.64}$$

Finalement, en regroupant les deux estimations (III.62) et (III.64), il existe une constante \tilde{C} strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\nabla s\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \tilde{C} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \left\| \beta_1(\cdot, 0) - \bar{\beta}_1 \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)}. \quad (\text{III.65})$$

Nous remplaçons les estimations (III.60) et (III.65) dans (III.59), nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} \left| \langle \nabla \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty}, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| &\leq C\sqrt{L} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \tilde{C} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \left\| \beta_1(\cdot, 0) - \bar{\beta}_1 \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

En prenant $\mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty} = v$ dans (III.66) et par le lemme 1, nous avons

$$\alpha_\varepsilon \left\| \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \left\| \nabla \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left\| \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \text{avec} \quad \alpha_\varepsilon = \frac{1}{4(1+\varepsilon)^2 + 1}. \quad (\text{III.67})$$

Donc il vient

$$\left| \left\| r_\varepsilon^{1,\infty} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - \|s\|_{H^1(\Omega_0)} \right| \leq \left| \left\| r_\varepsilon^{1,\infty} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - \|s\|_{H^1(\Omega_0)} \right| \leq \left\| \mathcal{E}_\varepsilon^{1,\infty} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K \varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\alpha_\varepsilon} \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{III.68})$$

Examinons la norme $\|s\|_{H^1(\Omega_0)}$. De (III.65) et en vertu de l'estimation (III.61), nous pouvons tirer immédiatement l'existence d'une constante \tilde{K} strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|s\|_{H^1(\Omega_0)} = \|s\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla s\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \tilde{K} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \left\| \beta_1(\cdot, 0) - \bar{\beta}_1 \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)}. \quad (\text{III.69})$$

Pour finir cette preuve, nous injectons cette dernière inégalité (III.69) dans (III.68), alors il existe une constante K_1 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| r_\varepsilon^{1,\infty} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

Nous avons donc démontré la convergence de l'approximation couche limite d'ordre 1 vers u_ε dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ avec un taux de convergence en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ dû au terme source dans la partie rugueuse. \square

Maintenant par la même méthodologie de la proposition 15, nous montrons le résultat suivant

Proposition 21. Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors il existe une constante \widetilde{K}_1 strictement positive indépendante de ε telle que l'approximation $u_{\text{Ach},1}^\infty$ satisfait

$$\|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \widetilde{K}_1 \varepsilon^2. \quad (\text{III.70})$$

Preuve. Notons la différence $r_\varepsilon^{1,\infty} = u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty$ la solution du problème (III.56). Pour obtenir un ordre de convergence plus élevé de l'erreur $r_\varepsilon^{1,\infty}$ dans la norme $L^2(\Omega_0)$, nous utilisons la technique de dualité afin d'estimer $\|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{L^2(\Omega_0)}$.

Étant donné $\varphi \in L^2(\Omega_0)$, nous cherchons à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} v \in H^2(\Omega_0) \\ -\Delta v = \varphi & \text{sur } \Omega_0 \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma^0 \\ v \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases}$$

Le problème ci-dessus admet alors la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} \langle \varphi, r_\varepsilon^{1,\infty} \rangle_{\Omega_0} &= -\langle \Delta v, r_\varepsilon^{1,\infty} \rangle_{\Omega_0} = \langle \nabla r_\varepsilon^{1,\infty}, \nabla v \rangle_{\Omega_0} - \int_{\partial\Omega_0} r_\varepsilon^{1,\infty} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \\ &= -\langle \Delta r_\varepsilon^{1,\infty}, v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\partial\Omega_0} v \frac{\partial r_\varepsilon^{1,\infty}}{\partial n} d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} r_\varepsilon^{1,\infty} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \quad (\text{III.71}) \\ &= -\int_{\gamma^0} r_\varepsilon^{1,\infty} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \int_{\Gamma^\infty} r_\varepsilon^{1,\infty} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \end{aligned}$$

où n désigne la normale sortante au domaine Ω_0 . Ci-dessus, il faut comprendre l'intégrale sur $\partial\Omega_0$ comme un crochet de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_0)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_0)$. De l'expression (III.71), par l'inégalité triangulaire ainsi grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \langle \varphi, r_\varepsilon^{1,\infty} \rangle_{\Omega_0} \right| &\leq \left| \int_{\gamma^0} r_\varepsilon^{1,\infty} \frac{\partial v}{\partial n} + \int_{\Gamma^\infty} r_\varepsilon^{1,\infty} \frac{\partial v}{\partial n} \right| \leq \left| \int_{\gamma^0} r_\varepsilon^{1,\infty} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right| + \left| \int_{\Gamma^\infty} u_{\text{Ach},1}^\infty \frac{\partial v}{\partial x_2} \right| \\ &\leq \|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\gamma^0)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\gamma^0)} + \left| \int_0^L u_{\text{Ach},1}^\infty(x_1, 1) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) dx_1 \right|. \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Étudions le terme sur le bord γ^0 de cette dernière inégalité. Une utilisation directe de l'inégalité de Rellich [61, p 261-262] nous donne qu'il existe une constante C_1 strictement positive telle que

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\gamma^0)} \leq C_1 \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.73})$$

Par ailleurs par l'inégalité [Proposition 3, (I.21)], nous montrons qu'il existe une constante C_2 strictement positive telle que

$$\|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\gamma^0)} \leq \sqrt{\varepsilon} \|\nabla r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \leq C_2 \sqrt{\varepsilon} \|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{III.74})$$

En regroupant les deux inégalités obtenues (III.73) et (III.74), nous obtenons l'estimation suivante

$$\|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\gamma^0)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\gamma^0)} \leq C_1 C_2 \sqrt{\varepsilon} \|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.75})$$

Maintenant, examinons le terme sur le bord Γ^∞ de l'inégalité (III.71). L'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L u_{\text{Ach},1}^\infty(x_1, 1) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) dx_1 \right| &= \left| -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \bar{\beta}_1} \frac{C}{2} \int_0^L \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) dx_1 \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \bar{\beta}_1} \frac{C}{2} \int_0^L \left| \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) \right| dx_1 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \bar{\beta}_1} \frac{C}{2} \left(\int_0^L \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right)^2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) \right)^2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

De même par l'inégalité de Rellich [61, p 261-263], nous montrons qu'il existe une constante C_3 strictement positive telle que

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Gamma^\infty)} \leq C_3 \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.77})$$

En injectant l'estimation (III.65) dans (III.76), nous pouvons montrer l'existence d'une constante C_4 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left| \int_0^L u_{\text{Ach},1}^\infty(x_1, 1) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) dx_1 \right| \leq C_4 \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \|\beta_1(\cdot, 0) - \bar{\beta}_1\|_{L^2([0, 2\pi])} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Gamma^\infty)}.$$

Nous remplaçons l'inégalité (III.77) dans la dernière estimation, nous avons

$$\left| \int_0^L u_{\text{Ach},1}^\infty(x_1, 1) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) dx_1 \right| \leq C_3 C_4 \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \|\beta_1(\cdot, 0) - \bar{\beta}_1\|_{L^2([0, 2\pi])} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.78})$$

En réunissant les estimations (III.75) et (III.78) que nous avons obtenues dans (III.71), alors il

existe une constante \widetilde{K}_1 strictement positive telle que

$$\left| \langle \varphi, r_\varepsilon^{1,\infty} \rangle_{\Omega_0} \right| \leq \widetilde{K}_1 \sqrt{\varepsilon} \left(\|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Nous achevons cette preuve, en prenant $r_\varepsilon^{1,\infty} = \varphi$ et à l'aide de l'inégalité [Proposition 20, (III.54)], il suit

$$\|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \widetilde{K}_1 \sqrt{\varepsilon} \left(\|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) \leq \widetilde{K}_1 \sqrt{\varepsilon} \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) \leq 2\widetilde{K}_1 \varepsilon^2.$$

La preuve est complète. □

2.6 Moyenne de l'approximation couche limite d'ordre 1 dans la direction axiale

Le principe général des lois de paroi est de moyenner notre approximation $\langle u_{\text{Ach},1}^\infty \rangle$ dans la direction de périodicité. On considère donc :

$$u^1 := \overline{u_{\text{Ach},1}^\infty(x)} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi\varepsilon} u_{\text{Ach},1}^\infty(x_1 + t, x_2) dt.$$

On cherche maintenant à connaître les conditions au bord vérifiées par $u_{\text{Ach},1}^\infty$.

Sur le bord γ^0 nous avons : $u^1 := \overline{u_{\text{Ach},1}^\infty(x_1, 0)} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\overline{\beta_1}} \overline{\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0)$.

De plus

$$\overline{\frac{\partial u_{\text{Ach},1}^\infty}{\partial x_2}}(x_1, x_2) = \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(1 + \frac{1}{1 + \varepsilon\overline{\beta_1}} \overline{\frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\overline{\beta_1}} \overline{\beta_1} \right).$$

Comme $\overline{\frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}}(y_1, 0) = 0$, il suit

$$\overline{\frac{\partial u_{\text{Ach},1}^\infty}{\partial x_2}}(x_1, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\overline{\beta_1}} \overline{\beta_1} \right) = \frac{1}{1 + \varepsilon\overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0).$$

Il est assez clair que sur le bord γ^0 , nous avons la relation suivante :

$$\overline{u_{\text{Ach},1}^\infty}(x_1, 0) = \varepsilon \overline{\beta_1} \overline{\frac{\partial u_{\text{Ach},1}^\infty}{\partial x_2}}(x_1, 0).$$

On a donc dérivé une loi de paroi d'ordre 1 moyennée :

$$\begin{cases} -\Delta u^1 = & C & \text{sur } \Omega_0 \\ u^1 = & \varepsilon \overline{\beta_1} \frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) & \text{sur } \gamma^0 \\ u^1 = & 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \\ u^1 & \text{est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases} \quad (\text{III.79})$$

-Existence et unicité du problème de paroi d'ordre 1 avec une condition de type Robin :

Soit $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$ le sous-espace fermé de $H^1(\Omega_0)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_0} (u(y) v(y) + \nabla u(y) \nabla v(y)) dy, \quad (\text{III.80})$$

et de la norme $\|v\|_{\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ tel que

$$\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0), v = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty, v \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s\}. \quad (\text{III.81})$$

Les conditions aux limites de problème (III.79) contiennent des dérivés normales du premier ordre de type Robin. Nous énonçons sans démonstration dans le lemme ci-dessous le résultat de convergence suivant, (la preuve est classique, similaire à celle que nous développerons dans la suite pour montrer le Théorème 6).

Lemme 9. *Le problème (III.79) admet une unique solution u^1 dans $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$, dont la solution explicite est :*

$$u^1(x) = -\frac{C}{2} \left(x_2^2 - \frac{x_2}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} - \frac{\varepsilon \overline{\beta_1}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \right). \quad (\text{III.82})$$

- Lien entre l'approximation couche limite et la loi de paroi moyennée d'ordre 1 :

Ré-écrivons l'expression de l'approximation couche limite d'ordre 1

$$\begin{aligned} u_{\text{Ach}, 1}^\infty(x) &= u_{\text{ext}, 1}^0(x) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \\ &= u_{\text{ext}, 1}^0(x) + \frac{\varepsilon \overline{\beta_1}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) (1 - x_2) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right). \end{aligned}$$

Nous vérifions aisément que

$$u^1 := \overline{u_{\text{Ach}, 1}^\infty}(x_1, x_2) = u_{\text{ext}, 1}^0(x) + \frac{\varepsilon \overline{\beta_1}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) (1 - x_2).$$

Cela entraîne la relation suivante

$$u_{\text{Ach},1}^\infty(x) = u^1 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) = u^1 + \varepsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right). \quad (\text{III.83})$$

- *Estimations d'erreur pour la loi de paroi moyennée d'ordre 1 :*

Pour évaluer l'erreur que l'on commet en utilisant ce type d'approximation, nous établissons des estimations dans les normes usuelles liées aux problèmes elliptiques : à savoir L^2 et H^1 . Cependant, comme on restreint les lois de paroi au domaine lisse, ces dernières normes sont évaluées sur Ω_0 . On commence par énoncer le résultat de convergence, pour la loi de paroi moyennée d'ordre 1.

Proposition 22. *Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que la loi de paroi 1 moyennée satisfait*

$$\|u_\varepsilon - u^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{III.84})$$

Preuve. Pour estimer $u_\varepsilon - u^1$, nous introduisons l'approximation couche limite d'ordre 1 :

$$u_\varepsilon - u^1 = (u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty) + (u_{\text{Ach},1}^\infty - u^1) = (u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right).$$

Par inégalité triangulaire, nous avons

$$\|u_\varepsilon - u^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{L^2(\Omega_0)} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left\| \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

D'autre part, grâce à l'inégalité [Proposition 21, (III.70)] et l'inégalité (III.48) dans le lemme 8 nous pouvons conclure qu'il existe une constante K strictement positive telle que

$$\|u_\varepsilon - u^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \left(\varepsilon^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \right) \leq 2K\varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

La preuve est complète. □

Proposition 23. *Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors il existe deux constantes K_0 et K_1 strictement positives indépendantes de ε telles que la loi de paroi 1 moyennée satisfait*

$$K_0\sqrt{\varepsilon} \leq \|\nabla(u_\varepsilon - u^1)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K_1\sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{III.85})$$

Preuve. Nous utilisons un raisonnement analogue à celui qui est fait dans la proposition 22, nous introduisons l'approximation couche limite d'ordre 1 nous avons

$$\begin{aligned}\nabla(u_\varepsilon - u^1) &= \nabla(u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty) + \nabla(u_{\text{Ach},1}^\infty - u^1) \\ &= \nabla(u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty) + \nabla\left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\overline{\beta}_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \overline{\beta}_1\right)\right).\end{aligned}$$

Rappelons que la dérivée partielle d'ordre 1 de u_0 sur le bord γ^0 vérifie toujours $\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{C}{2}$. Grâce à l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\left\|\nabla(u_\varepsilon - u^1)\right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \left\|\nabla(u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty)\right\|_{L^2(\Omega_0)} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\overline{\beta}_1} \frac{C}{2} \left\|\nabla\left(\beta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \overline{\beta}_1\right)\right\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.86})$$

Pour la norme à droite (du gradient de correcteur couche limite d'ordre 1), nous effectuons un changement de variable et nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(\beta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \overline{\beta}_1\right)\right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^2 \left|\partial_{x_i} \beta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx = \sum_{k=1}^{E\left(\frac{L}{2\pi\varepsilon}\right)} \left(\int_{(Z^+)_k} \sum_{i,j=1}^2 \left|\frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \beta_1(y)\right|^2 \varepsilon^2 dy\right) \\ &\leq \frac{L}{2\pi\varepsilon} \left(\int_{Z^+} \sum_{i=1}^2 |\partial_{y_i} \beta_1(y)|^2 dy\right).\end{aligned}$$

Nous utilisons le fait que $\beta_1 \in D^{1,2}(Z^+ \cup P)$, il est facile de voir qu'il existe une constante C_1 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\|\nabla\left(\beta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \overline{\beta}_1\right)\right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \left(\frac{L}{2\pi\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla\beta_1\|_{L^2(Z^+)} \leq \left(\frac{L}{2\pi\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla\beta_1\|_{L^2(Z^+ \cup P)} \leq \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{III.87})$$

Finalement, il nous suffit d'injecter l'estimation (III.87) dans l'inégalité (III.86) et compte tenu de l'inégalité [Proposition 20, (III.54)] nous obtenons : il existe une constante K_1 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\|\nabla(u_\varepsilon - u^1)\right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K_1 \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\varepsilon}\right) \leq 2K_1\sqrt{\varepsilon}.$$

D'autre part, nous pouvons montrer une minoration du gradient de la différence entre la solution u_ε et la solution de la loi de paroi moyennée d'ordre 1. Il suffit d'utiliser astucieusement la partie entière, c'est à dire

$$\frac{L}{2\pi\varepsilon} - 1 < E\left(\frac{L}{2\pi\varepsilon}\right) \leq \frac{L}{2\pi\varepsilon} < E\left(\frac{L}{2\pi\varepsilon}\right) + 1.$$

En effet, par l'inégalité triangulaire, il suit

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\beta_1} \frac{C}{2} \left\| \nabla \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \right\|_{L^2(\Omega_0)} - \|\nabla(u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|\nabla(u_\varepsilon - u^1)\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.88})$$

Par un simple calcul pour la norme à gauche, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^2 \left| \partial_{x_i} \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx = \sum_{k=1}^{E(\frac{L}{2\pi\varepsilon})} \left(\int_{(Z^+)_k} \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \beta_1(y) \right|^2 \varepsilon^2 dy \right) \\ &\geq \frac{L - 2\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \left(\int_{Z^+} \sum_{i=1}^2 |\partial_{y_i} \beta_1(y)|^2 dy \right). \end{aligned}$$

Or nous avons $\beta_1 \in D^{1,2}(Z^+ \cup P)$, par conséquent il existe une constante \widetilde{C}_1 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| \nabla \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \geq \left(\frac{L - 2\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla\beta_1\|_{L^2(Z^+)} \geq \left(\frac{L - 2\pi}{2\pi\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla\beta_1\|_{L^2(Z^+)} \geq \frac{\widetilde{C}_1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{III.89})$$

Nous achevons la preuve en remplaçant cette dernière estimation (III.89) dans l'inégalité (III.88) et grâce à l'inégalité [Proposition 20, (III.54)], nous montrons qu'il existe deux constantes $K_0 < C_0$ strictement positives indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{C_0 - K_0}{C_0}[$, nous avons

$$\|\nabla(u_\varepsilon - u^1)\|_{L^2(\Omega_0)} \geq C_0 (\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon^{\frac{3}{2}}) \geq K_0 \sqrt{\varepsilon}.$$

La preuve est complète. □

3 Loi de paroi d'ordre 2

3.1 Extension d'ordre 2 du profil de Poiseuille

De la même façon que dans la sous-section 2.1, on peut étendre le profil de Poiseuille sur tout le domaine Ω_ε en prenant

$$\begin{aligned} u_{\text{ext},2}^0(x) &= u_0 \mathbf{1}_{[\Omega_0]} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) x_2 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \frac{x_2^2}{2} \right) \mathbf{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} \\ &= u_0 \mathbf{1}_{[\Omega_0]} + \left(\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) y_2 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \frac{y_2^2}{2} \right) \mathbf{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]}, \quad \text{ici } y_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire $u_{\text{ext},2}^0$ explicitement

$$u_{\text{ext},2}^0(x) = \frac{C}{2} x_2 (1 - x_2) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \quad (\text{III.90})$$

Remarquons que la solution explicite du profil de Poiseuille dans Ω_0 est une fonction polynomiale d'ordre 2 qui est égale à son développement de Taylor à l'ordre 2.

L'extension d'ordre 2 du profil de Poiseuille peut s'avérer insuffisante pour approcher correctement u_ε . De la même façon que pour l'ordre 1, l'objectif est de développer une approximation d'ordre deux, de façon à diminuer l'erreur dans la norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Cependant la fonction $u_{\text{ext},2}^0$ ne vérifie pas la condition de Dirichlet sur γ_ε . Il faut donc introduire un correcteur couche limite du second ordre qui va corriger à l'ordre ε^2 cette erreur sur γ_ε .

3.2 Problème cellulaire d'ordre 2

La première phase est d'introduire un nouveau pseudo-correcteur $v_2(x, y) = v_2(x, \frac{x}{\varepsilon})$ défini dans Ω_ε à l'ordre ε^2 et d'approcher u_ε par

$$u_\varepsilon(x) \simeq u_{\text{ext},2}^0(x) + \varepsilon v_1(x, y) + \varepsilon^2 v_2(x, y) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon.$$

De la même manière que précédemment, on substitue notre Ansatz dans (III.1). Alors

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(-\Delta_y v_1) + (-\Delta_x u_{\text{ext},2}^0(x) - C) + (-\Delta_y v_2) + \left(-2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_1}{\partial y_i}\right) \\ + \varepsilon \left(-2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_2}{\partial y_i} - \Delta_x v_1\right) + \varepsilon^2 (-\Delta_x v_2) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \quad (\text{III.91})$$

Par l'expression du premier correcteur dans (III.19), on a

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_1}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\beta_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \Big|_{\gamma_0} \right) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{C}{2} \beta_1(y) \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad (\text{III.92})$$

alors le pseudo-correcteur y_1 -périodique v_2 , doit être solution de l'équation

$$-\Delta_y v_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \quad (\text{III.93})$$

De plus, la condition aux limites à la paroi $u_\varepsilon = 0$ doit être satisfaite à l'ordre ε^2 et donc

$$u_\varepsilon = u_{\text{ext},2}^0(x) + \varepsilon v_1(x, y) + \varepsilon^2 v_2(x, y) = 0 \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon. \quad (\text{III.94})$$

En procédant de la même façon qu'à l'ordre un, on étend $u_{\text{ext},2}^0$ à la paroi γ_ε par un développement de Taylor et on réécrit (III.94) comme

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 v_2 |_{\gamma_\varepsilon} &= -u_{\text{ext},2}^0 |_{\gamma_\varepsilon} - \varepsilon v_1 |_{\gamma_\varepsilon} = - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) x_2 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \frac{x_2^2}{2} \right) - \varepsilon \left(\left(-\frac{x_2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \right) \\ &= -\varepsilon^2 \frac{x_2^2}{2 \varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) = -\varepsilon^2 \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_{\text{ext},2}^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0), \end{aligned}$$

et donc

$$v_2(x, y) = -\frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_{\text{ext},2}^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon. \quad (\text{III.95})$$

Le nouveau pseudo-correcteur v_2 est solution du problème de Laplace (III.93), avec la condition aux limites (III.95) à la paroi. Donc par linéarité, v_2 s'écrit comme

$$v_2(x, y) = \frac{1}{2} \beta_2(y) \frac{\partial^2 u_{\text{ext},2}^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) = \frac{1}{2} \beta_2(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,$$

où le nouveau correcteur β_2 est solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta \beta_2 = 0 & \text{sur } Z^+ \cup P \\ \beta_2 = -y_2^2 & \text{sur } P^0 \\ \beta_2 \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{cases} \quad (\text{III.96})$$

avec la condition aux limites à l'infini, $\lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \beta_2(y) = \overline{\beta_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_2(y_1, 0) dy_1$.

Nous énonçons au passage des résultats similaires à ceux que nous avons énoncés pour le correcteur couche limite d'ordre 1.

Proposition 24. *Nous avons*

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi\varepsilon} \beta_2 \left(\frac{x_1 + t}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) dt = \overline{\beta_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_2(y_1, 0) dy_1, \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Lemme 10. *Il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que le correcteur couche limite β_2 à l'ordre 2 satisfait*

$$\left\| \beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_2} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \sqrt{\varepsilon} \left\| \beta_2(\cdot, 0) - \overline{\beta_2} \right\|_{L^2([0, 2\pi])}. \quad (\text{III.97})$$

3.3 Existence et unicité du problème cellulaire d'ordre 2

L'existence et l'unicité de la solution de (III.96) est obtenue dans la proposition ci-dessous qu'on

énonce sans démonstration. La démonstration est classique et est faite dans [28]. Rappelons l'espace fonctionnel $D^{1,2}(Z^+ \cup P)$ tel que

$$D^{1,2}(Z^+ \cup P) = \left\{ v \in L^1_{loc}(Z^+ \cup P) \text{ tel que } \nabla v \in L^2(Z^+ \cup P), v \text{ est } y_1\text{-périodique sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r \right\}.$$

Proposition 25 ([28, p.23]). *Le problème cellulaire (III.96) admet une unique solution β_2 dans $D^{1,2}(Z^+ \cup P)$.*

3.4 Approximation couche limite d'ordre 2 par l'approche d'Achdou et al.

Par la méthodologie de Achdou et al., on construit alors le correcteur couche limite CCL du second ordre

$$u_{\text{Ach},2}^1(x) = u_{\text{ext},2}^0(x) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left(\beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_2} x_2 \right).$$

L'erreur produite sur le bord par les deux approximations macroscopiques est encore linéaire, donc on peut itérer en corrigeant avec $\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1}$, ceci donne :

$$\begin{aligned} u_{\text{Ach},2}^N(x) = & u_{\text{ext},2}^0(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k (\varepsilon \overline{\beta_1})^k \right) \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \overline{\beta_2} x_2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \varepsilon \overline{\beta_2} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \left[\left(\sum_{j=0}^{N-2} (-1)^j (\varepsilon \overline{\beta_1})^j \right) \right]. \end{aligned}$$

Faisons tendre N vers l'infini, alors la série géométrique de terme $(-\varepsilon \overline{\beta_1})$ est convergente, de limite $\frac{1}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}}$. Ceci donne l'approximation couche limite exacte sur γ_ε qui s'écrit :

$$\begin{aligned} u_{\text{Ach},2}^\infty(x) = & \left[u_{\text{ext},2}^0(x) - u_{\text{ext},1}^0(x) \right] + u_{\text{Ach},1}^\infty(x) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left[\left(\beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_2} x_2 \right) - \frac{\varepsilon \overline{\beta_2}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \right] \\ = & u_{\text{ext},2}^0(x) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left[\left(\beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_2} x_2 \right) - \frac{\varepsilon \overline{\beta_2}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \right]. \end{aligned} \tag{III.98}$$

Cette approximation est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_{\text{Ach},2}^\infty = & C & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_{\text{Ach},2}^\infty = & \omega_\varepsilon & \text{sur } \Gamma^\infty \\ u_{\text{Ach},2}^\infty = & 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ u_{\text{Ach},2}^\infty & \text{est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s, \end{cases} \quad (\text{III.99})$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \omega_\varepsilon = & \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left[\left(\beta_2 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_2} \right) - \frac{\varepsilon \overline{\beta_2}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.100})$$

Dans la proposition suivante, nous énonçons les résultats de convergence entre la solution u_ε du problème (III.1) et l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},2}^\infty$ d'ordre 2 par l'approche d'Achdou et al. Nous montrons que l'erreur en norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$ et $L^2(\Omega_0)$ se comporte comme $\exp(-\frac{1}{\varepsilon})$.

Proposition 26. *Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},2}^\infty$ d'ordre 2 satisfait*

$$\|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C_2 \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad (\text{III.101})$$

avec C_1 et C_2 sont des constantes strictement positives indépendantes de ε .

Remarque 8. *De même manière, en procédant comme dans les propositions 20 et 21, nous pouvons montrer la convergence exponentielle des erreurs de la proposition ci-dessus 26. En effet, nous posons l'erreur $r_\varepsilon^{2,\infty} = u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty$. Donc $r_\varepsilon^{2,\infty}$ est la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^{2,\infty} = 0 & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^{2,\infty} = -\omega_\varepsilon & \text{sur } \Gamma^\infty \\ r_\varepsilon^{2,\infty} = 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ r_\varepsilon^{2,\infty} \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases}$$

Par comparaison avec l'erreur $r_\varepsilon^{1,\infty}$ la solution du problème (III.56), remarquons que l'erreur $r_\varepsilon^{2,\infty}$ la solution du problème ci-dessus est harmonique sur tout le domaine Ω_ε , par suite il n'y a pas un taux qui dépend de ε dû au terme source dans la partie rugueuse. Pourtant, ils restent des erreurs exponentiellement petites qui viennent des correcteurs couches limites β_1 et β_2 sur le bord Γ^∞ .

Bien entendu, toute cette discussion est basée sur le fait que la solution explicite du profil de

Poiseuille dans Ω_0 est une fonction polynomiale d'ordre 2 qui est égale à son développement de Taylor à l'ordre 2.

3.5 Moyenne de l'approximation couche limite d'ordre 2 dans la direction axiale

Une nouvelle façon de dériver les lois de parois à partir des correcteurs couches limites CCL, on peut construire une loi d'ordre 2 moyennée u^2 telle que

$$u^2 := \overline{u_{\text{Ach},2}^\infty}(x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi\varepsilon} u_{\text{Ach},2}^\infty(x_1 + t, x_2) dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} u^2 &= \overline{u_{\text{Ach},2}^\infty}(x_1, x_2) \\ &= u_{\text{ext},2}^0(x) + (1 - x_2) \left[\frac{\varepsilon \overline{\beta_1}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\varepsilon \overline{\beta_1} \overline{\beta_2}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \overline{\beta_2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \right]. \end{aligned}$$

On cherche maintenant les conditions au bord vérifiées par $\overline{u_{\text{Ach},2}^\infty}$. Sur le bord γ^0 , nous avons

$$\begin{aligned} \overline{u_{\text{Ach},2}^\infty}(x_1, 0) &= \frac{\varepsilon \overline{\beta_1}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left[\overline{\beta_2} - \frac{\varepsilon \overline{\beta_2} \overline{\beta_1}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \right] \\ &= \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \right) \left[\varepsilon \overline{\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \overline{\beta_2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \right]. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_{\text{Ach},2}^\infty}}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\beta_1}}{\partial y_2} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\beta_2}}{\partial y_2} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_2} \right) - \frac{\varepsilon \overline{\beta_2}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\beta_1}}{\partial y_2} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Comme $\overline{\partial_{y_2} \beta_1}(y_1, 0) = \overline{\partial_{y_2} \beta_2}(y_1, 0) = 0$, alors sur γ^0 on a :

$$\frac{\partial \overline{u_{\text{Ach},2}^\infty}}{\partial x_2}(x_1, 0) = \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \right) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\varepsilon^2}{2} \overline{\beta_2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \right].$$

De même, on montre que $\frac{\partial^2 \overline{u_{\text{Ach},2}^\infty}}{\partial x_2^2}(x_1, 0) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0)$, et donc sur γ^0 on a :

$$\overline{u_{\text{Ach},2}^\infty}(x_1, 0) = \varepsilon \overline{\beta_1} \frac{\overline{\partial u_{\text{Ach},2}^\infty}}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \overline{\beta_2} \frac{\overline{\partial^2 u_{\text{Ach},2}^\infty}}{\partial x_2^2}(x_1, 0).$$

On obtient donc une loi de paroi d'ordre 2 moyennée :

$$\begin{cases} -\Delta u^2 & = & C & \text{sur } \Omega_0 \\ u^2 & = & \varepsilon \overline{\beta_1} \frac{\partial u^2}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \overline{\beta_2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2}(x_1, 0) & \text{sur } \gamma^0 \\ u^2 & = & 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \\ u^2 & & \text{est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases} \quad (\text{III.102})$$

-Existence et unicité du problème de paroi d'ordre 2 avec une condition de type Wentcel :

Soit $\mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}(\Omega_0)$ le sous-espace fermé de $H^1(\Omega_0)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_0} (u(y) v(y) + \nabla u(y) \nabla v(y)) dy, \quad (\text{III.103})$$

et de la norme $\|v\|_{\mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ tel que

$$\mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0), v = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty, v \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s\}. \quad (\text{III.104})$$

On définit le sous-espace $\mathcal{H}^1(\Omega_0)$ tel que

$$\mathcal{H}^1(\Omega_0) = \{v \in \mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}(\Omega_0), v \in H^1(\gamma^0)\}. \quad (\text{III.105})$$

Les conditions aux limites du problème (III.102) contiennent des dérivées normales du second ordre de Type Wentcel [23, 44, 57]. Les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème (III.102) ne sont pas classiques et on les énonce sans démonstration dans le lemme ci-dessous.

Lemme 11 ([28, p.11]). *Le problème (III.102) admet une unique solution u^2 dans $\mathcal{H}^1(\Omega_0)$. Cette solution est explicite donnée par*

$$u^2(x) = -\frac{C}{2} \left(x_2^2 - \frac{x_2(1 + \varepsilon^2 \overline{\beta_2})}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} - \frac{\varepsilon(\overline{\beta_1} - \varepsilon \overline{\beta_2})}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \right). \quad (\text{III.106})$$

- Lien entre l'approximation couche limite et la loi de paroi moyennée d'ordre 2 :

Ré-écrivons l'expression de l'approximation couche limite d'ordre 2

$$\begin{aligned}
 u_{\text{Ach},2}^\infty(x) &= u_{\text{ext},2}^0(x) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\bar{\beta}_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 x_2 \right) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left[\left(\beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_2 x_2 \right) - \frac{\varepsilon\bar{\beta}_2}{1 + \varepsilon\bar{\beta}_1} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 x_2 \right) \right] \\
 &= u_{\text{ext},2}^0(x) + (1 - x_2) \left[\frac{\varepsilon\bar{\beta}_1}{1 + \varepsilon\bar{\beta}_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\varepsilon\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2}{1 + \varepsilon\bar{\beta}_1} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{\beta}_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \right] \\
 &\quad + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\bar{\beta}_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left[\left(\beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_2 \right) - \frac{\varepsilon\bar{\beta}_2}{1 + \varepsilon\bar{\beta}_1} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \right],
 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que

$$\begin{aligned}
 u_{\text{Ach},2}^\infty(x) &= u^2 + \varepsilon \left[\frac{1}{1 + \varepsilon\bar{\beta}_1} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{\beta}_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \right) \right] \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left(\beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_2 \right) \tag{III.107} \\
 &= u^2 + \varepsilon \frac{\partial u^2}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left(\beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_2 \right).
 \end{aligned}$$

- *Estimations d'erreur pour la loi de paroi moyennée d'ordre 2 :*

Par la même méthodologie utilisée dans la proposition 22, nous pouvons montrer le résultat de convergence pour la loi de paroi moyennée du second ordre

Proposition 27. *Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que la loi de paroi 2 moyennée satisfait*

$$\left\| u_\varepsilon - u^2 \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \tag{III.108}$$

Preuve. Nous introduisons l'approximation couche limite d'ordre 2 dans la différence $u_\varepsilon - u^2$, nous avons

$$\begin{aligned}
 u_\varepsilon - u^2 &= (u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty) + (u_{\text{Ach},2}^\infty - u^2) \\
 &= (u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty) + \varepsilon \frac{\partial u^2}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left(\beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_2 \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi par l'inégalité triangulaire, il suit

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u^2\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq \|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{C(1 + \varepsilon^2\beta_2)}{2(1 + \varepsilon\beta_1)} \left\| \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right\|_{L^2(\Omega_0)} + \frac{C\varepsilon}{2} \left\| \beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_2} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \right). \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser les résultats de la proposition 26 ainsi que les lemmes 8 et 10. Nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon - u^2\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \left(\sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^{\frac{5}{2}} \right) \leq 3K\varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

La preuve est complète. □

On voit que la loi de paroi d'ordre 2 ne fournit pas une meilleure approximation que celle d'ordre 1. L'inégalité (III.108) montre que les oscillations de correcteur couche limite du premier ordre $\frac{C\varepsilon}{2}(\beta_1(\frac{x}{\varepsilon}) - \overline{\beta_1})$ ont des amplitudes suffisamment grandes pour que si on ne les inclut pas dans la loi de paroi, celle-ci ne converge pas plus vite que $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$. Dans [8, page 209], Y. Achdou et al, avaient déjà constaté numériquement que la loi de paroi n'apportait pas une amélioration claire des résultats. Pour augmenter l'ordre de convergence, on construit alors les lois de paroi suivantes :

4 Loi de paroi multi-échelle

Dans cette sous-section, nous allons établir quelques nouvelles lois multi-échelles.

4.1 Loi de paroi explicite d'ordre 1

Nous considérons l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},1}^\infty$ d'ordre 1. Sur l'interface fictive γ^0 (à l'échelle macroscopique), sa valeur est calculée facilement. Grâce à l'expression (III.83), nous avons

$$\begin{aligned} u_{\text{Ach},1}^\infty|_{x_2=0} &= \left(u^1 + \varepsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) \right)_{|\gamma^0} \\ &= \varepsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) = \frac{C}{2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right). \end{aligned}$$

Pour corriger ce défaut des lois de paroi moyennées, on propose de résoudre un problème de Dirichlet non-homogène explicite sur γ^0 .

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathcal{U}_{\text{exp}}^1 = C \quad \text{sur } \Omega_0 \\ \mathcal{U}_{\text{exp}}^1 = \varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \quad \text{sur } \gamma^0 \\ \mathcal{U}_{\text{exp}}^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\ \mathcal{U}_{\text{exp}}^1 \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{III.109})$$

Nous montrons bien cette fois que la loi de paroi explicite d'ordre 1 converge vers u_ε dans $L^2(\Omega_0)$ en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ (et dans $H^1(\Omega_0)$ en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$). Nous améliorons les résultats obtenus dans [28, page 13]. En effet, dans [28] D. Bresch et V. Milišić ont trouvé un taux de convergence dans $L^2(\Omega_0)$ en $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$.

Proposition 28. *Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que la loi de paroi explicite d'ordre 1 satisfait*

$$\|\nabla(u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{III.110})$$

Preuve. Posons la quantité $r_{\text{exp},\varepsilon}^1 = u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1$. Nous introduisons l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},1}^\infty$ d'ordre 1, nous pouvons écrire $r_{\text{exp},\varepsilon}^1$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} r_{\text{exp},\varepsilon}^1 = u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1 &= \underbrace{(u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty)}_{r_\varepsilon^{1,\infty}} + \underbrace{(u_{\text{Ach},1}^\infty - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1)}_{\mathcal{E}_1}. \\ &:= r_\varepsilon^{1,\infty} + \mathcal{E}_1 \end{aligned} \quad (\text{III.111})$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\|\nabla r_{\text{exp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|\nabla r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla \mathcal{E}_1\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.112})$$

Grâce à l'inégalité (III.54) énoncée dans la proposition 20, nous avons

$$\|\nabla r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{III.113})$$

Maintenant, nous allons chercher une estimation de $\|\nabla \mathcal{E}_1\|_{L^2(\Omega_0)}$, nous résolvons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{E}_1 = & 0 & \text{sur } \Omega_0 \\ \mathcal{E}_1 = & 0 & \text{sur } \gamma^0 \\ \mathcal{E}_1 = & \varepsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) & \text{sur } \Gamma^\infty \\ \mathcal{E}_1 & \text{est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases}$$

Remarquons que l'erreur entre l'approximation couche limite d'ordre 1 et la loi de paroi explicite d'ordre 1 est non homogène sur le bord Γ^∞ . Pour cela, nous procédons comme dans la preuve de la proposition 20. Nous définissons l'expression \mathcal{W}_1 définie par

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{E}_1 - s \quad \text{avec} \quad s = \varepsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) x_2 \mathbf{1}_{[\Omega_0]}, \quad (\text{III.114})$$

où la quantité « s » est la même fonction donnée dans la preuve de la proposition 20. Nous précisons également que sur l'interface γ_0 , nous avons la relation suivante $\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{C}{2} \frac{1}{1+\varepsilon\beta_1}$. Clairement au sens des distributions, on voit que \mathcal{W}_1 vérifie le problème aux limites suivant avec des conditions de Dirichlet homogènes sur $\Gamma^\infty \cup \gamma_0$

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{W}_1 = -\Delta \mathcal{E}_1 + \Delta s & \text{sur } \Omega_0 \\ \mathcal{W}_1 = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_0 \\ \mathcal{W}_1 \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases} \quad (\text{III.115})$$

Nous pouvons écrire ce problème (III.115) sous forme variationnelle. En raisonnant au sens des distributions, on obtient facilement que

$$\langle \nabla \mathcal{W}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} = \langle -\Delta \mathcal{W}_1, v \rangle_{\Omega_0} = \langle -\Delta \mathcal{E}_1 + \Delta s, v \rangle_{\Omega_0}.$$

D'autre part, par la formule de Green nous avons

$$\begin{aligned} \langle -\Delta \mathcal{E}_1, v \rangle_{\Omega_0} &= \langle \nabla \mathcal{E}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} - \int_{\partial \Omega_0} \mathcal{E}_1 \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = \langle \nabla \mathcal{E}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} - \int_{\Gamma^\infty} \mathcal{E}_1 \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \\ &= \langle -\Delta u_{\text{Ach},1}^\infty, v \rangle_{\Omega_0} + \langle \Delta u_{\text{exp}}^1, v \rangle_{\Omega_0} - \int_{\Gamma^\infty} \mathcal{E}_1 \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \\ &= - \int_0^L \mathcal{E}_1(x_1, 1) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, 1) dx_1. \end{aligned}$$

Signalons que $\frac{\partial v}{\partial n}$ désignera toujours la dérivée par rapport à la normale sortante du domaine lisse Ω_0 . Examinons le laplacien de s .

$$\begin{aligned} \langle \Delta s, v \rangle_{\Omega_0} &= \langle s, \Delta v \rangle_{\Omega_0} = -\langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\partial\Omega_0} s \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = -\langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\Gamma^\infty} s \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1. \\ &= -\langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\Gamma^\infty} \mathcal{E}_1 \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème (III.115) est à présent

$$\langle \nabla \mathcal{W}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} = -\langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_0}.$$

Par l'inégalité triangulaire ainsi par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$|\langle \nabla \mathcal{W}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon}| \leq |\langle \nabla s, \nabla v \rangle_{\Omega_0}| \leq \|\nabla s\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.116})$$

Rappelons l'inégalité (III.65) prouvée dans la preuve de la proposition 20

$$\|\nabla s\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \tilde{C} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \|\beta_1(\cdot, 0) - \bar{\beta}_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)}.$$

avec \tilde{C} une constante strictement positive indépendante de ε . Nous remplaçons cette dernière estimation dans (III.116), il suit

$$|\langle \nabla \mathcal{W}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0}| \leq \tilde{C} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \|\beta_1(\cdot, 0) - \bar{\beta}_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.117})$$

En prenant $\mathcal{W}_1 = v$ dans (III.117), il vient

$$\|\nabla \mathcal{W}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \tilde{C} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \|\beta_1(\cdot, 0) - \bar{\beta}_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)}.$$

De (III.69) et par l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|\nabla \mathcal{E}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|\nabla \mathcal{W}_1\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla s\|_{L^2(\Omega_0)} \leq 2\tilde{C} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \|\beta_1(\cdot, 0) - \bar{\beta}_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)}. \quad (\text{III.118})$$

Pour finir, il nous suffit de regrouper les résultats obtenus dans (III.113) et (III.118). Alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\nabla r_{\text{exp}, \varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) \leq 2K \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

La preuve est complète. □

Proposition 29. *Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que la loi de paroi explicite d'ordre 1 satisfait*

$$\|u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \varepsilon^2. \quad (\text{III.119})$$

Preuve. La stratégie est la même que celle dans la preuve de la proposition précédente 28. Tout d'abord, nous considérons $r_{\text{exp},\varepsilon}^1$ la différence entre la solution u_ε et la solution de la loi de paroi explicite d'ordre 1. Ensuite, nous écrivons $r_{\text{exp},\varepsilon}^1$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} r_{\text{exp},\varepsilon}^1 &= u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1 = \underbrace{(u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty)}_{r_\varepsilon^{1,\infty}} + \underbrace{(u_{\text{Ach},1}^\infty - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1)}_{\mathcal{E}_1}. \\ &:= r_\varepsilon^{1,\infty} + \mathcal{E}_1 \end{aligned}$$

Ainsi par inégalité triangulaire, il suit

$$\|r_{\text{exp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\mathcal{E}_1\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.120})$$

Rappelons que d'après la proposition 21, nous avons

$$\|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \widetilde{K}_1 \varepsilon^2. \quad (\text{III.121})$$

Par l'inégalité de Poincaré dans le domaine macroscopique Ω_0 et grâce à l'inégalité (III.118), nous obtenons

$$\|\mathcal{E}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|\nabla \mathcal{E}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq 2\widetilde{C} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \|\beta_1(\cdot, 0) - \overline{\beta}_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0)}. \quad (\text{III.122})$$

Pour achever la preuve, en regroupant les estimations (III.121) et (III.122) dans (III.120), nous déduisons

$$\|r_{\text{exp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \left(\varepsilon^2 + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) \leq 2K \varepsilon^2,$$

avec K une constante strictement positive indépendante de ε . La preuve est complète. \square

4.2 Loi de paroi explicite d'ordre 2

En procédant comme dans la section précédente (la loi de paroi explicite d'ordre 1), nous pouvons calculer la valeur de l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},2}^\infty$ d'ordre 2 sur l'interface fictive γ^0 :

$$\begin{aligned}
 u_{\text{Ach},2}^\infty|_{x_2=0} &= \left(u^2 + \varepsilon \frac{\partial u^2}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left(\beta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_2} \right) \right) \Big|_{x_2=0} \\
 &= \varepsilon \frac{\partial u^2}{\partial x_2}(x_1, 0) \beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \beta_2 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Nous cherchons donc à résoudre un problème aux limites avec une condition de Dirichlet non-homogène explicite sur γ^0 d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 -\Delta \mathcal{U}_{\text{exp}}^2 &= C \quad \text{sur } \Omega_0 \\
 \mathcal{U}_{\text{exp}}^2 &= \varepsilon \beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) \frac{\partial u^2}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \beta_2 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \quad \text{sur } \gamma^0 \\
 \mathcal{U}_{\text{exp}}^2 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\
 \mathcal{U}_{\text{exp}}^2 &\text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s.
 \end{array} \right. \quad (\text{III.123})$$

Par le même procédé utilisé dans les propositions 28 et 29 et grâce aux résultats de la proposition 26, nous montrons une convergence exponentielle de la différence entre la solution u_ε et la solution de la loi de paroi explicite d'ordre 2. En effet, il suffit d'introduire l'approximation couche limite d'ordre 2. Le résultat de convergence est alors le suivant :

Proposition 30. *Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que la loi de paroi explicite d'ordre 2 satisfait*

$$\|\nabla(u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^2)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \|u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^2\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \quad (\text{III.124})$$

Remarque 9. *On voit que ces deux derniers procédés ((III.109) et (III.123)) sont explicites. Ils dépendent du calcul préalable de u^1 et u^2 .*

Question : *Une question que nous pouvons poser : Existe-t-il un moyen d'éviter la dépendance des lois de paroi d'ordre élevé par rapport aux approximations d'ordre inférieur ?*

Pour éviter d'avoir à calculer u^1 et u^2 , D. Bresch et V. Milišić [28] ont alors eu l'idée de transformer les lois (III.109) et (III.123) en des lois de paroi implicites.

4.3 Loi de paroi implicites

Pour répondre par l'affirmative à cette dernière question on se propose de résoudre pour la loi de paroi d'ordre 1 implicite le problème elliptique suivant, avec une condition aux limites de Robin :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \Upsilon_{\text{imp}}^1 = C \quad \text{sur } \Omega_0 \\ \Upsilon_{\text{imp}}^1 = \varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \frac{\partial \Upsilon_{\text{imp}}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \quad \text{sur } \gamma^0 \\ \Upsilon_{\text{imp}}^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\ \Upsilon_{\text{imp}}^1 \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{III.125})$$

Pour la loi de paroi d'ordre 2 implicite, on se propose d'étudier le problème aux limites avec une condition de Type Wentzel [23, 44, 57] :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \Upsilon_{\text{imp}}^2 = C \quad \text{sur } \Omega_0 \\ \Upsilon_{\text{imp}}^2 = \varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \frac{\partial \Upsilon_{\text{imp}}^2}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \beta_2\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \frac{\partial^2 \Upsilon_{\text{imp}}^2}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \quad \text{sur } \gamma^0 \\ \Upsilon_{\text{imp}}^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\ \Upsilon_{\text{imp}}^2 \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{III.126})$$

Étude de la loi de paroi implicite d'ordre 1

Comme nous aurons recours dans cette partie à une formulation variationnelle, rappelons brièvement l'espace fonctionnel $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$ prenant en compte la condition aux limites de Dirichlet

$$\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0), v = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty, v \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s\}.$$

Nous montrons dans le théorème ci-dessous l'existence et l'unicité de la loi de paroi implicite d'ordre 1.

Théorème 6. *On suppose que le bord P^0 est suffisamment régulier et qu'il ne coupe l'interface fictive Γ_f en aucun point. Alors le problème variationnel (III.125) admet une unique solution dans $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$.*

Démonstration. Nous commençons par écrire une formulation variationnelle du problème aux limites (III.131). Soit $v \in \mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$ une fonction test, alors par la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned} \langle C, v \rangle_{\Omega_0} &= \langle -\Delta \Upsilon_{\text{imp}}^1, v \rangle_{\Omega_0} = \langle \nabla \Upsilon_{\text{imp}}^1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} - \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial \Upsilon_{\text{imp}}^1}{\partial n} v \\ &= \langle \nabla \Upsilon_{\text{imp}}^1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\partial \Upsilon_{\text{imp}}^1}{\partial x_2} v. \end{aligned}$$

Dans la suite, nous définissons $a(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire suivante

$$a(\Upsilon_{\text{imp}}^1, v) = \langle \nabla \Upsilon_{\text{imp}}^1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\partial \Upsilon_{\text{imp}}^1}{\partial x_2} v = \langle \nabla \Upsilon_{\text{imp}}^1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\Upsilon_{\text{imp}}^1(x_1, 0)}{\varepsilon \beta_1(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0)} v dx_1,$$

et $l(\cdot)$ la forme linéaire telle que

$$l(v) = \langle C, v \rangle_{\Omega_0} = C \int_{\Omega_0} v(x) dx.$$

Remarquons que si l'on suppose que le bord P^0 est suffisamment régulier et qu'il ne coupe pas l'interface fictive Γ_f en aucun point, alors il existe une distance minimale $\delta > 0$ qui sépare les deux bords P^0 et Γ_f . Grâce au principe du maximum, nous pouvons montrer que la solution microscopique β_1 est bornée et que $0 < \varepsilon \delta < \varepsilon \beta_1 < 1$. De plus l'inverse de $\varepsilon \beta_1$ est borné et $\frac{1}{\varepsilon \beta_1} \in]1, \frac{1}{\varepsilon \delta}]$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Par ailleurs, sous l'hypothèse ci-dessus, nous pouvons vérifier que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue, coercive sur $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$. En effet, il existe une constante C_0 strictement positive (qui ne dépend que de ε pour tout $\varepsilon \neq 0$) telle que

$$\begin{aligned} |a(\Upsilon_{\text{imp}}^1, v)| &= \left| \int_{\Omega_0} \nabla \Upsilon_{\text{imp}}^1 \nabla v dx + \int_{\gamma^0} \frac{\Upsilon_{\text{imp}}^1(x_1, 0)}{\varepsilon \beta_1(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0)} v(x_1, 0) dx_1 \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega_0} \nabla \Upsilon_{\text{imp}}^1 \nabla v dx \right| + \frac{1}{\varepsilon \delta} \left| \int_{\gamma^0} \Upsilon_{\text{imp}}^1(x_1, 0) v(x_1, 0) dx_1 \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon \delta} \left(\|\nabla \Upsilon_{\text{imp}}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\Upsilon_{\text{imp}}^1\|_{L^2(\gamma^0)} \|v\|_{L^2(\gamma^0)} \right) \leq C_0 \|\Upsilon_{\text{imp}}^1\|_{\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}} \|v\|_{\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}}, \end{aligned}$$

et il existe une constante α_0 strictement positive indépendante de ε telle que

$$|a(\Upsilon_{\text{imp}}^1, \Upsilon_{\text{imp}}^1)| \geq \|\nabla \Upsilon_{\text{imp}}^1\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|\Upsilon_{\text{imp}}^1\|_{L^2(\gamma^0)}^2 \geq \alpha_0 \|\Upsilon_{\text{imp}}^1\|_{\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}}^2.$$

La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est donc continue, coercive et la forme linéaire $l(\cdot)$ est continue sur $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$, alors par le théorème de Lax-Milgram (voir [29]), nous montrons que le problème variationnel (III.125) admet une unique solution dans $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$. La démonstration est complète. \square

Nous allons montrer dans les théorèmes ci-dessous les résultats de convergence de la solution u_ε par rapport loi de paroi d'ordre 1 implicite pour les normes $L^2(\Omega_0)$ et $H^1(\Omega_0)$. Nous prouvons une convergence dans $L^2(\Omega_0)$ en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ et dans $H^1(\Omega_0)$ en ordre $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$.

Remarque 10. Nous mettons l'accent sur le fait que D. Bresch et V. Milišić dans ([27, 28]) ont montré un taux de convergence de la norme $\|u_\varepsilon - \Upsilon_{\text{imp}}^1\|_{L^2(\Omega_0)}$ en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$. Par comparaison à notre résultat présenté dans le théorème 8, nous ne retrouvons pas le résultat de convergence énoncé dans [[28], p15] et [[27], p5] reliant la solution u_ε et la loi de paroi d'ordre 1 implicite. Notons que nous ne retrouvons pas le résultat de la première inégalité de la démonstration du théorème 5.1 dans [[28], p16], plus précisément, au niveau du gradient de la différence entre la loi de paroi explicite d'ordre 1 et la loi de paroi implicite d'ordre 1. Cette estimation influe immédiatement sur le taux de convergence.

Théorème 7. Sous l'hypothèse du théorème 6, nous avons :

$$\|\nabla(u_\varepsilon - \Upsilon_{\text{imp}}^1)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K\sqrt{\varepsilon}, \quad (\text{III.127})$$

où K une constante strictement positive indépendante de ε .

Démonstration. Nous appelons $r_{\text{imp},\varepsilon}^1$ l'erreur entre la solution u_ε et la loi de paroi implicite Υ_{imp}^1 d'ordre 1. Grâce à la loi de paroi explicite $\mathcal{U}_{\text{exp}}^1$ d'ordre 1, nous écrivons $r_{\text{imp},\varepsilon}^1$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} r_{\text{imp},\varepsilon}^1 &= u_\varepsilon - \Upsilon_{\text{imp}}^1 = \underbrace{(u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1)}_{r_{\text{exp},\varepsilon}^1} + \underbrace{(\mathcal{U}_{\text{exp}}^1 - \Upsilon_{\text{imp}}^1)}_{\mathcal{R}_1}. \\ &:= r_{\text{exp},\varepsilon}^1 + \mathcal{R}_1 \end{aligned} \quad (\text{III.128})$$

Par l'inégalité triangulaire, nous tirons

$$\|\nabla r_{\text{imp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|\nabla r_{\text{exp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla \mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.129})$$

D'après la proposition 28, nous avons

$$\|\nabla r_{\text{exp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{III.130})$$

Il nous reste à estimer $\|\nabla \mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)}$. Pour ce faire, nous allons chercher à résoudre le problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathcal{R}_1 &= 0 \quad \text{sur } \Omega_0 \\ \mathcal{R}_1 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\ \mathcal{R}_1 &= \varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\partial \Upsilon_{\text{imp}}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \right] \quad \text{sur } \gamma^0 \\ \mathcal{R}_1 &\text{est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{III.131})$$

On notera que la condition sur le bord γ^0 peut se ré-écrire sous la forme d'une condition aux limites de Robin. En effet,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_1(x_1, 0) - \varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_2}(x_1, 0) &= \varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\partial \Upsilon_{\text{imp}}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \right] - \varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_2}(x_1, 0) \\
 &= \varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) - \left(\frac{\partial \Upsilon_{\text{imp}}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_2}(x_1, 0) \right) \right] \\
 &= \varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\partial \mathcal{U}_{\text{exp}}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \right].
 \end{aligned} \tag{III.132}$$

Par la formule de Green, il est alors facile de vérifier que la formulation variationnelle du problème (III.131) est donnée par

$$\langle -\Delta \mathcal{R}_1, v \rangle_{\Omega_0} = \langle \nabla \mathcal{R}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} - \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial n} v = \langle \nabla \mathcal{R}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_2} v = 0. \tag{III.133}$$

Nous définissons $a(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire suivante

$$a(\mathcal{R}_1, v) = \langle \nabla \mathcal{R}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\mathcal{R}_1(x_1, 0)}{\varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right)} v dx_1 \tag{III.134}$$

Grâce à la condition de Robin et par un simple calcul, nous avons

$$\begin{aligned}
 a(\mathcal{R}_1, v) &= \langle \nabla \mathcal{R}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\mathcal{R}_1(x_1, 0)}{\varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right)} v dx_1 \\
 &= \langle \nabla \mathcal{R}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\partial \mathcal{U}_{\text{exp}}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_2} \right] v dx_1 \\
 &= \int_{\gamma^0} \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\partial \mathcal{U}_{\text{exp}}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \right] v dx_1.
 \end{aligned} \tag{III.135}$$

Remarquons que la forme bilinéaire (III.135) dépend de la loi de paroi explicite d'ordre 1 et de la loi de paroi moyennée d'ordre dans 1, sur le bord γ^0 . Pour cela, posons la quantité $z = u^1 - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1$ solution du problème aux limites avec condition de Dirichlet non-homogène explicite sur γ^0 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta z = & 0 \quad \text{sur } \Omega_0 \\ z = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\ z = & \varepsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1, 0) \left[\beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) - \bar{\beta}_1 \right] \quad \text{sur } \gamma^0 \\ z & \text{est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \tag{III.136}$$

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

A l'aide de la formule de Green, il vient que la solution z du problème (III.136) est issue de la formulation variationnelle suivante

$$\langle -\Delta z, v \rangle_{\Omega_0} = \langle \nabla z, \nabla v \rangle_{\Omega_0} - \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial z}{\partial n} v = \langle \nabla z, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\partial z}{\partial x_2} v = 0.$$

Nous tirons donc que

$$-\langle \nabla z, \nabla v \rangle_{\Omega_0} = \int_{\gamma^0} \frac{\partial z}{\partial x_2} v. \quad (\text{III.137})$$

Remplaçons cette dernière relation (III.137) dans l'expression de la forme bilinéaire (III.135), il vient

$$a(\mathcal{R}_1, v) = -\langle \nabla z, \nabla v \rangle_{\Omega_0}. \quad (\text{III.138})$$

En prenant $v = \mathcal{R}_1$ dans (III.138), il suit

$$\|\nabla \mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|\nabla z\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Nous écrivons l'expression de z sous la forme suivante $z = u^1 - u_\varepsilon + u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1$ et par inégalité triangulaire, nous avons

$$\|\nabla \mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|\nabla z\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|\nabla(u_\varepsilon - u^1)\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla(u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1)\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Grâce aux propositions 23 et 28, nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\nabla \mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|\nabla z\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \left(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \right) \leq 2K \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{III.139})$$

Nous remplaçons les estimations (III.130) et (III.139) dans (III.129) et nous obtenons le résultat. La démonstration est complète. \square

Théorème 8. *Sous les mêmes hypothèses du théorème 6, nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que*

$$\|u_\varepsilon - \Upsilon_{\text{imp}}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \varepsilon. \quad (\text{III.140})$$

Démonstration. Par la même méthodologie de la dernière démonstration, posons $r_{\text{imp},\varepsilon}^1$ l'erreur entre la solution u_ε et la loi de paroi implicite Υ_{imp}^1 d'ordre 1. Nous pouvons écrire $r_{\text{imp},\varepsilon}^1$ sous

la forme suivante

$$\begin{aligned} r_{\text{imp},\varepsilon}^1 &= u_\varepsilon - \Upsilon_{\text{imp}}^1 = \underbrace{(u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1)}_{r_{\text{exp},\varepsilon}^1} + \underbrace{(\mathcal{U}_{\text{exp}}^1 - \Upsilon_{\text{imp}}^1)}_{\mathcal{R}_1}. \\ &:= r_{\text{exp},\varepsilon}^1 + \mathcal{R}_1 \end{aligned}$$

À l'aide de l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\|r_{\text{imp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|r_{\text{exp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.141})$$

D'après la proposition 29, nous avons

$$\|r_{\text{exp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K\varepsilon^2. \quad (\text{III.142})$$

Estimons maintenant $\|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)}$. Pour ce faire, il suffit de récupérer des estimations de trace sur l'interface γ^0 . En effet, par une simple majoration, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\gamma^0)}^2 &= \int_{\gamma^0} |\mathcal{R}_1(x_1, 0)|^2 dx_1 = \int_{\gamma^0} \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right) \frac{|\mathcal{R}_1(x_1, 0)|^2}{\beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right)} dx_1 \\ &\leq \|\beta_1\|_{L^\infty(\gamma^0)} \int_0^L \frac{|\mathcal{R}_1(x_1, 0)|^2}{\beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right)} dx_1. \end{aligned} \quad (\text{III.143})$$

Cependant, si nous combinons les deux expressions (III.134) et (III.136) de la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle du problème aux limites (III.131), il vient

$$\langle \nabla z, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \langle \nabla \mathcal{R}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} = - \int_{\gamma^0} \frac{\mathcal{R}_1(x_1, 0)}{\varepsilon \beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right)} v dx_1.$$

En prenant $v = \mathcal{R}_1$ dans cette dernière égalité, par l'inégalité triangulaire et grâce à la première inégalité de l'expression (III.139), nous obtenons la majoration suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma^0} \frac{(\mathcal{R}_1(x_1, 0))^2}{\beta_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0\right)} dx_1 &= - \langle \nabla z, \nabla \mathcal{R}_1 \rangle_{\Omega_0} - \langle \nabla \mathcal{R}_1, \nabla \mathcal{R}_1 \rangle_{\Omega_0} \leq \left| \langle \nabla z, \nabla \mathcal{R}_1 \rangle_{\Omega_0} + \langle \nabla \mathcal{R}_1, \nabla \mathcal{R}_1 \rangle_{\Omega_0} \right| \\ &\leq \|\nabla \mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla z\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla \mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \\ &\leq 2 \|\nabla \mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla z\|_{L^2(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Nous remplaçons cette dernière inégalité dans (III.143) et en utilisant les résultats obtenus précédemment dans (III.139), nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

indépendante de ε telle que

$$\|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\gamma^0)}^2 \leq 2\varepsilon \|\beta_1\|_{L^\infty(\gamma^0)} \|\nabla \mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla z\|_{L^2(\Omega_0)} \leq 2\varepsilon \|\beta_1\|_{L^\infty(\gamma^0)} (2K\sqrt{\varepsilon})^2 \leq K\varepsilon^2. \quad (\text{III.144})$$

Pour pouvoir estimer l'erreur \mathcal{R}_1 dans la norme $L^2(\Omega_0)$, la technique de dualité (ou de transposition) nous ramène à relier $\|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)}$ avec $\|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\gamma^0)}$. Pour ce faire, nous partons du problème dual. Étant donné $\varphi \in L^2(\Omega_0)$, nous allons chercher à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} w \in H^2(\Omega_0) \\ -\Delta w = \varphi & \text{sur } \Omega_0 \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma^0 \\ w \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases}$$

Nous cherchons la formulation variationnelle. Par la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mathcal{R}_1 \rangle_{\Omega_0} &= -\langle \Delta w, \mathcal{R}_1 \rangle_{\Omega_0} = \langle \nabla \mathcal{R}_1, \nabla w \rangle_{\Omega_0} - \int_{\partial\Omega_0} \mathcal{R}_1 \frac{\partial w}{\partial n} \\ &= -\langle \Delta \mathcal{R}_1, w \rangle_{\Omega_0} + \int_{\partial\Omega_0} w \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial n} - \int_{\partial\Omega_0} \mathcal{R}_1 \frac{\partial w}{\partial n} = - \int_{\gamma^0} \mathcal{R}_1 \frac{\partial w}{\partial n}. \end{aligned} \quad (\text{III.145})$$

Précisons que $\frac{\partial w}{\partial n}$ désignera toujours la dérivée par rapport à la normale sortante du domaine Ω_0 . De l'expression (III.145) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il suit

$$|\langle \varphi, \mathcal{R}_1 \rangle_{\Omega_0}| \leq \left| \int_{\gamma^0} \mathcal{R}_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right| \leq \|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\gamma^0)} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\gamma^0)}. \quad (\text{III.146})$$

Ainsi, grâce à l'inégalité de Rellich [61, p 261-263], il existe une constante K strictement positive telle que

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\gamma^0)} \leq K \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Nous injectons cette dernière inégalité dans (III.146), nous avons

$$|\langle \varphi, \mathcal{R}_1 \rangle_{\Omega_0}| \leq K \|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\gamma^0)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{III.147})$$

En prenant $\mathcal{R}_1 = \varphi$ et à l'aide de l'estimation de trace (III.144) sur l'interface γ^0 , nous montrons

qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\gamma^0)} \leq K\varepsilon. \quad (\text{III.148})$$

Pour finir, nous regroupons les estimations (III.148) et (III.142) dans (III.141). Alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|r_{\text{imp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|r_{\text{exp},\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\mathcal{R}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K(\varepsilon^2 + \varepsilon) \leq K\varepsilon.$$

La démonstration est complète. □

Remarque 11. *Si nous devons comparer les résultats de la proposition 29 et du théorème 8. Bien entendu, la loi de paroi implicite d'ordre 1 donne de moins bons résultats que la loi explicite d'ordre 1, cette dernière contient l'information exacte des correcteurs couches limites sur l'interface γ^0 . Néanmoins, la loi implicite nécessite seulement la connaissance de la trace du problème cellule sur la frontière fictive, nous avons ainsi une loi de paroi de type SAFFMAN-JOSEPH qui contient des oscillations microscopiques.*

Il est naturel de se poser la question suivante :

Question 2. *Peut-on obtenir des estimations d'erreur pour la loi de paroi implicite d'ordre 2 ?*

Cette question est intimement liée à l'étude des conditions de type Wentzel [23, 44, 57]. Les conditions aux limites de problème (III.126) contiennent des dérivés normales du second ordre. Toutefois par manque de temps, nous n'avons pas effectué une analyse complète de la loi de paroi implicite d'ordre 2. Montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème avec loi de paroi implicite d'ordre 2, reste un problème ouvert.

5 Appendice

5.1 Construction des nouvelles lois de paroi

L'objet de cette sous-section est de présenter des nouvelles méthodes pour construire des lois de paroi pour de domaines rugueux. Nous citons les travaux de D.Bresch et V.Milišić [27].

La théorie de Jäger et Mikelić

L'ordre principal u^0 , si l'on considère formellement la limite quand ε tend vers 0, est solution du problème (III.2). W. Jäger et al. considèrent l'écoulement de Poiseuille de (III.2) dans Ω_0 et le prolongent par 0 sur tout le domaine $\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0$, c'est-à-dire que :

$$u_{\text{Jäg}}^0 = \begin{cases} \frac{C}{2} x_2 (1 - x_2) & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0. \end{cases} \quad (\text{III.149})$$

Ils corrigent cette solution en compensant le saut sur le gradient localisé sur l'interface γ^0 . Ils recherchent une fonction $\beta_{\text{Jäg},1}$ périodique en y_1 et solution du problème cellule suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \beta_{\text{Jäg},1} = 0 \quad \text{dans } Z^+ \\ -\Delta \beta_{\text{Jäg},1} = 0 \quad \text{dans } P \\ \left[\frac{\partial \beta_{\text{Jäg},1}}{\partial y_2} \right] = C \quad \text{sur } \Gamma_f \\ \beta_{\text{Jäg},1} = 0 \quad \text{sur } P^0 \\ \beta_{\text{Jäg},1} \text{ est périodique selon } y_1 \text{ sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r \end{array} \right. \quad (\text{III.150})$$

où les crochets $[\cdot]$ désignent le saut à travers l'interface fictive Γ_f . Comme cette fonction est harmonique dans Z^+ , elle tend vers sa moyenne $\overline{\beta_{\text{Jäg},1}} = \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \beta_{\text{Jäg},1}(y_1, y_2)$ qui n'est pas forcément nul. Pour construire le correcteur couche limite, on soustrait cette constante à $\beta_{\text{Jäg},1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$ sur le domaine Ω_0 pour limiter l'erreur sur Γ_f . La solution est alors discontinue à travers γ^0 . Ils définissent donc le « contre-flot » $d(\cdot)$ solution de (III.50) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta d = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \\ d = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\ d = 1 \quad \text{sur } \gamma^0 \\ d \text{ est périodique selon } x_1 \quad \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right.$$

Rappelons que la solution est explicite et donnée par : $d(x) = (1 - x_2)$, pour tout $x \in \Omega_0$.

Ils posent finalement l'approximation de Jäger d'ordre 1 à l'itération 1 :

$$\begin{aligned} u_{\text{Jäg},1}^1(x) &= u^0 \mathbb{1}_{[\Omega_0]} + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_{\text{Jäg},1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - (1-d) \overline{\beta_{\text{Jäg},1}} \mathbb{1}_{[\Omega_0]} \right) \\ &= u_{\text{Jäg}}^0 + \varepsilon \frac{C}{2} \left(\beta_{\text{Jäg},1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - x_2 \overline{\beta_{\text{Jäg},1}} \mathbb{1}_{[\Omega_0]} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.151})$$

Par la même méthodologie par l'approche d'Achdou et al, nous améliorons les ordres de convergence obtenus dans [27]. En effet dans [27, page 3], D. Bresch et V. Milišić ont montré que l'approximation $u_{\text{Jäg},1}^1$ à l'itération 1 par l'approche de Jäger converge vers u_ε dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ et dans $L^2(\Omega_0)$ en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$.

Comme précédemment l'amélioration de la vitesse de la convergence repose essentiellement sur l'inégalité de Poincaré dans la partie rugueuse (voir Chapitre I, Section 3, Proposition 3). Nous montrons un taux de convergence en $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ pour la norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$ et en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ pour la norme $L^2(\Omega_0)$. Nous énonçons sans démonstration la proposition suivante :

Proposition 31. Soient u_ε la solution du problème (III.1), $u_{\text{Jäg}}^0$ l'approximation de Jäger d'ordre 0 et $u_{\text{Jäg},1}^1$ l'approximation de Jäger d'ordre 1 dans Ω_ε , alors :

– **L'erreur d'ordre 0**, $e_{\text{Jäg}}^0 = u_\varepsilon - u_{\text{Jäg}}^0$ vérifie

$$\|e_{\text{Jäg}}^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \sqrt{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \|e_{\text{Jäg}}^0\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \varepsilon.$$

– **L'erreur d'ordre 1 à l'itération 1**, $e_{\text{Jäg}}^1 = u_\varepsilon - u_{\text{Jäg},1}^1$ vérifie

$$\|e_{\text{Jäg}}^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \|e_{\text{Jäg}}^1\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \varepsilon^2.$$

Remarque 12. Nous mettons l'accent sur le fait que l'erreur $e_{\text{Jäg}}^1$ n'est pas harmonique sur tout le domaine Ω_ε . En effet, nous avons $\Delta e_{\text{Jäg}}^1 = \Delta u_\varepsilon - \Delta u_{\text{Jäg},1}^1 = C \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]}$ dans Ω_ε . De ce fait, la convergence de l'approximation de Jäger d'ordre 1 vers u_ε dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ avec un taux de convergence en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ est due au terme source dans la partie rugueuse.

Lien entre Jäger et al et Achdou et al

Nous rappelons que $u_{\text{Ach},1}^0$ est l'approximation couche limite d'ordre 0 par l'approche d'Achdou et al. (par le développement de Taylor à l'ordre 1 de l'écoulement de Poiseuille) :

$$u_{\text{Ach},1}^0 := u_{\text{ext},1}^0(x) = \begin{cases} \frac{C}{2} x_2 (1 - x_2) & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{C}{2} x_2 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

et $u_{\text{Ach},1}^1$ est l'approximation couche limite d'ordre 1 à l'itération 1 par l'approche d'Achdou et al.

$$u_{\text{Ach},1}^1(x) = u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_{\text{Ach},1} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_{\text{Ach},1}} x_2 \right).$$

Pour relier l'approche d'Achdou et l'approche de Jäger, il suffit de remarquer que

$$u_{\text{Ach},1}^0 = u_{\text{Jäg}}^0 + \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) x_2 \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]}. \quad (\text{III.152})$$

On peut également remarquer que les correcteurs peuvent être reliés par un relèvement localisé sous la frontière fictive Γ_f , c'est à dire

$$\beta_{\text{Ach},1}(y) = \beta_{\text{Jäg},1}(y) - y_2 \mathbb{1}_{[P^0]}, \quad (\text{III.153})$$

ceci implique qu'à l'infini les deux solutions convergent vers la même limite $\overline{\beta_{\text{Ach},1}} = \overline{\beta_{\text{Jäg},1}} = \overline{\beta_1}$. Pour les correcteurs couches limites respectifs, on a donc en résumé :

$$\begin{aligned} u_{\text{Ach},1}^1 &= u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_{\text{Ach},1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \right) \\ &= \left(u_{\text{Jäg}}^0 + \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) x_2 \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} \right) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_{\text{Jäg},1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{x_2}{\varepsilon} \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} - \overline{\beta_1} x_2 \right) \\ &= u_{\text{Jäg}}^0 + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_{\text{Jäg},1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} x_2 \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} - \overline{\beta_1} x_2 \mathbb{1}_{[\Omega_0]} \right) \\ &= u_{\text{Jäg},1}^1 - \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \overline{\beta_1} x_2 \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]}. \end{aligned} \quad (\text{III.154})$$

Par des simples calculs, nous montrons trivialement les résultats de convergence suivants

Proposition 32. *Soient $u_{\text{Jäg},1}^1$ l'approximation de Jäger d'ordre 1 à l'itération 1 et $u_{\text{Ach},1}^1$ l'approximation couche limite d'ordre 1 à l'itération 1 par l'approche d'Achdou et al, alors il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives indépendantes de ε telles que*

$$\|u_{\text{Ach},1}^1 - u_{\text{Jäg},1}^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \|u_{\text{Ach},1}^1 - u_{\text{Jäg},1}^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_2 \varepsilon^{\frac{5}{2}}. \quad (\text{III.155})$$

Remarque 13. *Les deux approximations d'Achdou et de Jäger mènent aux même lois de parois. En effet, nous avons exploré une relation liant les deux approches et nous avons montré qu'elles peuvent être déduites l'une de l'autre et que de plus leur différence est d'ordre plus élevé que l'effet de rugosité. Ces deux approches donnent lieu à la même loi de paroi.*

Par un simple jeu d'écriture nous justifions que les résultats obtenus dans les propositions 21 et 31 (pour l'amélioration de la vitesse de la convergence par rapport aux résultats obtenus dans [27, 28]) sont cohérents avec le taux de convergence obtenu dans la proposition 32. Rappelons que nous avons montré dans la proposition 21 que l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},1}^\infty$ par l'approche d'Achdou et al. converge vers u_ε dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$, ainsi que dans la proposition 31, le taux de convergence entre la solution exacte u_ε et l'approximation $u_{\text{Jäg},1}^1$ à l'itération 1 par l'approche de Jäger est en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$. Ceci implique directement, par une simple inégalité triangulaire, que

$$\|u_{\text{Ach},1}^1 - u_{\text{Jäg},1}^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_{\text{Ach},1}^1 - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon - u_{\text{Jäg},1}^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \right) \leq 2K\varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

5.2 Rappels sur l'homogénéisation d'EDP elliptiques

Homogénéisation périodique

Le but de la théorie est de décrire les propriétés macroscopiques (modélisant par exemple la diffusion de la chaleur) de matériaux composites, qui sont un mélange de deux ou plusieurs constituants. Deux échelles caractérisent donc le matériau, l'une microscopique, décrivant les hétérogénéités, et l'autre macroscopique décrivant le comportement global. Mathématiquement, il s'agit d'étudier le comportement asymptotique, quand un paramètre tend vers zéro, d'une équation aux dérivées partielles à coefficients oscillants, dépendant d'un petit paramètre. Ce paramètre décrit les hétérogénéités, qui sont petites par rapport à la taille globale du composite. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , et u_ε solution du problème aux limites (AE) pour tout $\varepsilon > 0$

$$(AE) : \begin{cases} \mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = f & \text{sur } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où f est le terme source et \mathcal{A}_ε est défini comme suit

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla) = -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

A^ε est une matrice Y-périodique telle que

$$\begin{aligned} a_{ij}^\varepsilon(x) &= a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) & \text{dans } \mathbb{R}^N, & \quad \forall i, j = 1, \dots, N \\ A^\varepsilon(x) &= A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) = a_{ij}^\varepsilon(x)_{1 \leq i, j \leq N}, & \quad \forall i, j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$a_{ij} \text{ est } Y - \text{périodique,} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

et Y présente la cellule de référence définie par $Y =]0, l_1[\times]0, l_2[\times \dots \times]0, l_N[$, avec l_1, \dots, l_N des entiers relatifs positifs. La matrice A est définie positive, de plus il existe deux constantes $0 < \beta \leq \alpha$ tel que pour $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $y \in Y$,

$$\alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N A_{ij}(y) \xi_i \xi_j \leq \beta |\xi|^2.$$

Résultat de convergence

Nous énonçons dans cette sous-section un résultat classique qui a été étudié dans plusieurs travaux, parmi lesquels on cite les travaux de Sanchez-Palencia [67, 69], Bakhvalov [18], Bensoussan, Lions et Papanicolaou [20].

Theorem 5.1. *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et u_ε la solution du problème aux limites (AE), alors :*

$$\begin{cases} i) & u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{converge faiblement dans } H_0^1(\Omega) \\ ii) & A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u_0 \quad \text{converge faiblement dans } (L^2(\Omega))^N, \end{cases}$$

avec u_0 est l'unique solution du problème aux limites

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^0 \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) = f & \text{dans } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Méthode multi-échelle : Développement asymptotique

Nous cherchons pour la solution u_ε un développement de la forme

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \dots$$

où les u_i sont Y -périodiques. Soit la fonction $\Psi = \Psi(x, y)$ à deux variables de \mathbb{R}^N et nous notons

$$\Psi_\varepsilon(x) = \Psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \quad \text{avec} \quad y = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Et par dérivation par rapport à x_i , nous avons

$$\frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Adoptant l'abus de langage signalé plus haut, compte tenu de l'expression de \mathcal{A}_ε , nous obtenons

$$\mathcal{A}_\varepsilon \Psi_\varepsilon(x) = [(\varepsilon^{-2} \mathcal{A}_0 + \varepsilon^{-1} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \Psi] \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right),$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ \mathcal{A}_1 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ \mathcal{A}_2 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

Nous identifions les puissances successives de ε . Nous allons résoudre le système infini d'équations

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 u_0 = 0 & \text{sur } Y \\ u_0 & \text{Y-périodique selon } y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 u^1 = -\mathcal{A}_1 u_0 & \text{sur } Y \\ u^1 = 0 & \text{Y-périodique selon } y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 u^2 = f - \mathcal{A}_1 u^1 - \mathcal{A}_2 u_0 & \text{sur } Y \\ u^2 = 0 & \text{Y-périodique selon } y, \end{cases}$$

$$\text{et pour tout } s \geq 1, \quad \begin{cases} \mathcal{A}_0 u_{s+2} = f - \mathcal{A}_1 u_{s+1} - \mathcal{A}_2 u_s & \text{sur } Y \\ u_{s+2} = 0 & \text{Y-périodique selon } y. \end{cases}$$

Développement asymptotique pour l'opérateur de Laplace

Le principe du développement asymptotique multi-échelle consiste à chercher une solution d'une

Chapitre III. Méthodes de construction d'approximation couche limite

équation dépendant de ε (seule l'équation doit dépendre de ε et non le domaine) sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i v_i \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Pour cela, on travaille de façon formelle en injectant cette forme de la solution dans l'équation puis en identifiant les termes de même degré en ε . En notant $y = \frac{x}{\varepsilon}$, on obtient une cascade d'équations sur les deux variables macroscopique et microscopique, qui ne dépendent plus de ε . Par exemple, dans le cas :

- Développement asymptotique pour l'opérateur de Laplace dans la direction de périodicité.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche les solutions de (III.1) sous la forme suivante : } v(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i v_i \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right), \\ \text{alors formellement, on a :} \\ -\Delta v(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_y^2 v_0 \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\partial_y^2 v_1 \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) + \partial_{x_1 y} v_0 \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) + \partial_{y x_1} v_0 \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) \\ + \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \left(\Delta_x v_i \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) + \partial_y^2 v_{i+2} \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) + \partial_{x_1 y} v_{i+1} \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) + \partial_{y x_1} v_{i+1} \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right). \end{array} \right.$$

- Développement asymptotique pour l'opérateur de Laplace dans les deux directions

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche les solutions de (III.1) sous la forme suivante : } v(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i v_i \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \\ \text{alors formellement, on a :} \\ -\Delta v(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y v_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\Delta_y v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \operatorname{div}_x (\nabla_y v_0) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \operatorname{div}_y (\nabla_x v_0) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \\ + \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \left(\Delta_x v_i \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \Delta_y v_{i+2} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \operatorname{div}_x (\nabla_y v_{i+1}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \operatorname{div}_y (\nabla_x v_{i+1}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right). \end{array} \right.$$

Grâce aux cascades (dans une seule direction et deux directions), on arrive en général à montrer que v_0 ne dépend pas de y et à déterminer toutes les fonctions v_i . Pour cela, lorsqu'on travaille sur des problèmes périodiques dans toutes les directions, la méthode générale consiste à moyenner une des équations sur une cellule de périodicité pour la variable microscopique. On fait alors disparaître la variable microscopique et on espère fermer le système et obtenir une équation sur v_0 .

*Préservez votre droit de penser, car même penser
mal est mieux que de ne pas penser du tout.*

Hypatie d'Alexandrie (370-415)
est une mathématicienne et philosophe grecque.

Chapitre IV

Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

1 Introduction

Pour l'étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux, nous présentons dans ce chapitre une implémentation indépendante de la méthode variationnelle, réalisée dans le deuxième chapitre de cette thèse. L'objectif premier de la réalisation de cette maquette est de pouvoir prendre conscience des résultats obtenus par la technique variationnelle. Plus précisément, la dépendance en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ de la norme H^2 de la solution exacte du problème (E). Cependant, dans la littérature scientifique, les méthodes de développements asymptotiques ont été étendues à d'autres problèmes. Citons par exemple les travaux de G. Allaire [12], qui s'est intéressé à l'analyse asymptotique dans des milieux poreux des problèmes périodiques dans toutes les directions. Pour une perturbation dans deux directions, il a obtenu que la norme H^2 est majorée en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Néanmoins, l'intérêt principal de l'analyse asymptotique réside la plupart du temps dans la possibilité de décrire le comportement prépondérant de la solution d'un certain problème lorsque l'un de ses paramètres tend vers zéro ou l'infini ainsi que la description du modèle dépend de l'échelle à laquelle on se place. La conclusion de cette discussion est que compte tenu de la perturbation selon une seule direction du domaine rugueux Ω_ε (voir Figure I.1), nous espérons améliorer la dépendance en ε de la norme H^2 de la solution exacte associée au problème aux limites (E) introduit dans le premier chapitre.

Avant d'entamer le contenu de ce chapitre proprement dit, nous voudrions formuler quelques rappels d'ordre général concernant les deux derniers chapitres. D'une part, dans le deuxième chapitre pour l'étude variationnelle de la régularité H^2 du problème modèle (E) et afin d'éviter toute difficulté technique lors du redressement de la couche rugueuse, nous avons pris la géométrie illustrée dans la Figure I.1 avec une paroi rugueuse régulière. D'autre part, plusieurs

Chapitre IV. Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

ingrédients techniques sont présents dans le troisième chapitre de cette thèse concernant les méthodes de construction d'approximation couche limite. Nous avons dérivé des approximations couches limites par l'approche d'Achdou et al. associées au modèle d'écoulement sanguin modélisé mathématiquement par le problème (E) mais avec un terme source réel, et nous signalons que le bord rugueux peut être lipschitzien.

Le but à présent est de décrire une étude assez typique, c'est pourquoi on s'affranchit autant que possible des contraintes techniques en imposant des hypothèses un peu fortes, pour se concentrer sur une étude par les méthodes d'analyse asymptotique proprement dites. Pour cela, nous reprenons dans ce chapitre la même géométrie illustrée dans la figure I.1 avec un bord rugueux **assez régulier**. Par ailleurs, il serait instructif d'étudier tout d'abord le modèle d'écoulement sanguin modélisé mathématiquement par le problème aux limites ci dessous (III.1) avec **une source réelle** :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = C & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ u_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases}$$

Résultat principal

En utilisant les approximations couches limites par l'approche d'Achdou introduites dans le troisième chapitre de cette thèse, nous allons montrer dans ce chapitre le résultat suivant :

Théorème 9. *La solution u_ε du problème aux limites (III.1) est dans $H^2(\Omega_\varepsilon)$. De plus, il existe deux constantes C_{\min} et C_{\max} strictement positives indépendantes de ε telles que*

$$\frac{C_{\min}}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_{\max}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (\text{IV.1})$$

Au cours de ce chapitre nous nous servons ponctuellement de certains concepts des espaces de Sobolev. Nous définissons grâce à la transformée de Fourier l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$ tel que

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Nous renvoyons le lecteur à [1, 36] pour un exposé plus détaillé.

IV.2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

De Théorème 9, il est assez naturel de signaler que la solution exacte u_ε du problème aux limites (III.1) est **singulière** à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ pour la norme H^2 . Dans ce qui suit immédiatement, nous allons donc énoncer l'inégalité d'interpolation dans un domaine rugueux :

Corollaire 1. *Étant donné un nombre réel $s \in [1, 2]$. Alors il existe une constante C_{int} strictement positive indépendante de ε telle que la solution du problème aux limites (III.1) satisfait l'estimation suivante*

$$\|u_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)} \leq C_{\text{int}} \varepsilon^{\frac{(1-s)}{2}}. \quad (\text{IV.2})$$

Preuve. Soit u_ε la solution du problème aux limites (III.1). Nous définissons le nombre réel $s \in [s_1, s_2] := [1, 2]$ de sorte que $s := \theta s_1 + (1 - \theta)s_2 = 2 - \theta$, avec $0 \leq \theta \leq 1$. En utilisant l'inégalité fonctionnelle d'interpolation, nous avons

$$\|u_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^\theta \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}^{1-\theta}.$$

Ainsi, grâce aux inégalités [Théorème 1, (I.8)] et [Théorème 9, (IV.1)], il existe une constante C_{int} strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)} \leq \sup(C^\theta, C_{\text{max}}^{1-\theta}) \left(4(1 + \varepsilon)^2 + 1\right)^\theta \left(\sqrt{\text{mes}(\Omega_\varepsilon)}\right)^\theta \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{1-\theta} \leq C_{\text{int}} \varepsilon^{-\frac{(1-\theta)}{2}}.$$

Nous achevons la preuve en remplaçant l'expression de $s = 2 - \theta$ dans la dernière inégalité. La preuve est complète. \square

Remettons l'accent sur le fait que l'ingrédient principal pour montrer les résultats ci-dessus est l'utilisation des approximations couches limites d'ordres 1 et 2.

Nous avons choisi de commencer notre étude par :

2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

Cette section est principalement consacrée à étudier le comportement de la norme H^2 associée au problème aux limites (E) avec une source réelle, en utilisant l'approximation couche limite d'ordre 1. Dans une première sous-section nous vérifierons que la norme H^2 de l'extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille dans le domaine rugueux Ω_ε est bornée. Après avoir établi quelques estimations du correcteur cellulaire d'ordre 1, nous montrons que la hessienne de ce dernier est

singulière en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Dans le même contexte, nous tenterons à prouver que le profil de l'approche couche limite d'ordre 1 est singulier pour la norme H^2 . Nous expliciterons autant que possible les détails des calculs, nous pouvons également énoncer un résultat de régularité H^2 et d'estimation à priori. En effet, la différence entre l'approximation couche limite d'ordre 1 et la solution exacte u_ε est majorée à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Enfin, nous concluons que la norme H^2 de la solution exacte u_ε du problème aux limites (III.1) est majorée à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$.

Nous entamons la démarche par :

2.1 Régularité H^2 de l'extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille

Rappelons tout d'abord l'expression (III.3) de l'approximation d'ordre 0 par l'approche d'Achdou et al.

$$u_{\text{Ach},1}^0 := u_{\text{ext},1}^0(x) = \begin{cases} u_0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) x_2 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{C}{2} x_2 (1 - x_2) & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{C}{2} x_2 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Le but de cette sous-section est un résultat assez simple, essentiellement calculatoire. Nous établissons que la norme H^2 dans le domaine rugueux Ω_ε de l'approximation d'ordre 0 par l'approche d'Achdou et al. est majorée par une constante. Autrement dit, nous montrons la proposition suivante

Proposition 33. *Pour tout $\varepsilon < 1$, il existe une constante K_0 strictement positive indépendante de ε telle que*

$$\|u_{\text{ext},1}^0\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K_0. \quad (\text{IV.3})$$

Preuve. La forme de la solution $u_{\text{ext},1}^0$ est explicite dans Ω_ε . En effet, nous prolongeons linéairement la solution u_0 de l'écoulement de Poiseuille dans Ω_0 par son développement de Taylor à l'ordre 1 dans la partie rugueuse. Par conséquent, un calcul explicite donne

$$\begin{aligned} \|u_{\text{ext},1}^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_0} (u_{\text{ext},1}^0)^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} (u_{\text{ext},1}^0)^2 dx = \int_{\Omega_0} \left(\frac{C}{2} x_2 (1 - x_2)\right)^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \left(\frac{C}{2} x_2\right)^2 dx \\ &= L \left(\frac{C}{2}\right)^2 \left(\int_0^1 (x_2 - x_2^2)^2 dx_2 + \int_{\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 x_2^2 dx_2 \right) = \frac{L}{3} \left(\frac{C}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{10} - \left(\varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right)^3 \right). \end{aligned}$$

Pour le gradient de l'extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille, nous prouvons la majoration suivante

IV.2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\text{ext},1}^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_0} (\nabla u_{\text{ext},1}^0)^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} (\nabla u_{\text{ext},1}^0)^2 dx = \int_{\Omega_0} \left(\frac{C}{2} - Cx_2\right)^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \left(\frac{C}{2}\right)^2 dx \\ &= L \left(\frac{C}{2}\right)^2 \left(\int_0^1 (1 - 2Cx_2)^2 dx_2 + \int_{\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^0 dx_2 \right) \leq LC^2 (1 + \varepsilon\|\tilde{\gamma}\|_{L^\infty}). \end{aligned}$$

Il est clair que dans l'approche u_{ext}^0 il n'y a pas de saut de gradient sur l'interface γ^0 , donc à l'aide d'un calcul similaire, nous montrons que la Hessienne de $u_{\text{ext},1}^0$ vérifie

$$\begin{aligned} \|\text{Hess}(u_{\text{ext},1}^0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2^2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2^2} \right)^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} \left(\frac{\partial^2 u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2^2} \right)^2 dx \\ &= C^2 \int_{\Omega_0} dx = LC^2. \end{aligned}$$

Nous regroupons les résultats obtenus, nous montrons que la norme $\|u_{\text{ext},1}^0\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$ est bornée par une constante K_0 strictement positive indépendante de ε . Ce qui achève la preuve. \square

2.2 Régularité H^2 de correcteur couche limite à l'ordre 1

Nous rappelons dans cette sous-section l'expression (III.52) de l'approximation couche limite à l'ordre 1 par l'approche d'Achdou et al.

$$u_{\text{Ach},1}^\infty(x) = u_{\text{ext},1}^0(x) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 x_2 \right).$$

Signalons que la dérivée partielle d'ordre 1 de u_0 sur le bord γ^0 vérifie toujours $\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{C}{2}$. Nous allons effectuer l'étude de la norme H^2 du correcteur couche limite à l'ordre 1. Dans la proposition suivante, nous cherchons à exprimer la Hessienne de correcteur couche limite β_1 à l'échelle macroscopique en fonction de celle à l'échelle microscopique.

Précisons tout d'abord que la notation D_x^2 présente la Hessienne dans le domaine rugueux Ω_ε et D_y^2 désigne la Hessienne dans le domaine cellulaire $Z^+ \cup P$. Alors nous avons

Proposition 34. *Soit β_1 la solution du problème microscopique (III.20), alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et deux constantes K_1 et K_2 strictement positives indépendantes de ε tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, telles que*

$$\frac{K_2}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \varepsilon \|D_x^2 \beta_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K_1}{\sqrt{\varepsilon}} \|D_y^2 \beta_1\|_{L^2(Z^+ \cup P)}. \quad (\text{IV.4})$$

Chapitre IV. Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

Preuve. Nous introduisons la transformation $\phi_\varepsilon(x) = y = (\phi_\varepsilon^1(x), \phi_\varepsilon^2(x))$, le C^2 -difféomorphisme telle que

$$\begin{cases} \phi_\varepsilon^1(x) = y_1 = \frac{x_1}{\varepsilon} \\ \phi_\varepsilon^2(x) = y_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}, \end{cases}$$

dont le jacobien est donné par $|J\phi_\varepsilon| = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Par un changement de variable de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique du différentiel d'ordre 2 du correcteur couche limite β_1 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|D_{x'}^2 \beta_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^2 \left| \partial_{x_i x_j}^2 \beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx_1 dx_2, \quad \text{avec } \varepsilon = \frac{L}{2\pi k} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^* \\ &= \sum_{k=1}^{E(\frac{L}{2\pi\varepsilon})} \left(\int_{(Z+\cup P)_k} \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{y_i y_j}^2 \beta_1(y) \right|^2 \varepsilon^2 dy \right) \\ &\leq \frac{L}{2\pi\varepsilon} \left(\int_{(Z+\cup P)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i,j=1}^2 \left| \partial_{y_i y_j}^2 \beta_1(y) \right|^2 dy \right). \end{aligned}$$

Il est immédiat que

$$\|D_{x'}^2 \beta_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi\varepsilon^{\frac{3}{2}}}} \|D_y^2 \beta_1\|_{L^2(Z+\cup P)}. \quad (\text{IV.5})$$

Nous multiplions la dernière inégalité (IV.5) par ε , nous obtenons la première majoration voulue avec comme constante $K_1 = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}$. Il nous reste à démontrer la minoration énoncée dans (IV.4). Pour cela, nous utilisons astucieusement une propriété de la partie entière, c'est à dire la relation suivante

$$\frac{L}{4\pi\varepsilon} < \frac{L}{2\pi\varepsilon} - 1 < E\left(\frac{L}{2\pi\varepsilon}\right) \leq \frac{L}{2\pi\varepsilon} < E\left(\frac{L}{2\pi\varepsilon}\right) + 1, \quad \text{pour tout } \varepsilon < \frac{L}{4\pi}.$$

On s'aperçoit par un simple calcul que

$$\begin{aligned} \|D_{x'}^2 \beta_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^2 \left| \partial_{x_i x_j}^2 \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx = \sum_{k=1}^{E(\frac{L}{2\pi\varepsilon})} \left(\int_{(Z+\cup P)_k} \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{y_i y_j}^2 \beta_1(y) \right|^2 \varepsilon^2 dy \right) \\ &\geq \frac{L}{4\pi\varepsilon} \left(\int_{(Z+\cup P)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i,j=1}^2 \left| \partial_{y_i y_j}^2 \beta_1(y) \right|^2 dy \right). \end{aligned}$$

IV.2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

Il existe donc une constante K_2 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|D_x^2 \beta_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \geq \left(\frac{L}{4\pi\varepsilon^3}\right)^{\frac{1}{2}} \|D_y^2 \beta_1\|_{L^2(Z^+ \cup P)} \geq \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{IV.6})$$

Nous achevons la preuve en multipliant l'inégalité (IV.6) par ε , ce qui donne la minoration énoncée. La preuve est complète. \square

Dans le théorème suivant, nous établissons un résultat que nous utiliserons la suite. Nous montrons que la Hessienne de correcteur couche limite β_1 d'ordre 1 à l'échelle microscopique dans un domaine non borné ($Z^+ \cup P$) est majorée par une constante.

Théorème 10. *Soit $\beta_1 \in D^{1,2}(Z^+ \cup P)$ la solution du problème microscopique (III.20), alors il existe une constante K_3 strictement positive indépendante de ε telle que*

$$\|D_y^2 \beta_1\|_{L^2(Z^+ \cup P)} \leq K_3. \quad (\text{IV.7})$$

Démonstration. Nous voulons expliquer rapidement dans cette introduction l'idée directrice de notre démonstration.

1. Partie I : D'une façon analogue à celle utilisée dans la première section de ce chapitre pour démontrer la régularité H^2 par la formulation variationnelle, nous introduisons une partition de l'unité sur des pavés Q_n sous la forme $Q_n =]0, 2\pi[\times]2^{n-1}, 5(2^{n-1})[$ avec $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, nous établissons des estimations locales en utilisant les résultats de la régularité H^2 [40, Evans] afin de prouver que la Hessienne de correcteur couche limite est d'ordre $\mathcal{O}(2^n)$.
2. Partie II : Nous sommes les normes sur tous les pavés sur lesquels nous avons établi des estimations locales, ainsi nous utilisons les résultats des propositions 17 et 18 afin de se débarrasser du poids en $\mathcal{O}(2^n)$. Nous prouvons que la norme L^2 de la Hessienne de correcteur couche limite β_1 à l'échelle microscopique est bornée dans $Z^+ \cup P$.

Pour initialiser la démarche ci-dessus, rappelons le problème cellulaire (III.20)

$$\begin{cases} -\Delta \beta_1 = 0 & \text{sur } Z^+ \cup P \\ \beta_1 = -y_2 & \text{sur } P^0 \\ \beta_1 \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{cases}$$

Chapitre IV. Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

Nous introduisons la partition de l'unité $\varphi(\cdot)$ telle que

$$\begin{cases} \varphi(y_2) \in C_0^\infty(Q_0; [0, 1]), & \text{avec } Q_0 =]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}[\\ \varphi(y_2) \equiv 1 & \text{sur } Q'_0 =]1, 2[. \end{cases}$$

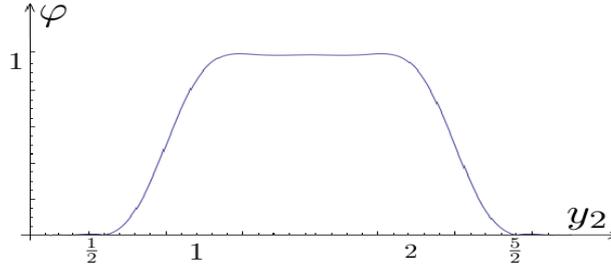


Figure IV.1 – Courbe de la partition de l'unité φ

Ensuite nous définissons la fonction $\Phi_n(\cdot, \cdot)$ telle que

$$\begin{cases} \Phi_n(y_1, y_2) = \varphi\left(\frac{y_2}{2^n}\right) \\ \Phi_n \in C_0^\infty(Q_n; [0, 1]), & \text{avec } Q_n =]0, 2\pi[\times]2^{n-1}, 5(2^{n-1})[\\ \Phi_n \equiv 1 & \text{sur } Q'_n =]0, 2\pi[\times]2^n, 2^{n+1}[. \end{cases}$$

Nous remarquons que $\Phi_0(y_1, y_2) = \varphi(y_2)$ et $\Phi_n(y_1, y_2) = \Phi_0\left(y_1, \frac{y_2}{2^n}\right)$. Le gradient du Φ_n vérifie

$$\nabla_y \Phi_n(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^n} \varphi'\left(\frac{y_2}{2^n}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \nabla \Phi_0.$$

Nous introduisons dans la suite de cette démonstration la quantité $\beta_n(\cdot)$ par

$$\beta_n(y) = \varphi\left(\frac{y_2}{2^n}\right) (\beta_1(y) - \bar{\beta}_1). \quad (\text{IV.8})$$

Nous vérifions aisément que $\beta_n(y) = \varphi\left(\frac{y_2}{2^n}\right) (\beta_1(y) - \bar{\beta}_1) \in H_0^1(Q_n)$ et que β_n est la solution faible de l'équation :

$$-\Delta_y \beta_n(y) = -\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \varphi''\left(\frac{y_2}{2^n}\right) (\beta_1(y) - \bar{\beta}_1) - \left(\frac{2}{2^n}\right) \varphi'\left(\frac{y_2}{2^n}\right) \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y) := F_n(y).$$

IV.2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

La formulation variationnelle est donnée par

$$\int_{Q_n} \nabla \beta_n \cdot \nabla v \, dy = \int_{Q_n} F_n v \, dy, \quad \forall v \in H_0^1(Q_n).$$

A présent, notons Z la demi-bande infinie telle que

$$Z =]0, 2\pi[\times]1, +\infty[\subset \left(\bigcup_n Q'_n \right).$$

Une majoration brutale conduit alors

$$\int_Z \left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{y_i y_j}^2 \beta_1|^2 \right) dy = \int_Z \left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{y_i y_j}^2 (\beta_1 - \bar{\beta}_1)|^2 \right) dy \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q'_n} \left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{y_i y_j}^2 \beta_n|^2 \right) dy. \quad (\text{IV.9})$$

D'autre part, d'après les formules de changement de variables dans les intégrales, il vient

$$\begin{aligned} \int_{Q'_n} \left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{y_i y_j}^2 \beta_n(y)|^2 \right) dy &= 2^n \int_{Q'_n} \left(\sum_{i,j=1}^2 \left| \partial_{y_i y_j}^2 \left(\varphi \left(\frac{y_2}{2^n} \right) (\beta_1(y) - \bar{\beta}_1) \right) \right|^2 \right) \frac{dy_2}{2^n} dy_1 \\ &= (2^n)^{-3} \int_{Q'_0} \left(\sum_{i,j=1}^2 \left| \partial_{z_i z_j}^2 \left(\varphi(z_2) (\beta_1(z_1, 2^n z_2) - \bar{\beta}_1) \right) \right|^2 \right) dz_1 dz_2, \quad \text{avec } z_1 = y_1 \text{ et } z_2 = \frac{y_2}{2^n}. \end{aligned}$$

Pour simplifier la présentation de cette démonstration, nous notons la fonction $\tilde{\beta}_n(\cdot)$ telle que $\tilde{\beta}_n(z) = \varphi(z_2) (\beta_1(z_1, 2^n z_2) - \bar{\beta}_1)$. En vertu de cette notation dans la dernière égalité, il suit

$$\int_{Q'_n} \left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{y_i y_j}^2 \beta_n(y)|^2 \right) dy = (2^n)^{-3} \int_{Q'_0} \left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{z_i z_j}^2 \tilde{\beta}_n(z)|^2 \right) dz_1 dz_2. \quad (\text{IV.10})$$

À ce stade nous faisons une petite discussion. Nous avons effectué un changement de variable pour redresser le pavé Q'_n en un domaine ne dépendant plus de n (par carte locale). Nous avons changé les coefficients de l'opérateur elliptique (le Laplacien devient un opérateur **Laplacien déformé** à coefficients variables dépendant de n). Sans établir tous les détails du calcul, notre redressement est caractérisé par la métrique suivante

$$G_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Notons $\tilde{\Delta}$ l'opérateur Laplacien déformé qui s'écrit comme suit : $\tilde{\Delta} = 2^n \partial_{z_1}^2 + \frac{1}{2^n} \partial_{z_2}^2$.

Chapitre IV. Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

Avec les notations introduites, $\tilde{\beta}_n(\cdot)$ est la solution faible du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}\tilde{\beta}_n(z) = -2^n\varphi''(z_2)(\beta_1(z_1, 2^n z_2) - \bar{\beta}_1) - 2\varphi'(z_1)\frac{\partial\beta_1(z_1, 2^n z_2)}{\partial z_2} := \tilde{F}_n(z) & \text{dans } Q_0 \\ \tilde{\beta}_n = 0 & \text{sur } \partial Q_0. \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

On peut adapter sans peine les études effectuées dans le deuxième chapitre. En vertu des preuves des propositions 6 et 13 (voir chapitre II) et par des raisonnements similaires, nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de n telle que nous avons l'inégalité suivante

$$\sum_{i,j=1}^2 \|\partial_{z_i z_j}^2 \tilde{\beta}_n\|_{L^2(Q_0)} \leq K(2^n)^2 \left(\|\tilde{\beta}_n\|_{L^2(Q_0)} + \|\tilde{F}_n\|_{L^2(Q_0)} \right). \quad (\text{IV.12})$$

Pour pouvoir exploiter l'inégalité (IV.12), nous calculons les normes $\|\tilde{\beta}_n\|_{L^2(Q_0)}$ et $\|\tilde{F}_n\|_{L^2(Q_0)}$, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \|\tilde{\beta}_n\|_{L^2(Q_0)} &= \left(\int_{Q_0} |\tilde{\beta}_n(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{Q_0} |\varphi(z_2)(\beta_1(z_1, 2^n z_2) - \bar{\beta}_1)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_n} \left| \varphi\left(\frac{y_2}{2^n}\right) (\beta_1(y) - \bar{\beta}_1) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} \|\beta_n\|_{L^2(Q_n)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}_n\|_{L^2(Q_0)} &= \left(\int_{Q_0} |\tilde{F}_n|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{Q_0} \left| 2^n \varphi''(z_2)(\beta_1(z_1, 2^n z_2) - \bar{\beta}_1) + 2\varphi'(z_1)\frac{\partial\beta_1(z_1, 2^n z_2)}{\partial z_2} \right|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \left(\int_{Q_0} |2^n \varphi''(z_2)(\beta_1(z_1, 2^n z_2) - \bar{\beta}_1)|^2 dz + \int_{Q_0} \left| 2\varphi'(z_1)\frac{\partial\beta_1(z_1, 2^n z_2)}{\partial z_2} \right|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \left(\int_{Q_0} |2^n(\beta_1(z_1, 2^n z_2) - \bar{\beta}_1)|^2 dz + \int_{Q_0} \left| 2\frac{\partial\beta_1(z_1, 2^n z_2)}{\partial z_2} \right|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \left(\frac{1}{2^n} \int_{Q_n} |2^n(\beta_1(y_1, y_2) - \bar{\beta}_1)|^2 dy + \frac{2}{2^n} \int_{Q_n} \left| \frac{\partial\beta_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \left((2^n)^{\frac{1}{2}} \|\beta_n\|_{L^2(Q_n)} + \left(\frac{2}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla\beta_n\|_{L^2(Q_n)} \right). \end{aligned}$$

IV.2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

Au terme de ces calculs, nous remplaçons ces deux dernières quantités dans (IV.12). Alors il existe une constante K strictement positive indépendante de n telle que

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \partial_{z_i z_j}^2 \tilde{\beta}_n \right\|_{L^2(Q'_0)} \leq K \left((2^n)^{\frac{1}{2}} \|\beta_n\|_{L^2(Q_n)} + \left(\frac{2}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \beta_n\|_{L^2(Q_n)} \right). \quad (\text{IV.13})$$

Pour finir cette première partie, il nous suffit de regrouper les résultats obtenus. De (IV.10) et (IV.13) il vient qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de n telle que

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \partial_{y_i y_j}^2 \beta_n \right\|_{L^2(Q'_n)} \leq (2^n)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i,j=1}^2 \left\| \partial_{z_i z_j}^2 \tilde{\beta}_n \right\|_{L^2(Q'_0)} \leq K (2^n) \left(\|\beta_n\|_{L^2(Q_n)} + \|\nabla \beta_n\|_{L^2(Q_n)} \right). \quad (\text{IV.14})$$

Partie II :

Nous venons de montrer la première étape, il nous reste donc à montrer la deuxième partie de cette démonstration. Celle-ci se démontre grâce aux résultats obtenus dans la première partie. En effet, si nous injectons (IV.9) dans (IV.14), nous montrons qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 strictement positives indépendantes de n telles que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \left\| \partial_{y_i y_j}^2 \beta_1 \right\|_{L^2(Z)} &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i,j=1}^2 \left\| \partial_{y_i y_j}^2 \beta_n \right\|_{L^2(Q'_n)} \right) \leq K_1 (2^n) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\beta_n\|_{L^2(Q_n)} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\nabla \beta_n\|_{L^2(Q_n)} \right) \\ &\leq K_2 (2^n) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\beta_1 - \bar{\beta}_1\|_{L^2(Q_n)} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\nabla \beta_1\|_{L^2(Q_n)} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Pour pouvoir se débarrasser du poids d'ordre $\mathcal{O}(2^n)$, étudions les normes $\|\beta_1 - \bar{\beta}_1\|_{L^2}$ et $\|\nabla \beta_1\|_{L^2}$ dans le pavé Q_n . Bien entendu, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ nous avons

$$\begin{aligned} \|\beta_1 - \bar{\beta}_1\|_{L^2(Q_n)} &= \left(\int_{Q_n} |\beta_1 - \bar{\beta}_1|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{Q_n} |e^{\alpha y_2} (\beta_1 - \bar{\beta}_1)|^2 e^{-2\alpha y_2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(e^{-2\alpha 2^{n-1}} \int_{Q_n} |e^{\alpha y_2} (\beta_1 - \bar{\beta}_1)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} := \sqrt{e^{-\alpha 2^n}} \|e^{\alpha y_2} (\beta_1 - \bar{\beta}_1)\|_{L^2(Q_n)}, \end{aligned}$$

et étant donné un réel $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, nous avons aussi

$$\begin{aligned} \|\nabla \beta_1\|_{L^2(Q_n)} &= \left(\int_{Q_n} |\nabla \beta_1|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{Q_n} |e^{\alpha y_2} \nabla \beta_1|^2 e^{-2\alpha y_2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(e^{-2\alpha 2^{n-1}} \int_{Q_n} |e^{\alpha y_2} \nabla \beta_1|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} := \sqrt{e^{-\alpha 2^n}} \|e^{\alpha y_2} \nabla \beta_1\|_{L^2(Q_n)}. \end{aligned}$$

Chapitre IV. Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

En injectant ces deux dernières inégalités dans (IV.15), alors pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, nous obtenons

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \partial_{y_i y_j}^2 \beta_1 \right\|_{L^2(Z)} \leq K \sum_{n \in \mathbb{N}} (2^n) \sqrt{e^{-\alpha 2^n}} \left(\left\| e^{\alpha y_2} (\beta_1 - \bar{\beta}_1) \right\|_{L^2(Q_n)} + \left\| e^{\alpha y_2} \nabla \beta_1 \right\|_{L^2(Q_n)} \right). \quad (\text{IV.16})$$

Bien entendu, l'utilisation des résultats des propositions 17 et 18 ainsi que du critère de d'Alembert pour les séries nous permet de montrer la convergence des deux séries dans l'expression (IV.16). Autrement dit, nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de n telle que

$$\left\| \text{Hess}(\beta_1) \right\|_{L^2(Z)} \leq K \quad \text{avec } Z =]0, 2\pi[\times]1, +\infty[. \quad (\text{IV.17})$$

Par ailleurs, grâce au théorème de la régularité H^2 dans un domaine borné à bord assez régulier [40, Evans], nous concluons que la norme L^2 de la Hessienne de correcteur couche limite β_1 à l'échelle macroscopique est bornée dans $(Z^+ \cup P) \setminus Z$. D'où on achève la démonstration. \square

Nous allons maintenant montrer une estimation de la norme $\left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$. Celle-ci ne constitue en réalité qu'un intermédiaire pour démontrer le résultat d'estimation d'erreur à priori entre l'approximation couche limite d'ordre 1 et la solution exacte u_ε pour la norme H^2 , c'est à dire le Théorème 12.

Proposition 35. *Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe une constante K_4 strictement positive indépendante de ε telle que*

$$\varepsilon \left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K_4}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.18})$$

Preuve. Nous partons de l'inégalité suivante

$$\varepsilon \left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon \left(\left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \left\| \nabla_x (\beta_1 - \bar{\beta}_1) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \left\| D_x^2 (\beta_1 - \bar{\beta}_1) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{IV.19})$$

D'après les formules de changement de variables dans les intégrales, nous vérifions

$$\begin{aligned} \left\| \beta_1 - \bar{\beta}_1 \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left| \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right|^2 dx = \sum_{k=1}^{E(\frac{L}{2\pi\varepsilon})} \left(\int_{(Z^+ \cup P)_k} \left| \beta_1(y) - \bar{\beta}_1 \right|^2 \varepsilon^2 dy \right) \\ &\leq \frac{L}{2\pi\varepsilon} \left(\varepsilon^2 \int_{(Z^+ \cup P)} \left| \beta_1(y) - \bar{\beta}_1 \right|^2 dy \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

IV.2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

Nous pouvons également appliquer les résultats des propositions 17 et 18 (propriétés fondamentales de la solution microscopique cellulaire d'ordre 1). Pour cela, nous rappelons tout d'abord que la moyenne $\bar{\Gamma}$ de la fonction $(-\tilde{\gamma})$ sur une période 2π est définie par

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\tilde{\gamma}(y_1)) dy_1.$$

En utilisant le fait que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ pour a et b deux réels positifs, ainsi que pour tout α réel strictement positif, il suit

$$\begin{aligned} \int_{(Z^+ \cup P)} |\beta_1(y) - \bar{\beta}_1|^2 dy &= \int_P |\beta_1(y) - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma} - \bar{\Gamma}|^2 dy + \int_{Z^+} |\beta_1(y) - \bar{\beta}_1|^2 dy \\ &\leq 2 \left(\int_P |\beta_1(y) - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma}|^2 dy + \int_P |\bar{\Gamma}|^2 dy \right) + \int_{Z^+} |\beta_1(y) - \bar{\beta}_1|^2 dy \\ &\leq 2 \left(\int_P e^{-2\alpha y_2} |e^{\alpha y_2} (\beta_1(y) - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma})|^2 dy + \int_P |\bar{\Gamma}|^2 dy \right) + \int_{Z^+} e^{-2\alpha y_2} |e^{\alpha y_2} (\beta_1(y) - \bar{\beta}_1)|^2 dy \\ &\leq 2 \left(e^{-2\alpha \tilde{\gamma}(y_1)} \|\beta_1 - \bar{\beta}_1 + \bar{\Gamma}\|_{L^2(P, e^{\alpha y_2})}^2 + 2\pi |\tilde{\gamma}(y_1)| (\bar{\Gamma})^2 \right) + \|\beta_1 - \bar{\beta}_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2. \end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer les résultats des inégalités (III.33) et (III.41), nous nous restreindrons à $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. Nous avons donc l'existence des deux constantes strictement positives \tilde{C}_2 et K dépendantes de α telles que

$$\|\beta_1 - \bar{\beta}_1\|_{L^2(Z^+ \cup P)}^2 \leq 2 \left(e^{-2\alpha \tilde{\gamma}(y_1)} \tilde{C}_2 \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(P, e^{\alpha y_2})}^2 + 2\pi (\bar{\Gamma})^2 \right) + \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z^+, e^{\alpha y_2})}^2 \leq K.$$

En remplaçant cette dernière inégalité dans (IV.20), alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε

$$\varepsilon \|\beta_1 - \bar{\beta}_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{IV.21})$$

Nous nous intéressons maintenant à l'estimation du gradient de la différence entre le correcteur couche limite d'ordre 1 et sa moyenne dans le domaine rugueux Ω_ε . En suivant toujours le même procédé, les formules de changement de variables dans les intégrales nous donnent

$$\begin{aligned} \|\nabla_x(\beta_1 - \bar{\beta}_1)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^2 \left| \partial_{x_i} \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx_1 dx_2 = \sum_{k=1}^{E(\frac{L}{2\pi\varepsilon})} \left(\int_{(Z^+ \cup P)_k} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \beta_1(y) \right|^2 \varepsilon^2 dy_1 dy_2 \right) \\ &\leq \frac{L}{2\pi\varepsilon} \|\nabla_y \beta_1\|_{L^2(Z^+ \cup P)}^2. \end{aligned}$$

Chapitre IV. Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

En prenant en compte que $\nabla_y \beta_1 \in L^2(Z^+ \cup P)$, nous tirons donc qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\varepsilon \left\| \nabla_x (\beta_1 - \overline{\beta_1}) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \left\| \nabla_y \beta_1 \right\|_{L^2(Z^+ \cup P)}^2 \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{IV.22})$$

Il nous reste à étudier la Hessienne de la différence entre le correcteur couche limite d'ordre 1 et sa moyenne dans le domaine rugueux Ω_ε . Une version similaire au calcul ci-dessus nous donne

$$\begin{aligned} \left\| D_x^2 (\beta_1 - \overline{\beta_1}) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^2 \left| \partial_{x_i x_j}^2 \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx = \sum_{k=1}^{E(\frac{L}{2\pi\varepsilon})} \left(\int_{(Z^+ \cup P)_k} \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{y_i y_j}^2 \beta_1(y) \right|^2 \varepsilon^2 dy \right) \\ &\leq \frac{L}{2\pi\varepsilon^3} \left\| D_y^2 \beta_1 \right\|_{L^2(Z^+ \cup P)}^2. \end{aligned}$$

Nous utilisons le résultat du Théorème 10, il vient

$$\varepsilon \left\| D_x^2 (\beta_1 - \overline{\beta_1}) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \left\| D_y^2 \beta_1 \right\|_{L^2(Z^+ \cup P)} \leq \frac{K_3 \sqrt{L}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}. \quad (\text{IV.23})$$

Nous finissons en injectant les estimations (IV.21), (IV.22) et (IV.23) dans (IV.19). Alors il existe une constante K_4 strictement positive indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon < 1$, on a

$$\varepsilon \left\| \beta_1 - \overline{\beta_1} \right\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K_4 \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \leq \frac{3K_4}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ceci permet de conclure. □

2.3 Norme H^2 de l'approximation couche limite à l'ordre 1

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction de ce chapitre, après avoir montré que la hessienne du correcteur cellulaire d'ordre 1, est singulière à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{3}{2}})$, nous montrerons également que la norme H^2 de l'approximation couche limite à l'ordre 1 est singulière à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Autrement, dans cette courte sous-section nous aimerions montrer le résultat suivant :

Théorème 11. *Soit $u_{\text{Ach},1}^\infty$ l'approximation couche limite d'ordre 1, alors il existe deux constantes K_5 et K_6 strictement positives indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$, nous avons*

$$\frac{K_5}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \left\| u_{\text{Ach},1}^\infty \right\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K_6}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.24})$$

IV.2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

Preuve. Nous partons de la relation suivante

$$\|u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}^2 = \|u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\text{Hess}(u_{\text{Ach},1}^\infty)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2. \quad (\text{IV.25})$$

Nous introduisons par interpolation la solution u_ε dans la norme $\|u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Alors par l'inégalité triangulaire et grâce au théorème 1 ainsi la proposition 20, il vient qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} \|u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|u_{\text{Ach},1}^\infty - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq K \left[\sqrt{\text{mes}(\Omega_\varepsilon)} \left(4(1 + \varepsilon)^2 + 1 \right) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \right] \leq K. \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

D'autre part, en utilisant l'expression explicite de l'approximation couche limite d'ordre 1 on obtient l'existence d'une constante K strictement positive indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\text{Hess}(u_{\text{Ach},1}^\infty)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\text{Hess}(u_{\text{ext},1}^0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\beta_1} \frac{C}{2} \left\| \text{Hess} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 x_2 \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \|u_{\text{ext},1}^0\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{C}{2} \varepsilon \|D_x^2 \beta_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_{\text{ext},1}^0\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{K}{\sqrt{\varepsilon}} \|D_y^2 \beta_1\|_{L^2(Z \cup P)}. \end{aligned}$$

Les résultats du théorème 10 et la proposition 33 donnent immédiatement qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon < 1$, nous avons

$$\|\text{Hess}(u_{\text{Ach},1}^\infty)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \leq \frac{2K}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.27})$$

Pour établir la première inégalité, il suffit de remplacer les estimations (IV.26) et (IV.27) dans (IV.25) afin de majorer $\|u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$. A présent, il nous reste à exploiter une minoration de la norme $\|u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$. En appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\frac{C\varepsilon}{4} \left\| \text{Hess} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 x_2 \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - \|\text{Hess}(u_{\text{ext},1}^0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\text{Hess}(u_{\text{Ach},1}^\infty)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

D'après l'inégalité (IV.6), nous montrons qu'il existe une constante K_2 strictement positive indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon < 1$, nous avons

$$\left\| \text{Hess} \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 x_2 \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \|D_x^2 \beta_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \geq \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}.$$

Chapitre IV. Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

En regroupant les résultats des deux dernières inégalités, on s'aperçoit que la norme $\|u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$ est minorée à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Ceci conclut la preuve. \square

2.4 Norme H^2 de l'estimation d'erreur d'ordre 1

Nous arrivons à la toute dernière partie de cette analyse asymptotique. Nous allons dans cette sous-section effectuer l'étude théorique de l'erreur pour la norme $H^2(\Omega_\varepsilon)$ entre la solution exacte u_ε et l'approximation couche limite d'ordre 1. L'objectif est de montrer le résultat suivant

Théorème 12. *Soit u_ε la solution du problème (III.1). Alors pour tout $\varepsilon < 1$, il existe une constante K_7 strictement positive indépendante de ε telle que l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},1}^\infty$ d'ordre 1 satisfait*

$$\|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K_7}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (\text{IV.28})$$

Démonstration. Commençons par rappeler que l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},1}^\infty$ d'ordre 1 est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_{\text{Ach},1}^\infty = C \mathbf{1}_{[\Omega_0]} & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_{\text{Ach},1}^\infty = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) & \text{sur } \Gamma^\infty \\ u_{\text{Ach},1}^\infty = 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ u_{\text{Ach},1}^\infty \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right.$$

Posons la différence $r_\varepsilon^{1,\infty} = u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty$. Alors $r_\varepsilon^{1,\infty}$ est la solution du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta r_\varepsilon^{1,\infty} = C \mathbf{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^{1,\infty} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) & \text{sur } \Gamma^\infty \\ r_\varepsilon^{1,\infty} = 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ r_\varepsilon^{1,\infty} \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right.$$

Rappelons aussi que la dérivée partielle d'ordre 1 de u_0 sur l'interface γ^0 vérifie $\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{C}{2}$. Nous remarquons que sur le bord lisse Γ^∞ , l'erreur $r_\varepsilon^{1,\infty}$ est non homogène. Pour cela, nous définissons astucieusement l'expression \tilde{R}_ε telle que

$$\tilde{R}_\varepsilon = r_\varepsilon^{1,\infty} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \varphi(x_2) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right),$$

IV.2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

où, $\varphi(\cdot)$ est une fonction suffisamment régulière de $C^\infty([-1, 1], [0, 1])$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi \equiv 1 & \text{si } x_2 = 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 1 & \text{sur } \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \\ \varphi \equiv 0 & \text{sur } \left] -1, \frac{1}{2} \right]. \end{array} \right.$$

Bien entendu, la fonction \tilde{R}_ε est la solution du problème aux limites avec une condition du Dirichlet homogène :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{R}_\varepsilon = C \mathbf{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \Delta \left(\varphi(x_2) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \right) & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ \tilde{R}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ \tilde{R}_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{IV.29})$$

Pour des raisons de commodité, nous notons $G_{\beta_1, \varepsilon}(\cdot)$ le terme source associé au problème aux limites (IV.29) tel que

$$G_{\beta_1, \varepsilon}(x) = C \mathbf{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \Delta \left(\varphi(x_2) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \right).$$

Après dérivation, nous obtenons

$$G_{\beta_1, \varepsilon}(x) = C \mathbf{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \beta_1} \frac{C}{2} \left[\left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \varphi''(x_2) \right]. \quad (\text{IV.30})$$

Compte tenu du résultat de l'estimation (III.61) et par un calcul similaire nous pouvons déduire une convergence exponentielle de la différence du correcteur β_1 par rapport à sa moyenne $\bar{\beta}_1$ sur le bord Γ^∞ pour la norme $L^2(\Gamma^\infty)$. De ce fait, nous montrons que la fonction $G_{\beta_1, \varepsilon}$ appartient à $L^2(\Omega_\varepsilon)$ et qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que pour tout ε assez petit, nous avons

$$\|G_{\beta_1, \varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\sqrt{\text{mes}(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \varepsilon \left\| \beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right\|_{L^2(\Gamma^\infty)} \right) \leq K \left(\sqrt{\varepsilon} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) \leq 2K \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{IV.31})$$

Tous les ingrédients sont réunis pour pouvoir appliquer les résultats du deuxième chapitre de cette thèse. Nous nous plaçons sous les mêmes hypothèses d'un problème elliptique aux conditions aux limites homogènes dans un domaine périodique avec une paroi rugueuse assez régulière. Appliquons au problème aux limites (IV.29) l'inégalité (II.51) associé au Théorème

2, alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\tilde{R}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\|G_{\beta_1, \varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\tilde{R}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right). \quad (\text{IV.32})$$

Maintenant pour pouvoir exploiter cette dernière inégalité, cherchons la formulation variationnelle du problème aux limites (IV.29). Étant donnée une fonction test $v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon)$, à l'aide de la formule de Green, nous obtenons

$$\langle \nabla \tilde{R}_\varepsilon, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle -\Delta \tilde{R}_\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle G_{\beta_1, \varepsilon}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon}.$$

Par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\left| \langle \nabla \tilde{R}_\varepsilon, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| \leq \left| \langle G_{\beta_1, \varepsilon}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right|. \quad (\text{IV.33})$$

En appliquant le théorème de Cauchy-Schwarz pour le membre de droite de l'inégalité (IV.33) ainsi par la proposition 2 (Inégalité de Poincaré dans un domaine rugueux), il vient

$$\left| \langle G_{\beta_1, \varepsilon}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| \leq \|G_{\beta_1, \varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_P(\varepsilon) \|G_{\beta_1, \varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad (\text{IV.34})$$

où $C_P(\varepsilon)$ désigne la constante de Poincaré donnée par $(1 + \varepsilon)$ (voir chapitre I). En prenant $\tilde{R}_\varepsilon = v$ dans (IV.33) et (IV.34) et par le lemme 1, nous obtenons

$$\alpha_\varepsilon \|\tilde{R}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|\nabla \tilde{R}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq |\langle G_{\beta_1, \varepsilon}, \tilde{R}_\varepsilon \rangle_{\Omega_\varepsilon}| \leq C_P(\varepsilon) \|G_{\beta_1, \varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{R}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad (\text{IV.35})$$

où α_ε est la constante de coercivité donnée par $\alpha_\varepsilon = \frac{1}{4(1+\varepsilon)^2+1}$. Avant d'aller plus loin dans notre raisonnement, signalons que la solution $\tilde{R}_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. En effet en tenant compte des estimations (III.54) et (III.61), alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\tilde{R}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\|r_\varepsilon^{1,\infty}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon \|\beta_1 - \bar{\beta}_1\|_{L^2(\Gamma^\infty)} \right) \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{IV.36})$$

De (IV.35) et (IV.36), nous pouvons déduire

$$\alpha_\varepsilon \|\tilde{R}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C_P(\varepsilon) \|G_{\beta_1, \varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \left(\|\tilde{R}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla \tilde{R}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right). \quad (\text{IV.37})$$

IV.2 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 1

Ainsi, d'après (IV.37) et (IV.31), nous déduisons :

$$\|\tilde{R}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_P(\varepsilon) \|G_{\beta_1, \varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}{\alpha_\varepsilon} \leq K \left(\frac{C_P(\varepsilon)}{\alpha_\varepsilon} \right) \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{IV.38})$$

Nous remplaçons l'estimation (IV.38) dans l'expression (IV.32), donc il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que pour tout ε assez petit, nous avons

$$\|\tilde{R}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \leq \frac{2K}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.39})$$

D'autre part, par un calcul similaire à celui de l'estimation (III.61), nous montrons l'existence d'une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \varphi(x_2) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \right\|_{H^2(\Gamma^\infty)} \leq K \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.40})$$

Nous pouvons conclure définitivement la démonstration en réunissant tous les résultats obtenus. De (IV.39) et (IV.40), nous montrons par inégalité triangulaire qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que pour tout ε assez petit, nous avons

$$\begin{aligned} \|r_\varepsilon^{1, \infty}\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\tilde{R}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\beta_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left\| \varphi(x_2) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \right\|_{H^2(\Gamma^\infty)} \\ &\leq K \left(\|\tilde{R}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) \leq \frac{K}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Ceci permet d'achever la démonstration. □

2.5 Premier résultat par l'approximation couche limite d'ordre 1

Pour prouver le Théorème 9, nous désirons nous servir des résultats ci-dessus des deux Théorèmes 19 et 12. À l'aide de l'inégalité triangulaire, nous prouvons immédiatement que la régularité H^2 du problème aux limites (III.1) est majorée en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Autrement dit, nous montrons l'existence d'une constante C_{\max} strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_{\text{Ach},1}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K_6 + K_7}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \frac{C_{\max}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Il est intéressant de se poser la question de la possibilité d'utiliser l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},2}^\infty$ d'ordre 2 par l'approche d'Achdou et al. On peut notamment se poser la question

suivante :

Question 3. *Peut-on obtenir une meilleure majoration pour la norme H^2 de la solution exacte u_ε lorsque nous utilisons l'approximation $u_{\text{Ach},2}^\infty$?*

Cette question semble très facile à répondre et ne devrait pas poser de grandes difficultés. Pour cela, nous ferons une étude un peu détaillée dans la section suivante.

3 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 2

Dans cette section, nous souhaitons répondre à la Question 3. Bien qu'il y ait des nombreuses différences pour les taux de convergence des approximations couches limites d'ordre 1 et 2 dans les normes L^2 et H^1 , nous pouvons montrer que l'utilisation de l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},2}^\infty$ ne fournit pas une meilleure majoration que celle d'ordre 1. En effet, bien que l'expression (III.98) de $u_{\text{Ach},2}^\infty$ relie les deux correcteurs couches limites β_1 et β_2 , les oscillations de correcteur couche limite $\varepsilon(\beta_1(\frac{x}{\varepsilon}) - \bar{\beta}_1 x_2)$ du premier ordre ont des amplitudes assez grandes et ne divergent pas plus vite que $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Par contre, grâce à l'approximation couche limite d'ordre 1, nous montrons que la norme H^2 de la solution exacte u_ε associée au problème aux limites (III.1) est singulière à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Le bilan de cette section est semblable à celle de la section précédente. Pour cela dans la suite, nous décrivons brièvement le schéma de la technique sans détailler tous les calculs. Disons qu'il repose sur les ingrédients suivants :

Régularité H^2 de l'extension d'ordre 2 du profil de Poiseuille

Proposition 36. *Pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$, il existe une constante \tilde{C}_0 strictement positive indépendante de ε telle que*

$$\|u_{\text{ext},2}^0\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \tilde{C}_0. \quad (\text{IV.41})$$

Preuve. La forme de la solution $u_{\text{ext},2}^0$ est explicite dans Ω_ε . On s'aperçoit par un calcul explicite que

$$\begin{aligned} \|u_{\text{ext},2}^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} (u_{\text{ext},2}^0)^2 dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{C}{2} x_2 (1 - x_2) \right)^2 dx \\ &= L \left(\frac{C}{2} \right)^2 \left(\int_{\varepsilon \tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^1 (x_2 - x_2^2)^2 dx_2 \right) \\ &= \frac{L}{30} \left(\frac{C}{2} \right)^2 \left[1 - \left(\varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right)^3 \left(10 + 15 \varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) + 6 \left[\varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right]^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

IV.3 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 2

Concernant le gradient de profil de Poiseuille dans le domaine rugueux, nous avons la majoration suivante

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\text{ext},2}^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u_{\text{ext},2}^0)^2 dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{C}{2} - Cx_2\right)^2 dx = L \left(\frac{C}{2}\right)^2 \left(\int_{\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})}^1 (1 - 2Cx_2)^2 dx_2\right) \\ &\leq \tilde{C} (1 + \varepsilon\|\tilde{\gamma}\|_{L^\infty} + \varepsilon^3\|\tilde{\gamma}\|_{L^\infty}^3). \end{aligned}$$

Pour la Hessienne de $u_{\text{ext},2}^0$, nous dérivons explicitement que

$$\|\text{Hess}(u_{\text{ext},1}^0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 = \left\| \frac{\partial^2 u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2^2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u_{\text{ext},1}^0}{\partial x_2^2}\right)^2 dx = \int_{\Omega_\varepsilon} C^2 dx = LC^2 \left(1 - \varepsilon\tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right).$$

En regroupant les résultats de toutes les normes ci-dessus, alors il existe une constante \tilde{C}_0 strictement positive indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$ la norme $\|u_{\text{ext},1}^0\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$ est bornée par \tilde{C}_0 . D'où le résultat voulu. \square

Quelques estimations de correcteur couche limite à l'ordre 2

Nous rappelons tout d'abord que le correcteur β_2 d'ordre 2 est solution du problème de Laplace suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\beta_2 = 0 & \text{sur } Z^+ \cup P \\ \beta_2 = -y_2^2 & \text{sur } P^0 \\ \beta_2 \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r \\ \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \beta_2(y) = \overline{\beta_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_2(y_1, 0) dy_1. \end{array} \right.$$

Par la même méthodologie que nous avons illustrée dans la sous-section 2.2 de ce chapitre adaptée au correcteur couche limite d'ordre 1, nous établissons quelques estimations de correcteur couche limite à l'ordre 2. Nous ne donnerons aucune démonstration pour les résultats qui suivent et renvoyons le lecteur à la sous-section 2.2.

Proposition 37. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et deux constantes \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 strictement positives indépendantes de ε tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, le correcteur couche limite β_2 d'ordre 2 satisfait*

$$\frac{\tilde{C}_2}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \varepsilon \|D_x^2 \beta_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt{\varepsilon}} \|D_{y^i}^2 \beta_2\|_{L^2(Z^+ \cup P)}. \quad (\text{IV.42})$$

Théorème 13. *Soit $\beta_2 \in D^{1,2}(Z^+ \cup P)$ la solution du problème microscopique d'ordre 2 (III.96), alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une constante \tilde{C}_3 strictement positive indépendante de ε tels que pour*

Chapitre IV. Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, nous avons

$$\left\| D_y^2 \beta_2 \right\|_{L^2(Z^+ \cup P)} \leq \tilde{C}_3. \quad (\text{IV.43})$$

Proposition 38. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une constante \tilde{C}_4 strictement positive indépendante de ε tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, nous avons l'estimation suivante*

$$\varepsilon \left\| \beta_2 - \overline{\beta_2} \right\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{\tilde{C}_4}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.44})$$

Norme H^2 de l'approximation couche limite à l'ordre 2

De la même façon que dans la sous-section 2.3 de ce chapitre, nous montrerons que la norme H^2 dans le domaine rugueux de l'approximation couche limite à l'ordre 2 est singulière à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. De même que précédemment, nous énonçons sans démonstration le résultat suivant

Théorème 14. *Soit $u_{\text{Ach},2}^\infty$ l'approximation couche limite d'ordre 2, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et deux constantes \tilde{C}_5 et \tilde{C}_6 strictement positives indépendantes de ε tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, nous avons*

$$\frac{\tilde{C}_5}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \|u_{\text{Ach},2}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{\tilde{C}_6}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.45})$$

Norme H^2 de l'estimation d'erreur d'ordre 2

Contrairement au cas de l'approximation couche limite d'ordre 1 nous avons une estimation d'erreur dans $H^2(\Omega_\varepsilon)$ avec un taux de convergence en ordre $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ dû au terme source dans la partie rugueuse. Nous montrons ici une convergence exponentielle de l'estimation d'erreur d'ordre 2.

Théorème 15. *Soit u_ε la solution exacte du problème aux limites (III.1). Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une constante \tilde{C}_7 strictement positive indépendante de ε tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},2}^\infty$ d'ordre 2 satisfait*

$$\|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \tilde{C}_7 e^{\frac{-1}{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.46})$$

Démonstration. La stratégie est toujours la même que celle dans la démonstration du théorème 12. Rappelons tout d'abord que l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},2}^\infty$ d'ordre 2 est la solution

IV.3 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 2

du problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{\text{Ach},2}^\infty = C \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_{\text{Ach},2}^\infty = \omega_\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\ u_{\text{Ach},2}^\infty = 0 \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ u_{\text{Ach},2}^\infty \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s, \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \omega_\varepsilon(x_1) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \left[\left(\beta_2 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_2} \right) - \frac{\varepsilon \overline{\beta_2}}{1 + \varepsilon \overline{\beta_1}} \left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \overline{\beta_1} \right) \right].$$

Si nous définissons l'erreur $r_\varepsilon^{2,\infty} = u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty$, alors $r_\varepsilon^{2,\infty}$ est la solution du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta r_\varepsilon^{2,\infty} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^{2,\infty} = -\omega_\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\ r_\varepsilon^{2,\infty} = 0 \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ r_\varepsilon^{2,\infty} \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{IV.47})$$

Il est clair que l'erreur $r_\varepsilon^{2,\infty}$ est non homogène sur le bord lisse Γ^∞ . Nous allons nous débarrasser de cette trace. Définissons donc les expressions $\mathcal{E}_\varepsilon(\cdot)$ et $\eta(\cdot)$ telles que

$$\mathcal{E}_\varepsilon(x) = r_\varepsilon^{2,\infty}(x) + \eta(x_2) \omega_\varepsilon(x_1).$$

Signalons que la fonction $\eta(\cdot)$ est de $C^\infty([-1, 1], [0, 1])$, définie astucieusement comme suit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta \equiv 1 & \text{si } x_2 = 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 & \text{sur } \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \\ \eta \equiv 0 & \text{sur } \left] -1, \frac{1}{2} \right]. \end{array} \right.$$

Il est assez immédiat que la fonction $\mathcal{E}_\varepsilon(\cdot)$ est la solution de problème aux limites avec une condition du Dirichlet homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathcal{E}_\varepsilon = -\Delta(\eta \omega_\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \mathcal{E}_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ \mathcal{E}_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{IV.48})$$

Chapitre IV. Étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par les approximations couches limites

Pour simplifier la présentation, notons $F_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon(\cdot)$ la fonction terme source du problème aux limites (IV.48). Nous dérivons ce terme source et nous obtenons

$$\begin{aligned} -\Delta(\eta\omega_\varepsilon) &= -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\bar{\beta}_1} \frac{C}{2} \left[\left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \eta''(x_2) \right] + \frac{C\varepsilon^2}{2} \left[\left(\beta_2 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_2 \right) \eta''(x_2) \right] \\ &\quad - \frac{C\varepsilon^2}{2} \frac{\varepsilon\bar{\beta}_2}{1+\varepsilon\bar{\beta}_1} \left[\left(\beta_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 \right) \eta''(x_2) \right], \\ &:= F_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon(x). \end{aligned} \tag{IV.49}$$

De même que précédemment, un calcul similaire à celui de l'estimation (III.61) nous donne que $F_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. En effet, nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|F_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{IV.50}$$

Le problème que nous considérons dans cette démonstration se prête bien à la vérification des hypothèses du théorème 2. En effet, le problème (IV.48) est un problème elliptique aux conditions aux limites homogènes dans un domaine périodique avec une paroi rugueuse assez régulière. L'estimation suivante est une adaptation immédiate de l'inégalité (II.51) associé au théorème 2. Nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\mathcal{E}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\|F_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\mathcal{E}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right). \tag{IV.51}$$

Pour pouvoir exploiter l'inégalité (IV.51), nous serons amenés à chercher la formulation variationnelle du problème aux limites (IV.48). Soit $v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon)$ une fonction test régulière. Grâce à la formule de Green, nous obtenons

$$\langle \nabla \mathcal{E}_\varepsilon, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle -\Delta \mathcal{E}_\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle F_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon}.$$

L'inégalité triangulaire nous donne immédiatement

$$\left| \langle \nabla \mathcal{E}_\varepsilon, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| \leq \left| \langle F_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right|. \tag{IV.52}$$

IV.3 Étude de la régularité H^2 par l'approximation couche limite d'ordre 2

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le membre de droite de l'inégalité (IV.52) et en appliquant le résultat de la proposition 2, il suit

$$\left| \langle \mathbf{F}_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| \leq \left\| \mathbf{F}_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_P(\varepsilon) \left\| \mathbf{F}_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad (\text{IV.53})$$

où $C_P(\varepsilon)$ présente la constante de Poincaré donnée par $(1 + \varepsilon)$. En remplaçant la fonction test v par \mathcal{E}_ε dans (IV.52) et (IV.53) et par le lemme 1, nous obtenons

$$\alpha_\varepsilon \|\mathcal{E}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|\nabla \mathcal{E}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq |\langle \mathbf{F}_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon, \mathcal{E}_\varepsilon \rangle_{\Omega_\varepsilon}| \leq C_P(\varepsilon) \left\| \mathbf{F}_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla \mathcal{E}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad (\text{IV.54})$$

avec α_ε est la constante de coercivité donnée par $\alpha_\varepsilon = \frac{1}{4(1+\varepsilon)^2+1}$. Il est clair que la solution $\mathcal{E}_\varepsilon(\cdot)$ est exponentiellement petite pour la norme $L^2(\Omega_\varepsilon)$. En effet, grâce à l'estimation (III.61) et à la proposition 26, nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\mathcal{E}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\|r_\varepsilon^{2, \infty}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\omega_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right) \leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.55})$$

D'autre part, de (IV.54) et (IV.55), nous déduisons

$$\alpha_\varepsilon \|\mathcal{E}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C_P(\varepsilon) \left\| \mathbf{F}_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \left(\|\mathcal{E}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla \mathcal{E}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right). \quad (\text{IV.56})$$

En réunissant les résultats des inégalités (IV.50) et (IV.56), il vient

$$\|\mathcal{E}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_P(\varepsilon) \left\| \mathbf{F}_{\beta_1, \beta_2}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}{\alpha_\varepsilon} \leq K \left(\frac{C_P(\varepsilon)}{\alpha_\varepsilon} \right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \quad (\text{IV.57})$$

Nous remplaçons l'estimation (IV.57) dans l'expression (IV.51), donc il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\mathcal{E}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Par ailleurs par un calcul similaire à celle de l'estimation (III.61), nous pouvons montrer que le taux de convergence de la quantité $\|\eta \omega_\varepsilon\|_{H^2(\Gamma^\infty)}$ est d'ordre $\mathcal{O}(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}))$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de regrouper tous les résultats obtenus. Par l'inégalité triangulaire, nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|r_\varepsilon^{2, \infty}\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\mathcal{E}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\eta \omega_\varepsilon\|_{H^2(\Gamma^\infty)} \leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

La preuve est complète. □

Deuxième résultat par l'approximation couche limite d'ordre 2

Contrairement à l'étude de la régularité H^2 dans des domaines rugueux par l'approximation couche limite d'ordre 1 que nous avons présenté dans la deuxième section de ce chapitre, nous prouvons grâce à l'approximation couche limite d'ordre 2 que la norme H^2 de la solution du problème aux limites (III.1) est singulière en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. En effet, par l'inégalité triangulaire ainsi que les résultats ci-dessus des deux derniers Théorèmes, nous montrons l'existence des deux constantes C_{\min} et C_{\max} strictement positives indépendantes de ε telles que

$$\begin{aligned} \frac{C_{\min}}{\sqrt{\varepsilon}} &\leq \frac{\tilde{C}_5}{\sqrt{\varepsilon}} - \tilde{C}_7 e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \leq \|u_{\text{Ach},2}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} - \|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_{\text{Ach},2}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{\tilde{C}_6}{\sqrt{\varepsilon}} + \tilde{C}_7 e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{C_{\max}}{\sqrt{\varepsilon}} \end{aligned}$$

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude asymptotique de la régularité H^2 dans des domaines rugueux en utilisant les approximations couches limites. Nous avons porté une attention particulière au fait que la Hessienne des approximations couches limites d'ordre 1 et 2 par l'approche d'Achdou fait intervenir des majorations en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$.

L'apport de ce travail est d'une part théorique. La régularité H^2 du modèle d'écoulement sanguin modélisé mathématiquement par le problème aux limites (III.1) avec une source réelle a été étudié et validé de manière détaillée et rigoureuse. Nous avons montré par l'approximation couche limite d'ordre 1 que la norme H^2 de la solution du problème aux limites (III.1) est majoré en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Par contre grâce à l'approximation couche limite d'ordre 2, elle est singulière en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$.

Présentons maintenant une voie possible de recherche. Relativement au modèle d'écoulement sanguin modélisé mathématiquement dans le premier chapitre de ce document, serait-il possible d'étudier asymptotiquement la régularité H^2 du problème aux limites (E) ? Cette question fera l'objet du chapitre suivant de cette thèse.

*La vérité de demain se nourrit
par l'erreur d'hier.*

Antoine de Saint-Exupéry.

Chapitre V

Étude asymptotique de la régularité H^2 : Application au problème de Laplace

1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter une manière plus générale pour l'étude de la régularité H^2 du modèle mathématique présenté dans le premier chapitre par la méthode des développements asymptotiques. Nous illustrerons d'abord une nouvelle stratégie pour développer des lois de paroi pour des domaines rugueux, basée sur la méthode de développement asymptotique à deux échelles. Les lois de paroi construites par cette approche ont la caractéristique de s'adapter à la géométrie de la rugosité en simulant l'influence des petites échelles sur l'écoulement global. Elles sont construites dans un cadre mathématique bien défini, basé sur des développements asymptotiques à deux échelles ([5], [20], [25], [26] et [68]). L'utilisation des méthodes de développements asymptotiques pour développer des conditions aux limites équivalentes a été introduite par Achdou [2] et poursuivie par Achdou, Pironneau, Zebic [9] et O. Lافitte [54, 55] dans le cadre des équations de Maxwell, pour traiter des obstacles contenant une fine couche de matériaux composites. L'idée était de retirer du domaine du calcul cette fine couche, en simulant son influence par le biais d'une condition aux limites équivalentes tenant compte des hétérogénéités. Ensuite, nous appliquons cette nouvelle approche à un problème relativement simple mais dans un domaine rugueux ce qui est l'objet de la deuxième et troisième section de ce chapitre suivi d'une analyse d'erreur, puis à la dernière section, nous exposerons les différentes techniques afin d'étudier la régularité H^2 pour le problème de Laplace dans un domaine rugueux à bord régulier.

Nous commençons par décrire la géométrie et le problème auxquels nous nous intéressons. Il s'agit d'étudier le problème aux limites (E) défini dans le premier chapitre, mais nous supposons donné un terme source qui est une fonction suffisamment régulière $g \in C^\infty(\Omega_0)$ à **support**

compact strictement inclus dans Ω_0 . Notons u_ε la solution de ce problème de Laplace qui s'écrira

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = g & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ u_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

Nous rappelons succinctement la géométrie du domaine rugueux Ω_ε , présentée dans la figure ci-dessous :

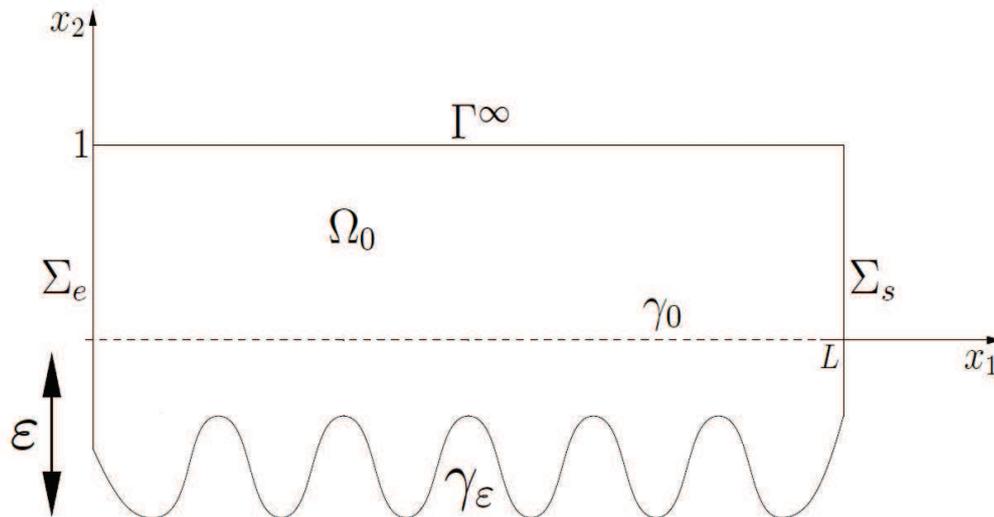


Figure V.1 – Domaine rugueux Ω_ε avec un bord γ_ε régulier

Nous mettons l'accent qu'une étude explicite du problème aux limites (V.1) dans divers domaines rugueux contenant différentes géométries de rugosités (symétriques, sinusoïdales, non symétriques), a été introduite dans [4] pour la construction d'une nouvelle approximation par développement asymptotique mais avec une source dont le **support est contenu dans Ω_0 et n'intercepte pas γ^0** . Malheureusement jusqu'à maintenant, aucun modèle ni approche générale n'ont été établis pour simuler correctement l'impact des rugosités sur l'écoulement global. L'approche couramment utilisée pour répondre à ce problème est l'utilisation d'une condition aux limites équivalentes (la loi de paroi) imposée à l'intérieur du domaine, reproduisant l'influence des rugosités sur la vitesse, pression et frottement.

Précisons par ailleurs dans tout le contexte de ce chapitre, que nous imposons que le bord rugueux γ_ε soit **régulier** afin d'éviter les difficultés techniques qui apparaissent lors de l'étude de la régularité H^2 .

2 Description de la technique de construction des Ansatz

Dans cette section, nous introduisons un nouveau cadre mathématique pour développer des lois de paroi en mécanique des fluides. Cette stratégie allie de bons fondements théoriques à d'excellents résultats numériques obtenus à faible coût. L'utilisation des lois de paroi constitue une alternative pratique pour baisser le coût du calcul dans des problèmes comprenant différentes échelles de longueur. Dans la suite, nous exposerons brièvement l'idée de base de la méthode par développement asymptotique présentée par Achdou dans [4]. Dans tout le texte, nous adaptons les notations introduites dans [4].

Nous appelons u_ε la solution du problème (V.1). Le principe de la construction des lois de paroi par analyse asymptotique pour approcher u_ε quand ε tend vers zéro est basée sur l'introduction d'une séquence d'ansatz :

$$u_n(x) = \tilde{u}_n(x) + \sum_{k < n} \varepsilon^{k+1} \tilde{v}_k \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right) \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\varepsilon. \quad (\text{V.2})$$

Les fonctions $\tilde{u}_n(x)$ sont définies comme étant les solutions des équations aux dérivées partielles originales dans Ω_0 , avec une condition aux limites équivalente du type Robin ou Navier,

$$\tilde{u}_n(x) = \sum_{k < n} \varepsilon^{k+1} C_k \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right), \quad \text{sur } \gamma^0. \quad (\text{V.3})$$

L'idée est de construire les correcteurs \tilde{v}_k , de façon à approcher la solution exacte u_ε par \tilde{u}_n dans Ω_0 et sur γ^0 avec une précision d'ordre ε^n . Les correcteurs \tilde{v}_k sont définis en variable rapide y . Ils sont périodiques dans la direction y_1 et s'annulent quand y_2 tend vers l'infini. La construction des \tilde{v}_k est faite de façon à corriger localement $u_n(x)$ dans Ω_ε à l'ordre ε^n pour avoir la condition aux limites sur γ_ε à l'ordre ε^n .

La construction des ansatz est faite récursivement de la façon suivante :

1. Nous supposons connus les n premiers ansatz et $\tilde{u}_n(x)$.
2. Nous introduisons un pseudo-correcteur $v_n \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right)$ défini dans Ω_ε tel que

$$u_n(x) = \tilde{u}_n(x) + \sum_{k < n} \varepsilon^{k+1} \tilde{v}_k \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right) + \varepsilon^{n+1} v_n \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right),$$

satisfaisant les équations aux dérivées partielles dans Ω_ε et les conditions aux limites sur

γ_ε à $\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$. De plus, $v_n \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right)$ vérifie quand $y_2 \rightarrow \infty$:

$$\lim_{y_2 \rightarrow \infty} v_n = C_n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) = \mathbf{Cte}. \quad (\text{V.4})$$

3. Nous utilisons le fait que $\tilde{u}_{n+1} \approx \tilde{u}_n$ proche sur γ^0 et nous écrivons le $(n+1)$ ème ansatz comme

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \left[\tilde{u}_n(x) + \varepsilon^{n+1} C_n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right] + \sum_{k < n} \varepsilon^{k+1} \tilde{v}_k \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right) \\ &\quad + \varepsilon^{n+1} \left[v_n \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right) - C_n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right], \\ &= \tilde{u}_{n+1}(x) + \sum_{k < n} \varepsilon^{k+1} \tilde{v}_k \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right) + \varepsilon^{n+1} \tilde{v}_n \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right), \\ &= \tilde{u}_{n+1}(x) + \sum_{k < n+1} \varepsilon^{k+1} \tilde{v}_k \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right), \end{aligned}$$

où \tilde{u}_{n+1} est solution du problème aux dérivées partielles originales avec la loi de paroi d'ordre $(n+1)$ **imposée** sur γ^0 telle que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1}(x) \Big|_{\gamma^0} &= \left(\tilde{u}_n(x) + \varepsilon^{n+1} C_n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right) \Big|_{\gamma^0}, \\ &= \left[\sum_{k < n} \varepsilon^{k+1} C_k \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) + \varepsilon^{n+1} C_n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \right], \\ &= \sum_{k < n+1} \varepsilon^{k+1} C_k \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right). \end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons la même idée de base et nous développons dans les sections suivantes des lois de paroi d'ordre un et deux pour l'équation de Laplace dans des domaines rugueux. Un petit exemple est présenté dans la :

Remarque 14. *Nous trouvons un peu plus loin que*

$$\tilde{v}_0(x, y) = \left(\chi^0(y) - \overline{\chi^0} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \quad \text{et} \quad \tilde{v}_1(x, y) = \left(\chi^1(y) - \overline{\chi^1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right),$$

où χ^0 , $\overline{\chi^0}$, χ^1 et $\overline{\chi^1}$ sont définis ci-dessous dans (V.12) et (V.20). Ces fonctions u_1 et u_2 sont définies comme suit : $u_1(x) = \tilde{u}_1(x) + \varepsilon \tilde{v}_0(x, y)$ et $u_2(x) = \tilde{u}_2(x) + \varepsilon \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{v}_1(x, y)$.

3 Loi de paroi d'ordre 1 pour le problème de Laplace

Nous commençons cette section par présenter une façon générale pour déterminer la loi de paroi d'ordre 1. Nous approchons la solution exacte u_ε par le développement asymptotique à deux échelles :

$$u_\varepsilon(x) \approx \tilde{u}(x) + \varepsilon \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{v}_1(x, y) + \varepsilon^3 \tilde{v}_2(x, y) \dots \quad (\text{V.5})$$

En introduisant le développement (V.5) dans (V.1) et en identifiant les termes du mêmes ordre, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(-\Delta_y \tilde{v}_0) + (-\Delta_x \tilde{u}(x) - g) + (-\Delta_y \tilde{v}_1) + \left(-2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y_i}\right) \\ + \varepsilon \left(-2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y_i}\right) + \varepsilon (-\Delta_y \tilde{v}_2) + \varepsilon^2 \dots = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \tilde{u}(x) + \varepsilon \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{v}_1(x, y) + \varepsilon^3 \tilde{v}_2(x, y) \dots = 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

Nous effectuons la construction des ansatz itérative. A l'ordre zéro, aucun correcteur n'est introduit, et l'approximation de u_ε s'écrit simplement $\tilde{u}_0(x)$ dans Ω_ε , avec \tilde{u}_0 solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_0 = g & \text{sur } \Omega_0 \\ \tilde{u}_0 = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma^0 \\ \tilde{u}_0 \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{cases} \quad (\text{V.7})$$

Cette approximation s'avère insuffisante pour des rugosités de taille plus importantes. En effet, le résultat de convergence suivant a été établi dans [2] :

Lemme 12 (Convergence d'ordre zéro, [2]). *La solution \tilde{u}_0 de (V.7) converge fortement dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ vers u_ε et il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que nous avons l'estimation suivante*

$$\|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{V.8})$$

On continue le développement asymptotique en introduisant un nouveau correcteur pour mieux approcher u_ε dans Ω_ε . La première étape est d'introduire un pseudo-correcteur $v_0(x, y) = v_0(x, \frac{x}{\varepsilon})$ périodique selon y_1 et de définir la fonction $u_\varepsilon(x)$ à l'ordre ε dans Ω_ε par

$$u_\varepsilon(x) = \tilde{u}_0(x) + \varepsilon v_0(x, y) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon.$$

Chapitre V. Étude asymptotique de la régularité H^2 : Application au problème de Laplace

Nous avons construit v_0 de façon à ce que la solution $u_\varepsilon(x)$ satisfasse (V.6) à l'ordre ε et que la condition aux limites sur γ_ε soit aussi respectée à l'ordre ε . Par l'expansion (V.6), le nouveau pseudo-correcteur v_0 doit donc satisfaire

$$-\Delta_y v_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad (\text{V.9})$$

et à la paroi, la condition aux limites

$$u_\varepsilon = \tilde{u}_0 + \varepsilon v_0 = 0 \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon, \quad (\text{V.10})$$

ainsi que la condition aux limites à l'infini $\lim_{y_2 \rightarrow \infty} v_0 = C_0 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_2}|_{\gamma^0} = \text{Cte}$. Remarquons que, si on étend \tilde{u}_0 à la paroi γ_ε linéairement en x_2 (par un développement de Taylor selon la direction x_2), la condition aux limites (V.10) peut être ré-écrite comme

$$\varepsilon v_0|_{\gamma_\varepsilon} = -\tilde{u}_0|_{\gamma_\varepsilon} = -\left(\tilde{u}_0|_{\gamma^0} + x_2 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_2}|_{\gamma^0}\right) = -\tilde{u}_0|_{\gamma^0} - \varepsilon \frac{x_2}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_2}|_{\gamma^0} = -\varepsilon y_2 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_2}|_{\gamma^0},$$

et donc par identification, nous avons

$$v_0(x, y) = -y_2 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_2}|_{\gamma^0} \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon. \quad (\text{V.11})$$

Précisons que le bord rugueux γ_ε du domaine Ω_ε est modélisé par le graphe d'une fonction périodique ou quasi-périodique. Par passage de la variable spatiale «lente» x à la variable «rapide» $y = x/\varepsilon$, notons le domaine microscopique $Z_+ \cup P$ qui résulte d'un zoom sur une cellule. En outre, le schéma ci-dessous (V.2) illustre notre changement d'échelle (ou «scaling») :

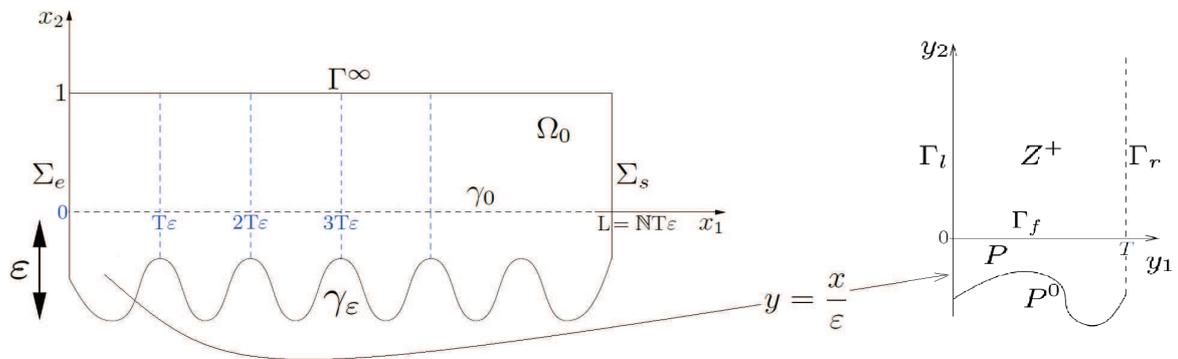


Figure V.2 – Domaine cellulaire microscopique $Z_+ \cup P$

V.3 Loi de paroi d'ordre 1 pour le problème de Laplace

Nous désignons par Γ_f l'interface fictive donnée par $\Gamma_f = \{y_1 \in [0, T], y_2 = 0\}$. Signalons que le bord P^0 est paramétré comme le graphe d'une fonction bornée T -périodique $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ de classe C^∞ telle que $P^0 = \{(y_1, y_2) \in [0, T] \times [-1, 0[, y_2 = \tilde{\gamma}(y_1)\}$.

Revenons maintenant à notre approximation, le nouveau pseudo-correcteur v_0 est solution de l'équation de Laplace (V.9), avec les conditions aux limites à la paroi donnée par (V.11). Alors par linéarité, nous écrivons v_0 dans Ω_ε comme

$$v_0(x, y) = \chi^0(y) \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,$$

avec $\chi^0(y)$ la solution cellulaire du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta_y \chi^0 = 0 & \text{sur } Z_+ \cup P \\ \chi^0 = -y_2 & \text{sur } P^0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \chi^0 = \bar{\chi}^0 = \text{Cte} \\ \chi^0 \text{ est périodique selon } y_1 \text{ sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

Finalement, le nouvel ansatz est donné par

$$u_1(x) = \tilde{u}_1 + \varepsilon (\chi^0 - \bar{\chi}^0) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} := \tilde{u}_1 + \varepsilon \tilde{v}_0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \quad (\text{V.13})$$

La fonction \tilde{u}_1 est une approximation d'ordre 1 de la solution exacte u_ε dans Ω_0 , solution du problème de Laplace suivant

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_1 = g & \text{sur } \Omega_0 \\ \tilde{u}_1 = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \\ \tilde{u}_1 = \varepsilon \bar{\chi}^0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} & \text{sur } \gamma^0 \\ \tilde{u}_1 \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s, \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

ainsi que le nouveau pseudo-correcteur \tilde{v}_0 d'ordre 1 est donné par

$$\tilde{v}_0 = (\chi^0 - \bar{\chi}^0) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0}. \quad (\text{V.15})$$

Remarque 15. La première remarque envisagée, c'est que la solution \tilde{u}_1 est une perturbation de la solution \tilde{u}_0 . La deuxième remarque, d'un point de vue numérique, nous pouvons choisir une période $T = 2\pi$.

Chapitre V. Étude asymptotique de la régularité H^2 : Application au problème de Laplace

Notation 3. Notons une fois pour toutes $h(x_1) = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2}(x_1, 0)$ qui est une fonction affine de x_1 . De la condition imposée dans (V.4), nous avons donc $h'(x_1) = \partial_{x_1} (\partial_{x_2} \tilde{u}_1|_{\gamma^0})$ est une **constante** et $h''(x_1) = \partial_{x_1}^2 (\partial_{x_2} \tilde{u}_1|_{\gamma^0}) = 0$. Nous avons $\tilde{v}_0 = (\chi^0 - \bar{\chi}^0) h$.

Le lemme suivant, que l'on trouve dans [2], montre que l'erreur d'approximation de u_ε par u_1 est de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$. Nous avons néanmoins choisi de refaire la démonstration en détaillant tous les calculs pour faciliter la lecture et afin d'améliorer la compréhension de ce chapitre.

Lemme 13 (Convergence d'ordre 1, [2]). *La solution \tilde{u}_1 converge fortement dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ vers u_ε et il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que nous avons l'estimation suivante*

$$\|u_\varepsilon - u_1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{V.16})$$

Preuve. Tout d'abord, nous définissons la fonction d'erreur \mathcal{E}_1 définie par

$$\mathcal{E}_1(x) = u_\varepsilon(x) - u_1(x) = u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_1(x) - \varepsilon \tilde{v}_0(x, y), \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Par un calcul explicite du laplacien de l'erreur \mathcal{E}_1 dans Ω_ε , nous obtenons

$$\begin{aligned} -\Delta \mathcal{E}_1 &= -\Delta u_\varepsilon(x) + \Delta \tilde{u}_1(x) + \varepsilon \Delta \tilde{v}_0(x, y) = \varepsilon \Delta \tilde{v}_0(x, y) \\ &= \varepsilon \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) h(x_1) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) h(x_1) \right) \right] \\ &= \varepsilon \left[\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \chi^0}{\partial y_1^2} \right) h(x_1) + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \right) h'(x_1) + (\chi^0 - \bar{\chi}^0) h''(x_1) + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \chi^0}{\partial y_2^2} \right) h(x_1) \right] \quad (\text{V.17}) \\ &= 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} h'(x_1) + \varepsilon \left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) h''(x_1) \\ &= 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} h'(x_1), \quad \text{ceci car } h(x_1) \text{ est une fonction affine.} \end{aligned}$$

D'autre part, nous appliquons le théorème des accroissements finis sur le bord γ_ε , il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x)|_{\gamma_\varepsilon} &= u_\varepsilon(x)|_{\gamma_\varepsilon} - \tilde{u}_1(x)|_{\gamma_\varepsilon} - \varepsilon \tilde{v}_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) |_{\gamma_\varepsilon} = -\tilde{u}_1 \left(x_1, \varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) - \varepsilon \left[(\chi^0|_{\gamma_\varepsilon} - \bar{\chi}^0) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2}(x_1, 0) \right] \\ &= - \left[\tilde{u}_1|_{\gamma_0} + \varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \left(x_1, \varepsilon t_0 \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) \right] - \varepsilon \left[(\chi^0|_{\gamma_\varepsilon} - \bar{\chi}^0) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2}(x_1, 0) \right], \quad \text{où } 0 < t_0 < 1 \\ &= -\varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \left(x_1, \varepsilon t_0 \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) - \varepsilon \chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) |_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2}(x_1, 0) \end{aligned}$$

V.3 Loi de paroi d'ordre 1 pour le problème de Laplace

$$\begin{aligned}
&= -\varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \left(x_1, \varepsilon t_0 \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) - \varepsilon \chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \Big|_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} (x_1, 0) \\
&= -\varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \left[\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \left(x_1, \varepsilon t_0 \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) - \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} (x_1, 0) \right] \\
&= -\varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \left[\varepsilon t_0 \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \left(x_1, \varepsilon t_0 t_1 \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) \right], \quad \text{avec } 0 < t_1 < 1.
\end{aligned}$$

En vertu des calculs ci-dessus, la fonction d'erreur \mathcal{E}_1 satisfait le problème de Laplace suivant

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{E}_1 = \mathcal{O}(1) & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \mathcal{E}_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{sur } \gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{V.18})$$

Remarquons que le terme source du problème aux limites (V.18) est de l'ordre $\mathcal{O}(1)$. Nous devons donc le corriger en faisant un pas en avant dans le développement asymptotique. Pour cela, nous définissons astucieusement la fonction d'erreur $\tilde{\mathcal{E}}_1$ telle que

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(x) = \mathcal{E}_1(x) - \varepsilon^2 \chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) h'(x_1) = \mathcal{E}_1(x) - \varepsilon^2 \chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right), \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon. \quad (\text{V.19})$$

Signalons que la fonction χ^1 est la solution du problème de Laplace suivant

$$\begin{cases} -\Delta_y \chi^1 = 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} & \text{sur } Z_+ \cup P \\ \chi^1 = 0 & \text{sur } P^0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \chi^1 = \bar{\chi}^1 = \text{Cte} \\ \chi^1 \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

Examinons à présent l'erreur $\tilde{\mathcal{E}}_1$. D'après l'expression (V.17), pour le calcul du laplacien de \mathcal{E}_1 , nous tirons par le même procédé que le laplacien de $\tilde{\mathcal{E}}_1$ satisfait

$$\begin{aligned}
-\Delta \tilde{\mathcal{E}}_1 &= -\Delta \mathcal{E}_1 + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) h'(x_1) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) h'(x_1) \right) \right]. \\
&= 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} h'(x_1) + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_2^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_1^2} \right) h'(x_1) + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right) h''(x_1) + \chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) h'''(x_1) \right] \\
&= 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} h'(x_1) + \varepsilon^2 \left[\left(-\frac{2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \right) h'(x_1) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Cependant, nous vérifions facilement que

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(x)|_{\gamma_\varepsilon} = \mathcal{E}_1(x)|_{\gamma_\varepsilon} - \varepsilon^2 h'(x_1) \chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) |_{\gamma_\varepsilon} = \mathcal{E}_1(x)|_{\gamma_\varepsilon}.$$

En résumé, la fonction d'erreur $\tilde{\mathcal{E}}_1$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathcal{E}}_1 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \tilde{\mathcal{E}}_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{sur } \gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{V.21})$$

Si nous exploitons la formulation variationnelle, alors il existe une constante K_1 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\tilde{\mathcal{E}}_1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{V.22})$$

Précisons qu'une version plus détaillée du calcul de la formulation variationnelle est présenté dans la proposition 20. En prenant en compte que la fonction $h'(x_1)$ qui est une constante (notée h') et par la transformation géométrique, nous montrons qu'il existe aussi une constante K_2 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\varepsilon^2 \|h' \chi^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \varepsilon^2 h' \|\chi^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon^2 h' \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\chi^1\|_{H^1(Z_+ \cup P)} \right) \leq K_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

où K_2 est un majorant indépendant de ε et de $\|\chi^1\|_{H^1(Z_+ \cup P)}$. Finalement par inégalité triangulaire, nous montrons qu'il existe une constante $K = \max(K_1, K_2)$ telle que

$$\|\mathcal{E}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \|\tilde{\mathcal{E}} + \varepsilon^2 h' \chi^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\tilde{\mathcal{E}}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^2 h' \|\chi^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

La preuve est complète. □

Afin de diminuer l'erreur dans la norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$, nous effectuons dans la section suivante une étape de plus dans le procédé récursif de façon à obtenir une condition aux limites équivalente au deuxième ordre.

4 Loi de paroi d'ordre 2 pour le problème de Laplace

Cette section est consacrée à l'application de l'approche de la méthode par développement asymptotique pour l'équation du problème (V.1), en développant des lois de paroi d'ordre deux,

V.4 Loi de paroi d'ordre 2 pour le problème de Laplace

suivie d'une analyse d'erreur. Nous commençons l'approximation à l'ordre deux en introduisant un nouveau pseudo-correcteur $v_1(x, y)$ défini dans Ω_ε en approchant u_ε par

$$u_\varepsilon(x) \approx \tilde{u}_1(x) + \varepsilon \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon^2 v_1(x, y) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon.$$

La fonction u_ε doit satisfaire (V.6) à l'ordre ε^2 avec la condition aux limites à la paroi

$$\tilde{u}_1(x) + \varepsilon \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon^2 v_1(x, y) = 0 \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon. \quad (\text{V.23})$$

Par l'expression (V.15) du premier correcteur, nous avons

$$\begin{aligned} -\Delta_y \tilde{v}_0 &= -\Delta_y \left((\chi^0 - \bar{\chi}^0) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \\ &= -\Delta_y \chi^0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} - 2\varepsilon \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) - \varepsilon^2 (\chi^0 - \bar{\chi}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \\ &= -2\varepsilon \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) - \varepsilon^2 (\chi^0 - \bar{\chi}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right). \end{aligned}$$

Alors le pseudo-correcteur v_1 périodique selon y_1 doit être solution de l'équation suivante

$$-\Delta_y v_1 = 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad (\text{V.24})$$

avec la condition aux limites à l'infini $\lim_{y_2 \rightarrow \infty} v_1 = C_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) = \mathbf{Cte}$.

En procédant de la même façon qu'à l'ordre 1, nous étendons \tilde{u}_1 à γ_ε par un développement de Taylor selon la direction de x_2 et on ré-écrit (V.23) comme

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 v_1|_{\gamma_\varepsilon} &= -\tilde{u}_1|_{\gamma_\varepsilon} - \varepsilon \tilde{v}_0|_{\gamma_\varepsilon} = - \left(\tilde{u}_1|_{\gamma^0} + x_2 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} - x_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} \right) - \varepsilon \left((\chi^0|_{\gamma_\varepsilon} - \bar{\chi}^0) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \\ &= - \left(\tilde{u}_1|_{\gamma^0} + \varepsilon \frac{x_2}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} - \varepsilon^2 \frac{x_2^2}{2\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} \right) - \varepsilon \left(\left(-\frac{x_2}{\varepsilon} - \bar{\chi}^0 \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} = -\frac{\varepsilon^2}{2} y_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0}. \end{aligned}$$

Cependant en utilisant l'équation de Laplace (V.1) et en dérivant deux fois la loi de paroi d'ordre un (V.14) dans Ω_0 par rapport à \mathbf{x}_1 , nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} = -\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_1^2} \Big|_{\gamma^0} \approx \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \text{car } \text{supp} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \cap \gamma^0 = \emptyset. \quad (\text{V.25})$$

Chapitre V. Étude asymptotique de la régularité H^2 : Application au problème de Laplace

A l'ordre deux, nous avons simplement

$$v_1(x, y) = 0 \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon. \quad (\text{V.26})$$

D'autre part le nouveau pseudo-correcteur v_1 est solution du problème de Laplace (V.24), avec la condition aux limites à l'infini et la condition aux limites (V.26) à la paroi. Donc par linéarité, $v_1(\cdot, \cdot)$ s'écrit comme suit

$$v_1(x, y) = \chi^1(y) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,$$

où le nouveau correcteur $\chi^1(\cdot)$ est solution du problème de Laplace suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_y \chi^1 = 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} & \text{sur } Z_+ \cup P \\ \chi^1 = 0 & \text{sur } P^0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \chi^1 = \bar{\chi}^1 = \text{Cte} \\ \chi^1 \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (\text{V.27})$$

Une fois le pseudo-correcteur défini, nous construisons le nouveau ansatz à l'ordre deux. Alors

$$u_2(x) = \tilde{u}_2(x) + \varepsilon (\chi^0 - \bar{\chi}^0) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} + \varepsilon^2 (\chi^1 - \bar{\chi}^1) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right) := \tilde{u}_2 + \varepsilon \tilde{v}_0 + \varepsilon^2 \tilde{v}_1 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon.$$

Signalons que la solution \tilde{u}_2 est l'approximation à l'ordre deux de u_ε dans Ω_0 satisfaisant le problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u}_2 = & g & \text{sur } \Omega_0 \\ \tilde{u}_2 = & 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \\ \tilde{u}_2 = & \varepsilon \bar{\chi}^0 \partial_{x_2} \tilde{u}_2 \Big|_{\gamma^0} + \varepsilon^2 \bar{\chi}^1 \partial_{x_1} (\partial_{x_2} \tilde{u}_2 \Big|_{\gamma^0}) & \text{sur } \gamma^0 \\ \tilde{u}_2 & \text{est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{V.28})$$

Remarque 16. Là aussi la solution \tilde{u}_2 est une perturbation de la solution \tilde{u}_0 .

Notation 4. Pour simplifier la présentation, notons la fonction $f(\cdot)$ donnée par :

$f(x_1) = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0}$ est une fonction polynomiale de x_1 de degré 2. De la condition imposée dans (V.4), la dérivée première $f'(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \right)$ est une fonction affine de x_1 , la dérivée

V.4 Loi de paroi d'ordre 2 pour le problème de Laplace

seconde $f''(x_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ est une **constante** et $f'''(x_1) = 0$. Bien entendu, les correcteurs \tilde{v}_0 et \tilde{v}_1 vérifient les expressions suivantes

$$\tilde{v}_0 = (\chi^0 - \bar{\chi}^0) f \quad \text{et} \quad \tilde{v}_1 = (\chi^1 - \bar{\chi}^1) f'.$$

Nous allons tout de suite donner l'erreur d'approximation de la solution exacte par u_2 dans Ω_ε . L'erreur commise par cette approximation est de l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{5}{2}})$, comme le montre le lemme suivant

Lemme 14 (Convergence d'ordre 2, [2]). *Il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que la solution u_2 converge vers u_ε dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ et nous avons l'estimation suivante :*

$$\|u_\varepsilon - u_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K \varepsilon^{\frac{5}{2}}. \quad (\text{V.29})$$

Preuve. La stratégie est la même que celle dans le lemme 13. Posons la différence \mathcal{E}_2 telle que

$$\mathcal{E}_2(x) = u_\varepsilon(x) - u_2(x) = u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_2(x) - \varepsilon \tilde{v}_0(x, y) - \varepsilon^2 \tilde{v}_1(x, y), \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Par des calculs similaires du laplacien de correcteur \tilde{v}_0 déjà exploités dans (V.17) et en vertu du problème cellulaire de χ^1 , nous pouvons développer explicitement le laplacien de l'erreur \mathcal{E}_2 :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathcal{E}_2 &= \varepsilon \Delta \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon^2 \Delta \tilde{v}_1(x, y) \\ &= \varepsilon \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) f(x_1) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) f(x_1) \right) \right] \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\left(\chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^1 \right) f'(x_1) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\left(\chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^1 \right) f'(x_1) \right) \right], \\ &= \left[2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} f'(x_1) + \varepsilon \left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) f''(x_1) \right] \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y \chi^1 \right) f'(x_1) + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right) f''(x_1) + \left(\chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^1 \right) f'''(x_1) \right], \\ &= \varepsilon \left[\left(\left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) + 2 \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right) f''(x_1) \right]. \end{aligned}$$

On étend la fonction $\mathcal{E}_2(\cdot)$ à la paroi rugueuse γ_ε par un développement de Taylor selon la direction de x_2 . Le calcul explicite donne

$$\mathcal{E}_2(x)|_{\gamma_\varepsilon} = u_\varepsilon(x)|_{\gamma_\varepsilon} - \tilde{u}_2(x)|_{\gamma_\varepsilon} - \varepsilon \tilde{v}_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) |_{\gamma_\varepsilon} - \varepsilon^2 \tilde{v}_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) |_{\gamma_\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\tilde{u}_2|_{\gamma^0} + x_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}|_{\gamma^0} + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_2^2}|_{\gamma^0} \right] - \varepsilon \left[(\chi^0|_{\gamma^\varepsilon} - \bar{\chi}^0) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}|_{\gamma^0} \right] - \varepsilon^2 \left[(\chi^1|_{\gamma^\varepsilon} - \bar{\chi}^1) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}|_{\gamma^0} \right) \right] \\
&= - \left[\varepsilon \frac{x_2}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}|_{\gamma^0} + \varepsilon^2 \frac{x_2^2}{2\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_2^2}|_{\gamma^0} \right] - \varepsilon \left[\chi^0|_{\gamma^\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}|_{\gamma^0} \right] + \left[-\tilde{u}_2|_{\gamma^0} + \varepsilon \bar{\chi}^0 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}|_{\gamma^0} + \varepsilon^2 \bar{\chi}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}|_{\gamma^0} \right) \right] \\
&= -\varepsilon^2 \frac{x_2^2}{2\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_2^2}|_{\gamma^0} = - \left(\frac{(\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon}))^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_2^2}|_{\gamma^0} \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que $\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_2^2}|_{\gamma^0}$ est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$. En effet, si nous dérivons deux fois la loi de paroi d'ordre deux (V.28) dans Ω_0 par rapport à x_1 et nous utilisons l'équation de Laplace (V.1) alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_2^2}|_{\gamma^0} &= -\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_1^2}|_{\gamma^0} = \varepsilon \bar{\chi}^0 \partial_{x_1}^2 (\partial_{x_2} \tilde{u}_2|_{\gamma^0}) + \varepsilon^2 \bar{\chi}^1 \partial_{x_1}^3 (\partial_{x_2} \tilde{u}_2|_{\gamma^0}) \quad \text{car } \text{supp} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \cap \gamma^0 = \emptyset. \\
&= \varepsilon \bar{\chi}^0 f''(x_1) + \varepsilon^2 \bar{\chi}^1 f'''(x_1) = \varepsilon \bar{\chi}^0 f''(x_1) \approx \mathcal{O}(\varepsilon),
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de déduire immédiatement que $\mathcal{E}_2(x)|_{\gamma^\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Bien entendu, l'erreur \mathcal{E}_2 satisfait le problème de Laplace suivant

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{E}_2 = \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \mathcal{E}_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^3) & \text{sur } \gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{V.30})$$

Nous constatons que le terme source du problème aux limites (V.30) est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (même ordre que celui du problème aux limites (V.21)). Afin de l'améliorer, nous effectuons un « pas en avant » dans le développement asymptotique. Nous définissons la fonction d'erreur $\tilde{\mathcal{E}}_2$ telle que

$$\tilde{\mathcal{E}}_2(x) = \mathcal{E}_2(x) - \varepsilon^3 \eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) f''(x_1) = \mathcal{E}_2(x) - \varepsilon^3 \eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}|_{\gamma^0} \right), \quad (\text{V.31})$$

où la fonction $\eta(\cdot)$ est définie dans la cellule $Z_+ \cup P$, la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_y \eta = \left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) + 2 \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} & \text{sur } Z_+ \cup P \\ \eta = 0 & \text{sur } P^0 \quad \text{et } \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \eta = \text{Cte} \\ \eta \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{cases} \quad (\text{V.32})$$

V.4 Loi de paroi d'ordre 2 pour le problème de Laplace

Une forme explicite du laplacien de l'erreur $\tilde{\mathcal{E}}_2$ est donnée par

$$\begin{aligned}
 -\Delta \tilde{\mathcal{E}}_2 &= -\Delta \mathcal{E}_2 + \varepsilon^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) f''(x_1) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) f''(x_1) \right) \right], \\
 &= \varepsilon \left[\left(\left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) + 2 \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right) f''(x_1) \right] \\
 &\quad + \varepsilon^3 \left[\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y \eta \right) f''(x_1) + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial y_1} \right) f'''(x_1) + \eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) f''''(x_1) \right], \\
 &= \varepsilon \left[\left(\left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) + 2 \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right) f''(x_1) \right] + \varepsilon^3 \left[\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y \eta \right) f''(x_1) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier aussi que $\tilde{\mathcal{E}}_2(x)|_{\gamma_\varepsilon} = \mathcal{E}_2(x)|_{\gamma_\varepsilon} - \varepsilon^3 f''(x_1) = \mathcal{E}_2(x)|_{\gamma_\varepsilon}$.

Il est immédiat que la fonction $\tilde{\mathcal{E}}_2$ est solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathcal{E}}_2 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \tilde{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^3) & \text{sur } \gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{V.33})$$

Compte tenu de la preuve de la proposition 20, il est assez clair qu'à partir de la formulation variationnelle, nous pouvons montrer qu'il existe une constante C_1 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\tilde{\mathcal{E}}_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \varepsilon^{\frac{5}{2}}.$$

Par la transformation géométrique de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique, nous montrons qu'il existe aussi une constante C_2 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\varepsilon^3 \|f'' \eta\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \varepsilon^3 f'' \|\eta\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon^3 f'' \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\eta\|_{H^1(Z_+ \cup P)} \right) \leq C_2 \varepsilon^{\frac{5}{2}}.$$

Signalons dans le calcul ci-dessus que la fonction $f''(x_1)$ est une constante (notée f''). Pour achever, il nous reste que rassembler toutes les estimations obtenues. Par l'inégalité triangulaire, nous montrons qu'il existe une constante $K = \max(C_1, C_2)$ telle que

$$\|\mathcal{E}_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \|\tilde{\mathcal{E}}_2 + \varepsilon^3 f'' \eta\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\tilde{\mathcal{E}}_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^3 f'' \|\eta\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K \varepsilon^{\frac{5}{2}}.$$

Ceci fournit l'estimation voulue. □

5 Vers l'étude de la régularité H^2 au problème modèle de Laplace

Revenons maintenant à notre objectif initial relatif à l'étude de la régularité H^2 par analyse asymptotique du problème aux limites (V.1). Nous reprendrons la démarche utilisée dans le quatrième chapitre de cette thèse. Nous utilisons la loi de paroi d'ordre 1 par l'approche d'Achdou et al. introduite dans ce présent chapitre. Nous allons montrer dans ce chapitre le résultat suivant :

Théorème 16. *La solution u_ε du problème aux limites (V.1) est dans $H^2(\Omega_\varepsilon)$. De plus, il existe deux constantes K_{\min} et K_{\max} strictement positives indépendantes de ε telles que*

$$\frac{K_{\min}}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K_{\max}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (\text{V.34})$$

Nous rappelons tout d'abord l'expression (V.13) de la loi de paroi d'ordre 1

$$u_1(x) = \tilde{u}_1(x) + \varepsilon \left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} = \tilde{u}_1(x) + \varepsilon \left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) h(x_1), \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon.$$

Précisons que \tilde{u}_1 est une solution du problème de Laplace (V.14) suivant

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_1 = & g & \text{sur } \Omega_0 \\ \tilde{u}_1 = & 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \\ \tilde{u}_1 = & \varepsilon \bar{\chi}^0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} & \text{sur } \gamma^0 \\ \tilde{u}_1 & \text{est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s, \end{cases}$$

et l'expression χ^0 désigne la solution cellulaire du problème de Laplace (V.12).

5.1 Existence et unicité de l'approximation d'ordre 1 dans Ω_0

Une première étape naturelle consiste à établir un résultat d'existence-unicité standard pour les problèmes au laplacien dans un domaine assez régulier qui ne dépend pas de ε . Nous aurons recours dans cette partie à une formulation variationnelle. Pour cela, nous rappelons brièvement que $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$ est un espace fonctionnel tel que

$$\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0), v = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty, v \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s\}.$$

V.5 Vers l'étude de la régularité H^2 au problème modèle de Laplace

Cependant, nous rappelons que l'expression de la moyenne de la solution cellulaire χ^0 sur l'interface fictive Γ_f est définie comme suit $\bar{\chi}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi^0(y_1, 0) dy_1$. Nous montrons dans le théorème ci-dessous l'existence et l'unicité de la solution du problème de Laplace (V.14) :

Théorème 17. *Nous supposons que la moyenne $\bar{\chi}^0$ est non nulle. Alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, le problème variationnel (V.14) admet une unique solution dans $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$.*

Démonstration. Nous commençons par écrire une formulation variationnelle du problème aux limites (V.14). Soit $v \in \mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$ une fonction test, alors par la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned} \langle g, v \rangle_{\Omega_0} &= \langle -\Delta \tilde{u}_1, v \rangle_{\Omega_0} = \langle \nabla \tilde{u}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} - \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial n} v = \langle \nabla \tilde{u}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} v. \\ &= \langle \nabla \tilde{u}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\tilde{u}_1(x_1, 0)}{\varepsilon \bar{\chi}^0} v dx_1, \end{aligned}$$

Précisons que $\frac{\partial}{\partial n}$ désignera toujours la dérivée par rapport à la normale sortante du domaine lisse Ω_0 . Dans la suite, nous définissons $a(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire suivante

$$a(\tilde{u}_1, v) = \langle \nabla \tilde{u}_1, \nabla v \rangle_{\Omega_0} + \int_{\gamma^0} \frac{\tilde{u}_1(x_1, 0)}{\varepsilon \bar{\chi}^0} v dx_1,$$

et $l(\cdot)$ la forme linéaire telle que $l(v) = \langle g, v \rangle_{\Omega_0} = \int_{\Omega_0} g(x)v(x) dx$.

Bien entendu, nous pouvons vérifier que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue, coercive sur $\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)$. En effet, il existe une constante K_a strictement positive dépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} |a(\tilde{u}_1, v)| &= \left| \int_{\Omega_0} \nabla \tilde{u}_1 \nabla v dx + \int_{\gamma^0} \frac{\tilde{u}_1(x_1, 0)}{\varepsilon \bar{\chi}^0} v(x_1, 0) dx_1 \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega_0} \nabla \tilde{u}_1 \nabla v dx \right| + \frac{1}{\varepsilon \bar{\chi}^0} \left| \int_{\gamma^0} \tilde{u}_1(x_1, 0) v(x_1, 0) dx_1 \right| \\ &\leq \max \left(1, \frac{1}{\varepsilon \bar{\chi}^0} \right) \left(\|\nabla \tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\gamma^0)} \|v\|_{L^2(\gamma^0)} \right) \\ &\leq K_a \|\tilde{u}_1\|_{\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)} \|v\|_{\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)}, \end{aligned}$$

et il existe une constante α_0 strictement positive indépendante de ε telle que

$$|a(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1)| \geq \|\nabla \tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\gamma^0)}^2 \geq \alpha_0 \|\tilde{u}_1\|_{\mathcal{H}_{\text{per}, \Gamma^\infty}(\Omega_0)}^2.$$

D'autre part, la forme linéaire $l(\cdot)$ est continue sur $\mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}(\Omega_0)$. En effet, il existe une constante K_b strictement positive indépendante de ε telle que

$$|l(v)| = \left| \int_{\Omega_0} g(x)v(x) dx \right| \leq \|g\|_{L^2(\Omega_0)} \|v\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K_b \|v\|_{\mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}(\Omega_0)}.$$

Finalement, d'après le théorème de Lax-Milgram (voir [29]) nous montrons que le problème variationnel (V.14) admet une unique solution dans $\mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}(\Omega_0)$. \square

5.2 Régularité H^2 de l'approximation d'ordre 1 dans Ω_0

À présent, nous établissons que la norme H^2 dans le domaine rugueux Ω_ε de l'approximation d'ordre 1 dans Ω_0 est majorée par une constante, ce qui s'exprime par la

Proposition 39. *Il existe une constante C_0 strictement positive indépendante de ε telle que*

$$\|\tilde{u}_1\|_{H^2(\Omega_0)} \leq C_0. \quad (\text{V.35})$$

Preuve. Afin d'appliquer le résultat de régularité H^2 dans un domaine assez régulier qui ne dépend pas de ε , nous remarquons que le problème aux limites (V.14) est non homogène sur le bord γ^0 . Pour cela, nous définissons l'expression $\tilde{\mathcal{U}}_1$ telle que

$$\tilde{\mathcal{U}}_1 = \tilde{u}_1 - \varepsilon \bar{\chi}^0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \Big|_{\gamma^0} \varphi(x_2) = \tilde{u}_1 - \varepsilon \bar{\chi}^0 h(x_1) \varphi(x_2),$$

où, $\varphi(\cdot)$ est une fonction suffisamment régulière $\varphi \in C^\infty([0, 1], [0, 1])$ localisée sur le bord γ^0 vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi \equiv 1 & \text{si } x_2 = 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 1 & \text{sur } \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \varphi \equiv 0 & \text{sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{array} \right.$$

Alors la fonction $\tilde{\mathcal{U}}_1$ est une solution du problème aux limites avec une condition de Dirichlet homogène :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{\mathcal{U}}_1 = & g \mathbb{1}_{[\Omega_0]} + \varepsilon \bar{\chi}^0 \Delta (h \varphi) \quad \text{sur } \Omega_0 \\ \tilde{\mathcal{U}}_1 = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma^0 \\ \tilde{\mathcal{U}}_1 & \text{est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s. \end{array} \right. \quad (\text{V.36})$$

V.5 Vers l'étude de la régularité H^2 au problème modèle de Laplace

Pour simplifier la présentation, notons $F_\varepsilon(\cdot)$ le terme source du problème aux limites (V.36). Nous dérivons ce terme source et nous obtenons

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x) &= g(x) \mathbf{1}_{[\Omega_0]} + \varepsilon \bar{\chi}^0 \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (h(x_1) \varphi(x_2)) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (h(x_1) \varphi(x_2)) \right] \\ &= g(x) \mathbf{1}_{[\Omega_0]} + \varepsilon \bar{\chi}^0 \left[\varphi''(x_2) h(x_1) + h''(x_1) \varphi(x_2) \right] = g(x) \mathbf{1}_{[\Omega_0]} + \varepsilon \bar{\chi}^0 \left[\varphi''(x_2) h(x_1) \right]. \end{aligned}$$

La fonction $F_\varepsilon(\cdot)$ appartient à $L^2(\Omega_0)$. Par le même procédé que celui de la démonstration du théorème 17, nous pouvons montrer facilement que le problème variationnel (V.36) admet une unique solution \tilde{u}_1 dans $\mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}(\Omega_0)$. Maintenant, tous les ingrédients sont réunis pour pouvoir appliquer les résultats de la régularité H^2 dans un domaine assez régulier. Nous nous plaçons sous les mêmes hypothèses d'un problème elliptique aux conditions aux limites homogènes. Appliquons au problème aux limites (V.36) les résultats associés au Théorème 4, alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| \text{Hess}(\tilde{u}_1) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \left\| \tilde{u}_1 \right\|_{H^2(\Omega_0)} \leq K \left(\|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\| \tilde{u}_1 \right\|_{H^1(\Omega_0)} \right).$$

D'autre part, si nous exploitons la Hessienne du terme $(h\varphi)$, alors nous obtenons

$$\text{Hess}(h(x_1) \varphi(x_2)) = \begin{pmatrix} \varphi(x_2) h''(x_1) & \varphi'(x_2) h'(x_1) \\ \varphi'(x_2) h'(x_1) & \varphi''(x_2) h(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'(x_2) h'(x_1) \\ \varphi'(x_2) h'(x_1) & \varphi''(x_2) h(x_1) \end{pmatrix}.$$

Par une simple inégalité triangulaire et grâce aux calculs ci-dessus, nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| \text{Hess}(\tilde{u}_1) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \left\| \text{Hess}(\tilde{u}_1) \right\|_{L^2(\Omega_0)} + \varepsilon \bar{\chi}^0 \left\| \text{Hess}(h\varphi) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K. \quad (\text{V.37})$$

En tenant compte du fait que $\tilde{u}_1 \in \mathcal{H}_{\text{per},\Gamma^\infty}(\Omega_0)$ (voir Théorème 17) et de l'inégalité (V.37), ceci mène à l'existence d'une constante C_0 strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| \tilde{u}_1 \right\|_{H^2(\Omega_0)} = \left\| \tilde{u}_1 \right\|_{H^1(\Omega_0)} + \left\| \text{Hess}(\tilde{u}_1) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C_0.$$

La preuve est complète. □

5.3 Quelques estimations du correcteur cellulaire d'ordre 1

En vertu des résultats déjà démontrés dans les chapitres III et IV de cette thèse, nous énonçons sans démonstration quelques estimations du correcteur cellulaire χ^0 solution du problème microscopique (V.12). Nous commençons par rappeler que l'espace fonctionnel $D^{1,2}(Z^+ \cup P)$ est donné par

$$D^{1,2}(Z^+ \cup P) = \left\{ v \in L^1_{loc}(Z^+ \cup P) \text{ tel que } \nabla v \in L^2(Z^+ \cup P), v \text{ est } y_1\text{-périodique sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r \right\}.$$

D'autre part, mentionnons que la notation D_x^2 présente la Hessienne dans le domaine rugueux Ω_ε et D_y^2 désigne la Hessienne dans le domaine cellulaire $Z^+ \cup P$.

Proposition 40. *Le problème (V.12) admet une unique solution χ^0 dans $D^{1,2}(Z^+ \cup P)$.*

Proposition 41. *Soit χ^0 la solution du problème microscopique (V.12), alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et deux constantes C_1 et C_2 strictement positives indépendantes de ε tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$,*

$$\frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \varepsilon \|D_x^2 \chi^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_2}{\sqrt{\varepsilon}} \|D_y^2 \chi^0\|_{L^2(Z^+ \cup P)}. \quad (\text{V.38})$$

Théorème 18. *Soit $\chi^0 \in D^{1,2}(Z^+ \cup P)$ la solution du problème microscopique (V.12), alors il existe une constante C_3 strictement positive indépendante de ε telle que*

$$\|D_y^2 \chi^0\|_{L^2(Z^+ \cup P)} \leq C_3. \quad (\text{V.39})$$

Nous exposons dans la proposition suivante quelques propriétés des correcteurs χ^0 et χ^1 sur le bord lisse Γ^∞ qui vont nous servir dans la suite de ce chapitre. Celle-ci ne constitue en réalité qu'un intermédiaire pour démontrer le résultat d'estimation d'erreur entre la loi de paroi d'ordre 1 et la solution exacte u_ε dans la norme H^2 .

Proposition 42. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une constante K strictement positive indépendante de ε tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, nous avons une convergence exponentielle des quantités suivantes*

$$\begin{aligned} \|\chi^0 - \overline{\chi^0}\|_{L^2(\Gamma^\infty)} &\leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}, & \|\partial_{x_1} \chi^0\|_{L^2(\Gamma^\infty)} &\leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}, & \|\partial_{x_1^2}^2 \chi^0\|_{L^2(\Gamma^\infty)} &\leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \\ \|\chi^1\|_{L^2(\Gamma^\infty)} &\leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}, & \|\partial_{x_1^2}^2 \chi^1\|_{L^2(\Gamma^\infty)} &\leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

5.4 Régularité H^2 de la loi de paroi d'ordre 1

L'objet de cette sous-section est de montrer le résultat suivant

Théorème 19. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et deux constantes C_5 et C_6 strictement positives indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la loi de paroi u_1 d'ordre 1 satisfait*

$$\frac{C_5}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \|u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_6}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{V.40})$$

Démonstration. Tout d'abord, nous rappelons la relation suivante

$$\|u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}^2 = \|u_1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\text{Hess}(u_1)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2. \quad (\text{V.41})$$

La démonstration se décompose en deux étapes. Commençons par traiter la norme $\|u_1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Si nous introduisons la solution u_ε du problème aux limites (V.1), alors nous pouvons écrire u_1 sous la forme suivante : $u_1 = u_1 - u_\varepsilon + u_\varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire et grâce au théorème 1 et au lemme 13, nous obtenons l'existence d'une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|u_1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_1 - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \left[K_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + (4(1 + \varepsilon)^2 + 1) \|g\|_{L^2(\Omega_0)} \right] \leq K. \quad (\text{V.42})$$

À présent, nous traitons la hessienne de l'approximation d'ordre 1. L'inégalité triangulaire donne

$$\|\text{Hess}(u_1)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\text{Hess}(\tilde{u}_1)\|_{L^2(\Omega_0)} + \varepsilon \left\| \text{Hess} \left(h(x_1) \left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{V.43})$$

En vertu de la proposition 39, la hessienne de l'approximation \tilde{u}_1 d'ordre 0 est majorée par une constante. Alors, il ne reste qu'à étudier le membre de droite de l'inégalité (V.43). Nous effectuons des calculs explicites de la Hessienne de la quantité $h(x_1) (\chi^0 - \bar{\chi}^0)$, il vient

$$\begin{aligned} \text{Hess} \left(h \left(\chi^0 - \bar{\chi}^0 \right) \right) &= h(x_1) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \chi^0}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \chi^0}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \chi^0}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \chi^0}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} + h'(x_1) \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \chi^0}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + h''(x_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\chi^0 - \bar{\chi}^0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en tire donc l'existence des deux constantes \widetilde{C}_1 et \widetilde{C}_2 strictement positives indépendantes de ε telles que

$$\left\| \text{Hess} \left(h \left(\chi^0 - \bar{\chi}^0 \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \widetilde{C}_1 \left\| D_x^2 \chi^0 \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \widetilde{C}_2 \left\| \nabla_x \chi^0 \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Par un changement de variable de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique du correcteur χ^0 , il suit

$$\left\| \text{Hess} \left(h \left(\chi^0 - \bar{\chi}^0 \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{\widetilde{C}_1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \left\| D_y^2 \chi^0 \right\|_{L^2(Z+UP)} + \frac{\widetilde{C}_2}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| \nabla_y \chi^0 \right\|_{L^2(Z+UP)}.$$

Grâce aux estimations ci-dessus, il est immédiat de montrer l'existence d'une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| \text{Hess} (u_1) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (\text{V.44})$$

La majoration à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ s'en déduit directement, il suffit de remplacer les estimations (V.42) et (V.44) dans (V.41). Pour achever la démonstration, il nous reste qu'à trouver une minoration de la norme $\|u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$. En appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\varepsilon \left\| \text{Hess} \left(h(x_1) \left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - \left\| \text{Hess} (\tilde{u}_1) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \left\| \text{Hess} (u_1) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

D'après l'inégalité (V.38), nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| \text{Hess} \left(h(x_1) \left(\chi^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \geq K \left\| D_x^2 \chi^0 \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \geq \frac{K}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}.$$

En regroupant les résultats des deux dernières inégalités, on s'aperçoit que la norme $\|u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}$ est minorée à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. La démonstration est complète. \square

5.5 Norme H^2 de l'estimation d'erreur d'ordre 1

Nous allons dans cette sous-section effectuer l'étude théorique de l'erreur en norme $H^2(\Omega_\varepsilon)$ entre la solution exacte u_ε et l'approximation d'ordre 1. L'objectif est de montrer le résultat suivant

Théorème 20. *Soit u_ε la solution du problème (V.1). Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une constante C_7 strictement positive indépendante de ε tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'approximation u_1 d'ordre*

V.5 Vers l'étude de la régularité H^2 au problème modèle de Laplace

1 satisfait

$$\|u_\varepsilon - u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_7 \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{V.45})$$

Démonstration. Nous reprendrons la démarche utilisée pour démontrer le lemme 13. Nous commençons par rappeler la fonction d'erreur $\tilde{\mathcal{E}}_1(\cdot)$ définie dans (V.19) par

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(x) = \mathcal{E}_1(x) - \varepsilon^2 \chi^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) h'(x_1), \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\varepsilon.$$

En vertu des calculs que nous avons explicités dans la preuve du lemme 13, la fonction d'erreur $\tilde{\mathcal{E}}_1$ satisfait le problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta \tilde{\mathcal{E}}_1 & = & 0 \quad \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ \tilde{\mathcal{E}}_1 & = & \omega_\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma^\infty \\ \tilde{\mathcal{E}}_1 & = & -\frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon \\ \tilde{\mathcal{E}}_1 & & \text{est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_e \cup \Sigma_s, \end{array} \right.$$

où l'erreur $\omega_\varepsilon(\cdot)$ sur le bord lisse Γ^∞ est définie comme suit

$$\omega_\varepsilon(x_1) = -\varepsilon \left(\chi^0\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right) - \bar{\chi}^0 \right) h(x_1) - \varepsilon^2 \chi^1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right) h'(x_1).$$

Il est clair que sur la paroi rugueuse γ_ε , ainsi que sur le bord Γ^∞ , l'erreur $\tilde{\mathcal{E}}_1$ est non homogène. Nous définissons l'expression $\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon(\cdot)$ par

$$\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon(x) = \tilde{\mathcal{E}}_1(x) + \varphi(x_2) \omega_\varepsilon(x_1) + s(x), \quad (\text{V.46})$$

où, $\varphi(\cdot)$ est une fonction suffisamment régulière localisée sur le bord Γ^∞ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varphi \equiv 1 & \text{si} & x_2 = 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 1 & \text{sur} & \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \\ \varphi \equiv 0 & \text{sur} & \left] -1, \frac{1}{2} \right], \end{array} \right.$$

et $s(\cdot)$ est une fonction localisée dans une couche de taille $\mathcal{O}(\varepsilon)$ qui s'écrit $s(x) = x_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} \mathbb{1}_{[\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0]}$.

De (V.25), nous mettons en évidence que $\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} \approx \mathcal{O}(\varepsilon)$.

En raisonnant au sens des distributions, la solution $\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon$ satisfait à des conditions de Dirichlet

Chapitre V. Étude asymptotique de la régularité H^2 : Application au problème de Laplace

homogènes sur $\Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon$, c'est à dire

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon = -\Delta(\varphi \omega_\varepsilon) - \Delta s & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \cup \Sigma_s. \end{cases} \quad (\text{V.47})$$

Examinons le laplacien de $s(\cdot)$ dans la partie couche $\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0$. Un simple calcul donne

$$\Delta s = \Delta \left(\frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2^2} \Big|_{\gamma^0} \right) := S_\varepsilon(x).$$

De la proposition 42 et par un calcul explicite du laplacien de la quantité $(\varphi \omega_\varepsilon)$, il vient

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi \omega_\varepsilon) &= \varepsilon \Delta \left(\varphi(x_2) \left(\chi^0 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) - \bar{\chi}^0 \right) h(x_1) \right) + \varepsilon^2 \Delta \left(\varphi(x_2) \chi^1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) h'(x_1) \right), \\ &= \varepsilon \left[\varphi''(x_2) \left(\chi_{|\Gamma^\infty}^0 - \bar{\chi}^0 \right) h(x_1) + \varphi(x_2) \left(\left(\chi_{|\Gamma^\infty}^0 - \bar{\chi}^0 \right) h''(x_1) + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial \chi_{|\Gamma^\infty}^0}{\partial x_1} h'(x_1) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \chi_{|\Gamma^\infty}^0}{\partial x_1^2} h(x_1) \right) \right] \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\varphi''(x_2) \chi_{|\Gamma^\infty}^1 h'(x_1) + \varphi(x_2) \left(\chi_{|\Gamma^\infty}^1 h'''(x_1) + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial \chi_{|\Gamma^\infty}^1}{\partial x_1} h''(x_1) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \chi_{|\Gamma^\infty}^1}{\partial x_1^2} h'(x_1) \right) \right], \\ &= \varepsilon \left[\varphi''(x_2) \left(\chi_{|\Gamma^\infty}^0 - \bar{\chi}^0 \right) h(x_1) + \varphi(x_2) \left(\frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial \chi_{|\Gamma^\infty}^0}{\partial x_1} h'(x_1) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \chi_{|\Gamma^\infty}^0}{\partial x_1^2} h(x_1) \right) \right] \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\varphi''(x_2) \chi_{|\Gamma^\infty}^1 h'(x_1) + \varphi(x_2) \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \chi_{|\Gamma^\infty}^1}{\partial x_1^2} h'(x_1) \right) \right] := T_\varepsilon(x) \approx \mathcal{O}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}). \end{aligned}$$

Pour des raisons de commodité, nous notons $F_\varepsilon(\cdot)$ le terme source associé au problème aux limites (V.47) tel que

$$F_\varepsilon(x) = -\Delta(\Phi \omega_\varepsilon) - \Delta s = -T_\varepsilon(x) - S_\varepsilon(x).$$

Par des calculs intégrales, il est clair que la fonction $F_\varepsilon(\cdot)$ est dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$ et qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\|T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|S_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \right) \leq K \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \right) \leq 2K\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{V.48})$$

Nous mettons l'accent sur le fait que nous nous plaçons sous les mêmes hypothèses qu'un problème elliptique aux conditions aux limites homogènes dans un domaine périodique avec une paroi rugueuse régulière et un terme source dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Une application immédiate du Théorème 2 au problème aux limites (V.47), nous permet de déduire qu'il existe une constante

V.5 Vers l'étude de la régularité H^2 au problème modèle de Laplace

K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right). \quad (\text{V.49})$$

Nous allons dans la suite démontrer $\|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ et $\|\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$. Ces résultats obtenus permettent d'avoir $\|\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$.

Nous commençons par chercher la formulation variationnelle du problème aux limites (V.47). Nous considérons v une fonction « test » telle que $v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon)$. Par la formule de Green, nous avons

$$\langle \nabla \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle -\Delta \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} = \langle F_\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon}.$$

Par l'inégalité triangulaire, il suit

$$\left| \langle \nabla \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon, \nabla v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| \leq \left| \langle F_\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right|. \quad (\text{V.50})$$

Par Cauchy-Schwarz et par la proposition 2, nous avons

$$\left| \langle F_\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| \leq \|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_P(\varepsilon) \|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{V.51})$$

Précisons que $C_P(\varepsilon)$ désigne toujours la constante de Poincaré donnée par $(1 + \varepsilon)$. En prenant $\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon = v$ dans (V.50) et (V.51) et par le lemme 1, nous obtenons

$$\alpha_\varepsilon \|\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|\nabla \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \left| \langle F_\varepsilon, \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon \rangle_{\Omega_\varepsilon} \right| \leq C_P(\varepsilon) \|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

où α_ε est la constante de coercivité donnée par $\alpha_\varepsilon = \frac{1}{4(1+\varepsilon)^2+1}$. Ainsi nous tirons

$$\alpha_\varepsilon \|\nabla \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C_P(\varepsilon) \|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{V.52})$$

Après simplification, nous obtenons

$$\|\nabla \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_P(\varepsilon)}{\alpha_\varepsilon} \|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{V.53})$$

À nouveau, par la proposition 2 et de (V.53), il suit

$$\|\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_P(\varepsilon) \|\nabla \tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{(C_P(\varepsilon))^2}{\alpha_\varepsilon} \|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{V.54})$$

Chapitre V. Étude asymptotique de la régularité H^2 : Application au problème de Laplace

De (V.48), (V.53) et (V.54), nous déduisons l'estimation suivante

$$\|\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_P(\varepsilon) + (C_P(\varepsilon))^2}{\alpha_\varepsilon} \|F_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{V.55})$$

Nous remplaçons l'estimation (V.55) dans l'expression (V.49), alors il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\varepsilon} \right) \leq 2K \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{V.56})$$

Avant de rassembler toutes les estimations pour conclure, signalons que par des calculs explicites, nous pouvons montrer l'existence de deux constantes K_1 et K_2 strictement positives indépendantes de ε telles que

$$\|\omega_\varepsilon\|_{H^2(\Gamma^\infty)} \leq K e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \|s\|_{H^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{V.57})$$

D'autre part, par la transformation géométrique de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique, nous montrons qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\varepsilon^2 h' \left\| \chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon^2 h' \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \left\| \chi^1 \right\|_{H^2(Z_+ \cup P)} \right) \leq K \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{V.58})$$

Nous pouvons conclure définitivement la démonstration en réunissant tous les résultats obtenus. De (V.56), (V.57) et (V.58), nous montrons par inégalité triangulaire qu'il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_1(x)\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\tilde{\mathcal{E}}_1(x)\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^2 h' \left\| \chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \|\tilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\omega_\varepsilon\|_{H^2(\Gamma^\infty)} + \|s\|_{H^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \varepsilon^2 h' \left\| \chi^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

La démonstration est complète. □

Fin de la technique

Nous désirons nous servir des résultats des deux derniers Théorèmes. À l'aide de l'inégalité triangulaire, nous prouvons immédiatement que la régularité H^2 du problème aux limites (V.1) est singulière en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Autrement dit, nous montrons l'existence de deux constantes K_{\min} et K_{\max} strictement positives indépendantes de ε telles que

$$\begin{aligned} \frac{K_{\min}}{\sqrt{\varepsilon}} &\leq \frac{C_5}{\sqrt{\varepsilon}} - C_7 \sqrt{\varepsilon} \leq \|u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} - \|u_\varepsilon - u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon - u_1\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_6}{\sqrt{\varepsilon}} + C_7 \sqrt{\varepsilon} \leq \frac{K_{\max}}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation d'une méthode plus générale des développements asymptotiques afin d'introduire une étude de la régularité H^2 du modèle d'écoulement sanguin modélisé mathématiquement par un problème simplifié dans le premier chapitre de cette thèse. Les lois de parois asymptotiques ont été jusque là utilisées pour des parois lisses afin de retirer du domaine du calcul une partie de la couche limite, coûteuse numériquement. Ces techniques ont donné de bons résultats même pour des problèmes considérés comme difficiles. En effet, elle peuvent être adaptées aux équations de Navier-Stokes incompressibles dans un domaine rugueux.

Une extension naturelle de ce travail serait l'étude des équations de Navier-Stokes incompressibles. Nous ne connaissons que très peu de références qui traitent d'analyse asymptotique pour les équations de Navier-Stokes incompressibles dans un domaine rugueux. Signalons l'article [4] qui a proposé une analyse asymptotique d'une façon rigoureuse pour ce problème mais nous n'avons pu, faute de temps, faire aboutir cette étude.

Aussi, nous proposons d'autres perspectives de recherche dans le contexte de la régularité H^2 sur les problèmes de rugosité avec des conditions de Neumann en se référant aux travaux de Chupin [37]. Par manque de temps, nous n'avons pas effectué une analyse complète à cette question. Toutefois, nous espérons que les travaux réalisés ici devraient permettre d'effectuer ce travail.

*Pourtant, en repensant maintenant à ces quatre
années, je me rends compte qu'elles n'étaient
nullement gaspillés. Sans même le savoir,
j'ai appris alors dans la solitude ce qui
fait l'essentiel du métier de mathématiciens -
ce qu'aucun maître ne peut véritablement
enseigner. [...] Pour le dire autrement :
j'ai appris, en ces années cruciales,
à être seul.*

Alexandre GROTHENDIECK,
L'importance d'être seul (Récoltes et semailles)

Chapitre VI

Estimations d'erreur et Résultats numériques

Nous arrivons enfin au dernier chapitre de cette thèse. Nous nous intéressons à l'analyse et aux simulations numériques du modèle d'écoulement sanguin, qui a été modélisé mathématiquement dans le premier chapitre par le problème aux limites (E) ou encore par le problème simplifié avec une source réelle (voir (III.1)).

Dans un premier temps, nous donnons quelques résultats préliminaires standards sur la méthode des éléments finis, qui sont utiles à plusieurs reprises dans ce chapitre. Dans une deuxième section, nous établissons une extension plus générale. Nous montrons un lemme de type Aubin-Nitsche dans un domaine rugueux (dont une partie du bord est paramétrée par un lacet qui dépend de ε). Nous mettons l'accent sur le fait que la singularité en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ obtenue précédemment, de la norme H^2 de la solution du problème aux limites (III.1) joue un rôle très important pour la généralisation du lemme de Aubin-Nitsche. Dans la section suivante, nous mettons en oeuvre le schéma d'éléments finis dans un domaine rugueux. Bien entendu, l'ingrédient essentiel du lemme généralisé de type Aubin-Nitsche sert à prouver des estimations d'erreur de la solution du problème aux limites (E) par rapport à sa solution approchée par la méthode éléments finis en norme L^2 et H^1 .

Ensuite, afin d'interpréter et de comparer ces résultats obtenus, nous proposons une analyse asymptotique. Nous montrons que la solution microscopique tronquée du problème cellulaire se comporte comme $\mathcal{O}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}})$ pour les normes H^1 et H^2 quand ε tend vers 0. Nous pourrions alors fournir dans la cinquième section un résultat d'estimation d'erreur entre la solution u_ε associée au problème modèle simplifié avec une source réelle (III.1) et l'approximation couche limite approchée d'ordre 1 par l'approche d'Achdou et al.

Dans une avant-dernière section, nous nous intéressons à la résolution numérique. D'un point de vue rigoureux, nous avons tout d'abord réalisé un ensemble de simulations numériques afin de valider tous les résultats de convergence obtenus dans le chapitre III de cette thèse pour la construction des approximations couches limites. Néanmoins, pour illustrer l'importance

pratique des résultats théoriques du schéma d'éléments finis dans un domaine rugueux, nous montrons dans un deuxième temps des validations numériques des résultats obtenus théoriquement sur un cas test 2D.

Nous finissons ce dernier chapitre en présentant quelques résultats techniques qui sont utilisés dans nos études ou qui sont nécessaires du point de vue pédagogique pour avoir une bonne compréhension.

1 Préliminaires

Nous présentons dans cette première section quelques résultats préliminaires dont nous aurons besoin dans la suite de ce chapitre. Nous considérons un problème représentatif des nombreux problèmes modèles linéaires dont la formulation faible abstraite est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in W \text{ tel que} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

où

- V et W sont deux espaces fonctionnels.
- $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire, continue, coercive définie sur $W \times V$.
- $l(\cdot)$ est une forme linéaire, continue définie sur V .

Précisons dans toute cette section que le problème modèle (VI.1) est bien posé.

1.1 Le problème approché

Grâce à la méthode de Galerkin, nous pouvons avoir une approximation du problème abstrait (VI.1). Le principe général consiste à remplacer les espaces fonctionnels V et W par des espaces de dimension finie, notés V_h et W_h . Pour des raisons de simplicité, l'accent portera sur l'étude de l'approximation conforme où $V_h \subset V$ et $W_h \subset W$, ce qui induit à

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in W_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

où $a_h(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire, continue, coercive et $l_h(\cdot)$ est une forme linéaire. On appelle l'espace W_h « espace d'approximation » et l'espace V_h « espace test discret ». Nous renvoyons à l'annexe 7 de ce chapitre pour quelques rappels sur les éléments finis.

1.2 Estimation d'erreur a priori : lemme de Aubin-Nitsche dans un domaine non rugueux

Nous nous restreignons dans cette sous-section au cadre d'une approximation consistante et conforme par la méthode de Galerkin standard, c'est-à-dire que l'espace où l'on cherche la solution est le même que celui des fonctions tests. Autrement, nous supposons que $V = W$ et $V_h = W_h$. Cependant, nous considérons le problème continu (VI.1) et son approximation (VI.2) que nous supposons bien posés. Nous faisons de plus les hypothèses suivantes :

1. **(hypothèse 1)** : Il existe un espace de Hilbert X dans lequel V s'injecte continûment. Nous supposons X muni d'une forme bilinéaire continue, symétrique et positive notée $l'(\cdot, \cdot)$ et notons $|\cdot|_X = \sqrt{l'(\cdot, \cdot)}$ la semi-norme induite correspondante. Par ailleurs, nous supposons qu'il existe un espace de Hilbert $Z \subset V$ et une constante de stabilité C_s strictement positive telle que pour tout $f \in X$, la solution $\xi(f)$ du problème adjoint

$$\begin{cases} \text{Trouver } \xi(f) \in V \text{ tel que} \\ a(v, \xi(f)) = l'(f, v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (\text{VI.3})$$

est dans Z et satisfait l'estimation a priori suivante

$$\|\xi(f)\|_Z \leq C_s |f|_X. \quad (\text{VI.4})$$

2. **(hypothèse 2)** : Il existe une constante d'interpolation C_i strictement positive telle que

$$\forall h > 0, \forall v \in Z, \quad \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \leq C_i h \|v\|_Z. \quad (\text{VI.5})$$

Remarque 17. – Avec les hypothèses ci-dessus, nous avons la relation suivante pour les espaces de Hilbert avec injections continues :

$$Z \subset V \subset X.$$

Pour un problème modèle faisant intervenir le laplacien dans un domaine régulier Ω , nous avons typiquement

$$Z = H^2(\Omega), \quad V = H^1(\Omega), \quad X = L^2(\Omega), \quad |\cdot|_X = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Lorsque **(hypothèse 1)** est vraie, on dit parfois que le problème (VI.3) est régularisant.

L'objectif de ce paragraphe est d'estimer l'erreur $u - u_h$ dans la semi-norme $|\cdot|_X$. Le résultat ci-dessous est connu sous le nom du lemme de **Aubin-Nitsche** [14, 39].

Lemme 15 (Aubin-Nitsche, [14]). *Sous les hypothèses 1 et 2 ci-dessus, nous avons :*

$$\forall h > 0, \quad |u - u_h|_X \leq K h \|u - u_h\|_V, \quad (\text{VI.6})$$

où $K = C_i C_s \|a\|_{V,V}$.

Preuve. Posons l'erreur $e_h = u - u_h$. Nous avons

$$|e_h|_X = \sup_{f \in X} \frac{l'(f, e_h)}{|f|_X} = \sup_{f \in X} \frac{a(\xi(f), e_h)}{|f|_X}.$$

L'estimation d'erreur e_h procède en deux étapes. D'une part comme $V_h \subset V$, donc d'après la relation d'orthogonalité suivante : pour tout $v_h \in V_h$, $a(u - u_h, v_h) = 0$, nous obtenons que

$$\forall v_h \in V_h \quad a(e_h, \xi(f)) = a(e_h, \xi(f) - v_h).$$

D'autre part, la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue, nous en déduisons que

$$a(e_h, \xi(f)) \leq \|a\| \|e_h\|_V \|\xi(f) - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h,$$

et par suite

$$\begin{aligned} a(e_h, \xi(f)) &\leq \|a\| \|e_h\|_V \inf_{v_h \in V_h} \|\xi(f) - v_h\|_V \leq \|a\| \|e_h\|_V C_i h \|\xi(f)\|_Z \quad \text{d'après (l'hypothèse 2)} \\ &\leq \|a\| \|e_h\|_V C_i C_s h |f|_X \quad \text{d'après (l'hypothèse 1)} \\ &\leq K h \|e_h\|_V |f|_X. \end{aligned}$$

Nous concluons aisément. □

2 Généralisation : Lemme de type Aubin-Nitsche dans un domaine rugueux

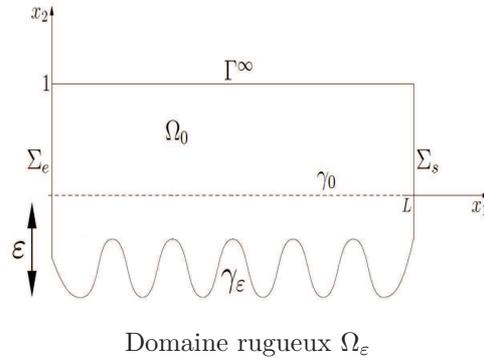
Une extension naturelle du dernier résultat serait bien entendu l'étude du Lemme de Aubin-Nitsche dans un domaine rugueux. Signalons que les résultats préliminaires de la première section peuvent se généraliser sans trop de difficulté au problème aux limites (E) modélisé dans

VI.2 Généralisation : Lemme de type Aubin-Nitsche dans un domaine rugueux

le premier chapitre de cette thèse. Avant d'entamer la démarche, rappelons que notre modèle d'écoulement sanguin présenté dans le premier chapitre est modélisé mathématiquement par le problème aux limites suivant

$$(E) : \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = g & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ u_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \cup \Sigma_s, \end{cases}$$

où Ω_ε est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 donné dans la figure ci-dessous et $g \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.



La formulation faible obtenue dans le Chapitre I, peut être écrite sous la forme d'un problème abstrait :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que} \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon), \end{cases} \quad (\text{VI.7})$$

où nous notons :

$$\mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon) = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon, v \text{ est périodique selon } x_1 \text{ sur } \Sigma_\varepsilon \cup \Sigma_s\},$$

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla v \, dx, \quad \text{et} \quad l_\varepsilon(v) = \int_{\Omega_\varepsilon} g v \, dx.$$

Comme précédemment, on peut associer au problème ci-dessus (VI.7) un problème approché par la méthode des éléments finis dont la solution est notée $u_{\varepsilon,h}$. La formulation variationnelle approchée s'énonce donc sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{\varepsilon,h} \in V_{\varepsilon,h} \text{ tel que} \\ a_{\varepsilon,h}(u_{\varepsilon,h}, v_h) = l_{\varepsilon,h}(v_h), \quad \forall v_h \in V_{\varepsilon,h}, \end{cases} \quad (\text{VI.8})$$

où $V_{\varepsilon,h}$ est un sous-espace de dimension finie de l'espace $\mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon)$ et où les formes respectivement bilinéaire, continue, coercive $a_{\varepsilon,h}(\cdot, \cdot)$ et linéaire $l_{\varepsilon,h}(\cdot)$ sont issues des approximations des formes $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ et $l_\varepsilon(\cdot)$. Le paramètre positif « h » présente le diamètre maximal de la triangulation.

Dans la suite de cette section, nous nous placerons sous les deux hypothèses suivantes :

1. **(Hyp 1)** : Par la même méthodologie présentée dans la dernière sous-section 1.2 appliquée à un problème faisant intervenir le laplacien (comme le problème aux limites (E)), nous supposons qu'il existe une constante de stabilité C_s strictement positive indépendante de ε telle que pour tout $g \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, la solution $\xi(g)$ du problème adjoint

$$\begin{cases} \text{Trouver } \xi(g) \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que} \\ a_\varepsilon(v, \xi(g)) = \langle g, v \rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon), \end{cases} \quad (\text{VI.9})$$

est dans $H^2(\Omega_\varepsilon)$ et satisfait **pour tout** $\alpha \in]0, 1]$ l'estimation a priori suivante :

$$\|\xi(g)\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_s}{\varepsilon^\alpha} |g|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{VI.10})$$

2. **(Hyp 2)** : Il existe une constante d'interpolation C_i strictement positive telle que

$$\forall h > 0, \forall v \in H^2(\Omega_\varepsilon), \quad \inf_{v_h \in V_{\varepsilon,h}} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_i h \|v\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{VI.11})$$

Nous allons à présent énoncer un résultat de type Aubin-Nitsche dans un domaine rugueux afin d'estimer l'erreur $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$.

Lemme 16 (Lemme de type Aubin-Nitsche dans un domaine Rugueux). *Sous les hypothèses (VI.10) et (VI.11) ci-dessus, il existe une constante K_r strictement positive indépendante de ε telle que nous avons*

$$\forall h > 0, \quad \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K_r h}{\varepsilon^\alpha} \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{VI.12})$$

Preuve. Nous procédons ici comme dans la preuve du lemme 15. Posons l'erreur $\mathcal{R}_{\varepsilon,h} = u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}$. Par un raisonnement analogue au précédent, nous avons

$$\begin{aligned}
 a_\varepsilon(\mathcal{R}_{\varepsilon,h}, \xi(g)) &\leq \|a_\varepsilon\| \|\mathcal{R}_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \inf_{v_h \in \mathcal{V}_{\varepsilon,h}} \|\xi(g) - v_h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
 &\leq \|a_\varepsilon\| \|\mathcal{R}_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} C_i h \|\xi(g)\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} && \text{d'après (Hyp 2)} \\
 &\leq \|a_\varepsilon\| \|\mathcal{R}_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} C_i h \left(\frac{C_s}{\varepsilon^\alpha}\right) |g|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} && \text{d'après (Hyp 1)} \\
 &\leq \frac{K_r h}{\varepsilon^\alpha} \|\mathcal{R}_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} |g|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, && \text{avec } K_r = C_i C_s \|a_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}(\Omega_\varepsilon)}.
 \end{aligned} \tag{VI.13}$$

Par ailleurs, l'erreur $\mathcal{R}_{\varepsilon,h}$ satisfait la relation suivante

$$|\mathcal{R}_{\varepsilon,h}|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \sup_{g \in L^2(\Omega_\varepsilon)} \frac{a_\varepsilon(\xi(g), \mathcal{R}_{\varepsilon,h})}{|g|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}. \tag{VI.14}$$

L'estimation voulue est enfin obtenue en regroupant les deux quantités (VI.13) et (VI.14). La preuve est complète. \square

Remarque 18. *Nous mettons l'accent sur le fait que nous avons supposé ci-dessus une hypothèse de stabilité (Hyp 1) sous la condition que le réel $\alpha \in]0, 1]$. En effet, cette supposition est due au fait suivant :*

1. *D'après le Théorème 2 démontré dans le deuxième chapitre de cette thèse, la norme H^2 de la solution u_ε du problème aux limites (E) est majorée en $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$. Il est donc assez clair que l'inégalité (VI.10) est bien cohérente avec le résultat du Théorème 2 pour $\alpha = 1$.*
2. *Grâce au Théorème 9, la norme H^2 de la solution u_ε du problème aux limites (E) avec une source réelle est singulière en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. De ce fait pour $\alpha = \frac{1}{2}$, l'inégalité (VI.10) correspond bien au résultat principal du chapitre IV de cette thèse.*

3 Analyse d'erreur a priori par éléments finis

Dans ce court paragraphe, nous allons présenter quelques estimations d'erreurs de discrétisation pour le problème aux limites (E) et qui illustrent le schéma d'éléments finis dans un domaine rugueux. Notre objectif principal est d'obtenir une estimation de l'erreur $u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}$ en normes $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ et $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$.

Proposition 43. *Sous les hypothèses (VI.10) et (VI.11), il existe une constante C_1 strictement positive indépendante de ε telle que pour tout $\alpha \in]0, 1]$, nous avons*

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_1 h}{\varepsilon^\alpha}. \tag{VI.15}$$

Preuve. D'après le lemme de Céa (Voir Lemme 21), nous avons

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left(\inf_{v_{\varepsilon,h} \in V_{\varepsilon,h}} \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right).$$

Nous considérons $\mathcal{J}_h^{Lag} u_\varepsilon$, l'interpolé de Lagrange de u_ε dans $V_{\varepsilon,h}$ (Voir [39]). Il est clair que $\mathcal{J}_h^{Lag} u_\varepsilon \in V_{\varepsilon,h}$ car sur chaque face du bord, $\mathcal{J}_h^{Lag} u_\varepsilon$ est uniquement déterminé par la valeur de u_ε aux noeuds sur cette face. Par suite,

$$\inf_{v_{\varepsilon,h} \in V_{\varepsilon,h}} \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|u_\varepsilon - \mathcal{J}_h^{Lag} u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Par ailleurs, d'après le théorème d'interpolation (Voir [39]), nous avons

$$\|u_\varepsilon - \mathcal{J}_h^{Lag} u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq Ch \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

En combinant les inégalités précédentes et grâce à l'estimation (VI.10), nous obtenons (VI.15). La preuve est complète. \square

Proposition 44. *Sous les mêmes hypothèses (VI.10) et (VI.11), il existe une constante C_2 strictement positive indépendante de ε telle que pour tout $\alpha \in]0, 1]$, nous avons*

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_2 h^2}{\varepsilon^{2\alpha}}. \quad (\text{VI.16})$$

Preuve. Cette proposition résulte immédiatement de la généralisation du lemme de Aubin-Nitsche dans un domaine rugueux 16 et de l'inégalité [Proposition 43, (VI.15)]. En effet, il est assez clair que

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K_r h}{\varepsilon^\alpha} \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_2 h^2}{\varepsilon^{2\alpha}}, \quad \text{avec } C_2 = K_r C_1.$$

D'où l'estimation voulue. \square

4 Analyse d'erreur de la solution microscopique

Après avoir montré quelques estimations d'erreurs de la solution du problème aux limites (E) avec la méthode des éléments finis, le but à présent est de pouvoir comparer les résultats obtenus avec l'analyse asymptotique. Dans la suite, nous sommes amenés à comparer la solution du problème (E) « exacte » avec l'approximation couche limite approchée d'ordre 1 par l'approche

d'Achdou et al. Pour étudier ceci nous aurons besoin d'établir tout d'abord plusieurs résultats intermédiaires qui concernent la solution microscopique β_1 .

4.1 Domaine cellulaire tronqué

Rappelons que le correcteur cellulaire β_1 vérifie le problème (III.20) ci-dessous

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\beta_1 = 0 & \text{sur } Z^+ \cup P \\ \beta_1 = -y_2 & \text{sur } P^0 \\ \beta_1 \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r \\ \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \beta_1 = \bar{\beta}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_1(y_1, 0) dy_1, & \end{array} \right.$$

dont les définitions de Z^+ , P , P^0 , Γ_l et Γ_r sont rappelées dans la figure (III.2).

La résolution du problème cellulaire dans un domaine non borné pose des difficultés pour la résolution numérique. C'est pourquoi nous énonçons à présent le problème microscopique sur une cellule tronquée. Le domaine correspondant à cette cellule tronquée est désigné par Z_R tel que

$$Z_R = \{y \in (Z^+ \cup P) \text{ tel que } y_2 < R \text{ et } R \gg 1\}. \quad (\text{VI.17})$$

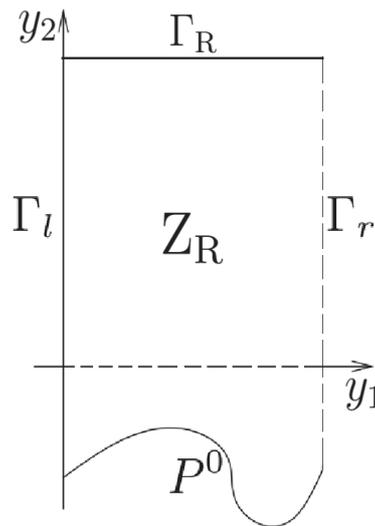


Figure VI.1 – Cellule tronquée

Bien entendu, l'utilisation d'un domaine tronqué par la paroi lisse $\Gamma_R = \{y_1 \in [0, 2\pi], y_2 = R\}$,

avec la condition suivante à l'infini « $\lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \beta_1 = \overline{\beta_1}$ », nous permet de réduire le problème à

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \beta_1^R = 0 & \text{sur } Z_R \\ \beta_1^R = -y_2 & \text{sur } P^0 \\ \frac{\partial \beta_1^R}{\partial y_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_R \\ \beta_1^R \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (\text{VI.18})$$

4.2 Estimations d'erreur du correcteur cellulaire

Notre objectif dans ce paragraphe est d'étudier l'erreur du correcteur cellulaire due à la troncature du domaine microscopique. Avant de traiter l'erreur pour les normes $H^1(Z_R)$ et $H^2(Z_R)$, nous énonçons ci-dessous deux lemmes techniques démontrés en annexe 7.

Lemme 17. *Soit le domaine cellulaire tronqué Z_R illustré dans la Figure VI.1. Soient β_1 l'unique solution du problème cellulaire (III.20) dans $D_0^{1,2}(Z_+ \cup P)$ et β_1^R la solution du problème cellulaire (VI.18) tronqué. Alors, nous avons l'inégalité suivante de type Poincaré :*

$$\|\beta_1 - \beta_1^R\|_{L^2(Z_R)} \leq (R+1) \|\nabla(\beta_1 - \beta_1^R)\|_{L^2(Z_R)}. \quad (\text{VI.19})$$

Lemme 18. *Soit le domaine cellulaire tronqué Z_R définie dans la Figure VI.1, limité en haut par l'interface $\Gamma_R = \{y_1 \in [0, 2\pi]; y_2 = R\}$. Soient β_1 l'unique solution du problème cellulaire (III.20) dans $D_0^{1,2}(Z_+ \cup P)$ et β_1^R la solution du problème cellulaire (VI.18) tronqué. Alors, nous avons l'inégalité suivante de type trace :*

$$\|\beta_1 - \beta_1^R\|_{L^2(\Gamma_R)} \leq \sqrt{R+1} \|\nabla(\beta_1 - \beta_1^R)\|_{L^2(Z_R)}. \quad (\text{VI.20})$$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'erreur $\beta_1 - \beta_1^R$ pour la norme $H^1(Z_R)$.

Proposition 45. *Soient β_1 l'unique solution dans $D_0^{1,2}(Z_+ \cup P)$ du problème cellulaire (III.20) et β_1^R la solution du problème cellulaire (VI.18) tronqué. Alors, il existe une constante C strictement positive indépendante de R telle que :*

$$\|\beta_1 - \beta_1^R\|_{H^1(Z_R)} \leq C R^{\frac{3}{2}} e^{-R}. \quad (\text{VI.21})$$

VI.4 Analyse d'erreur de la solution microscopique

Preuve. Posons la différence $\mathcal{E}^R = \beta_1 - \beta_1^R$. Donc l'erreur \mathcal{E}^R est la solution du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathcal{E}^R = 0 & \text{sur } Z_R \\ \mathcal{E}^R = 0 & \text{sur } P^0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} = \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} & \text{sur } \Gamma_R \\ \mathcal{E}^R \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (\text{VI.22})$$

Comme nous aurons recours à une formulation variationnelle du problème ci-dessus, nous considérons une fonction test régulière appartenant à $D_0^{1,2}(Z_+ \cup P)$. Par la formule de Green, il suit

$$0 = \langle -\Delta \mathcal{E}^R, v \rangle_{Z_R} = \langle \nabla \mathcal{E}^R, \nabla v \rangle_{Z_R} - \int_{\partial Z_R} \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} v = \langle \nabla \mathcal{E}^R, \nabla v \rangle_{Z_R} - \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} v.$$

Par conséquent, nous avons

$$\langle \nabla \mathcal{E}^R, \nabla v \rangle_{Z_R} = \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} v = \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} v. \quad (\text{VI.23})$$

De l'expression (VI.23), par l'inégalité triangulaire ainsi grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\left| \langle \nabla \mathcal{E}^R, \nabla v \rangle_{Z_R} \right| = \left| \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} v \right| \leq \left\| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)} \|v\|_{L^2(\Gamma_R)} \quad (\text{VI.24})$$

En prenant $v = \mathcal{E}^R$ dans (VI.24) et par le lemme 17, nous avons

$$\|\nabla \mathcal{E}^R\|_{L^2(Z_R)}^2 \leq \left\| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)} \|\mathcal{E}^R\|_{L^2(\Gamma_R)} \leq \sqrt{R+1} \left\| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)} \|\nabla \mathcal{E}^R\|_{L^2(Z_R)}. \quad (\text{VI.25})$$

À ce stade, rappelons que dans Z^+ la décomposition en Série de Fourier de la solution du problème cellulaire β_1 s'écrit explicitement :

$$\beta_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k \exp(iky_1 - |k|y_2), \quad \text{avec } \eta_k = \int_0^1 \beta_1(y_1, 0) e^{iky_1} dy_1.$$

Par un calcul de la dérivée selon la direction \vec{y}_2 de l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} = \sum_{k=1}^{+\infty} -|k| \eta_k \exp(iky_1 - |k|y_2).$$

Ceci nous permet de déduire que

$$\left| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} \right| \leq e^{-R} \sum_{k=1}^{+\infty} |k| |\eta_k| |e^{iky_1}| e^{R-|k|y_2}.$$

Grâce à cette dernière inégalité et par un simple calcul, il vient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2}(y_1, R) \right|^2 dy_1 \leq e^{-2R} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |k|^2 |\eta_k|^2 e^{2R(-|k|+1)} \right) dy_1 \\ &\leq e^{-2R} \int_0^{2\pi} \left(|\eta_1| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|k|^2 |\eta_k|^2}{2R(|k|-1)} \right) dy_1 \\ &\leq e^{-2R} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2} |\eta_1| + \sum_{k=2}^{+\infty} \sqrt{1+|k|^2} |\eta_k|^2 \right) dy_1 \quad (\text{VI.26}) \\ &\leq e^{-2R} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{1+|k|^2} |\eta_k|^2 \right) dy_1 \\ &\leq e^{-2R} \|\eta\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)}^2. \end{aligned}$$

Nous remplaçons l'inégalité (VI.26) dans (VI.25) et après simplification, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|\nabla \mathcal{E}^R\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} \leq \sqrt{R+1} \left\| \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)} \leq \sqrt{R+1} e^{-R} \|\eta\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)}. \quad (\text{VI.27})$$

Par le lemme 18 et l'inégalité (VI.27), nous montrons qu'il existe une constante C strictement positive telle que pour tout $R \gg 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}^R\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} &= \|\nabla \mathcal{E}^R\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} + \|\mathcal{E}^R\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} \leq (1 + (R+1)) \|\nabla \mathcal{E}^R\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} \\ &\leq (2+R) \sqrt{R+1} e^{-R} \|\eta\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)} \leq C R^{\frac{3}{2}} e^{-R}. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Dans ce qui suit immédiatement, nous montrons comme précédemment une convergence exponentielle de l'erreur $(\beta_1 - \beta_1^R)$ pour la norme $H^2(\mathbb{Z}_R)$.

Théorème 21. *Nous considérons β_1 l'unique solution dans $D_0^{1,2}(Z_+ \cup P)$ du problème cellulaire (III.20) et β_1^R la solution du problème cellulaire (VI.18) tronqué. Alors, il existe une constante*

VI.4 Analyse d'erreur de la solution microscopique

K strictement positive indépendante de R telle que :

$$\|\beta_1 - \beta_1^R\|_{H^2(Z_R)} \leq KR^3 e^{-R}. \quad (\text{VI.28})$$

Démonstration. Nous reproduisons ici la technique introduite dans le deuxième chapitre de cette thèse. L'idée directrice de la démonstration est la suivante : Tout d'abord, nous allons effectuer un changement de variable pour redresser la cellule tronquée Z_R en un domaine ne dépendant plus de la troncature R . Ensuite, nous établissons la formulation variationnelle dans le domaine redressé afin de majorer et minorer les deux membres associés à cette formulation variationnelle. Par retour à la cellule tronquée, nous terminons par estimer l'erreur $\beta_1 - \beta_1^R$ pour la norme H^2 . Nous traitons brièvement la démonstration sans établir tous les détails du calcul. Pour une lecture plus approfondie, nous renvoyons à l'appendice 7 de ce chapitre.

Redressement de la cellule tronquée : Comme précédemment dans la dernière preuve, nous posons la différence $\mathcal{E}^R = \beta_1 - \beta_1^R$. Alors, l'erreur \mathcal{E}^R vérifie le problème aux limites (VI.22). Il est assez naturel donc de rappeler la formulation variationnelle (VI.23) du problème (VI.22) :

$$\langle \nabla \mathcal{E}^R, \nabla v \rangle_{Z_R} = \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} v = \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} v, \quad \text{avec } v \in D_0^{1,2}(Z_+ \cup P).$$

Nous effectuons un changement de variable qui permet de transformer la cellule tronquée Z_R en un rectangle $\tilde{Q} = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ (voir Figure VI.2). Pour cela, nous considérons le changement de variable $z = \phi(y)$, où $\phi(y)$ est le C^2 -difféomorphisme¹ tel que :

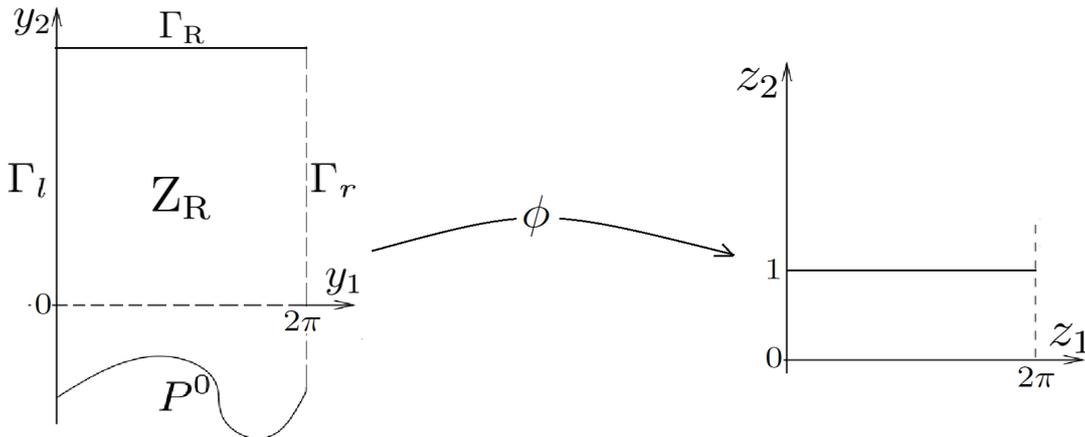


Figure VI.2 – Redressement de la cellule tronquée

1. Les variables z_1, z_2 n'ont rien à voir avec celles utilisées dans le chapitre IV.

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{Z}_R &\longrightarrow \tilde{Q} \\ (y_1, y_2) &\longrightarrow (z_1, z_2) = \left(y_1, \frac{y_2 - \tilde{\gamma}(y_1)}{R - \tilde{\gamma}(y_1)} \right). \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

Notons $\psi = \phi^{-1}$ l'application inverse de ϕ telle qu'elle vérifie :

$$\begin{cases} \psi^1(z) = y_1 = z_1 \\ \psi^2(z) = y_2 = [R - \tilde{\gamma}(z_1)] z_2 + \tilde{\gamma}(z_1). \end{cases}$$

Aussi il est assez clair qu'après calculs, on a

$$\nabla\psi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{\gamma}'(z_1)(1 - z_2) & R - \tilde{\gamma}(z_1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla\phi(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tilde{\gamma}'(y_1)(y_2 - R)}{R - \tilde{\gamma}(y_1)} & \frac{1}{R - \tilde{\gamma}(y_1)} \end{pmatrix}.$$

Le jacobien de ψ est : $J\psi = |R - \tilde{\gamma}(z_1)|$.

Établissement de la Formulation variationnelle après redressement : Nous commençons par effectuer un changement de notations. Nous posons $\tilde{\mathcal{E}}(z) = \mathcal{E}^R \circ \psi(z)$ et $\tilde{v}(z) = v \circ \psi(z)$. Le gradient de $\tilde{\mathcal{E}}$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1}(z) \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\gamma}'(z_1)(1 - z_2) \\ 0 & R - \tilde{\gamma}(z_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_1}(\phi^{-1}(z)) \\ \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(\phi^{-1}(z)) \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous permet de déduire après simplification que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(\phi^{-1}(z)) = \frac{1}{R - \tilde{\gamma}(z_1)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2}(z) \\ \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_1}(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1}(z) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2}(z) \cdot \frac{\tilde{\gamma}'(z_1)(1 - z_2)}{R - \tilde{\gamma}(z_1)} \end{cases} \quad (\text{VI.30})$$

De (VI.30) ainsi que d'après les formules de changement de variables dans les intégrales, il vient

$$\begin{aligned} \langle \nabla \mathcal{E}^R, \nabla v \rangle_{\mathbb{Z}_R} &= \int_{\tilde{Q}} \nabla (\mathcal{E}^R(\phi^{-1}(z))) \cdot \nabla (v(\phi^{-1}(z))) |J\psi(z)| dz \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} R - \tilde{\gamma}(z_1) & (z_2 - 1)\tilde{\gamma}'(z_1) \\ (z_2 - 1)\tilde{\gamma}'(z_1) & \frac{1}{R - \tilde{\gamma}(z_1)} [1 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z_2} \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

VI.4 Analyse d'erreur de la solution microscopique

De la même façon, nous obtenons aussi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} v \, dy_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{E}^R(\psi(z))}{\partial z_2} v(\psi(z)) |J\psi(z)| \, dz_1 \\ &:= \int_0^{2\pi} \tilde{F}(z) \tilde{v}(z) \, dz_1, \quad \text{où } \tilde{F}(z) = \frac{\partial \mathcal{E}^R \circ \psi(z)}{\partial z_2} |R - \tilde{\gamma}(z_1)|. \end{aligned}$$

Afin de simplifier la présentation, notons dans toute la suite la métrique $G_R(z)$ telle que

$$G_R(z) = \begin{pmatrix} g_R^{11}(z) & g_R^{12}(z) \\ g_R^{21}(z) & g_R^{22}(z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} R - \tilde{\gamma}(z_1) & (z_2 - 1)\tilde{\gamma}'(z_1) \\ (z_2 - 1)\tilde{\gamma}'(z_1) & \frac{1}{R - \tilde{\gamma}(z_1)} \left[1 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 \right] \end{pmatrix}$$

Nous adaptons la dernière notation au calcul des intégrales ci-dessus, alors nous pouvons écrire la formulation variationnelle dans \tilde{Q} du problème aux limites (VI.22) après redressement sous la forme

$$\langle G_R(z) \nabla \tilde{\mathcal{E}}, \nabla \tilde{v} \rangle_{\tilde{Q}} = \int_0^{2\pi} \tilde{F}(z) \tilde{v}(z) \, dz_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{E}^R \circ \psi(z)}{\partial z_2} |R - \tilde{\gamma}(z_1)| \tilde{v}(z) \, dz_1.$$

Par ailleurs, notons à présent dans toute la suite de cette démonstration les expressions $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{B}(\cdot)$ telles que

$$\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{v}) = \langle G_R(z) \nabla \tilde{\mathcal{E}}, \nabla \tilde{v} \rangle_{\tilde{Q}} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(\tilde{v}) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{E}^R(\psi(z))}{\partial z_2} |R - \tilde{\gamma}(z_1)| \tilde{v}(z) \, dz_1.$$

Choix de la fonction test : Nous définissons le demi-disque \tilde{D} l'intersection entre le demi-plan strictement positif et le disque de centre $(\pi, 0)$, de rayon $\pi^2 + 1$ tel que $\tilde{D} = D((\pi, 0), \pi^2 + 1) \cap \{y_2 > 0\}$ recouvre \tilde{Q} . D'autre part, notons \tilde{D}' le demi-disque tel que $\tilde{D}' = D((\pi, 0), 1) \cap \{y_2 > 0\}$. Avec les définitions ci-dessus et pour des raisons techniques, nous introduisons la fonction de troncature $\xi \in C_c^\infty(\tilde{D}, [0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} \xi \equiv 1 & \text{dans } \tilde{D}' \\ 0 \leq \xi \leq 1 & \text{dans } \tilde{D} \setminus \tilde{D}' \\ \xi \equiv 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{D}. \end{cases}$$

Pour finir cette étape, nous choisissons pour $|h|$ assez petit la fonction test suivante

$$\tilde{v} = -D_1^{-h} \left(\xi^2 D_1^h \tilde{\mathcal{E}} \right), \quad \text{où } D_1^h \text{ présente le quotient différentiel tangentiel.} \quad (\text{VI.31})$$

Chapitre VI. Estimations d'erreur et Résultats numériques

Minoration de la forme bilinéaire à la formulation variationnelle : En procédant comme dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous injectons la fonction test (VI.31) dans l'expression de $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ associée à la forme bilinéaire de la formulation variationnelle après redressement et grâce aux opérations classiques sur le quotient différentiel D_1^h , nous pouvons découper l'expression de $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}) = \langle G_R(z) \nabla \tilde{\mathcal{E}}, \nabla \tilde{v} \rangle_{\tilde{Q}}$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}) &= \mathcal{A}_1(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}) + \mathcal{A}_2(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}) + \mathcal{A}_3(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}) \\ &:= \langle G_R(z) w, w \rangle + \langle G_R(z) w_1, w_2 \rangle + \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_4 + w_5 \rangle \end{aligned} \quad (\text{VI.32})$$

telle que la métrique $\widehat{G_R(z)}$ présente le différentiel tangentiel de la métrique $G_R(z)$:

$$\widehat{G_R(z)} = \begin{pmatrix} D_1^h(g_R^{11}(z)) & D_1^h(g_R^{12}(z)) \\ D_1^h(g_R^{21}(z)) & D_1^h(g_R^{22}(z)) \end{pmatrix}.$$

Ainsi que les vecteurs w, w_1, w_2, w_3, w_4 et w_5 sont définis comme suit

$$\begin{aligned} w &= \xi \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2} \right) \end{pmatrix}, & w_1 &= \xi \begin{pmatrix} D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1} \right) \\ D_1^h \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2} \right) \end{pmatrix}, & w_2 &= 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z_1} D_1^h \tilde{\mathcal{E}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z_2} D_1^h \tilde{\mathcal{E}} \end{pmatrix}, & w_3 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2} \end{pmatrix}, \\ w_4 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1^h \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial D_1^h \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2} \end{pmatrix}, & w_5 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z_1} D_1^h(\tilde{\mathcal{E}}) \\ \frac{\partial \xi}{\partial z_2} D_1^h(\tilde{\mathcal{E}}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous nous servons ensuite des résultats des propositions 50, 51 et 53 (voir annexe 7 de ce chapitre), et du fait que $\int |D_1^h \tilde{\mathcal{E}}|^2 dy \leq \int |\nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dy$, pour arriver à

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}) &\geq \alpha_R \int \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz. \\ \mathcal{A}_2(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}) &\geq -\frac{\alpha_R}{4} \int \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz - C_1 R \int |\nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz. \\ \mathcal{A}_3(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}) &\geq -\frac{\alpha_R}{4} \int \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz - C_3 R \int |\nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz. \end{aligned}$$

Signalons que C_1, C_3 sont deux constantes strictement positives indépendantes de R et α_R présente la constante d'ellipticité de la métrique $G_R(z)$ donnée par $\alpha_R = \frac{1}{C_1 R}$.

Finalement, en regroupant les inégalités ci-dessus des quantités $\mathcal{A}_1(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{A}_2(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{A}_3(\cdot, \cdot)$, nous montrons qu'il existe une constante C_A strictement positive indépendante de R telle que

$$\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}) \geq \frac{\alpha_R}{2} \int \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz - C_A R \int |\nabla \tilde{\mathcal{E}}(z)|^2 dz. \quad (\text{VI.33})$$

VI.4 Analyse d'erreur de la solution microscopique

Majoration de la forme linéaire à la formulation variationnelle : En reprenant le même procédé que nous avons décrit précédemment dans le deuxième chapitre de cette thèse afin d'établir une majoration de la forme linéaire à la formulation variationnelle, un calcul similaire nous donne qu'il existe une constante C_B strictement positive indépendante de R telle que

$$\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{E}}) \leq \frac{\alpha_R}{4} \int \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz + \frac{\alpha_R}{4} \int |\nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz + \frac{C_B}{\alpha_R} \int_0^{2\pi} |\tilde{F}|^2 dz_1,$$

où la fonction source $\tilde{F}(\cdot)$ est définie comme suit $\tilde{F}(z) = \frac{\partial \mathcal{E}^R(\psi(z))}{\partial z_2} |R - \tilde{\gamma}(z_1)|$. Une simple majoration triangulaire du Jacobien de ψ nous permet de déduire la majoration suivante

$$\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{E}}) \leq \frac{\alpha_R}{4} \int \xi^2 |D_1^h \nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz + \frac{\alpha_R}{4} \int |\nabla \tilde{\mathcal{E}}|^2 dz + \frac{C_B(R^2 + 1)}{\alpha_R} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R(\psi(z))}{\partial z_2} \right|^2 dz_1. \quad (\text{VI.34})$$

Régularité H^2 dans le domaine redressé : En vertu des deux inégalités (VI.33) et (VI.34) et par une démarche semblable à celle utilisée pour la proposition [13, Chapitre II], alors il existe une constante C_r strictement positive indépendante de R telle que

$$\sum_{l,k=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_k \partial z_l} \right\|_{L^2(\tilde{D}')} \leq C_r \left(R \|\nabla \tilde{\mathcal{E}}\|_{L^2(\tilde{D})} + R^2 \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2} \right|^2 dz_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{VI.35})$$

Estimation de la norme H^2 dans le domaine cellulaire tronqué : Une étape classique maintenant est le retour au domaine cellulaire. Pour cela, nous appliquons le résultat technique du lemme 19 dans l'appendice 7 de ce chapitre. Alors, il existe une constante C_F strictement positive indépendante de R telle que

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R}{\partial y_i \partial y_j} \right\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} \leq C_F \left(\sum_{l,n=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_n \partial z_l} \right\|_{L^2(\tilde{Q})} + \sum_{l=1}^2 \left\| \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_l} \right\|_{L^2(\tilde{Q})} \right). \quad (\text{VI.36})$$

En vertu de l'estimation (VI.35) et de l'inégalité (VI.36), nous montrons qu'il existe une constante C strictement positive indépendante de R telle que nous avons

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R(y)}{\partial y_i \partial y_j} \right\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} \leq C \left(R \|\nabla \tilde{\mathcal{E}}\|_{L^2(\tilde{Q})} + R^2 \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2} \right|^2 dz_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{VI.37})$$

Il nous reste qu'exploiter les deux normes à droite dans la dernière inégalité. Par un simple

calcul, nous montrons qu'il existe une constante C strictement positive telle que

$$\|\nabla \tilde{\mathcal{E}}\|_{L^2(\tilde{Q})} = \left(\sum_{i,k=1}^2 \int_{\mathbb{Z}_R} \left(\frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z_k} \right)^2 |J\phi(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{R} \|\nabla \mathcal{E}^R\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)}. \quad (\text{VI.38})$$

De même, grâce à la formule de changement de variable dans les intégrales, il vient

$$\left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R(\psi(z))}{\partial z_2} \right|^2 dz_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Gamma_R} \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} \right|^2 |J\phi(y)| dy_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{R}} \left\| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)}. \quad (\text{VI.39})$$

En rassemblant les quantités (VI.38) et (VI.39) dans (VI.37). Alors, il existe une constante C strictement positive indépendante de R telle que

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R}{\partial y_i \partial y_j} \right\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} \leq C R^{\frac{3}{2}} \left(\|\nabla \mathcal{E}^R\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} + \left\| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)} \right). \quad (\text{VI.40})$$

Fin de la démonstration : Pour pouvoir achever cette démonstration, il nous suffit d'exploiter les normes à droite de l'estimation (VI.40) de la Hessienne de l'erreur \mathcal{E}^R . Compte tenu du fait que « $\frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} = 0$ sur Γ_R » et de l'estimation (VI.26), nous avons donc

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)} = \left\| \frac{\partial(\beta_1 - \beta_1^R)}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)} \leq C e^{-R}.$$

Nous utilisons finalement le résultat de la Proposition 45 et des majorations brutales qui permettent d'estimer $\|\beta_1 - \beta_1^R\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)}$. On en tire l'existence d'une constante K strictement positive indépendante de R telle que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}^R\|_{H^2(\mathbb{Z}_R)} &= \|\mathcal{E}^R\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R}{\partial y_i \partial y_j} \right\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} \leq C R^{\frac{3}{2}} \left(\|\mathcal{E}^R\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} + \left\| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\Gamma_R)} \right) \\ &\leq K R^{\frac{3}{2}} (R^{\frac{3}{2}} e^{-R} + e^{-R}) \leq 2 K R^3 e^{-R}. \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration. □

Nous arrivons à la toute dernière partie de cette analyse d'erreur de correcteur microscopique. L'obtention d'un résultat de convergence et d'estimations d'erreur pour une approximation du problème cellulaire tronquée (VI.18) par une méthode de Galerkin comme la méthode des éléments finis s'appuie sur les derniers résultats de la Proposition 45 et du Théorème 21.

VI.4 Analyse d'erreur de la solution microscopique

Nous introduisons le cadre fonctionnel du problème aux limites cellulaire tronqué (VI.18), afin de pouvoir donner en toute rigueur le résultat de convergence. Pour cela, nous pouvons écrire le problème variationnel cellulaire tronqué sous une forme abstraite :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \beta_1^R \in D^{1,2}(\mathbb{Z}_R) \text{ tel que} \\ a_c(\beta_1^R, v) = l_c(v), \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{Z}_R), \end{cases} \quad (\text{VI.41})$$

où $a_c(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire, continue, coercive et $l_c(\cdot)$ est une forme linéaire. L'espace $D^{1,2}(\mathbb{Z}_R)$ est défini comme suit

$$D^{1,2}(\mathbb{Z}_R) = \left\{ v \in L^1_{loc}(\mathbb{Z}_R) \text{ tel que } \nabla v \in L^2(\mathbb{Z}_R), \frac{\partial v}{\partial y_2|_{\Gamma_R}} = 0, v \text{ est périodique sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r \right\}.$$

L'accent porte sur le problème variationnel cellulaire tronqué approché. Pour des raisons de clarté, introduisons d'abord **l'espace d'approximation** $V_{\beta,h} \subset D^{1,2}(\mathbb{Z}_R)$ un sous-espace de dimension finie. Le problème approché résolu en pratique est, en général, une approximation interne du problème initial (VI.41) de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \beta_{1,h}^R \in V_{\beta,h} \text{ tel que} \\ a_{c,h}(\beta_{1,h}^R, v_h) = l_{c,h}(v_h), \quad \forall v_h \in V_{\beta,h}, \end{cases} \quad (\text{VI.42})$$

où les formes respectivement bilinéaire, continue, coercive $a_{c,h}(\cdot, \cdot)$ et linéaire $l_{c,h}(\cdot)$ sont issues des approximations des formes $a_c(\cdot, \cdot)$ et $l_c(\cdot)$; le paramètre positif h , caractérisant la discrétisation.

Proposition 46. *Il existe une constante C strictement positive indépendante de R telle que :*

$$\forall h > 0, \quad \left\| \beta_{1,h}^R - \beta_1^R \right\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} \leq C h R^3 e^{-R}. \quad (\text{VI.43})$$

Preuve. La preuve repose sur le lemme de Céa (Voir Lemme 21) et le Théorème d'interpolation [39]. En effet,

$$\left\| \beta_1^R - \beta_{1,h}^R \right\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} \leq C \inf_{\beta_{1,h}^R \in V_{\beta,h}} \left\| \beta_1^R - \beta_{1,h}^R \right\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} \leq C \left\| \beta_1^R - \mathcal{J}_h^{Lag} \beta_1^R \right\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} \leq C h \left| \beta_1^R \right|_{H^2(\mathbb{Z}_R)},$$

où, \mathcal{J}_h^{Lag} est l'opérateur d'interpolation de Lagrange défini dans la sous-section 7.2 de ce chapitre et C désigne une constante générique indépendante de h de R et dont la valeur peut changer à chaque occurrence. En vertu de Théorème 21, nous avons une convergence exponentielle pour la norme $H^2(\mathbb{Z}_R)$ en ordre $\mathcal{O}(R^3 e^{-R})$ entre la solution β_1 du problème cellulaire (III.20) et la solution β_1^R du problème cellulaire (VI.18) tronqué. Ceci nous permet d'achever la preuve. \square

5 Analyse d'erreur a priori par la méthode asymptotique

Pour pouvoir exploiter numériquement les performances des résultats obtenus dans la troisième section de ce chapitre par le schéma d'éléments finis dans un domaine rugueux, c'est pourquoi nous poursuivrons en cette section par une étude d'analyse d'erreur asymptotique sur le cas du problème modèle (E) simplifié avec une source réelle (voir (III.1)).

Rappelons dans un premier temps l'expression de la première approximation de u_ε la solution du problème aux limites (III.1), ou autrement dit l'extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille (voir III.3) :

$$u_{\text{ext},1}^0 = \begin{cases} u_0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) x_2 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{C}{2} x_2 (1 - x_2) & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{C}{2} x_2 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

De plus, nous notons $(u_{\text{ext},1}^0)_h$ la solution discrète de l'extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille $u_{\text{ext},1}^0$ par la méthode des éléments finis. Maintenant, il est assez naturel d'obtenir une estimation de l'erreur $u_\varepsilon - (u_{\text{ext},1}^0)_h$ en norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. En effet, nous avons le résultat suivant :

Proposition 47. *Soient u_ε la solution du problème aux limites (III.1) et $(u_{\text{ext},1}^0)_h$ l'extension approchée d'ordre 1 du profil de Poiseuille. Alors, il existe une constante C strictement positive indépendante de ε et de h telle que :*

$$\|u_\varepsilon - (u_{\text{ext},1}^0)_h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C(\sqrt{\varepsilon} + h). \quad (\text{VI.44})$$

Preuve. Grâce à l'extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille $u_{\text{ext},1}^0$ et par inégalité triangulaire, nous avons

$$\|u_\varepsilon - (u_{\text{ext},1}^0)_h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon - u_{\text{ext},1}^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|u_{\text{ext},1}^0 - (u_{\text{ext},1}^0)_h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{VI.45})$$

Rappelons que d'après [Chapitre III, Proposition 14], il existe une constante C strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon - u_{\text{ext},1}^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

En vertu du lemme de Céa (voir lemme 21) et du Théorème d'interpolation (voir [39]), il existe une constante C strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|u_{\text{ext},1}^0 - (u_{\text{ext},1}^0)_h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq Ch \|u_{\text{ext},1}^0\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq Ch. \quad (\text{VI.46})$$

VI.5 Analyse d'erreur a priori par la méthode asymptotique

Pour finir, il nous reste à rassembler ces deux dernières estimations dans (VI.45). Nous montrons qu'il existe une constante C strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon - (u_{\text{ext},1}^0)_h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C(\sqrt{\varepsilon} + h).$$

La preuve est complète. □

Dans un deuxième temps, nous rappelons que l'approximation couche limite d'ordre 1 par l'approche d'Achdou et al. s'écrit comme suit

$$u_{\text{Ach},1}^\infty(x) = u_{\text{ext},1}^0(x) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\bar{\beta}_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 x_2 \right).$$

Comme précédemment, nous notons $(u_{\text{Ach},1}^\infty)_h$ la solution approchée de l'approximation couche limite d'ordre 1 par la méthode des éléments finis. Dans la même philosophie, une question naturelle est de savoir comment se comporte l'erreur $u_\varepsilon - (u_{\text{Ach},1}^\infty)_h$ en fonction de ε et de h pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$?

Signalons qu'en itérant indéfiniment, le terme $\frac{1}{1 + \varepsilon\bar{\beta}_1}$ est la limite pour ε suffisamment petit de la série géométrique de terme général $(-\varepsilon\bar{\beta}_1)^n$. D'une part, cette limite a un effet perturbatif sur l'erreur et c'est une source de gros soucis numériques pour des valeurs de ε de l'ordre de 10^{-1} . Pour obtenir des précisions raisonnables, nous sommes obligés de faire des tests numériques pour des valeurs de ε à l'ordre supérieur. Néanmoins, cette condition nécessite un grand coût numérique à payer. Pour cela afin d'éviter cette difficulté technique d'un point de vue numérique, nous proposons de dériver des estimations d'erreur par rapport à $u_{\text{Ach},1}^1$, l'approximation couche limite d'ordre 1 à l'itération 1. Nous rappelons que

$$u_{\text{Ach},1}^1(x) = u_{\text{ext},1}^0(x) + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta}_1 x_2 \right).$$

Dans la proposition suivante, nous montrons une estimation d'erreur de la différence $u_\varepsilon - (u_{\text{Ach},1}^1)_h$ en norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$.

Proposition 48. *Soient u_ε la solution du problème aux limites (III.1) et $(u_{\text{Ach},1}^1)_h$ l'approximation couche limite approchée d'ordre 1 à l'itération 1. Alors, il existe une constante C strictement positive telle que :*

$$\|u_\varepsilon - (u_{\text{Ach},1}^1)_h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + h + \sqrt{\varepsilon}H \right), \quad \text{avec } H = R^{\frac{5}{2}}e^{-R}(1 + h). \quad (\text{VI.47})$$

Chapitre VI. Estimations d'erreur et Résultats numériques

Preuve. Nous introduisons l'approximation couche limite d'ordre 1 à l'itération 1 dans la différence $u_\varepsilon - (u_{\text{Ach},1}^1)_h$, alors par inégalité triangulaire, nous avons

$$\left\| u_\varepsilon - (u_{\text{Ach},1}^1)_h \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \left\| u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^1 \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \left\| u_{\text{Ach},1}^1 - (u_{\text{Ach},1}^1)_h \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{VI.48})$$

En vertu du résultat de la Proposition 20 dans le troisième chapitre de ce document, il existe une constante C strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^1 \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{VI.49})$$

Exploitions à présent, le terme à droite de l'inégalité (VI.48). L'inégalité triangulaire donne

$$\left\| u_{\text{Ach},1}^1 - (u_{\text{Ach},1}^1)_h \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \left\| u_{\text{ext},1}^0 - (u_{\text{ext},1}^0)_h \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left\| \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \beta_{1,h} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{VI.50})$$

Par un simple calcul et grâce aux résultats de la proposition 45 et du théorème 21, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\| \beta_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \beta_{1,h} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| \beta_1(y) - \beta_{1,h}^R(y) \right\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\left\| \beta_1 - \beta_1^R \right\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} + \left\| \beta_1^R - \beta_{1,h}^R \right\|_{H^1(\mathbb{Z}_R)} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left(R e^{-R} + R^{\frac{5}{2}} e^{-R} h \right) \leq \frac{C R^{\frac{5}{2}} e^{-R} (1+h)}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (\text{VI.51})$$

D'une part, nous signalons que C désigne une constante qui peut changer à chaque occurrence. D'autre part, pour simplifier la présentation, nous posons la quantité H telle que $H := R^{\frac{5}{2}} e^{-R} (1+h)$. Nous combinons les expressions (VI.46) et (VI.51) dans l'inégalité (VI.50), alors il existe une constante C strictement positive indépendante de ε telle que

$$\left\| u_{\text{Ach},1}^1 - (u_{\text{Ach},1}^1)_h \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C(h + H\sqrt{\varepsilon}). \quad (\text{VI.52})$$

Il nous reste à regrouper les inégalités (VI.49) et (VI.52) dans (VI.48). Nous obtenons donc

$$\left\| u_\varepsilon - (u_{\text{Ach},1}^1)_h \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + h + \sqrt{\varepsilon} H \right).$$

La preuve est complète. □

Remarque 19. Dans ce paragraphe, nous formulons une remarque qui permettra de comparer les avantages des deux schémas :

- par l'approximation couche limite approchée d'ordre 1 à l'itération 1.
- par la méthode des éléments finis (axée sur le lemme de type Aubin-Nitsche dans Ω_ε).

Nous constatons que l'analyse d'erreur asymptotique par l'approximation couche limite approchée d'ordre 1 fournit une estimation d'erreur plus fine, en comparaison avec le schéma d'éléments finis. Nous mettons l'accent sur le fait qu'en vertu du résultat principal du quatrième chapitre de cette thèse, nous avons montré dans le théorème 9 que la solution exacte u_ε du problème modèle (E) simplifié avec une source réelle (III.1) est singulière à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ pour la norme H^2 . Bien entendu, si nous tenons compte de cette singularité dans la preuve de la proposition 43 (plus précisément dans la condition de stabilité du lemme d'Aubin-Nitsche dans Ω_ε), alors nous obtenons

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C_1 h}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

D'autre part, à l'aide de la proposition 48, il est maintenant possible d'utiliser la proposition 43 pour en tirer des estimations d'erreur plus fines. En manipulant un peu les inégalités des résultats obtenus précédemment, nous obtenons en réalité une estimation d'erreur plus fine. En effet, par une inégalité triangulaire, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|u_\varepsilon - (u_{\text{Ach},1}^1)_h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|(u_{\text{Ach},1}^1)_h - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + h + \sqrt{\varepsilon}H + \|(u_{\text{Ach},1}^1)_h - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right), \quad \text{où } H = R^{\frac{5}{2}}e^{-R}(1+h). \end{aligned}$$

Nous aurons besoin de faire des tests numériques pour illustrer l'erreur $\|(u_{\text{Ach},1}^1)_h - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Par la proposition 20 du Chapitre III, on s'attend à ce que cette dernière différence approchée soit à l'ordre $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$.

Lorsque nous considérons un pas de maillage h tel que $h \leq \varepsilon$, nous observons que l'erreur $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ converge à l'ordre $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ par le schéma d'éléments finis ainsi que le taux de convergence par l'approximation couche limite approchée d'ordre 1 est en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

En résumé, on peut dire que le schéma par analyse asymptotique dispose de plusieurs avantages lorsqu'il est comparé au schéma d'éléments finis. Il est aussi précis, plus optimal et il est beaucoup plus facile à implémenter numériquement.

Nous pouvons maintenant tester numériquement nos modèles.

6 Validation numérique

Afin de valider nos résultats théoriques et de montrer certaines fonctionnalités les plus intéressantes, nous proposons dans cette section une série de tests numériques. Les simulations réalisées s'appuient sur le code FreeFem++ écrit par D. Bresch et V. Milišić [27]. Le code source de [27] est disponible en ligne (sous Licence GPL)². Une version du code source correspondant à toutes les notations introduites dans cette thèse et à tous les tests présentés ci-dessous est disponible aussi en ligne³. Une approximation \mathbb{P}_2 Lagrange est utilisée ici. FreeFem++ est un langage dédié aux simulations numériques par éléments finis (voir [47, 48]).

6.1 Domaine de discrétisation

Nous considérons le domaine rugueux Ω_ε de longueur $L = 10$ et de hauteur $H_r = 1$ illustré dans la figure ci-dessous.

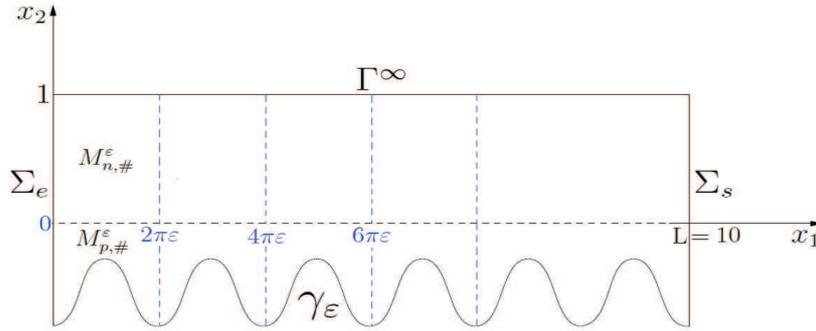


Figure VI.3 – Géométries du domaine rugueux Ω_ε et de la cellule $M_{\#}^\varepsilon$

La rugosité de la paroi γ_ε est décrite à l'échelle microscopique comme

$$P^0 = \left\{ (y_1, y_2) \in [0, 2\pi] \times [-1, 0[, y_2 = \tilde{\gamma}(y_1) = \frac{-(1 + \cos(y_1))}{2} - \delta \right\}, \quad \text{avec } \delta = 5 \cdot 10^{-2}. \quad (\text{VI.53})$$

La périodicité sur les bords latéraux Σ_e et Σ_s nous permet de discrétiser à l'échelle macroscopique sur une cellule de longueur $2\pi\varepsilon$. Pour cela, nous considérons la cellule $M_{\#}^\varepsilon$ telle que $M_{\#}^\varepsilon = M_{p,\#}^\varepsilon \cup M_{n,\#}^\varepsilon$ où

$$M_{n,\#}^\varepsilon =]0, 2\pi\varepsilon[\times]0, 1[\quad \text{et} \quad M_{p,\#}^\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \text{ tel que } x_1 \in]0, 2\pi\varepsilon[\text{ et } x_2 \in \left] \varepsilon \tilde{\gamma}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), 0 \right] \right\}.$$

2. <http://ljk.imag.fr/membres/Vuk.Milisic/Software/WallLawTests.edp>

3. <http://www.math.univ-paris13.fr/~bey/loiparoi.edp>

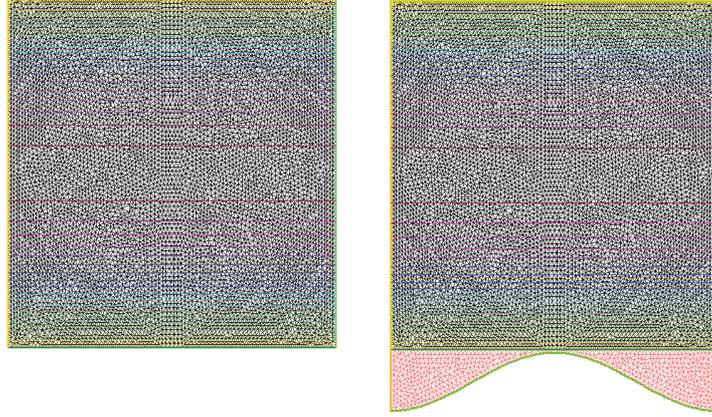


Figure VI.4 – Les maillages $M_{p,\#}^\varepsilon$ et $M_{n,\#}^\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \simeq 0.1$

Pour ε donné, les maillages $M_{p,\#}^\varepsilon$ et $M_{n,\#}^\varepsilon$ sont conformes sur la partie supérieure positive qui correspond à $\{x_2 \geq 0\}$. Pour les illustrations graphiques, nous prenons plusieurs valeurs de ε . Pour cela, nous fixons l'entier $j \in \{0, \dots, 14\}$ et nous définissons le réel $\varepsilon = q^j$ tel que $q = 0.85$. Comme dans [27], afin d'éviter les erreurs de discrétisation, nous prenons n^ε éléments sur la frontière fictive horizontale $\{x_1 \in [0, 2\pi\varepsilon], x_2 = 0\}$ de telle sorte que

$$n^\varepsilon = \frac{N}{\varepsilon^\zeta}, \quad \text{où } N = 90 \text{ et } \zeta \in \{0.1, 0.2\}. \quad (\text{VI.54})$$

Nous précisons aussi que le nombre de noeuds est linéairement proportionnel sur les autres frontières. Cela nous donne une maille de taille h (avec h le diamètre maximal de la triangulation [39]). Approximativement, le pas de discrétisation h est défini comme suit

$$h \simeq \frac{2\pi\varepsilon}{n^\varepsilon} = \frac{2\pi}{N} \varepsilon^{1+\zeta}. \quad (\text{VI.55})$$

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus pour le pas de discrétisation h sur les différentes valeurs de ζ .

	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0.001$
h	$k_1 \varepsilon^{1.1757}$	$k_2 \varepsilon^{1.0608}$	$k_3 \varepsilon^{0.98452}$

Tableau VI.1 – Pas de maillage h en fonction de ζ

Signalons que k_1 , k_2 et k_3 sont des constantes strictement positives indépendantes de ε . Les

Chapitre VI. Estimations d'erreur et Résultats numériques

résultats présentés dans le tableau VI.1 sont en accord avec l'approximation (VI.55) de h . Par ailleurs, nous avons illustré ci-dessous les courbes de la discrétisation h en fonction de ε pour $\zeta = 0.1$ et $\zeta = 0.2$ (Figures VI.5 et VI.7), ainsi qu'en échelle logarithmique (Figures VI.6 et VI.8).

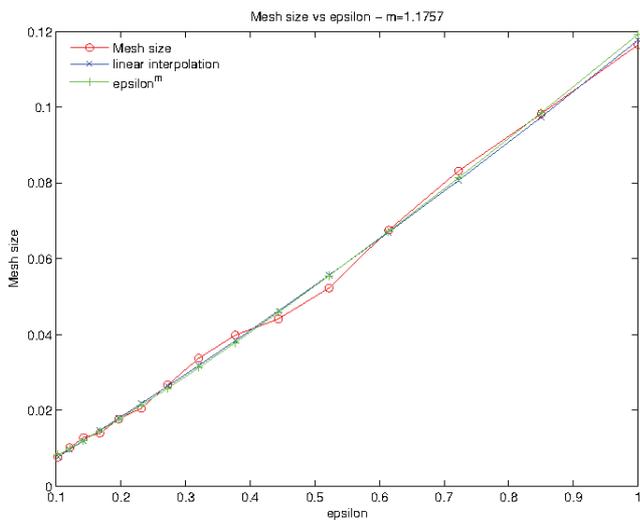


Figure VI.5 – Discrétisation en fonction de ε - $\zeta = 0.2$

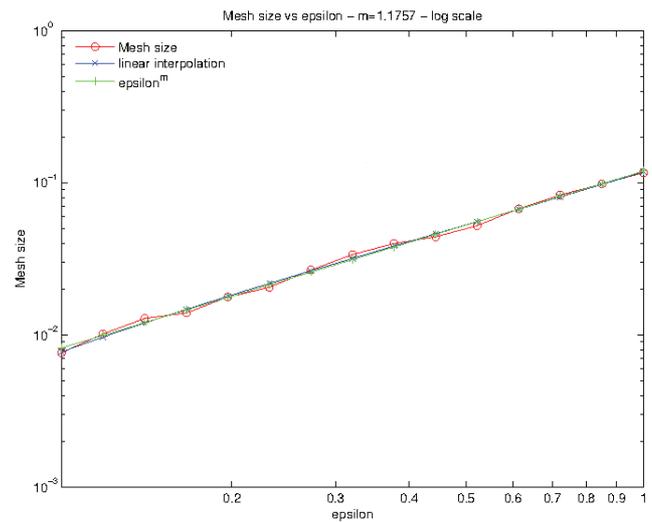


Figure VI.6 – Discrétisation en fonction de ε - $\zeta = 0.2$ - échelle log.

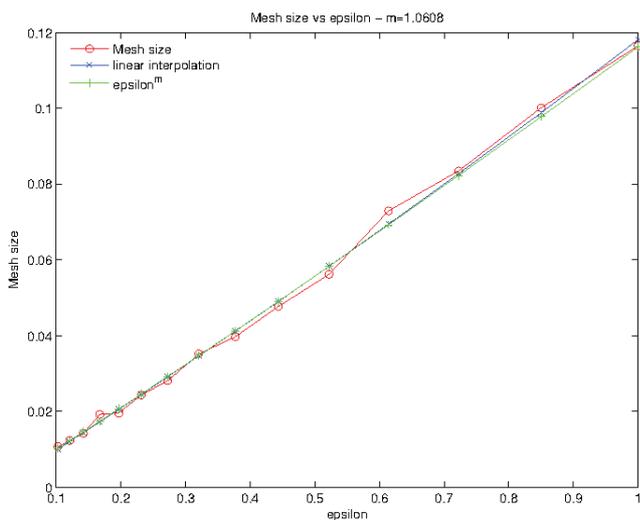


Figure VI.7 – Discrétisation en fonction de ε - $\zeta = 0.1$

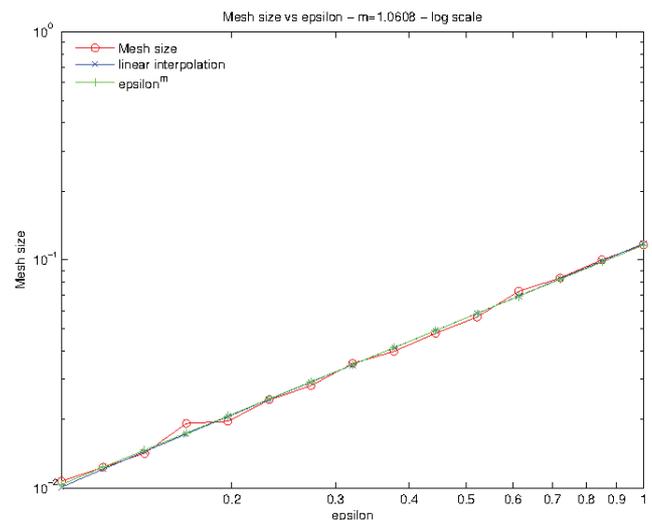


Figure VI.8 – Discrétisation en fonction de ε - $\zeta = 0.1$ - échelle log.

Sur les figures VI.5-VI.8, la distribution spatiale du nuage de points nous permet de déduire

qu'il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$h \leq C \varepsilon. \quad (\text{VI.56})$$

6.2 Simulation numérique des résultats théoriques du chapitre III

Les simulations numériques que nous présentons dans cette section sont les illustrations des taux de convergence que nous avons montrés théoriquement dans le troisième chapitre de cette thèse. Il est donc nécessaire d'un point de vue pédagogique de rappeler tout d'abord les estimations d'erreurs obtenues. Dans les deux tableaux ci-dessous, nous présentons un résumé des taux de convergence entre la solution du problème (III.1) et $u_{\text{ext},1}^0$, $u_{\text{Ach},1}^\infty$, u^1 , $u_{\text{Ach},2}^\infty$, u^2 , $\mathcal{U}_{\text{exp}}^1$, $\mathcal{U}_{\text{exp}}^2$, Υ_{imp}^1 les solutions respectives des problèmes aux limites (III.3), (III.53), (III.79), (III.99), (III.102), (III.109), (III.123) et (III.125).

L'erreur	$u_\varepsilon - u_{\text{ext},1}^0$	$u_\varepsilon - u_{\text{Ach},1}^\infty$	$u_\varepsilon - u_{\text{Ach},2}^\infty$
$H^1(\Omega_\varepsilon)$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\varepsilon^{\frac{3}{2}}$	$e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$
$L^2(\Omega_0)$	ε	ε^2	$\sqrt{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$

Tableau VI.2 – Erreurs théoriques en normes $L^2(\Omega_0)$ et $H^1(\Omega_\varepsilon)$ pour l'extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille et les approximations couches limites d'ordres 1 et 2.

L'erreur	$u_\varepsilon - u^1$	$u_\varepsilon - u^2$	$u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^1$	$u_\varepsilon - \mathcal{U}_{\text{exp}}^2$	$u_\varepsilon - \Upsilon_{\text{imp}}^1$	$\mathcal{U}_{\text{exp}}^1 - \Upsilon_{\text{imp}}^1$
$H^1(\Omega_0)$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\varepsilon^{\frac{3}{2}}$	$e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\sqrt{\varepsilon}$
$L^2(\Omega_0)$	$\varepsilon^{\frac{3}{2}}$	$\varepsilon^{\frac{3}{2}}$	ε^2	$\sqrt{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$	ε	ε

Tableau VI.3 – Erreurs théoriques en normes $L^2(\Omega_0)$ et $H^1(\Omega_0)$ pour les lois de paroi moyennées d'ordres 1 et 2, les lois de paroi explicites d'ordres 1 et 2, la loi de paroi implicite d'ordre 1.

Afin de confirmer ces estimations d'erreur théoriques présentées dans le tableau ci-dessus, nous nous sommes intéressés dans la suite de cette section à évaluer les erreurs par la méthode des éléments finis en normes $L^2(\Omega_0)$ et $H^1(\Omega_0)$ entre u_ε^h et $u_{\text{ext},1}^{0,h}$, $u_{\text{Ach},1}^{\infty,h}$, $u_{\text{Ach},2}^{\infty,h}$, $u^{1,h}$, $u^{2,h}$, $\mathcal{U}_{\text{exp}}^{1,h}$, $\mathcal{U}_{\text{exp}}^{2,h}$ et $\Upsilon_{\text{imp}}^{1,h}$ (respectivement).

Dans la suite, afin de simplifier la présentation, nous notons v une approximation quelconque de la solution exacte u_ε et nous désignons par v_h l'approximation numérique de v . D'autre part,

nous nous restreignons au domaine lisse Ω_0 et nous posons $e_h = C \varepsilon^m$ les ordres de convergence numériques. Alors, en vertu du lemme de Aubin-Nitsche dans un domaine non rugueux (voir lemme 15) et par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^h - v_h\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq \|u_\varepsilon^h - u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} + \|u_\varepsilon - v\|_{L^2(\Omega_0)} + \|v - v_h\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\leq C (h^{k+1} + \varepsilon^m + h^{k+1}) \leq C (2\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^m) \leq C\varepsilon^{\min(k+1, m)}, \end{aligned} \quad (\text{VI.57})$$

où k est le degré de la méthode des éléments finis. Par le même jeu d'inégalités, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^h - v_h\|_{H^1(\Omega_0)} &\leq \|u_\varepsilon^h - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} + \|u_\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega_0)} + \|v - v_h\|_{H^1(\Omega_0)} \\ &\leq C (h^k + \varepsilon^m + h^k) \leq C (2\varepsilon^k + \varepsilon^m) \leq C\varepsilon^{\min(k, m)}. \end{aligned} \quad (\text{VI.58})$$

Il est assez clair que si le degré de la méthode des éléments finis est $k = 2$, alors pour les normes $L^2(\Omega_0)$ et $H^1(\Omega_0)$, les erreurs $u_\varepsilon^h - v_h$ et $u_\varepsilon - v$ ont le même taux de convergence.

6.2.1 Solution complète approchée dans le domaine rugueux

Dans un premier temps, nous calculons u_ε^h la solution approchée du problème aux limites (III.1) sur le domaine rugueux Ω_ε , pour différentes valeurs de ε dans $[0.1, 1]$. Nous discrétisons le problème modèle avec une source réelle (III.1) en utilisant les éléments finis \mathbb{P}_2 -Lagrange .

6.2.2 Solution microscopique du problème cellulaire

Dans un deuxième temps, nous calculons les solutions d'ordre 1 et 2 des problèmes cellulaires (III.20) et (III.96). Nous mettons l'accent sur le fait que le calcul est fait une seule fois pour toutes les approximations. Nous en tirons alors des informations nécessaires pour les correcteurs β_1 et β_2 et leurs moyennes $\overline{\beta_1}$ et $\overline{\beta_2}$. Les problèmes cellulaires sont calculés sur un maillage périodique contenant 56761 triangles et 28819 sommets correspondants à un diamètre maximal de maille $h = 0.111378$. Avec le choix spécifique (VI.53) du bord P^0 , nous obtenons numériquement les moyennes suivantes : $\overline{\beta_1} = 0.432096$ et $\overline{\beta_2} = -0.297993$ (comme dans [27]).

6.2.3 Tests numériques

Après simulations avec toutes les données ci-dessus, nous présentons dans les tableaux ci-dessous les ordres de convergence numérique que nous avons obtenus.

$\ e_h\ _{\{\cdot\}}$	$u_\varepsilon^h - u_{\text{ext},1}^{0,h}$	$u_\varepsilon^h - u_{\text{Ach},1}^{\infty,h}$	$u_\varepsilon^h - u_{\text{Ach},2}^{\infty,h}$
$H^1(\Omega_0)$	$\varepsilon^{0.85}$	$\varepsilon^{1.62}$	$\varepsilon^{4.6}$
$L^2(\Omega_0)$	$\varepsilon^{1.1}$	$\varepsilon^{1.89}$	$\varepsilon^{4.4}$
$H^1(\Omega_\varepsilon)$	$\varepsilon^{0.78}$	$\varepsilon^{1.46}$	$\varepsilon^{4.8}$
$L^2(\Omega_\varepsilon)$	$\varepsilon^{1.36}$	$\varepsilon^{2.11}$	$\varepsilon^{5.2}$

Tableau VI.4 – Estimations d’erreurs en normes $L^2(\Omega_0)$ et $H^1(\Omega_\varepsilon)$ pour l’extension d’ordre 1 du profil de Poiseuille approchée et les approximations couches limites approchées d’ordres 1 et 2.

$\ e_h\ _{\{\cdot\}}$	$u_\varepsilon^h - u^{1,h}$	$u_\varepsilon^h - u^{2,h}$	$u_\varepsilon^h - \mathcal{U}_{\text{exp}}^{1,h}$	$u_\varepsilon^h - \mathcal{U}_{\text{exp}}^{2,h}$	$u_\varepsilon^h - \Upsilon_{\text{imp}}^{1,h}$	$\mathcal{U}_{\text{exp}}^{1,h} - \Upsilon_{\text{imp}}^{1,h}$
$H^1(\Omega_0)$	$\varepsilon^{0.71}$	$\varepsilon^{0.65}$	$\varepsilon^{1.56}$	$\varepsilon^{4.4}$	$\varepsilon^{1.12}$	$\varepsilon^{0.58}$
$L^2(\Omega_0)$	$\varepsilon^{1.57}$	$\varepsilon^{1.51}$	$\varepsilon^{1.91}$	$\varepsilon^{4.6}$	$\varepsilon^{1.63}$	$\varepsilon^{1.01}$

Tableau VI.5 – Estimations d’erreurs en normes $L^2(\Omega_0)$ et $H^1(\Omega_0)$ pour les lois de paroi moyennées approchées d’ordres 1 et 2, les lois de paroi explicites approchées d’ordres 1 et 2, la loi de paroi implicite approchée d’ordre 1.

Nous illustrons dans les figures (VI.11)-(VI.10) toutes les erreurs en normes $L^2(\Omega_\varepsilon)$, $H^1(\Omega_\varepsilon)$, $L^2(\Omega_0)$ et $H^1(\Omega_0)$ en fonction de ε .

6.2.4 Interprétations des résultats

1. En vertu des estimations d’erreurs présentées dans le tableau VI.4, nous constatons que les ordres obtenus pour toutes les estimations sont validés sauf pour $u_{\text{Ach},2}^{\infty,h}$. Nous ne pouvons pas montrer la convergence exponentielle en normes L^2 et H^1 de la solution complète approchée dans le domaine rugueux par rapport à l’approximation couche limite d’ordre 2 par l’approche d’Achdou. Cela est dû au fait que son ordre est limité par les erreurs de l’espace d’approximation par éléments finis \mathbb{P}_2 (voir les inégalités (VI.57) et (VI.58)).
2. Les résultats du tableau VI.5 montrent que l’ordre de convergence de l’erreur est bien conservé sauf pour $\mathcal{U}_{\text{exp}}^{2,h}$ et $\Upsilon_{\text{imp}}^{1,h}$. Par le même argument pour $u_{\text{Ach},2}^{\infty,h}$, nous n’arrivons pas à obtenir un taux de convergence exponentielle en normes $L^2(\Omega_0)$ et $H^1(\Omega_0)$ pour u_ε^h par rapport à la loi de paroi explicite $\mathcal{U}_{\text{exp}}^{2,h}$ d’ordre 2, son ordre étant limité par les erreurs de l’espace d’approximation par éléments finis \mathbb{P}_2 .

D'autre part, nous sommes dans l'impossibilité d'illustrer numériquement et rigoureusement les ordres de convergence obtenus théoriquement pour la loi de paroi implicite $\Upsilon_{\text{imp}}^{1,h}$ d'ordre 1 (en ordres $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ et $\mathcal{O}(\varepsilon)$ respectivement pour les normes $H^1(\Omega_0)$ et $L^2(\Omega_0)$). Indiquons que ces derniers résultats sont obtenus en introduisant la loi de paroi explicite d'ordre 1 (voir la relation (III.128)). Néanmoins, nous constatons également que, conformément aux estimations données par la théorie (voir inégalités (III.139) et (III.148)), la convergence est prouvée numériquement entre la loi de paroi explicite d'ordre 1 et la loi de paroi implicite d'ordre 1 en normes $H^1(\Omega_0)$ et $L^2(\Omega_0)$.

3. Nous observons par ailleurs que la loi de paroi implicite d'ordre 1 donne de moins bons résultats que la loi de paroi explicite d'ordre 1. Cette dernière contient l'information exacte des correcteurs couches limites sur l'interface γ^0 , par contre la loi de paroi implicite introduit une information microscopique oscillante qui nécessite seulement la connaissance de la trace du problème cellule sur la frontière fictive.
4. Nous avons vérifié numériquement que la loi moyennée d'ordre 2 donne un ordre de convergence presque inférieur à celui de la loi moyennée d'ordre 1. Il est assez clair que la loi de paroi d'ordre 2 ne fournit pas une meilleure approximation que celle d'ordre 1 (dû au comportement des correcteurs β_1 et β_2 dans l'expression (III.107)). Bien entendu, nous pouvons dire que les estimations obtenues dans les propositions 22 et 27 sont effectivement optimales. Nous confirmons les résultats déjà obtenus dans [5, 8]. En effet, Y. Achdou et al. avaient constaté numériquement que la loi de paroi d'ordre 2 n'apportait pas une amélioration claire des résultats.
5. Nous n'avons pu apporter de meilleures estimations pour les lois de paroi moyennées d'ordre 1 et 2 par rapport à $u_{\text{ext},1}^{0,h}$ en norme $H^1(\Omega_0)$ (en ordre $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$). Malgré ce résultat assez inattendu pour les lois de paroi u^1 et u^2 , nous avons des taux de convergence satisfaisants en norme $L^2(\Omega_0)$.
6. Nous mettons aussi en évidence la pertinence de notre nouvelle loi de paroi implicite approchée d'ordre 1 par rapport à l'extension d'ordre 1 par le développement de Taylor du profil de Poiseuille approchée. La loi de paroi implicite $\Upsilon_{\text{imp}}^{1,h}$ n'apparaît pas très bonne. En effet, en comparant avec la solution $u_{\text{ext},1}^{0,h}$ représentée dans le tableau VI.4, nous constatons que l'erreur est de l'ordre de $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ en norme $H^1(\Omega_0)$, d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en norme $L^2(\Omega_0)$. Ce résultat vient du fait que l'erreur théorique de $u_\varepsilon - u^1$ est de l'ordre $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ en norme $H^1(\Omega_0)$.
7. Enfin, au vu de l'expression (III.111), la loi de paroi explicite d'ordre 1 a le même comportement que l'approximation couche limite $u_{\text{Ach},1}^\infty$ d'ordre 1 en norme $H^1(\Omega_0)$ et $L^2(\Omega_0)$.

De ce fait, les résultats numériques présentés dans les tableaux VI.4 et VI.5 suggèrent que les estimations obtenues dans les propositions 20, 21 28 et 29 sont optimales.

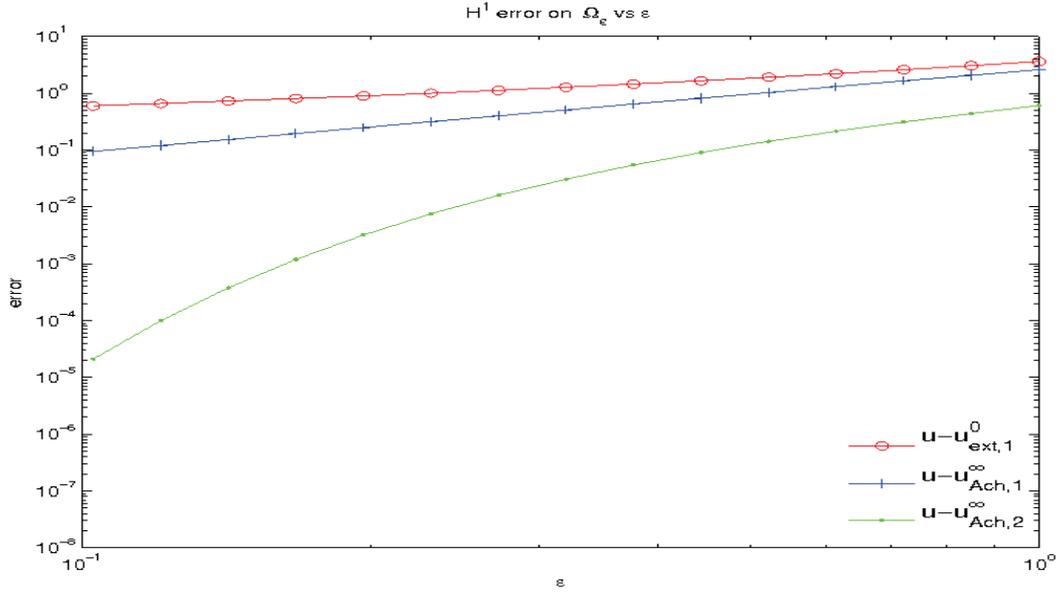


Figure VI.9 – Erreurs en norme $H^1(\Omega_\epsilon)$ en fonction de ϵ

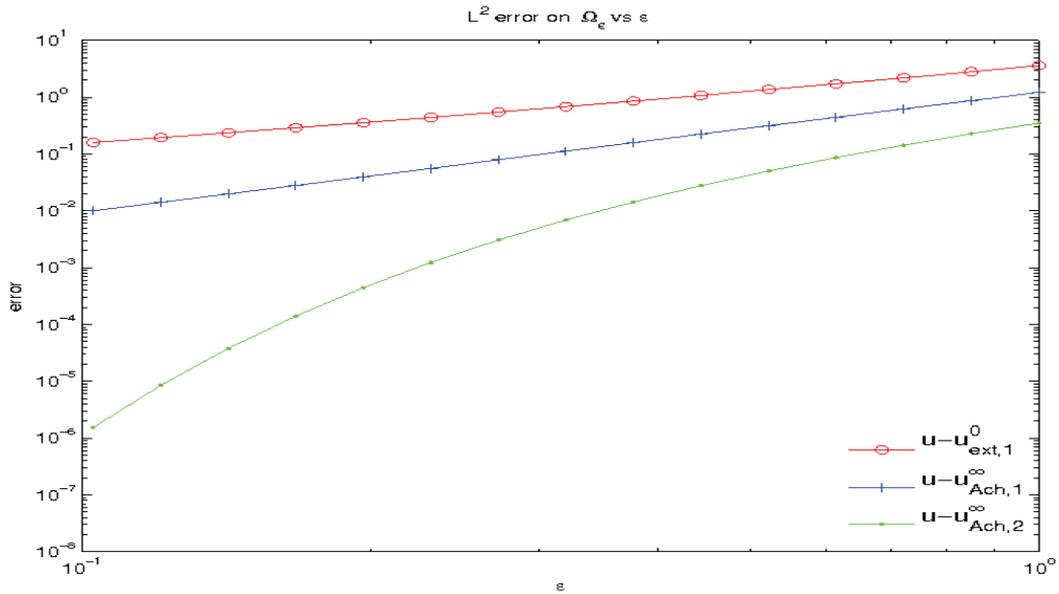


Figure VI.10 – Erreurs en norme $L^2(\Omega_\epsilon)$ en fonction de ϵ

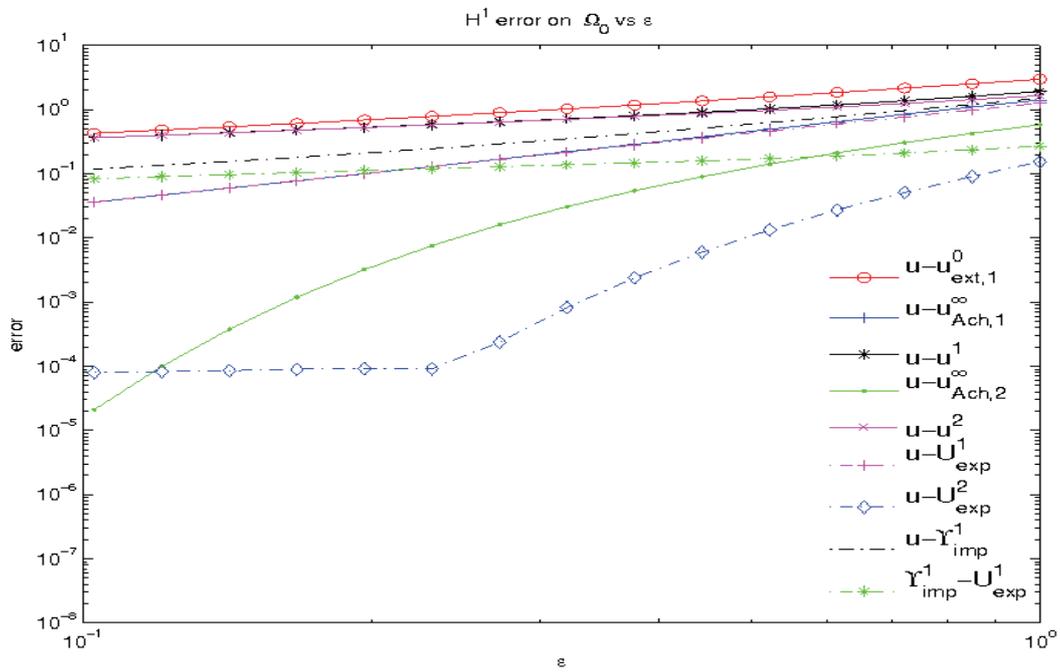


Figure VI.11 – Erreurs en norme $H^1(\Omega_0)$ en fonction de ε

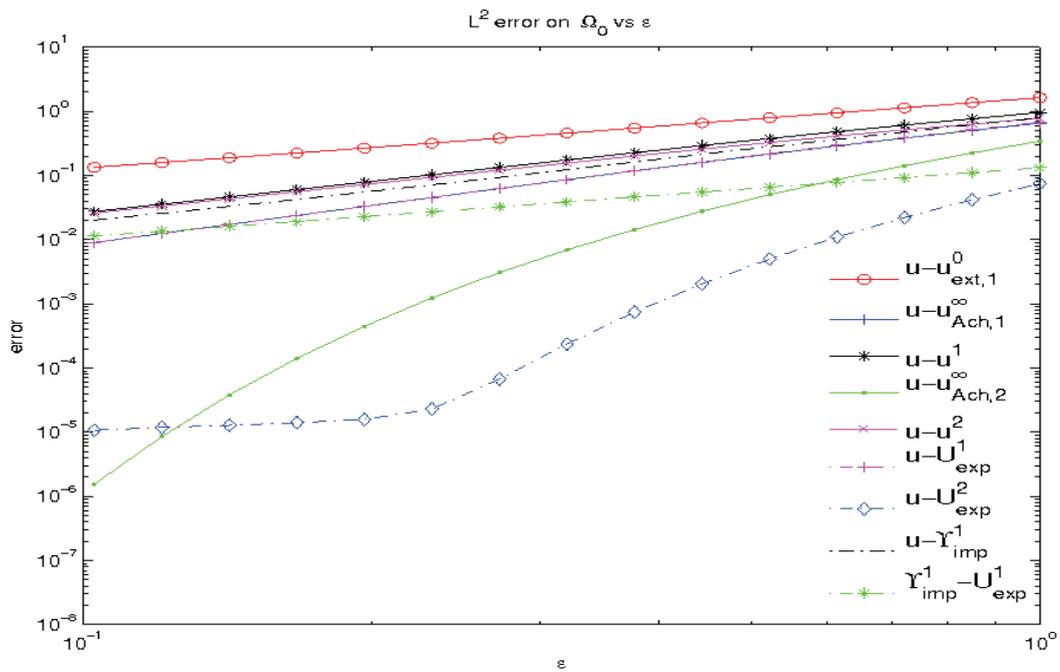


Figure VI.12 – Erreurs en norme $L^2(\Omega_0)$ en fonction de ε

6.3 Illustration numérique des estimations d'erreur du chapitre VI

Afin de valider le schéma d'éléments finis dans un domaine rugueux que nous avons présenté dans ce dernier chapitre ainsi que toutes les estimations associées ((VI.15), (VI.16) et (VI.47)), nous proposons une série de tests pour exploiter les performances des résultats obtenus.

6.3.1 Calcul de la solution exacte

Pour pouvoir illustrer les estimations (VI.15) et (VI.16), nous avons besoin de la solution « exacte numérique ». Pour cela, nous utilisons un maillage très fin sur lequel nous obtenons une solution approchée qui sera considérée comme solution exacte. Dans le tableau VI.6, nous donnons les statistiques des maillages utilisés pour le calcul de u_ε . Nous précisons que les calculs ont été effectués sur le cluster MAGI⁴ sur la partition SMP (noeuds dédiés au calcul parallèle via OpenMP (partition SMP du job scheduler)). D'autre part, nous signalons que les calculs sur les noeuds à grande mémoire ont été faits une seule fois pour toutes les simulations de cette sous-section. Signalons que les calculs deviennent lourds en mémoire avec des éléments \mathbb{P}_2 -Lagrange à partir d'une certaine discrétisation.

ε	n^ε	n_v	n_t
1	700	134 783	267 720
0.85	711	145 759	289 602
0.7225	826	221 195	440 112
0.614125	629	146 899	292 012
0.522006	853	304 588	606 678
0.443705	596	181 440	361 072
0.37715	606	206 107	410 298
0.320577	560	204 779	407 702
0.272491	569	243 872	485 760
0.231617	636	362 527	722 704
0.196874	529	291 780	581 478
0.167343	538	358 955	715 640
0.142242	486	337 453	672 692
0.120905	494	397 975	793 504
0.10277	251	118 048	234 738

Tableau VI.6 – Maillage raffiné du domaine Ω_ε pour le calcul de la solution exacte

n^ε représente le nombre de sommets sur la frontière fictive de la cellule rugueuse (voir (VI.54) tel que $\alpha = 0.2$), n_v désigne le nombre de sommets du maillage dans Ω_ε et n_t est le nombre de

4. <http://www.univ-paris13.fr/calcul/wiki/index.php?title=Accueil>

triangles dans Ω_ε .

6.3.2 Tests numériques

Le tableau VI.7 présente l'erreur $u_\varepsilon - u_\varepsilon^h$ en normes $L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $H^1(\Omega_\varepsilon)$. L'ordre de convergence de l'erreur entre la solution exacte u_ε et sa solution approchée u_ε^h par la méthode des éléments finis est plus rapide lorsque la triangulation est raffinée (ou autrement dit lorsque ζ augmente). Une version du code source adaptée à tous les tests présentés ci-dessous est disponible en ligne ⁵.

L'erreur	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0.001$
$\ u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\ _{L^2(\Omega_\varepsilon)}$	$\varepsilon^{1.8375}$	$\varepsilon^{1.6065}$	$\varepsilon^{1.39}$
$\ u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\ _{H^1(\Omega_\varepsilon)}$	$\varepsilon^{1.0028}$	$\varepsilon^{0.845}$	$\varepsilon^{0.675}$

Tableau VI.7 – Erreur $u_\varepsilon - u_\varepsilon^h$ en normes $L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $H^1(\Omega_\varepsilon)$ en fonction de ζ .

À titre d'illustration, les simulations présentées dans le tableau VI.7 ont été reproduites pour une solution approchée u_ε^h dans un maillage assez fin tel que le nombre de sommets sur la frontière fictive de la cellule rugueuse est défini comme suit $n^\varepsilon = \frac{90}{\varepsilon\zeta}$, où $\varepsilon \in [0.1, 1]$. Nous présentons dans les figures (VI.13)-(VI.24) toutes les erreurs $u_\varepsilon - u_\varepsilon^h$ en normes $L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $H^1(\Omega_\varepsilon)$, ainsi qu'en échelle logarithmique, en fonction de ε , pour différentes valeurs de ζ .

6.3.3 Interprétations des résultats

Nous terminons cette partie consacrée aux interprétations des résultats numériques. Comme il est souligné dans la remarque 19, une comparaison des performances des résultats obtenus par le schéma des méthodes éléments finis dans un domaine rugueux (présenté dans la section 3 de ce chapitre) par rapport aux résultats obtenus en utilisant l'approximation couche limite d'ordre 1 a été reformulé.

Nous constatons que les simulations numériques présentées dans le tableau VI.7 indiquent en particulier, que pour une discrétisation h en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (voir inégalité (VI.56)), le taux de convergence est à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Bien entendu, nous pouvons dire que les estimations obtenues théoriquement par analyse asymptotique sont effectivement optimales et plus précises.

D'autre part, ceci confirme que les estimations théoriques par le schéma des méthodes éléments

5. <http://www.math.univ-paris13.fr/~bey/regularity.edp>

finis dans un domaine rugueux (voir proposition 43) n'apportent pas de meilleures estimations par rapport à l'extension d'ordre 1 du profil de Poiseuille approchée $u_{\text{ext},1}^{0,h}$ en norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$, (voir proposition 47). En effet, nous observons que nous avons un taux de convergence assez grand en ordre $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ pour la norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Figures illustrant $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$

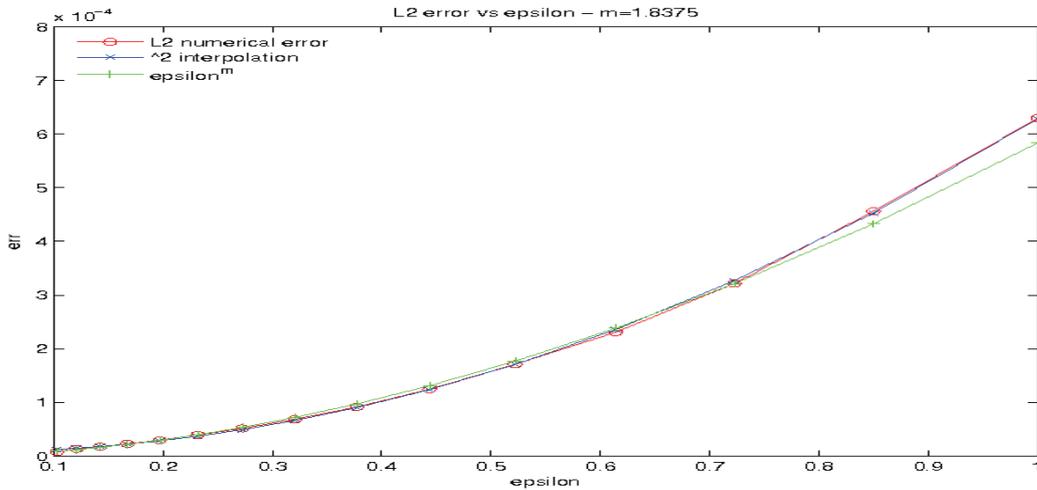


Figure VI.13 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.2$

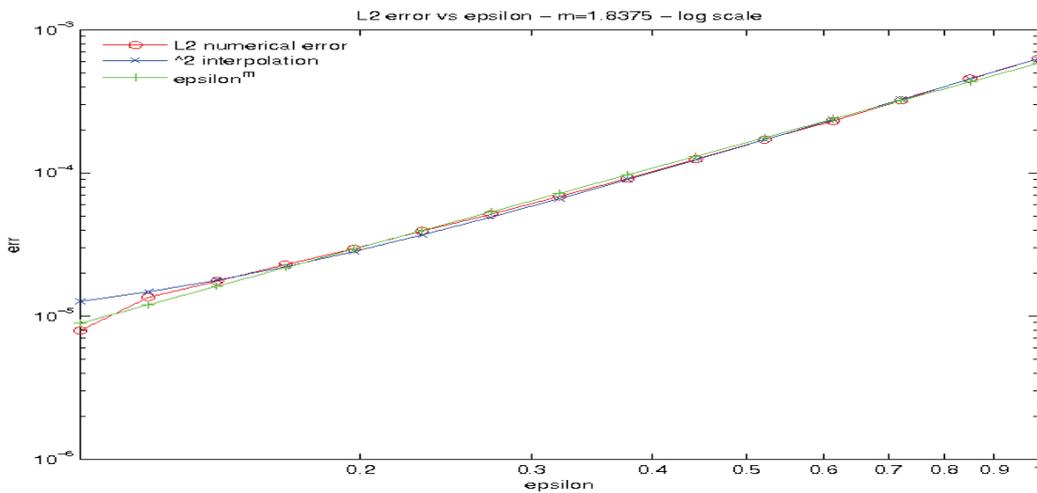


Figure VI.14 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ en échelle logarithmique en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.2$

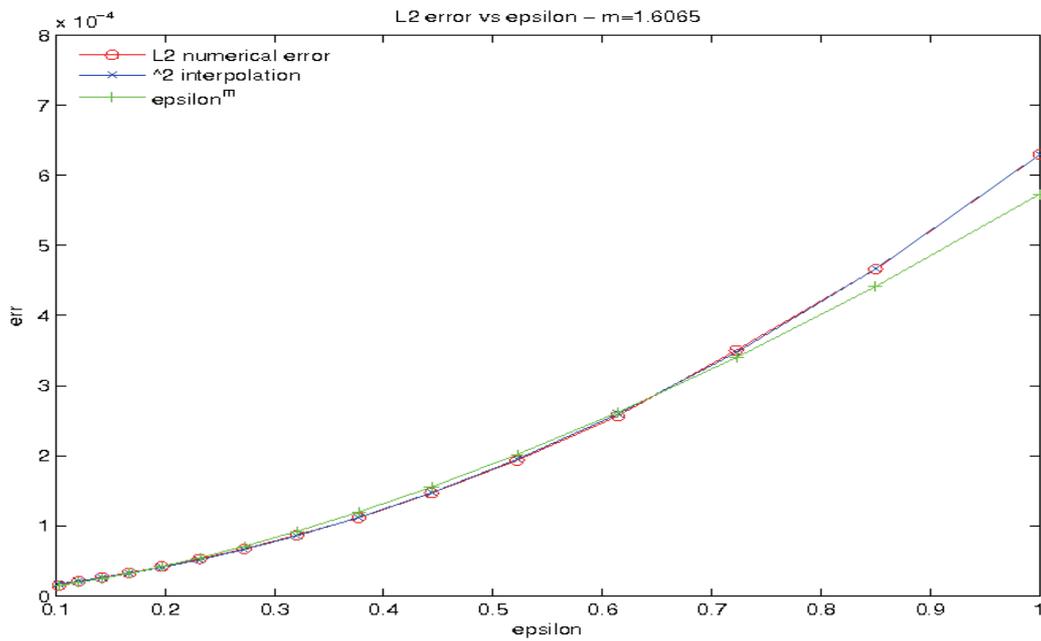


Figure VI.15 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.1$

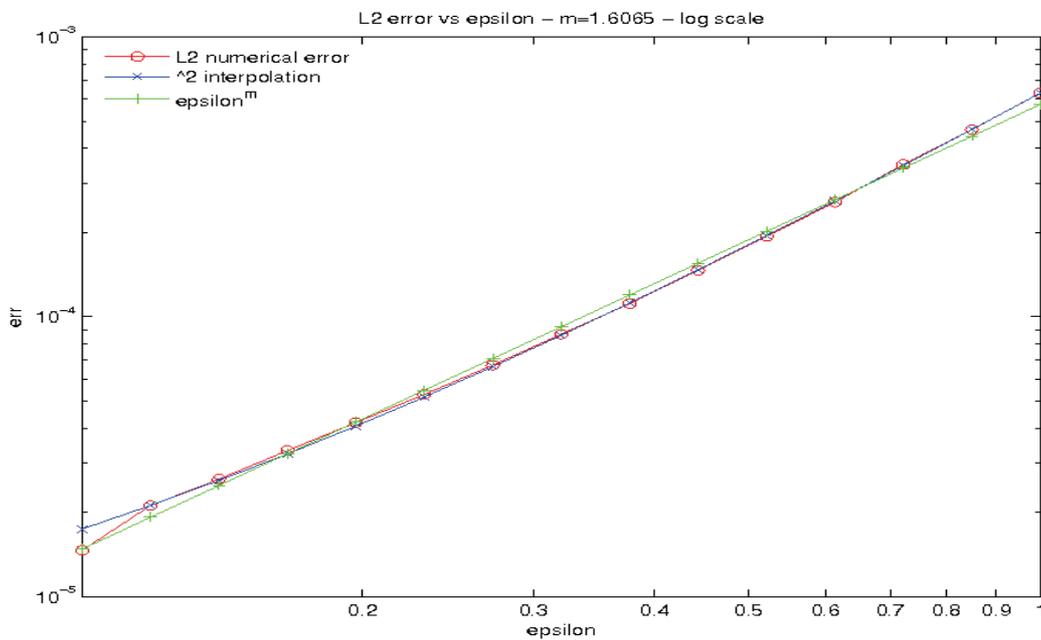


Figure VI.16 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ en échelle logarithmique en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.1$

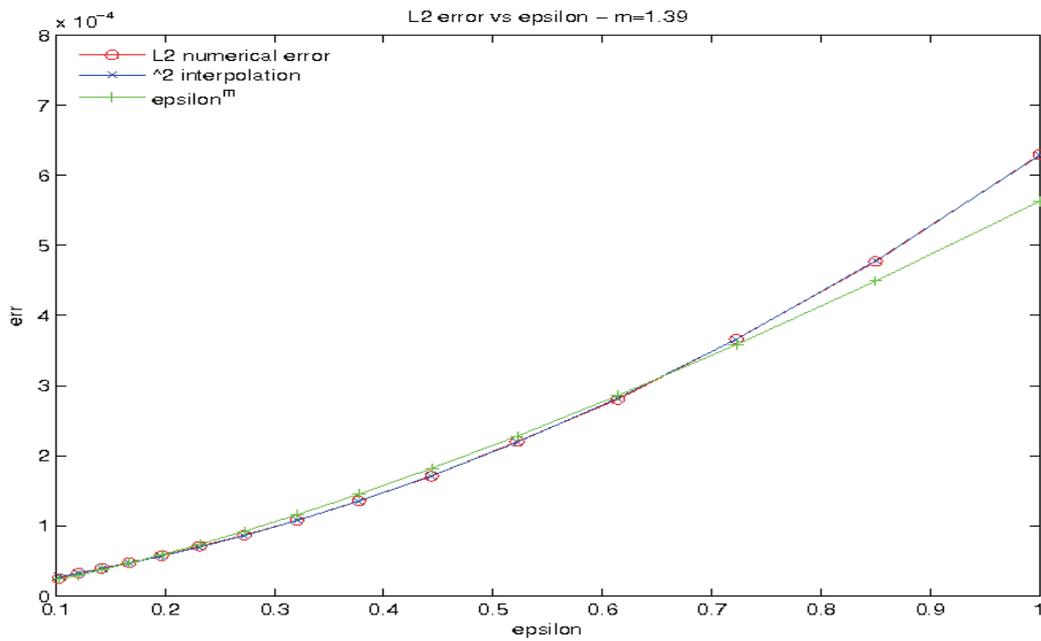


Figure VI.17 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.001$

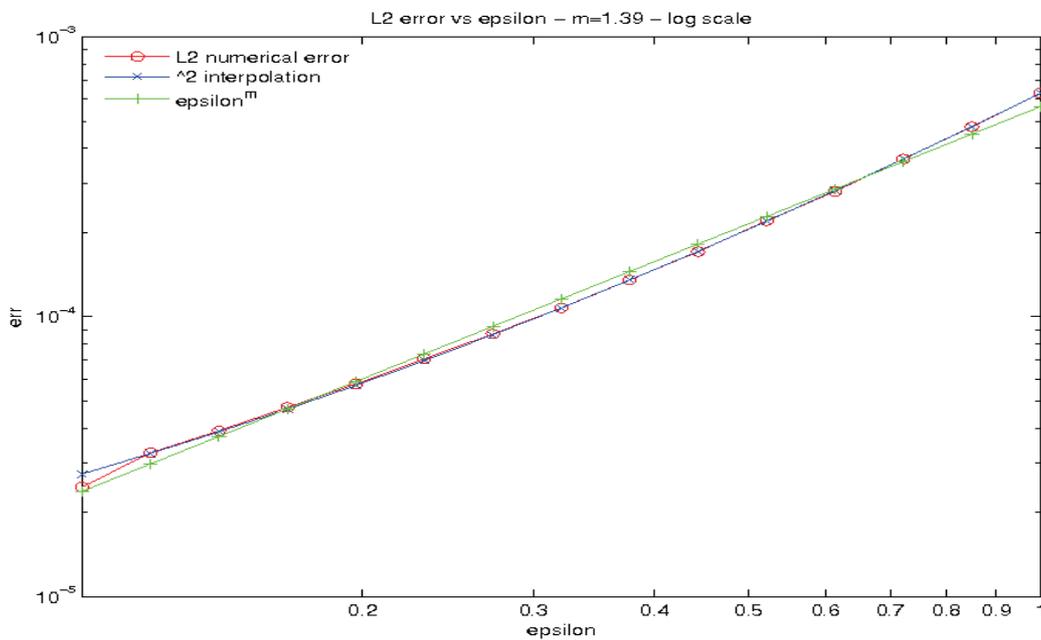


Figure VI.18 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ en échelle logarithmique en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.001$

Figures illustrant $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$

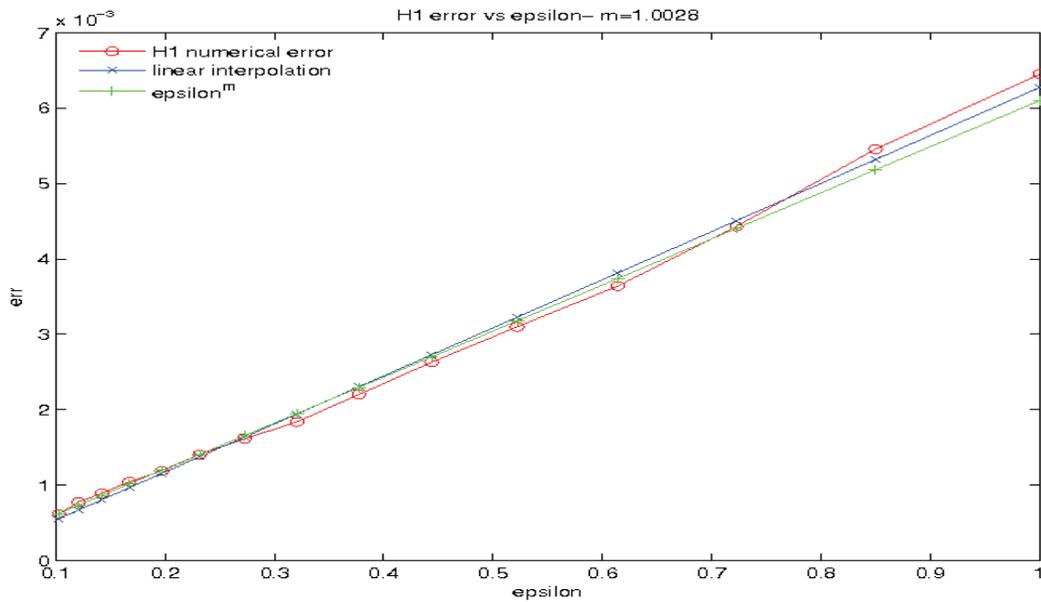


Figure VI.19 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.2$

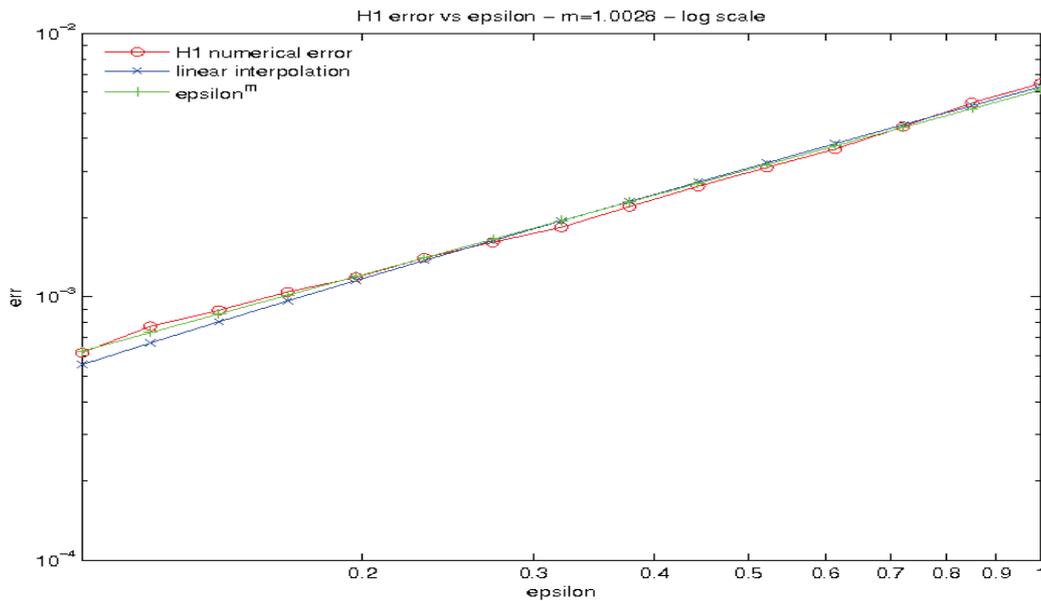


Figure VI.20 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ en échelle logarithmique en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.2$

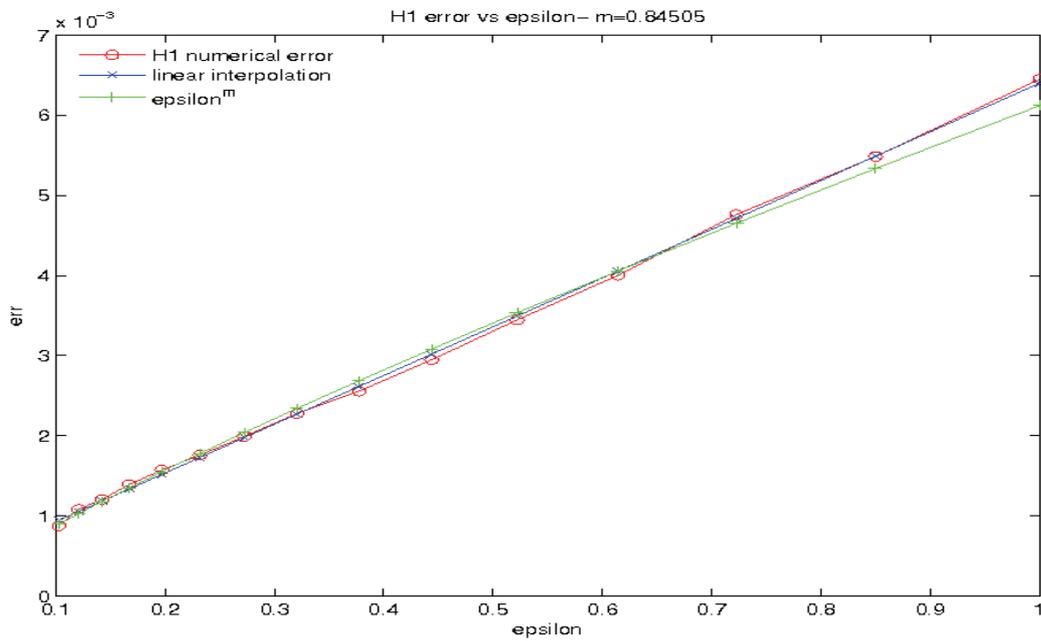


Figure VI.21 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.1$

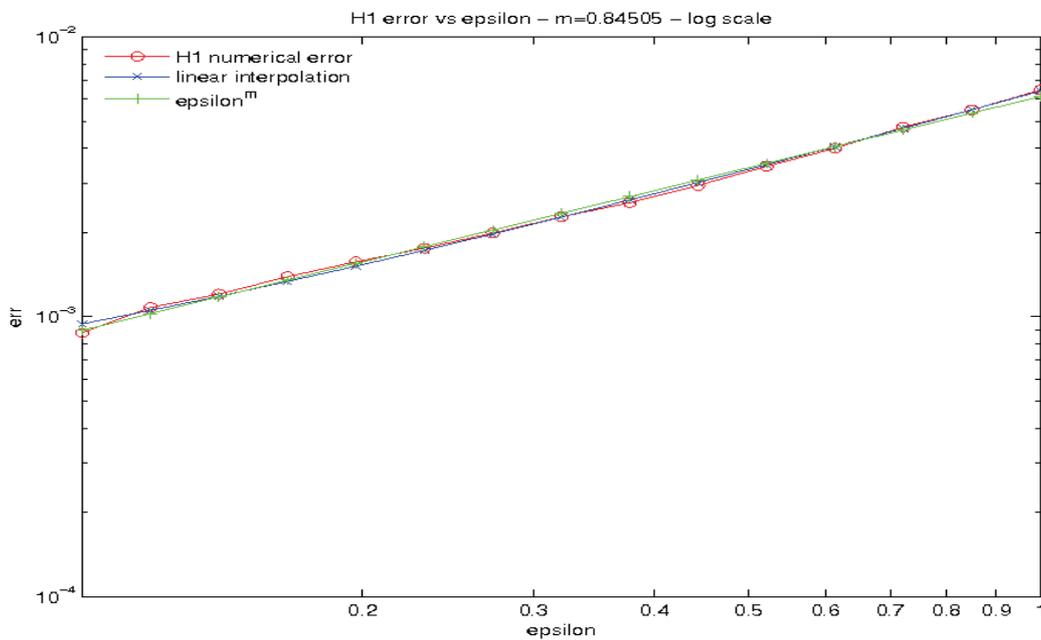


Figure VI.22 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ en échelle logarithmique en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.1$

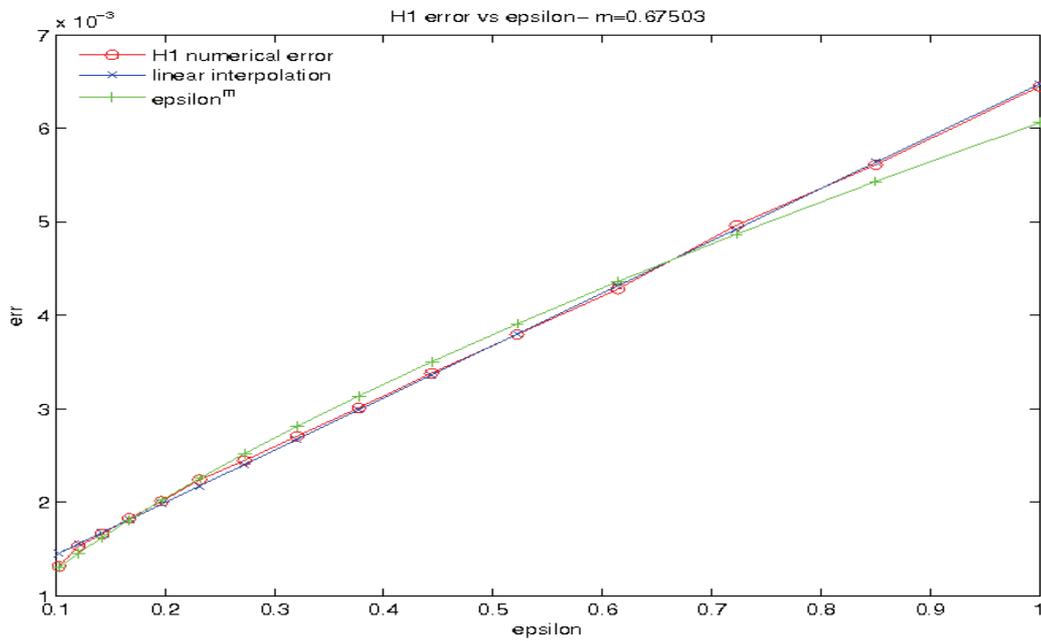


Figure VI.23 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.001$

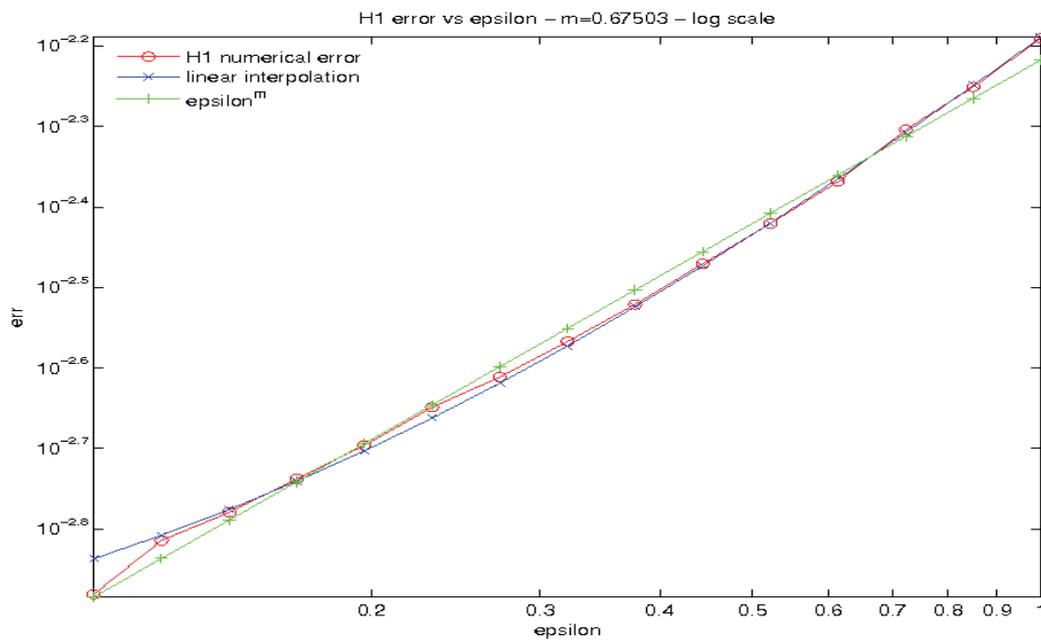


Figure VI.24 – Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ en échelle logarithmique en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.001$

7 Appendice

Cette annexe est composée de deux parties. Dans la première sous-section, nous présentons quelques résultats techniques utiles pour l'établissement des estimations d'erreurs de la solution microscopique cellulaire. Contrairement à cette première sous-section, nous proposons dans le deuxième paragraphe quelques rappels au sujet des éléments finis.

7.1 Résultats techniques

Preuve du lemme 17

Posons l'erreur $\mathcal{E}^R = \beta_1 - \beta_1^R$. Alors, \mathcal{E}^R est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{E}^R = 0 & \text{sur } Z_R \\ \mathcal{E}^R = 0 & \text{sur } P^0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2} = \frac{\partial \beta_1}{\partial y_2} & \text{sur } \Gamma_R \\ \mathcal{E}^R \text{ est périodique selon } y_1 & \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_r. \end{cases}$$

Par une simple soustraction, nous avons

$$\mathcal{E}^R(y_1, y_2) - \mathcal{E}^R(y_1, \tilde{\gamma}(y_1)) = \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^{y_2} \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(y_1, t) dt.$$

En tenant compte que l'erreur \mathcal{E}^R est nulle sur le bord P^0 , donc

$$|\mathcal{E}^R(y_1, y_2)| \leq \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^R \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(y_1, t) \right| dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\mathcal{E}^R(y_1, y_2)| \leq \sqrt{R+1} \left(\int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^R \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous intégrons sur Z_R , il suit

$$\begin{aligned} \int_{Z_R} |\mathcal{E}^R(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 &\leq (R+1) \int_{Z_R} \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^R \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt dy_1 dy_2 \\ &\leq (R+1)^2 \int_{Z_R} \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt dy_1. \end{aligned}$$

Bien entendu, après simplification, nous obtenons finalement

$$\left(\int_{Z_R} |\mathcal{E}^R(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (R+1) \left(\int_{Z_R} \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt dy_1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La preuve est complète.

Preuve du lemme 18

De même que précédemment, nous considérons l'erreur $\mathcal{E}^R = \beta_1 - \beta_1^R$. On peut alors écrire que :

$$\mathcal{E}^R(y_1, R) - \mathcal{E}^R(y_1, \tilde{\gamma}(y_1)) = \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^R \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(y_1, t) dt.$$

En vertu que l'erreur $\mathcal{E}^R = 0$ sur le bord P^0 , alors

$$|\mathcal{E}^R(y_1, R)| \leq \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^R \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(y_1, t) \right| dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$|\mathcal{E}^R(y_1, R)|^2 \leq (R+1) \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^R \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(y_1, t) \right|^2 dt.$$

Nous intégrons sur le bord de troncature Γ_R , nous avons

$$\int_0^L |\mathcal{E}^R(y_1, R)|^2 dy_1 \leq (R+1) \int_0^L \int_{\tilde{\gamma}(y_1)}^R \left| \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial x_2}(y_1, t) \right|^2 dy_1 dt.$$

Nous extrayons la racine carrée, nous obtenons

$$\left(\int_0^L |\mathcal{E}^R(y_1, R)|^2 dy_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{R+1} \left\| \nabla \mathcal{E}^R \right\|_{L^2(Z_R)}.$$

La preuve est complète.

Propriétés fondamentales du redressement de la cellule tronquée

Proposition 49. *Soit la matrice $G_R(z)$ telle que*

$$G_R(z) := \begin{pmatrix} g_R^{11}(z) & g_R^{12}(z) \\ g_R^{21}(z) & g_R^{22}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R - \tilde{\gamma}(z_1) & (z_2 - 1)\tilde{\gamma}'(z_1) \\ (z_2 - 1)\tilde{\gamma}'(z_1) & \frac{1}{R - \tilde{\gamma}(z_1)} \left[1 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 \right] \end{pmatrix}.$$

Alors, l'ensemble des valeurs propres de $G_R(z)$ est : $\text{Sp}(G_R(z)) = \{\lambda_{\min}(R), \lambda_{\max}(R)\}$. Où $\lambda_{\min}(R)$ présente la petite valeur propre de $G_R(z)$ et $\lambda_{\max}(R)$ est la grande valeur propre de $G_R(z)$ telles que

$$\lambda_{\min}(R) = \frac{b_R(z) - \sqrt{b_R(z) - 4 g_R^{11}(z) \left[g_R^{11}(z) + g_R^{11}(z) (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 - (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 \right]}}{2 g_R^{11}(z)},$$

$$\lambda_{\max}(R) = \frac{b_R(z) + \sqrt{b_R(z) - 4 g_R^{11}(z) \left[g_R^{11}(z) + g_R^{11}(z) (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 - (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 \right]}}{2 g_R^{11}(z)}$$

$$\text{et } b_R(z) = (g_R^{11}(z))^2 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 + 1.$$

Preuve. La métrique $G_R(z)$ est une matrice symétrique réelle définie positive, qui admet deux valeurs propres vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_{\min}(R) + \lambda_{\max}(R) = \text{Tr}(G_R(z)) = R - \tilde{\gamma}(z_1) + \frac{1}{R - \tilde{\gamma}(z_1)} \left[1 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 \right] \\ \lambda_{\min}(R) \lambda_{\max}(R) = \det(G_R(z)) = \left[1 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 \right]. \end{cases}$$

Ce qui donne après résolution

$$\lambda_{\min}(R) = \frac{b_R(z) - \sqrt{b_R(z) - 4 g_R^{11}(z) \left[g_R^{11}(z) + g_R^{11}(z) (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 - (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 \right]}}{2 g_R^{11}(z)},$$

$$\lambda_{\max}(R) = \frac{b_R(z) + \sqrt{b_R(z) - 4 g_R^{11}(z) \left[g_R^{11}(z) + g_R^{11}(z) (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 - (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 \right]}}{2 g_R^{11}(z)}$$

$$\text{avec } b_R(z) = (g_R^{11}(z))^2 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 + 1.$$

La preuve est complète. □

Proposition 50. *Il existe deux constantes α_R et M_R strictement positives telles que :*

$$M_R \|w\|^2 \geq \langle G_R(z) w, w \rangle \geq \alpha_R \|w\|^2, \quad \forall w \in C_c^0([0, 2\pi] \times [0, 1]).$$

Remarque 20. *La constante d'ellipticité α_R est donnée par $\alpha_R := \frac{1}{C_1 R}$ telle que C_1 est une constante strictement positive indépendante de R . En fait, α_R est un minorant de la petite valeur propre de $G_R(z)$, (Voir Proposition 49). On peut prendre $M_R := C_1 R$ où $C_1 > 0$. C'est un majorant de la grande valeur propre de $G_R(z)$.*

Preuve. La preuve est triviale. En effet, de la proposition 49, nous déduisons que

$$\lambda_{\max}(R) \|w\|^2 \geq \langle G_R(z) w, w \rangle \geq \lambda_{\min}(R) \|w\|^2.$$

Par un simple calcul nous pouvons majorer la grande valeur propre de $G_R(z)$ telle que

$$\lambda_{\max}(R) = \frac{b_R(z) + \sqrt{b_R(z) - 4 g_R^{11}(z) [g_R^{11}(z) + g_R^{11}(z) (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 - (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2]}}{2 g_R^{11}(z)} \leq C_1 R,$$

où nous rappelons que $b_R(z) = (g_R^{11}(z))^2 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 + 1$ et $g_R^{11}(z) = R - \tilde{\gamma}(z_1)$.

Signalons que C_1 présente une constante strictement positive indépendante de R .

En se servant de la relation suivante $\lambda_{\min}(R) \lambda_{\max}(R) = \det(G_R(z)) = [1 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2]$, il suit

$$\lambda_{\min}(R) = \frac{[1 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2]}{\lambda_{\max}(R)} \geq \frac{1}{\lambda_{\max}(R)} \geq \frac{1}{C_1 R}.$$

Si nous posons les quantités α_R et M_R telles que :

$$\alpha_R := \frac{1}{C_1 R} \quad \text{et} \quad M_R := C_1 R,$$

nous concluons donc que $M_R \|w\|^2 \geq \lambda_{\max}(R) \|w\|^2 \geq \langle G_R(z) w, w \rangle \geq \lambda_{\min}(R) \|w\|^2 \geq \alpha_R \|w\|^2$.
La preuve est complète. \square

Proposition 51. *Pour tout réel α strictement positif, nous avons :*

$$|\langle G_R(z) w_1, w_2 \rangle| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_1|^2 dy + \frac{M_R^2}{\alpha} \int |w_2|^2 dy, \quad \text{pour } w_1, w_2 \in C_c^0([0, 2\pi] \times [0, 1]).$$

Preuve. Soient $w_1, w_2 \in C_c^0([0, 2\pi] \times [0, 1])$. Par une simple majoration, nous avons

$$|\langle G_R(z) w_1, w_2 \rangle| \leq \max(\lambda_{\max}(R)) \int |w_1| |w_2| dy \leq M_R \int |w_1| |w_2| dy.$$

Nous considérons un réel $\alpha > 0$, alors nous avons l'inégalité de Cauchy suivante : $ab \leq \frac{\alpha}{4}a^2 + \frac{b^2}{\alpha}$, avec a et b deux réels positifs. Nous appliquons cette dernière inégalité, nous obtenons

$$|\langle G_R(z) w_1, w_2 \rangle| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_1|^2 dy + \frac{M_R^2}{\alpha} \int |w_2|^2 dy.$$

La preuve est complète. \square

Lemme 19 (Lemme technique). *Nous considérons le changement de variable ϕ (défini dans (VI.29) et illustré dans la figure VI.2), qui transforme la cellule tronquée Z_R en un rectangle $\tilde{Q} = [0, 2\pi] \times [0, 1]$.*

Si nous posons l'erreur $\mathcal{E}^R = \beta_1 - \beta_1^R$ et nous notons la fonction $\tilde{\mathcal{E}}(\phi(y)) = \mathcal{E}^R(y)$ pour tout $y \in Z_R$, alors il existe une constante C_F strictement positive indépendante de R telle que

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R}{\partial y_i \partial y_j} \right\|_{L^2(Z_R)} \leq C_F \left(\sum_{l,n=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_n \partial z_l} \right\|_{L^2(\tilde{Q})} + \sum_{l=1}^2 \left\| \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_l} \right\|_{L^2(\tilde{Q})} \right).$$

Preuve. En vertu du calcul déjà effectué dans la démonstration du théorème 21 pour l'établissement de la formulation variationnelle après redressement de la cellule tronquée Z_R , l'expression du gradient de l'erreur \mathcal{E}^R s'écrit explicitement comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_2}(\phi^{-1}(z)) = \frac{1}{R - \tilde{\gamma}(z_1)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2}(z) \\ \frac{\partial \mathcal{E}^R}{\partial y_1}(\phi^{-1}(z)) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1}(z) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2}(z) \cdot \frac{\tilde{\gamma}'(z_1)(1 - z_2)}{R - \tilde{\gamma}(z_1)}, \end{cases}$$

où ϕ^{-1} présente l'application inverse de ϕ . Par ailleurs, par des dérivées simples, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R}{\partial y_1 \partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1}(z) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2}(z) \cdot \frac{\tilde{\gamma}'(z_1)(1 - z_2)}{R - \tilde{\gamma}(z_1)} \right] \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1 \partial z_1} - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right) (z_2 - 1) \left[1 + \frac{1}{R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)} \right] \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1 \partial z_2} + \left[\frac{\tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)^2 (1 - z_2)^2}{R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)} \right] \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2 \partial z_2} \\ &\quad - \left[\tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{\tilde{\gamma}''\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right) (R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)) - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)^2}{R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)} \right] \frac{(1 - z_2)}{R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2} \end{aligned}$$

Bien entendu, nous avons aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R}{\partial y_2 \partial y_1} &= \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\frac{1}{R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2}(z) \right] \\ &= \left(\frac{1}{R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_1 \partial z_2} + \left(\frac{\tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)(z_2 - 1)}{R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2 \partial z_2} + \left(\frac{\tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)}{\left(R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)\right)^2} \right) \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R}{\partial y_2 \partial y_2} &= \frac{1}{\left(R - \tilde{\gamma}'\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right)\right)^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_2 \partial z_2}. \end{aligned}$$

Pour achever la preuve, il nous reste à regrouper toutes les dérivées obtenues. Alors, il existe une constante C_F strictement positive indépendante de R telle que

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{E}^R(y)}{\partial y_i \partial y_j} \right\|_{L^2(\mathbb{Z}_R)} \leq C_F \left(\sum_{l,n=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_n \partial z_l} \right\|_{L^2(\tilde{Q})} + \sum_{l=1}^2 \left\| \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z_l} \right\|_{L^2(\tilde{Q})} \right).$$

La preuve est complète. □

Propriétés du différentiel tangentiel de la métrique $G_R(z)$

Proposition 52. *Soit la métrique $\widehat{G}_R(z)$ telle que*

$$\begin{aligned} \widehat{G}_R(z) &:= \begin{pmatrix} D_1^h(g_R^{11}(z)) & D_1^h(g_R^{12}(z)) \\ D_1^h(g_R^{21}(z)) & D_1^h(g_R^{22}(z)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1^h(R - \tilde{\gamma}(z_1)) & D_1^h((z_2 - 1)\tilde{\gamma}'(z_1)) \\ D_1^h((z_2 - 1)\tilde{\gamma}'(z_1)) & D_1^h\left(\frac{1}{R - \tilde{\gamma}(z_1)} \left[1 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2\right]\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors, l'ensemble des valeurs propres de la métrique $\widehat{G}_R(z)$ est $\text{Sp}(\widehat{G}_R(z)) = \{\hat{\lambda}_{\min}(R), \hat{\lambda}_{\max}(R)\}$, où $\hat{\lambda}_{\min}(R)$ représente la petite valeur propre de $\widehat{G}_R(z)$ et $\hat{\lambda}_{\max}(R)$ est la grande valeur propre de $\widehat{G}_R(z)$ telles qu'elles sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_{\min}(R) = \frac{D_1^h(g_R^{11}(z)) + D_1^h(g_R^{22}(z)) - \sqrt{[(D_1^h(g_R^{11}(z)) - D_1^h(g_R^{22}(z))]^2 + [2D_1^h(g_R^{12}(z))]^2}}{2}, \\ \hat{\lambda}_{\max}(R) = \frac{D_1^h(g_R^{11}(z)) + D_1^h(g_R^{22}(z)) + \sqrt{[(D_1^h(g_R^{11}(z)) - D_1^h(g_R^{22}(z))]^2 + [2D_1^h(g_R^{12}(z))]^2}}{2}. \end{cases}$$

De plus, il existe une constante C_M strictement positive indépendante de R telle que

$$\max(\widehat{\lambda}_{\max}(R)) \leq C_M. \quad (\text{VI.59})$$

Preuve. Par la même méthodologie pour la métrique $G_R(z)$, il est assez clair que la métrique $\widehat{G}_R(z)$ est une matrice symétrique réelle définie positive. Alors, elle admet deux valeurs propres $\widehat{\lambda}_{\min}(R)$ et $\widehat{\lambda}_{\max}(R)$ vérifiant

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}_{\min}(R) + \widehat{\lambda}_{\max}(R) = \text{Tr}(\widehat{G}_R(z)) = D_1^h(g_R^{11}(z)) + D_1^h(g_R^{22}(z)) \\ \widehat{\lambda}_{\min}(R) \widehat{\lambda}_{\max}(R) = \det(\widehat{G}_R(z)) = D_1^h(g_R^{11}(z))D_1^h(g_R^{22}(z)) - (D_1^h(g_R^{12}(z)))^2. \end{cases}$$

Après résolution de ce dernier système, nous obtenons

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}_{\min}(R) = \frac{D_1^h(g_R^{11}(z)) + D_1^h(g_R^{22}(z)) - \sqrt{[(D_1^h(g_R^{11}(z)) - D_1^h(g_R^{22}(z)))]^2 + [2D_1^h(g_R^{12}(z))]^2}}{2}, \\ \widehat{\lambda}_{\max}(R) = \frac{D_1^h(g_R^{11}(z)) + D_1^h(g_R^{22}(z)) + \sqrt{[(D_1^h(g_R^{11}(z)) - D_1^h(g_R^{22}(z)))]^2 + [2D_1^h(g_R^{12}(z))]^2}}{2}. \end{cases}$$

Par une simple majoration de $\widehat{\lambda}_{\max}(R)$, la grande valeur propre de $\widehat{G}_R(z)$, il existe une constante C strictement positive indépendante de R telle que

$$\begin{aligned} |\widehat{\lambda}_{\max}(R)| &\leq \frac{|D_1^h(g_R^{11}(z)) + D_1^h(g_R^{22}(z))| + |(D_1^h(g_R^{11}(z)) - D_1^h(g_R^{22}(z)))| + |2D_1^h(g_R^{12}(z))|}{2} \\ &\leq (|(D_1^h(g_R^{11}(z))| + |D_1^h(g_R^{12}(z))| + |D_1^h(g_R^{22}(z))|) \leq C |D_1^h(g_R^{22}(z))|. \end{aligned}$$

Nous explicitons le différentiel tangentiel de la quantité $g_R^{22}(z)$, nous obtenons

$$D_1^h(g_R^{22}(z)) = \frac{-\tilde{\gamma}'(z_1) \left[1 + (\tilde{\gamma}'(z_1))^2 (z_2 - 1)^2 \right] - (R - \tilde{\gamma}(z_1)) \left[2 (\tilde{\gamma}''(z_1)) (\tilde{\gamma}'(z_1)) (z_2 - 1)^2 \right]}{(R - \tilde{\gamma}(z_1))^2}.$$

En regroupant ces deux dernières quantités, il est assez clair que pour tout réel $R \gg 1$, il existe une constante C_M strictement positive indépendante de R telle que

$$\max(\widehat{\lambda}_{\max}(R)) \leq C |D_1^h(g_R^{22}(z))| \leq C_M.$$

La preuve est complète. □

Proposition 53. *Nous considérons w_3, w_4 et $w_5 \in C_c^0([0, 2\pi] \times [0, 1])$. Pour tout réel α strictement positif, il existe une constante C_M strictement positive indépendante de R telle que*

$$\left| \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_5|^2 dy + \frac{1}{2} \int |w_4|^2 dy + (C_M)^2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \int |w_3|^2 dy. \quad (\text{VI.60})$$

Preuve. Etant donnés w_3, w_4 et $w_5 \in C_c^0([0, 2\pi] \times [0, 1])$. Par une inégalité triangulaire, il suit

$$\left| \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \left| \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_4 \rangle \right| + \left| \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_5 \rangle \right|.$$

Par une simple majoration, nous obtenons

$$\left| \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_4 \rangle \right| \leq \max(\widehat{\lambda}_{\max}(R)) \int |w_3| |w_4| dy.$$

De même, nous avons aussi

$$\left| \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_5 \rangle \right| \leq \max(\widehat{\lambda}_{\max}(R)) \int |w_3| |w_5| dy.$$

En regroupant ces deux dernières inégalités ainsi qu'en vertu de l'inégalité (VI.59), il vient

$$\left| \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \max(\widehat{\lambda}_{\max}(R)) \int |w_3| (|w_4| + |w_5|) dy \leq C_M \int |w_3| (|w_4| + |w_5|) dy.$$

En utilisant le fait que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ avec a et b deux réels positifs, ainsi que l'inégalité de Cauchy $ab \leq \frac{\alpha}{4} a^2 + \frac{1}{\alpha} b^2$ avec α un réel strictement positif, il suit

$$\left| \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_5|^2 dy + \frac{(C_M)^2}{\alpha} \int |w_3|^2 dy + \frac{1}{2} \int |w_4|^2 dy + \frac{(C_M)^2}{2} \int |w_3|^2 dy.$$

Finalement, après simplification, nous obtenons

$$\left| \langle \widehat{G_R(z)} w_3, w_4 + w_5 \rangle \right| \leq \frac{\alpha}{4} \int |w_5|^2 dy + \frac{1}{2} \int |w_4|^2 dy + (C_M)^2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \int |w_3|^2 dy.$$

La preuve est complète. □

7.2 Quelques rappels sur les éléments finis

Cette deuxième partie de l'annexe présente quelques résultats classiques et généraux sur la méthode des éléments finis ainsi que des notions de la méthode de Galerkin, qui sont utilisées dans nos études ou nécessaires à une bonne compréhension de celles-ci. Pour les démonstrations et pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à Braess [24], Ciarlet [34], Ern [39], Johnson [53] et Raviart [66].

7.2.1 Le Théorème de Banach-Nečas-Babuška (BNB)

Nous considérons le problème modèle (VI.1) présenté dans la première section préliminaire de ce dernier chapitre et son approximation (VI.2) par la méthode de Galerkin. On dit que le problème (VI.1) est bien posé s'il admet une et une seule solution. Le théorème BNB est le résultat fondamental pour analyser le caractère bien posé du problème (VI.1). Contrairement au lemme de Lax-Milgram qui ne fournit que des conditions suffisantes, le théorème BNB fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème modèle soit bien posé.

Théorème 22 (Banach-Nečas-Babuška). *Soient V et W deux espaces de Hilbert, $a \in \mathcal{L}(W \times V, \mathbb{R})$ et $l \in V'$. Alors, le problème (VI.1) est bien posé si et seulement si :*

$$\exists \alpha > 0, \quad \text{telle que} \quad \inf_{u \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_W \|v\|_V} \geq \alpha, \quad (\text{BNB1})$$

$$\forall v \in V, \quad (\forall u \in W, a(u, v) = 0) \implies (v = 0). \quad (\text{BNB2})$$

La terminologie BNB provient du fait que du point de vue de l'analyse fonctionnelle, le théorème 22 est une simple reformulation du théorème de l'image fermée et du théorème de l'application ouverte dus à Banach. Le théorème 22 a été énoncé sous cette forme par Nečas en 1962 [62], son importance fondamentale dans le contexte de la méthode des éléments finis a été souligné par Babuška en 1972 [16].

7.2.2 Analyse d'erreur

Nous supposons que ces deux problèmes (VI.1) et (VI.2) sont bien posés, c'est-à-dire que :

- (i) La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est dans $\mathcal{L}(W \times V, \mathbb{R})$ et elle satisfait les conditions inf-sup (BNB 1) et (BNB 2) ;
- (ii) La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est dans $\mathcal{L}(W_h \times V_h, \mathbb{R})$, elle satisfait la condition inf-sup discrète (BNB1)_h ci-dessous et $\dim V_h = \dim W_h$.

$$\exists \alpha_h > 0, \quad \text{telle que} \quad \inf_{u_h \in W_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{a_h(u_h, v_h)}{\|u_h\|_W \|v_h\|_V} \geq \alpha_h. \quad (\text{BNB1})_h$$

Lemme 20 (Orthogonalité de Galerkin). *Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons la relation dite d'orthogonalité de Galerkin : Pour tout $v_h \in V_h$, $a(u - u_h, v_h) = 0$.*

Nous supposons désormais que $a_h(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot)$ et $l_h(\cdot) = l(\cdot)$. Énonçons également le lemme de Céa.

Lemme 21 (Lemme de Céa, [32]). *Avec les hypothèses ci-dessus, nous avons*

$$\|u - u_h\|_W \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_W.$$

7.2.3 Opérateur d'interpolation local

Soit K une partie de \mathbb{R}^d et P un espace vectoriel de fonctions (en général polynômiales) définies sur K et à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $\{a_1, \dots, a_N\}$ un ensemble de points dans K où N est un entier strictement positif. Nous désignons par $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ une base de P associée aux noeuds $\{a_1, \dots, a_N\}$.

Définition 1. *L'opérateur d'interpolation local est défini comme suit :*

$$\mathcal{J}_K^{\text{Lag}} : C^0(K) \ni v \mapsto \sum_{i=1}^N v(a_i) \varphi_i \in P.$$

On dit que $\mathcal{J}_K^{\text{Lag}}$ est l'interpolé de Lagrange de v sur K . L'interpolé de Lagrange est tel que sa valeur aux noeuds $\{a_1, \dots, a_N\}$ coïncide avec celle de la fonction à interpoler v . L'opérateur d'interpolation $\mathcal{J}_K^{\text{Lag}}$ est une projection de $C^0(K)$ dans P .

Conclusion générale et perspectives

À l'issue de cette thèse, il est intéressant de faire le point sur le travail réalisé. Le but a été d'étudier la régularité H^2 d'un modèle d'écoulement sanguin en présence d'une endoprothèse vasculaire « stent ». D'un point de vue technique, nous avons présenté deux méthodes pour répondre à cette question : la formulation variationnelle pour le problème de Laplace dans des domaines rugueux, et l'analyse asymptotique pour le problème de Laplace « simplifié » et « non-simplifié ». Nous avons montré que la régularité H^2 de la solution de notre modèle mathématique est singulière en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. L'analyse asymptotique a joué un rôle fondamental dans notre démarche. C'est la raison pour laquelle cette thèse a été dominée par les techniques asymptotiques.

De nombreuses améliorations de résultats de convergence existant pour les méthodes de construction d'approximation couche limite ont été établies. Enfin, des simulations numériques illustrant le bien fondé des estimations d'erreur sur le plan pratique ont enfin été présentées pour le modèle mathématique « simplifié ».

Les résultats obtenus dans ce travail nous laissent entrevoir plusieurs pistes de recherche pour le futur proche et à plus ou moins long terme. De nombreuses questions peuvent être posées. Nous allons présenter diverses directions qui peuvent être des projets de travaux ultérieurs ainsi que des idées pouvant faire suite aux travaux réalisés dans cette thèse.

Tout d'abord au sujet du modèle considéré et des résultats obtenus par la technique de la formulation variationnelle. Peut-on étendre ces résultats à des situations plus générales ?

Le cadre théorique introduit dans le deuxième chapitre de cette thèse constitue une base solide en vue du traitement de la régularité H^2 dans des domaines rugueux assez réguliers, mais également de géométries plus complexes. Il semble possible d'adapter la méthode variationnelle pour un bord rugueux lipschitzien (à coins).

À l'issue de l'étude asymptotique de la régularité H^2 , il est intéressant de se poser la question de la possibilité d'utiliser nos démarches asymptotiques dans le cas « non périodique ». Dans l'article de D. Bresch et al. [22], les auteurs adaptent leurs résultats de construction d'approximation couche limite au cas non périodique, avec des conditions aux limites latérales de type Neumann. Nous espérons que cette voie d'investigation soit envisageable.

Par ailleurs, il serait intéressant d'explorer de nouveaux problèmes qui diffèrent de ceux de cette thèse par la géométrie ou par les équations considérées. Nous aimerions pouvoir appliquer ces techniques à l'équation de Navier-Stokes. C'est peut-être le problème le plus intéressant mais c'est certainement aussi le plus délicat. Serait-il envisageable d'écrire un développement asymptotique dans ce cas en utilisant par exemple les méthodes développées par Achdou et al. [4] ? Même si la démarche globale reste similaire au cas des équations de Laplace dans un domaine rugueux, les équations de Navier-Stokes rendent les calculs plus techniques et l'analyse plus délicate.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Y. Achdou, *Effet d'un mince revêtement métallisé sur la réflexion d'une onde électromagnétique*, C.R. Académie des Sciences, Paris, t.314 (Série I), 217-222, (1992).
- [3] Y. Achdou, O. Pironneau, *Analysis of wall laws*, C.R. Académie des Science, Paris, t.314 (Série I), 320-541, (1995).
- [4] Y. Achdou, B. Mohammadi, O. Pironneau and F. Valentin, *Domain decomposition & wall laws*, In Recent developments in domain decomposition methods and flow problems (Kyoto, 1996; Anacapri, 1996), vol. 11, of GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. Gakkōtoshō, Tokyo, 1998, pp. 1-14.
- [5] Y. Achdou, P. Le Tallec, O. Pironneau and F. Valentin, *Constructing & wall laws with domain decomposition or asymptotic expansion techniques*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 151, 1-2 (1998), 215-232, Symposium on Advances in Computational Mechanics, Vol. 3 (Austin, TX, 1997).
- [6] Y. Achdou, O. Pironneau and F. Valentin, *Étude des Lois de Paroi d'Ordre 1 et 2 pour des Domaines Rugueux par Décomposition de Domaine*, Rapport De Recherche Inria No 3326, 19 décembre 1997.
- [7] Y. Achdou, O. Pironneau and F. Valentin, *Construction des Lois de Paroi d'Ordre 1 et 2 pour des Domaines Rugueux par Analyse Asymptotique*, Rapport De Recherche Inria No 3357, 12 février 1998.

- [8] Y. Achdou, O. Pironneau and F. Valentin, *Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries*, J.Comput. Phys., 147 (1998), pp. 187-218.
- [9] Y. Achdou, O. Pironneau and A. Zebic, *Effective boundary conditions for thin coating*, UPMC report, R940001.
- [10] Y. Amirat, J. Simon, *Influence of rugosity in laminar hydrodynamics*, C.R. Acad. Sci. Paris, 323 (1996), pp. 313-318.
- [11] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume 17, Issue 1, pp. 35-92, February 1964.
- [12] G. Allaire, *Une Méthode d'Eléments Finis Multi-Echelles pour l'Homogénéisation Numérique*, Page personnelle : www.cmap.polytechnique.fr/~allaire.
- [13] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal., 23, 6, pp.1482-1518 (1992).
- [14] J.-P. Aubin, *Analyse fonctionnelle appliquée*, volume 1 et 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1987.
- [15] L. Augsburger, *Flow changes investigation due to the insertion of a braided stent in an inertia driven flow aneurysm model using experimental methods*, Technical report, Laboratoire d'Hémodynamique et de Technologie Cardiovasculaire, EPFL, Suisse, 2008.
- [16] I. Babuška, A. Aziz. *Survey lectures on the mathematical foundation of the finite element method*, In The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, Academic Press, New-York, pages 1-359, 1972.
- [17] I. Babuška, *Solution of interface problems by homogenization, parts I and II*, SIAM J. Math.Anal., 1976.
- [18] N. S. Bakhvalov, *Averaged characteristic of bodies with periodic structure*, Dokl. Akad. Nauk., SSSR 218. 1046–1048. English translation : Phys. Dokl. 19, 1974.
- [19] A. Basson, D. Gérard-Varet, *Wall laws for fluid flows at a boundary with random roughness*, Comm. Pure Appl. Math., (2008).
- [20] A. Bensoussan, J.-L. Lions and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam (1978).

- [21] J.-M. Bony, *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau (2001).
- [22] E. Bonnetier, D. Bresch and V. Milišić, *A priori convergence estimates for a rough Poisson-Dirichlet problem with natural vertical boundary conditions*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, (2010).
- [23] M. Bourlard, A. Maghnooui, S. Nicaise, and L. Paquet, *Asymptotic expansion of the solution of a mixed Dirichlet-Ventcel problem with a small parameter*, Asymptot. Anal., 28 (2001), pp. 241-278.
- [24] D. Braess, *Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni, 2^{ème} édition, 1997.
- [25] J.F. Bourgat, A. Dervieux, *Méthode d'homogénéisation des opérateurs à coefficients périodiques : étude des correcteurs provenant du développement asymptotique*, LABORIA RR, 278 (1978).
- [26] J.F. Bourgat, A. Dervieux, *Homogenization and stiffness methods for operators with periodic coefficients of large amplitude*, Congrès IFAC-IRIA, IRIA-INF-LAB 7815 (1978).
- [27] D. Bresch and V. Milišić, *Towards implicit multi-scale wall laws*, C. R. Acad. Sci, Paris, Ser. I, 346 (2008) pp. 833-838.
- [28] D. Bresch and V. Milišić, *High order multi-scale wall laws : part I, the periodic case*, Quart. Appl. Math., 2008.
- [29] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Éditions Masson., 1983.
- [30] A. Carrau, *Modélisation numérique d'un écoulement sur paroi rugueuse*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 1992.
- [31] A. Carrau. G. Gallice and P. Le Tallec, *Taking into account surface roughness in computing hypersonic reentry bodies*, Applied Sciences and Engineering, in : R. Glowinski eds, Nova Science Publisher, pages 331-344, 1992.
- [32] J. Céa, *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 14 :345-444, 1964.
- [33] J. Cousteix, *Couches limites laminaires et turbulentes*, Cepandues editions, France, 1990.

- [34] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, Pays-Bas, 1978.
- [35] D. Cioranescu, P. Donato, *An Introduction to Homogenization*, Oxford University Press, 1999.
- [36] M. Costabel, M. Dauge and S. Nicaise, *Corner Singularities and Analytic Regularity for Linear Elliptic Systems, Part I : Smooth domains*, book project in progress, 2010. URL <http://perso.univ-rennes1.fr/monique.dauge/publis/>
- [37] L. Chupin, *Roughness effect on the Neumann boundary condition*, *Asymptot. Anal.*, 78, Vol. 1-2, p.85–121 (2012).
- [38] G. Dury, Alziary de Roquefort, *Couche limite turbulente sur paroi rugueuse en régime supersonique*, Rapport du CEAT, Septembre 1995.
- [39] A. Ern, J.-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*, Vol. 159 of Applied Mathematical Series, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [40] L.-C. Evans, *Partial differential equations*, Volume 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [41] D. Gérard-Varet, N. Masmoudi, *Relevance of the slip condition for fluid flows near an irregular boundary*, *Comm. Math. Phys.* 295, 99-137 (2010).
- [42] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, *Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [43] F. Glikson, *Couche limite sur paroi rugueuse*, Thèse de Doctorat de l’Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, ONERA CERT, Université Poitiers, 1996.
- [44] D. Gómez, M. Lobo, S. A. Nazarov, and E. Pérez, *Spectral stiff problems in domains surrounded by thin bands : asymptotic and uniform estimates for eigenvalues*, *J. Math. Pures Appl.*, (9), 85 (2006), pp. 598-632.
- [45] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, *Monographs and studies in mathematics*, 1986.
- [46] L. Halpern, O. Lafitte, *Dirichlet to Neumann map for domains with corners and approximate boundary conditions*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 204, Issue 2, pp 505-514, 15 July 2007.

- [47] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, J. Morice, and K. Ohtsuka, *FreeFem++ (Version 3.32)*, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 2014. URL <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>
- [48] F. Hecht, *New development in FreeFem++*, J. Numer. Math., 20 (2012), no. 3-4, 251-265. 65Y15.
- [49] W. Jäger, A. Mikelić, *On the interface boundary condition of Beavers, Joseph, and Saffman*, SIAM J. Appl. Math, 60 (2000), pp. 1111-1127.
- [50] W. Jäger, A. Mikelić, *On the roughness-induced effective boundary condition for an incompressible viscous flow*, J. Diff. Equa., 170 (2001), pp. 96-122.
- [51] W. Jäger, A. Mikelić, *Couette laws over a rough boundary and drag reduction*, Comm. Math. Phys., (2003).
- [52] W. Jäger, A. Mikelić, N. Neuss, *Asymptotic analysis of the laminar flow over a porous bed*, SIAM J. Sci. Comput., 22 (2001), pp. 2006-2028.
- [53] C. Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni, 1987.
- [54] O. Lafitte, *Diffraction in the high frequency regime by a thin layer of dielectric material. I. The equivalent impedance boundary condition*, SIAM J. Appl. Math. 59 (1999), no. 3, 1028-1052.
- [55] O. Lafitte, *Diffraction in the high frequency regime by a thin layer of dielectric material. II. The trace of the wave in the shadow of the obstacle*, SIAM J. Appl. Math. 59 (1999), no. 3, 1053-1079.
- [56] O. Lafitte, *The wave diffracted by a wedge with mixed boundary condition*, Mémoires de la SMF, 88, Nulle Série (2002).
- [57] K. Lemrabet, *Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, 300 (1985), pp. 531-534.
- [58] T.-M. Liou, S.-N. Liou, and K.-L. Chu, *Intra-aneurysmal flow with helix and mesh stent placement across side-wall aneurysm pore of a straight parent vessel*, Journal of biomechanical engineering, 126(1), pp. 36-43, 2004.

- [59] V. Milišić, *Very weak estimates for a rough Poisson-Dirichlet problem with natural vertical boundary conditions*, Methods and Applications of Analysis, (2009).
- [60] V. Milišić, *Blood-flow modelling along and trough a braided multi-layer metallic stent*, submitted, (2010).
- [61] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.
- [62] J. Nečas, *Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. 16, p. 305-326, 1962.
- [63] J. Nikuradse, *Laws of flow in rough pipes*, Technical Memorandum 1292-National Advisory Committee for Aeronautics, NACA TM 1292.
- [64] J.L.M Poiseuille, *Recherche sur la force du coeur aortique*, Phd thesis,(1828).
- [65] L. Prandtl, H. Schlichting, *Das widerstandgesetz rauther platten. Werft*, 1934.
- [66] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, France, 1983.
- [67] E. Sanchez-Palencia, *Equations aux dérivées partielles dans un type de milieux hétérogènes*, C. R. Acad. Sci, 272, 1410-1411.
- [68] E. Sanchez-Palencia, *Ecoulement d'un fluide à travers une paroi perforée*, Technical Report 57, Collection de la direction des études et recherches d'E.D.F., 1985.
- [69] E. Sanchez-Palencia, *Non homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics., 127. Springer-Verlag. Berlin.
- [70] E. Sanchez-Palencia, *Boundary value problems in domains containing perforated walls*, in Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. Collège de France Seminar. Vol III, 309-325, Res. Notes in Math., 70, Pitman, London (1981).
- [71] E. Sanchez-Palencia, *Un problème d'écoulement lent d'un fluide visqueux incompressible au travers d'une paroi finement perforée*, in D. Bergman et coll., Les Méthodes de l'Homogénéisation : Théorie et Applications en Physique, Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, 57, (1985), 371-400, Eyrolles, Paris.

- [72] F. Valentin, P. Le Tallec et B. Mohammadi, *Simulation des écoulements compressibles turbulents sur parois rugueuse*, Technical Report, 3108, INRIA, Février 1997.

Modélisation mathématique et simulations numériques des écoulements sanguins dans des artères avec ou sans stents

Résumé. Cette thèse est consacrée à la modélisation mathématique et simulations numériques des écoulements sanguins dans des artères en présence d'une endoprothèse vasculaire de type stent. La présence de stent peut être considérée comme une perturbation locale d'un bord lisse d'écoulement, plus précisément les parois de l'artère sont assimilées à une surface fortement rugueuse. Nous nous sommes principalement intéressés au contrôle de la régularité H^2 sur un modèle simplifié permettant de prendre en compte l'effet de ces stents lorsque le flux sanguin est gouverné par une équation de Laplace (en lien avec la composante axiale de la vitesse d'écoulement) avec une condition aux limites de type Dirichlet, dans un domaine à bord rugueux (en fonction d'un petit paramètre ε). Dans une première partie, nous soulevons la question d'existence et d'unicité de la solution de ce modèle d'écoulement sanguin et nous traitons la régularité H^2 par des techniques d'analyse variationnelle. Une étude minutieuse permet de contrôler la régularité H^2 en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Le deuxième axe est dédié à l'étude de la régularité H^2 par des analyse asymptotiques multiéchelles. Nous montrons que la norme H^2 de la solution de ce modèle d'écoulement sanguin est singulière en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. D'autre part, nous améliorons les ordres de convergence des résultats existants concernant la construction des approximations multiéchelles. Dans un troisième temps, nous présentons des estimations d'erreur et des résultats numériques. Ces résultats illustrent le bien fondé des estimations d'erreur sur le plan pratique. Nous montrons bien l'importance des méthodes asymptotiques qui se révèlent plus efficaces qu'un calcul direct.

Mots clés : Domaine rugueux, régularité H^2 , écoulement sanguin, tuteur vasculaire, artère, anévrisme, lois de paroi, opérateur de Laplace, analyse asymptotique, approximation couche limite, méthodes d'éléments finis.

Mathematical modelling and numerical simulations of the blood-flow in stented and unstented aneurysms

Abstract. This thesis is devoted to mathematical modeling and numerical simulations of the blood-flows in arteries in the presence of a vascular prosthesis of type stent. The presence of stent can be considered as a local perturbation of a smooth edge of flow, more precisely the walls artery can be seen as a strongly rough surface. We are mainly interested in controlling the H^2 regularity of a simplified model which takes into account the impact of these stents when the blood flow is controlled by a Laplace equation (in link with the axial component rate of flow) with a Dirichlet boundary condition, in a domain with a rough board (according to a small parameter ε). First, we raise the question of existence and unicity of the solution of this model of blood-flow and we study the H^2 regularity using variational analysis methods. By a detailed study, we control the H^2 regularity of order $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. The second part is devoted to the study of the regularity H^2 regularity using multi-scale analysis. We prove that the H^2 norm of the solution of this model is singular of order $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Moreover, we improve the convergence rate of the existing results on the construction of the multi-scale approximation. Finally, we present an error estimation and numerical results. These numerical results illustrate the well-founded of the error estimates on a practical level. We show the importance of the asymptotic methods that seem to be more effective than a direct computation.

Keywords : Rough domain, regularity H^2 , blood flow, stent, artery, aneurysm, wall-laws, Laplace operator, asymptotic analysis, boundary layer approximation, finite element methods.

