



**HAL**  
open science

# Couplage et améliorations de la méthode SPH pour traiter des écoulements à multi-échelles temporelles et spatiales

Laurent Chiron

► **To cite this version:**

Laurent Chiron. Couplage et améliorations de la méthode SPH pour traiter des écoulements à multi-échelles temporelles et spatiales. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2017. Français. NNT: . tel-01529282v1

**HAL Id: tel-01529282**

**<https://theses.hal.science/tel-01529282v1>**

Submitted on 30 May 2017 (v1), last revised 28 Oct 2020 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Laurent CHIRON

*Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes  
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences pour L'Ingénieur, Géosciences, Architecture

*Discipline : Mécanique des Milieux Fluides*

*Unité de recherche : Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Energétique et Environnement  
Atmosphérique*

Soutenue le 16 mars 2017

## Couplage et améliorations de la méthode SPH pour traiter des écoulements à multi-échelles temporelles et spatiales

### JURY

Président : **Florian DE VUYST**, Professeur des Universités, ENS, Cachan

Rapporteurs : **Andrea COLAGROSSI**, Chercheur HDR, CNR-INSEAN  
**Damien VIOLEAU**, Chercheur HDR, EDF R&D, Chatou

Examineurs : **Christophe BERTHON**, Professeur des Universités, Université de Nantes

Invités : **Jean-Christophe MARONGIU**, Ingénieur-Docteur R&D, ANDRITZ-Hydro  
**Matthieu DE LEFFE**, Ingénieur-Docteur R&D, NEXTFLOW-Software

Directeur de thèse : **David LE TOUZE**, Professeur des Universités, Ecole Centrale Nantes

Co-encadrant de thèse : **Guillaume OGER**, Ingénieur de Recherche, Ecole Centrale Nantes

# Remerciements

En premier lieu, je souhaiterais remercier mon directeur de thèse David Le Touzé, pour la confiance qu'il a porté en moi au travers de ce sujet de thèse, ainsi que mon encadrant académique Guillaume Oger pour sa disponibilité, ses précieux conseils, sa bonne humeur et surtout sa très grande patience pour corriger mes très (trop ?) nombreuses fautes d'anglais de nos articles. Je tiens aussi à remercier mon encadrant industriel Matthieu De Leffe pour le goût de la rigueur qu'il a su m'insuffler ainsi que ses conseils avisés sur l'applicabilité de mes travaux dans un contexte industriel.

Je voudrai exprimer ma gratitude aux rapporteurs de cette thèse, Damien Violeau et Andrea Colagrossi, pour leur lecture attentive et leurs commentaires avisés. Je remercie également Christophe Berthon, Florian De Vuyst et Jean-Christophe Marongiu d'avoir accepté de participer à mon jury. Un grand merci à mes collègues de NEXTFLOW-software pour les discussions extrêmement enrichissantes qui m'ont permis d'appréhender les attentes du monde de l'édition logiciel. Je tiens aussi à remercier toute l'équipe de LHEEA pour la bonne ambiance qui règne au quotidien au laboratoire. J'ai une pensée particulière pour mon co-bureau, Corentin Hermange, avec qui les trois dernières années ont été enrichissantes scientifiquement mais aussi zygomatiquement !

Je terminerai en remerciant ma famille d'avoir toujours été là pour moi, de m'avoir poussé dans mes retranchements car vous attendiez toujours plus de moi. Un grand merci à toi Céline, pour ta patience, ta compréhension lorsque mon esprit est ailleurs, et surtout merci pour la sérénité et l'amour que tu m'apportes au quotidien. Je ne pouvais pas clore ces remerciements sans parler de mon fils, Nathan, qui me comble de bonheur jour après jour et sans qui je ne serai pas l'homme que je suis. Merci à toi mon grand garçon.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Equations physiques</b>	<b>5</b>
1.1 Les équations de Navier-Stokes . . . . .	5
1.2 Conditions aux limites . . . . .	6
1.2.1 Conditions d'interface entre deux fluides . . . . .	6
1.2.2 Condition d'adhérence à la paroi . . . . .	7
1.2.3 Condition de glissement à la paroi . . . . .	7
<b>2 Méthode SPH</b>	<b>9</b>
2.1 Interpolation SPH . . . . .	9
2.1.1 Construction de l'opérateur SPH . . . . .	9
2.1.2 Définition du noyau . . . . .	10
2.2 Opérateurs différentiels . . . . .	11
2.2.1 Opérateur gradient . . . . .	11
2.2.2 Divergence . . . . .	12
2.2.3 Laplacien . . . . .	12
2.3 Applications aux équations de Navier-Stokes . . . . .	14
2.3.1 Approche faiblement compressible . . . . .	14
2.3.2 Opérateurs discrets . . . . .	15
2.3.3 Montée en ordre des opérateurs . . . . .	15
2.4 Schémas numériques communément utilisés en SPH faiblement compressible	17
2.4.1 Consistance des opérateurs mis en jeu . . . . .	17
2.4.2 Schéma avec viscosité artificielle . . . . .	18
2.4.3 $\delta$ -SPH . . . . .	19
2.4.4 Schéma Riemann-SPH . . . . .	20
2.5 Intégration temporelle . . . . .	26
2.5.1 Condition de stabilité hyperbolique . . . . .	26
2.5.2 Condition de stabilité elliptique . . . . .	26
2.6 Corrections numériques communément utilisées en SPH . . . . .	27
2.6.1 Correction de l'instabilité de tension . . . . .	27
2.6.2 Méthodes de désorganisation particulière . . . . .	28

<b>3</b>	<b>Traitement numérique des conditions aux limites</b>	<b>33</b>
3.1	Conditions aux limites pour un corps . . . . .	33
3.1.1	Méthodes d'intégration volumique . . . . .	33
3.1.2	Méthodes d'intégration surfacique . . . . .	37
3.2	Surface libre . . . . .	38
3.2.1	Conditions dynamique et cinématique . . . . .	38
3.2.2	Détection de la surface libre . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Améliorations de la méthode de flux normal (NFM)</b>	<b>41</b>
4.1	Flux de paroi caractéristique . . . . .	41
4.2	Adaptation de la méthode NFM pour SPH (état de l'art) . . . . .	43
4.2.1	Définition d'opérateurs différentiels adaptés aux parois pour les équations d'Euler . . . . .	43
4.2.2	Montée en ordre . . . . .	45
4.2.3	Calcul numérique de la correction Shepard . . . . .	46
4.3	Améliorations proposées pour la méthode NFM . . . . .	49
4.3.1	Calcul analytique de la correction Shepard . . . . .	49
4.3.2	Opérateur Laplacien pour NFM . . . . .	54
4.3.3	Extension d'une méthode de désorganisation particulière adaptée au formalisme NFM . . . . .	57
4.4	Extension de la méthode en 3 dimensions . . . . .	59
4.4.1	Description de l'algorithmique mise en place . . . . .	59
4.4.2	Analyse de la précision en fonction du nombre de points de quadrature . . . . .	63
4.4.3	Discussion sur la pertinence de l'algorithmique choisie . . . . .	63
4.5	Discussion sur les similitudes/différences entre NFM et USAW . . . . .	65
4.6	Etude numérique de la précision et de la robustesse de la méthode NFM . . . . .	67
4.6.1	Précision de la correction Shepard analytique . . . . .	67
4.6.2	Imperméabilité des parois . . . . .	67
4.7	Validations numériques . . . . .	69
4.7.1	Ecoulement de Poiseuille . . . . .	69
4.7.2	Cavité entraînée à $Re = 1000$ . . . . .	70
4.7.3	Dambreak en présence d'une géométrie complexe . . . . .	73
4.7.4	Dambreak 3D en présence d'un obstacle parallélépipédique . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Raffinement particulière adaptatif</b>	<b>79</b>
5.1	Etat de l'art . . . . .	79
5.1.1	Raffinement . . . . .	79
5.1.2	Déraffinement . . . . .	82
5.2	Amélioration par rapport à l'état de l'art . . . . .	84
5.2.1	Utilisation et extension d'une méthode de désorganisation particulière . . . . .	84
5.2.2	Application de la nouvelle méthode de désorganisation particulière . . . . .	86
5.2.3	Validation : Dambreak de Kleefsman <i>et al.</i> . . . . .	88
5.2.4	Bilan . . . . .	92
5.3	Raffinement adaptatif pour les méthodes maillées: AMR . . . . .	93
5.3.1	Présentation de l'AMR . . . . .	93

---

5.3.2	Prolongation	94
5.3.3	Restriction	94
5.3.4	Cellules d'interfaçage : "Guard cells"	95
5.4	De l'AMR pour les méthodes maillées vers l'Adaptive Particle Refinement (APR)	95
5.4.1	Prolongation pour SPH	95
5.4.2	Restriction dans le cadre de la méthode SPH	97
5.4.3	Des cellules d'interfaçage vers un couplage SPH/SPH	98
5.4.4	Méthode proposée : APR	98
5.5	Maintien des performances parallèles	100
5.5.1	Séparation en deux listes d'interactions	100
5.5.2	Algorithme d'équilibrage des charges	103
5.6	Validations numériques	106
5.6.1	Cas-tests avec viscosité physique	106
5.6.2	Cas-tests non visqueux avec surface libre	110
<b>6</b>	<b>Couplage entre les méthodes SPH et Volumes Finis</b>	<b>129</b>
6.1	Motivations	129
6.2	Description du solveur Volumes Finis	130
6.3	Approche numérique du couplage	131
6.3.1	Couplage spatial	132
6.3.2	Couplage temporel	133
6.3.3	Mise en place d'un coupleur	133
6.4	Méthode d'entrées/sorties pour le couplage	135
6.4.1	Constat et objectifs	135
6.4.2	Méthode d'entrées/sorties	135
6.4.3	Méthode retenue pour le couplage	137
6.5	Validations numériques	139
6.5.1	Standing wave	139
6.5.2	Vague déferlante	143
6.5.3	Tourbillons de Taylor-Green à $Re = 200$	146
	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>





# Table des figures

1	Applications de la méthode SPH . . . . .	1
2.1	Zone TVD déterminée par Sweby . . . . .	23
2.2	Représentation schématique de l'effet du limiteur minmod . . . . .	24
2.3	Instabilité de tension mise en évidence par Swegle [95] pour un corps soumis à une déformation . . . . .	28
2.4	Evolution temporelle d'un écoulement lagrangien autour d'un obstacle carré (Colagrossi <i>et al.</i> [1]) . . . . .	28
2.5	Représentation des différents types de particules lors de la détection de surface libre $\partial\Omega_{SL}$ . . . . .	31
2.6	Comparaison du champ de pression obtenu sur un dambreak entre le schéma ALE avec correction de vitesse et le schéma Riemann-SPH strictement lagrangien [87] . . . . .	32
3.1	Particules fantômes obtenues via symétrisation autour de la paroi solide . . . . .	34
3.2	Volumes géométriques occupés par des particules et leurs fantômes pour une paroi concave . . . . .	36
3.3	Création des particules fantômes fixes et des points d'interpolation . . . . .	37
3.4	Représentation de la position géométrique de la surface libre $\partial\Omega_{SL}$ . . . . .	38
3.5	Représentation de la valeur de $\lambda$ au sein d'un écoulement [70] . . . . .	39
3.6	Seconde étape de la détection : recherche de voisins dans un cône de révolution axé sur $\tilde{\mathbf{n}}_i$ . . . . .	40
4.1	Support d'une particule tronqué par une paroi . . . . .	44
4.2	Représentation de la singularité en $R = 0$ avec des sphères intérieures et extérieures . . . . .	47
4.3	Calcul de $\gamma_i$ . . . . .	48
4.4	Difficulté à évaluer numériquement $\gamma$ lorsque la particule tend à se rapprocher de la paroi (cas d'une paroi plane 2D) . . . . .	49
4.5	Calcul analytique de $\hat{\gamma}_s$ pour le segment $[ab]$ . . . . .	50
4.6	Positionnement des particules par rapport à deux segments . . . . .	51
4.7	Comparaison entre Shepard analytique et numérique avec 100 points de quadrature dans le rayon (cas d'une paroi plane) . . . . .	51
4.8	Notations utilisées pour le calcul de $\gamma$ pour une particule $i$ située au voisinage d'un triangle $\mathcal{T}$ . . . . .	52
4.9	Schéma du cas test considéré . . . . .	55

4.10	Evaluation de $\nabla \cdot (\nabla x)$ (à gauche) et $\nabla \cdot (\nabla x^2)$ (à droite) par le laplacien de Morris NFM . . . . .	55
4.11	Représentation des particules détectées à la surface libre par l'algorithme de Marrone <i>et al.</i> en présence de parois discrétisées avec NFM (cas d'un dambreak 2D) . . . . .	57
4.12	Représentation des particules détectées à la surface libre à l'aide du nouvel algorithme (cas d'un dambreak 2D) . . . . .	58
4.13	Comparaison du champ de pression obtenu sur un dambreak entre le schéma Riemann-SPH strictement lagrangien NFM et le schéma NFM utilisant la nouvelle loi de vitesse Oger <i>et al.</i> . . . . .	59
4.14	Représentation de l'intersection entre le support d'une particule et une paroi plane (vue de face à gauche et de dessus à droite) . . . . .	60
4.15	Justification de l'approximation d'un disque $D_\Omega$ par un carré $C_\Omega$ pour le calcul de flux NFM . . . . .	60
4.16	Éléments de surface $C_j$ composant le maillage secondaire $C_\Omega$ . . . . .	60
4.17	Différentes intersections possibles entre un triangle et un carré . . . . .	61
4.18	Définition des triangles interne et externe . . . . .	62
4.19	Représentation des étapes permettant de déterminer le barycentre et l'aire du polygône . . . . .	63
4.20	Comparaison entre la valeur analytique et la solution numérique pour différents nombres de points de quadrature en fonction de la distance à la paroi . . . . .	64
4.21	Différents maillages d'une cuve hydrostatique . . . . .	64
4.22	Evolution de l'énergie cinétique au cours du temps . . . . .	65
4.23	Définition des segments $s$ et des particules de paroi $e$ pour la méthode USAW [34] . . . . .	66
4.24	Schéma du cas test hydrostatique réalisé . . . . .	67
4.25	Comparaison des efforts entre les approches numérique et théorique de calcul du Shepard . . . . .	68
4.26	Champ de pression (à gauche) et profil de pression (au milieu) à l'instant $t = 5$ s, évolution temporelle du rapport de l'énergie cinétique sur l'énergie potentielle (à droite) . . . . .	68
4.27	Ecoulement de Poiseuille dans un canal périodique : (a) Etat stationnaire du champ de vitesse horizontale à $t = 20$ s, (b) Comparaison entre les profils de vitesse horizontale NFM et la solution exacte, (c) Analyse de l'erreur sur la vitesse horizontale en norme $L_2$ . . . . .	69
4.28	Géométrie de la cavité entraînée . . . . .	70
4.29	Comparaison du module de vitesse obtenu avec les méthodes NFM (à gauche) et de particules fantômes (à droite) . . . . .	71
4.30	Comparaison des profils de vitesse pour la formulation eulérienne . . . . .	72
4.31	Comparaison des profils de vitesse pour la formulation lagrangienne . . . . .	72
4.32	Géométrie du dambreak (les capteurs de pression sont numérotés de $P_1$ à $P_9$ ) . . . . .	73
4.33	Comparaison de la position de la surface libre entre le calcul SPH avec méthode NFM (—) et la solution Level-Set (- - -) . . . . .	74
4.34	Comparaison des signaux de pression pour les capteurs $P_1$ , $P_5$ et $P_7$ . . . . .	75

---

4.35	Schéma de la rupture de barrage simulée (en haut à gauche : vue de face, en bas à gauche : vue de dessus, à droite : obstacle) . . . . .	75
4.36	Comparaison des pressions prédites par les deux simulations SPH rapport aux résultats numériques et expérimentaux de Kleefsman <i>et al.</i> [50] . . . . .	76
4.37	Champ de vitesse de la simulation de rupture de barrage contre un obstacle pour différents instants pour la simulation NFM . . . . .	77
5.1	Modèle de raffinement 2D proposé par Reyes López <i>et al.</i> [63] : la particule mère (en rouge) est raffinée en quatre particules filles (en bleu) . . . . .	80
5.2	Procédé de raffinement illustrant le support des particules mères et filles . . . . .	80
5.3	Méthode de coalescence proposée par Vacondio <i>et al.</i> . . . . .	82
5.4	Evolution spatiale de la variable $\chi$ (Barcarolo <i>et al.</i> [5]) . . . . .	84
5.5	Anisotropie pour le cas-test de la rupture de barrage . . . . .	85
5.6	Instabilités à la surface libre lors du raffinement (cas du dambreak) . . . . .	86
5.7	Représentation de $\beta$ en fonction de $\nu_0$ . . . . .	87
5.8	Comparaison entre la loi proposée, à gauche, et la loi de vitesse originale de Oger <i>et al.</i> , à droite (cas du dambreak) . . . . .	87
5.9	Schéma du dambreak 2D . . . . .	88
5.10	Comparaison des champs de pression à trois instants physiques différents (de gauche à droite) pour les trois simulations (de haut en bas) . . . . .	89
5.11	Schéma de la rupture de barrage simulée . . . . .	90
5.12	Comparaison du champ de pression à l'instant $t = 0.6 s$ . . . . .	90
5.13	Comparaison du champ de pression à l'instant $t = 1 s$ . . . . .	91
5.14	Diverses comparaisons : (a) Capteur de pression P1, (b) Capteur de pression P1 (Zoom), (c) Capteur de pression P3, (d) Décroissance de l'énergie mécanique au cours du temps . . . . .	91
5.15	Limitations de l'état de l'art du raffinement (le nombre de voisins d'une particule raffinée est trop important) . . . . .	93
5.16	Représentation d'une décomposition en arbre hiérarchique . . . . .	94
5.17	Méthode de prolongation . . . . .	94
5.18	Méthode de restriction . . . . .	95
5.19	Définition des cellules gardes . . . . .	96
5.20	Méthode de prolongation (point de vue particulière) . . . . .	97
5.21	Couplage SPH/SPH . . . . .	98
5.22	Principes de la méthode APR . . . . .	99
5.23	Recherche de voisins dans la grille . . . . .	101
5.24	Découpes récursives pour une simulation impliquant 8 processeurs . . . . .	103
5.25	Schéma du dambreak considéré pour l'étude de scalabilité . . . . .	105
5.26	Efficacité du nouvel algorithme . . . . .	105
5.27	Résultats de la simulation APR . . . . .	107
5.28	Représentation schématique du cas test d'écoulement autour d'un cylindre (les lignes en pointillés représentent les différents niveaux de raffinement) . . . . .	107
5.29	Evolution temporelle des coefficients de trainée et de portance . . . . .	108
5.30	Comparaison à $\frac{tU}{D} = 125$ entre la simulation avec APR et la simulation fine . . . . .	109

5.31	Relation entre l'impact d'une vague déferlante et celui d'une colonne triangulaire . . . . .	111
5.32	Schéma de la simulation pour $\alpha = 80^\circ$ . . . . .	111
5.33	Schémas des trois comparaisons effectuées . . . . .	113
5.34	Comparaisons du champ de pression en $s = 1$ , pour $\frac{s}{\Delta x} = 40, 80$ et $160$ (de haut en bas) dans la zone d'impact . . . . .	114
5.35	Convergence de la distribution de pression le long de la ligne verticale localisée en $\frac{x}{s} = 0$ en $s = 1$ m pour les résolutions $\frac{s}{\Delta x} = 40, 80$ et $160$ dans la zone d'impact (de gauche à droite) . . . . .	115
5.36	Schéma de la simulation considérée . . . . .	116
5.37	Schéma de la simulation APR à 10 niveaux (vue globale à gauche, vue zoomée à droite) . . . . .	117
5.38	Champs de pression à différents instants de la simulation APR avec raffinement adaptatif (vue sur les niveaux de raffinement 7 à 10) . . . . .	118
5.39	Comparaison entre les différentes solutions (à gauche) et convergence des pics de pression de la simulation APR (à droite) . . . . .	119
5.40	Couplage entre HOS-NWT et SPH-Flow . . . . .	121
5.41	Interpolation de la solution potentielle sur les particules SPH . . . . .	122
5.42	a) Emplacement des capteurs de pression sur le brise-lame b) Position des capteurs de hauteur d'eau sur le pont . . . . .	122
5.43	Schéma de la simulation réalisée (vue de dessus) . . . . .	123
5.44	Emplacement des capteurs . . . . .	124
5.45	Comparaison de la position de la surface libre expérimentale avec celle de la simulation APR . . . . .	125
5.46	Comparaison de la position de la surface libre expérimentale avec celle de la simulation APR . . . . .	126
5.47	Comparaison entre les résultats expérimentaux et les simulations APR et h-variable . . . . .	127
6.1	Principes du couplage SPH/VF . . . . .	131
6.2	Interpolation bilinéaire . . . . .	132
6.3	Représentation schématique des fonctionnalités attribuées au coupleur . . . . .	134
6.4	Conditions d'entrées/sorties (approche volumique) . . . . .	136
6.5	Evolution au cours du temps de la masse des sommets pour une condition d'entrée ( <i>i.e</i> $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{n} > 0$ ) . . . . .	136
6.6	Comparatif entre la méthode de Kassiotis <i>et al.</i> et la nouvelle méthode proposée . . . . .	138
6.7	Couplage proposé par Bouscasse <i>et al.</i> et appliqué aux tourbillons de Taylor Green . . . . .	138
6.8	Régularisation de la figure 6.7 à l'aide d'une procédure de packing [19] . . . . .	139
6.9	Configuration initiale des deux solveurs pour le cas de l'amortissement visqueux d'une vague stationnaire. Les particules et cellules sont colorées suivant le champ de vitesse horizontal . . . . .	140
6.10	Comparaison de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique (en haut) et de l'entropie (en bas) . . . . .	141

---

6.11	Comparaison des champs de vorticité entre (de haut en bas) : la solution analytique, le couplage, le solveur SPH seul et le solveur VF seul . . . . .	142
6.12	Configuration initiale du cas de propagation d'une vague (� gauche). Les domaines relatifs à chaque solveur sont présentés à droite . . . . .	143
6.13	Evolution du champ de pression à différents instants pour le cas de propagation d'une vague . . . . .	144
6.14	Evolution du numéro (ID) attribué à chaque particule à différents instants pour le cas de propagation d'une vague . . . . .	145
6.15	Evolution temporelle de la variation de la masse du domaine SPH pour le cas de propagation d'une vague . . . . .	146
6.16	Champ de vecteurs vitesse pour le cas-test des tourbillons de Taylor-Green (le domaine SPH est délimité par les traits rouges pointillés) . . . . .	147
6.17	Configuration initiale des deux solveurs pour le cas des tourbillons de Taylor-Green. Les particules et cellules sont colorées suivant le champ de pression initial . . . . .	148
6.18	Comparaison des champs de vorticité à l'instant $\frac{tU}{L} = 4$ entre les solutions couplée (� gauche) et analytique (� droite) . . . . .	148
6.19	Comparaison des champs de pression à l'instant $\frac{tU}{L} = 4$ entre les solutions couplée (� gauche) et analytique (� droite) . . . . .	149
6.20	Comparaison des profils de vitesse en $\frac{x}{L} = 0.5$ (� gauche) et $\frac{y}{L} = 0.5$ (� droite) � l'instant $\frac{tU}{L} = 4$ . . . . .	150
6.21	Comparaison du profil de vorticité en $\frac{x}{L} = 0.25$ � l'instant $\frac{tU}{L} = 4$ (� gauche) et évolution temporelle de la masse du domaine SPH pour le cas des tourbillons de Taylor-Green . . . . .	150

# Introduction

La méthode numérique SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) est une méthode particulière (Lagrangienne et sans maillage) permettant de simuler précisément des problèmes avec interfaces et fortement convectifs. Cette méthode a été créée en 1977 à l'issue des travaux de Lucy, Gingold et Monaghan [65, 39] dans le domaine de l'astrophysique. La méthode a ensuite été adaptée en 1994 par Monaghan afin de modéliser les écoulements hydrodynamiques avec surface libre. SPH est relativement jeune par rapport aux autres méthodes numériques (potentielle, volumes finis, éléments finis, etc...) et par conséquent d'importants challenges théoriques et numériques restent à relever. Les années 2000 ont donné lieu à des avancées significatives, notamment dans le domaine de la précision numérique avec l'introduction de solveurs plus précis ( $\delta$ -SPH, Riemann-SPH). Ces avancées permettent aujourd'hui à la méthode d'être bien validée pour des écoulements violents à interface (impacts, jets, interactions violentes avec la structure, interfaces bifluïdes très complexes, etc...).

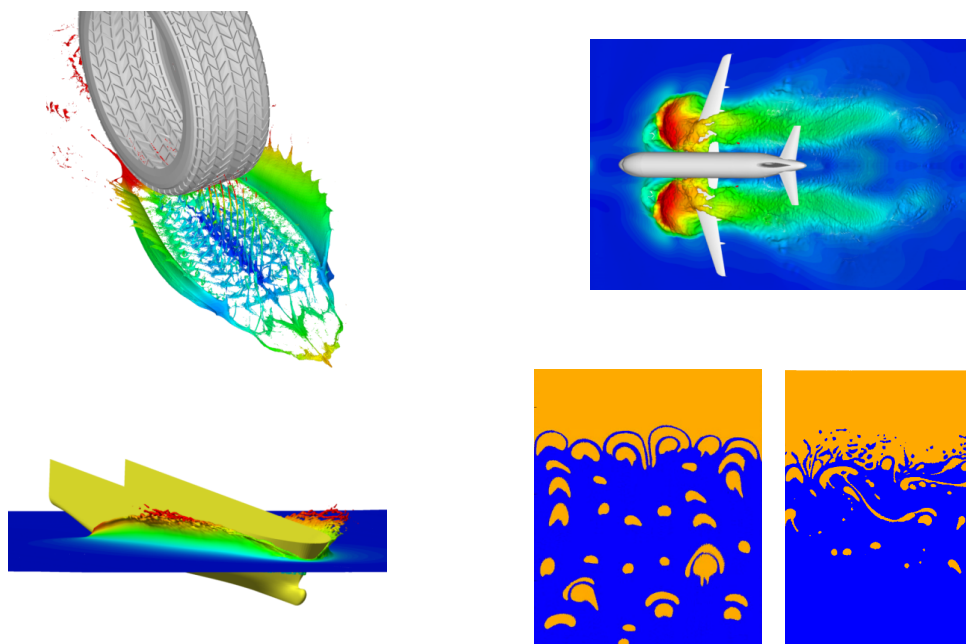


Figure 1: Applications de la méthode SPH

Au sein du laboratoire LHEEA de l'École Centrale Nantes, la méthode SPH arrive à maturité grâce à 9 doctorats : Doring [30], Oger [85], Deuff [24], Guilcher [42], Grenier [41], De Leffe [55], Zhao [110], Fourey [36] et Barcarolo [4]. Ces différentes thèses ont

permis d'enrichir la méthode via la modélisation de physiques complexes (viscosité, biffuide), le développement de couplages (fluide-structure, houle-structure, Voronoi-SPH), de conditions aux limites (méthodes de particules fantômes et de flux normal). Néanmoins, en présence d'échelles temporelles et spatiales plus variées, la méthode SPH n'est pas suffisamment efficace pour être utilisable industriellement de manière "routinière". En effet, les techniques de résolution spatiale variable et de raffinement/déraffinement sont peu efficaces et de faible applicabilité. Face à ce constat il est crucial, pour l'applicabilité de la méthode à des problématiques industrielles plus larges, de poursuivre des axes de recherche s'attaquant à ces difficultés.

Pour ce faire, la thèse, intitulée "Couplage et améliorations de la méthode SPH pour traiter des écoulements à multi-échelles temporelles et spatiales", s'articule en trois axes.

Une première partie concerne l'amélioration de la méthode de flux normal (NFM) dont le développement a été initié dans une précédente thèse au laboratoire (De Lefte [55]). Cet axe de recherche, qui ne s'inscrit pas dans le sujet initial de la thèse, a été initié afin de répondre à des problématiques industrielles de NEXTFLOW-Software, financeur de la thèse. Les développements réalisés ont permis d'adapter au formalisme NFM différents aspects (modélisation de la viscosité, détection de surface libre, désordre particulaire) ainsi que d'améliorer la précision des opérateurs.

Le second axe de thèse est dédié au développement d'une méthode de raffinement particulière adaptative, et plus particulièrement à son efficacité dans un contexte d'applicabilité industrielle. Nous avons d'abord porté un intérêt particulier à la robustesse, la précision ainsi qu'au temps de calcul des méthodes de raffinement particulière de l'état de l'art. De là, de fortes limitations ont été dégagées et nous ont amené à développer une approche de raffinement originale, inspirée de l'AMR (Adaptive Mesh Refinement [8]), afin de les lever. Ces développements ont été validés (en 2D et 3D) et sont aujourd'hui intégrés au sein des outils utilisés par NEXTFLOW-Software.

Le dernier axe concerne le couplage entre les méthodes SPH et Volumes Finis. Dans un premier temps, nous avons repris l'algorithme de couplage proposé par Marrone *et al.* [71] que nous avons généralisé via le développement d'un coupleur dont le rôle est de gérer les entrées/sorties entre les deux solveurs de façon transparente et générique aussi bien pour des simulations 2D que 3D. Ensuite, une amélioration a été proposée permettant de créer/supprimer dynamiquement des particules aux frontières du solveur Volumes Finis. Des validations sont en cours pour l'extension au 3D.

# Nomenclature

$\phi$	Variables conservatives
$\mathbf{g}$	Gravité
$\mathbf{G}^R$	Opérateur gradient régularisé
$\mathbf{G}_+^R$	Opérateur gradient régularisé symétrique
$\mathbf{G}_-^R$	Opérateur gradient régularisé antisymétrique
$\mathbf{u}$	Vitesse du fluide
$\mathbf{x}$	Position
$\Delta t$	Pas de temps
$\Delta x$	Pas d'espace
$\delta(\cdot)$	Distribution de Dirac
$\gamma$	Coefficient polytropique du fluide
$\langle f \rangle^h$	Approximation régularisée de $f$
$\mathbb{I}$	Matrice identité
$\mathbb{T}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\mathcal{P}$	Partition de $\Omega$
$\mathcal{S}$	Partition de la frontière $\partial\Omega$
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide
$\Omega$	Système matériel
$\omega$	Volume de contrôle
$\partial\Omega$	Frontière du système matériel $\Omega$
$\Pi_{ij}$	Viscosité artificielle utilisée dans le schéma de Monaghan



$\pi_{ij}$	Viscosité numérique utilisée dans le schéma $\delta$ -SPH
$\rho$	Masse volumique du fluide
$\rho_0$	Masse volumique nominale du fluide
$\sigma$	Tenseur des contraintes
$c$	Vitesse du son du fluide
$c_0$	Vitesse nominale du son du fluide
$CFL_\nu$	Condition de Courant, Friedrichs et Lewy pour la partie elliptique
$CFL_a$	Condition de Courant, Friedrichs et Lewy pour la partie hyperbolique
$D^R$	Opérateur divergence régularisé
$D_+^R$	Opérateur divergence régularisé symétrique
$D_-^R$	Opérateur divergence régularisé antisymétrique
$G_E(\cdot)$	Solution du problème de Riemann linéarisé
$L_{MEA}^R$	Opérateur laplacien de Morris
$L_{MG}^R$	Opérateur laplacien de Monaghan
$m$	Masse du fluide
$Ma$	Nombre de Mach
$P$	Pression du fluide
$R$	Rayon de régularisation du noyau d'interpolation d'une particule
$t$	Temps
$u_{max}$	Vitesse maximale de l'écoulement
$W$	Noyau régularisant d'interpolation d'une particule

# Chapitre 1

## Equations physiques

### Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles sont régies par trois lois de conservation : la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. La masse d'un système matériel  $\Omega$  borné reste constante, ce qui pour un milieu fluide, se traduit mathématiquement par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1)$$

où  $\rho$  et  $\mathbf{u}$  désignent respectivement la masse volumique et la vitesse du fluide considéré.

En l'absence de tension de surface, l'équation de conservation de la quantité de mouvement en formulation eulérienne s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \operatorname{div}(\mathbb{T}) \quad (1.2)$$

où  $P$  et  $\mathbf{g}$  désignent respectivement la pression du fluide et la force gravitationnelle. Le tenseur des contraintes visqueuses  $\mathbb{T}$  pour un fluide Newtonien, dont la viscosité vérifie l'hypothèse de Stokes, s'écrit :

$$\mathbb{T} = -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbb{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (1.3)$$

Dans le cas où la viscosité dynamique  $\mu$  est constante et le fluide incompressible ( $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ ), la partie elliptique de (1.2) se réduit à :

$$\operatorname{div}(\mathbb{T}) = \mu \Delta \mathbf{u} \quad (1.4)$$

En écrivant les équations dans un formalisme lagrangien, les quantités matérielles composant l'ensemble  $\Omega$  se déplacent au cours du temps suivant la relation :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} \quad (1.5)$$

où  $\frac{d}{dt}$  dénote la dérivée matérielle.

Les volumes fluides élémentaires  $\omega$  associés aux quantités matérielles se déforment au cours du temps le long de la trajectoire suivant la relation d'Euler :

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \operatorname{div}(\mathbf{u}) \quad (1.6)$$

En combinant (1.1) avec (1.6) on obtient une équation traduisant la conservation locale de la masse :

$$\frac{d(\omega\rho)}{dt} = 0 \quad (1.7)$$

Cette équation traduit qu'un volume élémentaire possède une masse  $m = \omega\rho$  constante au cours du temps.

Afin de fermer le système d'équations (1.1-1.2), il est nécessaire d'introduire une équation d'état reliant la pression  $P$  à la densité  $\rho$ . Pour un écoulement isentropique, cela peut se faire par exemple via l'utilisation de la loi de Tait [96] suivante :

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (1.8)$$

où  $\rho_0$  et  $c_0$  désignent respectivement la masse volumique nominale et la vitesse du son nominale pour le fluide considéré. Le coefficient polytropique du fluide est désigné par  $\gamma$ . L'utilisation de l'équation de Tait permet alors de se soustraire à la résolution de l'équation d'énergie puisque la pression ne dépend pas de l'énergie.

La vitesse du son dérive de la pression et s'écrit :

$$c = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = c_0 \sqrt{\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}} \quad (1.9)$$

## Conditions aux limites

Le domaine fluide étant généralement borné, il est nécessaire de définir des conditions aux limites sur les bords de ce domaine notés  $\partial\Omega$ .

### Conditions d'interface entre deux fluides

La condition dynamique à l'interface traduit la continuité des contraintes à l'interface entre deux fluides, *i.e* :

$$\sigma_1 : \mathbf{n} = \sigma_2 : \mathbf{n} \quad (1.10)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  représentent les tenseurs des contraintes associés à chacun des deux fluides considérés. Dans le cadre de la modélisation monofluide d'une surface libre, la condition

dynamique se traduit par l'imposition de la pression atmosphérique constante à la surface libre.

A l'interface, on a également continuité des vitesses :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  désignent la vitesse de chaque fluide.

### Condition d'adhérence à la paroi

La condition d'adhérence traduit la continuité des vitesses à l'interface entre un fluide et une paroi :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{solid} \quad (1.12)$$

### Condition de glissement à la paroi

La condition de glissement traduit la continuité des vitesses normales à l'interface entre le fluide et une paroi :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{solid} \cdot \mathbf{n} \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{u}_{solid}$  désigne la vitesse de la paroi.

Cette condition s'applique uniquement en l'absence de viscosité physique, *i.e* pour les équations d'Euler.



# Chapitre 2

## Méthode SPH

### Interpolation SPH

#### Construction de l'opérateur SPH

L'idée fondamentale de l'interpolation SPH repose sur l'estimation d'une quantité  $f(\mathbf{x})$  en un point donné de l'espace  $\mathbf{x}$  à partir des champs connus  $f(\mathbf{y})$  autour du point considéré par l'utilisation d'un produit de convolution :

$$\langle f \rangle = f * \delta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (2.1)$$

où  $\delta(\cdot)$  désigne la distribution de Dirac qui vérifie :

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1 \quad (2.2)$$

L'utilisation de la mesure de Dirac permet au niveau continu d'évaluer exactement la valeur d'une fonction en un point considéré.

Lorsqu'ils créèrent la méthode SPH, Monaghan, Gingold et Lucy [65, 39] proposèrent d'approcher la fonction de Dirac par une fonction régulière  $W$  à support compact, appelée noyau. Ainsi, ils définirent l'approximation régularisée :

$$\langle f \rangle^R = f * W(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{y})W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R)d\mathbf{y} \quad (2.3)$$

où le paramètre spatial  $R$  représente le rayon du support du noyau. Dans la première partie de cet exposé on considère que  $R$  est constant en espace.

Cette fonction noyau, tout comme la distribution de Dirac, vérifie :

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x}, R)d\mathbf{x} = 1 \quad (2.4)$$

Afin que le noyau  $W$  soit une bonne approximation de la distribution de Dirac, il doit tendre vers cette dernière au niveau continu, c'est-à-dire lorsque le rayon du support du noyau tend vers 0 :

$$\lim_{R \rightarrow 0} W(\mathbf{x}, R) = \delta(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

Dans le domaine de la simulation numérique, l'espace continu est discrétisé en un ensemble fini de volumes de contrôles. Dans le cadre de méthodes maillées, ces volumes de contrôle sont appelés cellules tandis que dans le cas de la méthode SPH ils sont appelés particules. Dans le cadre de la méthode SPH, l'espace continu est ainsi discrétisé en un ensemble de particules formant une partition  $\mathcal{P}$  dans laquelle on associe à chaque particule  $i$  une position  $\mathbf{x}_i$ , un volume de fluide élémentaire  $\omega_i$  et des quantités physiques telles que la masse volumique, la vitesse, la température, etc...

Ainsi la méthode SPH est basée sur des points de discrétisation ayant pour propriétés d'être des poids de quadrature et des particules matérielles, d'où le nom de méthode particulaire.

A partir de cette discrétisation, on obtient l'approximation discrète régularisée :

$$\langle f \rangle_i^R = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j f(\mathbf{x}_j) W_{ij} \quad (2.6)$$

où  $W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, R)$ . Il est à noter que (2.6) n'est ni plus ni moins qu'une méthode de quadrature composite de type point milieu de l'équation (2.3) où  $\omega_j$  joue le rôle de poids de quadrature.

## Définition du noyau

Le noyau  $W$  est une fonction régulière (au minimum  $\mathcal{C}^1$ ) à support compact dont la forme du support est généralement circulaire en 2D et sphérique en 3D. Le choix du noyau a été pendant de longues années une source de recherche en SPH car l'expérience montrait que certains noyaux donnaient de meilleurs résultats que d'autres pour un cas-test donné. En 2012, Dehnen *et al.* [23] réalisent une analyse de Fourier des différents noyaux recensés dans la littérature. Il en ressort que le noyau de Wendland  $\mathcal{C}^2$  [105] semble offrir le meilleur compromis entre précision et stabilité numérique.

Ainsi, en notant  $q = \frac{\|\mathbf{x}\|}{R}$ , le noyau de Wendland  $\mathcal{C}^2$  est défini par :

$$W(\mathbf{x}, R) = \frac{1}{\text{vol}(P)} \theta(q) \quad (2.7)$$

où

$$\theta(q) = C \times \begin{cases} (1 - q)^4(1 + 4q) & \text{si } 0 \leq q \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

La constante  $C$  permet de normaliser le noyau et de vérifier au niveau discret l'équation (2.4). Elle prend pour valeur 7 en 2D et 14 en 3D. La variable  $\frac{1}{\text{vol}(P)}$  correspond au volume du support du noyau ( $\pi R^2$  en 2D et  $\frac{4\pi R^3}{3}$  en 3D). Sauf indication contraire, il s'agit du noyau utilisé systématiquement dans le cadre de cette thèse.

## Opérateurs différentiels

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes nécessite la discrétisation d'opérateurs différentiels spatiaux des premier et second ordres. Nous détaillons dans cette section la construction de tels opérateurs à l'aide de l'interpolation SPH introduite précédemment.

### Opérateur gradient

À partir de (2.3) on peut écrire une approximation du gradient d'une fonction  $f$  :

$$\mathbf{G}^R(f) = \langle \nabla f \rangle^R = \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.9)$$

En effectuant une intégration par partie de (2.9) on en déduit :

$$\mathbf{G}^R(f) = \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{y}) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) \mathbf{n} d\mathbf{y} - \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.10)$$

où  $\partial\Omega$  désigne le bord du support du noyau et  $\mathbf{n}$  représente la normale au bord  $\partial\Omega$  dirigée vers l'extérieur. Lorsque le support du noyau n'intersecte pas de frontière du domaine fluide, l'intégrale surfacique devient nulle par compacité du noyau. Dans ce cas, on obtient finalement :

$$\mathbf{G}^R(f) = \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) est obtenue à l'aide de la propriété d'antisymétrie du gradient du noyau :

$$\nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) = -\nabla_{\mathbf{y}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) \quad (2.12)$$

On peut construire l'opérateur gradient  $\mathbf{G}_-^R$  suivant :

$$\mathbf{G}_-^R(f) = \mathbf{G}^R(f) - f(\mathbf{x}) \mathbf{G}^R(1) \quad (2.13)$$

$$= \int_{\Omega} (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})) \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.14)$$

que l'on peut écrire sous la forme discrète :

$$\mathbf{G}_-^R(f)_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (f_j - f_i) \nabla_i W_{ij} \quad (2.15)$$

On peut également construire un opérateur symétrique :

$$\mathbf{G}_+^R(f) = \mathbf{G}^R(f) + f(\mathbf{x}) \mathbf{G}^R(1) \quad (2.16)$$

$$= \int_{\Omega} (f(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})) \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.17)$$



que l'on peut écrire sous la forme discrète :

$$\mathbf{G}_+^R(\mathbf{f})_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (f_j + f_i) \nabla_i W_{ij} \quad (2.18)$$

L'opérateur gradient présenté dans cette section peut aussi être étendu aux champs vectoriels en remplaçant  $f$  par  $\mathbf{f}$  :

$$\mathbf{G}^R(\mathbf{f}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \otimes \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{G}_-^R(\mathbf{f}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \otimes \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{G}_+^R(\mathbf{f}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{f}(\mathbf{x})) \otimes \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.21)$$

toujours en l'absence de frontière du domaine fluide.

## Divergence

Par un raisonnement analogue à ce qui a été fait pour la construction d'opérateurs gradients, on peut définir un opérateur de divergence, en l'absence de frontière du domaine fluide :

$$D^R(\mathbf{f}) = \langle \text{div}(\mathbf{f}) \rangle^R = \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}_{x_i}}{\partial x_i} \right\rangle^R = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{f}_{x_i}(\mathbf{y}) \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R)}{\partial x_i} d\mathbf{y} \quad (2.22)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.23)$$

où  $N$  désigne la dimension du vecteur  $\mathbf{f}$  considéré.

A partir de (2.23) et en utilisant le même procédé que dans (2.14) on peut écrire l'opérateur divergence  $D_-^R(\mathbf{f})$  :

$$D_-^R(\mathbf{f}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.24)$$

De même, on peut déduire l'opérateur symétrique :

$$D_+^R(\mathbf{f}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.25)$$

## Laplacien

L'opérateur Laplacien est nécessaire dès lors que l'on souhaite résoudre les termes elliptiques des équations de Navier-Stokes. Ces termes permettent de prendre en compte les mécanismes de diffusion (la viscosité ou la température par exemple). L'idée la plus "naïve" pour construire l'opérateur Laplacien est d'utiliser le même procédé que pour la construction d'un opérateur différentiel du premier ordre, c'est-à-dire :

$$\langle \Delta f \rangle^R = \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.26)$$

L'expression (2.26) est obtenue via deux intégrations par partie et annulation des termes surfaciques via compacité du noyau, en l'absence de frontières du domaine fluide. La précision de cet opérateur est acceptable pour des distributions particulières cartésiennes mais elle devient malheureusement insuffisante dès lors que les particules se désorganisent [78].

Du point de vue mathématique, l'opérateur Laplacien n'est autre que la composition entre l'opérateur divergence et l'opérateur gradient. Morris *et al.* [79] se basent sur ce fait afin de formuler une décomposition entre l'opérateur divergence et l'opérateur gradient. Ainsi ils discrétisent l'opérateur divergence par une interpolation SPH tandis que pour l'opérateur gradient est utilisée une différence finie du premier ordre.

Pour construire l'opérateur Laplacien, Morris *et al.* utilisent l'opérateur  $D_+^R(\nabla f)$  :

$$D_+^R(\nabla f) = \int_{\Omega} (\nabla f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{x})) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.27)$$

$$= \int_{\Omega} (\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \nabla f(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}) \|\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R)\| d\mathbf{y} \quad (2.28)$$

où  $\mathbf{n} = -\frac{\nabla W(\mathbf{x}-\mathbf{y},R)}{\|\nabla W(\mathbf{x}-\mathbf{y},R)\|} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}$

Un développement de Taylor au premier ordre donne :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) + (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \nabla f(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) \quad (2.29)$$

De là on déduit :

$$\nabla f(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \nabla f(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} \approx \frac{f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})) \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} \quad (2.30)$$

Finalement, en réinjectant (2.30) dans (2.28) on obtient l'écriture du Laplacien de Morris *et al.* :

$$L_{MEA}^R(f) = \int_{\Omega} 2(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.31)$$

L'opérateur de Morris *et al.* (2.31) est ici écrit pour un champ scalaire. Il peut aussi être étendu au calcul de Laplacien vectoriel en remplaçant simplement  $f$  par  $\mathbf{f}$ . Cet opérateur, très populaire dans la communauté SPH, est précis dans le cadre d'écoulements visqueux sans surface libre. En présence de surface libre, il s'avère inconsistant d'après Colagrossi *et al.* [17]. Dans ce cas-là on lui préfère le Laplacien de Monaghan et Gingold [75] qui est défini par :

$$L_{MG}^R(\mathbf{f}) = 2(N + 2) \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (2.32)$$

où  $N$  désigne la dimension du problème considéré. Cet opérateur est consistant en 2D et 3D [32], conserve la quantité de mouvement et le moment angulaire. L'écriture du Laplacien de Monaghan et Gingold est très étroitement liée au terme de viscosité artificielle dont nous reparlerons dans la section 2.4.2.

## Applications aux équations de Navier-Stokes

### Approche faiblement compressible

Quand les applications visées sont telles qu'on peut faire l'hypothèse de l'incompressibilité du fluide considéré, la valeur de  $c_0$  fixée dans l'équation (1.9) n'est pas nécessairement égale à la vitesse du son réelle de ce fluide. Ainsi la compressibilité numérique du fluide pourra être choisie différente de la compressibilité réelle sans changer le comportement incompressible du fluide. En pratique la vitesse nominale du son  $c_0$  est choisie arbitrairement de sorte que le nombre de Mach  $Ma = \frac{u_{max}}{c_0}$  soit inférieur à 0.1 (approche faiblement-compressible). Ce choix de ne pas nécessairement utiliser la vitesse du son physique s'explique par plusieurs raisons :

- La résolution de la partie acoustique de l'écoulement ne présente pas nécessairement un intérêt pour les simulations que nous souhaitons réaliser en SPH
- L'imposition de la vitesse du son réelle conduit à utiliser des pas de temps  $\Delta t$  très petits (contrainte de stabilité) entraînant davantage de dissipation numérique et de temps de calcul.

Pour justifier une telle approche, on considère l'équation de quantité de mouvement dans le cadre des équations d'Euler 1D stationnaires :

$$u du + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.33)$$

En introduisant la dérivée totale, cette équation devient :

$$\frac{dP}{\rho} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho} = -u^2 \frac{du}{u} \quad (2.34)$$

En injectant (1.9) on obtient finalement :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u^2}{c^2} \frac{du}{u} = -Ma^2 \frac{du}{u} \quad (2.35)$$

Cette équation traduit le fait que la variation relative de la densité au sein de l'écoulement est directement liée au carré du nombre de Mach modulé par la variation relative de vitesse. En utilisant une approche faiblement compressible ( $Ma \leq 0.1$ ), la densité varie au maximum de 1%. Ainsi, les effets de compressibilité peuvent être considérés comme négligeables.

## Opérateurs discrets

L'équation de quantité de mouvement nécessite l'évaluation du gradient de pression  $\nabla P$  pour chaque particule  $i$  que l'on peut discrétiser avec l'opérateur  $\mathbf{G}_-^R(\cdot)_i$  sous la forme :

$$\mathbf{G}_-^R(P)_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (P_j - P_i) \nabla_i W_{ij} \quad (2.36)$$

L'emploi de ce type de discrétisation présente l'inconvénient de ne pas être conservatif au niveau de la quantité de mouvement et du moment angulaire. La raison principale de cette non conservation provient de la violation du principe d'action-réaction entre deux particules qui traduit le fait que l'effort d'une particule  $i$  sur  $j$  est opposé à l'effort de  $j$  sur  $i$ . Mathématiquement, le principe d'action-réaction se traduit par l'égalité  $\mathbf{F}_{i \rightarrow j} = -\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$ . Or, d'après (2.36) nous avons :

$$\omega_i \omega_j (P_j - P_i) \nabla_i W_{ij} \neq -\omega_j \omega_i (P_i - P_j) \nabla_j W_{ji} \quad (2.37)$$

Ce non-respect du principe d'action-réaction est la raison pour laquelle le gradient de pression  $\nabla P$  sera finalement discrétisé avec l'opérateur  $\mathbf{G}_+^R(\cdot)_i$  sous la forme :

$$\mathbf{G}_+^R(P)_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (P_j + P_i) \nabla_i W_{ij} \quad (2.38)$$

L'équation de continuité nécessite quant à elle l'évaluation de la divergence de la vitesse  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  que l'on peut discrétiser avec l'opérateur  $D_-^R(\cdot)_i$  :

$$D_-^R(\mathbf{u})_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.39)$$

En pratique, on préfère cet opérateur à  $D_+^R$  car il évalue exactement la divergence d'un champ constant.

## Montée en ordre des opérateurs

### Correction Shepard

La méthode de Shepard [92] permet d'enrichir la précision de l'approximation régularisée (2.3) et d'estimer ainsi exactement une fonction constante :

$$\langle f \rangle_i^R = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j f_j W_{ij} \quad (2.40)$$

où  $\gamma_i$  désigne la correction Shepard définie par :

$$\gamma_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j W_{ij} \quad (2.41)$$

Par exemple, ce procédé est couramment utilisé pour l'évaluation de la pression exercée par le fluide sur un capteur positionné sur une paroi.

### Matrice de renormalisation

La renormalisation est une méthode proposée par Randles & Libersky [90] afin d'augmenter la précision de l'opérateur gradient  $\mathbf{G}_-^R$ . Une estimation de  $\nabla \otimes \mathbf{x}$  via (2.20) s'écrit :

$$\mathbf{G}_-^R(\mathbf{x})_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \otimes \nabla_i W_{ij} \quad (2.42)$$

À convergence, cet opérateur tend vers la matrice identité. En pratique, ce résultat n'est plus vérifié dès lors que la distribution particulaire n'est plus isotrope (à la surface libre par exemple). Randles & Libersky proposent d'enrichir l'opérateur gradient via :

$$\hat{\mathbf{G}}_-^R(\mathbf{f})_i = \mathbf{B}_i \cdot \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i) \otimes \nabla_i W_{ij} \quad (2.43)$$

où la matrice de renormalisation  $\mathbf{B}_i$  est définie par :

$$\mathbf{B}_i = (\mathbf{G}_-^R(\mathbf{x})_i)^{-1} = \left( \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \otimes \nabla_i W_{ij} \right)^{-1} \quad (2.44)$$

Ainsi l'opérateur (2.43) permet d'évaluer exactement le gradient des fonctions linéaires.

### Correction MLS

Dilts *et al.* [28] ont introduit une correction qui permet d'évaluer exactement les fonctions constantes (tout comme la correction Shepard), les fonctions linéaires ainsi que le gradient des fonctions linéaires. En 2D il est nécessaire d'inverser la matrice suivante :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \sum_j \omega_j W_{ij} & \sum_j \omega_j (x_i - x_j) W_{ij} & \sum_j \omega_j (y_i - y_j) W_{ij} \\ \sum_j \omega_j (x_i - x_j) W_{ij} & \sum_j \omega_j (x_i - x_j)^2 W_{ij} & \sum_j \omega_j (x_i - x_j)(y_i - y_j) W_{ij} \\ \sum_j \omega_j (y_i - y_j) W_{ij} & \sum_j \omega_j (x_i - x_j)(y_i - y_j) W_{ij} & \sum_j \omega_j (y_i - y_j)^2 W_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

L'approximation régularisée d'un champ  $f$  d'une particule d'intérêt  $i$  s'exprime alors :

$$\langle f \rangle_i^{MLS} = (\mathbb{M}^{-1} \mathbf{e}_1, \mathbf{Q}) \quad (2.46)$$

$$\text{avec } \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sum_j \omega_j f_j W_{ij} \\ \sum_j \omega_j f_j (x_i - x_j) W_{ij} \\ \sum_j \omega_j f_j (y_i - y_j) W_{ij} \end{pmatrix}$$

Cette méthode, très coûteuse, nécessite l'inversion de la matrice  $\mathbb{M}$  pour chaque particule à laquelle on l'applique. En pratique, on lui préfère souvent la correction Shepard qui, bien que moins précise, s'avère plus robuste.

## Schémas numériques communément utilisés en SPH faiblement compressible

L'utilisation des équations (2.39) et (2.38) donne la discrétisation des équations d'Euler :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_i \quad (2.47)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (P_j + P_i) \nabla_i W_{ij} \quad (2.48)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_i) = -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.49)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) = 0 \quad (2.50)$$

La notion de stabilité, introduite par Lax et Richtmyer [53], stipule qu'en temps fini la norme de la solution numérique est bornée. Ce n'est pas le cas du schéma discrétisé (2.47-2.50).

Pour satisfaire la stabilité d'un tel schéma il est nécessaire d'introduire de la dissipation numérique au sein des équations. Cette approche est réalisée en décentrant la solution numérique, c'est-à-dire que le flux centré ( $P_i + P_j$  dans le cas de l'équation 2.48) est remplacé par un flux centré auquel on ajoute un terme dissipatif. Dans le cadre des schémas numériques présentés par la suite, nous verrons que ce terme dissipatif peut-être soit basé sur des considérations liées à la physique du problème, soit basé sur des considérations numériques.

### Consistance des opérateurs mis en jeu

Bien que nous ayons illustré jusqu'à présent, à l'aide de principes physiques ou mathématiques, pourquoi certains opérateurs étaient plus adaptés que d'autres, il convient de vérifier que les opérateurs retenus sont compatibles les uns avec les autres au sein du système discret d'équations de Navier-Stokes. Derrière cette notion de compatibilité se cache le terme de consistance qui signifie que le système discrétisé converge localement vers le système continu. De nombreux travaux ont été réalisés sur ce sujet avec différentes approches ; Bonet *et al.* [9] ont utilisé une étude variationnelle basée sur une approche thermodynamique, Collagrossi *et al.* [18] a considéré le problème à l'aide du principe des travaux virtuels, Vila [101] a réalisé la preuve de consistance à l'aide des distributions, Violeau [103] l'a démontré à l'aide de considérations Hamiltoniennes. La preuve de consistance revient à montrer que les opérateurs  $\mathbf{G}_+^R(\cdot)_i$  et  $D_-^R(\cdot)_i$  sont (mutuellement) anti-adjoints, c'est-à-dire qu'ils vérifient :

$$(\mathbf{G}_+^R(P)_i, \mathbf{u}_i)_h = -(D_-^R(\mathbf{u})_i, P_i)_h \quad (2.51)$$

Avant toute chose, il convient de définir deux opérateurs pour le produit scalaire discret :

$$\int_{\Omega} fg \, d\mathbf{y} \rightarrow (f, g)_h = \sum_{i \in \mathcal{P}} \omega_i f_i g_i \quad (2.52)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{y} \rightarrow (\mathbf{f}, \mathbf{g})_h = \sum_{i \in \mathcal{P}} \omega_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{g}_i \quad (2.53)$$

En écrivant en détail le produit scalaire entre  $\mathbf{G}_+^R(P)_i$  et  $\mathbf{u}_i$ , on obtient :

$$(\mathbf{G}_+^R(P)_i, \mathbf{u}_i)_h = \sum_{i, j \in \mathcal{P}} \omega_i \omega_j (P_i + P_j) \mathbf{u}_i \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.54)$$

$$= \sum_{i, j \in \mathcal{P}} \omega_i \omega_j P_i \mathbf{u}_i \cdot \nabla_i W_{ij} + \sum_{i, j \in \mathcal{P}} \omega_j \omega_i P_j \mathbf{u}_j \cdot \nabla_j W_{ji} \quad (2.55)$$

$$= \sum_{i, j \in \mathcal{P}} \omega_i \omega_j P_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.56)$$

$$= -(D_-^R(\mathbf{u})_i, P_i)_h \quad (2.57)$$

Puisque les opérateurs  $\mathbf{G}_+^R(\cdot)_i$  et  $D_-^R(\cdot)_i$  sont (mutuellement) anti-adjoints, on a bien consistance du système discrétisé. Cependant, la consistance assure seulement que le système d'équations discrétisées converge localement vers le système continu. La stabilité, qui est l'objet de la section suivante, est une condition nécessaire pour assurer une convergence globale du système discrétisé vers le système continu.

## Schéma avec viscosité artificielle

Historiquement, le concept de viscosité artificielle a été introduit par Von Neumann et Richtmyer en 1950 [82] pour la modélisation de tubes à choc afin de stabiliser la solution numérique au voisinage de telles discontinuités. Ce concept a été repris par Monaghan [76] et adapté au formalisme particulaire :

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{16} \alpha (\rho_i + \rho_j) (R_i + R_j) (c_i + c_j) \mu_{ij} \quad \text{où} \quad \mu_{ij} = \begin{cases} \frac{\mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2 + \epsilon R_{ij}^2} & \text{si } \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.58)$$

où  $\alpha$  est un coefficient, variant entre 0.01 et 1 dépendant du problème considéré. Le terme  $\mu_{ij}$  est une approximation de la divergence de  $\mathbf{u}$ . La variable  $\epsilon$  permet d'éviter une division par zéro lorsque les particules  $i$  et  $j$  sont confondues.

L'efficacité du terme de viscosité artificielle est directement corrélée au choix de  $\alpha$ , une trop petite valeur conduira à des oscillations au voisinage des chocs, une trop grande valeur entraînera une diffusion numérique excessive sur la partie convective des équations.

Le terme de viscosité artificielle (2.58) est introduit uniquement dans l'équation de quantité de mouvement (2.48) afin de décentrer la solution numérique :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (P_j + P_i + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} \quad (2.59)$$

## $\delta$ -SPH

Antuono *et al.* [3] proposent une formulation alternative au schéma standard (2.47-2.50) en ajoutant des termes diffusifs dans l'équation de quantité de mouvement mais aussi dans l'équation de continuité. L'introduction de ces termes diffusifs permet un filtrage du bruit introduit par les ondes acoustiques de hautes fréquences au sein du champ de pression.

Ainsi, l'équation de continuité devient :

$$\frac{d}{dt}(\rho_i) = -\rho_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} + \delta c_0 R \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \Psi_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.60)$$

tandis que l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (P_j + P_i) \nabla_i W_{ij} + \alpha c_0 R \frac{\rho_0}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \pi_{ij} \nabla_i W_{ij} \quad (2.61)$$

Le terme  $\pi_{ij}$  a pour rôle d'introduire de la viscosité numérique au sein de l'équation de quantité de mouvement, son écriture est le pendant du terme utilisé au sein de l'opérateur laplacien de Monaghan  $L^R(\mathbf{f})_{MG}$  dans (2.32) pour modéliser la viscosité physique :

$$\pi_{ij} = \frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} \quad (2.62)$$

Le terme  $\Psi_{ij}$  est quant à lui défini par :

$$\Psi_{ij} = 2(\rho_j - \rho_i) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} - \left( \hat{\mathbf{G}}_-^R(\rho)_i + \hat{\mathbf{G}}_-^R(\rho)_j \right) \quad (2.63)$$

En comparaison avec le terme de stabilisation de Monaghan, le schéma  $\delta$ -SPH nécessite une boucle de calcul supplémentaire sur les particules afin de calculer  $\hat{\mathbf{G}}_-^R(\rho)_i$  et  $\hat{\mathbf{G}}_-^R(\rho)_j$

Le coefficient  $\delta$  contrôle l'amplitude du terme diffusif. Antuono *et al.* [3] ont effectué une analyse du schéma  $\delta$ -SPH qui a mis en exergue que  $0 < \delta < 0.2$  permet d'assurer la stabilité du schéma numérique. Le terme  $\alpha$  contrôle l'amplitude de la viscosité numérique. La littérature recommande  $\alpha = 0.01$ .

Enfin, il est important de garder à l'esprit que les termes diffusifs disparaissent à convergence. En effet, lorsque  $R \rightarrow 0$ , le schéma  $\delta$ -SPH dérive vers le schéma standard (2.47-2.50) qui est consistant avec les équations d'Euler.



## Schéma Riemann-SPH

### Présentation du schéma

Le schéma Riemann-SPH introduit un décentrement au sein du schéma standard (2.47-2.50) via la résolution d'un problème de Riemann à l'interface  $\mathbf{n}_{ij}$  entre les particules  $i$  et  $j$ . La donnée initiale d'un problème de Riemann s'apparente à deux états constants  $\phi_i$  et  $\phi_j$ , représentant les variables conservatives des particules  $i$  et  $j$ , de part et d'autre de l'interface  $\mathbf{n}_{ij}$  se déplaçant à la vitesse  $\frac{\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j}{2}$ . De là, la résolution du problème de Riemann permet de déterminer la solution physique associée à l'interaction entre les particules  $i$  et  $j$  (onde de choc, discontinuité de contact, onde de détente). On présente ici les deux formes sous lesquelles peut s'écrire le schéma Riemann-SPH.

### Schéma de Vila

Vila [101] a proposé un formalisme des équations d'Euler adapté à la méthode SPH. Considérons la forme conservative des équations d'Euler en trois dimensions intégrée sur un volume de contrôle arbitraire  $V(t)$  :

$$\iiint_{V(t)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}(\mathbb{F}_E(\phi)) \right) dV = 0 \quad (2.64)$$

avec le vecteur des variables conservatives  $\phi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{pmatrix}$  et le flux eulérien des variables

$$\text{conservatives } \mathbb{F}_E(\phi) = \begin{pmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + P & \rho uv & \rho uw \\ \rho uv & \rho v^2 + P & \rho vw \\ \rho uw & \rho vw & \rho w^2 + P \end{pmatrix}$$

D'après le théorème de Leibniz-Reynolds :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \phi dV = \iiint_{V(t)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dV + \int S(t) \int (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \phi dS \quad (2.65)$$

avec  $\mathbf{u}$  la vitesse locale sur l'enveloppe  $S(t)$  de  $V(t)$ . L'équation (2.64) se réécrit alors :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \phi dV + \iiint_{V(t)} \text{div}(\mathbb{F}_E(\phi) - \mathbf{u} \otimes \phi) dV = 0 \quad (2.66)$$

En considérant que l'espace peut-être partitionné en un ensemble de volumes discrets (notés particules), toute quantité discrète  $f_i(t)$  s'exprime comme la moyenne de  $f(x, y, z, t)$  sur le volume de contrôle  $\omega_i(t)$  associé à la particule  $i$  :

$$f_i(t) = \frac{1}{\omega_i(t)} \iiint_{\omega_i(t)} f(x, y, z, t) dV \quad (2.67)$$

Ainsi, l'équation (2.66) s'écrit sous forme discrète :

$$\frac{d(\omega_i \phi_i)}{dt} + \omega_i \operatorname{div}(\mathbb{F}_E(\phi) - \mathbf{u} \otimes \phi)_i = 0 \quad (2.68)$$

Par application du théorème de transport (2.65), on obtient une équation d'évolution du volume :

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \omega_i \operatorname{div}(\mathbf{u})_i \quad (2.69)$$

Via l'opérateur divergence de l'équation (2.39), l'équation de variation du volume s'écrit :

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.70)$$

En utilisant l'égalité  $\nabla(\mathbb{F}_E(\phi) - \mathbf{u} \otimes \phi) = \nabla(\mathbb{F}_E(\phi) - \mathbf{u} \otimes \phi) + (\mathbb{F}_E(\phi) - \mathbf{u} \otimes \phi) \nabla 1$ , l'équation (2.68) s'exprime sous la forme :

$$\frac{d(\omega_i \phi_i)}{dt} + \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (F_i - \mathbf{u}_i \otimes \phi_i + F_j - \mathbf{u}_j \otimes \phi_j) \nabla_i W_{ij} = 0 \quad (2.71)$$

Vila [101] propose de remplacer (2.71) par un flux centré :

$$\frac{d(\omega_i \phi_i)}{dt} = -\omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} 2\omega_j (F_{ij} - \mathbf{u}(\mathbf{x}_{ij}) \otimes \phi_{ij}) \nabla_i W_{ij} \quad (2.72)$$

### Calcul des flux et montée en ordre du schéma Riemann-SPH

Le schéma Riemann-SPH de Vila nécessite le calcul du flux  $F_{ij}$  à l'interface  $\mathbf{x}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j}{2}$  à l'aide d'un problème de Riemann dont les états gauche et droit sont respectivement  $\phi_i$  et  $\phi_j$ . Ce problème de Riemann se déplace à la vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_{ij}) = \frac{\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j}{2}$ . Le flux  $F_{ij}$  s'écrit sous la forme :

$$F_{ij}(\phi_i, \phi_j) = \begin{pmatrix} \rho_E \mathbf{u}_E \\ \rho_E \mathbf{u}_E \otimes \mathbf{u}_E + P_E \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

où  $\rho_E$ ,  $\mathbf{u}_E$  et  $P_E$  désignent la solution du problème de Riemann qui peut être calculée à l'aide d'un solveur exact [47] ou bien à l'aide d'un solveur linéarisé [80, 91].

Ainsi, en remplaçant  $\phi_{ij}$  par  $\phi_E$ , le schéma Riemann-SPH proposé par Vila s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_i \quad (2.74)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i) = \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.75)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) = -\omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j 2\rho_E (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}(\mathbf{x}_{ij})) \nabla_i W_{ij} \quad (2.76)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i \mathbf{u}_i) = \omega_i \rho_i \mathbf{g} - \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j 2(\rho_E \mathbf{u}_E \otimes (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}(\mathbf{x}_{ij})) + P_E \mathbb{I}) \nabla_i W_{ij} \quad (2.77)$$

L'équation (2.76) traduit l'échange de flux de masse entre les particules. Bien que le schéma de Vila ne conserve pas localement la masse, il la conserve globalement.

Le schéma Riemann-SPH est extrêmement dissipatif. En effet, lors de la résolution du problème de Riemann, les états constants  $\phi_i$  et  $\phi_j$  de part et d'autre de l'interface sont vus par le solveur de Riemann comme des discontinuités physiques alors qu'il s'agit en réalité de discontinuités numériques dues à une approximation constante par morceaux de la solution numérique.

Pour pallier à cet excès de dissipation numérique, Van Leer [99] propose de remplacer les états constants  $\phi_i$  et  $\phi_j$  par une reconstruction polynomiale d'ordre  $k$  (degré du polynôme utilisé). Cette méthode est appelée MUSCL (Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws). En utilisant l'opérateur renormalisé (2.43), on peut écrire une reconstruction affine de  $\phi_i$  :

$$\hat{\phi}_i \left( \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j}{2} \right) = \phi_i + \hat{\mathbf{G}}_-^R(\phi)_i \cdot \left( \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j}{2} - \mathbf{x}_i \right) \quad (2.78)$$

La reconstruction affine ne peut cependant pas être utilisée en l'état car l'utilisation de (2.78) au sein du problème de Riemann associé à l'équation (2.77) peut conduire à l'apparition d'oscillations numériques non représentatives de la solution physique du problème considéré. Ce phénomène numérique correspond à une violation du principe du maximum.

Pour pallier à ce problème, Harten [43] introduit le concept de schéma TVD (Total variation diminishing). La variation totale à un instant  $t$  pour une loi de conservation scalaire s'exprime sous la forme :

$$VT(f(t)) = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| dx \quad (2.79)$$

Un schéma TVD vérifie alors pour  $t_2 \geq t_1$  :

$$VT(f(t_2)) \leq VT(f(t_1)) \quad (2.80)$$

Afin de satisfaire (2.80), il convient d'utiliser un limiteur de pente dont la fonction est de veiller à ce que les extrema locaux de la solution numérique n'augmentent pas au cours du temps (*i.e* préservation de la monotonie de la solution). Le limiteur de pente s'applique à la variable  $\theta$  qui correspond, pour chaque variable conservative, au rapport entre le gradient centré de la particule  $i$  et la pente reliant la particule  $i$  et  $j$  :

$$\theta_i = \frac{\hat{\mathbf{G}}_-^R(\phi)_i \cdot \left(\frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j}{2} - \mathbf{x}_i\right)}{\phi_j - \phi_i} \quad (2.81)$$

Sweby [94] parvient à déterminer les conditions qu'un limiteur de pente doit satisfaire afin que le schéma numérique soit TVD (Fig. 2.1).

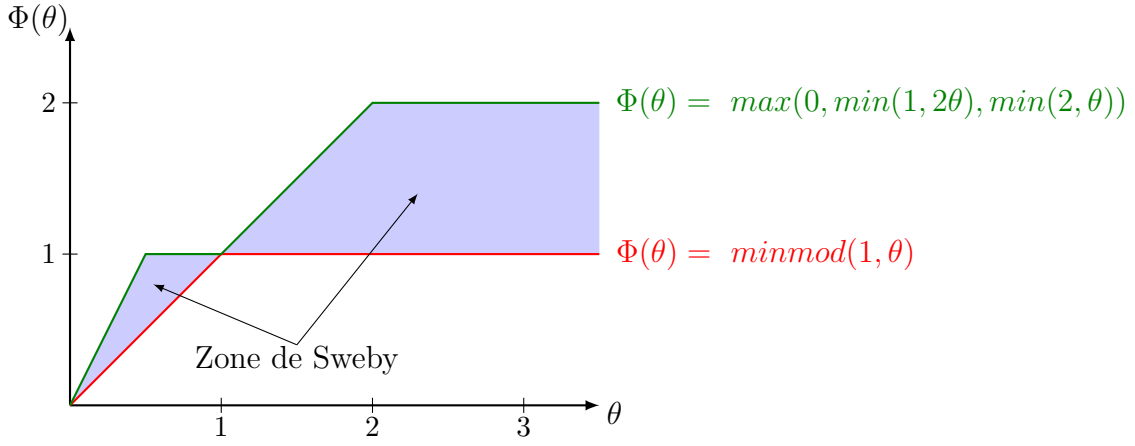


Figure 2.1: Zone TVD déterminée par Sweby

Au sein du laboratoire nous utilisons le limiteur minmod défini par :

$$\text{minmod}(1, \theta) = \min(0, \max(1, \theta)) + \max(0, \min(1, \theta)) \quad (2.82)$$

dont l'action est illustrée par la figure (2.2). Ainsi, après introduction du limiteur de pente, (2.78) se réécrit :

$$\hat{\phi}_i \left( \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j}{2} \right) = \phi_i + \text{minmod}(1, \theta_i)(\phi_j - \phi_i) \quad (2.83)$$

En pratique, le schéma Riemann-SPH n'est pas TVD car le limiteur minmod est appliqué interaction par interaction, ce qui lui confère un caractère légèrement dispersif. Guilcher [42] a étudié l'application du limiteur sur l'ensemble des interactions (chose qui doit être faite en théorie) et a constaté que cela confère un aspect beaucoup trop dissipatif au schéma ainsi qu'un surcoût CPU (boucle de calcul supplémentaire afin d'effectuer la limitation sur l'ensemble des interactions d'une particule).

### Schéma de Vila dans un formalisme ALE

Le schéma Riemann-SPH de Vila, décrit dans la section 2.4.4.2, est présenté dans un formalisme lagrangien. Il est également possible de réécrire ce schéma dans un formalisme ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian), permettant aux particules de se déplacer à une

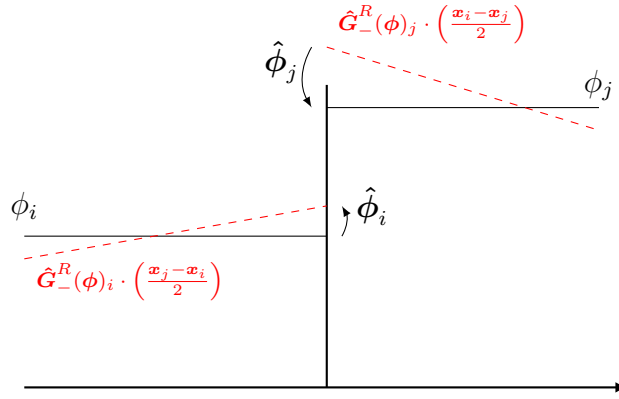


Figure 2.2: Représentation schématique de l'effet du limiteur minmod

vitesse arbitraire  $\mathbf{u}_0$ .

Pour ce faire, on remplace les vitesses lagrangiennes  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_j$  de l'équation de variation du volume (2.75) :

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_{0j} - \mathbf{u}_{0i}) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.84)$$

On fait de même pour le calcul des flux de l'équation (2.72) en remplaçant  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_{ij})$  par  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_{ij})$  :

$$\frac{d(\omega_i \phi_i)}{dt} = -\omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} 2\omega_j (F_{ij} - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_{ij}) \otimes \phi_{ij}) \nabla W_{ij} \quad (2.85)$$

Ainsi, la résolution du problème de Riemann tient compte du déplacement de l'interface à la vitesse  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_{ij}) = \frac{\mathbf{u}_{0i} + \mathbf{u}_{0j}}{2}$ . Finalement, le schéma de Vila dans un formalisme ALE s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_{0i} \quad (2.86)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i) = \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_{0j} - \mathbf{u}_{0i}) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.87)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) = -\omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j 2\rho_E (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_{ij})) \nabla_i W_{ij} \quad (2.88)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i \mathbf{u}_i) = \omega_i \rho_i \mathbf{g} - \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j 2(\rho_E \mathbf{u}_E \otimes (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_{ij})) + P_E \mathbb{I}) \nabla_i W_{ij} \quad (2.89)$$

Dans le cadre d'une formulation purement eulérienne ( $\mathbf{u}_{0i} = 0$  et  $\mathbf{u}_{0j} = 0$ ), le volume des particules ne varie pas au cours du temps et des flux de masse s'échangent entre particules adjacentes. Dans le cas purement lagrangien ( $\mathbf{u}_{0i} = \mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_{0j} = \mathbf{u}_j$ ), la masse n'est pas conservée localement mais le schéma reste globalement conservatif en masse. Cette remarque sur la conservation demeure valable quelque soit la vitesse de transport  $\mathbf{u}_0$  adoptée,

les flux échangés entre paires de particules étant symétriques à la fois dans l'équation de conservation de la masse et celle de conservation du moment.

### Schéma de Leduc *et al.*

Leduc *et al.* [54] ont introduit, dans le cadre de la modélisation d'écoulements multiphasiques, un schéma Riemann-SPH sans flux de masse qui dérive du schéma lagrangien de Vila. Pour ce faire, considérons que la vitesse de l'interface entre les particules est égale à la vitesse de la solution du problème de Riemann :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_{ij}) = \mathbf{u}_E \quad (2.90)$$

Ainsi les équations (2.76) et (2.77) deviennent:

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) = 0 \quad (2.91)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i \mathbf{u}_i) = \omega_i \rho_i \mathbf{g} - \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j 2P_E \nabla_i W_{ij} \quad (2.92)$$

En manipulant l'équation de volume (2.75), on introduit la vitesse de la solution du problème de Riemann :

$$\frac{d}{dt}(\omega_i) = \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.93)$$

$$= 2\omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \left( \frac{\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_i}{2} - \mathbf{u}_i \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.94)$$

$$= 2\omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.95)$$

Finalement, le schéma Riemann-SPH de Leduc *et al.* sous sa forme complète s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_i \quad (2.96)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i) = 2\omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.97)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) = 0 \quad (2.98)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i \mathbf{u}_i) = \omega_i \rho_i \mathbf{g} - \omega_i \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j 2P_E \nabla_i W_{ij} \quad (2.99)$$

La procédure MUSCL décrite dans la section 2.4.4.3 demeure applicable à ce schéma. Leduc *et al.* [54] ont opté pour un solveur de Riemann linéarisé pour déterminer  $\mathbf{u}_E$  et  $P_E$  [80] (le choix d'un solveur exact est également possible) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_E = \frac{\rho_i c_i \mathbf{u}_i + \rho_j c_j \mathbf{u}_j}{\rho_i c_i + \rho_j c_j} + \frac{P_i - P_j}{\rho_i c_i + \rho_j c_j} \\ P_E = \frac{\rho_j c_j P_i - \rho_i c_i P_j}{\rho_i c_i + \rho_j c_j} + \frac{\rho_i c_i \rho_j c_j (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)}{\rho_i c_i + \rho_j c_j} \end{cases} \quad (2.100)$$

Le schéma de Leduc *et al.* est purement lagrangien, il n'autorise pas l'échange de flux de masse et ne peut pas, par conséquent, être écrit dans un formalisme ALE. Cependant, il est possible de déplacer les particules à une vitesse arbitraire  $\mathbf{u}_0$  en remplaçant (2.96) par :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_{0i} \quad (2.101)$$

Ce déplacement, en l'absence de flux de masse, peut résulter en un champ de pression bruité comme l'ont montré Oger *et al.* [87]. Néanmoins, ce type d'approche demeure intéressant lorsque la discrétisation d'un système d'équations dans un formalisme ALE n'est pas applicable.

## Intégration temporelle

Une fois les équations d'Euler discrétisées spatialement, il est nécessaire de les intégrer temporellement afin de faire évoluer la solution numérique au cours du temps. En SPH faiblement compressible, l'intégration explicite en temps est communément utilisée et évite l'inversion d'un système matriciel. La contrepartie de cette approche réside dans le dimensionnement du pas de temps  $\Delta t$  qui est régi par une condition restrictive de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [22].

### Condition de stabilité hyperbolique

Lorsque seules les équations d'Euler sont discrétisées (*i.e* pas de viscosité physique), la condition CFL s'écrit :

$$\Delta t_a \leq CFL_a \min_i \left( \frac{R_i}{c_i} \right) \quad (2.102)$$

où  $\Delta t_a$  désigne le pas de temps lié à la contrainte CFL sur la propagation des ondes acoustiques,  $R_i$  et  $c_i$  désignent respectivement le rayon et la vitesse du son de la particule  $i$ . La contrainte (2.102) traduit le fait que le pas de temps  $\Delta t_a$  doit être fixé de sorte que les ondes issues d'une particule ne soient pas perturbées par les ondes des particules situées au-delà de son support. En pratique, pour un schéma d'intégration Runge-Kutta d'ordre 4, le nombre de Courant  $CFL_a$  utilisé couramment est 0.375

### Condition de stabilité elliptique

Lorsque les termes de viscosité sont pris en compte, une condition de stabilité pour la partie elliptique des équations de Navier-Stokes établit que :

$$\Delta t_\nu \leq CFL_\nu \min_i \left( \frac{R_i^2}{\nu_i} \right) \quad (2.103)$$

avec  $\nu_i$  la viscosité cinématique du fluide et  $CFL_\nu$  le nombre de Courant de diffusion fixé couramment à la valeur 0.12. La condition de stabilité de la partie elliptique prévaut dès lors que l'écoulement est dominé par  $\mu\Delta\mathbf{u}$  ( $Re \leq 10$ ).

Finalement, le pas de temps du schéma numérique est choisi de sorte qu'il vérifie les contraintes de stabilité sur les parties hyperbolique et elliptique, *i.e* :

$$\Delta t = \min(\Delta t_a, \Delta t_\nu) \quad (2.104)$$

## Corrections numériques communément utilisées en SPH

### Correction de l'instabilité de tension

La méthode SPH souffre d'une instabilité inhérente à la méthode lorsque la pression au sein du fluide devient négative. Cette instabilité dite de tension (Tensile instability) a fait l'objet de nombreux travaux (notamment, Swegle *et al.* [95], Monaghan [77]). Dans le cadre du schéma standard, la correction de l'instabilité de tension nécessite de corriger l'équation de quantité de mouvement. Une possibilité est d'utiliser :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (P_j + P_i) \nabla_i W_{ij} - \frac{2P_{min}(t)}{\rho_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \nabla_i W_{ij} \quad (2.105)$$

où  $P_{min}(t) = \max(0, -\min_{k \in \mathcal{P}} P_k(t))$ . L'équation (2.105) représente le formalisme que nous utilisons au sein du laboratoire. Le terme  $P_{min}(t)$  diffère de la procédure (non conservative) de Basa *et al.* [6] qui utilisent un terme de pression correspondant à la moyenne des pressions des particules voisines.

Suivant le schéma SPH utilisé, l'équation (2.105) peut être étendue au schéma avec viscosité artificielle, au schéma  $\delta$ -SPH, ainsi qu'au schéma Riemann-SPH.

L'instabilité de tension crée des "trous" au sein de l'écoulement (Fig. 2.3) lorsque la pression est négative. L'utilisation de (2.105) peut être vue comme un décalage en pression permettant de rétablir une distribution particulaire isotrope, et ainsi contrer cette instabilité. Il est important de garder à l'esprit que le terme  $P_{min}(t)$  ajoute de la viscosité numérique au sein du schéma, et que cette viscosité est d'autant plus importante que l'amplitude de la pression négative est élevée.

Le terme (2.105) ne peut pas être utilisé pour des simulations monophasiques impliquant une surface libre. En effet, ce terme pousserait les particules dans la direction de la surface libre conduisant à une solution non physique. Néanmoins, dans le cadre de simulations à deux fluides, ce terme est parfaitement adapté car le support des particules situées à l'interface entre deux fluides est complet [18].



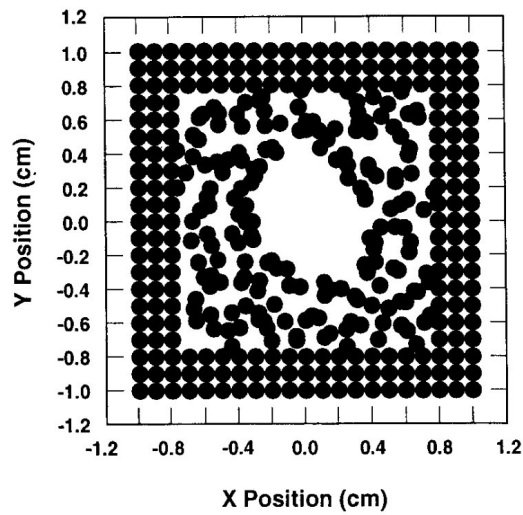


Figure 2.3: Instabilité de tension mise en évidence par Swegle [95] pour un corps soumis à une déformation

## Méthodes de désorganisation particulaire

L'importance de l'isotropie de la distribution spatiale des particules est essentielle du point de vue de l'erreur de troncature des opérateurs mis en jeu, ainsi que pour la qualité des simulations en termes de précision et de stabilité. La méthode SPH étant lagrangienne, les particules s'organisent spatialement suivant les trajectoires. Dès lors que le fluide s'étire, les volumes des particules se déforment anisotropiquement, entraînant une organisation spatiale des particules sous forme de structures en ligne (Fig. 2.4).

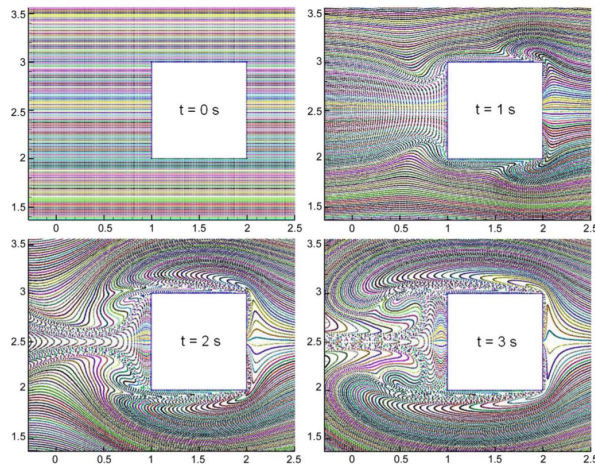


Figure 2.4: Evolution temporelle d'un écoulement lagrangien autour d'un obstacle carré (Colagrossi *et al.* [1])

La Figure 2.4 représente l'écoulement autour d'un obstacle carré pour un nombre de Reynolds  $Re = 50$ . La solution numérique présentée ici a été calculée à l'aide d'un code SPH eulérien, et un post-traitement a permis de déplacer les particules suivant les trajectoires

calculées. Une telle anisotropie des particules a pour conséquence de faire chuter drastiquement la précision de l'opérateur gradient SPH. La littérature SPH présente différentes méthodes/techniques destinées à désordonner les particules et à "casser" ainsi ces structures néfastes pour la solution numérique.

### X-SPH

Afin d'améliorer la qualité des écoulements avec surface libre, Monaghan [73] a introduit un champ de transport lissé appelé X-SPH qui consiste à remplacer (2.47) par :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{u}_i + 2\epsilon \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \rho_j \left( \frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i}{\rho_i + \rho_j} \right) W_{ij} \quad (2.106)$$

Le paramètre  $\epsilon$  est à ajuster et vaut typiquement 0.5. Monaghan constate que (2.106) permet d'éviter que les particules ne se rapprochent trop. La correction X-SPH a pour inconvénient majeur de ne pas nécessairement faire converger le système d'équations (2.48,2.49,2.50,2.106) vers la solution des équations d'Euler. En effet, à convergence, rien n'assure que le terme  $2\epsilon \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \rho_j \left( \frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i}{\rho_i + \rho_j} \right) W_{ij}$  tende vers 0.

### Particle shifting

Lind *et al.* [61] et Xu *et al.* [108] ont développé une méthode de shifting afin d'introduire une petite perturbation dans le déplacement des particules tout en tenant compte de l'influence de celle-ci au sein des variables conservatives. Pour ce faire, via un développement de Taylor des variables conservatives on obtient :

$$\phi_{\hat{i}} = \phi_i + (\nabla \phi)_i \cdot (\mathbf{x}_{\hat{i}} - \mathbf{x}_i) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\hat{i}}\|^2) \quad (2.107)$$

où  $i$  et  $\hat{i}$  sont respectivement l'ancienne et la nouvelle position de la particule. L'amplitude et la direction du vecteur de shifting sont gouvernées par la loi de Fick permettant de décrire le déplacement d'une espèce chimique fortement concentrée vers une zone de plus faible concentration, en vue d'homogénéiser son milieu. Mathématiquement cela se traduit par :

$$\mathbf{J} = -D\nabla C \quad (2.108)$$

où  $\mathbf{J}$  désigne le flux,  $C$  la concentration de l'espèce chimique et  $D$  un coefficient de diffusion. En faisant l'hypothèse que le flux, *i.e* le nombre de particules par unité de surface par unité de temps, est proportionnel à la vitesse des particules, la loi de Fick permet d'écrire :

$$\mathbf{x}_{\hat{i}} = \mathbf{x}_i - 0.5R^2 \nabla C_i \quad (2.109)$$

où  $\nabla C_i$  permet d'évaluer le gradient de la concentration :

$$\nabla C_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (1 + f_{ij}) \nabla_i W_{ij} \quad (2.110)$$

et où  $f_{ij}$  désigne un terme introduit par Monaghan [77] afin de réduire l'instabilité de tension :

$$f_{ij} = 0.2 \left( \frac{W_{ij}}{W(\Delta x)} \right)^4 \quad (2.111)$$

La méthode de “particle shifting”, couramment utilisée dans la méthode I-SPH (SPH incompressible), peut-être vue comme une technique de remaillage (les quantités physiques associées à une particule sont extrapolées de son ancienne position vers sa nouvelle).

### Loi de vitesse Oger *et al.*

Récemment, Oger *et al.* [87] ont proposé une méthode de ré-organisation des particules basée sur un formalisme ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) du schéma Riemann-SPH. Ce formalisme utilise une loi de vitesse de transport dont le rôle est de modifier l'organisation des particules.

La loi de vitesse, notée  $\mathbf{u}_{0i}$ , s'exprime comme une modification de la vitesse lagrangienne :

$$\mathbf{u}_{0i} = \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\delta}_{ui} \quad \text{avec } \|\boldsymbol{\delta}_{ui}\| \ll \|\mathbf{u}_i\| \quad (2.112)$$

où  $\boldsymbol{\delta}_{ui}$  correspond à une perturbation de faible amplitude du champ de vitesse afin de détruire les structures en lignes inhérentes à la méthode SPH.

Pour ce faire, Oger *et al.* [87] ont proposé la loi de vitesse suivante :

$$\boldsymbol{\delta}_{ui} = \begin{cases} -U_i^{char} \hat{\mathbf{n}}_i & \text{si } U_i^{char} \|\hat{\mathbf{n}}_i\| < 0.25\|\mathbf{u}_i\| \\ -0.25\|\mathbf{u}_i\| \frac{\hat{\mathbf{n}}_i}{\|\hat{\mathbf{n}}_i\|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.113)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}_i$  est un vecteur pointant dans la direction où la distribution est anisotrope :

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_{0j} \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, R_\delta) R_i \quad (2.114)$$

La vitesse caractéristique de l'écoulement  $U_i^{char} = c_0 Ma$  permet de moduler la perturbation d'une amplitude indépendamment des gammes de vitesse de l'écoulement considéré. A convergence, la loi de vitesse de transport tend vers la vitesse lagrangienne :

$$\lim_{R_i \rightarrow 0} \mathbf{u}_{0i} = \mathbf{u}_i \quad (2.115)$$

On a donc bien la consistance aux équations d'Euler lagrangiennes. Le choix  $R_\delta = 2\Delta x$  au sein de (2.114) permet de mesurer l'anisotropie à une échelle très localisée autour de la particule considérée. Par souci de robustesse, le choix du volume initial  $\omega_{0j}$  de la particule  $j$  est préféré à son volume courant  $\omega_j$ .

La limitation à 25% dans (2.113) est utilisée afin d'advecter les particules avec une vitesse proche de la vitesse lagrangienne même là où la correction agit le plus.

La condition cinématique de surface libre (1.11) impose que les particules se situant à l'interface se déplacent lagrangiennement, *i.e.*  $\mathbf{u}_{0i} = \mathbf{u}_i$ . Par conséquent, il est nécessaire d'effectuer une détection des particules localisées à la surface libre afin que leur vitesse ne soit pas modifiée. Cette détection est aisée dans le cadre d'une simulation multi-fluide puisque cela revient à détecter la présence d'une ou plusieurs particules de phases différentes dans le voisinage d'une particule d'intérêt. Dans le cadre d'une simulation monophasique, cette détection est beaucoup plus complexe à réaliser. Les détails de cette détection via l'algorithme de Marrone *et al.* [70] sont présentés dans la section 3.2.2. De plus, le respect de l'équation (2.114) implique que les particules situées à une distance inférieure à  $R_\delta$  de l'interface ne sont pas affectées par la loi de vitesse ( $\mathbf{u}_{0i} = \mathbf{u}_i$ ). Sur la figure 2.5, seules les particules bleues ( $\bullet$ ) sont advectées suivant la loi de vitesse.

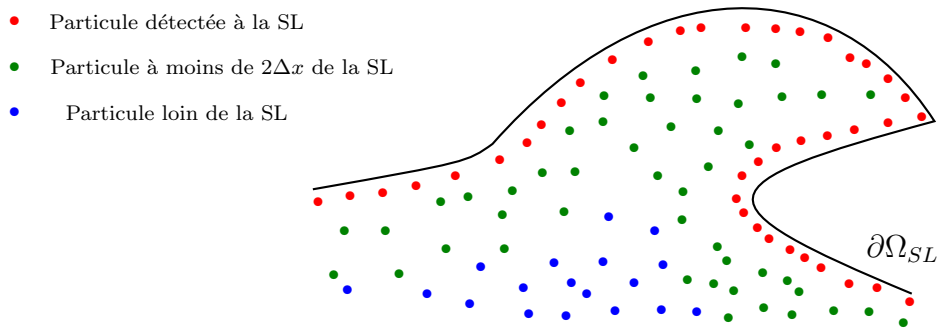


Figure 2.5: Représentation des différents types de particules lors de la détection de surface libre  $\partial\Omega_{SL}$

Dans la section 5 consacrée au raffinement particulaire, nous présenterons une extension de la loi de vitesse Oger *et al.* qui permet de désordonner les particules jusqu'à la surface libre de sorte que seule la première couche de particules situées à l'interface respecte la condition cinématique de surface libre.

La Figure 2.6 représente une comparaison du champ de pression obtenu entre le schéma ALE avec correction de vitesse et le schéma Riemann-SPH lagrangien à l'instant où le fluide impacte le mur vertical de la cuve. La simulation lagrangienne présente de fortes erreurs sur la détermination de la pression liées à l'organisation des particules qui suivent les trajectoires. A l'inverse, le schéma ALE permet d'obtenir un champ de pression régulier.

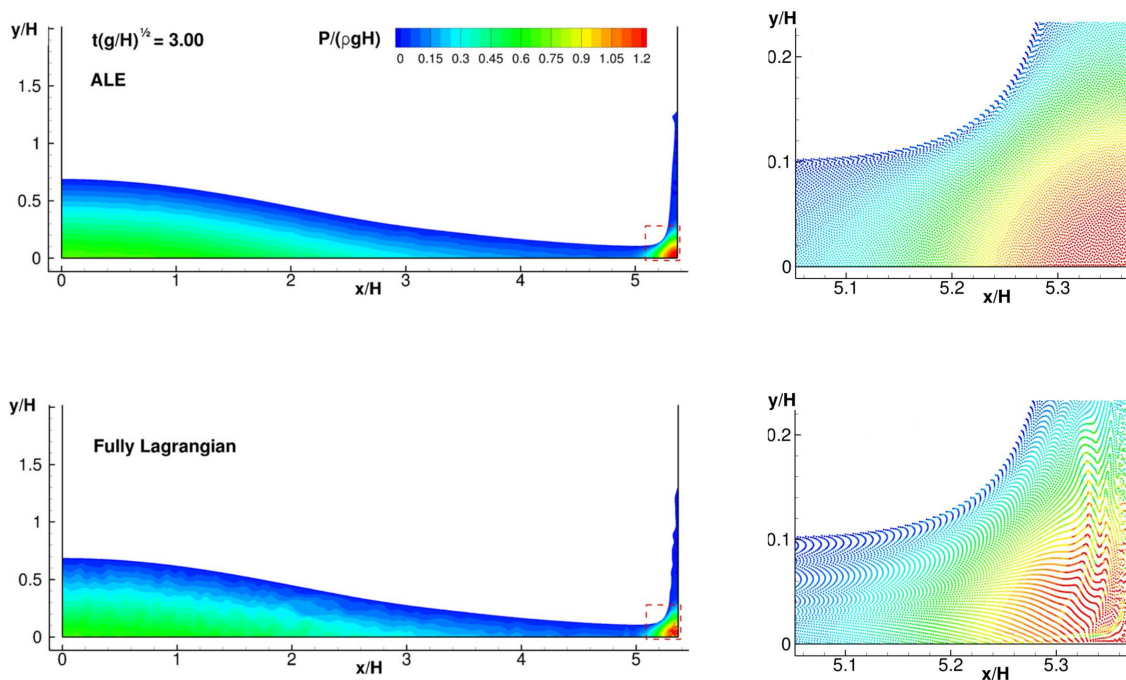


Figure 2.6: Comparaison du champ de pression obtenu sur un dambreak entre le schéma ALE avec correction de vitesse et le schéma Riemann-SPH strictement lagrangien [87]

# Chapitre 3

## Traitement numérique des conditions aux limites

### Conditions aux limites pour un corps

Le traitement des conditions limites aux parois est un problème délicat à traiter pour la méthode SPH et représente toujours actuellement un champ de recherche très actif au sein de la communauté scientifique. Cela s'explique par le fait qu'à l'inverse du domaine fluide, il n'y a pas de points de quadrature sur lesquels s'appuyer à l'extérieur du domaine fluide, ni de points situés sur l'interface sur lesquels imposer des conditions aux limites. Dans la littérature, deux axes de développement ont été explorés afin de rétablir la consistance du schéma au voisinage des parois.

Le premier regroupe les méthodes volumiques qui considèrent un domaine fictif par delà les parois dans lequel des particules fantômes sont créées afin que le support des particules fluides en proche paroi soit completé. Ainsi les opérateurs différentiels présentés dans la section 2.2 sont inchangés; la seule difficulté demeure dans la définition des particules fantômes.

Le second axe de développement regroupe les méthodes surfaciques qui utilisent une discrétisation de la paroi. Cette approche nécessite d'introduire des intégrales de bord au sein des opérateurs différentiels de la section 2.2.

### Méthodes d'intégration volumique

#### Particules fantômes

La méthode des particules fantômes (Ghost) est probablement la plus répandue au sein de la communauté SPH pour traiter les conditions aux limites des solides (Libersky *et al.* [60], Colagrossi *et al.* [20], Yildiz *et al.* [109]). Son principe repose sur l'extension du domaine physique  $\Omega$  en y ajoutant un domaine fictif  $\Omega_G$  qui contient des particules fantômes dont la position est déterminée par symétrie des particules fluides par rapport à la paroi solide. La figure 3.1 illustre le processus de création des particules fantômes. Ainsi, toute particule fluide dont le support intersecte la paroi solide est symétrisée. Lorsque l'on utilise la renor-

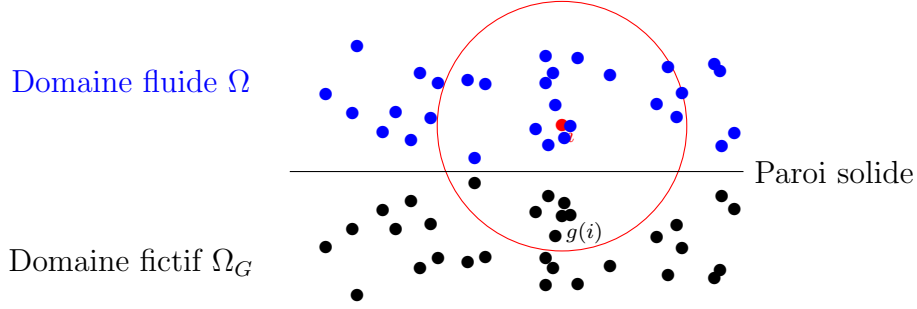


Figure 3.1: Particules fantômes obtenues via symétrisation autour de la paroi solide

malisation (2.42), on étend la symétrisation aux particules situées à  $2R$  afin de déterminer la matrice de renormalisation des particules fantômes voisines des particules de  $\Omega$ . Pour chaque particule fluide  $i$ , la particule fantôme  $g(i)$  associée voit sa position déterminée par :

$$\mathbf{x}_{g(i)} = \mathbf{x}_i + 2(\mathbf{x}_f \cdot \mathbf{n} - \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{x}_f$  correspondent respectivement à la normale et un point sur la frontière (plane).

Lorsqu'une condition de glissement (non-pénétration) est imposée à la paroi, la vitesse de la particule fantôme  $\mathbf{u}_{g(i)}$  vérifie :

$$\mathbf{u}_{g(i)} = \mathbf{u}_i + 2(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (3.2)$$

tandis que la condition d'adhérence s'exprime comme :

$$\mathbf{u}_{g(i)} = -\mathbf{u}_i + 2\mathbf{u}_f \quad (3.3)$$

Cette condition est instable numériquement et conduit à un regroupement des particules en proche paroi pour l'opérateur laplacien de Monaghan et Gingold (2.32) et Morris *et al.* (2.31) (Watkins *et al.* [104], Basa *et al.* [6]). De Leffe [55] a rétabli la stabilité en proposant que la partie elliptique des équations de Navier-Stokes (laplacien de vitesse) soit résolue avec une condition d'adhérence, tandis que la partie hyperbolique (divergence de la vitesse dans l'équation de continuité) utilise une condition de glissement :

$$\mathbf{u}_{g(i)} = \begin{cases} \mathbf{u}_i + 2(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} & \text{dans (2.49)} \\ -\mathbf{u}_i + 2\mathbf{u}_f & \text{dans (2.31, 2.32)} \end{cases} \quad (3.4)$$

L'imposition de la pression sur une particule fantôme  $P_{g(i)}$  n'est pas régie par une condition limite mais par les équations d'Euler à la paroi (Oger [85], Doring [30]) :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \quad (3.5)$$

En dérivant la condition de glissement (1.13) on obtient :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \cdot \mathbf{n} \quad (3.6)$$

De là on déduit :

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} = (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \cdot \mathbf{n} \quad (3.7)$$

A l'aide de (1.9) on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} = c_0^2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial n} \quad (3.8)$$

Finalement, par intégration on a :

$$\rho_{G(i)} = \left[ \rho_i^{\gamma-1} + \frac{\rho_0^{\gamma-1}(\gamma-1)}{c_0^2} \left( (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} - \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \right) (\mathbf{x}_{g(i)} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.9)$$

Dans le cadre des équations de Navier-Stokes, (3.9) s'exprime sous la forme :

$$\rho_{G(i)} = \left[ \rho_i^{\gamma-1} + \frac{\rho_0^{\gamma-1}(\gamma-1)}{c_0^2} \left( -\frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} + \nu \frac{\partial^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial n^2} \right) (\mathbf{x}_{g(i)} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.10)$$

Finalement, il reste à définir le volume de la particule fantôme  $\omega_{G(i)}$ . Il s'agit là du point le plus délicat car lorsque la paroi solide est courbe, le volume de la particule fantôme est directement lié au Jacobien de la transformation géométrique transformant la particule  $i$  en sa fantôme  $G(i)$  (Guilcher [42]). La figure 3.2 illustre ce phénomène où les particules fantômes possèdent un plus petit volume que les particules fluides car elles se trouvent à l'intérieur de la courbure. Ainsi le volume des particules fantômes est donné par :

$$\omega_{G(i)} = \frac{(R_c - d)}{(R_c + d)} \omega_i \quad (3.11)$$

où  $R_c$  désigne le rayon de courbure et  $d$  la distance projetée de la particule fluide sur la paroi. On note que dans le cas où la paroi solide est plane, l'équation (3.11) devient  $\omega_{G(i)} = \omega_i$ .

Dans un contexte industriel, les particules fantômes ne sont pas pleinement satisfaisantes. Elles posent notamment de grandes difficultés théoriques et pratiques dès lors qu'un corps présente des singularités géométriques. De plus, dans le cadre de parois courbes, il faudrait connaître le rayon de courbure local pour initialiser correctement le volume d'une particule fantôme, ce qui ajoute des procédures spécifiques à la mise en oeuvre du calcul.

### Particules fantômes fixes

La méthode des particules fantômes fixes, introduite par Marrone *et al.* [67], permet de générer des particules fantômes qui évoluent au gré de la cinématique des parois auxquelles elles sont rattachées. Ainsi, à l'inverse de la méthode des particules fantômes, il n'y a pas de création/suppression de particules fictives à chaque pas de temps. Les particules fantômes fixes, comme leur nom l'indique, sont générées uniquement à l'initialisation du



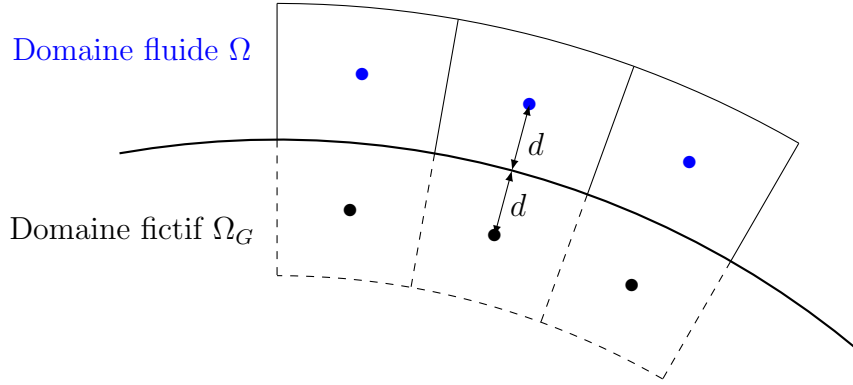


Figure 3.2: Volumes géométriques occupés par des particules et leurs fantômes pour une paroi concave

calcul (seules leurs variables sont mises à jour à chaque pas de temps).

Pour ce faire, plusieurs étapes algorithmiques sont nécessaires (Fig. 3.3) :

- Les parois du solide sont discrétisés en un ensemble de noeuds séparés d’une distance caractéristique  $\Delta x$  (espacement inter-particulaire). A chaque noeud est associé un vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$  qui est dirigé vers l’extérieur du domaine fluide.
- Chaque noeud est ensuite dupliqué  $k$  fois à l’intérieur du solide dans la direction du vecteur normal ( $k$  étant choisi de sorte que le support d’une particule fluide soit complet en proche paroi). Ces duplications sont espacées d’une distance  $\Delta x$  les unes des autres. La première duplication intervient à une distance  $\frac{\Delta x}{2}$  de la paroi. L’ensemble des noeuds dupliqués forment les **particules fantômes fixes**.
- Le même procédé de duplication est réalisé dans la direction opposée à la normale (les noeuds ainsi dupliqués sont dans le domaine fluide). Ces noeuds sont appelés **points d’interpolation**.
- Des traitements spécifiques sont réalisés pour les singularités géométriques car la duplication “naïve” des noeuds peut entraîner un placement incorrect des points d’interpolation.

A chaque particule fantôme fixe est associé un point d’interpolation dont le rôle est d’imposer la condition d’adhérence ou de glissement. Pour ce faire, chaque point d’interpolation réalise une interpolation MLS (Moving Least Squared) du champ de vitesse sur les particules fluides au début de chaque pas de temps. Ensuite, d’après (3.3) ou (3.2), chaque particule fantôme fixe utilise le champ de vitesse de son point d’interpolation afin d’initialiser son propre champ de vitesse.

La pression des particules fantômes fixes est quant à elle initialisée de façon analogue à (3.9,3.10).

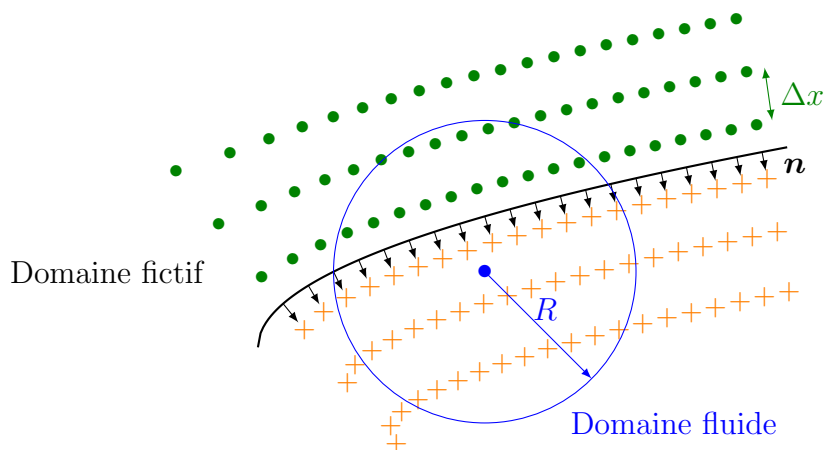


Figure 3.3: Création des particules fantômes fixes et des points d'interpolation

## Méthodes d'intégration surfacique

Les méthodes d'intégration surfaciques prennent en compte une discrétisation des intégrales de bord  $\partial\Omega$  afin d'imposer les conditions aux limites d'adhérence ou de glissement. Historiquement, la première méthode surfacique, proposée par Monaghan [74], s'inspirait du potentiel de Lennard-Jones [57]. Ce potentiel, utilisé dans le domaine de la modélisation numérique de la physique moléculaire, caractérise les interactions entre atomes. Monaghan a étendu cette approche en discrétisant les parois comme un ensemble de particules solides (au sens où elles sont rattachées physiquement au corps qu'elles discrétisent) qui interagissent avec les particules fluides au moyen de forces répulsives. Cette méthode, trop imprécise, ne tient pas compte de la physique du problème ni du schéma numérique utilisé au sein du fluide.

Kulasegaram *et al.* [51] ont introduit des opérateurs différentiels prenant en compte la présence de parois à l'aide d'une approche variationnelle mais la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement découlant de cette méthode ne vérifie pas le principe d'action/réaction.

Marongiu *et al.* [66] ont proposé de discrétiser la paroi en un ensemble de segments interagissant avec les particules fluides. De façon analogue aux interactions entre particules fluides au sein du schéma Riemann-SPH, Marongiu *et al.* ont calculé les interactions entre particules fluides et segments via un solveur de Riemann partiel.

De Leffe *et al.* [56] a adapté et étendu la méthode de flux normal (NFM) de Ghidaglia *et al.* [38] à SPH. Cette méthode, bien que proche de Marongiu *et al.*, s'en différencie par le traitement des flux à la paroi ainsi que par l'introduction d'une correction Shepard au sein des opérateurs. Les travaux de De Leffe *et al.* permettent de modéliser uniquement les écoulements non visqueux.

Ferrand *et al.* [34] ont repris les travaux de Kulasegaram *et al.* et ont procédé à une

modification de l'opérateur gradient afin qu'il vérifie le principe d'action/réaction. Plutôt que de recalculer la correction Shepard à chaque pas de temps, Ferrand *et al.* ont utilisé une équation d'advection pour la faire évoluer. Ils ont dénommé cette méthodologie USAW (Unified Semi-Analytical Wall). Des travaux complémentaires ont été réalisés pour augmenter la précision de la méthode (Violeau *et al.* [102], Mayrhofer *et al.* [72], Leroy *et al.* [59]). La méthodologie USAW permet de traiter les écoulements non visqueux (en 2D), ou laminaire ou turbulent.

Cette sous-section se veut volontairement très synthétique sur l'état de l'art des méthodes surfaciques. En effet, nous allons introduire dans le prochain chapitre la méthode de flux normal appliquée à SPH par De Lefte *et al.*, ainsi que les développements réalisés dans le cadre de cette thèse dans l'optique de l'améliorer.

## Surface libre

### Conditions dynamique et cinématique

La condition dynamique de surface libre se traduit par la continuité des contraintes à la surface-libre, de position elle-même inconnue du problème (Fig. 3.4). Dans le cas des équations d'Euler, cela se traduit par la simple imposition de  $P_{atm}$  comme pression à la surface libre.

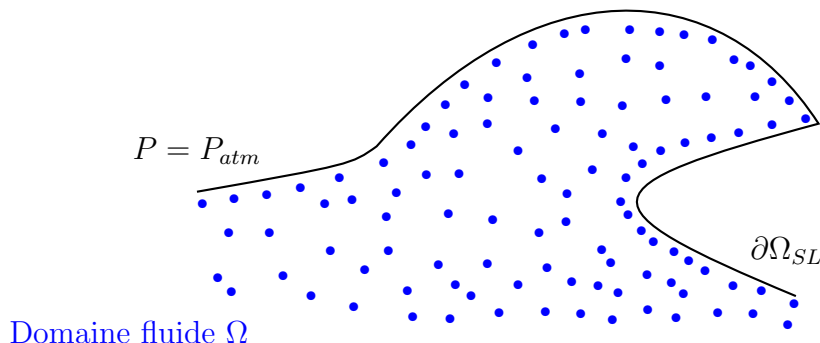


Figure 3.4: Représentation de la position géométrique de la surface libre  $\partial\Omega_{SL}$

En considérant que la pression à la surface libre est nulle (à une constante près), on peut néanmoins effectuer un changement de référentiel de pression au sein de l'équation d'état via  $\rho = \rho_0$  à la surface libre. En utilisant un schéma de discrétisation adapté, Colagrossi *et al.* [18] ont montré que, pour les équations d'Euler, cette condition est intrinsèquement vérifiée à convergence au sens intégral. Les travaux ont été étendu ensuite aux équations de Navier-Stokes (Colagrossi *et al.* [17]), où, là encore, un choix adapté de schéma doit être considéré pour discrétiser l'opérateur visqueux.

La condition cinématique de surface libre est naturellement vérifiée en SPH de par la nature lagrangienne de la méthode.

## Détection de la surface libre

La détermination de la position de la surface libre est d'une importance capitale dans le domaine de la modélisation incompressible car la condition dynamique de surface libre ne peut être imposée via une modification du référentiel de pression. Il est donc nécessaire de détecter explicitement les particules formant la surface libre.

D'autre part, dans le cadre de la visualisation de résultats (iso-surface, vues en coupes), il est intéressant de pouvoir projeter, via la détection de surface libre, les champs des particules sur une grille régulière afin de faciliter l'analyse quantitative des données de sortie d'un calcul SPH. La détection de surface libre permet également la modélisation de physiques plus complexes telles que la tension de surface.

Dans le cadre de cette thèse, la détection de surface libre est uniquement nécessaire lorsque la loi de vitesse Oger *et al.* sera utilisée (voir section 2.6.2). La méthode que nous présentons ici est issue de Marrone *et al.* [70] et se décompose en deux étapes. La première consiste à calculer la matrice de renormalisation (2.44) afin d'obtenir une première estimation des particules localisées à la surface libre. Doring [30] a montré que la plus petite valeur propre  $\lambda$  de cette matrice est fonction de la position des particules localisées dans le voisinage de la particule considérée. Ainsi,  $\lambda$  tend vers 1 lorsque le support de la particule est complet. A l'inverse,  $\lambda$  tend vers 0 lorsque la particule est isolée (extrémité d'un jet ou proximité de la surface libre par exemple).

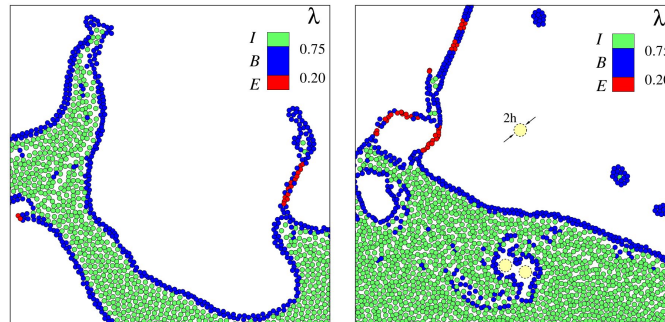


Figure 3.5: Représentation de la valeur de  $\lambda$  au sein d'un écoulement [70]

Le critère de détection basé sur  $\lambda$  fournit ainsi une évaluation précise des particules localisées à la surface libre (Fig. 3.5). Ce critère est néanmoins insuffisant car l'algorithme considère que les particules réparties non uniformément au sein du fluide appartiennent à la surface libre (dû au caractère lagrangien de la méthode). La seconde étape de l'algorithme vise donc à rectifier cela. Pour ce faire, Marrone *et al.* proposent de calculer le vecteur normal  $\tilde{\mathbf{n}}$  à la surface libre en appliquant :

$$\tilde{\mathbf{n}}_i = - \frac{\mathbf{B}_i \cdot \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \nabla_i W_{ij}}{\|\mathbf{B}_i \cdot \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \nabla_i W_{ij}\|} \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{B}_i$  correspond à la matrice de renormalisation définie dans l'équation (2.44). De là,

Marrone *et al.* évaluent si au moins une particule du voisinage de  $i$  est localisée dans un cône de révolution axé sur la normale  $\tilde{\mathbf{n}}_i$  (Fig. 3.6). Si aucune particule n'est localisée dans ce cône, alors la particule  $i$  est considérée comme étant à la surface libre.

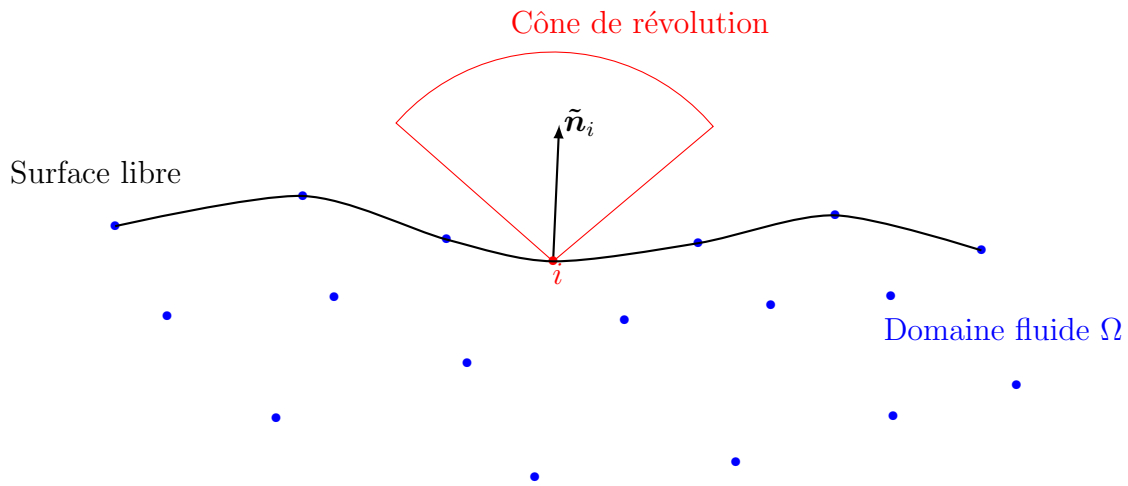


Figure 3.6: Seconde étape de la détection : recherche de voisins dans un cône de révolution axé sur  $\tilde{\mathbf{n}}_i$

Nous renvoyons le lecteur à l'article de Marrone *et al.* [70] pour de plus amples détails.

# Chapitre 4

## Améliorations de la méthode de flux normal (NFM)

L'adaptation de la méthode de flux normal au formalisme SPH a été initié dans une précédente thèse au sein du laboratoire (De Leffe [55]). Ces développements permettent de simuler des écoulements non visqueux bidimensionnels avec un gain de précision appréciable, par rapport à la méthode des particules fantômes, en présence de géométries complexes. Cependant, dans le cadre tridimensionnel, la méthode NFM souffre d'un manque de robustesse qui se traduit, ponctuellement, par des fuites de particules à travers les parois. Ce constat a également été souligné par Mayrhofer *et al.* [72] ainsi que Leroy [58]. De plus, afin de répondre à des problématiques industrielles de NEXTFLOW-Software, il est nécessaire d'étendre la méthode NFM aux équations de Navier-Stokes (modélisation de la viscosité).

### Flux de paroi caractéristique

Dans le cadre de systèmes hyperboliques, Ghidaglia *et al.* [38] ont développé une résolution des systèmes hyperboliques basée sur une méthode des Flux caractéristiques. Ici, on l'applique pour les flux de parois. L'originalité de cette méthode découle du traitement automatique des conditions aux limites quelle que soit la forme du système hyperbolique considéré (linéaire ou non). Ainsi il n'est pas nécessaire de déterminer les invariants de Riemann du système, ni même de résoudre le problème de Riemann partiel à la paroi.

Considérons la forme conservative des équations d'Euler en deux dimensions :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}(\mathbb{F}_E(\phi)) = 0 \quad (4.1)$$

avec le vecteur des variables conservatives  $\phi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}$  et le flux eulérien des variables

$$\text{conservatives } \mathbb{F}_E(\phi) = \begin{pmatrix} \rho u & \rho v \\ \rho u^2 + P & \rho uv \\ \rho uv & \rho v^2 + P \end{pmatrix}$$

On note  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n})$  la Jacobienne du flux physique :

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) = \frac{\partial \mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{n} \\ c^2 \mathbf{n} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} & \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

où, d'après (1.9), on a  $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$

En réintroduisant la Jacobienne dans (4.1) on obtient (en deux dimensions) dans une base cartésienne :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{e}_1) \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x} + \mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

Le flux que l'on souhaite déterminer étant à la paroi, il est plus commode de se placer dans la base  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$  :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\tau}) \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.4)$$

Ensuite, en multipliant (4.4) par la Jacobienne évaluée à la paroi et en négligeant les termes tangentiels on a :

$$\frac{\partial \mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}}{\partial t} + \mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \frac{\partial \mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.5)$$

La matrice  $\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n})$  est diagonalisable, ses matrices de vecteurs propres à gauche et à droite s'écrivent :

$$\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} c + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & -2c\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} & c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ -\mathbf{n} & 2c\boldsymbol{\tau} & \mathbf{n} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbb{R}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{u} - c\mathbf{n} & \boldsymbol{\tau} & \mathbf{u} + c\mathbf{n} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

tandis que sa matrice diagonale s'écrit :

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c \end{pmatrix} = \boldsymbol{\lambda} \mathbb{I} \quad (4.8)$$

Finalement on a bien :  $\mathbb{D}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) = \mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \mathbb{R}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n})$

On peut donc réécrire (4.5) sous la forme d'un système diagonal composé de 3 équations d'advection indépendantes :

$$l_1(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}}{\partial t} + \lambda_1(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) l_1(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.9)$$

$$l_2(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}}{\partial t} + \lambda_2(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) l_2(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{l}_3(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}}{\partial t} + \lambda_3(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \mathbf{l}_3(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}}{\partial n} = 0 \quad (4.11)$$

où  $\mathbf{l}_1(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n})$ ,  $\mathbf{l}_2(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n})$  et  $\mathbf{l}_3(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n})$  sont les vecteurs colonnes composant la matrice  $\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n})$ . En classant les valeurs propres par ordre croissant on obtient :

$$\lambda_1(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) < \lambda_2(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) = 0 < \lambda_3(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{n}) \quad (4.12)$$

D'après Ghidaglia *et al.*, le système (4.9-4.11) en présence d'une condition de glissement se réduit à :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \mathbf{l}_3(\boldsymbol{\phi}_f, \mathbf{n}) \cdot (\mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}_p) \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{l}_3(\boldsymbol{\phi}_f, \mathbf{n}) \cdot (\mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}_f) \cdot \mathbf{n}) \end{cases} \quad (4.13)$$

où les indices  $p$  et  $f$  désignent respectivement la paroi et le fluide. Finalement, à l'aide de (4.6) et (4.8), le système (4.13) devient (pour une paroi immobile) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n} = 0 \\ P_p = P_f + \rho_f c_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (4.14)$$

On en déduit alors l'expression du flux à la paroi :

$$\mathbb{F}_E(\boldsymbol{\phi}_p) \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ P_p \mathbf{n} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Ghidaglia *et al.* ont montré que cette méthode est asymptotiquement équivalente à la résolution d'un problème de Riemann partiel avec l'avantage de ne pas recourir à la résolution d'un système d'équations non linéaires.

Nous avons présenté la méthode de flux normal telle qu'elle est utilisée en Volume Finis. De Lefe *et al.* [56] ont réalisé des ajustements pour l'adapter au formalisme SPH.

## Adaptation de la méthode NFM pour SPH (état de l'art)

### Définition d'opérateurs différentiels adaptés aux parois pour les équations d'Euler

Dans le chapitre 2, de nombreuses propriétés fondamentales de l'opérateur SPH ont été énoncées. Parmi elles, l'équation (2.4) traduit le fait que l'intégrale du noyau est égale à 1. En présence d'une paroi cette propriété n'est cependant plus vérifiée puisque le noyau n'est plus complet (Fig. 4.1).

La consistance de l'approximation régularisée (2.3) est restaurée à l'aide d'une correction :

$$\langle f \rangle^R = \frac{1}{\gamma(\mathbf{x})} \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (4.16)$$

où  $\gamma(\mathbf{x})$  désigne la correction Shepard définie par :



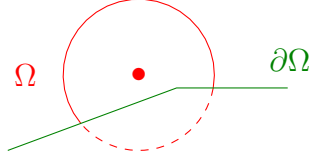


Figure 4.1: Support d'une particule tronqué par une paroi

$$\gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (4.17)$$

La présence de la paroi nécessite de redéfinir l'opérateur gradient  $\mathbf{G}^R$  en modifiant (2.10) :

$$\mathbf{G}^R(f) = \frac{1}{\gamma(\mathbf{x})} \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{y}) W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) \mathbf{n} d\mathbf{y} + \frac{1}{\gamma(\mathbf{x})} \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (4.18)$$

et de la même façon pour l'opérateur de divergence  $D^R$  :

$$D^R(\mathbf{f}) = \frac{1}{\gamma(\mathbf{x})} \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} + \frac{1}{\gamma(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (4.19)$$

La contribution surfacique disparaît dès lors que le support de la particule n'intersecte pas la paroi.

Le passage du continu au discret nécessite de définir une discrétisation de la frontière  $\partial\Omega$ . On se donne une partition  $\mathcal{S}$  de la frontière et on définit par  $s$  la surface de contrôle de ses éléments. Les opérateurs gradient  $\mathbf{G}_+^R$  et divergence  $D_-^R$  s'écrivent alors :

$$\mathbf{G}_+^R(f)_i = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j (f_i + f_j) W_{ij} \mathbf{n}_j + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (f_i + f_j) \nabla_i W_{ij} \quad (4.20)$$

$$D_-^R(\mathbf{f})_i = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j (\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{n}_j W_{ij} + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (4.21)$$

où  $\gamma_i$  est la forme discrète de (4.17) présentée plus loin dans ce manuscrit.

L'utilisation des opérateurs (4.20) et (4.21) permet notamment d'écrire le schéma standard (2.47-2.50) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_i \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{g} - \frac{1}{\gamma_i \rho_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (P_j + P_i) \nabla_i W_{ij} - \frac{1}{\gamma_i \rho_i} \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j (P_j + P_i) W_{ij} \mathbf{n}_j \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_i) = -\frac{\rho_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} - \frac{\rho_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_j W_{ij} \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) = 0 \quad (4.25)$$

Le schéma Riemann-SPH de Leduc *et al.* (présenté dans la section 2.4.4.5) adapté au formalisme NFM s'écrit quant à lui sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_{0i} \quad (4.26)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i \mathbf{u}_i) = \omega_i \rho_i \mathbf{g} - \frac{\omega_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j 2P_E \nabla_i W_{ij} - \frac{\omega_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j (P_j + P_i) W_{ij} \mathbf{n}_j \quad (4.27)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i) = \frac{2\omega_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} + \frac{\omega_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_j W_{ij} \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) = 0 \quad (4.29)$$

En pratique, au sein des équations (4.24) et (4.28), la variable  $\mathbf{u}_j$  de la somme sur  $\mathcal{S}$  est remplacée par la vitesse  $\mathbf{u}_p$  de la paroi imposée par la condition aux limites. D'autre part, par application de la méthode de flux normal, la pression  $P_j$  de la somme surfacique est remplacée par  $P_p$  issue de l'équation (4.14).

## Montée en ordre

Le terme de pression  $P_p$  au sein du flux normal est trop imprécis puisque  $P_f$ ,  $\rho_f$ ,  $c_f$  et  $\mathbf{u}_f$  sont pris comme  $P_i$ ,  $\rho_i$ ,  $c_i$  et  $\mathbf{u}_i$  respectivement. Dans le cadre du schéma Riemann-SPH, De Lefe *et al.* ont étendu la procédure MUSCL à la paroi. Le principe reste le même que dans la section 2.4.4, c'est-à-dire que l'on souhaite réaliser une reconstruction polynômiale de l'état du fluide  $\phi_f$  à la paroi :

$$\hat{\phi}_i(\mathbf{x}_p) = \phi_i + \hat{\mathbf{G}}_-^R(\phi)_i \cdot (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) \quad (4.30)$$

Tout comme lors de l'interaction entre deux particules fluides, l'expression (4.30) ne peut être utilisé en l'état. Il convient de lui appliquer un limiteur de flux. Cependant l'état du fluide est inconnu au delà la paroi, ce qui rend impossible l'utilisation du limiteur minmod pour limiter le flux à la paroi. De Lefe a proposé une limitation basée sur l'hypothèse de pseudo-compressibilité :

$$\hat{\rho}_i^l = \max(0.99\rho_i, \min(\hat{\rho}_i, 1.01\rho_i)) \quad (4.31)$$

$$\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}_i^l = \max(-0.1\rho_i c_i, \min(\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}_i, 0.1\rho_i c_i)) \quad (4.32)$$

En pratique ce limiteur n'agit que très localement et permet un gain de robustesse très appréciable. L'expérience numérique montre que son action n'a pas d'influence sur la physique du résultat à convergence.

## Calcul numérique de la correction Shepard

L'objet de cette section est d'expliciter la discrétisation  $\gamma_i$  de la correction Shepard  $\gamma(\mathbf{x})$  (4.17). Feldman *et al.* [33] ont introduit une formulation de cette correction basée non plus sur une intégrale volumique mais surfacique.

L'idée de cette formulation est de déterminer une fonction vectorielle  $\mathbf{W}$  qui satisfasse :

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = W \quad (4.33)$$

La fonction vectorielle  $\mathbf{W}$  est de la forme :

$$\mathbf{W} = f(r)\mathbf{x} \quad \text{où} \quad r = \frac{\|\mathbf{x}\|}{R} \quad (4.34)$$

Par application du théorème de Green-Ostrograski on obtient :

$$\int_V W dV = \int_V \operatorname{div} \mathbf{W} dV = \int_S \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.35)$$

D'après la définition de  $\mathbf{W}$ , la fonction  $f$  doit satisfaire l'équation différentielle suivante :

$$W = \nabla \cdot \mathbf{W} = (\nabla \cdot \mathbf{x})f + \nabla f \cdot \mathbf{x} \quad (4.36)$$

$$= df + (\nabla r f') \cdot \mathbf{x} \quad (4.37)$$

$$= df + \frac{1}{r}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})f' \quad (4.38)$$

$$= df + r f' \quad (4.39)$$

avec  $d$  la dimension du problème considéré. Cette équation différentielle admet pour solution :

$$f(r) = \frac{1}{r^d} \int r^{d-1} W dr \quad (4.40)$$

En utilisant (2.7) et (2.8), on obtient pour le noyau de Wendland en 2D et 3D :

$$f(r) = \frac{7}{\pi R r^2} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{5r^4}{2} + 4r^5 - \frac{5r^6}{3} + \frac{4r^7}{7} \right]_0^{\frac{\|\mathbf{x}\|}{R}} \quad (4.41)$$

$$f(r) = \frac{21}{2\pi R^2 r^3} \left[ \frac{r^3}{3} - 2r^5 + \frac{10r^6}{3} - \frac{15r^7}{7} + \frac{r^8}{2} \right]_0^{\frac{\|\mathbf{x}\|}{R}} \quad (4.42)$$

La primitive du noyau étant à support compact, les équations (4.41) et (4.42) doivent vérifier :

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow R} f(r) = 0 \quad (4.43)$$

c'est-à-dire en 2D et 3D :

$$f(r) = \frac{7}{\pi R} \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{5r^2}{2} + 4r^3 - \frac{5r^4}{2} + \frac{4r^5}{7} - \frac{1}{14r^2} & \text{si } r \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.44)$$

$$f(r) = \frac{21}{2\pi R^2} \begin{cases} \frac{1}{3} - 2r^2 + \frac{10r^3}{3} - \frac{15r^4}{7} + \frac{r^5}{2} - \frac{1}{42r^3} & \text{si } r \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.45)$$

Le théorème de Green-Ostrograski ne peut être appliqué immédiatement car la fonction vectorielle  $\mathbf{W}$  est singulière au voisinage de  $r = 0$ . Considérons une sphère infinitésimale  $S_{int}$  (Fig. 4.2) de rayon  $\epsilon R$ , de sorte que  $r$  ne soit pas trop proche de 0 (la preuve est effectuée en 3D mais le raisonnement demeure identique en 2D via l'utilisation de coordonnées polaires).

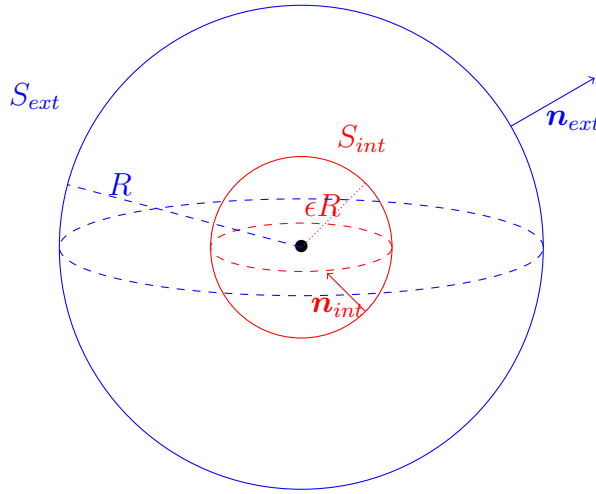


Figure 4.2: Représentation de la singularité en  $R = 0$  avec des sphères intérieures et extérieures

Afin de faire disparaître la singularité en  $r = 0$ ,  $\gamma(\mathbf{x})$  est écrit sous la forme :

$$\gamma(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{ext} \setminus \{S_{int}\}} \mathbf{W} dV \quad (4.46)$$

En utilisant l'équation (4.33) nous avons :

$$\gamma(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{ext} \setminus \{S_{int}\}} \text{div} \mathbf{W} dV = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{ext} \setminus \{S_{int}\}} \nabla \cdot \mathbf{W} dV \quad (4.47)$$

Par application de Green-Ostrogradski les intégrales de bords des sphères s'écrivent :

$$\gamma(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial S_{int}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial S_{ext}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.48)$$

Dès lors que le support de la particule n'intersecte pas la paroi on a  $\gamma(\mathbf{x}) = 1$ . Au sein de l'équation (4.48), l'intégrale surfacique sur  $\partial S_{ext}$  est alors nulle. Ainsi il reste à vérifier que l'intégrale sur le bord de la sphère intérieure est bien égale à 1. On en déduit les simplifications suivantes :

$$\gamma(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial S_{int}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) \int_{\partial S_{int}} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) \epsilon^3 R^2 = 1 \quad (4.49)$$

Finalement l'expression de la correction Shepard est donnée par :

$$\gamma(\mathbf{x}) = 1 + \int_{\partial S_{ext}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.50)$$

Il convient à présent d'expliciter la discrétisation de la correction Shepard. De Leffe *et al.* [56] proposent d'évaluer numériquement la correction Shepard à l'aide d'une formule de quadrature composite de type point milieu. La correction Shepard s'exprime alors sous la forme discrète :

$$\gamma_i = 1 + \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j f\left(\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{R}\right) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{n}_j \quad (4.51)$$

Dans ce qui suit, l'équation (4.51) fait référence au "Shepard numérique".

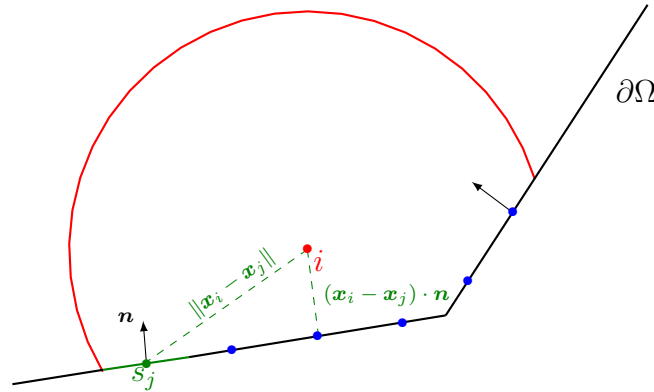


Figure 4.3: Calcul de  $\gamma_i$

La figure 4.3 illustre le processus de calcul de  $\gamma_i$ . Chaque paroi est discrétisée en un ensemble fini de segments  $s_j$  dont les milieux, représentés par des puces bleues, jouent le rôle de points de quadrature.

D'après De Leffe *et al.* [56], une dizaine de points de quadrature dans le support d'une particule sont suffisants pour obtenir une évaluation correcte de  $\gamma$ . Cependant, ce postulat n'est valable que lorsque la particule demeure à une distance "acceptable" de la paroi (c'est-à-dire  $\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{n}}{R} > 0.1$ ).

La valeur théorique de  $\gamma$  lorsqu'une particule est située sur une paroi plane est  $\frac{1}{2}$ . Sur la figure 4.4, on constate qu'il est nécessaire de mailler finement la paroi pour espérer obtenir ce résultat.

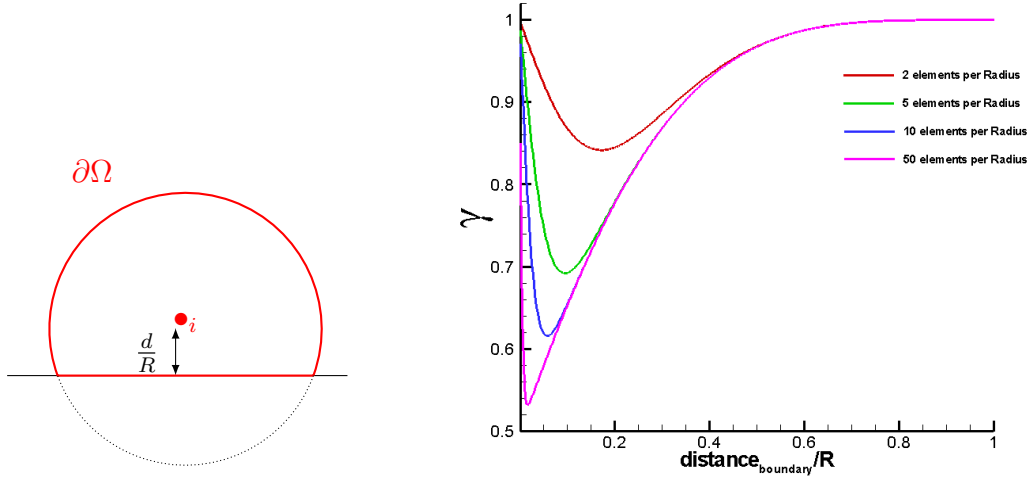


Figure 4.4: Difficulté à évaluer numériquement  $\gamma$  lorsque la particule tend à se rapprocher de la paroi (cas d'une paroi plane 2D)

## Améliorations proposées pour la méthode NFM

### Calcul analytique de la correction Shepard

#### Expression en 2D

Afin de s'affranchir d'un coût de calcul prohibitif pour le calcul de  $\gamma$ , Feldman [33] a proposé de calculer analytiquement l'équation (4.50) dans le cadre d'une paroi plane. Leroy *et al.* [59] ont étendu ce procédé à tout type de géométrie en 2D.

Pour ce faire, considérons que la surface  $\partial S_{ext}$  peut être décrite comme un ensemble fini de segments  $s$  (Fig. 4.5) :

$$\gamma_i = 1 + \sum_s \hat{\gamma}_s \quad (4.52)$$

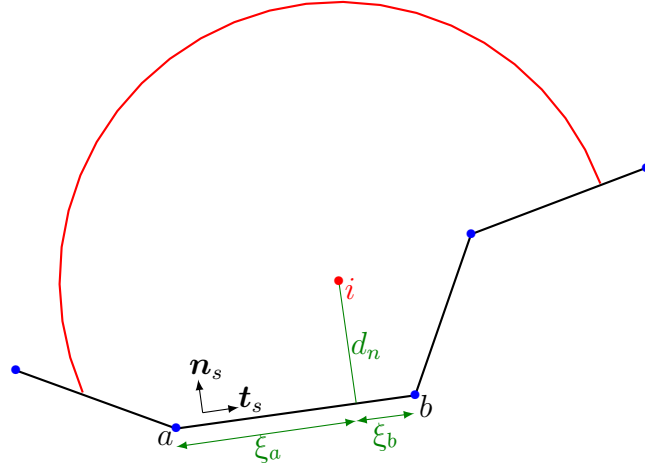
avec :

$$\hat{\gamma}_s = -\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{x} \int_s f(r) dr \quad (4.53)$$

En notant  $d_n = \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{x}$  la distance normale de la particule au segment et  $\xi = \text{sign}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{x}$  la distance signée obtenue par projection de la particule sur le chemin  $\mathbf{r}$  parcourant le segment, on obtient :

$$\hat{\gamma}_s = -d_n \int_{\xi_a}^{\xi_b} f\left(\frac{\sqrt{d_n^2 + \xi^2}}{R}\right) d\xi \quad (4.54)$$

On note  $\xi_a = \min\left(\frac{\sqrt{R^2 - d_n^2}}{R}, \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_a\|^2 - d_n^2}}{R}\right)$  la distance normalisée à l'extrémité gauche du


 Figure 4.5: Calcul analytique de  $\hat{\gamma}_s$  pour le segment  $[ab]$ 

segment et  $\xi_b = \min\left(\frac{\sqrt{R^2 - d_n^2}}{R}, \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_b\|^2 - d_n^2}}{R}\right)$  la distance normalisée à l'extrémité droite du segment.

Après intégration, l'équation (4.54) s'écrit :

$$\hat{\gamma}_s = \text{sign}(\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{x}_{ia}) \frac{1}{12\pi} \left( \text{sign}(\mathbf{t}_s \cdot \mathbf{x}_{bi}) F\left(\xi_b, \frac{d_n}{R}\right) - \text{sign}(\mathbf{t}_s \cdot \mathbf{x}_{ai}) F\left(\xi_a, \frac{d_n}{R}\right) \right) \quad (4.55)$$

où  $F$  s'exprime sous la forme :

$$F(\xi, d) = (15d^7 + 126d^5) \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\xi}{d}\right) - 6 \arctan\left(\frac{\xi}{d}\right) + 8d\xi (\xi^2 + d^2)^{\frac{5}{2}} \quad (4.56)$$

$$+ (10d^3 + 84d) \xi (\xi^2 + d^2)^{\frac{3}{2}} + (15d^5 + 126d^3) \xi \sqrt{\xi^2 + d^2} - 42d\xi^5 \quad (4.57)$$

$$- (140d^3 + 70d) \xi^3 - (210d^5 + 210d^3 - 42d) \xi \quad (4.58)$$

En présence d'une paroi plane, lorsque la particule d'intérêt tend vers la paroi on obtient par passage à la limite :

$$\lim_{d_n \rightarrow 0} \hat{\gamma}_s = -\frac{1}{4} (\text{sign}(\mathbf{t}_s \cdot \mathbf{x}_{bi}) - \text{sign}(\mathbf{t}_s \cdot \mathbf{x}_{ai})) \quad (4.59)$$

Ainsi, si la paroi plane est discrétisée en plusieurs segments, le segment  $[ab]$  contenant le projeté de la particule  $i$  entraîne  $\hat{\gamma}_s = \frac{1}{2}$  tandis que  $\hat{\gamma}_s = 0$  pour tous les autres segments. Finalement, on a bien  $\gamma_i = 1 - 0.5 = 0.5$ .

La formulation (4.55) demeure valable quel que soit le type de géométrie (paroi plane, coin interne, coin externe, etc...) rencontré. De plus, cette formulation tient compte du fait que la particule peut être devant ou derrière un segment via le terme  $\text{sign}(\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{x}_{ia})$ . Par exemple, pour un cercle discrétisé en un nombre fini de segments, il n'est pas rare qu'une particule soit localisée derrière un segment (exemple de la Fig. 4.6).

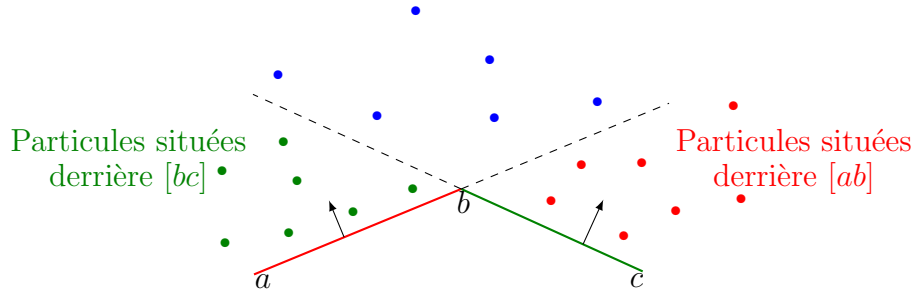


Figure 4.6: Positionnement des particules par rapport à deux segments

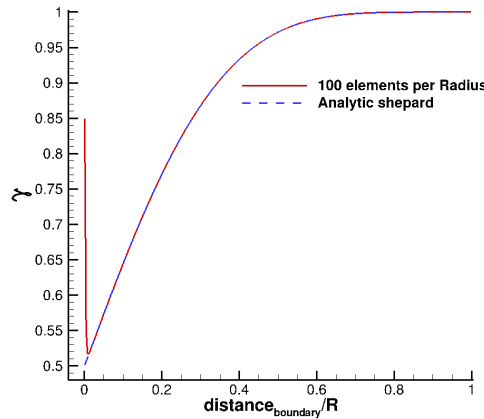


Figure 4.7: Comparaison entre Shepard analytique et numérique avec 100 points de quadrature dans le rayon (cas d'une paroi plane)

La figure 4.7 illustre l'apport de précision du Shepard analytique pour une particule située au voisinage de la paroi. De plus, la comparaison Shepard analytique/numérique permet de valider l'expression de  $F$  utilisée dans l'équation (4.55).

### Expression en 3D

Dans le cadre tridimensionnel, Violeau *et al.* [102] ont déterminé une écriture analytique pour la correction Shepard. Pour ce faire, on peut appliquer une seconde fois le théorème de Green-Ostrogradski afin de calculer  $\gamma$  en s'appuyant seulement sur les segments formant les polygones du maillage (et non plus les polygones tout entier).

Dans le cadre de cette thèse, les parois sont décrites avec une triangulation. Les notations utilisées sont explicitées sur la figure 4.8. Par la suite, les distances calculées entre des vecteurs appartenant au plan contenant  $\mathcal{T}$  seront préfixées par  $p$  tandis que celles calculées entre le vecteur position de la particule  $i$  et un point du triangle seront préfixées par  $r$ .

On considère qu'il existe une fonction vectorielle  $\Psi$  vérifiant :

$$\operatorname{div}\Psi(p) = f(r) \quad (4.60)$$



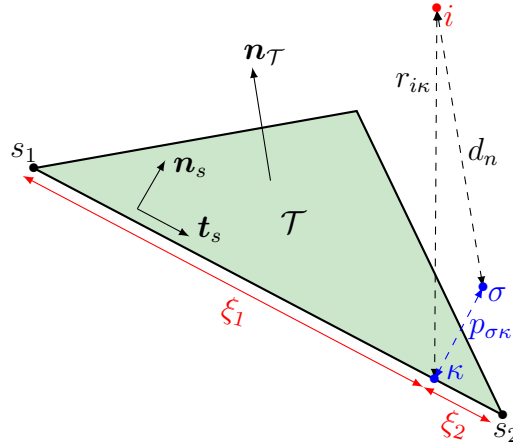


Figure 4.8: Notations utilisées pour le calcul de  $\gamma$  pour une particule  $i$  située au voisinage d'un triangle  $\mathcal{T}$

où  $f$  est la fonction précédemment déterminée à l'équation (4.45). La fonction vectorielle  $\Psi$  est de la forme :

$$\Psi = \varphi(p)\mathbf{p} \quad \text{avec} \quad p = \|\mathbf{p}\| \quad (4.61)$$

Ici,  $\mathbf{p}$  désigne le vecteur unitaire appartenant au plan contenant le triangle  $\mathcal{T}$  et dont l'origine se situe en  $\sigma$ . Dès lors, on peut montrer comme dans (4.40) que  $\varphi$  vérifie une équation différentielle dont la solution est de la forme :

$$\varphi(p) = \frac{1}{p^2} \int_p^1 p f(r) dp \quad (4.62)$$

Puisque  $r = \sqrt{p^2 + d_n^2}$ , on a alors  $r dr = p dp$ , ce qui permet finalement d'écrire :

$$\varphi(p) = \frac{1}{p^2} \int_r^1 r f(r) dr \quad (4.63)$$

Après intégration on en déduit l'expression de  $\varphi$  :

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi R^2 p^2 r} \begin{cases} (1-r)^6(1+3r+3r^2) & \text{si } r \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.64)$$

L'équation (4.64) vérifie  $\varphi(1) = 0$ . L'application du théorème de Green-Ostrogradski nécessite d'étudier la singularité de  $\Psi$  au voisinage de l'origine. Ce phénomène apparaît lorsque  $p = 0$ , ce qui se traduit géométriquement par  $\sigma \in \mathcal{T}$ . De manière analogue à la figure 4.2, une intégration sur un cercle de rayon  $\epsilon R$  centré en  $\sigma$  permet d'écrire :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial S_{int}} \Psi \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial S_{int}} \varphi(r)\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_{\partial S} dp = 2\pi\varphi(d_n)p^2 R^2 = \frac{1}{2d_n}(1-d_n)^6(1+3d_n+3d_n^2) \quad (4.65)$$

Par Green-Ostrogradski on a :

$$\gamma(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial S_{int}} \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial S_{ext}} \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.66)$$

La première intégrale de l'équation (4.66) est nulle sauf si  $\sigma \in \mathcal{T}$  (dans ce cas l'équation (4.65) s'applique). La seconde intégrale s'exprime sous la forme :

$$\int_{\partial S_{ext}} \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{n} dS = d_n \int_{\partial \mathcal{T}} \varphi(r) \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_{\partial \mathcal{T}} dp \quad (4.67)$$

Le chemin  $\mathbf{p}$  parcourant  $\partial \mathcal{T}$  admet pour paramétrisation :

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\kappa} + \xi \mathbf{t}_s \quad \text{avec} \quad \xi = \sqrt{r^2 - r_{i\kappa}^2} \quad (4.68)$$

Dès lors on obtient :

$$\int_{\partial S_{ext}} \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{n} dS = \text{sign}(\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{p}_{\sigma\kappa}) d_n p_{\sigma\kappa} R^2 \left[ \int_0^{\xi_2} \varphi(r) d\xi - \int_0^{\xi_1} \varphi(r) d\xi \right] \quad (4.69)$$

En effectuant le changement de variable  $r dr = \xi d\xi$  et en utilisant les égalités  $p^2 = r^2 - d_n^2$  et  $p_{\sigma\kappa} = \sqrt{r_{i\kappa}^2 - d_n^2}$ , les intégrales suivant  $d\xi$  s'expriment sous la forme :

$$\Phi(r, r_{i\kappa}, d_n) = d_n p_{\sigma\kappa} R^2 \int_0^\xi \varphi(r) d\xi = \int_{r_{i\kappa}}^r \frac{d_n \sqrt{r_{i\kappa}^2 - d_n^2} (1-r)^6 (1+3r+3r^2)}{4\pi (r^2 - d_n^2) \sqrt{r^2 - r_{i\kappa}^2}} dr \quad (4.70)$$

$$= \frac{P_1(r_{i\kappa}, d_n) \ln \left( \sqrt{r^2 - r_{i\kappa}^2} + r \right) + P_2(r, r_{i\kappa}, d_n) + P_3(r, r_{i\kappa}, d_n)}{64\pi} \quad (4.71)$$

$$+ \left( \frac{P_4(r, r_{i\kappa}, d_n) + P_5(r_{i\kappa}, d_n) + P_6(r, r_{i\kappa})}{64\pi} \right) d_n \sqrt{r_{i\kappa}^2 - d_n^2} \sqrt{r^2 - r_{i\kappa}^2} \quad (4.72)$$

$$- \frac{P_1(r_{i\kappa}, d_n) \ln(r_{i\kappa}) + P_2(r_{i\kappa}, r_{i\kappa}, d_n) + P_3(r_{i\kappa}, r_{i\kappa}, d_n)}{64\pi} \quad (4.73)$$

avec :

$$P_1(r_{i\kappa}, d_n) = (15r_{i\kappa}^6 + 18d_n^2 r_{i\kappa}^4 + 168r_{i\kappa}^4 + 24d_n^4 r_{i\kappa}^2 + 224d_n^2 r_{i\kappa}^2 + 48d_n^6 + 448d_n^4) d_n \sqrt{r_{i\kappa}^2 - d_n^2} \quad (4.74)$$

$$P_2(r, r_{i\kappa}, d_n) = 8(d_n + 1)^6 (3d_n^2 - 3d_n + 1) \arcsin \left( \frac{d_n r + r_{i\kappa}^2}{r_{i\kappa} (r + d_n)} \right) \quad (4.75)$$

$$P_3(r, r_{i\kappa}, d_n) = 8(d_n - 1)^6 (3d_n^2 + 3d_n + 1) \arcsin \left( \frac{d_n r - r_{i\kappa}^2}{r_{i\kappa} (r - d_n)} \right) \quad (4.76)$$

$$P_4(r, r_{i\kappa}, d_n) = 12d_n^2 r^3 - 80d_n^2 r^2 + 18d_n^2 r_{i\kappa}^2 r + 224d_n^2 r + 24d_n^4 r \quad (4.77)$$

$$P_5(r_{i\kappa}, d_n) = -128r_{i\kappa}^4 - 160d_n^2 r_{i\kappa}^2 - 224r_{i\kappa}^2 - 240d_n^4 - 336d_n^2 + 112 \quad (4.78)$$

$$P_6(r, r_{i\kappa}) = 8r^5 - 48r^4 + 112r^3 - 112r^2 + 10r_{i\kappa}^2 r^3 - 64r_{i\kappa}^2 r^2 + 168r_{i\kappa}^2 r + 15r_{i\kappa}^4 r \quad (4.79)$$

Finalement, la correction Shepard associée à une triangulation  $\mathcal{T}$  s'écrit :

$$\gamma_i = 1 + \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \hat{\gamma}_{i\tau} - \Gamma_{i\tau} \quad (4.80)$$

où  $\hat{\gamma}_{i\tau}$  représente la contribution apportée par les segments composant le triangle  $\tau$  :

$$\hat{\gamma}_{i\tau} = \sum_{s \in \tau} \text{sign}(\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{p}_{\sigma\kappa}) (\text{sign}(\mathbf{r}_{is2} \cdot \mathbf{t}_s) \Phi(r_{is2}, r_{i\kappa}, d_n) - \text{sign}(\mathbf{r}_{is1} \cdot \mathbf{t}_s) \Phi(r_{is1}, r_{i\kappa}, d_n)) \quad (4.81)$$

et où  $\Gamma_{i\tau}$  représente la contribution de la singularité de  $\Psi$  au voisinage de  $\sigma$  :

$$\Gamma_{i\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - d_n)^6(1 + 3d_n + 3d_n^2) & \text{si } \sigma \in \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.82)$$

### Discussion sur les singularités de $\hat{\gamma}_{i\tau}$

La fonction  $\hat{\gamma}_{i\tau}$  présente certaines singularités lorsque la projection  $\sigma$  est située sur un segment ou un sommet. Ces cas de figure sont bien plus fréquents numériquement que l'on ne pourrait l'imaginer et il convient dès lors de les traiter avec rigueur. Dans le cas où  $\sigma$  est situé sur le segment  $[s_1s_2]$ , la contribution  $\Gamma_{i\tau}$  est pondérée d'un facteur  $\frac{1}{2}$ . Lorsque  $\sigma$  est localisé sur un sommet  $s$ , la contribution  $\Gamma_{i\tau}$  est pondérée d'un facteur  $\frac{1}{N_s}$  où  $N_s$  désigne le nombre de segments possédant  $s$  comme extrémité.

Violeau *et al.* [102] proposent de traiter ces singularités en calculant l'angle solide à un sommet (lorsque la projection  $\sigma$  est localisée dessus) ou entre deux facettes (lorsque la projection  $\sigma$  est située sur un segment). Ces traitements sont délicats à mettre en place pour des géométries complexes, nous avons préféré opter pour le traitement décrit dans le paragraphe précédent.

## Opérateur Laplacien pour NFM

Nous avons vu précédemment dans la section 2.2.3 qu'en l'absence de paroi, l'opérateur laplacien de Morris *et al.* s'écrit pour un champ scalaire  $f$  :

$$L_{MEA}^R(f) = \int_{\Omega} 2(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, R) d\mathbf{y} \quad (4.83)$$

En présence de parois cet opérateur n'est plus consistant (du moins dès lors que les parois ne sont pas discrétisées avec une méthode de particules fantômes). Considérons un nouvel opérateur  $L_{MEA}^R(f)^{NFM}$  adapté au formalisme NFM :

$$\begin{aligned} L_{MEA}^R(f)^{NFM} &= \frac{2}{\gamma(\mathbf{x})} \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &\quad + \frac{2}{\gamma(\mathbf{x})} \int_{\partial\Omega} \frac{(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}))}{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS \end{aligned} \quad (4.84)$$

L'opérateur laplacien de Morris *et al.* NFM discret s'exprime sous la forme :

$$L_{MEA}^R(f)_i^{NFM} = \frac{2}{\gamma_i} \left( \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j f_{ij} \frac{\mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2} \cdot \nabla W_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j \frac{f_{ij}}{d_n} W_{ij} \right) \quad (4.85)$$

### Analyse d'erreur de l'opérateur laplacien NFM discret

Dans cette section on s'intéresse à la précision de l'opérateur (4.85). Pour ce faire, on évalue le laplacien d'une particule dont le support est tronqué par une paroi plane en faisant évoluer sa position dans la direction normale à la paroi (Fig. 4.9).

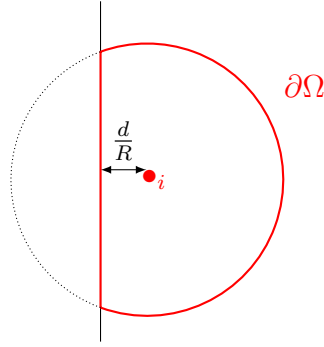


Figure 4.9: Schéma du cas test considéré

On applique l'opérateur (4.85) à un champ linéaire et un champ quadratique.

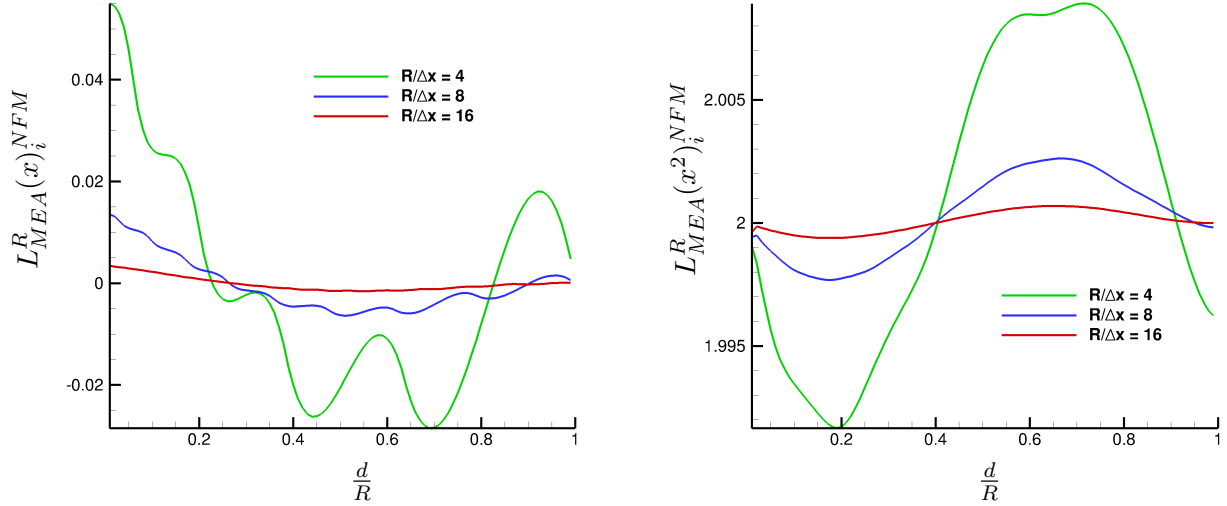


Figure 4.10: Evaluation de  $\nabla \cdot (\nabla x)$  (à gauche) et  $\nabla \cdot (\nabla x^2)$  (à droite) par le laplacien de Morris NFM

L'analyse effectuée sur la figure 4.10 a été réalisée avec plusieurs discrétisations volumiques (de  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  jusqu'à  $\frac{R}{\Delta x} = 16$ ) afin d'illustrer la convergence de l'opérateur  $L_{MEA}^R(x)_i^{NFM}$ . La

discrétisation surfacique adoptée est restée fixe (une quinzaine d'éléments). Les résultats de la figure 4.10 tendent à confirmer la consistance entre (4.84) et l'opérateur  $\Delta$ .

## Extension d'une méthode de désorganisation particulière adaptée au formalisme NFM

Afin de détruire les structures lagrangiennes, diverses méthodes de désordre particulière ont précédemment été introduites dans la section 2.6.2. Nous proposons ici d'étendre la loi de vitesse Oger *et al.* (présentée dans la section 2.6.2.3) au formalisme NFM.

### Détection de la surface libre

Nous avons vu précédemment qu'il est nécessaire de réaliser une détection de surface libre lorsque la loi de vitesse Oger *et al.* est utilisée. La discrétisation des parois avec un formalisme NFM nécessite d'effectuer quelques ajustements de l'algorithme de Marrone *et al.* [67] (adapté aux particules fantômes), sans quoi les particules situées proche des parois seront perçues par l'algorithme comme étant à la surface libre (Fig. 4.11).

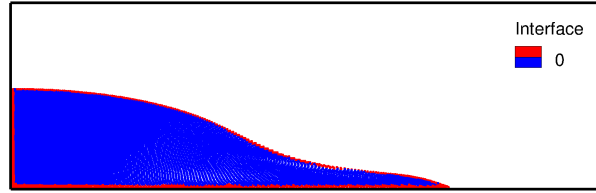


Figure 4.11: Représentation des particules détectées à la surface libre par l'algorithme de Marrone *et al.* en présence de parois discrétisées avec NFM (cas d'un dambreak 2D)

Nous avons vu précédemment que la première étape de l'algorithme de détection consiste à calculer les valeurs propres de la matrice de renormalisation  $\mathbf{B}_i$  (2.44). En introduisant les termes surfaciques, la matrice de renormalisation adaptée à NFM s'écrit :

$$\mathbf{B}_i^{NFM} = \left( \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \otimes \nabla_i W_{ij} + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \otimes \mathbf{n}_j W_{ij} \right)^{-1} \quad (4.86)$$

La seconde étape est le calcul du vecteur normal à la surface libre (3.12). En introduisant les termes surfaciques, le vecteur normal s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{n}}_i^{NFM} = - \frac{\mathbf{B}_i^{NFM} \cdot \left( \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \nabla_i W_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j \mathbf{n}_j W_{ij} \right)}{\left\| \mathbf{B}_i^{NFM} \cdot \left( \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j \nabla_i W_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j \mathbf{n}_j W_{ij} \right) \right\|} \quad (4.87)$$

L'utilisation des équations (4.86) et (4.87) au sein de l'algorithme de Marrone *et al.* permet ainsi de détecter correctement la surface libre avec la méthode NFM (Fig. 4.12).

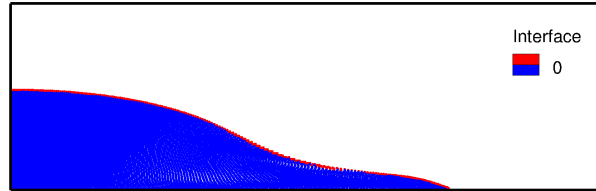


Figure 4.12: Représentation des particules détectées à la surface libre à l'aide du nouvel algorithme (cas d'un dambreak 2D)

### Loi de vitesse

On rappelle l'équation (2.114) permettant de déterminer la direction où la distribution est anisotrope :

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_{0j} \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, R_\delta) R_i \quad (4.88)$$

L'équation (4.88) n'est pas applicable en l'état car le vecteur  $\hat{\mathbf{n}}_i$  ne tient pas compte de la présence de la paroi (dès lors que celle-ci n'est pas discrétisée avec une méthode de particules fantômes) et pointera donc dans la direction de la paroi. On propose une définition prenant en compte les parois afin de remplacer (2.114) :

$$\hat{\mathbf{n}}_i^{NFM} = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_{0j} \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, R_\delta) R_i + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, R_\delta) \mathbf{n}_j R_i \quad (4.89)$$

La figure 4.13 présente une comparaison entre le champ de pression obtenu avec le schéma Riemann-SPH strictement lagrangien NFM et avec le schéma avec loi de vitesse adapté au formalisme NFM. La continuité du champ de pression est nettement améliorée par l'utilisation de la loi de vitesse.

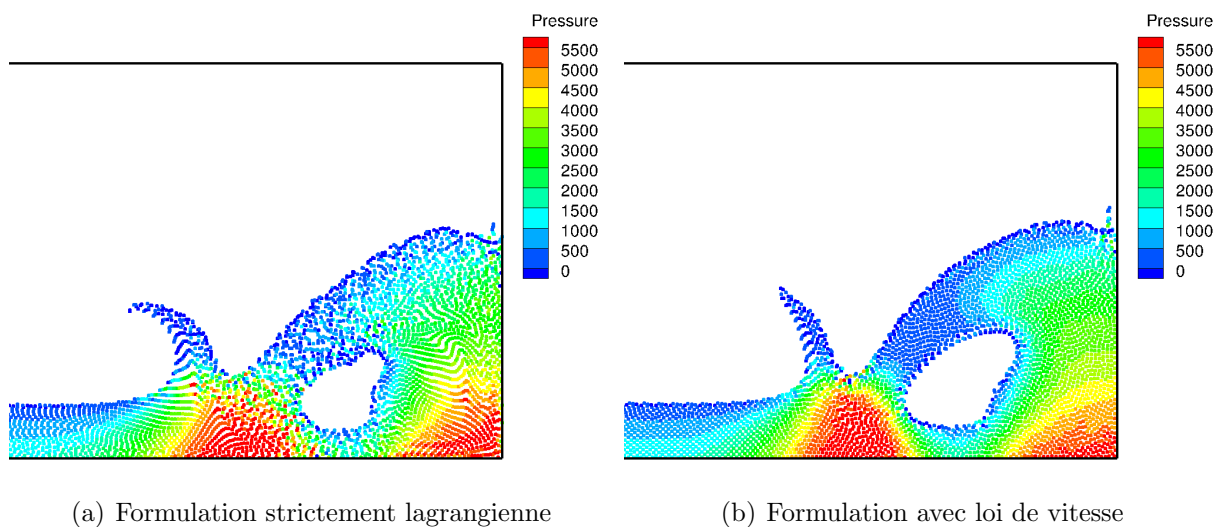


Figure 4.13: Comparaison du champ de pression obtenu sur un dambreak entre le schéma Riemann-SPH strictement lagrangien NFM et le schéma NFM utilisant la nouvelle loi de vitesse Oger *et al.*

## Extension de la méthode en 3 dimensions

La présente section concerne l'implémentation de la méthode NFM pour le traitement d'écoulements tridimensionnels. Dans le cadre de cette thèse, on s'est intéressé aux moyens à mettre en œuvre afin que la discrétisation des parois soit efficace (au sens de l'optimisation du temps CPU) et simple à mettre en œuvre.

### Description de l'algorithmique mise en place

En 3D, l'intersection entre le support d'une particule et une paroi plane est un disque (Fig. 4.14). Le bord d'un disque étant courbe, il apparaît dès lors non trivial de discrétiser une telle géométrie. Néanmoins, toutes les intégrales surfaciques de la méthode NFM utilisées pour le calcul des flux (4.23,4.24) font intervenir l'évaluation du noyau  $W$  sur le bord de  $\Omega$ . Ainsi il est possible d'approcher l'intersection entre une sphère et un plan par l'intersection entre un cube et un plan. Le disque de diamètre  $2R_\Omega$  (noté  $D_\Omega$ ) résultant de l'intersection est ainsi remplacé par un carré de côté  $2R_\Omega$  (noté  $C_\Omega$ ). Cette approximation est valide de par la compacité du noyau (Fig. 4.15).

Au sein du code SPH-flow, les corps sont maillés uniquement avec des triangles. Dans ce qui suit, c'est ce que nous appellerons le maillage primaire. Les flux des intégrales surfaciques (4.23,4.24) nécessitent d'être calculés numériquement via l'utilisation d'une quadrature. Pour ce faire, le carré d'intersection  $C_\Omega$  est maillé cartésienement et chaque élément de surface  $C_j$  apporte une contribution dans la formule de quadrature composite de point milieu utilisé sur un triangle  $\mathcal{T}$  (Fig. 4.16).

Cette discrétisation de  $C_\Omega$  est appelée maillage secondaire. Un tel procédé n'est cependant pas utilisable tel quel car les éléments  $C_j$  doivent être redécoupés lorsqu'ils intersectent le



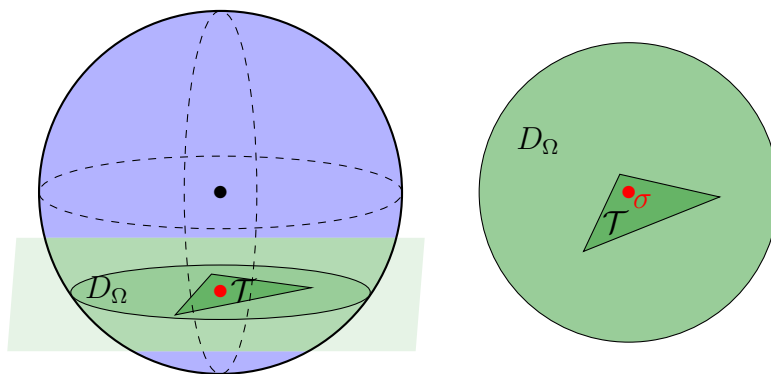


Figure 4.14: Représentation de l'intersection entre le support d'une particule et une paroi plane (vue de face à gauche et de dessus à droite)

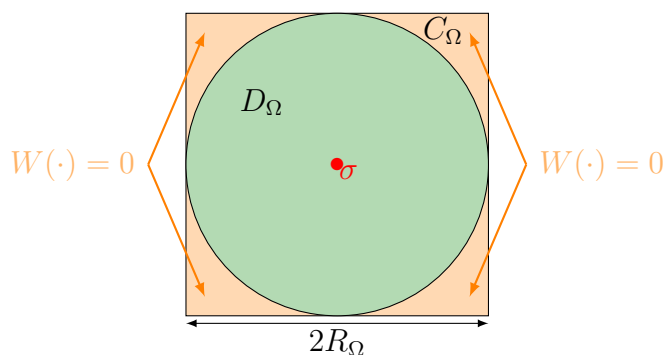


Figure 4.15: Justification de l'approximation d'un disque  $D_\Omega$  par un carré  $C_\Omega$  pour le calcul de flux NFM

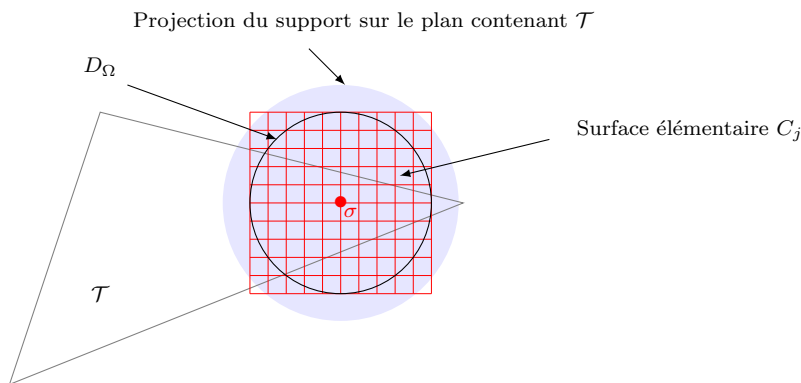


Figure 4.16: Éléments de surface  $C_j$  composant le maillage secondaire  $C_\Omega$

triangle  $\mathcal{T}$  (Fig. 4.17).

La redécoupe est un processus complexe qui nécessite trois étapes :

- Déterminer via des tests logiques si le triangle et le carré s'intersectent.
- Déterminer les points d'intersection et leur barycentre qui servira de point de quadrature.

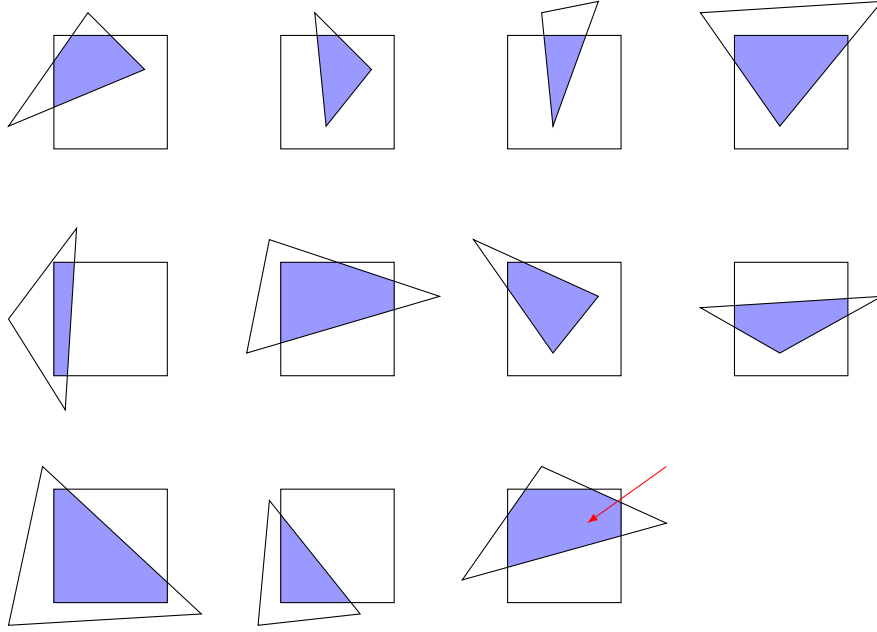


Figure 4.17: Différentes intersections possibles entre un triangle et un carré

- Déterminer l'aire du polygône obtenu qui servira de poids de quadrature.

La première étape est fastidieuse car elle nécessite d'effectuer les tests logiques suivants :

- Coin(s) du carré inclus dans le triangle ? (Alg. 1)
- Sommet(s) du triangle inclus dans le carré ?

Cependant ces tests s'avèrent en pratique insuffisants car il existe des cas où le polygône d'intersection est non vide et ne se compose ni de sommets du triangle ni de sommets du carré (dernier schéma de la figure 4.17 indiqué par une flèche rouge).

---

**Algorithm 1** Test logique d'appartenance d'un point  $\mathbf{x}$  à un triangle  $\mathcal{T}$

---

```

1: function POINTINFACE( $\mathbf{x}, \mathcal{T}$ )
2:   PointInFace = FALSE
3:   if  $\mathbf{n}_{s1} \cdot (\mathbf{s}_1 - \mathbf{x}) \geq 0$  and  $\mathbf{n}_{s2} \cdot (\mathbf{s}_2 - \mathbf{x}) \geq 0$  and  $\mathbf{n}_{s3} \cdot (\mathbf{s}_3 - \mathbf{x}) \geq 0$  then
4:     PointInFace = TRUE
5:   end if
6: end function

```

---

Pour pallier à ce problème, on propose ici une méthode beaucoup plus simple qui permet de déterminer à coup sûr si l'intersection est vide ou non. Pour ce faire on considère qu'un carré  $C_j$  peut être uniquement décrit par son centre  $\mathbf{x}_{c_j}$  et sa longueur  $L_c$  (tous les carrés issus de  $C_\Omega$  font la même dimension). A partir de ces informations, il est possible de définir deux nouveaux triangles. Le premier, dit interne, est une réduction de  $\mathcal{T}$  d'une longueur  $0.5\sqrt{2}L_c$  dans la direction des normales du triangle. Le second, dit externe, est

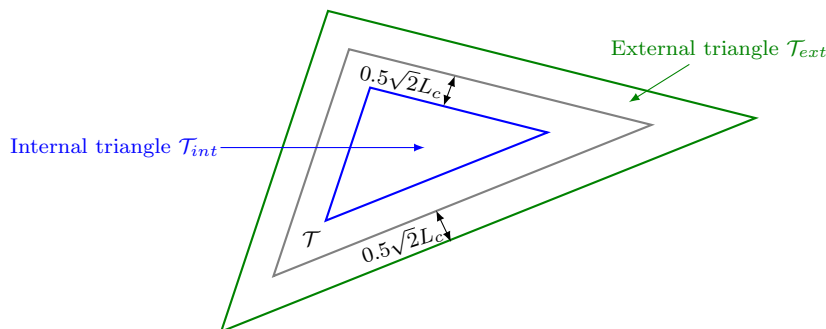


Figure 4.18: Définition des triangles interne et externe

une augmentation de  $\mathcal{T}$  d'une longueur de  $0.5\sqrt{2}L_c$  dans la direction des normales (Fig. 4.18).

Dès lors, la procédure de détermination d'intersection se réduit à :

- Si  $\mathbf{x}_{cj} \in \mathcal{T}_{int}$  alors le carré est complètement inclus dans  $\mathcal{T}$ , il n'y a pas de redécoupe à faire et on accepte la contribution surfacique de l'élément  $C_j$ .
- Sinon, si  $\mathbf{x}_{cj} \notin \mathcal{T}_{ext}$  alors le carré n'intersecte pas  $\mathcal{T}$ , on rejette la contribution surfacique de la part de l'élément  $C_j$ .
- Sinon le polygone d'intersection est non vide et il faut le calculer.

La seconde étape de la procédure de découpe consiste à déterminer les points d'intersection de  $\mathcal{T}$  et  $C_j$  et à les ordonner. Ce procédé, largement documenté dans la littérature, a fait l'objet de nombreuses publications dans le domaine de l'infographie et est désigné sous le nom de clipping [93, 40, 100].

La dernière étape de la découpe est la détermination de l'aire du polygone obtenu. Pour ce faire, on somme les aires des triangles formés de deux sommets consécutifs et du barycentre du polygone (Alg. 2).

---

**Algorithm 2** Calcul de l'aire  $\mathcal{A}$  du polygone  $\mathcal{P}$

---

```

1: procedure POLYGONAREA( $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{P}$ )
2:    $\mathcal{A} = 0$ 
3:    $\mathcal{T}_3 = \mathbf{b}_{\mathcal{P}}$            ▷ Le troisième sommet de  $\mathcal{T}$  reçoit le barycentre de  $\mathcal{P}$ 
4:   for  $i = 1, n_{\mathcal{P}}$  do       ▷ Boucle sur les sommets de  $\mathcal{P}$  classés en ordre anti-horaire
5:      $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}_i$ 
6:      $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}_{\text{mod}(i+1, 2n_{\mathcal{P}}-i)}$ 
7:      $\mathcal{A} = \mathcal{A} + \mathbf{TriangleArea}(\mathcal{T})$            ▷ L'aire de  $\mathcal{T}$  est ajoutée via Héron
8:   end for
9: end procedure
    
```

---

Le calcul de l'aire d'un triangle quelconque est effectué à l'aide de la formule de Héron où  $a, b, c$  sont les longueurs des côtés du triangle :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{a+b+c}{2} \quad (4.90)$$

Finally, this last step concludes the process of determining the weights and points of quadrature used for the calculation of fluxes at the wall. Figure 4.19 summarizes the different steps presented previously.

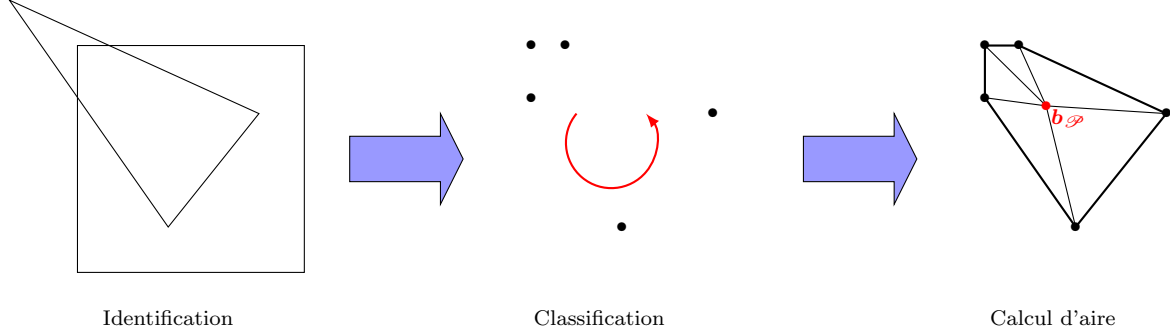


Figure 4.19: Représentation des étapes permettant de déterminer le barycentre et l'aire du polygone

## Analyse de la précision en fonction du nombre de points de quadrature

It is now necessary to quantify the number of secondary mesh elements needed so that the calculation of surface integrals is precise. For this, we consider the evaluation of a constant field on a plane wall :

$$F_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} W dS \approx \sum_{j \in \mathcal{S}} s_j W_{ij} \quad (4.91)$$

From Violeau *et al.* [102], the analytical value of this integral (for the Wendland  $\mathcal{C}^2$ ) is given by :

$$F_{\partial\Omega} = \frac{3}{4R} \left(1 - \frac{d_n}{R}\right)^5 \left(2 + \frac{10d_n}{R} + 16 \left(\frac{d_n}{R}\right)^2\right) \quad (4.92)$$

The comparison performed in Figure 4.20 demonstrates that the use of 36 quadrature points is sufficient to obtain a relevant evaluation of (4.92) whatever the distance of the particle to the wall. Moreover, the number of quadrature points can be reduced when the particle is sufficiently far from the wall ( $\frac{d_n}{R} \geq 0.3$ ) because the convergence of the numerical solution is then obtained from about 16 quadrature points.

## Discussion sur la pertinence de l'algorithmique choisie

An alternative to re-cutting would be to refine sufficiently the primary mesh so as to use the center of gravity and the area of each triangle as point and weight of quadrature.

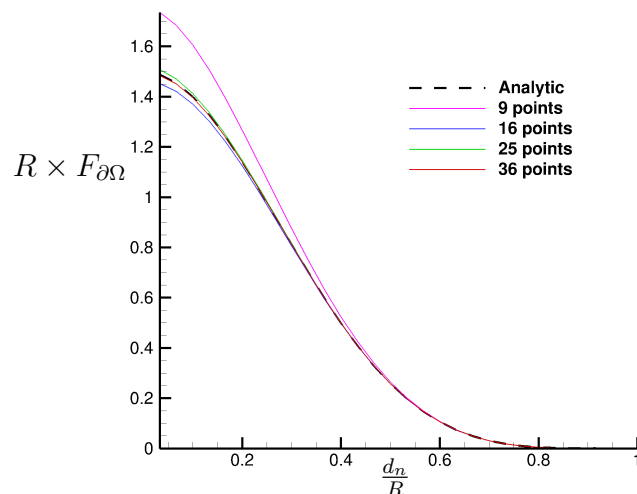


Figure 4.20: Comparaison entre la valeur analytique et la solution numérique pour différents nombres de points de quadrature en fonction de la distance à la paroi

ture pour l'évaluation des intégrales surfaciques (4.23,4.24). On se propose d'effectuer le comparatif en terme de temps CPU entre les deux approches.

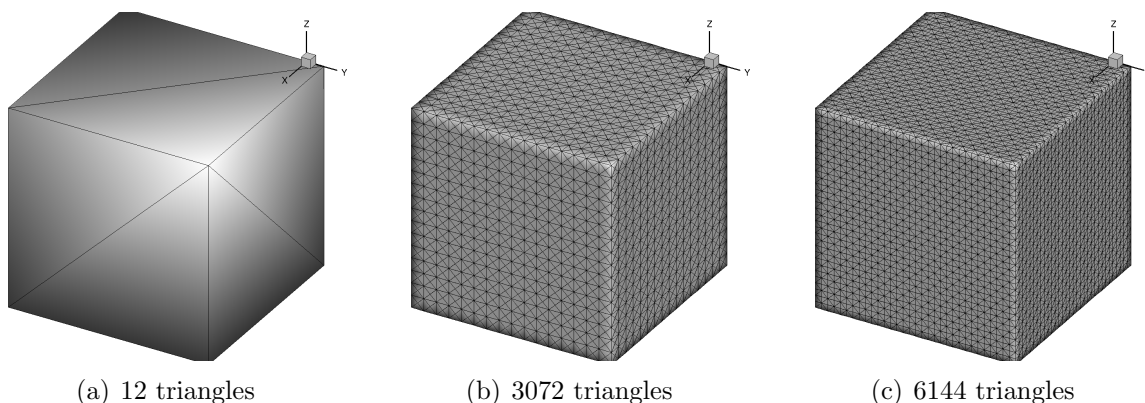


Figure 4.21: Différents maillages d'une cuve hydrostatique

Pour ce faire, on considère trois maillages (Fig. 4.21). Le premier est utilisé avec la méthode de découpe, les deux autres avec une intégration directe sur le maillage primaire. Les performances des trois simulations sont comparées sur l'évolution de l'énergie cinétique des particules contenues dans une cuve hydrostatique ainsi que sur le temps CPU associé. La méthode de découpe est utilisée avec 100 éléments  $C_j$ . Le comparatif de l'évolution de l'énergie cinétique (Fig. 4.22) montre que la méthode de découpe possède une précision comprise entre les deux autres simulations. Cependant, le temps de calcul (Tab. 4.1) est largement en faveur de la méthode de découpe. Cela s'explique par le fait que le nombre d'opérations mathématiques est bien plus faible avec la méthode de découpe que l'intégration directe.

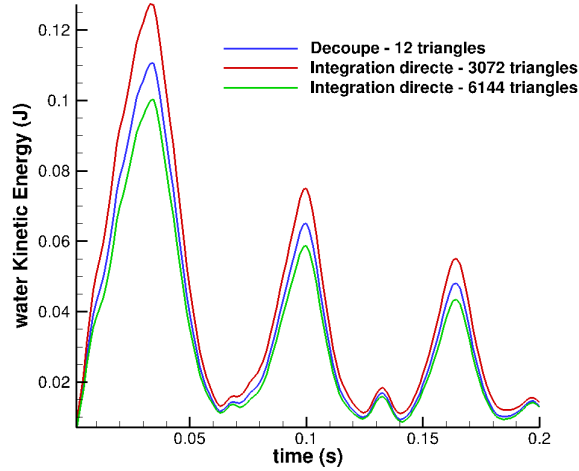


Figure 4.22: Evolution de l'énergie cinétique au cours du temps

Approche utilisée	Triangles	Temps CPU pour un pas de temps (secondes)
Découpe	12	5.4
Intégration directe	3072	15.12
Intégration directe	6144	28.27

Table 4.1: Comparaison entre les deux approches

La méthode de découpe présente également comme avantage de recourir à un maillage surfacique dont la finesse est complètement indépendante de la discrétisation volumique adoptée.

## Discussion sur les similitudes/différences entre NFM et USAW

Le lecteur aguerri et au fait des travaux sur les conditions aux limites surfaciques n'aura pas manqué de noter le parallèle étroit entre les méthodes NFM et USAW (Unified Semi-Analytical Wall) [59, 102, 34, 72, 58]. Néanmoins les deux méthodes se distinguent sur de nombreux points que nous avons jugé importants de rappeler.

La méthode USAW (Fig. 4.23) utilise une discrétisation des parois via des segments formant une partition de  $\mathcal{S}$ . Chaque segment est défini par deux sommets  $e_1$  et  $e_2$  (en 2D) auxquels on affecte un volume initial  $V_e = \frac{m_e}{\rho_0}$  correspondant à une fraction du volume initial de la particule fluide la plus proche. L'ensemble des sommets forme une partition de  $\mathcal{E}$ . Le rôle des sommets (appelés particules de paroi) est de servir de points de contrôle pour imposer la pression à la paroi (via une interpolation Shepard sur les particules fluides). Les particules

de parois sont également prises en compte dans les équations de continuité et de quantité de mouvement (*i.e*  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ ). Les segments reliant deux particules de paroi sont de dimension  $\Delta x$  (en 2D).

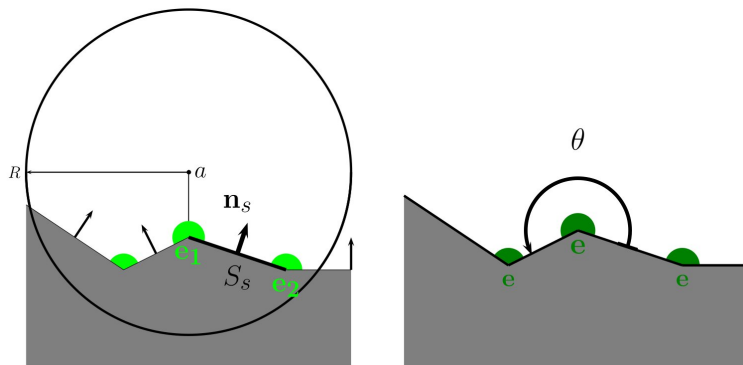


Figure 4.23: Définition des segments  $s$  et des particules de paroi  $e$  pour la méthode USAW [34]

A l'inverse, la méthode NFM n'utilise pas de particules de paroi. La pression sur la paroi est imposée via l'équation 4.14, qui découle de la méthode des Flux Caractéristiques, et non à l'aide d'une interpolation Shepard comme c'est le cas avec la méthode USAW. De plus, la taille des éléments composant le maillage surfacique utilisé par la méthode NFM est indépendante de la résolution spatiale des particules.

La dernière différence entre les deux méthodes concerne les fuites de particules en 3D. Mayrhofer *et al.* [72] a souligné l'incapacité de USAW à traiter des écoulements faiblement visqueux. Leroy [58] a mentionné dans sa thèse que des fuites de particules se produisaient pour des écoulements avec surface libre et faible viscosité. Dans la suite de ce manuscrit, nous montrerons que la méthode NFM garantit l'imperméabilité des parois pour des cas non visqueux tridimensionnels.

Les différences entre les deux méthodes sont résumées dans le tableau 4.2.

	NFM	USAW
Particules de paroi	non	oui
Correction Shepard	analytique	analytique
Aire des éléments du maillage surfacique	quelconque	de l'ordre de $\Delta x^{D-1}$
Pression à la paroi	Equation (4.14)	Interpolation Shepard
Fuites de particules en 3D	non	oui, pour des cas-tests non visqueux

Table 4.2: Caractéristiques des méthodologies NFM et USAW

## Etude numérique de la précision et de la robustesse de la méthode NFM

### Précision de la correction Shepard analytique

Afin de valider l'implémentation de la correction Shepard analytique (4.52,4.55) on considère une cuve hydrostatique sans surface libre dans laquelle un corps immobile de forme étoilée est immergé (Fig. 4.24). La frontière de ce corps, tantôt localement convexe, tantôt localement concave, est particulièrement intéressante car elle présente de nombreuses singularités géométriques, et représente ainsi un cas très difficile, à notre connaissance, pour la méthode SPH.

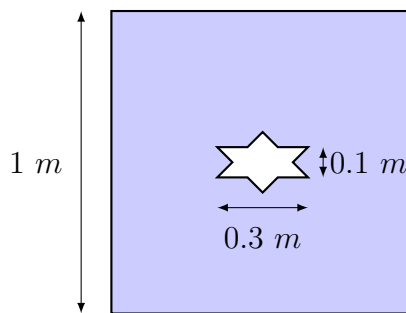


Figure 4.24: Schéma du cas test hydrostatique réalisé

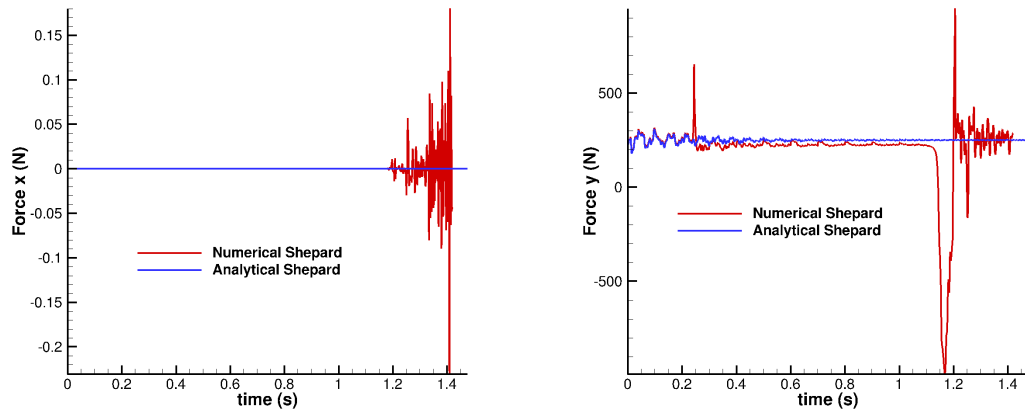
On s'intéresse à l'évaluation des efforts sur le corps étoilé. La force théorique suivant  $x$  est nulle de par la symétrie du corps, tandis que celle en  $y$  est  $F_y^{th} = \rho_0 g S_{\text{étoile}} = 294.3 \text{ N}$ . Pour ce cas test on prend  $\Delta x = 0.01 \text{ m}$ ,  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau) et  $c_0 = 40 \text{ m.s}^{-1}$ . Les particules sont initialisées cartésienement. La correction Shepard numérique (4.51) est calculée avec une quinzaine de points de quadrature dans la longueur du rayon de la particule.

Le comparatif des efforts (Fig. 4.25) illustre l'apport de précision de la correction Shepard analytique. En effet, les oscillations des signaux d'efforts calculés avec la correction Shepard numérique (4.51) proviennent de non-linéarités au voisinage de la singularité géométrique de la primitive du noyau  $f$  en  $r = 0$ . Ce constat a déjà fait l'objet d'une discussion à la section 4.2.3 (Figs. 4.4 et 4.7). La simulation avec la correction Shepard analytique converge vers  $F_y = 289.6 \text{ N}$ .

### Imperméabilité des parois

L'hydrostatique est un cas-test extrêmement intéressant pour évaluer la robustesse d'un schéma numérique SPH. En effet, toute éventuelle forme d'inconsistance au sein du schéma SPH se traduira par des mouvements de recirculation des particules proche de la paroi conduisant potentiellement à des fuites. On considère ici une cuve parallélépipédique dans la direction  $z$  de dimension  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$  (la cuve est remplie à moitié dans la direction





(a) Force horizontale due à l'eau sur l'étoile      (b) Force verticale due à l'eau sur l'étoile

Figure 4.25: Comparaison des efforts entre les approches numérique et théorique de calcul du Shepard

$z$ ). La résolution spatiale adoptée est  $\Delta x = 0.04 \text{ m}$ ,  $\frac{R}{\Delta x} = 2.5$  (environ 180 particules dans le support du noyau), la masse volumique nominale du fluide est  $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  et la vitesse nominale du son est fixée à  $c_0 = 30 \text{ m.s}^{-1}$ . La distribution particulaire est cartésienne à l'initialisation.

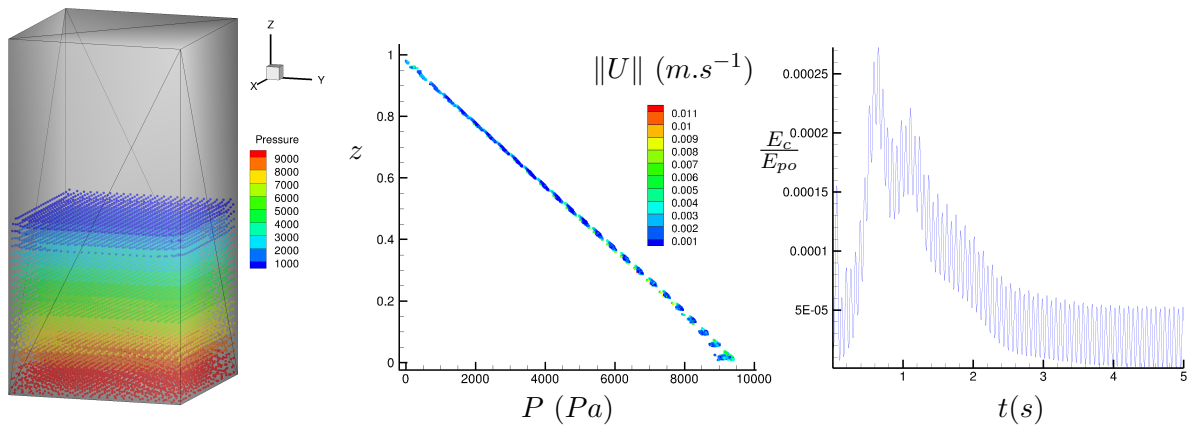


Figure 4.26: Champ de pression (à gauche) et profil de pression (au milieu) à l'instant  $t = 5 \text{ s}$ , évolution temporelle du rapport de l'énergie cinétique sur l'énergie potentielle (à droite)

La figure 4.26 présente les résultats obtenus après 5 s de simulation. On note qu'aucune fuite n'est à déplorer, bien que les particules se soient légèrement réorganisées près des coins inférieurs de la cuve (à gauche). Le profil de pression (au milieu), globalement linéaire, est satisfaisant. La courbe représentant le ratio entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle

(à droite) est stable.

## Validations numériques

### Écoulement de Poiseuille

Afin de valider l'opérateur  $L_{MEA}^R(\cdot)^{NFM}$ , un écoulement de Poiseuille à  $Re = 10$  dans un canal  $2D$  disposant de conditions aux limites périodiques dans la direction  $x$  est réalisé. La hauteur du canal est  $L = 1 m$ , la viscosité  $\nu$  est égale à  $0.1 m^2.s^{-1}$  tandis qu'une force agissant sur les particules est réglée à  $0.8 m.s^{-2}$ . Les particules sont initialisées cartésiennement, avec vitesse et pression nulles.

La vitesse du son  $c_0$  est fixée à  $10 m.s^{-1}$  (dix fois la vitesse max de l'écoulement  $U_{max} = 1 m.s^{-1}$ ). On souhaite étudier la convergence du laplacien, pour cela on considère trois discrétisations allant de  $\Delta x = 0.02 m$  à  $0.005 m$  avec  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau).

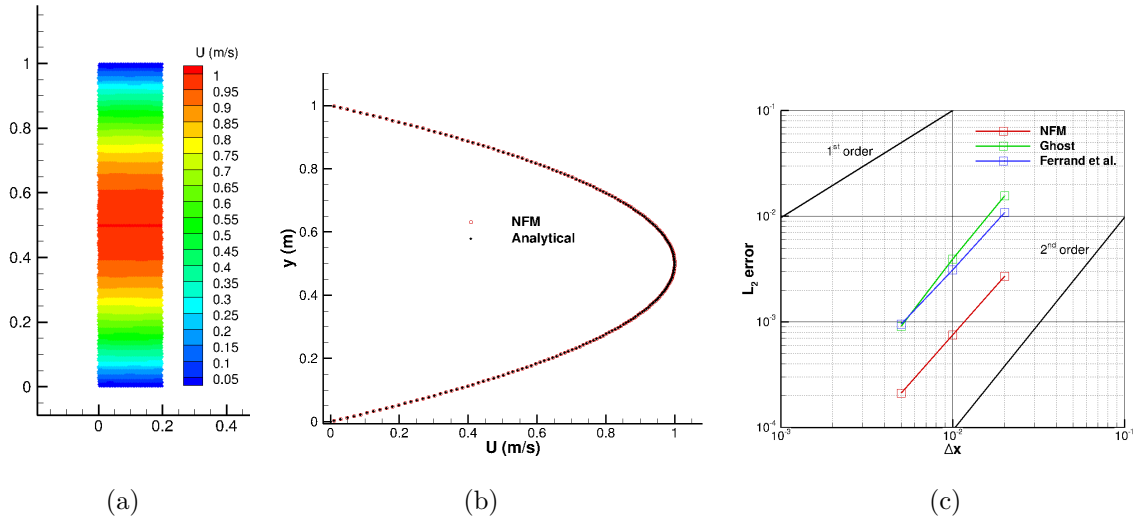


Figure 4.27: Écoulement de Poiseuille dans un canal périodique : (a) Etat stationnaire du champ de vitesse horizontale à  $t = 20 s$ , (b) Comparaison entre les profils de vitesse horizontale NFM et la solution exacte, (c) Analyse de l'erreur sur la vitesse horizontale en norme  $L_2$

La figure 4.27 (a) et (b) illustre la pertinence des résultats obtenus et le très bon accord entre les solutions numérique et exacte. Sur la figure 4.27 (c), un comparatif avec la méthode des particules fantômes (présentée dans la section 3.1.1) et Ferrand *et al.* [34] (avec  $\frac{R}{\Delta x} = 4$ ) est réalisé. Nous effectuons ce comparatif car la méthode des particules fantômes représente le procédé que nous utilisons habituellement au sein du laboratoire

pour les écoulements visqueux. Nous avons également retenu Ferrand *et al.* car il s'agit de la méthode présentant le meilleur ratio robustesse/précision parmi les méthodes surfaciques dans la littérature (hors NFM).

Sur la figure 4.27 (c), la méthode des particules fantômes est la moins précise des trois méthodes (pour la gamme de discrétisations simulées) et présente un ordre de convergence de 1.97 sur ce cas test. La méthode NFM s'avère plus précise que USAW, dont la précision est voisine de celle des particules fantômes sur ce cas, bien que les deux approches ont un ordre de convergence similaire d'environ 1.9.

### Cavité entraînée à $Re = 1000$

Dans cette section, on s'intéresse à la simulation d'une cavité entraînée. Ce second cas-test visqueux vise à confirmer la validité de l'opérateur laplacien NFM sur un cas plus complexe que l'écoulement de Poiseuille ainsi qu'à estimer sa précision vis-à-vis de la méthode de particules fantômes que nous utilisons habituellement au sein du laboratoire pour traiter ce type d'écoulement. La géométrie du cas test (Fig. 4.28) est composée d'une cavité carrée de côté  $L$  avec des parois fixes à l'exception de la paroi supérieure qui entraîne le fluide à la vitesse  $U$ . La vitesse nominale du son est  $c_0 = 10U$ . Une pression de fond est ajoutée (2.105) afin d'éviter le problème d'instabilité de tension. Une résolution spatiale de 400 particules dans la longueur  $L$  est adoptée avec  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau).

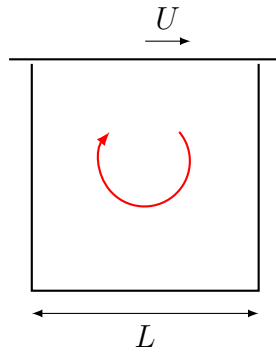


Figure 4.28: Géométrie de la cavité entraînée

La figure 4.29 fournit une comparaison entre les deux approches de prise en compte des conditions aux limites. Les calculs en formulation eulérienne, servant de base de référence pour les deux méthodes, ont été réalisés à l'aide du schéma Riemann-SPH de Vila de la section 2.4.4.2 avec  $\mathbf{u}_{0i} = 0$  et  $\mathbf{u}_{0j} = 0$ . Les résultats en formulation eulérienne sont globalement en accord, les deux méthodes étant capables de modéliser les tourbillons secondaires dans les coins inférieurs gauche et droit. Les résultats en formulation lagrangienne sont légèrement différents, les résultats obtenus avec la méthode NFM s'avérant plus diffusifs sur la circonférence du tourbillon primaire qu'avec la méthode des particules fantômes. Les deux méthodes font jeu égal de par leur incapacité à capturer les tourbillons

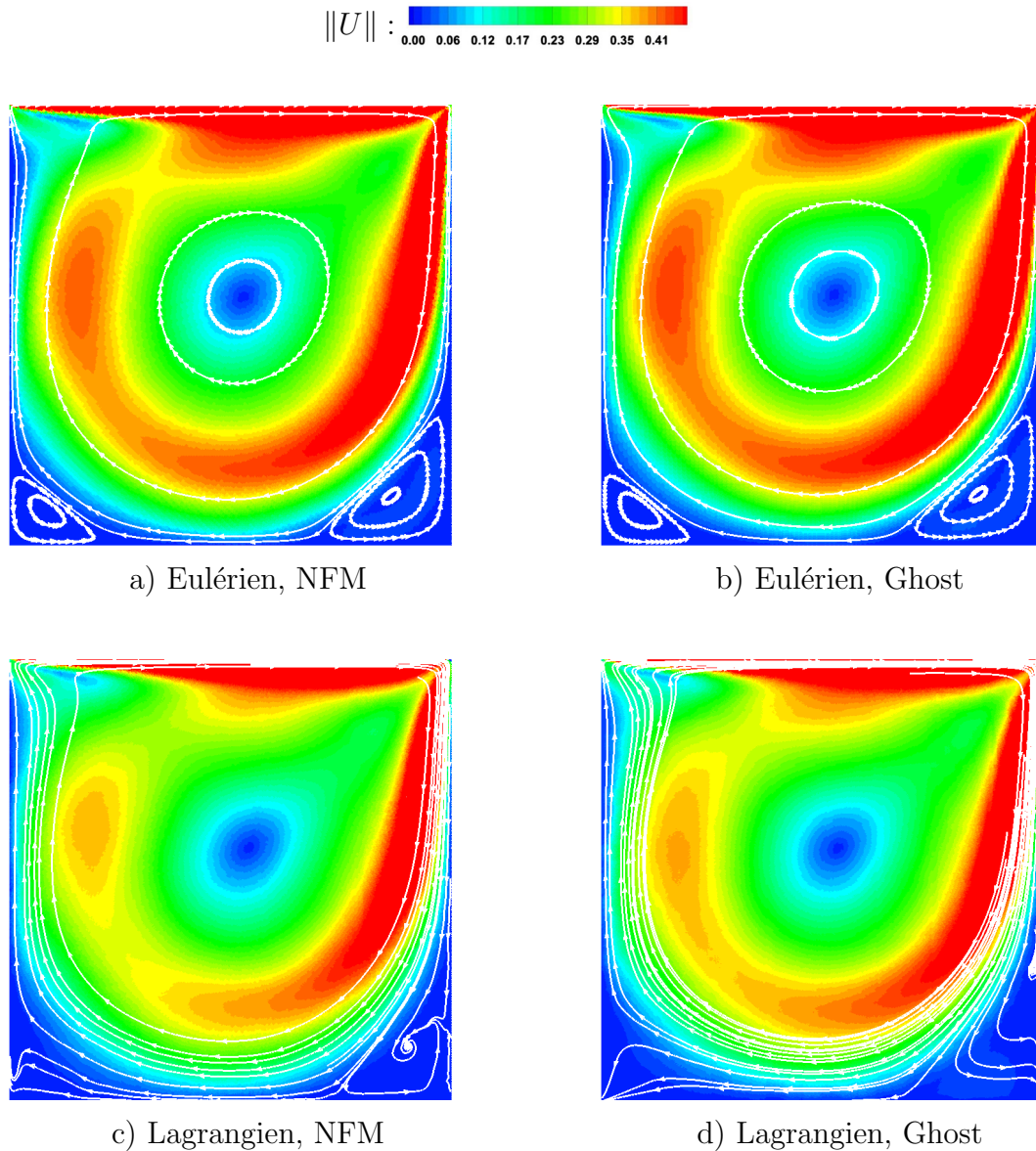


Figure 4.29: Comparaison du module de vitesse obtenu avec les méthodes NFM (à gauche) et de particules fantômes (à droite)

secondaires en formulation lagrangienne à cette résolution spatiale. On pourra noter au passage qu’avec le schéma ALE développé récemment au laboratoire [87], on parvient bien à capturer ces tourbillons en formulation quasi-lagrangienne.

La comparaison des profils de vitesse en formulation eulérienne (Fig. 4.30) et lagrangienne (Fig. 4.31) démontre le très bon accord entre les méthodes de particules fantômes et NFM. De plus, en formulation eulérienne, les profils sont très proches de la solution de référence Ghia *et al.* [37]. La solution numérique USAW de Leroy *et al.* [59], affichée à titre informatif sur la figure 4.31, ne permet pas comparer les deux méthodes surfaciques car les résolutions spatiales adoptées sont très différentes.

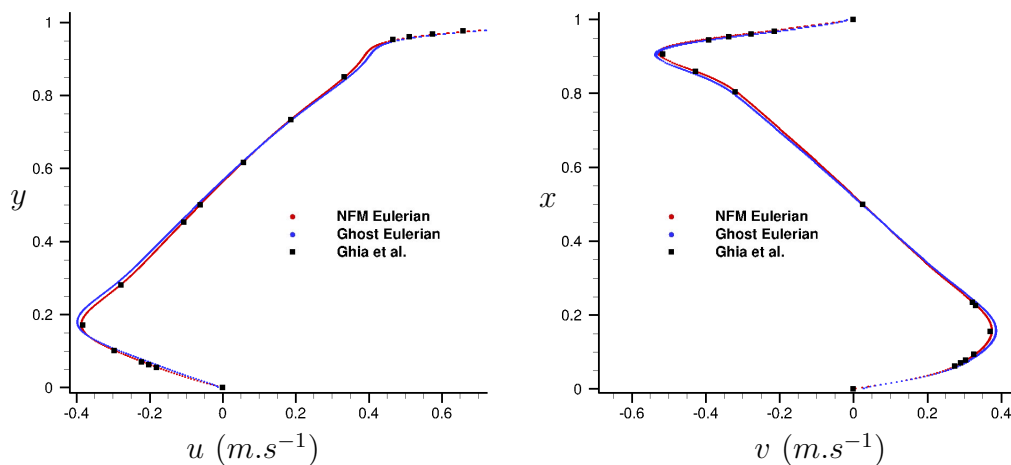


Figure 4.30: Comparaison des profils de vitesse pour la formulation eulérienne

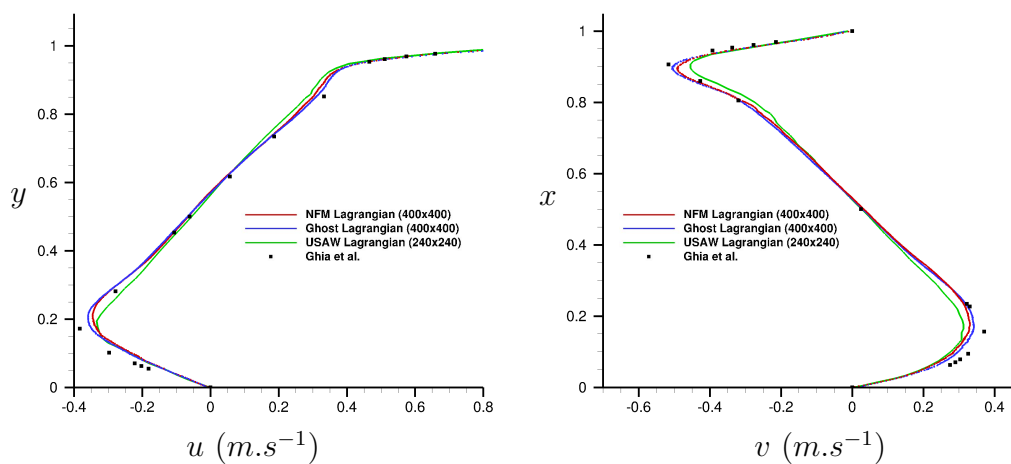


Figure 4.31: Comparaison des profils de vitesse pour la formulation lagrangienne

Simulation	Temps CPU (heures)
NFM	75
Ghost (particules fantômes)	87

Table 4.3: Comparaison du temps de calcul entre la méthode NFM et les particules fantômes pour 100 secondes de temps physique simulé en formulation lagrangienne

Le tableau 4.3 présente un comparatif du temps de calcul entre les méthodes NFM et de particules fantômes pour le cas test de la cavité entraînée.

## Dambreak en présence d'une géométrie complexe

Dans cette section, on s'intéresse à la simulation d'un dambreak dans une cuve à géométrie complexe. En l'absence de données expérimentales pour ce cas test, la comparaison des résultats obtenus est faite avec un solveur basé sur des différences finies avec méthode Level-Set (Colicchio [21]) du second ordre utilisant une méthode de projection pour la résolution de l'équation de Poisson. Bien qu'on ne dispose pas de résultats expérimentaux, notre choix s'est porté sur ce cas-test car la géométrie de la cuve se compose de parois localement convexes/concaves et curviligne (Fig. 4.32). De plus, la comparaison de résultats SPH à la solution de référence a déjà été étudié avec succès par Marrone *et al.* [67].

La géométrie, décrite sur la figure 4.32, se compose de neuf capteurs de pression (notés de  $P_1$  à  $P_9$ ) placés sur l'obstacle trapézoïdal ainsi que sur la partie curviligne de la cuve. La résolution spatiale adoptée pour ce problème est  $\frac{H}{\Delta x} = 134$  tandis que la vitesse nominale du son est fixée à  $c_0 = 25.54\sqrt{gH}$ . Le rayon est particules des  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau). Le fluide est considéré parfait. L'air n'est pas modélisé.

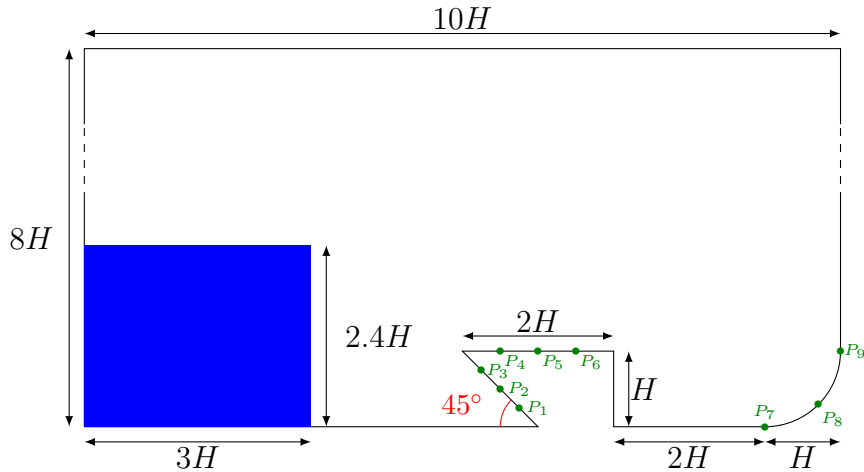


Figure 4.32: Géométrie du dambreak (les capteurs de pression sont numérotés de  $P_1$  à  $P_9$ )

La figure 4.33 représente une comparaison de l'évolution de la position de la surface libre entre les deux simulations à différents instants. La dynamique du fluide est caractérisée par un impact violent dans une zone confinée qui résulte en la projection d'un jet (instant  $t\sqrt{\frac{g}{H}} = 3.54$ ) qui, sous l'action de la gravité, impacte violemment à son tour le sommet de l'obstacle (instants  $t\sqrt{\frac{g}{H}} = 5.8$  et  $t\sqrt{\frac{g}{H}} = 7.36$ ). On note un bon accord entre les simulations SPH avec méthode NFM et Level-Set.

La comparaison des signaux de pression (Fig. 4.34) illustre un très bon accord sur le signal  $P_1$  aux oscillations acoustiques près dans la solution SPH. Sur les signaux  $P_5$  et  $P_7$  on note un décalage temporel qui s'explique par le fait que l'impact sur le sommet de l'obstacle (Fig. 4.33, instant  $t\sqrt{\frac{g}{H}} = 3.54$ ) se produit plus tôt dans la simulation Level-Set (l'éjection du fluide semble moins violente qu'en SPH). Sur le signal  $P_5$ , après le pic d'impact, des

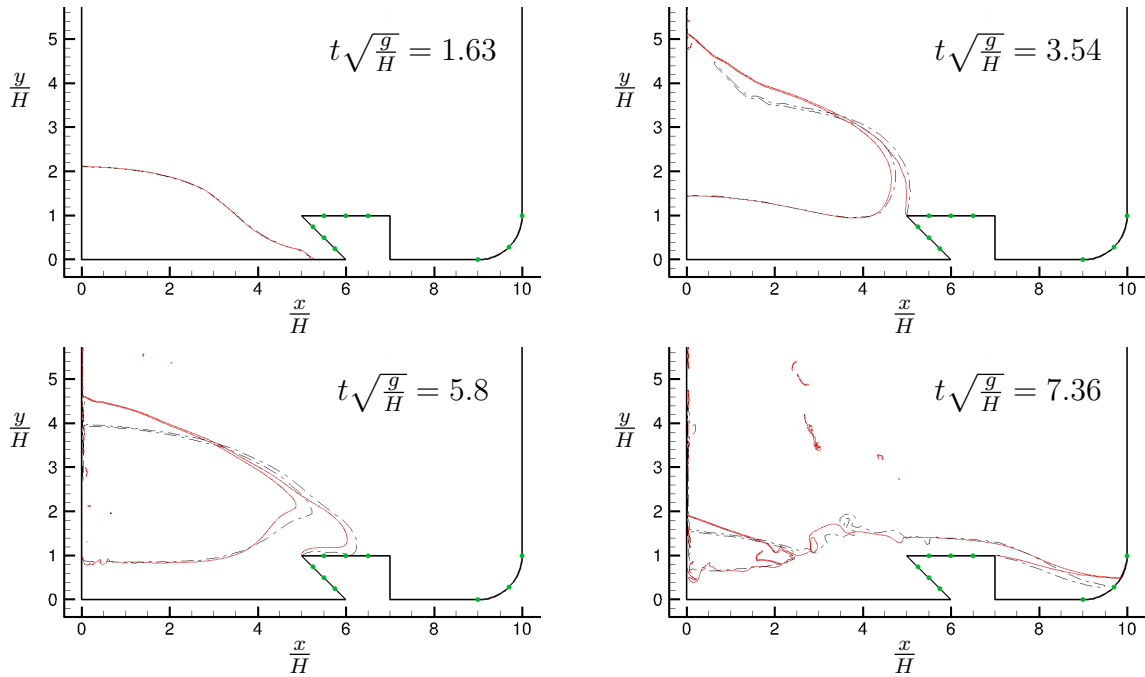


Figure 4.33: Comparaison de la position de la surface libre entre le calcul SPH avec méthode NFM (—) et la solution Level-Set (- - -)

oscillations acoustiques plus intenses surviennent en SPH. Celles-ci sont liées à l'hypothèse de faible-compressibilité et l'absence de modélisation de la phase gazeuse et sont générées par la fermeture d'une cavité située sur le sommet de l'obstacle. Dans le cadre de la simulation Level-Set, la fermeture de la cavité se traduit par un second pic de pression sur le capteur  $P_5$ .

### Dambreak 3D en présence d'un obstacle parallélépipédique

On s'intéresse à présent à la validation de la méthode NFM en 3D pour le cas d'une rupture de barrage en présence d'un obstacle. La simulation SPH avec méthode NFM est ici comparée à une simulation SPH avec la méthode de particules fantômes, aux résultats expérimentaux ainsi qu'aux résultats VOF fournis par Kleefsman *et al.* [50]

La géométrie, décrite sur la figure 4.35, se compose de huit capteurs de pression (notés  $P_1$  à  $P_8$ ) placés sur l'obstacle parallélépipédique. La résolution spatiale adoptée pour ce problème est  $\Delta x = 0.01 \text{ m}$  avec  $\frac{R}{\Delta x} = 2.5$  (environ 180 particules dans le support du noyau) tandis que la vitesse nominale du son est fixée à  $c_0 = 40 \text{ m.s}^{-1}$ .

Sur la figure 4.36, les pressions mesurées sur différents capteurs sont comparées aux résultats de Kleefsman *et al.* Lors de l'impact du fluide contre l'obstacle ( $t = 0.4 \text{ s}$ ), on observe que l'amplitude du pic de pression est correctement évaluée par les capteurs  $P_1$  et  $P_3$  du modèle SPH avec méthode NFM. Tout comme la méthode VOF, les deux simulations SPH présentent des pics de pression à l'instant  $t = 1.3 \text{ s}$  pour les différents

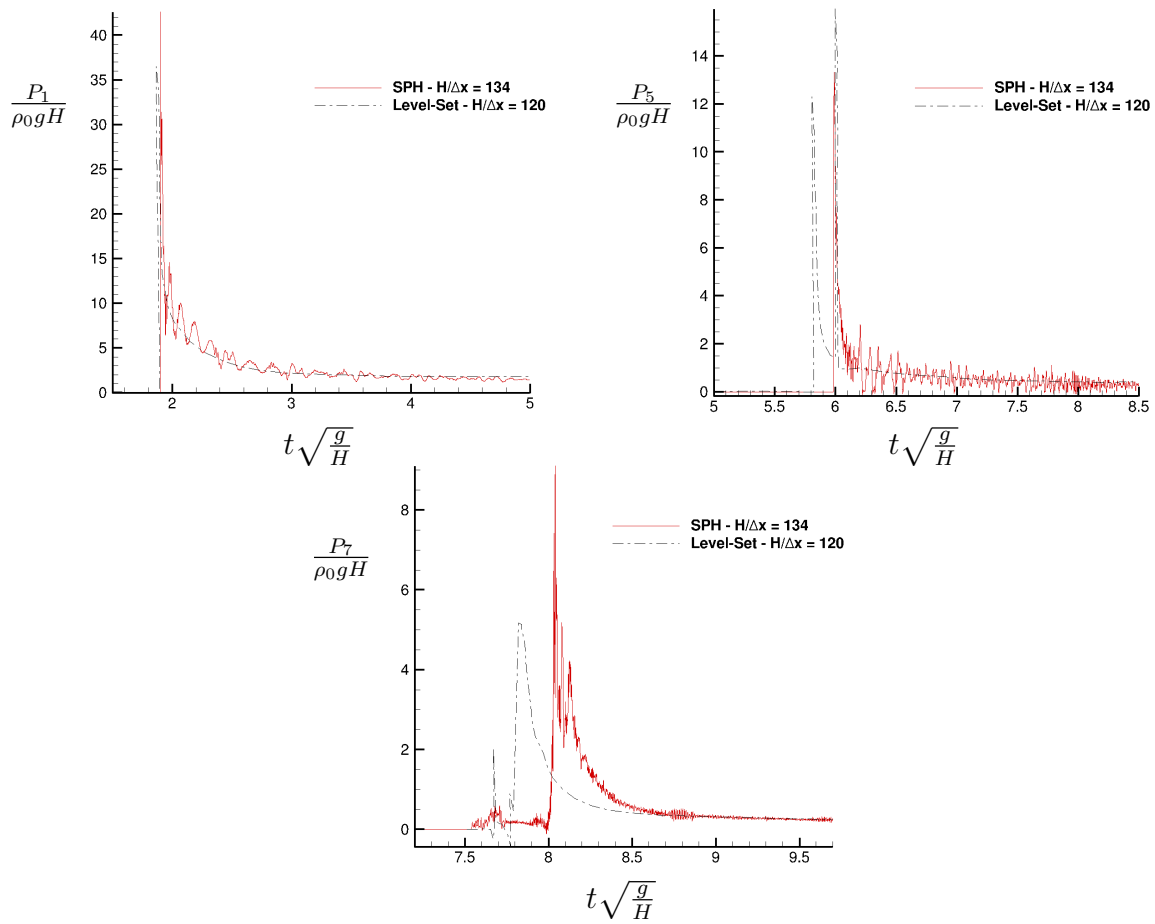
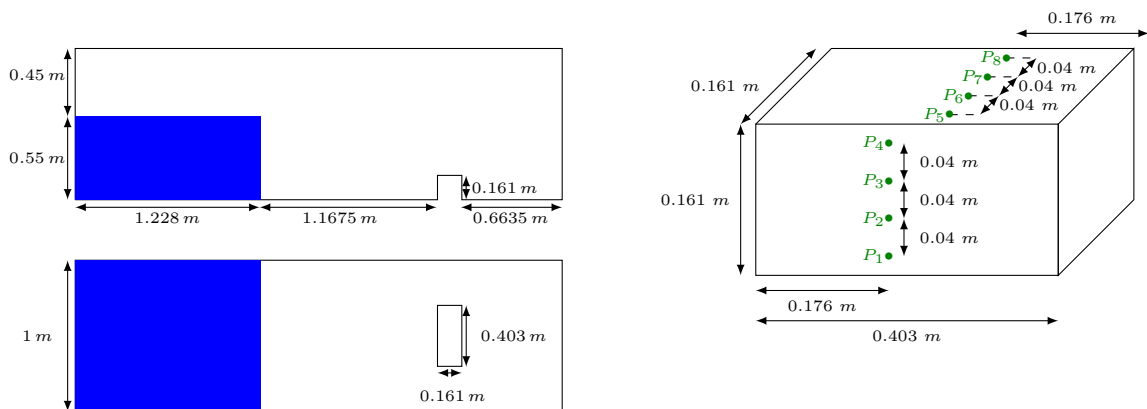

 Figure 4.34: Comparaison des signaux de pression pour les capteurs  $P_1$ ,  $P_5$  et  $P_7$ 


Figure 4.35: Schéma de la rupture de barrage simulée (en haut à gauche : vue de face, en bas à gauche : vue de dessus, à droite : obstacle)

capteurs. Ces pics proviennent d'un impact fluide-fluide lorsque qu'une cavité se referme près du haut de l'obstacle.



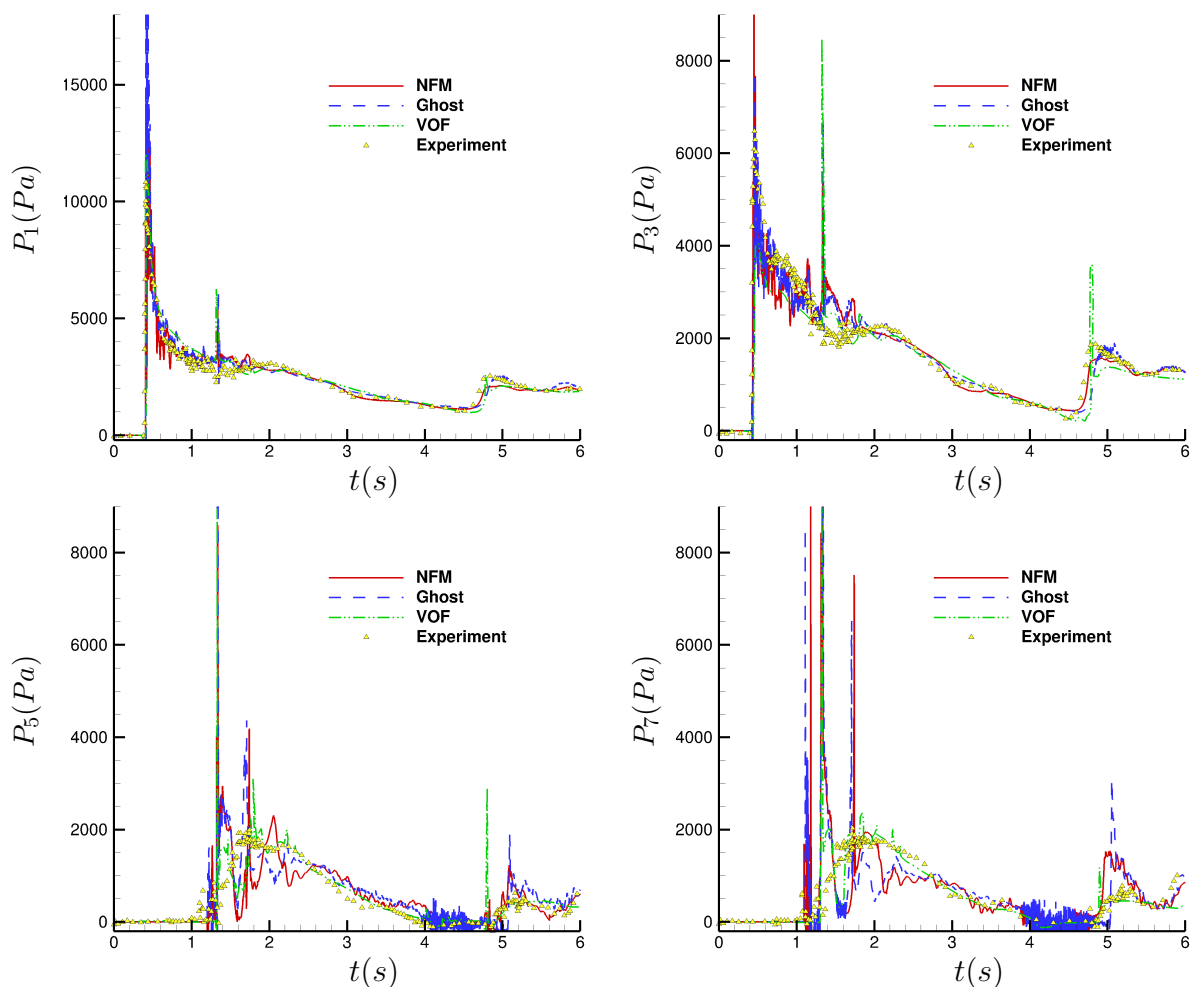


Figure 4.36: Comparaison des pressions prédites par les deux simulations SPH rapport aux résultats numériques et expérimentaux de Kleefsman *et al.* [50]

Le comparatif réalisé à la figure 4.36 démontre que le bon accord entre les méthodes SPH NFM et Ghost.

La figure 4.37 présente qualitativement l'évolution de la surface libre ainsi que le champ de vitesse associé aux particules pour différents instants pour le modèle SPH avec méthode NFM. On observe que l'imperméabilité des parois est respectée.

Le comparatif du temps de calcul (Tab. 4.4) atteste des bonnes performances algorithmiques de la méthode NFM par rapport aux particules fantômes.

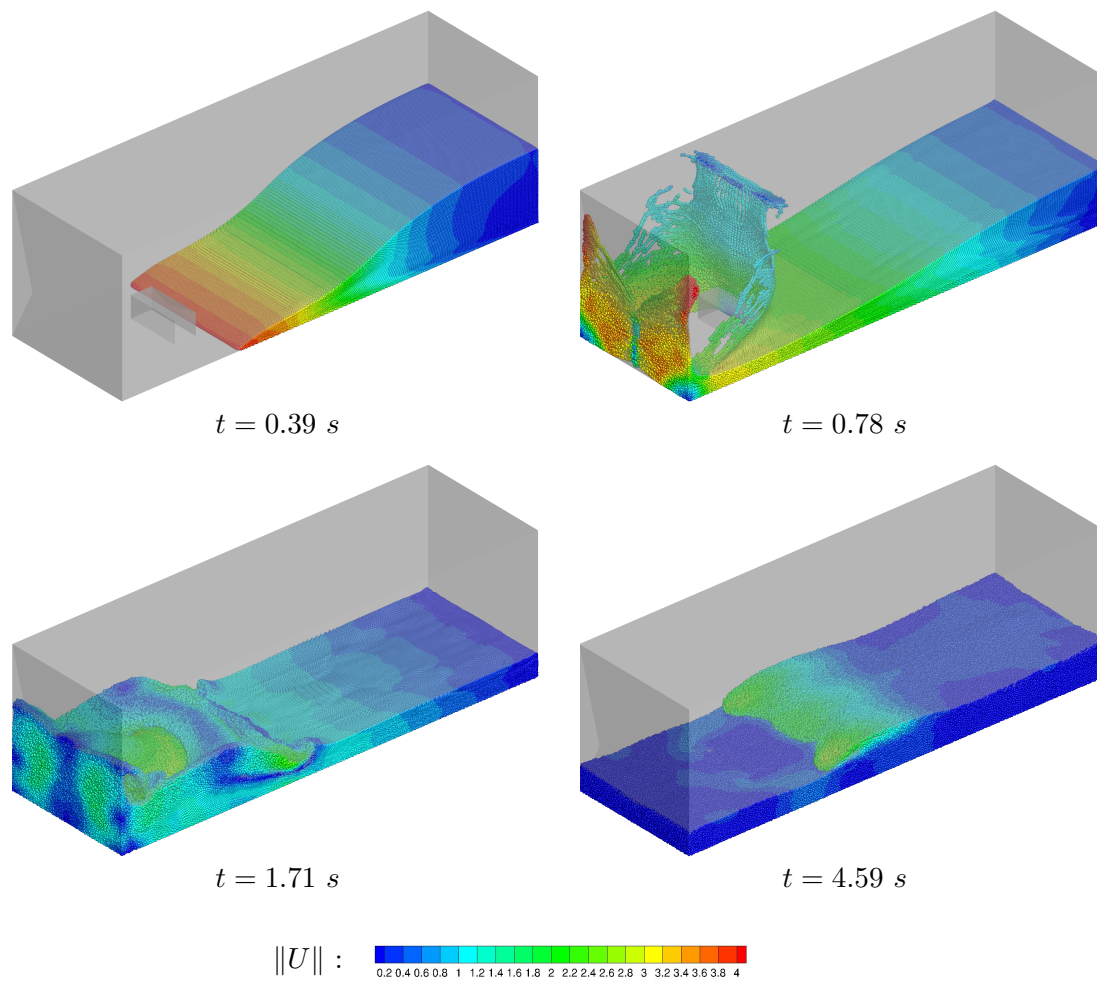


Figure 4.37: Champ de vitesse de la simulation de rupture de barrage contre un obstacle pour différents instants pour la simulation NFM

Simulation	Temps CPU (heures)
NFM	150
Ghost (particules fantômes)	244

Table 4.4: Comparaison du temps de calcul entre la méthode NFM et les particules fantômes



# Chapitre 5

## Raffinement particulaire adaptatif

Les simulations réalisées avec la méthode SPH utilisent le plus souvent une résolution spatiale uniforme. Lorsque le problème étudié le nécessite, on préfère recourir à une résolution spatiale particulaire variable en espace (notamment lorsqu'un écoulement implique des zones de dynamique rapide très localisées en espace et en temps ; cas de l'impact local sur l'étrave d'un navire dans la houle par exemple). Historiquement, la première méthode allant dans ce sens est appelée h-variable [10, 84, 86], en référence à la longueur de lissage qui évolue en espace, et permet l'utilisation d'une discrétisation particulaire fine dans une zone d'intérêt tout en ayant une discrétisation grossière dans le reste du domaine d'étude. Cependant, le raccordement entre ces deux zones n'est possible qu'au travers d'une zone de transition dans laquelle le ratio de la longueur de lissage entre deux particules adjacentes est inférieur à 3%, sans quoi des réflexions d'ondes acoustiques de la zone grossière vers la zone fine se produisent [86]. De plus il n'est pas rare que, de par la nature lagrangienne de la méthode SPH, les particules grossières se mélangent aux particules fines de façon anormale entraînant le développement de fortes instabilités numériques. Depuis quelques années, de nouvelles idées ont émergé afin de pallier les lacunes de la méthode h-variable et ont donné naissance à des méthodes de raffinement local de particules.

### Etat de l'art

#### Raffinement

Le processus de raffinement consiste à transformer une particule grossière (appelée mère) en plusieurs particules fines (appelées filles). Ce procédé se doit d'être à minima conservatif en masse, volume, énergie... Pour ce faire, Reyes López *et al.* [63] ont proposé le modèle de raffinement illustré sur la Figure 5.1. A l'issue du raffinement, les particules filles sont espacées entre elles d'une longueur  $\epsilon\Delta x$  où  $\Delta x$  désigne l'espacement inter-particules de la mère. Par exemple, la valeur  $\epsilon = 0.5$  permet d'avoir un raffinement cartésien uniforme où toutes les particules filles sont équidistantes les unes des autres.

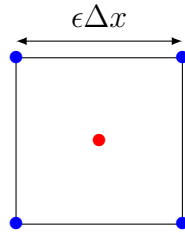


Figure 5.1: Modèle de raffinement 2D proposé par Reyes López *et al.* [63] : la particule mère (en rouge) est raffinée en quatre particules filles (en bleu)

Il est également nécessaire de définir le rayon d'interaction des particules filles créées. Ce procédé est réalisé au travers du paramètre  $\alpha$  qui désigne le ratio entre le rayon d'une particule fille par rapport à celui de sa mère. La Figure 5.2 résume le procédé de raffinement.

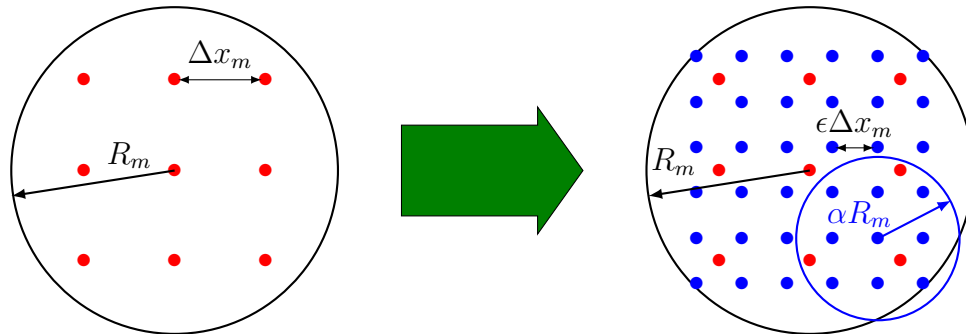


Figure 5.2: Procédé de raffinement illustrant le support des particules mères et filles

Mathématiquement, le procédé de raffinement se traduit par (les indices  $m$  et  $f$  correspondent respectivement aux mères et aux filles) :

$$\Delta x_f = \epsilon \Delta x_m \quad R_f = \alpha R_m \quad (5.1)$$

A partir de l'équation (5.1), dans le cadre d'un raffinement cartésien uniforme ( $\epsilon = 0.5$ ), il est possible de quantifier le voisinage des particules filles par rapport à leur mère. En effet, on a le rapport  $\frac{R_f}{\Delta x_f} = \frac{\alpha}{0.5} \frac{R_m}{\Delta x_m}$ . Ainsi, le voisinage d'une particule fille relativement à celui de sa mère est multiplié par  $2\alpha$ . Dans [63], Reyes López *et al.* effectuent une analyse de la stabilité et des erreurs liées au raffinement. Il ressort de cette étude que  $0.60 \leq \alpha \leq 0.65$  est optimal pour  $\epsilon = 0.5$ . On peut donc exprimer le voisinage obtenu :

$$1.2 \leq 2\alpha \leq 1.3 \quad (5.2)$$

Ainsi, si l'on suit les recommandations de Reyes López *et al.*, en 3D le voisinage d'une particule fille par rapport à sa mère est augmenté de 73% au minimum et 120% au maximum. Ce constat est alarmant et est à contre-courant de l'objectif initial du raffinement particulaire (réaliser des simulations précises avec un coût CPU moindre que des simulations en résolution uniforme). L'un des principaux objectifs développés dans cette thèse est de parvenir à effectuer des simulations robustes avec  $\alpha = 0.5$  et  $\epsilon = 0.5$ . Nous détaillons dans les sections à venir les moyens mis en œuvre pour y parvenir.

Lors du processus de raffinement, les variables conservatives d'une particule fille sont initialisées à partir de celles de sa mère. La masse de chaque particule fille est initialisée par :

$$m_f = \lambda_f m_m \quad (5.3)$$

La masse est conservée en appliquant l'équation suivante pour chaque mère :

$$\sum_{j=1}^F \lambda_j = 1 \quad (5.4)$$

où  $F$  désigne le nombre de particules filles de chaque mère ( $F = 4$ , par exemple, sur la Figure 5.1). Reyes López [63] *et al.* proposent  $\lambda_f = \frac{1}{F}$  pour chaque particule fille. Feldman *et al.* [33], quant à eux, proposent de résoudre un problème de minimisation afin d'initialiser la masse  $m_f$  de chaque particule fille. Pour ce faire, ils imposent que la densité évaluée en  $\mathbf{x}_f$  soit constante avant et après le raffinement de la particule mère. Cela revient à définir l'erreur  $e(\mathbf{x}_f)$  par :

$$e(\mathbf{x}_f) = W(\|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_M\|, R_M) - \sum_{j=1}^F \lambda_j W(\|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_j\|, R_j) = 0 \quad (5.5)$$

A ce stade, la position  $\mathbf{x}_f$  et le rayon  $R_j$  des particules filles sont connus. Résoudre (5.5) revient donc à inverser un système linéaire de taille  $F \times F$  où le vecteur des inconnues est  $X = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_F)$ . Le coût de l'inversion du système linéaire est anecdotique puisqu'il dépend uniquement de paramètres fixés à l'initialisation et peut ainsi être inversé une fois pour toute (avant le début de la boucle temporelle).

L'énergie, la masse et la quantité de mouvement doivent être conservées lors du raffinement. Les conditions à respecter sont résumées dans le tableau 5.1

Quantité	Avant raffinement	Après raffinement
Masse	$m_m$	$\sum_{j=1}^F m_j$
Energie cinétique	$\frac{1}{2} m_m \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_m$	$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^F m_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j$
Quantité de mouvement	$m_m \mathbf{u}_m$	$\sum_{j=1}^F m_j \mathbf{u}_j$
Moment angulaire	$\mathbf{x}_m \times m_m \mathbf{u}_m$	$\sum_{j=1}^F \mathbf{x}_j \times m_j \mathbf{u}_j$

Table 5.1: Conditions de conservation à respecter

La première condition, qui illustre la conservation de la masse, est respectée par les équations (5.3) et (5.4). Les autres conditions sont satisfaites par simple recopie de la

vitesse de la particule mère sur ses filles. Bien que la conservation du moment angulaire soit naturellement respectée par un raffinement cartésien (Fig. 5.2), cette propriété ne l'est pas toujours suivant la disposition initiale des particules filles.

## Déraffinement

Le procédé réciproque du raffinement, permettant de passer d'une discrétisation fine à une discrétisation grossière, s'appelle le déraffinement. On retrouve principalement deux méthodes dans la littérature permettant de réaliser ce procédé.

### Approche de Vacondio *et al.*

La première méthode, initiée par Vacondio *et al.* [98], permet d'agglomérer des particules filles par paire afin d'obtenir une particule mère après plusieurs coalescences (Fig. 5.3) tout en préservant le moment angulaire ainsi que la conservation de la masse.

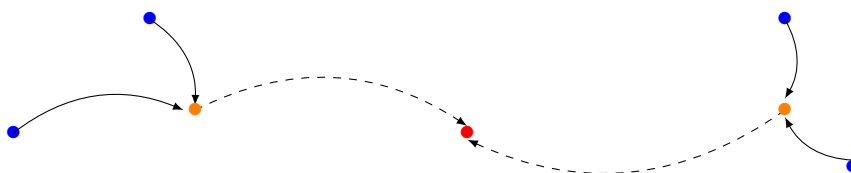


Figure 5.3: Méthode de coalescence proposée par Vacondio *et al.*

Lors de la coalescence, deux particules filles  $a$  et  $b$  sont agglomérées ensemble et forment une particule  $M$ . Si la nouvelle particule  $M$  ainsi obtenue est éligible à une nouvelle coalescence, elle devra attendre la prochaine étape temporelle pour être de nouveau agglomérée avec une particule (contrainte de stabilisation de l'écoulement). En imposant la conservation de la masse on obtient :

$$m_M = m_a + m_b \quad (5.6)$$

La particule  $M$  se situe au barycentre des deux particules :

$$\mathbf{x}_M = \frac{m_a \mathbf{x}_a + m_b \mathbf{x}_b}{m_a + m_b} \quad (5.7)$$

La conservation de la quantité de mouvement est obtenue via la vitesse  $\mathbf{u}_M$  définie par :

$$\mathbf{u}_M = \frac{m_a \mathbf{u}_a + m_b \mathbf{u}_b}{m_a + m_b} \quad (5.8)$$

La détermination du rayon d'interaction de la particule  $M$  fait l'objet d'un problème de minimisation. En effet, Vacondio *et al.* imposent que la densité évaluée en  $\mathbf{x}_M$  soit constante avant et après la coalescence de la particule  $a$  avec  $b$ . Cela revient à définir l'erreur  $e(\mathbf{x}_M)$  par :

$$e(\mathbf{x}_M) = m_M W(\|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_M\|, R_M) - (m_a W(\|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_a\|, R_a) + m_b W(\|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_b\|, R_b)) = 0 \quad (5.9)$$

La majorité des noyaux utilisés pour les interpolations SPH peuvent s'écrire sous la forme :

$$W(x, R) = \frac{1}{R^d V} \theta\left(\frac{x}{R}\right) \quad (5.10)$$

où  $V$  et  $d$  représentent respectivement la constante de renormalisation du noyau et la dimension considérée. Finalement en injectant (5.10) dans (5.9) on obtient l'expression du rayon de la particule obtenue via coalescence :

$$R_M = \left( \frac{\theta(0)m_M}{V(m_a W(\|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_a\|, R_a) + m_b W(\|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_b\|, R_b))} \right)^{\frac{1}{d}} \quad (5.11)$$

L'inconvénient de cette méthode réside principalement dans son coût de calcul. En effet, lors du raffinement une particule mère est divisée en (au moins) quatre particules filles (en 2D) tandis que la coalescence se fait par paire de particules. Il faut donc plusieurs coalescences pour obtenir une particule grossière. De plus, la coalescence ne peut se faire qu'entre deux particules ayant des propriétés similaires (vitesse, densité) sans quoi des erreurs numériques sont introduites. Pour finir, le fait même que le principe de coalescence repose sur des rayons variables est dangereux car, à l'issue d'une agrégation, il est possible que la variation de rayon entre deux particules coalescées soit supérieure à 3%, et résulte alors en instabilités (Oger *et al.* [86]).

### Approche de Barcarolo *et al.*

La seconde méthode de déraffinement consiste à conserver les particules mères une fois qu'elles se sont raffinées au lieu de les supprimer. La discrétisation grossière formée par les particules mères utilise les champs des particules filles pour évoluer lagrangiennement, mais de façon passive et donc sans influencer l'écoulement. Ainsi, les particules mères sont un "support" passif de coalescence.

Le paramètre  $\chi$  qualifie la façon dont une particule évolue au cours du temps :

- $\chi = 1 \rightarrow$  la particule est dite active
- $\chi = 0 \rightarrow$  la particule est dite passive

La variable  $\chi$  est une fonction de pondération associée à chaque particule. Elle est introduite dans les opérateurs gradient  $\mathbf{G}_+^R$  et divergence  $D_-^R$  comme suit :

$$\mathbf{G}_+^R(P)_i^\chi = \sum_{j \in \mathcal{P}(\Omega)} \omega_j (P_i \nabla_i W_{ij} + P_j \nabla_j W_{ij}) \chi_j \quad (5.12)$$

$$D_-^R(\mathbf{u})_i^\chi = \sum_{j \in \mathcal{P}(\Omega)} \omega_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \chi_j \quad (5.13)$$

L'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  contient à la fois les particules mères et filles. On note que les dérivées temporelles des particules mères ayant  $\chi_m = 0$  sont toujours calculées à l'aide de ces deux opérateurs, de sorte que les particules mères suivent correctement l'écoulement. L'inconvénient de l'approche de Barcarolo *et al.* est que les particules mères possèdent



beaucoup de particules filles avec lesquelles elles interagissent au sein de leur support, ce qui entraîne un coût CPU important.

La transition actif/passif étant numériquement trop brutale, le paramètre  $\chi$  varie linéairement entre ces deux états au sein d'une zone de transition (Fig. 5.4). La zone de raffinement est délimitée par des traits pointillés. Lorsqu'une particule pénètre dans la zone de raffinement, elle devient une particule mère et donne naissance à plusieurs particules filles. La particule mère est dite active ( $\chi_m = 1$ ) tandis que ses filles suivent l'écoulement passivement ( $\chi_f = 0$ ). Dès lors que cette particule mère progresse vers l'intérieur de la zone raffinée (franchissement de la zone tampon), la variable  $\chi_m$  décroît jusqu'à atteindre 0. Le phénomène opposé se produit pour les particules filles dont la variable  $\chi_f$  croît de 0 vers 1. Réciproquement lorsqu'une particule mère quitte la zone raffinée, la variable  $\chi_m$

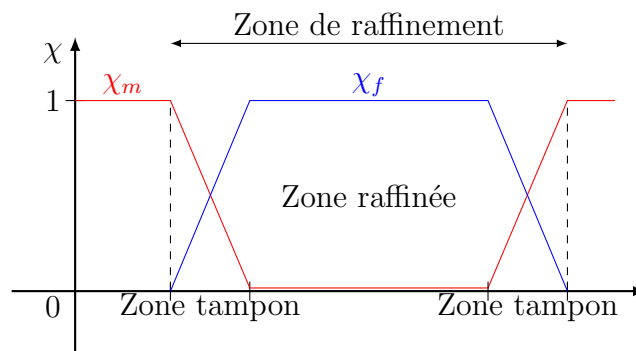


Figure 5.4: Evolution spatiale de la variable  $\chi$  (Barcarolo *et al.* [5])

croît de 0 vers 1 lors du franchissement de la zone tampon, et  $\chi_f$  décroît de 1 vers 0. Dès lors qu'une particule fille quitte la zone de raffinement, elle est supprimée. Le concept de la variable  $\chi$  a été introduit au sein du laboratoire par Barcarolo [5] lors de sa thèse. Sans ce processus, des discontinuités du champ de pression peuvent apparaître lorsqu'une particule mère passe de la zone raffinée vers la zone grossière. Ces discontinuités ont pour origine une augmentation/diminution brutale du nombre de voisins contenus dans le support d'une particule.

## Amélioration par rapport à l'état de l'art

### Utilisation et extension d'une méthode de désorganisation particulaire

Lors du processus de raffinement d'une particule mère, les particules filles sont disposées cartésiennement autour de leur mère (Fig. 5.1). Bien que cette disposition soit optimale dans le cadre d'une organisation particulaire initiale cartésienne, le caractère lagrangien de la méthode SPH a tendance à organiser les particules en suivant les lignes de courant. Cette disposition fortement anisotrope peut conduire à des instabilités lors de la création ou de la coalescence d'une particule.

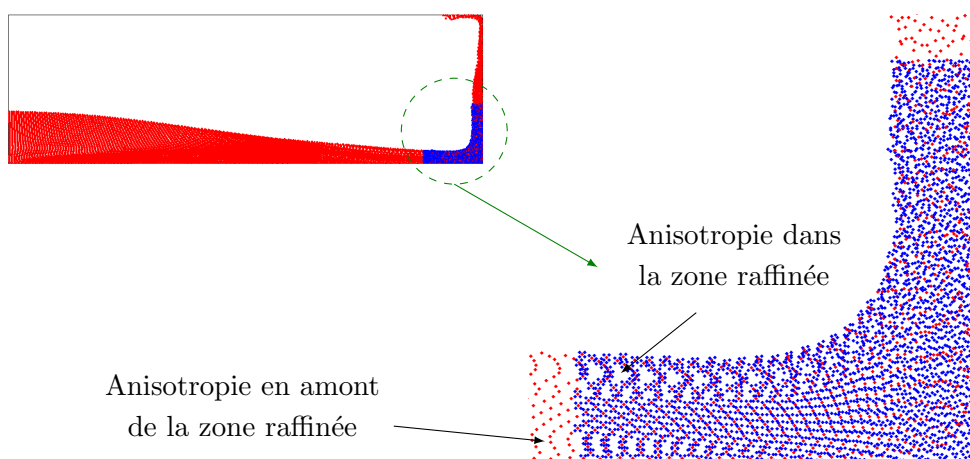


Figure 5.5: Anisotropie pour le cas-test de la rupture de barrage

La figure 5.5 représente la distribution particulaire dans une zone de raffinement pour le cas test du dambreak. On observe que l'agencement des particules grossières en amont de la zone raffinée est fortement anistrophe de par le caractère lagrangien de la méthode SPH. En raffinant, cette anistropie est conservée tandis que ses effets sont amplifiés. En effet, puisque les particules filles possèdent un rayon moins grand que celui des mères, ces anisotropies se traduisent, pour une particule fille considérée, par un support qui ne contient que quelques voisins. Ceci entraîne un appauvrissement de la qualité des interpolateurs SPH conduisant finalement à des instabilités numériques.

Afin de détruire ces structures, diverses méthodes de désordre particulaire ont précédemment été introduites au cours de la section 2.6.2. Nous utilisons ici la loi de vitesse Oger *et al.* (présentée dans la section 2.6.2.3) au sein du schéma Riemann-SPH de Leduc *et al.* (présenté dans la section 2.4.4.5). Cependant, comme nous l'avons mentionné dans la section 2.6.2.3, la loi de vitesse Oger *et al.* n'est pas applicable à la surface libre. Ainsi les particules situées à une distance inférieure à  $2\Delta x$  de la surface libre sont advectées avec une vitesse purement lagrangienne (Fig. 2.5). Lorsque nous appliquons ce procédé au raffinement particulaire, des instabilités numériques apparaissent en entrée de la zone de raffinement (Fig. 5.6).

Ces instabilités sont liées à la disposition cartésienne des particules filles qui est préservée au voisinage de la surface libre et qui résulte en un appauvrissement de la qualité des opérateurs SPH de par le peu de voisins contenus dans le support d'une particule à la surface libre.

Pour pallier ce problème nous avons essayé, sans succès, d'appliquer une rotation au modèle de raffinement (Fig. 5.1) en utilisant les vecteurs propres de la matrice de renormalisation de la particule mère (Eq. 2.44). En revanche, une solution qui s'est avérée prometteuse est celle de lisser la perturbation du champ de vitesse  $\delta_{ui}$  de l'équation (2.112) :

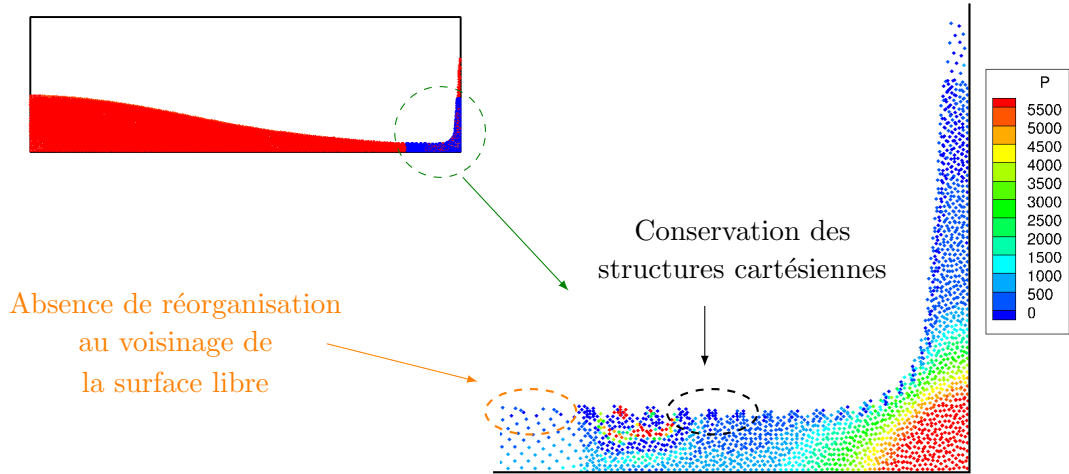


Figure 5.6: Instabilités à la surface libre lors du raffinement (cas du dambreak)

$$\mathbf{u}_{0i} = \mathbf{u}_i + \beta \delta_{ui} \quad (5.14)$$

Dans un premier temps, on définit par  $\nu_\emptyset$  une évaluation du pourcentage de vide au sein du support de la particule  $i$  :

$$\nu_\emptyset = \begin{cases} 1 - \sum_{j \in \mathcal{P}} \omega_j W_{ij} & \text{si la particule est au voisinage de la surface libre (}\bullet\text{)} \\ 0 & \text{si la particule est loin de la surface libre (}\bullet\text{)} \\ 0.5 & \text{si la particule est détectée à la surface libre (}\bullet\text{)} \end{cases} \quad (5.15)$$

Les différentes catégories de particules de l'équation (5.15) font référence à la figure 2.5. Ensuite, on introduit le paramètre  $\beta$  qui correspond à :

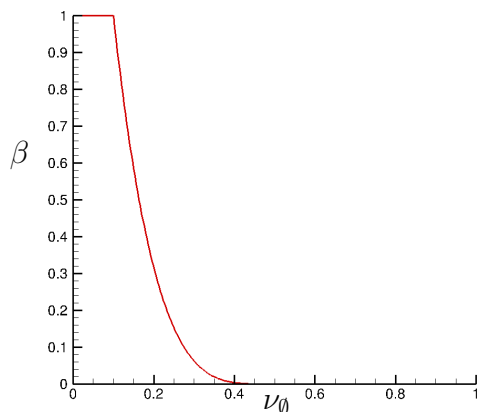
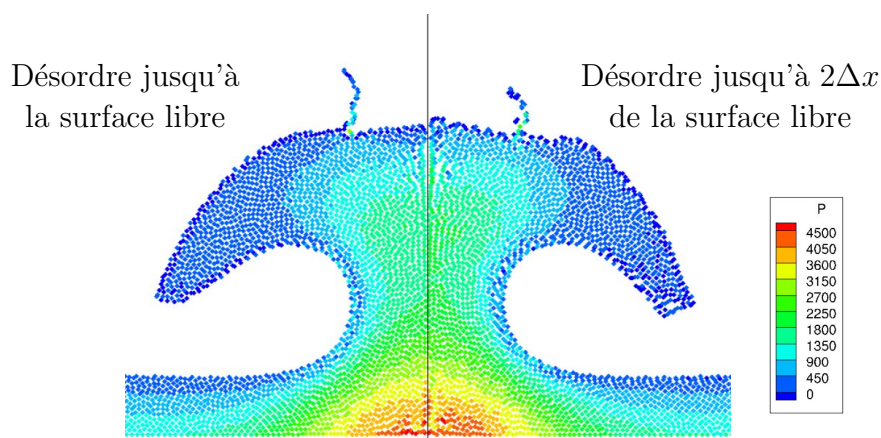
$$\beta = \left( 1 - \frac{\max(0, \min(\nu_\emptyset, 0.5) - 0.1)}{0.4} \right)^4 \quad (5.16)$$

La variable  $\beta$  agit comme un terme de lissage. Ainsi la figure 5.7 montre que pour un taux de vide inférieur à 10% la loi de vitesse agit pleinement tandis qu'elle agit partiellement jusqu'à 50%. Au-delà, les particules sont advectées lagrangiennement.

La figure 5.8 présente un comparatif entre l'approche proposée et l'approche originale de Oger *et al* [87]. L'influence de la loi de vitesse proposée est très localisée.

## Application de la nouvelle méthode de désorganisation particulaire

Pour illustrer l'apport de cette approche dans le contexte du raffinement particulaire, nous considérons le cas-test du dambreak 2D (Fig. 5.9). La zone de raffinement est délimitée par le carré rouge (zone d'intérêt pour ce cas test où les pressions locales de la colonne d'eau

Figure 5.7: Représentation de  $\beta$  en fonction de  $\nu_0$ Figure 5.8: Comparaison entre la loi proposée, à gauche, et la loi de vitesse originale de Oger *et al.*, à droite (cas du dambreak)

sur le mur vertical sont évaluées). La vitesse du son est fixée à la valeur  $c_0 = 70m.s^{-1}$ . Le rayon des particules grossières est  $\frac{R_m}{\Delta x_m} = 3$  (environ 50 particules dans le support du noyau).

Trois simulations sont réalisées. La première, purement lagrangienne, correspond à l'état de l'art décrit dans la section 5.1.2.2. La seconde utilise du désordre particulaire uniquement sur les particules mères de la zone de raffinement. Cette approche permet d'obtenir une solution lagrangienne à l'extérieur et à l'intérieur de la zone raffinée, seules les mères sont advectées non lagrangiennement afin de stabiliser l'écoulement. La troisième simulation utilise du désordre particulaire sur toutes les particules, aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur de la zone raffinée.

La première simulation (première ligne de la figure 5.10), purement lagrangienne, présente de nombreuses instabilités de pression aux interfaces fines/grossières de la zone de raffinement. Ces instabilités sont principalement liées au peu de particules contenues dans le support des particules filles qui ne peuvent alors fournir une description correcte de l'écoulement aux particules en interaction avec elles.

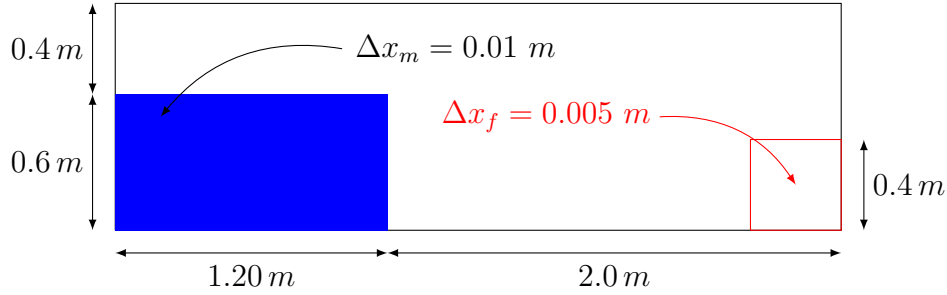


Figure 5.9: Schéma du dambreak 2D

La seconde simulation (seconde ligne de la figure 5.10), utilise du désordre particulaire seulement sur les particules mères de la zone de raffinement afin de les réorganiser pour que les particules filles puissent s'appuyer sur la discrétisation grossière lorsqu'elles traversent la zone tampon. La robustesse est accrue, comme en témoigne la meilleure continuité du champ de pression obtenu aux interfaces fines/grossières.

La troisième simulation (dernière ligne de la figure 5.10) utilise du désordre particulaire sur toutes les particules, à l'intérieur comme à l'extérieur de la zone raffinée. La grande régularité du champ de pression obtenu témoigne du gain de robustesse et de précision offert par une telle approche.

### Validation : Dambreak de Kleefsman *et al.*

Kleefsman *et al.* [50] ont réalisé une expérience de rupture de barrage en présence d'un obstacle. Bien que l'écoulement traité dans cette expérience soit tridimensionnel, il est possible de le modéliser en deux dimensions, au moins dans les premiers instants. Cette approximation demeure notamment acceptable au moment de l'impact sur l'obstacle.

Nous réalisons une simulation en deux dimensions (Fig. 5.11), et comparons nos résultats pour différentes résolutions avec les données expérimentales. Pour ce faire, trois simulations sont réalisées. La première (simulation grossière) utilise une discrétisation  $\Delta x = 0.005 m$ . La seconde (simulation fine) utilise un espacement inter-particulaire  $\Delta x = 0.0025 m$ . La troisième simulation (raffinement particulaire) utilise  $\Delta x_m = 0.005 m$  et  $\Delta x_f = 0.0025 m$  respectivement dans la zone grossière et la zone raffinée.

La vitesse du son est choisie telle que  $c_0 = 100 m.s^{-1}$ . La masse volumique nominale du fluide est  $\rho_0 = 1000 kg.m^{-3}$ . Le rayon des particules grossières est  $\frac{R_m}{\Delta x_m} = 3$  (environ 50 particules dans le support du noyau). Les trois simulations utilisent la méthode de désordre introduite précédemment dans la section 5.2.1.

Un bon accord est obtenu entre les simulations fine et raffinée. Les figures 5.12 et 5.13 montrent les solutions obtenues aux instants  $t = 0.6 s$  et  $t = 1 s$ . Comme attendu, avec le raffinement on observe que la finesse du jet est de mieux en mieux capturée, accom-

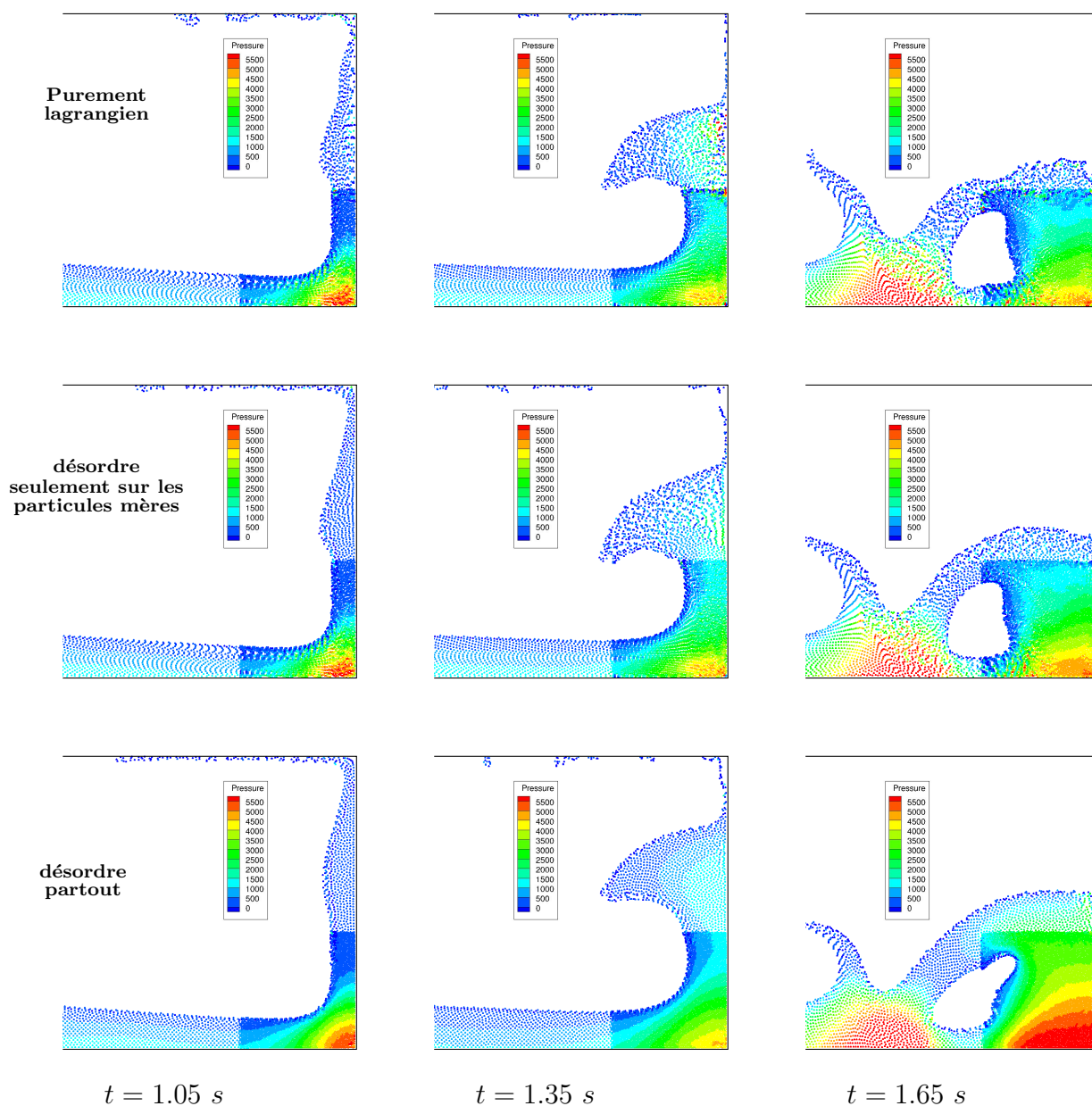


Figure 5.10: Comparaison des champs de pression à trois instants physiques différents (de gauche à droite) pour les trois simulations (de haut en bas)

paginée d'une description plus précise des pressions locales au voisinage du coin de l'obstacle.

Les figures 5.14 (a,b,c) représentent l'évolution au cours du temps des signaux de pression numériques par rapport aux signaux expérimentaux. L'utilisation du raffinement est clairement justifiée de par le gain obtenu sur la figure 5.14 (a) par rapport à la discrétisation grossière. De plus, une cohérence des signaux de pression est observée entre la simulation avec raffinement local et la simulation fine (Fig. 5.14 (b)).

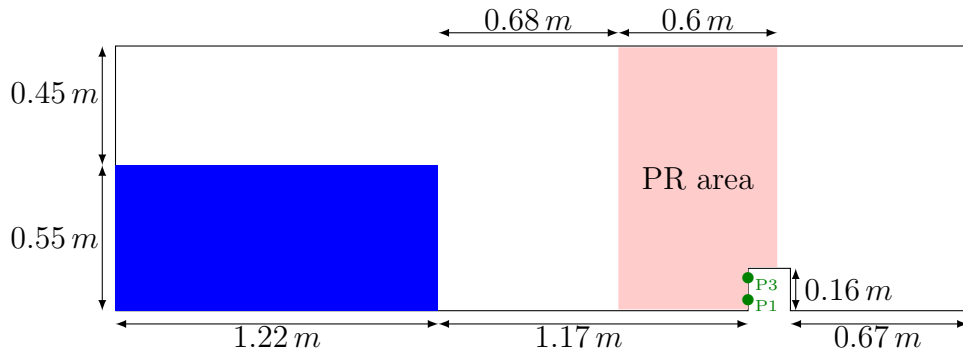
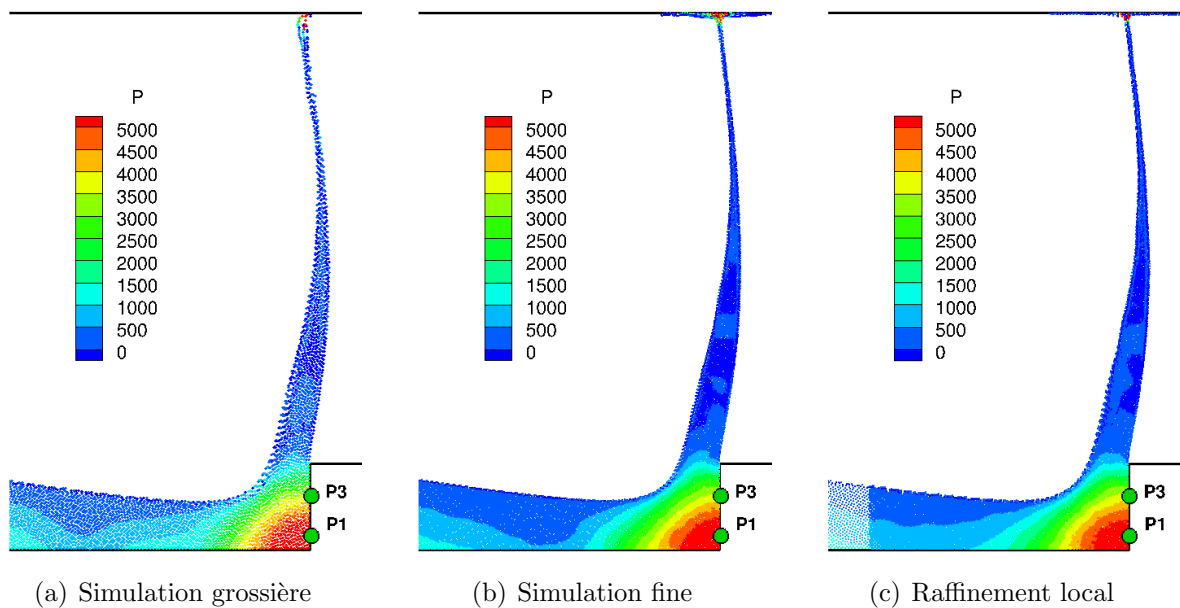


Figure 5.11: Schéma de la rupture de barrage simulée


 Figure 5.12: Comparaison du champ de pression à l'instant  $t = 0.6$  s

Sur la capteur P3, les trois simulations donnent la même tendance (Fig. 5.14(c)), le raffinement n'apportant rien. Kleefsman *et al.* ont effectué des simulations numériques avec une méthode VOF [50] pour lesquelles se dégage la même tendance, c'est-à-dire une surestimation sur P1 et une sous-estimation sur P3 de l'amplitude des pics de pression.

La figure 5.14 (d) présente un comparatif de la décroissance de l'énergie mécanique au cours du temps. Cette énergie, calculée comme étant la somme des énergies potentielle et cinétique, est adimensionnée par l'énergie mécanique initiale  $E_{m0}$ . Comme on pouvait s'y attendre, la simulation grossière est la plus diffuse, et on observe le gain apporté par le raffinement local sur la dissipation numérique.

L'analyse du temps de calcul (Table 5.2), réalisée pour  $t = 1$  s de temps physique, montre clairement le gain CPU de la méthode de raffinement par rapport à la simulation fine.

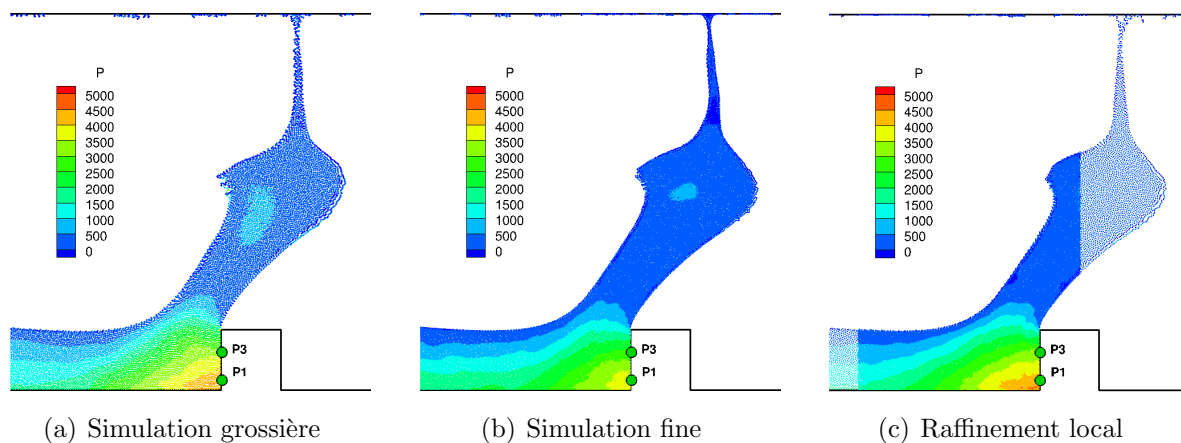
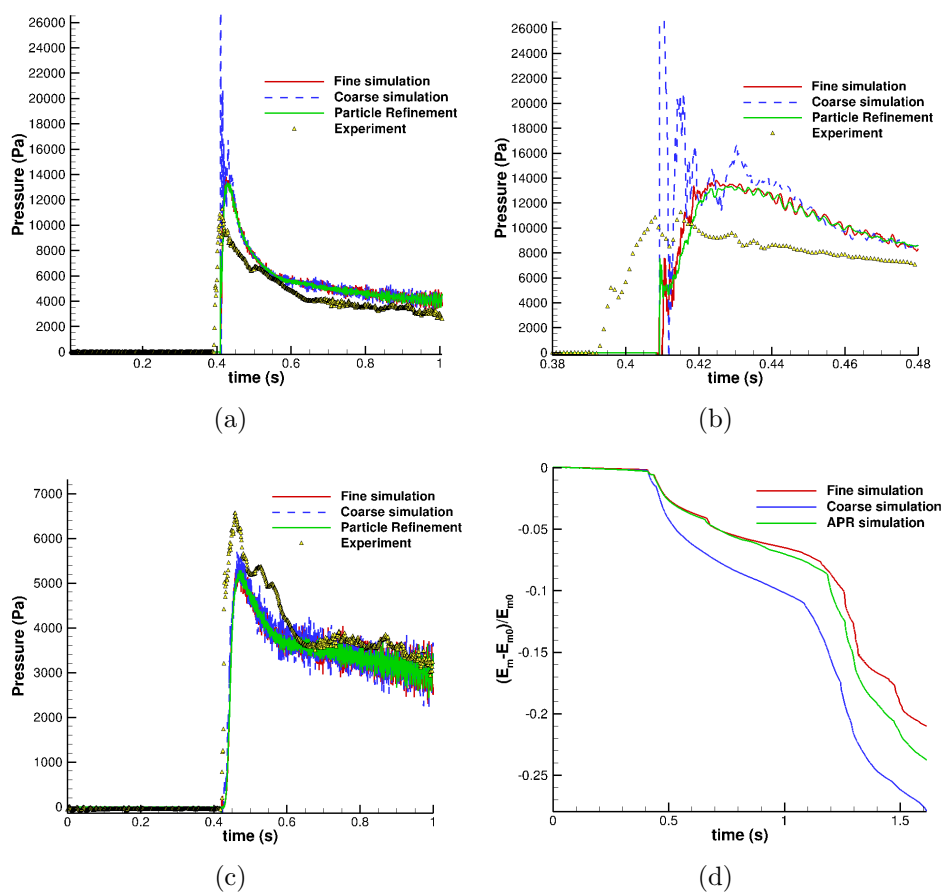
Figure 5.13: Comparaison du champ de pression à l'instant  $t = 1$  s

Figure 5.14: Diverses comparaisons : (a) Capteur de pression P1, (b) Capteur de pression P1 (Zoom), (c) Capteur de pression P3, (d) Décroissance de l'énergie mécanique au cours du temps



Simulation	Discrétisation initiale	Particules à l'initialisation	Temps CPU (secondes)
Simulation fine	$\Delta x = 0.0025 \text{ m}$	107 360	21 000
Raffinement local	$\Delta x = 0.005 \text{ m}$	26 840	9000

Table 5.2: Comparaison du temps de calcul sur 14 coeurs pour une seconde de temps physique simulée

Néanmoins, ces bons résultats doivent être tempérés car ce cas-test est extrêmement favorable au raffinement local. En effet, avant l'instant  $t = 0.4 \text{ s}$  (entrée dans la zone de raffinement), la simulation avec raffinement particulaire est 8 fois plus rapide que la simulation fine (4 fois moins de particules,  $\Delta t$  deux fois plus grand) car il y a absence de raffinement (le front d'onde est situé en dehors de la zone de raffinement). Ainsi, l'analyse CPU pour  $t \in [0, 1] \text{ s}$  indique que le gain du raffinement local est  $1 - \frac{9000}{21000} = 57.2\%$ . En revanche, l'analyse CPU pour  $t \in [0.4, 1] \text{ s}$  indique que ce gain n'est plus que  $1 - \frac{9000 - 0.4 \times 0.125 \times 21000}{21000 \times (1 - 0.4)} = 37\%$ .

## Bilan

Au cours de la section 5.2, nous avons présenté une amélioration en partant de l'état de l'art du raffinement particulaire. Cet avancement a permis un gain appréciable en terme de stabilité comme en atteste la grande régularité du champ de pression aux interfaces fines/grossières. Néanmoins, cette amélioration ne nous donne pas entière satisfaction pour deux raisons :

- Le nombre de voisins d'une particule d'intérêt située dans la zone raffinée est beaucoup plus important que pour une particule d'intérêt localisée à l'extérieur (surcoût en temps CPU)
- Les particules mères et filles interagissent entre elles avec des rayons différents (variation supérieure à 3%)

Ces deux constats peuvent avoir des conséquences néfastes. Le premier peut conduire à effectuer une simulation de raffinement particulaire plus lente que la simulation uniformément raffinée, ce qui est contre-productif. Le second est une entorse aux recommandations faites avec l'utilisation de h-variable [86] et peut donc conduire à des instabilités numériques.

La figure 5.15 illustre les constats énoncés précédemment. Il est critique de développer une méthode de raffinement préservant le nombre de voisins ( $R_f = 0.5R_m$ ) et ne faisant pas interagir des particules de rayons différents au sein des opérateurs. Dans le but de lever ces contraintes, nous avons passé en revue les techniques de raffinement pour les méthodes maillées (AMR) afin de déterminer dans quelle mesure ces techniques peuvent être adaptées à une méthode sans maillage telle que SPH.



Figure 5.15: Limitations de l'état de l'art du raffinement (le nombre de voisins d'une particule raffinée est trop important)

## Raffinement adaptatif pour les méthodes maillées: AMR

Toutes les méthodes numériques n'ont pas le même degré de maturité, et la méthode SPH peut être considérée comme relativement jeune en hydrodynamique à surface-libre (premier calcul en 1994 [74]). Bien souvent, il est possible de s'approprier une spécificité propre à une méthode numérique pour l'adapter à une autre. Les solveurs de Riemann en sont un très bon exemple. En effet, le développement de la méthode SPH basée sur une approche de calculs de flux via la résolution d'un problème de Riemann a été initié par Vila [101] qui a proposé avec succès d'adapter la méthode des volumes finis compressibles à la méthode SPH. De manière analogue, il est possible de faire un pont entre le raffinement adaptatif de maillage (AMR, Adaptive Mesh Refinement) développé dans le cadre de la méthode des Volumes Finis et le raffinement particulaire utilisé dans la méthode SPH. On s'intéresse dans cette section aux spécificités des techniques AMR pouvant être extrapolées vers un schéma que l'on nommera "Adaptive Particle Refinement" (APR).

### Présentation de l'AMR

Berger *et al.* [8, 7] ont proposé le développement d'une méthode de raffinement de maillage adaptatif (AMR) pour des maillages cartésiens structurés, dont le principe repose sur la résolution du problème sur des grilles combinant des résolutions spatiales différentes. Lorsqu'une zone est raffinée, une grille plus fine vient recouvrir localement l'ancienne grille. A l'inverse, lors d'un déraffinement, la grille fine est supprimée, ne laissant que l'ancienne grille. On distingue principalement deux catégories d'AMR : le raffinement hiérarchique et celui par patch. Dans le cadre du raffinement hiérarchique, des connectivités implicites sont mises en place entre les grilles et les sous-grilles afin de construire un "arbre" (Fig. 5.16). Ainsi une grille sous-jacente est une mère de la plus fine. Réciproquement, la grille la plus fine est une fille de la plus grossière. Dans le cadre du raffinement par patch, les problèmes définis sur chaque grille sont résolus séparément. Des opérations de prolongation et de restriction sont réalisées afin de relier entre elles les solutions sur chaque niveau.

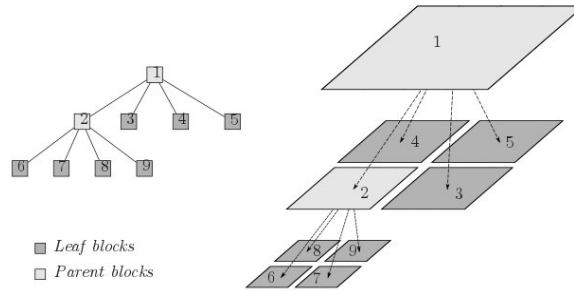


Figure 5.16: Représentation d'une décomposition en arbre hiérarchique

## Prolongation

Lorsqu'une grille est créée, ses champs (pression, vitesse, etc...) doivent être initialisés. Pour ce faire, l'AMR utilise la prolongation qui consiste à extrapoler les valeurs de la grille grossière vers la grille fine (c'est-à-dire de la cellule mère vers ses cellules filles). Différentes techniques sont proposées dans la littérature pour réaliser cette opération.

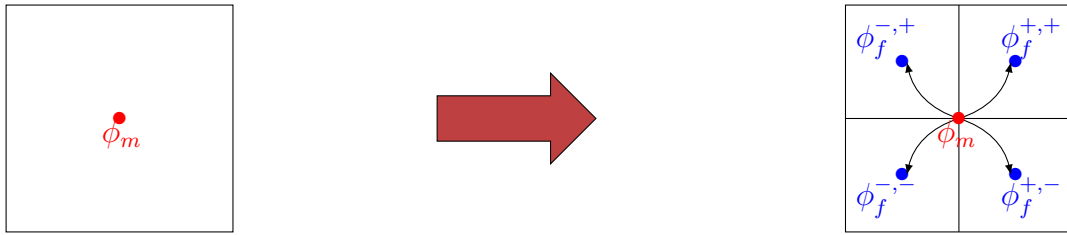


Figure 5.17: Méthode de prolongation

La façon la plus simple de réaliser une prolongation (Fig. 5.17) consiste à copier les variables conservatives de la cellule mère sur ses filles :

$$\phi_f^{\pm,\pm} = \phi_m \quad (5.17)$$

Dans ce cas de figure, on est en présence d'une prolongation d'ordre 0, aussi appelée injection [112]. Cette interpolation, bien que conservative, est trop imprécise pour être utilisée en pratique. On lui préfère souvent une interpolation linéaire en utilisant les gradients des variables conservatives de la cellule mère  $\nabla(\phi)_m$  calculés par des différences finies :

$$\phi_f^{\pm,\pm} = \phi_m + \nabla(\phi)_m \cdot (\mathbf{x}_f^{\pm,\pm} - \mathbf{x}_m) \quad (5.18)$$

D'autres techniques de prolongation peuvent néanmoins être trouvées dans la littérature [16].

## Restriction

Le processus de restriction, à l'inverse de la prolongation, consiste à initialiser une cellule mère lorsque ses cellules filles sont déraffinées.

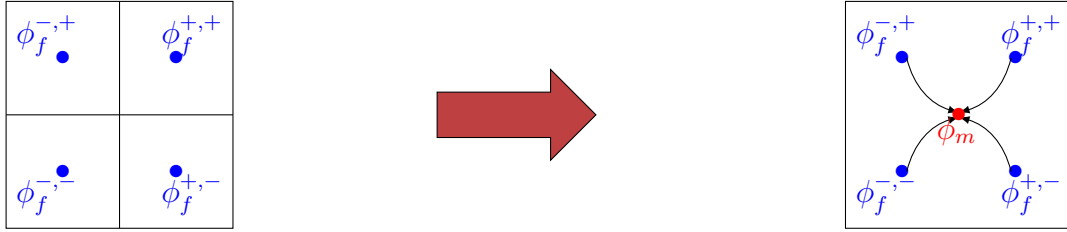


Figure 5.18: Méthode de restriction

La façon la plus simple d'effectuer une restriction (Fig. 5.18) consiste à faire une moyenne des variables conservatives des cellules filles :

$$\phi_m = \frac{1}{4} (\phi_f^{+,+} + \phi_f^{+,-} + \phi_f^{-,+} + \phi_f^{-,-}) \quad (5.19)$$

D'autres techniques de restriction peuvent néanmoins être trouvées dans la littérature [112, 8].

### Cellules d'interface : "Guard cells"

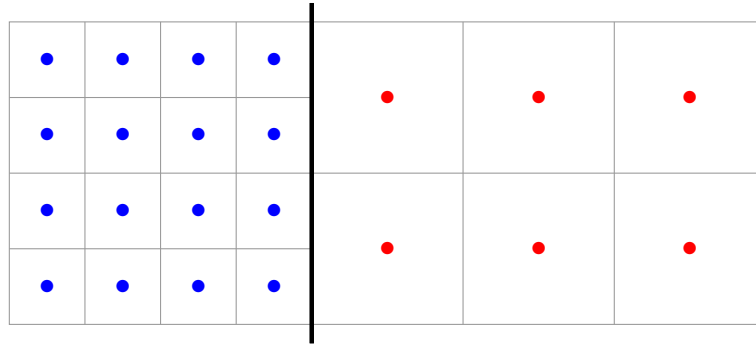
Les cellules placées à l'interface entre des cellules fines et grossières sont appelées des cellules "gardes". Dans le référentiel d'une grille de profondeur donnée, les cellules gardes jouent le rôle de conditions aux limites (Fig. 5.19 (a)), du point de vue des deux grilles respectives. Deux opérations sont réalisées simultanément sur les gardes. Premièrement, les gardes de la grille grossière effectuent une restriction des cellules filles vers les cellules mères (Fig. 5.19 (b)). Ainsi les cellules grossières situées à droite de l'interface calculent des flux avec leurs gardes. Deuxièmement, les gardes de la grille fine réalisent une prolongation des cellules mères vers les cellules filles (Fig. 5.19 (c)). Ainsi les cellules fines situées à gauche de l'interface calculent des flux avec leurs gardes. Ces deux opérations permettent d'intégrer temporellement les cellules fines et grossières. On note qu'une intégration à pas de temps local adaptatif est généralement utilisée.

## De l'AMR pour les méthodes maillées vers l'Adaptive Particle Refinement (APR)

Les concepts fondamentaux de l'AMR ayant été introduits, voyons à présent dans quelle mesure ils peuvent être adaptés pour améliorer le raffinement particulaire dans la méthode SPH.

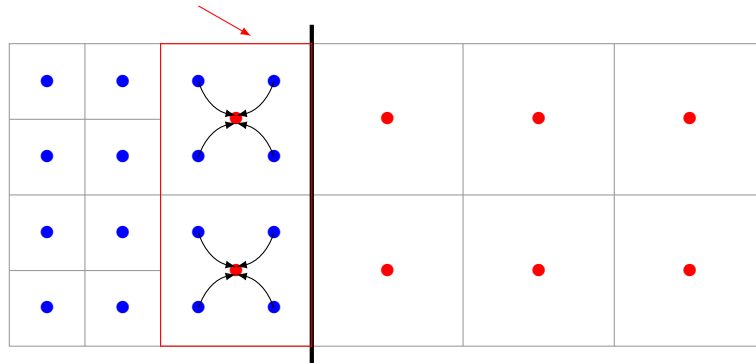
### Prolongation pour SPH

Nous avons précédemment introduit le concept de prolongation en AMR, qui consiste à initialiser les cellules filles à partir des champs de leur mère. Dans l'état de l'art actuel de la littérature SPH, les variables des particules filles sont initialisées par simple copie du champ de la particule mère (injection). Or ce procédé, bien que conservatif, est généralement jugé comme très imprécis en AMR (ordre 0).



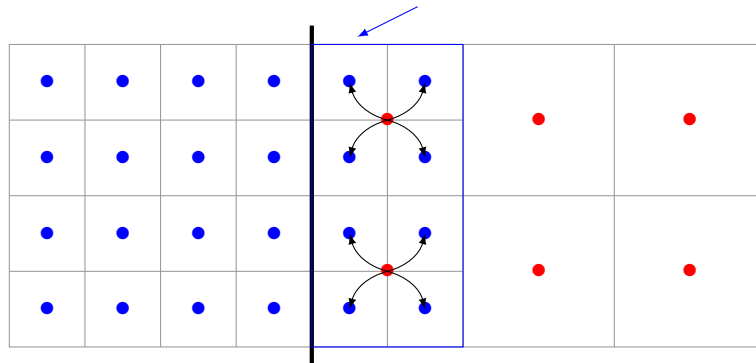
(a) Cas d'une interface entre cellules fines et grossières

Gardes de la grille grossière



(b) Utilisation des gardes du point de vue de la grille grossière (restriction)

Gardes de la grille fine



(c) Utilisation des gardes du point de vue de la grille fine (prolongation)

Figure 5.19: Définition des cellules gardes

En AMR, la prolongation d'ordre plus élevé se fait en général (et au minimum) à l'aide du gradient des variables conservatives de la cellule mère, calculé via des différences finies sur les cellules mères voisines. La méthode SPH étant sans maillage, la notion de différences finies n'a pas de sens direct. Néanmoins il est possible d'extrapoler linéairement les variables conservatives de la particule mère vers ses filles à l'aide d'une reconstruction par gradient

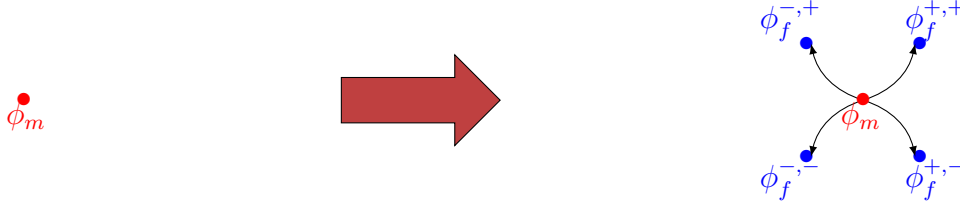


Figure 5.20: Méthode de prolongation (point de vue particulaire)

renormalisé. Pour ce faire, il convient avant tout de définir l'opérateur permettant de calculer le gradient des variables conservatives pour l'initialisation des particules filles :

$$\hat{\mathbf{G}}_-^R(\phi)_i^{Prlgt^\circ} = \mathbf{B}_i^{Prlgt^\circ} \cdot \sum_{j \in \mathcal{P}(\Omega_m)} \omega_j (\phi_i - \phi_j) \otimes \nabla_i W_{ij} \quad (5.20)$$

où  $\mathbf{B}_i^{Prlgt^\circ}$  est la matrice de renormalisation associée à la particule  $i$  définie dans la section 2.3.3, et calculée ici sur l'ensemble  $\Omega_m$  seulement :

$$\mathbf{B}_i^{Prlgt^\circ} = \left( \sum_{j \in \mathcal{P}(\Omega_m)} \omega_j (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \otimes \nabla_i W_{ij} \right)^{-1} \quad (5.21)$$

Finalement les champs des particules filles sont initialisés à l'aide de la reconstruction suivante :

$$\phi_f^{\pm,\pm} = \phi_m + \hat{\mathbf{G}}_-^R(\phi)_m^{Prlgt^\circ} \cdot (\mathbf{x}_f^{\pm,\pm} - \mathbf{x}_m) \quad (5.22)$$

Dans la section consacrée à l'état de l'art du raffinement particulaire, nous avons vu au travers du tableau 5.1 que le raffinement doit respecter plusieurs équations de conservation. Celles-ci sont naturellement vérifiées en cas d'injection, *i.e*  $\phi_f^{\pm,\pm} = \phi_m$ . En revanche, l'extrapolation définie par (5.22) est seulement conservative en masse et en quantité de mouvement. Ainsi, l'énergie cinétique et le moment angulaire ne sont ici plus conservés lors du raffinement.

## Restriction dans le cadre de la méthode SPH

Nous avons précédemment introduit le concept de restriction de l'AMR, qui consiste à réinitialiser une cellule mère à partir de ses filles. La méthode couramment utilisée dans les solveurs SPH pour évaluer un champ en un point donné de l'espace est l'interpolation Shepard (voir section 2.3.3.1). Ainsi, la restriction pour SPH d'une particule mère pour un champ  $\phi$  peut s'écrire :

$$\langle \phi \rangle_i^{Rstct^\circ} = \sum_{j \in \mathcal{P}(\Omega_f)} \omega_j \phi_j \frac{W_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{P}(\Omega_f)} \omega_k W_{ik}} \quad (5.23)$$

Nous avons opté ici pour une interpolation Shepard plutôt que MLS car cette dernière est plus coûteuse en temps CPU et s'avère moins robuste pour des écoulements à surface libre.

## Des cellules d'interface vers un couplage SPH/SPH

Dans la section 5.3.4, la notion de cellules gardes a été introduite. Il s'agit de cellules agissant comme conditions aux limites aux interfaces entre deux grilles de niveaux de raffinement différents. Du point de vue particulaire, une approche de raffinement par patch correspond à conserver les particules mères situées dans la zone raffinée. A l'inverse de l'AMR qui est utilisé pour des méthodes eulériennes, la méthode SPH est lagrangienne. Il est donc nécessaire d'advecter les particules mères situées dans la zone raffinée. Le pendant de l'AMR par patch peut-être vu en APR comme un couplage entre deux domaines particulaires SPH.

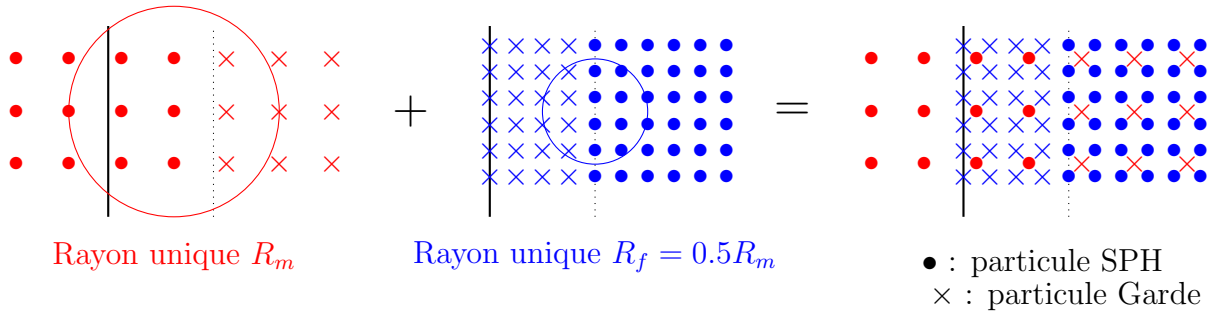


Figure 5.21: Couplage SPH/SPH

La figure 5.21 illustre ce que l'on souhaite obtenir, c'est-à-dire que la distribution particulaire obtenue à l'issue du raffinement peut-être vue comme l'union de deux discrétisations ayant chacune une valeur unique attribuée au rayon des particules les composant. Ces deux discrétisations n'interagissent pas entre elles au sein des opérateurs divergence et gradient. La communication entre les deux discrétisations se fait par l'intermédiaire des particules gardes notées par des croix ( $\times$ ) dont le rôle est identique à celui des cellules gardes en AMR.

L'objet de la section suivante concerne la description de l'opérateur mis en jeu afin d'initialiser les particules gardes.

### Méthode proposée : APR

Nous avons vu précédemment que la limitation des méthodes de raffinement particulaire réside dans les interactions entre particules mères et filles possédant des rayons différents. La méthode proposée dans cette section vise à corriger ce point. Pour cela, l'interpolation Shepard [92] présentée en section 2.3.3 est utilisée :

$$\langle \phi^\times \rangle_i = \sum_{j \in \mathcal{P}(\Omega_\bullet)} \omega_j \phi_j \frac{W_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{P}(\Omega_\bullet)} \omega_k W_{ik}} \quad (5.24)$$

où  $\phi^\times$  désigne les variables conservatives interpolées à partir de l'ensemble  $\Omega_\bullet$  représentant les particules SPH. Les particules gardes appartenant à l'ensemble  $\Omega_\times$  calculent la correction Shepard au début de chaque sous-étape du schéma d'intégration temporelle à l'aide du rayon

des particules filles  $R_f = 0.5R_m$ . L'opérateur (5.24) permet d'affecter à une particule garde un champ moyen à l'aide des particules SPH environnantes. Cet opérateur permet de faire les opérations de restriction lorsqu'il est appliqué à une particule fille ou mère.

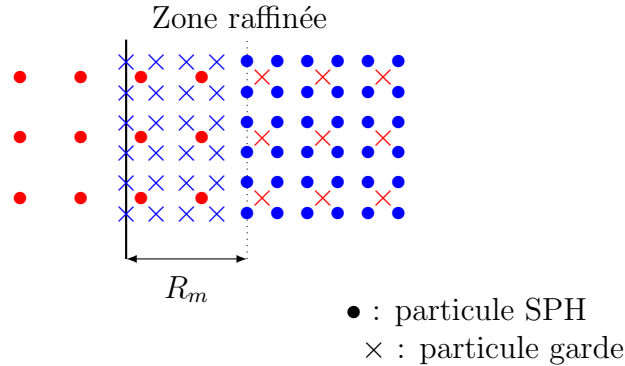


Figure 5.22: Principes de la méthode APR

La figure 5.22 représente la méthode APR utilisée dans ce manuscrit. Les champs des particules gardes filles (représentées par des croix bleues  $\times$ ) sont calculés à l'aide de l'interpolation Shepard sur les particules SPH (notées par des puces rouges  $\bullet$  et bleues  $\bullet$ ). Les particules filles SPH (représentées par des puces bleues  $\bullet$ ) actualisent leurs dérivées temporelles en s'interpolant sur des particules filles (notées par des croix bleues  $\times$  et des puces bleues  $\bullet$ ).

Réciproquement, les particules mères SPH (notée par des puces rouges  $\bullet$ ) mettent à jour leurs dérivées temporelles à l'aide de particules mères (notées par des croix rouges  $\times$  et des puces rouges  $\bullet$ ). Les champs des particules gardes mères (notées par des croix rouges  $\times$ ) sont définis à l'aide de l'interpolation Shepard sur les particules SPH (représentées par des puces bleues  $\bullet$  et rouges  $\bullet$ ).

La différence de résolution spatiale mères/filles est ainsi reportée dans l'interpolation Shepard de reconstruction des particules gardes. Ainsi, l'interpolation des gradients et divergences se fait à rayon constant (c'est-à-dire à résolution spatiale homogène). Les particules mères étant conservées dans la zone raffinée, il est possible de switcher entre les deux résolutions spatiales dès que nécessaire, et ce, sans qu'aucune interaction au sens SPH ne soit réalisée entre les deux espèces. De plus, les particules gardes calculent l'interpolation Shepard en s'appuyant sur les deux espèces SPH ce qui permet aux deux discrétisations d'avoir des champs cohérents à tout instant, et d'obtenir finalement le couplage entre les deux domaines.

La zone de transition où les particules gardes filles sont définies est de taille  $R_m$  (Fig. 5.22). Dans l'idéal, un rayon de particule fille (la moitié du rayon d'une particule mère) aurait été suffisant afin que le support des particules filles SPH soit complet. Cependant, pour la reconstruction MUSCL (Riemann-SPH), il est primordial que toutes les particules gardes filles qui interagissent avec des particules filles SPH calculent des gradients avec un support complet afin de fournir la meilleure consistance possible lors de la résolution du problème



de Riemann.

## Maintien des performances parallèles

Les concepts fondamentaux d'une nouvelle méthode de raffinement particulaire adaptatif (APR) ont été introduits. Les bases de l'AMR (prolongation, restriction, gardes, raffinement par patch) ont été adaptées avec succès en APR. Nous nous intéressons à présent aux limitations actuelles en terme de stabilité et d'algorithmique de l'APR.

### Séparation en deux listes d'interactions

Nous avons vu précédemment que la méthode APR découpe l'ensemble  $\Omega$  des particules en deux sous-ensembles.

Le premier, noté  $\Omega_{\bullet}$ , contient toutes les particules SPH qui évoluent temporellement au travers des opérateurs SPH usuels. Les particules qui composent cet ensemble interagissent de manière symétrique (les mères avec les mères, les filles avec les filles). Le second sous-ensemble, noté  $\Omega_{\times}$ , contient toutes les particules gardes. Ces particules interagissent de manière asymétrique (les particules gardes ne se voient pas entre elles).

Par défaut, le code de calcul crée une liste d'interactions en y ajoutant toutes les particules se trouvant dans le support de la particule considérée (on y ajoute toutes les particules mères, filles, gardes). Cette liste est notée  $L$ .

D'après les considérations évoquées précédemment, il apparaît pertinent de créer deux listes d'interactions. La première contient les paires de particules qui interagissent de manière symétriques ; c'est la liste notée  $L_{\bullet}$ . Cette liste contient quatre types d'interactions (mère SPH/mère SPH, mère SPH/garde mère, fille SPH/fille SPH, fille SPH/garde fille). La seconde contient les paires de particules qui interagissent de manière asymétrique ; c'est la liste des gardes notée  $L_{\times}$ . Cette liste contient deux types d'interactions (garde mère/particule SPH et garde fille/particule SPH).

Nous nous plaçons dans le cas bi-dimensionnel pour la suite de cette discussion. La figure 5.23 représente le processus de création de la liste d'interactions. **La particule d'intérêt** effectue une recherche des particules contenues dans son support en se basant sur les cellules grises voisines. Ainsi, à la fin de cette opération, chaque particule possède une liste de ses particules voisines.

Afin de quantifier le coût de calcul des listes  $L$ ,  $L_{\bullet}$  et  $L_{\times}$ , on évalue le nombre d'interactions composant une cellule pour chacune de ces trois listes. Pour ce faire, on suppose une cellule carrée composée de  $N^2$  particules uniformément distribuées. Le nombre d'interactions contenues dans une cellule correspond au nombre de paires de particules que l'on peut former parmi  $N^2$  particules sans répétition. Ainsi le nombre d'interactions calculées dans une cellule est approximativement donné par :

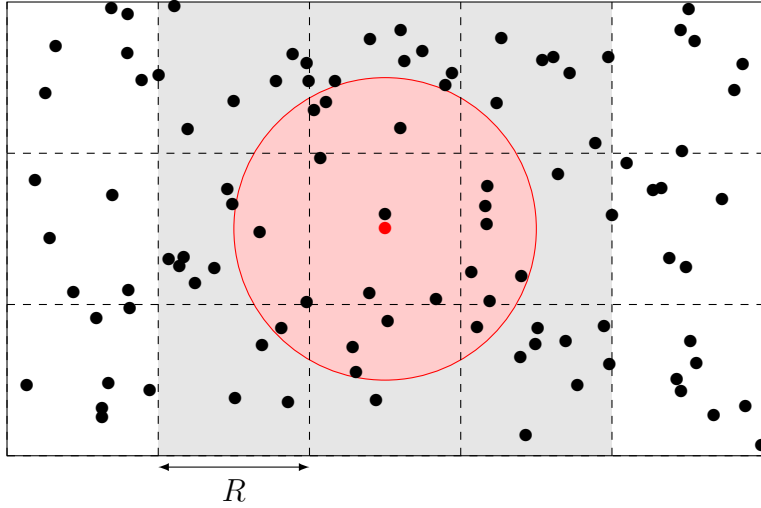


Figure 5.23: Recherche de voisins dans la grille

$$Int_{Cell} \sim \binom{N^2}{2} = \frac{N^2(N^2 - 1)}{2} \quad (5.25)$$

On considère à présent que la cellule est contenue dans une zone de raffinement. On a alors  $N^2 + \frac{N^2}{4}$  particules dans chaque cellule (il y a moitié moins de particules mères que de particules filles dans chaque direction).

Dans le cas où l'on ne tient pas compte de la nature des particules, le nombre d'interactions calculées dans une cellule est approximativement donné par :

$$Int_{Cell}^{APR} \sim \binom{N^2 + \frac{N^2}{4}}{2} = \frac{25}{16} \frac{N^2(N^2 - 1)}{2} \quad (5.26)$$

En revanche, lorsque l'on sépare les interactions entre espèces identiques on obtient :

$$Int_{Cell}^{\bullet} \sim \binom{N^2}{2} + \binom{\frac{N^2}{4}}{2} = \frac{17}{16} \frac{N^2(N^2 - 1)}{2} \quad (5.27)$$

Les équations (5.26) et (5.27) indiquent respectivement le coût de chaque cellule pour les listes  $L$  et  $L_{\bullet}$ . La différence de coût entre les deux approches correspond à  $\frac{1}{2} \frac{N^2(N^2-1)}{2}$ . D'après (5.25), cela représente la moitié du coût de calcul d'une cellule dans le cas d'une discrétisation uniforme.

On utilise le même raisonnement pour déterminer le coût de calcul de la liste des particules gardes  $L_{\times}$ . On a  $N^2 + \frac{N^2}{4}$  particules dans chaque cellule. Les interactions étant asymétriques, on obtient le résultat suivant :

$$Int_{Cell}^{\times} \sim \frac{N^4}{4} \quad (5.28)$$

D'après (5.26), (5.27) et (5.28) on a :

$$Int_{Cell}^{\times} + Int_{Cell}^{\bullet} \approx Int_{Cell}^{APR} \quad (5.29)$$

Découper la liste d'interactions en deux n'entraîne pas de surcoût et présente plusieurs avantages. Premièrement, la liste  $L_{\times}$  est appelée une seule fois à chaque sous-étape temporelle afin d'initialiser les champs des particules gardes. A l'inverse, la liste  $L_{\bullet}$  est appelée 3 fois (calcul des gradients utilisés pour reconstruire les valeurs conservatives aux interfaces des problèmes de Riemann, détection de la surface libre, calcul des flux dans les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement).

Deuxièmement, à l'inverse de la liste  $L$ , l'utilisation de la liste  $L_{\bullet}$  ne nécessite pas de test logique afin de déterminer si une interaction doit effectivement être calculée car les interactions composant cette liste sont symétriques (les tests logiques ont été effectués en amont de la boucle en temps). Ce point est très important et permet de ne pas détériorer les performances de calcul.

Voyons à présent le test logique effectué afin de déterminer l'éventuel ajout d'une paire de particules à une liste d'interaction :

---

**Algorithm 3** Test d'ajout d'une interaction dans la liste SPH  $L_{\bullet}$  ou de garde  $L_{\times}$

---

```

1: procedure ADD INTERACTION( $i, j$ )
2:   if  $(i, j) \in \Omega_{\bullet} \times \Omega_{\times}$  or  $(i, j) \in \Omega_{\times} \times \Omega_{\bullet}$  then
3:      $L_{\times} \leftarrow (i, j)$ 
4:   end if
5:   if  $(n_i^C = n_i^B)$  and  $(n_j^C = n_j^B)$  then ▷ mère(s)/fille(s) issues de ce niveau
6:     if  $(n_i^C - n_j^C) = 1$  then ▷ 1 niveau de raffinement d'écart
7:       if  $(i, j) \in \Omega_m \times \Omega_f$  then
8:          $L_{\bullet} \leftarrow (i, j)$ 
9:       end if
10:      else if  $(n_i^C - n_j^C) = 0$  then ▷ Même niveau de raffinement
11:        if  $(i, j) \in \Omega_f \times \Omega_f$  or  $(i, j) \in \Omega_m \times \Omega_m$  then
12:           $L_{\bullet} \leftarrow (i, j)$ 
13:        end if
14:      else if  $(n_i^C - n_j^C) = -1$  then ▷ 1 niveau de raffinement d'écart
15:        if  $(i, j) \in \Omega_f \times \Omega_m$  then
16:           $L_{\bullet} \leftarrow (i, j)$ 
17:        end if
18:      end if
19:    end if
20: end procedure
    
```

---

Les variables  $n_i^C$  et  $n_j^C$  désignent le niveau de raffinement courant dans lequel se situent les particules  $i$  et  $j$  tandis que les variables  $n_i^B$  et  $n_j^B$  représentent le niveau de naissance des particules  $i$  et  $j$ , c'est-à-dire le niveau dans lequel la particule est née/a donné naissance.

La ligne 5 de l'algorithme ci-dessus permet donc d'exclure de la liste  $L_\bullet$  les précédentes générations de particules (grand-mères, arrière grand-mères, etc...) étant présentes dans le niveau  $n^C$ . Il est essentiel de noter qu'une particule grossière est une particule fille du niveau 0. Ainsi la procédure d'ajout d'interactions décrite par cet algorithme s'étend naturellement aux simulations non APR.

## Algorithme d'équilibrage des charges

Lorsque l'on exécute un code tel que SPH-flow sur une architecture parallèle, on souhaite dans la mesure du possible que la charge de calcul soit équitablement partagée entre les processeurs.

Dans le cas d'une discrétisation uniforme, cette charge de travail est directement reliée au nombre de particules. Afin de parvenir à l'équilibrer, Oger *et al.* [88] ont proposé de répartir les particules entre les processeurs à l'aide d'un algorithme ORB (Orthogonal Recursive Bisection [35]). Pour ce faire, chaque processeur place ses particules dans une grille, connue de tous, dont la taille des cellules correspond au rayon des particules.

Une fois ce processus achevé, un découpage de la grille en deux parties égales (en nombre de particules) est réalisé. Pour ce faire, la détermination de l'emplacement de la coupure est réalisée via une dichotomie des cellules de la grille. En effet, chaque cellule possède une densité discrète représentée par le nombre de particules qu'elle contient. Afin d'augmenter la précision de cette opération, on prend en compte les fractions de cellules (en fraction du nombre de points qu'elles contiennent). La découpe ainsi effectué correspond à une droite ou un plan suivant la dimension du problème considéré. La découpe directionnelle retenue correspond à celle qui présente une surface minimale car elle engendrera ainsi moins de communications entre processeurs. On itère le même procédé récursivement sur les deux blocs obtenus jusqu'à obtenir le nombre de processeurs désirés (Figure 5.24). Finalement, chaque processeur contient les particules du bloc qui lui est attribué.

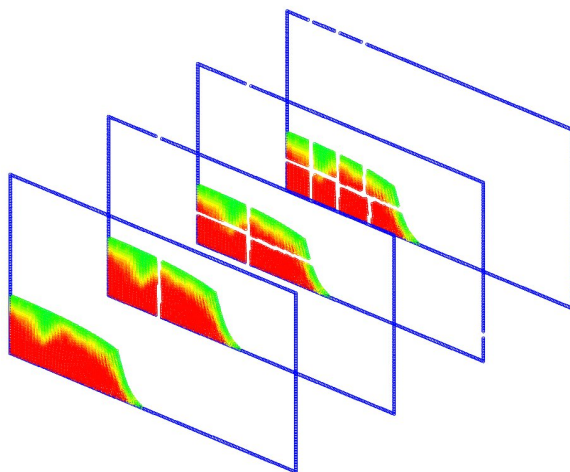


Figure 5.24: Découpages récursives pour une simulation impliquant 8 processeurs

Bien que cette méthode soit particulièrement efficace en discrétisation uniforme pour optimiser le temps CPU entre les processeurs, sa performance est détériorée avec l'APR.

En effet, le nombre de particules contenu dans un support augmente de par la présence des particules mères. Cela se traduit par le fait que le voisinage d'une particule située dans la zone de raffinement est plus grand que celui d'une particule située à l'extérieur (ce phénomène est illustré par les équations (5.25) et (5.26)). Le critère d'équilibrage de charge basé sur le nombre de particules ne peut appréhender ce phénomène et ne sera par conséquent pas optimal pour distribuer la charge de travail entre les processeurs.

Par conséquent, il convient de définir un nouveau critère d'équilibrage des charges basé sur le nombre d'interactions. Ce critère découle naturellement du premier car, dans le cas d'une simulation uniforme, il y a proportionnalité entre le nombre de particules et le nombre d'interactions. Ce n'est plus le cas avec l'APR, et c'est pourquoi le second critère est plus général.

---

**Algorithm 4** Prise en compte d'une interaction pour l'équilibrage des charges

---

```
1: procedure INTERACTION NUMBER( $i, j$ )
2:   if  $(i, j) \in L_{\bullet}$  then
3:     if  $i \in \Omega_{\bullet}$  or  $j \in \Omega_{\bullet}$  then
4:        $Int_i \leftarrow Int_i + 1$ 
5:     end if
6:   end if
7:   if  $(i, j) \in L_{\times}$  then
8:      $Int_i \leftarrow Int_i + (2^D)^{-1}$ 
9:   end if
10: end procedure
```

---

L'algorithme 4 représente la prise en compte d'une interaction pour l'équilibrage des charges. Une interaction provenant de la liste SPH  $L_{\bullet}$  compte pour 1 dès lors qu'elle se fait avec au moins une particule SPH. Une interaction de la liste garde compte pour  $(2^D)^{-1}$  où  $D$  représente la dimension du problème considéré. La pondération en  $(2^D)^{-1}$  s'explique par le fait que pour une mère il y a  $2^D$  particules filles.

En pratique, le choix d'affecter la pondération de l'interaction seulement à la particule  $i$ , et non une demi pondération aux particules  $i$  et  $j$ , n'a pas d'influence sur la position de la découpe puisque celle-ci est déterminée à partir de la densité d'interaction des cellules de la grille.

Un indicateur pertinent de l'efficacité de l'équilibrage des charges est donné par la variable  $\tau$  qui représente le ratio entre le processeur possédant le plus d'interactions et celui qui en a le moins. Ainsi  $\tau$  est défini par :

$$\tau = \frac{\min \lambda(k)}{\max \lambda(k)} \quad (5.30)$$

où  $\lambda(k)$  est le nombre d'interactions du processeur  $k$ . Dans la mesure du possible, une scalabilité efficace se traduit par le fait que  $\tau$  reste le plus proche possible de 1.

Afin de quantifier l'apport de performance de ce nouvel algorithme, deux comparaisons sont effectuées pour des simulations impliquant 14 cœurs de calcul (Fig. 5.25). La première, en discrétisation uniforme, permet de quantifier le gain obtenu indépendamment de l'APR dans des conditions où les deux algorithmes sont similaires (Figure 5.25 (a)). La seconde comparaison est effectuée en APR (Figure 5.25 (b)).



Figure 5.25: Schéma du dambreak considéré pour l'étude de scalabilité

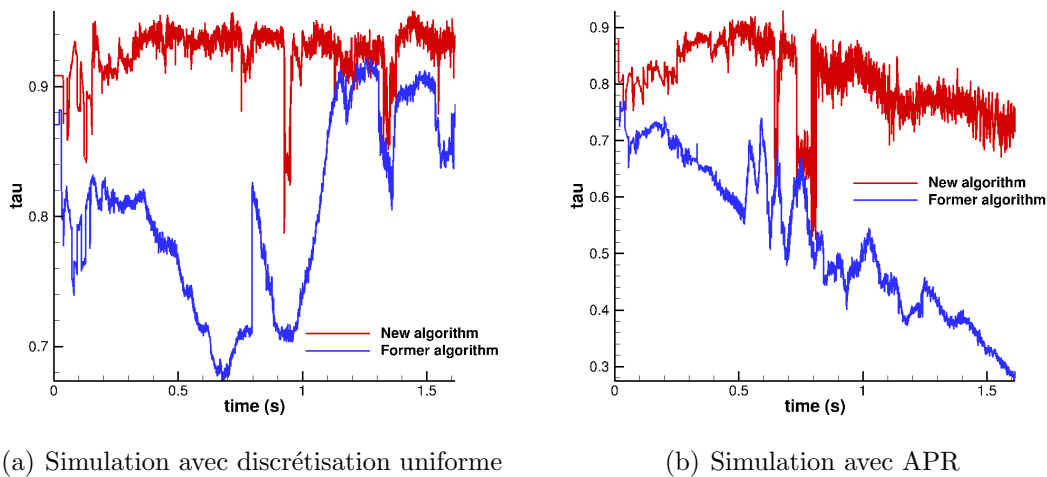


Figure 5.26: Efficacité du nouvel algorithme

La figure (5.26) présente clairement les gains obtenus via le nouvel algorithme par rapport à l'ancien. Dans le cas de la simulation en discrétisation uniforme, nous avons observé sur le cas de la rupture de barrage une différence de temps CPU de l'ordre de 10% entre les deux approches. Cet écart atteint 30% pour la simulation APR.

## Validations numériques

Dans cette section, on s'intéresse à la validation numérique de l'APR sur des cas-tests regroupés en deux catégories. Dans un premier temps, des écoulements visqueux sans surface libre sont considérés. Dans une seconde partie, des validations sont réalisées pour des écoulements violents avec surface libre et non visqueux. Pour chaque simulation réalisée avec l'APR, une comparaison avec une solution de référence (expérimentale et/ou analytique et numérique) est effectuée. Ces comparaisons permettent de positionner l'APR en terme de robustesse, de précision et de temps de calcul.

### Cas-tests avec viscosité physique

#### Écoulement de Poiseuille à $Re = 1$

Dans cette section on s'intéresse à un premier écoulement visqueux afin de valider l'APR pour ce type d'écoulement. On se propose d'étudier le cas-test de l'écoulement de Poiseuille laminaire à  $Re = 1$  dans un canal périodique.

Le canal a une largeur  $L = 1 \text{ m}$ . La viscosité  $\nu$  est égale à  $1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  tandis que la force s'exerçant sur les particules est de  $8 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ . La vitesse du son  $c_0$  est choisie telle que  $c_0 = 10U_{max} = 10 \text{ m}.\text{s}^{-1}$ .

Trois simulations sont réalisées. La première, dite grossière, utilise une résolution  $\Delta x = 0.025 \text{ m}$ . La seconde, dite simulation fine, est définie par un espacement inter-particulaire  $\Delta x = 0.0125 \text{ m}$ . La troisième simulation, dite APR, utilise  $\Delta x_m = 0.025 \text{ m}$  et  $\Delta x_f = 0.0125 \text{ m}$  respectivement dans la zone grossière et la zone raffinée. Le rayon des particules grossières est  $\frac{R_m}{\Delta x_m} = 3$  (environ 50 particules dans le support du noyau).

Les zones APR sont localisées le long des parois du canal sur une largeur de  $0.2L$  dans la direction verticale. La comparaison du profil de vitesse horizontale avec la solution analytique est concluante (Fig. 5.27(b)), tout particulièrement près des parois du canal.

Simulation	$\ u^{th} - u\ _{L^2(\partial\Omega)}$	$\ u^{th} - u\ _{L^2(\Omega)}$	Temps de calcul (s)	Particules
Simulation fine	$6.6 \times 10^{-3}$	$5.1 \times 10^{-3}$	3300	2560
Simulation APR	$6.65 \times 10^{-3}$	$7.55 \times 10^{-3}$	1960	1536
Simulation grossière	$1.27 \times 10^{-2}$	$1.17 \times 10^{-2}$	410	640

Table 5.3: Comparaison des temps de calcul et erreurs  $L^2$

Le tableau 5.3 présente une comparaison des erreurs  $L^2$  et temps de calcul. L'ensemble  $\partial\Omega$  utilisé pour la norme  $L^2$  correspond aux particules dont le support est tronqué par les parois du canal. Les résultats montrent que le degré de précision est sensiblement le même entre l'APR et la simulation fine au voisinage des parois du canal.

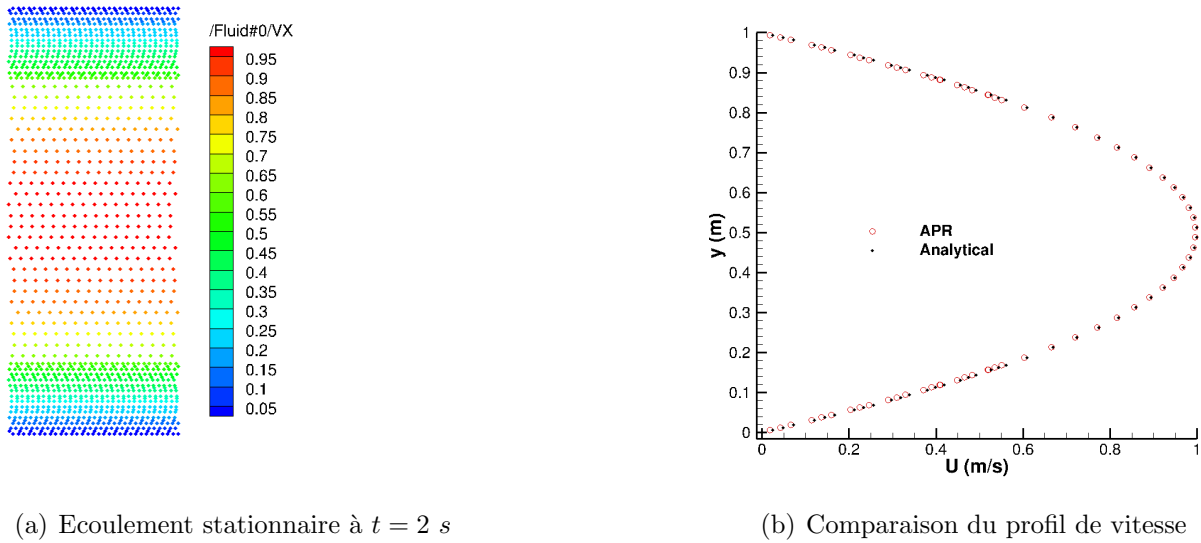


Figure 5.27: Résultats de la simulation APR

### Ecoulement autour d'un cylindre

Dans cette section, on s'intéresse à la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre à  $Re = 100$ . Ce cas-test est compliqué à traiter car il ne rentre pas dans les champs ciblés d'application de la méthode SPH (absence de surface libre, dynamique lente de l'écoulement, faible précision de la méthode). Néanmoins, ce cas-test s'avère intéressant pour valider le procédé APR avec plusieurs niveaux de raffinement.

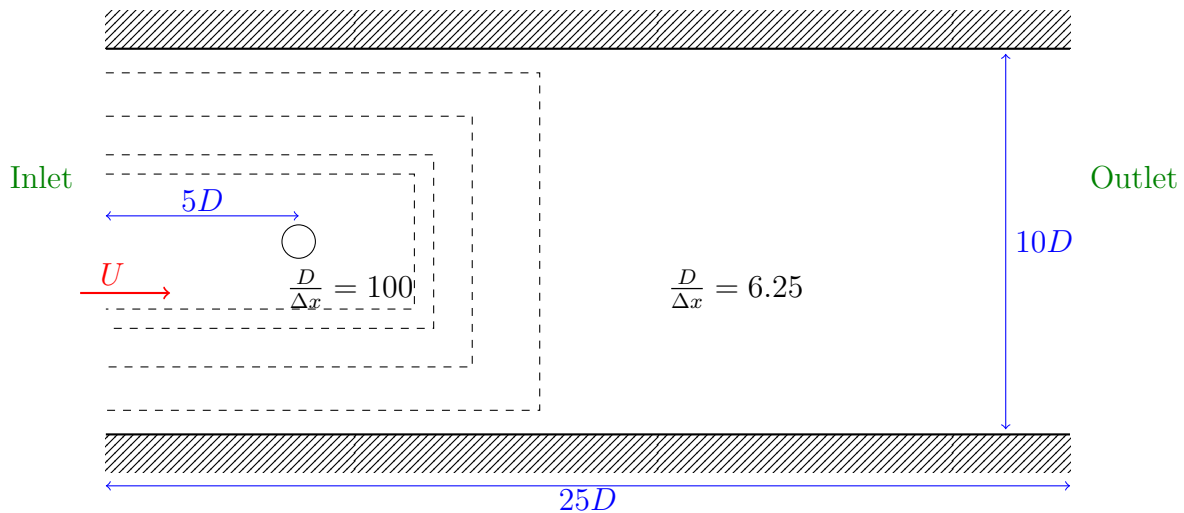


Figure 5.28: Représentation schématique du cas test d'écoulement autour d'un cylindre (les lignes en pointillés représentent les différents niveaux de raffinement)

Dans ce qui suit, le nombre de Reynolds est défini par  $Re = \frac{UD}{\nu}$  où  $D$  est le diamètre du cylindre,  $U$  la vitesse imposée à l'entrée du canal et  $\nu$  la viscosité cinématique.



Les coefficients de traînée et de portance sont définis par :

$$C_D = \frac{2F_x}{\rho U^2 D} \quad , \quad C_L = \frac{2F_y}{\rho U^2 D} \quad (5.31)$$

La figure 5.28 présente la configuration initiale de l'écoulement. Les particules à l'intérieur du domaine sont initialisées avec la vitesse  $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$ . La vitesse du son  $c_0$  est fixée à  $10 \text{ m.s}^{-1}$ .

Lors des premiers pas de temps, des ondes acoustiques sont relâchées de part et d'autre du cylindre (adaptation brutale de l'écoulement à la présence du cylindre). Ces ondes vont se propager dans le canal et se réfléchir à l'entrée et la sortie de celui-ci. Pour pallier ce désagrément, des conditions aux limites non-reflectives de Lastiwka et al. [52] sont utilisées pour rendre le canal perméable à ces ondes acoustiques.

On réalise deux simulations. La première, dite fine, utilise une discrétisation uniforme  $\frac{D}{\Delta x} = 100$  (2 600 000 particules). La seconde, dite APR, est définie à l'aide de 4 niveaux de raffinement allant de  $\frac{D}{\Delta x} = 12.5$  dans le premier niveau jusqu'à  $\frac{D}{\Delta x} = 100$  dans le quatrième ( $\sim 500\,000$  particules). Le rayon des particules est  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau).

La figure 5.30 présente une comparaison des champs de vitesse, pression et vorticité pour les deux simulations. L'accord des champs entre les deux simulations est bon, malgré la présence de légères instabilités de pression aux interfaces entre les différents niveaux de raffinement avec l'APR. La comparaison des champs de pression au même instant physique est relativement compliquée, les ondes acoustiques disparaissant plus rapidement dans la simulation APR que dans la simulation fine. Ce phénomène s'explique par la résolution grossière aux abords de la sortie ( $\frac{D}{\Delta x} = 6.25$ ) qui tend à diffuser ces ondes.

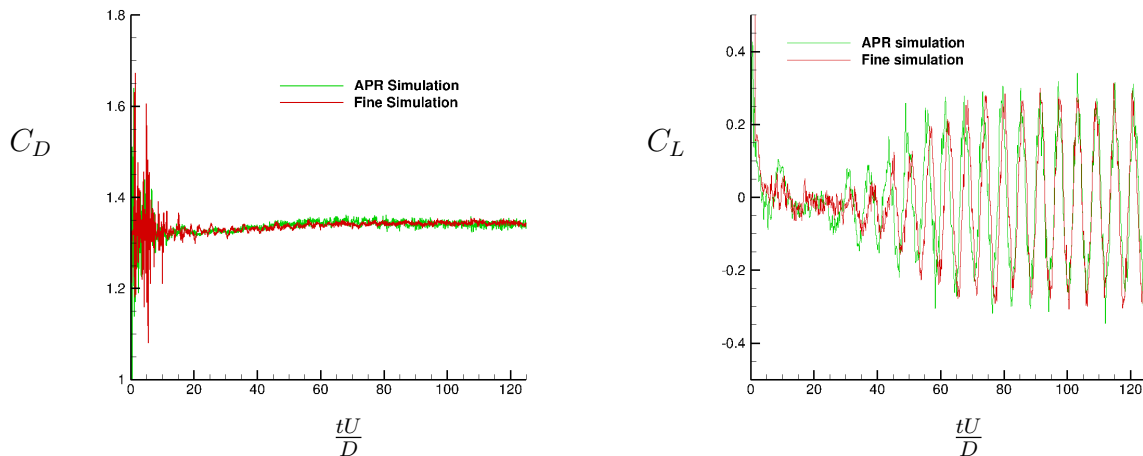


Figure 5.29: Evolution temporelle des coefficients de trainée et de portance

Le tableau 5.4 présente une comparaison des coefficients de traînée, portance, et nombre de Strouhal avec les résultats issus de la littérature. Les résultats APR sont globalement en accord avec ceux issus de la simulation fine et la littérature. On remarque cependant

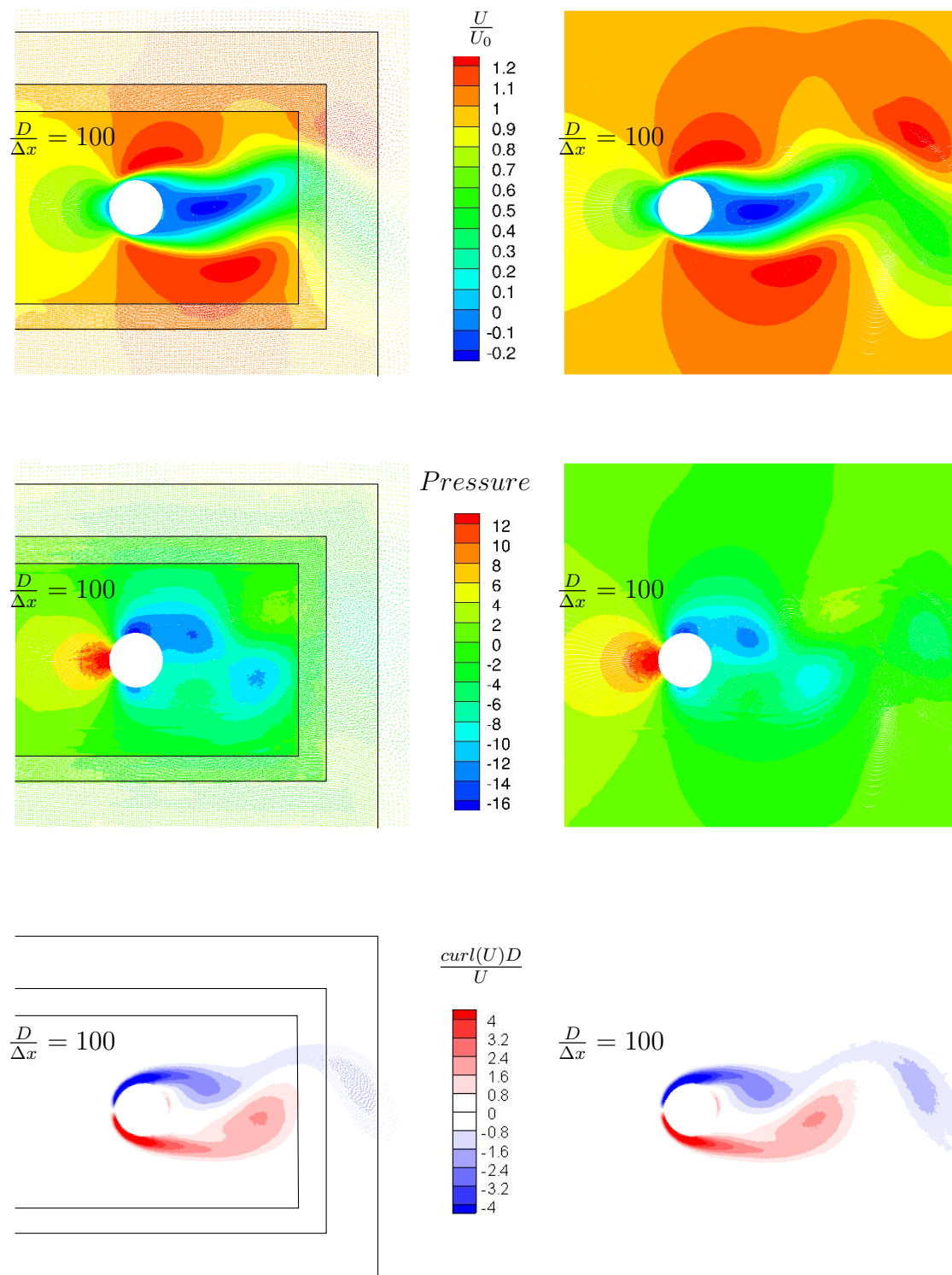


Figure 5.30: Comparaison à  $\frac{tU}{D} = 125$  entre la simulation avec APR et la simulation fine

que l'amplitude des oscillations du coefficient de traînée est deux fois plus importante avec l'APR que dans le cas de la simulation fine. Ce phénomène se retrouve aussi sur la portance

	$C_D$	$C_L$	Strouhal
Braza <i>et al.</i> (1986)[12]	$1.364 \pm 0.015$	$\pm 0.25$	-
Calhoun (2002) [14]	$1.33 \pm 0.014$	$\pm 0.298$	-
Ng <i>et al.</i> (2009) [83]	$1.368 \pm 0.01$	$\pm 0.36$	-
Marrone <i>et al.</i> [68] ( $\delta$ -sph)	$1.36 \pm 0.01$	$\pm 0.24$	0.168
Experience [107]	-	-	0.164
Simulation APR	$1.35 \pm 0.015$	$\pm 0.295$	0.1676
Simulation fine	$1.345 \pm 0.008$	$\pm 0.28$	0.1682

Table 5.4: Comparatif avec les valeurs de la littérature

dans une moindre mesure. Le comparatif du nombre de Strouhal est en très bon accord avec la littérature.

Simulation	Temps CPU sur 160 coeurs (heures)	Particules	Gain
Fine	32	2 600 000	-
APR	10	500 000	68.75%

Table 5.5: Comparaison des temps de calcul entre les deux simulations réalisées

La simulation avec APR affiche un temps de restitution trois fois plus petit que la simulation fine (Tableau 5.5).

## Cas-tests non visqueux avec surface libre

### Impact d'une colonne d'eau triangulaire

On s'intéresse à l'impact d'une colonne d'eau contre un mur vertical. Ce premier cas test permet d'étudier la convergence de l'APR sur un cas complexe ainsi que de quantifier les gains apportés par rapport à Barcarolo *et al.* Une formulation analytique de ce problème a été donné par Dobrovolskaya [29], nous comparons ici les résultats numériques pour le cas  $\alpha = 80^\circ$  (Fig. 5.32) qui a été traité en détails par Wu [106].

La configuration initiale de l'écoulement peut être vue comme une simplification de l'impact d'une vague déferlante (Fig. 5.31), où la surface libre peut localement être approchée par une droite. La figure 5.31 (b) représente la configuration initiale de la colonne, caractérisée par un angle  $\alpha$  avec l'horizontale, qui se déplace à une vitesse constante  $U$  juste avant de percuter le mur.

L'évolution de la cinématique du fluide est caractérisée par un jet vertical qui progresse le long du mur (Figure 5.31 (c)). Ce jet se forme à l'intersection entre la surface libre et le mur vertical. La vitesse du jet est fonction de  $\alpha$ , si bien que son amplitude doit être prise en compte afin de définir la vitesse du son nominale du modèle faiblement compressible. La violence de la cinématique est telle que des pics de pression surviennent sur des temps

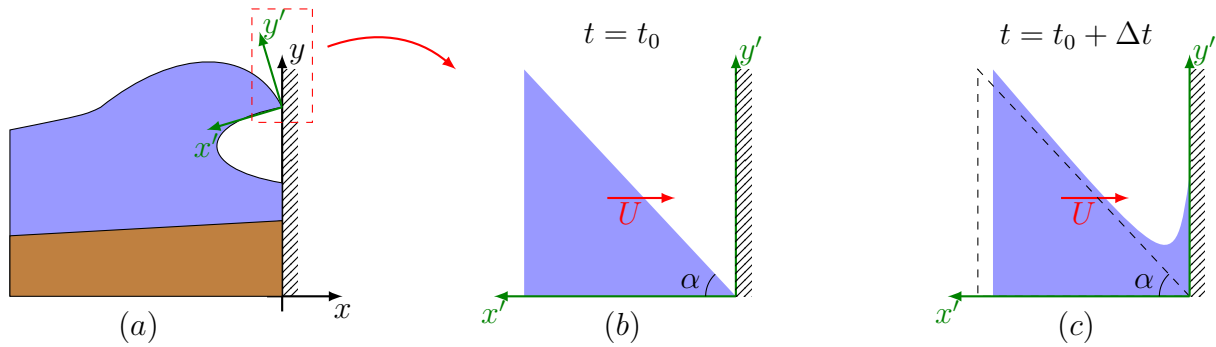


Figure 5.31: Relation entre l'impact d'une vague déferlante et celui d'une colonne triangulaire

très courts. Dans ces conditions, la gravité et la viscosité du fluide peuvent être négligées devant les autres forces en présence.

Wu [106] a proposé une solution incompressible potentielle auto-similaire en temps et en espace pour traiter ce problème. Ainsi, Wu montre que l'évolution de la pression en tout point du mur vertical suit la même évolution à l'aide de coordonnées adimensionnalisées. Cette solution analytique est utilisée en tant que référence dans la suite.

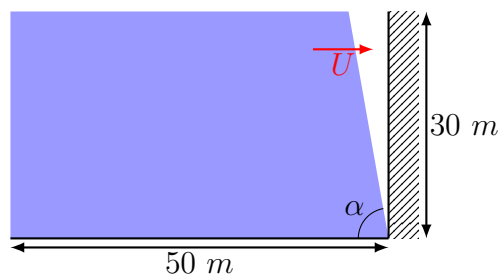


Figure 5.32: Schéma de la simulation pour  $\alpha = 80^\circ$ .

La figure 5.32 présente la configuration initiale de la simulation pour laquelle la vitesse du fluide est  $U = 5 \text{ m.s}^{-1}$  tandis que la vitesse du son est fixée à  $c_0 = 700 \text{ m.s}^{-1}$ . L'angle  $\alpha$  est choisi à une valeur critique de  $80^\circ$  car l'impact génère de fortes pressions très localisées en espace et en temps qui nécessitent une résolution spatiale localement élevée. Ainsi, ce type d'écoulement est adapté au raffinement particulière. Le domaine d'étude extrêmement grand ( $50 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ ) a été dimensionné de sorte qu'il n'y ait pas d'interaction entre des réflexions d'ondes acoustiques et le mur vertical, du moins pendant la durée de l'impact (le temps physique simulé est  $t = 0.2 \text{ s}$ ). Face à ce domaine de plusieurs dizaines de mètres, il est donc clairement intéressant de disposer d'une discrétisation particulière localement plus fine près du mur vertical.

La masse volumique nominale du fluide est  $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Par la suite, les valeurs de pression sont adimensionnalisées par  $P_0 = \rho_0 U^2$  et les longueurs par  $s = Ut$ . Wu présente

des profils de pression à  $s = 1 m$ . Afin de pouvoir comparer nos résultats, les simulations réalisées s'arrêtent à  $t = 0.2 s$ .

L'impact d'une colonne triangulaire avec un angle  $\alpha = 80^\circ$  a été traité par Lu *et al.* [64] avec la méthode SPH pour trois résolutions spatiales différentes dans la zone d'impact ( $\frac{s}{\Delta x} = 20, 32$  et  $40$ ). Dans cette étude, nous prendrons des résolutions  $\frac{s}{\Delta x} = 40, 80$  et  $160$  dans la zone d'impact. Le rayon des particules est  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau).

Les résultats obtenus avec APR sont comparés à la méthode h-variable et non à une distribution particulaire uniforme. Cela s'explique par le fait qu'une distribution particulaire uniforme nécessiterait 38 400 000 particules pour le cas  $\frac{s}{\Delta x} = 160$ , contre environ 500 000 particules en utilisant la méthode h-variable. Nous avons donc préféré comparer l'APR à la méthode qui est traditionnellement utilisée dans la communauté SPH pour traiter ce type d'écoulement. De plus, cette comparaison est l'occasion de quantifier les avantages de l'APR par rapport à la méthode h-variable ainsi que par rapport à l'état de l'art Barcarolo *et al.*

La figure 5.33 représente les distributions particulières initiales pour les trois comparaisons réalisées. La résolution spatiale de la zone fine utilisée par la méthode h-variable (zone bleue sur les figures 5.33 (b,d,f)) est équivalente à celle utilisée avec APR (zone bleue sur les figures 5.33 (a,c,e)) Les distributions particulières utilisées pour la méthode h-variable sont initialisées de sorte que la variation de rayon entre deux particules adjacentes soit au plus 3%.

Une comparaison entre Barcarolo *et al.* [5] et la méthode h-variable est également réalisée pour les trois résolutions spatiales. Cette comparaison permet de quantifier les gains de l'APR vis-à-vis de l'état de l'art des méthodes de raffinement particulaire. On note que les distributions particulières initiales de Barcarolo *et al.* sont les mêmes qu'avec l'APR proposé (Figures 5.33 (a,c,e)).

La figure 5.34 présente une comparaison entre l'APR et la méthode h-variable, ainsi qu'entre Barcarolo *et al.* et la technique h-variable pour les trois niveaux de discrétisation testés. Pour la technique h-variable, on observe des réflexions partielles d'ondes acoustiques près de la position  $\frac{x}{s} = 1$ . Ces réflexions au sein même du fluide apparaissent dès lors que des particules de différents rayons se mélangent entraînant une perte de précision des opérateurs gradient et divergence. Ce problème n'existe pas avec l'APR. En effet, le champ de pression demeure continu à l'interface entre deux niveaux de raffinement, et décrit des demi-ellipses.

A l'inverse de l'APR, les résultats avec la technique de Barcarolo *et al.* présentent de petites discontinuités du champ de pression aux interfaces fines/grossières. On remarque également que les contours de pression ne sont pas tout à fait en accord avec la solution avec h-variable, là où la pression est maximale.

La comparaison des distributions de pression (Fig. 5.35) illustre un bon accord entre

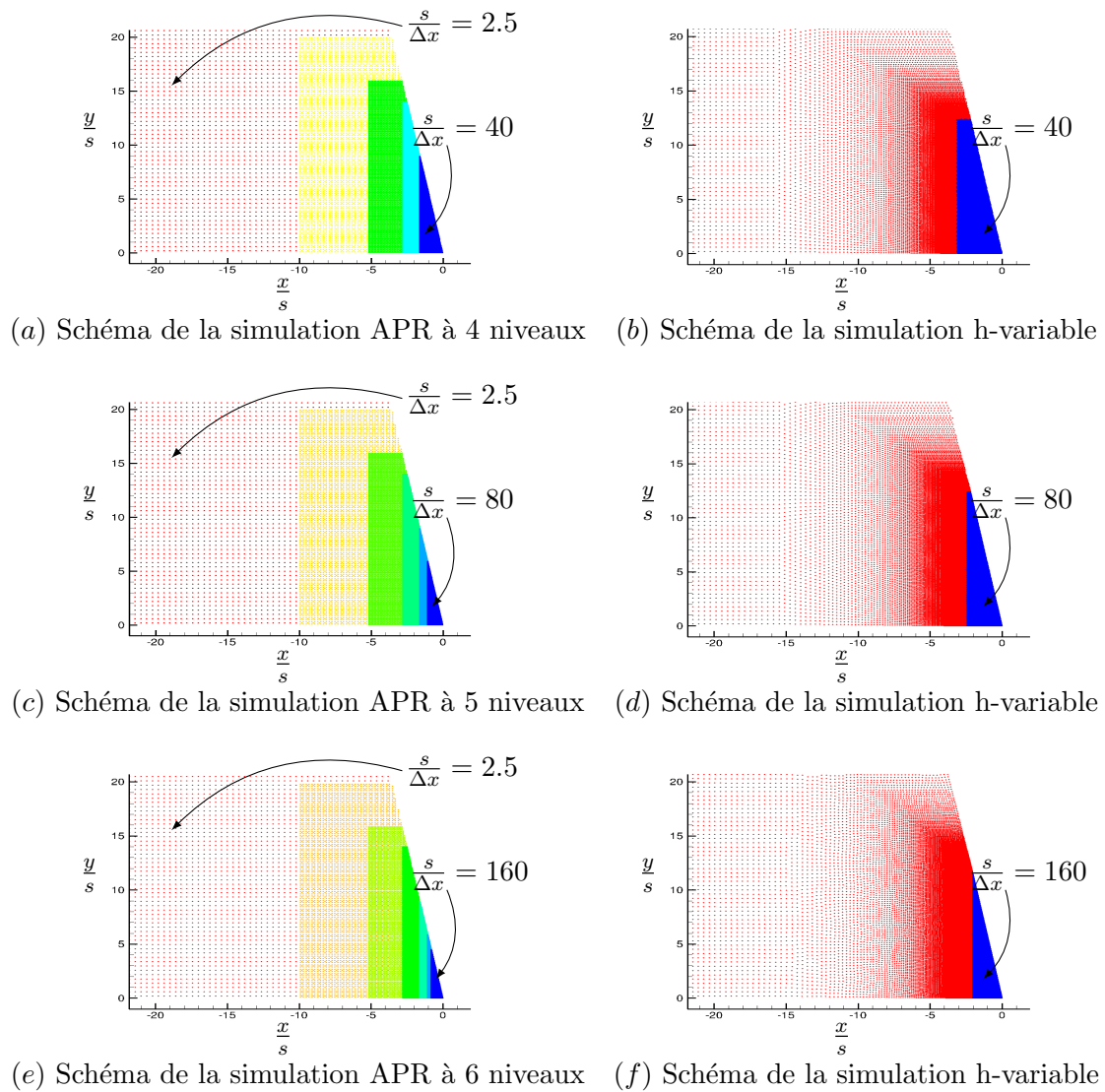


Figure 5.33: Schémas des trois comparaisons effectuées

l'APR et la méthode h-variable, les deux approches convergent vers la solution de Wu en amplitude. En revanche, on observe un léger décalage sur la localisation du pic de pression. Cet écart a également été rencontré par Lu *et al.* [64] et a été attribué à la formulation incompressible utilisée par Wu. Contrairement à l'APR et la méthode h-variable, l'amplitude du pic obtenu avec la technique de Barcarolo *et al.* (Fig. 5.35) ne converge pas de manière monotone entre les 3 résolutions et semble pas converger vers la solution analytique (la valeur du pic de pression pour six niveaux de raffinement est plus faible que pour cinq niveaux).

Le tableau 5.6 présente une comparaison des temps de calcul entre les trois méthodes pour les trois niveaux de discrétisation étudiés. Les résultats démontrent l'efficacité algorithmique de l'APR par rapport à la méthode h-variable, quel que soit le nombre de niveaux

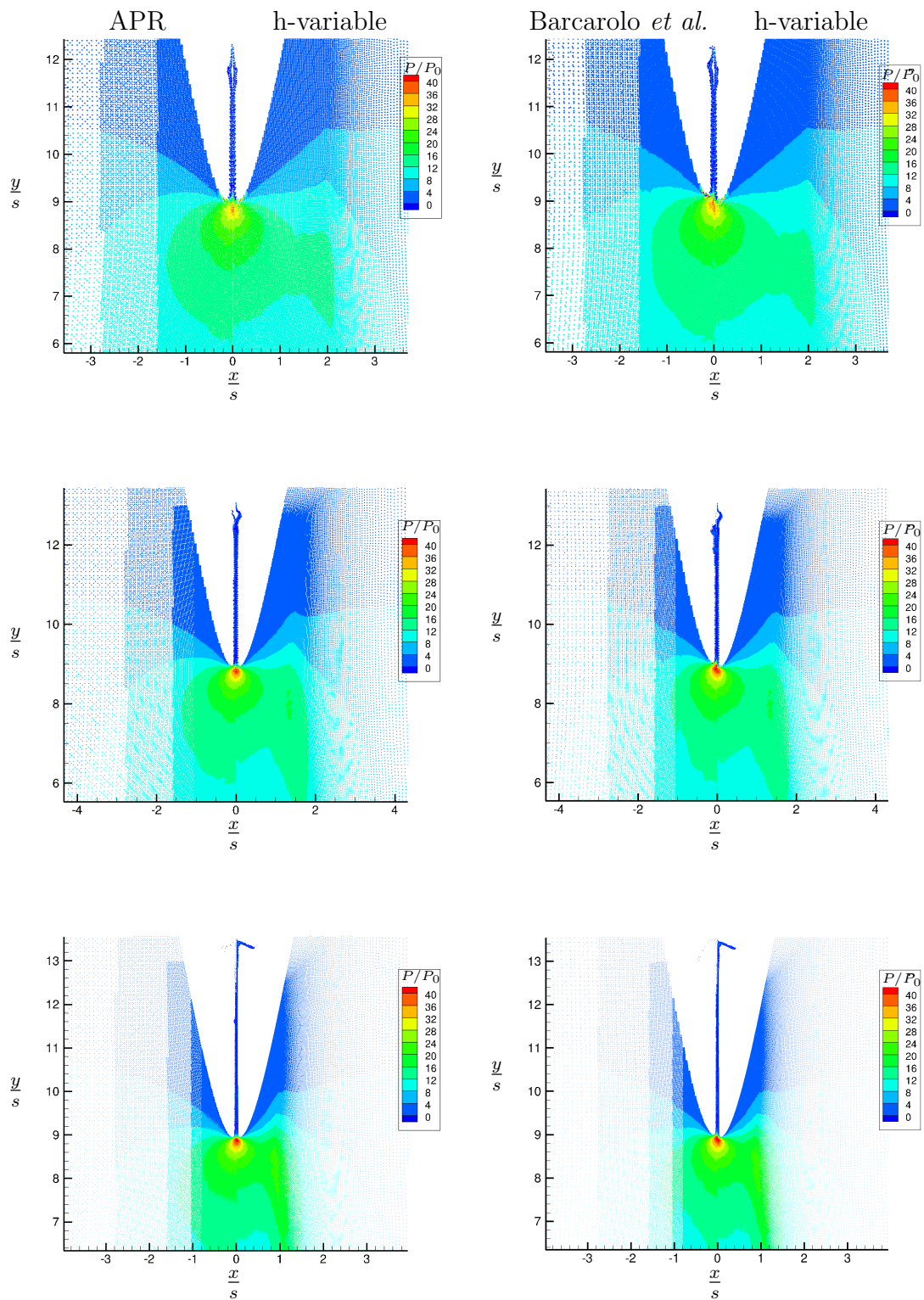


Figure 5.34: Comparaisons du champ de pression en  $s = 1$ , pour  $\frac{s}{\Delta x} = 40, 80$  et  $160$  (de haut en bas) dans la zone d'impact

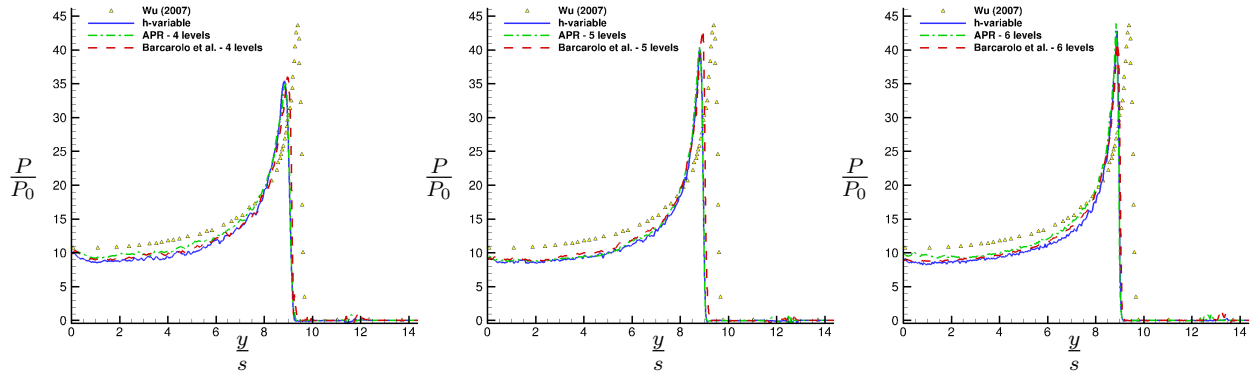


Figure 5.35: Convergence de la distribution de pression le long de la ligne verticale localisée en  $\frac{x}{s} = 0$  en  $s = 1$  m pour les résolutions  $\frac{s}{\Delta x} = 40, 80$  et  $160$  dans la zone d'impact (de gauche à droite)

de raffinement impliqués. Cette efficacité est directement liée aux développements algorithmiques présentés dans la section 5.5 comme en témoignent les mauvaises performances CPU avec la technique de Barcarolo *et al.* A titre indicatif, des estimations du temps CPU pour les trois simulations en résolution uniforme sont aussi présentées.

Simulation	Nombre de particules		Temps CPU ramené à un coeur (h)
	initial	final	
APR - 4 niveaux	40 000	63 000	5.3
h-variable	66 000	66 000	7.28
Barcarolo <i>et al.</i> - 4 niveaux	40 000	63 000	13.61
Résolution uniforme	2 400 000	-	210 (estimé)
APR - 5 niveaux	60 000	132 000	15.2
h-variable	113 000	113 000	28
Barcarolo <i>et al.</i> - 5 niveaux	60 000	132 000	35
Résolution uniforme	9 600 000	-	1680 (estimé)
APR - 6 niveaux	106 000	333 900	70
h-variable	417 000	417 000	168
Barcarolo <i>et al.</i> - 6 niveaux	106 000	333 900	170
Résolution uniforme	38 400 000	-	13440 (estimé)

Table 5.6: Comparaison des temps de calcul sur le cas d'impact d'une colonne d'eau triangulaire

### Impact d'une plaque plane avec $4^\circ$ d'inclinaison (zones de raffinement mobiles)

Dans cette section, on s'intéresse à la simulation de l'impact d'une plaque (en mouvement forcé) formant un angle de  $4^\circ$  avec la surface libre (Fig. 5.36). Ce cas est plus délicat à



traiter que le problème d’impact de la colonne triangulaire (section 5.6.2.1) car l’impact, beaucoup plus violent, génère de fortes pressions très localisées en espace (de l’ordre du dixième de millimètre) et en temps (de l’ordre de la microseconde) qui nécessitent une résolution spatiale localement très élevée. Afin de capter ces effets très locaux, nous réalisons une simulation APR faisant intervenir 10 niveaux de raffinement (Fig. 5.37).

De plus, afin de justifier l’emploi du terme “Adaptive” dans le sigle APR, la simulation est réalisée avec un critère de raffinement sur le pic de pression. Pour ce faire, les boîtes de raffinement se déplacent horizontalement au cours du temps avec une vitesse égale à celle du pic de pression. Ce critère permet ainsi de limiter les coûts CPU et d’évaluer la robustesse de la méthode avec des zones de raffinement mobiles.

Les résultats de la simulation APR sont comparés à la solution analytique de Zhao & Faltinsen [111] qui utilise une approche monofluide, potentielle et incompressible. La simulation SPH est réalisée avec une vitesse nominale du son  $c_0 = 1480 \text{ m.s}^{-1}$ , *i.e* on modélise cette fois-ci la véritable compressibilité du fluide. La plaque se déplace à une vitesse verticale constante  $U = -6.17 \text{ m.s}^{-1}$ . La masse volumique nominale du fluide est  $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le temps physique simulé correspond à  $1.5 \text{ ms}$ . Le nombre de particules à l’initialisation est de l’ordre de 300 000. Le rayon des particules est  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau). La plaque est équipée de 64 capteurs de pression espacés les uns des autres de  $5 \text{ mm}$ .

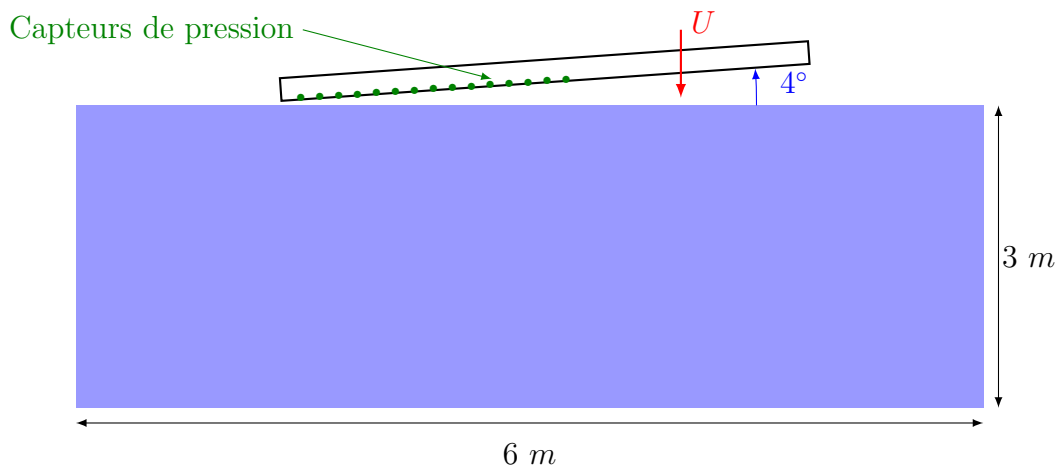


Figure 5.36: Schéma de la simulation considérée

La figure 5.38 présente l’évolution du champ de pression au cours de la simulation. Aux instants  $t = 0.03 \text{ ms}$  et  $t = 0.06 \text{ ms}$ , la formation du jet entraîne un déplacement vers la droite des zones de raffinement avec pour conséquence un déraffinement de l’extrémité gauche du dièdre. Les quatre instants suivants illustrent qualitativement l’évolution du pic de pression ainsi que la continuité des champs aux interfaces entre les différents niveaux de raffinement.

Ce problème d’impact est auto-similaire, c’est-à-dire que la valeur de pression en  $y_0$  à

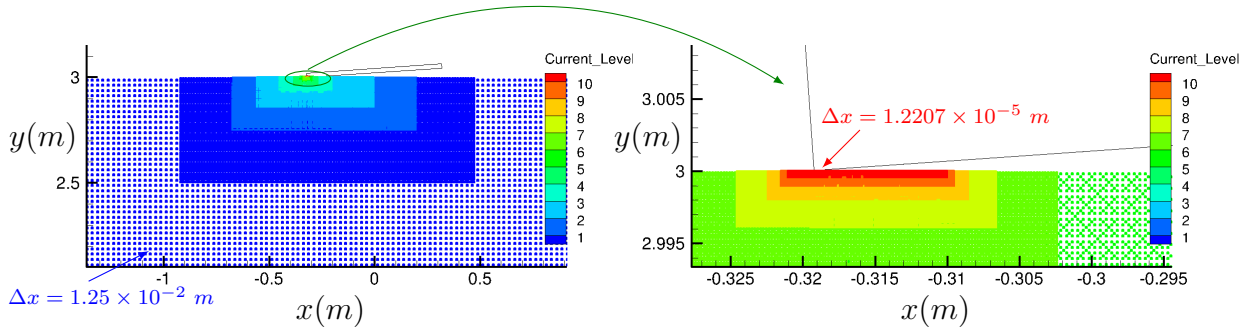


Figure 5.37: Schéma de la simulation APR à 10 niveaux (vue globale à gauche, vue zoomée à droite)

l'instant  $t_0$  est égale à la valeur de pression à la date  $t_1 > t_0$  au point  $\frac{t_1}{t_0}y_0$ . Ainsi, l'évaluation temporelle de la pression en différents points permet de déterminer la convergence de la solution numérique. En utilisant cette propriété d'auto-similarité, on observe sur la figure 5.39 (à droite) que la simulation APR prédit un maximum de pression de l'ordre de 75 bars pour le pic, et ce dès  $t = 1.1 \text{ ms}$ . Le déplacement des zones de raffinement a pour conséquence que les signaux de pression sont légèrement bruités. Le pic de pression s'atténue très peu au cours de son évolution, attestant d'une bonne précision globale du schéma Riemann-SPH avec APR.

La figure 5.39 (à gauche) représente une comparaison entre la simulation SPH, les résultats expérimentaux obtenus par HHI [69] (Hyundai Heavy Industries) et la solution analytique pour un capteur de pression situé à  $0.084 \text{ m}$  du bord gauche de la plaque. On observe que la solution APR est très éloignée des résultats expérimentaux. Cela s'explique par le fait que les capteurs de pression utilisés dans le cadre des essais, de l'ordre de  $6.3 \text{ mm}$  de diamètre, ne sont pas suffisamment fins pour pouvoir capturer correctement le pic de pression. Le même constat s'applique pour le taux d'échantillonnage des capteurs qui est de l'ordre de  $100 \text{ kHz}$ . La simulation avec APR utilise quant à elle un taux d'échantillonnage de l'ordre de  $25 \text{ MHz}$  et des capteurs numériques de pression de l'ordre de  $0.0976 \text{ mm}$  de diamètre. Marrone *et al.* [69] ont montré qu'une simulation SPH utilisant le taux d'échantillonnage utilisé dans les essais permettait de retrouver un bon accord avec les résultats expérimentaux.

La différence d'environ 20 bars sur le pic de pression entre le calcul APR et la solution analytique peut s'expliquer par le fait que l'hypothèse d'incompressibilité de la formulation analytique de Zhao & Faltinsen ne semble pas valide ici. En effet, au cours de la simulation APR, la vitesse dans le jet atteint localement  $250 \text{ m.s}^{-1}$ , ce qui conduit à  $Ma > 0.1$ . Les effets de compressibilité ne sont donc pas tout à fait négligeables pour ce type d'impact. Or on sait que la compressibilité diminue l'intensité des pics de pression quand elle joue.

Le tableau 5.7 présente le temps de calcul des simulations avec APR et h-variable. A titre indicatif, des estimations du temps CPU pour les simulations avec résolution uniforme sont

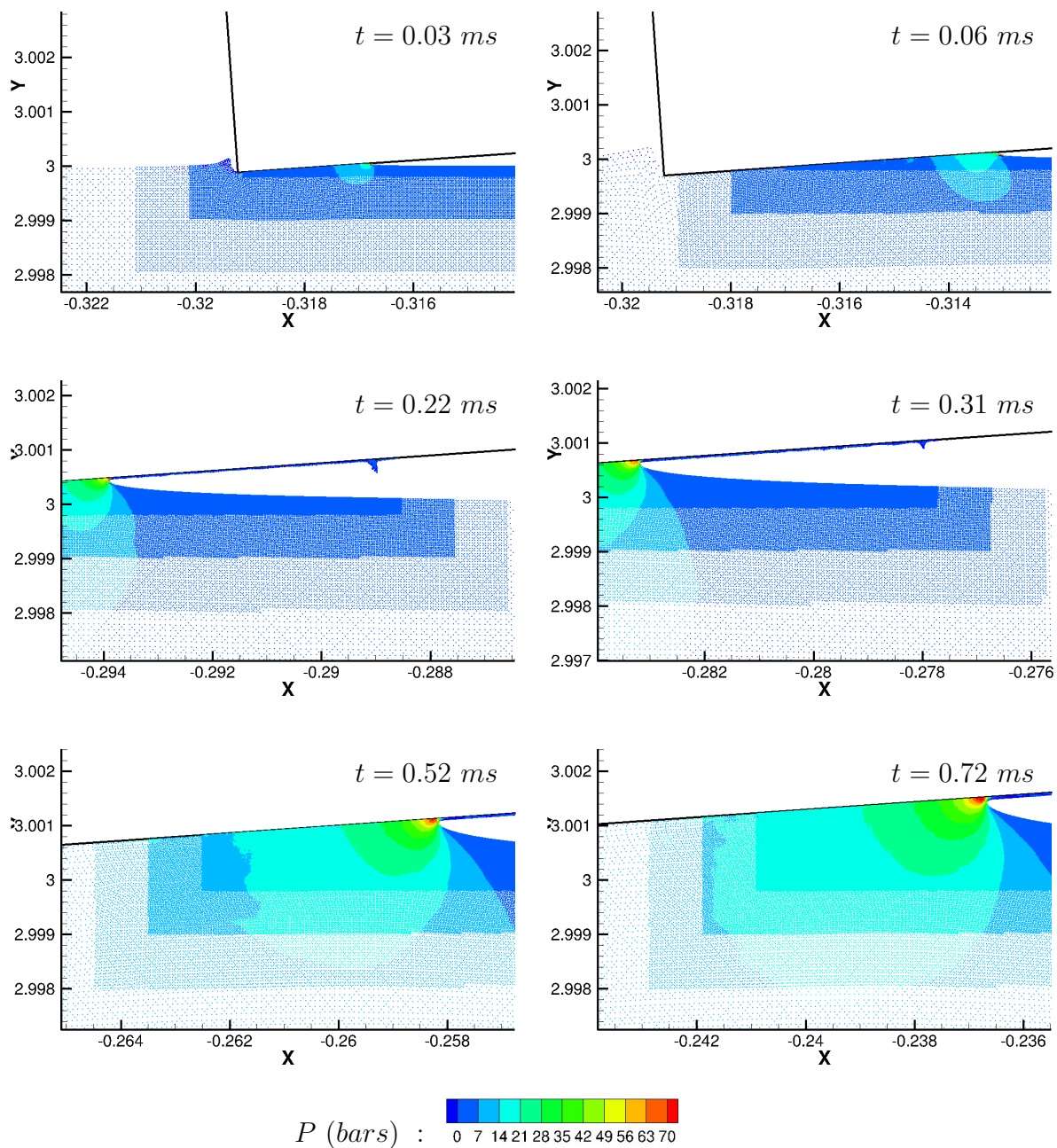


Figure 5.38: Champs de pression à différents instants de la simulation APR avec raffinement adaptatif (vue sur les niveaux de raffinement 7 à 10)

présentées. On peut retenir de ce comparatif que l'APR est plus efficace d'un facteur 6 par rapport au h-variable sur ce cas 2D avec un résultat meilleur à priori (pic de pression plus intense donc mieux capturé).

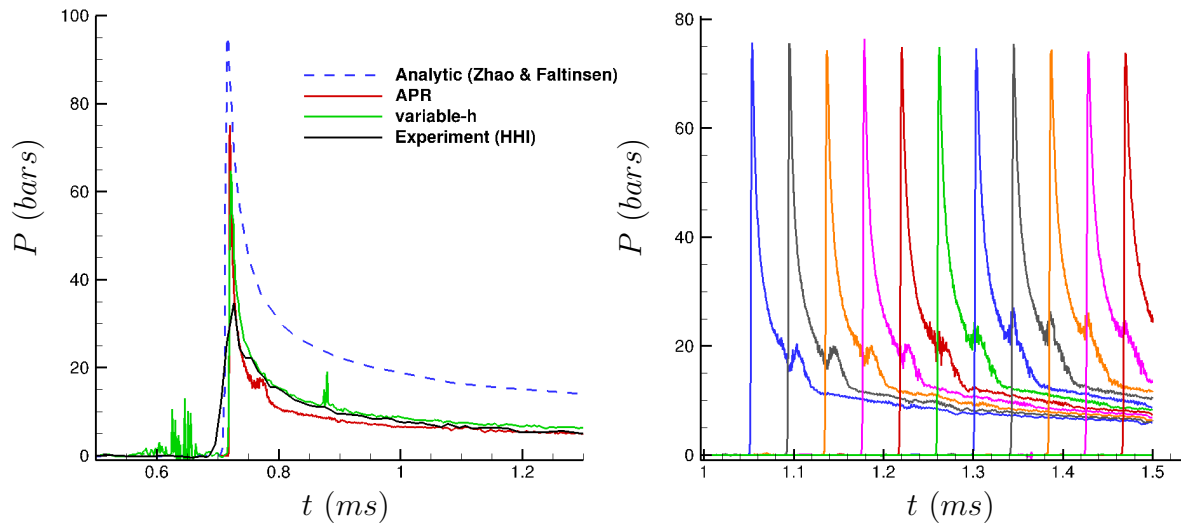


Figure 5.39: Comparaison entre les différentes solutions (à gauche) et convergence des pics de pression de la simulation APR (à droite)

Simulation	Nombre de particules		Temps CPU ramené à un coeur (h)
	initial	final	
APR	300 000	700 000	980
h-variable	2 950 000	-	5900
Résolution uniforme	$1.2 \times 10^{11}$	-	$2.3 \times 10^8$ (estimé)

Table 5.7: Comparaison des temps de calcul sur le cas d'impact d'une plaque pour  $t = 1.5$  ms simulé

## Simulation de l'invasissement du pont d'un navire (Green water event)

### Description du contexte

Lors de tempêtes et d'états de mer critiques, les dommages subis par les navires ou les structures offshore peuvent être particulièrement importants, pouvant entraîner un risque pour la sécurité des personnes à bord, une destruction des équipements de bord, ou bien encore une pollution de l'environnement marin. De tels exemples se produisent malheureusement régulièrement. L'industrie offshore, ainsi que les équipes d'ingénieurs et les sociétés de classification sont pleinement impliquées dans l'évaluation de ces chargements extrêmes. Ces derniers couvrent un large spectre d'événements tels que l'impact d'une vague sur la coque d'un navire et sa réponse structurelle (slamming), l'invasissement du pont d'un navire par une grande quantité d'eau entraînant le déplacement, voire la mise à l'eau des équipements contenus sur le pont (Green water).

L'objet du présent cas-test est de simuler numériquement le phénomène de Green water. L'APR est particulièrement bien adapté à ce cas car deux gammes très distinctes d'échelles spatiales et temporelles sont ici mises en jeu :

- la génération et la propagation des vagues, dont l'échelle de longueur d'onde et la période sont respectivement de l'ordre de 300  $m$  et 10  $s$ , nécessitent un domaine d'étude dimensionné pour ce phénomène.
- l'interaction entre le liquide et la structure du navire conduit à des impacts dont les dimensions caractéristiques spatiale et temporelle sont plusieurs ordres de grandeurs plus petites ( $< 1 m$  et  $< 0.1 s$ ).

Il est donc difficile (impossible et inadapté) de traiter numériquement ce phénomène avec une résolution spatiale uniforme.

La validation numérique de l'APR est effectuée à l'aide des résultats expérimentaux réalisés à l'Ecole Centrale Nantes dans le cadre du projet CITEPH 66-2010 financé par Total et Technip.

### Description du solveur HOS

La simulation est réalisée à l'aide d'un couplage entre le code SPH-Flow et un code basé sur la théorie des écoulements potentiels, permettant de propager la houle. Ce solveur potentiel HOS-NWT [31], a été développé au LHEEA de l'Ecole Centrale Nantes. Il permet une décomposition spectrale d'une solution en un ensemble de fonctions de bases. Cette méthode spectrale permet d'obtenir une formulation quasi-analytique pour la propagation de houle au prix d'un faible coût CPU. Aucune simplification n'est faite lors de la résolution du système d'équations. Le champ d'application du solveur HOS concerne la génération et la propagation en 2D et 3D de houle régulière, irrégulière, focalisée, ainsi que la simulation de l'évolution d'un état de mer correspondant à un spectre donné. La limitation du solveur HOS concerne l'introduction d'un corps dans le domaine fluide. En effet, le champ d'application de la méthode se restreint à la génération et la propagation de vagues sans aucune possibilité de modéliser l'interaction entre les vagues et un corps. Une seconde limitation concerne l'impossibilité d'effectuer des reconnections d'interface (déferlement). Le code fournit en sortie les champs de vitesse et de pression sur une grille cartésienne uniforme, ainsi que la position de la surface libre, ce à différents instants espacés régulièrement.

### Description de l'algorithme de couplage

Une description du couplage entre les deux solveurs est présentée dans la figure 5.40. Le champ de vagues est calculé à l'aide du solveur potentiel afin d'initialiser le domaine physique complet en l'absence de corps. Cette solution correspond à un train d'ondes incident non perturbé. Dès lors que cette solution du solveur HOS est obtenue, elle est utilisée en tant que donnée initiale pour la résolution de la simulation SPH.

L'interaction entre le train d'ondes et la structure est résolue à l'aide de la méthode SPH. Le couplage entre les deux solveurs est réalisé en imposant la solution potentielle comme condition aux limites du solveur SPH (lignes en pointillés) à chaque instant. Ces conditions aux limites de type inlet/outlet doivent être situées suffisamment loin de la zone d'impact entre le fluide et la structure de sorte qu'il n'y ait pas d'interaction entre le champ de

vagues réfléchies sur la frontière du couplage et le corps. Ainsi, ce couplage permet de réduire drastiquement le temps de calcul en ne simulant qu’une petite partie du domaine physique à l’aide du solveur SPH tout en bénéficiant de la grande précision de HOS pour la propagation de vagues. Tout au long de la simulation SPH, les conditions aux limites inlet/outlet sont mises à jour à l’aide de la solution potentielle HOS.

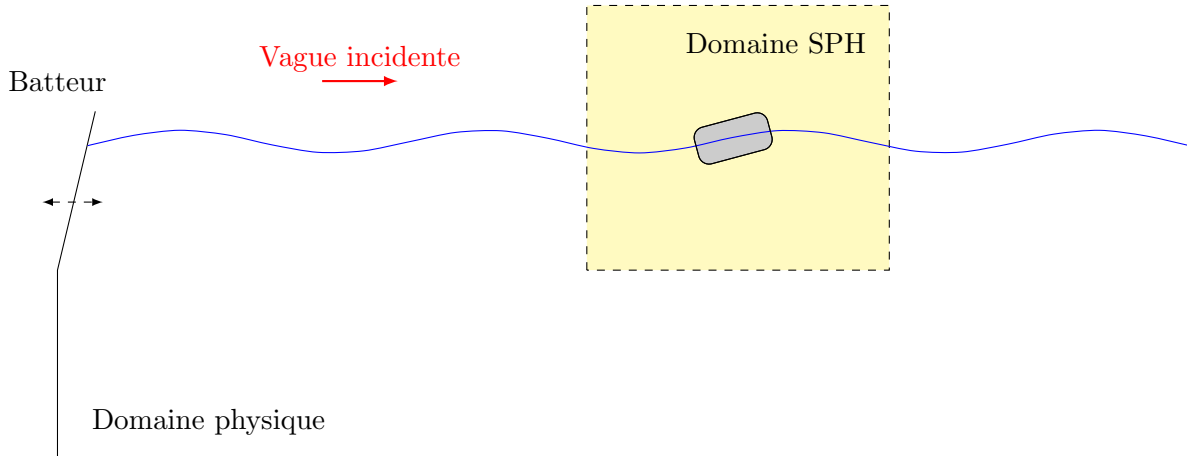


Figure 5.40: Couplage entre HOS-NWT et SPH-Flow

### Description des conditions aux limites

Les particules se situant au voisinage des conditions d’entrée/sortie suivent des trajectoires elliptiques (orbitales) inhérentes au champ de vitesse de houle. Les particules vont donc tour à tour entrer et sortir dans le domaine SPH (Fig. 5.41). Le traitement des conditions d’entrée/sortie dans la méthode SPH (référentiel Lagrangien) est délicat car la position de la frontière  $x_b$  est fixe au cours du temps (référentiel Eulérien). Sur la figure 5.41, les particules **vertes** sont dites “imposées”, c’est-à-dire que leurs champs sont mis à jour au cours du temps à l’aide du champ incident et qu’elles sont advectées suivant ce champ de vitesse incident. Les particules **orange**s sont dites “libres” et évoluent au cours du temps à l’aide des opérateurs SPH usuels, interagissant avec des particules “libres” et “imposées”. Les particules se déplaçant lagrangiennement, il est possible de passer de l’état “libre” à “imposé” (et réciproquement), et ceci même pendant une sous-étape temporelle du schéma d’intégration. La zone d’entrée/sortie est définie au début du calcul SPH, sa dimension doit être suffisante pour assurer que les particules “libres” aient toujours un support complet. En pratique, la dimension est prise égale à au moins 2 rayons de particules “libres” dans la direction de propagation des vagues.

### Description du dispositif expérimental

Les essais ont été réalisés sur une maquette fixe d’un FPSO (échelle 1 : 55) dans le bassin d’essais de l’Ecole Centrale Nantes, dont les dimensions sont de 50 m en longueur, 30 m en largeur et 5 m en profondeur. Le bassin est équipé d’un batteur permettant de générer des

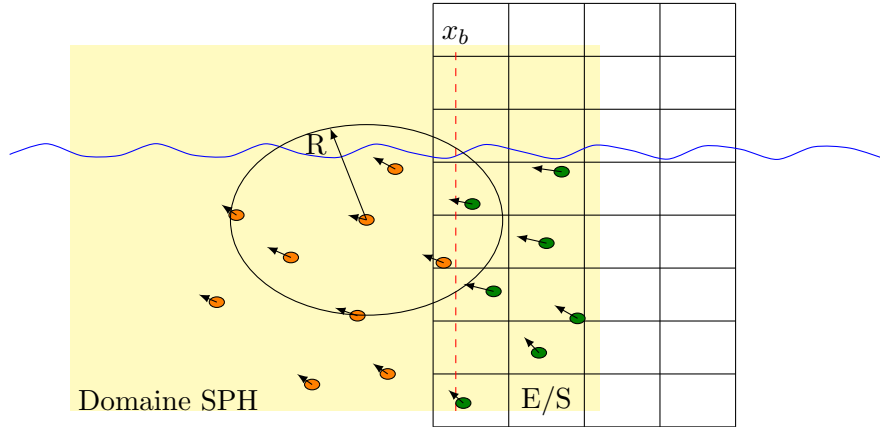


Figure 5.41: Interpolation de la solution potentielle sur les particules SPH

vagues dans plusieurs directions. L’envahissement du pont (Green water event) a été étudié pour des vagues dont la longueur d’onde est de  $400\text{ m}$  et l’amplitude est  $24\text{ m}$  à l’échelle réelle, ce qui correspond respectivement à  $7.24\text{ m}$  et  $0.428\text{ m}$  à l’échelle modèle. Les incertitudes liées aux essais ont été contrôlées en répétant les expériences une vingtaine de fois.

Le dispositif expérimental comprend 5 capteurs de hauteur d’eau localisés sur le pont de la maquette (notés de A à E sur la figure 5.42). Des capteurs de pression sont placés sur le brise-lame (mur vertical) afin de mesurer les pressions locales d’impact au cours du temps (notés de M1 à M5 sur la figure 5.42).

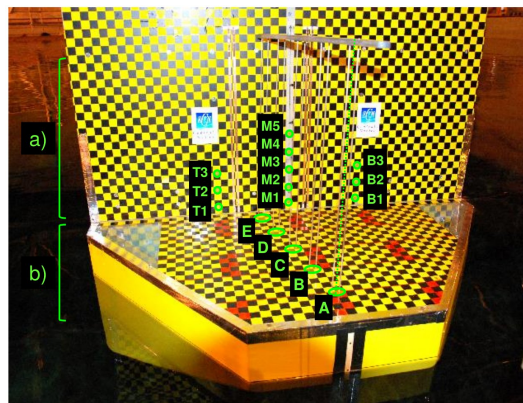


Figure 5.42

- a) Emplacement des capteurs de pression sur le brise-lame
- b) Position des capteurs de hauteur d’eau sur le pont

### Description de la simulation numérique réalisée

Le domaine complet (HOS + SPH) est de taille  $22\text{ m} \times 4\text{ m} \times 2.6\text{ m}$ . La résolution spatiale utilisée dans la zone grossière SPH correspond à  $\Delta x = 0.05\text{ m}$ . La zone APR comprend 3 niveaux de raffinement, pour un  $\Delta x = 0.00625\text{ m}$  dans le niveau le plus fin.

À l'instant initial, la simulation représente environ 400 000 particules. Lorsque le pont du navire est envahi, le pic maximal atteint 900 000 particules. L'utilisation d'un plan de symétrie permet de réduire les coûts de calcul d'un facteur deux (Fig. 5.43).

Une seconde simulation est réalisée avec la méthode h-variable. La résolution spatiale utilisée près du pont du navire est identique à celle de la simulation APR et correspond à  $\Delta x = 0.00625 \text{ m}$ . La résolution grossière utilisée près de la zone de forçage est  $\Delta x = 0.05 \text{ m}$ . La distribution particulaire est initialisée de sorte que la variation de rayon entre deux particules adjacentes n'excède pas 2%. La simulation h-variable représente environ 5 millions de particules.

Le rayon des particules utilisé pour les deux simulations est  $\frac{R}{\Delta x} = 2.7$  (environ 260 particules dans le support du noyau). Le train de vagues incident simulé via le solveur HOS correspond à une longueur d'onde de  $7.24 \text{ m}$  pour une hauteur de  $0.428 \text{ m}$ .

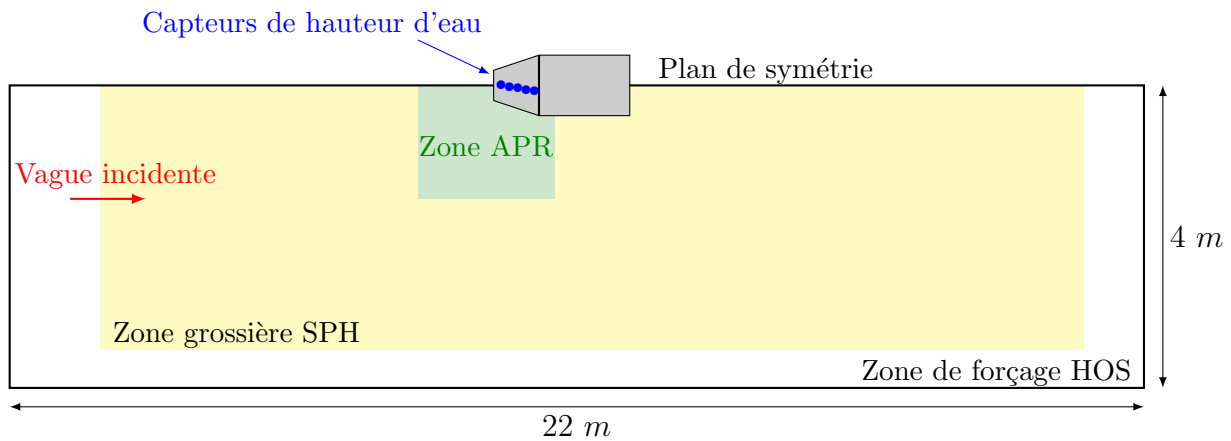


Figure 5.43: Schéma de la simulation réalisée (vue de dessus)

Les 5 capteurs de hauteur d'eau sont placés sur le pont avec un angle de  $12.5^\circ$  par rapport au plan de symétrie. Le pont du navire mesure  $1.1 \text{ m}$  de largeur et  $0.548 \text{ m}$  de profondeur.

Le brise-lame mesure  $0.75 \text{ m}$  de haut pour  $1.1 \text{ m}$  de large. Le premier capteur de pression  $M1$  est placé à  $0.02 \text{ m}$  du bas du brise-lame (Fig. 5.44).

### Résultats numériques

Le phénomène d'invasion expérimental est comparé aux résultats de la simulation APR (Fig. 5.45 et 5.46). Le phénomène de Green Water observé est caractérisé par 6 étapes :

- a) Une élévation de la surface libre se produit sur l'étrave du navire, dépassant la proue.
- b) Une importante quantité d'eau plonge sur l'avant du pont tandis qu'une autre le contourne et envahit le pont par les côtés.



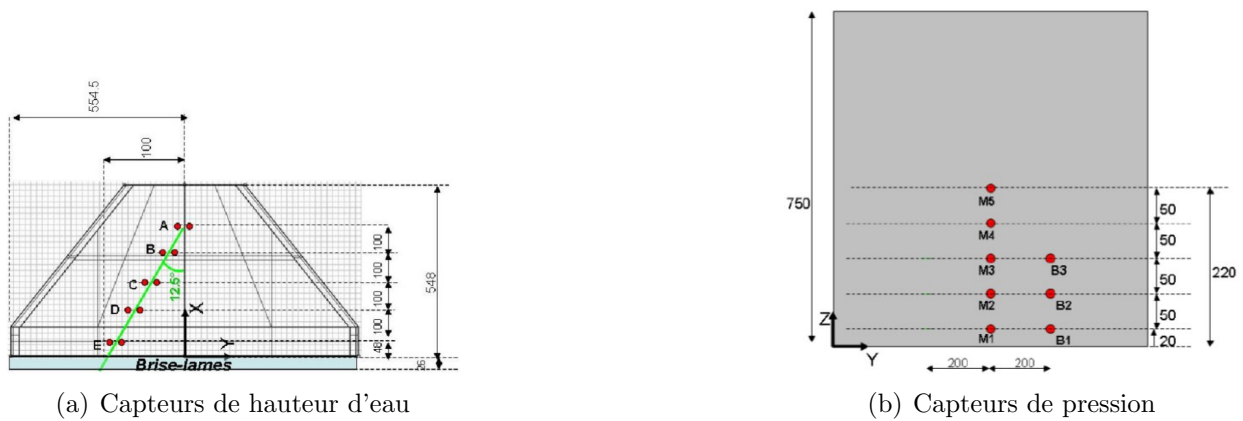


Figure 5.44: Emplacement des capteurs

- c) Une très grande quantité d'eau provenant de la proue et des côtés converge vers le centre du brise-lame.
- d) La rencontre des écoulements entraîne la formation d'un jet vertical le long du brise-lame. Ce jet, relativement complexe, se sépare en trois branches ; celle du centre continuant de monter verticalement le long du brise-lame, les deux autres déviant de l'axe de symétrie du navire.
- e) La colonne d'eau formée près du brise-lame commence à s'effondrer, l'essentiel de l'eau présente sur le pont se situe devant le brise-lame.
- f) L'effondrement de la colonne entraîne l'évacuation de l'eau par les côtés du pont ainsi qu'une élévation locale de la surface libre aux abords de la proue du navire.

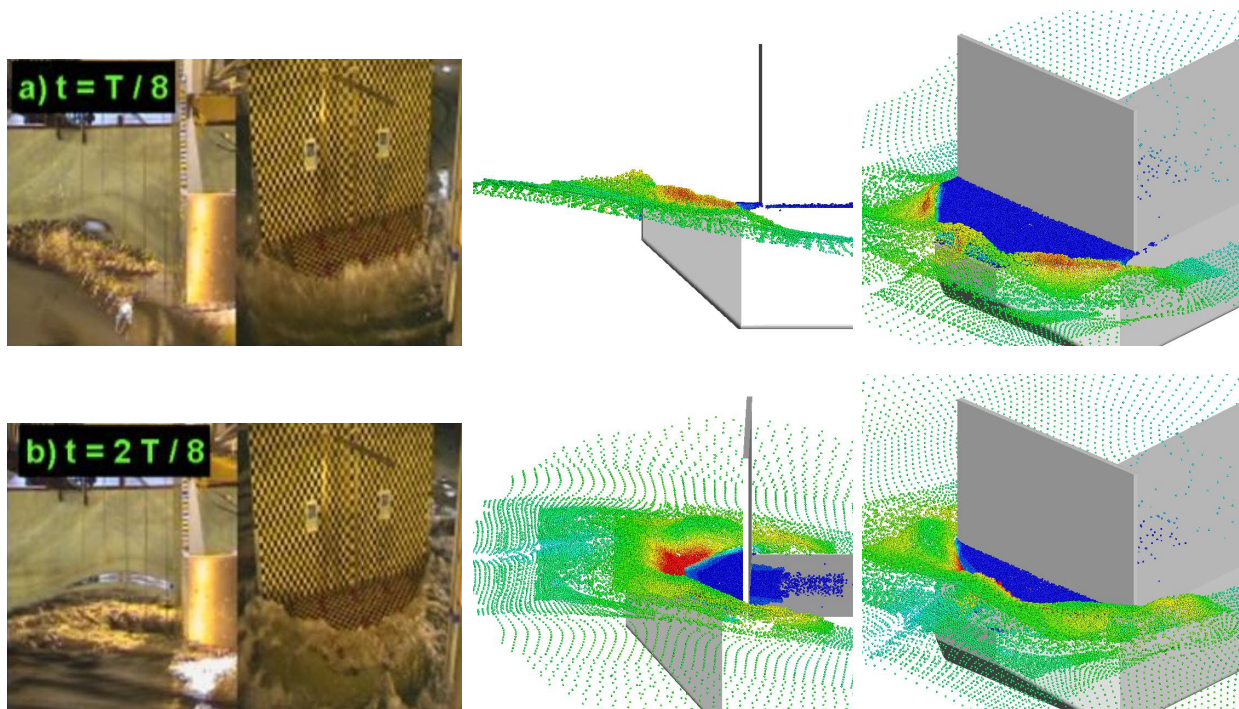


Figure 5.45: Comparaison de la position de la surface libre expérimentale avec celle de la simulation APR

La comparaison effectuée sur les figures (5.45) et (5.46) est qualitativement probante. On analyse ensuite les signaux temporels pour permettre une comparaison quantitative plus fine.

Cinq périodes de vagues ont été simulées. Des comparaisons (Fig. 5.47) sont effectuées pour les 5 capteurs de hauteur d'eau ainsi que pour le capteur de pression M1 situé sur le brise-lame. On observe que l'évolution de la hauteur d'eau est bien reproduite par les simulations APR et h-variable, notamment sur les capteurs C et D. En revanche, les deux simulations sous-évaluent la hauteur d'eau au niveau du capteur E. En effet, le jet déviant de l'axe de symétrie du navire, comme décrit dans l'étape d)  $t = \frac{4T}{8}$ , n'est pas correctement modélisé.

Le pic de pression survenant au pied du brise-lame en M1, bien qu'extrêmement fin, est en partie capturé par la méthodologie APR. La pression hydrodynamique simulée lors de l'effondrement de la colonne d'eau est sous-estimée par rapport à l'expérience.

Les quatre périodes de vague analysées mettent en évidence que la simulation h-variable se dégrade période après période. En effet, à l'inverse de la simulation APR pour laquelle les hauteurs d'eau sont globalement constantes, la hauteur d'eau simulée par la méthodologie h-variable est de plus en plus faible sur le pont du navire.

Le tableau 5.8 présente le temps de calcul des simulations APR et h-variable. A titre indicatif, des estimations du temps CPU pour les simulations avec résolution uniforme sont

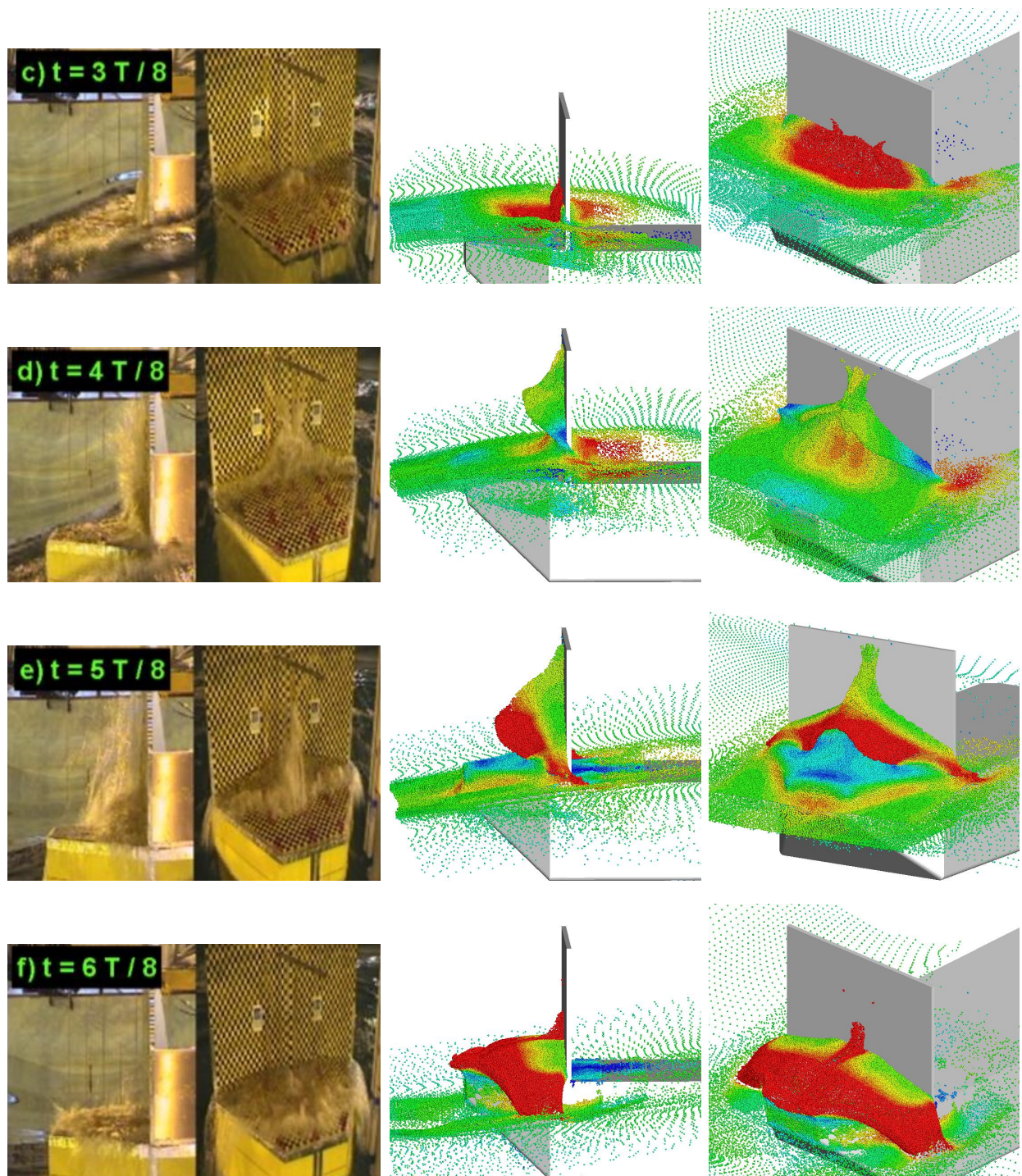


Figure 5.46: Comparaison de la position de la surface libre expérimentale avec celle de la simulation APR

présentées. On peut retenir de ce comparatif que l'APR est plus efficace d'un facteur 5 par rapport au h-variable sur ce cas.

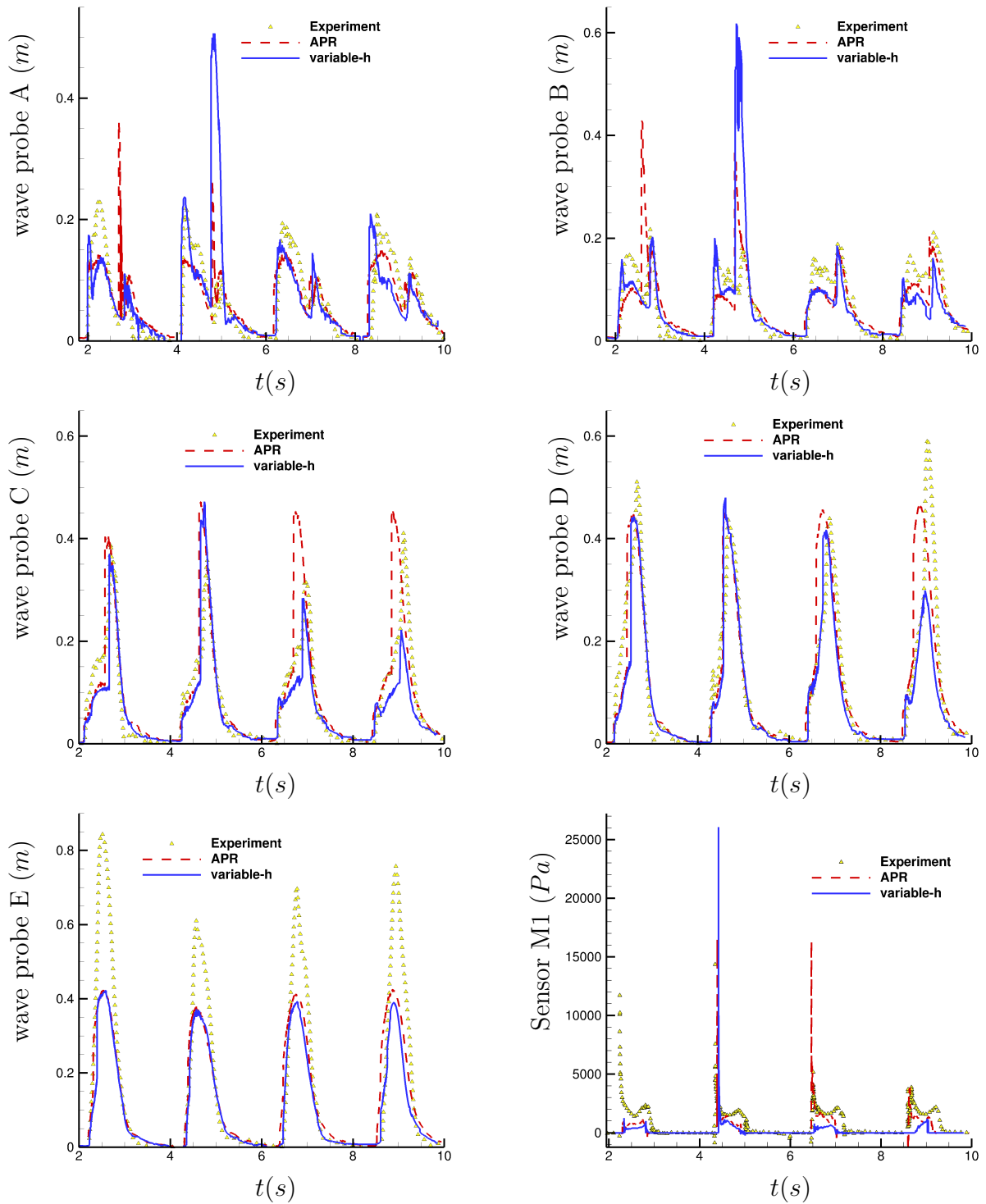


Figure 5.47: Comparaison entre les résultats expérimentaux et les simulations APR et h-variable

Simulation	Nombre de particules		Temps CPU ramené à un coeur (h)
	minimal	maximal	
APR	400 000	900 000	1728
h-variable	5 000 000		8720
Uniforme	1 000 000 000		1750000 (estimé)

Table 5.8: Coût CPU des simulations APR et h-variable et comparatif du nombre de particules nécessaire pour une éventuelle comparaison avec une simulation de résolution spatiale uniforme

# Chapitre 6

## Couplage entre les méthodes SPH et Volumes Finis

### Motivations

Dans le domaine des écoulements avec surface libre, la méthode SPH est particulièrement bien adaptée pour la modélisation d'impacts violents à interface. L'absence de maillage permet de traiter les larges déformations auxquelles l'écoulement est soumis, et qui se traduisent par des phénomènes de fragmentation et de reconnexion d'interface. Cette dynamique rapide intervient généralement dans une zone confinée de l'écoulement au sein de laquelle les effets de compressibilité peuvent parfois intervenir. Partout ailleurs, ces effets sont négligeables au sein d'un écoulement globalement moins dynamique où les échelles temporelles et spatiales sont de plusieurs ordres de grandeur supérieures à celles de la zone de dynamique rapide.

Par ailleurs, des méthodes de décomposition de domaines ont émergé afin de modéliser une partie d'un écoulement avec une méthode numérique et de résoudre l'autre partie avec une autre méthode. De tels couplages permettent ainsi de tirer profit des avantages de deux méthodes numériques sans leurs inconvénients, mais ajoutent la complexité de réaliser le couplage lui-même et de faire tourner deux solveurs en même temps. A la fin des années 80, un des premiers couplages a consisté à modéliser la couche limite par des méthodes Volumes Finis ou des Différences Finies, et le reste de l'écoulement par méthode des singularités [62].

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à la simulation d'écoulements à surface libre en présence de larges déformations via un couplage entre une formulation eulérienne implicite incompressible par la méthode des Volume Finis et une formulation SPH lagrangienne explicite faiblement compressible. Des couplages entre méthodes particulières et méthodes maillées ont déjà été réalisés [89, 46, 81, 4, 15]. De tels couplages, discrétisent les équations de Navier-Stokes à l'aide d'un unique schéma numérique (Volumes Finis ou Différences finies) pour faire évoluer les particules et les cellules. A l'inverse, le couplage auquel nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse utilise la méthode SPH pour discrétiser une partie de l'écoulement avec des particules et une méthode Volumes Finis pour discrétiser une autre partie de l'écoulement à l'aide de cellules. La consistance des

deux schémas numériques est rétablie via une zone de recouvrement des deux discrétisations.

## Description du solveur Volumes Finis

Le solveur Volumes Finis choisi pour ce couplage a été développé par Di Mascio *et al.* [26, 25]. Ce solveur, implémenté dans un formalisme multi-bloc, utilise des zones de recouvrement partiel entre les différents blocs constituant le domaine [26]. Ainsi, le domaine d'étude est découpé en  $L$  sous-domaines (non nécessairement disjoints)  $D^l$  avec  $l = 1, \dots, L$  :

$$D^l \quad l = 1, \dots, L \quad (6.1)$$

Chaque bloc  $D_{i,j,k}^l$  est discrétisé avec un maillage structuré composé de cellules hexaédriques avec :

$$D_{i,j,k}^l \quad i = 1, \dots, N_i \quad j = 1, \dots, N_j \quad k = 1, \dots, N_k \quad (6.2)$$

où les indices  $i, j, k$  réfèrent aux différentes directions du système de coordonnées curvilignes  $(\iota, \kappa, \lambda)$  adopté.

A l'aide d'un schéma d'intégration temporel implicite à trois points, et par intégration des équations de Navier-Stokes en formulation eulérienne sur chaque hexaèdre on obtient :

$$\begin{aligned} \omega_{i,j,k} \frac{3\rho_{i,j,k}^n - 4\rho_{i,j,k}^{n-1} + \rho_{i,j,k}^{n-2}}{2\Delta t} + S_\iota (\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{i+\frac{1}{2},j,k} - \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{i-\frac{1}{2},j,k})^n \\ + S_\kappa (\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{i,j+\frac{1}{2},k} - \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{i,j-\frac{1}{2},k})^n \\ + S_\lambda (\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{i,j,k-\frac{1}{2}})^n = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \omega_{i,j,k} \frac{3\rho \mathbf{u}_{i,j,k}^n - 4\rho \mathbf{u}_{i,j,k}^{n-1} + \rho \mathbf{u}_{i,j,k}^{n-2}}{2\Delta t} + S_\iota (\mathbb{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - \mathbb{F}_{i-\frac{1}{2},j,k}^n) \\ + S_\kappa (\mathbb{F}_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - \mathbb{F}_{i,j-\frac{1}{2},k}^n) \\ + S_\lambda (\mathbb{F}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n - \mathbb{F}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n) \\ - \omega_{i,j,k} \rho_{i,j,k}^n \mathbf{g} = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

où  $\omega_{i,j,k}$  est le volume de la cellule,  $S$  représente la surface de la facette où le flux  $\mathbb{F} = (\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u} + P \cdot \mathbf{n} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{n})$  est calculé. La masse volumique est calculée à l'aide de l'équation :

$$P = P_0 + c_0^2(\rho - \rho_0) \quad (6.5)$$

où  $\rho_0$  et  $P_0$  désignent la masse volumique nominale et la pression de référence. Le système non-linéaire (6.3-6.4) est résolu à l'aide d'une méthode de pas de temps fictif (Dual

Time-Stepping [49]) puis discrétisé via un schéma de type Godunov [27].

Enfin, une méthode Level-Set est utilisée pour la simulation d'écoulements à surface libre [25].

## Approche numérique du couplage

Le but du couplage est de tirer profit des avantages de chacune des méthodes SPH et des Volumes Finis sans leurs inconvénients respectifs. Afin de décrire l'intérêt d'un tel couplage, considérons le cas-test du déferlement d'une vague dans un milieu profond (Fig. 6.1).

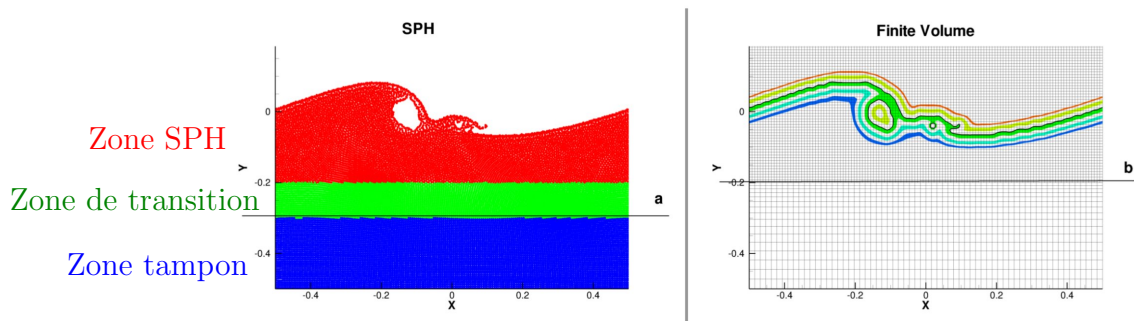


Figure 6.1: Principes du couplage SPH/VF

Pour ce cas-test, la méthode SPH est plus précise que la méthode des Volumes Finis (à discrétisation équivalente) pour simuler le phénomène de fragmentation et de reconnexion de la surface libre (au-dessus de la ligne  $b$  sur la figure 6.1). Néanmoins, à précision équivalente, il est nécessaire d'utiliser davantage de particules avec la méthode SPH que de cellules avec la méthode des VF pour discrétiser la majorité du domaine fluide où la dynamique de l'écoulement est très faible (au-dessous de la ligne  $b$  sur la figure 6.1).

De plus, la méthode des Volumes Finis est très flexible sur ce point car, à l'aide du raffinement de maillage adaptatif (AMR), il est aisé de faire varier la taille des cellules afin de capturer les phénomènes apparaissant sur de larges gammes d'échelles spatiales. Cependant, en l'absence de critère de raffinement adaptatif basé sur la Level-Set, cette approche est relativement coûteuse lorsqu'elle est utilisée pour capturer des détails très fins à la surface libre car l'intégralité du domaine où peut potentiellement se situer la surface libre au cours du temps doit être maillé finement. La définition d'une technique AMR efficace, précise et conservative pour l'interface est complexe et non standard aujourd'hui.

Ainsi, il apparaît pertinent pour ce cas-test de discrétiser le domaine se situant au-dessus de la ligne  $a$  avec la méthode SPH (Fig. 6.1 à gauche), et le domaine situé au-dessous de la ligne  $b$  avec la méthode des Volumes Finis (Fig. 6.1 à droite).



## Couplage spatial

En reprenant l'exemple du cas-test précédent (Fig. 6.1 à gauche), le domaine SPH est composé de trois zones :

- La zone rouge correspond aux particules libres, c'est-à-dire qu'elles évoluent à l'aide des opérateurs SPH usuels.
- La zone bleue est une zone dite tampon où les particules sont initialisées à l'aide d'une interpolation bilinéaire (trilinéaire en 3D) des champs issus de la solution VF. L'interpolation bilinéaire d'un champ  $f$  pour une particule située en  $(x, y)$  est donnée par :

$$f(x, y) = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \begin{bmatrix} x_2 - x & x - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 - y \\ y - y_1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

où les indices 1 et 2 font référence aux différents sommets de la cellule VF qui contient la particule (Fig. 6.2).

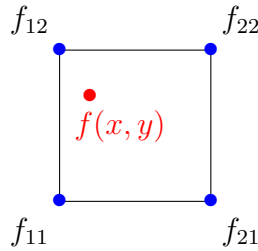


Figure 6.2: Interpolation bilinéaire

Le champ de vitesse obtenu par l'interpolation bilinéaire est utilisé pour advecter la particule de façon lagrangienne. La masse est conservée localement au cours du temps en recalculant le volume de la particule à l'issue de l'interpolation bilinéaire.

Cette interpolation est calculée à chaque sous-étape du schéma temporel d'intégration.

- La zone verte est une zone de transition où un algorithme de type Chimère [48] est appliqué, c'est-à-dire qu'une combinaison linéaire des solutions SPH et VF est réalisée afin d'initialiser les champs et d'advecter les particules appartenant à cette zone :

$$P^{n+1} = \alpha P_{FV}^{n+1} + (1 - \alpha) P_{SPH}^{n+1} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \alpha \mathbf{u}_{FV}^{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{u}_{SPH}^{n+1} \quad (6.8)$$

où  $\alpha \in [0, 1]$  désigne la distance de la particule à la zone SPH libre normalisée par l'épaisseur de la zone de transition. Les solutions  $(P_{FV}^{n+1}, \mathbf{u}_{FV}^{n+1})$  des équations (6.7) et (6.8) sont obtenues via l'interpolation bilinéaire (6.6).

L’algorithme Chimère est utilisé à la fin de chaque cycle temporel. Pendant les sous-étapes, les particules appartenant à la zone de transition évoluent à l’aide des opérateurs SPH. Ce choix apporte un gain de robustesse et une minimisation de la dissipation notables par rapport à l’utilisation de l’algorithme Chimère à chaque sous-étape temporelle du schéma d’intégration.

Le domaine VF est quant à lui composé de deux domaines (Fig. 6.1 à droite) :

- Les cellules situées sous la ligne  $b$  sont libres, c’est-à-dire qu’elles évoluent au travers des équations (6.3) et (6.4)
- Les cellules localisées au-dessus de la ligne  $b$  jouent le rôle de conditions aux limites (zone de forçage). Les champs sont imposés aux sommets des cellules à l’aide d’une interpolation Shepard (voir section 2.3.3.1) calculée sur les particules SPH.

## Couplage temporel

Les solveurs SPH et VF utilisant des pas de temps potentiellement différents, il est nécessaire d’avoir recours à un couplage temporel non homogène. Le solveur FV étant implicite, ses pas de temps (notés  $\Delta t_{VF}$ ) sont plus grands que ceux du solveur SPH (notés  $\Delta t_{SPH}$ ). De plus, ses dérivées temporelles à un instant  $t^n$  sont connues. En notant  $t^n$  l’instant auquel est effectué une synchronisation, le solveur SPH peut actualiser la solution issue du schéma VF via l’approximation suivante à l’instant  $t \in [t^n, t^n + \Delta t_{VF}]$  pour un noeud  $i$  :

$$P_i(t) \approx P_i^n + \frac{\partial P^n}{\partial t} (t - t^n) + \mathcal{O}(t - t^n)^2 \quad (6.9)$$

$$\mathbf{u}_i(t) \approx \mathbf{u}_i^n + \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} (t - t^n) + \mathcal{O}(t - t^n)^2 \quad (6.10)$$

Le solveur SPH, autonome entre deux synchronisations, peut ainsi utiliser ces deux approximations pour actualiser les valeurs des champs sur la grille Volumes Finis utilisée pour imposer les champs des particules situées dans la zone de transition et la zone tampon.

L’intégration temporelle des équations du solveur VF nécessite quant à elle la solution SPH à l’instant  $t^{n+1}$ . Cette solution est disponible dès lors que le solveur SPH a terminé son cycle temporel à l’instant  $t^n + \Delta t_{FV}$ .

## Mise en place d’un coupleur

L’algorithmique du couplage présentée dans les sections 6.3.1 et 6.3.2 a été introduite par Marrone *et al.* [71]. L’un des objectifs de cet axe de thèse est de reprendre ces travaux en y intégrant un programme, nommé coupleur, dont la fonction est de gérer les entrées/sorties et la synchronisation entre les solveurs SPH et VF. Ce coupleur se doit d’être générique, de sorte qu’un changement de solveur n’entraîne pas de modifications intrusives dans le couplage entre les deux solveurs.

La figure 6.3 représente le modèle de couplage qui a été développé au cours de la thèse :

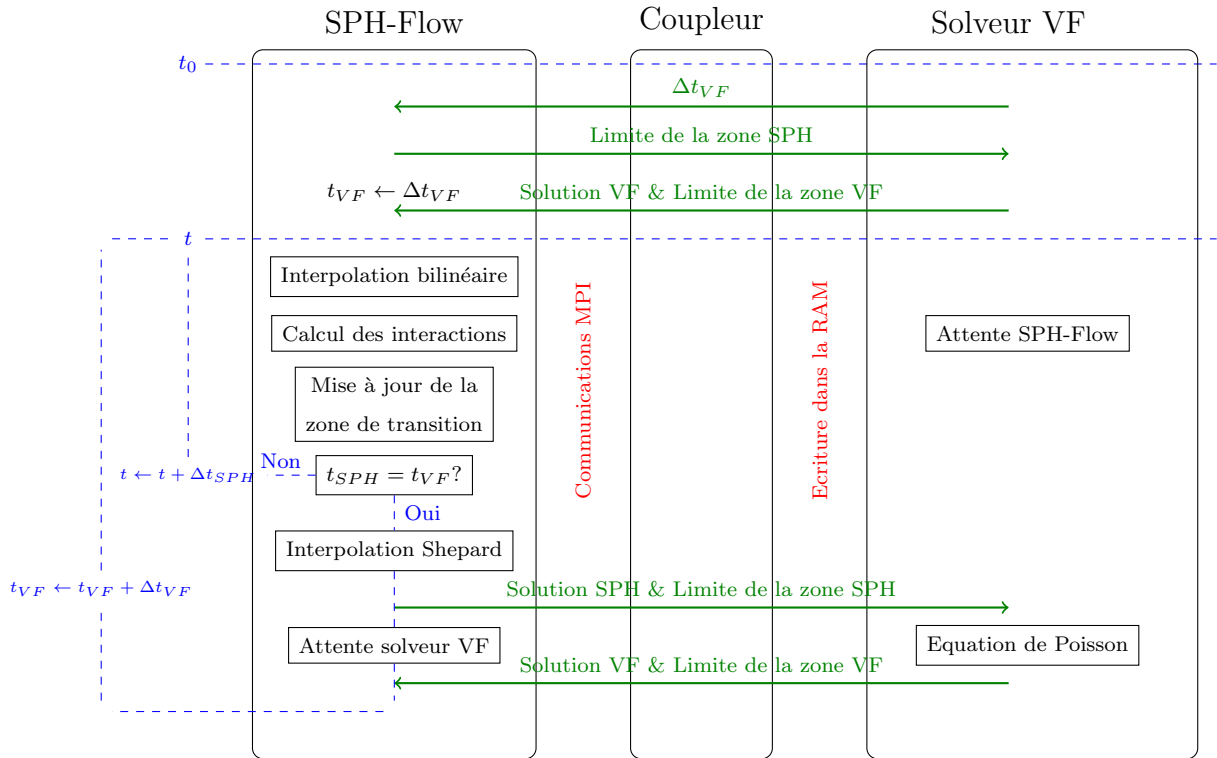


Figure 6.3: Représentation schématique des fonctionnalités attribuées au coupleur

- A l'instant initial  $t_0$ , le solveur VF communique son pas de temps  $\Delta t_{VF}$  au coupleur. Cette information est retransmise au solveur SPH qui stocke l'information dans la variable  $t_{VF}$ . Le solveur SPH envoie au coupleur les coordonnées de la zone de transition ainsi que celles de la zone tampon. De là, le coupleur communique ces informations au solveur VF qui lui renvoie les champs des cellules correspondantes ainsi que les coordonnées des cellules où l'interpolation Shepard doit être réalisée lors de la prochaine communication.
- La boucle en temps peut alors débuter. Au début de chaque sous-étape temporelle du schéma d'intégration, une interpolation bilinéaire est effectuée sur les particules de la zone tampon. S'ensuit le calcul des interactions entre les particules au sein du solveur SPH. A la fin du cycle Runge-Kutta 4, les particules de la zone de transition sont mises à jour à l'aide des solutions SPH et VF. A la fin de chaque cycle temporel, un test logique est réalisé pour savoir si les deux solveurs sont synchronisés ( $t_{SPH} = t_{VF}$ ). Le solveur SPH continue sa boucle en temps tant que ce test logique n'est pas satisfait.
- Lorsque le solveur SPH est synchronisé, il communique au coupleur les particules nécessaires au calcul de l'interpolation Shepard sur les cellules transmises par le solveur VF. Le coupleur effectue la mise à jour des cellules de la grille et communique ces informations au solveur VF qui s'en sert pour avancer temporellement. En retour, le solveur VF transmet au coupleur sa solution associée aux zones de transition et tampon. A la réception de ces informations, le solveur SPH incrémente la variable  $t_{VF}$  et répète la méthodologie énoncée dans le point ci-dessus.

Le coupleur est, dans sa version actuelle, un programme séquentiel. Il sera intéressant à l'avenir de le paralléliser afin qu'il puisse gérer efficacement la lecture, l'écriture et le calcul des interpolations pour des cas 3D complexes nécessitant une quantité importante de données.

## Méthode d'entrées/sorties pour le couplage

### Constat et objectifs

La principale limitation au paradigme de couplage concerne la gestion des particules localisées dans la zone tampon. Marrone *et al.* [71] ont défini la zone tampon avec une épaisseur bien supérieure à la taille du support d'une particule. Cela s'explique par le fait que les particules de la zone tampon se déplacent de façon lagrangienne (à partir d'une vitesse provenant d'une solution eulérienne). Ainsi, il est nécessaire de définir une zone tampon suffisamment profonde de sorte qu'elle agisse comme un "réservoir" de particules, et pour que le support des particules localisées dans la zone de transition soit toujours complet.

Dans une optique de minimisation du coût CPU de l'algorithme de couplage, il nous est apparu nécessaire d'étudier l'implémentation d'une méthode dite d'entrées/sorties afin de créer/supprimer des particules en frontière de la zone tampon.

### Méthode d'entrées/sorties

Les méthodes d'entrées/sorties permettent de simuler des domaines ouverts aux bords desquels des conditions aux limites sont imposées. Habituellement ces conditions sont de natures infinie ou subsonique, mais on peut très bien s'en servir à l'intérieur d'une zone de forçage (comme c'est le cas dans le cadre du couplage). De telles conditions permettent ainsi de s'affranchir d'une simulation coûteuse sur un large domaine fermé au profit d'une simulation rapide sur un domaine restreint ouvert. Les conditions d'entrées/sorties sont délicates à modéliser de par leur nature eulérienne, qui s'oppose au caractère lagrangien de la méthode SPH.

Dans la littérature, l'approche volumique [44, 52] consiste à créer des particules fantômes en amont de la zone d'entrée et en aval de la zone de sortie (Fig. 6.4). Dans le cadre de conditions subsoniques par exemple, la vitesse est imposée en entrée et la pression en sortie. Tout comme la méthode des particules fantômes (voir section 3.1.1), l'approche volumique pose de grandes difficultés théoriques dès lors qu'un corps présente des singularités géométriques.

A l'inverse, l'approche surfacique développée par Kassiotis *et al.*[13] permet de créer/supprimer des particules au travers d'un flux de masse calculé à la paroi. Cette méthode est particulièrement intéressante de par sa facilité d'implémentation et sa flexibilité vis-à-vis de la géométrie des entrées/sorties.

En considérant que les parois d'entrées/sorties sont discrétisées en un ensemble de segments

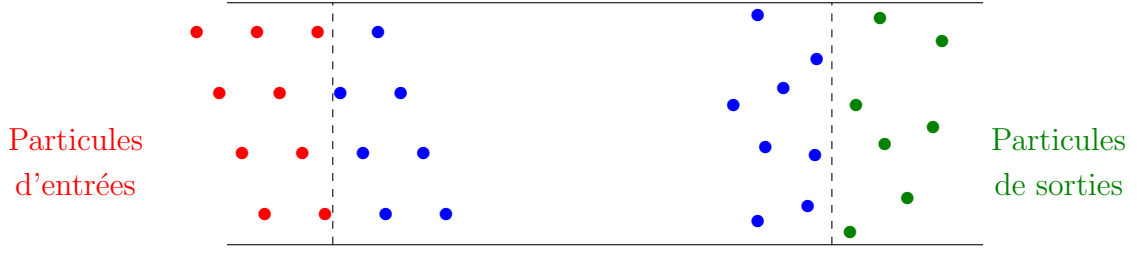
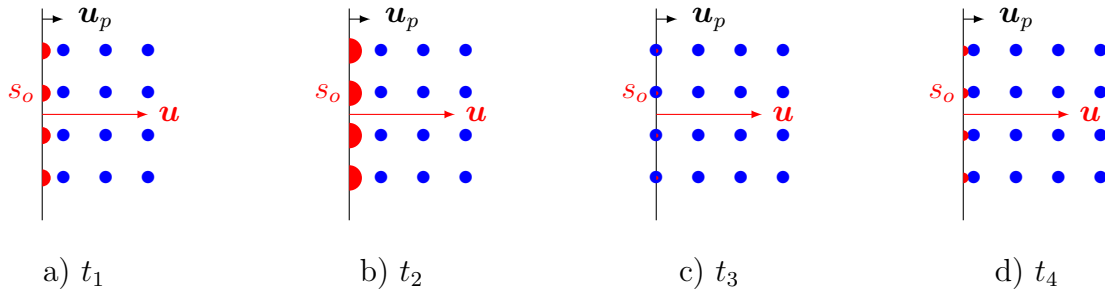


Figure 6.4: Conditions d'entrées/sorties (approche volumique)

dont les sommets sont notés  $s_o$ , que la vitesse de déplacement de la paroi est  $\mathbf{u}_p$  et que la vitesse du fluide à la paroi est  $\mathbf{u}$ , on a l'expression du flux de masse associé au sommet  $s_o$  :

$$\mathcal{F}_{s_o} = \frac{1}{N_{s_o}} \sum_{j \in N_{s_o}} \rho_j S_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{n}_j \quad (6.11)$$

où  $N_{s_o}$  désigne le nombre de segments connectés à  $s_o$  et  $S_j$  l'aire du segment  $j$  attaché à  $s_o$ .


 Figure 6.5: Evolution au cours du temps de la masse des sommets pour une condition d'entrée (*i.e*  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{n} > 0$ )

La figure 6.5 représente l'évolution de la masse attribuée aux sommets. Les instants  $t_1$  et  $t_2$  illustrent l'augmentation de la masse attachée aux sommets de par la positivité de  $\mathcal{F}$ . A l'initialisation, la masse  $m_{s_o}$  associée à chaque sommet est nulle. Lorsque la masse  $m_{s_o}$  atteint un seuil critique (typiquement  $0.5\rho_0\Delta x^D$ ), une nouvelle particule est créée sur la paroi (instant  $t_3$ ) et la masse de la particule  $\rho_0\Delta x^D$  est soustraite de la masse du sommet. Les sommets ayant engendré une particule au cours de l'instant  $t^n$  sont ajoutés à un ensemble noté  $\mathbb{C}^n$ . Les champs des particules créées sur la paroi sont initialisés à l'aide de l'interpolation Shepard (voir section 2.3.3.1).

Dans le cadre d'une condition de sortie, le flux de masse  $\mathcal{F}$  est négatif. Dès lors qu'une particule franchit un segment associé à une condition de sortie, sa masse est redistribuée sur les sommets les plus proches. Les sommets ayant reçu de la masse d'une ou plusieurs particules (notée  $m_\alpha$ ) au cours de l'instant  $t^n$  sont ajoutés à un ensemble noté  $\mathbb{S}^n$ .

Finalement, la masse d'un sommet  $s_o$  est déterminée par intégration temporelle du flux de masse  $\mathcal{F}_{s_o}$  :

$$m_{s_o}^{n+1} = m_{s_o}^n + \Delta t \mathcal{F}_{s_o} - \rho_0 \Delta x^D \mathbb{1}_{s_o \in \mathbb{C}^n} + m_\alpha \mathbb{1}_{s_o \in \mathbb{S}^n} \quad (6.12)$$

où  $\mathbb{1}$  désigne la fonction indicatrice (fonction valant 1 si la condition en indice est vérifiée, 0 sinon).

## Méthode retenue pour le couplage

La méthode de Kassiotis *et al.* ne nous donne pas entièrement satisfaction pour trois raisons :

- La création de particules aux sommets des segments composant les conditions d'entrée/sortie peut devenir coûteuse en présence de géométrie complexe (il est nécessaire de calculer avant le début de la simulation le nombre de segments connectés à chaque sommet afin d'initialiser la variable  $N_{s_o}$ ).
- Dans le cadre d'une distribution particulière cartésienne, les sommets des segments composant les parois sont décalés par rapport aux particules (lorsque de nouvelles particules seront créées par la condition d'entrée, elles ne préserveront pas la distribution cartésienne). Le calcul du flux de masse au centre des segments permet de lever ce problème (Fig. 6.6).
- Afin que les volumes géométrique et physique d'une particule coïncident, la création de particules ne devrait pas se faire sur la paroi mais à une distance de  $0.5\Delta x$  dans la direction normale à la paroi.
- L'expression du flux de masse fait intervenir la masse volumique nominale du fluide  $\rho_0$  alors qu'il devrait en principe utiliser la masse volumique locale de l'écoulement (notamment en présence de gravité).

Face à ce constat, nous avons procédé à quelques ajustements de la méthode de Kassiotis *et al.* On note  $f_o$  (segments en 2D, carrés en 3D) une facette appartenant à une paroi de type entrée/sortie. Le flux de masse associé à une facette s'écrit alors :

$$\mathcal{F}_{f_o} = \bar{\rho}_{f_o} \Delta x^{D-1} (\bar{\mathbf{u}}_{f_o} - \mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{n}_{f_o} \quad (6.13)$$

où  $\bar{\rho}_{f_o}$  et  $\bar{\mathbf{u}}_{f_o}$  représentent la masse volumique et la vitesse évaluées au centre de la facette à l'aide d'une interpolation Shepard. L'équation (6.12) est quant à elle remplacée par :

$$m_{f_o}^{n+1} = m_{f_o}^n + \Delta t \mathcal{F}_{f_o} - \bar{\rho}_{f_o} \Delta x^D \mathbb{1}_{f_o \in \mathbb{E}^n} + m_\alpha \mathbb{1}_{f_o \in \mathbb{F}^n} \quad (6.14)$$

où  $\mathbb{F}^n$  correspond à l'ensemble des facettes ayant reçu de la masse d'une ou plusieurs particules au cours de l'instant  $t^n$ . L'ensemble  $\mathbb{E}^n$  correspond aux facettes ayant engendré une particule au cours de l'instant  $t^n$ .

Afin d'illustrer les avantages de la méthode proposée par rapport à Kassiotis *et al.* nous considérons le cas-test relativement simple d'une condition d'entrée fixe ( $\mathbf{u}_p = 0$ ).

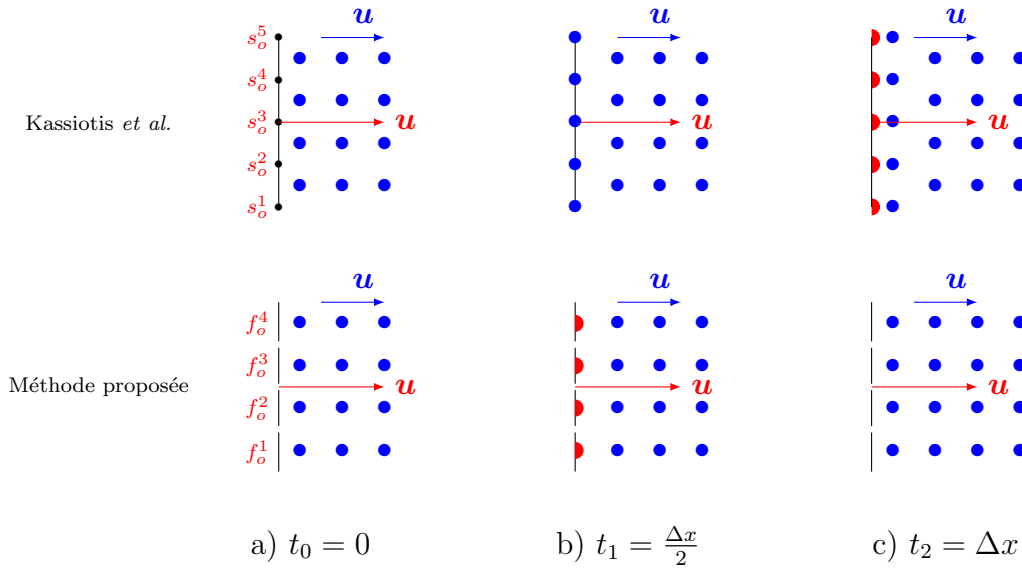


Figure 6.6: Comparatif entre la méthode de Kassiotis *et al.* et la nouvelle méthode proposée

La figure 6.6 illustre les différences entre les deux approches surfaciques. Dans le cas de la méthode de Kassiotis *et al.* la paroi est composée de cinq sommets engendrant des particules (contre quatre faces génératrices pour la méthode proposée). A l'instant  $t_1 = \frac{\Delta x}{2}$  on observe un décalage spatial des particules nouvellement créées par rapport à la distribution cartésienne initiale pour la méthode de Kassiotis *et al.*

La génération de particules soulève des interrogations lorsque la dynamique de l'écoulement est complexe au voisinage d'une condition d'entrée (cas d'un tourbillon par exemple). En effet, le positionnement des particules générées ne tient pas compte de la position des particules environnantes. Bouscasse *et al.* [11] ont développé un couplage entre une formulation analytique et SPH où la génération de particules aux interfaces se fait via l'utilisation d'une zone tampon composée de particules fantômes. La figure 6.7 illustre le phénomène précédemment mentionné : des zones vides sont présentes car la disposition cartésienne des particules générées n'est pas en accord avec l'évolution lagrangienne.

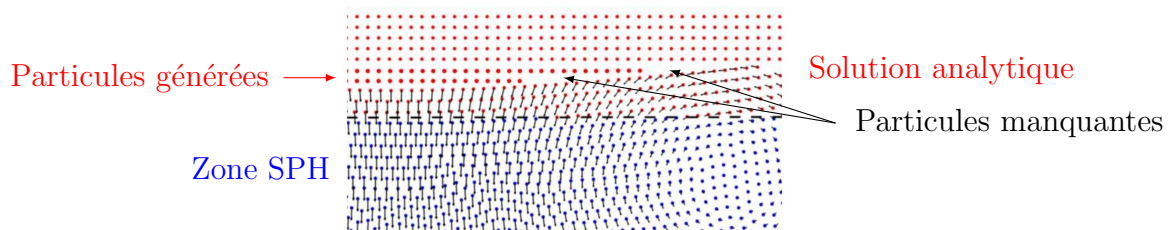


Figure 6.7: Couplage proposé par Bouscasse *et al.* et appliqué aux tourbillons de Taylor Green

Bouscasse *et al.* ont levé ce problème en remaillant la solution SPH entre deux étapes

temporelles à l'aide d'un algorithme de packing [19] (Fig. 6.8). En pratique l'utilisation de ce type de procédure est extrêmement coûteux (arrêt du calcul SPH, démarrage du solveur packing qui itère jusqu'à convergence, interpolation Shepard aux nouvelles positions des particules, redémarrage du calcul SPH). De plus, ce procédé introduit inévitablement de la diffusion numérique au travers de l'interpolation Shepard.

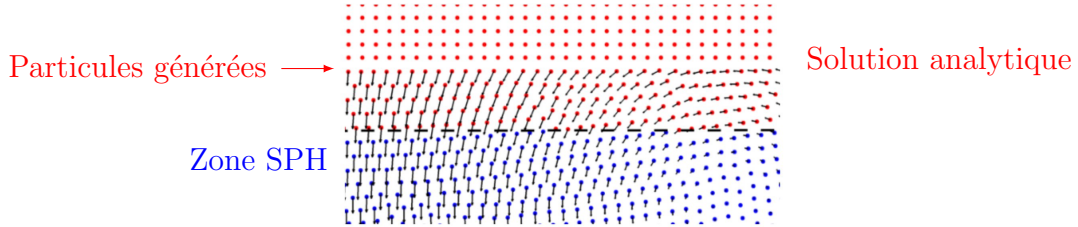


Figure 6.8: Régularisation de la figure 6.7 à l'aide d'une procédure de packing [19]

Pour traiter ce problème de façon simple et rapide, nous avons utilisé les développements réalisés sur le désordre particulaire dans la section NFM (voir 4.3.3) qui peuvent être vus comme une façon de faire du packing dynamiquement au sein même du solveur SPH.

## Validations numériques

### Standing wave

Afin de démontrer l'intérêt de la méthode de couplage, on considère le cas de l'amortissement visqueux d'une vague stationnaire dans une cuve. Ce problème est intéressant car l'amortissement provient à la fois de la couche limite à la paroi ainsi que de celle de la surface libre. Antuono & Colagrossi [2] ont formulé une solution analytique pour ce problème. Pour ce cas test, des conditions aux limites périodiques sont imposées sur les parties latérales du domaine tandis qu'une condition d'adhérence est appliquée sur le fond de la cuve. Le domaine SPH utilise l'opérateur laplacien de Monaghan (2.32) pour modéliser la viscosité au sein du fluide.

Dans ce qui suit, la hauteur d'eau est notée  $H$ , la longueur d'onde est égale à  $\lambda = 4H$  tandis que le nombre d'onde adimensionnel correspondant est défini par  $\kappa H = \frac{\pi}{2}$ . Le nombre de Reynolds est  $Re = H \frac{\sqrt{gH}}{\nu} = 500$ . La vitesse nominale du son est  $c_0 = 10\sqrt{gH}$ . Les profils de vitesse et pression sont initialisés avec la solution analytique [2].

La décomposition de domaine adoptée est décrite sur la figure 6.9. Le domaine SPH dispose d'une résolution spatiale  $\frac{H}{\Delta x} = 100$  tandis que le solveur Volumes Finis se compose de cellules rectangulaires de ratio  $\frac{\Delta x}{\Delta y} = 4$  et de résolution spatiale  $\frac{H}{\Delta y} = 64$ . Le rayon des particules est  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau). Le domaine VF recevant la solution SPH est maillé plus finement afin de s'approcher de la résolution spatiale de SPH. En pratique ce domaine représente un coût CPU négligeable pour le solveur VF car seules les deux premières lignes de cellules sont utilisées pour le calcul des



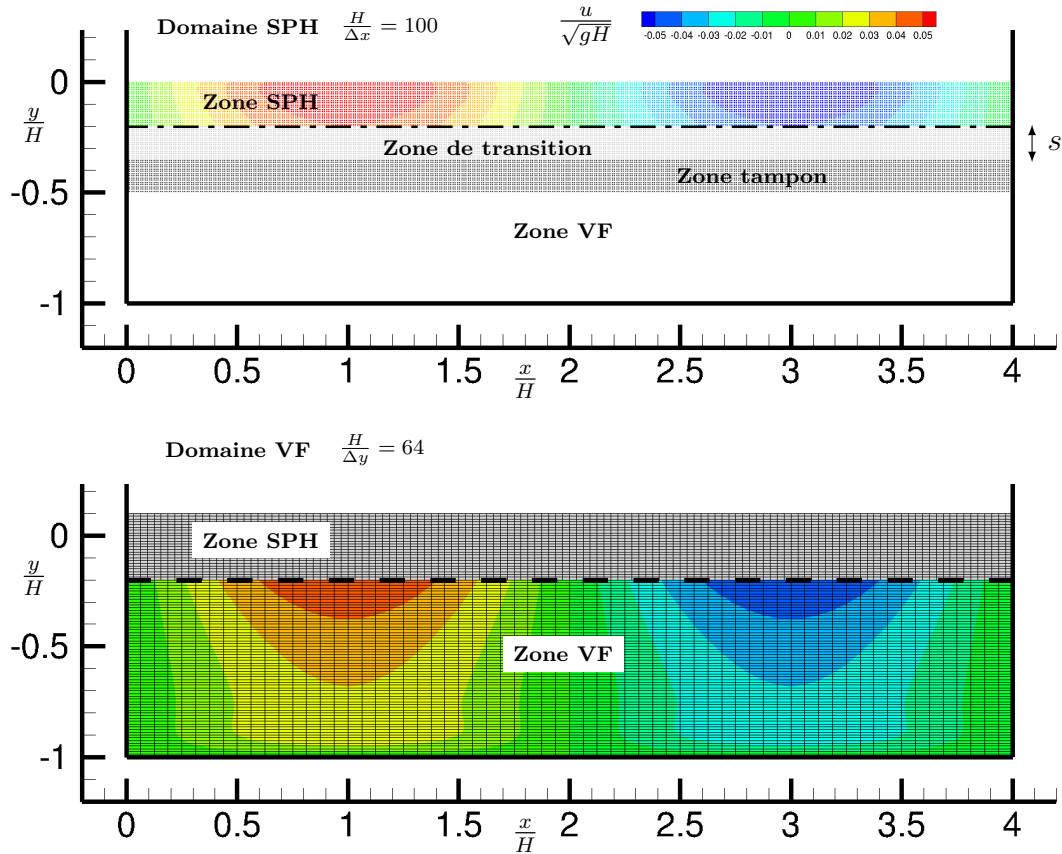


Figure 6.9: Configuration initiale des deux solveurs pour le cas de l'amortissement visqueux d'une vague stationnaire. Les particules et cellules sont colorées suivant le champ de vitesse horizontal

flux des cellules VF actives. L'épaisseur de la zone de transition du domaine SPH est  $s = 0.15H$ , de même que l'épaisseur de la zone tampon. Le ratio entre les pas de temps SPH et VF est  $\frac{\Delta t_{VF}}{\Delta t_{SPH}} = 8$  (une synchronisation tous les 8 pas de temps SPH).

Afin de valider le couplage, une comparaison des résultats est effectuée avec les simulations SPH seule et VF seule. La résolution spatiale adoptée pour la simulation SPH seule est  $\frac{H}{\Delta x} = 100$  tandis que  $\frac{H}{\Delta y} = 64$  est appliqué pour la simulation VF. De plus, une comparaison de l'énergie cinétique  $E_k$  et de l'enstrophie  $E_\omega$  (intégrale du carré de la vorticité) est effectuée avec les valeurs théoriques de la formulation analytique. Dans le cadre du couplage, l'énergie cinétique et l'enstrophie sont calculées sur chaque domaine (zone SPH + zone VF) et sont additionnées pour être comparées aux valeurs analytiques.

La figure 6.10 représente une comparaison de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique et de l'enstrophie. Les valeurs des différentes simulations sont adimensionnalisées par la valeur initiale de la solution analytique. On remarque que le solveur SPH seul modélise correctement la décroissance de l'énergie cinétique avec un léger décalage de phase par

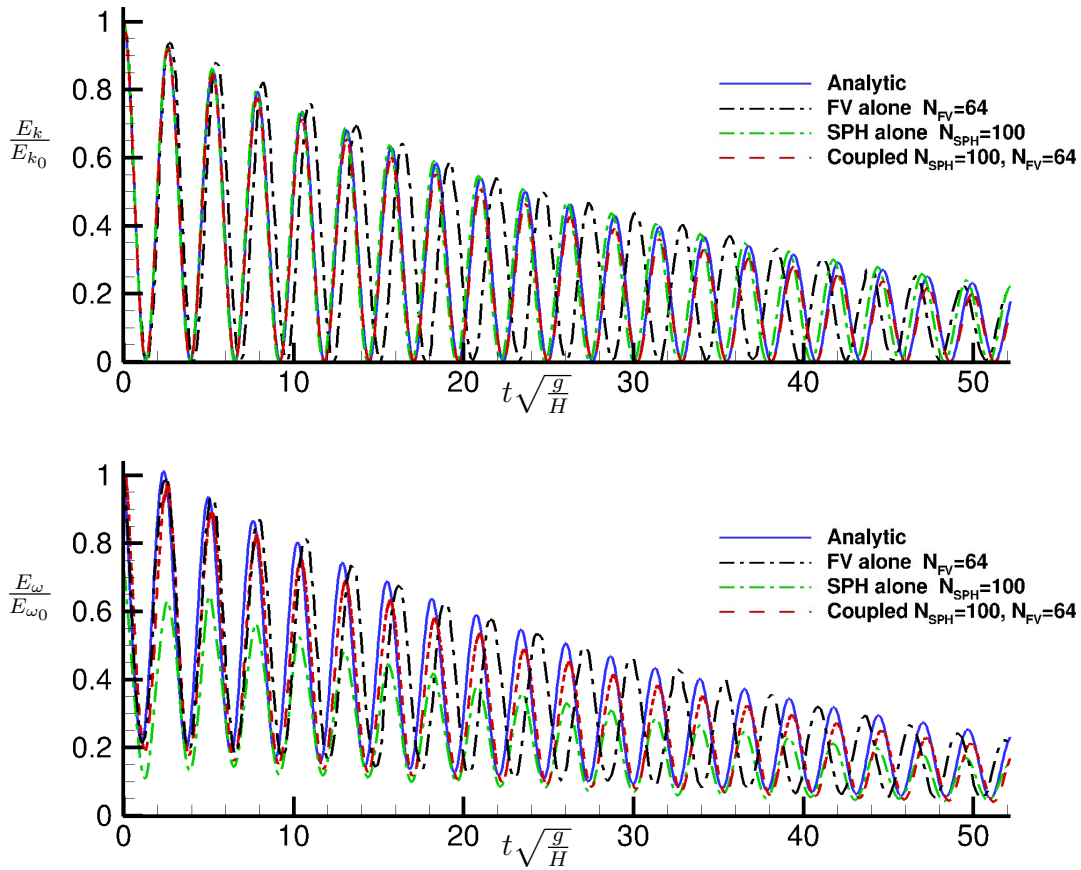


Figure 6.10: Comparaison de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique (en haut) et de l'enstrophie (en bas)

rapport à la solution analytique. En revanche, la décroissance de l'enstrophie est mal évaluée. Cela s'explique par le fait que l'enstrophie dépend (en partie) de la couche limite du fond de la cuve où de forts gradients de vitesse apparaissent pour des vitesses de faibles amplitudes.

A l'inverse, le solveur VF seul prédit correctement la décroissance de l'énergie cinétique et de l'enstrophie. En revanche, on observe un décalage de phase important qui s'explique par la difficulté du solveur à prédire correctement les forts gradients de vitesse au voisinage de la surface libre [71].

La solution du couplage quant à elle bénéficie des avantages des deux méthodes avec un bon accord de phase et d'amplitude avec la formulation analytique pour l'énergie cinétique et l'enstrophie. Néanmoins, en comparaison avec l'amplitude de la solution SPH seule ou le solveur VF seul, on observe que le couplage est dissipatif.

La figure 6.11 présente une comparaison des champs de vorticité entre la solution analytique et les différentes simulations à l'instant  $t\sqrt{\frac{g}{H}} = 34.5$ . La solution VF présentant un décalage

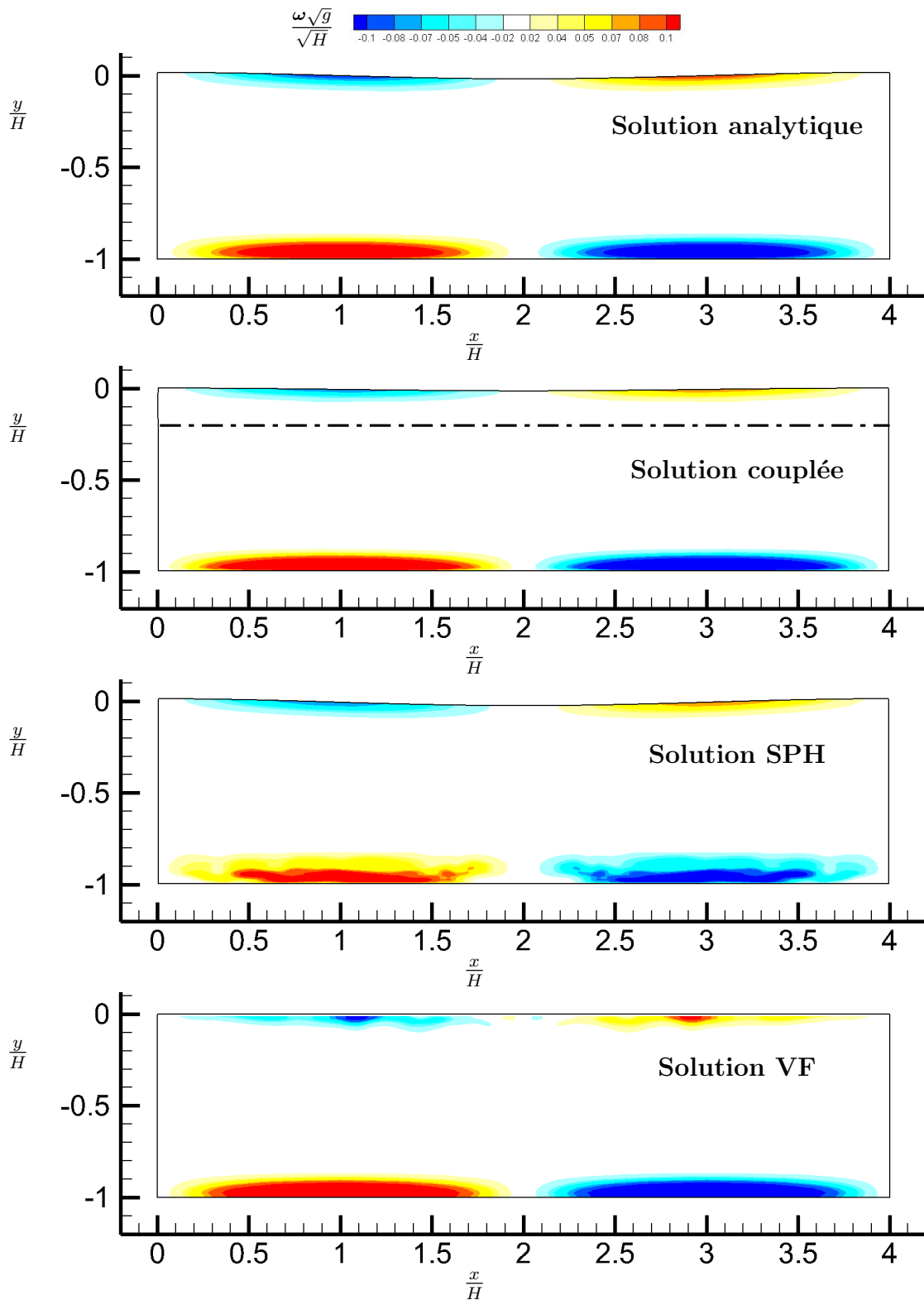


Figure 6.11: Comparaison des champs de vorticité entre (de haut en bas) : la solution analytique, le couplage, le solveur SPH seul et le solveur VF seul

de phase, l'instant de comparaison se fait à  $t\sqrt{\frac{g}{H}} = 36$ . Cette comparaison démontre clairement que l'utilisation d'un unique solveur (SPH ou VF) permet de prédire un champ de vorticité correct seulement dans une zone de l'écoulement (surface libre ou paroi). À l'inverse, le couplage permet de simuler correctement le champ de vorticité en tout point du domaine. Ainsi, ce cas test illustre très clairement l'utilité d'un tel couplage.

## Vague déferlante

Dans cette section, on s'intéresse à la simulation de la propagation d'une vague dans un milieu profond en présence de conditions latérales périodiques. La pente de la vague est très raide, de sorte que le déferlement ait lieu rapidement. Les profils de surface libre et de vitesse sont initialisés avec la solution de Iafrati [45] où le nombre d'onde adimensionnel est  $kH = 4\pi$  et la pente de la vague est  $kA = 0.63$ . La longueur caractéristique de l'écoulement est la longueur d'onde  $\lambda = 1$ , la vitesse caractéristique est  $\sqrt{g\lambda}$ . Le nombre de Reynolds est  $Re = \lambda\frac{\sqrt{g\lambda}}{\nu} = 10\,000$ . La vitesse nominale du son est  $c_0 = 10\sqrt{g\lambda}$ .

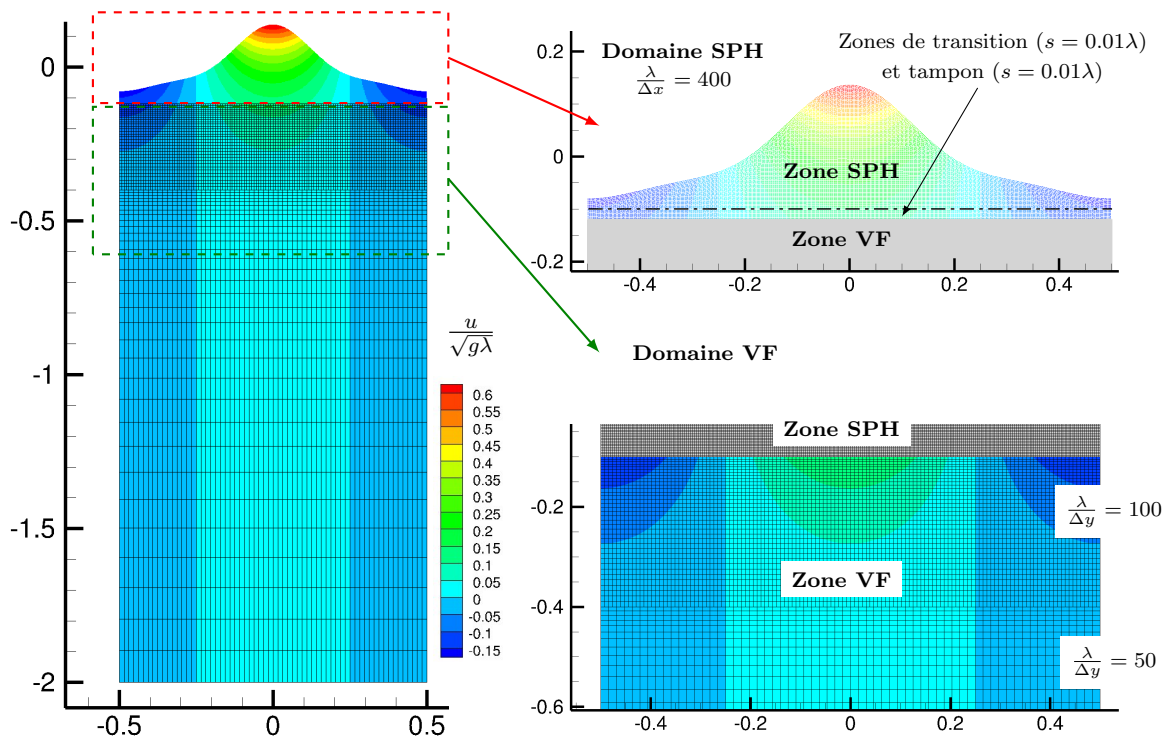


Figure 6.12: Configuration initiale du cas de propagation d'une vague (à gauche). Les domaines relatifs à chaque solveur sont présentés à droite

La configuration initiale du cas test est décrite sur la figure 6.12. La zone SPH, localisée à la surface libre, représente une très petite portion du domaine complet simulé par les deux solveurs. La résolution spatiale adoptée est  $\frac{\lambda}{\Delta x} = 400$ . Le rayon des particules est  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau). L'épaisseur de la zone de transition est

égale à  $s = 0.01\lambda$  (5 particules, soit  $1.25R$ ). La zone tampon fait la même épaisseur que la zone de transition. La zone VF se compose de cellules rectangulaires (ratio  $\frac{\Delta x}{\Delta y} = 2$ ) dont la résolution varie en fonction de la profondeur (la plus fine étant  $\frac{\lambda}{\Delta y} = 100$ ). Le ratio entre les pas de temps SPH et VF est  $\frac{\Delta t_{VF}}{\Delta t_{SPH}} = 32$  (une synchronisation tous les 32 pas de temps SPH).

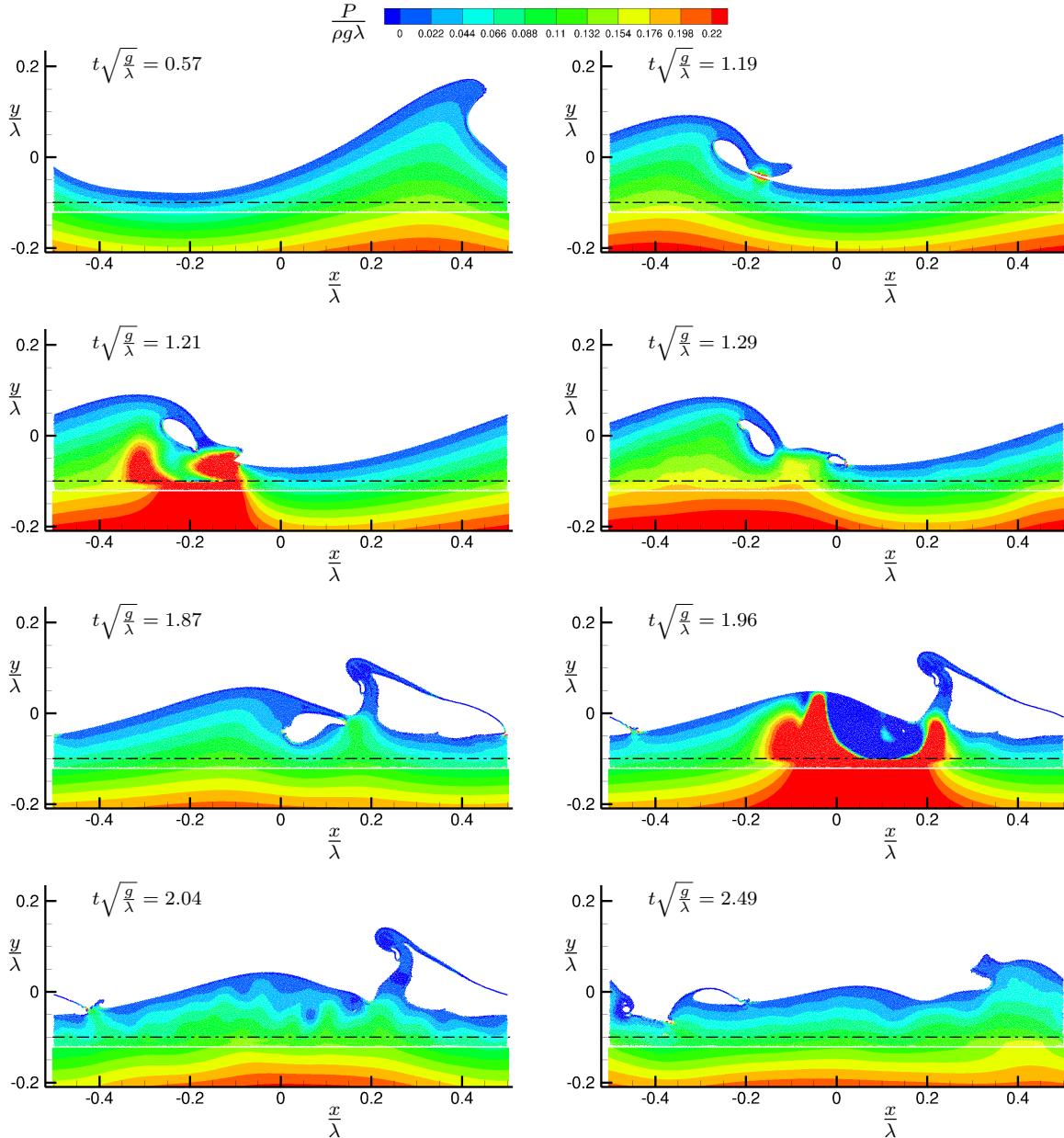


Figure 6.13: Evolution du champ de pression à différents instants pour le cas de propagation d'une vague

La figure 6.13 représente l'évolution de la propagation de la vague. De par la forte raideur de la vague, le déferlement se produit rapidement ( $t\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 1.19$ ). Lorsque la vague se

brise ( $t\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 1.21$ ), des ondes acoustiques sont libérées et se propagent vers le fond (donc dans la direction du solveur VF). Le champ de pression présente alors une discontinuité à l'interface du couplage en raison de la désynchronisation entre les deux solveurs. La synchronisation entre les deux solveurs se faisant tous les 32 pas de temps SPH, l'intensité des ondes acoustiques se propageant dans le domaine VF est fortement diminuée. Ainsi, à l'instant  $t\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 1.29$ , on observe que les ondes acoustiques ont été complètement absorbées par le solveur VF. Marrone *et al.* [71] ont montré que, pour ce paradigme de couplage, le champ de pression à  $t\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 1.29$  issu de la synchronisation des solveurs à chaque pas de temps (qui permet de transmettre continuellement les ondes acoustiques au solveur VF) est très proche de celui obtenu lors d'une synchronisation tous les 32 pas de temps. Un second impact se produit à l'instant  $t\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 1.96$  lorsqu'une cavité est emprisonnée puis se referme, engendrant à nouveau de fortes ondes acoustiques. Quelques instants plus tard ( $t\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 2.04$ ) on observe une excellente continuité du champ de pression dans tout le domaine ainsi qu'une absence de réflexions acoustiques.

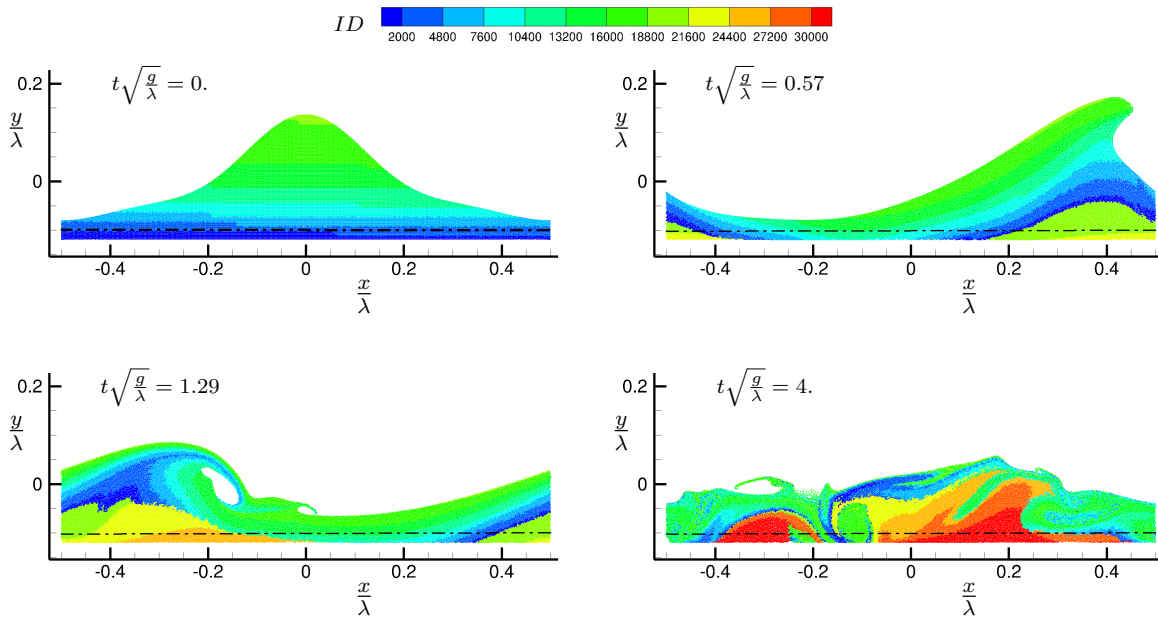


Figure 6.14: Evolution du numéro (ID) attribué à chaque particule à différents instants pour le cas de propagation d'une vague

La figure 6.14 illustre l'évolution des numéros des particules créées/supprimées par la condition d'entrée horizontale située en  $\frac{x}{\lambda} = -0.12$ . A l'instant initial, le domaine SPH est composé d'environ 20 000 particules. A l'instant  $t\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 0.57$ , un flux de masse positif entraîne par exemple la création de particules entre  $\frac{x}{\lambda} = 0.15$  et  $\frac{x}{\lambda} = 0.5$ . A l'instant final  $t\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 4$ , environ 10 000 particules ont été créées et presque tout autant ont été supprimées comme en atteste l'évolution de la variation de la masse (Fig. 6.15).

Le tableau 6.1 représente une comparaison entre le temps de calcul du couplage et une estimation de celui des solveurs SPH et VF lorsqu'ils sont utilisés seuls pour simuler ce

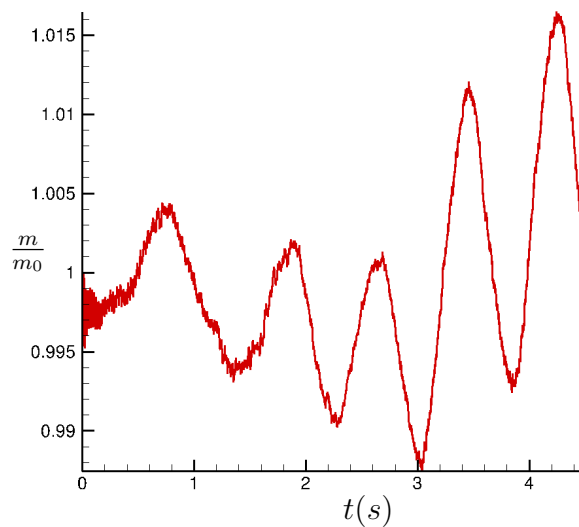


Figure 6.15: Evolution temporelle de la variation de la masse du domaine SPH pour le cas de propagation d'une vague

Simulation	Nb particules	Nb cellules	Nb procs	temps CPU (s)
Couplage	19 420	31 000	1 SPH + 1 coupleur + 2 VF	20 540
SPH seul	324 000	-	4	65 000 (estimé)
VF seul	-	310 000	4	45 000 (estimé)

Table 6.1: Comparaison des temps de calcul entre le couplage et les deux solveurs seuls

cas-test de propagation d'une vague. On remarque que la résolution par la méthode des VF d'un tel cas-test nécessite 10 fois plus de cellules que dans le cadre du couplage. Cela s'explique par le fait qu'il est nécessaire d'avoir une grille très fine au voisinage de la surface libre pour pouvoir capturer correctement la physique du problème. L'utilisation du solveur SPH seul nécessite 16 fois plus de particules (dans le cadre d'une résolution uniforme) que le couplage. A partir de ces données sur le temps CPU et des données précédentes sur la précision, on peut conclure que le couplage est une alternative attractive pour la résolution d'un tel cas test par rapport à l'utilisation d'un unique solveur.

## Tourbillons de Taylor-Green à $Re = 200$

On s'intéresse à présent à la simulation des tourbillons de Taylor-Green [97] dans un domaine carré périodique de dimension  $[0, L] \times [0, L]$ . La solution incompressible de ce cas-test est donnée par :

$$u = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) e^{-\frac{8\pi^2 t}{Re}} \quad (6.15)$$

$$v = -\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) e^{-\frac{8\pi^2 t}{Re}} \quad (6.16)$$

$$\frac{P}{\rho_0 U^2} = \frac{1}{4} \left( \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{4\pi y}{L}\right) \right) e^{-\frac{16\pi^2 t}{Re}} \quad (6.17)$$

où  $U$  désigne la vitesse maximale de l'écoulement à l'initialisation. La vitesse nominale du son est  $c_0 = 10U$  et le nombre de Reynolds de l'écoulement est  $Re = \frac{UL}{\nu} = 200$ .

Il s'agit d'un cas test délicat à traiter pour le couplage SPH/VF car la présence de tourbillons entraîne la création et la suppression de particules à l'interface entre les deux solveurs (Fig. 6.16). Ce cas test permet ainsi de mettre à l'épreuve les conditions d'entrées/sorties décrites dans la section 6.4.3 afin d'estimer notamment si la fluctuation de la masse au cours du temps reste faible, et d'évaluer la précision sur ce cas difficile.

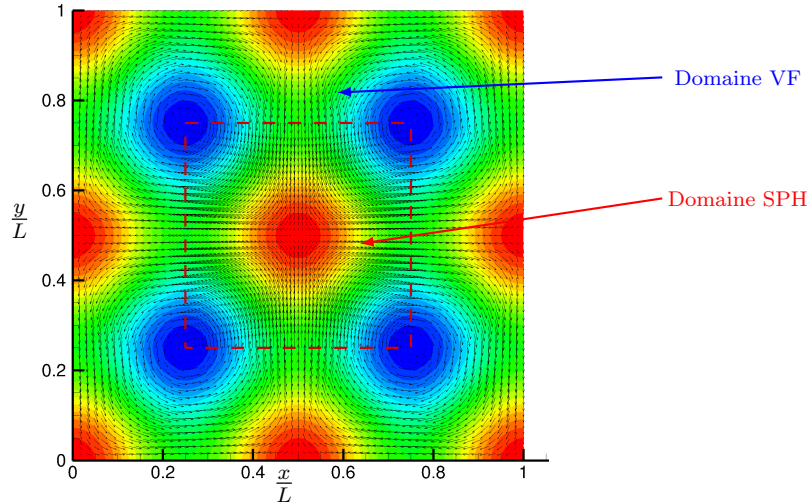


Figure 6.16: Champ de vecteurs vitesse pour le cas-test des tourbillons de Taylor-Green (le domaine SPH est délimité par les traits rouges pointillés)

La configuration initiale du cas-test est présentée sur la figure 6.17. La zone SPH, localisée au centre de l'écoulement, est décrite avec une résolution spatiale  $\frac{L}{\Delta x} = 200$ . Le rayon des particules est  $\frac{R}{\Delta x} = 4$  (environ 70 particules dans le support du noyau). L'épaisseur de la zone de transition est égale à  $s = 0.025L$  (5 particules, soit  $1.25R$ ). La zone tampon fait la même épaisseur que la zone de transition. La zone VF se compose de cellules carrées de résolution spatiale  $\frac{L}{\Delta x} = 64$ . Le ratio entre les pas de temps SPH et VF est  $\frac{\Delta t_{VF}}{\Delta t_{SPH}} = 32$  (une synchronisation tous les 32 pas de temps SPH).

La figure 6.18 présente une comparaison des champs de vorticité entre les solutions couplée



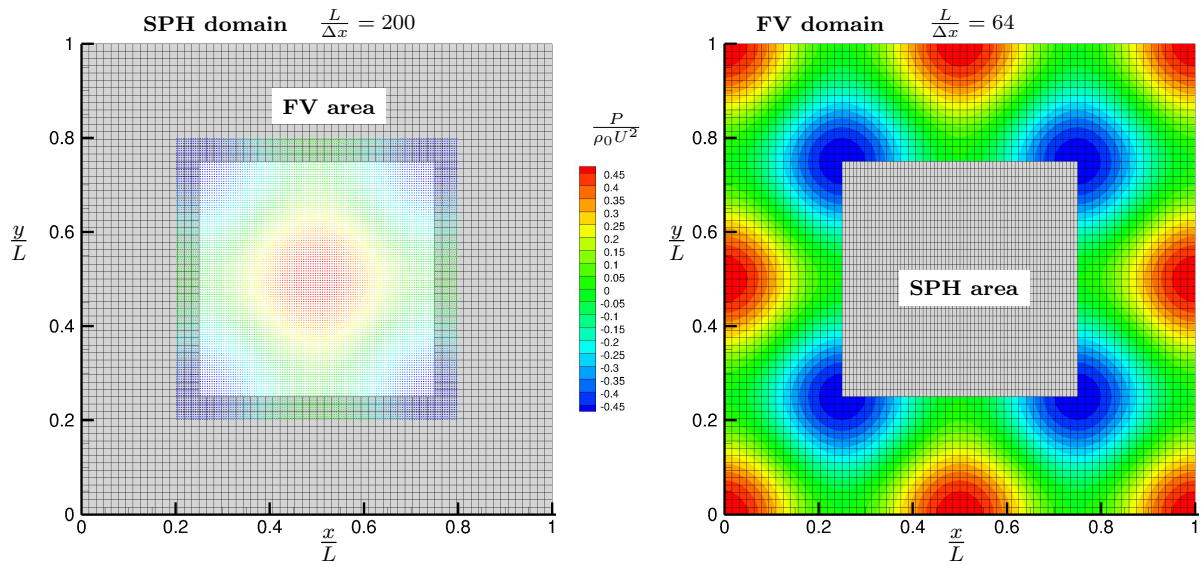


Figure 6.17: Configuration initiale des deux solveurs pour le cas des tourbillons de Taylor-Green. Les particules et cellules sont colorées suivant le champ de pression initial

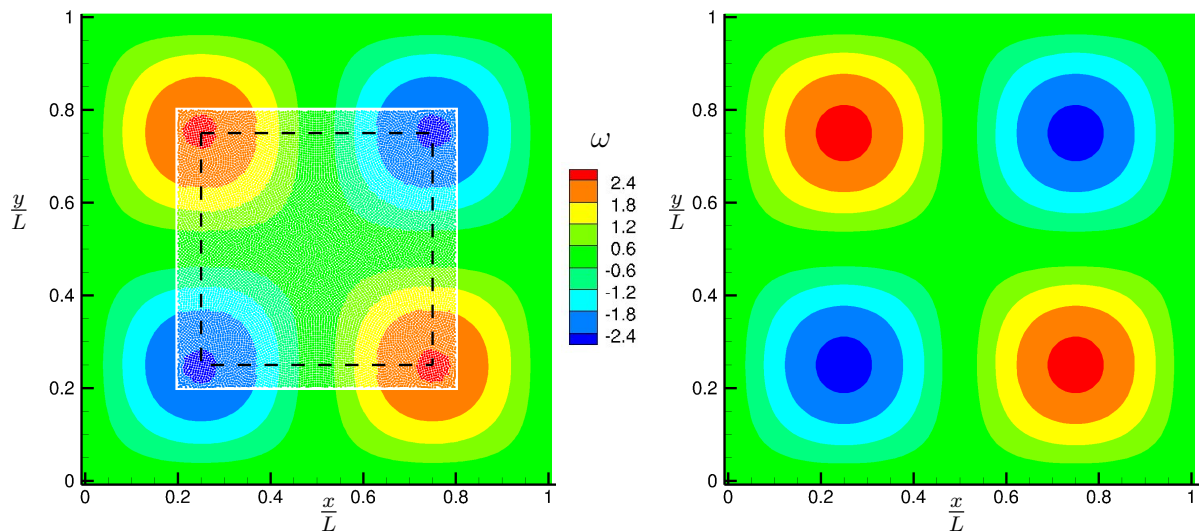


Figure 6.18: Comparaison des champs de vorticité à l'instant  $\frac{tU}{L} = 4$  entre les solutions couplée (à gauche) et analytique (à droite)

et analytique. La vorticité analytique  $\omega$  est obtenue en dérivant les équations (6.15) et (6.16) :

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) e^{-\frac{8\pi^2 t}{Re}} \quad (6.18)$$

On observe que le couplage préserve le champ de vorticité, bien que la forme des tourbillons soit légèrement altérée à l'interface de la zone de couplage. On note que la distribution particulière, relativement uniforme, atteste de l'efficacité de la génération/suppression de

particules au bord de la zone tampon.

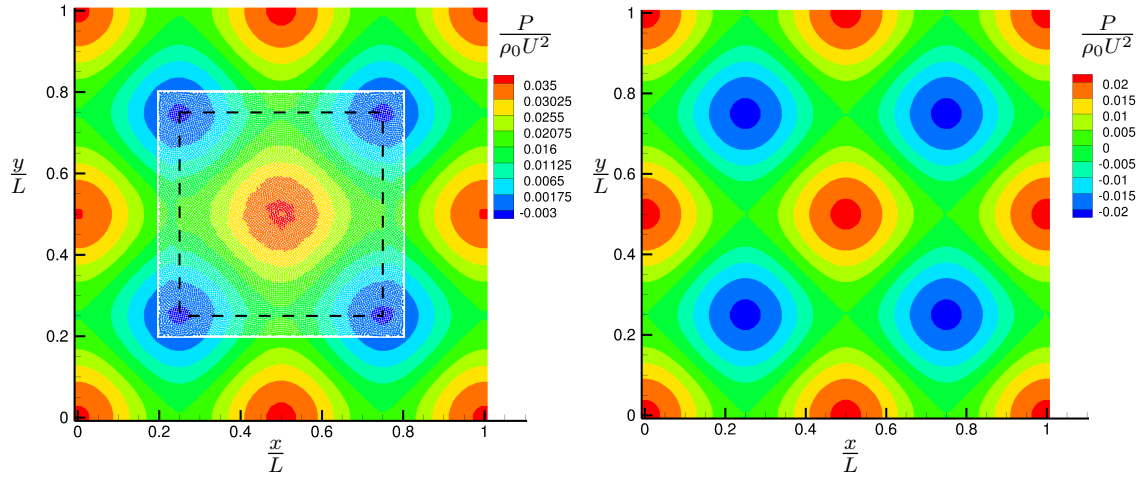


Figure 6.19: Comparaison des champs de pression à l'instant  $\frac{tU}{L} = 4$  entre les solutions couplée (à gauche) et analytique (à droite)

Le champ de pression, présenté sur la figure 6.19, est continu aux interfaces entre les deux solveurs. On note également que l'amplitude du tourbillon central du domaine SPH est similaire à celle des tourbillons du domaine VF situés près des conditions périodiques. Cependant, l'échelle de pression des tourbillons est décalée par rapport à la solution analytique (environ  $\frac{P}{\rho_0 U^2} = 17$ ). Cela peut s'expliquer (en partie) par le fait que nous utilisons ici un schéma Riemann-SPH sans flux de masse (Leduc *et al.*) avec une loi de vitesse. Oger *et al.* [87] ont montré que ce type d'approche est inconsistant et peut altérer le champ de pression. La seule approche consistante lorsque les particules sont déplacées à une vitesse non lagrangienne est d'utiliser un schéma Riemann-SPH écrit dans un formalisme ALE. Dans le cadre du couplage SPH/VF il paraît difficile d'utiliser un schéma Riemann-SPH ALE car il faudrait pouvoir tenir compte des échanges de masse entre particules localisées dans les zones tampon et de transition. Ceci paraît délicat car les champs des particules de ces zones sont (en partie ou totalement) gouvernés par la solution VF. Néanmoins une telle amélioration pourra faire l'objet de futures recherches.

La figure 6.20 représente une comparaison des profils horizontal et vertical de vitesse entre les solutions couplée et analytique pour différentes résolutions spatiales. On observe que le couplage converge vers la solution analytique.

La figure 6.21 (à gauche) présente les profils de vorticité obtenus avec le couplage pour trois résolutions spatiales. A l'oeil nu, l'ordre de convergence du couplage pour le cas-test des tourbillons de Taylor-Green semble être d'environ 1.5. La figure 6.21 (  droite) illustre l'évolution de la masse dans le domaine SPH au cours du temps. On remarque que l'amplitude des fluctuations diminue avec le raffinement. Pour la résolution la plus fine ( $N_{SPH} = 400$ ,  $N_{FV} = 128$ ), l'évolution de la masse du domaine SPH est inférieure à 1%, ce qui est extrêmement satisfaisant.

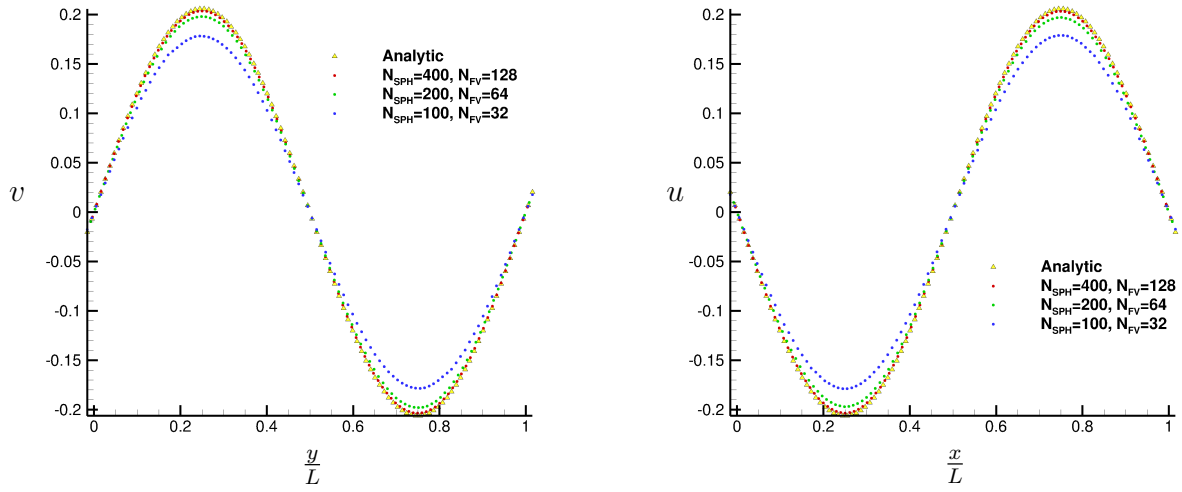


Figure 6.20: Comparaison des profils de vitesse en  $\frac{x}{L} = 0.5$  (à gauche) et  $\frac{y}{L} = 0.5$  (à droite) à l'instant  $\frac{tU}{L} = 4$

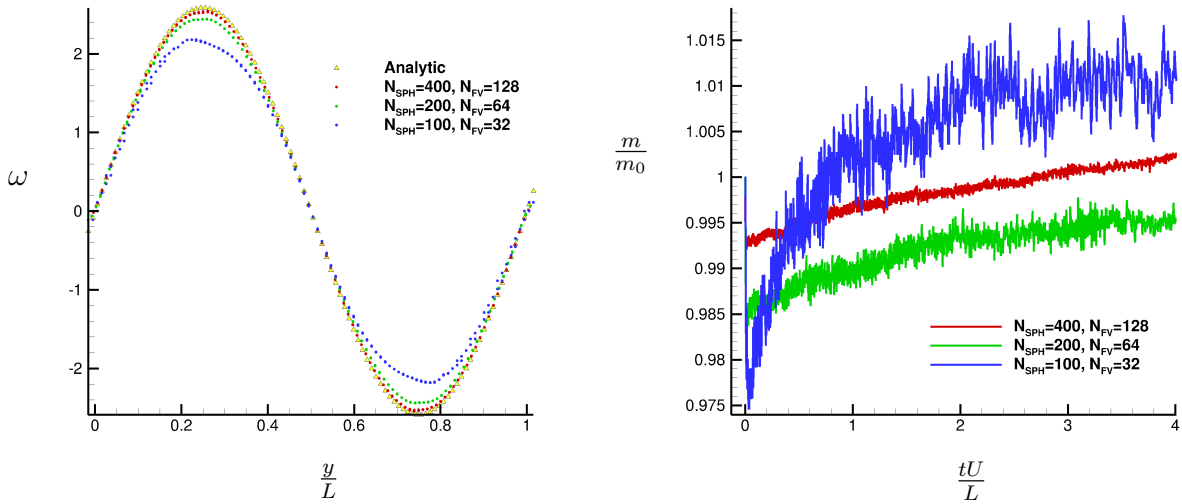


Figure 6.21: Comparaison du profil de vorticité en  $\frac{x}{L} = 0.25$  à l'instant  $\frac{tU}{L} = 4$  (à gauche) et évolution temporelle de la masse du domaine SPH pour le cas des tourbillons de Taylor-Green

# Conclusion

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont porté sur le couplage et l'amélioration de la méthode SPH afin de traiter des écoulements à multi-échelles temporelles et spatiales. Ce sujet a donné lieu à l'émergence de trois axes de recherches, abordés dans un premier temps séquentiellement puis en parallèle étant donné leurs fortes interconnexions.

Le premier axe a été consacré à l'amélioration de la méthode de flux normal (NFM). La nécessité de simuler des écoulements visqueux en présence de géométries complexes nous a amené à définir une condition d'adhérence adaptée au formalisme NFM. Des recherches ont été menées afin de développer un algorithme de détection de surface-libre ainsi qu'une méthode de désordre particulière adaptée à la méthode NFM. De plus, la robustesse de la méthode NFM en 3D a été améliorée grâce à une augmentation de la précision dans le calcul des flux ainsi que par l'utilisation d'une correction Shepard analytique. Tous ces développements permettent aujourd'hui à la méthode de fournir des résultats probants tout en garantissant l'imperméabilité des parois en condition de glissement ou d'adhérence.

Le second axe de recherche de ce manuscrit portait sur le développement d'une méthode de raffinement particulière adaptatif. A l'issue d'un état de l'art des méthodes de raffinement, de fortes limitations (industrielles) ont été dégagées vis-à-vis de l'applicabilité de telles méthodes. En effet, la littérature s'est avérée avare en résultats de temps de calcul CPU, et à raison, car de telles approches augmentent le nombre de voisins des particules situées dans les zones raffinées rendant ainsi leur utilisation peu efficace. De plus, les particules mères et filles interagissent entre elles avec des rayons différents (variation supérieure à 3%) pouvant entraîner des instabilités. Ces limitations nous ont amené à repenser la méthodologie du raffinement particulière en nous inspirant de l'approche de raffinement utilisée pour les méthodes maillées (AMR). De là, une nouvelle approche nommée APR (Adaptive Particle Refinement) a été proposée. Par rapport à l'état de l'art, l'APR s'est montré plus robuste, plus précis et plus rapide. Des validations ont été effectuées jusqu'à 10 niveaux de raffinement en 2D et 3 niveaux en 3D. Dans le cadre du développement d'un couplage fluide-structure adapté au phénomène d'aquaplaning, la méthodologie APR est aujourd'hui utilisée par C. Hermange, doctorant CIFRE Michelin du laboratoire LHEEA. L'APR est aussi à présent intégré au sein de la version industrielle du logiciel SPH-Flow utilisée par NEXTFLOW-Software et des études l'utilisant sont actuellement en cours. Bien que les résultats obtenus soient encourageants, le gain de maturité de l'APR passera par le développement de critères de raffinement physiques dynamiques (basés sur l'estimation du gradient de pression par exemple) en complément du critère géométrique utilisé dans cette thèse. Les zones de raffinement utilisées au cours de la thèse étant

uniquement de forme parallélépipédique, il faudra par la suite étendre la procédure de raffinement à des géométries quelconques pour gagner en modularité.

Le dernier axe de recherche de ce manuscrit portait sur le couplage entre les méthodes SPH et Volumes Finis. On s'est attaché au développement d'un programme nommé coupleur dont la fonction est de gérer de manière transparente les entrées/sorties afin que le couplage soit le moins intrusif possible au sein du code source de chaque solveur. A l'issue de cette première étape, nous avons repris les travaux de Marrone *et al.* [71] et nous avons validé notre implémentation sur un cas de vague stationnaire (standing wave). Ensuite, nous avons apporté une innovation au couplage en adaptant les conditions d'entrée/sortie de Kassiotis *et al.* [13] afin de pouvoir générer/supprimer des particules à l'interface entre les deux solveurs. Cette approche n'étant pas conservative en masse, une attention particulière a été portée sur l'évolution temporelle de la masse lors des simulations que nous avons réalisé. Des validations ont été effectuées sur deux cas-tests (déferlement d'une vague, tourbillons de Taylor-Green) et des premiers éléments de réponse quant au gain CPU ont été qualitativement indiqués. Des validations 3D sont en cours. A l'avenir, le couplage entre SPH-flow et d'autres solveurs VF tels que STAR-CCM+ par exemple est envisagé. La parallélisation du coupleur devra également être réalisée car les opérations qu'il devra gérer seront trop lourdes lorsqu'un cas-test de complexité industrielle se présentera.

# Références bibliographiques

- [1] G. Colicchio A. Colagrossi and D. Le Touzé. Enforcing boundary conditions in sph applications involving bodies with right angles. *Proceedings of the 2nd SPHERIC Workshop*, 2007.
- [2] M. Antuono and A. Colagrossi. The damping of viscous gravity waves. *Wave Motion*, 50:197 – 209, 2013.
- [3] M. Antuono, A. Colagrossi, S. Marrone, and D. Molteni. Free-surface flows solved by means of SPH schemes with numerical diffusive terms. *Computer Physics Communications*, 181:532–549, 2010.
- [4] D.A. Barcarolo. Amélioration de la précision et de l’efficacité de la méthode SPH: étude théorique et numérique. *Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, France*, 2013.
- [5] D.A. Barcarolo, G. Oger, and D. Le Touzé. Adaptive particle refinement and derefinement applied to Smoothed Particle Hydrodynamics method. *Journal of Computational Physics*, 273:640–657, 2014.
- [6] M. Basa, N. Quinlan, and M. Lastiwka. Robustness and accuracy of SPH formulations for viscous flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 60:1127–1148, 2009.
- [7] Marsha J. Berger and Joseph Olinger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 53:484–512, 1984.
- [8] M.J Berger and P. Colella. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 82:64–84, 1989.
- [9] J. Bonet and T. Lok. Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamics formulations. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, 180:97–115, 1999.
- [10] S. Borge, M. Omang, and J. Trulsen. Regularized Smoothed Particle Hydrodynamics with improved multi-resolution handling. *Journal of Computational Physics*, 208:345–367, 2005.
- [11] B. Bouscasse, S. Marrone, A. Colagrossi, and A. Di Mascio. Multi-purpose interfaces for coupling sph with other solvers. *8th international SPHERIC workshop, Manchester*, 2013.

- [12] M. Braza. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *Journal Fluid Mechanics*, 165:79–130, 1986.
- [13] Kassiotis C., D. Violeau, and M. Ferrand. Semi-analytical conditions for open boundaries in smoothed particle hydrodynamics. *Proceedings of the 8th International SPHERIC Workshop*, 2013.
- [14] D. Calhoun. A cartesian grid method for solving the two-dimensional streamfunction-vorticity equations in irregular regions. *Journal of Computational Physics*, 176.2:231–275, 2002.
- [15] Fuzhen Chen, Hongfu Qiang, and Weiran Gao. Coupling of smoothed particle hydrodynamics and finite volume method for two-dimensional spouted beds. *Computers and Chemical Engineering*, 77:135 – 146, 2015.
- [16] D.-I. Choi, J. David Brown, B. Imbiriba, J. Centrella, and P. MacNeice. Interface conditions for wave propagation through mesh refinement boundaries. *Journal of Computational Physics*, 193:398–425, 2004.
- [17] A. Colagrossi, M. Antuono, A. Souto-Iglesias, and D. Le Touzé. Theoretical analysis and numerical verification of the consistency of viscous smoothed-particle-hydrodynamics formulations in simulating free-surface flows. *Physical Review E*, 84, 2011.
- [18] A. Colagrossi, M. Antuono, and D. Le Touzé. Theoretical considerations on the free-surface role in the smoothed-particle-hydrodynamics model. *Physical Review E*, 79, 2009.
- [19] A. Colagrossi, B. Bouscasse, M. Antuono, and S. Marrone. Particle packing algorithm for SPH schemes. *Computer Physics Communications*, 183 (8):1641–1653, 2012.
- [20] A. Colagrossi and M. Landrini. Numerical simulation of interfacial flows by Smoothed Particle Hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 191:448–475, 2003.
- [21] G. Colicchio. Violent disturbance and fragmentation of free surfaces. *PhD. thesis. University of Southampton*, 2004.
- [22] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- [23] W. Dehnen and H. Aly. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425:1068–1082, 2012.
- [24] J.B. Deuff. Extrapolation au réel des mesures de pressions obtenues sur des cuves modèle réduit. *Ph.D thesis, Ecole Centrale de Nantes, France*, 2007.
- [25] A. Di Mascio, R. Broglia, and R. Muscari. On the application of the single-phase level set method to naval hydrodynamic flows. *Computers and Fluids*, 36:868–886, 2007.

- 
- [26] A. Di Mascio, R. Muscari, and G. Dubbioso. On the wake dynamics of a propeller operating in drift. *Journal of Fluid Mechanics*, 754:263–307, 2014.
- [27] Andrea Di Mascio, Riccardo Broglia, and Roberto Muscari. Prediction of hydrodynamic coefficients of ship hulls by high-order godunov-type methods. *Journal of Marine Science and Technology*, 14:19–29, 2009.
- [28] Gary A. Dilts. Moving-least-squares-particle hydrodynamics—i. consistency and stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:1115–1155, 1999.
- [29] Z. N. Dobrovol’skaya. On some problems of similarity flow of fluid with a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 36:805–829, 1969.
- [30] M. Doring. Développement d’une méthode SPH pour les applications à surface libre en hydrodynamique. *Ph.D thesis, Ecole Centrale de Nantes, France*, 2005.
- [31] Guillaume Ducrozet, Félicien Bonnefoy, David Le Touzé, and Pierre Ferrant. A modified high-order spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 34:19 – 34, 2012.
- [32] P. Espanol and M. Revenga. Smoothed dissipative particle dynamics. *Physical Review E*, 67, 2003.
- [33] J. Feldman. Dynamic refinement and boundary contact forces in Smoothed Particle Hydrodynamics with applications in fluid flow problems. *Ph.D. thesis, University of Wales, School of Engineering, Swansea*, 2006.
- [34] M. Ferrand, D. R. Laurence, B. D. Rogers, D. Violeau, and C. Kassiotis. Unified semi-analytical wall boundary conditions for inviscid, laminar or turbulent flows in the meshless sph method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71:446–472, 2013.
- [35] Florian Fleissner and Peter Eberhard. Parallel load-balanced simulation for short-range interaction particle methods with hierarchical particle grouping based on orthogonal recursive bisection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74:531–553, 2008.
- [36] G. Fourey. Développement d’une méthode de couplage fluide-structure sph-éléments finis en vue de son application à l’hydrodynamique navale. *Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, France*, 2012.
- [37] U Ghia, K.N Ghia, and C.T Shin. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387 – 411, 1982.
- [38] J.M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq. Une méthode volumes finis à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation. *Comptes rendus de l’Académie des sciences*, 322:981–988, 1996.



- [39] R.A. Gingold and J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389, 1977.
- [40] Günther Greiner and Kai Hormann. Efficient clipping of arbitrary polygons. *ACM Trans. Graph.*, 17:71–83, 1998.
- [41] N. Grenier. Modélisation numérique par la méthode SPH de la séparation eau-huile dans les séparateurs gravitaires. *Ph.D thesis, Ecole Centrale de Nantes, France*, 2009.
- [42] P.M. Guilcher. Contribution au développement d’une méthode SPH pour la simulation numérique des interactions houle-structure. *Thèse de Doctorat, Nantes*, 2008.
- [43] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 135:260–278, 1997.
- [44] S. Majid Hosseini and James J. Feng. Pressure boundary conditions for computing incompressible flows with sph. *J. Comput. Phys.*, 230:7473–7487, 2011.
- [45] A. Iafrati. Numerical study of the effects of the breaking intensity on wave breaking flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 622:371–411, 2009.
- [46] S.R. Idelsohn, E. Oñate, and F. Del Pin. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:964–989, 2004.
- [47] M. J. Ivings, D. M. Causon, and E. F. Toro. On riemann solvers for compressible liquids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 28:395–418, 1998.
- [48] F. C. Dougherty J. L. Steger and J. A. Benek. A chimera grid scheme. *Advances in grid generation*, 5:59 – 69, 1983.
- [49] Antony Jameson. Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings. *10th Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 1 – 14, 1991.
- [50] K.M.T. Kleefsman, G. Fekken, A.E.P. Veldman, B. Iwanowski, and B. Buchner. A volume-of-fluid based simulation method for wave impact problems. *Journal of Computational Physics*, 206:363–393, 2005.
- [51] S. Kulasegaram, J. Bonet, W. R. Lewis, and M. Profit. A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional SPH applications. *Computational Mechanics*, 33:316–325, 2004.
- [52] M. Lastiwka, M. Basa, and N.J Quinlan. Permeable and non-reflecting boundary conditions in SPH. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 61:709–724, 2009.
- [53] P.D. Lax and R.D. Richtmyer. Survey of the stability of linear finite difference equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 9:267–293, 1956.

- 
- [54] J. Leduc, F. Leboeuf, and M. Lance. Improvement of multiphase model using preconditioned riemann solvers. *5th international SPHERIC workshop, Manchester*, 2010.
- [55] M. De Lefte. Modélisation d'écoulements visqueux par SPH en vue d'application à l'hydrodynamique navale. *Ph.D thesis, Ecole Centrale de Nantes, France*, 2011.
- [56] M. De Lefte, D. Le Touzé, and B. Alessandrini. Application of a normal flux method to model boundary conditions in SPH. *Proceeding of the 4th SPHERIC workshop*, 2009.
- [57] J. Lennard-Jones. On the Determination of Molecular Fields. II. From the Equation of State of a Gas. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 106:463–477, 1924.
- [58] A. Leroy. Un nouveau modèle sph incompressible: vers l'application à des cas industriels. *PhD. thesis, Paris Est*, 2014.
- [59] A. Leroy, D. Violeau, M. Ferrand, and C. Kassiotis. Unified semi-analytical wall boundary conditions applied to 2-d incompressible SPH. *Journal of Computational Physics*, 261:106 – 129, 2014.
- [60] Larry D. Libersky, Albert G. Petschek, Theodore C. Carney, Jim R. Hipp, and Firooz A. Allahdadi. High strain lagrangian hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 109:67 – 75, 1993.
- [61] S.J. Lind, R. Xu, P.K. Stansby, and B.D. Rogers. Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves. *Journal of Computational Physics*, 231:1499 – 1523, 2012.
- [62] R. C. Lock and B. R. Williams. Viscous-inviscid interactions in external aerodynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, 24:51–171, 1987.
- [63] Y. Reyes. López, D. Roose, and C. Recarey Morfa. Dynamic particle refinement in SPH: application to free surface flow and non-cohesive soil simulations. *Comput Mech*, 51:731–741, 2013.
- [64] X.Z. Lu, G. Pinon, J. Brossard, J.M Cherfils, and E. Rivolaen. SPH numerical computations of wave impact onto a vertical wall. *Proceedings of the 9th International SPHERIC workshop*, pages 305–312, 2014.
- [65] L.B. Lucy. A numerical approach to testing the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, 82, 1977.
- [66] J.C. Marongiu, F. Leboeuf, and E. Parkinson. Riemann solvers and efficient boundary treatments: an hybrid SPH-finite volume numerical method. *Proceeding of the 3rd SPHERIC workshop*, 2008.

- [67] S. Marrone, M. Antuono, A. Colagrossi, G. Colicchio, D. Le Touzé, and G. Graziani. delta-sph model for simulating violent impact flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:1526 – 1542, 2011.
- [68] S. Marrone, A. Colagrossi, M. Antuono, G. Colicchio, and G. Graziani. An accurate SPH modeling of viscous flows around bodies at low and moderate Reynolds numbers. *Journal of Computational Physics*, 245:456–475, 2013.
- [69] S. Marrone, A. Colagrossi, J.S. Park, and E.F. Campana. A numerical investigation of a corrugated wedge impacting water. *31th Symposium on Naval Hydrodynamics, Monterey, California*, 2016.
- [70] S. Marrone, A. Colagrossi, D. Le Touzé, and G. Graziani. Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers. *Journal of Computational Physics*, 229:3652–3663, 2010.
- [71] S. Marrone, A. Di Mascio, and D. Le Touzé. Coupling of smoothed particle hydrodynamics with finite volume method for free-surface flows. *J. Comput. Phys.*, 310:161–180, 2016.
- [72] Arno Mayrhofer, Martin Ferrand, Christophe Kassiotis, Damien Violeau, and François-Xavier Morel. Unified semi-analytical wall boundary conditions in sph: analytical extension to 3-d. *Numerical Algorithms*, 68:15–34, 2015.
- [73] J. J. Monaghan. On the problem of penetration in particle methods. *J. Comput. Phys.*, 82:1–15, 1989.
- [74] J. J. Monaghan. Simulating free surface flows with sph. *J. Comput. Phys.*, 110:399–406, 1994.
- [75] J. J. Monaghan and R. A. Gingold. Shock Simulation by the Particle Method SPH. *Journal of Computational Physics*, 52:374–389, 1983.
- [76] J.J. Monaghan. Smoothed particles hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 30:543–574, 1992.
- [77] J.J. Monaghan. Sph without a tensile instability. *Journal of Computational Physics*, 159:290 – 311, 2000.
- [78] J.J. Monaghan. Smoothed particles hydrodynamics. *Report on Progress in Physics*, 68:1703–1759, 2005.
- [79] J.P. Morris, P.J. Fox, and Y. Zhu. Modeling low reynolds number incompressible flows using SPH. *Journal of Computational Physics*, 136:214–226, 1997.
- [80] A. Murrone and H. Guillard. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. *Journal of Computational Physics*, 202:664–698, 2005.

- 
- [81] M. Neuhauser. Development of a coupled sph-ale/finite volume method for the simulation of transient flows in hydraulic machines. *PhD. thesis, Ecole Centrale Lyon*, 2014.
- [82] J. Von Neumann and R.D. Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21:232–237, 1950.
- [83] Ng and Y.T. An efficient fluid–solid coupling algorithm for single-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 228:8807–8829, 2009.
- [84] R. P. Noelson and C.B. Papaloizou. Variable smoothing lengths and energy conservation in Smoothed Particle Hydrodynamics. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 270, 1994.
- [85] G. Oger. Aspects théoriques de la méthode SPH et applications à l’hydrodynamique à surface libre. *Ph.D thesis, Ecole Centrale de Nantes, France*, 2006.
- [86] G. Oger, M. Doring, P. Ferrant, and B. Alessandrini. Two-dimensional SPH simulations of wedge water-entries. *Journal of Computational Physics*, 213:803–822, 2006.
- [87] G. Oger, S. Marrone, D. Le Touzé, and M. De Leffe. SPH accuracy improvement through the combination of a quasi-lagrangian shifting transport velocity and consistent ALE formalisms. *Journal of Computational Physics*, 313:76–98, 2016.
- [88] G. Oger, D. Le Touzé, D. Guibert, M. de Leffe, J. Biddiscombe, J. Soumagne, and J.-G. Piccinalli. On distributed memory MPI-based parallelization of SPH codes in massive HPC context. *Computer Physics Communications*, 200:1:14, 2016.
- [89] Nathan J. Quinlan, Libor Lobovský, and Ruairi M. Nestor. Development of the meshless finite volume particle method with exact and efficient calculation of interparticle area. *Computer Physics Communications*, 185:1554 – 1563, 2014.
- [90] P.W. Randles and L.D. Libersky. Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 139:375–408, 1996.
- [91] Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation. *SIAM J. Numerical. Anal.*, 21:217–235, 1984.
- [92] D. Shepard. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. *Proceedings of the 1968 ACM National Conference*, pages 517–524, 1968.
- [93] I. Sutherland and G.W. Hodgman. Reentrant Polygon Clipping. *Communications of the ACM*, 17:32 – 42, 1974.
- [94] P. K. Sweby. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21:995–1011, 1984.
- [95] J.W. Swegle, D.L. Hicks, and S.W. Attaway. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of Computational Physics*, 116:123 – 134, 1995.

- [96] P. Tait. Report on some of the physical properties of fresh water and sea water. *Physical Chemistry*, 2, 1888.
- [97] G. Taylor and A.E. Green. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London Series*, 158:499–521, 1937.
- [98] R. Vacondio, B. D. Rogers, P. K. Stansby, P. Mignosa, and J. Feldman. Development of SPH variable resolution using dynamic particle coalescing and splitting. *Proceedings of the 7th International SPHERIC workshop*, page 347–354, 2012.
- [99] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme V. a second order sequel to Godunov’s methods. *Journal of Computational Physics*, 39:101–136, 1979.
- [100] Bala R. Vatti. A generic solution to polygon clipping. *Commun. ACM*, 35:56–63, 1992.
- [101] J.P. Vila. On particle weighted methods and SPH. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9:161–210, 1999.
- [102] D. Violeau, A. Leroy, and A. Mayrhofer. Exact computation of SPH wall renormalising integrals in 3-D. *Proceeding of the 9th SPHERIC workshop*, 2014.
- [103] Damien Violeau. Dissipative forces for lagrangian models in computational fluid dynamics and application to smoothed-particle hydrodynamics. *Physical Review E*, 80:036705, 2009.
- [104] S. J. Watkins, A. S. Bhattal, N. Francis, J. A. Turner, and A. P. Whitworth. A new prescription for viscosity in smoothed particle hydrodynamics. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 119:177–187, 1996.
- [105] Holger Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, 4:389–396, 1995.
- [106] G.X. Wu. Fluid impact on a solid boundary. *Journal of Fluids and Structures*, 23:755–765, 2007.
- [107] M. Wu, C.Y Wen, R.H Yen, M.C Weng, and A.B Wang. Experimental and numerical study of the separation angle for flow around a circular cylinder at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 515:233–260, 9 2004.
- [108] Rui Xu, Peter Stansby, and Dominique Laurence. Accuracy and stability in incompressible {SPH} (isph) based on the projection method and a new approach. *Journal of Computational Physics*, 228:6703 – 6725, 2009.
- [109] M. Yildiz, R.A. Rook, and A. Suleman. Sph with the multiple boundary tangent method. 2008.

- 
- [110] J. Zhao. Development of a fast SPH model for non linear shallow water flows: application to coastal flooding and dam breaking. *Ph.D thesis, Ecole Centrale de Nantes, France*, 2012.
- [111] R. Zhao and O. Faltinsen. Water entry of two-dimensional bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 246:593–612, 1993.
- [112] D. Zuzio. Direct numerical simulation of two phase flows with adaptive mesh. *PhD. thesis, ONERA, Toulouse*, 2010.

# Thèse de Doctorat

Laurent CHIRON

Couplage et améliorations de la méthode SPH pour traiter des écoulements à multi-échelles temporelles et spatiales

Coupling and improvements of the SPH method to treat flows involving temporal and spatial multi-scales

## Résumé

La thèse s'articule en trois axes. Une première partie a été consacrée à l'amélioration de la méthode de flux normal (NFM) dont le développement a été initié dans une précédente thèse. Cet axe de recherche, qui ne s'inscrivait pas dans le sujet initial de la thèse, a été initié afin de répondre à des problématiques industrielles de NEXTFLOW-SOFTWARE, financeur de la thèse. Les développements réalisés ont permis d'adapter au formalisme NFM différents aspects (modélisation de la viscosité, détection de surface libre, désordre particulaire) ainsi que d'améliorer la précision des opérateurs.

Le second axe de thèse a porté sur le développement d'une méthode de raffinement particulaire adaptative, et plus particulièrement à son efficacité dans un contexte d'applicabilité industrielle. Un intérêt particulier a été porté à la robustesse, la précision ainsi que le temps de calcul des méthodes de raffinement de l'état de l'art. De là, de fortes limitations ont été dégagées et ont amené à développer une approche de raffinement inspirée de l'AMR. Les développements ont été validés sur de nombreux cas tests et sont aujourd'hui intégrés au sein des outils utilisés par NEXTFLOW-SOFTWARE.

Le dernier axe concernait le couplage entre les méthodes SPH et Volumes Finis. Le développement d'un algorithme de couplage a permis de gérer les entrées/sorties entre les deux solveurs de façon générique et transparente aussi bien pour les simulations 2D que 3D. Ensuite, une amélioration a été proposée permettant de créer/supprimer dynamiquement des particules aux frontières du solveur Volumes Finis. Des validations sont en cours pour l'extension 3D.

**Mots clés : SPH, Raffinement Particulaire Adaptatif (APR), Méthode de Flux Normal (NFM), Couplage SPH/Volumes Finis**

---

## Abstract

The thesis is articulated in three axes. A first part was devoted to the improvement of the normal flux method (NFM) whose development was initiated in a previous thesis. This line of research, which was not part of the original subject of the thesis, was initiated in order to answer to the industrial problems of NEXTFLOW SOFTWARE, financier of the thesis. The developments made it possible to adapt to the NFM formalism different aspects (modeling of viscosity, detection of free surface, particle disorder) as well as to improve the precision of the operators.

The second part of the thesis focused on the development of a method of adaptive particle refinement, and more particularly its effectiveness in a context of industrial applicability. Particular emphasis has been placed on the robustness, accuracy and calculation time of the state of the art of refinement methods. From there, strong limitations have emerged and have led to develop a refinement approach inspired by the AMR. The developments have been validated on many test cases and are now integrated within the tools used by NEXTFLOW-SOFTWARE.

The last part concerned the coupling between SPH and Finite Volumes methods. The development of a coupling algorithm made it possible to manage inputs / outputs between the two solvers in a generic and transparent way for both 2D and 3D simulations. Then, an improvement was proposed allowing to create / remove dynamically particles at the boundaries of the Finite Volume solver. Validations are in progress for the 3D extension.

**Key Words : SPH, Adaptive Particle Refinement (APR), Normal Flux Method (NFM), SPH/Finite Volume coupling**

---