



HAL
open science

Analyse de quelques problèmes de contact glissant

Yahyeh Souleiman Isman

► **To cite this version:**

Yahyeh Souleiman Isman. Analyse de quelques problèmes de contact glissant. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université de Perpignan, 2017. Français. NNT : 2017PERP0010 . tel-01531142

HAL Id: tel-01531142

<https://theses.hal.science/tel-01531142>

Submitted on 1 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivré par
UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA

Préparée au sein de l'école doctorale ED305
Et de l'unité de recherche LAMPS

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Présentée par **Yahyeh SOULEIMAN ISMAN**

Analyse de quelques problèmes de contact glissant

Soutenue le 23 Mai 2017 devant le jury composé de

M. Mikaël Barboteu, PR, Université de Perpignan
M. Marius Cocou, PR, Université d'Aix-Marseille
M. Serge Dumont, PR, Université de Nîmes
Mme. Oana-Silvia Serea, MCF-HDR, Université de Perpignan
M. Mircea Sofonea, PR, Université de Perpignan
M. Rachid Touzani, PR, Université Clermont Auvergne

Directeur
Rapporteur
Rapporteur
Examinatrice
Directeur
Examineur

Analyse de quelques problèmes de contact
glissant

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mes directeurs de thèse, M. Mircea Sofonea et M. Mikaël Barboteu, pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Mathématique et de Physique, le LAMPS. Je leur suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'ils m'ont accordé malgré leurs nombreuses responsabilités, leurs qualités humaines et scientifiques qu'ils m'ont apportées lors de l'encadrement de ma thèse. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je leur adresse ma gratitude pour tout cela.

Je tiens également à remercier les rapporteurs de cette thèse, M. Marius Cocou, Professeur à l'Université de Aix-Marseille, et M. Serge Dumont, Professeur à l'Université de Nîmes, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je tiens à leur exprimer mes remerciements pour l'honneur qu'ils m'ont fait en participant à ce jury.

J'associe à ces remerciements M. Rachid Touzani, mon ancien Professeur de Master à l'Université de Clermont-Ferrand, et Mme Oana-Silvia Serea, Maître de Conférences, HDR à l'Université de Perpignan, pour avoir accepté d'examiner mon travail.

À tous mes collègues-doctorants et docteurs du laboratoire, qui ont contribué par leur grande sympathie à une excellente ambiance de travail ; qu'ils soient remerciés.

Je ne souhaite pas oublier aux secrétaires du LAMPS, Joëlle Sulian et Sylvia Muñoz, pour leur aide et leur gentillesse au cours de ces années. Je souhaite également à remercier tous les membres du laboratoire.

J'adresse mes sincères remerciements à M. Djama Mohamed Hassan, Président de l'Université de Djibouti, pour m'avoir accordé des dispositions qui m'ont permis d'atteindre les objectifs dans le cadre de ma recherche. Je le remercie pour tout cela.

Ce travail n'aurait pas été réalisé sans le financement de l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF), pour la mobilité doctorale dans le cadre du projet « Horizons francophones ».

Je remercie également mes amis : Aboubaker, Ahmed, Moumin, Youssouf... pour leur soutien moral.

Enfin, ils ont été toujours à mes côtés, ils sont tout pour moi, c'est à eux que je dédie ce rapport de thèse. À ma mère « Mako », à ma fille « Raliya », à toute ma famille et surtout, à la mémoire de mon bébé de 7 mois de grossesse qui n'a pas la chance de voir le jour. Pour toi mon amour « Rahma », je te remercie de m'avoir accompagné avec beaucoup de patience et d'encouragements, pour tes sacrifices et pour avoir supporté mon absence durant les moments difficiles.

On résout les problèmes qu'on se pose
et non les problèmes qui se posent.
Henri Poincaré.

Table des matières

Introduction	1
Notations	7
I Préliminaires	11
1 Espaces fonctionnels	15
1.1 Rappels et compléments	15
1.2 Espaces de Sobolev	18
1.3 Espaces fonctionnels pour la mécanique	20
2 Eléments d'analyse non linéaire	25
2.1 Opérateurs monotones et pseudomonotones.	25
2.2 Fonctions convexes	27
2.3 Compléments divers	29
3 Modélisation	35
3.1 Cadre physique et modèles mathématiques	35
3.2 Lois de comportement.	38
3.3 Conditions de contact	42
3.4 Lois de frottement.	49
II Problèmes de contact glissant	55
4 Problème de contact élastique	59
4.1 Formulation du problème	60
4.2 Existence et unicité de la solution	63

4.3	Dépendance continue par rapport aux données	65
4.4	Méthode de pénalisation	69
4.5	Régularisation	77
4.6	Formulation duale	82
4.7	Estimation de l'erreur	89
5	Problème de contact élastique avec usure	95
5.1	Formulation du problème	95
5.2	Existence et unicité de la solution	100
5.3	Un résultat de convergence	105
6	Problème de contact viscoélastique	111
6.1	Formulation du problème	111
6.2	Existence et unicité de la solution	116
6.3	Un résultat de convergence	123
6.4	Estimation de l'erreur	130
7	Problème de contact viscoplastique	137
7.1	Formulation du problème	137
7.2	Existence et unicité de la solution	140
7.3	Problème avec variables internes d'état	147
	Conclusion et perspectives	155
	Bibliographie	156

Introduction

Les phénomènes de contact impliquant des corps déformables abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le contact du piston avec la chemise, de la roue sur la piste d'atterrissage d'un avion et d'une chaussure avec le sol ne représentent que trois exemples parmi bien d'autres. Compte tenu du fait que ces phénomènes jouent un rôle important dans les structures et les systèmes mécaniques, ils ont été intensivement étudiés depuis longue date et la littérature relevant des sciences de l'ingénieur qui leur est dédiée est assez riche. La littérature mathématique dédiée à l'étude des phénomènes de contact est plus récente. La raison réside dans le fait que, accompagnés de phénomènes physiques et de surface complexes, les processus de contact sont modélisés par des problèmes d'évolution aux limites non linéaires et non réguliers, très difficiles à étudier mathématiquement.

Située au carrefour de plusieurs disciplines scientifiques, la caractéristique principale de la modélisation mathématique en mécanique du contact est la fertilisation croisée entre les modèles mécaniques et les applications dans les sciences de l'ingénieur, d'une part, et l'analyse mathématique et numérique, d'autre part. Les recherches dans ce domaine sont motivées par des possibilités importantes d'applications dans différents secteurs industriels (notamment dans l'industrie métallurgique et l'industrie de l'automobile) mais aussi dans le génie civil et la médecine.

Les modèles mathématiques qui décrivent le contact avec ou sans frottement entre un corps déformable et un obstacle, ont été considérés dans de nombreuses travaux. Leur analyse variationnelle, y compris les résultats relatifs à l'existence et à l'unicité, a été effectuée dans les références [14, 26, 34, 52, 57, 65], par exemple. Par ailleurs, leur analyse numérique, y compris l'estimation d'erreur pour un schéma discret et des simulations numériques, peut être trouvée dans [34, 35, 36, 39, 43]. Une référence récente dans ce domaine est [47] qui fournit l'état de l'art de la théorie mathématique de la mécanique des contacts et présente certaines de ses applications dans l'ingénierie.

La littérature mathématique dédiée à l'étude des phénomènes de contact pour les solides déformables est assez récente. C'est en 1933 que Signorini pose le problème de contact unilatéral sans frottement entre un corps linéairement élastique et un obstacle assimilé à une fondation rigide, [59]. Ce problème a été étudié mathématiquement par Fichera [30] en 1964, en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Toutefois, on peut dire que la théorie mathématique de la mécanique du contact commence avec l'ouvrage [23] de Duvaut et Lions. En effet dans [23] y trouve des formulations variationnelles de plusieurs problèmes de contact, accompagnées de résultats d'existence et d'unicité de la solution. Depuis, la littérature concernant l'analyse mathématique et l'approximation numérique des problèmes de contact est devenue extensive. Il existe ainsi de multiples références incontournables que nous citons ici, comme, par exemple, [36, 39, 48, 51].

Dans la construction des modèles, diverses conditions de contact ont été envisagées. L'une des plus populaires est la condition dite de Signorini, qui décrit le contact avec une fondation parfaitement rigide. Une régularisation de la condition de Signorini est la condition de compliance normale, introduite dans [50] et utilisée dans un grand nombre de travaux comme, par exemple, [34, 40, 41, 44]. Elle décrit le contact avec une fondation déformable. Une autre condition de contact plus générale, appelée condition de compliance normale avec contrainte unilatérale, a été introduite dans [38]. Elle modélise le contact avec une base élastique-rigide et elle contient comme cas particuliers, à la fois la condition de contact de Signorini et la condition de compliance normale. Une autre version plus récente est la condition de contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et terme de mémoire, introduite dans [66] qui décrit le contact avec une couche molle de la fondation. Elle a été étudiée dans plusieurs références, comme dans [68, 70, 71]. Dans cette condition la réaction de la fondation dépend de l'histoire de la pénétration.

La condition de contact sans frottement est utilisée dans un certain nombre de références pour simplifier l'analyse de certains modèles. Par ailleurs, la loi de frottement la plus populaire utilisée dans la littérature est la loi de Coulomb, formulée pour la première fois par Amontons en 1699. Exprimée en termes d'inégalités, la principale caractéristique de cette loi réside dans le fait qu'elle décrit le phénomène "adhérence-glissement". Diverses versions dépendantes de la loi de Coulomb ont également été largement utilisées à la fois dans la littérature technique et mathématique, comme expliqué dans [57].

Dans la science des matériaux, l'usure des surfaces désigne le phénomène de dégradation des couches superficielles d'un solide sous l'action mécanique du milieu extérieur. L'usure dans les systèmes coulissants est souvent très lente mais persistante, continue et cumulative. Les aspérités sous de fortes contraintes de contact peuvent se déformer plastiquement ou se briser. Dans le premier cas, la morphologie de surface change et, par conséquent, la contrainte de contact normale et la traction de frottement sont affectées. Celles-ci peuvent être incorporés dans un coefficient de frottement qui dépend de l'histoire du processus de contact. Dans le second cas, lorsque les aspérités se rompent, les surfaces s'usent, les débris sont produits et la structure de surface change avec le temps. Ceci doit être pris en compte si le comportement à long terme du système doit être prédit de façon réaliste.

Pour modéliser l'usure des surfaces de contact on introduit une fonction d'usure, qui tient compte de la profondeur, dans la direction normale, du matériau retiré. Par conséquent, elle rend compte de la variation de la géométrie de surface et représente la quantité cumulée de matériau éliminé, par unité de surface. On suppose généralement que le taux d'usure de la surface est proportionnel à la pression de contact et à la pression relative de glissement, c'est-à-dire à la puissance de frottement dissipée. De ce fait, l'usure implique l'évolution des surfaces en contact et ces changements affectent le processus de contact. Ainsi, en raison de son rôle crucial, il existe une vaste littérature mathématique consacrée à ce sujet, voir par exemple [2, 31, 32, 42, 55, 73, 74]. Cela conduit à la forme de la loi d'Archard sur l'usure superficielle. Une partie de nos travaux a été consacrée à l'étude de ce type de loi, pour un contact avec compliance normale et contrainte unilatérale. Les résultats de ces travaux sont présentés dans [69].

Cette thèse est destinée à contribuer au développement de la théorie mathématique de la mécanique du contact et ses applications. Son objectif est à la fois d'introduire des nouveaux modèles décrivant le contact des corps déformables et d'étudier les problèmes mathématiques correspondants. Notre intérêt est de décrire différents processus physiques impliquant le contact et le frottement, de prouver que les modèles associés conduisent à des problèmes mathématiques bien posés et le cas échéant d'envisager une approximation numérique spécifique à certains problèmes de contact. Parallèlement, nous souhaitons développer des outils mathématiques nécessaires dans l'étude des problèmes de contact. Ceci concerne l'analyse (dans un cadre abstrait) de différentes classes d'inéquations variationnelles, y compris leur unique solvabilité.

L'objet de cette thèse est l'étude de quelques problèmes de contact glissant avec frottement, entre un corps déformable et une fondation plane, qui se déplace avec une vitesse constante (un tapis roulant, par exemple). La fondation est déformable et réactive. Nous nous plaçons dans le cadre des petites déformations et nous étudions des processus statiques et quasistatiques pour des matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques. Les résultats que nous obtenons concernent l'existence et l'unicité des solutions faibles ainsi que le comportement des solutions lorsque différents paramètres convergent vers zéro. Par ailleurs, dans certains cas nous nous sommes intéressés à l'approximation numérique des problèmes de contact et notamment à l'étude des schémas discrétisés. Pour certains problèmes, les résultats théoriques seront donc complétés par une étude numérique des modèles, à savoir l'estimation de l'erreur des schémas discrétisés.

Ce mémoire est organisé en **deux parties** que nous allons brièvement décrire afin de faciliter sa lecture.

La première partie de ce travail est consacré aux résultats préliminaires dont nous avons besoin pour l'étude des problèmes de contact considérés dans la deuxième partie du manuscrit. Elle constitue la base de cette thèse et comprend trois chapitres.

Le premier chapitre présente les espaces fonctionnels utilisés dans l'étude des problèmes variationnels considérés. Nous y abordons de façon succincte quelques rappels sur les espaces C^m , L^p ainsi que sur les espaces de Sobolev et leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Pour finir ce chapitre, nous présentons les espaces fonctionnels utilisés en Mécanique du Contact.

Le deuxième chapitre porte sur des éléments d'analyse non linéaire. Dans un premier temps, nous commençons par quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Ensuite, nous rappelons quelques propositions sur les fonctions convexes dont nous nous servons par la suite de ce manuscrit. Puis, nous présentons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle dans les espaces de Hilbert ainsi que des résultats sur les inéquations variationnelles elliptiques et avec terme de mémoire. Pour clôturer ce chapitre, nous rappelons les lemmes de type Gronwall utilisés dans les démonstrations d'unicité des solutions faibles et pour l'obtention des estimations d'erreurs.

Le troisième et dernier chapitre de cette partie est basé essentiellement sur la modélisation. Nous commençons par préciser le cadre physique, puis nous présentons les lois de comportement de nature élastique, viscoélastique et viscoplastique considérées dans les problèmes de contact. Enfin, nous décrivons les conditions de contact et les

lois de frottement que nous employons dans les problèmes de contact envisagés.

Dans la **deuxième partie**, nous procédons à l'étude de plusieurs problèmes de contact glissant, sous diverses conditions de contact et frottement entre un corps (élastique, viscoélastique ou viscoplastique) et un obstacle assimilé à une fondation. Cette partie comporte quatre chapitres qui sont structurés de la manière suivante.

Dans *le premier chapitre*, nous traitons un problème de contact glissant avec frottement entre un corps élastique et une fondation. Nous proposons deux formulations faibles : l'une est donnée en termes de déplacements, l'autre en termes de contrainte. Nous obtenons des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible pour ces deux formulations ainsi quelques résultats de convergence pour le problème en déplacement. Nous mettons également en évidence un résultat d'équivalence permettant d'établir que si la solution faible en déplacement existe alors elle entraîne l'existence de la solution faible en contrainte et réciproquement. Pour finir ce chapitre, nous présentons un résultat sur l'estimation d'erreur d'approximation. Une partie du travail présenté dans ce chapitre fait l'objet de l'article [70].

Dans *le deuxième chapitre*, nous nous proposons d'étudier un problème similaire à celui du premier chapitre. La nouveauté réside ici dans le fait que le processus considéré est quasi-statique et l'usure des surfaces de contact est prise en considération, ce qui conduit à un problème non standard pour lequel la formulation faible en déplacement est exprimée en termes d'inégalité variationnelle d'évolution. Ensuite, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration se déroule en plusieurs étapes et repose notamment sur des arguments de point fixe. Enfin, nous présentons un résultat de convergence basé sur la pénalisation de la contrainte unilatérale. Le matériel présenté dans ce chapitre fait l'objet de l'article [69].

Dans *le troisième chapitre*, nous nous intéressons à un problème viscoélastique de contact. La nouveauté du modèle réside dans le fait que le contact est associé à un terme de mémoire. Les formulations forte et faible du problème viscoélastique sont exposées. Ensuite, nous présentons un résultat de dépendance continue par rapport aux données. Enfin, nous présentons une approximation numérique du problème viscoélastique reposant sur une approximation à la fois en temps et en espace, en utilisant respectivement une discrétisation temporelle uniforme et une méthode de type élément finis. A l'issue de ces discrétisations, nous donnons un résultat sur l'estimation de l'erreur. Une partie du matériel présenté dans ce chapitre fait l'objet de l'article [71].

Dans *le quatrième et dernier chapitre* de cette partie, nous considérons un problème de contact glissant avec frottement entre un corps viscoplastique et une fondation. Pour

l'étude de ce problème nous utilisons des opérateurs de mémoire différents de celui du chapitre précédent. Nous énonçons et démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible et, pour clore ce chapitre, nous présentons un problème viscoplastique avec variable interne d'état.

Nous terminons ce manuscrit par une conclusion et quelques perspectives concernant les différents travaux effectués.

Notations

Si Ω est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$), on note par :

\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels.
\mathbb{R}	ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}_+	ensemble des nombres réels positifs.
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω dans \mathbb{R}^d .
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
Γ_i ($i=1,2,3$)	une partie mesurable de la frontière Γ .
<i>mes</i> Γ_1	la mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, \mathbf{v}_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel \mathbf{v} défini sur $\overline{\Omega}$.
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
H	l'espace $\left\{ \mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega) \right\}$.
Q	l'espace $\left\{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \right\}$.
H_1	l'espace $\left\{ \mathbf{u} = (u_i) \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in Q \right\}$.
Q_1	l'espace $\left\{ \boldsymbol{\sigma} \in Q \mid \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\partial_j \sigma_{ij}) \in H \right\}$.
V	l'espace $\left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$.
\mathbf{Q}_∞	l'espace $\left\{ \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) \mid \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d \right\}$.
$H^1(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.

Si H est espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes :

- H^d l'espace $\left\{x = (x_i) \mid x_i \in H, i = \overline{1, d}\right\}$.
- $H^{d \times d}$ l'espace $\left\{x = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, d}\right\}$.
- $(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de H .
- $\|\cdot\|_H$ la norme de H .
- $x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
- $x_n \rightarrow x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
- $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires et continues de H dans H .

Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par :

- $\mathcal{L}(H^1, H^2)$ l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2 .
- $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$ la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$.

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

- $C(\mathbb{R}_+; H)$ l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans H .
- $C^1(\mathbb{R}_+; H)$ l'espace des fonctions continûment dérivables de \mathbb{R}_+ dans H .
- $L^p(0, T, H)$ l'espace des fonctions f mesurables de $]0, T[$ dans H telles que $\int_0^T \|f(t)\|_H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
- $\|\cdot\|_{p, H}$ la norme de $L^p(0, T, H)$.
- $W^{k, p}(0, T, H)$ l'espace de Sobolev de paramètres $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$.
- $\|\cdot\|_{k, p, H}$ la norme de $W^{k, p}(0, T, H)$.

Pour une fonction f , on note par :

- $dom f$ le domaine de f .
- $supp f$ le support de f .
- \dot{f}, \ddot{f} les dérivées première et seconde de f par rapport au "temps".
- $\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i .
- ∇f le gradient de f .
- $\varepsilon(f)$ la partie symétrique du gradient de f , i.e $\varepsilon(f) = \frac{1}{2}(\nabla f + (\nabla f)^T)$.
- $Div f$ la divergence de f .

Autre notations

p.p. presque partout.

ssi si et seulement si.

r_+ partie positive de r .

Π_h opérateur d'interpolation d'élément fini.

$O(h)$ pour tout constante $c > 0$ indépendante de h telle que $|O(h)| \leq ch$.

Première partie
Préliminaires

Partie I

Préliminaires

Cette partie, dans laquelle nous présentons les outils d'analyse fonctionnelle et des notations de la mécanique de contact, contient trois chapitres. Dans le premier chapitre nous faisons quelques rappels d'analyse comme, par exemple, un survol des propriétés fondamentales des espaces de Banach, de Hilbert ainsi que les espaces de type Sobolev. En outre, nous introduisons certains espaces fonctionnels pour la mécanique dont nous avons besoin dans l'étude des problèmes de contact que nous abordons dans le reste du manuscrit. Dans le deuxième chapitre, nous présentons un bref rappel portant sur les opérateurs monotones, pseudomonotones et les propriétés des fonctions convexes. Puis, nous introduisons la notion d'opérateur de mémoire, nous en donnons quelques exemples et nous rappelons un résultat d'existence et d'unicité pour les inégalités variationnelles avec ce type d'opérateur. Dans le troisième chapitre nous nous intéressons à la modélisation des problèmes de contact. Nous y présentons les lois de comportement, les conditions de contact et les lois de frottement que nous utilisons dans la suite de ce manuscrit.

Chapitre 1

Espaces fonctionnels

Dans ce chapitre nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire. Partout ci-dessous Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^d ($d=2,3$), de frontière Γ lipschitzienne, i.e. Γ peut être considérée comme étant localement le graphe d'une fonction continue de Lipschitz. Par ailleurs, nous supposons que Γ se décompose de la manière suivante : $\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3}$ de telle sorte que $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$ avec $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ mesurables et $mes \Gamma_1 > 0$. En outre, nous notons par $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ l'adhérence de Ω dans \mathbb{R}^d .

1.1 Rappels et compléments

Nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles et vectorielles. Nous allons aborder les espaces de fonctions continues, continûment différentiables et les espaces L^p , qui nous permettront d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique dans la suite. Tout d'abord, nous introduisons la notation classique

$$D^{\alpha \cdot} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

dans laquelle figurent le multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et sa longueur $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$.

Le cadre étant bien posé, commençons tout d'abord par les espaces de fonctions continues et continûment différentiables.

Espaces de fonctions continues et continûment différentiables. Nous notons par $C(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continue sur $\overline{\Omega}$. Toute fonction de $C(\overline{\Omega})$ est bornée.

Par ailleurs, l'espace $C(\overline{\Omega})$ est de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup \{|v(x)| : x \in \overline{\Omega}\} \equiv \max \{|v(x)| : x \in \overline{\Omega}\}.$$

Pour tout entier m , $C^m(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$, i.e.

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

C'est également un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Par ailleurs, nous introduisons l'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ des fonctions infiniment différentiables

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+\}.$$

$C_0^\infty(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble Ω à support inclus dans Ω , i.e.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où le support d'une fonction v se définit de la façon suivante :

$$\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}.$$

La fonction v est dite à support compact dans Ω si son support $\text{supp } v$ est un sous ensemble propre de l'ensemble Ω . Il est clair que l'inclusion $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ est valable.

Les espaces $C(\mathbb{R}_+; X)$ et $C^1(\mathbb{R}_+; X)$. Soit X un espace de Banach. On note par $C(\mathbb{R}_+; X)$ l'espace des fonctions continues définies sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans X . L'espace $C(\mathbb{R}_+; X)$ peut être organisé canoniquement comme un espace de Fréchet (voir [20, 45]). Par ailleurs, la convergence d'une suite $(x_k)_k$ vers un élément x dans l'espace $C(\mathbb{R}_+; X)$ est décrite par

$$(1.1) \quad \begin{cases} x_k \rightarrow x \text{ dans } C(\mathbb{R}_+; X) \text{ lorsque } k \rightarrow \infty \text{ si et seulement si} \\ \max_{r \in [0, n]} \|x_k(r) - x(r)\|_X \rightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow \infty, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour une partie $K \subset X$ nous utilisons la notation $C(\mathbb{R}_+; K)$ afin de désigner l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}_+ à valeurs dans K . Nous notons par $C^1(\mathbb{R}_+; X)$

l'espace des fonctions continûment dérivables de \mathbb{R}_+ à valeurs dans X . En outre, nous avons la caractérisation suivante de la convergence d'une suite $(x_k)_k$ vers un élément x , dans l'espace $C^1(\mathbb{R}_+; X)$:

$$(1.2) \quad \begin{cases} x_k \rightarrow x \text{ dans } C^1(\mathbb{R}_+; X) \text{ lorsque } k \rightarrow \infty \text{ si et seulement si} \\ x_k \rightarrow x \text{ dans } C(\mathbb{R}_+; X) \text{ et } \dot{x}_k \rightarrow \dot{x} \text{ dans } C(\mathbb{R}_+; X) \text{ lorsque } k \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Nous utilisons cette caractérisation dans le Chapitre 6 de ce manuscrit.

Les espaces L^p . Soit $p \in [1, +\infty[$. De façon usuelle, nous désignons par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables et p -intégrables au sens de la mesure de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$.

L'espace $L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} . Muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|v(x)| < \infty,$$

il est également de Banach.

Soit $p \in [1, \infty]$. Alors le conjugué de p , noté q , est défini par

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 & \text{si } p \neq 1, \\ q = \infty & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$. Alors, l'inégalité suivante, dite de Hölder, à lieu :

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Hilbert s'il est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \quad \forall u, v \in L^p(\Omega).$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = 2$, est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Les espaces vectoriels $L^p(0, T; X)$. Classiquement, nous désignons par $L^p(0, T; X)$ avec $p \in [1, \infty[$, l'espace des fonctions mesurables $u :]0, T[\rightarrow X$ de puissance p -ième intégrables, à savoir

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

L'espace $L^\infty(0, T; X)$ se définit comme l'espace des fonctions $u :]0, T[\rightarrow X$ telles que la fonction $t \rightarrow \|u(t)\|_X$ est essentiellement bornée sur l'intervalle $]0, T[$.

Pour $p \in [1, \infty[$, l'espace $L^p(0, T; X)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

ainsi que l'espace $L^\infty(0, T; X)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \text{ess sup}_{t \in]0, T[} \|u(t)\|_X,$$

sont des espaces de Banach.

Si de plus l'espace $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert alors l'espace $L^2(0, T; X)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

est également un espace de Hilbert.

1.2 Espaces de Sobolev

Dans cette section, nous faisons quelques rappels sur les espaces de Sobolev.

Espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. Nous définissons les espaces de Sobolev par l'égalité

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha(u) \in L^p(\Omega) \text{ avec } 0 \leq |\alpha| \leq k \},$$

les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach, muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ sera noté par $H^k(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

Pour $k = 1$ l'espace $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d \}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)}^{1/2}.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega)$$

$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte (Théorème de Rellich),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une application linéaire et continue } \gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) \\ \text{telle que } \gamma u = u|_{\Gamma} \text{ pour tout } u \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ (Théorème de trace de Sobolev).} \end{array} \right.$$

Remarque 1.1. L'application γ s'appelle *application de trace*; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$. On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact. L'application de trace n'est pas surjective. L'image de $H^1(\Omega)$ par cette application est notée $H^{1/2}(\Gamma)$; c'est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ qui est de Hilbert pour la structure transportée par γ . Son dual sera noté $H^{-1/2}(\Gamma)$. Pour plus de détails voir [34, 60].

Espaces vectoriels de Sobolev $W^{k,p}(0, T; X)$. Nous utilisons la notation classique

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{ u \in L^p(0, T; X) \mid u^{(i)} \in L^p(0, T; X) \text{ et } \|u^{(i)}\|_{L^p(0, T; X)} < \infty \forall i \leq k \},$$

afin de désigner les espaces vectoriels de Sobolev pour $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$, $u^{(i)}$ étant la dérivée d'ordre i de u .

Dans le cas particulier où $p = 2$, si $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert, l'espace $H^k(0, T, X) = W^{k,2}(0, T; X)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(0, T, X)} = \sum_{0 \leq i \leq k} \int_0^T (u^{(i)}(t), v^{(i)}(t))_X dt.$$

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev nous pouvons nous référer à [1, 13, 24, 49].

1.3 Espaces fonctionnels pour la mécanique

L'analyse variationnelle des problèmes de mécanique nécessite l'introduction d'espaces de fonctions spécifiques. Nous introduisons dans cette section les espaces fonctionnels en mécanique associés aux opérateurs divergence et déformation.

Pour le champ de déplacement et le champ des contraintes nous utilisons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} Q &= \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}, \\ H_1 &= \{ \mathbf{u} = (u_i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in Q \}, \\ Q_1 &= \{ \boldsymbol{\sigma} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d \}. \end{aligned}$$

Les espaces Q , H_1 et Q_1 sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires donnés respectivement par

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} &= (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{Q_1} &= (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon} : H_1 \rightarrow Q$ et $\text{Div} : Q_1 \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}).$$

Nous désignons par $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{Q_1}$ les normes associées aux espaces Q, H_1, Q_1 respectivement.

Nous considérons à présent un opérateur linéaire continu de $R : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$, qui intervient par la suite dans ce manuscrit. En outre, pour $\boldsymbol{\sigma} \in Q_1$ nous notons $\sigma_\nu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sa composante normale, au sens des traces. De ce fait, il existe une constante positive $c_R > 0$ qui dépend de R , Ω et Γ_3 tel que

$$(1.3) \quad \|R\sigma_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_R \|\boldsymbol{\sigma}\|_{Q_1} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in Q_1.$$

Pour plus de détails sur cet opérateur, nous pouvons nous référer à [57].

Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, la normale unitaire extérieur à Γ , notée $\boldsymbol{\nu}$, est définie presque partout. Pour tout champ de vecteur $\mathbf{v} \in H_1$ nous utilisons la notation \mathbf{v} pour désigner la trace de \mathbf{v} sur Γ et nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de \mathbf{v} sur la frontière données par

$$v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad v_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Nous définissons de façon similaire les composantes normale et tangentielle d'un champ tensoriel régulier $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ par les formules

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Par ailleurs, nous rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$(1.4) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée ci-après :

$$(1.5) \quad V = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \}.$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_Q \geq c_K \|\mathbf{v}\|_{H_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Une démonstration de cette inégalité peut être trouvée dans ([49] p.79). Sur l'espace V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(1.6) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$(1.7) \quad \|\mathbf{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_Q \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert. En outre, il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 tel que

$$(1.8) \quad \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \mathbf{v} \in V.$$

Cette inégalité découle du théorème de trace de Sobolev.

Nous rappelons maintenant une conséquence de l'inégalité de Korn.

Théorème 1.2. *Sous l'hypothèse $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ notons par $\boldsymbol{\varepsilon}(V)$ l'image de l'opérateur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon} : V \rightarrow Q$, i.e.*

$$(1.9) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(V) = \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}); \quad \mathbf{v} \in V\}.$$

Alors $\boldsymbol{\varepsilon}(V)$ est un sous-espace fermé de Q .

Démonstration. Soit $\{\boldsymbol{\tau}_n\}$ est une suite d'élément de $\boldsymbol{\varepsilon}(V)$ qui converge dans Q à l'élément $\boldsymbol{\tau}$, i.e.

$$(1.10) \quad \boldsymbol{\tau}_n \rightarrow \boldsymbol{\tau} \quad \text{dans } Q \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors il existe une suite $\{\mathbf{v}_n\} \subset V$ tel que

$$(1.11) \quad \boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il résulte de (1.10) que $\{\boldsymbol{\tau}_n\}$ est une suite de Cauchy dans Q . De ce fait, il vient de (1.7) que $\{\mathbf{v}_n\}$ est une suite de Cauchy dans V . Ensuite, puisque V est un espace complet, il existe un élément $\mathbf{v} \in V$ tel que

$$(1.12) \quad \mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Nous utilisons maintenant la convergence (1.12) afin de voir que

$$(1.13) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad \text{dans } Q \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors, nous combinons (1.10), (1.11) et (1.13) pour déduire que $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$. Il suit de là que $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\varepsilon}(V)$, ce qui conclut la démonstration. \square

Nous définissons maintenant l'espace suivant :

$$\mathbf{Q}_\infty = \{ \boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_{ijkl}) \mid \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d \}$$

Notons que \mathbf{Q}_∞ est un espace de Banach réel muni de la norme

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Par ailleurs, un calcul élémentaire montre que

$$(1.14) \quad \|\mathcal{E}\boldsymbol{\tau}\|_Q \leq \|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} \|\boldsymbol{\tau}\|_Q \quad \forall \mathcal{E} \in \mathbf{Q}_\infty, \boldsymbol{\tau} \in Q.$$

L'inégalité (1.14) sera utilisée notamment dans la démonstration du résultat de convergence et dans l'obtention de l'estimation d'erreur du Chapitre 6.

Ces quelques propriétés achèvent cette section et ce chapitre. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons à la référence [65].

Chapitre 2

Eléments d'analyse non linéaire

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments d'analyse fonctionnelle. Nous introduisons également quelques résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques et d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes considérés par la suite. Pour finir, nous rappelons les lemmes de Gronwall qui seront utilisés plus tard.

2.1 Opérateurs monotones et pseudomonotones

Nous commençons par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour ce faire, nous considérons un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme $\|\cdot\|_X$.

Définition 2.1. *Un opérateur $A : X \rightarrow X$ est dit :*

(1) *monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) *strictement monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, u \neq v;$$

(3) *nonexpansif si*

$$\|Au - Av\|_X \leq \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X;$$

(4) *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X;$$

(5) de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X;$$

(6) hémicontinu si pour toute suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\alpha_n \rightarrow \alpha$, nous avons

$$(A(u + \alpha_n v), w)_X \rightarrow (A(u + \alpha v), w)_X \quad \forall u, v, w \in X;$$

(7) continu si

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } X \implies Au_n \rightarrow Au \text{ dans } X.$$

En utilisant la définition précédente, il est facile de démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.2. *Tout opérateur de Lipschitz est hémicontinu.*

Par ailleurs, nous rappelons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Théorème 2.3. *Soient X un espace de Hilbert et $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in X$ tel que $Au = f$.*

Ce théorème montre que si $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et Lipschitz, alors A est inversible. Les propriétés de son inverse, A^{-1} sont données par le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Soient X un espace de Hilbert et $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et Lipschitz. Alors, A^{-1} est un opérateur fortement monotone et Lipschitz.*

Les démonstrations du Théorème 2.3 et la Proposition 2.4 figurent dans [65, p.22-23].

Dans le Chapitre 4 de la thèse nous allons utiliser le résultat suivant.

Proposition 2.5. *Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur monotone et hémicontinu. Supposons que la suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers $u \in X$, c'est-à-dire*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

En outre, supposons que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X \leq 0.$$

Alors, pour tout $v \in X$, nous avons l'inégalité suivante :

$$(2.1) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - v)_X \geq (Au, u - v)_X.$$

Un opérateur borné $A : X \rightarrow X$ qui vérifie (2.1) pour tout $v \in X$ est appelé un opérateur *pseudomonotone*. La démonstration de la Proposition 2.5 peut être trouvée dans la références [65, p.21].

Rappelons à présent la définition des opérateurs de projection.

Définition 2.6. Soit K un sous ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Hilbert X . Pour tout $f \in X$, l'élément $u \in K$ qui vérifie

$$\|u - f\|_X = \min_{v \in K} \|v - f\|_X$$

est appelé la projection de f sur K et il est noté par $P_K f$. Par ailleurs, l'opérateur $P_K : X \rightarrow K$ est appelé l'opérateur de projection sur K .

Pour finir cette section, nous allons introduire les opérateurs de mémoire.

Définition 2.7. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$, deux espaces vectoriels normés et un opérateur $\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+, Y)$. L'opérateur \mathcal{R} est dit de mémoire si

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ il existe } r_n > 0 \text{ tel que} \\ \| \mathcal{R}u_1(t) - \mathcal{R}u_2(t) \|_Y \leq r_n \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}^+, X), \forall t \in [0, n] \end{array} \right.$$

Ce type des opérateurs vont intervenir aussi bien dans les résultats abstraits qui vont suivre que dans l'étude des problèmes de contact que nous allons envisager.

2.2 Fonctions convexes

Dans cette section, nous procédons à divers rappels portant sur les propriétés des fonctions convexes. Pour cela, nous considérons un espace normé de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Définition 2.8. Soit K une partie convexe de X et soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est convexe si

$$f((1-t)u + tv) \leq (1-t)f(u) + tf(v)$$

pour tout $u, v \in K$ et $t \in]0, 1[$.

Définition 2.9. Soit K une partie, convexe, fermé, non vide de X . Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite

(1) *semi-continue inférieurement* si pour tout $u \in K$ et pour toute suite $\{u_n\} \subset K$ qui converge vers u dans X , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u).$$

(2) *faiblement semi-continue inférieurement* si pour tout $u \in K$ et pour toute suite $\{u_n\} \subset K$ qui converge faiblement vers u dans X , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u).$$

Il est possible de lier la notion de fonction semi-continue inférieurement et la notion de fonction faiblement semi-continue inférieurement. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.10. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach, K une partie, convexe, fermé, non vide de X et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors f est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.

Un grand nombre des problèmes aux limites dans la mécanique de contact conduit à des formulations variationnelles dans lesquelles le terme de frottement est associé à une semi-norme continue. Pour cette raison nous recueillons à la fin de ce paragraphe quelques résultats sur les semi-normes continues définies sur un espace normé.

Proposition 2.11. Soit j un seminorme sur l'espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$. Alors j est continue si et seulement si qu'il existe $m > 0$ tel que

$$j(v) \leq m\|v\|_X \quad \forall v \in X.$$

Il est facile de voir qu'une semi-norme définie sur un espace linéaire est une fonction convexe. Une conséquence directe de la Proposition 2.11 est donnée par le résultat suivant

Corollaire 2.12. *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace normé et soit j est semi-norme sur X . Alors j est une fonction convexe faiblement semi-continue inférieurement.*

Les démonstration de la Proposition 2.11 et le Corollaire 2.12 peuvent être trouvées dans [65, p.28].

2.3 Compléments divers

Dans cette section, nous présentons quelques résultats sur les inéquations variationnelles avec ou sans operateurs de mémoire que nous utilisons pour l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution faible des problèmes de mécanique abordés. Nous rappelons également quelques lemmes du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes, en particulier pour établir l'unicité de la solution ainsi que pour l'obtention des estimations d'erreurs. Les différents résultats seront énoncés sans démonstrations mais avec un renvoi aux références précitées pour plus de détails.

Tout d'abord, nous introduisons des résultats qui seront utilisés dans le Chapitre 5 de ce manuscrit. Le premier représente un résultat de l'existence et de l'unicité alors que le deuxième est un résultat de la convergence sur des inégalités variationnelles elliptiques. Pour l'introduire, nous considérons un espace de Hilbert réel X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme associée $\|\cdot\|_X$. Nous supposons les hypothèses suivantes :

$$(2.3) \quad K \text{ est une partie, convexe, fermé, non vide de } X.$$

$$(2.4) \quad A : X \rightarrow X \text{ est un opérateur continu, Lipschitzien, fortement monotone.}$$

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } G : X \rightarrow X \text{ est un opérateur continu, Lipschitzien,} \\ \text{fortement monotone.} \\ \text{(b) } (Gu, v - u)_X \leq 0 \quad \forall u \in X, v \in K. \\ \text{(c) } Gu = 0_X \text{ si et seulement si } u \in K. \end{array} \right.$$

$$(2.6) \quad f \in X.$$

Avec ces données, nous considérons le problème suivant :

Trouver un élément u tel que

$$(2.7) \quad u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X, \quad \forall v \in K.$$

En outre, pour chaque $\rho > 0$, nous considérons également le problème suivant :
Trouver un élément u_ρ tel que

$$(2.8) \quad u_\rho \in X, \quad Au_\rho + \frac{1}{\rho}Gu_\rho = f.$$

Nous avons maintenant le résultat suivant.

Théorème 2.13. *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.3)–(2.6) sont vérifiées. Alors :*

- 1) *L'inégalité variationnelle (2.7) admet une solution unique.*
- 2) *Pour chaque $\rho > 0$ il existe un unique élément u_ρ , solution de l'équation non linéaire (2.8).*
- 3) *La solution u_ρ de (2.8) converge fortement vers la solution u de (2.7) à savoir*

$$(2.9) \quad u_\rho \rightarrow u \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

L'énoncé et la démonstration de ce théorème figurent dans [65, p.35]

D'une autre part, le deuxième résultat que nous avons besoin est un résultat de point fixe. Pour l'introduire, nous considérons un espace de Banach X et nous utilisons les notations $C(\mathbb{R}_+; X)$ et $C^1(\mathbb{R}_+; X)$ définies dans le Chapitre 1. Nous avons le résultat de point fixe suivant.

Théorème 2.14. *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace réel de Banach et soit $\Lambda : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ un opérateur non-linéaire avec la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $c_n > 0$ tel que*

$$(2.10) \quad \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_X \leq c_n \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds,$$

pour tous $u, v \in C(\mathbb{R}_+; X)$ et pour tout $t \in [0, n]$. Alors l'opérateur Λ admet un unique point fixe $\eta^ \in C(\mathbb{R}_+; X)$.*

Le Théorème 2.14 représente une version simplifiée du Corollaire 2.5 dans [61]. Nous soulignons dans (2.10), que la notation $\Lambda\eta(t)$ représente la valeur de la fonction $\Lambda\eta$ au point t , c'est-à-dire $\Lambda\eta(t) = (\Lambda\eta)(t)$.

Nous introduisons maintenant un résultat d'abstrait qui sera utilisé par la suite dans ce manuscrit.

Théorème 2.15. *Soit X un espace de Hilbert, munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$ et supposons que K est une partie, convexe, fermée de X telle que $0_X \in K$. Soient $A : X \rightarrow X$, un opérateur continu Lipschitzien fortement monotone et $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction qui satisfait les conditions suivantes.*

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Pour tout } \eta \in K, j(\eta, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe} \\ \text{et semi-continue inférieurement.} \\ \text{(b) Il existe } \alpha \geq 0 \text{ tel que} \\ j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ \leq \alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in K. \end{array} \right.$$

Supposons que $m > \alpha$. Alors, pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que

$$(2.12) \quad u \in K, (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Le Théorème 2.15 sera utilisé dans le Chapitre 4 afin de prouver l'existence d'une solution faible d'un modèle de contact. La démonstration de ce théorème figure dans [65, p. 49–50] et est basée sur l'argument du point fixe de Banach.

Introduisons à présent un résultat concernant une autre classe d'inéquations variationnelles avec un opérateur de mémoire. Soient X et Z deux espaces Hilbert muni des produits scalaires $(\cdot, \cdot)_X$ et $(\cdot, \cdot)_Z$ des normes associées $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Z$ respectivement. Soit K une partie de X . Nous considérons les opérateurs $A : K \subset X \rightarrow X$ et $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Z)$ ainsi que la fonctionnelle $j : Z \times X \times K \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$. Nous supposons que les hypothèses suivantes :

$$(2.13) \quad K \text{ est une partie, convexe, fermé, non vide de } X.$$

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L > 0 \text{ tel que} \\ \|Au_1 - Au_2\|_X \leq L\|u_1 - u_2\|_Y \quad \forall u_1, u_2 \in K. \\ \text{(b) Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m\|u_1 - u_2\|_X^2 \\ \forall u_1, u_2 \in K. \end{array} \right.$$

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Pour tout } z \in Z \text{ et } u \in X, j(z, u, \cdot) \text{ est convexe et semi-continue} \\ \text{inférieurement sur } K. \\ \text{(b) Il existe } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ tel que} \\ j(z_1, u_1, v_2) - j(z_1, u_1, v_1) + j(z_2, u_2, v_1) - j(z_2, u_2, v_2) \\ \leq \alpha \|z_1 - z_2\|_Z \|v_1 - v_2\|_X + \beta \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \\ \forall z_1, z_2 \in Z, \forall u_1, u_2 \in X, \forall v_1, v_2 \in K. \end{array} \right.$$

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ il existe } s_n > 0 \text{ tel que} \\ \| \mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t) \|_Z \leq s_n \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}^+; X), \forall t \in [0, n]. \end{array} \right.$$

$$(2.17) \quad f \in C(\mathbb{R}_+; X).$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.16. *Supposons que les hypothèses (2.13)–(2.17) sont vérifiées et, en outre,*

$$(2.18) \quad m > \beta.$$

Alors, il existe une unique fonction $u \in C(\mathbb{R}_+; K)$, *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$,

$$(2.19) \quad \begin{aligned} u(t) \in K, \quad (Au(t), v - u(t))_X + j(\mathcal{S}u(t), u(t), v) \\ - j(\mathcal{S}u(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Ce théorème sera utilisé dans les Chapitres 6 et 7 afin de prouver l'unicité de la solution faible des problèmes de contact considérés. Une démonstration du Théorème 2.16 peut être trouvée dans [72]. L'utilisation du Théorème 2.16 dans l'étude des problèmes de contact peut se trouver dans [28, 64]. En outre, une inéquation variationnelle utile dans l'étude des problèmes dynamiques de contact a été considérée dans [19]

Pour finir ce chapitre, nous introduisons les Lemmes de Grönwall qui interviennent par la suite dans ce manuscrit.

Lemme 2.17. Soient f et $g \in C([0, T], \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Si g est non décroissante, nous avons que

$$f(t) \leq g(t) e^{ct}.$$

Lemme 2.18. Soient $T > 0$, donné, et $N > 0$, un entier. On définit $k = T/N$. Supposons que $\{g_n\}_{n=1}^N$ et $\{e_n\}_{n=1}^N$ sont deux suites de nombres non négatifs satisfaisant

$$e_n \leq \bar{c}g_n + \bar{c} \sum_{j=1}^n ke_j \quad n = 1, \dots, N.$$

avec \bar{c} , une constante positive indépendante de N et k . Alors, si k est suffisamment petit, il existe une constante positive c , indépendante de N et k , telle que

$$\max_{1 \leq n \leq N} e_n \leq c \max_{1 \leq n \leq N} g_n.$$

Les démonstrations du Lemme 2.17 et 2.18 peuvent être trouvées dans [34, 65].

Chapitre 3

Modélisation

Dans ce chapitre, nous introduisons dans un premier temps le cadre physique des problèmes de contact ainsi qu'un bref rappel sur la mécanique des milieux continus et le comportement des solides déformables (lois élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques). Puis, nous présentons les différentes conditions aux limites de contact avec frottement qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

3.1 Cadre physique et modèles mathématiques

Dans cette section, nous fixons le cadre physique, puis nous établissons le modèle mathématique qui servira de base pour l'étude du problème de contact glissant entre un corps déformable et une fondation mobile.

a) Cadre physique. Nous considérons un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) avec une frontière Lipschitzienne Γ divisée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux différents types de conditions aux limites et telle que $mes(\Gamma_1) > 0$. Le corps est supposé en équilibre sous l'action de forces volumiques de densité \mathbf{f}_0 . Des forces surfaciques de densité \mathbf{f}_2 agissent sur Γ_2 . Enfin, le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe et Γ_3 correspond à la partie du corps déformable susceptible d'entrer en contact avec une fondation mobile, constituée d'un corps rigide couvert d'une couche molle. Dans la Figure 3.1 ci-après, \mathbf{v}^* représente la vitesse du déplacement de la fondation, g représente l'épaisseur de la matière molle et \mathbf{n}^* est un vecteur unitaire dans le plan de la fondation. Nous supposons que la fondation se déplace avec une vitesse constante $\mathbf{v}^* = v^* \mathbf{n}^*$, où $v^* < 0$ est donnée. En outre, la déformabilité de la fondation est modélisée par une possible pénétration.

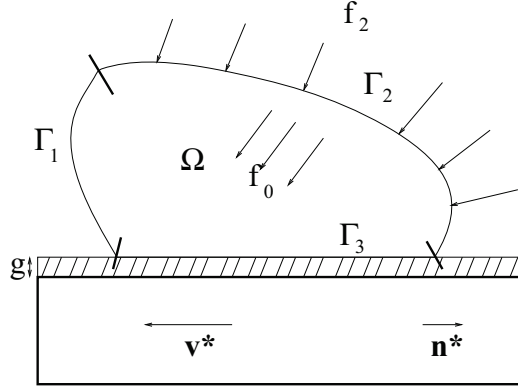


FIGURE I.3.1 – Cadre physique.

b) Notations. Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$); " \cdot " et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, & \|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\boldsymbol{\tau}\| &= (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} & \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

Nous notons également par \mathbf{u} le champ de déplacements et par $\boldsymbol{\sigma}$ le champ de contraintes. Dès lors, pour un vecteur \mathbf{u} donné, u_ν et \mathbf{u}_τ représentent respectivement les composantes normale et tangentielle de \mathbf{u} sur Γ .

Dans ce manuscrit, pour désigner les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ d'une fonction u , nous adoptons indifféremment les notations suivantes $\partial_{x_i} u$, $\partial_i u$ ou encore u_{x_i} . La dérivée temporelle de u sera notée \dot{u} .

Nous passons maintenant à la description des modèles mathématiques associés au cadre physique ci-dessus.

c) Modèles mathématiques. Afin de construire un modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps déformable associé au cadre physique de la Figure I.3.1, nous rappelons que le champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{S}^d$, représentent les inconnues du problème. Le mouvement du corps est décrit par l'équation de la dynamique

$$(3.1) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[,$$

où $\mathbf{f}_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ représente la densité des forces volumiques sur Ω . Cette équation s'appelle équation du mouvement de Cauchy, où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ représente la densité de masse et $\ddot{\mathbf{u}}$ représente l'accélération. Les processus d'évolution modélisés par l'équation (3.1) s'appellent *processus dynamiques*. Dans certaines situations, l'équation (3.1) peut se simplifier. Par exemple dans le cas où \mathbf{u} varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\ddot{\mathbf{u}}$ peut être négligé (*processus quasistatiques*). Dans ce cas l'équation (3.1) devient

$$(3.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[.$$

Les processus de déformation gouvernés par l'équation (3.2) sont de processus statiques (lorsque les variables ne dépendent pas du temps) ou de processus quasistatiques (dans le cas contraire). Dans ce premier cas l'équation (3.2) est valable dans Ω . Par la suite, on va appeler simplement (3.2) *équation d'équilibre*.

Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un milieu continu donné par l'équation (3.1) ou (3.2), il faut encore préciser les conditions aux limites. Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ de déplacements \mathbf{y} est nul, donc

$$(3.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T).$$

La condition aux limites en traction peut se mettre sous la forme

$$(3.4) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T).$$

L'équation (3.1) ou (3.2) équivaut à d relations scalaires. Par conséquent, mathématiquement cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car il y a plus d'inconnues que d'équations. L'équation (3.1) ou (3.2) exprime un processus universel valable pour tous les matériaux et de ce fait elle ne suffit pas à déterminer tous les différents comportements mécaniques des milieux continus. Par conséquent, l'équation est donc insuffisante, à elle seule, pour décrire l'équilibre des corps matériels. Elle doit alors être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général de loi de comportement. Cette loi de comportement représente une relation reliant le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et leur dérivées. Pour plus de détails, nous vous renvoyons aux ouvrages [60, 65].

3.2 Lois de comportement

Dans cette section, nous considérons les lois de comportement pour les matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques avec ou sans variable interne d'état. Ces lois sont utilisées dans de nombreux ouvrages portant notamment sur l'étude mathématique des problèmes de contact.

3.2.1 Lois de comportement des matériaux élastiques

Dans ce paragraphe, nous considérons une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont reliés par la loi de comportement suivante

$$(3.5) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

Le tenseur des contraintes représente ici une fonction (linéaire ou non-linéaire) du tenseur des déformations linéarisé $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ces matériaux s'appellent *matériaux élastiques* et la loi de comportement (3.5) s'appelle *loi de comportement élastique*.

En général la fonction \mathcal{F} dépend du point $\mathbf{x} \in \Omega$ donc nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})).$$

Si \mathcal{F} ne dépend pas explicitement de \mathbf{x} , le milieu élastique est dit *homogène*. Autrement, il est dit *non-homogène*. Par la suite, pour simplifier l'écriture, nous utilisons $\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ pour $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$.

En élasticité linéaire \mathcal{F} est une fonction linéaire de $\boldsymbol{\varepsilon}$, c'est-à-dire (3.5) devient

$$(3.6) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4. Ses composantes \mathcal{E}_{ijkl} s'appellent *coefficients d'élasticité* et sont indépendantes du tenseur des déformations. Du fait des différentes symétries matérielles inhérentes à l'homogénéité et l'isotropie du matériau, nous avons

$$(3.7) \quad \mathcal{E}_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}),$$

où les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Par ailleurs, en utilisant l'égalité $\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh} \varepsilon_{kh}$ et (3.7) nous avons,

$$(3.8) \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

En inversant la loi élastique linéaire (3.8), nous obtenons

$$(3.9) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

où E représente le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Le lecteur désireux d'obtenir plus de renseignements sur ce sujet est prié de consulter [60, 65].

3.2.2 Lois de comportement des matériaux viscoélastiques

L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes ou les cires, a mis en évidence les insuffisances de la théorie de l'élasticité. En effet, certains phénomènes, tels que le fluage ou la relaxation ne peuvent pas être décrits par les lois de comportement élastique. C'est pourquoi les modèles viscoélastiques et viscoplastiques furent introduits.

a) Matériaux viscoélastique à mémoire courte. Une loi de comportement viscoélastique générale à mémoire courte est donnée par

$$(3.10) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

où \mathcal{A} est l'opérateur de viscosité et \mathcal{B} est l'opérateur d'élasticité. Par ailleurs, nous notons que ces deux opérateurs dépendent aussi de la variable spatiale \mathbf{x} , mais pour simplicité, nous ne signalons pas explicitement cette dépendance ; par conséquent, tout ce qui suit est valable pour les matériaux non-homogènes. Nous utilisons respectivement les notations $\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}})$ et $\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ pour $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))$ et $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$. En particulier, si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des opérateurs linéaires, alors (3.10) nous conduit à la loi constitutive de Kelvin-Voigt

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\dot{\mathbf{u}}) + b_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}),$$

où σ_{ij} , a_{ijkl} , b_{ijkl} représentent respectivement les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, du tenseur de viscosité \mathcal{A} et du tenseur d'élasticité \mathcal{B} . L'analyse variationnelle de plusieurs problèmes aux limites impliquant (3.10) se trouve dans [34, 54, 56, 57].

b) Matériaux viscoélastique à mémoire longue. Une loi de comportement viscoélastique à mémoire longue est donnée par

$$(3.11) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds.$$

où \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité et \mathcal{R} est l'opérateur de relaxation. Nous notons également que ces deux opérateurs dépendent aussi de la variable spatiale \mathbf{x} . En outre, comme le montre (3.11), l'opérateur \mathcal{R} est une fonction du temps. Dans le cas linéaire, les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ qui satisfait (3.11) sont données par

$$\sigma_{ij}(t) = f_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t r_{ijkl}(t-s)\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(s)) ds,$$

où $\mathcal{F} = (f_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité et $\mathcal{R} = (r_{ijkl})$ est le tenseur de relaxation. Ici, nous notons que les coefficients f_{ijkl} et r_{ijkl} dépendent de la variable spatiale \mathbf{x} dans le corps. Pour plus de précisions sur ces lois viscoélastiques, nous pouvons renvoyer à [4, 5, 6, 23, 25, 33, 53], par exemple.

3.2.3 Lois de comportement des matériaux viscoplastiques

Dans ce paragraphe, nous considérons les lois de comportement viscoplastiques qui sont utilisées dans la littérature afin de décrire les propriétés des métaux et notamment les phénomènes de relaxation, de fluage et de déformations irréversibles.

a) Matériaux viscoplastiques. Une loi de comportement viscoplastique générale peut être écrite comme

$$(3.12) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})),$$

où \mathcal{E} et \mathcal{G} représentent respectivement l'opérateur linéaire décrivant les propriétés élastiques du matériau et la fonction constitutive non linéaire décrivant son comportement viscoplastique. Les détails mécaniques se trouvent dans les ouvrages [21, 34, 57]. Dans le cas non-homogène \mathcal{E} et \mathcal{G} dépendent du point $\mathbf{x} \in \Omega$, donc (3.12) s'écrit pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$

$$(3.13) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}))) + \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))).$$

Afin de simplifier l'écriture nous utilisons dans la suite (3.12) au lieu de (3.13). Un exemple relativement simple à une dimension de la loi constitutive de la forme (3.12) peut se construire de la façon suivante. Nous supposons que la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ est composée de deux parties, la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ tel que

$$(3.14) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p.$$

Puis, nous supposons également que

$$(3.15) \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \text{ et } \varepsilon^p = \psi(\sigma, \varepsilon),$$

où $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction constitutive et E est le module de Young. Par conséquent, la loi de comportement viscoplastique (3.14) devient

$$(3.16) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \psi(\sigma, \varepsilon),$$

ce qui implique que

$$(3.17) \quad \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon)$$

où $G(\sigma, \varepsilon) = -E\psi(\sigma, \varepsilon)$.

L'analyse variationnelle et numérique de plusieurs modèles de contact utilisant une loi de comportement de la forme (3.12) se trouve dans plusieurs travaux comme, par exemple [10, 11].

b) Matériaux viscoplastique à variable interne d'état. Nous pouvons prendre en considérations des lois de comportement viscoplastiques plus générales que (3.12). Ainsi certain auteurs (cf. [21]) proposent des lois de comportement de la forme

$$(3.18) \quad \dot{\sigma} = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\sigma, \varepsilon(\mathbf{u}), \boldsymbol{\kappa}),$$

où $\boldsymbol{\kappa}$ est une variable interne d'état. La prise en considération de ce type de lois de comportement est justifiée par les essais expérimentaux. D'habitude $\boldsymbol{\kappa}$ est une fonction vectorielle à m composantes donc la fonction \mathcal{G} dans (3.18) est définie sur $\Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans \mathbb{S}^d . Pour $\boldsymbol{\kappa}$, nous donnons aussi une équation d'évolution de la forme

$$(3.19) \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{G}(\sigma, \varepsilon(\mathbf{u}), \boldsymbol{\kappa}),$$

où $\mathbf{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Un exemple classique de variable interne d'état est le paramètre d'écrouissage du type déformation défini par

$$(3.20) \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \phi(|\varepsilon^{-1}\mathcal{G}(\sigma, \varepsilon(\mathbf{u}), \boldsymbol{\kappa})|),$$

où $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. En particulier si $\phi(r) = \frac{2}{3}r$, $\boldsymbol{\kappa}$ devient la déformation équivalente irréversible. Pour plus d'information de ces lois de comportement, nous pouvons nous référer à [21, 37, 60].

3.3 Conditions de contact

Dans cette section, nous allons introduire les conditions de contact utilisées dans les problèmes aux limites que nous allons considérer dans la deuxième partie de cette thèse. Ces conditions sont représentées par des relations entre les composantes normales du champ de déplacements u_ν et les composantes normales du champ de contraintes σ_ν .

a) Contact unilatéral. Nous considérons ici le contact entre un corps déformable et une fondation qui est considérée comme étant rigide. De ce fait, quelques soient les forces appliquées, la fondation ne subira pas de déformations, et le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette loi de contact a été proposé par Antonio Signorini [59] en 1933. Elle est caractérisée par les 3 conditions suivantes :

$$(3.21) \quad \begin{cases} (1) \text{ Condition de non pénétration} & u_\nu \leq 0, \\ (2) \text{ Condition de compression} & \sigma_\nu \leq 0, \\ (3) \text{ Condition de complémentarité} & \sigma_\nu u_\nu = 0. \end{cases}$$

La condition de complémentarité se traduit de la manière suivante :

- Si $u_\nu = 0$, le corps est en contact et la force normale est orienté vers le corps ($\sigma_\nu \leq 0$),
- Si $u_\nu < 0$, le corps quitte la base rigide et dans ce cas la réaction normale est nulle ($\sigma_\nu = 0$).

Cette loi de contact peut être représentée sous la forme du graphe I.3.2 .

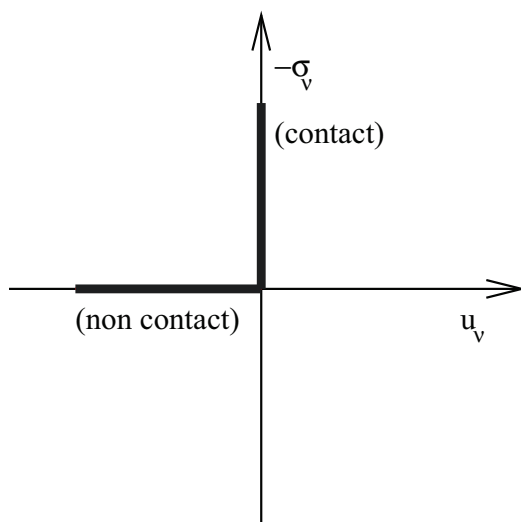


FIGURE I.3.2 – Contact unilatéral

D'autre part, si nous supposons qu'il y existe un interstice g entre la fondation et le corps, les conditions de Signorini s'écrivent de la manière suivante :

$$(3.22) \quad \begin{cases} (1) \text{ Condition de non pénétration} & u_\nu \leq g, \\ (2) \text{ Condition de compression} & \sigma_\nu \leq 0, \\ (3) \text{ Condition de complémentarité} & \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0. \end{cases}$$

Elle est également représentée dans la Figure I.3.3 .

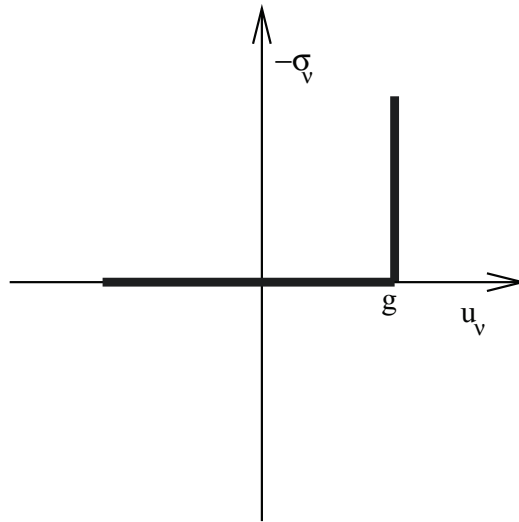


FIGURE I.3.3 – Contact unilatéral avec interstice g

b) Contact avec compliance normale. Cette fois, la fondation est supposée déformable. Dans ce cas, la pénétration est possible. La contrainte normale σ_ν est supposée satisfaire la condition

$$(3.23) \quad -\sigma_\nu = p(u_\nu)$$

où u_ν est le déplacement normal et p est une fonction donnée qui s'annule lorsque l'argument est négatif, c'est-à-dire

$$(3.24) \quad p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \text{et} \quad p(r) = 0 \quad \text{si} \quad r \leq 0.$$

Cette condition indique que la fondation exerce une réaction sur le corps en fonction de sa pénétration, qui s'annule lorsqu'il y a séparation. La représentation de la loi de

compliance normale dépend de la fonction p choisie. Dans le cas de la Figure I.3.4 nous avons considéré la fonction

$$p(r) = cr^+, \quad \text{avec } r^+ = \max(0, r),$$

où c désigne le coefficient de rigidité de la fondation.

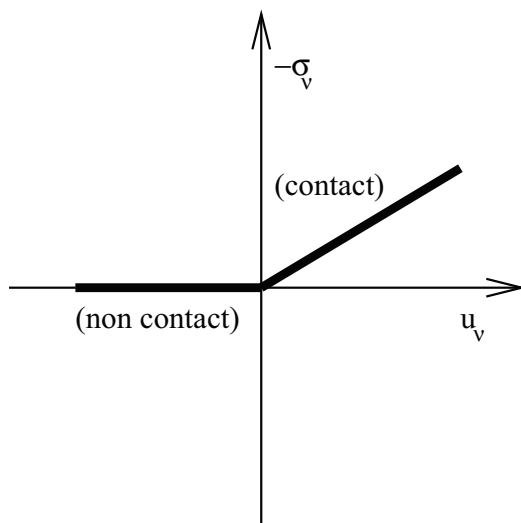


FIGURE I.3.4 – Contact avec compliance normale

c) **Contact avec compliance normale et contrainte unilatérale.** Cette condition de contact peut être formulée comme suit :

$$(3.25) \quad \begin{cases} u_\nu \leq g, & \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0. \end{cases}$$

Dans (3.25) g est une constante strictement positive, donnée, et p est une fonction satisfait la condition (3.24). La condition (3.25) a été introduite dans [38] dans l'étude d'un problème dynamique pour des matériaux viscoplastiques. Elle montre que lorsqu'il y a séparation entre le corps et l'obstacle, alors la réaction de la fondation est nulle ; en outre, la pénétration est limitée (puisque $u_\nu \leq g$). Lorsque $0 \leq u_\nu < g$, alors, la réaction de la fondation est déterminée uniquement par le déplacement normal (puisque $-\sigma_\nu = p(u_\nu)$) et lorsque $u_\nu = g$, la contrainte normale n'est pas uniquement déterminée mais est soumise à la restriction $-\sigma_\nu \geq p(u_\nu)$. Notons aussi que, dans le

cas $g = 0$ la condition (3.25) devient la condition de contact unilatéral (3.21).

Interprétation. La condition de contact (3.25) peut être interprétée physiquement de la façon suivante : la fondation est supposée être composée d'un matériau rigide recouvert d'une mince couche de matériau souple avec une épaisseur g . Le matériau souple est déformable et permet la pénétration, qui est modélisée avec compliane normale ; le matériau dur est rigide et, par conséquent, il ne permet pas la pénétration. Il résulte de ce qui précède que la fondation a un comportement élastique-rigide ; le comportement élastique est donné par la couche du matériau souple, et le comportement rigide est donné par le matériau rigide.

Cette condition de contact (3.25) peut être représentée sous la forme du graphe I.3.5 .

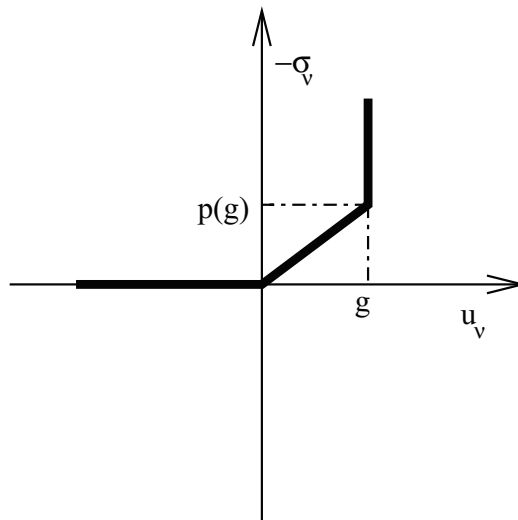


FIGURE I.3.5 – Contact avec compliane normale et contrainte unilatérale

d) Contact avec compliane normale, contrainte unilatérale et seuil de pénétration. Cette condition peut être obtenue de la manière suivante. Nous supposons que l'obstacle est constitué d'un matériau rigide recouvert d'une couche de matériau souple et une croûte mince. L'épaisseur de la couche souple est g et l'épaisseur de la croûte est négligée. Le matériau souple étant déformable permet ainsi une pénétration limitée qui prend en compte l'histoire de la pénétration.

Nous introduisons d'abord une loi de compliance normale, de contrainte unilatérale et le seuil de pénétration. Cette loi est caractérisée par les relations suivantes

$$(3.26) \quad \left. \begin{aligned} u_\nu &\leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) + \xi \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu) + \xi) &= 0, \\ 0 &\leq \xi \leq F, \\ \xi &= 0 \quad \text{si } u_\nu < 0, \\ \xi &= F \quad \text{si } u_\nu > 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Cette condition de contact (3.26) peut être représentée sous la forme du graphe I.3.6 .

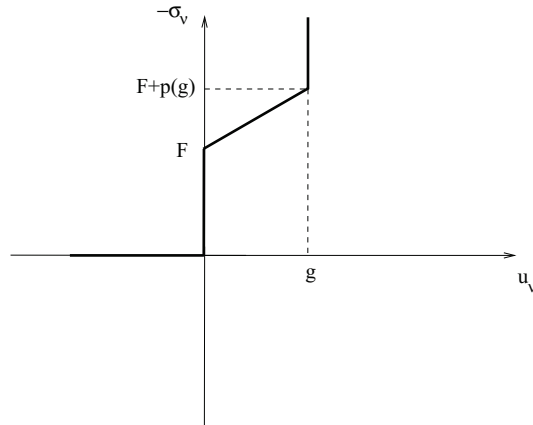


FIGURE I.3.6 – Contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et croûte

L'obtention de cette loi de contact est basée sur les hypothèses suivantes. D'abord, la contrainte normale a une décomposition additive de la forme

$$(3.27) \quad \sigma_\nu = \sigma_\nu^R + \sigma_\nu^S + \sigma_\nu^C \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

dans lequel la fonction σ_ν^R décrit la réaction à la pénétration du matériau rigide, σ_ν^S décrit la réaction de la matière molle et, enfin, σ_ν^C décrit la réaction de la croûte. Le matériau dur est parfaitement rigide, et par conséquent, la pénétration est limitée par g et σ_ν^R satisfait à la condition Signorini sous la forme d'une fonction du seuil de l'interstice, c'est-à-dire

$$(3.28) \quad u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu^R \leq 0, \quad \sigma_\nu^R(u_\nu - g) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Le matériau souple est élastique et, par conséquent, nous supposons que σ_ν^S satisfait à une condition de contact de la compliance normale

$$(3.29) \quad -\sigma_\nu^S = p(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Enfin, nous supposons que la croûte a un comportement rigide-parfaitement plastique, et par conséquent, la fonction σ_ν^C satisfait la condition

$$(3.30) \quad \left. \begin{array}{l} -F \leq \sigma_\nu^C \leq 0, \\ \sigma_\nu^C = 0 \text{ si } u_\nu < 0, \\ -\sigma_\nu^C = F \text{ si } u_\nu > 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ici F est une constante qui représente la valeur critique atteinte par $-\sigma_\nu^C$ avant que la croûte ne cède. Notons que la condition (3.30) peut être représentée sous la forme du graphe I.3.7 ci-dessous.

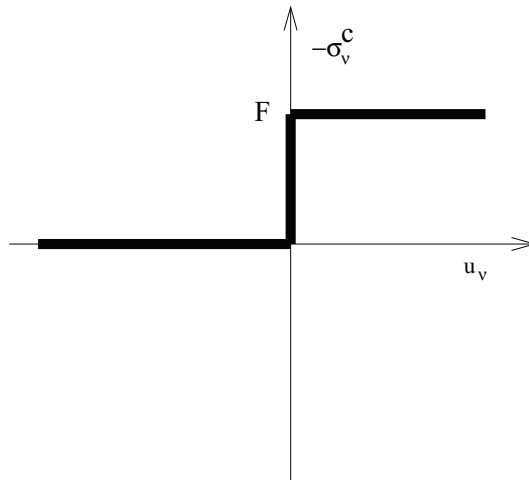


FIGURE I.3.7 – Réaction de la croûte.

Nous combinons maintenant (3.27) et (3.29) puis, nous posons $-\sigma_\nu^C = \xi$ afin de voir que

$$(3.31) \quad \sigma_\nu^R = \sigma_\nu + p(u_\nu) + \xi \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ensuite, nous substituons l'égalité (3.31) dans (3.28) et, en utilisant (3.30) nous obtenons la condition de contact (3.26). La condition de contact (3.26) sera utilisée dans le Chapitre 4 de cette thèse.

Interprétation. Nous présentons maintenant quelques détails supplémentaires sur la condition de contact (3.26). Les inégalités et les égalités ci-dessus sont également valables pour un point arbitraire $\boldsymbol{x} \in \Gamma_3$. Tout d'abord, nous rappelons que (3.26) représente une condition de contact avec contrainte unilatérale, puisque l'inégalité $u_\nu \leq g$ doit être vérifiée. Par ailleurs, lorsqu'il y a une séparation entre le corps et la fondation, c'est-à-dire lorsque $u_\nu < 0$, la condition (3.26) donne que $\sigma_\nu = 0$, puisque $p(u_\nu) = 0$ et $\xi = 0$. De ce fait, la réaction de la fondation s'annule. Notons que le même comportement de la contrainte normale est décrit à la fois dans la condition de compliance normale classique et dans la condition de contact Signorini, lorsqu'il y a séparation. Supposons maintenant qu'il y ait pénétration sans atteindre la borne g , c'est-à-dire que $0 < u_\nu < g$. Alors (3.26) donne

$$(3.32) \quad -\sigma_\nu = p(u_\nu) + F.$$

Cette égalité montre que la réaction de la fondation dépend de la pénétration et représente une condition de type de compliance normale. Notons que (3.26) montre également que si nous avons une pénétration qui satisfait $0 < u_\nu < g$ alors $-\sigma_\nu \geq F$. En effet, ici nous avons $0 < u_\nu < g$ alors (3.32) implique que $-\sigma_\nu \geq F$. Nous concluons de ce qui précède que si $-\sigma_\nu < F$ alors il n'y a pas de pénétration et, par conséquent, F représente un seuil de pénétration, en dessous duquel la pénétration n'est pas possible. Ce genre de comportement caractérise une croûte rigide-élastique.

e) Contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et terme de mémoire. Introduisons à présent une condition de contact similaire à celle de (3.26). Ce type de contact avec la couche molle de la fondation est modélisé par une loi de compliance normale, de contrainte unilatérale et terme de mémoire. Cette loi est caractérisée par les relations suivantes

$$(3.33) \quad \left. \begin{aligned} u_\nu(t) &\leq g, \quad \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t) \leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t)) &= 0, \\ 0 \leq \xi(t) &\leq F \left(\int_0^t b(t-s) u_\nu^+(s) ds \right), \\ \xi(t) &= 0 \quad \text{si } u_\nu(t) < 0, \\ \xi(t) &= F \left(\int_0^t b(t-s) u_\nu^+(s) ds \right) \quad \text{si } u_\nu(t) > 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

L'obtention de cette loi de contact est similaire à celle de (3.26). La différence majeure par rapport à la condition (3.26) vient ici du fait que le seuil de pénétration dépend

d'un terme de mémoire en relation avec l'histoire de la pénétration, i.e.

$$F\left(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s) ds\right).$$

En considérant cette dépendance le problème devient plus intéressant du point de vue mathématique. Supposons maintenant qu'il y ait pénétration à l'instant t sans atteindre la borne g , c'est-à-dire que $0 < u_\nu(t) < g$. Alors (3.33) donne

$$(3.34) \quad -\sigma_\nu(t) = p(u_\nu(t)) + F\left(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s) ds\right)$$

Cette égalité montre que la réaction de la fondation est orientée vers le corps et dépend tant de la pénétration que de son histoire.

Conclusion. La condition (3.33) montre que lorsqu'il y a séparation entre la surface du corps et de la fondation alors la contrainte normale s'annule. Ensuite, elle suit une condition de compliance normale de la forme (3.34) jusqu'à la limite g ; puis, lorsque cette limite est atteinte, le contact suit à une condition unilatérale de type Signorini avec interstice g . Pour cette raison la condition (3.33) représente une condition de compliance normale avec contrainte unilatérale et effets de mémoire. Nous reviendrons sur cette condition dans le Chapitre 6 du manuscrit.

3.4 Lois de frottement

Dans cette section nous allons introduire les lois de frottement qui seront utilisées par la suite dans ce manuscrit. Ces lois sont représentées par des relations entre la composante tangentielle du champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\tau$, la composante normale du champ de contraintes σ_ν et la vitesse tangentielle $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ ou le déplacement tangentiel \mathbf{u}_τ .

a) Frottement classique de Coulomb. Il s'agit de la loi la plus connue et la plus utilisée des lois de frottement. Cette loi a été formulée pour la première fois par Amontons en 1699. Nous présentons ici deux versions de la loi de Coulomb qui correspondent au cas statique et d'évolution.

Le cas statique. Dans ce cas, la loi de Coulomb se formule de la façon suivante :

$$(3.35) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq F_b, \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = F_b \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Dans (3.35) F_b représente le seuil de frottement (ce seuil n'est pas fixé et dépend du coefficient de frottement et de la solution du problème).

Une représentation graphique de cette loi, dans le cas $F_b = \mu|\sigma_\nu|$, est donnée en Figure I.3.8 ci-dessous.

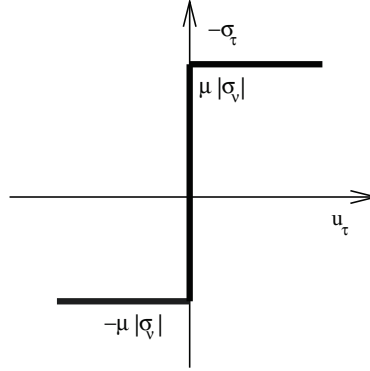


FIGURE I.3.8 – Loi de Coulomb (version statique).

Le cas d'évolution. Dans ce cas la loi de Coulomb se formule de la façon suivante :

$$(3.36) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq F_b, \\ -\sigma_\tau = F_b \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} \quad \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Ici $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ représente la vitesse tangentielle.

Remarquons que dans (3.35) et (3.36) le contact peut avoir deux statuts différents. Dans le cas où $\|\sigma_\tau\| < F_b$ on a un statut d'adhérence car, effectivement, dans ce cas on ne peut pas avoir $\mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0}$ ou $\dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}$. En outre, dans le cas où $\|\sigma_\tau\| = F_b$ on a un statut de glissement. En effet, dans ce cas on peut avoir $\mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0}$ ou $\dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}$ ce qui montre que le glissement a lieu.

b) Contact avec une fondation mobile. Dans le cas où la fondation se déplace avec une vitesse \mathbf{v}^* , la loi de frottement de Coulomb s'écrit de la manière suivante :

$$(3.37) \quad \|\sigma_\tau\| \leq F_b, \quad -\sigma_\tau = F_b \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*\|} \quad \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^* \neq \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ici F_b représente le seuil de frottement, $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ est la vitesse tangentielle et $\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*$ représente la vitesse tangentielle relative des surfaces en contact. Nous supposons dans ce manuscrit que la vitesse de la fondation \mathbf{v}^* est très grande par rapport à la vitesse tangentielle $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ et, pour cette raison, nous négligeons $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ par rapport à \mathbf{v}^* . Par conséquent, en utilisant les approximations $\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^* \approx -\mathbf{v}^* \neq \mathbf{0}$ et $\|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*\| \approx \|\mathbf{v}^*\|$, la loi de frottement (3.37) devient

$$(3.38) \quad \sigma_\tau = F_b \frac{\mathbf{v}^*}{\|\mathbf{v}^*\|} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Soit maintenant $\mathbf{v}^* = v^* \mathbf{n}^*$ avec $v^* < 0$, et soit $\frac{\mathbf{v}^*}{\|\mathbf{v}^*\|} = -\mathbf{n}^*$. Alors, (3.38) dévient

$$(3.39) \quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau = F_b \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

où \mathbf{n}^* est un vecteur unitaire donné.

Par la suite nous supposons que le seuil de frottement F_b dépend du champ de déplacement \mathbf{u} . Cette hypothèse est naturelle car, par exemple, dans le cas de la loi classique de frottement de Coulomb, nous avons

$$(3.40) \quad F_b = \mu |\sigma_\nu|,$$

où μ représente le coefficient de frottement et σ_ν dépend de \mathbf{u} via la loi de comportement. Pour être plus précis, dans le cas d'un comportement élastique $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ on a

$$\sigma_\nu = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}$$

et, par conséquent, (3.40) devient

$$(3.41) \quad F_b = \mu S(\mathbf{u}) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

où $S(\mathbf{u}) = |(\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}|$.

Nous considérons maintenant la situation lorsque le contact est modélisé avec la condition de compliance normale associée à la loi frottement classique de Coulomb. Dans ce cas $-\sigma_\nu = p(u_\nu) \geq 0$ et donc, $F_b = \mu |\sigma_\nu| = \mu p(u_\nu)$. Il en résulte que l'égalité (3.41) reste vraie, cette fois-ci avec le choix $S(\mathbf{u}) = p(u_\nu)$. Une remarque similaire peut être faite pour la loi de frottement de Coulomb, lorsque le seuil de frottement est donné par

$$(3.42) \quad F_b = \mu |R\sigma_\nu| \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

où R est un opérateur de régularisation présenté dans le Chapitre 1 (cf (1.3)). Rappelons ici que l'opérateur R est utilisé dans la littérature pour des raisons mathématiques, car il augmente la régularité de la contrainte normale sur la frontière. En outre, nous notons que l'utilisation de l'opérateur R a été utilisé dans la littérature dans l'étude des problèmes de contact avec contraintes unilatérales, voir par exemple [16, 22, 34, 57]. Le seuil de frottement (3.42) sera utilisé dans les Chapitres 6 et 7 de ce manuscrit.

Nous combinons maintenant les égalités (3.39) et (3.41) afin d'obtenir la loi de frottement

$$(3.43) \quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu S(\mathbf{u}) \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3$$

Cette loi sera utilisée dans le Chapitre 4 du manuscrit.

c) Loi de frottement avec usure. Rappelons d'abord que l'étude des problèmes de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale a été faite dans [8, 9, 27, 63]. Dans ces travaux l'usure des surfaces en contact n'a pas été prise en considération. Toutefois, l'expérience primaire montre que lorsque deux surfaces se trouvent en contact glissant leur usure se produit. Dans la littérature, la prise en compte de ce phénomène se fait à l'aide d'une variable de surface, la fonction d'usure, ci-après notée w . La condition de contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et usure se formule de la façon suivante :

$$(3.44) \quad \left. \begin{aligned} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu - w) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu - w)) = 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+.$$

Pour plus de détails voir [34, 57, 64].

D'une autre part, en utilisant l'égalité (3.39) avec $F_b = \mu|\sigma_\nu|$, nous avons

$$(3.45) \quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu |\sigma_\nu| \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+.$$

En supposant maintenant que la contrainte normale satisfait une loi de compliance normale avec usure

$$(3.46) \quad -\sigma_\nu = p(u_\nu - w) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+,$$

l'égalité (3.45), devient

$$(3.47) \quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu p(u_\nu - w) \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+.$$

Nous étendons cette condition au cas où le contact est unilatéral, c'est-à-dire lorsque $u_\nu(t) = g$. Par conséquent, l'égalité (3.47) est valable aussi dans ce cas et nous utilisons sous cette forme dans le Chapitre 5 du manuscrit.

d) Loi d'Archard. L'évolution de la fonction d'usure est décrite dans la littérature par la loi d'Archard suivante :

$$(3.48) \quad \dot{w} = k |\sigma_\nu| \|\mathbf{v}\| \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+.$$

Ici k représente le coefficient d'usure. Dans le cas d'un contact glissant, la loi (3.48), devient

$$(3.49) \quad \dot{w} = k |\sigma_\nu| \|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*\| \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+,$$

où \mathbf{v}^* représente la vitesse de la fondation.

D'autre part, en utilisant à nouveau l'approximation $\|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*\| \approx \|\mathbf{v}^*\|$, l'équation (3.49) devient

$$(3.50) \quad \dot{w} = k |\sigma_\nu| \|\mathbf{v}^*\| \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+.$$

Notons maintenant $\alpha = k \|\mathbf{v}^*\|$, afin d'écrire (3.50) sous la forme

$$(3.51) \quad \dot{w} = \alpha |\sigma_\nu| \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+.$$

Enfin, nous utilisons l'égalité (3.46), et par conséquent, nous obtenons l'équation différentielle suivante

$$(3.52) \quad \dot{w}(t) = \alpha p(u_\nu(t) - w(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+.$$

L'égalité (3.52) représente une version de la loi d'Archard qui régit l'évolution de la fonction de l'usure dans le cas d'un contact glissant avec compliance normale. Nous allons utiliser cette loi dans le Chapitre 5 de ce manuscrit. Pour plus d'information sur cette loi, nous pouvons se référer à [57].

Nous finissons cette section avec la remarque que l'analyse variationnelle de différents modèles de contact avec usure peut être trouvée dans [12, 58].

Deuxième partie

Problèmes de contact glissant

Partie II

Problèmes de contact glissant

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude théorique et numérique de quelques problèmes de contact glissant en petites déformations. Cette partie est divisée en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous étudions un problème de contact élastique avec compli-ance normale, contrainte unilatérale et terme de mémoire. Pour ce problème, nous donnons la formulation forte et variationnelle. Nous prouvons ensuite un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. Enfin, nous étudions quelques résultats de convergence puis nous présentons la formulation duale pour ce problème et nous terminons par un résultat sur l'estimation d'erreur. Dans le chapitre suivant, nous considérons un problème similaire au celui du chapitre précédent, en tenant compte de l'usure des surfaces de contact. Tout d'abord, nous donnons successivement la formulation forte et variationnelle du problème de contact. Puis, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible. Pour finir ce chapitre, nous présentons un résultat de convergence. Dans le troisième chapitre, nous traitons un problème viscoélastique de contact. Après avoir posé le problème mécanique, nous décrivons sa formulation variationnelle. Ensuite, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité. On poursuit avec un résultat de convergence de la dépendance de la solution par rapport au paramètre. L'analyse du problème se termine par l'obtention d'estimation d'erreur de discrétisation spatiale et temporelle. Finalement, dans le quatrième et dernier chapitre nous nous intéressons à l'étude quasi-statique d'un problème de contact d'un corps viscoplastique. D'une manière analogue avec le chapitre précédent, on propose la formulation variationnelle pour le problème mécanique et on poursuit avec un résultat d'existence et d'unicité. Nous introduisons ensuite un problème viscoplastique avec variables internes d'état. On termine par un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème.

Chapitre 4

Problème de contact élastique

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique qui décrit le contact glissant entre un corps élastique et une fondation plane, qui se déplace avec une vitesse constante (tapis roulant). La loi constitutive de comportement est supposée non-linéaire et élastique, et le processus est quasistatique. Le contact est décrit à l'aide d'une loi de compliance normale avec contrainte unilatérale et la loi de frottement associée est de type de Coulomb. Ce chapitre est composé de six sections. Dans la première section, nous présentons la formulation forte du problème ainsi que les hypothèses sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle du problème de contact. Ensuite, dans la deuxième section, nous fournissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible sous une hypothèse de petitesse. Dans la troisième section, nous démontrons un résultat de convergence, portant sur la perturbation des données. La quatrième section est liée à une méthode de pénalisation. Plus précisément, nous démontrons que la solution faible du problème de contact avec loi de compliance normale et seuil de pénétration converge vers la solution faible du problème de contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et seuil de pénétration, lorsque le coefficient de rigidité de la fondation converge vers l'infini. Dans la cinquième section, nous présentons la régularisation de ce problème. La sixième section est consacrée à la formulation duale de ce problème. Enfin, dans la septième section, nous présentons un résultat d'estimation de l'erreur d'approximation variationnelle. Une partie du travail présenté dans ce chapitre fait l'objet de l'article [70]. Rappelons aussi qu'un problème de contact glissant pour des matériaux élastiques a été étudié dans [3]. Par ailleurs l'étude du problème statique de Signorini avec frottement pour les matériaux élastiques, basée sur des résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques a été faite dans [16]. Une extension de ces résultats a été obtenue dans [17, 18].

4.1 Formulation du problème

Le cadre physique correspond à celui introduit dans la section 3.1. Pour rappel, on considère un corps élastique occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une frontière Γ divisée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 (avec $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$), correspondant aux différentes conditions aux limites. Le corps est fixé sur Γ_1 , une densité de forces volumiques f_0 agit dans Ω et une force de traction surfacique de densité f_2 agit sur Γ_2 . Enfin, Γ_3 correspond à la partie de contact entre le corps déformable et une fondation mobile. Rappelons ici que la vitesse de la fondation est constante.

Pour ce problème nous présentons la formulation classique, qui peut s'énoncer de la façon suivante :

Problème \mathcal{P} . *Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ ainsi qu'un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$(4.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(4.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(4.5) \quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mu S(\mathbf{u}(t)) \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et il existe $\xi : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait

$$(4.6) \quad \left. \begin{aligned} u_\nu(t) \leq g, \quad \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t) &\leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t)) &= 0, \\ 0 \leq \xi(t) \leq F, \\ \xi(t) = 0 \quad \text{si } u_\nu(t) < 0, \\ \xi(t) = F \quad \text{si } u_\nu(t) > 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Pour simplifier l'écriture, nous allons dans la suite de ce chapitre omettre la dépendance par rapport à t et faire l'étude du Problème \mathcal{P} à un temps t fixé.

Pour ce problème, l'équation (4.1) représente la loi constitutive élastique du matériau dans laquelle \mathcal{F} est une fonction constitutive (éventuellement non linéaire). Puis,

(4.2) est l'équation d'équilibre, où \mathbf{f}_0 représente la densité des forces volumiques. Ensuite, (4.3) et (4.4) représentent les conditions aux limites de déplacement-traction, où \mathbf{f}_2 représente la densité des forces de tractions. La condition (4.5) représente la loi de frottement présentée dans le Chapitre 3 Section 3.4 (cf (3.43)). Rappelons ici que \mathbf{n}^* est un vecteur unitaire dans le plan de la fondation, μ représente le coefficient de frottement et S est un opérateur présenté dans le Chapitre 3 Section 3.4 (cf (3.41)). Enfin, les relations (4.6) représentent les conditions de contact avec la loi de compliance normale, contrainte unilatérale et seuil de pénétration. Pour une explication de fond plus détaillée sur cette condition de contact, nous renvoyons au Chapitre 3 Section 3.3.

Dans l'étude du problème mécanique (4.1)–(4.6), nous faisons les hypothèses suivantes. Nous supposons que l'opérateur d'élasticité \mathcal{F} vérifie les conditions suivantes :

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) } \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) = \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, nous supposons que les forces volumiques \mathbf{f}_0 et les tractions surfaciques \mathbf{f}_2 ont respectivement la régularité

$$(4.8) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d.$$

De même, nous supposons que la fonction de compliance normale p vérifie les conditions suivantes :

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \quad \text{si et seulement si } r \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Nous supposons également que le seuil de pénétration F et le coefficient de frottement μ vérifient respectivement les conditions suivantes :

$$(4.10) \quad F \in L^\infty(\Gamma_3), \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

$$(4.11) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Enfin, nous supposons que l'opérateur S vérifie les conditions suivantes :

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } S : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_S > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|S(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) - S(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2)\| \leq L_S \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| \\ \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } \mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d. \\ \text{(d) } \mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right.$$

Maintenant, nous nous intéressons à la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} . Pour cela, nous introduisons l'ensemble de déplacements admissibles U , l'opérateur $P : V \rightarrow V$, la fonctionnelle $j : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{f} \in V$ définis par

$$(4.13) \quad U = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \},$$

$$(4.14) \quad (P\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(4.15) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} F v_\nu^+ da + \int_{\Gamma_3} \mu S(\mathbf{u}) \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v}_\tau da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(4.16) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

r^+ étant la partie positive de r , i.e. $r^+ = \max\{r, 0\}$.

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ un couple des fonctions suffisamment régulières qui satisfait (4.1)–(4.6). Soit $\mathbf{v} \in U$. Nous utilisons la formule de Green (1.4) afin d'obtenir :

$$(4.17) \quad \begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})))_Q &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) da. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (4.16), l'égalité (4.17) devient

$$(4.18) \quad \begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})))_Q &= (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) da. \end{aligned}$$

Maintenant, nous écrivons

$$\begin{aligned} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) &= (\sigma_\nu + p(u_\nu) + \xi)(v_\nu - g) \\ &+ (\sigma_\nu + p(u_\nu) + \xi)(g - u_\nu) - (p(u_\nu) + \xi)(v_\nu - u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3, \end{aligned}$$

Alors, en utilisant les conditions (4.6) et la définition (4.13), nous obtenons :

$$(4.19) \quad \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \geq -(p(u_\nu) + \xi)(v_\nu - u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Nous utilisons (4.6), encore une fois, et l'hypothèse (4.10) sur la fonction F afin de déduire que

$$(4.20) \quad F(v_\nu^+ - u_\nu^+) \geq \xi(v_\nu - u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ensuite, nous additionnons les inégalités (4.19) et (4.20) et nous intégrons le résultat sur Γ_3 pour constater que

$$(4.21) \quad \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) da \geq - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(v_\nu - u_\nu) da - \int_{\Gamma_3} F(v_\nu^+ - u_\nu^+) da.$$

Nous combinons désormais l'égalité (4.18), l'inégalité (4.21) et la condition (4.5) pour déduire que

$$(4.22) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(v_\nu - u_\nu) da \\ - \int_{\Gamma_3} F(v_\nu^+ - u_\nu^+) da - \int_{\Gamma_3} \mu S(\mathbf{u}) \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) da.$$

Enfin, nous utilisons la loi constitutive (4.1) et les définitions (4.13)–(4.15). Par conséquent, nous obtenons dans ce qui suit la formulation variationnelle du problème mécanique \mathcal{P} .

Problème \mathcal{P}_V . *Trouver un champ de déplacements \mathbf{u} tel que*

$$(4.23) \quad \mathbf{u} \in U, \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + (P\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \\ + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Notons que le Problème \mathcal{P}_V est formulé en terme de déplacements. Une fois que ce dernier est connu, on peut aisément déduire le champ de contraintes à l'aide de la loi constitutive (4.1). Un couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ qui satisfait (4.1) et (4.23) est appelé *solution faible* du problème de contact glissant \mathcal{P} .

4.2 Existence et unicité de la solution

Cette section est destinée à présenter l'existence et l'unicité du Problème \mathcal{P}_V , sous une hypothèse de petitesse portant sur le coefficient de frottement.

Théorème 4.1. *Supposons que les hypothèses (4.7)–(4.12) sont vérifiées. Alors, il existe une constante μ_0 , ne dépendant que de Ω , Γ_1 , Γ_3 , \mathcal{F} et S , tel que le Problème \mathcal{P}_V admet une solution unique si*

$$(4.24) \quad \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0.$$

Démonstration. Pour ce faire, nous appliquons le Théorème 2.15 avec $X = V$ et $K = U$. Nous considérons l’opérateur $A : V \rightarrow V$ défini par

$$(4.25) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + (P\mathbf{u}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Nous utilisons les hypothèses (4.7)(c) et (4.9)(c) afin de voir que

$$(4.26) \quad (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{F}}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

D’autre part, en utilisant (4.7)(b), (4.9)(b) et l’inégalité de trace (1.8), nous avons

$$(4.27) \quad \|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Nous concluons par (4.26) et (4.27) que A est un opérateur continu Lipschitzien, fortement monotone sur l’espace V . Donc, l’opérateur A satisfait les conditions (2.1)(4), (5) avec $m = m_{\mathcal{F}}$ et $M = (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p)$.

Soit maintenant $\boldsymbol{\eta} \in V$. Nous notons que la fonctionnelle $j(\boldsymbol{\eta}, \cdot)$ définie par (4.15) est convexe. Puis, en utilisant les propriétés de l’opérateur de trace, nous pouvons facilement voir qu’elle est continue. Nous en déduisons que j satisfait la condition (2.15) (a). Nous considérons maintenant les éléments $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Ensuite, en utilisant les hypothèses (4.11)–(4.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} & j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_2) - j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) \\ &= \int_{\Gamma_3} \mu(S(\boldsymbol{\eta}_1) - S(\boldsymbol{\eta}_2)) \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}_{1\tau}) \, da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\| \|\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}_{1\tau}\| \, da. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_2) - j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) \\ &\leq L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de trace (1.8) et l'inégalité précédente, afin de voir que

$$(4.28) \quad \begin{aligned} j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_2) - j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) \\ \leq c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned}$$

Il résulte maintenant de (4.28) que la fonctionnelle j satisfait la condition (2.15)(b) avec $\alpha = c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$.

Soit

$$(4.29) \quad \mu_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2 L_S}.$$

Alors, il est facile de voir que μ_0 ne dépend que de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}$ et S . Nous supposons maintenant que la condition (4.24) est vérifiée. Ensuite, nous obtenons $c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < m_{\mathcal{F}}$, ce qui implique que $m > \alpha$. Le Théorème 4.1 est maintenant une conséquence directe du Théorème 2.15. \square

Nous concluons, d'après le Théorème 4.1 que le Problème \mathcal{P} admet une solution unique. En outre, la solution faible a donc pour régularité $\mathbf{u} \in U$ et $\boldsymbol{\sigma} \in Q$. De plus, en utilisant des arguments standards, il en résulte que

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega$$

et, en utilisant l'hypothèse (4.8) nous déduisons que

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d.$$

Par conséquent, la solution faible a la régularité $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in U \times Q_1$.

4.3 Dépendance continue par rapport aux données

Dans cette section, nous supposons que les conditions (4.7)–(4.12) sont vérifiées et nous désignons par \mathbf{u} la solution du Problème \mathcal{P} obtenue dans le Théorème 4.1. Pour chaque $\eta > 0$, $\mathbf{f}_{0\eta}, \mathbf{f}_{2\eta}, p_\eta, F_\eta$ et μ_η , représentent respectivement des perturbations de $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, p, F$ et μ , qui vérifient les conditions (4.8)–(4.11). Avec ces données, nous définissons l'opérateur $P_\eta : V \rightarrow V$, la fonctionnelle $j_\eta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément

$\mathbf{f}_\eta \in V$ par les égalités suivantes :

$$(4.30) \quad (P_\eta \mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} p_\eta(\mathbf{u}_\nu) \mathbf{v}_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(4.31) \quad j_\eta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} F_\eta v_\nu^+ da + \int_{\Gamma_3} \mu_\eta S(\mathbf{u}) \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v}_\tau da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(4.32) \quad (\mathbf{f}_\eta, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0\eta} \cdot \mathbf{v} dx, + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2\eta} \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Ensuite, nous considérons la perturbation du problème \mathcal{P}_V suivante.

Problème \mathcal{P}_V^η . *Trouver un champ de déplacements \mathbf{u}_η tel que*

$$(4.33) \quad \mathbf{u}_\eta \in U, \quad (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}_\eta))_Q + (P_\eta \mathbf{u}_\eta, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\eta)_V \\ + j_\eta(\mathbf{u}_\eta, \mathbf{v}) - j_\eta(\mathbf{u}_\eta, \mathbf{u}_\eta) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\eta)_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Il résulte du Théorème 4.1 que, pour $\eta > 0$, le Problème \mathcal{P}_V^η admet une unique solution \mathbf{u}_η .

Nous considérons maintenant les hypothèses ci-après :

$$(4.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que} \\ \text{(a) } |p_\eta(\mathbf{x}, r) - p(\mathbf{x}, r)| \leq G(\eta)(|r| + 1) \\ \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \text{ pour chaque } \eta > 0. \\ \text{(b) } \lim_{\eta \rightarrow 0} G(\eta) = 0. \end{array} \right.$$

$$(4.35) \quad F_\eta \rightarrow F \text{ dans } L^\infty(\Gamma_3) \text{ lorsque } \eta \rightarrow 0.$$

$$(4.36) \quad \mu_\eta \rightarrow \mu \text{ dans } L^\infty(\Gamma_3) \text{ lorsque } \eta \rightarrow 0.$$

$$(4.37) \quad \mathbf{f}_{0\eta} \rightarrow \mathbf{f}_0 \text{ dans } C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d) \text{ lorsque } \eta \rightarrow 0.$$

$$(4.38) \quad \mathbf{f}_{2\eta} \rightarrow \mathbf{f}_2 \text{ dans } C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d) \text{ lorsque } \eta \rightarrow 0.$$

Nous avons le résultat de convergence ci-dessous, qui représente le résultat principal de cette section.

Théorème 4.2. *Supposons que les hypothèses (4.34)–(4.38) soient vérifiées. Alors, la solution \mathbf{u}_η du Problème \mathcal{P}_V^η converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}_V , c'est-à-dire.*

$$(4.39) \quad \mathbf{u}_\eta \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } U \text{ lorsque } \eta \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\eta > 0$. Nous prenons $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (4.33) et $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\eta$ dans (4.23) et nous additionnons les inégalités qui en résultent pour obtenir

$$(4.40) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q \\ & \leq (P_\eta \mathbf{u}_\eta - P\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_\eta)_V + (\mathbf{f}_\eta - \mathbf{f}, \mathbf{u}_\eta - \mathbf{u})_V \\ & \quad + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\eta) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j_\eta(\mathbf{u}_\eta, \mathbf{u}) - j_\eta(\mathbf{u}_\eta, \mathbf{u}_\eta). \end{aligned}$$

Nous estimons maintenant chaque terme de l'inégalité précédente. Tout d'abord, en utilisant l'hypothèse (4.7), on voit que

$$(4.41) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V^2.$$

Ensuite, nous utilisons la définition (4.14), la monotonie de la fonction p_η , (4.30) et l'hypothèse (4.34) afin de voir que

$$\begin{aligned} (P_\eta \mathbf{u}_\eta - P\mathbf{u}, \mathbf{u}_\eta - \mathbf{u})_V &= \int_{\Gamma_3} (p_\eta(\mathbf{u}_{\eta\nu}) - p(\mathbf{u}_\nu))(\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_{\eta\nu}) \, da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} (p_\eta(\mathbf{u}_\nu) - p(\mathbf{u}_\nu))(\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_{\eta\nu}) \, da \leq \int_{\Gamma_3} |p_\eta(\mathbf{u}_\nu) - p(\mathbf{u}_\nu)| |\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_{\eta\nu}| \, da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} G(\eta)(|\mathbf{u}_\nu| + 1) |\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_{\eta\nu}| \, da. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de trace (1.8), après quelques calculs élémentaires, nous constatons que

$$(4.42) \quad (P_\eta \mathbf{u}_\eta - P\mathbf{u}, \mathbf{u}_\eta - \mathbf{u})_V \leq G(\eta)(c_0^2 \|\mathbf{u}\|_V + c_0 \operatorname{mes}(\Gamma_3)^{1/2}) \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V.$$

Puis, en utilisant les définitions (4.15) et (4.31), nous avons

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\eta) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j_\eta(\mathbf{u}_\eta, \mathbf{u}) - j_\eta(\mathbf{u}_\eta, \mathbf{u}_\eta) \\ &= \int_{\Gamma_3} (F - F_\eta)(\mathbf{u}_{\eta\nu}^+ - \mathbf{u}_\nu^+) \, da + \int_{\Gamma_3} (\mu S(\mathbf{u}) - \mu_\eta S(\mathbf{u}_\eta)) \mathbf{n}^*(\mathbf{u}_{\eta\tau} - \mathbf{u}_\tau) \, da. \end{aligned}$$

D'une autre part, en écrivant

$$\mu S(\mathbf{u}) - \mu_\eta S(\mathbf{u}_\eta) = \mu(S(\mathbf{u}) - S(\mathbf{u}_\eta)) + (\mu - \mu_\eta)S(\mathbf{u}_\eta)$$

et, en utilisant les hypothèses (4.11) et (4.12)(b) combinées avec l'inégalité de trace (1.8), on obtient

$$\begin{aligned}
 (4.43) \quad & j(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\eta) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j_\eta(\mathbf{u}_\eta, \mathbf{u}) - j_\eta(\mathbf{u}_\eta, \mathbf{u}_\eta) \\
 & \leq c_0 \|F - F_\eta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V + c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V^2 \\
 & \quad + c_0 \|\mu - \mu_\eta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|S(\mathbf{u}_\eta)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V \\
 & \leq c_0 \|F - F_\eta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V + c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V^2 \\
 & \quad + c_0 \|\mu - \mu_\eta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (c_0 L_S \|\mathbf{u}_\eta\|_V + \|S(0_V)\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V.
 \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous déduisons que

$$(4.44) \quad (\mathbf{f}_\eta - \mathbf{f}, \mathbf{u}_\eta - \mathbf{u})_V \leq \|\mathbf{f}_\eta - \mathbf{f}\|_V \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V.$$

Nous combinons les inégalités (4.40)–(4.44) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 (4.45) \quad & (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V \\
 & \leq G(\eta) (c_0^2 \|\mathbf{u}\|_V + c_0 \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2}) + c_0 \|F - F_\eta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} \\
 & \quad + c_0 \|\mu - \mu_\eta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (c_0 L_S \|\mathbf{u}_\eta\|_V + \|S(0_V)\|_{L^2(\Gamma_3)}) + \|\mathbf{f}_\eta - \mathbf{f}\|_V.
 \end{aligned}$$

Nous prenons maintenant $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ dans (4.33) et, en utilisant (4.7)(c),(e), nous avons

$$m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_\eta\|_V^2 \leq (\mathbf{f}_\eta, \mathbf{u}_\eta)_V,$$

ce qui implique

$$\|\mathbf{u}_\eta\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{F}}} \|\mathbf{f}_\eta\|_V.$$

D'autre part, en utilisant (4.37) et (4.38), il existe une constante k qui ne dépend pas de η tel que

$$\|\mathbf{f}_\eta\|_V \leq k$$

et, puisque $m_{\mathcal{F}} > c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
 (4.46) \quad & \|\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}\|_V \leq c G(\eta) (\|\mathbf{u}\|_V + 1) + c \|F - F_\eta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \\
 & \quad + c \|\mu - \mu_\eta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(\frac{k}{m_{\mathcal{F}}} + \|S(0_V)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) + c \|\mathbf{f}_\eta - \mathbf{f}\|_V
 \end{aligned}$$

où c est une constante positive qui ne dépend pas de η .

La convergence (4.39) est maintenant une conséquence de l'inégalité (4.46) combinée avec les hypothèses (4.34)–(4.38). \square

En plus de l'intérêt mathématique du résultat de convergence (4.39), il est important du point de vue mécanique, car il indique que la solution faible de problème (4.1)–(4.6) dépend continûment de la fonction de complianse normale, du seuil de la pénétration, du coefficient de frottement, des forces volumiques et des tractions surfaciques.

4.4 Méthode de pénalisation

Nous complétons l'étude du Problème \mathcal{P} en utilisant une méthode de pénalisation. Pour ce faire, nous considérons le problème de contact pénalisé suivant où le coefficient $\delta > 0$ représente le coefficient de déformabilité de la fondation.

Problème \mathcal{P}_δ . *Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$(4.47) \quad \boldsymbol{\sigma}_\delta = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\delta) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4.48) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}_\delta + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4.49) \quad \mathbf{u}_\delta = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(4.50) \quad \boldsymbol{\sigma}_\delta \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(4.51) \quad -\boldsymbol{\sigma}_{\delta\tau} = \mu S(\mathbf{u}_\delta) \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

et il existe $\xi_\delta : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait

$$(4.52) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_{\delta\nu} + p(u_{\delta\nu}) + \frac{1}{\delta} p(u_{\delta\nu} - g) + \xi_\delta = 0, \\ 0 \leq \xi_\delta \leq F, \\ \xi_\delta = 0 \text{ si } u_{\delta\nu} < 0, \\ \xi_\delta = F \text{ si } u_{\delta\nu} > 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ici, $u_{\delta\nu}$ et $\sigma_{\delta\nu}$ représentent respectivement les composantes normales de la fonction \mathbf{u}_δ et $\boldsymbol{\sigma}_\delta$. Par ailleurs, $\boldsymbol{\sigma}_{\delta\tau}$ représente la composante tangentielle de la fonction $\boldsymbol{\sigma}_\delta$. Le Problème \mathcal{P}_δ est construit en utilisant des hypothèses similaires à ceux utilisées dans la formulation du Problème \mathcal{P} . La différence réside dans le fait que la condition de

contact (4.6) est remplacée par la condition (4.52), dans laquelle la contrainte $u_\nu \leq g$ est pénalisée. Le Problème \mathcal{P}_δ représente un problème de contact avec compliance normale et seuil de pénétration, sans contrainte unilatérale. Dans cette condition, la pénétration est autorisée durant toute la phase de contact.

Nous considérons maintenant l'opérateur $G : V \rightarrow V$ défini par l'égalité

$$(4.53) \quad (G\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)v_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Puis, en utilisant la notation (4.14)–(4.16) et des arguments similaires à ceux utilisés dans le cas du Problème \mathcal{P} , nous obtenons la formulation variationnelle suivante pour le Problème \mathcal{P}_δ .

Problème \mathcal{P}_V^δ . *Trouver un champ de déplacements \mathbf{u}_δ tel que*

$$(4.54) \quad \mathbf{u}_\delta \in V, \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\delta), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\delta))_Q + (P\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\delta)_V + \frac{1}{\delta} (G\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\delta)_V \\ + j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\delta)_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous avons les résultats d'existence, d'unicité et de convergence suivants.

Théorème 4.3. *Supposons que les hypothèses (4.7)–(4.12) et (4.24) sont vérifiées.*

Alors :

- 1) *Pour tout $\delta > 0$ le Problème \mathcal{P}_V^δ possède une solution unique $\mathbf{u}_\delta \in V$.*
- 2) *La solution \mathbf{u}_δ converge fortement vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}_V , i.e.*

$$(4.55) \quad \mathbf{u}_\delta \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

La démonstration de ce théorème se fera en plusieurs étapes. Elle est basée sur des arguments de monotonie, de compacité et des propriétés de l'intégrale de Lebesgue. Pour donner cette démonstration, nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses (4.7)–(4.12) et (4.24) sont vérifiées. Dans la première étape, nous rappelons le résultat préliminaire suivant.

Lemme 4.4. *L'opérateur G a les propriétés suivantes :*

$$(4.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \|G\mathbf{u} - G\mathbf{v}\|_V \leq c_0^2 L_p \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \\ \text{(b)} \quad (G\mathbf{u} - G\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \\ \text{(c)} \quad (G\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \leq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{v} \in U. \\ \text{(d)} \quad G\mathbf{u} = \mathbf{0}_V \text{ si et seulement si } \mathbf{u} \in U. \end{array} \right.$$

La preuve du Lemme 4.4 peut être trouvée dans [65, p.129]. Toutefois nous avons choisi de présenter la démonstration.

Démonstration. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. En utilisant (4.9) et (4.53), nous avons

$$\begin{aligned} (G\mathbf{u} - G\mathbf{v}, \mathbf{w})_V &= \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu - g) - p(v_\nu - g))w_\nu \, da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} |p(u_\nu - g) - p(v_\nu - g)| |w_\nu| \, da \leq L_p \int_{\Gamma_3} |u_\nu - v_\nu| |w_\nu| \, da. \end{aligned}$$

Notons que $|u_\nu - v_\nu| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$, $|w_\nu| \leq \|\mathbf{w}\|$ p.p sur Γ_3 et donc

$$(G\mathbf{u} - G\mathbf{v}, \mathbf{w})_V \leq L_p \int_{\Gamma_3} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \, da.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.8) afin de voir que

$$(G\mathbf{u} - G\mathbf{v}, \mathbf{w})_V \leq c_0^2 L_p \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V,$$

ce qui implique que

$$(4.57) \quad \|G\mathbf{u} - G\mathbf{v}\|_V \leq c_0^2 L_p \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V.$$

De plus, en utilisant (4.9)(c) nous avons

$$(4.58) \quad (G\mathbf{u} - G\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu - g) - p(v_\nu - g))(u_\nu - v_\nu) \, da \geq 0.$$

Les inégalités (4.57) et (4.58) montrent que G est un opérateur de Lipschitz et fortement monotone, c'est-à-dire que G satisfait les conditions (4.56)(a) et (b).

D'une autre part, si $\mathbf{u} \in V$ et $\mathbf{v} \in U$ alors, en utilisant (4.9) il est facile de voir que

$$\begin{aligned} p(u_\nu - g)(v_\nu - g) &\leq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \\ p(u_\nu - g)(g - u_\nu) &\leq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (4.59) \quad (G\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V &= \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)(v_\nu - u_\nu) \, da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)(v_\nu - g) \, da + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)(g - u_\nu) \, da \leq 0. \end{aligned}$$

Nous concluons de l'inégalité (4.59) que G satisfait la condition (4.56)(c)

Finalement, supposons que $G\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$. Alors $(G\mathbf{u}, \mathbf{u})_V = 0$ et donc

$$(4.60) \quad \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)u_\nu \, da = 0.$$

Nous utilisons (4.9)(c) et (4.53) pour obtenir l'inégalité

$$p(u_\nu - g)u_\nu \geq p(u_\nu - g)g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Par conséquent, puisque l'intégrale est positive, nous déduisons par (4.60) que

$$p(u_\nu - g)u_\nu = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Cette égalité combinée avec l'hypothèse (4.9)(e) sur la fonction de compliance normale implique que $u_\nu \leq g$ p.p. sur Γ_3 et donc nous déduisons que $\mathbf{u} \in U$.

Réciproquement, si $\mathbf{u} \in G$ il en résulte que $u_\nu \leq g$ p.p. sur Γ_3 et, en utilisant l'hypothèse (4.9)(e) il vient que

$$p(u_\nu - g) = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Nous utilisons maintenant la définition (4.53) de l'opérateur G pour déduire que $(G\mathbf{u}, \mathbf{u})_V = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in V$, ce qui implique que $G\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$.

Il résulte de ce qui précède que G satisfait la condition d'équivalence (4.56)(d), ce qui conclut la démonstration. \square

Ensuite, nous présentons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme 4.5. *Pour tout $\delta > 0$, il existe un élément unique $\mathbf{u}_\delta \in V$ qui satisfait l'inégalité variationnelle (4.54).*

Démonstration. Soit $\delta > 0$. Nous rappelons la définition (4.25) de l'opérateur A . Puis, en utilisant (4.26), (4.27) et (4.56)(a),(b), nous déduisons que $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} + \frac{1}{\delta}G\mathbf{v}$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. De ce fait, en utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration du Théorème 4.1, nous remarquons que le Lemme 4.5 est une conséquence directe du Théorème 2.15. \square

Puis, nous effectuons des estimations à priori sur la solution de l'inégalité (4.54), qui implique la convergence suivante.

Lemme 4.6. *Il existe un élément $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ et la suite $\{\mathbf{u}_\delta\}$, encore notée $\{\mathbf{u}_\delta\}$, qui converge faiblement à $\tilde{\mathbf{u}}$, i.e.,*

$$(4.61) \quad \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$. Nous prenons $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ dans (4.54) et puisque (4.7)(e) et (4.9)(e) impliquent $A\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, en utilisant (4.26), nous obtenons

$$(4.62) \quad m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_\delta\|_V^2 + \frac{1}{\delta} G(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta)_V \leq j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_\delta)_V.$$

En outre, nous utilisons (4.10)–(4.12) pour voir que la fonction j définie par (4.15) vérifie

$$(4.63) \quad \begin{aligned} j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) &\leq c_0 \text{mes}(\Gamma_3)^{\frac{1}{2}} \|F\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_\delta\|_V \\ &\quad + c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_\delta\|_V^2 + c_0 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|S(\mathbf{0}_V)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_\delta\|_V. \end{aligned}$$

Notons également que (4.53)(c) implique que

$$(4.64) \quad G(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta)_V \geq 0.$$

Puis, en utilisant (4.62)–(4.64) nous constatons que

$$\begin{aligned} &(m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_\delta\|_V \\ &\leq c_0 \text{mes}(\Gamma_3)^{\frac{1}{2}} \|F\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + c_0 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|S(\mathbf{0}_V)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\mathbf{f}\|_V. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'hypothèse de petitesse (4.24), on en déduit qu'il existe $c > 0$ qui ne dépend pas de δ tel que

$$(4.65) \quad \|\mathbf{u}_\delta\|_V \leq c.$$

La démonstration du Lemme 4.6 se termine en combinant l'inégalité (4.65) avec un argument de compacité. \square

Lemme 4.7. *Nous avons l'égalité $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.*

Démonstration. D'après le Lemme 4.6 nous considérons une suite $\{\mathbf{u}_\delta\}$, encore notée $\{\mathbf{u}_\delta\}$, tel que la convergence (4.61) est satisfaite. Soit $\delta > 0$ et soit $\mathbf{v} \in V$. Nous utilisons (4.54) et (4.25) afin de voir que

$$\frac{1}{\delta} (G\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V \leq (A\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\delta)_V + j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V.$$

Ensuite, puisque $A\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, en utilisant l'inégalité (4.27) de l'opérateur A , nous obtenons

$$(4.66) \quad \frac{1}{\delta} (G\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V \leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u}_\delta\|_V \|\mathbf{v} - \mathbf{u}_\delta\|_V \\ + j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V.$$

Nous utilisons maintenant la définition (4.15) afin de voir que

$$j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) = \int_{\Gamma_3} F(v_\nu^+ - u_{\delta\nu}^+) da + \int_{\Gamma_3} \mu S(\mathbf{u}_\delta) \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_{\delta\tau}) da$$

et, après quelques calculs élémentaires reposant sur l'hypothèse (4.7)–(4.12) et l'inégalité de trace (1.8), nous constatons que

$$(4.67) \quad j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) \leq c_0 (\|F\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3))^{1/2} \\ + L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|S(\mathbf{0}_V)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}_\delta\|_V.$$

Nous combinons (4.65)–(4.67) pour voir qu'il existe une constante c positive qui dépend de A, j, \mathbf{f}, μ, S et \mathbf{v} , mais qui est indépendante de δ , de sorte que

$$(4.68) \quad (G\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V \leq c\delta \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous prenons maintenant $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}$ dans (4.68), puis nous passons à la limite supérieure lorsque $\delta \rightarrow 0$ dans l'inégalité ainsi obtenue pour voir que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} (G\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \tilde{\mathbf{u}})_V \leq 0.$$

Par conséquent, en utilisant (4.56)(a),(b), la convergence (4.61) et un argument standard sur la pseudomonotonie (voir Proposition 2.5 dans le Chapitre 2), nous en déduisons que

$$(4.69) \quad \liminf_{\delta \rightarrow 0} (G\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V \geq (G\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

D'autre part, l'inégalité (4.68) implique que

$$(4.70) \quad \liminf_{\delta \rightarrow 0} (G\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous combinons les inégalités (4.69) et (4.70) pour obtenir

$$(G\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_V \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

et, en prenant $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}} - G\tilde{\mathbf{u}}$ dans cette dernière inégalité, il vient que $\|G\tilde{\mathbf{u}}\|_V^2 \leq 0$. Nous concluons que $G\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_V$ et, en utilisant (4.56)(d), il en résulte que

$$(4.71) \quad \tilde{\mathbf{u}} \in U.$$

Ensuite, nous utilisons l'inégalité (4.54), la définition (4.25) et (4.56)(c) pour voir que

$$(A\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\delta)_V + j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\delta)_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Nous concluons de ce qui précède que

$$(4.72) \quad (A\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V \leq j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Nous combinons maintenant la convergence faible (4.61) avec la compacité de l'opérateur de trace et les propriétés de la fonction p et l'opérateur S afin d'obtenir

$$(4.73) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}) = j(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(4.74) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} j(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) = j(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}).$$

Par conséquent, en prenant $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}} \in U$ dans (4.72) puis, en passant à la limite supérieure lorsque $\delta \rightarrow 0$ dans (4.72) et en utilisant les égalités (4.73) et (4.74), nous déduisons que

$$(4.75) \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} (A\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \tilde{\mathbf{u}})_V \leq 0.$$

En utilisant maintenant la pseudomonotonie de l'opérateur A , il en résulte que

$$(4.76) \quad \liminf_{\delta \rightarrow 0} (A\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V \geq (A\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

D'autre part, en procédant au passage à la limite inférieure lorsque $\delta \rightarrow 0$ dans (4.72) et en utilisant à nouveau les égalités (4.73) et (4.74), nous obtenons

$$(4.77) \quad \liminf_{\delta \rightarrow 0} (A\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v})_V \leq j(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - j(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) + (\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (4.76) et (4.77) pour voir que

$$(4.78) \quad (A\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_V \leq j(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - j(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) + (\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Il s'en suit maintenant de (4.71) et (4.78) que $\tilde{\mathbf{u}}$ satisfait l'inégalité variationnelle (4.23). Le Lemme 4.7 est maintenant une conséquence directe de la partie d'unicité du Théorème 4.1. \square

Nous continuons notre analyse par le résultat de convergence faible suivant.

Lemme 4.8. *La suite $\{\mathbf{u}_\delta\}$ converge faiblement dans V vers l'élément \mathbf{u} .*

Démonstration. Une analyse approfondie de la démonstration du Lemme 4.7 montre que si $\tilde{\mathbf{u}}$ est la limite faible de la suite $\{\mathbf{u}_\delta\} \subset V$, alors $\tilde{\mathbf{u}}$ satisfait l'inégalité variationnelle (4.23). Cette inégalité a une solution unique et, en outre, l'estimation (4.65) montre que la suite $\{\mathbf{u}_\delta\}$ est bornée dans V . Le Lemme 4.8 est maintenant une conséquence d'un argument standard de compacité (cf. [65] p.19). \square

La dernière étape est assurée par le résultat de convergence forte suivant.

Lemme 4.9. *La suite $\{\mathbf{u}_\delta\}$ converge fortement dans V à l'élément \mathbf{u} , c'est-à-dire*

$$(4.79) \quad \mathbf{u}_\delta \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$. En prenant $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}$ dans (4.76), nous avons

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} (A\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \tilde{\mathbf{u}})_V \geq 0.$$

Nous combinons l'inégalité précédente avec l'inégalité (4.75) pour trouver

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (A\mathbf{u}, \mathbf{u}_\delta - \tilde{\mathbf{u}})_V = 0.$$

Par conséquent, en utilisant l'égalité $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ nous obtenons

$$(4.80) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (A\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{u})_V = 0.$$

D'autre part puisque, la convergence faible de la suite $\{\mathbf{u}_\delta\}$ est garantie par le Lemme 4.8, il en résulte que

$$(4.81) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (A\mathbf{u}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{u})_V = 0.$$

Ensuite, la monotonie forte de l'opérateur A , nous conduit à

$$(4.82) \quad \begin{aligned} m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{u}\|_V^2 &\leq (A\mathbf{u}_\delta - A\mathbf{u}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{u})_V \\ &= (A\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{u})_V - (A\mathbf{u}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{u})_V. \end{aligned}$$

La convergence forte (4.79) est maintenant une conséquence des relations (4.80)–(4.82). \square

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du Théorème 4.3.

Démonstration. Les points 1) et 2) du Théorème 4.3 sont respectivement des conséquences directes des Lemmes 4.5 et 4.9. \square

Notons que le résultat de la convergence (4.55) peut être facilement étendu pour les solutions faibles des problèmes \mathcal{P} et \mathcal{P}_δ . En effet, soient $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}_\delta$ les fonctions définies respectivement par (4.1) et (4.47). En utilisant (4.7)(b) nous voyons que

$$(4.83) \quad \|\boldsymbol{\sigma}_\delta - \boldsymbol{\sigma}\|_Q = \|\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\delta) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_Q \leq L_{\mathcal{F}}\|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{u}\|_V.$$

Ensuite, nous utilisons la convergence (4.55) pour constater que

$$(4.84) \quad \boldsymbol{\sigma}_\delta \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } Q \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

Le résultat de la convergence (4.55) et (4.84) peut s'interpréter de manière mécanique de la façon suivante : la solution faible du problème de contact glissant avec compliance normale, contrainte unilatérale et seuil de pénétration peut être approchée d'aussi près que l'on souhaite par la solution du problème de contact glissant avec compliance normale et seuil de pénétration avec un coefficient de déformabilité suffisamment petit.

4.5 Régularisation

Dans cette section, nous continuons l'étude du Problème \mathcal{P} en utilisant une méthode de régularisation. Soit $\rho > 0$. Nous remplaçons la fonction j définie par (4.15) avec sa régularisation $j_\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par l'égalité

$$(4.85) \quad j_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} F\psi_\rho(v_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu\phi_\rho(S(\mathbf{u}))n^* \cdot \mathbf{v}_\tau da \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in V,$$

où $\psi_\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\phi_\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions différentiables définies par les égalités

$$(4.86) \quad \psi_\rho(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + \rho^2} - \rho & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

$$(4.87) \quad \phi_\rho(x) = \sqrt{x^2 + \rho^2} - \rho \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme 4.10. *Soit $\rho > 0$. Soit h une des fonctions ψ_ρ ou ϕ_ρ , alors les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$(4.88) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & |h(x) - h(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ (b) & |h(x) - |x|| \leq \rho \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ (c) & |h(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Démonstration. (a) Soit $\rho > 0$. Nous utilisons la définition (4.87) et la fonction ϕ , pour voir que

$$\begin{aligned} \phi_\rho(x) - \phi_\rho(y) &= \sqrt{x^2 + \rho^2} - \sqrt{y^2 + \rho^2} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + \rho^2} + \sqrt{y^2 + \rho^2}} \\ &= (x - y) \cdot \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + \rho^2} + \sqrt{y^2 + \rho^2}}, \end{aligned}$$

et, en utilisant l'inégalité

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + \rho^2} + \sqrt{y^2 + \rho^2}} \leq 1,$$

nous obtenons

$$(4.89) \quad |\phi_\rho(x) - \phi_\rho(y)| \leq |x - y|.$$

Nous utilisons maintenant la définition (4.86) et (4.87), afin de voir que

$$(4.90) \quad \phi_\rho(x) = \psi_\rho(x) \quad \forall x > 0.$$

Nous combinons (4.89) et (4.90) pour obtenir

$$(4.91) \quad |\psi_\rho(x) - \psi_\rho(y)| = |\phi_\rho(x) - \phi_\rho(y)| \leq |x - y|.$$

L'inégalité (4.91) montre que ϕ et ψ vérifient la condition (4.88)(a).

(b) Soit $\rho > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$(4.92) \quad |\phi_\rho(x) - |x|| = \left| \sqrt{x^2 + \rho^2} - \rho - |x| \right| = \rho + |x| - \sqrt{x^2 + \rho^2} \leq \rho.$$

Puis, en utilisant (4.90), nous déduisons que

$$(4.93) \quad |\psi_\rho(x) - |x|| = |\phi_\rho(x) - |x|| \leq \rho.$$

Nous concluons que ϕ et ψ vérifient la condition (4.88)(b).

(c) En utilisant (4.86) et (4.87), il est facile de voir que

$$(4.94) \quad \phi_\rho(0) = \psi_\rho(0) = 0.$$

Par conséquent, en utilisant les définitions (4.91) pour $y = 0$ et (4.94), nous obtenons

$$(4.95) \quad |\psi_\rho(x)| = |\phi_\rho(x)| \leq |x|,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Nous utilisons maintenant des arguments similaires à ceux utilisés dans la Section 4.1 et, la fonctionnelle j_ρ définie (4.85), pour obtenir la formulation variationnelle du problème de contact régularisé.

Problème \mathcal{P}_V^ρ . *Trouver un champ de déplacements \mathbf{u}_ρ tel que*

$$(4.96) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_\rho \in U, \quad & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho))_Q + (P\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho)_V \\ & + j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho)_V \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned}$$

Nous avons les résultats d'existence, d'unicité et de convergence suivants.

Théorème 4.11. *Sous les hypothèses de (4.7)–(4.12), il existe une constante μ_0 , qui ne dépend que de Ω , Γ_1 , Γ_3 , \mathcal{F} et S , tel que*

1) *Le Problème \mathcal{P}_V^ρ admet une solution unique si*

$$(4.97) \quad \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0.$$

2) *La solution \mathbf{u}_ρ du Problème \mathcal{P}_V^ρ converge fortement vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}_V , c'est-à-dire.*

$$(4.98) \quad \mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. 1) Pour résoudre l'inégalité variationnelle (4.96), nous utilisons le Théorème 2.15 avec $X = V$ et $K = U$. Notons tout d'abord que U est un sous-ensemble non vide fermé convexe de V . Nous utilisons ensuite l'opérateur $A : V \rightarrow V$ défini par (4.25), pour obtenir

$$(4.99) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + (P\mathbf{u}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

En outre, en utilisant (4.26) et (4.27), il est facile de voir que A est un opérateur de Lipschitz et fortement monotone dans l'espace V .

Ensuite, nous utilisons la fonction définie par (4.85)

$$j_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} F\psi_\rho(v_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu\phi_\rho(S(\mathbf{u}))\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v}_\tau da,$$

par conséquent, nous avons

$$j_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \int_{\Gamma_3} F|v_\nu| da + \int_{\Gamma_3} \mu|S(\mathbf{u})|\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v}_\tau da.$$

Nous combinons (4.7)–(4.12), (1.8) et l'inégalité précédente pour voir que

$$(4.100) \quad j_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq c_0 (\|F\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|S(\mathbf{u})\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{v}\|_V.$$

Par conséquent, il en résulte que la fonctionnelle j_ρ satisfait (2.11)(a).

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$; en utilisant (4.85) et (4.89) nous trouvons que

$$\begin{aligned} & j_\rho(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_\rho(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j_\rho(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j_\rho(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ &= \int_{\Gamma_3} \mu(\phi_\rho(S(\mathbf{u}_1)) - \phi_\rho(S(\mathbf{u}_2)))\mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}_{1\tau}) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} |\mu| \|S(\mathbf{u}_1) - S(\mathbf{u}_2)\| \|\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}_{1\tau}\| da \end{aligned}$$

Ensuite, nous combinons (4.11), (4.12)(b) et (1.8) pour voir que

$$(4.101) \quad \begin{aligned} & j_\rho(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_\rho(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j_\rho(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j_\rho(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ &\leq c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned}$$

Soit

$$(4.102) \quad \mu_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2 L_S}.$$

Il en résulte que μ_0 ne dépend que de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}$ et S . Par ailleurs, il résulte de (4.101) que j_ρ vérifie la condition (2.11)(b) avec $\alpha = c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$ et $m = m_{\mathcal{F}}$. Supposons que (4.97) est vraie et par conséquent, nous obtenons $\alpha < m_{\mathcal{F}}$. Nous concluons que le Problème \mathcal{P}_V^ρ admet une solution unique.

2) Soit $\rho > 0$. Nous prenons $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (4.96) et $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\rho$ dans (4.23). Ensuite, nous additionnons les inégalités qui en résultent pour obtenir

$$(4.103) \quad (A\mathbf{u}_\rho - A\mathbf{u}, \mathbf{u}_\rho - \mathbf{u})_V \leq j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\rho) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Puis, en utilisant (4.26), (4.15) et (4.85) ainsi que (4.103), nous avons

$$(4.104) \quad m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V^2 \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_{\Gamma_3} F(u_{\rho\nu}^+ - u_\nu^+ + \psi_\rho(u_\nu) - \psi_\rho(u_{\rho\nu})), da \\ \Delta_2 &= \int_{\Gamma_3} \mu(\phi_\rho(S(\mathbf{u}_\rho)) - S(\mathbf{u}))n^* \cdot (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_{\rho\tau}) da. \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons les définitions (4.86) et (4.93) pour obtenir que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \int_{\Gamma_3} F(|\psi_\rho(u_{\rho\nu}) - u_{\rho\nu}^+| + |\psi_\rho(u_\nu) - u_\nu^+|) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} 2\rho F da, \end{aligned}$$

et, par (4.7) nous déduisons que

$$(4.105) \quad \Delta_1 \leq 2\rho \|F\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3).$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire, il en résulte que

$$\begin{aligned} \phi_\rho(S(\mathbf{u}_\rho)) - S(\mathbf{u}) &= \phi_\rho(S(\mathbf{u}_\rho)) - \phi_\rho(S(\mathbf{u})) + \phi_\rho(S(\mathbf{u})) - S(\mathbf{u}) \\ &\leq |\phi_\rho(S(\mathbf{u}_\rho)) - \phi_\rho(S(\mathbf{u}))| + |\phi_\rho(S(\mathbf{u})) - S(\mathbf{u})|. \end{aligned}$$

Nous combinons (4.12)(a),(b), (4.91), (4.93) et l'inégalité précédente pour voir que

$$(4.106) \quad \phi_\rho(S(\mathbf{u}_\rho)) - S(\mathbf{u}) \leq L_S \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\| + \rho.$$

Finalement, nous utilisons (4.105), (4.106), (4.11) et (1.8) et nous obtenons

$$(4.107) \quad \begin{aligned} &\Delta_1 + \Delta_2 \\ &\leq 2\rho \|F\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3) + c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V^2 + c_0 \rho \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse (4.97), il résulte de (4.104) et (4.107) que

$$(4.108) \quad (m_{\mathcal{F}} - \alpha) \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V^2 \leq 2\rho \|F\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3) + c_0 \rho \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V$$

où

$$\alpha = c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}.$$

Par ailleurs, nous utilisons maintenant l'inégalité élémentaire

$$x, a, b \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 \leq ax + b \quad \implies \quad x^2 \leq a^2 + 2b.$$

En conséquence, nous en déduisons que

$$(4.109) \quad \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V^2 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Le résultat de convergence (4.98) n'est qu'une conséquence de (4.109), ce qui conclut la démonstration. \square

L'intérêt dans le Théorème 4.11 est double ; premièrement, il prouve l'existence et l'unicité de la solution de l'inégalité variationnelle (4.96) ; deuxièmement, il montre la convergence forte de la solution \mathbf{u}_ρ du Problème \mathcal{P}_V^ρ vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}_V lorsque $\rho \rightarrow 0$.

4.6 Formulation duale

Partout dans cette section, nous considérons le problème de contact glissant \mathcal{P} dans le cas particulier où $F = 0$ et nous nous référons à ce problème par le problème \mathcal{P}_0 . Nous définissons la fonction $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par l'égalité

$$(4.110) \quad \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \mu S(\mathbf{u}) \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v}_\tau da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

Par conséquent, il résulte de la Section 4.1 que la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P}_0 en termes de déplacement est la suivante.

Problème \mathcal{P}_{0V} . *Trouver un champ des déplacements \mathbf{u} tel que*

$$(4.111) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} \in U, \quad & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ & \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned}$$

En outre, d'après le Théorème 4.1 nous avons les résultats de l'existence et d'unicité suivants.

Théorème 4.12. *Supposons que les hypothèses (4.7)–(4.9), (4.11), (4.12) et (4.24) sont vérifiées, et μ_0 est donné par (4.29). Alors le Problème \mathcal{P}_{0V} admet une solution unique.*

Notons que le problème \mathcal{P}_{0V} est formulé en termes de déplacement et, pour cette raison, nous disons que ce problème représente la formulation variationnelle primale du problème de contact glissant \mathcal{P}_0 . Notre objectif dans cette section est d'étudier une formulation variationnelle du problème \mathcal{P}_0 , en terme de contrainte, appelée la formulation variationnelle duale.

Soit $P : Q \rightarrow \varepsilon(V)$ l'opérateur de projection sur $\varepsilon(V) \subset Q$ et remarquons que l'égalité (1.7) montre que l'opérateur $\varepsilon : V \rightarrow \varepsilon(V)$ est inversible. De plus, l'hypothèse (4.7) implique que $\mathcal{F} : Q \rightarrow Q$ est un opérateur de Lipschitz et fortement monotone. De ce fait, en utilisant la Proposition 2.4, il s'ensuit qu'il est inversible. En outre l'inverse de \mathcal{F} , noté \mathcal{F}^{-1} , est encore un opérateur de Lipschitz et fortement monotone. Par la suite, nous utilisons l'opérateur $\Lambda : Q \rightarrow V$ défini par

$$(4.112) \quad \Lambda\sigma = \varepsilon^{-1}P\mathcal{F}^{-1}\sigma \quad \forall \sigma \in Q.$$

L'intérêt de cet opérateur réside dans le fait qu'il facilite l'inversion de la loi constitutive élastique, comme montré ci dessous.

Lemme 4.13. *Supposons que l'hypothèse (4.7) est vérifiée et soient $\sigma \in Q$, $\mathbf{v} \in V$ tels que $\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})$. Alors $\mathbf{u} = \Lambda\sigma$.*

Démonstration. L'égalité $\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})$ montre que $\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathcal{F}^{-1}\sigma$ et, puisque $\varepsilon(\mathbf{u}) \in \varepsilon(V)$, nous avons $\varepsilon(\mathbf{u}) = P\varepsilon(\mathbf{u}) = P\mathcal{F}^{-1}\sigma$, ce qui implique que $\mathbf{u} = \varepsilon^{-1}P\mathcal{F}^{-1}\sigma$. Nous combinons cette égalité avec la définition (4.112) pour constater que $\mathbf{u} = \Lambda\sigma$, ce qui achève la démonstration. \square

Pour continuer, nous considérons une hypothèse supplémentaire portant sur la géométrie du problème. Ainsi, nous supposons que

$$(4.113) \quad \text{il existe } \boldsymbol{\theta} \in V \text{ tel que } \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\nu} \text{ sur } \Gamma_3.$$

Des exemples de domaines Ω , avec les sous-ensembles $\Gamma_1, \Gamma_3 \subset \Gamma$ pour lequel l'hypothèse (4.113) est satisfaite peuvent être trouvés dans [62]. Nous utilisons maintenant (4.113) afin de considérer l'élément $\tilde{\mathbf{g}} \in V$ donné par

$$(4.114) \quad \tilde{\mathbf{g}} = g\boldsymbol{\theta} \in V.$$

Par ailleurs, pour tout $\boldsymbol{\eta} \in V$ nous considérons la partie $\Sigma(\boldsymbol{\eta}) \subset Q$ donnée

$$(4.115) \quad \Sigma(\boldsymbol{\eta}) = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in Q : (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{g}}))_Q + \varphi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v} - \tilde{\boldsymbol{g}}) \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \tilde{\boldsymbol{g}})_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in U \right\}.$$

Ensuite, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème \mathcal{P}_{0V}^D . *Trouver un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ tel que*

$$(4.116) \quad \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma}), \quad (\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{g}}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma}).$$

Nous appelons par la suite \mathcal{P}_{0V}^D la formulation duale du problème \mathcal{P}_0 . Nous étudions maintenant le lien entre les problèmes \mathcal{P}_{0V} et \mathcal{P}_{0V}^D .

Théorème 4.14. *Sous les hypothèses (4.7)–(4.9), (4.11)–(4.12) et (4.113), nous avons les résultats suivants :*

1) *Si \boldsymbol{u} est une solution du Problème \mathcal{P}_{0V} et que $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$, alors $\boldsymbol{\sigma}$ est la solution du Problème \mathcal{P}_{0V}^D .*

2) *Réciproquement, si $\boldsymbol{\sigma}$ est une solution du Problème \mathcal{P}_{0V}^D alors il existe un unique $\boldsymbol{u} \in V$ tel que $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$, et, de plus, \boldsymbol{u} est la solution du Problème \mathcal{P}_{0V} .*

La démonstration du Théorème 4.14 est fondée sur des arguments similaires à ceux dans [62]. Néanmoins, nous avons choisi de présenter en détails la démonstration.

Démonstration. 1) Soit \boldsymbol{u} une solution du problème \mathcal{P}_0 et soit $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$. Le Lemme 4.13 implique que

$$(4.117) \quad \boldsymbol{u} = \Lambda\boldsymbol{\sigma}$$

et, par ailleurs, (4.111) donne

$$(4.118) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))_Q + \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in U.$$

Ensuite, il en résulte que les éléments $2\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{g}}$ et $\tilde{\boldsymbol{g}}$ appartiennent à U . Par conséquent, nous prenons $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{g}}$ et $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{g}}$ dans (4.118) et nous utilisons la linéarité de φ par rapport à sa deuxième variable pour obtenir

$$(4.119) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{g}}))_Q + \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{g}}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{g}})_V.$$

Puis, nous ajoutons (4.118) et (4.119) et nous utilisons la définition (4.115) afin de voir que

$$(4.120) \quad \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\boldsymbol{u}).$$

En outre, nous notons que (4.115) et (4.119) impliquent que

$$(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\mathbf{u})$$

et, puisque $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$, nous en déduisons que

$$(4.121) \quad (\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\mathbf{u}).$$

Nous combinons maintenant (4.117), (4.120) et (4.121) pour déduire que $\boldsymbol{\sigma}$ est une solution du Problème \mathcal{P}_{0V}^D , ce qui conclut la première partie de la démonstration.

2) Supposons maintenant que $\boldsymbol{\sigma}$ satisfait (4.116) et considérons un élément $\mathbf{z} \in Q$ tel que

$$(4.122) \quad (\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Alors, en utilisant (4.115) nous déduisons que $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \pm \mathbf{z} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$ et, en remplaçant successivement les deux égalités $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{z} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$ et $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{z} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$ dans (4.116), nous obtenons

$$(4.123) \quad (\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}), \mathbf{z})_Q = 0.$$

D'autre part, puisque $\boldsymbol{\varepsilon}(V)$ est un sous-espace fermé de Q nous déduisons que

$$(4.124) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(V)^{\perp\perp} = \boldsymbol{\varepsilon}(V)$$

où le symbole \perp indique le complément orthogonal dans Q . En utilisant (4.122) et (4.123) nous voyons que $\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}) \perp \mathbf{z}$ pour tout $\mathbf{z} \in \boldsymbol{\varepsilon}(V)^\perp$ et, d'après (4.124) il s'ensuit que $\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}) \in \boldsymbol{\varepsilon}(V)$. Par conséquent, il existe $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ tel que $\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}})$. Soit $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{g}}$. Alors $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$, i.e. $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$. Cela prouve la partie liée à l'existence. L'unicité de \mathbf{u} provient de l'égalité (1.7). En outre, le Lemme 4.13 montre que

$$(4.125) \quad \Lambda\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u}.$$

Ensuite, démontrons que \mathbf{u} est une solution du Problème \mathcal{P}_{0V} . Pour cela, nous commençons à prouver que $\mathbf{u} \in U$. Soit $P_U : V \rightarrow U$ le projecteur sur la partie convexe fermée non vide $U \subset V$. Par l'absurde, nous supposons dans ce qui suit que

$$(4.126) \quad \mathbf{u} \notin U.$$

Alors $\mathbf{u} \neq P_U \mathbf{u}$, i.e.

$$(4.127) \quad (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, P_U \mathbf{u} - \mathbf{u})_V > 0.$$

Puis, en utilisant (4.127) et la caractérisation variationnelle de la projection nous avons

$$(P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v})_V \geq (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, P_U \mathbf{u})_V > (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Ces inégalités impliquent qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$(4.128) \quad (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v})_V > \alpha > (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U$$

et, en testant avec $\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}} \in U$, il en résulte que

$$(4.129) \quad (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}})_V > \alpha > (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Soit $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\varepsilon}(P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}) \in Q$. Alors (4.129) implique

$$(4.130) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q > \alpha > (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q \quad \forall \mathbf{v} \in U$$

et, en prenant $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{g}}$ dans l'inégalité précédente, nous obtenons que

$$(4.131) \quad \alpha < 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe $\tilde{\mathbf{v}} \in U$ tel que

$$(4.132) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q < 0.$$

Nous testons avec $\mathbf{v} = \lambda(\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{g}})$ dans (4.130) où $\lambda \geq 0$. Par conséquent, nous obtenons

$$\lambda(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q > \alpha + (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q \quad \forall \lambda > 0.$$

Par la suite, en passant à la limite avec $\lambda \rightarrow \infty$ et en utilisant (4.132) nous en déduisons que

$$-\infty \geq \alpha + (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q$$

ce qui contredit l'hypothèse $\alpha \in \mathbb{R}$. De ce fait, nous avons

$$(4.133) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Ensuite, l'égalité (4.125) combinée avec la régularité $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\Lambda \boldsymbol{\sigma})$ et la définition (4.115) impliquent que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) \geq (f, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Par conséquent, en utilisant (4.133) nous en déduisons que $\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\mathbf{u})$. Nous pouvons alors considérer $\boldsymbol{\tau} = \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\sigma}$ dans (4.116) pour trouver que

$$(\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\tau}})_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}), \tilde{\boldsymbol{\tau}})_Q.$$

Nous utilisons maintenant l'égalité $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ pour obtenir

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \tilde{\boldsymbol{\tau}})_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}), \tilde{\boldsymbol{\tau}})_Q$$

et, puisque $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\varepsilon}(P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}) \in Q$, nous trouvons que

$$(4.134) \quad (P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V \geq (P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{g}})_V.$$

D'autre part, en prenant $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{g}}$ dans (4.128), nous obtenons

$$(4.135) \quad (P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{g}})_V > (P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V.$$

Les inégalités (4.135) et (4.134) aboutissent à une contradiction. Par conséquent, nous déduisons que l'hypothèse (4.126) est fautive, et de ce fait

$$(4.136) \quad \mathbf{u} \in U.$$

Ensuite, nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour voir que tout $\mathbf{u} \in V$, il existe un unique élément $\mathbf{d}(\mathbf{u}) \in V$ tel que

$$(4.137) \quad \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{d}(\mathbf{u}), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Soit

$$(4.138) \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f} - \mathbf{d}(\mathbf{u})) \in Q.$$

En utilisant (4.137), nous avons

$$(4.139) \quad (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V.$$

Nous prenons maintenant $\mathbf{v} = 2\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}$ dans l'égalité (4.139) et en utilisant la linéarité de φ par rapport à sa deuxième variable il vient que

$$(4.140) \quad (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}})_V.$$

Ensuite, nous additionnons les égalités (4.139) et (4.140) afin de voir que

$$(4.141) \quad (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

L'égalité (4.141) implique que $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \in \Sigma(\mathbf{u})$ et, en utilisant (4.125), nous obtenons $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$. Par conséquent, en prenant $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ dans (4.116) et en utilisant à nouveau l'égalité $\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, il en résulte que

$$(4.142) \quad (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q \geq (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q.$$

Nous combinons maintenant (4.140) et (4.142) pour déduire que

$$(4.143) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}})_V \geq (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}})$$

Enfin, puisque $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$ et avec (4.117) il vient que $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\mathbf{u})$. Par conséquent, $\mathbf{u} \in U$ et (4.115) montrent que

$$(4.144) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}})_V \leq (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}).$$

Les inégalités (4.143) et (4.144) impliquent

$$(4.145) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + \varphi(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{u})_V.$$

En utilisant maintenant la régularité $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma}) = \Sigma(\mathbf{u})$ combiné avec (4.145) nous obtenons

$$(4.146) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Ensuite, nous utilisons la loi constitutive $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ et la linéarité de φ par rapport à sa deuxième variable, pour déduire

$$(4.147) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

En combinant l'inégalité (4.147) avec la régularité $\mathbf{u} \in U$, il en résulte que \mathbf{u} est une solution du Problème \mathcal{P}_{0V} . Cela conclut la deuxième partie de la démonstration. \square

Nous sommes maintenant en mesure de présenter un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème \mathcal{P}_{0V}^D .

Corollaire 4.15. *Supposons que les hypothèses (4.7)–(4.9), (4.11)–(4.12), (4.24) et (4.113) sont vérifiées. Alors, le problème \mathcal{P}_{0V}^D admet une solution unique.*

Démonstration. La partie liée à l'existence est une conséquence directe du Théorème 4.12 combiné avec le résultat d'équivalence dans le Théorème 4.14 1). Pour la

partie liée à l'unicité, nous supposons que $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ deux solutions du problème \mathcal{P}_{0V}^D . Ensuite, il résulte du Théorème 4.14 2) qu'il existe deux éléments $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ tel que

$$(4.148) \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1), \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2).$$

En outre, \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont solution du problème \mathcal{P}_{0V} . En utilisant maintenant la partie liée à l'unicité dans le Théorème 4.12 il vient que

$$(4.149) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2.$$

Enfin, nous combinons les égalités (4.148) et (4.149) pour voir que $\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2$, ce qui conclut la démonstration. \square

Il résulte de la démonstration du Théorème 4.14 que, si le champ de déplacements \mathbf{u} est solution de la formulation variationnelle primale \mathcal{P}_{0V} et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est solution de la formulation variationnelle duale \mathcal{P}_{0V}^D , alors \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}$ sont reliés par la loi constitutive élastique $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$. Pour cette raison, la paire $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ s'appelle *solution faible* du problème de contact glissant \mathcal{P}_0 et nous en concluons que ce problème admet une solution faible unique.

4.7 Estimation de l'erreur

Cette section est consacrée à la discrétisation numérique du problème \mathcal{P}_V et à l'obtention d'un résultat théorique de l'erreur de discrétisation. Partout ci-dessous, nous supposons que les conditions (4.7)–(4.12) et (4.24) sont vérifiées. Ainsi, il résulte du Théorème 4.1 que le Problème \mathcal{P}_V admet une unique solution.

Nous rappelons l'espace suivant :

$$V = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_1 \}.$$

Nous construisons une discrétisation par éléments finis au domaine Ω qui ont compatible avec la partition de la frontière Γ . Nous définissons maintenant un espace des éléments finis $V^h = V \cap X^h$, où X^h est un espace des fonctions continues et affines par morceaux qui représente une approximation de $H^1(\Omega)$ et h désigne le paramètre de discrétisation spatiale. De ce fait, nous définissons l'espace d'éléments finis $V^h \subset V$ de la façon suivante

$$(4.150) \quad V^h = \{ \mathbf{v}^h \in X^h : \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_1 \}.$$

Par ailleurs, nous définissons également l'ensemble des champs discrets cinématiquement admissibles par

$$(4.151) \quad U^h = \{ \mathbf{v}^h \in V^h : v_\nu^h \leq g \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \},$$

Notons que $U^h \subset U$. La condition $v_\nu^h \leq g$ sur la frontière Γ_3 est satisfaite aux noeuds, i.e., $v_\nu^h \leq g^I$, où g^I est la fonction d'interpolation linéaire g .

Nous considérons maintenant le problème variationnel approché suivant.

Problème \mathcal{P}_V^h . *Trouver un champ de déplacements approché \mathbf{u}^h tel que*

$$(4.152) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^h \in U^h, \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h))_Q + (P\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V \\ + j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in U^h. \end{aligned}$$

En utilisant des arguments similaires aux arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 4.1 on prouve que le problème \mathcal{P}_V^h admet une solution unique.

Nous allons maintenant présenter le résultat de l'estimation d'erreur entre les solutions des Problèmes \mathcal{P}_V et \mathcal{P}_V^h .

Théorème 4.16. *Sous les hypothèses (4.7)–(4.12) et (4.24), il existe une constante c indépendante de h telle que*

$$(4.153) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \leq c \inf_{\mathbf{v}^h \in U^h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \right).$$

Démonstration. Sous les conditions (4.7)(c), (4.9)(c), (4.14) et (4.25) pour chaque $v_h \in U_h$, nous constatons que

$$(4.154) \quad \begin{aligned} m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)\|_Q^2 \\ \leq (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)) \\ \leq (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)) + \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p(u_\nu^h))(u_\nu - u_\nu^h) da \\ = (A\mathbf{u} - A\mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \\ = (A\mathbf{u} - A\mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{v}^h) + (A\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) - (A\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h). \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons (4.23) avec $\mathbf{v} = \mathbf{u}^h$ et (4.152) afin de voir que

$$(4.155) \quad \begin{aligned} (A\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) - (A\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) \leq (A\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}) \\ + j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}^h) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \mathbf{v}^h)_V. \end{aligned}$$

Puis, par les inégalités (4.154) et (4.155), nous en déduisons que

$$(4.156) \quad m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)\|_Q^2 \leq K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

où

$$\begin{aligned} K_1 &= (A\mathbf{u} - A\mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{v}^h), \\ K_2 &= (A\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u})_V, \\ K_3 &= j(\mathbf{u}, \mathbf{u}^h) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) + j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \\ K_4 &= j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous faisons une estimation de chacun des termes ci-dessus. Pour ce faire, nous commençons par le premier terme. Nous avons la même inégalité qu'en (4.27), à savoir

$$\begin{aligned} (4.157) \quad |K_1| &\leq \left| \int_{\Omega} (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p(u_\nu^h))(u_\nu - v_\nu^h) da \right| \\ &\leq L_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + L_p \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V. \end{aligned}$$

Ensuite, pour le deuxième terme K_2 , nous avons

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}) dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(v_\nu^h - u_\nu) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} F(v_\nu^{+h} - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu S(\mathbf{u})n^* \cdot (\mathbf{v}_\tau^h - \mathbf{u}_\tau) da - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u})_V. \end{aligned}$$

Après quelques calculs élémentaires reposant sur les hypothèses (4.7)–(4.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} (4.158) \quad |K_2| &\leq (\|\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_Q + \|\mathbf{f}\|_V) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V \\ &\quad + (\|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|F\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} \\ &\quad + L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|S(0_V)\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

Puis, pour le terme K_3 , nous avons

$$K_3 = \int_{\Gamma_3} \mu(S(\mathbf{u}) - S(\mathbf{u}^h))n^* \cdot (\mathbf{u}_\tau^h - \mathbf{u}_\tau) da.$$

En utilisant encore une fois les hypothèses (4.11) et (4.12)(b) ainsi que l'inégalité de trace (1.8), nous obtenons

$$(4.159) \quad |K_3| \leq c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V^2.$$

Enfin, pour le quatrième et dernier terme K_4 , nous utilisons (1.8), (4.11) et (4.12)(b), pour obtenir

$$(4.160) \quad \begin{aligned} |K_4| &= |j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h)| \\ &= \left| \int_{\Gamma_3} \mu(S(\mathbf{u}^h) - S(\mathbf{u})) n^* \cdot (\mathbf{v}_\tau^h - \mathbf{u}_\tau) da \right| \\ &\leq c_0^2 L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de petitesse (4.24), par absorption du troisième terme K_3 et en utilisant l'inégalité élémentaire

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2 \quad \forall \delta > 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

l'inégalité (4.156) devient

$$(4.161) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \leq c \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + c \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V^{\frac{1}{2}} + c \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}},$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Grâce à l'inégalité de trace, nous obtenons l'estimation de l'erreur de discrétisation

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V = O\left(\sqrt{\inf_{\mathbf{v}^h \in U^h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V}\right).$$

Nous remarquons que cette estimation d'erreur est du même ordre que celle présentée dans [7] pour un autre modèle mathématique de contact. Cependant, elle n'est toutefois pas d'ordre optimal. Pour cette raison, nous proposons dans la suite une estimation d'erreur optimale avec une hypothèse d'extra-régularité de la solution.

Théorème 4.17. *Sous les hypothèses du Théorème 4.16, si $\sigma\nu \in L^2(\Gamma_3)^d$ il existe une constante c indépendante de h telle que,*

$$(4.162) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \leq c \inf_{\mathbf{v}^h \in U^h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \right).$$

Démonstration. Sous l'hypothèse de régularité supplémentaire $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \in L^2(\Gamma_3)^d$, nous donnons une nouvelle estimation du terme K_2 . D'après l'égalité (4.18), nous avons

$$\begin{aligned}
 |K_2| &\leq \left| \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu^h - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau^h - \mathbf{u}_\tau) da \right| \\
 &+ \left| \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(v_\nu^h - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} F(\mathbf{v}_\nu^{+h} - \mathbf{u}_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu S(\mathbf{u}) n^* \cdot (\mathbf{v}_\tau^h - \mathbf{u}_\tau) da \right| \\
 &\leq \left(\|\sigma_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|F\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. + L_S \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|S(0_V)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 &\leq c \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)},
 \end{aligned}$$

ce qui implique (4.162). \square

Maintenant, nous utilisons des arguments classiques utilisés dans [34], pour obtenir une estimation optimale de l'erreur. Pour ce faire, nous supposons que

$$(4.163) \quad \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^d, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_3} \in H^2(\Gamma_3)^d.$$

Soit $\Pi_h \mathbf{u} \in V_h$, une interpolation linéaire par élément fini de la solution \mathbf{u} , voir [15]. Dans la mesure où la solution \mathbf{u} a la régularité $\mathbf{u} \in U$ on a $u_\nu \leq g$, ce qui implique $\Pi_h \mathbf{u} \in U^h$.

En appliquant la théorie standard de l'interpolation par élément fini, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_V &\leq c h \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)^d}, \\
 \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_3)^N} &\leq c h^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Gamma_3)^d}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse de régularité supplémentaire (4.163), nous avons l'estimation de l'erreur optimale suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V = O(h),$$

où c désigne une constante indépendante de h . Cette dernière égalité implique alors une estimation optimale de l'erreur, achevant ainsi cette section et ce chapitre. Le lecteur souhaitant de plus amples approfondissement pourra se reporter par exemple à [34].

Chapitre 5

Problème de contact élastique avec usure

Dans ce chapitre nous abordons un problème similaire à celui au chapitre précédent. Il s'agit d'un problème de contact glissant entre un corps de loi constitutive élastique et un obstacle assimilé à une fondation. La différence réside dans le fait que dans ce chapitre nous prenons en considération l'usure des surfaces de contact. Ceci revient en fait, à introduire une nouvelle variable, la fonction d'usure, satisfaisant la loi d'Archard et, de ce fait le problème est quasistatique. La nouveauté du modèle réside dans l'utilisation de cette nouvelle variable. Ce chapitre comporte trois sections. Dans la première section, nous écrivons le problème mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle. Ensuite, dans la deuxième section, nous énonçons et nous démontrons notre résultat principal d'existence et d'unicité de la solution faible. Enfin, dans la troisième section, nous présentons un résultat de convergence, portant sur la pénalisation de la contrainte unilatérale. Le matériel présenté dans ce chapitre fait l'objet de l'article [69].

5.1 Formulation du problème

Le problème peut se formuler de la manière suivante.

Problème \mathcal{S} . *Trouver un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ et une fonction d'usure $w : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$*

$$(5.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(5.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(5.5) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu(t) \leq g, \quad \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t) - w(t)) \leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t) - w(t))) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(5.6) \quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mu p(u_\nu(t) - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(5.7) \quad \dot{w}(t) = \alpha(t) p(u_\nu(t) - w(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et, de plus,

$$(5.8) \quad w(0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ce problème est similaire au problème \mathcal{P} étudié dans le Chapitre 4. La différence réside dans ce fait que ici nous prendrons en considération l'usure de la fondation, décrite par la fonction w . Ceci rend le modèle mathématique plus intéressant, car il conduit à un problème non linéaire d'évolution.

Ici ci-dessous et, pour plus de simplicité, nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions de la variable spatiale \mathbf{x} . En outre, nous rappelons que les fonctions \mathbf{n}^* et α sont données par

$$(5.9) \quad \mathbf{n}^*(t) = -\frac{\mathbf{v}^*(t)}{\|\mathbf{v}^*(t)\|}, \quad \alpha(t) = k \|\mathbf{v}^*(t)\| \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où k représente le coefficient d'usure et $\mathbf{v}^*(t)$ est la vitesse de la fondation.

Nous fournissons maintenant une brève explication pour les équations et les conditions du Problème \mathcal{S} . Tout d'abord, l'équation (5.1) représente la loi de comportement élastique du matériau dans laquelle \mathcal{F} désigne un opérateur non linéaire donné. Puis, (5.2) est l'équation d'équilibre dans le cas d'un problème quasi-statique. Ensuite, (5.3) et (5.4) représentent respectivement les conditions de déplacement et de traction. La condition (5.5) représente la condition de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale dans laquelle w représente la fonction d'usure de la fondation.

Les conditions (5.6) et (5.7) représentent respectivement la loi de frottement et la loi d'Archard présentées dans le Chapitre 3 Section 3.4 (cf (3.47) et (3.52)). Enfin, (5.8) représente la condition initiale pour la fonction de l'usure, ce qui montre que à l'instant initial la fondation est nouvelle.

Nous passons maintenant à la formulation variationnelle du problème \mathcal{S} et, à cette fin, nous énonçons les hypothèses sur les données. Premièrement, nous supposons que l'opérateur d'élasticité \mathcal{F} et la fonction de compliance normale vérifient les conditions suivantes.

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Les densités des forces volumiques et tractions surfaciques ont la régularité

$$(5.12) \quad \mathbf{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d).$$

Enfin, le coefficient de frottement, le coefficient d'usure et la vitesse de la fondation vérifient les conditions

$$(5.13) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3,$$

$$(5.14) \quad k \in L^\infty(\Gamma_3), \quad k(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3,$$

$$(5.15) \quad \mathbf{v}^* \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) \text{ et il existe } v > 0 \text{ tel que } \|\mathbf{v}^*(t)\| \geq v, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Notons que l'hypothèse (5.15) est compatible avec le cadre physique décrit ci-dessus, puisque, à chaque moment de temps, la vitesse de la fondation est supposée être assez grande. De plus, (5.9), (5.14) et (5.15) implique la régularité

$$(5.16) \quad \mathbf{n}^* \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad \alpha \in C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)).$$

Et en outre

$$(5.17) \quad \alpha(t) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Ensuite, nous rappelons l'ensemble des champs de déplacements admissibles définis par

$$(5.18) \quad U = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3 \}.$$

Par ailleurs, nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz pour définir la fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ par l'égalité

$$(5.19) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}_0(t), \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_2)^d},$$

pour tout $\mathbf{v} \in V$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Il résulte de l'hypothèse (5.12) que \mathbf{f} a la régularité

$$(5.20) \quad \mathbf{f} \in C(\mathbb{R}_+; V).$$

Nous supposons dans ce qui suit que le triple $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, w)$ sont des fonctions suffisamment régulières qui vérifient (5.1)–(5.8). Soit $\mathbf{v} \in U$ et $t > 0$ est donné. Nous utilisons formule de Green (1.4) et l'équation d'équilibre (5.2) pour obtenir

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t)(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Ensuite, nous divisons l'intégrale de surface Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 . Puisque $\mathbf{v} - \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ sur Γ_1 , $\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t)$ sur Γ_2 , en tenant compte de (5.19) on déduit que

$$(5.21) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da.$$

Notons que

$$(5.22) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) = \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) + \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3$$

et, en utilisant la condition de contact (5.5) et la définition (5.18) de l'ensemble U , nous avons

$$\begin{aligned}
 (5.23) \quad \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) &= (\sigma_\nu + p(u_\nu(t) - w(t)))(v_\nu - g) \\
 &+ (\sigma_\nu + p(u_\nu(t) - w(t)))(g - u_\nu(t)) - p(u_\nu(t) - w(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \\
 &\geq -p(u_\nu(t) - w(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, en tenant compte de l'égalité (5.22) et en utilisant l'inégalité (5.23) et la loi de frottement (5.6) on voit que

$$\begin{aligned}
 (5.24) \quad \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da &\geq - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t) - w(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \\
 &- \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu(t) - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) \, da.
 \end{aligned}$$

Nous combinons maintenant (5.21) et (5.24) pour obtenir que

$$\begin{aligned}
 (5.25) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q &+ \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t) - w(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \\
 + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu(t) - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) \, da &\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.
 \end{aligned}$$

En outre, la condition de déplacement (5.3), la première inégalité dans (5.5) et (5.18) impliquent que $\mathbf{u}(t) \in U$. Enfin, nous intégrons l'équation différentielle (5.7) avec la condition initiale (5.8) pour voir que

$$(5.26) \quad w(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_\nu(s) - w(s)) \, ds.$$

Nous combinons maintenant la loi de comportement (5.1), l'inégalité variationnelle (5.25), et l'équation intégrale (5.26) pour obtenir la formulation variationnelle du problème \mathcal{S} suivante.

Problème \mathcal{S}^V . *Trouver un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow Q$, un champ de déplace-*

ments $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ et une fonction d'usure $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$(5.27) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)),$$

$$(5.28) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t) - w(t))(v_\nu - u_\nu(t)) da \\ + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu(t) - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) da \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U,$$

$$(5.29) \quad w(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_\nu(s) - w(s)) ds,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

La solvabilité unique du Problème \mathcal{S}^V sera démontrée dans la section suivante. Un triplet $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, w)$ qui satisfait (5.27)–(5.29) s'appelle *solution faible* de Problème \mathcal{S} .

Nous terminons cette section avec quelques commentaires supplémentaires sur notre modèle de contact. Supposons que le problème (5.1)–(5.8) admet une solution classique. Alors, puisque μ et p sont des fonctions positives, il découle de (5.7) que $\dot{w}(t) \geq 0$ pour tout t , et donc $w(t)$ est croissante, en chaque point de la surface de contact. En outre, si à un moment t_0 nous avons $w(t_0) = g$, en utilisant l'équation (5.7) et les propriétés (5.11) de la fonction p , il en résulte que $w(t) = g$ pour tout $t \geq t_0$. Ce comportement montre que l'usure de la fondation est limitée par la contrainte $w(t) \leq g$.

5.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous énonçons et prouvons le résultat de l'existence d'unicité suivant.

Théorème 5.1. *Supposons que les hypothèses (5.10)–(5.15) sont satisfaites. Alors il existe une constante μ_0 qui ne dépend que Ω , Γ_1 , Γ_3 , \mathcal{F} et p , tel que, si*

$$(5.30) \quad \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0,$$

alors le Problème \mathcal{S}^V admet une solution unique. De plus, la solution présente la régularité

$$(5.31) \quad \boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q), \quad \mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U), \quad w \in C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3)).$$

et, en outre,

$$(5.32) \quad w(t) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Nous concluons de ce qui précède que le Problème \mathcal{S} admet une solution unique, à condition que les hypothèses du Théorème 5.1 sont satisfaites. En outre, notons que la condition (5.30) représente une condition de petitesse sur le coefficient de frottement qui est souvent nécessaire dans l'étude des problèmes de contact statiques ou quasi-statiques avec frottement. La question de savoir si cette condition décrit une caractéristique intrinsèque du processus de frottement ou si elle représente qu'une limite de nos outils mathématiques ; c'est une question ouverte qui mérite être étudiée à l'avenir.

La démonstration du Théorème 5.1 sera réalisée en plusieurs étapes. Dans la première étape, nous supposons que la fonction $w \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ est donnée et nous construisons le problème intermédiaire suivant.

Problème \mathcal{S}_w^V . *Trouver un champ de déplacement $\mathbf{u}_w : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ tel que*

$$(5.33) \quad (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_w(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}_w(t)))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_{w\nu}(t) - w(t))(v_\nu - u_{w\nu}(t)) da \\ + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_{w\nu}(t) - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_{w\tau}(t)) da \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_w(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Dans l'étude du Problème \mathcal{S}_w^V nous avons le résultat de l'existence et d'unicité suivant.

Lemme 5.2. *Il existe une solution unique du Problème \mathcal{S}_w^V qui satisfait $\mathbf{u}_w \in C(\mathbb{R}_+; U)$.*

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit l'opérateur $A_{wt} : V \rightarrow V$ défini par

$$(5.34) \quad (A_{wt}\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - w(t))v_\nu da \\ + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \cdot \mathbf{v}_\tau da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Nous utilisons les hypothèses (5.10), (5.11), (5.13) et l'inégalité (1.8) pour voir que l'opérateur A_{wt} est de Lipschitz, c'est-à-dire qu'il vérifie l'inégalité

$$(5.35) \quad \|A_{wt}\mathbf{u}_1 - A_{wt}\mathbf{u}_2\|_V \leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)})) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V,$$

pour tout $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$.

Ensuite, nous introduisons la constante μ_0 définie par

$$(5.36) \quad \mu_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2 L_p},$$

qui, visiblement ne dépend que de Ω , Γ_1 , Γ_3 , \mathcal{F} et p . Supposons que l'hypothèse de (5.30) est vérifiée. Alors, nous obtenons

$$(5.37) \quad c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < m_{\mathcal{F}}.$$

Nous utilisons à nouveau les hypothèses (5.10), (5.11) et les inégalités (1.8) et (5.37) pour déduire que l'opérateur A_{wt} est fortement monotone, c'est-à-dire qu'il satisfait à l'inégalité

$$(5.38) \quad (A_{wt}\mathbf{u}_1 - A_{wt}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2,$$

pour tout $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$. Par le Théorème 2.13 1), nous en déduisons qu'il existe un unique élément $\mathbf{u}_{wt} \in U$ tel que

$$(5.39) \quad (A_{wt}\mathbf{u}_{wt}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{wt})_V \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{wt})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Nous notons $\mathbf{u}_{wt} = \mathbf{u}_w(t)$. Ensuite, il découle de (5.39) et (5.34) que $\mathbf{u}_w(t) \in U$ est un élément unique qui résout l'inégalité variationnelle (5.33). Ce qui conclut la partie d'unicité de la solution.

Nous prouvons maintenant la continuité de la fonction $t \mapsto \mathbf{u}_w(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$. Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$. Nous désignons par $\mathbf{u}_w(t_i) = \mathbf{u}_i$, $w(t_i) = w_i$, $\mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i$, $\mathbf{n}^*(t_i) = \mathbf{n}_i^*$, pour $i = 1, 2$. En outre, nous utilisons des arguments standard dans (5.33) pour constater que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2))_Q \leq (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \\ & + \int_{\Gamma_3} [p(u_{1\nu} - w_1) - p(u_{2\nu} - w_2)] [(u_{2\nu} - w_2) - (u_{1\nu} - w_1)] da \\ & + \int_{\Gamma_3} [p(u_{1\nu} - w_1) - p(u_{2\nu} - w_2)] (w_2 - w_1) da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu [p(u_{1\nu} - w_1)\mathbf{n}_1^* - p(u_{2\nu} - w_2)\mathbf{n}_1^*] \cdot (\mathbf{u}_{2\tau} - \mathbf{u}_{1\tau}) da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu [p(u_{2\nu} - w_2)\mathbf{n}_1^* - p(u_{2\nu} - w_2)\mathbf{n}_2^*] \cdot (\mathbf{u}_{2\tau} - \mathbf{u}_{1\tau}) da. \end{aligned}$$

Donc, sous les hypothèses (5.10), (5.11), (5.13) et (1.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \\ & \leq \left(c_0 L_p (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_V \right. \\ & \quad \left. + c_0 p(g) \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{n}_1^* - \mathbf{n}_2^*\| \right) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V + L_p \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité (5.37) et l'inégalité élémentaire

$$x, y, z \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 \leq yx + z \implies x^2 \leq y^2 + 2z$$

pour obtenir que

$$(5.40) \quad \begin{aligned} & \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \\ & \leq a \left(\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\| + \|\mathbf{n}_1^* - \mathbf{n}_2^*\| \right)^2 + b \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2, \end{aligned}$$

où a et b désignent deux constantes positives qui ne dépendent pas de t_1 et t_2 . Nous combinons l'inégalité (5.40) avec les hypothèses (5.16), (5.20) et la régularité $w \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$. Nous déduisons que d'ici $\mathbf{u}_w \in C(\mathbb{R}_+; V)$. Ainsi, nous concluons, par le Lemme 5.2 la partie de l'existence de la solution, ce qui conclut la démonstration du lemme. \square

Nous considérons maintenant l'opérateur $A : C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$(5.41) \quad Aw(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_{w\nu}(s) - w(s)) ds,$$

pour tous $w \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$, où \mathbf{u}_w est la solution unique du Problème \mathcal{S}_w^V . Nous avons le résultat de point fixe suivant, qui représente la deuxième étape de la démonstration du Théorème 5.1.

Lemme 5.3. *L'opérateur A admet un unique point fixe $w^* \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$.*

Démonstration. Soient $w_1, w_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$. Pour simplifier, nous notons par \mathbf{u}_i , $i = 1, 2$ les solutions des problèmes $\mathcal{S}_{w_i}^V$, c'est-à-dire que $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{w_i}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. Nous utilisons la définition (5.41) de l'opérateur A et les hypothèses (5.11), (5.14) et (5.15) afin de déduire que

$$(5.42) \quad \begin{aligned} & \|Aw_1(t) - Aw_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ & \leq v_n^* \left(c_0 \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right), \end{aligned}$$

où

$$v_n^* = L_p \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \max_{r \in [0, n]} \|\mathbf{v}^*(r)\|.$$

D'autre part, l'utilisation des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration (5.40) donnent

$$(5.43) \quad \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq \sqrt{a+b} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (5.42) et (5.43) pour déduire que

$$(5.44) \quad \|\Lambda w_1(t) - \Lambda w_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq v_n^* (c_0 \sqrt{a+b} + 1) \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

Le Lemme 5.3 est maintenant une conséquence directe du Théorème 2.14. \square

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour fournir la démonstration du Théorème 5.1.

Démonstration. *Existence.* Soit $w^* \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ l'unique point fixe de l'opérateur Λ et soient \mathbf{u}^* , $\boldsymbol{\sigma}^*$ définis par

$$(5.45) \quad \mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}_{w^*}(t),$$

$$(5.46) \quad \boldsymbol{\sigma}^*(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(t)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Nous rappelons que $w^* = \Lambda w^*$ et en utilisant des égalités (5.41) et (5.45) nous déduisons que

$$(5.47) \quad w^*(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_{w^*}(s) - w^*(s)) ds$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Nous montrons que le triplet $(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{u}^*, w^*)$ satisfait (5.27)–(5.29). Premièrement, nous remarquons que (5.27) est une conséquence directe de (5.46). Ensuite, nous écrivons l'inégalité (5.33) pour $w = w^*$ et nous utilisons la notation (5.45), (5.46) pour voir que (5.28) est validé. Puis, (5.29) découle de (5.47). Nous concluons de ce qui précède que le triplet $(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{u}^*, w^*)$ représente une solution du problème \mathcal{S}^V . La régularité exprimée dans (5.31) est une conséquence directe de la Lemme 5.2 combinée avec l'hypothèse (5.10) et de formule (5.47). Enfin, la condition (5.32) découle de (5.47), puisque α et p sont des fonction positives, tel qu'il résulte de (5.17) et (5.11)(a).

Unicité. L'unicité de la solution découle de la solvabilité unique du Problème \mathcal{S}_w^V fournie dans le Lemme 5.2, combinée avec l'unicité du point de l'opérateur Λ défini par (5.41). \square

5.3 Un résultat de convergence

Dans cette section, nous fournissons un résultat de convergence dans l'étude du problème \mathcal{S} , basée sur la pénalisation de la contrainte unilatérale et des arguments similaires à ceux utilisés dans [67]. Nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses (5.10)–(5.15) et (5.30) sont satisfaites. Nous rappelons que μ_0 est donnée par (5.36). Puis, il résulte du Théorème 5.1 que le problème \mathcal{S}^V admet une solution unique. Ensuite, pour chaque $\rho > 0$ nous considérons le problème de contact ci-dessous.

Problème \mathcal{S}_ρ . *Trouver un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\rho : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ de déplacements $\mathbf{u}_\rho : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ et une fonction d'usure $w_\rho : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que*

$$(5.48) \quad \boldsymbol{\sigma}_\rho(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(t)) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.49) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}_\rho(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.50) \quad \mathbf{u}_\rho(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(5.51) \quad \boldsymbol{\sigma}_\rho(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(5.52) \quad \sigma_{\rho\nu}(t) + p(u_{\rho\nu}(t) - w_\rho(t)) + \frac{1}{\rho}p(u_{\rho\nu}(t) - g) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(5.53) \quad -\boldsymbol{\sigma}_{\rho\tau}(t) = \mu p(u_{\rho\nu}(t) - w_\rho(t)) \mathbf{n}^*(t) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(5.54) \quad \dot{w}_\rho(t) = \alpha(t) p(u_{\rho\nu}(t) - w_\rho(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et, de plus,

$$(5.55) \quad w_\rho(0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Notons qu'ici et ci-dessous $u_{\rho\nu}$ est la composante normale du champ de déplacement \mathbf{u}_ρ et $\sigma_{\rho\nu}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\rho\tau}$ représentent respectivement les composantes normale et tangentielle du tenseur $\boldsymbol{\sigma}_\rho$. Par ailleurs, nous rappelons que les fonctions \mathbf{n}^* et α sont définies par (5.9). Les équations et les conditions aux limites du Problème (5.48)–(5.55) ont une interprétations similaires à celles dans le problème (5.1)–(5.8). La différence vient du fait qu'ici, nous avons remplacé la condition de contact (5.5) avec la condition (5.52), c'est-à-dire que nous supprimons la contrainte unilatérale. Dans (5.52) ρ représente un paramètre de pénalisation qui peut être interprété comme un coefficient de déformation de la fondation, alors que $\frac{1}{\rho}$ est le coefficient de rigidité de surface.

Nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la Section 5.2, afin d'obtenir la formulation variationnelle du Problème \mathcal{S}_ρ suivante.

Problème \mathcal{S}_ρ^V . *Trouver un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow Q$, un champ de déplacements $\mathbf{u}_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ et une fonction d'usure $w_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que*

$$(5.56) \quad \boldsymbol{\sigma}_\rho(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(t)),$$

$$(5.57) \quad (\boldsymbol{\sigma}_\rho(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_{\rho\nu}(t) - w_\rho(t))v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_{\rho\nu}(t) - w_\rho(t))\mathbf{n}^*(t) \cdot \mathbf{v}_\tau da + \frac{1}{\rho} (G\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(5.58) \quad w_\rho(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_{\rho\nu}(s) - w_\rho(s)) ds,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Ici G représente l'opérateur défini dans le Chapitre 4 par (4.53). Le théorème suivant indique la solvabilité unique du Problème \mathcal{S}_ρ^V et décrit le comportement de sa solution lorsque $\rho \rightarrow 0$.

Théorème 5.4. *Supposons que les hypothèses (5.10)–(5.15) et (5.30) sont vérifiées, avec μ_0 donnée par (5.36) Alors :*

1) *Pour chaque $\rho > 0$ il existe une solution unique du Problème \mathcal{S}_ρ^V . De plus, la solution présente la régularité suivante*

$$(5.59) \quad \boldsymbol{\sigma}_\rho \in C(\mathbb{R}_+; Q), \quad \mathbf{u}_\rho \in C(\mathbb{R}_+; V), \quad w_\rho \in C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3)).$$

2) *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $\omega_n > 0$ tel que*

$$(5.60) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t)\|_V \leq \omega_n \quad \forall t \in [0, n], \quad \forall \rho > 0.$$

3) *La solution $(\boldsymbol{\sigma}_\rho, \mathbf{u}_\rho, w_\rho)$ du Problème \mathcal{S}_ρ^V converge vers la solution $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, w)$ du Problème \mathcal{P}^V , i.e.*

$$(5.61) \quad \|\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_Q + \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V + \|w_\rho(t) - w(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \rightarrow 0$$

lorsque $\rho \rightarrow 0$.

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

La démonstration du Théorème 5.4 sera donnée en plusieurs étapes. Nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses (5.10)–(5.15) et (5.30) sont vérifiées. Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel intermédiaire suivant.

Problème $\tilde{\mathcal{S}}_{w\rho}^V$. *Etant donnée $w \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ qui satisfait (5.32), trouver un champ de contraintes $\tilde{\mathbf{u}}_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ tel que*

$$(5.62) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + \int_{\Gamma_3} p(\tilde{u}_{\rho\nu}(t) - w(t))v_\nu da \\ + \int_{\Gamma_3} \mu p(\tilde{u}_{\rho\nu}(t) - w(t))\mathbf{n}^*(t) \cdot \mathbf{v}_\tau da + \frac{1}{\rho} G(\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Notons que le Problème $\tilde{\mathcal{S}}_{w\rho}^V$ est similaire au problème \mathcal{S}_w^V examiné dans la Section 5.2. Sa solution dépend de ρ et w mais, pour plus de simplicité, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de la solution par rapport à w .

Nous avons les résultats de l'existence, d'unicité et de convergence suivants.

Lemme 5.5. 1) *Pour chaque $\rho > 0$ le problème $\tilde{\mathcal{S}}_{w\rho}^V$ admet une solution unique qui satisfait $\tilde{\mathbf{u}}_\rho \in C(\mathbb{R}_+; V)$.*

2) *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $\omega_n > 0$ qui ne dépend pas de w tel que*

$$(5.63) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t)\|_V \leq \omega_n \quad \forall t \in [0, n], \quad \forall \rho > 0.$$

3) *La solution $\tilde{\mathbf{u}}_\rho$ du Problème $\tilde{\mathcal{S}}_{w\rho}^V$ converge vers la deuxième composante de la solution du Problème \mathcal{S}^V , i.e.*

$$(5.64) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. 1) Soit $\rho > 0$ est fixé et soit $t \in \mathbb{R}_+$. En utilisant la définition (5.34) de l'opérateur A_{wt} , on en déduit que l'équation variationnelle (5.62) est équivalent à l'équation

$$(5.65) \quad \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) \in V, \quad A_{wt}\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) + \frac{1}{\rho} G\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) = \mathbf{f}(t).$$

Rappelons que les inégalités (5.35), (5.37) et (5.38) montrent que A_{wt} est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur V . Par conséquent, en tenant compte de (4.56),

nous sommes en mesure d'appliquer le Théorème 2.14 2) avec $X = V$ et $K = U$. De cette façon, on en déduit l'existence d'un élément unique $\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t)$ qui résout (5.65). La continuité de la fonction $t \mapsto \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ découle des estimations semblables à celles utilisés dans la démonstration du Lemme 5.2.

2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$ et soit $t \in [0, n]$ est fixé. Nous utilisons l'équation (5.65) pour déduire que

$$(A_{wt}\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t), \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t))_V + \frac{1}{\rho} (G(\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t), \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t)))_V = (\mathbf{f}(t), \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t))_V.$$

Ensuite, nous utilisons les propriétés (4.56)(a) et (c) de l'opérateur G pour voir que

$$(G(\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t), \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t)))_V \geq 0$$

et, par conséquent,

$$(5.66) \quad (A_{wt}\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t), \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t))_V \leq (\mathbf{f}(t), \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t))_V.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité (5.38) avec $\mathbf{u}_1 = \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t)$ et $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}_V$ afin de voir que

$$(5.67) \quad (A_{wt}\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) - A_{wt}\mathbf{0}_V, \tilde{\mathbf{u}}_\rho(t))_V \geq (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t)\|_V^2.$$

Nous combinons les inégalités (5.66), (5.67), (5.30) et l'égalité (5.36) pour obtenir

$$(5.68) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t)\|_V \leq c (\|\mathbf{f}(t)\|_V + \|A_{wt}\mathbf{0}_V\|_V)$$

où $c > 0$ est une constante qui est indépendante de n , t , ρ et w . En outre, puisque w satisfait (5.32), par la définition (5.34) de l'opérateur A_{wt} et la propriété (5.11) (e) de la fonction p il en résulte que

$$(5.69) \quad \|A_{wt}\mathbf{0}_V\|_V \leq \|\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{0}_V)\|_Q.$$

L'inégalité (5.63) suit maintenant des inégalités (5.68), (5.69) et la régularité (5.20).

3) Soit $\rho > 0$ est fixé et soit $t \in \mathbb{R}_+$. Nous substituons (5.27) dans (5.28). Ensuite, nous utilisons la définition (5.34) de l'opérateur A_{wt} pour voir que

$$(5.70) \quad \mathbf{u}(t) \in U, \quad (A_{wt}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

La convergence (5.64) est maintenant une conséquence directe de l'égalité (5.65), de l'inégalité (5.70) et le Théorème 2.13 3). \square

Nous sommes maintenant en mesure de fournir la démonstration du Théorème 5.4 qui représente le résultat principal de cette section.

Démonstration. 1) La solvabilité unique du Problème \mathcal{S}_ρ^V découle des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du Théorème 5.1. Néanmoins, nous notons que l'ingrédient principal de la démonstration est le résultat de l'existence et d'unicité dans le Lemme 5.5, combiné avec le résultat de point fixe dans le Théorème 2.14.

2) L'inégalité (5.60) représente une conséquence directe de (5.63), puis les égalités (5.56) et (5.57) impliquent que la fonction \mathbf{u}_ρ satisfait le problème $\tilde{\mathcal{S}}_{w\rho}^V$ avec $w = w_\rho$.

3) Soient $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. Soit $\rho > 0$. Nous utilisons l'inégalité triangulaire afin de voir que

$$(5.71) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) - \mathbf{u}_\rho(t)\|_V + \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V.$$

D'autre part, nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (5.43), pour voir que

$$(5.72) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) - \mathbf{u}_\rho(t)\|_V \leq \sqrt{a+b} \|w_\rho(t) - w(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}$$

où a et b représentent des constantes positives qui ne dépendent pas de n , t et ρ . En outre, en utilisant les équations intégrales (5.29), (5.58), l'hypothèse (5.11) sur la fonction de la compliance normale p , la régularité (5.16) sur α et le lemme de Gronwall que nous obtenons

$$(5.73) \quad \|w_\rho(t) - w(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_n \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds.$$

Ici et ci-dessous c_n représente une constante positive qui dépend de n mais ne dépend pas de t et ρ , et dont la valeur peut changer de ligne en ligne.

En combinant maintenant les inégalités (5.72) et (5.73), nous obtenons

$$(5.74) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) - \mathbf{u}_\rho(t)\|_V \leq c_n \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds.$$

Par conséquent, à partir des inégalités (5.71) et (5.74) nous avons

$$(5.75) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq c_n \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds + \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V.$$

Nous utilisons à nouveau le lemme de Gronwall pour déduire que

$$(5.76) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V + c_n \int_0^t e^{c_n(t-s)} \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds.$$

Notons que $e^{c_n(t-s)} \leq e^{c_n t} \leq e^{nc_n}$ pour tout $s \in [0, t]$ et, par conséquent, (5.76) implique que

$$(5.77) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V + c_n e^{nc_n} \int_0^t \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds.$$

D'autre part, (5.63) et (5.64) nous permettent d'utiliser le Théorème de convergence de Lebesgue pour voir que

$$(5.78) \quad \int_0^t \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Par conséquent, en utilisant (5.77), (5.64) et (5.78) nous concluons que

$$(5.79) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Ensuite, nous utilisons (5.27), (5.56) et les propriétés (5.10) de l'opérateur \mathcal{F} pour obtenir

$$(5.80) \quad \|\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_Q \leq L_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (5.80) et (5.73) pour voir que

$$(5.81) \quad \begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_Q + \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V + \|w_\rho(t) - w(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ \leq c_n \left(\|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V + \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds \right). \end{aligned}$$

Enfin, (5.60) et (5.79) nous permettent d'utiliser encore une fois le Théorème de convergence de Lebesgue. Ainsi, nous passons à la limite dans (5.81) lorsque $\rho \rightarrow 0$ pour obtenir (5.61), ce qui conclut la démonstration. \square

En plus de l'intérêt mathématique dans le résultat de la convergence (5.61) il est important du point de vue mécanique, car il montre que la solution faible du problème de contact élastique avec compliance normale, contrainte unilatérale et usure peut être approché d'aussi près que l'on souhaite par la solution du problème de contact élastique avec compliance normale et usure, avec un coefficient de déformabilité suffisamment petit.

Chapitre 6

Problème de contact viscoélastique

Dans ce chapitre, nous considérons un problème quasistatique de contact glissant entre un corps viscoélastique et un obstacle assimilé à une fondation. Dans ce problème, le contact est modélisé avec compliance normale, contrainte unilatérale et terme de mémoire. La nouveauté du modèle réside dans l'utilisation de cette condition du contact. Le chapitre est structuré de la manière suivante. Nous présentons tout d'abord le problème physique. Puis, nous décrivons une formulation variationnelle du problème de contact. Ensuite, dans la deuxième section, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration est basée sur des arguments d'inégalités variationnelles avec opérateurs de mémoire. Puis, dans la troisième section, nous prouvons un résultat de convergence. Plus précisément, nous établissons que la solution du problème d'origine dans lequel on introduit une perturbation de certaines données converge vers la solution du problème non perturbé lorsque le paramètre de la perturbation tend vers 0. Enfin, dans la quatrième section, nous allons considérer une approximation numérique du problème variationnelle, basée sur une discrétisation temporelle et spatiale. Pour ces schémas discrétisés nous allons obtenir un résultat de l'estimation de l'erreur. Une partie du matériel présenté dans ce chapitre fait l'objet de l'article [71].

6.1 Formulation du problème

Le problème classique se formule comme suit :

Problème \mathcal{Q} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de*

contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que

$$(6.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(6.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(6.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(6.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(6.5) \quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mu |R\boldsymbol{\sigma}_\nu(t)| \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et il existe $\xi : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait

$$(6.6) \quad \left. \begin{aligned} u_\nu(t) \leq g, \quad \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t) \leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t)) = 0, \\ 0 \leq \xi(t) \leq F\left(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s) ds\right), \\ \xi(t) = 0 \text{ si } u_\nu(t) < 0, \\ \xi(t) = F\left(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s) ds\right) \text{ si } u_\nu(t) > 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Ici et ci-dessous, afin de simplifier la notation, nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions de la variable spatiale x . Nous décrivons maintenant les équations et les conditions aux limites du problème \mathcal{Q} .

Tout d'abord, l'équation (6.1) représente la loi de comportement viscoélastique à mémoire longue, où \mathcal{A} représente l'opérateur d'élasticité, \mathcal{B} est le tenseur de relaxations. Détails et divers interprétations mécaniques concernant ce genre des lois peuvent être trouvées dans [25, 46, 65], par exemple. L'équation (6.2) représente l'équation de l'équilibre. Nous supposons que le processus est quasi-statique et, par conséquent, nous négligeons le terme d'inertie dans l'équation du mouvement. Les conditions (6.3) et (6.4) sont respectivement la condition de déplacement et la condition de traction. Les conditions (6.5) et (6.6) caractérisent respectivement la loi de frottement de Coulomb régularisé et la loi compliance normale, contrainte unilatérale et terme de mémoire. Ici \mathbf{n}^* est un vecteur unitaire et R est un opérateur de régularisation associées aux conditions aux limites de contact. Pour de plus amples précisions sur ce type de condition de contact, nous renvoyons le lecteur au Chapitre 3 Section 3.3 et 3.4 (cf (3.33), (3.39) et (3.42)).

Dans l'étude du problème \mathcal{Q} nous supposons que l'opérateur d'élasticité \mathcal{A} et le tenseur de relaxation \mathcal{B} vérifient les conditions suivantes :

$$(6.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right.$$

$$(6.8) \quad \mathcal{B} \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{Q}_{\infty}).$$

Par ailleurs, nous supposons que les forces volumiques \mathbf{f}_0 et des forces de tractions \mathbf{f}_2 ont la régularité suivante :

$$(6.9) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad \mathbf{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d).$$

De même, nous supposons que la fonction de compliance normale p et la fonction de seuil de pénétration F vérifient les conditions suivantes :

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } F : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \quad |F(\mathbf{x}, r_1) - F(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_F |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } F(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Nous supposons également que la fonction de mémoire de surface et le coefficient de frottement vérifient les conditions suivantes :

$$(6.12) \quad b \in C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)), \quad b(t, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3,$$

$$(6.13) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3,$$

Dans ce qui suit, nous considérons l'ensemble des champs de déplacements admissibles et l'ensemble des champs de contraintes admissibles définis par

$$(6.14) \quad U = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3, \},$$

$$(6.15) \quad \Sigma = \{ \boldsymbol{\tau} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \},$$

Remarque 6.1. D'après l'hypothèse (6.9), on voit que la fonction \mathbf{f}_0 ne dépend pas du temps et, par conséquent, l'ensemble Σ ci-dessus ne varie pas lorsque $t \in \mathbb{R}_+$. En considérant le cas $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0(t)$ rend Σ dépendant du temps ce qui génère des difficultés mathématiques supplémentaire qu'on a souhaitées éviter dans ce mémoire.

Nous remarquons également que sous les hypothèses $g > 0$ et $\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d$ les ensembles U et Σ sont respectivement des sous-ensembles fermés, non vides et convexes des espaces V et Q .

Nous supposons maintenant que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ sont des fonctions suffisamment régulières qui vérifient (6.1)–(6.6). Soient $\mathbf{v} \in U$ et $t \in \mathbb{R}_+$ donné. Tout d'abord, nous utilisons l'équation d'équilibre (6.2) et la condition de contact (6.5) pour voir que

$$(6.16) \quad \mathbf{u}(t) \in U, \quad \boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma.$$

Ensuite, nous utilisons la formule de Green (1.4) et l'équation d'équilibre (6.2), pour obtenir

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, dx + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da.$$

Nous divisons l'intégrale de surface sur Γ_1, Γ_2 et Γ_3 et, comme $\mathbf{v} - \mathbf{u}(t) = 0$ p.p. sur Γ_1 , $\boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t)$ sur Γ_2 , nous déduisons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, dx \\ &+ \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da. \end{aligned}$$

En outre, étant donné que

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) = \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) + \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

en utilisant la loi de frottement (6.5) nous avons

$$(6.17) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) \, da - \int_{\Gamma_3} \mu |R\boldsymbol{\sigma}_\nu(t)| \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) \, da. \end{aligned}$$

Nous écrivons maintenant

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) &= (\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t))(v_\nu - g) \\ & \quad + (\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t))(g - u_\nu(t)) \\ & \quad - (p(u_\nu(t)) + \xi(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3, \end{aligned}$$

puis nous utilisons la conditions de contact (6.6) et la définition (6.14) de l'ensemble U pour obtenir

$$(6.18) \quad \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) \geq -(p(u_\nu(t)) + \xi(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Nous utilisons (6.6) encore une fois, et l'hypothèse (6.11) (a) sur la fonction F afin de voir que

$$(6.19) \quad F \left(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s)ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) \geq \xi(t)(v_\nu - u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ensuite, nous additionnons les inégalités (6.18) et (6.19) et nous intégrons le résultat sur Γ_3 pour constater que

$$(6.20) \quad \begin{aligned} & \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \geq - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \\ & \quad - \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s)ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) \, da. \end{aligned}$$

Enfin, nous combinons (6.17) et (6.20) afin de déduire que

$$\begin{aligned}
 (6.21) \quad & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \\
 & + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s) \, ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \mu |R\boldsymbol{\sigma}_\nu(t)| \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) \, da \\
 & \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da.
 \end{aligned}$$

Nous rassemblons maintenant la loi constitutive (6.1), l'hypothèse (6.16) et l'inégalité (6.21) pour obtenir la formulation variationnelle du problème \mathcal{Q} suivante.

Problème \mathcal{Q}_V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Sigma$ tels que*

$$(6.22) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) \, ds,$$

$$\begin{aligned}
 (6.23) \quad & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \\
 & + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s) \, ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \mu |R\boldsymbol{\sigma}_\nu(t)| \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) \, da \\
 & \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da
 \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Nous remarquons que \mathcal{Q}_V représente un système comprenant une équation intégrale de (6.22) et une inéquation variationnelle (6.23). Un couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ qui satisfait (6.22) et (6.23) est appelé une *solution faible* du problème de contact glissant \mathcal{Q} . La solvabilité de ce système fera l'objet de la section suivante.

6.2 Existence et unicité de la solution

Dans l'étude du problème \mathcal{Q} , nous avons le résultat de l'existence et d'unicité suivant.

Théorème 6.2. *Supposons que les hypothèses (6.7)–(6.13) sont vérifiées. Alors il existe une constante positive μ_0 qui ne dépend que de Ω , Γ_1 , Γ_3 , R et \mathcal{A} de tel que le Problème \mathcal{Q}_V admet une solution unique, si*

$$(6.24) \quad \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0.$$

Par ailleurs, la solution satisfait

$$(6.25) \quad \mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; \Sigma).$$

La démonstration de ce théorème sera donnée en plusieurs étapes. Pour la présenter, nous supposons dans ce qui suit que les conditions (6.7)–(6.13) sont vérifiées et nous commençons par introduire quelques notations. Tout d’abord, nous introduisons les opérateurs $A : V \rightarrow V$ et $\mathcal{R} : V \times Q \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ définis par

$$(6.26) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)v_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(6.27) \quad \mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = |R(P_\Sigma(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{z}))_\nu| \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{z} \in Q,$$

où $P_\Sigma : Q \rightarrow \Sigma$ représente l’opérateur de projection. Avec l’inclusion $\Sigma \subset Q_1$, l’opérateur \mathcal{R} est bien défini.

Ensuite, nous considérons l’espace $Z = Q \times L^2(\Gamma_3) \times Q$ ainsi que les opérateurs $\Theta : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$, $\Phi : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ et $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Z)$ définis par

$$(6.28) \quad (\Theta\mathbf{v})(t) = \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s)) ds,$$

$$(6.29) \quad (\Phi\mathbf{v})(t) = F \left(\int_0^t b(t-s)v_\nu^+(s) ds \right),$$

$$(6.30) \quad \mathcal{S}\mathbf{v}(t) = (\Theta\mathbf{v}(t), \Phi\mathbf{v}(t), \Theta\mathbf{v}(t)),$$

pour tout $\mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Finalement, nous définissons les fonctions $j : Z \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ par

$$(6.31) \quad j(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + (y, v_\nu^+)_{L^2(\Gamma_3)} + (\mu\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{z})\mathbf{n}^*, \mathbf{v}_\tau)_{L^2(\Gamma_3)^d}$$

$$\forall \mathbf{w} = (\mathbf{x}, y, \mathbf{z}) \in Z, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(6.32) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_\Omega \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in \mathbb{R}_+.$$

Nous avons maintenant le résultat de l’équivalence suivant.

Lemme 6.3. *Supposons que $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$ et $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; \Sigma)$. Alors, le couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$*

est une solution du Problème \mathcal{Q}_V si et seulement si

$$(6.33) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds,$$

$$(6.34) \quad (\mathbf{A}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C(\mathbb{R}_+; U \times \Sigma)$, une solution du Problème \mathcal{Q}_V et, soit $t \in \mathbb{R}_+$. Nous substituons (6.22) dans (6.23), puis nous utilisons les notations (6.28), (6.29) et l'égalité $P_\Sigma \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)$. Par conséquent, nous en déduisons que

$$(6.35) \quad \int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx + \int_\Omega \Theta \mathbf{u}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx \\ + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) da + \int_{\Gamma_3} \Phi \mathbf{u}(t) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) da \\ + \int_{\Gamma_3} \mu |R(P_\Sigma(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \Theta \mathbf{u}(t)))_\nu| \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) da \\ \geq \int_\Omega \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Ensuite, nous utilisons les définitions (6.26), (6.27) et (6.32), pour obtenir

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + (\Theta \mathbf{u}(t), (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))))_Q \\ + (\Phi \mathbf{u}(t), v_\nu^+ - u_\nu^+(t))_{L^2(\Gamma_3)} + (\mu \mathcal{R}(\mathbf{u}(t), (\Theta \mathbf{u}(t)) \mathbf{n}^*, \mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t))_{L^2(\Gamma_3)^d} \\ \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Cette inégalité combiné avec les définitions (6.30) et (6.31) montrent que \mathbf{u} satisfait l'inégalité variationnelle (6.34).

Réciproquement, nous supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C(\mathbb{R}_+; U \times \Sigma)$ est un couple des fonctions qui satisfait (6.33) et (6.34), pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, en utilisant les définitions (6.26), (6.27) et (6.30)–(6.32), il résulte que l'inégalité (6.35) est vérifiée. Par ailleurs, nous rappelons que la régularité $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; \Sigma)$ implique que $P_\Sigma \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)$ et, en outre, par (6.33) nous obtenons $\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \Theta \mathbf{u}(t)$. En substituant ces

égalités dans (6.35), nous voyons que l'inégalité variationnelle (6.23) est vérifiée, ce qui conclut la démonstration. \square

L'intérêt du Lemme 6.3 réside dans ce fait qu'il découple les inconnues \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}$ dans le système (6.22) et (6.23). La prochaine étape est de fournir la solvabilité de l'inégalité variationnelle (6.34) dont l'inconnue est le champ de déplacement. Pour ce faire, nous avons besoin d'un résultat intermédiaire sur l'opérateur \mathcal{R} .

Lemme 6.4. *Il existe $L_{\mathcal{R}} > 0$ qui ne dépend que de Ω , Γ_3 et R , tel que*

$$(6.36) \quad \|\mathcal{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{z}_1) - \mathcal{R}(\mathbf{u}_2, \mathbf{z}_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq L_{\mathcal{R}} (\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V + \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_Q) \\ \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in Q.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$, $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in Q$. En utilisant la définition (6.27) de l'opérateur \mathcal{R} et l'inégalité (1.3), nous avons

$$(6.37) \quad \|\mathcal{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{z}_1) - \mathcal{R}(\mathbf{u}_2, \mathbf{z}_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ \leq c_R \|P_{\Sigma}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{z}_1) - P_{\Sigma}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{z}_2)\|_{Q_1}.$$

D'autre part, la définition de l'ensemble Σ implique que

$$\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{Q_1} = \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_Q \quad \forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in Q,$$

d'où

$$\|P_{\Sigma}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{z}_1) - P_{\Sigma}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{z}_2)\|_{Q_1} \\ = \|P_{\Sigma}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{z}_1) - P_{\Sigma}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{z}_2)\|_Q$$

et, par conséquent, en utilisant la non-expansivité du projecteur P_{Σ} , nous obtenons

$$(6.38) \quad \|P_{\Sigma}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{z}_1) - P_{\Sigma}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{z}_2)\|_{Q_1} \\ \leq \|\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_Q$$

Nous combinons maintenant les inégalités (6.37) et (6.38) pour voir que

$$(6.39) \quad \|\mathcal{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{z}_1) - \mathcal{R}(\mathbf{u}_2, \mathbf{z}_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_R (\|\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_Q)$$

Le Lemme 6.4 est maintenant une conséquence de l'inégalité (6.39) et de l'hypothèse (6.7)(b). \square

Nous présentons maintenant le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme 6.5. *L'inégalité variationnelle (6.34) admet une solution unique avec la régularité $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+, U)$.*

Démonstration. Il est facile de voir que l'inégalité (6.34) représente une inégalité quasi-variationnelle de la forme (2.19) avec $X = V$, $K = U$ et $Z = Q \times L^2(\Gamma_3) \times Q$. Par conséquent, afin de prouver sa solvabilité unique, nous vérifions dans ce qui suit les hypothèses du Théorème 2.16.

Premièrement, nous remarquons que l'hypothèse (2.13) est évidemment satisfaite. Ensuite, nous utilisons la définition (6.26) et les inégalités (6.7)(b), (6.10)(b), (1.8) pour obtenir que

$$(6.40) \quad \|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq (L_{\mathcal{A}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

D'autre part, à partir de (6.7) (c) et la monotonie de la fonction p nous déduisons que

$$(6.41) \quad (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Nous concluons que l'opérateur A satisfait la condition (2.14) avec $L = L_{\mathcal{A}} + c_0^2 L_p$, $m = m_{\mathcal{A}}$.

Soient $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, y, \mathbf{z}) \in Z$ et $\mathbf{u} \in V$ fixés. Alors, en utilisant les propriétés des traces, il résulte que la fonction $\mathbf{v} \mapsto j(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ est convexe et continue et, par conséquent, elle satisfait la condition (2.15)(a). Nous considérons maintenant les éléments $\mathbf{w}_1 = (\mathbf{x}_1, y_1, \mathbf{z}_1)$, $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{x}_2, y_2, \mathbf{z}_2) \in Z$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, on obtient

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{w}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{w}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1))_Q + (y_1 - y_2, \mathbf{v}_{2\nu}^+ - \mathbf{v}_{1\nu}^+)_{L^2(\Gamma_3)} \\ & \quad + (\mu(\mathcal{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{z}_1) - \mathcal{R}(\mathbf{u}_2, \mathbf{z}_2)) \mathbf{n}^*, \mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}_{1\tau})_{L^2(\Gamma_3)} \end{aligned}$$

Puis, nous utilisons l'hypothèse (6.13) et les inégalités (6.36) et (1.8) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & j(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{w}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{w}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\
 & \leq \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_Q \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V + c_0 \|y_1 - y_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \\
 & \quad + c_0 L_{\mathcal{R}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V + \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_Q) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \\
 & \leq 2 \max\{1, c_0, c_0 L_{\mathcal{R}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\} \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_Z \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \\
 & \quad + c_0 L_{\mathcal{R}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V.
 \end{aligned}$$

D'où, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
 & j(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{w}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{w}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\
 (6.42) \quad & \leq \alpha \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_Z \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V + \beta \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V,
 \end{aligned}$$

où

$$\alpha = 2 \max\{1, c_0, c_0 L_{\mathcal{R}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\} \text{ et } \beta = c_0 L_{\mathcal{R}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}.$$

Il suit de là que j satisfait la condition (2.15)(b).

Soit maintenant

$$(6.43) \quad \mu_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{c_0 L_{\mathcal{R}}}$$

qui ne dépend que de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, R$ et \mathcal{A} . Il est facile de voir que si l'hypothèse de petitesse $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ est vérifiée, alors nous avons $\beta < m$ et, par conséquent, la condition (2.18) est satisfaite.

Ensuite, soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. En utilisant (6.28)–(6.29) et en tenant compte de (6.8), (6.11)(b), (6.12) et (1.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|\Theta \mathbf{u}(t) - \Theta \mathbf{v}(t)\|_Q &= \left\| \int_0^t \mathcal{B}(t-s) (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s))) ds \right\|_Q \\
 &\leq d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}(r)\|_{Q_\infty} \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds,
 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
 \|\Phi \mathbf{u}(t) - \Phi \mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &= \left\| F \left(\int_0^t b(t-s) u_\nu^+(s) ds \right) - F \left(\int_0^t b(t-s) v_\nu^+(s) ds \right) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 &\leq L_F \left\| \int_0^t b(t-s) (u_\nu^+(s) - v_\nu^+(s)) ds \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 &\leq c_0 L_F \max_{r \in [0, n]} \|b(r)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la définition (6.30) de l'opérateur \mathcal{S} nous avons

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S} \mathbf{u}(t) - \mathcal{S} \mathbf{v}(t)\|_{Q \times L^2(\Gamma_3) \times Q} &\leq 2 \|\Theta \mathbf{u}(t) - \Theta \mathbf{v}(t)\|_Q + \|\Phi \mathbf{u}(t) - \Phi \mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 &\leq \left(2d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty} + c_0 L_F \max_{r \in [0, n]} \|b(r)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds.
 \end{aligned}$$

Il résulte de ce qui précède que l'opérateur \mathcal{S} satisfait la condition (2.16) avec

$$(6.44) \quad s_n = 2d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty} + c_0 L_F \max_{r \in [0, n]} \|b(r)\|_{L^\infty(\Gamma_3)}.$$

Enfin, nous remarquons que l'hypothèse (6.9) sur les forces volumiques et les tractions surfaciques ainsi que de la définition (6.32) impliquent que $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R}_+; V)$.

Nous concluons de ce qui précède que toutes les hypothèses du Théorème 2.16 sont satisfaites. Par conséquent, nous en déduisons que l'inégalité variationnelle (6.34) admet une solution unique $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$. Ce qui achève la démonstration. \square

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour fournir la démonstration du Théorème 6.2.

Démonstration. Soit $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$ la solution unique de l'inégalité variationnelle (6.34) obtenue dans le Lemme 6.5 et soit $\boldsymbol{\sigma}$ la fonction définie par (6.33). En utilisant les hypothèses (6.7) et (6.8), il résulte que $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Des arguments

similaires à ceux utilisés dans la démonstration du Lemme 6.5 montrent que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \\
 & + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s) \, ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) \, da \\
 & + \int_{\Gamma_3} \mu |R(P_\Sigma(\boldsymbol{\sigma}_\nu(t)))| \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) \, da \\
 & \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \, da \quad \forall \mathbf{v} \in U.
 \end{aligned}$$

Soit $\boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^d$. Nous testons cette inégalité avec $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t) \pm \boldsymbol{\varphi}$ pour déduire que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx,$$

ce qui implique que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}$ dans Ω . Il en résulte que $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma$ et, en outre, $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; \Sigma)$.

Nous concluons de ce qui précède que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ représente un couple des fonctions qui satisfait (6.33)–(6.34) et, en outre, il a la régularité $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C(\mathbb{R}_+; U \times \Sigma)$. La partie de l'existence dans le Théorème 6.2 est maintenant une conséquence directe du Lemme 6.3. La partie liée à l'unicité découle de l'unicité de la solution de l'inégalité variationnelle (6.34), garantie par le Lemme 6.5. \square

6.3 Un résultat de convergence

Nous étudions maintenant la dépendance de la solution du Problème \mathcal{Q}_V par rapport aux perturbations des données. Pour ce faire, nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses (6.7)–(6.13) et (6.24) sont vérifiées et nous notons par $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C(\mathbb{R}_+; U \times \Sigma)$ la solution du Problème \mathcal{Q}_V obtenue dans le Théorème 6.2. Pour tout $\rho > 0$, soient $\mathcal{B}_\rho, b_\rho, \mathbf{f}_{0\rho}$ et $\mathbf{f}_{2\rho}$ des perturbations de $\mathcal{B}, b, \mathbf{f}_0$ et \mathbf{f}_2 satisfaisant les conditions (6.8), (6.9) et (6.12). Avec ces données, nous considérons la perturbation du Problème \mathcal{Q}_V suivante.

Problème \mathcal{Q}_V^ρ . Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ ainsi qu'un champ

de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Sigma$ tels que

$$(6.45) \quad \boldsymbol{\sigma}_\rho(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(t)) + \int_0^t \mathcal{B}_\rho(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(s)) ds,$$

$$(6.46) \quad \begin{aligned} & \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_\rho(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(t))) dx + \int_{\Gamma_3} p(u_{\rho\nu}(t))(v_\nu - u_{\rho\nu}(t)) da \\ & + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t b_\rho(t-s)u_{\rho\nu}^+(s)ds \right) (v_\nu^+ - u_{\rho\nu}^+(t)) da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu |R\sigma_{\rho\nu}(t)| \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_{\rho\tau}(t)) da \\ & \geq \int_\Omega \mathbf{f}_{0\rho} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho(t)) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2\rho}(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho(t)) da \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Ici $u_{\rho\nu}$ et $\mathbf{u}_{\rho\tau}$ représentent respectivement la composante normale et la composante tangentielle de la fonction \mathbf{u}_ρ . En outre, $\sigma_{\rho\nu}$ représente la composante normale du champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_\rho$.

Il résulte du Théorème 6.2 que, pour chaque $\rho > 0$, le Problème \mathcal{Q}_V^ρ admet une solution unique $(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\sigma}_\rho)$ avec la régularité $(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\sigma}_\rho) \in C(\mathbb{R}_+; U \times \Sigma_\rho)$, où Σ_ρ est un ensemble défini par

$$(6.47) \quad \Sigma_\rho = \{ \boldsymbol{\tau} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_{0\rho} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \}.$$

Nous considérons maintenant les hypothèses suivantes :

$$(6.48) \quad \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; \mathbf{Q}_\infty) \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

$$(6.49) \quad b_\rho \rightarrow b \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)) \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

$$(6.50) \quad \mathbf{f}_{0\rho} \rightarrow \mathbf{f}_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

$$(6.51) \quad \mathbf{f}_{2\rho} \rightarrow \mathbf{f}_2 \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d) \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Nous avons le résultat de convergence qui s'ensuit et qui représente le résultat principal de cette section.

Théorème 6.6. *Supposons que les hypothèses (6.48)–(6.51) sont vérifiées. Alors la solution $(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\sigma}_\rho)$ du Problème \mathcal{Q}_V^ρ converge vers la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ du Problème \mathcal{Q}_V ,*

c'est-à-dire

$$(6.52) \quad \mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; V), \quad \boldsymbol{\sigma}_\rho \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; Q_1) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Pour tout $\rho > 0$, nous considérons les opérateurs $\Theta_\rho : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$, $\Phi_\rho : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ et $\mathcal{S}_\rho : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Z)$ définis par

$$(6.53) \quad \Theta_\rho \mathbf{v}(t) = \int_0^t \mathcal{B}_\rho(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s)) ds,$$

$$(6.54) \quad \Phi_\rho \mathbf{v}(t) = F \left(\int_0^t b_\rho(t-s) u_\nu^+(s) ds \right),$$

$$(6.55) \quad \mathcal{S}_\rho \mathbf{v}(t) = (\Theta_\rho \mathbf{v}(t), \Phi_\rho \mathbf{v}(t), \Theta_\rho \mathbf{v}(t)),$$

pour tout $\mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Nous considérons également la fonction $\mathbf{f}_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ définie par

$$(6.56) \quad (\mathbf{f}_\rho(t), \mathbf{v})_V = \int_\Omega \mathbf{f}_{0\rho} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2\rho}(t) \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in \mathbb{R}_+.$$

Alors, il résulte du Lemme 6.3 que \mathbf{u} satisfait l'inégalité variationnelle (6.34) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et \mathbf{u}_ρ satisfait l'inégalité variationnelle

$$(6.57) \quad (\mathbf{A}\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho(t))_V + j(\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{v}) - j(\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Soient $\rho > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. Nous prenons $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t)$ dans (6.57) et $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\rho(t)$ (6.34) et nous additionnons les inégalités qui en résultent pour obtenir

$$(6.58) \quad \begin{aligned} & (\mathbf{A}\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{A}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t))_Q \\ & \leq j(\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}(t)) - j(\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t)) \\ & \quad + j(\mathcal{S} \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_\rho(t)) - j(\mathcal{S} \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \\ & \quad + (\mathbf{f}_\rho(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t))_V. \end{aligned}$$

Nous estimons maintenant chacun des termes dans l'inégalité précédente. Tout d'abord, nous utilisons l'hypothèse (6.41) pour déduire que

$$(6.59) \quad m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V^2 \leq (\mathbf{A}\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{A}\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t))_V.$$

Ensuite, nous utilisons l'inégalité (2.15) (b), révélée dans la démonstration du Lemme 6.5, pour constater que

$$\begin{aligned}
 (6.60) \quad & j(\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}(t)) - j(\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t)) \\
 & + j(\mathcal{S} \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_\rho(t)) - j(\mathcal{S} \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \\
 & \leq \alpha \|\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S} \mathbf{u}(t)\|_Z \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V + \beta \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V^2,
 \end{aligned}$$

où, $\alpha = 2 \max \{1, c_0, c_0 L_{\mathcal{R}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\}$ et $\beta = c_0 L_{\mathcal{R}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$. Enfin, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$(6.61) \quad (\mathbf{f}_\rho(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t))_V \leq \|\mathbf{f}_\rho(t) - \mathbf{f}(t)\|_V \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (6.59)–(6.61) et l'hypothèse de petitesse (6.24) afin de voir que

$$(6.62) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq c (\|\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S} \mathbf{u}(t)\|_Z + \|\mathbf{f}_\rho(t) - \mathbf{f}(t)\|_V).$$

Ici et partout ci-dessous c représente diverses constantes positives qui ne dépendent pas de ρ , t et n .

Pour continuer, nous utilisons les définitions (6.28), (6.53) et les propriétés des opérateurs \mathcal{B}_ρ et \mathcal{B} pour voir que

$$\begin{aligned}
 \|\Theta_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \Theta \mathbf{u}(t)\|_Q & \leq \int_0^t \|\mathcal{B}_\rho(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(s)) - \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))\|_Q ds \\
 & \leq \int_0^t \|\mathcal{B}_\rho(t-s) (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)))\|_Q ds + \int_0^t \|(\mathcal{B}_\rho(t-s) - \mathcal{B}(t-s)) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))\|_Q ds.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité (1.14) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (6.63) \quad & \|\Theta_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \Theta \mathbf{u}(t)\|_Q \\
 & \leq d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}_\rho(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty} \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds \\
 & \quad + d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}_\rho(r) - \mathcal{B}(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_V ds.
 \end{aligned}$$

Nous notons

$$(6.64) \quad \delta_{\rho n} = d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}_\rho(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty},$$

$$(6.65) \quad \eta_{\rho n} = d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}_\rho(r) - \mathcal{B}(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty} \int_0^n \|\mathbf{u}(s)\|_V ds,$$

et nous rappelons que $\eta_{\rho n}$ dépend aussi de \mathbf{u} mais, pour plus de simplicité, nous ne signalons pas explicitement cette dépendance. Ensuite, l'inégalité (6.63) implique que

$$(6.66) \quad \|\Theta_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \Theta \mathbf{u}(t)\|_Q \leq \delta_{\rho n} \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds + \eta_{\rho n}.$$

Nous utilisons les définitions (6.29), (6.54) et l'hypothèse (6.11) pour obtenir que

$$\begin{aligned} & \|\Phi_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \Phi \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ & \leq L_F \int_0^t \|b_\rho(t-s) \mathbf{u}_{\rho\nu}^+(s) - b(t-s) \mathbf{u}_\nu^+(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ & \leq L_F \int_0^t \|b_\rho(t-s) (\mathbf{u}_{\rho\nu}^+(s) - \mathbf{u}_\nu^+(s))\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ & \quad + L_F \int_0^t \|(b_\rho(t-s) - b(t-s)) \mathbf{u}_\nu^+(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant les propriétés des opérateurs b_ρ et b , ainsi que l'inégalité de trace (1.8) nous avons

$$(6.67) \quad \begin{aligned} & \|\Phi_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \Phi \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ & \leq c_0 L_F \max_{r \in [0, n]} \|b_\rho(r)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds \\ & \quad + c_0 L_F \max_{r \in [0, n]} \|b_\rho(r) - b(r)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

De même, nous notons,

$$(6.68) \quad \zeta_{\rho n} = c_0 L_F \max_{r \in [0, n]} \|b_\rho(r)\|_{L^\infty(\Gamma_3)},$$

$$(6.69) \quad \varsigma_{\rho n} = c_0 L_F \max_{r \in [0, n]} \|b_\rho(r) - b(r)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_0^n \|\mathbf{u}(s)\|_V ds,$$

et nous rappelons que $\varsigma_{\rho n}$ dépend aussi de \mathbf{u} mais, pour plus de simplicité, nous ne signalons pas explicitement cette dépendance. Il est facile de voir que l'inégalité (6.67) implique que

$$(6.70) \quad \|\Phi_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \Phi \mathbf{u}(t)\|_Q \leq \zeta_{\rho n} \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds + \varsigma_{\rho n}.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (6.66), (6.70) et nous utilisons les définitions (6.30) et (6.55) des opérateurs \mathcal{S} et \mathcal{S}_ρ pour obtenir

$$(6.71) \quad \|\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S} \mathbf{u}(t)\|_Z \leq 2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + (2\delta_{\rho n} + \zeta_{\rho n}) \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds.$$

En posant

$$(6.72) \quad \gamma_{\rho n} = \max_{r \in [0, n]} \|\mathbf{f}_\rho(r) - \mathbf{f}(r)\|_V,$$

nous avons

$$(6.73) \quad \|\mathbf{f}_\rho(t) - \mathbf{f}(t)\|_V \leq \gamma_{\rho n}.$$

Ensuite, en utilisant les inégalités (6.62), (6.71) et (6.73), nous déduisons que

$$(6.74) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq 2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + \gamma_{\rho n} + (2\delta_{\rho n} + \zeta_{\rho n}) \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds.$$

Nous utilisons maintenant les hypothèses (6.48), (6.49) et l'équivalence (1.1) pour voir que les suites $(\delta_{\rho n})_\rho$ et $(\zeta_{\rho n})_\rho$ définies par (6.64) et (6.68) sont bornées. Par conséquent, il existe $\omega_n > 0$ qui dépend de n et est indépendant de ρ tel que

$$(6.75) \quad 2\delta_{\rho n} + \zeta_{\rho n} \leq \omega_n,$$

et, en utilisant cette dernière inégalité dans (6.74), on déduit que

$$\|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq (2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + \gamma_{\rho n}) + \omega_n \int_0^t \|\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds.$$

Puis, nous utilisons le lemme de Gronwall pour obtenir

$$(6.76) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq (2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + \gamma_{\rho n})e^{\omega_n t}.$$

D'autre part, en utilisant les égalités (6.22), (6.45) ainsi que les définitions (6.28) et (6.53) nous trouvons que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_Q \leq \|\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(t)) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))\|_Q + \|\Theta_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \Theta \mathbf{u}(t)\|_Q.$$

D'après l'hypothèse (6.7)(b) et les inégalités (6.66) et (6.76), nous obtenons

$$(6.77) \quad \begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_Q &\leq L_{\mathcal{A}}(2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + \gamma_{\rho n})e^{\omega_n t} \\ &\quad + \delta_{\rho n}(2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + \gamma_{\rho n}) \int_0^t e^{\omega_n s} ds + \eta_{\rho n}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous rappelons les régularités $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; \Sigma)$, $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in C(\mathbb{R}_+; \Sigma_\rho)$ et les définitions (6.15) et (6.47). Il en résulte que

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}_\rho(t) = \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_{0\rho},$$

ce qui implique que

$$(6.78) \quad \|\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}(t)\|_{L^2(\Omega)^d} = \|\mathbf{f}_{0\rho} - \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Nous combinons maintenant (6.77) et (6.78), puis nous utilisons l'inégalité $\delta_{\rho n} \leq \omega_n$ garantie par (6.75), pour voir que

$$(6.79) \quad \begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_{Q_1} &\leq L_{\mathcal{A}}(2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + \gamma_{\rho n})e^{\omega_n t} \\ &\quad + \omega_n(2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + \gamma_{\rho n}) \int_0^t e^{\omega_n s} ds + \eta_{\rho n} + \|\mathbf{f}_{0\rho} - \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous passons au maximum lorsque $t \in [0, n]$ dans les inégalités (6.76) et (6.79). Et en utilisant les inégalités

$$e^{\omega_n t} \leq e^{n\omega_n}, \quad \int_0^t e^{\omega_n s} ds \leq n e^{n\omega_n},$$

nous obtenons

$$(6.80) \quad \max_{t \in [0, n]} \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq (2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + \gamma_{\rho n})e^{n\omega_n},$$

$$(6.81) \quad \begin{aligned} \max_{t \in [0, n]} \|\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_{Q_1} &\leq (L_{\mathcal{A}} + n\omega_n)(2\eta_{\rho n} + \varsigma_{\rho n} + \gamma_{\rho n})e^{n\omega_n} \\ &\quad + \eta_{\rho n} + \|\mathbf{f}_{0\rho} - \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant les hypothèses (6.48) et (6.49) ainsi que l'équivalence (1.1) pour voir que

$$(6.82) \quad \eta_{\rho n} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0,$$

$$(6.83) \quad \varsigma_{\rho n} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Notons également que (6.50), (6.51) et (6.72) impliquent

$$(6.84) \quad \gamma_{\rho n} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Enfin, l'hypothèse (6.50) montre que

$$(6.85) \quad \|\mathbf{f}_{0\rho} - \mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Nous utilisons maintenant les convergences (6.82)–(6.85) et les inégalités (6.80), (6.81) pour obtenir que

$$(6.86) \quad \max_{t \in [0, n]} \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

$$(6.87) \quad \max_{t \in [0, n]} \|\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_{Q_1} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Les convergences (6.86) et (6.87) ainsi que l'équivalence (1.1) montrent que la convergence (6.52) est vérifiée, ce qui achève la démonstration. \square

En plus de l'intérêt mathématique dans le résultat de la convergence (6.52), il est important du point de vue mécanique, car il montre que la solution faible du problème (6.1)–(6.6) dépend continûment de la fonction de compliance normale, la fonction de mémoire, les forces volumiques et les tractions surfaciques.

6.4 Estimation de l'erreur

Dans cette section, nous introduisons et analysons un schéma numérique discrète du Problème \mathcal{Q}_V . Plus précisément, nous nous intéressons à la résolution du Problème \mathcal{Q}_V sur un intervalle de temps fini $[0, T]$, avec $T > 0$ arbitraire mais fixé. Ainsi, soit N , un entier positif; nous définissons la taille du pas de temps $k = T/N$ et nous considérons la discrétisation temporelle uniforme

$$t_n = nk, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Nous utilisons les notations $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(t_n)$, $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n)$. Pour la discrétisation spatiale, nous considérons un domaine polygonal Ω et nous définissons un sous espace linéaire de dimension fini de V par

$$V^h = \{\mathbf{v}^h \in C(\overline{\Omega}) : \mathbf{v}^h|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\}$$

où \mathcal{T}_h est un élément issu de la triangularisation de $\overline{\Omega}$ et P_K est l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à un. Nous définissons également l'essemble $U^h \subset V^h$ une partie non vide, convexe, et fermée approchant U et défini par

$$(6.88) \quad U^h = \{\mathbf{v}^h \in V^h : v_\nu^h \leq g \quad \text{sur} \quad \Gamma_3\},$$

où $h > 0$ désigne le paramètre de discrétisation spatiale. Il est facile de voir que $U^h \subset U$ pour un domaine polygonal.

Pour la discrétisation du terme intégral du Problème \mathcal{Q}_V , nous utilisons la méthode des trapèzes

$$(6.89) \quad \int_0^{t_n} f(s)ds \approx k \sum_{j=0}^n f(t_j),$$

où le prime indique que le premier et le dernier terme de la somme sont divisés par deux. Ensuite, nous introduisons les approximations des opérateurs \mathcal{S} , Θ et Φ , à savoir

$$(6.90) \quad \mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{v} = (\Theta_n^{hk} \mathbf{v}, \Phi_n^{hk} \mathbf{v}, \Theta_n^{hk} \mathbf{v}), \quad 1 \leq n \leq N$$

$$(6.91) \quad \Theta_n^{hk} \mathbf{v} = k \sum_{j=0}^{n'} \mathcal{B}(t_n - t_j) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_j), \quad 1 \leq n \leq N$$

$$(6.92) \quad \Phi_n^{hk} \mathbf{v} = F \left(k \sum_{j=0}^{n'} b(t_n - t_j) v_{\nu_j}^+ \right), \quad 1 \leq n \leq N$$

pour $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_n\}_{n=0}^N$. Pour $n = 0$, nous définissons $\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{v} = \mathbf{0}$. L'approximation discrète du Problème \mathcal{Q}_V est alors la suivante.

Problème \mathcal{Q}_V^{hk} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}^{hk} := \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \in U^h$ tel que $n = 0, \dots, N$,*

$$(6.93) \quad \begin{aligned} & (A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk})_V + j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) \\ & - j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}) \geq (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk})_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in U^h. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses du Théorème 6.2 avec des arguments similaires à ceux utilisés dans la Section 6.2, il résulte que l'inégalité discrète (6.93) admet une solution unique.

Nous passons maintenant à l'analyse de l'erreur entre les solutions des Problèmes \mathcal{Q}_V et \mathcal{Q}_V^{hk} . Pour ce faire, nous prenons $t = t_n$ et $\mathbf{v} = \mathbf{u}_n^{hk}$ dans (6.34) pour voir que

$$(6.94) \quad \begin{aligned} & (A\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n)_V + j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n^{hk}) \\ & - j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \geq (\mathbf{f}_n, \mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n)_V. \end{aligned}$$

Ensuite, en combinant les inégalités (6.93) et (6.94) nous obtenons

$$(6.95) \quad \begin{aligned} & (A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk})_V + (A\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n)_V + j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) \\ & - j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}) + j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n^{hk}) \\ & - j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \geq (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n)_V. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}_n - A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk})_V &= (A\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk})_V \\ & - (A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk})_V \\ & - (A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h)_V. \end{aligned}$$

D'après l'égalité précédente, l'inégalité (6.95) devient

$$(6.96) \quad \begin{aligned} & (A\mathbf{u}_n - A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk})_V \\ & \leq (A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n)_V + j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) - j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}) \\ & \quad + j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n^{hk}) - j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) + (\mathbf{f}_n, \mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h)_V. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme l'opérateur A est fortement monotone, nous avons

$$(6.97) \quad m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 \leq (A\mathbf{u}_n - A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk})_V.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (6.96) et (6.97) afin de voir que

$$(6.98) \quad m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 \leq (A\mathbf{u}_n - A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h)_V + R_n(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}) + K_1 + K_2,$$

où

$$(6.99) \quad \begin{aligned} R_n(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}) &= (A\mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n)_V + j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h) \\ & \quad - j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) - (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n)_V, \end{aligned}$$

$$(6.100) \quad \begin{aligned} K_1 &= j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n) - j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}) \\ & \quad j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n^{hk}) - j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n), \end{aligned}$$

$$(6.101) \quad \begin{aligned} K_2 &= j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) - j(\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n) \\ & \quad j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) - j((\mathcal{S}\mathbf{u})_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h). \end{aligned}$$

Nous procédons maintenant à l'estimation de chacun des termes ci-dessus. Pour ce faire, nous utilisons l'inégalité (6.40) pour obtenir

$$(6.102) \quad |(A\mathbf{u}_n - A\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h)_V| \leq (L_{\mathcal{A}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V.$$

Pour le terme K_1 , en utilisant des arguments similaires à eux employés dans l'inégalité (6.42), nous avons

$$(6.103) \quad |K_1| \leq \alpha \|\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - (\mathcal{S}\mathbf{u})_n\|_Z \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V + \beta \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V^2.$$

Et, grâce à (6.90), nous obtenons

$$(6.104) \quad \|\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - (\mathcal{S}\mathbf{u})_n\|_Z \leq 2\|\Theta_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - (\Theta\mathbf{u})_n\|_Q + \|\Phi_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - (\Phi\mathbf{u})_n\|_{L^2(\Gamma_3)}.$$

Par ailleurs, nous utilisons l'inégalité triangulaire ainsi la méthode des trapèzes introduite dans (6.89) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\Theta_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - (\Theta \mathbf{u})_n\|_Q &\leq \|\Theta_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - \Theta_n^{hk} \mathbf{u}\|_Q + \|\Theta_n^{hk} \mathbf{u} - (\Theta \mathbf{u})_n\|_Q \\ &\leq \|\Theta_n^{hk} (\mathbf{u}^{hk} - \mathbf{u})\|_Q + \|\Theta_n^{hk} \mathbf{u} - (\Theta \mathbf{u})_n\|_Q. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses suivantes

$$(6.105) \quad \mathbf{u} \in W^{2,\infty}(0, T; V), \quad \mathcal{B} \in C^2([0, T]; \mathbf{Q}_\infty),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \|\Theta_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - (\Theta \mathbf{u})_n\|_Q &\leq c \max_{s \in [0, T]} \|\mathcal{B}(s)\|_{\mathbf{Q}_\infty} \sum_{j=0}^n k \|\mathbf{u}_j^{hk} - \mathbf{u}_j\|_V \\ &\quad + ck^2 \|[\mathcal{B}(t_n - s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))]\|_{L^\infty((0, t_n); V)}. \end{aligned}$$

Donc, nous déduisons que

$$(6.106) \quad \|\Theta_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - (\Theta \mathbf{u})_n\|_Q \leq ck \|\mathcal{B}\|_\infty \sum_{j=0}^n \|\mathbf{u}_j^{hk} - \mathbf{u}_j\|_V + ck^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2,\infty}((0, T); V)},$$

où $\|\mathcal{B}\|_\infty = \|\mathcal{B}\|_{L^\infty((0, T); \mathbf{Q}_\infty)}$. De même, nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites

$$(6.107) \quad \mathbf{u}_\nu|_{\Gamma_3} \in W^{2,\infty}(0, T; L^2(\Gamma)), \quad b \in C^2([0, T]; L^\infty(\Gamma_3)),$$

et, en utilisant l'hypothèse (6.11)(b) de la fonction F , nous avons

$$\begin{aligned} (6.108) \quad \|\Phi_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - \Phi \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq \|\Phi_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - \Phi_n^{hk} \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\Phi_n^{hk} \mathbf{u} - \Phi \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq c L_F k \|b\|_\infty \sum_{j=0}^n \|u_{\nu j}^{+hk} - u_{\nu j}^+\|_{L^2(\Gamma_3)} + c L_F k^2 \|u_\nu^+\|_{W^{2,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))}, \end{aligned}$$

où $\|b\|_\infty = \|b\|_{L^\infty((0, T); L^\infty(\Gamma_3))}$. Ensuite, nous combinons les inégalités (6.104), (6.106), (6.108) ainsi que l'inégalité de trace (1.8), pour obtenir

$$(6.109) \quad \|\mathcal{S}_n^{hk} \mathbf{u}^{hk} - (\mathcal{S} \mathbf{u})_n\|_Z \leq ck \sum_{j=0}^n \|\mathbf{u}_j^{hk} - \mathbf{u}_j\|_V + ck^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2,\infty}([0, T]; V)}.$$

Nous en déduisons que

$$(6.110) \quad |K_1| \leq \alpha c k \sum_{j=0}^n \|\mathbf{u}_j^{hk} - \mathbf{u}_j\|_V \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V \\ + \alpha c k^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2,\infty}([0,T];V)} \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V + \beta \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V^2.$$

Par un raisonnement similaire appliqué à (6.42) nous obtenons que

$$(6.111) \quad |K_2| \leq \alpha c k \sum_{j=0}^n \|\mathbf{u}_j^{hk} - \mathbf{u}_j\|_V \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V \\ + \alpha c k^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2,\infty}((0,T);V)} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V + \beta \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V.$$

Enfin, nous rassemblons (6.98), (6.102), (6.110) et (6.111) pour voir que

$$m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 \leq (L_{\mathcal{A}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V \\ + |R_n(\mathbf{v}^h, \mathbf{u})| + \alpha c k \sum_{j=0}^n \|\mathbf{u}_j^{hk} - \mathbf{u}_j\|_V \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V \\ + \beta \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V^2 + \beta \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V \\ + \alpha c k^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2,\infty}((0,T);V)} \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_V.$$

Sous l'hypothèse de petitesse (6.24), en utilisant l'inégalité élémentaire

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2, \quad \forall \delta > 0, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \leq c \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V + c |R_n(\mathbf{v}^h, \mathbf{u})|^{1/2} + c k^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2,\infty}((0,T);V)} \\ (6.112) \quad + c k \sum_{j=0}^n \|\mathbf{u}_j^{hk} - \mathbf{u}_j\|_V.$$

En appliquant le Lemme 2.18 de Gronwall, nous obtenons de (6.112) que si k est suffisamment petit, alors

$$(6.113) \quad \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \leq c \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}^h \in U^h} [\|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V + |R_n(\mathbf{v}^h, \mathbf{u})|^{1/2}] \\ + c k^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2,\infty}((0,T);V)}.$$

Afin d'avoir une estimation d'erreur optimale, nous supposons maintenant les hypothèses supplémentaires de régularité suivantes.

$$(6.114) \quad \mathbf{u} \in C([0, T]; H^2(\Omega)^d), \quad u_{\nu|_{\Gamma_3}} \in C([0, T]; H^2(\Gamma_3)),$$

$$(6.115) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \in C([0, T]; L^2(\Gamma)^d).$$

Ensuite, par l'égalité (6.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} |R_n(\mathbf{v}^h, \mathbf{u})| &= \left| \int_{\Gamma_3} [(\sigma_{n\nu} + p(u_{n\nu}))(v_\nu^h - u_{n\nu}) + F\left(\int_0^{t_n} b(t_n - s)u_\nu^+(s) ds\right)(v_\nu^{+h} - u_{n\nu}^+)] da \right| \\ &\leq (\|\sigma_{n\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p(u_{n\nu})\|_{L^2(\Gamma_3)} + L_F \|b\|_\infty \|u_\nu^+\|_{L^\infty((0, T); L^2(\Gamma_3))}) \|u_{n\nu} - v_\nu^h\|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous déduisons que

$$(6.116) \quad |R_n(\mathbf{v}^h, \mathbf{u})| \leq c \|u_{n\nu} - v_\nu^h\|_{L^2(\Gamma_3)}.$$

Donc (6.113) se réduit à

$$(6.117) \quad \begin{aligned} \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V &\leq c \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}^h \in U^h} [\|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V + \|u_{n\nu} - v_\nu^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2}] \\ &\quad + c k^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2, \infty}((0, T); V)}. \end{aligned}$$

Enfin, pour $0 \leq n \leq N$, soit $\Pi_h \mathbf{u}_n \in V^h$, l'interpolation linéaire par élément fini de la solution \mathbf{u}_n . Puisque $\mathbf{u}_n \in U$, i.e., $\mathbf{u}_{n\nu} \leq g$, on a $\Pi_h \mathbf{u}_n \in U^h$.

En appliquant la théorie standard de l'interpolation par élément fini, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n - \Pi_h \mathbf{u}_n\|_V &\leq c h \|\mathbf{u}_n\|_{H^2(\Omega)^d} \\ \|\mathbf{u}_{n\nu} - \Pi_h \mathbf{u}_{n\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} &\leq c h^2 \|u_{n\nu}\|_{H^2(\Gamma_3)^d}. \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons montré le résultat suivant.

Théorème 6.7. *Supposons que k est suffisamment petit. Alors, sous les hypothèses de régularité (6.105), (6.107), (6.114) et (6.115), nous avons l'estimation d'erreur suivante :*

$$(6.118) \quad \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \leq c(h + k^2).$$

Cette estimation d'erreur optimale achève cette section et ce chapitre.

Chapitre 7

Problème de contact viscoplastique

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique qui décrit le contact glissant entre un corps viscoplastique et une fondation. La nouveauté du modèle réside dans l'utilisation d'une loi de comportement viscoplastique de type "rate", avec ou sans variables internes d'état. Le contact est modélisé avec compliance normale, contrainte unilatérale et terme de mémoire. Comme dans le Chapitre 6, nous obtenons une formulation variationnelle du problème de contact glissant. Ensuite, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration est basée sur des arguments d'inégalités variationnelles, en utilisant des opérateurs et un cadre fonctionnel différent de celui utilisé au Chapitre 6. Enfin, nous formulons un problème similaire avec variables internes d'état, dont nous présentons un résultat d'existence et d'unicité.

7.1 Formulation du problème

Le problème peut se formuler de la façon suivante.

Problème Z. *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$(7.1) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(7.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(7.5) \quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mu |R\boldsymbol{\sigma}_\nu(t)| \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe $\xi : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait

$$(7.6) \quad \left. \begin{aligned} u_\nu(t) &\leq g, & \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t) &\leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t)) &= 0, \\ 0 &\leq \xi(t) \leq F\left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds\right), \\ \xi(t) &= 0 \text{ si } u_\nu(t) < 0, \\ \xi(t) &= F\left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds\right) \text{ si } u_\nu(t) > 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et, de plus,

$$(7.7) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

L'équation (7.1) représente la loi de comportement viscoplastique du matériau, l'équation (7.2) représente l'équation d'équilibre, les conditions (7.3) et (7.4) sont respectivement les conditions de déplacement et de traction. Ensuite, la condition (7.5) caractérise une version de la loi Coulomb à frottement sec présentée au Chapitre 3 Section 3.4. Puis, le groupement de conditions (7.6) représente la loi de compliance normale, contrainte unilatérale et terme de mémoire présentée dans la Section 3.4 sans la fonction de mémoire de surface. Finalement, (7.7) représente les conditions initiales où \mathbf{u}_0 est le déplacement initial et $\boldsymbol{\sigma}_0$ est la contrainte initiale.

Dans l'étude du Problème \mathcal{Z} nous supposons que le tenseur d'élasticité \mathcal{E} et la fonction constitutive non linéaire \mathcal{G} vérifient les conditions suivantes :

$$(7.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{(a)} & \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b)} & \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{klij} = \mathcal{E}_{jikl} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d. \\ \text{(c)} & \text{Il existe } m_{\mathcal{E}} > 0 \text{ tel que} \\ & \mathcal{E}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \geq m_{\mathcal{E}} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \right.$$

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{(a)} & \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b)} & \text{Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ & \|\mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \\ & \leq L_{\mathcal{G}} (\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|) \\ & \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c)} & \text{L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ & \text{pour tout } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d)} & \text{L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } Q. \end{aligned} \right.$$

Par ailleurs, nous supposons que les fonction de compliance normale p , de seuil de pénétration F , le coefficient de frottement μ et l'opérateur R vérifient respectivement les conditions (6.10), (6.11), (6.13) et (1.3).

Nous supposons aussi que les forces volumiques et des forces de tractions ont la régularité suivante :

$$(7.10) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad \mathbf{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d),$$

Nous considérons l'ensemble des champs de déplacements admissibles U et l'ensemble des champs de contraintes admissibles Σ définis par (6.14) et (6.15). De ce fait, nous supposons que les données initiales vérifient

$$(7.11) \quad \mathbf{u}_0 \in U, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \in \Sigma.$$

Passons maintenant à la formulation variationnelle du Problème \mathcal{Z} . Pour ce faire, nous supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ sont suffisamment régulières vérifiant (7.1)–(7.7). Nous intégrons l'équation (7.1) avec $t > 0$ donné puis, nous utilisons la condition initiale (7.7) pour obtenir

$$(7.12) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0).$$

D'autre part, soit $\mathbf{v} \in U$. Nous utilisons la formule de Green (1.4) et l'équation (7.2) pour obtenir

$$(7.13) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dx \\ + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da.$$

Par la définition (6.32), il vient que

$$(7.14) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da.$$

Par ailleurs, nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) = \sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) + \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t) \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau}(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Nous utilisons maintenant (7.6), (6.18) et l'hypothèse (6.11) (a) sur la fonction F afin de voir que

$$(7.15) \quad F \left(\int_0^t u_{\nu}^+(s) ds \right) (v_{\nu}^+ - u_{\nu}^+(t)) \geq \xi(t)(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ensuite, nous combinons les inégalités (6.18) et (7.15) et nous intégrons le résultat sur Γ_3 pour obtenir

$$(7.16) \quad \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) da \geq - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) da \\ - \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) da.$$

Enfin, nous combinons (6.17) et (7.16) pour déduire que

$$(7.17) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) da \\ + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) da + \int_{\Gamma_3} \mu |R\sigma_\nu(t)| \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) da \\ \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V.$$

Nous rassemblons l'inégalité (7.17) et l'égalité (7.12) afin d'obtenir la formulation variationnelle du Problème \mathcal{Z} suivante.

Problème \mathcal{Z}_V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Sigma$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$*

$$(7.18) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0),$$

$$(7.19) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) da \\ + \int_{\Gamma_3} F \left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds \right) (v_\nu^+ - u_\nu^+(t)) da + \int_{\Gamma_3} \mu |R\sigma_\nu(t)| \mathbf{n}^* \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) da \\ \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V.$$

Un couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ qui satisfait (7.18) et (7.19) est appelé une *solution faible* du problème de contact glissant \mathcal{Z} . La solvabilité de ce système fera l'objet de la section suivante.

7.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous présentons le résultat de l'existence et d'unicité de la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ du Problème \mathcal{Z} .

Théorème 7.1. *Supposons que les hypothèses (6.10), (6.11), (6.13) et (7.8)–(7.11) sont vérifiées. Alors il existe une constante positive μ_0 qui ne dépend que de Ω , Γ_1 , Γ_3 , R et \mathcal{E} de tel que le Problème \mathcal{Z}_V admet une solution unique, si*

$$(7.20) \quad \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0.$$

De plus, la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ satisfait la régularité suivante :

$$(7.21) \quad \mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; \Sigma).$$

La démonstration du Théorème 7.1 se fera en plusieurs étapes. Nous commençons par le résultat préliminaire suivant.

Lemme 7.2. *Supposons que les hypothèses (7.9) et (7.11) sont vérifiées. Alors, pour tout $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ il existe une fonction $\Psi\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$ tel que*

$$(7.22) \quad \Psi\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\Psi\mathbf{u}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

De plus, l'opérateur $\Psi : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ satisfait la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\alpha_n > 0$ tel que

$$(7.23) \quad \|\Psi\mathbf{u}_1(t) - \Psi\mathbf{u}_2(t)\|_Q \leq \alpha_n \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds$$

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in C(\mathbb{R}_+; V), \forall t \in [0, n].$$

La démonstration de ce lemme est basée sur arguments similaires à ceux dans [65]. Toutefois, nous avons choisi de présenter les détails de la preuve.

Démonstration. Soit $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$. Nous considérons l'opérateur $A : C(\mathbb{R}_+; Q) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ défini par

$$(7.24) \quad A\boldsymbol{\eta}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\eta}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0)$$

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in C(\mathbb{R}_+; Q), t \in \mathbb{R}_+.$$

Soient $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C(\mathbb{R}_+; Q)$ et soit $t \in \mathbb{R}_+$. Par la définition (7.24) nous avons

$$\|A\boldsymbol{\eta}_1(t) - A\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q$$

$$= \left\| \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\eta}_1(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \right.$$

$$\left. - \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\eta}_2(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds - \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \right\|_Q.$$

Nous utilisons l'hypothèse (7.9) afin de voir que

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q \\
& \leq L_G \int_0^t \left(\|\boldsymbol{\eta}_1(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \boldsymbol{\eta}_2(s) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))\|_Q + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))\|_Q \right) ds \\
& \leq L_G \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_Q ds.
\end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite le Théorème 2.14 et nous en déduisons que l'opérateur Λ admet un seul point fixe dans $C(\mathbb{R}_+; Q)$, noté $\Psi\mathbf{u}$. L'égalité (7.22) est maintenant une conséquence directe de l'égalité $\Lambda(\Psi\mathbf{u}) = \Psi\mathbf{u}$.

D'une autre part, soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0, n]$. En utilisant l'égalité (7.22), nous avons

$$\begin{aligned}
& \|\Psi\mathbf{u}_1(t) - \Psi\mathbf{u}_2(t)\|_Q \\
& = \left\| \int_0^t \mathcal{G}(\Psi\mathbf{u}_1(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \right. \\
& \quad \left. - \int_0^t \mathcal{G}(\Psi\mathbf{u}_2(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))) ds - \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \right\|.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous utilisons les hypothèses (7.9) et (7.8) pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \|\Psi\mathbf{u}_1(t) - \Psi\mathbf{u}_2(t)\|_Q \\
& \leq \int_0^t L_G (\|\Psi\mathbf{u}_1(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \Psi\mathbf{u}_2(s) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\|_Q \\
& \quad + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\|_Q) ds \\
& \leq \int_0^t L_G (\|\Psi\mathbf{u}_1(s) - \Psi\mathbf{u}_2(s)\|_Q + \|\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\| \\
& \quad + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\|_Q) ds \\
& \leq L_G \int_0^t \|\Psi\mathbf{u}_1(s) - \Psi\mathbf{u}_2(s)\|_Q ds + L_G \int_0^t \|\mathcal{E}\|_{Q_\infty} \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\|_Q \\
& \quad + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\|_Q ds.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
 \|\Psi \mathbf{u}_1(t) - \Psi \mathbf{u}_2(t)\|_Q &\leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t \|\Psi \mathbf{u}_1(s) - \Psi \mathbf{u}_2(s)\|_Q ds \\
 &\quad + L_{\mathcal{G}} (\|\mathcal{E}\|_{Q_\infty} + 1) \int_0^t \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\|_Q ds \\
 &\leq k \int_0^t \|\Psi \mathbf{u}_1(s) - \Psi \mathbf{u}_2(s)\|_Q ds + k \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds.
 \end{aligned}$$

où k est une constante positive qui dépend de \mathcal{G} et \mathcal{E} . Il en résulte que

$$\|\Psi \mathbf{u}_1(t) - \Psi \mathbf{u}_2(t)\|_Q \leq k \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|\Psi \mathbf{u}_1(s) - \Psi \mathbf{u}_2(s)\|_Q ds \right).$$

Puis, d'après le Lemme de Grönwall, nous obtenons

$$(7.25) \quad \|\Psi \mathbf{u}_1(t) - \Psi \mathbf{u}_2(t)\|_Q \leq k e^{nk} \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds.$$

Il résulte que l'opérateur Ψ satisfait l'inégalité (7.23) avec $\alpha_n = k e^{nk}$. Ce qui achève la démonstration. \square

Nous considérons maintenant l'espace $Z = Q \times L^2(\Gamma_3) \times Q$ et nous introduisons les opérateurs $A : V \rightarrow V$, $\mathcal{R} : V \times Q \rightarrow L^2(\Gamma_3)$, $\Phi : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ et $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Z)$ par les égalités suivantes :

$$(7.26) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(7.27) \quad \mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = |R(P_\Sigma(\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{z}))_\nu| \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{z} \in Q,$$

$$(7.28) \quad (\Phi \mathbf{v})(t) = F \left(\int_0^t v_\nu^+(s) ds \right) \quad \forall \mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+; V), t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(7.29) \quad \mathcal{S} \mathbf{v}(t) = (\Psi \mathbf{v}(t), \Phi \mathbf{v}(t), \Psi \mathbf{v}(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+; V), t \in \mathbb{R}_+.$$

Nous avons le résultat de l'équivalence suivant.

Lemme 7.3. *Supposons que $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$ et $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; \Sigma)$. Alors, le couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ est une solution du Problème \mathcal{Z}_V si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$*

$$(7.30) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \Psi \mathbf{u}(t),$$

$$(7.31) \quad \begin{aligned}
 (A\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + j(\mathcal{S} \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\
 - j(\mathcal{S} \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.
 \end{aligned}$$

La démonstration est similaire à ceux présentés dans la démonstration du Lemme 6.3.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Nous supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ est solution du Problème \mathcal{Z}_V . D'après l'égalité (7.18), nous écrivons

$$\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) = \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0).$$

Ensuite, par la définition (7.22) de l'opérateur Ψ , nous obtenons l'égalité (7.30). Puis, nous utilisons les définitions (7.26)–(7.29), (6.31) et l'égalité $P_\Sigma \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}$, afin de combiner l'inégalité (7.19) et l'égalité (7.30) pour obtenir (7.31).

Réciproquement, nous supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ est un couple de fonctions qui satisfait (7.30) et (7.31) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puis, nous combinons (7.30) et (7.22) afin de voir que l'inégalité (7.19) est vérifiée. D'une autre part, la régularité $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; \Sigma)$ implique que $P_\Sigma \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}$. Enfin, nous substituons l'égalité (7.30), l'inégalité (7.31) et les définitions (7.26)–(7.29), (6.31), pour obtenir l'inégalité variationnelle (7.19), ce qui conclut la démonstration. \square

Nous présentons maintenant le résultat de l'existence et d'unicité suivant.

Lemme 7.4. *L'inégalité variationnelle (7.31) admet une solution unique avec une régularité $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+, U)$.*

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 2.16 avec $X = V$, $K = U$ et $Z = Q \times L^2(\Gamma_3) \times Q$. Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V$. Tout d'abord, en utilisant la définition (7.26) de l'opérateur A et quelques calculs élémentaires, nous obtenons

$$\begin{aligned} & |(A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{w})_V| \\ & \leq |\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q| + |(P\mathbf{v}_1 - P\mathbf{v}_2, \mathbf{w})_V| \\ & \leq \|\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2)\|_Q \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\|_Q + \left| \int_{\Gamma_3} (p(v_{1\nu}) - p(v_{2\nu}))w_\nu da \right|. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de (1.14) nous obtenons

$$\begin{aligned} & |(A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{w})_V| \\ & \leq d \|\mathcal{E}\|_{Q_\infty} \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2)\|_Q \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\|_Q + \int_{\Gamma_3} |p(v_{1\nu}) - p(v_{2\nu})w_\nu| da \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons l'hypothèse (6.10) de la fonction de la compliance normale, pour voir que

$$\begin{aligned} & |(A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{w})_V| \\ & \leq d \|\mathcal{E}\|_{Q^\infty} \cdot \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \cdot \|\mathbf{w}\|_V + L_p (\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de trace (1.8), nous déduisons que

$$\begin{aligned} & |(A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{w})_V| \\ & \leq d \|\mathcal{E}\|_{Q^\infty} \cdot \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \cdot \|\mathbf{w}\|_V + L_p c_0 \|\mathbf{w}\|_V \cdot c_0 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$(7.32) \quad |(A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{w})_V| \leq (d \|\mathcal{E}\|_{Q^\infty} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{w}\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V.$$

Nous prenons maintenant $\mathbf{w} = A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2$ dans (7.32) pour obtenir

$$\|A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2\|_V^2 \leq (d \|\mathcal{E}\|_{Q^\infty} + c_0^2 L_p) \|A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V,$$

donc,

$$\|A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2\|_V \leq (d \|\mathcal{E}\|_{Q^\infty} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V.$$

Ce qui montre que l'opérateur A est de Lipschitz avec la constante $L_A = d \|\mathcal{E}\|_{Q^\infty} + c_0^2 L_p$.

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{u}_1(t) - A\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t))_V \\ & = (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)))_Q \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} (p(u_{1\nu}(t)) - p(u_{2\nu}(t)))(u_{1\nu}(t) - u_{2\nu}(t)) d\Gamma. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (6.10), nous avons

$$(p(u_{1\nu}) - p(u_{2\nu}))(u_{1\nu} - u_{2\nu}) \geq 0$$

et, en utilisant l'hypothèse (7.8) nous obtenons

$$(\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)))_Q \geq m_\mathcal{E} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t))\|_Q^2.$$

Nous rappelons que $\|\mathbf{u}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_Q$, d'où on obtient

$$(A\mathbf{u}_1(t) - A\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t))_V \geq m_\mathcal{E} \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2.$$

De ce fait, l'opérateur A est fortement monotone avec $m_A = m_{\mathcal{E}}$. Donc, nous concluons que l'opérateur A satisfait la condition (2.14) avec $m = m_A$ et $L = L_A$.

D'après la démonstration du Lemme 6.5, la fonctionnelle j satisfait bien la condition (2.15) avec

$$\alpha = 2 \max \{1, c_0, c_0 L_{\mathcal{R}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\} \quad \text{et} \quad \beta = c_0 L_{\mathcal{R}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}.$$

En posant

$$\mu_0 = \frac{m_{\mathcal{E}}}{c_0 L_{\mathcal{R}}},$$

nous avons $\beta < m$ et nous en déduisons la validité de la condition (2.18).

Par ailleurs, d'après le Lemme 7.3 nous avons que

$$\|\Psi \mathbf{u}(t) - \Psi \mathbf{v}(t)\|_Q \leq k e^{nk} \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds.$$

D'une autre part, en utilisant l'hypothèse 6.11)(b) et la définition (7.29) de l'opérateur Φ , nous avons

$$\begin{aligned} \|\Phi \mathbf{u}(t) - \Phi \mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &= \left\| F \left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds \right) - F \left(\int_0^t v_\nu^+(s) ds \right) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq L_F \left\| \int_0^t u_\nu^+(s) - v_\nu^+(s) ds \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_0 L_F \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la définition (7.29) de l'opérateur \mathcal{S} nous avons

$$\|\mathcal{S} \mathbf{u}(t) - \mathcal{S} \mathbf{v}(t)\|_{Q \times L^2(\Gamma_3) \times Q} \leq (2\alpha_n + c_0 L_F) \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds.$$

De ce fait, il vient que l'opérateur \mathcal{S} satisfait (2.16) avec $s_n = 2\alpha_n + c_0 L_F$.

Enfin, d'après la définition (6.32) et l'hypothèse (7.10) nous pouvons déduire la régularité de \mathbf{f} exprimée dans (2.17). Par conséquent les hypothèses du Théorème 2.16 sont bien vérifiées. Donc l'inégalité variationnelle (7.31) admet une solution unique $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$. □

Nous pouvons maintenant présenter la démonstration du Théorème 7.1.

Démonstration. La démonstration du Théorème 7.1 est maintenant une conséquence directe des Lemmes 7.3 et 7.4. □

7.3 Problème avec variables internes d'état

Dans cette section, nous étudions un problème similaire au Problème \mathcal{Z} avec variables internes d'état. La différence consiste dans la loi de comportement utilisée qui inclut maintenant une équation différentielle pour la variable interne d'état.

7.3.1 Formulation du problème

Le problème mécanique se formule de la manière suivante.

Problème \mathcal{Z}' . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ et une variable interne d'état $\boldsymbol{\kappa} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que*

$$(7.33) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\kappa}(t)) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.34) \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}}(t) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\kappa}(t)) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.35) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.36) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(7.37) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(7.38) \quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mu |R\boldsymbol{\sigma}_\nu(t)| \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et il existe $\xi : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait

$$(7.39) \quad \left. \begin{aligned} u_\nu(t) &\leq g, \quad \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t) \leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t)) &= 0, \\ 0 &\leq \xi(t) \leq F\left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds\right), \\ \xi(t) &= 0 \quad \text{si } u_\nu(t) < 0, \\ \xi(t) &= F\left(\int_0^t u_\nu^+(s) ds\right) \quad \text{si } u_\nu(t) > 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et, de plus,

$$(7.40) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \boldsymbol{\kappa}(0) = \boldsymbol{\kappa}_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Les équations (7.33) et (7.34) représentent la loi de comportement viscoplastique avec variable interne d'état. Divers résultats, des exemples et des interprétations mécaniques dans l'étude des matériaux viscoélastiques de la forme (7.33), (7.34) peuvent être

trouvés dans [21, 29, 37, 68]. Les conditions aux limites (7.35)–(7.39) ont les mêmes interprétations que celles présentés dans le problème \mathcal{Z} . Finalement, (7.7) représente les conditions initiales où \mathbf{u}_0 est le déplacement initial, $\boldsymbol{\sigma}_0$ est la contrainte initiale et $\boldsymbol{\kappa}_0$ est la variable interne d'état initiale.

Dans l'étude du Problème \mathcal{Z}' , nous supposons que les fonctions constitutives \mathcal{G} et \mathbf{G} vérifient les conditions suivantes.

$$(7.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\kappa}_2)\| \\ \quad \leq L_{\mathcal{G}}(\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| + \|\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2\|) \\ \quad \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^m. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

$$(7.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathbf{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathbf{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\kappa}_2)\| \\ \quad \leq L_{\mathbf{G}}(\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| + \|\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2\|) \\ \quad \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^m. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } L^2(\Omega)^m. \end{array} \right.$$

Da même, nous supposons que les données initiales vérifient

$$(7.43) \quad \mathbf{u}_0 \in U, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \in \Sigma, \quad \boldsymbol{\kappa}_0 \in L^2(\Omega)^m,$$

Passons maintenant à la formulation variationnelle du Problème \mathcal{Z}' . Pour ce faire, nous supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ sont suffisamment réguliers vérifiant (7.33)–(7.40). Nous intégrons les équations (7.33) et (7.34) avec $t > 0$ donné. En utilisant les conditions initiales (7.40) pour obtenir

$$(7.44) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\kappa}(s)) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)),$$

et

$$(7.45) \quad \boldsymbol{\kappa}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\kappa}(s)) ds + \boldsymbol{\kappa}_0.$$

Nous rassemblons (7.19), (7.44) et (7.45), pour obtenir la formulation variationnelle du Problème \mathcal{Z}' .

Problème \mathcal{Z}'_V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$, un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Sigma$ et la variable interne d'état $\boldsymbol{\kappa} : \mathbb{R}_+ \rightarrow L^2(\Omega)^m$ tels que (7.19), (7.44) et (7.45) sont vérifiées, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.*

7.3.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous nous intéressons au résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du Problème \mathcal{Z}'_V qui est donné par le théorème suivant :

Théorème 7.5. *Supposons que les hypothèses (6.10)–(6.11), (6.13), (7.8), (7.10), (7.41)–(7.43) sont vérifiées. Alors, le Problème \mathcal{Z}'_V admet une solution unique si l'hypothèse de petitesse (7.20) est vérifiée. De plus la solution satisfait*

$$(7.46) \quad \mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\kappa} \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^m).$$

La démonstration du Théorème 7.5 est similaire à celle utilisée dans [68], mais avec un choix différent d'opérateurs.

Nous passons maintenant à la démonstration du Théorème 7.5. Pour cela, nous commençons avec le résultat intermédiaire de l'existence et d'unicité suivant.

Lemme 7.6. *Supposons que les hypothèses (7.8) et (7.41)–(7.43) sont vérifiées. Alors, pour tout fonction $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, il existe une unique fonction $\mathcal{T}\mathbf{u} = (\mathcal{T}_1\mathbf{u}, \mathcal{T}_2\mathbf{u}) \in C(\mathbb{R}_+; Q \times L^2(\Omega)^m)$ tel que*

$$(7.47) \quad \mathcal{T}_1\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\mathcal{T}_1\mathbf{u}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathcal{T}_2\mathbf{u}(s)) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0),$$

$$(7.48) \quad \mathcal{T}_2\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(\mathcal{T}_1\mathbf{u}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathcal{T}_2\mathbf{u}(s)) ds + \boldsymbol{\kappa}_0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. De plus, l'opérateur $\mathcal{T} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q \times L^2(\Omega)^m)$ vérifie la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $r_n > 0$ dépendant que n , d , \mathcal{G} , \mathbf{G} et \mathcal{E} , tel que

$$(7.49) \quad \|\mathcal{T}\mathbf{u}(t) - \mathcal{T}\mathbf{v}(t)\|_{Q \times L^2(\Omega)^m} \leq r_n \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+; V) \quad \forall t \in [0, n].$$

Nous remarquons que l'inégalité (7.49) montre que l'opérateur \mathcal{T} est un opérateur de mémoire.

La démonstration de ce lemme est basée sur un opérateur de point fixe suivi de l'application du lemme de Grönwall.

Démonstration. Soit $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$. Nous considérons l'opérateur $\Lambda : C(\mathbb{R}_+; Q \times L^2(\Omega)^m) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q \times L^2(\Omega)^m)$ défini par

$$(7.50) \quad \Lambda \boldsymbol{\tau}(t) = (\Lambda_1 \boldsymbol{\tau}(t), \Lambda_2 \boldsymbol{\tau}(t)),$$

$$(7.51) \quad \Lambda_1 \boldsymbol{\tau}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\alpha}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\beta}(s)) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0),$$

$$(7.52) \quad \Lambda_2 \boldsymbol{\tau}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\beta}(s)) ds + \boldsymbol{\kappa}_0$$

pour tout $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in C(\mathbb{R}_+; Q \times L^2(\Omega)^m)$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Notons que l'opérateur Λ dépend de \mathbf{u} , mais, pour plus de simplicité, nous n'indiquons pas explicitement cette dépendance.

Soient $\boldsymbol{\tau}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1)$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2) \in C(\mathbb{R}_+; Q \times L^2(\Omega)^m)$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, en utilisant les définitions (7.50)–(7.52) et les hypothèses (7.41) et (7.42), nous déduisons que

$$(7.53) \quad \begin{aligned} & \|\Lambda \boldsymbol{\tau}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\tau}_2(t)\|_{Q \times L^2(\Omega)^m} \\ & \leq (L_{\mathcal{E}} + L_G) \int_0^t \left(\|\boldsymbol{\alpha}_1(s) - \boldsymbol{\alpha}_2(s)\|_Q + \|\boldsymbol{\beta}_1(s) - \boldsymbol{\beta}_2(s)\|_{L^2(\Omega)^m} \right) ds \\ & = \sqrt{2} (L_G + L_G) \int_0^t \|\boldsymbol{\tau}_1(s) - \boldsymbol{\tau}_2(s)\|_{Q \times L^2(\Omega)^m} ds. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.14, l'inégalité (7.53) montre que l'opérateur Λ admet un unique point fixe dans $C(\mathbb{R}_+; Q \times L^2(\Omega)^m)$, notée $\mathcal{T}\mathbf{u} = (\mathcal{T}_1\mathbf{u}, \mathcal{T}_2\mathbf{u})$. En outre, nous combinons les égalités (7.50)–(7.52) avec l'égalité $\Lambda(\mathcal{T}\mathbf{u}) = \mathcal{T}\mathbf{u}$, pour déduire que les égalités (7.47) et (7.48) sont vérifiées.

D'une autre part, soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, n]$. Par l'égalité (7.47) nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_1\mathbf{u}(t) - \mathcal{T}_1\mathbf{v}(t)\|_Q &= \left\| \int_0^t \mathcal{G}(\mathcal{T}_1\mathbf{u}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathcal{T}_2\mathbf{u}(s)) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t \mathcal{G}(\mathcal{T}_1\mathbf{v}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s)), \mathcal{T}_2\mathbf{v}(s)) ds \right\|_Q. \end{aligned}$$

Ensuite, sous les hypothèses (7.8) et (7.41), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{T}_1 \mathbf{u}(t) - \mathcal{T}_1 \mathbf{v}(t)\|_Q \\ & \leq L_G \int_0^t \left(\|\mathcal{T}_1 \mathbf{u}(s) - \mathcal{T}_1 \mathbf{v}(s)\|_Q + \|\mathcal{T}_2 \mathbf{u}(s) - \mathcal{T}_2 \mathbf{v}(s)\|_{L^2(\Omega)^m} \right) ds \\ & \quad + L_G \int_0^t \|\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s))\|_Q + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s))\|_Q ds \end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité (1.14) et quelques calculs élémentaires, pour obtenir

$$(7.54) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{T}_1 \mathbf{u}(t) - \mathcal{T}_1 \mathbf{v}(t)\|_Q & \leq \sqrt{2} L_G \int_0^t \|\mathcal{T} \mathbf{u}(s) - \mathcal{T} \mathbf{v}(s)\|_{Q \times L^2(\Omega)^m} ds \\ & \quad + L_G (d \|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} + 1) \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

De même, en utilisant l'égalité (7.48) et les hypothèses (7.8), (7.42), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_2 \mathbf{u}(t) - \mathcal{T}_2 \mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^m} & = \left\| \int_0^t \mathbf{G}(\mathcal{T}_1 \mathbf{u}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathcal{T}_2 \mathbf{u}(s)) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t \mathbf{G}(\mathcal{T}_1 \mathbf{v}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s)), \mathcal{T}_2 \mathbf{v}(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega)^m} \\ & \leq L_G \int_0^t \left(\|\mathcal{T}_1 \mathbf{u}(s) - \mathcal{T}_1 \mathbf{v}(s)\|_Q + \|\mathcal{T}_2 \mathbf{u}(s) - \mathcal{T}_2 \mathbf{v}(s)\|_{L^2(\Omega)^m} \right) ds \\ & \quad + L_G \int_0^t \|\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s))\|_Q + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s))\|_Q ds \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (1.14), nous déduisons également que

$$(7.55) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{T}_2 \mathbf{u}(t) - \mathcal{T}_2 \mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^m} & \leq \sqrt{2} L_G \int_0^t \|\mathcal{T} \mathbf{u}(s) - \mathcal{T} \mathbf{v}(s)\|_{Q \times L^2(\Omega)^m} ds \\ & \quad + L_G (d \|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} + 1) \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (7.54) et (7.55), nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T} \mathbf{u}(t) - \mathcal{T} \mathbf{v}(t)\|_{Q \times L^2(\Omega)^m} & \leq \|\mathcal{T}_1 \mathbf{u}(t) - \mathcal{T}_1 \mathbf{v}(t)\|_Q + \|\mathcal{T}_2 \mathbf{u}(t) - \mathcal{T}_2 \mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^m} \\ & \leq k \left(\int_0^t \|\mathcal{T} \mathbf{u}(s) - \mathcal{T} \mathbf{v}(s)\|_{Q \times L^2(\Omega)^m} ds + \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds \right), \end{aligned}$$

où

$$(7.56) \quad k = \max \{ \sqrt{2} (L_G + L_G), (L_G + L_G)(d \|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} + 1) \}$$

Nous utilisons maintenant le Lemme de Gronwall, pour obtenir

$$(7.57) \quad \|\mathcal{T}\mathbf{u}(t) - \mathcal{T}\mathbf{v}(t)\|_{Q \times L^2(\Omega)^m} \leq k e^{nk} \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds.$$

Cette inégalité montre que l'inégalité (7.49) est vérifiée avec $r_n = k e^{nk}$. Donc \mathcal{T} est un opérateur de mémoire, ce qui conclut la démonstration. \square

Nous considérons maintenant un opérateur $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Z)$ défini par

$$(7.58) \quad \mathcal{S}\mathbf{v}(t) = (\mathcal{T}_1\mathbf{v}(t), \Phi\mathbf{v}(t), \mathcal{T}_1\mathbf{v}(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où Φ est l'opérateur défini par l'égalité (7.28). Nous utilisons l'opérateur \mathcal{T} défini dans le Lemme 7.6 pour obtenir le résultat de l'équivalence suivant.

Lemme 7.7. *Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ un triple de fonctions qui satisfait (7.46). Alors $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ est une solution du Problème \mathcal{Z}'_V si et seulement si*

$$(7.59) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{T}_1(\mathbf{u}(t)),$$

$$(7.60) \quad \boldsymbol{\kappa}(t) = \mathcal{T}_2\mathbf{u}(t),$$

$$(7.61) \quad \begin{aligned} & (\mathbf{A}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ & - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U, \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

La démonstration est similaire à celle du lemme 7.3. Toutefois nous avons choisi de la présenter en détail.

Démonstration. Premièrement, nous supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ est la solution du Problème \mathcal{Z}'_V et $t \in \mathbb{R}_+$. En utilisant les égalités (7.44) et (7.45), nous obtenons

$$(7.62) \quad \begin{aligned} & \boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \\ & = \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\kappa}(s)) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0), \end{aligned}$$

$$(7.63) \quad \boldsymbol{\kappa}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\kappa}(s)) ds + \boldsymbol{\kappa}_0.$$

Ensuite, nous utilisons les définitions de \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 dans le Lemme 7.6 pour obtenir les égalités (7.59) et (7.60). Puis, nous combinons (7.19), (7.59) et les définitions (6.31), (7.26)–(7.28) et (7.58) pour obtenir l'inégalité (7.61).

Réciproquement, nous supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ vérifie (7.59)–(7.61). Nous utilisons (7.59), (7.60) et les définitions (7.47), (7.48) des opérateurs \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 pour obtenir les égalités (7.62) et (7.63), ce qui montrent que (7.44) et (7.45) sont vérifiées. En outre, en utilisant (7.59), (7.61) et les définitions (6.31), (7.26)–(7.28) et (7.58), nous obtenons l'inégalité variationnelle (7.19), ce qui achève la démonstration. \square

Nous avons maintenant le résultat de l'existence et d'unicité suivant.

Lemme 7.8. *L'inégalité variationnelle (7.61) admet une solution unique avec une régularité $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+, U)$.*

Démonstration. Notons tout d'abord que l'opérateur A est fortement monotone, de Lipschitz et que la fonctionnelle j satisfait la condition (2.15) ainsi que l'hypothèse de petitesse (7.20), tel qu'il résulte de la démonstration du Lemme 7.4. Par ailleurs, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$(7.64) \quad \|\mathcal{T}_1 \mathbf{u}(t) - \mathcal{T}_1 \mathbf{v}(t)\|_Q \leq \sqrt{2} \|\mathcal{T} \mathbf{u}(t) - \mathcal{T} \mathbf{v}(t)\|_{Q \times L^2(\Omega)^m}.$$

En outre, en combinant (7.57) et (7.64), nous en déduisons que

$$(7.65) \quad \|\mathcal{T}_1 \mathbf{u}(t) - \mathcal{T}_1 \mathbf{v}(t)\|_Q \leq \sqrt{2} r_n \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds.$$

Par conséquent, en utilisant la définition (7.58) de l'opérateur \mathcal{S} nous avons

$$\|\mathcal{S} \mathbf{u}(t) - \mathcal{S} \mathbf{v}(t)\|_{Q \times L^2(\Gamma_3) \times Q} \leq \left(2\sqrt{2} r_n + c_0 L_F\right) \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds.$$

De ce fait, il vient que \mathcal{S} est un opérateur de mémoire et, donc satisfait la condition (2.16) avec

$$s_n = 2\sqrt{2} r_n + c_0 L_F.$$

Enfin, les hypothèses du Théorème 2.16 sont vérifiées. Par conséquent, l'inégalité variationnelle (7.61) admet une solution unique $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$. \square

Nous sommes maintenant en mesure de fournir la démonstration du Théorème 7.5

Démonstration. Nous utilisons des arguments similaires à ceux présentés dans la démonstration du Théorème 6.2. D'après, le Lemme 7.8 $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$ est la solution

unique de l'inégalité variationnelle (7.61). Soient σ et κ les fonctions définies par (7.44) et (7.45). Alors, il en résulte que le triplet $(\mathbf{u}, \sigma, \kappa)$ est la solution unique du Problème \mathcal{Z}'_V avec la régularité (7.46). Le Théorème 7.5 est maintenant une conséquence directe des Lemmes 7.7 et 7.8. \square

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons traité quelques problèmes de contact glissant entre un corps déformable et une fondation rigide avec diverses lois de contact (compliance normale, contrainte unilatérale et terme de mémoire) et de frottement. Nous avons considéré successivement le cas des matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques avec ou sans variables internes d'état. Pour certains modèles nous avons pris en considération l'usure des surfaces en contact, ce qui a rendu le modèle mathématique plus intéressant car il conduit à un problème d'évolution non linéaire.

Pour commencer, nous avons proposé des formulations variationnelles des différents modèles de contact en termes de déplacements et parfois en termes de contraintes, comme dans le cas du Chapitre 4. Puis, nous avons obtenu des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible, ainsi que des résultats concernant le comportement de la solution par rapport aux perturbations des données et des résultats de convergence, lorsque le coefficient de rigidité de la fondation tend vers l'infini. Pour y parvenir, nous avons utilisé des arguments de monotonie, de compacité, de régularisation et de point fixe. Pour certains cas, nous avons considéré une approximation numérique des problèmes de contact en utilisant une discrétisation temporelle uniforme et une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis. À l'issue de ces discrétisations, nous avons montré l'existence et l'unicité des problèmes variationnels approchés. Enfin, pour ces schémas, nous avons obtenu des résultats d'estimation de l'erreur sous des hypothèses de régularité de la solution.

Pour continuer le travail accompli dans cette thèse, il serait intéressant de considérer des processus de contact dynamique associé aux différentes lois de contact et de frottement étudiées. L'analyse variationnelle de ces problèmes représente un sujet de recherche ouvert qui mérite d'être abordé dans l'avenir. Le contrôle optimal des modèles de contact présentés dans cette thèse pourrait aussi être étudié. Pour vérifier les estimations de l'erreur ainsi que les résultats de convergence obtenus dans ce mémoire et illustrer le comportement des modèles étudiés, des simulations numériques basées sur des méthodes performantes seront les bienvenues. Cet objectif sera réalisé dans des travaux ultérieurs qui représenteront une continuation naturelle de ce mémoire de thèse.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).
- [2] K.T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor & S. Wright , A dynamic contact problem with friction and wear, *Int. J. Egnng. Sci.*. **35** (1997), 1291–1309.
- [3] P. Ballard, Steady sliding frictional contact problems in linear elasticity *Journal of Elasticity*. **110** (2013), 33-61.
- [4] H.T. Banks, S. Hu & Z.R. Kenz, A brief review of elasticity and viscoelasticity for solids, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. **3** (2011), 1–51.
- [5] H.T. Banks, G.A. Pinter, L.K. Potter, J.M. Gaitens & L.C. Yanyo, Modeling of quasistatic and dynamic load responses of filled viscoelastic materials, *Chapter 11 in Mathematical Modelling*, Cambridge University Press, (2011), 229–252.
- [6] H.T. Banks, G.A. Pinter, L.K. Potter, B.C. Munoz & L.C. Yanyo, Estimation and control related issues in smart material structure and fluids, *4th International Conference on Optimization Techniques and Applications*, Perth Australia, (1998), 19–34.
- [7] M. Barboteu, K. Bartosz & P. Kalita, An analytical and numerical approach to a bilateral contact problem with nonmonotone friction, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*. **23** (2013), 263-276.
- [8] M. Barboteu, K. Bartosz, P. Kalita & A. Ramadan, Analysis of a contact problem with normal compliance, finite penetration and nonmonotone slip dependent friction, *Communications in Contemporary Mathematics*. **16** (2013), 1–29.
- [9] M. Barboteu, X.L. Cheng & M. Sofonea, Analysis of a contact problem with unilateral constraint and slip-dependent friction, *Mathematics and Mechanics of Solids*. **21** (2016), 791–811.
- [10] M. Barboteu, A. Matei & M. Sofonea, Analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with normal compliance, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. **65** (2012), 555–579.

- [11] M. Barboteu, F. Pătrulescu, A. Ramadan & M. Sofonea, History-dependent Contact Models for Viscoplastic Materials, *The IMA Journal of Applied Mathematics*. **79** (2014), 1180–1200.
- [12] K. Bartosz, Hemivariational inequalities approach to the dynamic viscoelastic sliding contact problem with wear. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* **65** (2006), 546–566.
- [13] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, (1987).
- [14] A. Capatina, *Variational Inequalities and Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics. **31** (2014), Springer, New York.
- [15] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, (1978).
- [16] M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction, *Int. J. Engng. Sci.* **22** (1984), 567–581.
- [17] M. Cocu, E. Pratt and M. Raous, Existence d’une solution du problème quasi-statique de contact unilatéral avec frottement non local, *C. R. Acad. Sci. Paris* **320**, Série I (1995), 1413–1417.
- [18] M. Cocu, E. Pratt and M. Raous, Formulation and approximation of quasistatic frictional contact, *Int. J. Engng. Sci.* **34** (1996), 783–798.
- [19] M. Cocu and J.M. Ricaud, Analysis of a class of implicit evolution inequalities associated to dynamic contact problems with friction, *Int. J. Engng. Sci.* **328** (2000), 1534–1549.
- [20] C. Corduneanu, Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra, *Ann. Math. Pure Appl.* **67** (1965), 349–363.
- [21] N. Cristecu & I. Suliciu, *Viscoplasticity*, Martinus Nijhoff Publishers, Editura Technica, Bucharest, (1982).
- [22] G. Duvaut, Loi de frottement non locale, *J. Méc. Thé. Appl.* Special issue (1982), 73–78.
- [23] G. Duvaut & J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, (1976).
- [24] G. Duvaut & J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod (1972).
- [25] A.D. Drozdov, *Finite Elasticity and viscoelasticity*, A Course in the Nonlinear Mechanics of Solids, World Scientific, Singapore, (1996).

- [26] C. Eck, J. Jarušek & M. Krbeč, *Unilateral Contact Problems : Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics **270**, Chapman/CRC Press, New York, (2005).
- [27] C. Eck, J. Jarušek & J. Stará, Normal compliance contact models with finite interpenetration, *Archive of Rational Mechanics and Analysis*. **208** (2013), 25–57.
- [28] A. Farcaş, F. Pătrulescu, M. Sofonea, A history-dependent contact problem with unilateral constraint, *Mathematics and its Applications*, 105–111 (2012).
- [29] J. R. Fernández-García, W. Han, M. Sofonea and J.M. Viaño, Variational and numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variable, *Quarterly of Mechanics and Applied Mathematics*. **54** (2001), 501-522.
- [30] G. Fichera, Problemi elastostatici com vincoli unilaterali : il problema di Signorini com ambigue condizioni al contorno, Memorie della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. **87** (2) (1964), 91–140.
- [31] R.J. Gu, K.L. Kuttler & M. Shillor, Frictional wear of a thermoelastic beam, *J. Math. Anal. Appl.* **242** (2000), 212–236.
- [32] R.J. Gu & M. Shillor, Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact, *Int. J. Solids Structures*. **38** (2001), 2323-2333.
- [33] M.E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, (1981).
- [34] W. Han & M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society and International Press, (2002).
- [35] J. Haslinger, I. Hlaváček & J. Nečas, *Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics*, in Handbook of Numerical Analysis, J.-L. Lions and P. Ciarlet eds., Vol IV, North-Holland, Amsterdam, (1996), 313–485.
- [36] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas & J. Lovíšek, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, (1988).
- [37] I.R. Ionescu & M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1993).
- [38] J. Jarušek & M. Sofonea, *On the solvability of dynamic elastic-visco-plastic contact problems*, (ZAMM). **88** (2008), 3-22.

- [39] N. Kikuchi & J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, (1988).
- [40] A. Klarbring, A. Mikelič & M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *International Journal of Engineering Sciences*. **26** (1988), 811–832.
- [41] A. Klarbring, A. Mikelič & M. Shillor, On friction problems with normal compliance, *Nonlinear Analysis*. **13** (1989), 935–955.
- [42] K. L. Kuttler & M. Shillor, Dynamic contact with normal compliance wear and discontinuous friction coefficient, *SIAM J. Math. Anal.* **34** (2002), 1–27.
- [43] T. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer, Berlin, (2002).
- [44] J. A. C. Martins & J. T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*. **11** (1987), 407–428.
- [45] J. J. Massera & J. J. Schäffer, *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press, New York-London, (1966).
- [46] S. Migórski, A. Ochal & M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics. **26** (2013), Springer, New York.
- [47] S. Migórski, M. Shillor & M. Sofonea (Guest Editors), Special section on Contact Mechanics, *Nonlinear Analysis : Real World Applications*. **22** (2015), 435–680.
- [48] J.J.Moreau, Application of convex analysis to some problems of dry friction, *Trends of Pure Mathematics Applied to Mechanics*, Zorski ed., (1979).
- [49] J. Nečas & I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies*, An Introduction, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, (1981).
- [50] J.T. Oden & J.A.C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **52** (1985), 527–634.
- [51] P. D. Panagiotopoulos, *Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, (1993).
- [52] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhauser, Boston, (1985).

- [53] A. C. Pipkin, *Lectures in Viscoelasticity Theory*, Applied Mathematical Sciences 7, George Allen & Unwin Ltd., London, Springer-Verlag, New York, (1972).
- [54] M. Rochdi, M. Shillor & M. Sofonea, Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction, *Journal of Elasticity*. **51** (1998), 105–126.
- [55] A. Rodriguez-Arós, J.M. Viaño & M. Sofonea, Asymptotic analysis of a quasistatic frictional contact problem with wear, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **401** (2013), 641–653.
- [56] M. Shillor & M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem with friction, *International Journal of Engineering Science*. **38** (2000), 1517–1533.
- [57] M. Shillor, M. Sofonea & J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics. **655** (2004), Springer, Berlin Heidelberg.
- [58] M. Shillor, M. Sofonea & R. Touzani, Quasistatic Frictional Contact and Wear of a Beam. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, **8** (2001), 201–218.
- [59] A. Signorini, Sopra a une questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, (1933).
- [60] M. Sofonea *Problèmes Mathématiques en Elasticité et Viscoplasticité, Cours de D.E.A. de Mathématiques Appliquées*. Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (1991).
- [61] M. Sofonea, C. Avramescu & A. Matei, A Fixed point result with applications in the study of viscoplastic frictionless contact problems, *Communications on Pure and Applied Analysis*. **7** (2008), 645–658.
- [62] M. Sofonea, D. Danan & C. Zheng, Primal and dual variational formulation of a frictional contact problem, *Mediterranean Journal of Mathematics*. **13** (2014), 857–872
- [63] M. Sofonea, W. Han, M. Barboteu, Analysis of a Viscoelastic Contact Problem with Multivalued Normal Compliance and Unilateral Constraint, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **264** (2013), 12–22.
- [64] M. Sofonea & A. Matei, History-dependent quasivariational inequalities arising in Contact Mechanics, *European Journal of Applied Mathematics*. **22** (2011), 471–491.
- [65] M. Sofonea & A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series. **398** (2012), Cambridge University Press, Cambridge.

- [66] M. Sofonea, F. Pătrulescu, Analysis of a history-dependent frictionless contact problem, *Mathematics and Mechanics of Solids*. **18** (2013), 409–430.
- [67] M. Sofonea & F. Pătrulescu, Penalization of history-dependent variational inequalities, *European J. Appl. Math.* **25** (2014), 155–176.
- [68] M. Sofonea, F. Pătrulescu & A. Farcas, A Viscoplastic Contact Problem with Normal Compliance, Unilateral Constraint and Memory Term, *Appl. Math. Optim.* **69**(2014), 175–198.
- [69] M. Sofonea, F. Pătrulescu & Y. Souleiman, A Contact Problem with Wear and Unilateral Constraint, *Applicable Analysis*. **95** (2016), 2590–2607.
- [70] M. Sofonea & Y. Souleiman, Analysis of a Sliding Frictional Contact Problem with Unilateral Constraint, *Mathematics and Mechanics of Solids*. **22** (2015), 324–342.
- [71] M. Sofonea & Y. Souleiman, A Viscoelastic Sliding Contact Problem with Normal Compliance, Unilateral Constraint and Memory Term, *Mediterranean Journal of Mathematics*. **13** (2016), 2863–2886.
- [72] M. Sofonea & Y. Xiao, Fully, history-dependent quasivariational inequalities in Contact Mechanics, *Applicable Analysis*. **95** (2016), 2464–2484.
- [73] N. Strömberg, L. Johansson & A. Klarbring, Derivation and analysis of a generalized standard model for contact, friction and wear, *Int. J. Solids Structures*. **33** (1996), 1817–1836.
- [74] A. Zmitrowicz, Variational descriptions of wearing out solids and wear particles in contact mechanics, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. **39** (2001), 791–808.

Résumé : Les phénomènes de contact impliquant des corps déformables abondent dans l'industrie, notamment dans les structures mécaniques. En raison de leur complexité intrinsèque, les phénomènes de contact sont modélisés à l'aide de problèmes aux limites fortement non linéaires. De ce fait, la modélisation de ces phénomènes pose plusieurs difficultés mathématiques. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation, l'analyse variationnelle et l'analyse numérique de problèmes de contact glissant intervenant en mécanique des solides, pour des matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques. La première partie de cette thèse rappelle quelques résultats préliminaires, notamment des outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour réaliser la suite de ce travail. La deuxième partie est consacrée à l'étude de quelques problèmes de contact glissant sous diverses conditions de contact et frottement. Pour chacun de ces problèmes, nous introduisons les formulations fortes et des formulations variationnelles. Ensuite, nous obtenons des résultats d'existence et d'unicité des solutions faibles, sous certaines hypothèses de petitesse, ainsi que des résultats de convergence. Enfin, nous proposons une approximation numérique de certains problèmes de contact à l'aide de schémas discrétisés. Pour ces schémas, nous obtenons des résultats d'estimation de l'erreur.

Mots clés : lois de comportement élastique, viscoélastique et viscoplastique, contact frottant, compliance normale, contrainte unilatérale, terme de mémoire, inéquation variationnelle, usure, opérateur de mémoire, solution faible, pénalisation, estimations de l'erreur.

Abstract : Contact phenomena involving deformable bodies abound in industry, especially in mechanical structures. Due to their intrinsic complexity, contact phenomena are modeled with strongly nonlinear boundary problems. For this reason, the modeling of these phenomena give rise to various mathematical difficulties. In this thesis, we are interested in the modeling, the variational analysis and the numerical analysis of problems of sliding contact in solid mechanics for elastic, viscoelastic and viscoplastic materials. The first part of this thesis concerns some preliminary results, in particular the mathematical and mechanical tools necessary to carry out the continuation of this work. The second part is devoted to the study of some problems of sliding contact under various conditions of contact and friction. For each of these problem, we introduce strong formulations and variational formulations. Then, we obtain results of existence and uniqueness of the weak solutions, under smallness assumptions, as well as results of convergence. Finally, we propose a numerical approximation of some contact problems based on the study of discretized schemes. For these schemes we obtain error estimates results.

Keywords : elastic, viscoelastic and viscoplastic constitutive law, frictional contact, normal compliance, unilateral constraint, memory term, variational inequality, wear, history-dependent operator, weak solution, penalization, error estimates.