



HAL
open science

Contribution à l'étude des propriétés optiques des métamatériaux hyperboliques

Jessica Benedicto

► **To cite this version:**

Jessica Benedicto. Contribution à l'étude des propriétés optiques des métamatériaux hyperboliques. Autre [cond-mat.other]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2013. Français. NNT : 2013CLF22403 . tel-01531835

HAL Id: tel-01531835

<https://theses.hal.science/tel-01531835>

Submitted on 2 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL

U.F.R SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES FONDAMENTALES

N° 771

THESE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité : PHYSIQUE

Par «**BENEDICTO Jessica**»

Master Matériaux et Nanostructures

**CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS OPTIQUES
DES MÉTAMATÉRIAUX HYPERBOLIQUES**

Soutenue publiquement le « 4 Décembre 2013 », devant la
commission d'examen :

Président : M. Pierre DISSEIX

Examineurs : M. Olivier VANBÉSIEN Rapporteur

M. Nicolas BONOD Rapporteur

M. Christophe SAUVAN Examineur

M. Emmanuel CENTENO Directeur de thèse

M. Antoine MOREAU Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à Antoine Moreau et Emmanuel Centeno, pour m'avoir accordé leur confiance, me donnant ainsi la chance d'intégrer le monde de la recherche, ainsi que de m'avoir transmis plus que leur métier, leur passion.

Un grand merci à toi Antoine, qui m'a ouvert la porte de mon premier laboratoire lors de mon stage de Master, tu as toujours été là pour me soutenir et me redonner confiance, cela malgré un emploi du temps bien chargé et une aventure professionnelle très prenante.

Un grand merci à toi Emmanuel, de m'avoir accordé ta confiance pour cette thèse, tu m'as offert une formation très riche du métier pendant de ces trois années de thèse.

Vous m'avez, avec patience et disponibilité, prodigué vos connaissances scientifiques ainsi que de précieux conseils, mais aussi soutenu et encouragé tout au long de ces dernières années.

Je tiens à exprimer mes plus profonds remerciements à Olivier Vanbésien, Professeur à l'Université de Lille et à Nicolas Bonod, chargé de recherche à l'Institut Fresnel, pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter mon manuscrit de thèse. Je remercie également, Pierre Disseix, et Christophe Sauvan pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Pour m'avoir transmis vos connaissances, pour m'avoir donné goût à la physique, pour vos précieux conseils et pour tous les échanges que nous avons pu avoir, j'adresse mes remerciements à mes professeurs Frédérique Badaud, Vincent Morenas, Martine Mihailovic, Pierre Disseix, Philippe Rosnet, Francois Berry et Christine Chbicheb.

Lors de ma thèse, j'ai eu la chance d'intégrer l'équipe "Electromagnétique et Nanophotonique" du LASMEA devenu au cours de ma thèse l'Institut Pascal, je remercie Gerard Granet, Kofi Edee et Rafik Smaali pour m'avoir si bien accueilli au sein de l'équipe et pour ces différentes interactions scientifiques.

Je suis très reconnaissante envers Christelle Eyraud de l'Institut Pascal, pour son aide, et ses conseils pendant la préparation de la soutenance.

J'ai également eu la chance de partager de nombreux moments avec collègues et amis. Merci à Rémi pour son aide scientifique dès mon arrivée en stage et ce jusqu'à la fin de la soutenance, ainsi que pour toutes ces discussions, et pour toutes ces blagues et bons moments. Merci à Laurent, qui a toujours été là, pour son immense soutien, pour toute son aide si précieuse et pour sa bonne humeur toujours présente. Merci à Émilien, Gaëlle, Emmanuelle, Anna Maria, Jullien, Clément, Mira, et Caroline pour tous les bons moments passés.

Pour m'avoir supportée, écoutée, soutenue tout au long de ma thèse mais également pendant mes études, je tiens à remercier sincèrement Marie Claire, Lina, Elise, Bertrand, Morgan et Myrtille pour leur sincère amitié et leurs encouragements.

Enfin, je remercie particulièrement ma très chère famille et plus particulièrement mes sœurs et mes parents, qui m'ont apportés un soutien inconditionnel et sans relâche, qui m'ont sans cesse accompagnés dans toutes ces étapes, et sans qui je n'aurais pu arriver jusque là.

Table des matières

I	Introduction aux métamatériaux et cristaux photoniques	7
I.1	Les cristaux photoniques	9
I.1-a	Généralités	9
I.1-b	Théorie Cristaux 1D : Les miroirs de Bragg	10
I.1-c	Cristaux photoniques 2D	20
I.2	Les métamatériaux	21
I.2-a	La lentille de Pendry	23
I.2-b	Les métamatériaux hyperboliques	28
I.3	Conclusion	31
II	Décalages négatifs et réfraction négative	33
II.1	Historique	34
II.2	La réfraction négative	34
II.2-a	Vitesse de groupe	35
II.2-b	Valeur moyenne du vecteur de Poynting	37
II.2-c	Condition de réfraction négative	37
II.2-d	Choix de la structure	38
II.3	Décalage négatif géant	41
II.3-a	Régime interférentiel	42
II.3-b	Décalage négatif géant dans des cristaux photoniques 2D	45
II.4	Conclusion	46
III	Les lentilles hyperboliques	49
III.1	Historique	51
III.2	Milieu effectif	51
III.3	Régime de canalisation	53
III.4	Indice effectif d'un matériau hyperbolique	54
III.4-a	Méthode d'homogénéisation paraxiale	54
III.4-b	Calcul de l'indice effectif d'un métamatériau hyperbolique en régime d'homogénéisation	57
III.4-c	Calcul de l'indice effectif d'un métamatériau hyperbolique en régime diffractif	59
III.5	Relation de conjugaison et résolution optique d'une lentille hyperbolique	59
III.5-a	Relation de conjugaison	60
III.5-b	Résolution	62
III.6	Application au design de la lentille	63

III.6-a Courbes isofréquences et indices effectifs	63
III.6-b Optimisation de la transmission	64
III.6-c Résolution optimale	69
III.7 Conclusion	74
IV Non-localité	75
IV.1 Nécessité du modèle hydrodynamique	77
IV.1-a Historique	77
IV.1-b Modèle hydrodynamique	78
IV.2 Ondes transverses et ondes longitudinales	79
IV.2-a Cas de la polarisation transverse électrique	80
IV.2-b Cas de la polarisation transverse magnétique	80
IV.2-c Condition aux limites supplémentaires	82
IV.3 Relation de dispersion pour un empilement métal/diélectrique	83
IV.3-a Expressions des champs électriques et magnétiques	83
IV.3-b Relations nécessaires	84
IV.3-c Système d'équations complet	86
IV.3-d Résolution du système	86
IV.3-e Pseudo-périodicité	89
IV.3-f Expression de la relation de dispersion	90
IV.4 Formalisme des matrices S	90
IV.4-a Matrice de passage à l'interface diélectrique → métal	90
IV.4-b Matrice de passage à l'interface du métal → diélectrique	93
IV.4-c Matrices de Couche	95
IV.4-d Méthode de cascading	95
IV.5 Impact de la non localité sur une lentille plate hyperbolique	96
IV.5-a Formule d'homogénéisation	97
IV.5-b Impact de la non localité sur la distance focale	100
IV.5-c Impact de la non localité sur la résolution	102
IV.6 Conclusion	102
Appendices	115
A-1 Relation de dispersion	117
A-2 Vecteur de Poynting	119
A-3 Vitesse de groupe	120
.	123

Introduction

Depuis l'invention de la science moderne, l'homme a utilisé de plus en plus de matériaux différents, en les structurant à des échelles de plus en plus petites. Cette tendance a connu une accélération sans précédent depuis l'invention du transistor en 1947, qui a permis de fabriquer des ordinateurs de plus en plus puissants et de plus en plus accessibles, en poussant la miniaturisation des circuits électroniques. Une révolution s'est préparée peu après, lorsqu'est inventé le LASER en 1963. Couplé à des circuits électroniques et à des fibres optiques particulièrement efficaces pour propager la lumière, le LASER transforme complètement les télécommunications et permet l'émergence d'Internet. On se met alors à utiliser la lumière pour transporter de l'information plutôt que des électrons. C'est la naissance de la photonique, l'analogie de l'électronique pour la lumière.

Parallèlement aux avancées effectuées dans le domaine de la photonique, de nombreux progrès se font dans la miniaturisation des processeurs si bien qu'aujourd'hui, c'est à l'échelle de quelques nanomètres que l'on grave les circuits électroniques. On commence à parler alors de nanotechnologies. Du point de vue de l'optique, il est possible avec ces techniques de structurer la matière à l'échelle de la longueur d'onde de la lumière, voire moins pour mieux la contrôler ou obtenir des effets autrement impossibles. C'est le domaine de la nanophotonique.

Dans les premiers temps de la nanophotonique, les cristaux photoniques étaient le principal sujet d'étude. Ils permettent d'obtenir un grand contrôle sur la propagation de la lumière, grâce à des effets résonants : en structurant la matière à une échelle comparable à la longueur d'onde, on peut tirer parti d'effets interférentiels pour obtenir des propriétés optiques en partie analogues aux propriétés électroniques des matériaux semi-conducteurs - comme par exemple, l'ouverture de bandes interdites permettant de mieux contrôler l'émission spontanée. Les miroirs de Bragg, introduits par Lord Rayleigh, apparaissent rétrospectivement comme les premiers cristaux photoniques. Mais en passant à des structurations avec deux ou trois dimensions de périodicité introduits notamment par Yablonovitch[1], on peut obtenir bien d'autres phénomènes que les bandes interdites.

Puis une miniaturisation encore plus poussée a permis l'émergence d'un nouveau type de dispositif qui a fait l'objet d'un fort engouement depuis les années 2000 : les métamatériaux. L'intérêt pour les métamatériaux débute avec les travaux de J.B Pendry en 1999 [2]. Un troisième régime d'étude s'ouvre, au delà du régime géométrique (lentilles conventionnelles) et du domaine résonant (effets interférentiels). En effet, les métamatériaux sont structurés à une échelle bien plus petite que la longueur d'onde. La lumière voit donc le dispositif périodique comme un milieu homogène dont les paramètres constitutifs effectifs peuvent être déterminés en fonction des caractéristiques de la structure. Ce régime est appelé domaine

d'homogénéisation, et permet ainsi de contrôler finement les propriétés optiques effectives du milieu. Mieux, des milieux possédant un indice négatif deviennent possibles. Prédits en 1968 par Victor Veselago[3], ils ne deviennent réalité qu'avec les travaux de John Pendry et David Smith. De nombreuses lois de l'optique aussi fondamentales que la loi de la réfraction doivent être reconsidérées pour les mettre en accord avec ces nouveaux concepts. Des structures quasiment magiques ont alors été imaginées :

- Des lentilles plates, parfaites, sans aberrations et permettant de reconstruire une image parfaite d'un objet, avec une résolution bien meilleure que celle autorisée par la diffraction (et considérée jusque là comme une limite absolue),
- Une cape d'invisibilité, basée sur le fait qu'il est simple de faire varier continuellement les propriétés des milieux effectifs, ce qui ouvre la voie à l'optique transformationnelle.

Évidemment, ces structures ne sont pas faciles à fabriquer, et même si ces effets ont été démontrés expérimentalement, ils sont loin d'être aussi parfaits que ce qui avait été espéré. Au milieu de ce foisonnement d'idées, les empilements métallo-diélectriques, connus depuis la fin des années 90, suscitent un nouvel intérêt. Ils offrent, comparés aux miroirs de Bragg, des possibilités radicalement différentes (réfraction négative, propagation des évanescents) tout en bénéficiant de la même facilité de fabrication puisque ce ne sont que des empilements de couches très fines de matériaux. Bien sûr, ils souffrent de pertes optiques puisqu'ils contiennent des métaux. Mais on envisage tout de même de les utiliser pour de plus en plus d'applications. C'est à ce point que ma thèse a démarré en 2010.

Il convient enfin de dire un mot de ce qu'on appelle la non-localité dans les métaux. Presque toutes ces structures sont basées sur l'utilisation de métaux. Une inclusion métallique peut être considérée comme un espace rempli d'un plasma conducteur (le gaz des électrons conducteurs). En contrôlant sa géométrie, on peut contrôler ses résonances, et en général une structure métallique peut résonner tout en étant bien plus petite que la longueur d'onde. On décrit les propriétés optiques des métaux en se basant sur le modèle de Drude, qui date de plus d'un siècle. Déjà dans les années 70-80, des pistes théoriques ont été explorées pour aller au delà de ce modèle. Mais ce n'est que très récemment que les premières expériences montrant la nécessité de dépasser le modèle de Drude ont été menées[4].

Ce mémoire porte sur l'étude des empilements métallo-diélectriques, avec comme objectif de pouvoir les utiliser comme lentilles pour obtenir des images avec une meilleure résolution que celle permise par la diffraction - tout en tenant compte d'éventuels effets non-locaux. Il s'organise en quatre chapitres.

Le premier chapitre introduit des bases théoriques sur les cristaux photoniques et les métamatériaux. Pour ce faire, nous commencerons par l'étude du cas le plus simple des cristaux photoniques, le miroir de Bragg, empilement périodique de couches diélectriques. Cette étude sera ensuite généralisée rapidement aux cristaux photoniques à deux dimensions. Les métamatériaux seront présentés, et le cas, central ici, des métamatériaux hyperboliques sera discuté plus en détail.

Le deuxième chapitre traite du décalage négatif géant, c'est à dire de l'excitation de modes à fuites contra-propagatifs. Après quelques réflexions sur les moyens d'obtenir de la réfraction négative dans les cristaux photoniques unidimensionnels, nous montrerons com-

ment la réfraction négative est liée à l'existence de ces modes à fuites particuliers, pis qu'ils sont responsables de décalages négatifs dits "géants".

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude des métamatériaux hyperboliques pour la réalisation de lentilles plates. Nous présenterons une théorie basée sur l'optique de Fourier permettant d'établir une relation de conjugaison pour ces lentilles. Puis nous étudierons les conditions nécessaires pour obtenir des images super-résolues.

Enfin, le quatrième chapitre traitera de l'effet de la non-localité (les interactions entre électrons libres du métal, négligées dans le modèle de Drude) sur les propriétés des empilements métallo-diélectriques.

Chapitre I

Introduction aux métamatériaux et cristaux photoniques

Dans ce chapitre, nous allons introduire les notions propres aux cristaux photoniques, aux métamatériaux et aux nouveaux phénomènes qu'ils génèrent, tels que la réfraction négative [5, 6, 7], la focalisation ou l'auto-collimation [8, 9, 10, 11]. Dans la suite de ce manuscrit, ces phénomènes seront abondamment étudiés de façon analytique et numérique.

Nous débutons ce chapitre avec le cas le plus simple des cristaux photoniques, le miroir de Bragg, mais donnant néanmoins une approche physique globale valable pour l'ensemble des cristaux photoniques. Le cas des cristaux photoniques 2D sera ensuite abordé. Dans une deuxième partie, nous parlerons d'un autre type de structure, les métamatériaux. Nous verrons quel régime de fonctionnement est utilisé pour ces matériaux. Un cas particulier des métamatériaux sera alors décrit, celui des métamatériaux hyperboliques, dont la parenté avec les miroirs de Bragg sera soulignée. Après avoir présenté les principaux résultats concernant ces matériaux, nous évoquerons leurs différents domaines d'utilisation.

Sommaire

I.1	Les cristaux photoniques	9
I.1-a	Généralités	9
	Position du problème	9
I.1-b	Théorie Cristaux 1D : Les miroirs de Bragg	10
	Expressions des champs solutions des équations de Maxwell	11
	Relation de dispersion	13
	Vitesse de phase et vitesse de groupe	14
	Surfaces de dispersion et courbes isofréquences	14
	Coefficient de transmission et de réflexion	18
I.1-c	Cristaux photoniques 2D	20
	Code réseaux	21
	Conclusion	21
I.2	Les métamatériaux	21
I.2-a	La lentille de Pendry	23
	Les lentilles conventionnelles	23
	Lentille de Pendry	24

Mécanisme d'une lentille de Pendry	24
I.2-b Les métamatériaux hyperboliques	28
I.3 Conclusion	31

I.1 Les cristaux photoniques

I.1-a Généralités

Les cristaux photoniques sont des matériaux artificiels caractérisés par un indice optique organisé périodiquement selon une ou plusieurs directions de l'espace [12].

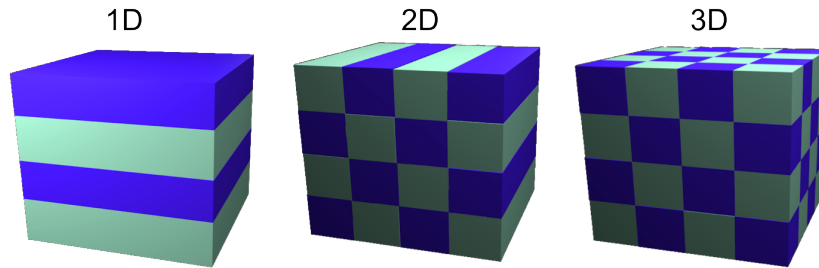


FIGURE I.1 – Cristaux photoniques à une dimension, deux dimensions et trois dimensions

Ils sont structurés périodiquement à partir de matériaux diélectriques. L'étude des cristaux photoniques se fait en régime de résonance. Rappelons qu'il existe trois domaines d'étude des structures ayant des propriétés optiques. Ces régimes de fonctionnement sont déterminés par le rapport de la taille caractéristique de la structure (par exemple la période d'un éventuel réseau dans le cas des cristaux photoniques ou des métamatériaux) et de la longueur d'onde de la source :

- Si la taille caractéristique est grande face à la longueur d'onde de la source ($d \gg \lambda$), l'onde se propage de milieu en milieu en suivant les lois de Descartes et en respectant les coefficients de Fresnel, ce régime est celui de **l'optique géométrique**.
- Si la taille caractéristique est de l'ordre de la longueur d'onde ($d \sim \lambda$), la périodicité de la structure va perturber l'onde. On parle d'onde de Bloch dans un milieu périodique, et la propagation est déterminée par des phénomènes interférentiels. C'est le régime de **résonance**.
- Si cette taille caractéristique est petite face à la longueur d'onde ($d \ll \lambda$), la lumière voit le milieu structuré comme un milieu homogène. Ce domaine est appelé le **régime d'homogénéisation**.

Dans ce régime, la propagation de la lumière dans un cristal photonique peut être complètement supprimée pour une certaine gamme de fréquences et/ou d'angles d'incidence. C'est ce que nous appelons une bande interdite photonique.

Position du problème

Nous supposons dans ce chapitre que les cristaux photoniques et les métamatériaux sont constitués de milieux linéaires isotropes et locaux, supposés sans charge ni courant, et qu'ils ne sont pas magnétiques (soit $\mu_r(\vec{r}, t) = 1$). La propagation des ondes électromagnétiques dans de tels milieux est gouvernée par les équations de Maxwell, qui s'écrivent :

$$\operatorname{div} (\varepsilon_r(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0(\vec{r}, t) \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

$$\operatorname{div} \vec{H}(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{r} \operatorname{ot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{r}, t) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{I.2})$$

avec

— $\varepsilon_r(\vec{r})$: permittivité relative diélectrique.

— ε_0 et μ_0 : permittivité diélectrique et perméabilité magnétique du vide.

Après transformation des relations (I.1) et (I.2), on obtient les équations de propagation pour le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{H}(\vec{r}, t)$:

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}, t)} \vec{r} \operatorname{ot} (\vec{r} \operatorname{ot} \vec{E}(\vec{r}, t)) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{I.3})$$

$$\vec{r} \operatorname{ot} \left(\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}, t)} \vec{r} \operatorname{ot} \vec{H}(\vec{r}, t) \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{I.4})$$

On fait l'hypothèse de la dépendance harmonique en temps des champs solutions des équations de Maxwell, c'est à dire qu'on suppose que tout champ A peut s'écrire $A(x, y, z, t) = A(x, y, z) e^{-i\omega t}$. Ceci permet de prendre aisément la dispersion du milieu en compte, car la permittivité et la perméabilité dépendent alors de la longueur d'onde.

Dans le cas des cristaux photoniques 1D, qui sont composés d'empilement périodique de milieux linéaires, locaux, isotropes et homogènes, nous pouvons considérer que la constante diélectrique est constante par morceaux. Cette constante devient alors indépendante de la position, soit $\varepsilon(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)$ à l'intérieur d'une couche donnée.

L'équation de propagation devient alors pour le champ $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ ou $\vec{H}(\vec{r}, \omega)$:

$$\Delta \vec{U}(\vec{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \vec{U}(\vec{r}) = -k_0^2 n(\omega)^2 \vec{U}(\vec{r}), \quad (\text{I.5})$$

où n est l'indice optique du milieu homogène considéré. Nous allons appliquer cela à la structure la plus simple des cristaux photoniques, le miroir de Bragg.

I.1-b Théorie Cristaux 1D : Les miroirs de Bragg

En 1887, Lord Rayleigh montre pour la première fois que des miroirs de Bragg sont capables de réfléchir la lumière très efficacement, bien que constitués de matériaux parfaitement transparents. L'interprétation en termes de bandes interdites (analogues à celles qui existent dans les semi-conducteurs) et la généralisation à deux et trois dimensions ont été faites par S.John [13], R.Zengerle [14], puis E.Yablonovitch [1, 15].

Un miroir de Bragg, représenté figure I.2, est constitué à partir de couches de deux matériaux diélectriques possédant des permittivités électriques différentes (ε_1 et ε_2), d'épaisseurs respectives (d_1 et d_2) empilées périodiquement. La période spatiale de cet empilement est appelée d . Pour étudier les caractéristiques de ce miroir, nous supposons qu'il est éclairé par une onde électromagnétique plane en incidence normale.

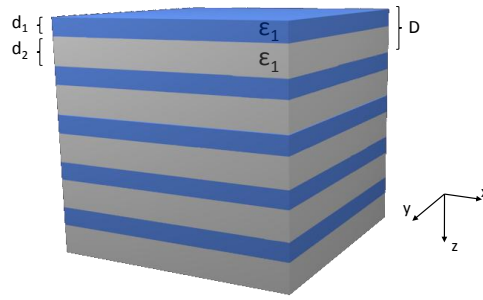


FIGURE I.2 – Miroir de Bragg

Expressions des champs solutions des équations de Maxwell

La figure I.2 montre que la constante diélectrique ε est périodique selon une seule direction, ici z , et invariante selon les directions x et y . De plus, le problème est supposé invariant selon y , les champs seront donc indépendants de cette variable y . Le champ noté $\vec{U}(\vec{r})$ peut représenter le champ électrique ou le champ magnétique qui peuvent alors se mettre sous la forme :

$$\vec{U}_i(\vec{r}) = \vec{u}_i(z) e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad (\text{I.6})$$

où $i = 1$ ou 2 , correspond au milieu dans lequel le champ est calculé. La quantité k_x représente la composante parallèle à l'interface du vecteur d'onde (projection du vecteur d'onde caractéristique du milieu considéré sur l'axe des abscisses x lorsque l'onde considérée est plane).

Les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère nous donnent le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_z E_y = i \omega \mu_0 H_x \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z = i \omega \mu_0 H_y \\ \partial_x E_y = i \omega \mu_0 H_z \\ -\partial_z H_y = -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_i E_x \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z = -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_i E_y \\ \partial_x H_y = -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_i E_z \end{array} \right. \quad (\text{I.7})$$

En observant ces 6 équations, nous remarquons qu'il est possible de scinder le problème général en deux problèmes distincts, qui se caractérisent chacun par une polarisation spécifique : la polarisation transverse magnétique TM également appelée $H_{//}$, (respectivement la polarisation transverse électrique TE, appelée également $E_{//}$) dans lequel le champ magnétique $\vec{H}(\vec{r}, t)$ (respectivement électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$) est perpendiculaire au vecteur d'onde incident. Selon l'orientation de la structure étudiée sur la figure I.2 et I.3, le vecteur d'onde est dirigé suivant les directions x et z , ainsi le champ magnétique $\vec{H}(\vec{r}, t)$, (respectivement

électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ selon la polarisation) possède une unique composante, celle dirigée selon y , ses autres composantes étant nulles.

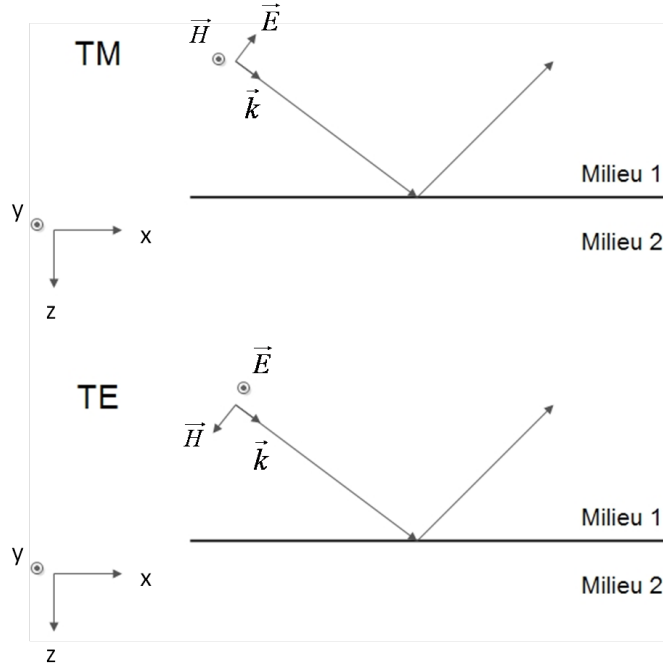


FIGURE I.3 – (Haut) Polarisation transverse magnétique. (Bas) Polarisation transverse électrique

Selon le cas étudié (figure I.3), le champ $\vec{H}(\vec{r})$ pour la polarisation TM (respectivement $\vec{E}(\vec{r})$ pour la polarisation TE) s'écrit

$$\vec{U}_i(\vec{r}) = U_{y_i}(\vec{r})\vec{e}_y = u_{y_i}(z) e^{i(k_x x - \omega t)} \vec{e}_y \quad (\text{I.8})$$

Les composantes $U_{x_i}(\vec{r})$ et $U_{z_i}(\vec{r})$ sont nulles. On obtient alors deux sous systèmes indépendants propres à chaque polarisations.

Le système d'équations lié à la polarisation TM s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_z E_x - \partial_x E_z = i \omega \mu_0 H_y \\ -\partial_z H_y = -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon E_x \\ \partial_x H_y = -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon E_z \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Le système correspondant à la polarisation TE :

$$\begin{cases} -\partial_z E_y = i \omega \mu_0 H_x \\ \partial_x E_y = i \omega \mu_0 H_z \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z = -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon E_y \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Les transformations suivantes permettent de passer d'un système à l'autre :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) \leftrightarrow \vec{H}(\vec{r}) \\ \mu_0 \mu_i \leftrightarrow -\varepsilon_0 \varepsilon_i \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

La résolution de chaque système mène à l'équation de propagation vue auparavant (équation (I.5)) vérifiée par la composante U_{y_i} du champ considéré selon la polarisation

$$\Delta U_{y_i}(\vec{r}) = -k_0^2 n_i^2 U_{y_i}(\vec{r}) \quad (\text{I.12})$$

A l'aide de l'expression (I.8), l'équation de propagation devient

$$\Delta u_{y_i}(z) - k_x^2 u_{y_i}(z) = -k_0^2 n_i^2 u_{y_i}(z) \quad (\text{I.13})$$

Cependant, la composante suivant z du vecteur d'onde s'écrit dans chaque milieu :

$$k_{z_i} = \sqrt{k_0^2 n_i^2 - k_x^2} \quad (\text{I.14})$$

Les solutions de l'équation de propagation (I.13) sont alors les solutions de la forme

$$u_{y_i}(z) = (A_i e^{i k_{z_i} z} + B_i e^{-i k_{z_i} z}) \quad (\text{I.15})$$

Ainsi, les expressions des champs magnétique et électrique pour la polarisation TM sont données par

$$\begin{cases} H_{y_i}(x, z, t) = (A_i e^{i k_{z_i} z} + B_i e^{-i k_{z_i} z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_{z_i}(x, z, t) = -\frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_i} (A_i e^{i k_{z_i} z} + B_i e^{-i k_{z_i} z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_{x_i}(x, z, t) = \frac{k_{z_i}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_i} (A_i e^{i k_{z_i} z} - B_i e^{-i k_{z_i} z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

De la même façon, les expressions des champs pour la polarisation TE s'écrivent

$$\begin{cases} E_{y_i}(x, z, t) = (A_i e^{i k_{z_i} z} + B_i e^{-i k_{z_i} z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ H_{z_i}(x, z, t) = \frac{k_x}{\omega \mu_0} (A_i e^{i k_{z_i} z} + B_i e^{-i k_{z_i} z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ H_{x_i}(x, z, t) = -\frac{k_{z_i}}{\omega \mu_0} (A_i e^{i k_{z_i} z} - B_i e^{-i k_{z_i} z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Relation de dispersion

Les expressions des champs électriques et magnétiques permettent d'accéder à la relation de dispersion. La lumière ne se propage en effet dans un cristal photonique que sous la forme de modes particuliers, les modes de Bloch. La relation de dispersion donne les modes possibles : quand elle est satisfaite, un mode existe dans la structure. Cette relation relie la fréquence ω au vecteur d'onde du mode de Bloch \vec{K} . Elle permet donc d'expliquer et de prédire le comportement du cristal photonique face à la lumière.

Pour une structure multicouche de type miroir de Bragg, la relation de dispersion est la suivante [16, 17, 18] :

$$\cos(K d) = \cos(k_{z_1} d_1) \cos(k_{z_2} d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z_1}}{k_{z_2}} \eta + \frac{k_{z_2}}{k_{z_1}} \frac{\eta}{\eta} \right) \sin(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \quad (\text{I.18})$$

Avec,

$$\begin{cases} \eta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \text{en TM} \\ \eta = 1 \quad \text{en TE} \\ k_{z_1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_x^2} \\ k_{z_2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_x^2} \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Cette relation, à cause de la périodicité du cristal, possède elle aussi une périodicité dans l'espace des vecteurs d'ondes

$$\omega(K) = \omega\left(K + \frac{2\pi}{d}\right) \quad (\text{I.20})$$

Vitesse de phase et vitesse de groupe

La vitesse de phase, vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage dans l'espace, est définie par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{K} \quad (\text{I.21})$$

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation du paquet d'onde, et correspond à la propagation de l'énergie lumineuse. En effet, si on décompose l'onde incidente en une somme d'ondes planes monochromatiques, nous pouvons considérer l'onde incidente comme un paquet d'ondes planes de pulsation centrale ω_0 et de vecteur d'onde moyen k_0 . La vitesse de groupe est alors définie selon :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dK} \right)_{K=k_0} \quad (\text{I.22})$$

Dans le cas d'un milieu à plusieurs dimensions, la définition de la vitesse de groupe devient [16, 19] :

$$\vec{V}_g = \text{grad}_{\vec{k}} \omega \quad (\text{I.23})$$

Cette vitesse de groupe permettra de caractériser la direction de propagation de la lumière dans de telles structures, et elle dérive via les expressions ci-dessus, directement de la relation de dispersion.

Surfaces de dispersion et courbes isofréquences

L'analyse des diagrammes de dispersion permet une étude du comportement de la lumière et notamment de sa direction de propagation dans la structure. Une surface de dispersion est la représentation graphique de l'ensemble des couples (ω, k_x, K) solutions de la relation de dispersion des cristaux photoniques. Les courbes isofréquences (CIF) sont des coupes de cette surface de dispersion à fréquences fixes, représentant ainsi toutes les ondes de Bloch solutions de la relation de dispersion à une longueur d'onde donnée.

Leurs formes et évolutions en fonction de la longueur d'onde permettent de prédire le comportement de la lumière lorsqu'elle se propage dans le milieu périodique. La direction de propagation de la lumière est donnée par la vitesse de groupe. Cette dernière, en étant le gradient de la courbe de dispersion, est orthogonale aux courbes isofréquences au point correspondant.

L'analyse des courbes isofréquences est basée sur la conservation de la composante parallèle du vecteur d'onde incident \vec{k}_i le long de l'interface. Pour chaque milieu, l'onde incidente peut potentiellement exciter toute onde de même longueur d'onde et dont la composante du vecteur d'onde parallèle est la même. Ainsi à chaque intersection entre la ligne de conservation de la composante parallèle du vecteur d'onde incidente, et de la courbe isofréquence, cette condition est vérifiée.

L'étude de la propagation d'un milieu homogène à un autre est une illustration simple de l'utilisation des courbes isofréquences afin de déterminer la direction empruntée par la lumière lorsqu'elle pénètre dans un cristal photonique.

Soient deux milieux d'indice optique n_1 et n_2 , éclairés depuis le milieu 1 par un faisceau de vecteur d'onde \vec{k}_i orienté selon un angle θ_i , figure I.4 :

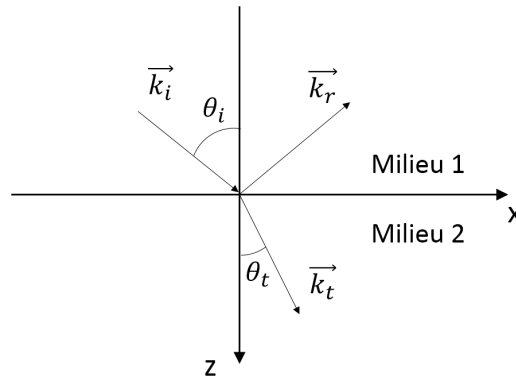


FIGURE I.4 – Réfraction entre deux milieux

Les lois de Snell-Descartes au passage du milieu 1 au milieu 2 correspondent en partie à la conservation de la composante du vecteur d'onde parallèle à la surface et donnent :

$$\begin{cases} n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \\ \theta_r = \theta_i \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

En projetant les vecteurs d'onde \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_t sur les axes x et z , nous obtenons :

$$\begin{cases} k_{x_i} = k_0 n_1 \sin \theta_i \\ k_{x_r} = k_0 n_1 \sin \theta_i \\ k_{x_t} = k_0 n_2 \sin \theta_t \\ k_{z_i} = k_0 n_1 \cos \theta_i \\ k_{z_r} = -k_0 n_1 \cos \theta_i \\ k_{z_t} = k_0 n_2 \cos \theta_t \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Dans un milieu homogène d'indice n , la relation de dispersion lie les différentes composantes du vecteur d'onde et s'écrit

$$k_x^2 + k_z^2 = k_0^2 n^2 \quad (\text{I.26})$$

Cette relation montre que si l'on trace k_z en fonction de k_x , la forme géométrique de cette courbe isofréquence est un cercle dont le rayon est proportionnel à l'indice de réfraction du milieu considéré et à la fréquence de l'onde $\frac{\omega n}{c}$. Les courbes isofréquences d'un milieu homogène, illustrées sur la figure I.5, sont donc circulaires.

Le système (I.25) traduit la conservation de la composante parallèle (selon \vec{e}_x) du vecteur d'onde incident au passage de l'interface :

$$k_{x_i} = k_{x_r} = k_{x_t} \quad (\text{I.27})$$

La figure I.5 représentant les courbes isofréquences d'un milieu 1 et d'un milieu 2, tout deux homogènes, nous permet d'expliquer les caractéristiques du passage de la lumière entre ces deux milieux. En effet, l'intersection de la ligne de conservation (correspondant à la

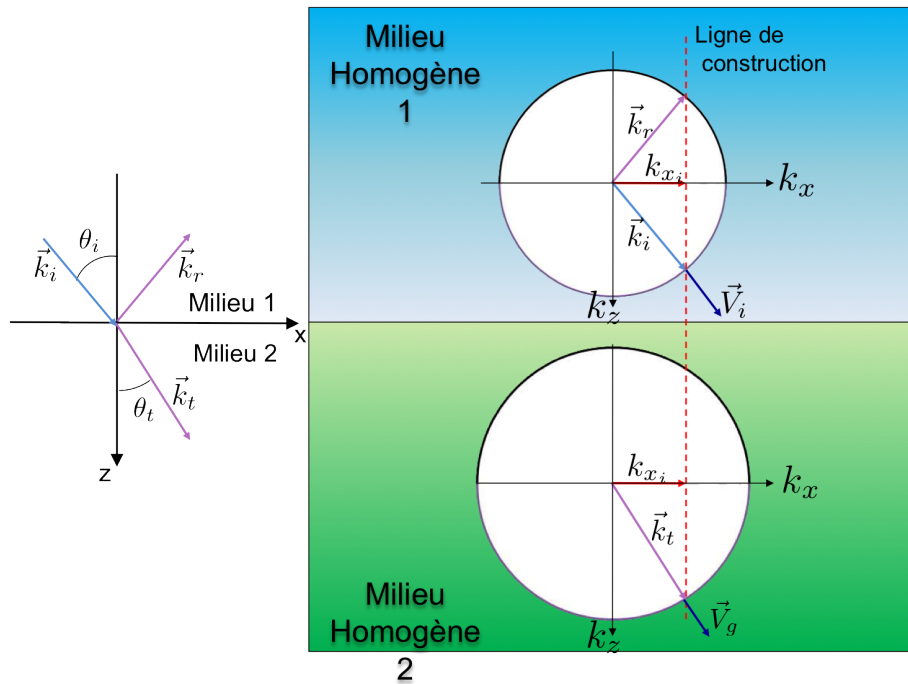


FIGURE I.5 – Interface entre deux milieux homogènes

conservation de la composante parallèle selon x du vecteur d'onde incident), et de la courbe isofréquence dans le milieu 2, détermine graphiquement le vecteur d'onde \vec{k}_t de l'onde transmise dans le milieu 2. Cette analyse graphique mène à deux intersections possibles, mais l'une d'elle correspond à une onde qui se propagerait en direction du milieu 1. Or, nous supposons qu'aucune onde ne vient de l'infini, son amplitude est donc nulle. Les vitesses de groupe \vec{V}_{gi} , \vec{V}_{gr} et \vec{V}_{gt} des ondes incidentes, réfléchies et transmises, données par les gradients des courbes isofréquences, sont ainsi orthogonales aux courbes isofréquences respectivement en \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_t .

Leurs orientations donnent alors plusieurs éléments quant à la propagation de la lumière dans le milieu. Dans le cas présent, les vitesses de groupe \vec{V}_{gi} et \vec{V}_{gt} , pointent dans la même direction, de plus le vecteur d'onde de l'onde transmise \vec{k}_t est colinéaire à la vitesse de groupe vérifiant $\vec{k}_t \cdot \vec{V}_{gt} > 0$, ce qui démontre un cas de réfraction positive.

Pour une structure périodique, la courbe isofréquence n'est pas toujours circulaire, pouvant être de forme elliptique, ou hyperbolique par exemple, mais conserve une périodicité dans l'espace des vecteurs d'onde, imposée par la périodicité du cristal.

Les cristaux photoniques offrent ainsi la possibilité, en jouant sur la forme de la courbe isofréquence, de contrôler finement le comportement de la lumière dans la structure. Les phénomènes comme la réfraction négative ou l'autocollimation correspondent à des courbes isofréquences possédant des caractéristiques bien particulières.

Le phénomène de réfraction négative correspond au cas où l'onde plane incidente dans un cristal photonique est réfractée dans son demi plan d'incidence [14]. Ce phénomène est représenté sur la figure I.6 au passage entre un milieu homogène et un cristal photonique. Lorsque les courbes isofréquences présentent une forme d'hyperbole, l'orientation de la vitesse de groupe de l'onde transmise pour une onde plane incidente \vec{k}_i n'est plus celle obtenue pour

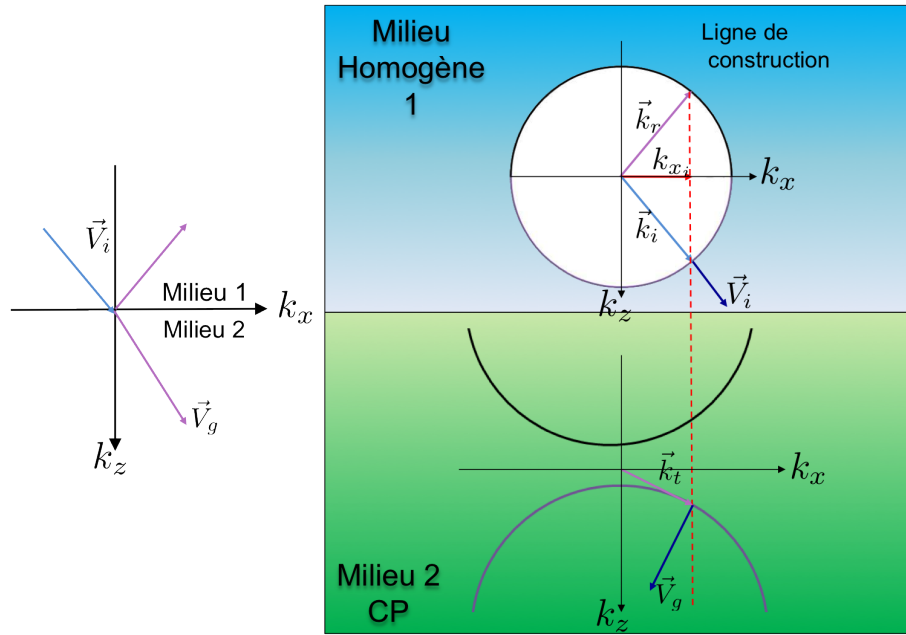


FIGURE I.6 – Interface entre un milieu homogène et un cristal photonique : cas de la réfraction négative

une forme circulaire. Dans le cas de la réfraction négative, le vecteur d'onde \vec{k}_t et la vitesse de groupe \vec{V}_{gt} de l'onde transmise ne sont plus colinéaires, et les vitesses de groupe \vec{V}_{gi} et \vec{V}_{gt} de l'onde incidente et transmise ne pointent plus dans la même direction.

Un autre phénomène est celui de l'autocollimation illustré sur la figure I.7, dans lequel la lumière ne se disperse pas en se propageant, le faisceau lumineux restant collimaté. Pour obtenir un tel phénomène, le matériau doit présenter des formes de courbes isofréquences plates de courbure infinie. Ainsi, pour tout angle d'incidence, l'onde de Bloch est transmise dans la direction orthogonale à l'interface. Les vitesses de groupe \vec{V}_{gt_i} correspondant respectivement aux ondes de Bloch de vecteur d'onde incident \vec{k}_{i_i} sont toutes orthogonales à la courbe isofréquence plate et ainsi colinéaires entre elles. Dans un tel milieu, un faisceau divergent se propage en gardant une largeur constante.

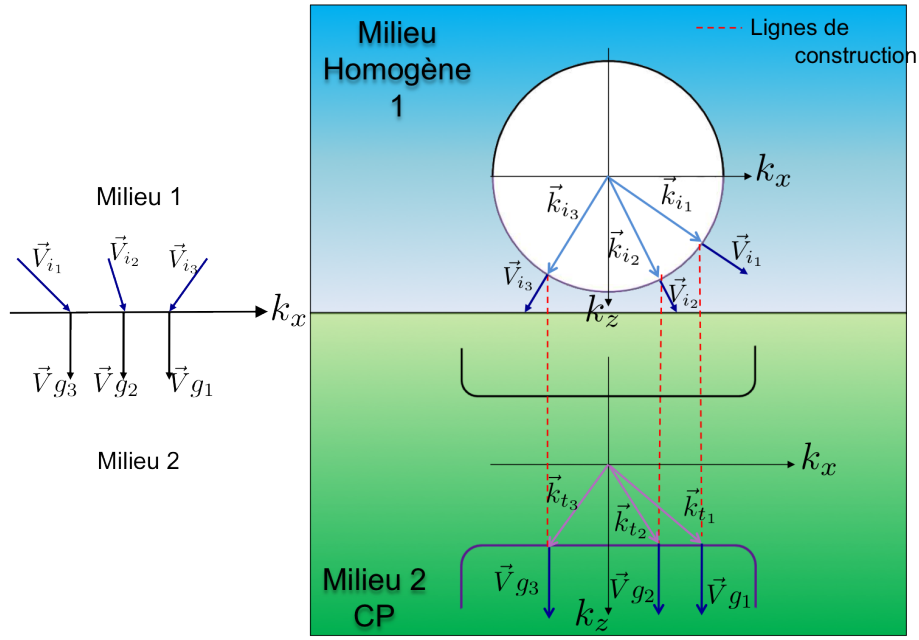


FIGURE I.7 – Interface entre un milieu homogène et un cristal photonique : cas de l'autocolimation

Coefficient de transmission et de réflexion

Les miroirs de Bragg sont réputés pour permettre l'obtention d'un coefficient de réflexion très élevé. En effet, si les ondes réfléchies par chaque interface sont en phase, elles vont alors interférer constructivement et donner naissance à une onde réfléchie dans le milieu incident. Le cristal se comporte alors comme un miroir avec un coefficient de réflexion très élevé.

Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer le coefficient de réflexion total, comme les matrices de transfert [20], les matrices d'Abélès [21], mais la méthode que nous allons utiliser est celle des matrices S (pour matrices de Scattering). Ces méthodes permettent de résoudre de façon systématique le système d'équations fourni par l'écriture des relations de passage à chaque interface, dont les inconnues sont les amplitudes A_i et B_i des champs électriques et magnétiques donnés précédemment par le système (I.16) et (I.17).

La figure I.8 indique les amplitudes des champs électriques et magnétiques dans chaque couche du miroir de bragg.

Lorsque le champ passe du milieu j au milieu $j+1$, à la traversée de l'interface entre ces deux milieux, il y a conservation, pour la polarisation TM, du champ $H_y(\vec{r})$ et $E_x(\vec{r})$ (respectivement $E_y(\vec{r})$ et $H_x(\vec{r})$ pour la polarisation TE). Pour la polarisation TM, cette conservation mène au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A_{j-1}^- + B_{j-1}^- = A_j^+ + B_j^+ \\ \frac{k_{z_{j-1}}}{\varepsilon_{j-1}}(A_{j-1}^- - B_{j-1}^-) = \frac{k_{z_j}}{\varepsilon_j}(A_j^+ - B_j^+) \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

Le système obtenu en polarisation TE est identique, en remplaçant ε_j par μ_j , soit 1.

Les champs montant et descendant dans la couche j sont reliés par

$$\begin{cases} A_j^- = A_j^+ e^{i k_{z_j} (z_{j+1} - z_j)} \\ B_j^- = B_j^+ e^{-i k_{z_j} (z_{j+1} - z_j)} \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

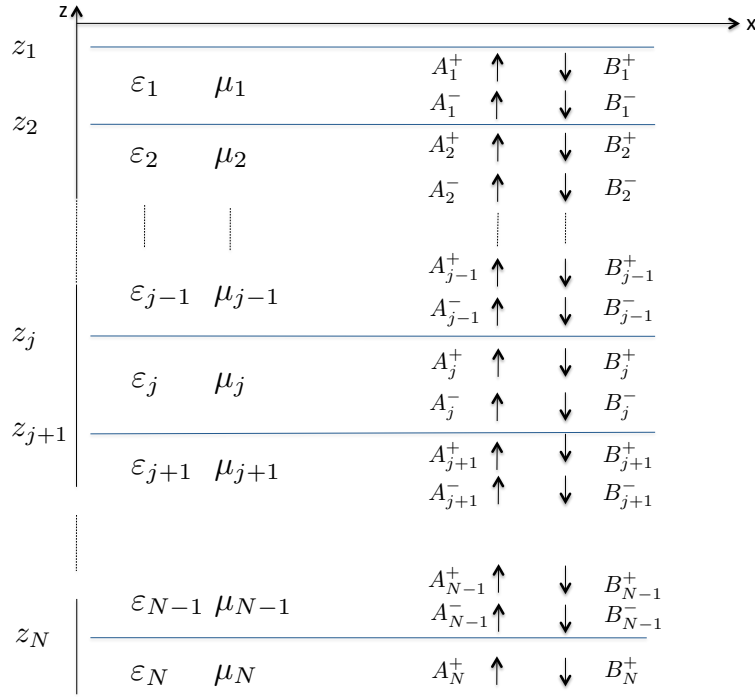


FIGURE I.8 – Structure et amplitudes des champs descendants et montants dans chaque couche

Le premier système (I.28) peut se mettre sous forme d'une matrice S appelée matrice d'interface, exprimant les champs sortants en fonction des champs entrants :

$$\begin{pmatrix} A_{j-1}^- \\ B_j^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{k_{z_j}}{\varepsilon_j} + \frac{k_{z_{j+1}}}{\varepsilon_{j+1}}} \begin{pmatrix} \frac{k_{z_j}}{\varepsilon_j} - \frac{k_{z_{j+1}}}{\varepsilon_{j+1}} & 2 \frac{k_{z_{j+1}}}{\varepsilon_{j+1}} \\ 2 \frac{k_{z_j}}{\varepsilon_j} & \frac{k_{z_{j+1}}}{\varepsilon_{j+1}} - \frac{k_{z_j}}{\varepsilon_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{j-1}^- \\ A_j^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{j-1}^- \\ A_j^+ \end{pmatrix} \quad (\text{I.30})$$

Le deuxième système (I.47) peut également se mettre sous forme matricielle, cette matrice appelée matrice de couche, s'écrit pour une couche j :

$$\begin{pmatrix} A_j^+ \\ B_j^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i k_{z_j} d_j} \\ e^{i k_{z_j} d_j} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix} \quad (\text{I.31})$$

Le concept des matrices S est d'exprimer les coefficients correspondant aux champs sortant de la structure, en fonction de ceux des ondes qui entrent. Par cascading de la matrice interface et de la matrice de couche, on peut obtenir une seule matrice reliant les coefficients des ondes sortantes (A_{j-1}^- et B_j^-) aux coefficients des ondes entrantes (B_{j-1}^- et A_j^+) et éliminant les coefficients des ondes intermédiaires (B_j^+ et A_j^-).

Le cascading se définit de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} A_{j-1}^- \\ B_j^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} + \frac{I_{12} C_{11} I_{21}}{1 - I_{11} C_{22}} & \frac{I_{12} C_{12}}{1 - I_{11} C_{22}} \\ \frac{C_{21} I_{21}}{1 - I_{22} C_{11}} & C_{22} + \frac{C_{21} I_{22} C_{12}}{1 - I_{22} C_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{j-1}^- \\ A_j^+ \end{pmatrix} \quad (\text{I.32})$$

Avec cette méthode de calcul, nous pourrions ainsi cascader les matrices de couche et d'interface tout au long de la structure. A terme, une matrice reliant les coefficients des

ondes sortantes et ceux des ondes entrantes de part et d'autre de la structure totale, soit les coefficients (A_0^-, B_{N+1}^+) en fonction de (B_0^-, A_{N+1}^+) est obtenue. Une fois la matrice de la structure complète obtenue, il faut préciser quel type d'onde est utilisé pour éclairer la structure. Le coefficient de réflexion de la structure est obtenue en éclairant celle-ci par une onde plane d'amplitude 1, soit $B_0^- = 1$ et en supposant que dans le dernier milieu, il n'y a qu'une onde sortant de la structure ($A_{N+1}^+ = 0$). Ainsi, le coefficient total de réflexion de la structure éclairée par au-dessus sera le coefficient de la première ligne et première colonne de la matrice de la structure complète. En utilisant cette méthode de cascading, les différents coefficients A_j et B_j de chaque couche peuvent être reliés aux coefficients de la première et de la dernière couche B_0^- , et A_{N+1}^+ permettant ainsi de déterminer l'amplitude du champ en chaque point de la structure.

I.1-c Cristaux photoniques 2D

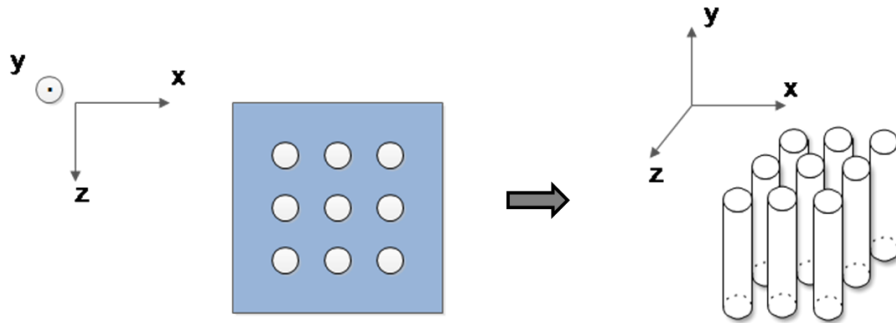


FIGURE I.9 – Cristal photonique à deux dimensions

La discussion que nous avons menée sur les cristaux 1D peut tout à fait se généraliser aux cristaux 2D. Les cristaux photoniques 2D ont été développés afin de pouvoir confiner la lumière dans plusieurs directions de l'espace, les miroirs de Bragg n'étant capables de la confiner complètement dans une seule direction. Ces cristaux possèdent une périodicité selon deux dimensions. En effet, comme nous pouvons le voir sur la figure I.9, la constante diélectrique est périodique selon deux directions de l'espace x et z , nous pouvons supposer une homogénéité par morceaux mais le problème à résoudre reste complexe.

Dans la partie précédente, nous avons montré qu'un bon nombre de propriétés pouvaient être déduites à partir des surfaces de dispersion. Bien qu'une étude analytique de la relation de dispersion des cristaux 2D soit compliquée, il est tout de même possible d'obtenir ces surfaces de dispersion numériquement, à l'aide par exemple d'un code Mit Photonic Band Gaps (MPB) [22]. Ce logiciel est basé sur la résolution d'un problème aux valeurs propres. Il permet de déterminer les modes propres de cristaux photoniques en cherchant leur décomposition sur une base d'ondes planes. En faisant une partie des calculs dans l'espace réciproque et une autre dans l'espace direct, ce logiciel permet d'obtenir les surfaces de dispersion des cristaux photoniques 2D.

Code réseaux

Pour étudier ces cristaux photoniques 2D, beaucoup de méthodes ont été développées [23, 24, 25]. Une méthode de référence est le logiciel MEEP développé par le MIT, et basé sur la méthode des différences finies (FDTD). Dans ce manuscrit, nous utiliserons un code réseau basé sur la méthode modale de Fourier et développé sous Matlab[26, 27], qui nous permettra aussi bien d'obtenir les coefficients de réflexions et de transmissions de la structure, que les cartes de champs permettant d'étudier la propagation d'un faisceau gaussien à travers un cristal photonique. Les méthodes modales de Fourier sont un sujet très étudié, et il serait peu pertinent de développer ici les détails de la méthode. Il convient cependant d'expliquer comment la structure est illuminée. Elle est éclairée par un faisceau gaussien monochromatique. Ce faisceau gaussien peut être vu comme une combinaison linéaire d'ondes planes chacune caractérisée par le couple (k_x constante de propagation, $A(k_x)$ amplitude) :

$$A(k_x) = \frac{\omega}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}(k_x - k_{x_0})^2} e^{-ik_x x_0} \quad (\text{I.33})$$

Avec x_0 , l'abscisse du centre du faisceau, $k_{x_0} = n_1 k_0 \sin \theta_0$, où θ_0 est l'angle d'incidence du faisceau, et ω la largeur du faisceau.

Pour chaque onde plane, on simule la façon dont elle se propage dans les cristaux 2D, on somme alors les contributions de toutes les ondes planes, multipliées par l'amplitude $A(k_x)$ de chaque onde plane. Avec un tel code, nous pouvons étudier un grand nombre de structures, comme des cristaux photoniques à deux dimensions.

Conclusion

Nous venons donc d'étudier les cristaux photoniques et leur propriétés. Dans la suite de cette partie, nous allons maintenant étudier un autre type de régime, celui de l'homogénéisation. Dans ce régime, la lumière se comportera de manière différente, mais certaines propriétés telle que les relations de dispersion ou les matrices S sont toujours valables.

I.2 Les métamatériaux

Les métamatériaux jouent un rôle crucial dans les récents développements de systèmes photoniques. Ce sont des matériaux artificiels, constitués à partir d'un motif (qu'on appelle souvent méta-atome) agencé de façon périodique. Leur succès est dû à leur capacité de simuler des réponses effectives de la matière et de les contrôler finement. Un exemple de métamatériaux est illustré sur la figure I.10. Ces méta-atomes sont structurés à une échelle plus petite que celle de la longueur d'onde de la source, c'est à dire $a \ll \lambda$. On se place alors dans le régime d'homogénéisation. Ces structures permettent un contrôle des paramètres effectifs ε et μ . En effet, dans le régime d'homogénéisation, la lumière ne voit pas les détails de la structuration, il voit le métamatériau comme un milieu homogène avec une permittivité diélectrique effective ε et une perméabilité magnétique effective μ . Ces paramètres effectifs dépendent directement des paramètres géométriques des méta-atomes constituant le métamatériau. Ainsi, les métamatériaux permettent par leur structuration de contrôler finement la permittivité et la perméabilité.

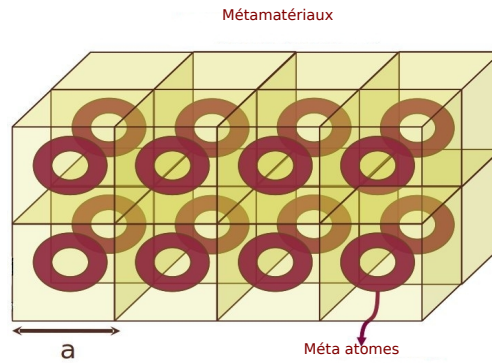


FIGURE I.10 – Exemple de métamatériaux

Combiné à des techniques d'optiques transformationnelles ces matériaux permettent de réaliser de nouveaux dispositifs, comme des lentilles [28], ou des capes d'invisibilité illustrées sur la figure I.11. En effet, combiné à l'optique transformationnelle, il est possible de choisir les paramètres effectifs dans le but de contrôler la propagation du faisceau lumineux dans le matériau. Ce phénomène est à l'origine de nombreux travaux [29, 30, 31, 32, 33].

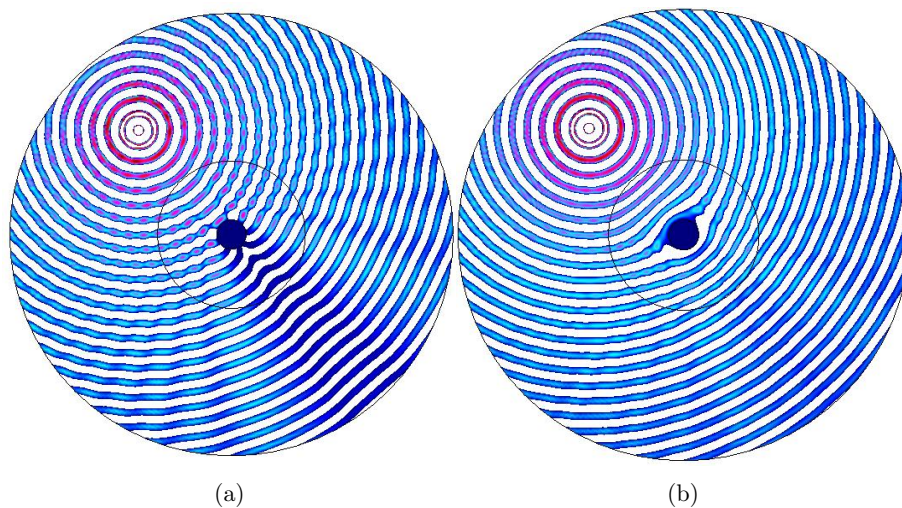


FIGURE I.11 – (a) Propagation du faisceau sans cape d'invisibilité : Une partie des rayons est bloquée par l'objet central (b) Propagation du faisceau avec la cape d'invisibilité : Les rayons lumineux détournent l'objet central et se propagent normalement derrière l'objet

Le signe des paramètres effectifs ε et μ est déterminant :

- Si ε et μ sont positifs : L'onde se propage dans un matériau conventionnel, le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}$ et $\vec{H})$ est direct.
- Si $\varepsilon < 0$ et $\mu > 0$: L'indice optique du matériau devient imaginaire, ainsi l'onde est totalement réfléchie, et une onde évanescente s'installe dans le métamatériau. C'est le cas des métaux.
- Si $\varepsilon > 0$ et $\mu < 0$: L'indice optique du matériau devient également imaginaire, ainsi l'onde est totalement réfléchie, et une onde évanescente s'installe dans le métamatériau.

riau. Ce cas est observé pour les matériaux ferromagnétiques.

- Si ε et μ sont **simultanément négatifs** : Un matériau nouveau, avec un indice optique négatif. En reprenant les équations de Maxwell, nous pouvons rapidement voir que lorsque ε et μ sont simultanément négatifs, le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}$ et $\vec{H})$ est indirect. Ce matériau est nommé métamatériau main gauche. Dans un tel milieu, la vitesse de groupe \vec{V}_g est opposée au vecteur d'onde \vec{k} . Dans ce cas, la réfraction obtenue sera négative.

Ce nouveau matériau a été prédit en 1967 par Victor Veselago [3] et appelé métamatériau main gauche. V.Veselago a également prédit que certaines lois de l'optique telles que la loi de Snell-Descartes seraient inversées dans de tels matériaux. Dans les années 90, John Pendry a cherché un moyen de mettre en œuvre ces prédictions. Il a démontré qu'il est possible d'obtenir une permittivité négative en empilant périodiquement des fils métalliques, et qu'un empilement d'anneaux concentriques périodiques permet d'obtenir une perméabilité magnétique [34]. Ainsi, une façon d'obtenir simultanément une permittivité et perméabilité négative, est d'empiler ces anneaux et ces fils métalliques. D.R. Smith, dans les années 2000, réussit à construire expérimentalement ce matériau, en empilant à la fois les fils métalliques et les anneaux concentriques mais en plaçant les fils orthogonalement aux cercles pour annuler toutes interactions entre ces deux structures [35]. Puis dans les années 2000, John Pendry propose d'utiliser ces métamatériaux pour concevoir un nouveau type de lentille permettant d'aller au delà de la limite de diffraction [2].

I.2-a La lentille de Pendry

Pour comprendre la lentille de Pendry, reprenons dans un premier temps le principe de fonctionnement d'une lentille conventionnelle.

Les lentilles conventionnelles

Une onde lumineuse est composée d'ondes évanescentes et propagatives. A cause de la diffraction, le champ évanescent s'atténue exponentiellement au cours de la propagation. Par conséquent, si la lumière se propage sur quelques longueurs d'onde, le champ évanescent s'atténue complètement et ne peut participer à la formation de l'image. L'image obtenue, illustrée sur la figure I.12, n'est pas parfaite et la résolution conventionnelle est limitée. En effet, avec une lentille conventionnelle, il est impossible de construire une image avec une résolution plus petite qu'une demi-longueur d'onde, c'est la limite de résolution (Limite d'Abbe).

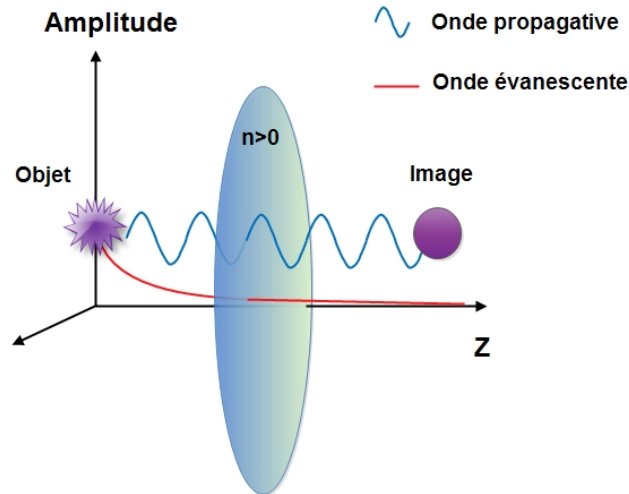
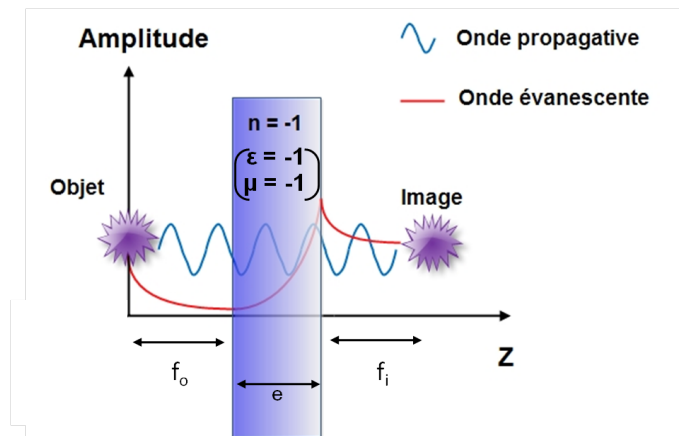


FIGURE I.12 – Mécanisme d'une lentille conventionnelle

Lentille de Pendry

Depuis les travaux de Pendry [2], nous savons qu'une image parfaite peut être réalisée à l'aide d'un slab caractérisé par un indice de réfraction négative égale à -1 , obtenue avec une permittivité et une perméabilité de -1 ($\epsilon = \mu = -1$). Dans un tel matériau, le champ évanescent, illustré sur la figure I.13, est amplifié dans la structure et peut ainsi se refocaliser dans l'image. Celle-ci est alors un point source et la résolution dans ce cas est parfaite.

FIGURE I.13 – Représentation de la lentille de Pendry, f_o et f_i sont respectivement les distances focales objet et image, e est l'épaisseur de la lentille

Mécanisme d'une lentille de Pendry

Cette étude est valable en polarisation TE et TM.

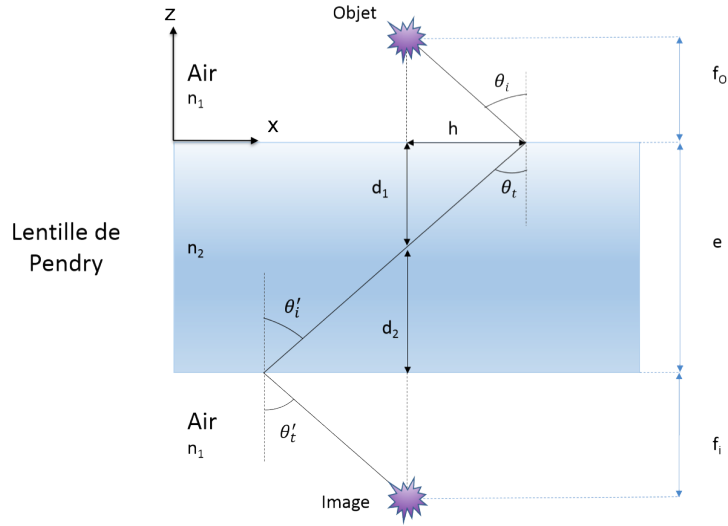


FIGURE I.14 – Principe de la lentille de Pendry

Les lois de la réfraction nous permettent d'écrire :

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (\text{I.34})$$

Pour un matériau d'indice -1 placé dans l'air, $n_1=1$, et $n_2 = -1$, ainsi

$$\sin \theta_i = -\sin \theta_t \quad (\text{I.35})$$

Soit,

$$\theta_t = -\theta_i \quad (\text{I.36})$$

L'optique géométrique nous donne les relations :

$$\tan \theta_i = \frac{h}{f_0} \quad (\text{I.37})$$

Et,

$$\tan \theta_t = \frac{h}{d_1} \quad (\text{I.38})$$

On obtient donc,

$$f_0 = d_1 \quad (\text{I.39})$$

De la même façon, nous obtenons $f_i = d_2$. Ces différentes relations donnent la relation de conjugaison de la lentille de Pendry

$$\boxed{f_0 + f_i = d_1 + d_2 = d} \quad (\text{I.40})$$

La distance focale image dépend uniquement de l'épaisseur totale de la lentille et de la distance focale objet.

Il est intéressant d'étudier le coefficient de transmission d'une lentille de Pendry. De façon générale, le coefficient de transmission d'un slab d'épaisseur d s'écrit

$$T = \frac{4b_1 b_2}{(b_1 + b_2)^2 e^{ik_{z2}d} - (b_1 - b_2)^2 e^{-ik_{z2}d}}, \quad (\text{I.41})$$

avec $b_1 = \frac{k_{z1}}{\rho_1}$ et $b_2 = \frac{k_{z2}}{\rho_2}$ ($\rho_i = \varepsilon_i$ pour la polarisation TM, et $\rho_i = \mu_i$ pour la polarisation TE).

Si le matériau étudié est un métamatériau main gauche, il possède une permittivité et perméabilité telles que $\varepsilon_2 = -1$ et $\mu_2 = -1$:

$$k_{z1} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_1 \mu_1 - k_x^2} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2} \quad (\text{I.42})$$

$$k_{z2} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 \mu_2 - k_x^2} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2} \quad (\text{I.43})$$

Pour un métamatériau main gauche dans de l'air, nous obtenons :

$$\begin{cases} k_{z1} = k_{z2} \\ b_1 = 1 \\ b_2 = -1 \end{cases} \quad (\text{I.44})$$

Dans ce cas, pour une onde propagative, le coefficient de transmission devient

$$T = e^{ik_{z2}d} = e^{ik_{z1}d}. \quad (\text{I.45})$$

Si on considère maintenant le trajet complet de la lumière depuis la source dans l'air jusqu'à l'image, en passant par la lentille, on obtient une fonction de transfert

$$T_{tot} = T_1 T_{lent} T_2 \quad (\text{I.46})$$

Avec,

$$\begin{cases} T_1 = e^{-ik_{z1}f_0} \\ T_2 = e^{-ik_{z1}f_i} \end{cases} \quad (\text{I.47})$$

Donc

$$T_{tot} = e^{-ik_{z1}f_0} e^{ik_{z1}d} e^{-ik_{z1}f_i} = e^{-ik_{z1}(f_0+f_i-d)} = 1 \quad (\text{I.48})$$

Les ondes propagatives sont donc toutes complètement transmises.

Il est important d'observer le comportement des ondes évanescentes ici. Si l'onde est évanescente, $k_0^2 < k_x^2$, on définit κ_z tel que $\kappa_z = -i\sqrt{k_x^2 - k_0^2}$.

Ainsi, pour une onde évanescente, on peut écrire :

$$T_{tot} = e^{-\kappa_{z1}f_0} e^{\kappa_{z1}d} e^{-\kappa_{z1}f_i} = e^{-\kappa_{z1}(f_0+f_i-d)} = 1 \quad (\text{I.49})$$

De la même façon les ondes évanescentes sont transmises à travers la lentille, et le champ évanescent est donc ré-amplifié dans la structure - puisqu'en se propageant avant et après la lentille, il est largement diminué.

Pour une telle lentille, toutes les ondes propagatives et évanescentes sont intégralement transmises, ce qui leur permet de contribuer à la construction de l'image, y compris les détails les plus fins. Cette lentille permet en théorie d'obtenir une résolution infinie, il est alors possible d'aller au delà de la limite de diffraction.

La relation de dispersion de cette lentille est de la forme

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \quad (\text{I.50})$$

Cette relation de dispersion est la même que pour une lentille conventionnelle, elle est parabolique comme nous pouvons le voir sur la figure I.15 :

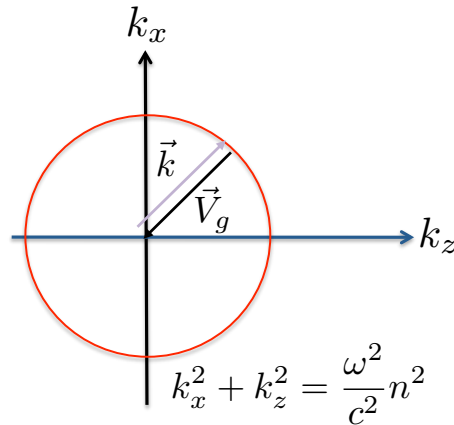


FIGURE I.15 – Courbe isofréquence correspondant à la lentille de Pendry

Cependant, à la différence d'un matériau conventionnel, la forme des courbes isofréquences illustrées sur la figure I.15 indique que ce sont des cercles mais de rayon -1 . Dans ce cas la vitesse de groupe \vec{V}_g est de sens opposé au vecteur d'onde \vec{k} ($\vec{V}_g \cdot \vec{k} < 0$). Cette propriété est propre aux métamatériaux mains gauches, elle est la source du phénomène de réfraction négative [3]. C'est ce dernier qui permet au système de refocaliser la lumière. En effet, pour obtenir une refocalisation des faisceaux lumineux, chaque faisceau doit nécessairement se réfracter négativement.

Cette théorie développée par J.Pendry a pu être testée à plusieurs reprises et a conduit à de nombreuses réalisations. Notamment N.Fang et al (2005)[36] ont réalisé cette refocalisation grâce à un slab d'argent de 35 nm. Ce slab, éclairé par une source lumineuse avec une longueur d'onde de 365 nm en polarisation TM, donne lieu à une refocalisation de la lumière grâce à l'excitation de plasmons de surface. Avec ce dispositif, illustré sur la figure I.16a, N.Fang a pu obtenir une résolution de 0.3λ , soit une résolution sous longueur d'onde, observée sur la figure I.16b.

L'équipe de K.Aydin et al [37] a également réalisé une lentille sous longueur d'onde, à l'aide d'un métamatériau, montré sur la figure I.17a. Ce dispositif étudié dans le régime micro-onde a permis une résolution de 0.13λ , illustrée sur la figure I.17b.

Les travaux de N.Fabre et al [38] ont démontré expérimentalement la refocalisation avec une épaisseur de cristal photonique (semiconducteur III-IV) d'indice négatif -1 , à une longueur d'onde de 1525 nm. Ces travaux sont illustrés sur la figure I.18, mais ne présentent pas pour l'instant de démonstration claire de la super résolution.

Ce type de dispositif permet alors d'obtenir de très bonnes résolutions. Les travaux de Pendry ont été déterminant, mais les matériaux d'indice -1 sont très difficiles à réaliser aux fréquences optiques car les méta-atomes (anneaux concentriques ou tiges métalliques) sont difficilement réalisables à l'échelle du nanomètre [39]. Les propriétés magnétiques étant difficiles à obtenir, des réalisations avec seulement une permittivité négative sont testées, mais nécessitent l'utilisation de métaux. La relation de conjugaison nous montre que le choix d'une distance focale plus importante, impose une épaisseur de la lentille plus élevée, ce qui

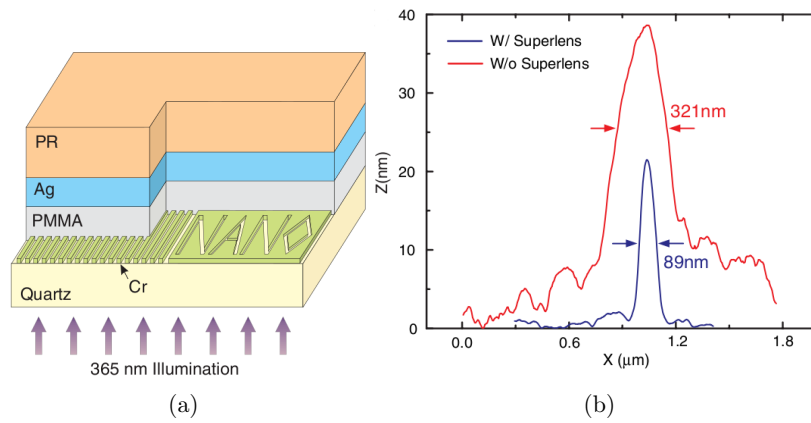


FIGURE I.16 – Slab d’argent éclairé en polarisation TM avec une longueur d’onde de 365 nm.
 (a) Amplification des évanescents dans un slab d’argent de 35 nm en polarisation TM.
 (b) Largeur du faisceau obtenue avec et sans le dispositif.

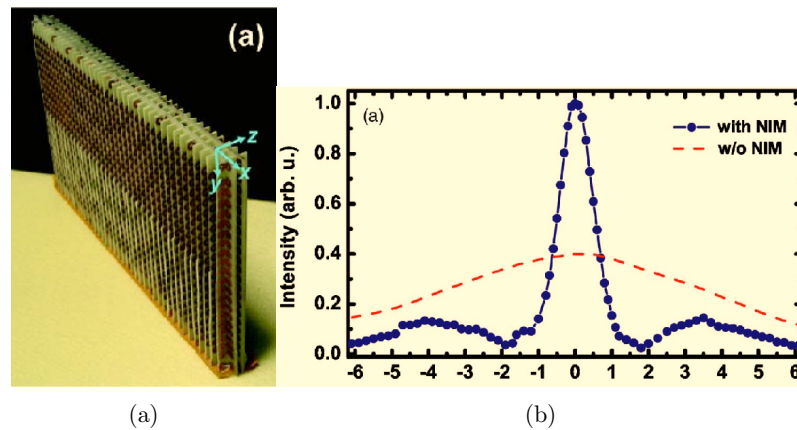


FIGURE I.17 – Résolution sous longueur d’onde avec un métamatériau main gauche.
 (a) Métamatériaux main gauche ($\varepsilon < 0$ et $\mu < 0$).
 (b) Largeur du faisceau obtenue avec et sans le dispositif.

s’avère rapidement problématique étant donné les pertes ohmiques dans le métal. Les cristaux photoniques d’indice négatif peuvent être une solution, n’étant pas nécessairement constitués de métal, mais ne présente pas pour l’instant de démonstration claire de la super résolution.

Ces métamatériaux d’indice négatif étant sujets à trop de limitations, nous allons montrer dans la suite de ce travail qu’il existe une autre façon d’obtenir une résolution sous longueur d’onde, en utilisant des métamatériaux hyperboliques.

I.2-b Les métamatériaux hyperboliques

Le sujet des métamatériaux hyperboliques, appelé aussi matériaux indéfinis est un sujet en pleine progression depuis 2003. En 2001, les travaux de I.Lindell *et al* [40] ont montré que la propriété de réfraction négative n’est pas exclusive aux matériaux possédant un tenseur de permittivité et de perméabilité négatif défini, et peut être permise dans certains cas de milieux uniaxialement anisotropes selon le signe des composantes des tenseurs de permittivité et

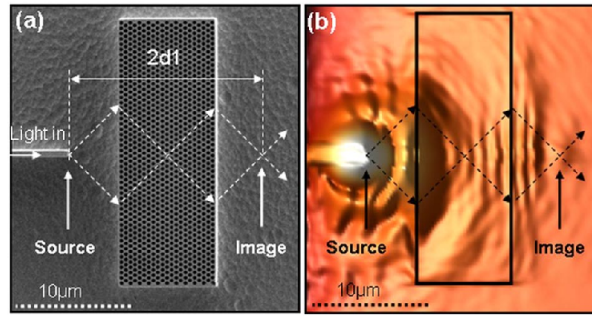


FIGURE I.18 – Démonstration expérimentale de la refocalisation avec une épaisseur de cristal photonique d'indice -1 à $\lambda = 1525 \text{ nm}$.

perméabilité anisotropes. Les travaux de D.Smith [19, 41] en 2003 et 2004, propose une étude plus générale sur la propagation des ondes électromagnétiques dans ces milieux anisotropes. Le terme de matériau indéfini est alors associé aux milieux anisotropes dont les composantes principales du tenseur de permittivité et de perméabilité ne sont pas toutes de même signe. Il propose une structure constituée de split ring resonators (SRR) et de fils, permettant d'obtenir les signes des éléments du tenseur de permittivité et de perméabilité nécessaires pour obtenir de la réfraction négative. Dans ce cas, la relation de dispersion anisotrope représente une hyperbole à une fréquence donnée. La réfraction négative dans un milieu indéfini formé à partir de SRR et de fils a été démontrée expérimentalement en 2003 par C.G. Parazzoli [42]. Ces travaux montrent que les propriétés de réfraction dans un tel milieu sont peu différentes de celles obtenues avec des métamatériaux isotropes d'indice négatif (métamatériaux mains gauches).

Les métamatériaux indéfinis ouvrent alors un grand nombre de possibilités dans le domaine de l'optique mais sont également utilisés dans d'autres domaines notamment comme des émetteurs thermiques [43]. Dans le domaine de l'imagerie, ils offrent une variété d'effets telle que la réfraction négative ou encore la focalisation en champ proche [44, 45] ou en champ lointain [46, 47].

En effet, les métamatériaux hyperboliques présentent une relation de dispersion hyperbolique illustrée sur la figure I.19, lorsque l'un des éléments du tenseur de permittivité est négatif (ici, ε_z^{eff}). La figure I.20 illustre le comportement de la lumière dans un tel matériau. Ainsi, lorsque l'onde transmise est réfractée négativement, si le faisceau dans le milieu 1 est divergent, chaque onde plane de vecteur d'onde \vec{k}_i va se réfracter négativement dans le cristal photonique et permettre une refocalisation du faisceau.

Les travaux de P.Belov [44, 45, 48] proposent un nouveau type de lentille plate étudiée dans un régime de canalisation permettant d'obtenir des images super résolues à partir de matériaux indéfinis. Ils montrent que ces matériaux indéfinis peuvent être obtenus à partir de nanofils ou de multi-couches métallo diélectriques, ce qui ouvre alors de nouvelles perspectives. Ces derniers permettent une résolution de l'ordre de $\frac{\lambda}{20}$ lorsque l'image est focalisée proche de la lentille. Quand l'un des éléments du tenseur de permittivité devient très grand, la courbe de dispersion devient très grande devant le cône de lumière. On obtient alors des courbes plates de courbure nulle, comme illustré sur la figure I.19 en rouge. Le faisceau réfracté dans ce cas est autocollimaté, tout en refocalisant sur le bord de la lentille. En effet,

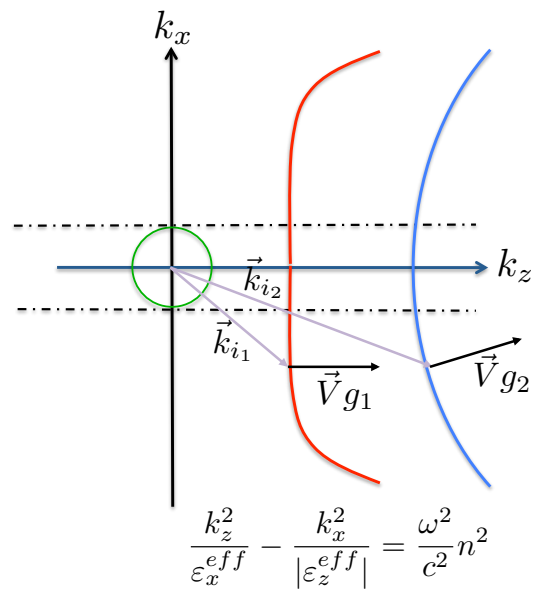


FIGURE I.19 – Courbe isofréquence hyperbolique

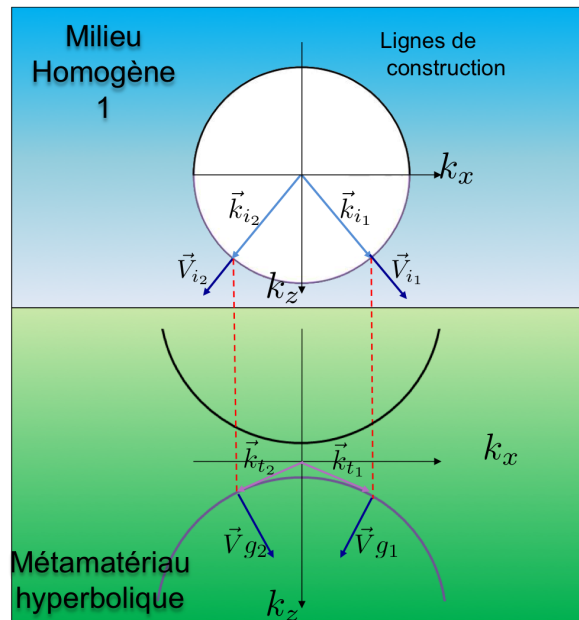


FIGURE I.20 – Interface entre un milieu homogène et un cristal photonique : refocalisation d'un faisceau lumineux

le faisceau est autocollimaté mais proche d'être réfracté négativement (courbe bleue sur la figure I.19), ce qui permet une focalisation du faisceau incident au bord de la lentille. Les travaux de Scalora [49] montrent qu'il est possible d'obtenir une image plus loin que le bord de la lentille à l'aide d'un empilement métallo diélectrique, mais la super résolution dans ce cas n'a pas été démontrée.

Beaucoup de questions se posent encore sur les matériaux indéfinis, notamment sur la distance à laquelle se focalise potentiellement la lumière, ou encore sur l'impact des pertes métalliques sur la transmission de structures multicouches métallo diélectriques. La possibilité d'obtenir de la super résolution pour une telle lentille reste une question ouverte. Il est courant d'entendre que de simples matériaux hyperboliques ne permettent pas d'obtenir une image détachée de la lentille à volonté, ni de super-résolution.

La figure I.19 montre que pour des matériaux indéfinis, la vitesse de groupe \vec{V}_g n'est pas opposée au vecteur d'onde \vec{k} contrairement aux métamatériaux mains gauches où la forme des courbes est parabolique. Le mécanisme permettant la résolution sous longueur d'onde n'est plus l'amplification des évanescents comme dans le cas des lentilles parfaites. Toutefois, la résolution élevée de la lentille plate de P.Belov [45] montre qu'il est possible d'obtenir de la super résolution avec des métamatériaux hyperboliques. Ce nouveau mécanisme, qui n'est pas basé sur la même dynamique optique que celui des lentilles parfaites sera expliqué de façon plus détaillée dans le troisième chapitre.

I.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les notions de base portant sur les cristaux photoniques et les métamatériaux et nous avons bien défini les différents régimes de fonctionnement des structures photoniques (géométrique, interférentiel ou diffractif et homogénéisation). Nous avons expliqué comment les surfaces de dispersion permettaient de comprendre la propagation de la lumière dans ces milieux, que ce soit en régime diffractif ou homogénéisé, et quand on pouvait s'attendre à trouver de la réfraction négative dans des milieux main gauche. Nous avons présenté tous les outils que nous utiliserons par la suite : relations de dispersion, courbes iso-fréquences, forme des champs dans les structures multicouches, matrices de scattering, méthodes numériques de résolution des équations de Maxwell dans les milieux périodiques (méthodes modales). Finalement, nous avons montré en quoi les empilements métallo-diélectriques sont, d'un point de vue formel, très semblables à des cristaux photoniques (en l'occurrence des miroirs de Bragg). C'est dans le chapitre suivant que nous allons cependant souligner des différences fondamentales entre les deux.

Décalages négatifs et réfraction négative

Lorsqu'on éclaire une épaisseur d'un matériau diélectrique en incidence normale, on obtient sous certaines conditions (épaisseur et longueur d'onde) des résonances de cavité. Lorsque ces résonances sont excitées en incidence non nulle et avec un faisceau, le faisceau réfléchi subit en général des déformations importantes. La résonance est dans ce cas un mode à fuite et le centre du faisceau réfléchi est alors largement décalé. On sait que l'entrée du faisceau dans une structure s'accompagne pour certains métal-diélectriques et pour certains cristaux photoniques, de réfraction négative. Dans ce cas, on peut aussi exciter des résonances pour une épaisseur finie de ces matériaux. Le faisceau réfléchi et le faisceau transmis présentent alors un décalage opposé au décalage obtenu pour les matériaux usuels. Dans cette partie, nous montrons qu'il est possible d'obtenir des décalages négatifs géants en utilisant des structures telles que des arrangements périodiques de métaux et de diélectriques, qui peuvent être considérés comme des cristaux photoniques. Nous verrons dans un premier temps, les conditions nécessaires devant être vérifiées par les paramètres de la structure pour obtenir de la réfraction négative. Une fois la réfraction négative obtenue, une étude sur les conditions de résonance permettant d'obtenir les décalages négatifs est proposée.

Sommaire

II.1 Historique	34
II.2 La réfraction négative	34
II.2-a Vitesse de groupe	35
II.2-b Valeur moyenne du vecteur de Poynting	37
II.2-c Condition de réfraction négative	37
II.2-d Choix de la structure	38
Courbes isofréquences et vitesse de groupe	39
II.3 Décalage négatif géant	41
II.3-a Régime interférentiel	42
Condition de résonance	42
II.3-b Décalage négatif géant dans des cristaux photoniques 2D	45
II.4 Conclusion	46

II.1 Historique

L'étude des décalages de faisceaux réfléchis remonte aux travaux de Goos et Hänchen [50] au milieu du vingtième siècle, même si ce type de question date d'il y a encore plus longtemps. L'effet Goos-Hänchen est le décalage du faisceau réfléchi qu'on peut observer lors d'une réflexion totale. Ce décalage n'est pas présent lors d'une réflexion partielle. Dans les années 70, on s'est aperçu que les outils développés pour l'étude du décalage Goos-Hänchen [51] pouvaient s'appliquer à d'autres types de décalages, notamment ceux obtenus lors de l'excitation de résonances de cavités en incidence non nulle, ce qu'on appelle aussi des modes à fuite.

La preuve qu'il était possible de fabriquer des matériaux "main gauche" a relancé l'étude de ces décalages. Il a notamment été montré que l'effet Goos-Hänchen était négatif lors de la réflexion totale sur un milieu main gauche. D'autres travaux montrent que la réflexion sur une épaisseur de métamatériau main gauche donne théoriquement lieu à des décalages négatifs géants [52]. Une explication correcte de ces décalages, fournie peu après [53, 54], lie les décalages négatifs à la réfraction négative dans le cas des milieux main gauche. Le but de cette étude est de montrer que le phénomène est plus général et qu'il peut se produire dans des structures de type cristaux photoniques.

Le décalage d'un faisceau réfléchi par un cristal photonique a déjà fait l'objet de nombreuses études. Mais jusqu'à présent les décalages obtenus étaient positifs [55, 56], ou négatifs mais dus dans ce cas à la présence de modes guidés excités par un réseau [57], et non pas à la réfraction négative uniquement. Nous voulions trouver des cas réalistes où les décalages négatifs auraient été liés à la réfraction négative uniquement. Nous avons tout d'abord étudié les empilements métallo diélectriques avec de faibles pertes, pour en faire une preuve de principe. Prendre en compte des pertes réalistes dans ces structures, fait cependant totalement disparaître les résonances. Nous avons donc étudié le cas des cristaux photoniques diélectriques à deux dimensions, qui permettent d'éviter totalement la présence de métal. Dans ce type de structure, nous verrons que la vitesse de groupe n'est plus opposée à la vitesse de phase, une étude permettant de trouver les cas de réfraction négative est alors proposée en première partie.

II.2 La réfraction négative

La réfraction négative n'est pas possible pour tout type de structure. Pour des empilements de deux matériaux différents (ε_1, d_1 , et ε_2, d_2), illustrés sur la figure II.1, la vitesse de groupe n'est généralement plus opposée au vecteur d'onde. Ces empilements peuvent être considérés comme des cristaux photoniques 1D, dont les empilements métallo-diélectriques forment une catégorie bien à part. Nous cherchons tout d'abord les conditions que doivent vérifier ces structures pour permettre à un faisceau entrant dans la structure d'être réfracté négativement.

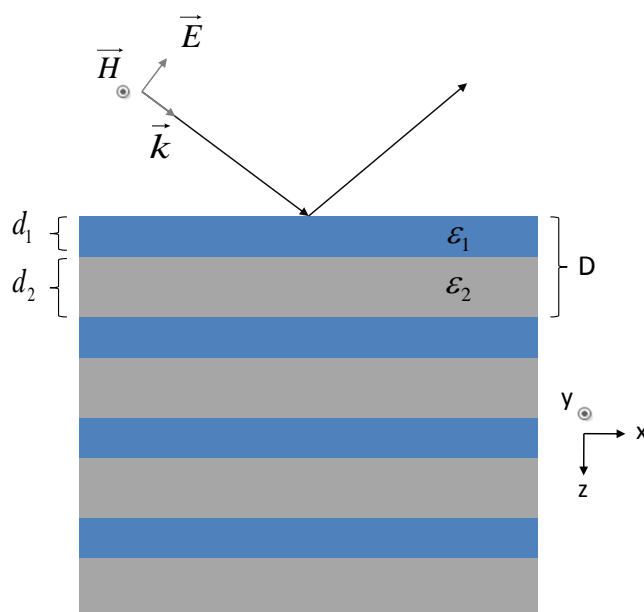


FIGURE II.1 – Empilement périodique de deux matériaux de permittivités et d'épaisseurs respectives (ε_1, d_1) et (ε_2, d_2) , éclairé en polarisation TM.

II.2-a Vitesse de groupe

Comme expliqué dans la première partie, le problème et sa solution sont supposés invariants suivant y .

La vitesse de groupe représente la vitesse du paquet d'onde dans la structure, indiquant ainsi comment le faisceau incident est réfracté dans la structure. La vitesse de groupe indique la façon dont la structuration périodique est perçue par la lumière. En prenant l'orientation du cristal photonique donnée figure II.1, pour que le faisceau soit réfléchi négativement, il faut que la composante selon l'axe parallèle aux interfaces de la vitesse de groupe V_{gx} soit négative. La vitesse de groupe pour un empilement 1D définit par l'expression (I.23) peut être exprimée rapidement à l'aide de la relation de dispersion donnée au premier chapitre (I.18). Rappelons la relation de dispersion pour le mode de Bloch considéré :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(K d) = \cos(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2} \eta} + \frac{k_{z2} \eta}{k_{z1}} \right) \sin(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \\ \eta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \text{en } TM \\ \eta = 1 \quad \text{en } TE \\ \vec{V}g = \text{grad}_{\vec{k}} \omega \end{array} \right. \quad . \quad (\text{II.1})$$

Les composantes parallèle et perpendiculaire de la vitesse de groupe associée à ce mode

sont alors données par :

$$V_{g_x} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \quad \text{et} \quad V_{g_z} = \frac{\partial \omega}{\partial K} \quad (\text{II.2})$$

On constate, à travers la relation de dispersion, que le vecteur de Bloch K dépend uniquement de k_x et de ω . Sa différentielle a donc pour expression :

$$dK = \frac{\partial K}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial K}{\partial k_x} dk_x \quad (\text{II.3})$$

De plus, dK est une différentielle totale exacte, donc

$$dK = 0 \quad (\text{II.4})$$

Ce qui nous donne,

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = -\frac{\frac{\partial K}{\partial k_x}}{\frac{\partial K}{\partial \omega}} \quad (\text{II.5})$$

Alors les expressions (II.2) s'écrivent

$$V_{g_x} = -\frac{\frac{\partial K}{\partial k_x}}{\frac{\partial K}{\partial \omega}} \quad \text{et} \quad V_{g_z} = \frac{\partial \omega}{\partial K} \quad (\text{II.6})$$

Par dérivation de la relation de dispersion, on obtient après calcul les expressions suivantes (le détail des calculs est décrit en Annexe) :

$$\begin{aligned} V_{g_z} = \frac{c^2 d \sin(K d)}{w} & \left[\left(\frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} d_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2} \eta} + \frac{k_{z2} \eta}{k_{z1}} \right) \frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}} d_2 \right) \sin(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) \right. \\ & + \left(\frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}} d_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2} \eta} + \frac{k_{z2} \eta}{k_{z1}} \right) \frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} d_1 \right) \cos(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta} \frac{k_{z2} \frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} - k_{z1} \frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}}}{k_{z2}^2} - \eta \frac{k_{z2} \frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} - k_{z1} \frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}}}{k_{z1}^2} \right) \sin(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \right) \right]^{-1} \quad (\text{II.7}) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} V_{g_x} = \frac{c^2 k_x}{w} & \left[\left(\frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} d_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2} \eta} + \frac{k_{z2} \eta}{k_{z1}} \right) \frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}} d_2 \right) \sin(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) \right. \\ & + \left(\frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}} d_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2} \eta} + \frac{k_{z2} \eta}{k_{z1}} \right) \frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} d_1 \right) \cos(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\eta k_{z2}^2} - \frac{\eta}{k_{z1}^2} \right) \left(\frac{k_{z2} \varepsilon_{r1}}{k_{z1}} - \frac{k_{z1} \varepsilon_{r2}}{k_{z2}} \right) \sin(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \right) \right]^{-1} \times \\ & \left[\left(\frac{d_1}{k_{z1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2} \eta} + \frac{k_{z2} \eta}{k_{z1}} \right) \frac{d_2}{k_{z2}} \right) \sin(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) \right. \\ & + \left(\frac{d_2}{k_{z2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2} \eta} + \frac{k_{z2} \eta}{k_{z1}} \right) \frac{d_1}{k_{z1}} \right) \cos(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\eta k_{z2}^2} - \frac{\eta}{k_{z1}^2} \right) \left(\frac{k_{z2}}{k_{z1}} - \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right) \sin(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \right) \right] \quad (\text{II.8}) \end{aligned}$$

Ces expressions nous permettent de tracer numériquement la vitesse de groupe, et de vérifier son signe, selon les différentes structures étudiées. La vitesse de groupe V_{g_x} doit notamment être négative pour que la lumière se réfracte négativement dans la structure.

Nous allons tout de suite voir, avant de discuter plus en détail les conditions nécessaires pour obtenir de la réfraction négative, de quelle façon cette vitesse de groupe peut être reliée à une autre grandeur caractéristique, le vecteur de Poynting.

II.2-b Valeur moyenne du vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting traduit le flux d'énergie du paquet d'ondes. Il est relié à la vitesse de groupe selon [58] :

$$\vec{V}_g = \frac{\langle \vec{P} \rangle}{\int \int_{cell} \epsilon_d d\vec{r}} \quad (\text{II.9})$$

où, ϵ_d est la densité d'énergie, et $\langle P \rangle$ la valeur moyenne du vecteur de Poynting sur une section de la structure considérée. La composante du vecteur de Poynting parallèle à l'interface de la structure métallo diélectrique P_x , contrôle la direction dans laquelle se propage la lumière dans le cristal. Elle est forcément du même signe que la vitesse de groupe. Ainsi, lorsque cette quantité moyennée sur une période est négative, la réfraction négative se produit. Après calculs (détaillés en Annexe), la valeur moyenne de la composante parallèle du vecteur de Poynting s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle P_{x_i} \rangle = \frac{1}{2} \frac{n \sin \theta}{c \beta_i} \int_0^{d_i} |A_{y_i}|^2 dz \\ \beta_i = \mu_0 \quad \text{et} \quad A = E \quad \text{en polarisation TE} \\ \beta_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i} \quad \text{et} \quad A = H \quad \text{en polarisation TM} \end{array} \right. \quad (\text{II.10})$$

i correspond à la couche dans laquelle on se place, et n est l'indice optique du milieu supérieur dans lequel le faisceau incident se propage avec un angle d'incidence θ , ε_{r_i} est la permittivité relative du milieu dans lequel le vecteur est calculé.

Le terme $\frac{1}{2} \frac{n \sin \theta}{c} |A_{y_i}|^2$ est toujours positif ou nul. L'intégrale étant définie sur un intervalle croissant, le signe de la valeur moyenne de la composante parallèle du vecteur de Poynting et donc de la vitesse de groupe V_{g_x} sera celui de β_i .

II.2-c Condition de réfraction négative

Le signe de la vitesse de groupe étant uniquement déterminé par le signe de β_i , cela montre que la réfraction négative est possible lorsque deux conditions sont réunies, conditions démontrées par les travaux [49] :

- La structure est éclairée par un faisceau en polarisation TM.
- Le matériau doit présenter une permittivité négative, ce que nous obtenons généralement avec les métaux dans le visible.

Ainsi, une structure de type miroir de Bragg purement diélectrique et dont l'axe optique est perpendiculaire aux interfaces milieu 1/milieu 2 (orientée selon la figure II.1) ne peut permettre une réfraction négative à l'intérieur de la structure, comme certains travaux semblent le prédire [59, 60]. Il faut nécessairement utiliser des métaux éclairés avec un faisceau dont la polarisation est transverse magnétique. Les deux matériaux ne peuvent être des métaux

car le champ ne serait pas transmis à travers la structure (évanescent), une solution est alors d'alterner des couches de métaux et de diélectriques périodiquement. Dans cette situation, la vitesse de groupe à travers la structure ne sera pas toujours négative, car la contribution du vecteur de Poynting est positive dans une épaisseur de diélectrique, et négative dans une épaisseur de métal. Finalement, pour que la réfraction négative soit permise dans la structure globale, une condition supplémentaire intervient : la lumière doit être plus localisée dans le métal que dans le diélectrique. On cherchera donc des paramètres tels qu'en norme, la valeur moyenne de la composante parallèle du vecteur de Poynting $|\langle P_x \rangle|$ dans une épaisseur de métal soit supérieure à celle dans une épaisseur de diélectrique.

Les ondes au sein d'une épaisseur de métal sont toujours évanescentes. Mais dans une épaisseur de diélectrique, selon le vecteur d'onde associé dans cette couche, l'onde peut être propagative (vecteur d'onde perpendiculaire réel) ou évanescente (vecteur d'onde perpendiculaire imaginaire). La transparence des empilements métallo-diélectriques hors du régime d'homogénéisation peut donc s'interpréter de deux façons différentes. Dans les deux cas, la transparence est due à l'excitation de résonances couplées. Il peut s'agir (i) soit de modes guidés supportés par la couche métallique et couplés entre eux (cas où le champ est évanescent y compris dans le diélectrique), (ii) soit de résonances de cavité dans le diélectrique et couplées entre elles parce que l'épaisseur métallique est faible. Cette interprétation devient moins pertinente à l'approche du régime d'homogénéisation, mais elle est valable pour des épaisseurs diélectriques relativement importantes (quelques dizaines de nanomètres).

Pour notre étude, nous cherchons à obtenir des cas de réfraction négative de type Fabry-Pérot, ce qui est le cas lorsque l'onde dans la couche de diélectrique y est propagative [61]. La composante perpendiculaire du vecteur d'onde dans la couche de diélectrique est alors réelle. Dans le cas contraire, les ondes sont évanescentes et la réfraction est de type "mode guidé" [62]. Ce dernier cas ne nous intéresse pas. En effet, une épaisseur métallique est capable de supporter des modes guidés contra-propagatifs, qui présentent un vecteur de Poynting moyen opposé à la direction de propagation de la phase [63]. Une fenêtre de transparence s'ouvre quand on périodise ce type de structure : une multitude de guides couplés supporte une multitude de modes guidés. Certains d'entre eux sont bien contra-propagatifs. Dans ce cas, on obtient un décalage négatif en excitant un de ces modes, mais il est difficile de le justifier en le liant au phénomène de réfraction négative. D'autre part ce type de mode ne peut pas être excité pour des angles faibles d'incidence : il faut pouvoir exciter des modes avec de grands vecteurs d'onde, et un milieu supérieur avec un indice plus fort que le diélectrique est nécessaire.

II.2-d Choix de la structure

Nous utilisons donc un empilement métallo diélectrique éclairé en polarisation TM. La condition énoncée précédemment, permettant la réfraction négative de type Fabry Pérot au sein de la structure, mène à choisir des paramètres de permittivités et d'épaisseurs tels que le champ soit davantage localisé dans le métal. Ce qui impose que la valeur moyenne du vecteur de Poynting soit supérieure en norme dans l'épaisseur de métal à celle dans l'épaisseur de diélectrique, tout en conservant un vecteur d'onde perpendiculaire aux interfaces qui soit réel dans le diélectrique.

Les paramètres doivent alors remplir les conditions suivantes :

- Pour des épaisseurs égales $|\varepsilon_d| > |\varepsilon_m|$, où ε_d et ε_m sont respectivement la permittivité relative du diélectrique et du métal. Cette condition permet au champ d'être davantage localisé dans la couche de métal.
- $\varepsilon_d > \varepsilon_0 \sin^2 \theta_0$, où θ_0 est l'angle d'incidence : La composante perpendiculaire du vecteur d'onde dans la couche diélectrique donnée par $\sqrt{k_0^2 \varepsilon_d - k_0^2 \varepsilon_0 \sin^2 \theta_0}$ doit être réelle.

Les paramètres suivants remplissent ces conditions :

- $\varepsilon_0 = 6.7$, permittivité du milieu incident.
- $\varepsilon_d = 5.3$, permittivité du diélectrique.
- $\varepsilon_m = -4.43$, permittivité de l'argent à 400 nm sans les pertes optiques.
- $\lambda = 400 \text{ nm}$
- $h_d = 0.0979 \lambda$ et $h_m = 0.0975 \lambda$, épaisseur respective du diélectrique et du métal.
- $d = h_d + h_m$

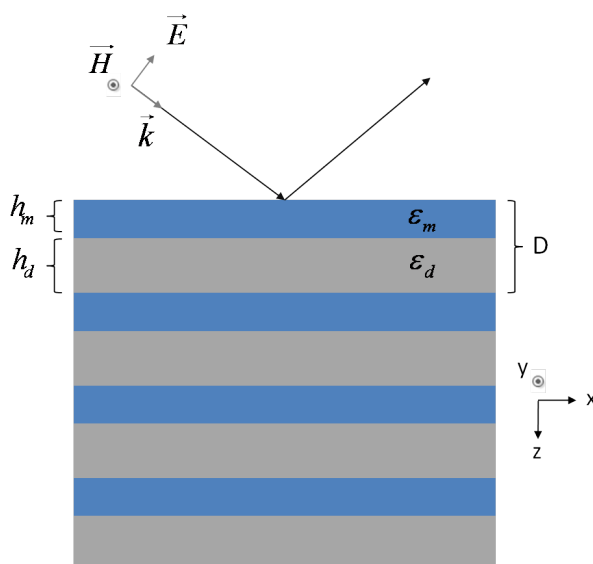


FIGURE II.2 – Empilement périodique de métal et de diélectrique de permittivités et d'épaisseurs respectives (ε_h, h_d) et (ε_m, h_m) , éclairé en polarisation TM.

Courbes isofréquences et vitesse de groupe

En observant les courbes isofréquences tracées à l'aide de la relation de dispersion I.18 pour plusieurs fréquences sur la figure (II.3a), nous pouvons observer le comportement de la lumière à l'intérieur de la structure en déterminant sa vitesse de groupe.

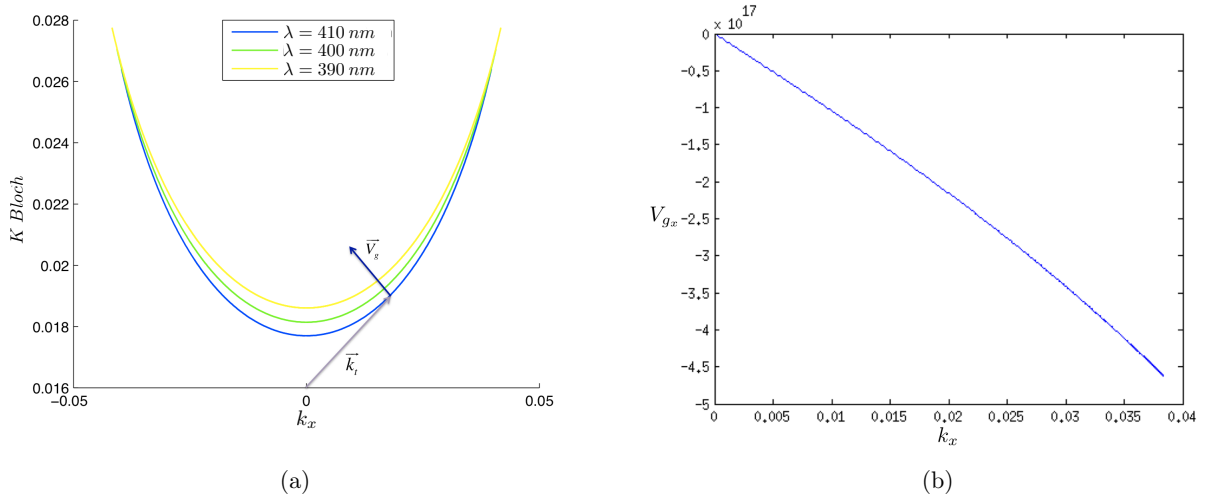


FIGURE II.3 – (a) Courbes isofréquences ($K_{Bloch} = f(k_x)$) pour $\lambda = 390, 400, 410 \text{ nm}$. La vitesse de groupe correspondante est superposée sur les courbes isofréquences.

(b) Composante parallèle aux interfaces de la vitesse de groupe V_{gx} en fonction de la composante parallèle du vecteur d'onde k_x .

La direction de propagation du faisceau dans la structure est donnée par le signe de la vitesse de groupe. L'expression de la vitesse de groupe $\vec{V}_g = \text{grad}_{\vec{k}} \omega$ montre qu'à fréquence fixée, elle est représentée, à un k_x donné, par la normale à la courbe isofréquence. Ce qui nous permettra de déterminer son orientation, ainsi que le signe de ces composantes suivant \vec{e}_x et \vec{e}_z . En effet, la vitesse de groupe sera perpendiculaire aux courbes isofréquences, et orientée dans le sens des fréquences croissantes, ou des longueurs d'ondes décroissantes, comme montrée sur la figure II.3a. Selon les courbes isofréquences représentées, pour tout k_x , la composante parallèle aux interfaces de la vitesse de groupe V_{gx} est négative. Dans cette structure, la réfraction négative sera ainsi permise pour tout angle d'incidence.

Ces résultats sont vérifiés en représentant cette grandeur (V_{gx}), dont l'expression est donnée par la relation (II.8), en fonction du vecteur d'onde parallèle k_x . Le résultat, montré sur la figure II.3b, confirme la valeur négative de la composante tangentielle de la vitesse de groupe pour tout k_x .

Avec cet empilement métallo-diélectrique, nous obtenons bien de la réfraction négative - bien que la vitesse de groupe, dans ce cas, ne soit pas opposée au vecteur d'onde. En effet, c'est la forme de la relation de dispersion qui est responsable de la réfraction négative. Selon la figure II.3a, nous constatons que les courbes isofréquences ont une forme de type hyperbolique. Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, un matériau possédant une relation de dispersion de type hyperbolique réfracte la lumière négativement, quel que soit le vecteur d'onde, c'est un matériau indéfini.

En conclusion, en associant périodiquement une couche de métal et une couche de diélectrique dans laquelle l'onde peut se propager (k_z réel), si la structure est éclairée avec un faisceau en polarisation TM, et que les paramètres sont choisis de façon à ce que le champ soit davantage localisé dans le métal où, contrairement au diélectrique, la valeur moyenne

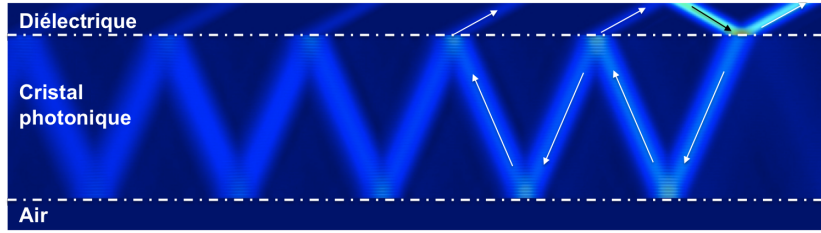


FIGURE II.4 – Carte de champ magnétique d'un empilement metallo diélectrique éclairé par un faisceau gaussien en polarisation TM avec un angle d'incidence de 61.7° et un waist de 10λ , la structure est composée de 500 périodes dans le régime géométrique.

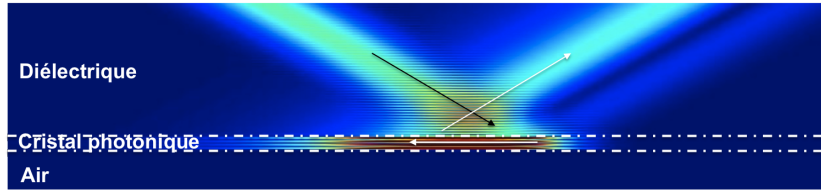


FIGURE II.5 – Carte de champ magnétique d'un décalage négatif géant en réflexion sur un empilement metallo diélectrique éclairé par un faisceau gaussien en polarisation TM avec un angle d'incidence de 61.7° et un waist de 10λ , composé 10 de périodes dans le régime interférentiel.

du vecteur de Poynting y est négatif, la réfraction négative est permise lorsque la lumière entre dans la structure. Toutes ces conditions mènent à une relation de dispersion de forme approximativement hyperbolique.

II.3 Décalage négatif géant

Lorsque la réfraction négative de type Fabry-Pérot est possible, le décalage peut être vu comme une signature de la réfraction négative avec une propagation purement géométrique du faisceau, c'est à dire quand l'épaisseur de la structure est plus grande que la taille du waist du faisceau incident qui éclaire la structure [64]. La taille de la structure doit alors être relativement grande. Dans la suite de notre étude, nous montrons que le décalage géant peut être obtenu par un mécanisme interférentiel pour une épaisseur petite devant la taille

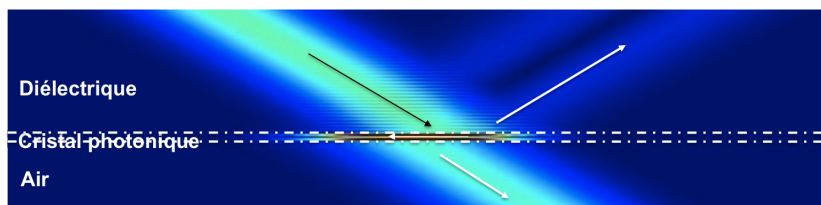


FIGURE II.6 – Carte de champ magnétique d'un décalage négatif géant en transmission à travers un empilement metallo diélectrique éclairé par un faisceau gaussien en polarisation TM avec un angle d'incidence de 60.65° et un waist de 10λ , composé de 5 périodes dans le régime interférentiel.

du faisceau. Pour cette étude, nous traçons des cartes de champ magnétique permettant de caractériser la propagation de la lumière au sein des structures étudiées à l'aide d'un code basé sur la méthode des matrices de diffusion [65].

II.3-a Régime interférentiel

Le régime dans lequel la propagation du faisceau est étudiée est déterminé par le rapport entre l'épaisseur totale de la structure et la largeur du faisceau gaussien incident.

Lorsque la structure est grande par rapport à la taille du waist (environ 10 fois la taille du waist), le régime est clairement géométrique. La figure II.4 représente le comportement de la lumière face à l'empilement périodique défini dans la section précédente, en régime géométrique. Pour cette simulation, la structure est composée de 500 périodes ($h_d + h_m$), soit une épaisseur totale de 100λ , le faisceau gaussien éclaire la structure avec un angle d'incidence de 61.7° et un waist de 10λ . Les nombreux faisceaux réfléchis à l'intérieur de la structure sont dus au choix de la permittivité élevée du milieu extérieur permettant une réflexion élevée aux interfaces entre le métal-diélectrique et le milieu extérieur. La réfraction négative est bien observée dans ce type de structure mais cela nécessite une taille de structure très importante.

Une solution, est d'étudier la même structure mais dans le régime interférentiel obtenu lorsque la taille de la structure totale est du même ordre de grandeur que la largeur du faisceau incident. En diminuant considérablement le nombre de période, la taille de la structure devient plus fine, permettant alors de fonctionner dans ce régime. Dans ce cas, lorsque l'épaisseur de la structure diminue, les nombreux faisceaux réfléchis à l'intérieur de la structure interfèrent entre eux. Ce qui montre l'importance d'obtenir un coefficient de réflexion élevé aux interfaces pour pouvoir obtenir des résonances importantes. Lorsque ces interférences sont constructives, elles donnent lieu à des résonances de type Fabry Péro à l'intérieur du cristal photonique. Pour résumer, ce sont des résonances de cavité du mode de Bloch, constitué lui-même de résonances de type Fabry-Pérot couplées entre elles. Ce cas est observé sur la figure II.5, pour laquelle le nombre de périodes a été réduit à 10 périodes, soit une épaisseur totale de 2λ . Comme le faisceau incident n'éclaire pas la structure en incidence normale, la résonance correspond à un mode à fuite [53], mais produit un décalage négatif car le faisceau se propageant à l'intérieur de la structure est réfracté négativement.

Condition de résonance

Lorsque l'on cherche à obtenir des décalages négatifs géants à partir d'un cas de réfraction négative, il ne suffit pas seulement de se placer dans le régime interférentiel en considérant une faible épaisseur de métal-diélectrique. Ces effets d'interférence ne se produisent pas pour tout angle d'incidence.

Les conditions idéales de résonance et les angles pour lesquels on observe le décalage interférentiel peuvent être obtenus à partir de la phase du coefficient de réflexion de l'épaisseur totale du cristal photonique. La formule d'Artmann lie en effet le décalage latéral d'un faisceau réfléchi à la dérivée de la phase du coefficient de réflexion.

$$\Delta = -\frac{1}{nk_0 \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad (\text{II.11})$$

où θ est l'angle d'incidence, n l'indice du milieu supérieur à la structure, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ le vecteur d'onde dans le vide et ϕ la phase du coefficient de réflexion.

Cette formule a été largement utilisée pour l'étude de l'effet Goos-Hänchen, mais sa validité est en fait bien plus grande. Elle ne donne cependant qu'une limite asymptotique : elle devient correcte lorsque la taille du faisceau est grande y compris devant la longueur typique de propagation du mode à fuite excitée [65]. Cependant, cette formule donne une bonne idée du décalage que l'on peut attendre, même quand elle n'est pas parfaitement valable.

Elle montre que le décalage latéral est élevé lorsque le terme $\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ est élevé, ce qui correspond à une variation rapide de la phase du coefficient de réflexion. Ces variations rapides de phase, nous permettent alors de déterminer les angles pour lesquels les faisceaux peuvent interférer constructivement. Cette variation de phase peut être dans le sens croissant ou décroissant, si nous cherchons un décalage négatif, il faut d'après la formule d'Artmann, qu'elle soit rapide et croissante.

Afin de déterminer les angles d'incidence pour lesquels les conditions de résonance sont optimales, nous traçons la phase du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence sur la figure II.7(a). Pour cette figure nous utilisons la structure définie au paragraphe précédent avec une épaisseur fine du cristal photonique, avec 10 périodes. Cette figure présente deux variations rapides croissantes de la phase du coefficient de réflexion, l'une vers 33° , et une autre plus rapide à 61.7° , c'est donc cette dernière qui permettra un décalage négatif plus élevé. La réflexion sur cette structure fine (10 périodes, soit une épaisseur de 2λ), éclairée avec un angle d'incidence de 61.7° , présentée sur la figure II.5 permet de valider le cas du régime interférentiel et celui de la résonance. Le décalage négatif géant est bien obtenu, avec une valeur de $14,8\lambda$. Ce décalage est plus élevé que le waist du faisceau incident de 10λ et peut donc être expliqué par la formule d'Artmann.

Cependant, la formule d'Artmann permet d'obtenir l'expression d'un décalage (asymptotique) lorsque le waist du faisceau incident est suffisamment large pour se placer dans le régime asymptotique, ce qui n'est pas le cas avec un waist de 10λ . La valeur réelle du décalage sera alors plus faible que celle annoncée par l'équation (II.11). Or, lorsque le régime asymptotique est atteint, le waist du faisceau incident est tellement large, que le décalage latéral devient difficile à détecter [66]. La figure II.5 montre en revanche que la mesure du décalage peut finalement se faire facilement en dehors du régime asymptotique.

Les décalages positifs se mesurent sans difficulté majeure [67], et aujourd'hui il est également possible de le faire pour les décalages Goos-Hänchen qui sont beaucoup plus petits [68]. Une étude de la valeur du décalage négatif en fonction de la valeur du waist du faisceau incident est proposée sur la figure II.7(b) pour un angle d'incidence de 61.7° qui correspond à une variation très rapide de la phase du coefficient de réflexion et pour un angle d'incidence de 58° correspondant à une variation de phase plus lente. Cette figure confirme la loi d'Artmann en montrant que le décalage latéral est plus élevé lorsque la variation de la phase est plus rapide. En effet, pour un angle d'incidence de 58° , le décalage ne peut espérer une valeur plus élevée que 1λ quelque soit la valeur du waist, contrairement au cas d'incidence de 61.7° , pour lequel le décalage peut atteindre des valeurs de 25λ .

Ainsi, tous ces paramètres nous permettent d'obtenir des décalages négatifs géants à partir de structure où la réfraction négative est permise. Cependant pour assurer que ce

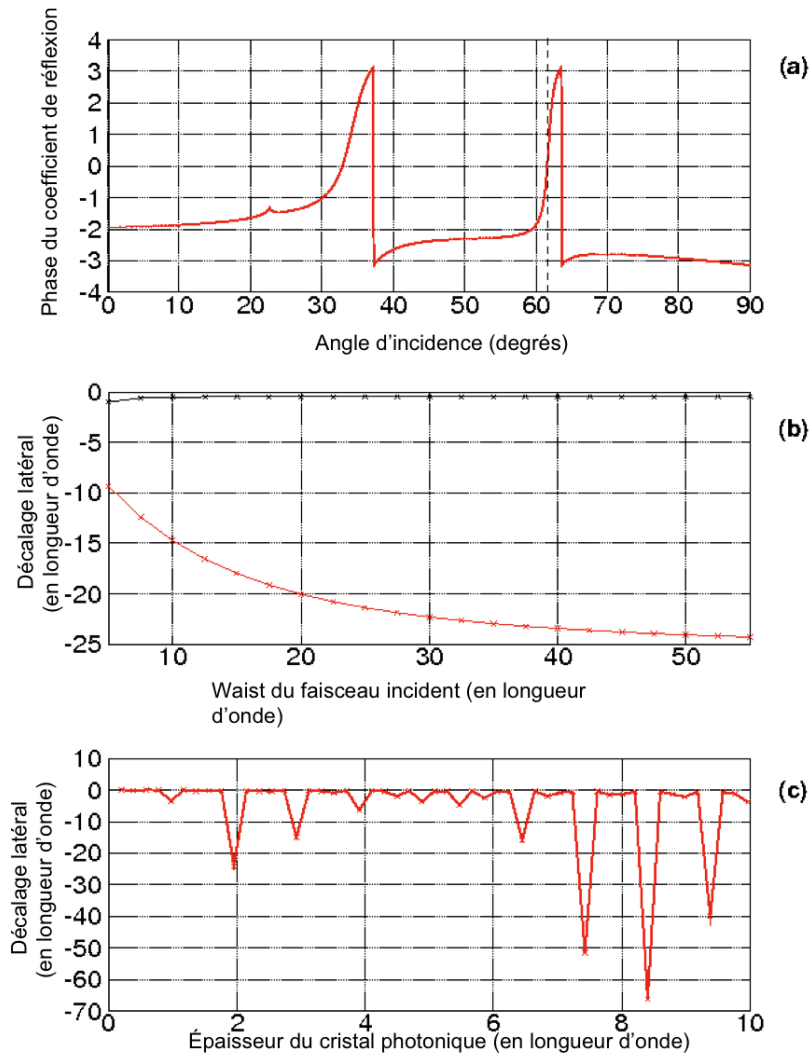


FIGURE II.7 – (a) Phase du coefficient de réflexion pour 10 périodes en fonction de l'angle d'incidence.

(b) Décalage latéral en fonction du waist pour un angle d'incidence constant de $61,7^\circ$ correspondant à l'une des variations rapides de la phase (courbe rouge), et pour un angle d'incidence de 58° correspondant à une variation lente de la phase (courbe noire).

(c) Décalage latéral en fonction de l'épaisseur de la structure.

décalage soit bien la signature de réfraction négative dans la structure, il faut s'assurer que le décalage est dû uniquement à la réfraction négative, ce qui exclu l'excitation d'un mode à fuite de surface [69, 54]. Pour vérifier ceci, il suffit d'étudier la dépendance du décalage latéral en fonction de l'épaisseur de la structure à angle d'incidence donné, ce qui est représenté figure II.7(c). Il n'est pas possible, avec un cristal photonique, d'obtenir une variation de l'épaisseur continue. La variation du décalage n'est pas exactement périodique comme espéré avec une variation continue de l'épaisseur, mais le battement présenté par le décalage latéral est tout de même caractéristique d'une cavité résonante. Cela confirme l'interprétation en terme de résonance de cavité et écarte totalement celle de l'excitation d'un mode à fuite de surface.

L'étude précédente portant sur un faisceau réfléchi peut être de la même manière réalisée en considérant le faisceau transmis à travers la structure. En adaptant l'angle d'incidence avec l'étude de la phase du coefficient de transmission, le décalage géant négatif est également possible en transmission, ce qui est montré sur la figure II.6.

En résumé, à l'aide d'empilements métallo-diélectriques, dont les paramètres choisis vérifient les conditions pour obtenir une réfraction négative, nous pouvons, en nous plaçant dans les conditions idéales de résonances (taille de l'épaisseur par rapport au waist, et variation croissante rapide de la phase du coefficient de réflexion), obtenir des décalages négatifs géants pouvant être vus comme une signature de réfraction négative. Cependant, même si la quantité de métal est réduite par l'utilisation de structures périodiques à base de métal et de diélectrique, les pertes optiques sont tout de même présentes. L'introduction des pertes diminue la longueur de propagation de la lumière dans la structure. Les pertes réduisent donc la qualité des interférences à l'intérieur de la structure, ce qui réduit la valeur attendue du décalage négatif géant. Néanmoins tant que la longueur de propagation est plus grande que l'épaisseur de la structure, le mécanisme interférentiel permet d'obtenir des résonances. Il a été constaté qu'en introduisant une partie des pertes optiques, la limite de la longueur de propagation est de quelques périodes de la structure [49]. Une solution pour écarter totalement ce problème de perte optique mais observer tout de même des décalages négatifs importants est l'utilisation de véritables cristaux photoniques, c'est à dire purement diélectriques.

II.3-b Décalage négatif géant dans des cristaux photoniques 2D

Pour faire cette étude, nous avons choisi dans la littérature [58] les paramètres d'un cristal photonique 2D permettant d'obtenir de la réfraction négative. Cette structure composée de tiges purement diélectriques placées dans l'air, n'introduit pas de pertes optiques, et permet bien la réfraction négative.

Ces tiges diélectriques sont rectangulaires, de largeur 0.75λ , de hauteur 0.96λ et de permittivité $\varepsilon_d = 9$, placées périodiquement dans l'air avec une période horizontale de 1.27λ et verticale de 2.22λ .

Tout comme pour l'empilement métallo diélectrique, un nombre élevé de réflexion du faisceau à l'intérieur de la structure est nécessaire pour obtenir un mécanisme interférentiel efficace. Le milieu extérieur étant de l'air, il est impossible d'utiliser la réflexion totale pour piéger la lumière dans la structure. Nous avons donc placé le cristal photonique sur un conducteur parfait pour renforcer les interférences dans le cristal.

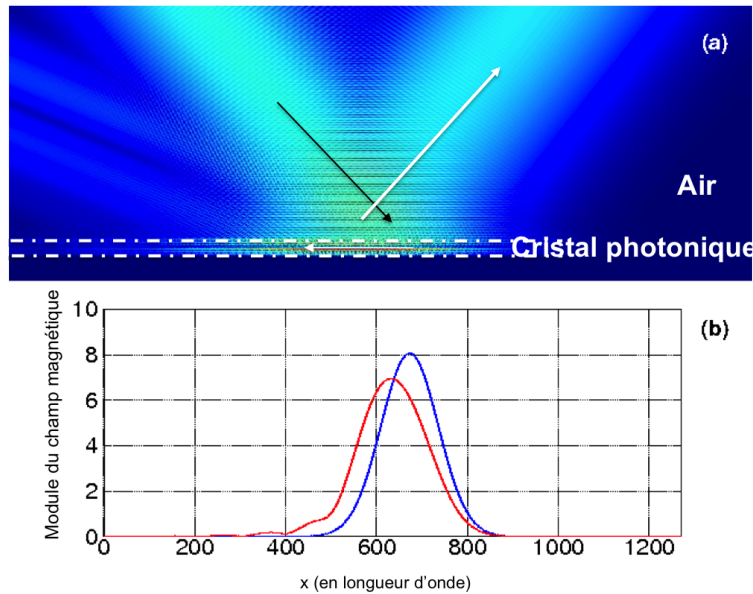


FIGURE II.8 – (a) Décalage négatif géant d'un faisceau gaussien éclairant un cristal photonique fin à deux dimensions (7 périodes) avec un angle d'incidence de 40° et un waist de 89λ . (b) Profil du champ réfléchi H montrant sa déformation et son décalage vers l'arrière. Le champ tracé correspond uniquement à l'ordre de diffraction zéro.

Pour simuler ce genre de structure à deux dimensions, nous utilisons une méthode modale de Fourier nous permettant de reconstruire les cartes du champ [27, 26].

La structure est éclairée avec un faisceau gaussien dont la largeur du waist est de 89λ . Pour se placer dans le régime interférentiel, nous utilisons une épaisseur de cristal photonique d'environ 15λ . Une étude de la phase du coefficient de réflexion nous permet de visualiser une variation croissante rapide de la phase pour un angle d'incidence de 40° . La figure II.8(a) représente le module du champ magnétique à travers une telle structure. Ce qui nous permet de confirmer la présence d'une résonance de Fabry-Pérot menant à un décalage négatif géant de 36.6λ , bien que le coefficient de réflexion à l'interface entre le cristal photonique et le milieu extérieur ne soit pas optimisé comme il l'a été pour la structure métal-diélectrique. Le profil du champ magnétique incident et du champ magnétique réfléchi d'ordre zéro a été tracé sur la figure II.8(b). La forme du profil montre la déformation du faisceau, ainsi que le décalage par rapport au faisceau incident. Cela confirme le déplacement vers la gauche du faisceau réfléchi par rapport au faisceau incident.

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré qu'il était possible d'obtenir des décalages négatifs importants en faisant se réfléchir des faisceaux sur des épaisseurs de métal-diélectrique ou de cristaux photoniques. Nous avons montré que ces décalages négatifs peuvent être interprétés comme l'excitation de modes à fuites particuliers : ces modes étant fortement influencés par le fait que la lumière subit une réfraction négative en entrant dans le cristal, ils se propagent dans la direction opposée aux modes à fuite usuels, et provoquent des décalages

opposés. Nous avons étudié les conditions à respecter pour obtenir ces décalages : avoir une structure provoquant une réfraction négative[60], se placer en régime interférentiel (épaisseur totale de la structure faible par rapport à la largeur du faisceau incident), un nombre élevé de faisceaux réfléchis à l'intérieur de la structure (coefficient de réflexion CP/Air élevé), et le choix d'un angle d'incidence permettant l'excitation d'une résonance. Nous avons aussi vu que des pertes optiques trop importantes pouvaient limiter fortement cet effet. Mais dans le cas où les pertes sont suffisamment faibles, alors nous pouvons considérer ces décalages négatifs comme une signature, pour une structure de faible épaisseur, de la réfraction négative[70].

Nous avons montré dans le premier chapitre comment il était possible d'obtenir des images super résolues en utilisant des métamatériaux main gauches. Dans ce chapitre, nous allons décrire une autre approche pour construire une lentille en utilisant cette fois des métamatériaux hyperboliques. Dans un premier temps, nous reprenons la théorie des milieux effectifs permettant de comprendre comment la lumière se propage dans ces métamatériaux de façon relativement simple. Nous montrons que tout empilement metallo diélectrique avec une relation de dispersion hyperbolique peut être caractérisé par un indice effectif complexe. A l'aide d'une méthode d'homogénéisation basée sur l'approximation paraxiale, nous verrons que ces milieux hyperboliques très anisotropes peuvent être assimilés à des milieux homogènes isotropes d'indice effectif négatif. Ensuite, nous développerons une théorie permettant de décrire le fonctionnement de ces nouvelles lentilles, jusqu'à déterminer une relation de conjugaison, et ce, même en dehors du régime d'homogénéisation. Enfin, nous verrons comment ce genre de structure peut être optimisé afin d'améliorer le coefficient de transmission et la résolution de la lentille. Nous montrerons notamment que la résolution est directement reliée à l'indice effectif complexe.

Sommaire

III.1 Historique	51
III.2 Milieu effectif	51
III.3 Régime de canalisation	53
III.4 Indice effectif d'un matériau hyperbolique	54
III.4-a Méthode d'homogénéisation paraxiale	54
Méthode d'approximation paraxiale	55
Indice effectif et figure de mérite	57
III.4-b Calcul de l'indice effectif d'un métamatériau hyperbolique en régime d'homogénéisation	57
III.4-c Calcul de l'indice effectif d'un métamatériau hyperbolique en régime diffractif	59
III.5 Relation de conjugaison et résolution optique d'une lentille hyperbolique	59
III.5-a Relation de conjugaison	60

Application au régime de canalisation	62
III.5-b Résolution	62
III.6 Application au design de la lentille	63
III.6-a Courbes isofréquences et indices effectifs	63
III.6-b Optimisation de la transmission	64
Optimisation de la structure	64
Résultats	67
III.6-c Résolution optimale	69
III.7 Conclusion	74

III.1 Historique

Suite aux travaux de Pendry [2], les métamatériaux hyperboliques qui sont généralement des multi-couches métallo-diélectriques ou des agencements de nanofils, ont émergé comme une approche alternative pour obtenir des images sub-longueur d'onde. Ces nouveaux matériaux appelés aussi métamatériaux indéfinis opèrent à des fréquences UV [71]. Ce sont des milieux très anisotropes présentant une relation de dispersion hyperbolique dans l'espace des vecteurs d'ondes. Ces milieux induisent de nouvelles propriétés optiques [72, 73, 74, 75, 76] et ont notamment été utilisés pour obtenir des images avec une résolution sub-longueur d'onde en champ proche [45, 49, 77, 78] et en champ lointain [46]. Pour la résolution en champ proche, les images sous longueur d'onde sont rendues possibles grâce à un mécanisme de canalisation qui permet de transporter à la fois les ondes propagatives et les ondes évanescentes émises par la source dans un régime d'autocollimation. Les travaux de P.Belov[45] prédisent une résolution théorique de $\frac{\lambda}{60}$, mais ils nécessitent que l'image et l'objet soient collés aux interfaces de la lentille. Des images super résolues ont aussi été obtenues en champ lointain grâce aux hyperlentilles qui sont réalisées à base de métamatériaux hyperboliques mais dont la géométrie est sphérique cylindrique [46, 79, 80, 81, 82].

Entre des images en champ proche et des images en champ lointain, Scalora [49] a montré qu'il était possible de construire une lentille plate avec des métamatériaux hyperboliques et d'obtenir une distance focale de $\frac{\lambda}{2}$. Cependant aucune théorie permettant d'expliquer ce genre de phénomène n'était proposée dans ces travaux. D'autres progrès vers des métamatériaux à indice négatif ont été effectués, théoriquement et à travers des réalisations expérimentales, en structurant des guides d'ondes plasmoniques couplés et formant des milieux très proches des milieux hyperboliques usuels [83, 84]. Ces derniers résultats montrent que ces matériaux permettent d'obtenir une lentille plate d'indice effectif -1 dans l'ultraviolet. La structure étudiée est un empilement d'argent et de TiO_2 . Selon les auteurs, la résolution obtenue n'est pas sous longueur d'onde, ce qui serait dû aux pertes optiques, dont on sait bien qu'elles limitent l'efficacité d'une lentille basée sur des métamatériaux.

Nous avons développé une méthode permettant de traiter un métamatériau hyperbolique comme un matériau homogène [9, 18]. Cette méthode est la première qui permette d'optimiser simplement ce type de structure. Cette théorie semi classique a fait ses preuves dans le cas des hyperlentilles plates [85] et permet d'obtenir une relation de conjugaison expliquant totalement le comportement de ces lentilles hyperboliques.

III.2 Milieu effectif

Nous avons vu précédemment que les métamatériaux étaient étudiés en régime d'homogénéisation, lorsque l'épaisseur des couches constituant le métamatériau est très petite devant la taille de la longueur d'onde. Ainsi, la lumière se propage dans le métamatériau comme dans un milieu homogène de permittivité effective $\bar{\epsilon}_{eff}$ et $\bar{\mu}_{eff}$. Certaines techniques d'homogénéisation standards déduisent l'indice effectif à partir des constituants du métamatériau, ce qui permet de déterminer la relation de dispersion [86, 87, 88, 89, 34]. Nous proposons une nouvelle approche d'homogénéisation : cette approche, limitée aux grandes longueurs d'onde,

tend à caractériser un métamatériau indéfini par un tenseur de permittivité effective [90, 91].

Un métamatériau constitué d'un empilement périodique de couches métalliques (de permittivité relative $\bar{\varepsilon}_m$, d'épaisseur h_m) et diélectriques (de permittivité $\bar{\varepsilon}_d$, et d'épaisseur h_d) est caractérisé, pour ce qui est de la propagation de la lumière, par sa relation de dispersion (I.18) :

$$\cos(\bar{K} d) = \cos(\bar{k}_{z_d} h_d) \cos(\bar{k}_{z_m} h_m) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{k}_{z_d}}{\bar{k}_{z_m} \eta} + \frac{\bar{k}_{z_m} \eta}{\bar{k}_{z_d}} \right) \sin(\bar{k}_{z_d} h_d) \sin(\bar{k}_{z_m} h_m), \quad (\text{III.1})$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\bar{\varepsilon}_d}{\bar{\varepsilon}_m} \text{ en } TM \\ \eta = 1 \text{ en } TE \\ \bar{k}_{z_m} = \sqrt{k_0^2 \bar{\varepsilon}_m - k_x^2} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{(2\pi)^2 \bar{\varepsilon}_m - (2\pi \sin \theta_i)^2} \\ \bar{k}_{z_d} = \sqrt{k_0^2 \bar{\varepsilon}_d - k_x^2} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{(2\pi)^2 \bar{\varepsilon}_d - (2\pi \sin \theta_i)^2} \end{array} \right. \quad (\text{III.2})$$

Le régime d'homogénéisation implique $\frac{h_d}{\lambda} \ll 1$ et $\frac{h_m}{\lambda} \ll 1$. Pour de faibles vecteurs d'onde transverses ($\frac{k_x}{k_0} \ll 1$), nous pouvons supposer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_{z_m} h_m \ll 1 \\ \bar{k}_{z_d} h_d \ll 1 \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

Ainsi, nous pouvons utiliser les développements limités du cosinus et du sinus à l'ordre 2, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\bar{k}_{z_i} h_i) \approx 1 - \frac{\bar{k}_{z_i}^2 h_i^2}{2} \approx 1 - \frac{(k_0^2 \varepsilon_i - k_x^2) h_i^2}{2} \\ \sin(\bar{k}_{z_i} h_i) \approx \bar{k}_{z_i} h_i \\ \cos(K d) \approx 1 - \frac{K^2 d^2}{2} \end{array} \right. \quad (\text{III.4})$$

En développant l'expression (I.18), et en supposant les termes d'ordres 3 et 4 infiniment petits, nous obtenons l'expression :

$$1 - \frac{\bar{K}^2 d^2}{2} = 1 - \frac{k_0^2}{2} \left[\bar{\varepsilon}_m h_m^2 + \bar{\varepsilon}_d h_d^2 + \frac{h_m \bar{\varepsilon}_d h_d}{\eta} + h_m \bar{\varepsilon}_m h_d \eta \right] + \frac{k_x^2}{2} \left[h_m^2 + h_d^2 + \frac{h_m h_d}{\eta} + h_m h_d \eta \right], \quad (\text{III.5})$$

soit,

$$\bar{K}^2 d^2 = k_0^2 \left[\bar{\varepsilon}_m h_m^2 + \bar{\varepsilon}_d h_d^2 + \frac{h_m \bar{\varepsilon}_d h_d}{\eta} + h_m \bar{\varepsilon}_m h_d \eta \right] - k_x^2 \left[h_m^2 + h_d^2 + \frac{h_m h_d}{\eta} + h_m h_d \eta \right]. \quad (\text{III.6})$$

En polarisation transverse magnétique, nous obtenons alors :

$$\bar{K}^2 d^2 = k_0^2 \left[(\bar{\varepsilon}_m h_m + \bar{\varepsilon}_d h_d) d \right] - k_x^2 \left[(\bar{\varepsilon}_m h_m + \bar{\varepsilon}_d h_d) \left(\frac{h_d}{\bar{\varepsilon}_d} + \frac{h_m}{\bar{\varepsilon}_m} \right) \right] \quad (\text{III.7})$$

Soit,

$$\frac{d}{\bar{\varepsilon}_m h_m + \bar{\varepsilon}_d h_d} \bar{K}^2 + \frac{h_d + \frac{h_m}{\bar{\varepsilon}_m}}{d} k_x^2 = k_0^2. \quad (\text{III.8})$$

La relation (III.8) est analogue à celle d'un matériau homogène anisotrope :

$$\frac{\bar{K}^2}{\bar{\varepsilon}_x} + \frac{k_x^2}{\bar{\varepsilon}_z} = k_0^2 \quad (\text{III.9})$$

Ainsi, le métamatériau hyperbolique se comporte, en régime d'homogénéisation comme un milieu effectif anisotrope. Les éléments du tenseur de permittivité anisotrope $\bar{\epsilon}_x$ et $\bar{\epsilon}_z$ dépendent des caractéristiques du métamatériau hyperbolique, et peuvent être définis par :

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}_x = \frac{\bar{\epsilon}_m h_m + \bar{\epsilon}_d h_d}{d} \\ \bar{\epsilon}_z = \frac{d}{\frac{h_d}{\bar{\epsilon}_d} + \frac{h_m}{\bar{\epsilon}_m}} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

III.3 Régime de canalisation

La super résolution de la lentille de P.Belov repose sur sa relation de dispersion si particulière, permettant ce qu'on appelle la canalisation (des évanescents). En effet, contrairement à une lentille conventionnelle où les détails sous longueur d'onde sont perdus par la perte des ondes évanescentes à travers la lentille, ici, les ondes évanescentes émises par l'objet et transportant les détails sous longueur d'onde sont convertis en ondes propagatives dans le milieu hyperbolique. La forme hyperbolique plate des courbes isofréquences permet d'obtenir une solution propagative caractérisée par un \bar{k}_z (essentiellement) réel pour tout k_x , même si la constante de propagation dans l'air suivant z est imaginaire.

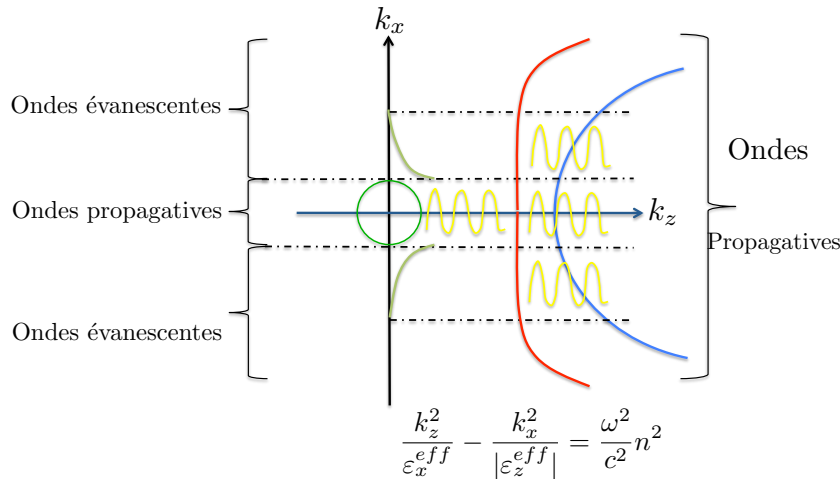


FIGURE III.1 – Conversion des ondes évanescentes en ondes propagatives par un mécanisme de canalisation.

Chaque ondes évanescentes est converti en un mode de Bloch qui peut se propager à travers la structure et ainsi transmettre les détails sous longueur d'onde pour reconstruire une image super résolue. Le mécanisme décrit ici diffère donc de l'amplification d'évanescent dans les lentilles de Pendry qui permettent de refocaliser théoriquement la lumière à une distance focale bien supérieure à la longueur d'onde. Nous avons ici un mécanisme d'autocollimation pour les propagatifs (courbe isofréquence plate) et de conversion des évanescents en propagatifs dans le milieu hyperbolique. Ce régime de canalisation montre l'intérêt d'utiliser des structures avec des courbes isofréquences plates. Ce mécanisme de canalisation est optimal, lorsque la structure vérifie les conditions de résonance de Fabry Péroth qui évitent les réflexions (épaisseur de l'ordre d'une demi longueur d'onde). Cette condition est valable pour tous les angles lorsque la courbe isofréquence est plate. Par conséquent, plus les courbes iso

fréquences sont plates et plus la résolution peut être élevée, car toutes les ondes évanescentes seront converties et transmises à travers la structure. Cependant, dans le cas de la lentille proposée par P.Belov, les points conjugués objet et image sont localisés aux bords de la lentille. Autrement dit la distance focale de ce type de lentille plate est très faible. Le dispositif permet bien d'obtenir des images super résolues, mais en bord de lentille seulement, ce qui limite les applications potentielles de ce type de structure.

D'après les travaux de P.Belov, ce type de courbe isofréquence peut être obtenue à l'aide d'un empilement métallo diélectrique étudié en régime d'homogénéisation, sous certaines conditions, tel que $\bar{\varepsilon}_z \rightarrow 0$ et $\bar{\varepsilon}_x = 1$. Nous pouvons généraliser cette condition. La relation de dispersion d'un milieu anisotrope (III.9) peut être hyperbolique lorsque $\bar{\varepsilon}_z < 0$ et $\bar{\varepsilon}_x > 0$.

Nous choisissons pour notre étude, d'utiliser de la même façon, un empilement métallo diélectrique caractérisé par ses permittivités et épaisseurs respectives $(\bar{\varepsilon}_m, h_m, \bar{\varepsilon}_d, h_d)$. La condition précédente, nécessaire pour obtenir un métamatériau hyperbolique, ainsi que le système (III.10) obtenue avec la théorie des milieux effectifs nous permet d'obtenir une condition sur les caractéristiques de cet empilement métallo diélectrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_m < 0 \\ \frac{|\bar{\varepsilon}_m|}{\bar{\varepsilon}_d} < \frac{h_m}{h_d} < \frac{\bar{\varepsilon}_d}{|\bar{\varepsilon}_m|} \\ -\varepsilon_d < \varepsilon_m < \varepsilon_d \end{array} \right. \quad (\text{III.11})$$

Ainsi, pour obtenir un milieu ayant une relation de dispersion hyperbolique, à partir d'une structure multicouche constituée d'un métal et d'un diélectrique, les conditions données par le système (III.11) devront être respectées. Nous allons maintenant tenter de comprendre plus en détail la propagation d'un faisceau gaussien dans ce type de structures.

III.4 Indice effectif d'un matériau hyperbolique

Dans cette section, nous allons voir comment on peut caractériser un milieu hyperbolique par un indice effectif, ce qui est loin d'être immédiat. La définition de cet indice effectif s'appuie sur la relation de dispersion, plus encore que sur les relations obtenues en régime d'homogénéisation. Cela permet à notre approche d'être valable aussi en régime diffractif. Cette théorie fournit un cadre pour expliquer quelques phénomènes mis en évidence par Belov [45] et Scalora [49].

III.4-a Méthode d'homogénéisation paraxiale

Dans ce paragraphe nous expliquons que la description des métamatériaux hyperboliques (MH) en terme d'epsilons effectifs ne fonctionne qu'en régime d'homogénéisation. Par ailleurs elle ne permet pas d'accéder à la relation de conjugaison ni à la résolution. On propose donc une autre approche basée sur une méthode d'homogénéisation permettant d'associer un indice effectif complexe aux métamatériaux hyperboliques. Les parties réelles et imaginaires se révéleront utiles pour déterminer la relation de conjugaison et la résolution. Cette méthode est basée sur le développement paraxial du vecteur d'onde de Bloch. Nous allons montrer qu'il existe un indice effectif complexe déterminé à partir de la courbure de la relation dispersion dans l'espace des k .

Méthode d'approximation paraxiale

Afin de tenir compte des pertes optiques induites par les couches métalliques nous calculons la relation de dispersion complexe vue auparavant avec la relation (I.18). Le vecteur d'onde de Bloch $\bar{K}(\omega, k_x)$ devient alors complexe, nous pouvons donc différencier une bande isofréquence réelle et une imaginaire, comme tracées sur la figure III.2.

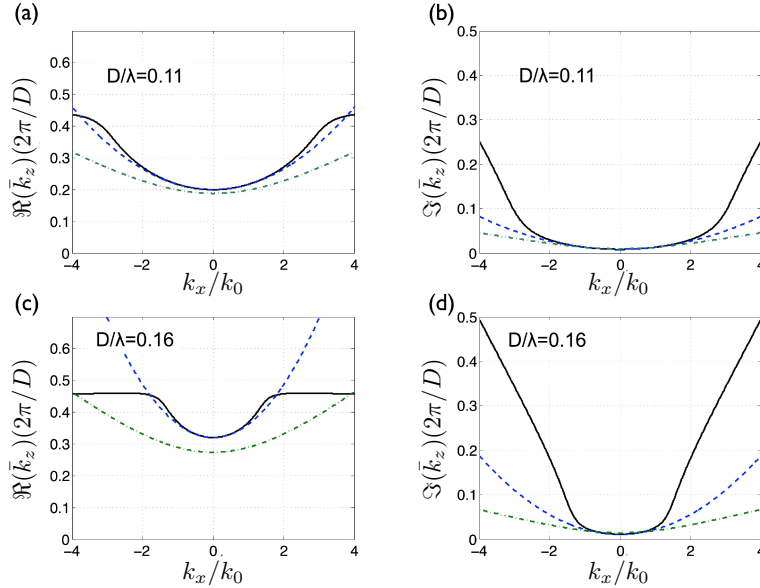


FIGURE III.2 – (a) et (b) Diagrammes isofréquences réels et imaginaires dans l'espace des k pour $\frac{D}{\lambda} = 0.11$.

(c) et (d) Diagrammes isofréquences réels et imaginaires dans l'espace des k pour $\frac{D}{\lambda} = 0.16$. La ligne pleine (noire), pointillée (bleue) et sous pointillée (verte) représente respectivement le diagramme de bande exacte, l'approche paraxiale et l'approche homogénéisée. Ces calculs sont obtenus pour $\frac{h_m}{h_d} = 1$ et pour $\lambda = 380nm$.

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, nous pouvons faire un développement limité du vecteur d'onde complexe $\bar{K}(k_x, \omega)$, pour les faibles valeurs de k_x :

$$\bar{K} = \bar{K}(0) + \frac{k_x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial k_x^2} \Big|_{k_x=0} \right) \quad (\text{III.12})$$

Ce dernier terme peut être relié à la courbure des courbes isofréquences.

En effet, en ne considérant que les petites valeurs de k_x (approximation paraxiale), il est possible de définir une courbure des courbes isofréquences $\bar{K}(k_x, \omega)$ réelles et imaginaires au point $k_x = 0$. Cette courbure, notée $\bar{\gamma}$ est décrite par :

$$\bar{\gamma} = -k_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial k_x^2} \Big|_{k_x=0} \right) \quad (\text{III.13})$$

L'approximation paraxiale permet alors de remplacer un milieu complexe par un milieu équivalent homogène d'indice complexe \bar{n}_{eff} . En effet, la partie centrale de la relation de dispersion est assimilée à une portion de courbe circulaire, représentée sur la figure III.3 par une sphère rouge.

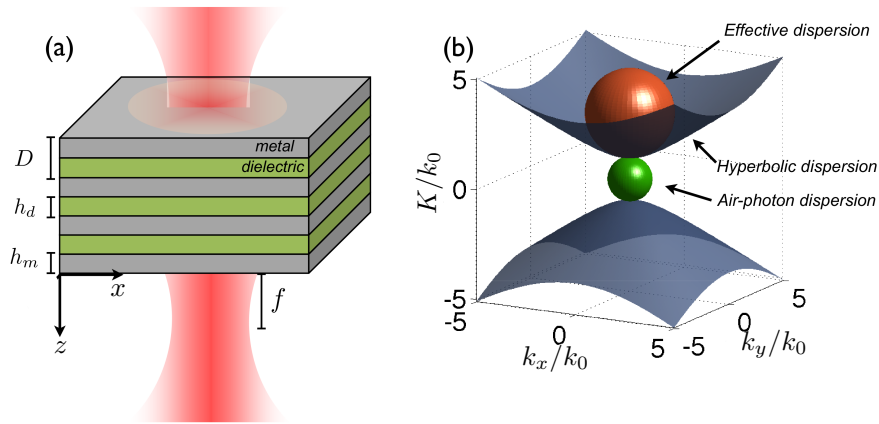


FIGURE III.3 – (a) Principe de focalisation de la lumière pour un métamatériau indéfini constitué d'un empilement multicouche de métal et de film diélectrique. La distance focale est notée f .

(b) Surface de dispersion hyperbolique d'un métamatériau indéfini. La sphère verte représente la relation de dispersion dans l'air, et la sphère rouge représente la relation de dispersion du milieu effectif

Pour un milieu homogène d'indice optique complexe \bar{n} , la relation de dispersion :

$$k_x^2 + \bar{k}_z^2 = (\bar{n}\omega/c)^2 \quad (\text{III.14})$$

Dans ce cas,

$$\bar{\gamma} = -k_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{k}_z}{\partial k_x^2} \Big|_{k_x=0} \right) = \frac{1}{\bar{n}} \quad (\text{III.15})$$

Dans le cas d'un matériau homogène isotrope, dont les courbes sont circulaires, la courbure est l'inverse de l'indice complexe du milieu. Ainsi, pour un milieu optique complexe, la courbure d'une courbe isofréquence est donc équivalente à l'inverse d'un indice effectif.

Les courbes tracées sur la figure III.2 permettent de valider cette approche. Cette figure permet de comparer les parties réelles et imaginaires des courbes isofréquences obtenues selon les différentes approches. Les courbes solides représentent le diagramme de bande exact, obtenu à l'aide d'un empilement métallo diélectrique. Les courbes en pointillés représentent les courbes obtenues par l'approximation paraxiale, données par l'équation (III.12). Enfin, les courbes isofréquences obtenues par la méthode d'homogénéisation sont tracées en sous pointillés. Ces courbes sont calculées pour deux fréquences réduites $\frac{D}{\lambda} = 0.11$ et $\frac{D}{\lambda} = 0.16$, correspondant respectivement au régime d'homogénéisation et au régime diffractif. Cette comparaison montre que l'approximation paraxiale fonctionne dans les deux régimes. Elle donne une meilleure description de la relation de dispersion exacte que celle dérivée de la

théorie d'homogénéisation. De plus, cette description utilisée pour les métamatériaux hyperboliques est valable pour de grandes valeurs de k_x , jusqu'à $2k_0$. Nous pouvons noter une différence à la fréquence réduite de 0.16 pour la partie imaginaire, qui est due à la présence du gap. Ainsi, cette approche paraxiale permet de bien modéliser le métamatériau hyperbolique dans tous les régimes même pour des faisceaux Gaussiens étroits.

Indice effectif et figure de mérite

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, nous pouvons définir un indice effectif complexe \bar{n}_{eff} , qui est équivalent à l'inverse de la courbure $\bar{\gamma}$ d'une courbe isofréquence :

$$\bar{n}_{eff} = n_{eff} + i\kappa_{eff} \quad (\text{III.16})$$

où les paramètres n_{eff} et κ_{eff} désignent l'indice optique et le coefficient d'absorption.

Afin d'étudier et de quantifier les performances optiques des métamatériaux, on définit un paramètre appelé figure de mérite FOM. Ce paramètre est défini par :

$$FOM = \left| \frac{n_{eff}}{\kappa_{eff}} \right| \quad (\text{III.17})$$

Ces deux paramètres peuvent être exprimés en fonction de la courbure complexe des courbes isofréquences.

$$\bar{\gamma} = \Re(\gamma) + i\Im(\gamma) = \frac{1}{\bar{n}_{eff}} \quad (\text{III.18})$$

Lorsque les pertes de l'indice effectif sont faibles $\kappa_{eff} \ll n_{eff}$, les parties réelles et imaginaires de la courbure complexe s'expriment :

$$\bar{\gamma} = \Re(\gamma) + i\Im(\gamma) \approx \frac{1}{n_{eff}} \left(1 - i \frac{\kappa_{eff}}{n_{eff}} \right) \quad (\text{III.19})$$

Dans ce cas, on exprime :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{eff} = \frac{1}{\Re(\bar{\gamma})} \\ FOM = \left| \frac{\Re(\bar{\gamma})}{\Im(\bar{\gamma})} \right| \end{array} \right. \quad (\text{III.20})$$

Finalement, le développement limité du vecteur d'onde de Bloch complexe donné par l'équation (III.12) s'exprime comme :

$$\bar{K} = \bar{K}(0) - \frac{k_x^2}{2k_0} \bar{\gamma} = \bar{K}(0) - \frac{k_x^2}{2k_0} \left(\frac{1}{n_{eff}} - i \frac{1}{FOM |n_{eff}|} \right) \quad (\text{III.21})$$

III.4-b Calcul de l'indice effectif d'un métamatériau hyperbolique en régime d'homogénéisation

Nous montrons que l'indice effectif et la figure de mérite peuvent être directement reliés aux permittivités effectives.

Pour montrer l'influence des pertes optiques, à l'aide de la théorie des milieux effectifs, nous introduisons les pertes métalliques et les pertes du diélectrique dans le modèle :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_m = \varepsilon_m(1 + i\sigma_m) \\ \bar{\varepsilon}_d = \varepsilon_d(1 + i\sigma_d) \\ \sigma_m = \frac{\Im(\varepsilon_m)}{\Re(\varepsilon_m)} = \frac{\Im(\varepsilon_m)}{\varepsilon_m} \\ \sigma_d = \frac{\Im(\varepsilon_d)}{\Re(\varepsilon_d)} = \frac{\Im(\varepsilon_d)}{\varepsilon_d} \end{cases}, \quad (\text{III.22})$$

En supposant que $\sigma_m \ll 1$ et $\sigma_d \ll 1$, et en utilisant les formules d'homogénéisation du système (III.10), les éléments du tenseur de permittivité complexe anisotrope peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x(1 + i\sigma_x) \\ \bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z(1 + i\sigma_z) \end{cases}, \quad (\text{III.23})$$

où, $\sigma_x = \frac{\Im(\varepsilon_x)}{\varepsilon_x}$ et $\sigma_z = \frac{\Im(\varepsilon_z)}{\varepsilon_z}$ tels que :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\varepsilon_m h_m \sigma_m + \varepsilon_d \sigma_d h_d}{\varepsilon_m h_m + \varepsilon_d h_d} \\ \sigma_z = \frac{\frac{h_d \sigma_d + h_m \sigma_m}{\varepsilon_d} + \frac{h_d \sigma_d + h_m \sigma_m}{\varepsilon_m}}{\frac{h_d}{\varepsilon_d} + \frac{h_m}{\varepsilon_m}} \end{cases}, \quad (\text{III.24})$$

En régime d'homogénéisation, on obtient à partir de la relation de dispersion anisotrope complexe $\frac{\bar{K}^2}{\bar{\varepsilon}_x} + \frac{k_x^2}{\bar{\varepsilon}_z} = k_0^2$, la courbure complexe $\bar{\gamma}$:

$$\bar{\gamma} = \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_x}}{\bar{\varepsilon}_z} = \frac{\sqrt{\varepsilon_x} \sqrt{1 + i\sigma_x}}{\varepsilon_z (1 + i\sigma_z)} \quad (\text{III.25})$$

Si nous supposons que les pertes optiques sont faibles $\sigma_x \ll 1$ et $\sigma_z \ll 1$, l'expression de la courbure complexe peut se simplifier,

$$\bar{\gamma} = \frac{\sqrt{\varepsilon_x} \sqrt{1 + i\sigma_x}}{\varepsilon_z (1 + i\sigma_z)} \quad (\text{III.26})$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_x}}{\varepsilon_z} (1 + i\sigma_x)^{\frac{1}{2}} (1 + i\sigma_z)^{-1} \quad (\text{III.27})$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_x}}{\varepsilon_z} \left(1 + \frac{i}{2}\sigma_x\right) (1 - i\sigma_z) \quad (\text{III.28})$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_x}}{\varepsilon_z} \left(1 + \frac{\sigma_x \sigma_z}{2} + i\left(\frac{\sigma_x}{2} - \sigma_z\right)\right) \quad (\text{III.29})$$

Les parties réelles et imaginaires de la courbure complexe s'expriment alors en fonction des pertes optiques :

$$\begin{cases} \Re(\bar{\gamma}) = \frac{\sqrt{\varepsilon_x}}{\varepsilon_z} \left(1 + \frac{\sigma_x \sigma_z}{2}\right) \\ \Im(\bar{\gamma}) = \frac{\sqrt{\varepsilon_x}}{\varepsilon_z} \left(\frac{\sigma_x}{2} - \sigma_z\right) \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

L'indice effectif correspond à l'inverse de la partie réelle de la courbure $\bar{\gamma}$:

$$n_{eff} = \frac{\varepsilon_z}{\sqrt{\varepsilon_x}} \left(1 + \frac{\sigma_x \sigma_z}{2}\right)^{-1} \quad (\text{III.31})$$

Cette équation montre que l'indice effectif est gouverné par le ratio $\frac{\varepsilon_z}{\sqrt{\varepsilon_x}}$ et décroît lorsque les pertes optiques augmentent. Ainsi, l'introduction de pertes optiques dans le milieu diminue la valeur de l'indice effectif.

Le figure de mérite, dans ce régime peut être écrit sous la forme

$$FOM = \left| \frac{\Re(\bar{\gamma})}{\Im(\bar{\gamma})} \right| = \left| \frac{2 + \sigma_x \sigma_y}{2\sigma_y - \sigma_x} \right| \quad (\text{III.32})$$

Seules les pertes optiques influencent le facteur de mérite. On voit que le facteur sera maximal lorsque le terme $|2\sigma_y - \sigma_x|$ sera minimal. Ces relations ne sont a priori valables qu'en régime d'homogénéisation lorsque $\frac{D}{\lambda} \ll 1$. On peut cependant étendre l'étude au régime de diffraction.

III.4-c Calcul de l'indice effectif d'un métamatériau hyperbolique en régime diffractif

Dans ce régime, lorsque les conditions précédentes ne sont plus valables, il est possible de calculer la courbure complexe $\bar{\gamma}$ à partir de la structure de bande complexe exacte plutôt qu'à partir de la relation de dispersion simple d'un milieu indéfini hyperbolique. Pour un métamatériau hyperbolique obtenu avec un empilement métallo diélectrique, la courbure complexe sera définie en dérivant le vecteur d'onde de Bloch complexe :

$$\begin{cases} \Re(\gamma) = -k_0(\partial^2 \Re(\bar{K})/\partial k_x^2)|_{k_x=0} \\ \Im(\gamma) = -k_0(\partial^2 \Im(\bar{K})/\partial k_x^2)|_{k_x=0} \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

où \bar{K} est le vecteur d'onde de Bloch complexe, donné par la relation démontrée dans le premier chapitre (I.18) :

$$\cos(\bar{K} d) = \cos(\bar{k}_{z_d} h_d) \cos(\bar{k}_{z_m} h_m) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{k}_{z_d}}{\bar{k}_{z_m} \eta} + \frac{\bar{k}_{z_m} \eta}{\bar{k}_{z_d}} \right) \sin(\bar{k}_{z_d} h_d) \sin(\bar{k}_{z_m} h_m) \quad (\text{III.34})$$

Ainsi, à l'aide du vecteur d'onde \bar{K} nous avons pu définir un indice effectif n_{eff} ainsi qu'une figure de mérite selon les expressions (III.20). Mais cet indice et ce facteur de mérite n'ont pas d'expression simple et devront être calculés numériquement.

III.5 Relation de conjugaison et résolution optique d'une lentille hyperbolique

L'expression du champ transmis à travers un multicouche dans le cas où l'on peut négliger les réflexions s'écrit :

$$U(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x) T(k_x) t_0(k_x, z) e^{ik_x x} dk_x. \quad (\text{III.35})$$

Le terme $A(k_x)$ représente le spectre angulaire d'un faisceau gaussien incident dans l'espace des vecteurs d'ondes :

$$A(k_x) = W_0 / (2\sqrt{\pi}) \exp(-(k_x W_0 / 2)^2) = \tilde{U}(k_x, 0) \quad (\text{III.36})$$

où W_0 est le waist initial du faisceau gaussien.

La fonction $t_0(k_x, z)$ représente la fonction de transfert liée à la traversée du milieu extérieur, ici l'air, à la sortie de la lentille et sur une distance z . On peut l'écrire

$$t_0(k_x, z) = e^{ik_{z_{air}}z} = e^{iz\sqrt{k_0^2 - k_x^2}} \quad (\text{III.37})$$

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, la composante perpendiculaire du vecteur d'onde dans l'air s'écrit $k_{z_{air}} = k_{z_{air}}(0) - \frac{k_x^2}{2k_0}$, ce qui permet de développer la fonction de transfert $t_0(k_x, z)$,

$$t_0(k_x, z) = e^{ik_0z} e^{-i \frac{k_x^2}{2k_0} z} \quad (\text{III.38})$$

Enfin, $T(k_x)$ correspond au coefficient de transmission de la structure multicouche. Ce coefficient peut être divisé en deux parties, une partie singulière $T^s(k_x)$ et une partie régulière $T^r(k_x)$. La partie singulière $T^s(k_x)$ est donnée par l'expression :

$$T^s(k_x) = \sum_p t_p / (k_x - \bar{k}_x^{(p)}) \quad (\text{III.39})$$

Chaque terme de cette partie singulière correspond à une résonance. Les pôles et résidus associés aux résonances optiques sont notés $\bar{k}_x^{(p)}$ et t_p .

Dans un premier temps, nous supposons que pour des valeurs de k_x faibles, ces résonances sont peu nombreuses et ainsi, que le comportement de l'onde dans la structure est décrit essentiellement par la fonction de transfert régulière.

Intéressons nous maintenant à la partie régulière du coefficient de transmission $T^r(k_x)$. Cette fonction caractérise la phase et l'absorption optique accumulées par le signal lorsqu'il se propage à travers la lentille. On peut l'écrire en faisant intervenir le vecteur d'onde de Bloch $\bar{K}(k_x)$, pour une lentille d'épaisseur e :

$$T^r(k_x, e) = e^{i\bar{K}(k_x)e} \quad (\text{III.40})$$

La relation (III.21) nous permet d'exprimer la partie régulière de la fonction de transfert en fonction de la figure de mérite et de l'indice effectif :

$$T^r(k_x, e) = e^{i\bar{K}(0)e} e^{-\frac{k_x^2}{2k_0} \frac{e}{|n_{eff}|_{FOM}}} e^{-i \frac{k_x^2}{2k_0} \frac{e}{n_{eff}}} \quad (\text{III.41})$$

La fonction de transfert à une distance z , peut s'écrire en terme de phases et de modules :

$$T_{tot}(k_x, z) = T^r(k_x, e) t_0(k_x, z) \quad (\text{III.42})$$

$$= |T^r(k_x, e)| |t_0(k_x, z)| e^{i\Re(\bar{K}_z(0))e} e^{-i \frac{k_x^2}{2k_0} \frac{e}{n_{eff}}} e^{ik_0z} e^{-i \frac{k_x^2}{2k_0} z} \quad (\text{III.43})$$

Les termes e^{ik_0z} et $e^{i\Re(\bar{K}_z(0))e}$ sont des termes de phase que l'on peut négliger.

III.5-a Relation de conjugaison

Nous supposons que la lentille est éclairée par un faisceau gaussien incident à une distance f_o (distance focale objet) dans de l'air, et que l'image se formera à une distance f_i (distance focale image) à la sortie de la lentille, dans l'air également.

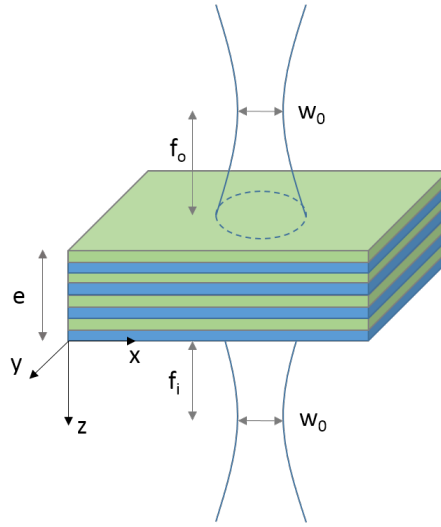


FIGURE III.4 – Faisceau gaussien éclairant une lentille plate constituée d'un empilement métal-diélectrique

Nous noterons L la distance totale entre l'objet et l'image, soit :

$$L = f_o + e + f_i \quad (\text{III.44})$$

Si l'on place le faisceau incident à une distance f_o de la structure, comme indiqué sur la figure III.4, on rajoute alors un déphasage. La fonction de transfert totale à la distance L s'exprime donc :

$$T_{tot}(L) = t_0(f_o) T^r(e) t_0(f_i) \quad (\text{III.45})$$

Pour que la source se refocalise, il faut que la phase totale de la fonction de transfert soit compensée, les termes de phase dépendant de k_x doivent alors vérifier la condition suivante :

$$e^{-i \frac{k_x^2}{2k_0} f_o} e^{-i \frac{k_x^2}{2k_0} \frac{e}{n_{eff}}} e^{-i \frac{k_x^2}{2k_0} f_i} = 1 \quad (\text{III.46})$$

La condition de refocalisation est donc :

$$\sum \frac{d_i}{n_{eff} f_i} = 0 \quad (\text{III.47})$$

La phase totale est compensée, lorsque

$$f_o + \frac{e}{n_{eff}} + f_i = 0 \quad (\text{III.48})$$

Le faisceau retrouve donc son waist initial (on a donc une véritable image) lorsque la relation de conjugaison suivante est satisfaite :

$$\boxed{f_o + f_i = -\frac{e}{n_{eff}}} \quad (\text{III.49})$$

On note que la distance focale est directement liée à l'indice effectif de la relation de dispersion hyperbolique. De plus, pour que la distance focale image soit positive, il faut que l'indice effectif soit négatif.

Cette relation de conjugaison ressemble fortement à la relation de conjugaison obtenue pour des lentilles parfaites de Pendry. En effet, si l'indice effectif est égale à -1 , nous retrouvons la relation $f_o + f_i = e$. Cependant, la relation de conjugaison est liée à la courbure des isofréquences et non à l'indice optique, contrairement à la relation de la lentille de Pendry. La relation est ainsi valable pour toute forme de courbe isofréquence tant que la courbure est négative.

Nous obtenons donc une relation de conjugaison plus générale que celle proposée par Pendry, s'appliquant à des métamatériaux hyperboliques.

Application au régime de canalisation

Dans le régime d'homogénéisation, la relation de dispersion hyperbolique $k_x^2/\bar{\varepsilon}_z + \bar{k}_z^2/\bar{\varepsilon}_x = (\omega/c)^2$ nous permet d'obtenir immédiatement un indice effectif :

$$n_{eff} = \varepsilon_z / \sqrt{\varepsilon_x}. \quad (\text{III.50})$$

Le régime de canalisation proposé par Belov [45], nécessite de travailler avec des courbes isofréquences les plus plates possibles. Ces courbes isofréquences sont obtenues lorsque $\varepsilon_z \rightarrow -\infty$. Selon l'équation (III.49), lorsque $\varepsilon_z \rightarrow -\infty$, l'indice effectif n_{eff} tend vers l'infini, et la distance focale tend vers zéro. La relation de conjugaison (III.49) explique donc la localisation de l'objet et de l'image dans une telle lentille à proximité des interfaces de la lentille.

De son côté, Scalora [49] a montré qu'il était possible de focaliser la lumière à une distance d'une demi longueur d'onde avec une lentille hyperbolique. La relation (III.49) permet également d'expliquer ce phénomène.

III.5-b Résolution

Nous allons maintenant montrer que la résolution dépend directement du facteur de mérite. Nous supposons que le faisceau incident est collé à l'interface de la lentille, ainsi $f_o = 0$ et on note $f = f_i$ la distance focale image. La relation de conjugaison dans ce cas, s'écrit : $f = -\frac{e}{n_{eff}}$.

Lorsque le faisceau se refocalise à une distance focale f , la phase introduite par la lentille a compensé celle produite par la propagation dans l'air. La fonction de transfert totale donnée par l'équation (III.43) devient alors :

$$T_{tot}(k_x, z) = |T^r(k_x, e)| |t_0(k_x, z)| \quad (\text{III.51})$$

Et le champ transmis à la distance focale f s'écrit :

$$U^r(x, f) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x) |T^r(k_x)| |t_0(k_x, f)| e^{ik_x x} dk_x \quad (\text{III.52})$$

Pour obtenir une résolution parfaite, nous devons retrouver à la distance focal le champ initial, ce qui arrive lorsque :

$$|T^r(k_x)| |t_0(k_x, f)| = 1 \quad (\text{III.53})$$

Où $|t_0(k_x, f)| = e^{-f\sqrt{k_x^2 - k_0^2}}$ pour $k_x > k_0$.

Cette condition porte aussi sur les ondes évanescentes.

Si nous regardons l'expression de $|T^r(k_x)|$:

$$|T^r(k_x)| = e^{-\Im(\bar{K}_z(0))e^{-\frac{k_x^2}{2k_0} \frac{e}{|n_{eff}|FOM}}} \quad (\text{III.54})$$

Nous pouvons constater que les ondes évanescentes sont diminuées après leur propagation à travers la lentille. Ce phénomène est donc contraire à celui des lentilles parfaites qui prévoit que le champ évanescent soit amplifié à l'intérieur de la lentille. Nous pouvons également constater que cette fonction de transfert, à partir de laquelle nous pourrions déduire la résolution, s'exprime directement en fonction de l'indice effectif n_{eff} , et du facteur de mérite FOM. La résolution est donc pilotée par la partie imaginaire de la courbure, c'est à dire les pertes optiques. Ainsi, une façon optimale de transporter efficacement les détails sous longueurs d'onde est de choisir une valeur de facteur de mérite élevée.

III.6 Application au design de la lentille

Dans la partie précédente nous avons introduit toutes les notions nécessaires pour construire une lentille plate à base de métamatériaux hyperboliques et développer une théorie permettant de comprendre son fonctionnement. Ainsi, la distance focale peut être prédite en fonction de la structure étudiée. A l'aide de la relation de dispersion (I.18), il est également possible de faire une étude de la transmission de façon à optimiser la lentille. Nous avons également montré que la résolution d'une telle lentille dépend de l'indice effectif de l'empilement mais aussi de la figure de mérite. A l'aide de ces outils théoriques, nous allons essayer de fournir une structure optimale en termes de résolution.

III.6-a Courbes isofréquences et indices effectifs

Nous cherchons à construire une lentille plate à l'aide d'un empilement métallo-diélectrique. Dans un premier temps, nous allons observer les courbes isofréquences d'un empilement de diamant et d'argent en tenant compte des pertes. Ces courbes isofréquences, représentant les couples (K, k_x) qui sont solutions de la relation de dispersion, seront tracées numériquement à partir de la relation de dispersion d'une structure multicouche (I.18). La figure III.5 montre trois courbes isofréquences tracées à des fréquences réduites $(\frac{D}{\lambda})$ différentes. On observe que les courbes sont hyperboliques, et que leur courbure varie en fonction de la fréquence réduite.

Dans la suite de cette étude, la longueur d'onde est considérée comme fixe, seule la période D varie. Cette période représente l'épaisseur totale d'une période du cristal, constituée d'une couche d'argent et d'une couche de diamant. Le régime de canalisation correspond à la fréquence réduite de 0.05 (période 20 fois plus faible que la longueur d'onde). La courbe isofréquence n'est pas plate, comme annoncée par les travaux de P.Belov. Cette différence est due à l'introduction des pertes optiques dans le modèle, et montre leur impact négatif. Dans ce cas, la courbure est inversée pour les faibles valeurs de k_x , le faisceau ne pourra se refocaliser après la lentille.

Au delà du régime de canalisation, dans le régime de diffraction $(\frac{D}{\lambda} > 0.1)$, la courbure augmente avec la fréquence réduite. En effet, à la fréquence réduite 0.1, la courbe isofréquence

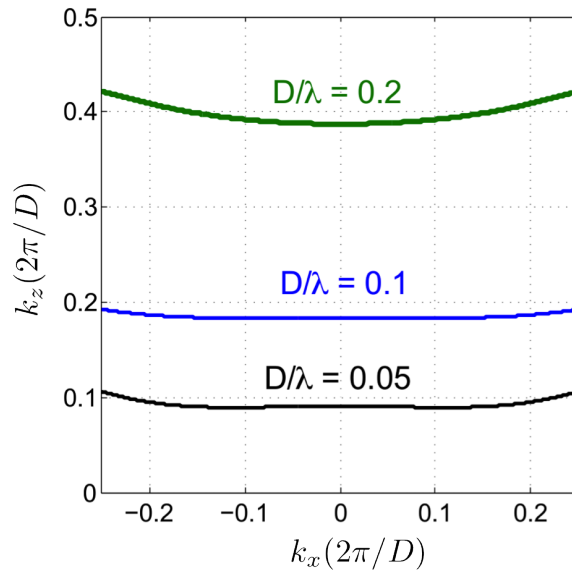


FIGURE III.5 – Courbes isofréquences tracées pour un empilement Argent/ Diamant avec les pertes optiques, pour différentes fréquences réduites.

est plate, puis la courbure augmente au delà. L'indice effectif étant l'inverse de la courbure des CIF, il va donc tendre vers l'infini pour une fréquence réduite de 0.1 puis diminuer avec la fréquence réduite. La figure III.6 représente l'indice effectif, calculé numériquement à l'aide des courbes isofréquences, en fonction de la fréquence réduite, permettant une étude plus détaillée. La courbe montre que l'indice effectif est positif en régime de canalisation, alors qu'on attendait des courbes isofréquences plates. Ceci est dû aux pertes optiques. Ensuite, au delà du régime de canalisation, l'indice varie de l'infini jusqu'à zéro, cette dernière limite correspondant au gap entre la première et la deuxième bande.

La figure III.7 représente la distance focale en fonction de la fréquence réduite obtenue à partir des indices effectifs et de la relation de conjugaison (III.49). Elle montre que la distance focale augmente avec la fréquence réduite. Cette large variation d'indice effectif nous permet d'appréhender le comportement de la lentille en fonction de la fréquence réduite. Cette nouvelle approche nous permet d'évaluer théoriquement la distance focale d'une lentille plate, distance qui peut varier de zéro pour les faibles valeurs de fréquence réduite à une longueur d'onde pour les plus hautes.

III.6-b Optimisation de la transmission

Optimisation de la structure

La condition (III.11) pour obtenir une relation de dispersion hyperbolique nous montre l'importance de choisir un fort contraste de permittivité. En effet, un contraste assez élevé nous autorise un rapport de forme assez faible, ce qui diminue considérablement la quantité de métal présente dans la lentille et ainsi minimise les pertes optiques. La structure étudiée ici est un empilement métallo diélectrique de 20 couches de diamant et d'argent représenté sur la figure III.8.

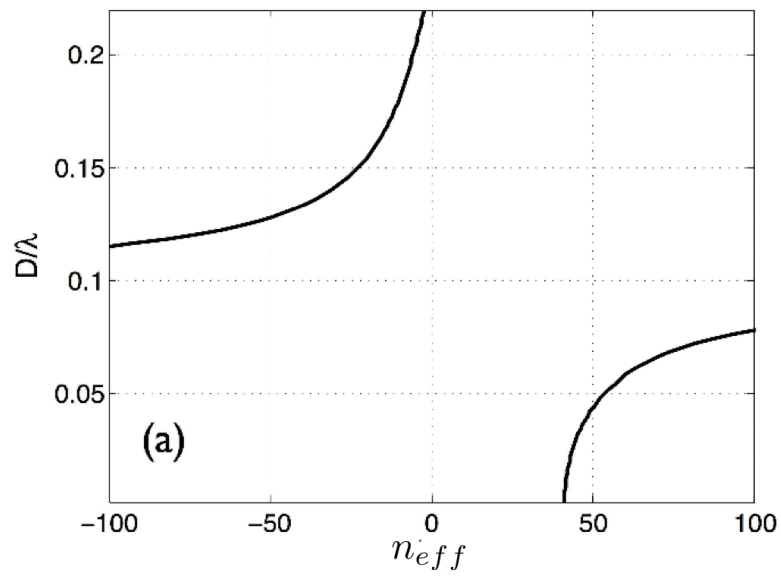


FIGURE III.6 – Évolution de l'indice effectif avec la fréquence réduite pour un empilement Argent/Diamant avec pertes optiques.

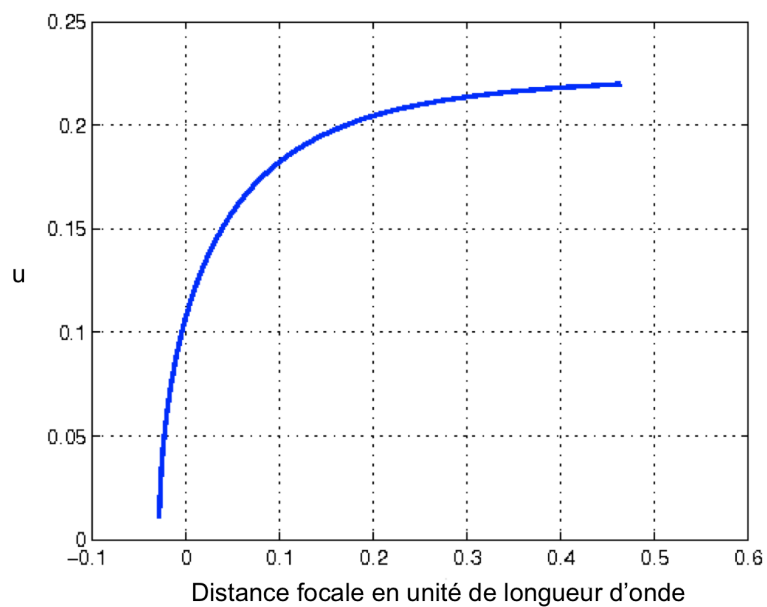


FIGURE III.7 – Représentation de la distance focale en fonction de la fréquence réduite pour un empilement Argent/Diamant avec pertes optiques.

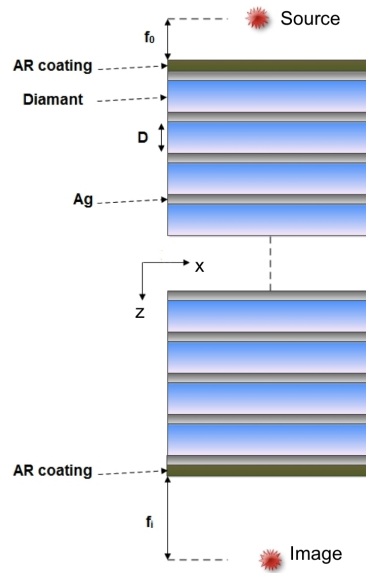


FIGURE III.8 – Lentille plate à base de métamatériaux hyperboliques

Nous travaillerons à une longueur d'onde fixée de 350 nm. A cette longueur d'onde, la permittivité de l'argent est $\bar{\epsilon}_m = -1.78 + 0.6$ [92]. La permittivité du diamant sera notée $\bar{\epsilon}_d = 5.08$. Avec ce choix de permittivité, nous prendrons le facteur de forme le plus faible soit :

$$\frac{h_m}{h_d} = 0.35 \quad (\text{III.55})$$

Ce facteur de forme permet en général une bonne transmission, représentée sur la figure III.9. Cette transmission a été améliorée en ajoutant des couches anti réfléchissantes de diamant d'une épaisseur de $\frac{\lambda}{10\sqrt{\bar{\epsilon}_d}}$, placées de part et d'autre des bords de la lentilles. Grâce à ces couches anti-reflet, la transmission tracée en fonction de la fréquence réduite (mais toujours à longueur d'onde fixe) est désormais supérieure à 20 % III.9.

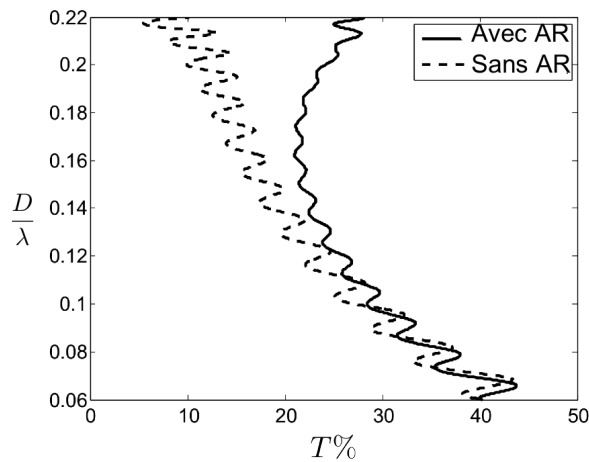


FIGURE III.9 – Diagramme de transmission d'une lentille hyperbolique avec et sans couches antireflechissantes.

Résultats

Pour valider la relation de conjugaison, nous comparons les résultats obtenus par la relation (III.49) à une simulation numérique directe de la propagation d'un faisceau lumineux à travers la structure. Cette simulation est basée sur un algorithme de matrices S [65].

La structure est éclairée avec un faisceau gaussien dont le waist de $\frac{\lambda}{5}$ est à une distance focale objet de $0,1D$. La courbe donnant la position du foyer en fonction de la fréquence réduite, représentée sur la figure III.7 obtenue à l'aide de la relation de conjugaison donnée par la relation (III.49), indique que pour construire, par exemple, une lentille plate à base d'argent et de diamant, et obtenir une image à une distance focale d'une longueur d'onde, il faut se placer à une fréquence réduite de 0.2. La longueur d'onde étant fixe et égale à 350 nm, cette valeur correspond à une période (Argent + Diamant) de 70 nm. Nous avons choisi pour cette étude un facteur de forme de 0.35, ce qui donne une épaisseur d'argent de $18.1nm$ et une épaisseur de diamant de $51.8nm$. Nous traçons, la carte du champ magnétique se propageant dans une telle structure :

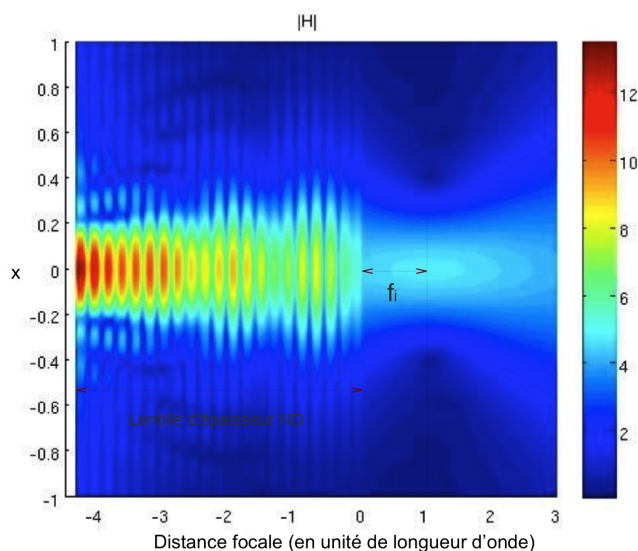


FIGURE III.10 – Carte du champ magnétique à travers une lentille plate permettant une refocalisation à une longueur d'onde.

La figure III.11 permet de visualiser et calculer la distance focale image. En accord avec la théorie, celle-ci se situe à une longueur d'onde de la sortie de la lentille. Le profil de l'intensité du champ magnétique, donne accès à la résolution, mais cette étude sera faite par la suite.

Cette approche a été menée pour un ensemble de points dans le but de comparer la distance focale image obtenue à l'aide de la relation de conjugaison, et celle obtenue à l'aide de la simulation numérique. Ces résultats rassemblés sur la figure III.11 sont parfaitement en accord, ce qui valide le modèle de la relation de conjugaison. Nous constatons effectivement que les pertes optiques ont pour effet de diminuer la distance focale image. Et en tenant compte des pertes optiques de l'argent, la distance focale d'une lentille hyperbolique peut effectivement prendre des valeurs comprises entre zéro et une longueur d'onde.

Il est intéressant dans ce cas, d'étudier la qualité des images (la résolution) obtenues en

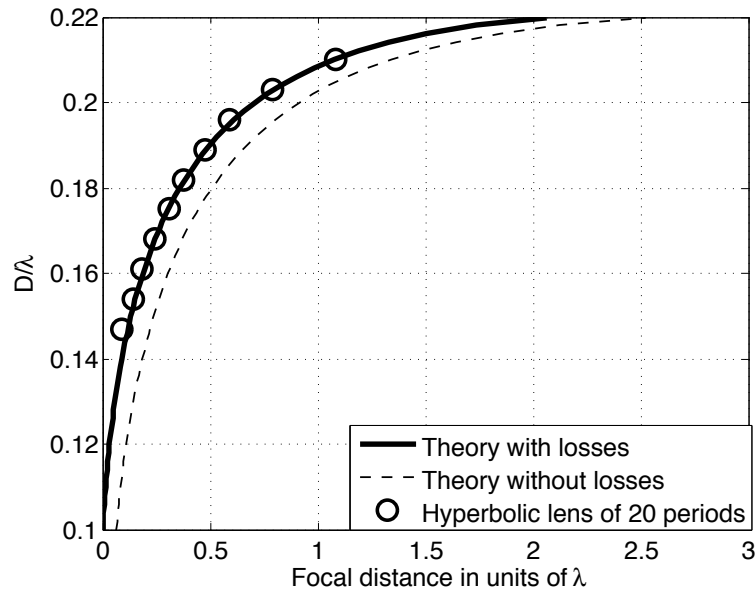


FIGURE III.11 – Distance focale en fonction de la fréquence réduite pour une lentille plate constituée de 20 périodes d’argent et de diamant, à 350 nm. La ligne pleine correspond aux valeurs obtenues avec la relation de conjugaison théorique lorsque les pertes sont prises en compte. La ligne en pointillé représente le cas où les pertes sont négligées. Les cercles correspondent aux distances focales obtenues par simulation numérique.

fonction des distances focales possibles. La figure III.12 permet d’observer l’évolution de la qualité de l’image en fonction de la distance focale. Nous avons tracé les cartes du champ magnétique à la sortie de la lentille dont l’image se focalise à différentes distances focales $f_i = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \lambda$ correspondant à des périodes respectives $D = \{35, 59, 66, 70\}$ nm. L’évolution des cartes de champ indiquent que la résolution diminue avec la distance focale. Après calcul à partir du profil d’intensité du champ magnétique, la résolution sous longueur d’onde est obtenue jusqu’à une distance focale de 0.7λ . Nous ferons une étude plus poussée concernant la résolution dans la partie suivante.

Dans cette partie, nous avons choisi d’optimiser la structure dans le but d’augmenter la transmission - ce que nous avons fait en choisissant un facteur de forme le plus faible, tout en respectant les conditions pour obtenir une lentille hyperbolique. Le cas de figure où la structure permet d’obtenir une image à une distance de une longueur d’onde, nécessite une période de 70 nm, ce qui correspond avec le facteur de forme à une épaisseur de structure totale (20 couches) de 1400 nm, avec seulement 369 nm de métal. Cet écart métal-structure permet ainsi de construire des lentilles avec des distances focales de l’ordre d’une longueur d’onde tout en conservant une transmission supérieure à 25%.

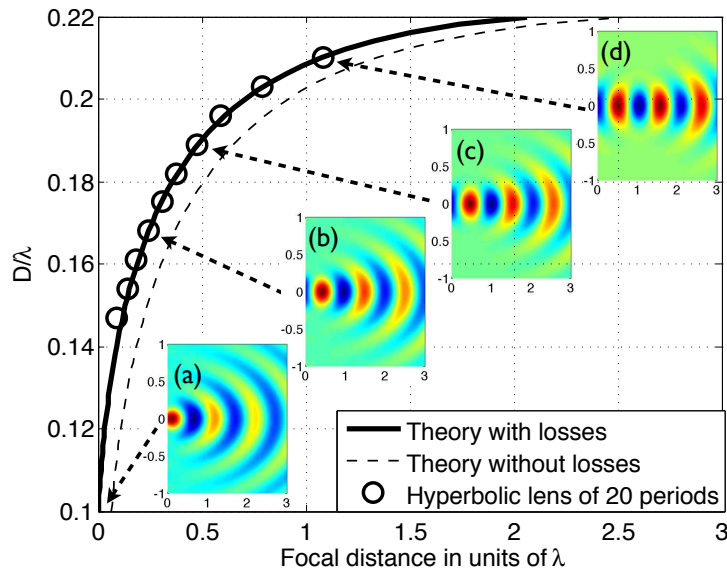


FIGURE III.12 – Distance focale en fonction de la fréquence réduite pour une lentille plate constituée de 20 périodes d’argent et de diamant, à 350 nm. La ligne pleine correspond aux valeurs obtenues avec la relation de conjugaison théorique lorsque les pertes sont prises en compte. La ligne en pointillé représente le cas où les pertes sont négligées. Les cercles correspondent aux distances focales obtenues par simulation numérique.

(a-d) Cartes du champ magnétique à la sortie de lentille pour différentes fréquences réduites. L’axe des abscisses est en unité de longueur d’onde. Les images sont focalisés à des distances focales de $0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \lambda$.

III.6-c Résolution optimale

Nous avons montré qu’il était possible de construire des lentilles plates à base de métamatériaux hyperboliques, et que ce type de lentille pouvait être optimisé de façon à obtenir une distance focale jusqu’à une longueur d’onde tout en conservant une transmission supérieure à 20 %, mais jusqu’à présent nous n’avons pas cherché à optimiser la résolution.

D’après Pendry [2], un métamatériau main gauche d’indice -1 permettrait d’obtenir une résolution parfaite. Une démonstration expérimentale d’un métamatériau main gauche constitué d’un empilement d’argent et de TiO_2 a été récemment publiée [84]. La structure est périodique (3 motifs) et basée sur un motif complexe (Argent- TiO_2 -Argent- TiO_2 -Argent). Selon les auteurs, leur structure est un métamatériau main gauche d’indice effectif -1, permettant d’obtenir des images dans l’ultra violet, mais la résolution sub longueur d’onde ne serait pas obtenue à cause des pertes optiques.

Nous proposons ici une structure similaire mais plus simple que celles proposées par ces auteurs : un empilement périodique d’argent et de TiO_2 [92, 93] afin de construire entre autre un métamatériau d’indice -1. Nous allons chercher à optimiser la structure pour obtenir une résolution sous longueur d’onde à une distance focale allant au delà de $\frac{\lambda}{4}$ (limite dans l’air).

La construction d’une lentille plate optimale est guidée par l’indice effectif et la figure de mérite, tous deux obtenus par variation du facteur de forme $\frac{h_m}{h_d}$, où h_d sera l’épaisseur d’une couche de TiO_2 et h_m l’épaisseur d’une couche métallique, et variation de la longueur d’onde.

La résolution optique d'un métamatériau indéfini est directement obtenue à partir de la fonction de transmission, elle même directement reliée à la figure de mérite FOM, et à la distance focale, selon l'expression obtenue précédemment (III.54) :

$$|T^r(k_x)| = e^{-\Im(\bar{K}_z(0))e} e^{-\frac{k_x^2}{2k_0} \frac{e}{|n_{eff}|^{FOM}}} \quad (\text{III.56})$$

Cette expression montre qu'une figure de mérite élevée permet un transport de détails sous longueur d'onde efficace jusqu'à la sortie de la lentille. Ce mécanisme est alors capable d'augmenter la résolution optique. On peut ainsi augmenter la distance focale jusqu'une longueur d'onde tout en conservant une image super résolue. Il sera donc très intéressant de chercher une structure avec un FOM le plus grand possible afin d'optimiser la résolution. Cette figure de mérite et l'indice effectif de la structure définis dans la section précédente par la relation (III.20) sont obtenus à partir du diagramme de bande complexe pour un empilement d'argent et de TiO_2 , par variation du facteur de forme $\frac{h_m}{h_d}$ et de la longueur d'onde λ à des fréquences réduites fixes ($\frac{D}{\lambda}$).

La figure III.13 représente les cartes de la figure de mérite et de l'indice effectif pour deux fréquences réduites $\frac{D}{\lambda} = 0.11$ et $\frac{D}{\lambda} = 0.16$. Les courbes iso indices de valeur -1 , -2.5 , -5 , sont superposées sur les deux cartes de la figure de mérite.

Ces cartes montrent que les indices effectifs peuvent prendre une valeur allant de -1 à -10 pour des facteurs de forme variant de 0 à 5 et des longueurs d'onde comprises entre 330 et 420 nm. Ces indices effectifs augmentent en valeur absolue avec la longueur d'onde pour un facteur de forme constant. Il est donc bien possible d'obtenir un métamatériau d'indice effectif -1 , à partir d'un empilement périodique d'argent et de TiO_2 sans pour autant que ce soit un milieu de permittivité et de perméabilité effectives -1 . Chaque point de la courbe iso-indice -1 correspond à un milieu différent mais ils se comportent tous pour un faisceau comme un milieu d'indice effectif -1 .

La taille de la courbe iso indice -1 augmente lorsque la fréquence réduite augmente. Dans ce cas, les possibilités pour construire un métamatériau d'indice -1 sont plus nombreuses. Il a cependant été montré que la résolution est gouvernée par la figure de mérite. Le figure de mérite doit être élevée pour une meilleure résolution. Pour optimiser la résolution d'une telle structure, nous cherchons alors parmi tous les couples solutions de la courbe iso indice, ceux ayant un facteur de mérite le plus élevé.

Les cartes de figure de mérite montrent que la FOM construite à partir des permittivités complexes de l'argent et du TiO_2 est optimale à une fréquence réduite de 0.11 , pour une longueur d'onde de 400 nm et un facteur de forme de 1.3 . Ainsi, avec ces deux cartes, tous les éléments sont réunis pour choisir les paramètres de la structure dans le but d'obtenir un métamatériau d'indice effectif choisi avec une résolution optimale.

Prenons l'exemple du métamatériau d'indice -1 . La superposition de la courbe iso indice -1 et des cartes de facteur de mérite montre que le point de la courbe ayant un facteur optimal égale à 2 , est obtenue pour une longueur d'onde de 358 nm, et un facteur de forme de 1.07 . Ce qui correspond aux épaisseurs d'argent $h_m = 28nm$ et de TiO_2 $h_d = 30nm$. Ces paramètres sont très proche des paramètres utilisés dans la démonstration expérimentale proposée par T.Xu et al [84].

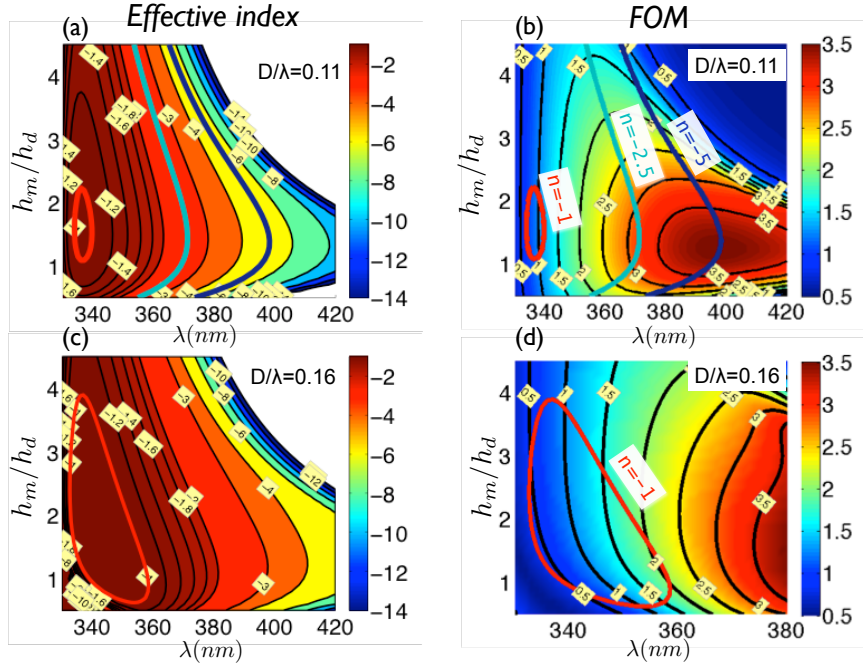


FIGURE III.13 – Cartes d'indice effectif ((a), (b)) et figure de mérite ((c), (d)) en fonction de la longueur d'onde et du facteur de forme métal/diélectrique pour deux fréquences réduites $\frac{D}{\lambda} = 0.11$ et $\frac{D}{\lambda} = 0.16$. Les courbes iso indices -1 , -2.5 , -5 (respectivement rouge, vert et bleu), sont superpos es aux cartes de la figure de mérite.

Cependant, la résolution étant optimale pour une figure de mérite  lev e, il est intéressant d'étudier la résolution sur un cas présentant une figure de mérite deux fois plus grand. Ce qui est possible pour une fréquence réduite de 0.11. La figure de mérite est plus grand que 4, mais elle est obtenue pour une courbe iso indice de -5 à une longueur d'onde de 398 nm et pour un facteur de forme de 1.28 nm.

Nous allons maintenant comparer la résolution obtenue pour ces deux structures optimales. L'étude de la résolution est faite à partir de la fonction de transfert paraxiale $T^p = |T^r(k_x)| |t_0(k_x, f)|$, avec

$$|T^r(k_x)| = e^{-\Im(\bar{K}_z(0))} e^{-\frac{k_x^2}{2k_0} \frac{e}{|n_{eff}|^{FOM}}} \quad (\text{III.57})$$

Dans notre modèle, l'influence de la transmission singuliere contr l e par les résonances a été n glig e, et la transmission régulière d riv e du modèle paraxial est suppos e prévoir le comportement général de la propagation du faisceau lumineux dans la structure. Pour valider ce modèle, la fonction de transfert exacte a été calcul e avec une méthode basée sur les matrices S [65] et compar e à l'approche paraxiale sur la figure III.14. La ligne solide représente la fonction de transfert exacte, et les lignes en pointillé correspondent à la fonction de transfert paraxiale. Les premières observations semblent valider le modèle de la fonction de transfert paraxiale.

Ces courbes ont été trac es pour les deux cas définis précédemment, soit pour les indice effectifs -1 et -5 . Nous appellerons ces cas respectivement IM^{-1} et IM^{-5} .

Nous avons choisi d'étudier trois cas sur la figure III.14, en traçant pour chaque cas la fonction de transfert à travers la lentille, l'intensité du profil gaussien à la distance focale et la carte du champ magnétique en sortie de lentille. Le premier cas ((a)-(c)) et deuxième cas ((d)-(f)) correspondent respectivement à l'étude de l'indice effectif IM^{-1} et IM^{-5} , lorsque la distance focale image est de $\frac{\lambda}{2}$. Le troisième cas ((g)-(i)), représentera uniquement le cas IM^{-5} , mais pour une structure présentant un foyer image très faible de $\frac{\lambda}{17}$. D'après la relation (III.49) et l'indice effectif étant fixé, pour obtenir la distance focale souhaitée selon le cas, il suffit d'augmenter ou de diminuer le nombre de période de l'empilement.

Le faisceau gaussien initial est défini avec un waist sous longueur d'onde de $\frac{\lambda}{20}$, focalisé sur l'interface d'entrée de la lentille. Les courbes (a) et (d) montrent que la pente de la fonction de transfert diminue lorsque la figure de mérite est plus élevée. Les trois premières courbes (a), (d), (g), font apparaître des oscillations autour de $k_x = \pm 1.2k_0$. Ces oscillations correspondent aux pôles de la partie singulière. Ces résonances sont limitées aux bords de l'interface de sortie de la lentille, mais selon les cartes de champ magnétique (c) et (f), elles interviennent uniquement pour le métamatériau d'indice effectif -5 . Bien que ces modes de surfaces ne soient pas pris en compte dans le modèle de la fonction de transfert paraxiale, les courbes (b), (c), (h) qui représentent le profil d'intensité du champ à la distance focale, sont en parfait accord avec le modèle exact rigoureux. Ceci valide définitivement le modèle paraxial. A partir de ces courbes, une étude sur la résolution est menée à partir de la largeur à mi hauteur des profils d'intensité.

Ces résultats montrent que la résolution est sous longueur d'onde avec une valeur de $\frac{\lambda}{2.7}$ pour le métamatériau d'indice effectif -5 , alors qu'elle est seulement de $\frac{\lambda}{1.9}$ pour le métamatériau d'indice effectif -1 , pour une distance focale image de $\frac{\lambda}{2}$ du bord. La figure de mérite est deux fois plus importante pour le métamatériau d'indice -5 que pour celui d'indice -1 , ce qui montre bien que la résolution est très fortement liée au facteur de mérite.

Les courbes de la figure III.15 représentent la résolution optique en fonction de la distance focale exprimée en unité de longueur d'onde. La courbe rouge représente les résultats obtenus pour le métamatériau d'indice -5 avec un facteur de mérite de 4, et la courbe bleue, sont obtenus avec le métamatériau d'indice effectif -1 , présentant un facteur de mérite de 2. La super résolution est obtenue pour le métamatériau d'indice -5 jusqu'à une distance focale proche d'une longueur d'onde au delà du régime de canalisation. Elle est optimale avec une valeur de $\frac{\lambda}{6}$ lorsque l'image est placée sur l'interface de sortie de la lentille. Ceci correspond aux cartes (g), (h), (i) de la figure III.14.

La résolution obtenue avec un métamatériau d'indice effectif -1 , dont la figure de mérite est plus faible ne permet pas d'obtenir les mêmes résultats. La résolution sous longueur d'onde est obtenue jusqu'à une distance de $\frac{\lambda}{3}$, qui correspond à un empilement de 3 périodes. Au delà de cette distance les détails sous longueur d'onde transportés par les grandes valeurs de k , sont complètement perdus à cause des pertes optiques.

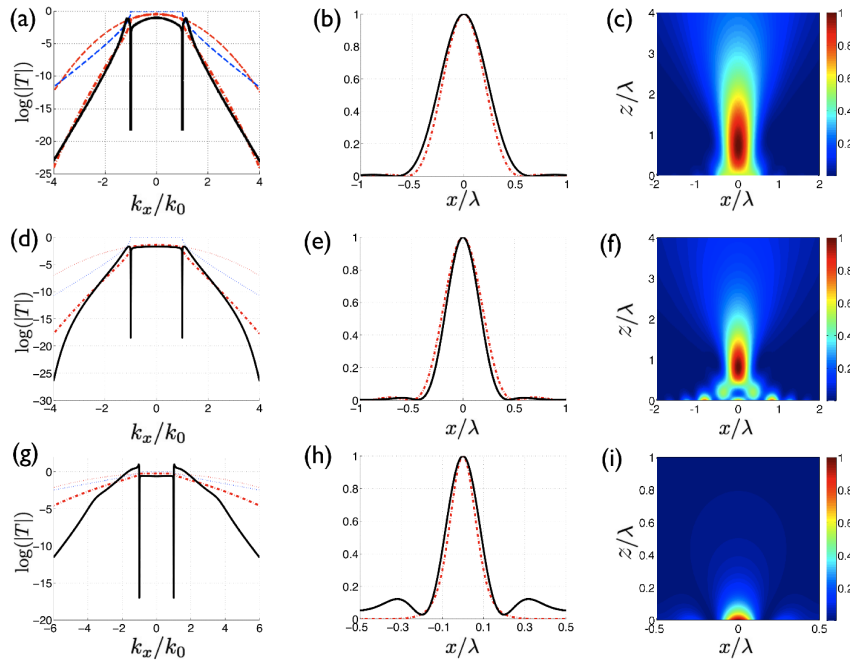


FIGURE III.14 – (a)(d)(g) : Logarithme de la fonction de transfert, (b)(e)(h) Intensité du profil gaussien obtenue à la distance focale. Les courbes pleines et pointillé correspondent respectivement à la fonction de transfert exacte et à la fonction de transfert T^p paraxiale. (c)(f)(i) représente les cartes du champ magnétique à la sortie de la structure. (a)-(f) : Cas IM^{-1} et IM^{-5} tracés à une distance focale de $\frac{\lambda}{2}$ et (g)-(i) Cas IM^{-5} pour une distance focale de $\frac{\lambda}{17}$.

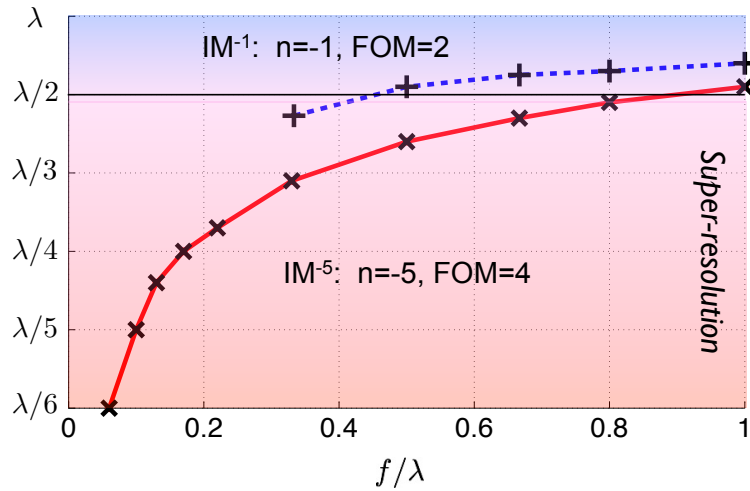


FIGURE III.15 – Résolution optique en fonction de la distance focale (en unité de longueur d'onde) pour les matériaux d'indice effectif -1 et d'indice effectif -5 .

Ces résultats démontrent l'importance du facteur de mérite pour le transport des évanescents et ultimement, pour la résolution des lentilles hyperboliques. L'augmentation du facteur de mérite permet d'optimiser le champ régulier, et il augmente aussi la contribution du champ singulier. Le champ singulier s'accompagnant d'une certaine amplification des évanescents, il contribue lui aussi à la super résolution.

III.7 Conclusion

Nous avons montré qu'on pouvait considérer une épaisseur d'un matériau hyperbolique bien choisi comme une véritable lentille. Ce type de lentille est capable de faire une image d'un objet qui ne soit pas collée à la lentille, et nous avons montré qu'on pouvait écrire une relation de conjugaison pour les lentilles hyperboliques [94]. Nous avons proposé un formalisme pour décrire la propagation de la lumière dans la structure hyperbolique, et mis en évidence le rôle crucial joué par l'indice effectif et le facteur de mérite.

D'autre part, nous avons montré qu'il y avait une place importante à accorder à l'optimisation de la structure en se basant directement sur le formalisme que nous avons introduit - notamment en maximisant la figure de mérite [95]. C'est ainsi qu'on peut obtenir des transmissions réellement élevées (de l'ordre de 20%), ou conserver une super résolution jusqu'à une distance de λ de la lentille. Les résultats expérimentaux récemment publiés dans Nature [84] ne correspondent donc pas encore à une limite ultime en ce qui concerne la résolution, contrairement à ce que les auteurs laissent entendre.

La description classique des métaux d'un point de vue optique est basée sur le modèle de Drude, qui néglige toute forme d'interaction entre électrons à l'intérieur du métal. Prendre en compte ces interactions conduit à décrire les métaux comme des milieux non-locaux, pour lesquels la polarisation du milieu en un point donné ne dépend plus seulement du champ électrique en ce point. Les structures étudiées dans les chapitres précédents sont composées de matériaux métalliques très minces qui peuvent être, à ces épaisseurs, sensibles à la non localité [96, 97, 98]. Dans cette partie, nous allons décrire de façon analytique et numérique l'impact de la non localité sur des empilements métallo diélectriques. Notre étude s'appuiera sur le modèle hydrodynamique, permettant dans ce cas de prendre en compte la réponse fondamentalement non-locale des électrons liés.

La première partie décrit brièvement le modèle hydrodynamique et la conséquence de la non localité sur la forme des champs électriques et magnétiques au sein de la structure. Une relation de dispersion pour des empilements périodiques métallo-diélectriques est ensuite proposée, en tenant compte de la non-localité. Enfin, nous adaptons l'algorithme des matrices de diffusion au cas non-local. Cette adaptation nous permet de simuler plus rigoureusement le comportement des structures considérées, y compris dans le cas où elles ne sont pas périodiques. Cette étude nous permet dans la dernière partie d'estimer l'impact de la non-localité sur la valeur de la distance focale d'une lentille plate ou encore sur la conception d'une lentille d'indice -1 récemment publiée[84].

Sommaire

IV.1 Nécessité du modèle hydrodynamique	77
IV.1-a Historique	77
IV.1-b Modèle hydrodynamique	78
IV.2 Ondes transverses et ondes longitudinales	79
IV.2-a Cas de la polarisation transverse électrique	80
IV.2-b Cas de la polarisation transverse magnétique	80
Ondes Transversales	81
Ondes longitudinales	81
Forme générale des champs	82
IV.2-c Condition aux limites supplémentaires	82
IV.3 Relation de dispersion pour un empilement métallo diélectrique	83
IV.3-a Expressions des champs électriques et magnétiques	83
IV.3-b Relations nécessaires	84
Dans le diélectrique	84

Dans le métal	84
Conditions aux limites	84
Conditions aux limites supplémentaires	85
IV.3-c Système d'équations complet	86
IV.3-d Résolution du système	86
Expression de $H_{y_d}(h_m)$	87
Expression de $E_x(h_m)$	87
Expression des champs $H_{y_d}(h_d + h_m)$ et $E_x(h_m + h_d)$	87
Expression de C_{11}	88
Expression de C_{12}	88
Expression de C_{21}	88
Expression de C_{22}	88
IV.3-e Pseudo-périodicité	89
IV.3-f Expression de la relation de dispersion	90
IV.4 Formalisme des matrices S	90
IV.4-a Matrice de passage à l'interface diélectrique \rightarrow métal	90
Expression de A_i^-	91
Expression de B_{i+1}^+	92
Expression de D_{i+1}^+	92
Expression de la matrice interface du diélectrique au métal	92
IV.4-b Matrice de passage à l'interface du métal \rightarrow diélectrique	93
Expression de A_i^-	94
Expression de C_i^-	94
Expression de B_{i+1}^+	94
Expression de la matrice interface du métal au diélectrique	94
IV.4-c Matrices de Couche	95
Dans le diélectrique	95
Dans le métal	95
IV.4-d Méthode de cascading	95
IV.5 Impact de la non localité sur une lentille plate hyperbolique	96
IV.5-a Formule d'homogénéisation	97
IV.5-b Impact de la non localité sur la distance focale	100
IV.5-c Impact de la non localité sur la résolution	102
IV.6 Conclusion	102

IV.1 Nécessité du modèle hydrodynamique

IV.1-a Historique

Les métamatériaux reposent souvent sur l'utilisation de milieux métalliques. Les caractéristiques optiques de ces derniers sont largement dominées par la réponse des électrons de conduction. Un morceau de métal est ainsi essentiellement un plasma conducteur pour la lumière.

Généralement la dynamique des électrons de conduction est le plus souvent approximée par le modèle de Drude, développé il y a plus d'un siècle, mais toujours pertinent. La permittivité d'un milieu dans le cadre de ce modèle est donnée par

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}, \quad (\text{IV.1})$$

où ω_p est la fréquence de plasma et τ le temps de collision. Le modèle de Drude permet d'expliquer la plupart des phénomènes qui peuvent intervenir en présence de métaux, comme les modes de surfaces propres aux structures plasmoniques (plasmons de surface).

Mais il n'en donne pas une description suffisamment précise. La réponse d'un métal ou d'un semi-conducteur hautement dopé est plus complexe, et le modèle de Drude ne suffit plus. C'est particulièrement vrai lorsque la taille des structures métalliques considérées se rapproche du nanomètre. A cette échelle, les interactions entre les électrons de conduction ne peuvent plus être négligées, comme c'est le cas dans le modèle de Drude [4, 99]. Tenir compte de ces interactions impose de considérer le milieu comme non-local : le champ \vec{D} en un point ne dépend plus seulement du champ électrique en ce même point, mais du champ électrique environnant. On ne peut donc plus simplement décrire le métal en utilisant une simple permittivité. D'autres phénomènes, d'origine quantique, peuvent aussi intervenir [100]. Une nouvelle modélisation de la réponse des métaux devient clairement nécessaire.

Un des modèles les plus simples proposé pour prendre en compte la non-localité est le modèle hydrodynamique, développé par la communauté des plasmas, et étendu à l'optique dans les années 60 [101]. Le gaz d'électrons est alors décrit comme un fluide confiné dans le métal et obéissant à une équation de Navier-Stokes. Dans celle-ci apparaît un terme de pression qui prend en compte à la fois l'interaction coulombienne entre électrons et l'interaction d'échange, purement quantique.

De nombreux travaux ont été menés sur le modèle hydrodynamique dans les années 80 [101, 102, 103, 104, 105, 106], en même temps que d'autres modèles étaient proposés [107, 108]. Mais à l'époque, aucune expérience ne permettait de mettre ces effets en évidence, et même si certains travaux théoriques prédisaient que de tels effets pouvaient avoir un impact [109, 97], la non-localité des métaux est un sujet d'étude qui est longtemps tombé en désuétude.

Des expériences récentes [4] ont remis le modèle au goût du jour, en montrant que la non-localité a un véritable impact sur la résonance de nanosphères couplées à un film et que cet impact peut être décrit finement par le modèle hydrodynamique. Il a le mérite d'être très physique, de permettre des calculs analytiques et d'être aisément implémentable dans des simulations de type éléments finis. Il a longtemps été considéré que ce modèle exagère les

effets non-locaux, mais il a été montré récemment que c'est sans doute à cause d'un mauvais choix de conditions aux limites [110]. Si le modèle hydrodynamique ne décrit pas aussi bien la physique complexe des limites du plasma qu'une approche quantique complète, il donne l'influence de la non-localité avec une bonne approximation et reste le seul qui puisse le faire pour des structures complexes comme les milieux hyperboliques.

IV.1-b Modèle hydrodynamique

La réponse des métaux est en fait constituée de la réponse des électrons libres (qu'on peut décrire avec un modèle hydrodynamique) et de celle des électrons liés, qu'on peut considérer comme un milieu diélectrique standard, local. Les interactions entre électrons liés sont en effet essentiellement des interactions dipôle-dipôle, moins intenses que celles entre électrons libres, et à moins longue portée [110].

Les électrons libres vont, en se déplaçant, créer un courant \vec{J} à l'intérieur du métal. Ce courant peut être vu comme une polarisation effective \vec{P}_f . Les électrons liés, vont créer une polarisation \vec{P}_b du milieu. La polarisation totale présentée par un milieu sous l'effet d'un champ électrique, sera donc la superposition de la contribution des électrons liés, et de celle des électrons libres. Le vecteur total de polarisation est $\vec{P} = \vec{P}_b + \vec{P}_f$.

La contribution \vec{P}_b est donnée par $\vec{P}_b = \varepsilon_0 \chi_b \vec{E}$, où χ_b est la susceptibilité des électrons de conduction. La contribution \vec{P}_f , peut être définie à partir du courant de déplacement \vec{J} par

$$\dot{\vec{P}}_f = \vec{J}. \quad (\text{IV.2})$$

En utilisant ces expressions dans les équations de Maxwell, nous avons

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_b + \vec{P}_f \quad (\text{IV.3})$$

Soit, en supposant que le flux de densité électrique vérifie $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P}_b + \vec{\nabla} \cdot \vec{P}_f = 0 \quad (\text{IV.4})$$

En remplaçant, \vec{P}_b par son expression $\varepsilon_0 \chi_b \vec{E}$, et en supposant que la susceptibilité des électrons liés χ_b est locale,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_f = -\varepsilon_0 (1 + \chi_b) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \quad (\text{IV.5})$$

Il est possible de relier la densité de courant des électrons libres au champ électrique appliqué en utilisant le modèle hydrodynamique. Le modèle hydrodynamique est basé sur l'équation d'Euler, prenant en compte les termes de pression quantique. En utilisant la définition du courant de déplacement énoncé précédemment (IV.2), puis en supposant les termes non linéaires négligeables [106], le modèle hydrodynamique permet de lier la quantité \vec{P}_f au champ électrique :

$$-\beta^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_f) + \ddot{\vec{P}}_f + \gamma \dot{\vec{P}}_f = \varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{E}, \quad (\text{IV.6})$$

où γ est le facteur d'amortissement, β le paramètre non local proportionnel à la vitesse de Fermi et ω_p la fréquence de plasma. Le paramètre β correspond au paramètre de non localité, prenant en compte les interactions colombiennes, et la pression quantique existant entre les

électrons libres dans le métal. Des résultats récents suggèrent que la valeur de β donnée par la théorie, soit $\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{E_F}{m}$ où E_f est le niveau de Fermi et m la masse effective des électrons libres dans le métal, est en bon accord avec l'expérience, au moins pour l'or[4]. Dans la suite, nous supposons que c'est aussi le cas de l'argent.

Pour les autres paramètres, comme γ et ω_p ainsi que la permittivité associée aux électrons liés, nous nous sommes basés sur les valeurs données par Rakic *et al.*[111], issues de fits très précis de mesures expérimentales de la permittivité des métaux.

En supposant que la solution est de forme harmonique (dépendance en $e^{-i\omega t}$), les deux équations précédentes (IV.5) et (IV.6), et le vecteur de polarisation \vec{P}_f peuvent s'écrire :

$$\vec{P}_f = -\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \left(\vec{E} - (1 + \chi_b) \frac{\beta^2}{\omega_p^2} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right), \quad (\text{IV.7})$$

Par analogie avec le terme polarisation des électrons liés \vec{P}_b , nous pouvons déterminer une susceptibilité effective des électrons libre telle que $\vec{P}_f \propto \varepsilon_0 \chi_f \vec{E}$, soit

$$\chi_f = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad (\text{IV.8})$$

ce qui donne

$$\vec{P}_f = \varepsilon_0 \chi_f \left(\vec{E} - (1 + \chi_b) \frac{\beta^2}{\omega_p^2} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right). \quad (\text{IV.9})$$

Cette susceptibilité correspond à celle du modèle de Drude. Ainsi, les polarisations correspondant aux électrons liés et aux électrons libres sont clairement distinguées.

IV.2 Ondes transverses et ondes longitudinales

Les milieux sont toujours supposés non magnétiques, isotropes et homogènes. La dépendance en temps est harmonique en $e^{-i\omega t}$ et le problème est supposé indépendant de la variable y . Les équations de Maxwell s'écrivent maintenant :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{H} \quad (\text{IV.10})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = -i\omega \left(\varepsilon_0(1 + \chi_b) \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_f \left(\vec{E} - (1 + \chi_b) \frac{\beta^2}{\omega_p^2} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right) \right) \quad (\text{IV.11})$$

$$= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon \left(\vec{E} - \alpha \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right) \quad (\text{IV.12})$$

On retrouve la permittivité relative locale du métal ε ,

$$\varepsilon = 1 + \chi_b + \chi_f \quad (\text{IV.13})$$

On définit également un nouveau terme α :

$$\alpha = \frac{\chi_f (1 + \chi_b)}{\varepsilon} \frac{\beta^2}{\omega_p^2} \quad (\text{IV.14})$$

$$= \frac{\beta^2}{\frac{\omega_p^2}{1 + \chi_b} - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (\text{IV.15})$$

En développant le système (IV.12), nous obtenons les 6 équations suivantes,

$$-\partial_z E_y = i\omega \mu_0 H_x \quad (\text{IV.16})$$

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega \mu_0 H_y \quad (\text{IV.17})$$

$$\partial_x E_y = i\omega \mu_0 H_z \quad (\text{IV.18})$$

$$-\partial_z H_y = -i\omega \epsilon_0 \epsilon (E_x - \alpha \partial_x^2 E_x - \alpha \partial_x \partial_z E_z) \quad (\text{IV.19})$$

$$\partial_z H_x - \partial_x H_z = -i\omega \epsilon_0 \epsilon E_y \quad (\text{IV.20})$$

$$\partial_x H_y = -i\omega \epsilon_0 \epsilon (E_z - \alpha \partial_z^2 E_z - \alpha \partial_x \partial_z E_x) \quad (\text{IV.21})$$

Comme pour le cas local, nous pouvons séparer ce système en deux sous-systèmes selon la polarisation étudiée [110].

IV.2-a Cas de la polarisation transverse électrique

En polarisation transverse électrique, les composantes étudiées sont E_y , H_x et H_z et elles obéissent aux équations

$$-\partial_z E_y = i\omega \mu_0 H_x \quad (\text{IV.22})$$

$$\partial_x E_y = i\omega \mu_0 H_z \quad (\text{IV.23})$$

$$\partial_z H_x - \partial_x H_z = -i\omega \epsilon_0 \epsilon E_y \quad (\text{IV.24})$$

Ce sous système est identique au sous-système obtenu dans le cas purement local. L'effet de la non localité n'a donc aucun impact sur la propagation du champ lorsque le faisceau incident présente un champ électrique suivant y .

IV.2-b Cas de la polarisation transverse magnétique

Les composantes des champs étudiés sont H_y , E_x et E_z , et le système correspondant s'écrit,

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega \mu_0 H_y \quad (\text{IV.25})$$

$$-\partial_z H_y = -i\omega \epsilon_0 \epsilon (E_x - \alpha \partial_x^2 E_x - \alpha \partial_x \partial_z E_z) \quad (\text{IV.26})$$

$$\partial_x H_y = -i\omega \epsilon_0 \epsilon (E_z - \alpha \partial_z^2 E_z - \alpha \partial_x \partial_z E_x) \quad (\text{IV.27})$$

Par transformation de ce système en couplant les équations (IV.26) et (IV.27), nous obtenons le système suivant :

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega \mu_0 H_y \quad (\text{IV.28})$$

$$(1 - \alpha (\partial_x^2 + \partial_z^2)) E_x = \frac{(1 - \alpha (\partial_x^2 + \partial_z^2))}{i\omega \epsilon_0 \epsilon} \partial_z H_y \quad (\text{IV.29})$$

$$(1 - \alpha (\partial_x^2 + \partial_z^2)) E_z = -\frac{(1 - \alpha (\partial_x^2 + \partial_z^2))}{i\omega \epsilon_0 \epsilon} \partial_x H_y. \quad (\text{IV.30})$$

Pour résoudre ce système, il est nécessaire d'appliquer l'inverse de l'opérateur $(1 - \alpha (\partial_x^2 + \partial_z^2))$ de part et d'autre de l'équation. La solution dans ce cas est celle trouvée avec les équations simplifiées, à une solution appartenant au noyau de l'opérateur près. Comme nous allons le

voir, une fois l'opérateur simplifié de part et d'autre, on retrouve les équations usuelles. La solution correspondante est la solution usuelle. Mais à cause de la non-localité, une solution supplémentaire des équations apparaît.

Ondes Transversales

Après simplification des équations précédentes, il vient

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega \mu_0 H_y \quad (\text{IV.31})$$

$$E_x = \frac{1}{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \partial_z H_y \quad (\text{IV.32})$$

$$E_z = -\frac{1}{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \partial_x H_y. \quad (\text{IV.33})$$

Le système dans ce cas est le même que celui obtenu pour un matériau supposé local et éclairé avec une polarisation TM. L'équation de propagation sera la même que pour le cas ordinaire, soit :

$$\nabla^2 \vec{H} + \varepsilon k_0^2 \vec{H} = \vec{0}, \quad (\text{IV.34})$$

En résolvant cette équation, nous retrouvons la relation de dispersion suivante

$$\vec{k}^2 = \varepsilon k_0^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{IV.35})$$

Les équations précédentes vérifient bien $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, le champ électrique est donc une onde transverse puisqu'il est orthogonal au vecteur d'onde \vec{k} lorsqu'il est propagatif. Cette solution transversale est bien la solution standard des équations de Maxwell locales.

Ondes longitudinales

On doit ajouter à la solution précédente une solution appartenant au noyau de l'opérateur $(1 - \alpha (\partial_x^2 + \partial_z^2))$. Dans ce cas, le système (IV.30) peut s'écrire

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega \mu_0 H_y \quad (\text{IV.36})$$

$$-\partial_z H_y = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon (E_x - \alpha \partial_x^2 E_x - \alpha \partial_x \partial_z E_z) \quad (\text{IV.37})$$

$$-\alpha (\partial_x^2 + \partial_z^2) E_x + E_x = 0 \quad (\text{IV.38})$$

Une combinaison linéaire de ces équations permet d'obtenir $H_y = 0$. Ainsi, la solution que nous cherchons n'a pas de champ magnétique. Cette solution mène à $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$, ce qui signifie que le champ électrique est dans ce cas une onde longitudinale, car le champ électrique est parallèle au vecteur d'onde. Ces ondes longitudinales correspondent à un "bulk" plasmon : une onde longitudinale similaire au son dans un plasma.

Ce champ électrique vérifiera la condition obtenue avec l'équation (IV.36) :

$$\partial_z E_x = \partial_x E_z. \quad (\text{IV.39})$$

Dans ce cas, l'équation de propagation pour les ondes transverses n'est plus valable. Cependant, lorsque le champ magnétique est nul, l'équation de Maxwell (IV.11) permet d'obtenir une nouvelle relation vérifiée par ces ondes longitudinales

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\alpha} \vec{E} = \vec{0}. \quad (\text{IV.40})$$

En remplaçant α par sa valeur, la relation de dispersion d'un plasmon ("bulk") s'écrit

$$\vec{k}^2 = -\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta^2} \left(\omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 + \chi_b} + i\gamma\omega \right). \quad (\text{IV.41})$$

Forme générale des champs

Finalement, lorsqu'une structure métallique de permittivité ε_m est étudiée en polarisation TE, la non localité n'a pas d'impact sur la propagation des ondes dans la structure. L'étude sera la même que celle proposée dans les parties précédentes.

Lorsque la polarisation prise en compte est transverse magnétique, l'onde résultante étudiée est la superposition de deux ondes, une onde transverse et une onde longitudinale.

L'onde transverse correspond à la solution connue des équations de Maxwell locales. Cette onde vérifie l'équation de propagation

$$\nabla^2 \vec{H} + \varepsilon k_0^2 \vec{H} = \vec{0}, \quad (\text{IV.42})$$

Dans le métal ces ondes seront supposées évanescentes et de vecteur d'onde $i\kappa_t$, car on suppose qu'on est en dessous de la fréquence de plasma. Les composantes des champs électriques et magnétiques s'écrivent alors

$$H_{y_m} = (A_i e^{-\kappa_t z} + B_i e^{\kappa_t z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{IV.43})$$

$$E_x^t = \frac{i\kappa_t}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} (A_i e^{-\kappa_t z} - B_i e^{\kappa_t z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{IV.44})$$

$$E_z^t = \frac{-k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} (A_i e^{-\kappa_t z} + B_i e^{\kappa_t z}) e^{i(k_x x - \omega t)}. \quad (\text{IV.45})$$

Avec $\kappa_t = \sqrt{k_x^2 - \varepsilon_d k_0^2}$ et $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

L'onde longitudinale, elle, vérifie l'équation de propagation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\alpha} \vec{E} = \vec{0}. \quad (\text{IV.46})$$

Le champ magnétique associé à cette onde H_y^ℓ est nul. La résolution de l'équation de propagation et la condition donnée par les équations de Maxwell pour cette onde (IV.39), ($E_z = \frac{1}{i k_x} \partial_z E_x$), nous permettent de déterminer les expressions du champ électrique associé :

$$E_x^\ell = \frac{1}{\omega \varepsilon_0} (C_i e^{-\kappa_\ell z} + D_i e^{\kappa_\ell z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{IV.47})$$

$$E_z^\ell = \frac{-\kappa_\ell}{i k_x \omega \varepsilon_0} (C_i e^{-\kappa_\ell z} - D_i e^{\kappa_\ell z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{IV.48})$$

Avec,

$$\kappa_\ell = \sqrt{k_x^2 + \frac{\omega_p^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\chi_f} + \frac{1}{1 + \chi_b} \right)} \quad (\text{IV.49})$$

IV.2-c Condition aux limites supplémentaires

L'introduction de la non localité dans des matériaux métalliques introduit par rapport à un matériau supposé local une onde supplémentaire. Il va falloir déterminer l'amplitude

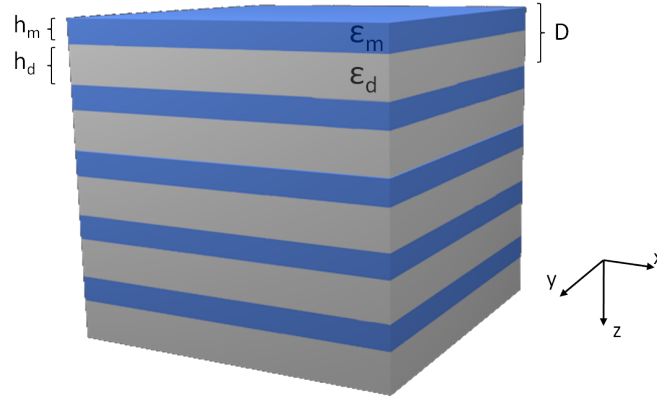


FIGURE IV.1 – Structure type miroir de Bragg

avec laquelle cette onde est excitée. Pour déterminer cette amplitude, une nouvelle condition aux limites est nécessaire par rapport aux conditions usuelles. Nous avons considéré la réponse des électrons libres non locale mais celle des électrons liés est supposée locale. La seule hypothèse physiquement valable et qu'au passage d'une interface entre une épaisseur de diélectrique et une couche métallique, les électrons libres ne peuvent pas quitter le métal. Ainsi, la composante normale aux interfaces métal/diélectrique du vecteur polarisation \vec{P}_f associée aux électrons libres doit s'annuler à l'interface [110].

La condition aux limites supplémentaire dans un problème prenant en compte la non localité est exprimée par $P_{fz} = 0$.

IV.3 Relation de dispersion pour un empilement métallo diélectrique

Nous considérons un empilement métallo-diélectrique périodique représenté sur la figure IV.1, éclairé en polarisation TM, seule polarisation à être sensible aux effets de la non-localité. Nous supposons la structure éclairée avec par onde plane.

IV.3-a Expressions des champs électriques et magnétiques

Dans une couche de diélectrique de permittivité ε_d et d'épaisseur h_d , les champs électriques et magnétiques s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{y_d}(x, z, t) = (A_i e^{i k_d z} + B_i e^{-i k_d z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_x(x, z, t) = \frac{k_d}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_d} (A_i e^{i k_d z} - B_i e^{-i k_d z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_z(x, z, t) = \frac{-k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_d} (A_i e^{i k_d z} + B_i e^{-i k_d z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \end{array} \right. \quad (\text{IV.50})$$

Avec $k_d = \sqrt{\varepsilon_d k_0^2 - k_x^2}$ et $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

Dans une couche métallique de permittivité ε_m et d'épaisseur h_m , les champs électriques

et magnétiques sont composés de l'onde longitudinale et de l'onde transverse :

$$\begin{cases} H_{y_m}(x, z, t) = (A_i e^{-\kappa_t z} + B_i e^{\kappa_t z}) + e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_x^t(x, z, t) = \frac{i \kappa_t}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} (A_i e^{-\kappa_t z} - B_i e^{\kappa_t z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_x^\ell(x, z, t) = \frac{1}{\omega \varepsilon_0} (C_i e^{-\kappa_\ell z} + D_i e^{\kappa_\ell z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_z^t(x, z, t) = \frac{-k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} (A_i e^{-\kappa_t z} + B_i e^{\kappa_t z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_z^\ell(x, z, t) = \frac{-\kappa_\ell}{i k_x \omega \varepsilon_0} (C_i e^{-\kappa_\ell z} - D_i e^{\kappa_\ell z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (\text{IV.51})$$

$$\text{Avec } \kappa_t = \sqrt{k_x^2 - \varepsilon_d k_0^2} \text{ et } \kappa_\ell = \sqrt{k_x^2 + \frac{\omega_p^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\chi_f} + \frac{1}{1 + \chi_b} \right)}.$$

IV.3-b Relations nécessaires

Dans le diélectrique

D'après les matrices d'Abélès (voir Annexe), les champs électriques et magnétiques dans une couche de diélectrique d'épaisseur h_d vérifient :

$$\begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_{z+h_d} = \begin{pmatrix} \cos(k_d h_d) & \frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_d}{k_d} \sin(k_d h_d) \\ \frac{i k_d}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_d} \sin(k_d h_d) & \cos(k_d h_d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_z \quad (\text{IV.52})$$

Dans le métal

De la même façon, les champs électriques et magnétiques transverses dans une couche de métal d'épaisseur h_m vérifient :

$$\begin{pmatrix} H_{y_m} \\ E_x^t \end{pmatrix}_{z+h_m} = \begin{pmatrix} \cosh(\kappa_t h_m) & \frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m}{\kappa_t} \sinh(\kappa_t h_m) \\ \frac{\kappa_t}{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} \sinh(\kappa_t h_m) & \cosh(\kappa_t h_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{y_m} \\ E_x^t \end{pmatrix}_z \quad (\text{IV.53})$$

En utilisant la même méthode, nous montrons que les champs électriques longitudinaux dans cette même couche de métal vérifient :

$$\begin{pmatrix} E_x^\ell \\ E_z^\ell \end{pmatrix}_{z+h_m} = \begin{pmatrix} \cosh(\kappa_\ell h_m) & \frac{i k_x}{\kappa_\ell} \sinh(\kappa_\ell h_m) \\ \frac{\kappa_\ell}{i k_x} \sinh(\kappa_\ell h_m) & \cosh(\kappa_\ell h_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^\ell \\ E_z^\ell \end{pmatrix}_z \quad (\text{IV.54})$$

Conditions aux limites

Au passage de l'interface entre un métal et un diélectrique, les champs électriques et magnétiques $E_x(z)$ et $H_y(z)$ sont continus. La continuité du champ $E_x(z)$ à l'interface entre diélectrique et métal en $z = 0$ et $z = h_m$ nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} E_x(0) = E_x^\ell(0) + E_x^t(0) \\ E_x(h_m) = E_x^\ell(h_m) + E_x^t(h_m) \end{cases} \quad (\text{IV.55})$$

Celle du champ $H_y(z)$ à l'interface entre diélectrique et métal en $z = 0$ et $z = h_m$ nous donne :

$$\begin{cases} H_{y_d}(0) = H_{y_m}(0) \\ H_{y_d}(h_m) = H_{y_m}(h_m) \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

Conditions aux limites supplémentaires

Les conditions aux limites supplémentaires sont données par $P_{fz} = 0$ à l'interface entre un diélectrique et un métal.

L'équation de Maxwell non locale (IV.12) permet de donner une expression simple du vecteur de polarisation P_f des électrons libres :

$$\vec{P}_f = -\frac{1}{i\omega} \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_m - \varepsilon_0(1 + \chi_b) \vec{E}_m \quad (\text{IV.57})$$

En projetant cette expression sur l'axe perpendiculaire aux interfaces z , l'expression s'écrit

$$P_{fz} = -\frac{1}{i\omega} (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_m)_z - \varepsilon_0(1 + \chi_b) E_{zm} \quad (\text{IV.58})$$

Soit,

$$P_{fz} = -\frac{1}{i\omega} \partial_x H_{ym} - \varepsilon_0(1 + \chi_b) E_{zm} \quad (\text{IV.59})$$

Or, le champ électrique total dans la couche de métal est une superposition du champ électrique transverse et longitudinal

$$E_{zm}(z) = E_z^\ell(z) + E_z^t(z) \quad (\text{IV.60})$$

Et, d'après les équations de Maxwell pour une onde transverse (IV.33), donc supposée purement locale, le champ électrique transverse est donné par

$$E_z^t = -\frac{1}{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} \partial_x H_{ym}(z) \quad (\text{IV.61})$$

De plus

$$\partial_x H_{ym}(z) = i k_x H_{ym}(z) \quad (\text{IV.62})$$

L'expression de $P_{fz}(z)$ peut être mis sous la forme

$$P_{fz}(z) = -\frac{k_x}{\omega} H_{ym}(z) - \varepsilon_0(1 + \chi_b) \left[E_z^\ell(z) - \frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} H_{ym}(z) \right] \quad (\text{IV.63})$$

Ainsi, la condition supplémentaire $P_{fz} = 0$ s'écrit également :

$$E_z^\ell(z) = \frac{-k_x}{\omega \varepsilon_0} \left(\frac{1}{1 + \chi_b} - \frac{1}{\varepsilon_m} \right) H_{ym}(z) \quad (\text{IV.64})$$

Soit,

$$E_z^\ell(z) = \frac{\kappa_l}{\omega \varepsilon_0 k_x} \Omega H_{ym}(z) \quad (\text{IV.65})$$

Avec Ω , paramètre caractérisant la non localité et donné par

$$\Omega = \frac{k_x^2}{\kappa_l} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{1 + \chi_b} \right). \quad (\text{IV.66})$$

Ce terme qui est un terme non local, faisant intervenir κ_l , s'annule en incidence normale.

La non localité n'intervient donc pas en incidence normale, parce que l'onde longitudinale ne peut pas être excitée.

Lorsque cette condition supplémentaire est appliquée sur les deux interfaces du métal, c'est à dire en $z = 0$ et $z = h_m$ nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} E_z^\ell(0) = \frac{\kappa_l}{\omega \varepsilon_0 k_x} \Omega H_{ym}(0) \\ E_z^\ell(h_m) = \frac{\kappa_l}{\omega \varepsilon_0 k_x} \Omega H_{ym}(h_m) \end{cases} \quad (\text{IV.67})$$

IV.3-c Système d'équations complet

A l'aide des différentes conditions énumérées précédemment, nous obtenons un système de 12 équations, qui nous permettra de déterminer la relation de dispersion d'un empilement métal-diélectrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{y_m}(h_m) = \cosh(\kappa_t h_m) H_{y_m}(0) + \frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m}{\kappa_t} \sinh(\kappa_t h_m) E_x^t(0) \quad (\text{IV.68}) \\ E_x^t(h_m) = \frac{\kappa_t}{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} \sinh(\kappa_t h_m) H_{y_m}(0) + \cosh(\kappa_t h_m) E_x^t(0) \quad (\text{IV.69}) \\ E_x^\ell(h_m) = \cosh(\kappa_\ell h_m) E_x^\ell(0) + \frac{i k_x}{\kappa_\ell} \sinh(\kappa_\ell h_m) E_z^\ell(0) \quad (\text{IV.70}) \\ E_z^\ell(h_m) = \frac{\kappa_\ell}{i k_x} \sinh(\kappa_\ell h_m) E_x^\ell(0) + \cosh(\kappa_\ell h_m) E_z^\ell(0) \quad (\text{IV.71}) \\ H_{y_d}(h_m + h_d) = \cos(k_d h_d) H_{y_d}(h_m) + \frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_d}{k_d} \sin(k_d h_d) E_x(h_m) \quad (\text{IV.72}) \\ E_x(h_m + h_d) = \frac{i k_d}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_d} \sin(k_d h_d) H_{y_d}(h_m) + \cos(k_d h_d) E_x(h_m) \quad (\text{IV.73}) \\ E_x(0) = E_x^\ell(0) + E_x^t(0) \quad (\text{IV.74}) \\ E_x(h_m) = E_x^\ell(h_m) + E_x^t(h_m) \quad (\text{IV.75}) \\ H_{y_d}(0) = H_{y_m}(0) \quad (\text{IV.76}) \\ H_{y_d}(h_m) = H_{y_m}(h_m) \quad (\text{IV.77}) \\ E_z^\ell(0) = \frac{\kappa_\ell}{\omega \varepsilon_0 k_x} \Omega H_{y_m}(0) \quad (\text{IV.78}) \\ E_z^\ell(h_m) = \frac{\kappa_\ell}{\omega \varepsilon_0 k_x} \Omega H_{y_m}(h_m) \quad (\text{IV.79}) \end{array} \right. \quad (\text{IV.80})$$

Plutôt que de chercher une expression explicite du déterminant correspondant à ce système et vouloir l'annuler, nous allons éliminer une bonne partie des variables, pour l'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_{h_m+h_d} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_0 \quad (\text{IV.81})$$

IV.3-d Résolution du système

Pour résoudre ce système, nous cherchons à obtenir :

$$\begin{cases} H_{y_d}(h_m + h_d) = f(H_{y_d}(0), E_x(0)) \\ E_x(h_m + h_d) = g(H_{y_d}(0), E_x(0)) \end{cases} \quad (\text{IV.82})$$

L'équation (IV.72) et (IV.73) du système (IV.80), nous donne une expression de $H_{y_d}(h_m + h_d)$ et de $E_x(h_m + h_d)$, en fonction des champs $H_{y_d}(h_m)$ et $E_x(h_m)$. Pour obtenir les relations (IV.82) nous exprimons dans un premier temps, $H_{y_d}(h_m)$ et $E_x(h_m)$ en fonction des termes $H_{y_d}(0)$ et $E_x(0)$, à l'aide des équations du système (IV.80).

Expression de $H_{y_d}(h_m)$

En utilisant les équations (IV.68), (IV.71), (IV.74), (IV.76), (IV.77), (IV.78), (IV.79) du système, le champ H_{y_d} en $z = h_m$ peut être exprimé en fonction de $H_{y_d}(0)$ et $E_x(0)$.

Après calcul, nous obtenons l'expression suivante :

$$H_{y_m}(h_m) = \frac{\cosh(\kappa_t h_m) - \frac{\varepsilon_m}{\kappa_t} \Omega \sinh(\kappa_t h_m) \tanh(\kappa_\ell h_m)}{1 - \frac{\varepsilon_m}{\kappa_t} \Omega \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)}} H_{y_d}(0) + \frac{\frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m}{\kappa_t} \sinh(\kappa_t h_m)}{1 - \frac{\varepsilon_m}{\kappa_t} \Omega \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)}} E_x(0) \quad (\text{IV.83})$$

Expression de $E_x(h_m)$

En utilisant les équations (IV.69), (IV.70), (IV.71), (IV.74) (IV.75), (IV.76), (IV.78), du système (IV.80), le champ E_x en $z = h_m$ en fonction de $H_{y_d}(m)$ et $E_x(0)$, est donné par

$$\begin{aligned} E_x(h_m) &= \frac{\frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} (\cosh(\kappa_\ell h_m) - \cosh(\kappa_t h_m))}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} H_{y_m}(h_m) \\ &+ \left[\left(\frac{\kappa_t}{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} \sinh(\kappa_t h_m) + \frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} \sinh(\kappa_\ell h_m) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} [\cosh(\kappa_\ell h_m) - \cosh(\kappa_t h_m)] \cosh(\kappa_\ell h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right] H_{y_d}(0) \\ &+ \cosh(\kappa_t h_m) E_x(0) \end{aligned} \quad (\text{IV.84})$$

Soit en fonction de $H_{y_d}(0)$ et $E_x(0)$:

$$\begin{aligned} E_x(h_m) &= \left[\left(\frac{\frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} (\cosh(\kappa_\ell h_m) - \cosh(\kappa_t h_m))}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right) \left(\frac{\cosh(\kappa_t h_m) - \frac{\Omega \varepsilon_m}{\kappa_t} \sinh(\kappa_t h_m) \tanh(\kappa_\ell h_m)}{1 - \frac{\Omega \varepsilon_m}{\kappa_t} \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)}} \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\kappa_t}{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} \sinh(\kappa_t h_m) + \frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} \sinh(\kappa_\ell h_m) \right) \\ &\quad \left. - \frac{\frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} [\cosh(\kappa_\ell h_m) - \cosh(\kappa_t h_m)] \cosh(\kappa_\ell h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right] H_{y_d}(0) \\ &+ \left[\cosh(\kappa_t h_m) + \left(\frac{\frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} (\cosh(\kappa_\ell h_m) - \cosh(\kappa_t h_m))}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right) \left(\frac{\frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m}{\kappa_t} \sinh(\kappa_t h_m)}{1 - \frac{\Omega \varepsilon_m}{\kappa_t} \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)}} \right) \right] E_x(0) \end{aligned} \quad (\text{IV.85})$$

Expression des champs $H_{y_d}(h_d + h_m)$ et $E_x(h_m + h_d)$

En utilisant les expressions du système général (IV.72) et (IV.73), ainsi que celle des champs $E_x(h_m)$ et $H_{y_d}(h_m)$ (IV.85) et (IV.83), obtenues précédemment, les champs $H_{y_d}(h_m + h_d)$ et $E_x(h_m + h_d)$ peuvent être exprimés :

$$\begin{cases} H_{y_d}(h_m + h_d) = \cos(k_d h_d) H_{y_d}(h_m) + \frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_d}{k_d} \sin(k_d h_d) E_x(h_m) \\ E_x(h_m + h_d) = \frac{i k_d}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_d} \sin(k_d h_d) H_{y_d}(h_m) + \cos(k_d h_d) E_x(h_m) \end{cases} \quad (\text{IV.86})$$

Et mis sous la forme d'une matrice :

$$\begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_{h_m+h_d} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_0 \quad (\text{IV.87})$$

Avec C_{11} , C_{12} , C_{21} et C_{22} , les expressions suivantes :

Expression de C_{11}

$$\begin{aligned} C_{11} = & \left[\cos(k_d h_d) \cosh(\kappa_t h_m) + \left(\frac{\varepsilon_d \kappa_t}{k_d \varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{k_d \kappa_t} \Omega^2 \right) \sin(k_d h_d) \sinh(\kappa_t h_m) \right. \\ & - \frac{\Omega \varepsilon_m}{\kappa_t} \cos(k_d h_d) \cosh(\kappa_\ell h_m) \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \\ & \left. + \frac{\Omega \varepsilon_d}{k_d} \frac{\sin(k_d h_d)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \left(2 - 2 \cosh(\kappa_t h_m) \cosh(\kappa_\ell h_m) \right) \right] \left(1 - \frac{\Omega \varepsilon_m}{\kappa_t} \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.88})$$

Expression de C_{12}

$$\begin{aligned} C_{12} = & \left(\cos(k_d h_d) - \frac{\Omega \varepsilon_d}{k_d} \frac{[\cosh(\kappa_\ell h_m) - \cosh(\kappa_t h_m)] \sin(k_d h_d)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right) \left(\frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m}{\kappa_t} \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right) \\ & + \frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_d}{k_d} \sin(k_d h_d) \cosh(\kappa_t h_m) \end{aligned} \quad (\text{IV.89})$$

Expression de C_{21}

$$\begin{aligned} C_{21} = & \left(\frac{i k_d}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_d} \sin(k_d h_d) + \frac{\frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} [\cosh(\kappa_\ell h_m) - \cosh(\kappa_t h_m)] \cos(k_d h_d)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right) \\ & \left(\frac{\cosh(\kappa_t h_m) - \frac{\Omega \varepsilon_m}{\kappa_t} \sinh(\kappa_t h_m) \tanh(\kappa_\ell h_m)}{1 - \frac{\Omega \varepsilon_m}{\kappa_t} \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)}} \right) \\ & + \frac{\kappa_t}{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} \cos(k_d h_d) \sinh(\kappa_t h_m) + \frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} \cos(k_d h_d) \sinh(\kappa_\ell h_m) \\ & - \frac{\frac{i \Omega}{\omega \varepsilon_0} [\cosh(\kappa_\ell h_m) - \cosh(\kappa_t h_m)] \cosh(\kappa_\ell h_m) \cos(k_d h_d)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \end{aligned} \quad (\text{IV.90})$$

Expression de C_{22}

$$\begin{aligned} C_{22} = & \left[\cos(k_d h_d) \cosh(\kappa_t h_m) - \frac{k_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d \kappa_t} \sin(k_d h_d) \sinh(\kappa_t h_m) \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon_m}{\kappa_t} \Omega \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \cos(k_d h_d) \cosh(\kappa_\ell h_m) \right] \left(1 - \frac{\Omega \varepsilon_m}{\kappa_t} \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.91})$$

IV.3-e Pseudo-périodicité

La structure étudiée est périodique de période D , où D est l'épaisseur d'une période Métal + Diélectrique. Nous cherchons des solutions correspondant à des modes propagatifs dans la structure, et pseudo périodiques. Les champs $H_{y_d}(h_d + h_m)$ et $E_x(h_m + h_d)$ vérifient donc la condition suivante :

$$\begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_{h_m+h_d} = e^{\pm i K D} \begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_0 \quad (\text{IV.92})$$

Les deux solutions correspondent au champ montant ($e^{i K D}$) et au champ descendant ($e^{-i K D}$). Le terme $e^{\pm i K D}$ correspond donc à deux valeurs propres du système.

Ainsi, le problème aux valeurs propres est le suivant

$$\begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_{h_m+h_d} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_0 = e^{\pm i K D} \begin{pmatrix} H_{y_d} \\ E_x \end{pmatrix}_0 \quad (\text{IV.93})$$

Les valeurs propres λ de ce système sont solution de l'équation caractéristique suivante :

$$\det(C - \lambda I) = 0 \quad (\text{IV.94})$$

Soit ;

$$\lambda^2 - (C_{11} + C_{22})\lambda - C_{12} C_{21} + C_{11} C_{22} = 0 \quad (\text{IV.95})$$

$$\lambda^2 - \text{Tr}(C) \lambda + \text{Det}(C) = 0 \quad (\text{IV.96})$$

Le calcul du déterminant et des solutions de l'équation nous donne :

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i K D} = \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(C) \pm i \sqrt{4 \text{Det}(C) - \text{Tr}(C)^2} \right], \quad \text{si } \text{Tr}(C) < 4 \text{Det}(C) \quad (\text{IV.97})$$

Ou

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i K D} = \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(C) \pm \sqrt{\text{Tr}(C)^2 - 4 \text{Det}(C)} \right], \quad \text{si } \text{Tr}(C) > 4 \text{Det}(C) \quad (\text{IV.98})$$

Une façon d'écrire la solution du système, est d'additionner les deux valeurs propres, soit :

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= e^{-i K D} + e^{i K D} = 2 \cos(K D) \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(C) - i \sqrt{4 \text{Det}(C) - \text{Tr}(C)^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(C) + i \sqrt{4 \text{Det}(C) - \text{Tr}(C)^2} \right] \\ &= \text{Tr}(C) \end{aligned} \quad (\text{IV.99})$$

La relation de dispersion sera donc donnée par :

$$\cos(K D) = \frac{1}{2} (C_{11} + C_{22}) \quad (\text{IV.100})$$

IV.3-f Expression de la relation de dispersion

En utilisant les expressions obtenues précédemment de C_{11} (IV.88) et C_{22} (IV.91), la relation de dispersion est donnée par :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\Omega \varepsilon_m \sinh(\kappa_t h_m)}{\kappa_t \sinh(\kappa_\ell h_m)} \right) \cos(K D) = \\ & \cos(k_d h_d) \cosh(\kappa_t h_m) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_d \kappa_t}{k_d \varepsilon_m} - \frac{k_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d \kappa_t} + \frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{k_d \kappa_t} \Omega^2 \right) \sin(k_d h_d) \sinh(\kappa_t h_m) \\ & + \frac{\Omega}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \left[\frac{\varepsilon_d}{k_d} \sin(k_d h_d) \left(1 - \cosh(\kappa_t h_m) \cosh(\kappa_\ell h_m) \right) - \frac{\varepsilon_m}{\kappa_t} \cos(k_d h_d) \cosh(\kappa_\ell h_m) \sinh(\kappa_t h_m) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.101})$$

Cette relation est proche de la relation de dispersion d'un empilement métallo diélectrique supposé local avec des termes non locaux supplémentaires. En effet, lorsque le paramètre non local Ω est nul, notamment en incidence normale, nous retrouvons très rapidement la relation de dispersion locale (I.18) obtenue au premier chapitre.

IV.4 Formalisme des matrices S

Si la relation de dispersion est très importante pour bien comprendre comment les modes de Bloch peuvent être perturbés par la non-localité, cette approche ne permet pas de calculer correctement ce qu'il se passe pour une structure finie (notamment d'obtenir des coefficients de réflexion et de transmission), ni pour une structure avec un motif périodique plus complexe, ou encore commençant et terminant par du métal, comme c'est souvent le cas. Il convient donc de trouver une méthode permettant la résolution systématique des systèmes d'équations similaires à ceux que nous avons trouvés ci-dessus et qui tiennent compte de la non-localité.

Le formalisme des matrices S semble ici particulièrement adapté. Comme on l'a vu ci-dessus, les matrices d'Abélès ne sont pas adaptées (il en faut une série pour l'onde longitudinale et une série pour l'onde transverse). Les matrices S sont basées sur une écriture particulière de la continuité des champs $H_y(z)$, $E_x(z)$. Lorsque les matériaux sont non-locaux, il est nécessaire d'utiliser la condition supplémentaire de la polarisation P_f à l'interface entre une couche de métal et une couche de diélectrique, mais cela ne change pas fondamentalement la méthode.

IV.4-a Matrice de passage à l'interface diélectrique \rightarrow métal

Nous supposons pour cette étude que le milieu i est le diélectrique et le milieu $i + 1$ est le métal (Fig. I.8). Les expressions des champs magnétiques et électriques dans le diélectrique et la couche métallique sont donc :

Dans le diélectrique

$$\begin{cases} H_{yd}(x, z, t) = (A_i^- e^{i k_d z} + B_i^- e^{-i k_d z}) e^{i(k_x x - w t)} \\ E_x(x, z, t) = \frac{k_d}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_d} (A_i^- e^{i k_d z} - B_i^- e^{-i k_d z}) e^{i(k_x x - w t)} \\ E_z(x, z, t) = \frac{-k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_d} (A_i^- e^{i k_d z} + B_i^- e^{-i k_d z}) e^{i(k_x x - w t)} \end{cases} \quad (IV.102)$$

Et dans le métal,

$$\begin{cases} H_{ym}(x, z, t) = (A_{i+1}^+ e^{-\kappa_t z} + B_{i+1}^+ e^{\kappa_t z}) e^{i(k_x x - w t)} \\ E_x^t(x, z, t) = \frac{i \kappa_t}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} (A_{i+1}^+ e^{-\kappa_t z} - B_{i+1}^+ e^{\kappa_t z}) e^{i(k_x x - w t)} \\ E_x^\ell(x, z, t) = \frac{1}{\omega \varepsilon_0} (C_{i+1}^+ e^{-\kappa_\ell z} + D_{i+1}^+ e^{\kappa_\ell z}) e^{i(k_x x - w t)} \\ E_z^t(x, z, t) = \frac{-k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_m} (A_{i+1}^+ e^{-\kappa_t z} + B_{i+1}^+ e^{\kappa_t z}) e^{i(k_x x - w t)} \\ E_z^\ell(x, z, t) = \frac{-\kappa_\ell}{i k_x \omega \varepsilon_0} (C_{i+1}^+ e^{-\kappa_\ell z} - D_{i+1}^+ e^{\kappa_\ell z}) e^{i(k_x x - w t)} \end{cases} \quad (IV.103)$$

A l'interface entre le métal et le diélectrique, la continuité des champs et la condition supplémentaire de la polarisation nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} H_{yd}(0) = H_{ym}(0) \\ E_x(0) = E_x^t(0) + E_x^\ell(0) \\ E_z^\ell(0) = \frac{\kappa_\ell \Omega}{\omega \varepsilon_0 k_x} H_{ym}(0) \end{cases} \quad (IV.104)$$

Soit,

$$\begin{cases} A_i^- + B_i^- = A_{i+1}^+ + B_{i+1}^+ \end{cases} \quad (IV.105)$$

$$\begin{cases} b_i^- (A_i^- - B_i^-) = b_{i+1}^+ (A_{i+1}^+ - B_{i+1}^+) + C_{i+1}^+ + D_{i+1}^+ \end{cases} \quad (IV.106)$$

$$\begin{cases} D_{i+1}^+ - C_{i+1}^+ = i \Omega (A_{i+1}^+ + B_{i+1}^+) \end{cases} \quad (IV.107)$$

$$\begin{cases} \end{cases} \quad (IV.108)$$

Avec,

$$b_i^- = \frac{k_d}{\varepsilon_d} \quad \text{et} \quad b_{i+1}^+ = \frac{i \kappa_t}{\varepsilon_m} \quad (IV.109)$$

Nous cherchons à définir la matrice d'interface lors du passage du métal au diélectrique :

$$\begin{pmatrix} A_i^- \\ B_{i+1}^+ \\ D_{i+1}^+ \end{pmatrix} = M_{Intdiel \rightarrow metal} \begin{pmatrix} B_i^- \\ A_{i+1}^+ \\ C_{i+1}^+ \end{pmatrix} \quad (IV.110)$$

Expression de A_i^-

Le coefficient A_i^- peut être exprimé en fonction de B_i^- , A_{i+1}^+ et C_{i+1}^+ .

Les équations (IV.105) et (IV.106) du système (IV.108) donne la relation

$$(b_i^- + b_{i+1}^+) A_i^- + (b_{i+1}^+ - b_i^-) B_i^- = 2 b_{i+1}^+ A_{i+1}^+ + C_{i+1}^+ + D_{i+1}^+ \quad (IV.111)$$

Et avec les équations (IV.105) et (IV.107), nous obtenons :

$$D_{i+1}^+ - C_{i+1}^+ = i \Omega A_i^- + i \Omega B_i^- \quad (\text{IV.112})$$

Ainsi, à l'aide de ces deux dernières équations (IV.111) et (IV.112), nous pouvons définir la première partie de la matrice de passage du diélectrique au métal :

$$A_i^- = \frac{b_i^- - b_{i+1}^+ + i \Omega}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega} B_i^- + \frac{2 b_{i+1}^+}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega} A_{i+1}^+ + \frac{2}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega} C_{i+1}^+ \quad (\text{IV.113})$$

Expression de B_{i+1}^+

De la même façon le coefficient B_{i+1}^+ peut être exprimé en fonction de B_i^- , A_{i+1}^+ et C_{i+1}^+ . Les équations (IV.105) et (IV.106) du système (IV.108) donne la relation

$$-2 b_i^- B_i^- = (b_{i+1}^+ - b_i^-) A_{i+1}^+ - (b_i^- + b_{i+1}^+) B_{i+1}^+ + C_{i+1}^+ + D_{i+1}^+ \quad (\text{IV.114})$$

Ainsi, à l'aide de l'équation précédente (IV.114) et de l'équation (IV.107) du système (IV.108), la deuxième partie de la matrice de passage du diélectrique au métal s'écrit :

$$B_{i+1}^+ = \frac{2 b_i^-}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega} B_i^- + \frac{b_{i+1}^+ - b_i^- + i \Omega b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega A_{i+1}^+}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega} C_{i+1}^+ \quad (\text{IV.115})$$

Expression de D_{i+1}^+

Enfin le coefficient D_{i+1}^+ peut s'exprimer en fonction de B_i^- , A_{i+1}^+ et C_{i+1}^+ . Les équations (IV.105) et (IV.106) du système (IV.108) nous permettent d'écrire

$$(b_i^- + b_{i+1}^+) A_i^- + (b_{i+1}^+ - b_i^-) B_i^- = 2 b_{i+1}^+ A_{i+1}^+ + C_{i+1}^+ + D_{i+1}^+ \quad (\text{IV.116})$$

Avec les équations (IV.105) et (IV.107), une deuxième équation est obtenue :

$$D_{i+1}^+ - C_{i+1}^+ = i \Omega A_i^- + i \Omega B_i^- \quad (\text{IV.117})$$

Ainsi, les deux dernières équations (IV.116) et (IV.117), nous permettent de définir la dernière partie de la matrice de passage du diélectrique au métal :

$$D_{i+1}^+ = \frac{2 i \Omega b_i^-}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega} B_i^- + \frac{2 i \Omega b_{i+1}^+}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega} A_{i+1}^+ + \frac{b_i^- + b_{i+1}^+ + i \Omega}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega} C_{i+1}^+ \quad (\text{IV.118})$$

Expression de la matrice interface du diélectrique au métal

$$M_{Int_{diel \rightarrow metal}} = \frac{1}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i \Omega} \begin{pmatrix} b_i^- - b_{i+1}^+ + i \Omega & 2 b_{i+1}^+ & 2 \\ 2 b_i^- & b_{i+1}^+ - b_i^- + i \Omega & 2 \\ 2 i \Omega b_i^- & 2 i \Omega b_{i+1}^+ & b_i^- + b_{i+1}^+ + i \Omega \end{pmatrix} \quad (\text{IV.119})$$

IV.4-b Matrice de passage à l'interface du métal → diélectrique

Nous supposons cette fois que le milieu i est le métal et le milieu $i + 1$ est le diélectrique. Les expressions des champs magnétiques et électriques dans le diélectrique et la couche métallique sont donc

— Dans le métal :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{y_m}(x, z, t) = (A_i^- e^{-\kappa t z} + B_i^- e^{\kappa t z}) + e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_x^t(x, z, t) = \frac{i \kappa t}{\omega \epsilon_0 \epsilon_m} (A_i^- e^{-\kappa t z} - B_i^- e^{\kappa t z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_x^\ell(x, z, t) = \frac{1}{\omega \epsilon_0} (C_i^- e^{-\kappa_\ell z} + D_i^- e^{\kappa_\ell z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_z^t(x, z, t) = \frac{-k_x}{\omega \epsilon_0 \epsilon_m} (A_i^- e^{-\kappa t z} + B_i^- e^{\kappa t z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_z^\ell(x, z, t) = \frac{-\kappa_\ell}{i k_x \omega \epsilon_0} (C_i^- e^{-\kappa_\ell z} - D_i^- e^{\kappa_\ell z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \end{array} \right. \quad (\text{IV.120})$$

— Dans le diélectrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{y_d}(x, z, t) = (A_{i+1}^+ e^{i k_d z} + B_{i+1}^+ e^{-i k_d z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_x(x, z, t) = \frac{k_d}{\omega \epsilon_0 \epsilon_d} (A_{i+1}^+ e^{i k_d z} - B_{i+1}^+ e^{-i k_d z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_z(x, z, t) = \frac{-k_x}{\omega \epsilon_0 \epsilon_d} (A_{i+1}^+ e^{i k_d z} + B_{i+1}^+ e^{-i k_d z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \end{array} \right. \quad (\text{IV.121})$$

Au passage du métal au diélectrique, les champs sont toujours continus, et la condition sur la polarisation des électrons libres est toujours vérifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{y_d}(0) = H_{y_m}(0) \\ E_x(0) = E_x^t(0) + E_x^\ell(0) \\ E_z^\ell(0) = \frac{\kappa_\ell \Omega}{\omega \epsilon_0 k_x} H_{y_m}(0) \end{array} \right. \quad (\text{IV.122})$$

Soit,

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^- + B_i^- = A_{i+1}^+ + B_{i+1}^+ \end{array} \right. \quad (\text{IV.123})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_i^- (A_i^- - B_i^-) + C_i^- + D_i^- = b_{i+1}^+ (A_{i+1}^+ - B_{i+1}^+) \end{array} \right. \quad (\text{IV.124})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_i^- - C_i^- = i \Omega (A_i^- + B_i^-) \end{array} \right. \quad (\text{IV.125})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. \quad (\text{IV.126})$$

Avec,

$$b_i^- = \frac{i \kappa t}{\epsilon_m} \quad \text{et} \quad b_{i+1}^+ = \frac{k_d}{\epsilon_d} \quad (\text{IV.127})$$

On cherche à obtenir une matrice d'interface au passage du métal au diélectrique suivante :

$$\begin{pmatrix} A_i^- \\ C_i^- \\ B_{i+1}^+ \end{pmatrix} = M_{Int_{met \rightarrow diel}} \begin{pmatrix} B_i^- \\ D_i^- \\ A_{i+1}^+ \end{pmatrix} \quad (\text{IV.128})$$

Expression de A_i^-

Le coefficient A_i^- est exprimé en fonction de B_i^- , D_i^- et A_{i+1}^+ . A l'aide des équations (IV.123) et (IV.124) du système (IV.126), l'équation suivante est obtenue :

$$(b_i^- + b_{i+1}^+)A_i^- + (b_{i+1}^+ - b_i^-)B_i^- + C_i^- + D_i^- = 2b_{i+1}^+ A_{i+1}^+ \quad (\text{IV.129})$$

Les équations (IV.123) et (IV.125) permettent d'écrire la deuxième équation :

$$D_i^- - C_i^- = i\Omega A_i^- + i\Omega B_i^- \quad (\text{IV.130})$$

Ainsi, à l'aide de ces deux dernières équations (IV.129) et (IV.130), la première partie de la matrice de passage du métal au diélectrique s'écrit :

$$A_i^- = \frac{b_i^- - b_{i+1}^+ + i\Omega}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} B_i^- - \frac{2}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} D_i^- + \frac{2b_{i+1}^+}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} A_{i+1}^+ \quad (\text{IV.131})$$

Expression de C_i^-

Nous cherchons l'expression du coefficient C_i^- , en fonction de B_i^- , D_i^- et A_{i+1}^+ .

A l'aide des expressions précédemment obtenues (IV.129) et (IV.130), nous pouvons définir la deuxième partie de la matrice de passage du métal au diélectrique :

$$C_i^- = -\frac{2i\Omega b_i^-}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} B_i^- + \frac{b_i^- + b_{i+1}^+ + i\Omega}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} D_i^- - \frac{2i\Omega b_{i+1}^+}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} A_{i+1}^+ \quad (\text{IV.132})$$

Expression de B_{i+1}^+

Enfin, nous cherchons à exprimer le coefficient B_{i+1}^+ , en fonction de B_i^- , D_i^- et A_{i+1}^+ . Les équations (IV.123) et (IV.124) du système (IV.126), donnent l'équation :

$$-2b_i^- B_i^- = (b_{i+1}^+ - b_i^-)A_{i+1}^+ - (b_i^- + b_{i+1}^+)B_{i+1}^+ - C_i^- - D_i^- \quad (\text{IV.133})$$

Les équations (IV.133), (IV.123) et (IV.125) du système (IV.126) permettent de définir la dernière partie de la matrice de passage du métal au diélectrique :

$$B_{i+1}^+ = \frac{2b_i^-}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} B_i^- - \frac{2b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} D_i^- + \frac{b_{i+1}^+ - b_i^- + i\Omega}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} A_{i+1}^+ \quad (\text{IV.134})$$

Expression de la matrice interface du métal au diélectrique

La matrice d'interface du métal au diélectrique s'écrit :

$$M_{Int_{met \rightarrow diel}} = \frac{1}{b_i^- + b_{i+1}^+ - i\Omega} \begin{pmatrix} b_i^- - b_{i+1}^+ + i\Omega & -2 & 2b_{i+1}^+ \\ -2i\Omega b_i^- & b_i^- + b_{i+1}^+ + i\Omega & -2i\Omega b_{i+1}^+ \\ 2b_i^- & -2 & b_{i+1}^+ - b_i^- + i\Omega \end{pmatrix} \quad (\text{IV.135})$$

IV.4-c Matrices de Couche

Pour définir le champ électrique et magnétique dans l'un des matériaux, il faut définir les amplitudes montantes et descendantes du champ dans le matériau.

Dans le diélectrique

Nous considérons la couche i , située entre l'interface supérieure à $z = z_i$ et l'interface inférieure à $z = z_{i+1}$. Le champ dans la couche de diélectrique j a l'expression :

$$H_y = \left(A_i^+ e^{ik_z^i(z-z_i)} + B_i^+ e^{-ik_z^i(z-z_i)} \right) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{IV.136})$$

$$= \left(A_i^- e^{ik_z^i(z-z_{i+1})} + B_i^- e^{-ik_z^i(z-z_{i+1})} \right) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{IV.137})$$

Avec, $k_z^i = \sqrt{\varepsilon_i k_0^2 - k_x^2}$. Et h_i est l'épaisseur de la couche i tel que $h_i = z_i - z_{i+1}$. Ainsi, la matrice de couche pour une couche diélectrique peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} A_i^+ \\ B_i^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{ik_z^i h_i} \\ e^{ik_z^i h_i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i^- \\ B_i^+ \end{pmatrix} \quad (\text{IV.138})$$

Dans le métal

Dans la couche de métal i , nous aurons de la même façon :

$$H_y = \left(A_i^+ e^{-\kappa_i(z-z_i)} + B_i^+ e^{\kappa_i(z-z_i)} \right) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{IV.139})$$

$$= \left(A_i^- e^{-\kappa_i(z-z_{i+1})} + B_i^- e^{\kappa_i(z-z_{i+1})} \right) e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad (\text{IV.140})$$

Et, pour les champs électriques longitudinaux :

$$E_x^\ell = \frac{1}{\omega \varepsilon_0} (C_i^+ e^{-\kappa_i(z-z_i)} + D_i^+ e^{\kappa_i(z-z_i)}) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{IV.141})$$

$$= \frac{1}{\omega \varepsilon_0} (C_i^- e^{-\kappa_i(z-z_{i+1})} + D_i^- e^{\kappa_i(z-z_{i+1})}) e^{i(k_x x - \omega t)}. \quad (\text{IV.142})$$

Ainsi la matrice de couche dans une épaisseur de métal j sera :

$$\begin{bmatrix} A_i^+ \\ C_i^+ \\ B_i^- \\ D_i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-\kappa_i h_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\kappa_i h_i} \\ e^{-\kappa_i h_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_i h_i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i^+ \\ D_i^+ \\ A_i^- \\ C_i^- \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.143})$$

IV.4-d Méthode de cascading

Les matrices d'interfaces et les matrices de couches étant définies, nous allons les combiner à travers une méthode de cascading pour obtenir la matrice de diffusion de la structure toute entière. Ces différentes matrices, contrairement au cas usuel local, ne sont pas des matrices carrées. Il est cependant possible d'écrire un algorithme de cascading en divisant les matrices en blocs.

Supposons qu'on ait deux matrices à cascader. D'abord

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.144})$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.145})$$

Les blocs ici ne sont pas forcément carrés. En effet, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} et \mathbf{F} peut représenter des vecteurs $\begin{bmatrix} A_i^\pm \\ C_i^\pm \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} B_i^\pm \\ D_i^\pm \end{bmatrix}$, ou simplement une amplitude $[A_i^\pm]$ ou $[B_i^\pm]$, selon l'interface ou la couche i en question.

Ainsi, bien que les matrices ne soient pas carrées, nous pouvons les cascader selon

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{12}(\mathbf{1} - \mathbf{S}_{11}\mathbf{U}_{22})^{-1}\mathbf{U}_{11}\mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{12}(\mathbf{1} - \mathbf{S}_{11}\mathbf{U}_{22})^{-1}\mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21}(\mathbf{1} - \mathbf{S}_{22}\mathbf{U}_{11})^{-1}\mathbf{S}_{21} & \mathbf{U}_{22} + \mathbf{U}_{21}(\mathbf{1} - \mathbf{S}_{22}\mathbf{U}_{11})^{-1}\mathbf{S}_{22}\mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.146})$$

Ce cascadage nous permet d'accéder au coefficient de réflexion et de transmission de la structure toute entière. Mais il peut également permettre de calculer le champ à l'intérieur d'une couche. Dans ce cas, une façon de déterminer les amplitudes nécessaires à la définition du champ dans une couche, il faut calculer les variables éliminées lors du processus de cascadage. En effet, le cascadage précédent montre que lors du processus, les vecteurs \mathbf{B} et \mathbf{D} ont été éliminés. Ce sont pourtant eux qui permettent d'obtenir les amplitudes des champs à l'intérieur de la structure. Ces amplitudes peuvent être obtenues à l'aide des expressions suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{1} - \mathbf{S}_{22}\mathbf{U}_{11})^{-1}\mathbf{S}_{21} & (\mathbf{1} - \mathbf{S}_{22}\mathbf{U}_{11})^{-1}\mathbf{S}_{22}\mathbf{U}_{12} \\ (\mathbf{1} - \mathbf{S}_{11}\mathbf{U}_{22})^{-1}\mathbf{U}_{11}\mathbf{S}_{21} & (\mathbf{1} - \mathbf{S}_{11}\mathbf{U}_{22})^{-1}\mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.147})$$

Ainsi, nous pouvons retrouver les expressions des amplitudes A_i^\pm , B_i^\pm , C_i^\pm , et D_i^\pm .

En généralisant ainsi le formalisme des matrices de diffusion au cas non-local, nous avons un outil précieux pour pouvoir explorer l'influence de la non-localité sur des structures complexes telles que les lentilles hyperboliques. Cette méthode a été implémentée dans un programme permettant de simuler la propagation de faisceaux dans un ensemble de couches[112]. C'est ce que nous proposons de faire dans la partie suivante.

IV.5 Impact de la non localité sur une lentille plate hyperbolique

Nous étudions ici l'impact que la non-localité peut avoir sur une lentille plate, à la fois au niveau de la distance focale et de la relation de conjugaison, ainsi qu'au niveau de la résolution. Pour cette étude, nous reprenons les paramètres des exemples utilisés dans le chapitre 3. La théorie appliquée dans la troisième partie pour obtenir la relation de conjugaison en fonction de la relation de dispersion, et les facteurs responsables de la résolution, restent a priori valable. Cette théorie est basée sur le vecteur d'onde de Bloch complexe, calculé pour un empilement métallo diélectrique. Ce qui change, c'est la relation de dispersion elle-même, donc le point de fonctionnement de la lentille. Il reste à vérifier que cette théorie s'applique sans problème majeur, et à estimer l'ampleur de la correction non-locale.

IV.5-a Formule d'homogénéisation

Dans le troisième chapitre, nous avons montré qu'un métamatériau peut être vu par la lumière comme un milieu homogène anisotrope lorsque la lentille fonctionne en régime d'homogénéisation. Cette démonstration est basée sur la relation de dispersion d'un empilement périodique métal/diélectrique.

Cette théorie peut être étendue à un empilement métal/diélectrique supposé non local, en utilisant la relation de dispersion non locale :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\Omega \varepsilon_m}{\kappa_t} \frac{\sinh(\kappa_t h_m)}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \right) \cos(K D) = \\ & \cos(k_d h_d) \cosh(\kappa_t h_m) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_d \kappa_t}{k_d \varepsilon_m} - \frac{k_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d \kappa_t} + \frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{k_d \kappa_t} \Omega^2 \right) \sin(k_d h_d) \sinh(\kappa_t h_m) \\ & + \frac{\Omega}{\sinh(\kappa_\ell h_m)} \left[\frac{\varepsilon_d}{k_d} \sin(k_d h_d) \left(1 - \cosh(\kappa_t h_m) \cosh(\kappa_\ell h_m) \right) - \frac{\varepsilon_m}{\kappa_t} \cos(k_d h_d) \cosh(\kappa_\ell h_m) \sinh(\kappa_t h_m) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.148})$$

Le régime d'homogénéisation implique, comme pour le cas d'un matériau supposé local, qu'on ait $h_d \ll \lambda$ et $h_m \ll \lambda$. Si de plus, k_x n'est pas très grand devant $k_0 \sqrt{\varepsilon}$, nous pouvons poser que

$$\begin{cases} \bar{\kappa}_t h_m \ll 1 \\ \bar{k}_d h_d \ll 1 \end{cases} \quad (\text{IV.149})$$

Ainsi, nous pouvons utiliser les développements limités du cosinus et du sinus à l'ordre 2, soit :

$$\begin{cases} \cos(\bar{k}_d h_d) \approx 1 - \frac{\bar{k}_d^2 h_d^2}{2} \approx 1 - \frac{(k_0^2 \varepsilon_d - k_x^2) h_d^2}{2} \\ \sin(\bar{k}_d h_d) \approx \bar{k}_d h_d \\ \cosh(\bar{\kappa}_t h_m) \approx 1 + \frac{\bar{\kappa}_t^2 h_m^2}{2} \approx 1 - \frac{(k_0^2 \varepsilon_m - k_x^2) h_m^2}{2} \\ \sinh(\bar{\kappa}_t h_m) \approx \bar{\kappa}_t h_m \\ \cos(K d) \approx 1 - \frac{K^2 d^2}{2} \end{cases} \quad (\text{IV.150})$$

Pour trouver une limite à la relation de dispersion, on supposera de plus que la longueur de pénétration de l'onde longitudinale dans le métal reste petite devant l'épaisseur des couches métalliques, soit $\frac{1}{\bar{\kappa}_\ell h_m} \ll 1$. Pour obtenir les paramètres effectifs, nous utiliserons alors les développements limités suivants :

$$\begin{cases} \cosh(\bar{\kappa}_\ell h_m) \approx \sinh(\bar{\kappa}_\ell h_m) \approx \frac{e^{\bar{\kappa}_\ell h_m}}{2} \\ \frac{1}{\sinh(\bar{\kappa}_\ell h_m)} \ll 1 \end{cases} \quad (\text{IV.151})$$

A l'aide de ces différents développements, nous pouvons donner un développement limité du vecteur d'onde de Bloch complexe non local. En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 3, nous obtenons l'expression suivante :

$$\bar{K}^2 d^2 = k_0^2 \left[(\bar{\varepsilon}_m h_m + \bar{\varepsilon}_d h_d) d \right] - k_x^2 \left[(\bar{\varepsilon}_m h_m + \bar{\varepsilon}_d h_d) \left(\frac{h_d}{\bar{\varepsilon}_d} + \frac{h_m}{\bar{\varepsilon}_m} \right) \right] + 2k_x^2 \frac{\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}_m} - \frac{1}{1+\chi_b} \right)}{\bar{\kappa}_\ell} (\bar{\varepsilon}_m h_m + \bar{\varepsilon}_d h_d) \quad (\text{IV.152})$$

On retrouve ainsi la relation de dispersion d'un milieu homogène anisotrope :

$$\frac{\bar{K}^2}{\bar{\varepsilon}_x^{nl}} + \frac{k_x^2}{\bar{\varepsilon}_z^{nl}} = k_0^2 \quad (\text{IV.153})$$

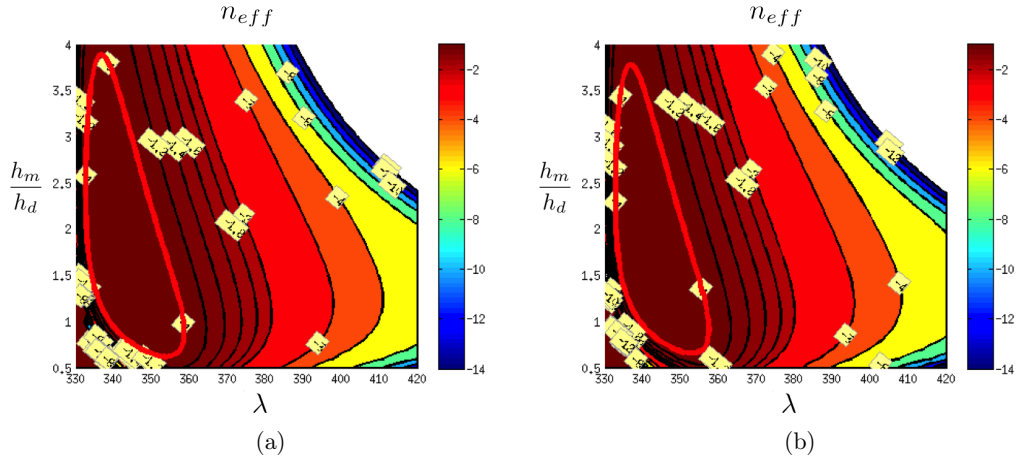


FIGURE IV.2 – Indices de courbures effectifs en fonction du facteur de forme et de la longueur d'onde, obtenus pour une fréquence réduite de 0.16. La courbe iso indice -1 est mise en évidence dans les deux cas : (a) Hypothèse d'un matériau local. (b) Le métal est supposé non local.

Où $\bar{\varepsilon}_x^{nl}$ et $\bar{\varepsilon}_z^{nl}$, sont les éléments du tenseur de permittivité effectifs anisotropes non locale,

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_x^{nl} = \frac{\bar{\varepsilon}_m h_m + \bar{\varepsilon}_d h_d}{d} = \bar{\varepsilon}_x^l \\ \frac{1}{\bar{\varepsilon}_z^{nl}} = \frac{h_d + h_m}{\bar{\varepsilon}_d + \bar{\varepsilon}_m} - 2 \frac{\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}_m} - \frac{1}{1+\chi b}\right)}{\bar{\kappa}_\ell d} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_z^l} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}_z^{Corr}} \end{cases} \quad (IV.154)$$

Ainsi la permittivité effective parallèle aux interfaces n'est pas influencée par l'introduction de la non localité, seule la composante perpendiculaire est modifiée par un terme correctif dépendant des paramètres non locaux.

Nous avons vu que l'indice effectif et la figure de mérite étaient directement liés à la courbure γ . En régime d'homogénéisation, la courbure $\bar{\gamma}$ est directement liée aux paramètres effectifs, nous pouvons alors définir une courbure non locale γ^{nl} , donnée par :

$$\bar{\gamma}^{nl} = \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_x^{nl}}}{\bar{\varepsilon}_z^{nl}} = \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_x^l}}{\bar{\varepsilon}_z^l} + \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_x^l}}{\bar{\varepsilon}_z^{Corr}} = \bar{\gamma}^l + \bar{\gamma}^{Corr} \quad (IV.155)$$

L'indice effectif et la figure de mérite sont alors donnés respectivement par $n_c = \frac{1}{\Re(\bar{\gamma})}$ et $FOM = \left| \frac{\Re(\bar{\gamma})}{\Im(\bar{\gamma})} \right|$, et ils seront influencés par la non-localité. Elle va donc avoir un impact sur la distance focale, obtenue par la relation de conjugaison, ainsi que sur la résolution de la lentille.

Les cartes d'indices effectifs en fonction du facteur de forme et de la longueur d'onde, pour une fréquence de 0.16 (figure IV.2) et de 0.11 (figure IV.3) montrent que lorsque les effets de non localité sont pris en compte, les courbes iso-indice tendent à se refermer légèrement. De façon générale, à une longueur d'onde et rapport d'épaisseur fixes, l'indice effectif sera plus élevé lorsque la non-localité est prise en compte.

De la même façon la figure de mérite FOM dépend uniquement de la courbure γ . Cette quantité va donc être modifiée par l'introduction de la non-localité. La figure IV.4 représente la figure de mérite, tracée pour une lentille plate (Ag/TiO_2) à une fréquence réduite de 0.11.

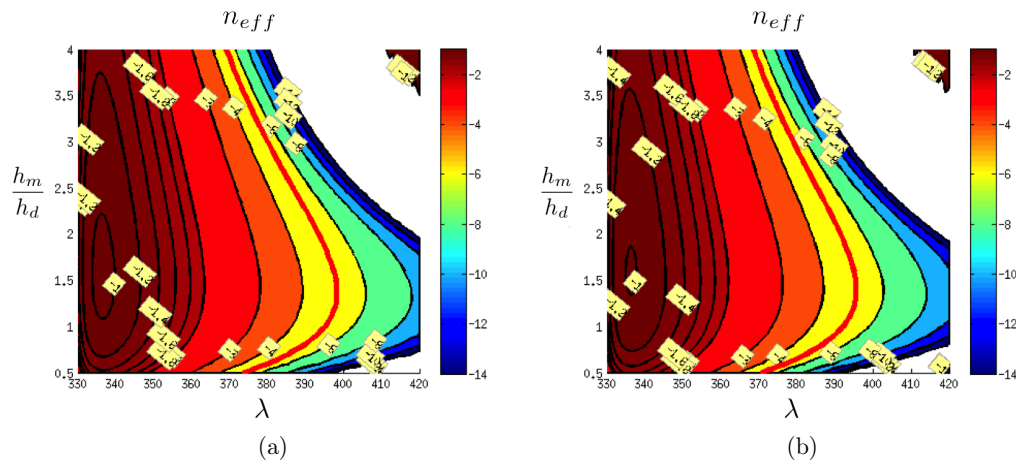


FIGURE IV.3 – Indices de courbures effectifs en fonction du facteur de forme et de la longueur d’onde, obtenue pour une fréquence réduite de 0.11. La courbe iso indice -5 est mise en évidence dans les deux cas : (a) Hypothèse d’un matériau local. (b) Le métal est supposé non local.

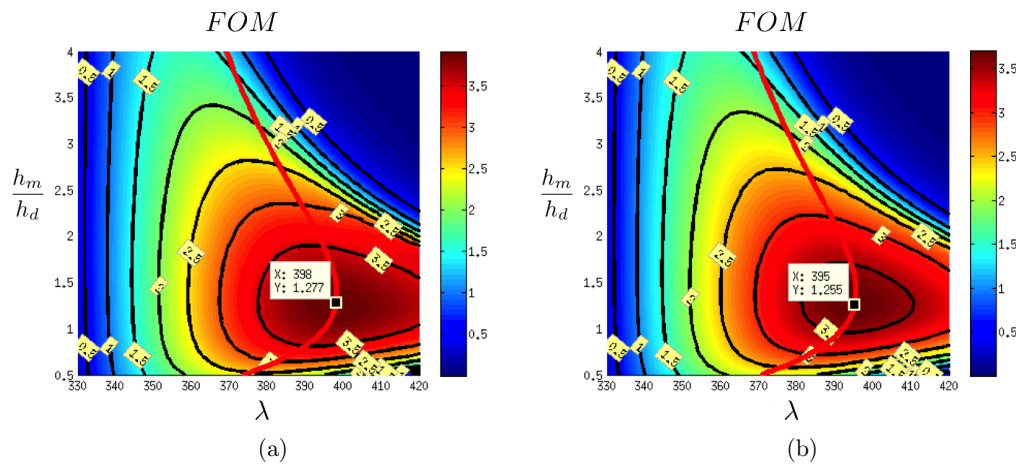


FIGURE IV.4 – Figure de mérite en fonction du facteur de forme et de la longueur d’onde, obtenue pour une fréquence réduite de 0.11. La courbe iso indice -5 est superposée dans les deux cas aux cartes du facteur de forme : (a) Hypothèse d’un matériau local. (b) Le métal est supposé non local.

Nous constatons comme nous l'avons prévu, que la figure de mérite est légèrement modifiée par la prise en compte de la non-localité. Elle a tendance à être plus petite que ce qui est donné par la théorie locale. Nous pouvons remarquer un léger décalage de la valeur de la figure de mérite vers les basses longueurs d'ondes. Ceci entraîne donc une variation du point de fonctionnement optimal pour la résolution de la lentille.

IV.5-b Impact de la non localité sur la distance focale

Nous venons de montrer que ces nouveaux phénomènes ont un impact sur l'indice effectif de l'empilement métallo-diélectrique. D'après la relation de conjugaison, ceci va impliquer une variation de la distance focale image de la lentille directement imputable à la non-localité. Pour étudier cet impact, nous utilisons de nouveau une lentille constituée de 20 couches d'argent et de diamant, éclairée par un faisceau gaussien de longueur d'onde 350 nm. A l'aide de la relation de dispersion (IV.101), nous observons la variation de la distance focale en fonction de la fréquence réduite.

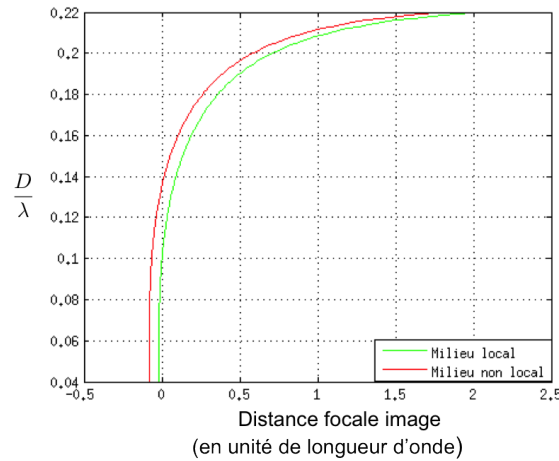


FIGURE IV.5 – Évolution de la distance focale d'un empilement de 20 couches d'argent et de diamant à 350nm. La courbe rouge correspond au cas où le métal est supposé local. La courbe verte correspond au cas où la non localité du métal est prise en compte

Cette figure IV.5 montre que l'hypothèse d'un métal non local modifie la valeur de la distance focale attendue. Pour une même lentille, la distance focale théorique est ainsi plus faible que la valeur prédite avec une théorie locale.

Pour valider ce résultat basé sur l'étude de l'indice effectif, nous avons tracé la carte du champ magnétique dans la structure. Pour tracer les cartes du champ magnétique, nous utilisons le formalisme des matrices S non locales décrit dans les paragraphes précédents. Ce formalisme nous permet d'obtenir la composition du champ à travers l'intégralité de la structure, et ainsi accès aux champs magnétiques qui se propagent.

Bien que la différence entre le cas local et non local soit faible, nous pouvons noter un écart constant sur la distance focale image. Comme cet écart est constant, quand l'image est proche de la lentille, l'effet est important en valeur relative. En effet, en choisissant une

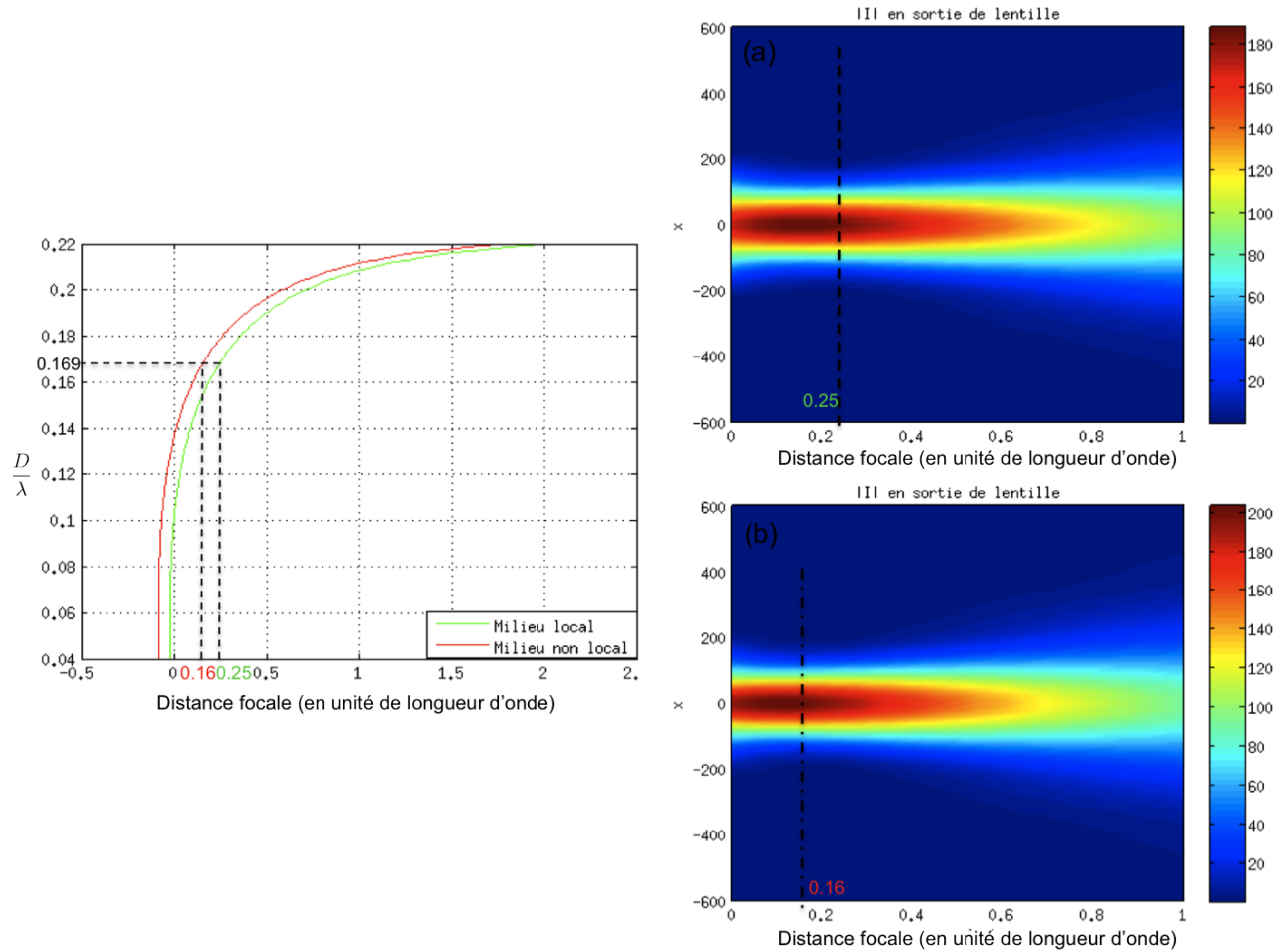


FIGURE IV.6 – Carte du champ magnétique en sortie d’un empilement constitué de 20 couches d’argent et de diamant, éclairé par un faisceau gaussien de longueur d’onde de 350 nm, avec un waist de $\frac{\lambda}{20}$. Les courbes ont été tracées pour une fréquence réduite de 0.169. (a) Carte de champ magnétique à travers la structure avec la théorie locale, l’image se focalise à une distance de 0.25λ .

(b) Carte de champ magnétique à travers la structure dans le cadre du modèle hydrodynamique, l’image se focalise à une distance de 0.16λ .

structure fonctionnant à une fréquence réduite de 0.169, la distance focale image obtenue est de 0.16λ au lieu de 0.25λ , soit une différence de 36%. La figure IV.6(a) représente la propagation du champ magnétique à la sortie de la lentille, lorsque la non localité n'est pas prise en compte. Dans ce cas, l'image doit théoriquement se trouver à une distance focale de 0.25λ , ce que l'on observe sur la carte de champ. Le cas (b) représente la propagation du champ magnétique à la sortie de la même lentille lorsque les effets de la non localité sont prises en compte dans le métal. Nous constatons, que la carte de champ donne bien les résultats prédits en utilisant la relation de conjugaison. L'image se focalise plus proche du bord de la lentille, que ce que l'on attend lorsque l'on néglige les effets de non localité. L'image se trouve à une distance focale de 0.16λ .

IV.5-c Impact de la non localité sur la résolution

Nous avons montré précédemment que la résolution d'une lentille plate est directement liée au facteur de mérite (FOM) et à l'indice effectif de la structure. Nous avons vu que ces deux paramètres sont influencés par la non-localité. La résolution sera donc aussi modifiée. Cherchons à étudier ce phénomène en considérant un empilement d'argent et de TiO_2 . La longueur d'onde et la figure de mérite sont choisies de façon à obtenir un indice effectif de -5 .

Lorsque le matériau est supposé local, le point de fonctionnement permettant d'obtenir un FOM le plus élevé et donc une meilleure résolution est obtenu pour $\lambda = 398nm$ et $\frac{h_m}{h_d} = 1.28$. En prenant la non-localité en compte, ce point de fonctionnement devient ($\lambda = 395nm$ et $\frac{h_m}{h_d} = 1.28$). Nous comparons donc la résolution de ces deux structures en adaptant le point de fonctionnement de manière à ce qu'il soit optimal dans les deux cas. Si nous considérons un empilement de 4 couches d'argent et de TiO_2 , à une fréquence réduite de 0.11 et dont les épaisseurs respectent un facteur de forme de 1.28 alors (i) la structure optimale locale est constituée de couches d'argent d'épaisseur 24.6 nm et de TiO_2 d'épaisseur 19.2 nm et (ii) la structure non locale est constituée de couches d'argent d'épaisseur 24.4 nm et de 19.5 nm de TiO_2 .

La figure IV.7 montre alors la résolution obtenue pour les deux structures optimales locale et non-locale. On trouve qu'une fois le point de fonctionnement modifié, on arrive à retrouver en tenant compte des effets non-locaux la même résolution (voire super-résolution) que dans le cas local.

IV.6 Conclusion

Pour résumer, l'impact de la non-localité sur les lentilles hyperboliques est modeste. Il est nécessaire de le prendre en compte surtout quand on veut des images très proches de la lentille, quand la résolution est maximale. Le décalage constant que la correction non-locale apporte à la position du foyer peut en effet changer le point de fonctionnement de la lentille de façon non négligeable. Cependant, lorsqu'on tient compte de la correction non-locale, on arrive à retrouver des lentilles optimisées ayant des propriétés (distance focale et résolution) tout à fait similaires à ce qui a été prévu au chapitre 3.

Nous avons ainsi obtenu un impact de la non-localité bien moins important que ce qui a été prévu par ailleurs [98]. Ceci est dû au choix du modèle et des paramètres des maté-

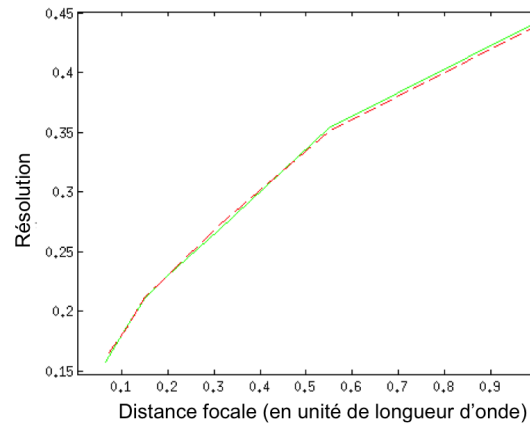


FIGURE IV.7 – Résolution d’une lentille plate constituée d’argent et de TiO_2 en fonction de la distance focale. (courbe verte) lentille hyperbolique locale (courbe rouge) Lentille hyperbolique en tenant compte de la non-localité

riaux. En choisissant des conditions aux limites et une permittivité réaliste basée sur des données expérimentales, on arrive à la conclusion que la non-localité apporte une correction somme toute légère. C’est finalement assez normal : la non-localité se manifeste essentiellement quand des modes à grand vecteur d’onde sont excités (comme les gap-plasmons). Ce n’est pas le cas ici, et même si des vecteurs d’ondes importants jouent un rôle dans la super-résolution, cela explique cet impact modeste. C’est pour d’autres structures, comme les nano-réseaux (des fentes nanométriques et très peu profondes absorbant la lumière de façon très efficace), que la non-localité a un impact beaucoup plus notable. Les outils développés ici, comme la relation de dispersion, ont permis à l’équipe d’étudier ce genre de phénomènes également.

Conclusion

Le domaine des métamatériaux hyperboliques, et plus particulièrement ceux obtenus avec des empilements métallo-diélectriques est en plein essor. Notre travail s'est concentré sur ces structures, afin d'explorer leur potentiel pour l'imagerie super-résolue, tout en tenant compte de phénomènes physiques fins, comme la non-localité.

Nous avons montré qu'on pouvait effectivement utiliser une épaisseur d'un métamatériau hyperbolique comme une lentille, en ayant un objet et une image potentiellement décollés des interfaces de la structure. Nous avons fourni une relation de conjugaison permettant de calculer rapidement la position des points conjugués en fonction d'une caractéristique relativement simple à extraire de la relation de dispersion hyperbolique : l'indice effectif.

Nous avons ensuite cherché à comprendre à quel point ce type de lentille pouvait fournir une image avec une résolution meilleure que la limite théorique imposée par la diffraction. La résolution de ces lentilles, bien qu'effectivement diminuée par rapport à une structure idéale sans perte, permet tout de même de dépasser cette limite clairement, à condition que l'image ne se fasse pas trop loin des bords de la structure. Nous avons montré une façon d'optimiser ces lentilles de façon très systématique et qu'il était théoriquement possible de faire mieux que l'état de l'art actuel en matière de résolution.

Au passage, nous avons montré, en utilisant des empilements métallo-diélectriques que la réfraction négative pouvait être liée à l'existence de modes à fuites particuliers occasionnant des décalages négatifs à la réflexion - et que ces décalages pouvaient être considérés comme une signature de la réfraction négative.

Enfin, nous avons évalué l'impact de la non-localité dans les métaux sur les propriétés optiques des empilements métallo-diélectriques. Cet impact est modeste, comme on pouvait s'y attendre. Mais il n'est pas totalement négligeable. Prendre en compte la non-localité ne change pas les limites absolues à la résolution que l'on peut obtenir avec la théorie locale, même si le point de fonctionnement de la structure est modifié. Nous avons développé une méthode permettant de prendre simplement en compte ces effets, et proposé un code que nous publierons en même temps que la méthode, dans l'espoir qu'il soit largement utilisé par la communauté.

Les matériaux hyperboliques peuvent être employés pour contrôler l'émission thermique d'un corps, et il pourrait être intéressant de voir si les stratégies d'optimisation que nous avons utilisées pour améliorer la résolution ne pourraient pas être utiles dans ce cadre également. Bien sûr, nous avons bien montré que la super-résolution ne pouvait être atteinte que pour des images se formant très près de la lentille. Il n'est pas question de vouloir faire un microscope avec de telles lentilles. Mais avec des empilements métallo-diélectriques courbés, on peut former des hyperlentilles capables de faire des images lointaines avec une super-résolution. Nous espérons que les travaux présentés ici auront une influence sur la façon de

concevoir ce type d'objet.

Enfin, la non-localité semble avoir un impact sur les résonances de particules couplées à un film, les pointes de microscopes en champ proche ou encore sur les nano-réseaux (des réseaux métalliques de fentes de quelques nanomètres de largeur et de profondeur). Il faut de meilleures méthodes numériques pour pouvoir prendre ces effets en compte, même s'ils ne changent pas fondamentalement les conclusions qu'on peut obtenir avec des théories locales.

Pour toutes ces raisons, nous espérons vivement que la communauté des chercheurs en nanophotonique utilisera le plus largement possible les résultats présentés dans ce manuscrit.

Bibliographie

- [1] E. Yablonovitch, “Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics”, *Physical review letters* **58** 2059 (1987).
- [2] J. B. Pendry, “Negative refraction makes a perfect lens”, *Physical review letters* **85** 3966–3969 (2000).
- [3] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ ”, *Physics-Uspekhi* **10** 509–514 (1968).
- [4] C. Ciracì, R. Hill, J. Mock, Y. Urzhumov, A. Fernández-Domínguez, S. Maier, J. Pendry, A. Chilkoti, and D. Smith, “Probing the Ultimate Limits of Plasmonic Enhancement”, *Science* **337** 1072–1074 (2012).
- [5] M. Steel, R. Zoli, C. Grillet, R. McPhedran, C. M. de Sterke, A. Norton, P. Bassi, and B. Eggleton, “Analytic properties of photonic crystal superprism parameters”, *Physical Review E* **71** 056608 (2005).
- [6] P. V. Parimi, W. T. Lu, P. Vodo, and S. Sridhar, “Photonic crystals : Imaging by flat lens using negative refraction”, *Nature* **426** 404–404 (2003).
- [7] A. Berrier, M. Mulot, M. Swillo, M. Qiu, L. Thylén, A. Talneau, and S. Anand, “Negative refraction at infrared wavelengths in a two-dimensional photonic crystal”, *Physical review letters* **93** 073902 (2004).
- [8] T. Matsumoto, K.-S. Eom, and T. Baba, “Focusing of light by negative refraction in a photonic crystal slab superlens on silicon-on-insulator substrate”, *Optics letters* **31** 2786–2788 (2006).
- [9] J. Arlandis, E. Centeno, R. Polles, A. Moreau, J. Campos, O. Gauthier-Lafaye, and A. Monmayrant, “Mesoscopic self-collimation and slow light in all-positive index layered photonic crystals”, *Physical Review Letters* **108** 037401 (2012).
- [10] H. Kosaka, T. Kawashima, A. Tomita, M. Notomi, T. Tamamura, T. Sato, and S. Kawakami, “Self-collimating phenomena in photonic crystals”, *Applied Physics Letters* **74** 1212–1214 (1999).
- [11] D. W. Prather, S. Shi, J. Murakowski, G. J. Schneider, A. Sharkawy, C. Chen, B. Miao, and R. Martin, “Self-collimation in photonic crystal structures : a new paradigm for applications and device development”, *Journal of Physics D : Applied Physics* **40** 2635 (2007).
- [12] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade, *Photonic crystals : molding the flow of light* (Princeton university press, 2011).
- [13] S. John *et al.*, “Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices”, *Physical review letters* **58** 2486–2489 (1987).

-
- [14] R. Zengerle, “Light propagation in singly and doubly periodic planar waveguides”, *Journal of modern optics* **34** 1589–1617 (1987).
- [15] E. Yablonovitch, T. Gmitter, and K. Leung, “Photonic band structure : The face-centered-cubic case employing nonspherical atoms”, *Physical review letters* **67** 2295 (1991).
- [16] M. Gerken and D. A. Miller, “Multilayer thin-film structures with high spatial dispersion”, *Applied Optics* **42** 1330–1345 (2003).
- [17] M. Bergmair, M. Huber, and K. Hingerl, “Band structure, Wiener bounds, and coupled surface plasmons in one dimensional photonic crystals”, *Applied physics letters* **89** 081907–081907 (2006).
- [18] R. Pollès, E. Centeno, J. Arlandis, and A. Moreau, “Self-collimation and focusing effects in zero-average index metamaterials”, *Opt. Express* **19** 6149–6154 (2011).
- [19] D. R. Smith and D. Schurig, “Electromagnetic Wave Propagation in Media with Indefinite Permittivity and Permeability Tensors”, *Phys. Rev. Lett.* **90** 077405 (2003).
- [20] R. Petit, *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique : lois générales, calcul du champ à partir des sources, propagation libre et guidée, cavités, réflexion, réfraction, diffraction, utilisation des distributions en électromagnétisme* (Masson, 1989).
- [21] F. Abeles, “Recherches sur la propagation des ondes électromagnétiques sinusoidales dans les milieux stratifiés : application aux couches minces”, *Ann. Phys.(Paris)* **5** 596–640 (1950).
- [22] A. Taflove, “Computational electrodynamics : The finite-difference time-domain method”, (1995).
- [23] P. Yeh, A. Yariv, and C.-S. Hong, “Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory”, *Journal of the Optical Society of America* **67** 423–438 (1977).
- [24] J. Pendry and A. MacKinnon, “Calculation of photon dispersion relations”, *Physical Review Letters* **69** 2772–2775 (1992).
- [25] L. Botten, T. White, A. Asatryan, T. Langtry, C. M. de Sterke, and R. McPhedran, “Bloch mode scattering matrix methods for modeling extended photonic crystal structures. I. Theory”, *Physical Review E* **70** 056606 (2004).
- [26] P. Lalanne and G. M. Morris, “Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization”, *J. Opt. Soc. Am. A* **13** 779 (1996).
- [27] G. Granet and B. Guizal, “Efficient implementation of the coupled-wave method for metallic lamellar gratings in TM polarization”, *J. Opt. Soc. Am. A* **13** 1019 (1996).
- [28] Y. Fu and X. Zhou, “Plasmonic lenses : a review”, *Plasmonics* **5** 287–310 (2010).
- [29] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling electromagnetic fields”, *Science* **312** 1780–1782 (2006).
- [30] D. Schurig, J. Mock, B. Justice, S. Cummer, J. Pendry, A. Starr, and D. Smith, “Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies”, *Science* **314** 977–980 (2006).
- [31] W. Cai, U. K. Chettiar, A. V. Kildishev, and V. M. Shalaev, “Optical cloaking with metamaterials”, *Nature photonics* **1** 224–227 (2007).

-
- [32] U. Leonhardt, “Optical metamaterials : Invisibility cup”, *Nature Photonics* **1** 207–208 (2007).
- [33] O. Vanbésien, N. Fabre, X. Mélique, and D. Lippens, “Photonic-crystal-based cloaking device at optical wavelengths”, *Applied optics* **47** 1358–1362 (2008).
- [34] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. Robbins, and W. Stewart, “Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena”, *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on* **47** 2075–2084 (1999).
- [35] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, “Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity”, *Physical review letters* **84** 4184 (2000).
- [36] N. Fang, H. Lee, C. Sun, and X. Zhang, “Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens”, *Science* **308** 534–537 (2005).
- [37] K. Aydin, I. Bulu, and E. Ozbay, “Subwavelength resolution with a negative-index metamaterial superlens”, *Applied physics letters* **90** 254102–254102 (2007).
- [38] N. Fabre, L. Lalouat, B. Cluzel, X. Mélique, D. Lippens, F. de Fornel, and O. Vanbésien, “Optical near-field microscopy of light focusing through a photonic crystal flat lens”, *Physical review letters* **101** 073901 (2008).
- [39] N. I. Zheludev and Y. S. Kivshar, “From metamaterials to metadevices”, *Nature materials* **11** 917–924 (2012).
- [40] I. V. Lindell, S. Tretyakov, K. Nikoskinen, and S. Ilvonen, “BW media—Media with negative parameters, capable of supporting backward waves”, *Microwave and Optical Technology Letters* **31** 129–133 (2001).
- [41] D. R. Smith, P. Kolinko, and D. Schurig, “Negative refraction in indefinite media”, *JOSA B* **21** 1032–1043 (2004).
- [42] C. Parazzoli, R. Greigor, K. Li, B. Koltjenbah, and M. Tanielian, “Experimental verification and simulation of negative index of refraction using Snell’s law”, *Physical Review Letters* **90** 107401 (2003).
- [43] S.-A. Biehs, M. Tschikin, P. Ben-Abdallah, *et al.*, “Hyperbolic Metamaterials as an Analog of a Blackbody in the Near Field”, *Physical Review Letters* **109** (2012).
- [44] P. A. Belov, C. R. Simovski, and P. Ikonen, “Canalization of subwavelength images by electromagnetic crystals”, *Physical review B* **71** 193105 (2005).
- [45] P. A. Belov and Y. Hao, “Subwavelength imaging at optical frequencies using a transmission device formed by a periodic layered metal-dielectric structure operating in the canalization regime”, *Physical Review B* **73** 113110 (2006).
- [46] Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong, C. Sun, and X. Zhang, “Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects”, *science* **315** 1686–1686 (2007).
- [47] A. Salandrino and N. Engheta, “Far-field subdiffraction optical microscopy using metamaterial crystals : Theory and simulations”, *Physical Review B* **74** 075103 (2006).
- [48] P. Belov, “Backward waves and negative refraction in uniaxial dielectrics with negative dielectric permittivity along the anisotropy axis”, *Microwave and Optical Technology Letters* **37** 259–263 (2003).

-
- [49] M. Scalora, G. D'Aguanno, N. Mattiucci, M. J. Bloemer, D. de Ceglia, M. Centini, A. Mandatori, C. Sibilia, N. Akozbek, M. G. Cappeddu, *et al.*, "Negative refraction and sub-wavelength focusing in the visible range using transparent metallo-dielectric stacks", *Optics Express* **15** 508–523 (2007).
- [50] F. Goos and H. Haenchen, "Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflexion", *Ann. Phys.* **1** 333 (1947).
- [51] K. Artmann, "Berechnung der Seitenversetzung des totalreflektierten Strahles", *Annalen der Physik* **437** 87 (1948).
- [52] L.-G. Wang and S.-Y. Zhu, "Large negative lateral shifts from the Kretschmann–Raether configuration with left-handed materials", *Applied Physics Letters* **87** 221102–221102 (2005).
- [53] A. Moreau and D. Felbacq, "Leaky modes of a left-handed slab", *Journal of the European Optical Society : Rapid Publications* **3** 8032 (2008).
- [54] A. Moreau and D. Felbacq, "'Comment on 'Large negative lateral shifts from the Kretschman-Raether configuration with left-handed materials' '", *Applied physics letters* **90** 066102 (2007).
- [55] D. Felbacq, A. Moreau, and R. Smaali, "Goos-Haenchen effect in the gaps of photonic crystals", *Opt. Lett.* (2003).
- [56] T. Paul, C. Rockstuhl, C. Menzel, and F. Lederer, "Resonant Goos-Hänchen and Imbert-Fedorov shifts at photonic crystal slabs", *Physical Review A* **77** 053802 (2008).
- [57] J. He, J. Yi, and S. He, "Giant negative Goos-Hänchen shifts for a photonic crystal with a negative effective index", *Optics express* **14** 3024–3029 (2006).
- [58] B. Gralak, S. Enoch, and G. Tayeb, "Anomalous refractive properties of photonic crystals", *JOSA A* **17** 1012–1020 (2000).
- [59] R. Srivastava, K. Thapa, S. Pati, and S. Ojha, "Negative refraction in 1D photonic crystals", *Sol. Stat. Comm.* (2008).
- [60] J. Benedicto, A. Moreau, R. Pollès, and E. Centeno, "Comment on "Negative refraction in 1D photonic crystals"[Solid State Communications 147 (2008) 157–160]", *Solid State Communications* **151** 354–355 (2011).
- [61] M. Gadsdon, J. Parsons, and J. R. Sambles, "Electromagnetic resonances of a multi-layer metal dielectric stack", *J. Opt. Soc. Am. B* **26** (2009).
- [62] B. Wood, J. Pendry, and D. Tsai, "Directed subwavelength imaging using a layered metal-dielectric system", *Phys. Rev. B* **74** 115116 (2006).
- [63] R. Pollès, *Modes guidés d'un film métallique : à la recherche du couplage contra-directionnel en optique.*, Ph.D. thesis, Université Blaise Pascal 2 (2008).
- [64] J. A. Kong, B.-I. Wu, and Y. Zhang, "Lateral displacement of a Gaussian beam reflected from a grounded slab with negative permittivity and permeability", *Applied physics letters* **80** 2084–2086 (2002).
- [65] F. Krayzel, R. Pollès, A. Moreau, M. Mihailovic, and G. Granet, "Simulation and analysis of exotic non-specular phenomena", *Journal of the European Optical Society-Rapid publications* **5** (2010).

-
- [66] I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov, and Y. S. Kivshar, “Guided modes in negative-refractive-index waveguides”, *Physical Review E* **67** 057602 (2003).
- [67] F. Pillon, H. Gilles, S. Girard, M. Laroche, R. Kaiser, and A. Gazibegovic, “Goos-Hänchen and Imbert-Fedorov shifts for leaky guided modes”, *JOSA B* **22** 1290–1299 (2005).
- [68] F. Bretenaker, A. Le Floch, and L. Dutriaux, “Direct measurement of the optical Goos-Hänchen effect in lasers”, *Physical review letters* **68** 931 (1992).
- [69] M. Laroche, F. Marquier, C. Vandenbem, and J.-J. Greffet, “Polarization conversion with a photonic crystal slab”, *Journal of the European Optical Society-Rapid publications* **3** 8038 (2008).
- [70] J. Benedicto, R. Pollès, A. Moreau, and E. Centeno, “Large negative lateral shifts due to negative refraction”, *Optics letters* **36** 2539–2541 (2011).
- [71] V. P. Drachev, V. A. Podolskiy, and A. V. Kildishev, “Hyperbolic metamaterials : new physics behind a classical problem”, *Optics Express* **21** 15048–15064 (2013).
- [72] D. Smith and D. Schurig, “Electromagnetic wave propagation in media with indefinite permittivity and permeability tensors”, *Physical Review Letters* **90** 077405 (2003).
- [73] J. Sun, J. Zeng, and N. M. Litchinitser, “Twisting light with hyperbolic metamaterials”, *Optics Express* **21** 14975–14981 (2013).
- [74] S.-A. Biehs, M. Tschikin, R. Messina, and P. Ben-Abdallah, “Super-Planckian near-field thermal emission with phonon-polaritonic hyperbolic metamaterials”, *Applied Physics Letters* **102** 131106–131106 (2013).
- [75] Y. Guo and Z. Jacob, “Thermal hyperbolic metamaterials”, *Optics Express* **21** 15014–15019 (2013).
- [76] X. Yang, J. Yao, J. Rho, X. Yin, and X. Zhang, “Experimental realization of three-dimensional indefinite cavities at the nanoscale with anomalous scaling laws”, *Nature Photonics* **6** 450–454 (2012).
- [77] M. J. Bloemer, G. D’Aguanno, M. Scalora, N. Mattiucci, and D. de Ceglia, “Energy considerations for a superlens based on metal/dielectric multilayers”, *Optics express* **16** 19342–19353 (2008).
- [78] N. Mattiucci, G. D’Aguanno, M. Scalora, M. Bloemer, and C. Sibilia, “Transmission function properties for multi-layered structures : application to super-resolution.”, *Optics express* **17** 17517 (2009).
- [79] I. I. Smolyaninov, Y.-J. Hung, and C. C. Davis, “Magnifying superlens in the visible frequency range”, *Science* **315** 1699–1701 (2007).
- [80] J. Rho, Z. Ye, Y. Xiong, X. Yin, Z. Liu, H. Choi, G. Bartal, and X. Zhang, “Spherical hyperlens for two-dimensional sub-diffractive imaging at visible frequencies”, *Nature communications* **1** 143 (2010).
- [81] Y. Xiong, Z. Liu, and X. Zhang, “A simple design of flat hyperlens for lithography and imaging with half-pitch resolution down to 20 nm”, *Applied Physics Letters* **94** 203108–203108 (2009).

-
- [82] E. E. Narimanov and V. M. Shalaev, “Optics : beyond diffraction”, *Nature* **447** 266–267 (2007).
- [83] E. Verhagen, R. de Waele, L. Kuipers, and A. Polman, “Three-dimensional negative index of refraction at optical frequencies by coupling plasmonic waveguides”, *Physical review letters* **105** 223901 (2010).
- [84] T. Xu, A. Agrawal, M. Abashin, K. J. Chau, and H. J. Lezec, “All-angle negative refraction and active flat lensing of ultraviolet light”, *Nature* **497** 470–474 (2013).
- [85] Z. Jacob, L. V. Alekseyev, and E. Narimanov, “Semiclassical theory of the hyperlens”, *JOSA A* **24** A52–A59 (2007).
- [86] K. Vynck, D. Felbacq, E. Centeno, A. Căbuz, D. Cassagne, and B. Guizal, “All-dielectric rod-type metamaterials at optical frequencies”, *Physical review letters* **102** 133901 (2009).
- [87] C. Simovski, “Material parameters of metamaterials (a review)”, *Optics and Spectroscopy* **107** 726–753 (2009).
- [88] M. G. Silveirinha, “Metamaterial homogenization approach with application to the characterization of microstructured composites with negative parameters”, *Physical Review B* **75** 115104 (2007).
- [89] D. R. Smith and J. B. Pendry, “Homogenization of metamaterials by field averaging”, *JOSA B* **23** 391–403 (2006).
- [90] O. Kidwai, S. V. Zhukovsky, and J. Sipe, “Effective-medium approach to planar multilayer hyperbolic metamaterials : Strengths and limitations”, *Physical Review A* **85** 053842 (2012).
- [91] X.-B. Kang, W. Tan, and Z.-G. Wang, “Validity of effective medium theory for metal-dielectric lamellar gratings”, *Optics Communications* **284** 4237–4242 (2011).
- [92] E. Palik, “Handbook of Optical Constants of Solids II Academic”, New York **19912** (1991).
- [93] J. R. DeVore, “Refractive indices of rutile and sphalerite”, *JOSA* **41** 416–417 (1951).
- [94] J. Bénédicto, E. Centeno, and A. Moreau, “Lens equation for flat lenses made with hyperbolic metamaterials”, *Optics letters* **37** 4786–4788 (2012).
- [95] J. Bénédicto, E. Centeno, R. Pollès, and A. Moreau, “Ultimate resolution of indefinite metamaterial flat lenses”, *ArXiv :1307.4270 [physics.optics]*.
- [96] R. Ruppin, “Non-local optics of the near field lens”, *Journal of Physics : Condensed Matter* **17** 1803 (2005).
- [97] R. Ruppin and K. Kempa, “Nonlocal effects on the imaging properties of a silver superlens”, *Physical Review B* **72** 153105 (2005).
- [98] W. Yan, N. Asger Mortensen, and M. Wubs, “Hyperbolic metamaterial lens with hydrodynamic nonlocal response”, *Optics Express* **21** 15026–15036 (2013).
- [99] A. I. Fernandez-Dominguez, A. Wiener, F. J. Garcia-Vidal, S. A. Maier, and J. B. Pendry, “Transformation-Optics Description of Nonlocal Effects in Plasmonic Nanostructures”, *Physical Review Letters* **108** 106802 (2012).

-
- [100] J. A. Scholl, A. L. Koh, and J. A. Dionne, “Quantum plasmon resonances of individual metallic nanoparticles”, *Nature* **483** 421–427 (2012).
- [101] K. Kliever and R. Fuchs, “Anomalous skin effect for specular electron scattering and optical experiments at non-normal angles of incidence”, *Physical Review* **172** 607 (1968).
- [102] R. G. Barrera and A. Bagchi, “Optical reflectance of nonlocal systems”, *Physical Review B* **24** 1612 (1981).
- [103] R. R. Gerhardts and K. Kempa, “Microscopic generalization of the Kliever-Fuchs theory of surface electromagnetic fields”, *Physical Review B* **30** 5704 (1984).
- [104] R. Fuchs and F. Claro, “Multipolar response of small metallic spheres : Nonlocal theory”, *Physical Review B* **35** 3722 (1987).
- [105] R. Fuchs and R. G. Barrera, “Dynamical response of a dipole near the surface of a nonlocal metal”, *Physical Review B* **24** 2940 (1981).
- [106] M. Scalora, M. A. Vincenti, D. de Ceglia, V. Roppo, M. Centini, N. Akozbek, and M. J. Bloemer, “Second- and third-harmonic generation in metal-based structures”, *Phys. Rev. A* **82** 043828 (2010).
- [107] P. Feibelman, “Surface electromagnetic fields”, *Progress in Surface Science* **12** 287–407 (1982).
- [108] A. Liebsch, *Electronic excitations at metal surfaces* (Springer, 1997).
- [109] X. Wang and K. Kempa, “Plasmon polaritons in slot waveguides : Simple model calculations and a full nonlocal quantum mechanical treatment”, *Physical Review B* **75** 245426 (2007).
- [110] A. Moreau, C. Ciraci, and D. R. Smith, “Impact of nonlocal response on metallodielectric multilayers and optical patch antennas”, *Physical Review B* **87** 045401 (2013).
- [111] A. D. Rakic, A. B. Djurišić, J. M. Elazar, and M. L. Majewski, “Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices”, *Applied Optics* **37** 5271–5283 (1998).
- [112] F. Krayzel, R. Pollès, A. Moreau, M. Mihailovic, and G. Granet, “Simulation and analysis of exotic non-specular phenomena”, *Journal of the European Optical Society-Rapid publications* **5** (2010).

Appendices

Annexe : Étude des propriétés d'un multicouche en polarisation TM

A-1 Relation de dispersion

La relation de dispersion est obtenue ici à partir du formalisme des matrices C. Les champs électriques et magnétiques dans chaque couche peuvent s'écrire en polarisation TM :

$$\vec{H}_i(x, y, z, t) = H_{y_i}(x, z, t)\vec{e}_y \quad (\text{A-1})$$

$$\vec{E}_i(x, y, z, t) = E_{x_i}(x, z, t)\vec{e}_x + E_{z_i}(x, z, t)\vec{e}_z \quad (\text{A-2})$$

Avec :

$$H_{y_i}(x, z, t) = (A_i e^{i k_{z_i} z} + B_i e^{-i k_{z_i} z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{A-3})$$

$$E_{z_i}(x, z, t) = -\frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i}} (A_i e^{i k_{z_i} z} + B_i e^{-i k_{z_i} z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{A-4})$$

$$E_{x_i}(x, z, t) = \frac{k_{z_i}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i}} (A_i e^{i k_{z_i} z} - B_i e^{-i k_{z_i} z}) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\text{A-5})$$

Nous supposons que les champs sont pseudo-périodiques, ce qui peut se traduire par :

$$\begin{pmatrix} E_{y_i} \\ H_{x_i} \end{pmatrix}_{z+d} = e^{\pm i K d} \begin{pmatrix} E_{y_i} \\ H_{x_i} \end{pmatrix}_z \quad (\text{A-6})$$

Nous débutons avec,

$$\begin{pmatrix} E_{y_1} \\ H_{x_1} \end{pmatrix}_{z+d_1} = \begin{pmatrix} e^{i k_{z_1} (z+d_1)} & e^{-i k_{z_1} (z+d_1)} \\ \frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{i k_{z_1} (z+d_1)} & -\frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{-i k_{z_1} (z+d_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-7})$$

Et ,

$$\begin{pmatrix} E_{y_1} \\ H_{x_1} \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} e^{i k_{z_1} z} & e^{-i k_{z_1} z} \\ \frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{i k_{z_1} z} & -\frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{-i k_{z_1} z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-8})$$

On a alors,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2 i k_{z_1}} \begin{pmatrix} -\frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{-i k_{z_1} z} & -e^{-i k_{z_1} z} \\ -\frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{i k_{z_1} z} & e^{i k_{z_1} z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y_1} \\ H_{x_1} \end{pmatrix}_z \quad (\text{A-9})$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} E_{y_1} \\ H_{x_1} \end{pmatrix}_{z+d_1} = \quad (\text{A-10})$$

$$= \frac{1}{2 i k_{z_1}} \begin{pmatrix} e^{i k_{z_1} (z+d_1)} & e^{-i k_{z_1} (z+d_1)} \\ \frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{i k_{z_1} (z+d_1)} & -\frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{-i k_{z_1} (z+d_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{-i k_{z_1} z} & -e^{-i k_{z_1} z} \\ -\frac{k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} e^{i k_{z_1} z} & e^{i k_{z_1} z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y_1} \\ H_{x_1} \end{pmatrix}_z \quad (\text{A-11})$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} E_{y_1} \\ H_{x_1} \end{pmatrix}_{z+d_1} = \begin{pmatrix} \cos(k_{z_1} d_1) & \frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1}} \sin(k_{z_1} d_1) \\ \frac{i k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} \sin(k_{z_1} d_1) & \cos(k_{z_1} d_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y_1} \\ H_{x_1} \end{pmatrix}_z \quad (\text{A-12})$$

On appelle donc C_1 , la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos(k_{z_1} d_1) & \frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1}} \sin(k_{z_1} d_1) \\ \frac{i k_{z_1}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} \sin(k_{z_1} d_1) & \cos(k_{z_1} d_1) \end{pmatrix} \quad (\text{A-13})$$

On retrouve la matrice C_2 pour l'épaisseur d_2 , suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos(k_{z_2} d_2) & \frac{i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2}} \sin(k_{z_2} d_2) \\ \frac{i k_{z_2}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} \sin(k_{z_2} d_2) & \cos(k_{z_2} d_2) \end{pmatrix} \quad (\text{A-14})$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} E_{y_i} \\ H_{x_i} \end{pmatrix}_{z+d} = (C_2 C_1) \begin{pmatrix} E_{y_i} \\ H_{x_i} \end{pmatrix}_z = e^{\pm i K d} \begin{pmatrix} E_{y_i} \\ H_{x_i} \end{pmatrix}_z \quad (\text{A-15})$$

On pose $C = C_2 C_1$, avec :

$$\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A-16})$$

Avec,

$$C_{11} = \cos(k_{z_2} d_2) \cos(k_{z_1} d_1) - \frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} \sin(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \quad (\text{A-17})$$

$$C_{12} = \frac{i \omega \varepsilon_{r_1} \varepsilon_0}{k_{z_1}} \cos(k_{z_2} d_2) \sin(k_{z_1} d_1) + \frac{i \omega \varepsilon_{r_2} \varepsilon_0}{k_{z_2}} \cos(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \quad (\text{A-18})$$

$$C_{21} = \frac{i k_{z_2}}{\omega \varepsilon_{r_2} \varepsilon_0} \sin(k_{z_2} d_2) \cos(k_{z_1} d_1) + \frac{i k_{z_1}}{\omega \varepsilon_{r_1} \varepsilon_0} \cos(k_{z_2} d_2) \sin(k_{z_1} d_1) \quad (\text{A-19})$$

$$C_{22} = \cos(k_{z_2} d_2) \cos(k_{z_1} d_1) - \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}} \sin(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \quad (\text{A-20})$$

On comprend donc que $e^{\pm i K d}$ sont des valeurs propres de C . Cherchons alors les valeurs propres de C , c'est à dire les solutions de l'équation :

$$\det(C - \lambda I) = 0 \quad (\text{A-21})$$

Soit ;

$$\lambda^2 - (C_{11} + C_{22})\lambda - C_{12} C_{21} + C_{11} C_{22} = 0 \quad (\text{A-22})$$

$$\lambda^2 - \text{Tr}(C) \lambda + \det(C) = 0 \quad (\text{A-23})$$

Or,

$$\det(C) = \det(C_2) \det(C_1) = 1 \quad (\text{A-24})$$

Soit,

$$\lambda^2 - \text{Tr}(C) \lambda + 1 = 0 \quad (\text{A-25})$$

Après calcul, du déterminant et des solutions de l'équation, on trouve :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{Tr}(C) \pm i\sqrt{4 - \text{Tr}(C)^2}) = e^{\pm i K d} \quad (\text{A-26})$$

Une façon de prendre les deux solutions en comptes, est de prendre la somme des deux valeurs propres :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2}(\text{Tr}(C) - i\sqrt{4 - \text{Tr}(C)^2}) + \frac{1}{2}(\text{Tr}(C) + i\sqrt{4 - \text{Tr}(C)^2}) = e^{i K d} + e^{-i K d} \quad (\text{A-27})$$

On retrouve :

$$\text{Tr}(C) = 2 \cos(K d) \quad (\text{A-28})$$

$$\cos(K d) = \frac{1}{2}(\text{Tr}(C)) = \cos(k_{z_1} d_1) \cos(k_{z_2} d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} + \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}} \right) \sin(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \quad (\text{A-29})$$

La relation de dispersion pour un multicouche en polarisation TM s'écrit :

$$\boxed{\cos(K d) = \cos(k_{z_1} d_1) \cos(k_{z_2} d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} + \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}} \right) \sin(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2)} \quad (\text{A-30})$$

A-2 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting est défini par :

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \Re(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \quad (\text{A-31})$$

La composante du vecteur de Poynting selon l'axe des x, est donnée par :

$$P_{x_i} = \frac{1}{2} \Re(-E_{z_i} H_{y_i}^*) \quad (\text{A-32})$$

Cette expression peut se simplifier, en utilisant l'équation de Maxwell suivante :

$$\text{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{A-33})$$

Dans ce cas, comme $H_x = 0$,

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r E_z \quad (\text{A-34})$$

En remplaçant, cette expression de E_z dans l'expression précédente (A-32), on obtient

$$P_{x_i} = \frac{1}{2} \Re \left(-\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i}} \frac{\partial H_{y_i}}{\partial x} H_{y_i}^* \right) \quad (\text{A-35})$$

$$= \frac{1}{2} \Re \left(-\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i}} H_{y_i}^* (i k_x H_{y_i}) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \Re \left(-\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i}} H_{y_i} i k_x H_{y_i}^* \right)$$

$$= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i}} (H_{y_i} H_{y_i}^*) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i}} |H_{y_i}|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i}} |H_{y_i}|^2 \quad (\text{A-36})$$

Le vecteur de Poynting moyen sur une couche est obtenu en intégrant sur l'épaisseur d_1 et d_2 ,

$$\langle P_{x_1} \rangle = \int_0^{d_1} \frac{1}{2} \frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} |H_{y_1}|^2 dz \quad (\text{A-37})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} \int_0^{d_1} |H_{y_1}|^2 dz \quad (\text{A-38})$$

Et

$$\langle P_{x_2} \rangle = \int_{d_1}^d \frac{1}{2} \frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} |H_{y_2}|^2 dz \quad (\text{A-39})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{k_x}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} \int_{d_1}^d |H_{y_2}|^2 dz \quad (\text{A-40})$$

A-3 Vitesse de groupe

La vitesse de groupe, et ses composantes, s'obtiennent en dérivant la relation de dispersion, selon

$$V_{g_x} = -\frac{\frac{\partial K}{\partial k_x}}{\frac{\partial K}{\partial \omega}} \quad \text{et} \quad V_{g_z} = \frac{\partial \omega}{\partial K} \quad (\text{A-41})$$

Expression de V_{g_z}

Nous dérivons la relation de dispersion d'un multi couche par rapport à la fréquence,

$$\frac{\partial \cos(K d)}{\partial \omega} = \frac{\partial (\cos(k_{z_1} d_1) \cos(k_{z_2} d_2) - \frac{1}{2} (\frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} + \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}) \sin(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2))}{\partial \omega} \quad (\text{A-42})$$

Cela nous donne,

$$\begin{aligned}
& -d \sin(K d) \frac{\partial K}{\partial \omega} = - \left(\frac{\partial k_{z1}}{\partial \omega} d_1 \sin(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) - \frac{\partial k_{z2}}{\partial \omega} d_2 \cos(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \right) \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \frac{k_{z2}}{k_{z2}^2} \frac{\partial k_{z1}}{\partial \omega} - k_{z1} \frac{\partial k_{z2}}{\partial \omega} - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \frac{k_{z2}}{k_{z1}^2} \frac{\partial k_{z1}}{\partial \omega} - k_{z1} \frac{\partial k_{z2}}{\partial \omega} \right) \sin(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \right) \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1} \varepsilon_{r2}}{k_{z2} \varepsilon_{r1}} + \frac{k_{z2} \varepsilon_{r1}}{k_{z1} \varepsilon_{r2}} \right) \left(\frac{\partial k_{z1}}{\partial \omega} d_1 \cos(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) + \frac{\partial k_{z2}}{\partial \omega} d_2 \sin(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) \right) \right)
\end{aligned} \tag{A-43}$$

Or,

$$k_{z_i} = \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon_i}{c^2} - k_x^2} \tag{A-44}$$

Donc

$$\frac{\partial k_{z1}}{\partial \omega} = \frac{\omega \varepsilon_{r1}}{k_{z1} c^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial k_{z2}}{\partial \omega} = \frac{\omega \varepsilon_{r2}}{k_{z2} c^2} \tag{A-45}$$

La vitesse de groupe V_{g_z} s'écrit

$$\begin{aligned}
V_{g_z} = \frac{\partial \omega}{\partial K} = \frac{c^2 d \sin(K d)}{w} & \left[\left(\frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} d_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1} \varepsilon_{r2}}{k_{z2} \varepsilon_{r1}} + \frac{k_{z2} \varepsilon_{r1}}{k_{z1} \varepsilon_{r2}} \right) \frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}} d_2 \right) \sin(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) \right. \\
& + \left(\frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}} d_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1} \varepsilon_{r2}}{k_{z2} \varepsilon_{r1}} + \frac{k_{z2} \varepsilon_{r1}}{k_{z1} \varepsilon_{r2}} \right) \frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} d_1 \right) \cos(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \\
& \left. + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \frac{k_{z2}}{k_{z1}^2} \frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} - k_{z1} \frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}^2} - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \frac{k_{z2}}{k_{z1}^2} \frac{\varepsilon_{r1}}{k_{z1}} - k_{z1} \frac{\varepsilon_{r2}}{k_{z2}^2} \right) \sin(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \right) \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{A-46}$$

Expression de V_{g_x}

Comme dK est une différentielle totale exacte, la composante selon x de la vitesse de groupe V_{g_x} est donnée par

$$V_{g_x} = - \frac{\frac{\partial K}{\partial k_x}}{\frac{\partial K}{\partial \omega}} = - V_{g_z} \frac{\partial K}{\partial k_x} \tag{A-47}$$

Le terme $\frac{\partial K}{\partial k_x}$ s'obtient en dérivant la relation de dispersion par rapport à k_x .

$$\frac{\partial \cos(K d)}{\partial k_x} = \frac{\partial (\cos(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1} \varepsilon_{r2}}{k_{z2} \varepsilon_{r1}} + \frac{k_{z2} \varepsilon_{r1}}{k_{z1} \varepsilon_{r2}} \right) \sin(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2))}{\partial k_x} \tag{A-48}$$

Soit,

$$\begin{aligned}
& -d \sin(K d) \frac{\partial K}{\partial k_x} = - \left(\frac{\partial k_{z1}}{\partial k_x} d_1 \sin(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) - \frac{\partial k_{z2}}{\partial k_x} d_2 \cos(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \right) \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \frac{k_{z2}}{k_{z2}^2} \frac{\partial k_{z1}}{\partial k_x} - k_{z1} \frac{\partial k_{z2}}{\partial k_x} - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \frac{k_{z2}}{k_{z1}^2} \frac{\partial k_{z1}}{\partial k_x} - k_{z1} \frac{\partial k_{z2}}{\partial k_x} \right) \sin(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \right) \\
& - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1} \varepsilon_{r2}}{k_{z2} \varepsilon_{r1}} + \frac{k_{z2} \varepsilon_{r1}}{k_{z1} \varepsilon_{r2}} \right) \left(\frac{\partial k_{z1}}{\partial k_x} d_1 \cos(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) + \frac{\partial k_{z2}}{\partial k_x} d_2 \sin(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) \right) \right)
\end{aligned} \tag{A-49}$$

Comme

$$k_{z_i} = \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon_i}{c^2} - k_x^2} \tag{A-50}$$

Nous obtenons

$$\frac{\partial k_{z_1}}{\partial k_x} = \frac{-k_x}{k_{z_1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial k_{z_2}}{\partial k_x} = \frac{-k_x}{k_{z_2}} \quad (\text{A-51})$$

Ce qui nous permet d'exprimer le terme $\frac{\partial K}{\partial k_x}$, sous une forme simplifiée

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial k_x} = -\frac{k_x}{d \sin(K d)} & \left[\left(\frac{d_1}{k_{z_1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} + \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}} \right) \frac{d_2}{k_{z_2}} \right) \sin(k_{z_1} d_1) \cos(k_{z_2} d_2) \right. \\ & + \left(\frac{d_2}{k_{z_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} + \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}} \right) \frac{d_1}{k_{z_1}} \right) \cos(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} k_{z_2}^2} - \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2} k_{z_1}^2} \right) \left(\frac{k_{z_2}}{k_{z_1}} - \frac{k_{z_1}}{k_{z_2}} \right) \sin(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \right) \right] \quad (\text{A-52}) \end{aligned}$$

Ainsi la vitesse de groupe V_{g_x} , a pour expression :

$$\begin{aligned} V_{g_x} = \frac{c^2 k_x}{w} & \left[\left(\frac{\varepsilon_{r_1}}{k_{z_1}} d_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} + \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}} \right) \frac{\varepsilon_{r_2}}{k_{z_2}} d_2 \right) \sin(k_{z_1} d_1) \cos(k_{z_2} d_2) \right. \\ & + \left(\frac{\varepsilon_{r_2}}{k_{z_2}} d_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} + \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}} \right) \frac{\varepsilon_{r_1}}{k_{z_1}} d_1 \right) \cos(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} k_{z_2}^2} - \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2} k_{z_1}^2} \right) \left(\frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1}} - \frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2}} \right) \right) \sin(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \right]^{-1} \times \\ & \left[\left(\frac{d_1}{k_{z_1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} + \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}} \right) \frac{d_2}{k_{z_2}} \right) \sin(k_{z_1} d_1) \cos(k_{z_2} d_2) \right. \\ & + \left(\frac{d_2}{k_{z_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}}{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}} + \frac{k_{z_2} \varepsilon_{r_1}}{k_{z_1} \varepsilon_{r_2}} \right) \frac{d_1}{k_{z_1}} \right) \cos(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} k_{z_2}^2} - \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2} k_{z_1}^2} \right) \left(\frac{k_{z_2}}{k_{z_1}} - \frac{k_{z_1}}{k_{z_2}} \right) \right) \sin(k_{z_1} d_1) \sin(k_{z_2} d_2) \right] \quad (\text{A-53}) \end{aligned}$$

RÉSUMÉ

A la fin des années 80, ont été introduits les cristaux photoniques et les métamatériaux, permettant de concevoir des dispositifs avec des propriétés optiques très intéressantes. La découverte de ces propriétés artificielles est considérée comme l'une des avancées les plus spectaculaires de la photonique moderne, avec des applications importantes telles que la création de matériaux à réfraction négative, ou la conception de lentilles plates parfaites.

Ces structures présentent néanmoins des pertes optiques dues aux métaux qui rendent plus difficile l'obtention de lentilles super-résolues. Une nouvelle approche, basée sur l'anisotropie du métamatériau, a alors été proposée comme une alternative très intéressante pour la conception de lentilles plates à super-résolution. Parallèlement les limites du modèle de Drude pour la description de la réponse optique des métaux ont été mises en évidence expérimentalement.

Ce manuscrit de thèse présente une étude théorique et numérique d'empilements de couches minces métallo-diélectriques se comportant dans certains domaines de fonctionnement comme des milieux hyperboliques. Après avoir étudié le lien existant entre la réfraction négative et les décalages géants, le manuscrit se concentre sur la conception de lentilles plates permettant d'obtenir de la super-résolution : des images offrant une meilleure résolution que celle permise par les lois de la diffraction classique. Pour répondre à ces objectifs, nous avons développé une théorie basée sur l'approximation du milieu hyperbolique (obtenue avec un empilement métallo-diélectrique) par un milieu isotrope effectif à l'aide d'un développement parabolique du vecteur d'onde de Bloch. Les outils nécessaires pour toute étude de l'influence de la non-localité intrinsèque des métaux sur les propriétés optiques des structures sont ensuite développés et appliqués aux métallo-diélectriques.

Mots-clés : Nanophotonique, Métamatériaux, Imagerie, Lentille Plate, Résolution sous longueur d'onde, Décalage négatif géant, Non-localité.

ABSTRACT

In the early 80's, planar or periodic photonics crystals have been introduced in order to control light and to obtain entirely new optical properties. The unrivalled properties of these metamaterials are of tremendous interest for advanced photonic systems, with some important applications such as materials with negative refraction or flat lenses.

However, these structures present optical losses induced by metals defects and experimental fabrication at nanometric scales that prevent them to reach the expected performances. A new approach based on describing metallo-dielectric as anisotropic materials has then been proposed as an alternative description. In parallel, the limits of the Drude model have been experimentally highlighted.

In this context this manuscript presents a theoretical and numerical study of metallo-dielectric multilayers that can be considered as homogeneous media with a hyperbolic dispersion relation. We first present the link between negative refraction and large negative lateral shifts, and then focus on the design of flat lenses with subwavelength resolution : structures allowing a better resolution than the classical diffraction limit. We thus developed a theory based on the approximation of the hyperbolic medium, by a homogeneous and isotropic medium with a parabolic development of the vector of wave of Bloch. Finally, the tools required to study the influence of the intrinsic nonlocality of metals on the optical properties of multilayers are developed and the formalism is applied to metallo-dielectric lenses.

Keywords : Nanophotonic, Metamaterials, Imaging devices, Flat lens, Subwavelength resolution, large negative lateral shifts, nonlocality.

