



Modélisation non-linéaire des câbles : identification expérimentale de la tension par méthode inverse statique

Arnaud Pacitti

► To cite this version:

Arnaud Pacitti. Modélisation non-linéaire des câbles : identification expérimentale de la tension par méthode inverse statique. Génie civil. Université Paris-Est, 2016. Français. NNT : 2016PESC1142 . tel-01535670

HAL Id: tel-01535670

<https://theses.hal.science/tel-01535670>

Submitted on 9 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

UNIVERSITÉ —
— **PARIS-EST**

DOTTORATO DI RICERCA IN INGENIERIA DELLE STRUTTURE
DOCTORAT DE RECHERCHE EN GÉNIE CIVIL

Nonlinear modeling of elastic cables: experimental data-based tension identification via static inverse problem

Arnaud Pacitti
21/11/2016



Composition du Jury:

Prof. Fabrizio Vestroni	Président du Jury	Università La Sapienza di Roma
Prof. John Macdonald	Rapporteur	University of Bristol
Prof. Basile Audoly	Rapporteur	École Polytechnique
Prof. Walter Lacarbonara	Co-directeur de thèse	Università La Sapienza di Roma
M. Frédéric Bourquin, IGPEF	Co-directeur de thèse	IFSTTAR Université Paris-Est
M. Michaël Peigney, ICPEF	Conseiller d'études	IFSTTAR Université Paris-Est

Résumé

Français. La connaissance de la tension dans les câbles de pont est un élément de diagnostic important, tant à l'échelle du câble qu'à celle de l'ouvrage dont il fait partie.

Le présent travail de thèse propose une méthode d'évaluation de la tension par méthode inverse à partir d'une formulation variationnelle mixte de câble géométriquement exact permettant de coupler simplement et à bas coût un modèle universel de câble et des capteurs d'utilisation courante tels que des jauges de déformation et des capteurs de déplacement. Contrairement à de nombreuses méthodes existantes, la méthode présentée ne nécessite pas une connaissance fine des paramètres du câble pour évaluer sa tension.

Les choix de modélisation faits sont motivés par une étude approfondie des différentes typologies des câbles présents sur ouvrage et par une étude bibliographique qui tente de synthétiser l'immense littérature disponible dans le domaine des câbles. La modélisation retenue est issue de la théorie des lignes déformables des frères Cosserat, dont nous présentons les variantes avec et sans rigidité de flexion.

Les moyens d'essai utilisés pour la validation expérimentale de la méthode mise au point ont été conçus et réalisés au cours du présent travail. Le montage expérimental imaginé permet d'appliquer la méthode inverse sur un câble monoron multicouches de 21 m de long et 22 mm de diamètre. Les essais sont réalisés à 6 différents niveaux de tension échelonnés par paliers de 30 kN de 55 kN à 205 kN. Ils montrent l'efficacité de la méthode sur le câble testé et la pertinence de son déploiement à venir sur d'autres typologies de câbles.

English. Knowledge of the tension in bridge cables is important not only to diagnose the cable itself but also the structure it belongs to.

The key idea of this thesis is to evaluate the cable tension employing a geometrically exact cable via a static inverse method derived from a mixed variational formulation, by coupling a universal cable model with usual sensors, such as displacement sensors and strain gauges. Contrary to existing methods, an accurate knowledge of the cable's parameters, such as its length or weight per unit length, is not required.

Combining a thorough study of various cable types encountered on bridges and the vast amount of material available in the literature covering cables, led to the modeling along the lines of the elastic theory of rods developed by the Cosserat brothers, with some steps forwards on their theory of rods with and without flexural stiffness.

An experimental apparatus, designed and built in the course of this study, was employed to validate the developed inverse method making use of a multilayered stranded cable (21 m long and 22 mm in diameter) at several tension levels. The universal aspects of the proposed model together with its validation encourage application to other cable types.

Remerciements

Je remercie très chaleureusement mes directeurs de thèse, MM. Frédéric Bourquin et Walter Lacarbonara pour leurs soutiens, leurs encadrements et leurs enseignements respectifs. J'ai beaucoup appris à leurs côtés, tant sur le plan scientifique qu'humain.

J'adresse mes sincères remerciements au Président du Jury, Preside Fabrizio Vestroni, ainsi qu'aux deux rapporteurs, MM. John Macdonald et Basile Audoly, qui ont consacré du temps à l'évaluation de mon travail. C'est un honneur de voir leurs noms apparaître sur la couverture de ma thèse.

Je prie Michaël Peigney de croire en ma profonde reconnaissance. Sa patience infinie, sa gentillesse et son incroyable capacité à remettre de l'ordre dans les idées fausses et mal énoncées que je lui soumettais m'auront étonné plus d'une fois. Sur le plan scientifique, je mesure la chance de l'avoir eu comme conseiller d'études à l'aune de l'insurmontable difficulté que constitue pour moi la compréhension d'un seul de ses articles. Encore merci.

Je n'ai mis que 6 ans à faire cette thèse, mais son origine remonte au début de l'année 2006, alors que je faisais un stage en dynamique non-linéaire au LGM de l'ENTPE. Ce projet a orienté l'ensemble de mon parcours, depuis mes stages effectués sur le sujet au CSTB, à La Sapienza et au LCPC, jusqu'au choix de mon affectation à Bordeaux. Je me dois de remercier les personnes que j'ai pu cotoyer tout au long de ces dix dernières années dans le domaine, et en particulier celles qui m'ont donné envie de poursuivre mon objectif, que ce fut ou non leurs intentions.

Il va sans dire que ce travail de thèse n'existerait pas sans le soutien technique, financier et humain de mon équipe, le Groupe Structures du Laboratoire de Bordeaux. Ensemble, nous faisons ce que de nombreux bureaux d'études bien mieux dotés que nous aimeraient pouvoir faire. Je remercie ma hiérarchie passée, MM. Yves Pasco et Dominique Cochet, et présente, M^{mes} Danielle Cassagne et Céline Lenglet. L'équipe qui m'entoure est composée d'Anne-Marie Cardon¹, Virginie Périer, Bastien Vaurigaud, Laurent Fritz, Youthy You, Rémi Piednoir, John Dumoulin, Stephane Dubroca, Stephane Renwez, Tony Malet, Jean-François Cherrier, Mathieu Desperez, David Pajak, Jeannette Caman et Alexandre Lahner: merci à vous tous. J'ajoute à la liste des noms de mes collaborateurs à remercier celui de Patrick Losset, puisque c'est une chance de toujours pouvoir compter sur sa bonne humeur et son insondable expertise technique.

J'ai également une pensée pour les trois excellents stagiaires qui ont contribué de

¹qui a très patiemment relu les parties rédigées en français

façon non négligeable à mes travaux de thèse: Tenzing Truilhé, Thibaud Marazano et Mathieu Fernandez-Vandewalle.

Je ne peux manquer ici d'avoir une pensée bienveillante pour l'autre doctorant du groupe, Mathieu Weiss, qui m'a montré ce qu'était une thèse réalisée en trois ans, utilisant un modèle à deux degrés de liberté et aboutissant à sept publications et un brevet. Sympa.

J'ai été chaleureusement accueilli à plusieurs reprises à l'université La Sapienza de Rome. J'ai la chance de m'y être lié d'amitié avec Andrea Arena, Biagio Carboni et Michele Pasquali. Mille grazie ragazzi.

Mes nombreux séjours au LCPC puis à l'IFSTTAR ont également été passés en excellente compagnie. La liste serait bien longue, mais je tiens à remercier l'ensemble des personnes que j'ai pu y rencontrer, qu'elles soient ou non parties en retraite ou ailleurs. Les nombreuses discussions avec Dominique Siegert ont clairement enrichi ma vision des problèmes liés aux câbles. Je lui en suis reconnaissant.

Mes proches sont ma plus grande richesse et ma famille seule donne un sens à ma vie. Je n'ai pas trouvé de mots assez justes pour les remercier ici.

Arnaud Pacitti, décembre 2016.

Non domandarci la formula che mondi possa aprirti,
sì qualche storta sillaba e secca come un ramo.
Codesto solo oggi possiamo dirti,
ciò che non siamo, ciò che non vogliamo.

Eugenio Montale, *Ossi di seppia*, 1925

Sommaire

Introduction	i
1 Ingénierie des câbles de pont	1
1 Différentes typologies de câble	3
1.1 Toron multi-couches	3
1.2 Multi-torons parallèles	4
1.3 Multi-fils parallèles et autres typologies	5
2 Principaux désordres rencontrés sur les câbles	6
2.1 Désordres liés à la corrosion	7
2.2 Fatigue et fragilité des aciers	9
3 Systèmes d'anti-corrosion et d'amortissement	10
3.1 Barrières anti-corrosion	10
3.2 Systèmes d'amortissement	11
4 Méthodes de diagnostic et auscultation des câbles	12
4.1 Inspection visuelle	13
4.2 Auscultations électromagnétiques	13
4.3 Méthodes acoustiques	14
4.4 Méthodes dites vibratoires	14
4.5 Autres méthodes	15
4.6 Évaluation de la tension	15
4.7 Quelques orientations d'études sur la détection de défaut dans les câbles	20
4.8 Synthèse	21
2 Étude bibliographique sur les modèles de câble	23
1 Modèles de torons et de cordes torsadées	24
1.1 Modèles semi-analytiques ou semi-continus	24
1.2 Modèles 3D sous logiciels EF	25
2 Modèles couramment utilisés de câble	25
2.1 Le modèle - dit - d'Irvine	26
2.2 Barre ou poutre tendue droite.	27
3 Modèles de lignes déformables	28
3.1 Dynamique non-linéaire des câbles	29
3.2 Tiges, barres et poutres courbes en déformations finies	29
4 Notes sur la modélisation des déformations	30
5 Geometrically exact elastic rod: traditional implementation	44
6 Notes sur la modélisation des ancrages	50
7 Notes sur les lois de comportement utilisées	51

7.1	Aspects théoriques de modélisation	51
3	Retour d'expérience, notes et discussions	55
1	Retour d'expérience sur la mesure de tension par méthode vibratoire : application aux ponts suspendus	56
1.1	Essais en laboratoire	56
1.2	Essais <i>in situ</i>	60
1.3	Retour d'expérience	63
2	Notes sur les raideurs et la masse linéique d'un câble	63
2.1	Première approche, premiers questionnements	64
2.2	Sources de complexité	68
2.3	Conclusions sur les modules d'élasticité	69
2.4	Masse linéique du câble	69
3	Note sur les modèles	69
4	Conclusion du chapitre	70
4	Formulation of the cable model	73
1	Cable description(s)	74
2	General formulation of the problem	74
2.1	Kinematics	74
2.2	Action functional, variational formulation	78
2.3	A simpler formulation	80
2.4	Constitutive equations and physical linearization	82
2.5	Variational formulation	84
3	Static configuration of cables	85
3.1	A more efficient implementation: the Hu-Washizu functional for cables	94
3.2	An example with follower loads: the suspension bridge problem . .	99
3.3	Notes on curvature(s) and kinematic constraints	104
4	Nonlinear dynamics of cables	105
4.1	Case study: drop tests	109
5	Static configuration with flexural stiffness. Simple model	114
6	Dynamics of a cable with flexural stiffness. Simple model	117
7	Conclusions	118
5	Inverse problems	119
1	Inverse problem: general matters	120
2	Parametric studies and inverse problems	121
2.1	Simple model	121
2.2	Cable with flexural stiffness	132
3	Conclusion	155
6	Étude expérimentale	157
1	Présentation du banc d'essais	158
2	Montage expérimental	159
3	Protocole d'essai	161
4	Résultats expérimentaux	163
4.1	Données brutes	163

5	Post-traitements	168
6	Conclusions du chapitre	171
Conclusions		173
Annexes		179
A	Elastic catenary problem	179
A.1	Exact catenary solutions. Elastic and inelastic cases	179
B	Simo beam: classic examples	181
B.1	3D cantilever bend beam	181
B.2	3D elbow	182
B.3	Pure bending of a cantilever beam	183
B.4	Clamped-hinged arch subjected to point load	184
C	Routines	185
C.1	Maxima routines: Explicit solution	185
C.2	FEniCS routines: Elastic catenary	186
C.3	FEniCS routines: Classic geometrically exact rod	189
D	Retour d'expérience sur la mesure de tension <i>in situ</i>	197
D.1	Histogrammes du pont A	197
E	Nonlinear response of elastic cables with flexural-torsional stiffness	200

Introduction

Contexte et objectifs du travail de thèse

Contexte. Avec quelques 165² ponts suspendus, la France possède sans doute l'un des plus grands parcs de ponts à câbles au monde. Contrairement aux ponts suspendus que l'on peut rencontrer dans les autres pays, les ponts suspendus français sont anciens, de petite taille, situés en zone rurale et ils constituent souvent à ce titre l'unique point de passage sur l'autre rive des bassins de vie qu'ils desservent. L'attachement des populations pour le patrimoine historique et paysager qu'ils représentent, la difficulté technique et le coût de leurs réparations font des ponts suspendus un objet d'études aux enjeux humains et financiers importants.

Le travail sur les câbles présenté dans cette thèse est motivé par sa future application sur les ponts suspendus mais pourrait aussi concerner les ponts à haubans, les remontées mécaniques et transports par câble, les antennes, les stades, les lignes à haute tension, les blondins, etc.

Problématique et objectifs de la thèse. Éléments des structures optimisées de génie civil par excellence, les câbles sont sujets à des phénomènes complexes de fatigue, de fretting et surtout de corrosion qui les endommagent, et, dans le pire des cas, entraînent leur rupture.

Étant donné l'importance de leur rôle, il n'est pas rare que la pérenité de l'ensemble de la structure soit remise en cause lorsqu'un ou plusieurs câbles sont endommagés, ce qui rend indispensable l'existence de systèmes robustes et performants de contrôle de santé et de diagnostic spécifiquement développés pour les câbles.

Avant même l'endommagement, la tension dans les câbles revêt une place particulière en matière de diagnostic. En effet, un câble ne fonctionne que s'il est tendu car il ne peut résister en compression: trop lâche, il provoque d'autant le report des charges non reprises sur les autres éléments de structure. Inversement, un câble trop tendu est évidemment plus exposé à un risque de rupture.

Une autre particularité des câbles réside dans leur capacité d'adaptation aux grands déplacements. Pour comprendre leurs comportements quasi-statique et dynamique, il faut donc ajouter à la connaissance de leur tension celle de leur géométrie. Une illustration de l'importance de ces deux paramètres peut être imaginée simplement: si l'on éloigne les appuis d'un câble présentant une flèche importante, sa géométrie changera - par réduction de flèche - mais sa longueur et sa tension resteront quasi-constantes jusqu'à ce que sa flèche devienne faible. Si l'on continue l'expérience, sa flèche se réduira de moins en moins tandis que sa tension augmentera fortement et, dans une moindre mesure, sa longueur également. À l'échelle globale du câble, c'est ce comportement non-linéaire de

²environ 210 en 1989

type géométrique qui rend l'étude des câbles délicate et qui donne, aujourd'hui encore, matière au développement de nombreux modèles dits géométriquement exacts.

À une échelle plus locale, la diversité des typologies de câble fait de la connaissance empirique acquise en laboratoire et sur le terrain un enjeu clef. Le présent travail de thèse doit servir au développement d'une méthode opérationnelle de contrôle de santé des câbles dans les ponts suspendus, il poursuit donc trois objectifs principaux:

- donner une analyse aussi complète que possible des problèmes soulevés par la mesure de tension dans les câbles,
- étudier les modèles de câble monodimensionnels dits géométriquement exacts, et notamment leurs formulations variationnelles qui jouent un rôle central dans l'écriture de problèmes inverses,
- proposer une piste de développement d'une méthode inverse de détermination de la tension dans un câble quelconque en vue de vérifier à bas coût le réglage d'un ouvrage et la marge de sécurité dont dispose le câble par rapport à sa capacité estimée ou supposée.

Productions réalisées et principaux résultats obtenus

L'analyse du problème de la mesure de tension dans les câbles nécessite une bonne connaissance des différentes typologies de câble présentes sur ouvrage, de leurs spécificités et des désordres auxquels elles sont sujettes. L'histoire du contrôle de santé des câbles est ancienne et de nombreux outils de diagnostic et dispositions constructives ont été développés au cours de ces dernières décennies; il nous semble important d'en connaître l'état de l'art, non pas seulement universitaire, mais dont l'utilisation a été régulièrement constatée sur ouvrage. C'est la vocation du **premier chapitre** intitulé *Ingénierie des câbles* et dont l'ambition est de donner une vue d'ensemble du contexte de notre étude. Il se décompose en quatre sous-chapitres traitant, dans l'ordre, des différentes typologies de câble, de leurs désordres, des dispositions constructives permettant d'augmenter leur durée de vie et enfin des méthodes de diagnostic existantes appliquées aux câbles.

Les câbles ayant été largement utilisés depuis des siècles, ils ont également fait l'objet de très nombreuses études dont nous donnons un aperçu dans la première moitié du **deuxième chapitre**. Elle contient notamment un rappel sur le modèle dit d'Irvine qui est le plus couramment utilisé en dimensionnement de structure, les références des modèles géométriquement exacts étudiés dans le cadre de la dynamique non-linéaire - non-linéaire normal modes, résonance paramétrique, etc. - ainsi que les modèles prenant en compte la rigidité en flexion, élément important de l'étude des conditions d'ancrage ou de la dynamique des câbles localement détendus ³. La prise en compte de la rigidité en flexion occupe une place importante dans le présent travail, c'est pourquoi nous avons placé, dans la seconde partie de notre étude bibliographique, l'ensemble de la théorie complexe mais désormais classique des tiges et poutres en grandes déformations et grandes rotations, également connue sous le nom de *Geometrically exact rod/beam theory* et largement étudiée [1], [2], [3], [4]. La formulation variationnelle issue de la littérature s'écrit:

³Il s'agit du phénomène de *cable loosening* en anglais

Trouver $\check{\mathbf{r}} \in \mathbf{R}^3$ et $\check{\mathbf{\Lambda}} \in SO(3)$ satisfaisant les conditions aux limites et tels que pour tout $\delta \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ et $\delta \check{\mathbf{\vartheta}} \in T_{\check{\mathbf{\Lambda}}}SO(3)$ l'équation suivante soit vraie quel que soit $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{L^0} (\mathbf{\Lambda} C_N (\mathbf{\Lambda}^t \check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0) \cdot (\delta \mathbf{r}_s - \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s) + \mathbf{\Lambda} C_M \mathbf{\Gamma} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}}) ds = \\ \int_0^{L^0} \left((\check{\mathbf{f}} - \rho A^0 \check{\mathbf{r}}_{tt}) \cdot \delta \mathbf{r} + (\check{\mathbf{c}} - \mathbf{\Lambda} (J^0 \mathbf{A} + \hat{\mathbf{\Omega}} J^0 \mathbf{\Omega})) \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds \\ + \left[\check{\mathbf{\varphi}} \cdot \delta \mathbf{r} + \check{\mathbf{\xi}} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right]_0^{L^0} \end{aligned}$$

où $\check{\mathbf{r}}$ est le champs des déplacements, $\check{\mathbf{\Lambda}}$ celui des rotations et $T_{\check{\mathbf{\Lambda}}}SO(3)$ est l'espace tangent à $SO(3)$ en $\check{\mathbf{\Lambda}}$. La formulation est donc écrite en déplacements et rotations et la loi de comportement utilisée est élastique linéaire isotrope aux tenseurs d'élasticité C_N et C_M .

Le modèle a été implémenté en Python grâce aux bibliothèques FEnICS et Numpy. Nous concluons l'étude bibliographique en évoquant le lien entre la mécanique des milieux continus et le modèle des poutres en grands déplacements [5].

Le **troisième chapitre** s'appuie sur un retour d'expérience de l'utilisation de trois méthodes vibratoires éprouvées afin d'illustrer sur des cas concrets les difficultés rencontrées *in situ*. Nous nous y intéressons volontairement à des cas limites d'utilisation des méthodes, très fréquemment rencontrés sur les ponts suspendus. Le retour d'expérience se décompose en deux parties: la première, effectuée en laboratoire, permet de s'assurer de la bonne utilisation de chacune des méthodes. La seconde correspond au déploiement des trois méthodes sur deux ponts suspendus. Les campagnes d'essais sur site montrent que les méthodes donnent des résultats qui semblent corrects sauf pour les suspentes. Une discussion sur les paramètres physiques du câble est donnée en fin de chapitre et motive les choix de modélisation faits par la suite.

De nombreux travaux sur la modélisation des câbles géométriquement exacts se réfèrent aux publications de MM. Eugène et François Cosserat [6], [7]. Nous présentons dans le **quatrième chapitre** une réécriture du modèle des frères Cosserat tel qu'il apparaît dans leurs travaux en y ajoutant les lois de comportement permettant de trouver les équations de la dynamique du câble géométriquement exact. Elles s'écrivent en toute généralité:

Trouver $\check{\mathbf{r}} \in \mathbf{R}^3$ et $\check{\mathbf{\vartheta}} \in SO(3)$ vérifiant les conditions aux limites et tels que pour tout $\delta \check{\mathbf{r}} \in \mathbf{R}^3$ et $\delta \check{\mathbf{\vartheta}} \in T_{\check{\mathbf{\Lambda}}}SO(3)$ l'équation suivante soit vraie quel que soit $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot (\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s) + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds - \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds = \\ - \int_0^L \left(\check{\mathbf{v}}_t \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + (\check{\mathbf{o}}_t + \check{\mathbf{r}}_t \times \check{\mathbf{v}}) \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds + \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right]_0^L \end{aligned}$$

Cette formulation présente de nombreuses similitudes avec celle des barres et poutres donnée plus haut. Néanmoins, elle est incomplète puisque les lois de comportement n'y ont pas été explicitées. La modélisation des frères Cosserat donne à ces dernières une forme dérivée de la densité d'action W par rapport aux déformations, courbures, vitesses

et rotations instantanées:

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{n}} &:= -\frac{\partial W}{\partial \eta_1} \check{\mathbf{b}}_1 - \frac{\partial W}{\partial \eta_2} \check{\mathbf{b}}_2 - \frac{\partial W}{\partial \nu} \check{\mathbf{b}}_3, & \check{\mathbf{m}} &:= -\frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_1} \check{\mathbf{b}}_1 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_2} \check{\mathbf{b}}_2 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_3} \check{\mathbf{b}}_3, \\ \check{\mathbf{v}} &:= -\frac{\partial W}{\partial v_1} \check{\mathbf{b}}_1 - \frac{\partial W}{\partial v_2} \check{\mathbf{b}}_2 - \frac{\partial W}{\partial v_3} \check{\mathbf{b}}_3, & \check{\mathbf{o}} &:= -\frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}_1} \check{\mathbf{b}}_1 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}_2} \check{\mathbf{b}}_2 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}_3} \check{\mathbf{b}}_3.\end{aligned}$$

Le choix des mesures de déformations et de vitesses couplé à une loi de comportement de Hooke généralisée permet de compléter la modélisation.

Dans un premier temps, nous considérons que W ne dépend pas de la courbure $\check{\mathbf{\Gamma}}$ ni de la vitesse de rotation instantanée $\check{\mathbf{\Omega}}$ et introduisons les mesures suivantes:

$$\check{\Delta} := \frac{1}{2} (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1), \quad \check{\Upsilon} := \sqrt{\check{\mathbf{r}}_t \cdot \check{\mathbf{r}}_t}.$$

Ce choix nous permet de retrouver le modèle de câble géométriquement exact sans rigidité en flexion.

Une implémentation en déplacements sous forme variationnelle est d'abord présentée, puis, afin de rendre primales les déformations mesurables *in situ*, une formulation de Hu-Washizu est proposée. En statique, elle s'écrit:

$$\int_0^{L^0} \left[\left(EA \check{\Delta} - \check{T} \right) \delta \check{\Delta} + \check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s - \check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} - \left(\check{\Delta} - \check{\Delta}^e \right) \delta \check{T} \right] ds = 0.$$

où $\check{\Delta}^e = \check{\Delta} = \frac{1}{2} (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1)$ est la relation déformations-déplacements qu'il faut imposer pour obtenir la formulation. Le multiplicateur de Lagrange associé est $\check{T}$ qui contient également l'information liée à la tension dans le câble.

Les aspects pratiques de l'utilisation des deux formulations sont abordés : bien qu'ayant deux inconnues supplémentaires, la formulation de Hu-Washizu montre une convergence bien plus rapide que celle de la formulation en déplacements, même si cette dernière semble moins sensible au choix de la solution permettant l'initialisation de l'algorithme de résolution non-linéaire⁴. Un exemple de résolution sous contrainte est donné et montre la grande flexibilité de la formulation.

La fin du chapitre est consacrée à l'écriture d'un modèle simplifié de câble géométriquement exact avec rigidité en flexion obtenu lorsque l'on considère W comme une fonction des déformations et des courbures. Nous considérons alors les mesures suivantes:

$$\check{\Delta} = \sqrt{\check{\mathbf{E}} \cdot \check{\mathbf{E}}}, \quad \check{R} := \sqrt{\check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \check{\mathbf{\Gamma}}}.$$

où $\check{\mathbf{E}} = {}^t \mathbf{\Lambda} \check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0$ et $\mathbf{\Gamma} = {}^t \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}_s$. Le modèle obtenu, qui n'a pas fait l'objet d'une étude approfondie, sera utilisé à l'avenir en lieu et place du modèle le plus riche de barres et poutres. Les considérations exposées tout au long des trois premiers chapitres justifient son écriture et son étude future dans le domaine des câbles.

Le **cinquième chapitre** expose l'étude d'une méthode inverse statique de détermination de la tension dans les câbles à l'aide de deux modèles: le modèle de câble sans rigidité en flexion présenté dans le chapitre précédent et le modèle de barre et poutre donné dans la partie bibliographique mais réécrit sous une formulation mixte afin de faciliter l'étude.

Les deux fonctionnelles à minimiser s'appuient sur la différence mesurée en quelques points entre deux états statiques du câble. Le système de monitoring consiste en une série

⁴ici, l'algorithme de Newton-Raphson

de jauges d'extensométrie et de capteurs de déplacements. L'originalité de la méthode repose sur l'obtention d'une tension correcte malgré une connaissance approximative des paramètres physiques du câble.

Pour le premier modèle, les paramètres à identifier afin de connaître la tension dans le câble sont, par ordre d'importance, sa longueur L , sa raideur axiale EA et sa masse linéique ρ . L'impact de la masse linéique devient important lorsque le câble présente une flèche significative, comme c'est le cas pour les câbles porteurs des ponts suspendus, mais reste limité dans les autres cas. L'étude paramétrique montre que le caractère mal posé du problème lié à la multiplicité de ses solutions n'empêche pas de trouver la tension cherchée. Elle aboutit à la détermination de la tension en deux temps: dans un premier temps, seule une longueur L est cherchée via un algorithme simple de calcul de gradient par différences finies, puis les paramètres EA et ρ sont déterminés via l'écriture d'un lagrangien, comme cela est classiquement fait dans la théorie de l'optimisation.

L'utilisation du modèle de barre en grands déplacements donne lieu à une étude préalable sur l'influence des encastresments sur la contrainte locale dans le câble. Cette étude reprend l'analyse faite par l'auteur de cette thèse sur le sujet [8] à l'aide d'une formulation forte et lagrangienne incrémentale ⁵. Elle confirme l'importance du moment fléchissant aux encastresments et montre d'une part que la prise en compte du cisaillement dans le modèle n'est pas dimensionnante, et d'autre part que la rotation d'un ancrage génère une surtension différente de celle évaluée avec les méthodes traditionnelles. En effet, ces dernières ne prennent en compte que partiellement la géométrie du câble en superposant localement le profil de la chaînette et un modèle de poutre tendue encastree déviée.

L'étude paramétrique préalable au problème inverse se fait en modifiant légèrement la fonctionnelle afin de tirer profit de l'information contenue dans la courbure. Pour ne pas multiplier les paramètres à étudier, nous adoptons la loi de comportement associée au cylindre plein élastique linéaire isotrope et choisissons le module d'Young E comme paramètre à déterminer en plus de la longueur L et de la masse linéique ρ . L'analyse est réalisée pour deux systèmes de monitoring, le premier correspondant à un positionnement des capteurs aléatoire, le second à une concentration des points de mesure des déformations au niveau des points singuliers du câble.

Le **sixième et dernier chapitre** présente la partie expérimentale de notre travail. Nous y évoquons dans un premier temps la phase de conception et de réalisation des moyens expérimentaux - banc d'essai et chaîne d'acquisition - dont s'est doté le Département Laboratoire de Bordeaux du Cerema Sud-Ouest à l'occasion de la présente thèse. Dans un second temps, le protocole d'essai mis en œuvre dans le cadre de la recherche de tension est détaillé et expliqué. Enfin, nous appliquons la méthode inverse développée au chapitre précédent pour un câble sans rigidité en flexion. Le câble utilisé fait 21 m de long et 22 mm de diamètre et est tendu à six tensions différentes correspondant à six essais distincts, échelonnés de 55 kN à 205 kN par palier de 30 kN. Une comparaison des résultats obtenus avec ceux issus d'une méthode érpouvée pour ces configurations de câble est présentée et montre l'efficacité de la méthode et le potentiel de son développement futur pour traiter des cas plus complexes. Ces résultats sont présentés de façon synthétiques dans le Tableau 1.

⁵Updated Lagrangian Formulation

	Unités	55 kN	85 kN	115 kN	145 kN	175 kN	205 kN
T_{ref}	[kN]	53.004	82.022	113.939	143.907	175.349	205.694
T_{inv}	[kN]	50.928	79.296	110.125	139.634	171.173	199.786
$ err_{inv} $	[%]	3.9	3.3	3.3	2.9	2.4	2.9

Table 1: Tensions obtenues avec la méthode inverse.

Chapitre 1

Ingénierie des câbles de pont

Nous présentons dans la première partie de ce chapitre les différentes typologies de câble rencontrées sur ouvrage. Les câbles étant des organes vitaux et sensibles aux phénomènes de fatigue et de corrosion, ils sont munis de systèmes de protection qui ont un impact sur leur comportement et leur modélisation. Nous passons donc en revue l'ensemble des désordres et des systèmes de protection rencontrés sur les câbles afin d'avoir une idée aussi claire que possible de notre objet d'étude. Poursuivant ce même objectif, la dernière partie du chapitre présente, de façon synthétique, les outils de diagnostic de câble déployés sur ouvrage.

Sommaire

1	Différentes typologies de câble	3
1.1	Toron multi-couches	3
1.2	Multi-torons parallèles	4
1.3	Multi-fils parallèles et autres typologies	5
2	Principaux désordres rencontrés sur les câbles	6
2.1	Désordres liés à la corrosion	7
2.2	Fatigue et fragilité des aciers	9
3	Systèmes d'anti-corrosion et d'amortissement	10
3.1	Barrières anti-corrosion	10
3.2	Systèmes d'amortissement	11
4	Méthodes de diagnostic et auscultation des câbles	12
4.1	Inspection visuelle	13
4.2	Auscultations électromagnétiques	13
4.3	Méthodes acoustiques	14
4.4	Méthodes dites vibratoires	14
4.5	Autres méthodes	15
4.6	Évaluation de la tension	15
4.7	Quelques orientations d'études sur la détection de défaut dans les câbles	20

4.8	Synthèse	21
-----	--------------------	----

1 Différentes typologies de câble

L'histoire des câbles utilisés en génie civil est passionnante et pleine de rebondissements: nous ne retracerons pas ici les véritables épopées industrielles qu'ont vécu MM. Finley, Vicat, Navier, Roebling, Seguin, Arnodin ou Baudin - pour n'en citer qu'un petit nombre -, mais le lecteur intéressé pourra se référer aux ouvrages écrits sur le sujet [9],[10], [11], [12], [13], [14]. Dans cette thèse, nous ne présenterons que très brièvement les principales typologies de câble qui ont été imaginées au fil des siècles. Il n'est néanmoins pas inutile de citer ici les références [15], [16], [17], [18] et [19] et de les consulter pour avoir une vision plus large de notre sujet d'étude. Afin d'illustrer ces différentes typologies, nous reprendrons en partie la nomenclature du guide [19] de la Commission Interministérielle de la Précontrainte et distinguerons au moins quatre grandes familles: les torons multi-couches, les multi-torons parallèles, les multi-fils parallèles et une dernière famille regroupant les câbles les moins courants sur ouvrage car issus d'une génération plus ancienne - chaînes - ou plus récente - câbles tressés en matériau composite ou innovant.

1.1 Toron multi-couches

Largement utilisés sur les ouvrages d'art français, le toron multi-couches - à torsion alternée - est le plus souvent composé d'un fil central - ou trois fils centraux - entouré de couches de fils hélicoïdaux successivement dextrogyres et lévogyres. Afin d'isoler l'intérieur du câble, les fils des dernières couches possèdent parfois un profil en Z, le toron multi-couches est alors appelé *câble clos*. Les câbles clos sont principalement utilisés comme câbles porteurs pour les remontées mécaniques mais ils sont également présents sur certains ponts suspendus ou haubanés ainsi que dans de nombreuses structures architecturales - buildings, stades, universités¹, etc.



Figure 1.1: Illustration des trois phases de fabrication de l'ancrage d'un câble pour un câble clos culotté dans de la résine.

L'ancrage des torons multi-couches est le plus souvent assuré par épanouissement des fils en bout de câble afin de former un chignon qui est placé dans la cavité tronconique d'une pièce suffisamment massive - le culot - en fonte ou en acier moulé. Une fois le chignon positionné dans la cavité tronconique du culot, un matériau à faible température de fusion (zinc ou résine) est coulé dessus, le prenant ainsi dans sa masse qui forme, en refroidissant et en durcissant, la liaison mécanique entre le culot et le câble - voir les Figure 1.1 et 1.2.

¹comme à l'École des Ponts notamment



Figure 1.2: Exemple de partie tronconique en résine d'un toron multi-couches avec gaine en PEHD. Exemple semblable aux nouvelles suspendes du Pont d'Ancenis, France.

La plupart du temps, le culot présente deux à quatre trous par lesquels passent des étriers ou des tirants qui reportent les charges du câble vers l'élément de structure sur lesquels ils sont attachés comme on peut le voir sur la photographie de gauche de la Figure 1.3. Cette disposition constructive et ses variantes sont les plus courantes sur les ponts suspendus français. Notons qu'une fois le culottage effectué aux deux extrémités du câble, sa longueur à vide est fixée : la mise en tension et le réglage du câble ne sont possibles que par le jeu accordé par le positionnement de ses deux culots sur les étriers ou les tirants.

Sur les autres types de structures, la liaison entre le culot et son point d'ancrage se fait généralement par l'intermédiaire de chapes mécaniques plus ou moins complexes et dont les caractéristiques doivent permettre, *a minima*, le réglage et l'articulation de l'ancrage au moment du montage de la structure.



Figure 1.3: Trois exemples de zones de transition tirants-câble. À gauche: système anciens avec culot en acier moulé, Pont de Confolent, France. Centre et droite: système récents, Ponts de Chavanon et d'Aquitaine, France.

Les torons multi-couches peuvent être assemblés en faisceau ou groupés en nappe. Lorsqu'ils sont assemblés en faisceau compact, il est d'usage d'appeler simplement *câble* le faisceau lui-même: c'est le cas pour tous les grands ponts suspendus².

1.2 Multi-torons parallèles

Les câbles à multi-torons parallèles utilisés pour le haubanage ou la suspension des ponts sont une adaptation de la technologie à l'origine développée pour la précontrainte

²en toute rigueur, il faudrait les appeler *câble multi-torons multi-couches parallèles*.

par post-tension. Ils sont constitués de torons parallèles dits *7-fils* comportant un fil central entouré de six fils hélicoïdaux. Les torons sont individuellement ancrés et regroupés au niveau d'une tête d'ancrage. Deux possibilités existent :

- la tête d'ancrage présente des trous tronconiques dans lesquels les torons sont maintenus par l'intermédiaire de clavettes - aussi appelées mords - coniques sur leur partie en contact avec la tête d'ancrage, et cylindriques et dentelés sur leur partie en contact avec le toron. L'ancrage des torons se fait donc par coincement lorsque le vérin de montage, qui tire sur le toron et s'appuie sur la tête d'ancrage, positionne les clavettes entre le toron et la tête d'ancrage et relâche le toron sous tension. Si la longueur de toron laissée derrière l'ancrage est suffisante, il est possible de tirer de nouveau sur les torons afin de les décoincer et de les retendre. En pratique, les torons ne sont tendus qu'une seule fois en dehors des phases de montage et un réglage d'ensemble s'effectue via une pièce d'appui réglable de la tête d'ancrage ;
- la tête d'ancrage présente des trous cylindriques. Dans ce cas, les torons sont manchonnés par emboutissage en leurs extrémités et c'est le manchon qui prend directement appui sur la tête d'ancrage. Cette disposition ne permet pas d'ajuster la longueur des torons *a posteriori* et c'est donc la tête d'ancrage dans son ensemble qui doit être mobile au moment du montage et du réglage. Très souvent l'ancrage présentant des manchons est un ancrage passif et lorsqu'une extrémité de câble est manchonnée, l'autre est clavetée et constitue l'ancrage actif, c'est-à-dire l'ancrage partir duquel le câble est mis en tension.



Figure 1.4: Exemples de câbles multi-torons parallèles. À gauche: haubans du Pont du Pertuiset en France, sans gaine extérieure. Au centre et à droite: câbles du nouveau Pont suspendu de Verdun-sur-Garonne, France.

La Figure 1.4 montre cette technologie sur deux ponts, l'un haubané, l'autre suspendu. Notons que l'utilisation des multi-torons parallèles sur les ponts suspendus est récente.

1.3 Multi-fils parallèles et autres typologies

Les câbles à fils parallèles ont été utilisés en France sur les ponts construits au XVIII^e et XIX^e siècles. Si depuis la fin du XIX^e siècle, les torons multi-couches se sont imposés dans les ouvrages de l'Hexagone, il n'en a pas été de même dans le reste du monde, et notamment aux États-Unis, où la commodité de montage des câbles de gros diamètres à fils parallèles a contribué à leur succès et au développement de leur technologie. Ils sont

présents sur la quasi-totalité des grands ponts suspendus de la planète. Parmi les autres typologies de câbles, citons brièvement:

- les chaînes sur les ouvrages anciens comme le pont de Clifton en Angleterre (1863), ou les *Three Sisters* de Pittsburgh en Pennsylvanie, USA (1926 – 1928) ;
- les câbles torsadés constitués de torons hélicoïdaux entourant un toron central. Ils sont principalement utilisés comme moyen de levage. Ils sont également utilisés pour les suspentes dans les grands ponts suspendus ou en arc, pour les câbles tracteurs dans les remontées mécaniques, les câbles de lignes à haute tension et les câbles de pont levant (voir la Figure 1.5) ;
- les câbles en matériau composite de carbone utilisés sur quelques passerelles piétonnes - Laroin, Passerelle du Musée des Sciences de Valladolid en Espagne, etc.

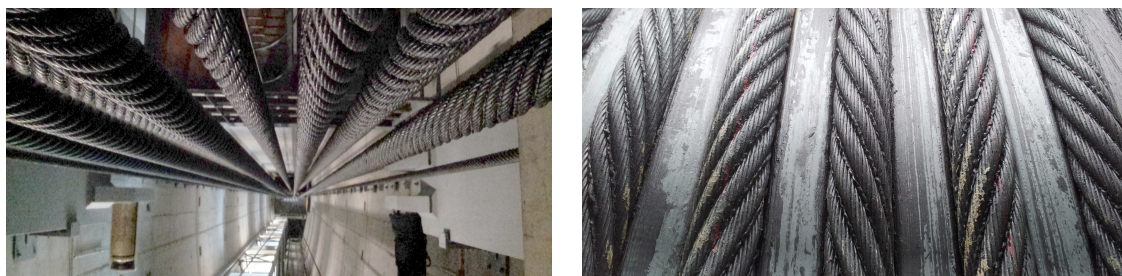


Figure 1.5: Câbles du pont levant Chaban-Delmas, Bordeaux, France.

2 Principaux désordres rencontrés sur les câbles

Plusieurs caractéristiques environnementales et physiques déterminent les différents modes de rupture des fils constitutifs des câbles en acier. La nature métallique des câbles les rendent vulnérables aux phénomènes de corrosion tandis que leur élanement et leur faible amortissement les exposent inévitablement à des sollicitations de fatigue. Par ailleurs, les contacts interfilaires au sein d'un même câble sont le lieu de phénomènes d'usure et de concentration de contraintes importantes dont le niveau moyen et l'amplitude peuvent être amplifiés par la présence de points structurels singuliers tels que les colliers, les déviateurs, les étriers, les selles d'infléchissement et les ancrages.

Les phénomènes pouvant expliquer l'endommagement d'un câble sont multiples et interviennent de façon non indépendante dans des proportions qu'il est difficile à évaluer. Les études conduites sur la propagation des fissures dans les fils de toron soumis à des cycles de fatigue et de corrosion montrent des résultats dont l'interprétation est loin d'être intuitive et le lecteur intéressé pourra trouver dans [20], [21], [22], [23], [24] des études menées sur le sujet. Une synthèse des travaux de recherche réalisés sur la fatigue des câbles au cours des années 1990 au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées [25] permet d'avoir une vision synthétique de l'intrication des phénomènes intervenant dans la rupture des câbles. Les mécanismes physico-chimiques agissant à l'échelle micro et méso-scopiques aboutissant à la rupture d'un fil dépassent le cadre de cette thèse.

Dans ce qui suit, nous évoquerons les principaux désordres rencontrés sur les câbles d'ouvrage d'art et qu'il convient d'envisager dans le cadre de notre étude.

2.1 Désordres liés à la corrosion

Qu'elle soit sous contrainte, fissurante, par piqûres, généralisée ou bactérienne, la corrosion est, avec les phénomènes de fatigue, responsable de la plupart des ruptures de câbles sur les ponts.



Figure 1.6: Exemples de corrosion généralisée. Gauche: sur tirant d'ancrage - Pont d'Eymeux, France 2009. Centre: sur selle d'appui - Pont de Tréboul, France. Droite: au voisinage de la selle de déviation - Pont de La Devèze, France.

La corrosion généralisée, visible en Figure 1.6, est possible dès lors que le système de protection anti-corrosion est défaillant : elle est facilement identifiable et se propage assez lentement, sur une échelle de temps de quelques décennies suivant les conditions climatiques. Son traitement suivi d'une remise à niveau du système de protection anti-corrosion sont des opérations délicates et coûteuses sur les ouvrages anciens. En effet, à la réglementation sur l'eau interdisant tout rejet dans les rivières et fleuves que ces ouvrages franchissent généralement, il faut ajouter des contraintes exigeantes de confinement des zones traitées lorsque les peintures et sous-couches présentes sur l'ouvrage contiennent du plomb et de l'amiante. Il s'agit avant tout de protéger le personnel opérant sur le chantier et de garantir le bon traitement des déchets récupérés. Ce type de confinement pose par ailleurs problème du point de vue de la tenue de l'ouvrage dans la mesure où les anciens ponts n'étaient pas dimensionnés pour supporter les charges additionnelles liées aux échaffaudages et à leur prise au vent. Pour certains ouvrages longs d'environ une centaine de mètres entre appuis, le montant d'une remise en peinture est parfois du même ordre de grandeur que celui d'une déconstruction de l'ouvrage et d'un remplacement par un ouvrage moderne.

La corrosion localisée englobe sous un terme générique de nombreux mécanismes physico-chimiques parmi lesquels la corrosion sous contrainte, la corrosion fissurante, la corrosion par piqûres et la corrosion bactérienne. Ces mécanismes sont généralement accompagnés de phénomènes de fatigue et de fretting. La corrosion peut être visible suite à l'apparition de gonfles - voir la Figure 1.7 Gauche - sur les câbles, au voisinage des ancrages ou en partie courante. Cette forme de pathologie peut être identifiée visuellement mais ne laisse que peu de choix quant au traitement à envisager : il faut engager des réflexions et des actions prévoyant le remplacement du câble, ce qui est aisément réalisé dans le cas des suspentes et des haubans mais très délicat et coûteux lorsqu'il s'agit de câble porteur.



Figure 1.7: Gauche: Gonfles sur suspente - Pont de St-Denis-de-Pile, France 2011. Droite: Fils rompus - Pont d'Ancenis, France 2008.



Figure 1.8: Gauche: Coulure de corrosion au niveau du culot - pont de Phalip, France 2010. Droite: Rupture du câble à l'ancrage (crédit photographique: LCPC), pont du Teil, France.

Lorsque la corrosion a lieu au niveau d'un point singulier; au point bas de la parabole, à ancrage, au niveau d'un déviateur, d'un collier d'épanouissement ou d'un chevalet, il est difficile d'évaluer l'étendue du désordre sans démonter la partie concernée. Les coulures orangées d'oxydation visibles de l'extérieur, comme celle de la Figure 1.8, ne peuvent que confirmer la présence d'une zone affectée sans toutefois mener à une conclusion quant à la pérennité de l'élément atteint. Bien qu'heureusement peu courants, des cas de ruptures de câble ou d'endommagements sévères liés au développement de la corrosion localisée ont été constatés dernièrement en France sur d'importants ouvrages, comme le pont d'Ancenis avant 2014, le pont d'Aquitaine avant 2002, le pont du Teil en 2007, le pont de Tancarville, etc. Ils ont invariablement amené les gestionnaires au remplacement de l'ensemble de la suspension.

Ajoutons aux désordres rencontrés sur les câbles ceux provoqués par des événements ponctuels tels que la foudre, ou les accidents routiers. En théorie, la rupture soudaine d'un hauban ou d'une suspente ne remet pas en cause la tenue de l'ouvrage. En pratique, et comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, le cas d'une rupture soudaine est particulièrement problématique sur les ponts suspendus français.

2.2 Fatigue et fragilité des aciers

Comme nous l'avons déjà mentionné, les phénomènes de fatigue, de fretting et de corrosion sont responsables de la grande majorité des ruptures de câble sur ouvrage. Si nous portons plus spécifiquement notre attention aux problèmes de fatigue, nous constatons qu'ils se concentrent au droit des colliers d'attache de suspente, au niveau des selles de déviation, des selles d'appui et d'inflexion, à la sortie des culots ou des clavettes et au niveau des tirants et des étriers retenant les culots d'ancrage. La question de la tenue en fatigue d'un câble ou de son ancrage n'est pas liée qu'aux cycles de sollicitations axiales correspondant à des variations de chargement, mais également aux surtensions engendrées par flexion et provenant des déviations angulaires que subissent les câbles par rapport à leurs ancrages ou au niveau d'un collier. Il y a plusieurs raisons à cela : tout d'abord, la grande majorité des câbles présente des conditions aux ancrages proches de l'encastrement, et ce quel que soit le dispositif de retenue. En effet, les chapes, les étriers et les couteaux sensés apporter les degrés de libertés permettant d'éliminer les flexions sont bien souvent fixes une fois la mise en tension du câble réalisée. Par ailleurs, et bien qu'elle soit difficile à quantifier avec précision pour des raisons que nous évoquerons plus tard, la surtension liée à une légère erreur d'alignement est d'un ordre de grandeur comparable à celui des charges permanentes [19]. De fait, les recommandations en terme de qualification de procédé de haubanage demandent aux haubans testés de résister d'une part à deux millions de cycles de sollicitation axiale entre $0.45f_{rg}$ et $0.45f_{rg} - 200 \text{ MPa}$ où f_{rg} est la classe de résistance des fils constitutifs du câble et, d'autre part, à deux millions de cycles de chargement transversal induisant une déviation angulaire de 10 mrad à l'ancrage du câble. Il est possible d'imaginer qu'en cas d'apparition de déviation non souhaitée à l'ancrage lors du montage, les cycles de fatigue subis par le câble au cours de sa vie puissent être d'amplitudes plus importantes. Dans ce cas ils conduisent à la rupture du câble, ou, plus fréquemment, à celle des étriers ou des tirants qui le retiennent - voir Figure 1.9.

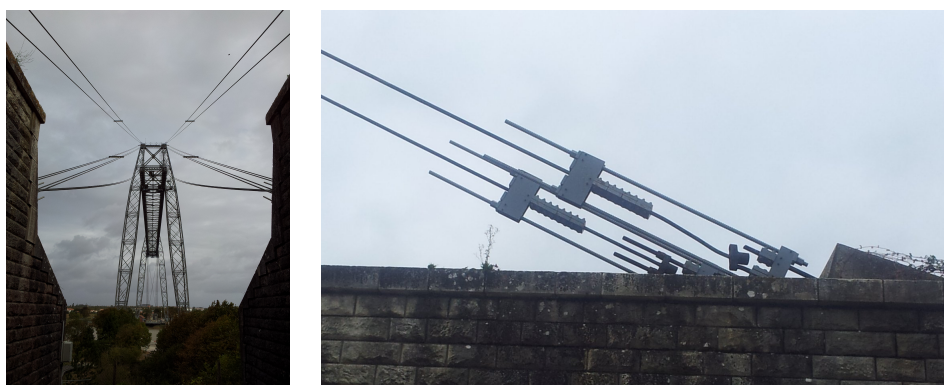


Figure 1.9: Gauche: Vue depuis les ancrages. Droite: Rupture d'un tirant d'ancrage - Pont à Transbordeur du Martrou, France 2011.

Parallèlement aux problèmes de fatigue et suite à l'effondrement du Pont de Sully-sur-Loire en 1985 par temps froid, il a été remarqué au cours de la campagne d'essais du Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Nancy s'étalant de 1985 à 1988, que certains aciers des suspentes et des tirants présents sur les trois quarts des 129 ponts suspendus étudiés présentaient des propriétés de résilience médiocres.

Ce constat a modifié le mode d'exploitation des ouvrages par temps froid en fonction de leur appartenance à l'une des classes de risque qui avaient été créées pour l'occasion³. De récentes études [26] laissent penser que la campagne de 1985 – 1988 présente des résultats plus optimistes que les campagnes d'essais réalisées dernièrement sur les mêmes ponts et que le traitement du problème nécessiterait une mise à jour d'envergure en tenant compte des critères actuels en matière d'acceptation des risques.

Le problème de fragilité des aciers par temps froid est d'autant plus délicat que les systèmes d'ancrage sont souvent difficiles à remplacer.

Tout comme dans le cas de suspicion de désordres liés aux phénomènes de fatigue, il n'est réellement possible de conclure sur la durabilité des tirants et étriers présentant des aciers fragiles qu'à partir de la valeur du niveau de sollicitation subie localement par le câble et son système d'ancrage. Actuellement, il n'existe pas de réponse technique fiable permettant d'évaluer avec une précision suffisante cette valeur clef dans le processus de décision de remplacement du câble.

3 Systèmes d'anti-corrosion et d'amortissement

3.1 Barrières anti-corrosion

Comme il a été indiqué à plusieurs reprises précédemment, les phénomènes de fatigue et de corrosion sont les principaux responsables de la ruine des câbles - et donc bien souvent de l'ensemble de la structure. Dans ce qui suit, nous proposons d'énumérer les solutions techniques présentes sur ouvrage afin de lutter contre la corrosion et les phénomènes de fatigue. L'objet de ce paragraphe est de donner un aperçu des éléments associés aux câbles et qu'il faudra prendre en compte lors de notre étude.

Afin de protéger les câbles, plusieurs stratégies sont envisageables : en France, la réglementation pour les ponts [19] préconise de multiplier les barrières de protection anti-corrosion en faisant intervenir au moins trois barrières de protection différentes entre le câble et son environnement. L'alternative à la multiplication des barrières anti-corrosion est de renouveler très régulièrement le système de protection, souvent de la peinture ou de la graisse, comme c'est le cas en France pour les câbles de remontées mécaniques, ou pour certains grands ponts suspendus aux États-Unis par exemple.

Parmi les systèmes couramment utilisés, citons :

- la galvanisation - dépôt d'une fine couche de zinc sur le câble qui se sacrifie au profit de l'acier du câble en milieu corrosif ;
- la mise en peinture - en France, selon les prescriptions du Fascicule 56 [27] ;
- l'application ou l'injection de graisse ou de cire ou de composants époxy ;
- l'extrusion ou le montage autour du câble ou du toron d'une gaine en polyéthylène haute densité (PEHD).

Selon les typologies de câble, le système final se compose d'une combinaison cohérente de ces barrières. Sur les grands ponts suspendus, une dernière famille de protection existe : la déshumidification. En effet, sur ces ponts, les câbles paraboliques sont constitués de

³En réalité, deux systèmes de classement similaires existent sur le sujet

plusieurs dizaines de torons parallèles - multi-couches ou multi-fils parallèles - entourés d'une gaine au sein de laquelle l'humidité de l'air peut être contrôlée par injection d'air sec en bout de câble. Le câble reste ainsi théoriquement à l'abri des phénomènes de corrosion. En France, trois ponts sont dotés de cette technologie: Aquitaine, Ancenis et Belleperche.

Malgré les avancées technologiques en matière de protection anti-corrosion, il est impossible de garantir la tenue dans le temps de l'ensemble du système de protection; à titre d'exemple, la garantie d'une peinture certifiée ACQPA ne dépasse pas les 15 ans. Or l'efficacité de ce type de protection dépend de son intégrité d'ensemble et suivant les cas, on peut imaginer qu'en dehors de réparations rapides, une défaillance locale de la protection puisse être à l'origine d'un endommagement à moyen terme plus sévère que celui qu'aurait subi la même structure en l'absence de protection. Par exemple, supposons qu'une rupture locale de gaine advienne en partie courante. Elle permettra à l'eau de s'infiltrer jusqu'aux points bas du câble où la partie saine de la même gaine l'y retiendra créant ainsi une zone de corrosion localisée qu'il sera difficile d'inspecter par la suite. À ce jour, il existe peu de retour d'expérience exploitable sur les différentes combinaisons de protection anti-corrosion dans la mesure où ces systèmes et leurs réglementations évoluent sur des échelles de temps beaucoup plus courtes que celles caractérisant l'apparition des premiers désordres sur ouvrage.

Dans le cadre de notre étude, il est important de retenir que la plupart des systèmes de protection cités précédemment écartent la possibilité de connaître avec précision *a priori* la masse linéique du câble même si ce dernier est sain. Les constations de terrain nous incitent donc à garder à l'esprit que la masse linéique du câble est un paramètre mal connu de notre problème et qu'il est susceptible de varier sur la longueur du câble. À titre d'exemple, considérons un toron multi-couches en acier dont les fils permettent un taux de remplissage de 0.74 par rapport à une section pleine d'égale diamètre et imaginons qu'un produit de protection d'une masse volumique proche de 900 kg.m^{-3} occupe les interstices entre les fils. La prise en compte ou non de ce produit de remplissage induit une variation de l'ordre de 4% sur le calcul théorique de la masse linéique du câble auquel il faut ajouter le poids de la peinture. Nous retiendrons cet ordre de grandeur par la suite.

3.2 Systèmes d'amortissement

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, les modèles de câble couramment utilisés pour le dimensionnement des structures ne permettent pas toujours, lors de la conception, de prendre en compte les phénomènes de résonance - et donc de fatigue. Les études traitant des conditions provoquant la mise en vibration des câbles seront évoquées par la suite, nous rappelons ici quelques uns de ces phénomènes pour mémoire (voir [19]):

- l'excitation paramétrique ;
- le détachement tourbillonnaire ;
- l'effet de sillage ;
- l'action du vent turbulent ;
- le galop ;

- le phénomène pluie-vent ;
- la respiration des torons (au sein d'un hauban multi-torons parallèles).

Dans les cas où il n'est pas possible de modifier simplement les éléments impliqués dans l'apparition des phénomènes de résonance des câbles, la stratégie adoptée est d'ajouter un amortisseur à une extrémité du câble, voire de lier entre eux les haubans par des câbles d'interconnexion. Les deux méthodes ont pour objectif de diminuer l'amplitude de vibration du câble tout en permettant à l'élément résistant de pouvoir dissiper l'énergie reçue de ce dernier. Ces éléments doivent pouvoir être pris en compte et caractérisés dans le cadre d'une modélisation satisfaisante du câble. En effet, les dispositifs d'amortissement sont souvent mis au point spécifiquement pour un ouvrage et leurs propriétés sont la plupart du temps confidentielles, y compris pour le gestionnaire de l'ouvrage, et il n'est donc que très rarement possible de s'appuyer sur les spécifications techniques du constructeur. Par ailleurs, de par sa nature et sa fonction, l'amortisseur possède une durabilité espérée moindre que celle du câble et doit faire l'objet d'un entretien et d'un suivi régulier.

Dans le cadre du développement d'une méthode de contrôle de santé, et à l'instar des systèmes de protection anti-corrosion, les effets de la vétusté et de l'endommagement d'un système d'amortissement doivent pouvoir être dissociés de ceux émanant d'une dégradation du câble sur lequel il est fixé.

4 Méthodes de diagnostic et auscultation des câbles

Afin d'introduire les différentes méthodes de diagnostic des câbles utilisées sur ouvrages d'art en France, il nous semble intéressant de les remettre dans leur contexte d'utilisation.

Dans le but d'assister les gestionnaires d'ouvrages et de réglementer la gestion des ouvrages d'art appartenant au patrimoine de l'État français, des fascicules regroupés en une Instruction Technique pour la Surveillance et l'Entretien des Ouvrages d'Art (IT-SEOA) sont édités par la Documentation des Techniques Routières Françaises (DTRF). Les premiers fascicules de l'ITSEOA donnent un cadre général et homogène de bonnes pratiques pour la gestion des ouvrages tandis que les autres fascicules traitent plus particulièrement de parties d'ouvrage ou d'ouvrages spécifiques. Les deux fascicules 34-1 et 34-2 concernant les ponts suspendus et les ponts haubanés servent de référence en matière de gestion d'ouvrage à câbles pour la plupart des ouvrages français.

Conformément à l'ITSEOA, et bien que certaines techniques de diagnostic entrent dans le programme de surveillance périodique de l'ouvrage, la plupart d'entre elles constitue des actions particulières de surveillance. Elles font donc généralement suite à la constatation d'un désordre lors d'une visite ou d'une inspection de l'ouvrage. De fait, leur nature première n'est pas de décrire l'évolution de l'état du câble, mais de caractériser son état au moment de l'auscultation. Ainsi, en dehors des derniers grands ouvrages d'art restaurés, aucun pont à câbles ancien ne présente de système de monitoring permanent s'il n'a pas été mis sous surveillance renforcée ou sous haute surveillance suite aux conclusions d'une visite, d'une inspection ou d'un diagnostic complet de l'ouvrage.

Il existe quatre grandes familles de méthodes de diagnostic des câbles : l'inspection visuelle, les auscultations électromagnétiques, les méthodes d'auscultation acoustique et les méthodes dites vibratoires pour lesquelles il est sous-entendu que seules les vibrations

transversales du câble sont étudiées. Dans ce qui suit, nous aborderons les avantages et les limites de chacune d'entre elles.

4.1 Inspection visuelle

L'inspection visuelle est, *a minima* et en théorie, effectuée au cours des inspections détaillées périodiques des ouvrages. En pratique, il arrive fréquemment que la suspension d'un ouvrage ne soit que partiellement inspectée⁴ et qu'une inspection spécifique soit recommandée. L'inspection visuelle dépend fortement de l'inspecteur, de son expérience et de sa compréhension du fonctionnement de l'ouvrage. Par ailleurs elle est, par nature, superficielle et ne permet d'aboutir qu'à des conclusions qualitatives sur l'état des câbles. Ainsi, l'accès à un dossier d'ouvrage complet contenant son historique, ses plans d'exécution et ses dernières inspections modifiera sensiblement les conclusions d'une inspection visuelle. Lorsque d'importants désordres sont identifiés ou suspectés, la conclusion de l'inspection visuelle recommande d'effectuer des études complémentaires parmi celles listées plus bas et une augmentation de la fréquence des contrôles des anomalies relevées.

4.2 Auscultations électromagnétiques

Deux grandes familles de méthodes d'auscultations électromagnétiques sont à distinguer:

- celles qui permettent la détection de fuite de champ suite à la magnétisation d'une portion de câble et qui donnent accès à l'état du câble localement ;
- celles qui permettent une détection de variation de courant de Foucault révélant un changement d'impédance et donc un taux de corrosion plus ou moins élevé de la portion de câble auscultée. Cette méthode nécessite un étalonnage en laboratoire qui diffère selon la nature du câble - présence de galvanisation ou non, diamètre du câble, etc.

Un exemple de bobine pour chacun des deux systèmes est présenté Figure 1.10.



Figure 1.10: Exemples de bobine d'auscultation électromagnétique. Gauche: bobine de mesure du taux d'oxydation. Droite: bobine de détection de défaut - fuite de champs. Matériel CEREMA/DTerSO.

⁴Plusieurs raisons l'expliquent : difficultés d'accès, inexpérience des inspecteurs, méconnaissance des spécificités des ouvrages à câbles, manque de temps au cours de l'intervention sur site.

Ces méthodes éprouvées présentent certaines limites lorsqu'elles sont mises en œuvre sur ouvrage: l'engorgement des bobines utilisées et/ou leurs fortes magnétisations les rendent parfois difficiles d'utilisation, l'accès aux points singuliers leur est souvent impossible. Notons que la première famille est particulièrement bien adaptée à l'auscultation des câbles de remontée mécanique et, dans certaines conditions, aux câbles de ponts suspendus. Par ailleurs, des systèmes plus légers traquant les fuites de champs électromagnétiques sont en cours de développement et donnent de bons résultats lorsqu'ils sont appliqués à la détection de défauts de remplissage dans les gaines de câble de précontrainte extérieure.

4.3 Méthodes acoustiques

Il existe au moins deux types de méthode acoustique:

- les méthodes ultra-sonores basées sur la propagation d'ondes envoyées et réfléchies sur un défaut ou en bout de fil rompu. Étant données les géométries complexes de la plupart des typologies de câble, ces méthodes ne sont utilisées que pour les multi-torons lorsque l'on a accès aux extrémités des fils, ce qui est rare en pratique, si ce n'est sur les ponts haubanés de conception récente. La zone investiguée est de quelques décimètres ;
- les méthodes d'écoute acoustique détectant l'onde de choc émise par la rupture d'un fil. Ces méthodes sont à calibrer en laboratoire ainsi que sur ouvrage. Ce type d'instrumentation est déployé en dernier recours sur des ouvrages dont le projet de reconstruction ou de réparation lourde doit être mis en œuvre rapidement. Il est rare que de tels projets prévoient un étape permettant un retour d'expérience du système d'instrumentation qui a été mis en place et, de fait, la nature de ce qui a été détecté par le système n'est pratiquement jamais identifiée *a posteriori*. Par ailleurs, la longueur de câble sur écoute n'est que de quelques dizaines de décimètres ce qui impose d'instrumenter toutes les parties sensibles de tous les câbles: le nombre de capteurs à disposer atteint souvent plusieurs centaines même sur un ouvrage de petite taille. Cette méthode s'inscrit dans le domaine plus large du contrôle non destructif utilisant l'émission acoustique dont une branche, en cours de développement, permet la détection de propagation de fissure dans les fils du câble. Cette dernière n'est pas opérationnelle à ce jour sur ouvrage suspendu - voir [28] pour une application aux câbles de précontrainte.

4.4 Méthodes dites vibratoires

Méthodes consistant à étudier les vibrations transversales des câbles. Une partie de ces méthodes seront exposées dans la partie suivante sur la mesure de tension. Notons qu'elles s'appuient principalement sur la détermination des spectres fréquentiels et qu'elles regroupent une grande variété de modèles et d'instrumentations. En plus des méthodes de mesure de tension, les méthodes vibratoires regroupent également les études publiées sur la détection de défaut par le biais de l'analyse modale.

4.5 Autres méthodes

D'autres méthodes existent mais leur utilisation sur les câbles de ponts suspendus sont moins courantes:

- la gammagraphie. utilisée pour les câbles de précontrainte. Cette méthode nécessite une mise en sécurité de la zone à cause des sources de radiation utilisée. Elle est de ce fait très contraignante à mettre en œuvre ;
- l'arbalète, aussi appelée tensiomètre, est un système permettant d'effectuer un essai trois points sur un câble : étalonné en laboratoire, il permet de connaître la tension dans les câbles. Son principe de fonctionnement à jusqu'à présent limité son utilisation aux câbles de faibles diamètres, en particulier aux torons 7 fils rencontrés en précontrainte ;
- Une catégorie de méthode non évoquée jusqu'à présent est celle des méthodes destructives. Dans le domaine des câbles, elle recouvre l'ensemble des études métallographiques telles que la détermination de la résilience, de la dureté, de la résistance en traction, de la composition chimique et microscopique du matériau. Du fait de leur caractère destructif, ces méthodes sont souvent mises en œuvre après dépose du câble. Elles jouent un rôle particulièrement important dans la détermination de la nature de l'endommagement et donc dans le diagnostic de la structure.

4.6 Évaluation de la tension

La détermination de la tension dans les câbles constitue un élément important de diagnostic et de contrôle. À l'échelle du câble, elle permet notamment d'évaluer une marge de sécurité à partir de ses caractéristiques mécaniques connues, mesurées ou simplement supposées. À l'échelle de la structure, connaître la tension dans les câbles permet de vérifier l'état de réglage de l'ouvrage et de s'assurer de son bon fonctionnement en service.

Il existe plusieurs méthodes d'évaluation de la tension dans les câbles: dans ce qui suit, nous présenterons une vue d'ensemble de ces méthodes. Elles se divisent en deux grandes familles de nature complètement différente: les méthodes de pesée et celles d'identification dynamique dites *méthodes vibratoires*.

En France, la méthode vibratoire la plus connue, et également la plus simple à mettre en œuvre, est la méthode d'essai LPC numéro 35 [29] de la série *techniques et méthodes des laboratoires des ponts et chaussées*. Cette méthode a été largement utilisée et est réputée fiable pour les câbles fortement tendus et élancés. Pour les câbles courts ou dont les conditions aux limites sont difficiles à déterminer, une note [30] permettant de prendre en compte différentes conditions aux limites a été publiée par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées en 2003. Le cas des câbles peu tendus ne fait pas l'objet d'études avancées.

Pesée des ancrages par vérinage

La pesée par vérinage est classiquement utilisée dans les phases de chantier, au moment du réglage de la structure. Dans sa configuration la plus simple, un système de vérinage est intercalé entre le câble et son ancrage.

En théorie, lors de la montée en pression du système, deux phases successives doivent être identifiées : la première doit montrer un faible déplacement entre le câble et son ancrage jusqu'à ce que le câble se désolidarise de ses tirants d'ancrage tandis que la seconde devrait présenter un régime différent, indiquant que l'ensemble des efforts transite par le système de vérinage. La détermination de la pression correspondant au passage d'une phase à l'autre donne le résultat souhaité.

En pratique, la mise en œuvre de cette méthode peut être délicate suivant l'accessibilité et la typologie de l'ancrage du câble. De plus, les dernières campagnes de pesage réalisées au Laboratoire de Bordeaux montrent que les courbes de chargement ne sont pas toujours faciles à interpréter bien qu'elles donnent, dans l'ensemble, des résultats conformes aux exigences de contrôle formulées pour la plupart des chantiers.

Ces difficultés s'expliquent par le fait que les systèmes de vérinage utilisés ne sont généralement pas conçus pour déterminer la tension dans les câbles mais simplement pour régler la structure, ce qui est sensiblement différent. En effet, l'entreprise effectuant le réglage de la structure doit, dans un premier temps, s'assurer que chaque câble ou suspente reprend bien une charge proche de celle préconisée par le calcul de l'ouvrage, et, dans un second temps, effectuer l'équilibrage des tensions dans les câbles et suspentes de même nature. Par ailleurs, le contrôle global de l'opération de réglage ne s'effectue pas grâce aux pressions lues au niveau des vérins, mais par le suivi géométrique de l'ouvrage, qui permet un réglage plus fin. L'opération de réglage consiste donc à verrouiller les ancrages lorsque d'une part, les vérins indiquent des valeurs de pression acceptables et équilibrées et que d'autre part, la géométrie de l'ouvrage est correcte. L'opération n'exige donc pas de système de contrôle de mise en pression excessivement juste. Or, dans la plupart des cas et pour des raisons pratiques, le contrôle de la tension dans les câbles est effectué avec le matériel de chantier doublé de mesures de déplacement. Ainsi la tension est connue à quelques pourcents près suivant l'opérateur, ce qui peut être acceptable pour une opération de contrôle mais assez peu satisfaisant pour la détermination précise de la tension dans le cadre d'un diagnostic.

Idéalement, un système de vérinage utilisé pour mesurer la tension dans les câbles devrait être un système dédié répondant aux exigences suivantes:

- le système doit contenir l'ensemble des éléments suivants : vérins, capteurs, contrôleurs, pièces de liaison mécaniques et hydrauliques ;
- le système et le protocole d'essai doivent être conçus afin de limiter au maximum l'impact des frottements sur les mesures ;
- les différentes caractéristiques mécaniques et hydrauliques du système doivent être connues afin caractériser la première phase (commune à tous les essais) de montée jusqu'au point de désolidarisation du câble et de son ancrage ;
- un asservissement en force ou en déplacement doit être possible afin d'établir un protocole de chargement (vitesse, paliers...) en laboratoire avec l'ensemble des éléments du système. Un monitoring extensométrique calibré des barres de liaison est également à envisager.

Malgré l'importance de ses inconvénients de mise en œuvre, la robustesse et la fiabilité du pesage par vérinage en font la méthode de référence sur ouvrage. Par ailleurs, avec un système dédié tel que décrit ci-dessus, il serait possible d'espérer une bonne précision

de mesure. Il serait recommandable de profiter de l'opération de pesage pour mettre en place une série de jauges au niveau des ancrages et installer ainsi un suivi de la tension dans le temps simple et léger. Cette opération complémentaire n'est cependant que très rarement envisagée.

Ajoutons enfin que la mise en place d'un vérinage possède un coût relativement élevé et impacte, dans la plupart des cas, la circulation sur l'ouvrage.

Méthodes vibratoires

Afin de palier les difficultés rencontrées lors d'une opération de vérinage, des méthodes d'évaluation de tension dites vibratoires ont été développées ces dernières décennies. Le terme recouvre principalement un ensemble de méthodes s'appuyant sur la détermination du contenu fréquentiel de signaux issus de capteurs mesurant les accélérations ou les déplacements transversaux du câble.

En France, la méthode classiquement appliquée sur ouvrage est la méthode LPC 35 [29], qui couvre de nombreux cas avec une précision acceptable. Elle s'appuie sur les travaux de MM. De Mars et Hardy [31] ainsi que sur l'ouvrage de référence de MM. Morse et Ingard [32]. Elle utilise deux modèles sensés décrire la dynamique du plus grand nombre des câbles rencontrés sur ouvrage : la corde vibrante d'un côté, et la barre tendue bi-encastree de l'autre. L'avantage de ces deux modélisations est qu'elles permettent, à partir d'hypothèses fortes mais réalistes, d'obtenir une relation explicite entre les fréquences de vibration et la tension du câble. Dans le cas de la corde vibrante, cette relation bien connue s'écrit $f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où n , f_n , L , T et μ sont respectivement l'ordre du mode, la fréquence du $n^{\text{ième}}$ mode, la longueur du câble -ici égale à la longueur entre ancrages- la tension dans le câble et sa masse linéique. Dans le cas de la poutre tendue, le module de rigidité EI est introduit et sous réserve que le rapport $R = \sqrt{\frac{EI}{TL^2}}$ soit petit, cette relation devient: $f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \left[1 + 2R + (4 + \frac{n^2\pi^2}{2})R^2 \right]$. La méthode précise que pour $R \leq 5.10^{-3}$, les courbes $C(n) = f_n$ représentant les fréquences propres en fonction de l'ordre du mode correspondant sont indiscernables pour les deux modèles jusqu'au septième mode. Il en résulte un test de validité d'utilisation du modèle de la corde vibrante pour évaluer la tension: si la courbe $C(n) = f_n$ est une droite pour $n \leq 7$, la tension dans le câble est simplement $T = 4f_1^2 L^2 \mu$ ce qui permet d'espérer une précision de 5% si l'on connaît f_1 , L et μ à 1% près.

Le succès de cette méthode réside dans ses aspects opérationnels: les paramètres L , μ sont en théorie des données que l'on peut retrouver dans le dossier d'ouvrage, et le spectre fréquentiel, quant à lui, ne doit être évalué que pour les dix premiers modes. Par ailleurs, de nombreux câbles correspondent aux hypothèses de validité du modèle.

En pratique, et pour les ponts suspendus notamment, il arrive que le dossier d'ouvrage soit incomplet et que la précision sur la détermination des fréquences propres soit délicate, ce qui introduit quelques pourcents d'erreur en plus dans l'évaluation de la tension qui devient alors médiocre.

Parallèlement, au Japon, des méthodes de mesure de tension dans les haubans se sont développées sur la base d'un modèle de poutre tendue inclinée et bi-encastree. Sur le sujet, nous renvoyons aux publications de MM. Zui et Shinke [33] dont les travaux ont consisté à sélectionner deux paramètres⁵ définissant au mieux les domaines d'applicabilité

⁵Les deux paramètres sont notés ξ et Γ . Le premier est l'inverse du paramètre R et le second

de plusieurs relations simples et explicites liant la tension et les deux premières fréquences propres du câble.

Si, parmi les dizaines de références bibliographiques sur le sujet, nous avons commencé notre état de l'art par la LPC 35 et Zui *et al.* c'est parce qu'elles laissent entrevoir les difficultés rencontrées à la fin du siècle dernier pour élaborer une méthode opérationnelle de mesure de tension sur ouvrage. Ces vingt dernières années, afin d'élargir le champ d'applicabilité des méthodes vibratoires aux différents types de câbles, la communauté scientifique a tenté d'apporter des solutions visant à la fois le traitement des cas les plus complexes tout en gardant la souplesse d'application directe d'un modèle de corde vibrante. Nous proposons d'avoir une lecture synthétique de l'historique complexe des évolutions apportées par les méthodes que nous avons trouvées dans la littérature. Pour ce faire, nous effectuons un découpage des méthodes en quatre parties:

- nature des capteurs sur ouvrage ;
- type de prétraitement des données, observables cherchées ;
- nature du couplage entre les observables et le modèle ;
- nature du modèle.

Dans le tableau 1.1, nous reportons une quinzaine de références sur le sujet. Il existe plusieurs façons d'interpréter ce tableau. Remarquons tout de suite qu'il ne rend pas compte de la complexité calculatoire contenue dans la plupart des publications citées.

Si l'on regarde d'un point de vue technologique et opérationnel, l'utilisation d'une relation explicite liant les observables et la tension est particulièrement intéressante, d'autant qu'il semble *a priori* assez simple d'obtenir le spectre fréquentiel d'un câble. Au cours des deux dernières décennies, de nombreux auteurs ont donc contribué aux développements analytiques - longs - prenant en compte la creusure, les conditions d'ancrages et la raideur en flexion du câble afin d'aboutir à une relation liant fréquences propres et tension. C'est le cas pour les publications [29], [33], [30], [34], [35] et [36].

Il n'est pourtant pas toujours facile d'obtenir avec précision les fréquences les plus basses - longueur des enregistrements, excitation, bruits, etc. - ni même de faire le tri dans le spectre fréquentiel lorsque l'on recherche les modes d'ordre supérieur via une transformée de Fourier du signal enregistré. Les auteurs des publications [37] et [38] apportent des réponses à ce problème en proposant des algorithmes basés sur des méthodes de sous-espaces pour le premier article ou en utilisant les transformées en ondelettes pour le second.

Parallèlement, dans les années 2000, des études d'identification de paramètres s'appuyant sur des modèles de barre ont vu le jour afin de déterminer, en même temps que la tension et par le biais d'un problème inverse, des propriétés mal connues du câble, telles que sa rigidité en flexion ou les raideurs de ses ancrages [39], [40], [41]. Cette voie ne semble pas avoir été exploitée d'avantage pour le moment.

permet de connaître l'influence de l'inclinaison et de la creusure du câble sur les fréquences des modes symétriques

Référence	Année de publication	Nature des capteurs	Prétraitement/observables	Relation tension/observables	Modèles
[29] LPC 35	1993	acc.	FFT/fréq. propres	explicite	corde/barre
[33] Zui <i>et al.</i>	1996	N.C.	N.C./fréq. propres	explicite	barre Irvine, faible creusure
[30] Bouton <i>et al.</i>	2003	acc.	fréq. propres	explicite	corde/barre Irvine, faible creusure
[39] Park <i>et al.</i>	2006	acc.	FFT/fréq. propres	prob. inv.	barre en EF
[40] Siegert <i>et al.</i>	2007	acc.	FFT/fréq. propres	prob. inv.	barre tendue
[41] Kim <i>et al.</i>	2007	acc.	DSP/fréq. propres	prob. inv.	barre EF
[42] Tullini <i>et al.</i>	2008	acc.	FRF/déformée modale	explicite (corde)	barre
[34] Ceballos <i>et al.</i>	2008	acc.	FFT/fréq. propres	analytique	barre
[38] Lardies <i>et al.</i>	2010	acc.	subspace method/Id. modale Transf. ondelettes/Id. modale	explicite	corde/barre
[37] Kangas <i>et al.</i>	2010	acc.	MUSIC	explicite	corde/barre
[35] Bellino <i>et al.</i>	2010	acc.	fréq. propres + L	régressions	barre
[36] Nam <i>et al.</i>	2011	N.C.	N.C./fréq. propres	explicite	barre tendue Irvine, faible creusure
[43] Avellaneda <i>et al.</i>	2012	acc.	MUSIC, FFT.../fréq. propres	régressions multiples	corde en EF
[44] Li <i>et al.</i>	2013	acc. et/ou ext.	Id. modale 1 mode	SVD+résolution graphique	barre

Table 1.1: Présentation synthétique d'articles sur la mesure de tension

Dans une récente publication [43], la tension dans les câbles d'un pont haubané en phase de montage est évaluée sur plusieurs câbles disposant de vérins de chantier précis. L'utilisation parallèle d'algorithmes variés (MUSIC, FFT, ...) afin de déterminer les fréquences propres et de calibrer un modèle de poutre issu d'un logiciel d'éléments finis commercial illustre bien le cloisonnement entre chacune des quatre parties de notre découpage dans la mise en place de la méthode.

Notons l'originalité de la dernière étude [44] dans l'emploi de la déformée modale comme paramètre d'entrée pour la détermination de la tension, ce qui permet l'utilisation éventuelle d'extensomètres plutôt que d'accéléromètres.

Comme le montre le Tableau 1.1 ainsi que les travaux présentés dans [45], la détermination de la tension par méthode vibratoire s'appuie essentiellement sur des données accélérométriques. Il semble aujourd'hui assez clair que les méthodes qui seront développées à l'avenir ne chercheront plus à déterminer de façon explicite un lien entre tension et fréquences propres, mais seront tournées vers l'identification des propriétés physiques du câble par le biais de méthodes inverses.

Il n'en demeure pas moins que l'ensemble des techniques précédemment citées ne tient pas compte du rôle que peuvent jouer les effets thermiques sur la tension du câble. Suivant sa position dans la structure et sa configuration de réglage, le câble subit plus ou moins les variations de température. Bien que ces phénomènes soient pris en compte lors de la conception et du dimensionnement des ouvrages, ils ne sont que très rarement considérés dans le suivi de la vie de l'ouvrage.

Autres méthodes de mesure de tension

D'autres méthodes existent afin d'évaluer ou de suivre la tension dans les câbles. Nous les donnons sans plus de précision du fait de notre faible retour d'expérience en interne sur la question:

- l'intégration d'un peson au niveau d'un ancrage, souvent l'ancrage inférieur. Cet élément de monitoring est présent sur les nouveaux ponts haubanés ;
- l'évaluation de la tension dans les barres par ultrason. Il s'agit de déterminer le niveau de contrainte (et donc la tension) au sein du matériau en se basant sur la vitesse de propagation des ondes. Cette méthode nécessite un calibrage en laboratoire dans les mêmes conditions (géométrie, matériau) que celles rencontrées *in situ*. À notre connaissance, elle est délicate à mettre en œuvre sur les ponts suspendus ;
- la méthode de l'arbalète qui consiste à établir le lien entre la tension et la force transversale qu'il faut appliquer au câble pour l'écarter de sa position d'équilibre.

4.7 Quelques orientations d'études sur la détection de défaut dans les câbles

En plus des méthodes établies et utilisées sur ouvrage, il existe plusieurs pistes de développement de méthodes de monitoring des câbles. Dans [46], l'influence d'un endommagement localisé sur les paramètres modaux d'un câble pesant est analysé. L'analyse modale est également utilisée pour détecter et localiser via un problème inverse l'endommagement, comme c'est le cas dans les publications très différentes [47] et ([48]-[49]).

La méthode exposée dans [47] avait par ailleurs été reprise et appliquée aux câbles par l'auteur de cette thèse et présentée dans son second mémoire de master [50].

Dans [51] et [52], deux approches de type probaliste permettent de remonter à un indice d'endommagement des câbles.

À une échelle plus locale, [53] utilise un modèle semi-analytique afin d'évaluer la longueur de réancrage des fils rompus d'un toron multicouches. La détermination de l'endommagement par modélisation locale du câble est également adoptée dans [54], étude dans laquelle l'auteur utilise un modèle aux éléments finis semi-analytiques (SAFE) pour caractériser la propagation d'ondes dans un toron 7 fils à afin de calibrer une méthode d'auscultation par émission-réflexion ultra-sonore.

Deux études évaluant l'impact des effets thermiques sur la détection d'endommagement [55] et [56] ont montré qu'une variation de température pouvait modifier la réponse du câble au point de perturber la détection d'endommagement.

4.8 Synthèse

La diversité des typologies de câbles rencontrée sur ouvrage fait de l'appellation *câble* un terme générique recouvrant des objets de nature et de fonctionnement très différents. Un câble parabolique mono-toron multicouches clos et un haubans multi-torons parallèles gainé et injecté à la cire constituent deux objets d'étude qui n'ont rien en commun à l'échelle locale, mais qui sont généralement modélisés et dimensionnés grâce aux mêmes équations à l'échelle de l'ouvrage.

Le développement d'une méthode générale d'évaluation de la tension dans les câbles est donc en théorie envisageable à condition de connaître, autant que possible, la multiplicité des typologies de câbles, leurs faiblesses et les technologies qui y sont associées. C'est une synthèse de ce prérequis que nous avons tenté d'écrire dans ce chapitre. Il nous servira à éviter les écueils de modélisation et d'interprétation des résultats expérimentaux obtenus.

Chapitre 2

Étude bibliographique sur les modèles de câble

La très vaste littérature existante sur la modélisation des câbles reflète la diversité des typologies de câbles que nous avons vue au chapitre précédent. À l'image de ce qui y a été fait, nous recensons dans ce chapitre les différentes familles de modélisation et citons pour chacune d'entre elles les travaux les plus connus. Nous y détaillons par ailleurs le modèle géométriquement exact de barres et de poutres en grands déplacements et grandes rotations dont l'essor remonte aux années 1980 avec, entre autres, les publications de MM. Simo et Vu-Quoc ou celles de MM. Cardona et Géraudin. La modélisation des déformations, qui constitue un prérequis important pour la compréhension de la théorie des barres géométriquement exactes, est également rappelée dans ce chapitre bibliographique.

Sommaire

1	Modèles de torons et de cordes torsadées	24
1.1	Modèles semi-analytiques ou semi-continus	24
1.2	Modèles 3D sous logiciels EF	25
2	Modèles couramment utilisés de câble	25
2.1	Le modèle - dit - d'Irvine	26
2.2	Barre ou poutre tendue droite.	27
3	Modèles de lignes déformables	28
3.1	Dynamique non-linéaire des câbles	29
3.2	Tiges, barres et poutres courbes en déformations finies	29
4	Notes sur la modélisation des déformations	30
5	Geometrically exact elastic rod: traditional implementation	44
6	Notes sur la modélisation des ancrages	50
7	Notes sur les lois de comportement utilisées	51
7.1	Aspects théoriques de modélisation	51

1 Modèles de torons et de cordes torsadées

1.1 Modèles semi-analytiques ou semi-continus

Une famille de modèles analytiques tente d'évaluer les différents niveaux de contraintes locales entre les fils. Les objectifs poursuivis sont multiples : il s'agit de déterminer les longueurs de ré-ancrage des fils, l'amplitude des sollicitations quasi-statiques ou dynamiques, que l'on prenne en compte les effets de torsion, de flexion, avec ou sans frottements interfilaires. L'idée est de mettre en regard les modèles avec des essais de laboratoire afin de prédire, en fonction de la typologie du câble (pas de toronnage, agencement) et de son mode de chargement (axial, en flexion ou en torsion), sa durée de vie en fatigue.

De nombreuses études parmi celles que nous citons ont été menées dans les années 90 et se sont développées dans le cadre de l'entretien des cordages d'amarrage ou d'ancrages off-shore, des transports par câble, voire des câblages de levage. Ce domaine de recherche est toujours actif aujourd'hui, notamment par le biais d'associations telles que l'OIPEEC, l'Organisation Internationale Pour l'Étude de l'Endurance des Câbles.

Depuis le début des années 90, plusieurs approches ont été suivies pour modéliser les câbles : dans son ouvrage de référence, [57] revient sur la modélisation la plus directe (et certainement une des plus calculatoires) du câble ou de la corde via la description de chacun des fils constitutifs vus comme des tiges (ou poutres) de Timoshenko. L'ouvrage donne les formules de détermination et les ordres de grandeur des différentes contraintes dans les fils (axiales, de contact, de flexion, de cisaillement).

Une autre approche, présentée et utilisée par M. Raoof [58], [59], [53], s'appuie sur une modélisation qui permet de voir le câble comme un ensemble de couches concentriques formées d'une membrane orthotrope représentant une couche de fils hélicoïdaux. Les paramètres physiques alimentant ce modèle découlent d'études paramétriques théoriques. Les raideurs équivalentes de chaque couche sont la combinaison d'une raideur axiale des fils de la couche dans la direction tangente à l'hélice qu'ils décrivent et d'une raideur dans un plan normal qui rend compte des différents contacts interfilaires au sein de la couche et entre les couches. Le modèle prend en compte le glissement ou le frottement des fils entre eux suivant les sollicitations qu'ils subissent. Le sujet des seuils de glissement/frottement a également et plus récemment été étudié analytiquement dans [60]. L'article publié cette année par M. Foti *et al.* [61] montre l'actualité de ce domaine de recherche.

Nous ne souhaitons pas passer ici en revue de façon exhaustive les travaux s'appuyant sur les modèles semi-analytiques. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'état de l'art de MM. Cardou et Jolicoeur [62] qui présente, en 1997, une synthèse très complète sur le sujet et pourra compléter ses connaissances avec l'ouvrage de M. Feyrer [63] publié dernièrement.

Évoquons néanmoins deux thèses parues en 1995 par M. Papailiou [64] et en 1997 par M. Siegert [20] se concentrant sur les deux problématiques qui ressortent le plus souvent lorsque l'on souhaite augmenter la durabilité des câbles¹ : d'une part la modélisation que nous venons d'évoquer s'intéressant aux différents niveaux de contraintes dans le câble et qui intègre des seuils de glissement et de frottement [64] et d'autre part la connaissance expérimentale [20] des phénomènes de fatigue provoquant les ruptures de fils. Les deux études mettent en avant le rôle prépondérant joué par la fatigue en flexion

¹En dehors des phénomènes de corrosion

des câbles et les résultats des travaux qui ont suivi sur le sujet [25] ont été intégrés aux recommandations pour la certification des procédés de haubanage [19].

Notons qu'en dehors des cas pour lesquels des études expérimentales alimentent les modèles, la dispersion des résultats obtenus par le biais des modèles semi-analytiques montre leur forte sensibilité aux hypothèses de modélisation faites afin de mener à bien les calculs. La prise en compte ou non de la plastification locale des fils, de la nature des frottements, des débattements, des glissements, des contacts entre les fils d'une même couche etc. constitue autant d'hypothèses changeant sensiblement les résultats des études théoriques. Le développement de modèles semi-analytiques reste d'actualité et fait toujours l'objet de publications [65] tout comme celui de l'étude expérimentale de la flexion des câbles [66].

1.2 Modèles 3D sous logiciels EF

Les modèles 3D sont peu utilisés pour les câbles longs : les problèmes de modélisation de la géométrie du câble, des contacts interfilaires présentant différents régimes de glissement-frottement-débattement et de la plastification locale des fils dans les zones en contact font aujourd'hui encore de l'utilisation de ces modèles une gageure, et ce malgré des puissances de calculs toujours plus grandes.

La modélisation 3D est toutefois possible sur des tronçons de câble et a été réalisée par plusieurs auteurs : [67] montre une simulation dynamique de la rupture d'un monotoron multi-couches, et dans leurs travaux sur les câbles synthétiques, les auteurs de [68] montrent comment implémenter le calcul pour simuler une corde tressée dont la configuration de départ est elle-même une inconnue du problème.

Plus proche des câbles en acier, on trouvera dans [69] ainsi que dans l'article du même auteur [70], une synthèse des modèles semi-analytiques cités dans la section précédente et leur confrontation avec un modèle 3D implémenté sous deux logiciels EF différents. Récemment, un article de MM. Zhang et Ostoj-Starzewski [71] présente également un modèle EF permettant une comparaison entre les raideurs théoriques² en flexion obtenues par les modèles semi-analytiques et leur modèle, en prenant en compte ou non l'effet du glissement entre les fils.

2 Modèles couramment utilisés de câble

En calcul de structure, on désigne par câble un élément fortement élané pour lequel seule la tension tangente à sa fibre moyenne intervient et qui ne peut résister ni en flexion ni en compression. Ce cas est un cas particulier - une théorie *spéciale*, selon les termes des frères Cosserat - des théories plus riches évoquées plus bas. Nous désignerons le modèle de câble utilisé en ingénierie modèle d'Irvine, non qu'il soit dû à M. Irvine, mais parce qu'il est largement étudié dans son ouvrage [72], référence en la matière.

²Il s'agit en fait d'une fourchette de raideurs

2.1 Le modèle - dit - d'Irvine

Statique

Les équations qui servent de base à l'ouvrage d'Irvine [72] apparaissent dès les premières pages du premier chapitre. Elles découlent de l'équilibre d'un tronçon de câble. Le modèle utilisé ne prenant en compte que la tension, le câble est nécessairement contenu dans un plan. Nous recopions avec les notations du livre les équations d'équilibre local d'un tronçon quelconque de câble sous son propre poids :

$$\frac{d}{dp} \left(T \frac{dz}{dp} \right) = -mg, \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dp} \left(T \frac{dx}{dp} \right) = 0, \quad (2.2)$$

où p est l'abscisse curviligne du câble se trouvant dans le plan $(0xz)$, T sa tension à l'abscisse s , m sa masse linéique et g la valeur de l'accélération de la pesanteur. Les équations (2.1) et (2.2) doivent être complétées par l'équation donnant l'allongement d'un tronçon de câble :

$$ds^2 = \left[\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp} \right)^2 \right] dp^2 \quad (2.3)$$

où ds et dp correspondent à un même élément linéaire de câble pris respectivement dans la configuration déformée et celle de référence. Une première intégration de (2.1)-(2.2) entre une extrémité du câble et le point d'abscisse p donne :

$$T \frac{dz}{dp} = -m gp + V, \quad (2.4)$$

$$T \frac{dx}{dp} = H, \quad (2.5)$$

où les constantes d'intégration V et H sont respectivement égales aux composantes verticale et horizontale de la réaction d'appui à l'extrémité du câble considéré. L'équilibre d'ensemble du tronçon de câble entre une extrémité et le point à l'abscisse p permet de trouver une expression de la tension T qui s'écrit :

$$T = \sqrt{H^2 + (V - m gp)^2} \quad (2.6)$$

à partir des équations (2.3)-(2.6), deux cas de figure sont couramment envisagés : soit on considère que le câble est inextensible, soit qu'il se comporte suivant une loi élastique linéaire.

Cas inextensible. Il faut considérer que dans le cas de l'inextensibilité $ds = dp$. On a également $s = p$ et une intégration directe de (2.4)-(2.5) en utilisant (2.6) donne la solution analytique du problème. Les conditions aux limites permettent alors de déterminer H et V qui sont solutions d'un système non linéaire dont la résolution à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson ne pose pas de réelle difficulté.

Cas élastique linéaire. Il faut introduire une mesure de déformation et une loi de comportement linéaire pour T . En prenant la mesure de déformation $dp/ds - 1$ dite de l'ingénieur, la loi de comportement s'écrit $T = EA(dp/ds - 1)$ où E et A sont respectivement le module d'Young et l'aire de la section du câble. En pratique, on utilise plutôt sa forme duale $dp/ds = T/EA + 1$ que l'on intègre dans (2.4) et (2.5) après avoir remarqué d'une part que dz/dp et dx/dp pouvaient respectivement s'écrire $dz/ds \times ds/dp$ et $dx/ds \times ds/dp$ et d'autre part que $mgs = m_o gs$ où m_o est la masse linéique du câble dans sa configuration de référence. La substitution de (2.6) dans les expressions obtenues de (2.4) et (2.5) et leur intégration permettent d'obtenir la solution analytique du problème. Comme dans le cas inextensible, les conditions aux limites permettent de déterminer H et V .

Les solutions des deux précédents cas sont données en Annexes A.

L'ajout d'une ou plusieurs charges ponctuelles est traité de façon similaire en partitionnant le câble autant de fois qu'il y a de charges. Bien que le problème du câble statique ait été très largement traité dans la littérature, il existe de nos jours un domaine de recherche très actif qui lui est étroitement lié et qui concerne le réglage et le dimensionnement des structures à câbles. Citons par exemple les articles récents [73], [74], [75] qui traitent spécifiquement du sujet.

Dynamique

Les équations de la dynamique du câble présentant une faible flèche et dont les ancrages sont au même niveau sont également données par Irvine au chapitre 3 de son livre [72]. Nous les recopions ici car elles servent de point de départ à de nombreuses études citées plus bas. Notons que la façon de les obtenir n'est pas plus détaillée dans [72] :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} \right) \right\} = m \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dz}{ds} + \frac{dw}{ds} \right) \right\} = m \frac{d^2 w}{dt^2} - mg \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \frac{dv}{ds} \right\} = m \frac{d^2 v}{dt^2} \quad (2.9)$$

où τ est une tension dynamique additionnelle, u , w et v sont respectivement les deux déplacements horizontaux et le déplacement vertical dans le plan du câble et hors plan. Ces équations sont immédiatement simplifiées en considérant d'une part l'équilibre statique du câble et d'autre part la prépondérance des composantes w et v sur la composante u qui est négligée dans le cas où le câble présente une faible creusure.

Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de M. Irvine pour la théorie linéaire qui en résulte, la modification des équations dans le cas du câble incliné³, l'extension aux cas du câble à plus forte flèche et la théorie non-linéaire qui y est développée.

2.2 Barre ou poutre tendue droite.

Nous rappelons ici les équations bien connues de la barre tendue car elle constitue un cas limite du câble court et son modèle peut être utilisé pour les haubans courts, les

³Modifications faites via un changement de repère.

barres de précontrainte ainsi que pour les suspentes et les aiguilles de pont. Nous verrons par la suite que de nombreux auteurs ont construit des modèles de câble en s'appuyant sur les équations (2.7)-(2.9) et en y ajoutant certains termes issus de l'équation du modèle de poutre le plus riche, ce qui également le cas ici :

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right\} - C \frac{dv}{dt} + T \frac{d^2 v}{dx^2} = m \frac{d^2 v}{dt^2} \quad (2.10)$$

où EI est la raideur en flexion de la barre, T sa tension - constante par hypothèse dans ce modèle - m sa la masse linéique, v la composante verticale de son déplacement et C son coefficient d'amortissement. Pour chacun des deux ancrages, les conditions aux limites de Dirichlet suivantes sont possibles :

- encastrement : correspond à la donnée d'un déplacement et d'une courbure ;
- appui rotulé : correspond à la donnée d'un déplacement et d'une courbure nulle.

Lorsque la barre est homogène et présente un amortissement suffisamment faible pour être négligé, il existe des familles de solutions analytiques au problème aux valeurs propres pour les deux conditions aux limites données ci-dessus. Elles peuvent notamment être trouvées dans les ouvrages d'initiation à la dynamique ⁴ et sont également à l'origine d'une large littérature.

3 Modèles de lignes déformables

Comme nous aurons l'occasion de le faire à plusieurs reprises tout au long de cette thèse, nous reprenons à notre compte une terminologie utilisée par les frères Cosserat et désignerons de façon générique par ligne déformable la modélisation de tout objet fortement élastique. L'appellation recouvre donc les câbles, les barres et les poutres courbes ou non, tendues ou non, les arches etc. D'un point de vue cinématique, une ligne déformable est entièrement déterminée par la donnée des points de la ligne et des trièdres qui leur sont invariablement associés. Les lignes déformables englobent donc modèles de câbles et de poutres présentant au maximum six degrés de liberté, ce qui correspond aux poutres dites de Timoshenko. En particulier, elles excluent le gauchissement des sections et l'effet Poisson.

Dans ce contexte, nous nous appuyons sur plusieurs ouvrages de références et en tout premier lieu sur les écrits des frères Cosserat eux-mêmes [7],[6] qui constituent les fondements de la mécanique des milieux continus micropolaires dont la portée et le niveau de complexité vont bien au-delà de notre travail. Retenons que les deux premiers chapitres de [6] présentent une généralisation de la statique et de la dynamique des lignes déformables. Citons également la monographie, beaucoup plus récente, de M. Antman [76] qui présente les mêmes théories et leur utilisation dans le cadre de problèmes nonlinéaires, et ce dans un formalisme mathématique moderne et sans compromis. Ajoutons deux ouvrages permettant d'autres approches. Tout d'abord le cours de MM. Ballard et Millard [5] qui présente de façon complète le modèle nonlinéaire des poutres courbes et des arcs élastiques et donne explicitement le lien entre mécanique des milieux continus tridimensionnels et milieux de Cosserat monodimensionnel⁵. Ensuite l'ouvrage de M.

⁴ou dans [30] par exemple

⁵et les écueils à éviter lorsque l'on s'intéresse à ces derniers

Lacarbonara [77] qui présente, en plus de la théorie, de nombreux cas d'études et des développements des modèles réalisés par l'auteur ou sous sa direction.

3.1 Dynamique non-linéaire des câbles

Malgré la diversité des typologies de câbles vue dans le chapitre précédent, la non-linéarité généralement prise en compte dans les études dynamiques de câble est géométrique : il s'agit de prendre en compte l'impact d'une flèche importante dans le mouvement d'ensemble du câble.

Il existe de nombreux écrits scientifiques sur la dynamique non-linéaire des câbles. Les modèles utilisés sont principalement de deux familles : soit le modèle de câble simple géométriquement exact est utilisé seul comme point de départ aux développements analytiques puis numériques, soit sa formulation forte est complétée à l'aide de termes permettant de prendre en compte les différentes rigidités de flexion et/ou de torsion.

Les modèles de la première famille ont permis d'étudier les interactions modales [78], [79], [80], [81] dues à la non-linéarité géométrique du câble, les excitations paramétriques haubans/pile de pont/tablier, régulièrement observées sur les ponts haubannés [82], [83], ou les réseaux de câbles [84], pour ne citer que quelques exemples.

Citons parmi les études issues de la seconde famille les travaux [85], [86] donnant deux modèles de câbles traités aux différences finies et pour lesquels le modèle classique a été enrichi des termes permettant l'introduction d'une loi de comportement issue de la théorie des poutres. C'est également le cas du modèle présenté dans [87], et discrétisé aux éléments finis. Dans [88], les termes supplémentaires permettent de modéliser et d'analyser aux échelles multiples les effets de la torsion aux ancrages et son rôle dans les modes de balancement des câbles électriques hautes tensions. Dans le même ordre d'idée, le modèle présenté dans [89] ajoute au modèle de câble lâche le terme de rigidité en flexion permettant d'étudier les phénomènes de perte locale de tension. Le modèle développé dans [90] répondait aux mêmes problèmes d'instabilité numérique qui ont lieu lorsque la tension locale dans le câble devient très faible.

3.2 Tiges, barres et poutres courbes en déformations finies

Il existe une vaste littérature concernant la modélisation des poutres en grands déplacements et rotations finies. Les travaux MM. Reissner [91], [1] et Antman sont des références en la matière puisqu'ils donnent les équations du problème sous forme variationnelle et la dérivation des déformations qui y sont présentées seront reprises par de très nombreux auteurs. À la fin des années 70, l'utilisation des éléments finis pour résoudre le problème en déplacements se heurte à une difficulté technique importante : la non-commutativité de deux rotations quelconques successives aboutit à une matrice de rigidité géométrique non symétrique ce qui remet en cause l'aspect conservatif du problème. Il sera démontré plus tard par [2] que le caractère symétrique de la matrice de rigidité réapparaît lorsque l'on considère l'état d'équilibre de la poutre. Une façon de contourner ce problème est de partir d'un état d'équilibre connu puis de résoudre le problème par incrément suffisamment petits afin de mettre à jour les différentes matrices de rigidité. C'est le point de vue adopté par l'ensemble des publications utilisant une formulation lagrangienne incrémentale (ULF⁶), y compris [8] et [92], pour n'en citer

⁶Updated Lagrangian Formulation

que deux. Nous devons néanmoins citer ici les travaux originaux de M. Argyris et de ses collaborateurs [93], [94] qui, quelques années avant les publications de M. Simo, contournaient cette difficulté en utilisant une paramétrisation semi-tangentielle -commutative- des rotations [95]. Ce point de vue semble avoir été délaissé dans la littérature au profit de paramétrisation plus classiques des grandes rotations.

À partir des travaux de MM. Reissner, Antman et Argyris, nous découpons, un rien grossièrement, la vaste littérature traitant des poutres en grandes déformations en trois périodes.

Les années 1980. Une série d'articles écrits par MM. Simo et Vu-Quoc [2], [96], présente en détail l'implémentation par éléments finis de la statique et de la dynamique des poutres en grandes transformations. Les auteurs y développent les approches eulérienne et lagrangienne du problème et une attention particulière y est portée à la cohérence des mises à jour des variables cinématiques linéarisées. Au même moment, d'autres auteurs font le choix d'une description purement lagrangienne du problème, tout en variant la paramétrisation des rotations [3],[97],[98]. Nous reviendrons en détail sur les différents choix de paramétrisation des rotations et des points de vue qu'il est possible d'adopter.

Les années 1990. S'appuyant sur les travaux que nous venons de citer, les études publiées dans les années 90, [99],[100],[101],[102],[103], explorent de nouvelles façons d'implémenter le problème, tant au niveau de l'algorithmique afin d'améliorer la stabilité et la rapidité des calculs [99], [103] qu'au niveau théorique afin de garantir le respect des principes énergétiques au cours des simulations [104] et des interpolations [105].

Depuis les années 2000. Les modèles de tiges et poutres en grands déplacements et rotations finies font l'objet de publications montrant la maturité de la théorie [106], [107], [108], [109], [110], [111] et sont implémentés dans des logiciels de modélisation aux éléments finis tels que Code_Aster⁷ [112]. Ils sont utilisés en robotique pour la simulation et le contrôle du mouvement de robots élançés [113],[114]. Dans la continuité des travaux de M. Antman, des lois visco-élastiques viennent enrichir les modèles [115], [116], [77].

4 Notes sur la modélisation des déformations

En dehors des modèles les plus simples pour lesquels le câble est considéré comme un fil pesant, une des difficultés majeures rencontrées dans la modélisation des structures élançées et courbes est le choix et l'utilisation à bon escient d'une paramétrisation des rotations subies par les sections au cours de la transformation. Le sujet a largement été étudié depuis le début du siècle dernier et de nombreux ouvrages de géométrie analytiques le traitent. Une introduction claire, récente et concise sur la paramétrisation des rotations peut être trouvée dans [95] et [117]. Dans [118], le lecteur trouvera une description du sujet moins récente mais également éclairante. Le *bon* choix de la paramétrisation des rotations est étroitement lié à la complexité inhérente aux dérivations, mises à jour et implémentations numériques des déformations en grands déplacements et grandes rotations. De nombreuses études menées au cours de ces quarante dernières années ont

⁷voir les notices explicatives écrites par M. Fléjou

révélé les écueils techniques et théoriques de l'implémentation sous éléments finis de ce type de modèle, dit géométriquement exact. Nous nous limiterons à un bref rappel des informations importantes à connaître sur le sujet dans le cadre de notre étude mais le lecteur pourra se référer utilement aux études [91], [2], [96], [99], [119], [102], [105], [120], [121] dont nous reprendrons certains arguments dans ce qui suit.

Quelques notions sur les rotations. Les formules générales qui suivent sont écrites avec nos notations par souci de cohérence avec la suite mais au détriment de certaines notations d'usage. La position de chaque point de la courbe est donnée par le vecteur $\mathbf{r}$ dans un repère global de référence fixe noté $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. La rotation permettant le passage du repère global fixe $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ aux repères locaux liés au câble $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ sera notée $\mathbf{\Lambda}$. Elle est un élément du groupe spécial orthogonal sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ appelé $SO(3)$. Il est possible de représenter $\mathbf{\Lambda}$ en lui associant un vecteur rotation que nous noterons $\mathbf{\Theta}$ et dont les composantes par rapport au repère fixe $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont Θ_1 , Θ_2 et Θ_3 . Si l'on forme la matrice anti-symétrique $\hat{\mathbf{\Theta}}$ telle que :

$$\hat{\mathbf{\Theta}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Theta_3 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & 0 & -\Theta_1 \\ -\Theta_2 & \Theta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors $\mathbf{\Lambda}$ peut s'écrire :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin \Theta}{\Theta} \hat{\mathbf{\Theta}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \Theta/2}{\Theta/2} \right)^2 \hat{\mathbf{\Theta}}^2 \quad (2.11)$$

où $\mathbf{I}_3$ est la matrice identité et $\Theta = \|\mathbf{\Theta}\| = (\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2)^{1/2}$. Une relation trigonométrique simple permet de réécrire (2.11) sous la forme :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin \Theta}{\Theta} \hat{\mathbf{\Theta}} + \frac{1 - \cos \Theta}{\Theta^2} \hat{\mathbf{\Theta}}^2 \quad (2.12)$$

Si $\mathbf{u}$ est un vecteur dont les composantes dans $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont respectivement u_1 , u_2 et u_3 , les composantes dans ce même repère du vecteur $\mathbf{v}$, image de $\mathbf{u}$ ayant subi la rotation $\mathbf{\Lambda}$ sont données par l'opération matricielle $\mathbf{\Lambda}\mathbf{u}$. Remarquons que la matrice $\hat{\mathbf{\Theta}}^2$ peut également être obtenue à partir de $\mathbf{\Theta}$ par la relation $\hat{\mathbf{\Theta}}^2 = \mathbf{\Theta} \otimes \mathbf{\Theta} - \Theta^2 \mathbf{I}_3$ où les composantes de $\mathbf{\Theta} \otimes \mathbf{\Theta}$ s'écrivent $\Theta_i \Theta_j$. La relation (2.12) peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{\Lambda} = \cos \Theta \mathbf{I}_3 + \frac{\sin \Theta}{\Theta} \hat{\mathbf{\Theta}} + \frac{1 - \cos \Theta}{\Theta^2} \mathbf{\Theta} \otimes \mathbf{\Theta} \quad (2.13)$$

soit, en introduisant $\mathbf{e}$ le vecteur unitaire tel que $\mathbf{e} = \mathbf{\Theta}/\Theta$ et la matrice $\hat{\mathbf{e}}$ associée :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_3 + \sin \Theta \hat{\mathbf{e}} + (1 - \cos \Theta) \hat{\mathbf{e}}^2, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \cos \Theta \mathbf{I}_3 + \sin \Theta \hat{\mathbf{e}} + (1 - \cos \Theta) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}. \quad (2.15)$$

Le développement en série des sinus cardinaux dans (2.11) permet de réécrire $\mathbf{\Lambda}$ sous la forme d'une exponentielle de $\hat{\mathbf{\Theta}}$ de sorte que $\mathbf{\Lambda} = \exp \hat{\mathbf{\Theta}}$. Cette notation occupe une place importante dans la littérature car elle a permis de définir une projection de l'espace des tenseurs anti-symétriques $so(3)$ vers le groupe spécial orthogonal $SO(3)$ et d'écrire simplement la dérivée directionnelle d'une rotation. Nous reviendrons sur l'importance de cette projection et du rôle qu'elle joue dans la linéarisation des rotations.

Introduisons également une paramétrisation de la rotation via le pseudo-vecteur ϖ colinéaire à Θ et dont les composantes ϖ_1, ϖ_2 et ϖ_3 dans $\{e_1, e_2, e_3\}$ vérifient $\varpi = (\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2)^{1/2} = \tan(\Theta/2)$. De même que nous avons associé $\hat{\Theta}$ à Θ , nous appellerons $\hat{\varpi}$ la matrice anti-symétrique associée à ϖ et qui mène aux relations suivantes :

$$\hat{\varpi} = \frac{1}{2} \frac{\tan \Theta/2}{\Theta/2} \hat{\Theta} \quad (2.16)$$

$$\Lambda = \mathbf{I}_3 + \frac{2}{1 + \varpi \cdot \varpi} [\hat{\varpi} + \hat{\varpi}^2] \quad (2.17)$$

Le pseudo-vecteur ϖ peut également s'écrire $\varpi = \varpi e$.

Composition de deux rotations. Jusqu'ici, la rotation Λ a été définie à partir des vecteurs et pseudo-vecteurs Θ, ϖ ou e exprimés dans le repère global de référence -fixe- $\{e_1, e_2, e_3\}$ et des matrices anti-symétriques respectivement associées $\hat{\Theta}, \hat{\varpi}$ et $\hat{e}$. D'autres définitions sont possibles à partir d'autres repères. Restons dans le cadre précédent et considérons à présent le cas de deux configurations successives $\mathbf{C}^0$ puis $\check{\mathbf{C}}$ et de leurs rotations associées Λ^0 et $\check{\Lambda}$ et notons Λ la rotation permettant de passer des repères locaux $\{b_1^0, b_2^0, b_3^0\}$ de la première configuration aux repères locaux $\{\check{b}_1, \check{b}_2, \check{b}_3\}$ de la seconde. Représentons respectivement Λ^0, Λ et $\check{\Lambda}$ par les vecteurs ⁸ $\Theta^0 = \Theta_i^0 e_i, \Theta = \Theta_i e_i$ et $\check{\Theta} = \check{\Theta}_i e_i$ les matrices anti-symétriques $\hat{\Theta}^0, \hat{\Theta}$ et $\hat{\check{\Theta}}$ associées. En utilisant les notations introduites, nous pouvons écrire $\Lambda^0 = \exp \hat{\Theta}^0, \Lambda = \exp \hat{\Theta}$ et $\check{\Lambda} = \exp \hat{\check{\Theta}}$.

Nous souhaitons donner les relations utiles par la suite qui permettent d'exprimer la rotation totale $\check{\Lambda}$ et ses paramètres en fonction de ceux des rotations intermédiaires Λ^0 et Λ . La difficulté principale provient de la non commutativité des rotations qui ne permet pas d'écrire simplement le vecteur rotation de $\check{\Lambda}$ comme la somme des vecteurs rotations de Λ^0 et Λ . La composition des rotations données par les vecteurs rotations Θ^0 et Θ , tels qu'ils sont définis, se fait par rapport à des axes fixes, c'est-à-dire que la rotation Θ n'est pas entraînée par la rotation qui la précède. Dans ce cas, nous avons les relations suivantes dont les démonstrations sont à trouver dans [95] :

$$\check{\varpi} = \frac{1}{1 - \varpi \cdot \varpi^0} [\varpi^0 + \varpi - \hat{\varpi}^0 \varpi] = \frac{1}{1 - \varpi \cdot \varpi^0} [\varpi^0 + \varpi + \hat{\varpi} \varpi^0] \quad (2.18)$$

$$\hat{\check{\varpi}} = \frac{1}{1 - \varpi \cdot \varpi^0} [\hat{\varpi}^0 + \hat{\varpi} - [\hat{\varpi}^0 \hat{\varpi} - \hat{\varpi} \hat{\varpi}^0]] \quad (2.19)$$

$$\cos(\check{\Theta}/2) = \cos(\Theta^0/2) \cos(\Theta/2) - \sin(\Theta^0/2) \sin(\Theta/2) \varpi^0 \cdot \varpi \quad (2.20)$$

où les ϖ^0, ϖ et $\check{\varpi}$ et les matrices anti-symétriques associées correspondent respectivement aux rotations Λ^0, Λ et $\check{\Lambda}$. Avec les relations (2.16) et (2.17), l'ensemble des paramètres définissant la rotation $\check{\Lambda}$ peut être retrouvée en fonction des paramètres des deux autres rotations.

Paramétrer les rotations grâce aux quaternions. Complétons nos rappels sur les rotations par l'introduction des quaternions dont le formalisme nous permettra d'exprimer simplement les relations précédentes. Un quaternion est composé d'un réel et d'un vecteur (triplet de réels) dont la forme est $q = q + \mathbf{q}$. Pour deux quaternions q_1 et q_2 , les

⁸Lorsqu'elle n'est pas ambiguë, la convention de sommation sur les indices répétés sera utilisée

opérations d'addition et de multiplication sont définies comme suit :

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = q_1 + q_2 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = q_1 q_2 - \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 + q_1 \mathbf{q}_2 + q_2 \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \quad (2.22)$$

où l'on voit clairement que la multiplication de deux quaternions est non commutative. Nous notons $\mathbf{q}^*$ le quaternion conjugué de $\mathbf{q}$ défini par $\mathbf{q}^* := q - \mathbf{q}$, la norme d'un quaternion s'obtient par la formule $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\mathbf{q}^*} = \sqrt{\mathbf{q}^*\mathbf{q}}$ et son inverse est $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*/\|\mathbf{q}\|$. Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'aux quaternions unitaires, c'est-à-dire les quaternions dont la norme est égale à 1 et qui vérifient donc $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}^*$. Ces quaternions peuvent se mettre sous la forme $\mathbf{u} = \cos(\Theta/2)(1 + \boldsymbol{\varpi})$ où $\boldsymbol{\varpi}$ a la forme définie précédemment. Ayant introduit $\mathbf{u}^0 = \cos(\Theta^0/2)(1 + \boldsymbol{\varpi}^0)$ et les quantités analogues pour $\mathbf{u}$ et $\check{\mathbf{u}}$, nous pouvons obtenir la relation $\check{\mathbf{u}} = \mathbf{u}\mathbf{u}^0$ dont l'égalité des parties scalaires n'est autre que (2.20) tandis que celle des parties vectorielles est donnée par (2.18). Par ailleurs, le calcul permettant de retrouver la rotation $\boldsymbol{\Lambda}$ à partir d'un quaternion correspondant $\mathbf{u}$ est donné par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\Lambda} = 2 \begin{pmatrix} q^2 + q_1^2 - 1/2 & q_1 q_2 - q_3 q & q_1 q_3 + q_2 q \\ q_2 q_1 + q_3 q & q^2 + q_2^2 - 1/2 & q_2 q_3 - q_1 q \\ q_3 q_1 - q_2 q & q_3 q_2 + q_1 q & q^2 + q_3^2 - 1/2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

où $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$. L'opération inverse, consistant à obtenir un quaternion à partir d'une matrice de rotation n'est pas déterminée de façon unique mais se fait couramment par le biais de l'algorithme de Spurrier :

- Calculer $M = \max\{Tr(\boldsymbol{\Lambda}), \boldsymbol{\Lambda}_{11}, \boldsymbol{\Lambda}_{22}, \boldsymbol{\Lambda}_{33}\}$
- Si $M = Tr(\boldsymbol{\Lambda})$, le quaternion associé est défini par :
 - $q = 1/2\sqrt{1 + Tr(\boldsymbol{\Lambda})}$,
 - $q_i = 1/4(R_{kj} - R_{jk})/q$.
- sinon, en notant i l'indice tel que $M = R_{ii}$, les expressions précédentes sont à adapter :
 - $q_i = \sqrt{1/2R_{ii} + 1/4(1 - Tr(\boldsymbol{\Lambda}))}$,
 - $q = 1/4(R_{kj} - R_{jk})/q_i$,
 - $q_l = 1/4(R_{li} + R_{il})/q_i$ pour $l = \{j, k\}$.
- $\mathbf{q} = \text{sign}(q)\mathbf{q}$

où i, j, k est une permutation circulaire de 1, 2, 3. Deux quaternions étant possibles pour chaque rotation $\boldsymbol{\Lambda}$, nous convenons d'ajouter, à l'instar de [102], une étape permettant de ne garder que les quaternions pour lesquels $q \geq 0$. Par ailleurs, et toujours d'après [102], nous ajoutons que le vecteur rotation $\boldsymbol{\Theta}$ peut facilement être retrouvé à partir du quaternion $\mathbf{q}$ via un algorithme simple (également écrit dans [122]). Il permet de contourner les erreurs d'arrondi et se présente comme suit :

- Si $\|\mathbf{q}\| = 0$ alors $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{o}$,
- Sinon :

- Si $\|\mathbf{q}\| < q$, $\Theta = 2 \frac{q}{\|\mathbf{q}\|} \arcsin \|\mathbf{q}\|$,
- Sinon $\Theta = 2 \frac{q}{\|\mathbf{q}\|} \arccos q$.

Notons que la référence [112] propose un autre algorithme afin de calculer Θ . L'utilisation de 2.11 permet enfin de remonter à Λ . On remarquera l'obtention de Λ à partir de $\mathbf{q}$ en utilisant (2.23) est plus directe mais conduit numériquement à une perte de la symétrie de Λ .

En conclusion de cette partie, donnons la relation fondamentale qui lie les rotations et les quaternions. Soient une rotation Λ et son quaternion associé $\mathbf{u}$. Si l'on associe à un vecteur quelconque $\mathbf{v}$ le quaternion $\mathbf{v} = 0 + \mathbf{v}$, la partie vectorielle du quaternion $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^*$ est égale au vecteur $\Lambda\mathbf{v}$.

Adaptation des formules au cas d'étude. En pratique et au cours des calculs, la rotation Λ intervient dans un second temps et est infinitésimale. Elle est donc définie à partir d'un vecteur rotation ϑ lié au solide ayant déjà subi la première rotation Λ^0 . En d'autres termes, ϑ est le résultat d'une rotation de Θ et on a $\vartheta = \Lambda^0\Theta$. On dit que la rotation se fait autour d'un axe suiveur. Dans ce cas, $\check{\Lambda}$ est la composition de deux rotations successives autour de Θ^0 puis de ϑ . On a alors $\check{\Lambda} = \exp(\hat{\vartheta})\Lambda^0 = \exp \hat{\vartheta} \exp \hat{\Theta}^0$. Si l'on veut exprimer $\check{\Lambda}$ à partir de rotations - Λ^0 et Λ^r - autour d'axes considérés fixes Θ^0 et Θ , il faut retrouver l'expression de $\check{\Lambda} = \exp(\hat{\vartheta})\Lambda^0$ en fonction de Θ . Nous remarquons que $\hat{\vartheta} = \Lambda^0\hat{\Theta}^t\Lambda^0$. En notant de plus que $\exp(\Lambda^0\hat{\Theta}^t\Lambda^0) = \Lambda^0\exp(\hat{\Theta})^t\Lambda^0$, nous obtenons l'écriture de $\check{\Lambda}$ en fonction des rotations autour d'axes fixes $\check{\Lambda} = \exp \hat{\Theta}^0 \exp \hat{\Theta} = \Lambda^0 \exp \hat{\Theta} = \Lambda^0 \Lambda^r$. On voit donc que les expressions (2.18) - (2.20) peuvent être utilisées de deux façons équivalentes :

- soit comme l'expression des paramètres de la rotation $\check{\Lambda}$ vue comme la composition de deux rotations successives Λ^r puis Λ^0 de vecteurs Θ et Θ^0 , Θ étant un axe fixe. En associant les quaternions $\mathbf{q}^0$ et $\mathbf{q}$ à Θ^0 et Θ , le quaternion de la rotation correspondante serait donc $\check{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^0\mathbf{q}$,
- soit comme l'expression des paramètres de la rotation $\check{\Lambda}$ vue comme la composition de deux rotations successives Λ^0 puis Λ de vecteurs Θ^0 et ϑ , $\vartheta = \Lambda^0\Theta$ étant un axe suiveur. En associant les quaternions $\mathbf{q}^0$ et $\mathbf{q}$ à Θ^0 et ϑ , le quaternion de la rotation correspondante serait donc $\check{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\mathbf{q}^0$.

Bien que le second point de vue soit plus naturel, le choix de la paramétrisation est libre.

Notations. Incrément, variation admissible, variation infinitésimale. Pour des raisons qui apparaîtront plus tard, nos notations désignent indifféremment par δa ou $\mathfrak{d}a$ l'incrément et/ou la variation admissible et/ou la variation infinitésimale de la quantité a . Tentons de donner qualitativement un sens à ces différentes grandeurs : l'incrément δa est une quantité liant les valeurs de a entre deux instants t_n et t_{n+1} ou entre deux itérations n et $n+1$. Si a est un déplacement, nous aurons simplement $a(t_{n+1}) = a(t_n) + \delta a(t_n)$ ou $a[n+1] = a[n] + \delta a[n]$. Le cas des rotations est plus complexe, mais sera traité par la suite. La variation admissible δa est telle que la perturbation $a + \delta a$ de a soit une grandeur admissible pour le système. Elle n'est contrainte que par la physique du problème : ordre de grandeur réaliste, respect des conditions aux limites, etc. La variation infinitésimale est quant à elle une variation de faible amplitude par rapport

aux données du problème. Dans notre étude, le problème est traité par le biais d'un calcul de variations infinitésimales autour d'un état à déterminer réalisant l'extremum d'une fonctionnelle F . En d'autres termes, nous cherchons les déplacements $\mathbf{r}$ et les rotations $\boldsymbol{\vartheta}$ tels que les variations de F soient nulles quelles que soient les variations infinitésimales $\delta\mathbf{r}$ et $\delta\boldsymbol{\vartheta}$ autour de la configuration définie par $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta})$. Dans le cas statique, les équations obtenues sont non-linéaires et doivent être linéarisées autour d'un état connu au cours du calcul, $(\mathbf{r}[n], \boldsymbol{\vartheta}[n])$ par exemple. Il s'agit de déterminer des incréments issus de la linéarisation des grandeurs cherchées : pour $\mathbf{r}[n]$ nous introduisons l'incrément $\mathfrak{d}\mathbf{r}[n]$ et nous construisons les champs admissibles linéarisés $\mathbf{r}[n]^{lin} = \mathbf{r}[n] + t\mathfrak{d}\mathbf{r}[n]$ pour $t \in \mathbb{R}^+$. Il est clair que les variations admissibles linéarisées s'écrivent simplement :

$$\delta\mathbf{r}[n] = \left(\frac{d\mathbf{r}[n]^{lin}}{dt} \right)_{t=0} = \mathfrak{d}\mathbf{r}[n]$$

ce qui justifie pour les déplacements, l'utilisation de la même notation. Le caractère infinitésimal de $\delta\mathbf{r}[n]$ n'est à ce stade pas requis et cela restera vrai tant que la validité physique de la linéarisation n'en sera pas affectée. Dans un premier temps, nous nous contenterons de dire que *la notation δa désigne la dérivée directionnelle de a dans la direction des transformations envisagées.*

Dans les travaux des frères Cosserat. Dans les travaux écrits des deux frères, la cinématique est décrite sur la base des cours de géométrie de M. Darboux [123]⁹. La rotation $\mathbf{\Lambda}$ y est en premier lieu paramétrée par les neuf cosinus directeurs $\tau_{ij} = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{e}_i$, $\{i, j\} \in \{1, 2, 3\}$ des vecteurs $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ par rapport au repère $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Une partie du travail des frères Cosserat repose sur l'analogie des rôles joués par la paramétrisation de l'espace le long d'une ligne matérielle et celle du temps le long de la trajectoire prise par un point matériel. Le pseudo-vecteur $\mathbf{\Gamma}$, analogue spatial de la rotation instantanée le long d'une trajectoire, est alors naturellement introduit. Deux relations équivalentes caractérisent $\mathbf{\Gamma}$: d'une part c'est le pseudo-vecteur associé au tenseur anti-symétrique $\hat{\mathbf{\Gamma}} = {}^t\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}_s$ et d'autre part $\partial_s \mathbf{b}_i = \mathbf{\Gamma} \times \mathbf{b}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Si, à partir de la configuration actuelle, le point matériel de la ligne déformée subit un déplacement *infinitement petit* composé d'un petit déplacement $\delta\mathbf{r}$ et d'une rotation instantanée $\delta\boldsymbol{\Theta}$, les variations de déformations $\delta\mathbf{r}_s$ et $\delta\mathbf{\Gamma}$ associées s'écrivent respectivement $\delta\bar{\mathbf{r}}_s + \mathbf{\Gamma} \times \delta\mathbf{r} - \delta\boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{r}_s$ et $\delta\bar{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{\Gamma} \times \delta\boldsymbol{\Theta}$ ¹⁰.

Les relations précédentes permettent aux deux auteurs d'établir une formulation variationnelle du problème de la ligne déformable dont ils n'utilisent, dans la suite de leurs développements, que la formulation forte. La question du choix de la représentation des rotations et de leurs gradients ne se posait pas de la même manière qu'après le développement des ordinateurs permettant la résolution numérique des équations. Les travaux des frères Cosserat aboutissent à des formulations fortes dont les parties concernant les rotations sont exprimées soit à partir des neuf cosinus directeurs, soit à partir des *trois auxiliaires* que sont les trois composantes du vecteur rotation associé.

Rotations infinitésimales et variations autour de la configuration $\mathbf{C}^0$. Quelles que soient leurs représentations, la rotation $\mathbf{\Lambda}$ et la rotation infinitésimale $\delta\mathbf{\Lambda}$ appartiennent à deux espaces différents : alors que $\mathbf{\Lambda}$ est un élément de $SO(3)$, $\delta\mathbf{\Lambda}$ représente un

⁹l'ouvrage cité est une ré-édition de l'ouvrage de 1887 téléchargeable sur www.gallica.bnf.fr

¹⁰En utilisant la notation $\bar{\mathbf{u}} = (u_1)_s \mathbf{b}_1 + (u_2)_s \mathbf{b}_2 + (u_3)_s \mathbf{b}_3$

élément qui appartient à l'espace des tenseurs d'ordre deux anti-symétriques $so(3)$. Plus précisément, $\delta\mathbf{\Lambda}$ représentant une rotation infinitésimale instantanée virtuelle du trièdre $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, elle appartient à l'espace des rotations infinitésimales tangent à $SO(3)$ en $\mathbf{\Lambda}$ appelé $T_{\mathbf{\Lambda}}SO(3)$. Nous pouvons illustrer la notion de rotation infinitésimale à partir de ce qui a été écrit plus haut. Si l'on considère la formule (2.11), on s'aperçoit que lorsque ϑ tend vers un infiniment petit, $\mathbf{\Lambda}$ tend vers $\mathbf{I}_3 + \hat{\vartheta}$ où le vecteur rotation ϑ associé à $\hat{\vartheta}$ peut servir de définition à $\delta\mathbf{\Lambda}$ si l'on considère que ses composantes sont les rotations autour des axes $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, ou de façon équivalente, que $\hat{\vartheta} \in T_{\mathbf{I}_3}SO(3)$.

Revenons au cas des trois rotations $\mathbf{\Lambda}^0$, $\mathbf{\Lambda}$ et $\check{\mathbf{\Lambda}}$. Nous souhaitons connaître la forme de $\mathbf{\Lambda}$ lorsqu'elle devient une rotation infinitésimale que nous notons $\delta\mathbf{\Lambda}^0$ puisque la rotation infinitésimale a alors lieu en $\mathbf{\Lambda}^0$. Donnons à $\mathbf{\Lambda}$ une dépendance en un paramètre t telle que son vecteur associé soit $\vartheta = t\delta\vartheta$. Clairement, $\mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{I}_3$ lorsque $t \rightarrow 0$. Par ailleurs, nous pouvons écrire que $\mathbf{\Lambda} = \exp(t\delta\hat{\vartheta})$ et donc que $\check{\mathbf{\Lambda}} = \exp(t\delta\hat{\vartheta})\mathbf{\Lambda}^0$. La linéarisation de $\check{\mathbf{\Lambda}}$ autour de $\mathbf{\Lambda}^0$ s'écrit alors simplement à l'aide de la définition de la dérivée directionnelle et donne directement $\delta\mathbf{\Lambda}^0$:

$$\delta\mathbf{\Lambda}^0 = \left(\frac{d\check{\mathbf{\Lambda}}}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{d \exp(t\delta\hat{\vartheta})\mathbf{\Lambda}^0}{dt} \right)_{t=0} = \delta\hat{\vartheta}\mathbf{\Lambda}^0. \quad (2.24)$$

qui n'est autre que l'incrément de rotation linéarisé qui permet de passer de $\mathbf{\Lambda}^0$ à $\check{\mathbf{\Lambda}}$ ¹¹. Dans ce qui précède, $\check{\mathbf{\Lambda}}$ est bien une variation admissible de $\mathbf{\Lambda}^0$ et $\delta\vartheta$ est le vecteur rotation lié à l'incrément de rotation entre $\check{\mathbf{\Lambda}}$ et $\mathbf{\Lambda}^0$.

La paramétrisation de $\check{\mathbf{\Lambda}}$ à l'aide d'une composition de rotations autour d'axes fixes $\delta\mathbf{\Theta} = {}^t\mathbf{\Lambda}^0\delta\vartheta$ puis autour de $\mathbf{\Theta}^0$ donne une expression différente de la dérivée directionnelle qui se fait dans l'espace $T_{\mathbf{I}_3}SO(3)$:

$$\delta\mathbf{\Lambda}^0 = \left(\frac{d\check{\mathbf{\Lambda}}}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{d \mathbf{\Lambda}^0 \exp(t\delta\hat{\Theta})}{dt} \right)_{t=0} = \mathbf{\Lambda}^0\delta\hat{\Theta}. \quad (2.25)$$

Dans ce qui précède, nous aurions aussi pu écrire la rotation $\check{\mathbf{\Lambda}}$ à partir de la variation du vecteur rotation $\mathbf{\Theta}^0$ (ou ϑ^0). En écrivant $\check{\mathbf{\Lambda}} = \exp(\hat{\Theta}^0 + t\delta\hat{\Theta}^0)$ nous pouvons trouver les relations qui existent entre la variation du vecteur rotation $\delta\mathbf{\Theta}^0$ et le vecteur $\delta\vartheta$ associé à la variation $\delta\mathbf{\Lambda}^0$ de la rotation $\mathbf{\Lambda}^0$. Ces relations sont (voir l'appendice D. de [96] ou [100] pour leur démonstrations) :

$$\delta\vartheta = \mathbf{F}(\mathbf{\Theta}^0)\delta\mathbf{\Theta}^0, \quad (2.26)$$

$$\delta\mathbf{\Theta}^0 = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{\Theta}^0)\delta\vartheta, \quad (2.27)$$

$$\delta\mathbf{\Theta} = {}^t\mathbf{F}(\mathbf{\Theta}^0)\delta\mathbf{\Theta}^0, \quad (2.28)$$

$$\delta\mathbf{\Theta}^0 = {}^t\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{\Theta}^0)\delta\mathbf{\Theta}. \quad (2.29)$$

avec :

$$\mathbf{F}(\mathbf{\Theta}^0) = \frac{\sin \Theta^0}{\Theta^0} \mathbf{I}_3 + \left(\frac{1 - \cos \Theta^0}{\Theta^{02}} \right) \hat{\Theta}^0 + \left(\frac{\Theta^0 - \sin \Theta^0}{\Theta^{03}} \right) \mathbf{\Theta}^0 \otimes \mathbf{\Theta}^0 \quad (2.30)$$

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{\Theta}^0) = \frac{1}{\Theta^{02}} \mathbf{\Theta}^0 \otimes \mathbf{\Theta}^0 + \frac{\Theta^0/2}{\tan(\Theta^0/2)} \left(\mathbf{I}_3 - \frac{1}{\Theta^{02}} \mathbf{\Theta}^0 \otimes \mathbf{\Theta}^0 \right) - \frac{1}{2} \hat{\Theta}^0 \quad (2.31)$$

¹¹une façon intuitive mais moins rigoureuse de le voir est d'écrire $\check{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^0 = (\mathbf{I} + \delta\hat{\vartheta})\mathbf{\Lambda}^0 = \mathbf{\Lambda}^0 + \delta\hat{\vartheta}\mathbf{\Lambda}^0$, avec $\check{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}^0 + \delta\mathbf{\Lambda}^0$.

où $\Theta^0 \otimes \Theta^0 = \hat{\Theta}^0 \hat{\Theta}^0$, c'est-à-dire une matrice de composantes $\Theta_i^0 \Theta_j^0$ pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$. Notons que l'application $\mathbf{F}$ cesse d'être une bijection lorsque Θ^0 vaut $2z\pi$ pour z entier.

Ce qui a été écrit dans la configuration $\mathbf{C}^0$ peut être adapté sans difficulté à la configuration $\check{\mathbf{C}}$.

Vecteurs variation de courbure et ses variations autour de la configuration $\mathbf{C}^0$.
Le vecteur variation de courbure de la configuration $\mathbf{C}^0$, noté μ^0 dans notre étude, est défini comme tant le (pseudo-)vecteur associé à la matrice anti-symétrique $\hat{\mu}^0 = \Lambda_s^0 \Lambda^0$.

L'utilisation et la dérivation directe de la formule (2.11) conduit à une première expression de μ^0 qui s'écrit (voir par exemple [124] pour la démonstration, ou [105]) :

$$\mu^0 = \mathbf{F}(\vartheta^0) \bar{\vartheta}^0 \quad (2.32)$$

avec $\vartheta^0 = \Lambda^0 \Theta^0 = \Theta^0$ et $\bar{\vartheta}^0 = \partial_s(\vartheta^0) \mathbf{b}_i$.

Comme précédemment, nous tentons d'exprimer $\check{\mu}$ en fonction de μ et μ^0 , les vecteurs variation de courbure correspondants respectivement aux rotations $\check{\Lambda}$, Λ et Λ^0 . Par définition, $\hat{\mu} = \check{\Lambda}_s^t \hat{\Lambda}$ avec $\check{\Lambda} = \Lambda \Lambda^0$, ce qui donne $\hat{\mu} = \Lambda \hat{\mu}^0 \Lambda + \hat{\mu}$. Dans l'expression précédente, on voit qu'avec notre définition $\check{\mu}$, μ^0 et μ ne sont pas de même nature : $\check{\mu}$ et μ sont clairement des grandeurs appartenant à la configuration $\check{\mathbf{C}}$ tandis que μ^0 est une grandeur de la configuration $\mathbf{C}^0$.

De même que nous avons effectué la linéarisation de $\check{\Lambda}$ autour de Λ^0 , nous pouvons trouver l'expression de celle de $\hat{\mu}$ autour de $\hat{\mu}^0$. Elle s'obtient simplement en écrivant :

$$\hat{\mu} = \exp(t\delta\hat{\vartheta}) \hat{\mu}^0 \exp(-t\delta\hat{\vartheta}) + \frac{d \exp(t\delta\hat{\vartheta})}{ds} \exp(-t\delta\hat{\vartheta}) \quad (2.33)$$

dont il faut prendre la dérivée par rapport à t en $t = 0$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mu}^0 &= \delta\hat{\vartheta}_s - \hat{\mu}^0 \delta\hat{\vartheta} + \delta\hat{\vartheta} \hat{\mu}^0 \\ \delta\mu^0 &= \delta\bar{\vartheta} + \delta\vartheta \times \mu^0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

où $\delta\bar{\vartheta} = \partial_s(\delta\vartheta_i) \mathbf{b}_i^0$. Ici, il ne faut pas perdre de vue que nous avons paramétré la rotation $\check{\Lambda} = \exp\delta\hat{\vartheta} \Lambda^0$ autour d'un axe suiveur. La réécriture de cette même linéarisation en paramétrant $\check{\Lambda} = \Lambda^0 \exp\delta\hat{\Theta}$ autour d'axes fixes est simple en introduisant la rotation $\Lambda^r = \exp\delta\hat{\Theta}$ et la notation $\hat{\mu} = \Lambda_s^r \Lambda^r$. On aurait dans ce cas $\hat{\mu} = \hat{\mu}^0 + \Lambda^0 \hat{\mu}^t \Lambda^0$ et, en faisant dépendre Λ^r d'un paramètre t :

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}^0 + \Lambda^0 \frac{d \exp(t\delta\hat{\Theta})}{ds} \exp(-t\delta\hat{\Theta}) \Lambda^0 \quad (2.35)$$

dont la dérivée par rapport à t prise en 0 donne :

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mu}^0 &= \Lambda^0 \delta\hat{\Theta}_s \Lambda^0 \\ \delta\mu^0 &= \Lambda^0 \delta\Theta_s \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec $\delta\Theta = \delta\Theta_i \mathbf{e}_i$.

Adoptons un instant le point de vue différent pour la grandeur variation de courbure. Pour la configuration statique par exemple, nous pourrions également la définir par $\hat{\Gamma}^0 = \Lambda^0 \Lambda_s^0$. Dans ce cas, un calcul direct par le biais d'une paramétrisation de Λ^0 via son vecteur Θ^0 donnerait [3] :

$$\Gamma^0 = {}^t \mathbf{F}(\Theta^0) \Theta_s^0 \quad (2.37)$$

En paramétrant la rotation $\check{\mathbf{\Lambda}}$ par $\check{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^0 = \exp \delta \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{\Lambda}^0$, nous obtenons $\hat{\check{\mathbf{\Gamma}}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}^0 + {}^t\mathbf{\Lambda}^0 \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{\Lambda}^0$. Puis, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}\delta \hat{\mathbf{\Gamma}}^0 &= {}^t\mathbf{\Lambda}^0 \delta \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_s \mathbf{\Lambda}^0 \\ \delta \mathbf{\Gamma}^0 &= {}^t\mathbf{\Lambda}^0 \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}}\end{aligned}\quad (2.38)$$

où $\delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}} = \partial_s(\delta \vartheta_i) \mathbf{b}_i^0$. Paraillement, en paramétrant $\check{\mathbf{\Lambda}}$ par $\check{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}^0 \mathbf{\Lambda}^r = \mathbf{\Lambda}^0 \exp \boldsymbol{\Theta}$ nous obtenons $\hat{\check{\mathbf{\Gamma}}} = {}^t\mathbf{\Lambda}^r \hat{\mathbf{\Gamma}}^0 \mathbf{\Lambda}^r + \hat{\mathbf{\Gamma}}$ puis :

$$\begin{aligned}\delta \hat{\mathbf{\Gamma}}^0 &= \delta \hat{\boldsymbol{\Theta}}_s + \hat{\mathbf{\Gamma}}^0 \delta \hat{\boldsymbol{\Theta}} - \delta \hat{\boldsymbol{\Theta}} \hat{\mathbf{\Gamma}}^0 \\ \delta \mathbf{\Gamma}^0 &= \delta \boldsymbol{\Theta}_s + \mathbf{\Gamma}^0 \times \delta \boldsymbol{\Theta}\end{aligned}\quad (2.39)$$

Deux remarques importantes doivent être formulées :

- Nous avons vu comment écrire les linéarisations de la courbure à l'aide de $\delta \boldsymbol{\vartheta}$ et $\delta \boldsymbol{\Theta}$ et ce en adoptant deux points de vue différents qui seront définis plus tard. Ajoutons que l'on peut également mener les calculs avec les expressions (2.32) et (2.37). Il est alors possible de réécrire les équations (2.34), (2.36), (2.38) et (2.39) en fonction de la variation $\delta \boldsymbol{\Theta}^0$ du vecteur rotation $\boldsymbol{\Theta}^0$ associé à $\mathbf{\Lambda}^0$. Nous pouvons aussi les obtenir en utilisant les relations (2.26) et (2.28). Ce faisant, nous retrouvons les expressions utilisées par [103] et [106], entre autres.
- Ce qui a été écrit dans un voisinage de la configuration $\mathbf{C}^0$ peut être adapté au voisinage de la configuration $\check{\mathbf{C}}$.

Points de vue spatial et matériel. Les articles concernant les poutres en grands déplacements et grandes rotations s'appuient sur deux descriptions du problème : l'une matérielle, l'autre spatiale. Ces descriptions correspondent en théorie aux descriptions lagrangienne et eulérienne de la mécanique des milieux continus. À l'instar de la quasi-totalité des publications rencontrées, nous renvoyons le lecteur désireux de connaître la définition de ces deux descriptions à l'ouvrage [125]. Dans leur article de référence, MM. Simo et Vu-Quoc [2] font le choix de donner les deux descriptions - spatiale et matérielle - du problème, mais en optant pour une paramétrisation des rotations via des axes suiveurs que nous retrouvons dans les équations (2.34) et (2.38). Dans leur publication successive [96], tout en gardant une paramétrisation des rotations autour d'axes suiveurs, les mêmes auteurs s'appuient sur la correspondance entre les descriptions spatiale et matérielle pour écrire le problème sous forme spatiale mais effectuer les linéarisations et les mises à jours des grandeurs linéarisées sous leurs formes matérielles via un transport inverse (*pull-back*). Le recours à la description matérielle par *pull-back* est également utilisé lors de l'introduction de la loi de comportement, qui s'exprime traditionnellement en grandeurs lagrangiennes (matérielle donc). Les grandeurs matérielles et spatiales peuvent bien sûr être exprimées dans n'importe quel repère. Toutefois, le fait que les composantes des grandeurs spatiales exprimées dans le repère local (attaché au solide) soient les mêmes que celles des grandeurs matérielles correspondantes exprimées dans le repère du solide de référence constitue une source de confusion d'autant plus grande que ce dernier repère est souvent pris comme correspondant au repère du référentiel galiléen, couramment utilisé pour exprimer les grandeurs spatiales. Hormis dans certains travaux adoptant un point de vue strictement matériel [3]¹², on retrouve ce parti-pris dans de nombreuses

¹²Dans leur article, les auteurs présentent néanmoins les deux cinématiques

publications [99], [102]. Notons enfin que l'article de MM. Simo, Tarnow et Doblare [104] de 1995, dont l'objectif premier est de présenter un algorithme numériquement non dissipatif, distingue les deux points de vue spatial et matériel mais se réfère au point de vue matériel uniquement dans le cas d'un repérage lié au solide (*body frame*).

Nous pouvons, à partir de ce qui a été écrit dans le cas des trois rotations Λ^0 , Λ et $\check{\Lambda}$, nous placer dans le même formalisme que les ouvrages de la littérature. Pour cela, il nous faut donner le rôle joué par chacune des deux configurations. Imaginons que $\mathbf{C}^0$ soit la configuration de référence du câble et $\check{\mathbf{C}}$ sa configuration actuelle (ou courante). À partir du référentiel galiléen repéré par le trièdre $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et des configurations $\mathbf{C}^0$ et $\check{\mathbf{C}}$, nous définissons les rotations suivantes :

- la rotation Λ^0 et son vecteur associé $\boldsymbol{\vartheta}^0 = \vartheta_i^0 \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\Theta}^0$ transportant le trièdre $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ du référentiel galiléen vers ceux $\{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\}$ de la configuration $\mathbf{C}^0$. On a $\Lambda^0 = \exp \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^0 = \exp \hat{\boldsymbol{\Theta}}^0$;
- la rotation Λ et ses vecteurs suiveur et fixe associés $\boldsymbol{\vartheta} = \vartheta_i \mathbf{e}_i = \Lambda^0 \boldsymbol{\Theta}$, transportant les trièdres $\{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\}$ de la configuration $\mathbf{C}^0$ vers ceux $\{\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3\}$ de la configuration $\check{\mathbf{C}}$. On a $\Lambda = \exp \hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \Lambda^0 \exp(\hat{\boldsymbol{\Theta}})^t \Lambda^0$;
- la rotation $\check{\Lambda}$ et son vecteur associé $\check{\boldsymbol{\vartheta}} = \check{\vartheta}_i \mathbf{e}_i = \check{\boldsymbol{\Theta}}$, transportant le trièdre $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ du référentiel galiléen vers ceux $\{\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3\}$ de la configuration $\check{\mathbf{C}}$. On a $\check{\Lambda} = \exp \hat{\check{\boldsymbol{\vartheta}}} = \exp \hat{\check{\boldsymbol{\Theta}}}$. Par ailleurs, $\check{\Lambda} = \exp \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \Lambda^0 = \Lambda^0 \exp \hat{\boldsymbol{\Theta}}$.

Point de vue matériel, déformation lagrangienne. Donnons-nous un vecteur matériel ¹³ quelconque $\mathbf{r}^0(s) = R_i \mathbf{e}_i$ dont les composantes R_1 , R_2 et R_3 sont connues. Ses composantes $R_i^0 = \mathbf{r}^0 \cdot \mathbf{b}_i^0$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$ dans le trièdre $\{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\}$ s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} R_1^0 \\ R_2^0 \\ R_3^0 \end{bmatrix} = {}^t \Lambda^0 \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Chaque fois que nous aurons à travailler avec des grandeurs exprimées dans des repères locaux, nous pourrons nous ramener à des calculs dans le référentiel global par un transport semblable à celui de la formule ci-dessus. En d'autres termes, plutôt que de travailler avec le vecteur $\mathbf{r}^0 = R_i^0 \mathbf{b}_i^0$, nous travaillerons avec le vecteur $R_i^0 \mathbf{e}_i$ dont les composantes sont données par (2.40).

Si $\mathbf{r}^0(s)$ désigne les positions des points M de la courbe situés à l'abscisse s dans la configuration $\mathbf{C}^0$, la transformation permettant de passer de la configuration $\mathbf{C}^0$ à la configuration $\check{\mathbf{C}}$ sera la donnée des champs $\check{\mathbf{r}}(s, t)$ et $\Lambda(s, t)$ associés à ces mêmes points M dans la configuration $\check{\mathbf{C}}$. De même que précédemment, nous avons $\check{\mathbf{r}} = r_i \mathbf{e}_i = \check{r}_i \check{\mathbf{b}}_i$, mais nous pourrons avantageusement mener les calculs du repère local dans le repère global en adaptant la formule (2.40).

La déformation lagrangienne s'écrit simplement en prenant le gradient de la transformation de $\mathbf{r}^0$ à $\check{\mathbf{r}}(s, t)$ et de la rotation $\Lambda(s, t)$. Ces gradients s'écrivent :

$$\mathbf{E} := {}^t \Lambda^0 ({}^t \Lambda \check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0) = {}^t \check{\Lambda} \check{\mathbf{r}}_s - {}^t \Lambda^0 \mathbf{r}_s^0, \quad (2.41)$$

$$\hat{\mathbf{K}} := {}^t \Lambda^0 {}^t \Lambda \Lambda_s \Lambda^0 = {}^t \check{\Lambda} \check{\Lambda}_s - {}^t \Lambda^0 \Lambda_s^0. \quad (2.42)$$

¹³C'est-à-dire lagrangien et donc appartenant à la configuration $\mathbf{C}^0$ et dépendant de l'abscisse curviligne s de cette configuration

où l'on reconnaît les opérateurs antisymétriques $\hat{\mathbf{T}}^0$ et $\hat{\mathbf{T}}$. Le taux de déformation lagrangienne est la dérivée par rapport au temps du couple $\mathbf{E}, \hat{\mathbf{K}}$.

Point de vue spatial. Dans une description eulérienne, les champs des vitesses et des rotations instantanées du solide dans sa configuration actuelle caractérisent le problème. On s'attache donc aux variables $\check{\mathbf{r}}_t(\check{s}, t)$ et $\hat{\check{\omega}} = \check{\mathbf{\Lambda}}_t^t \check{\mathbf{\Lambda}}$. On voit que $\hat{\check{\omega}}$ est le pendant temporel de la variation de courbure $\hat{\check{\mu}}$.

Le taux de déformation spatial s'écrit sur la configuration actuelle comme le gradient spatial de $\check{\mathbf{r}}_t$ et de $\hat{\check{\omega}}$ soit $\partial_{\check{s}} \check{\mathbf{r}}_t$ et $\hat{\check{\omega}}_{\check{s}}$. La relation entre le taux de déformation spatial et matériel s'écrit simplement :

$$\partial_t \mathbf{E} = {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \left(\partial_{\check{s}} \check{\mathbf{r}}_t - \hat{\check{\omega}} \check{\mathbf{r}}_s \right) = \frac{\partial \check{s}}{\partial s} {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \left(\partial_{\check{s}} \check{\mathbf{r}}_t - \hat{\check{\omega}} \check{\mathbf{r}}_s \right), \quad (2.43)$$

$$\partial_t \hat{\mathbf{K}} = {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \hat{\check{\omega}}_s \check{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\partial \check{s}}{\partial s} {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \hat{\check{\omega}}_s \check{\mathbf{\Lambda}}. \quad (2.44)$$

que l'on peut également exprimer à l'aide du pseudo-vecteur $\check{\omega}$ associé à $\hat{\check{\omega}}$:

$$\partial_t \mathbf{E} = \frac{\partial \check{s}}{\partial s} {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} (\partial_{\check{s}} \check{\mathbf{r}}_t - \check{\omega} \times \check{\mathbf{r}}_s), \quad (2.45)$$

$$\partial_t \hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial \check{s}}{\partial s} {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \check{\omega}_s. \quad (2.46)$$

Mise à jour des variables cinématiques I : Cas statique. Supposons que, dans le cadre de la résolution d'un problème statique, $\check{\mathbf{\Lambda}}$ et $\check{\mathbf{r}}$ soient les champs inconnus indépendants du temps. La formulation variationnelle du problème sera de la forme :

Trouver $\check{\mathbf{\Lambda}} \in SO(3)$ et $\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3$ tels que la forme faible des équations soit vérifiée quels que soient les champs tests (ou variations) admissibles¹⁴ $\delta \check{\mathbf{\Lambda}} \in T_{\check{\mathbf{\Lambda}}} SO(3)$ et $\delta \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3$,

c'est-à-dire, trouver $\check{\boldsymbol{\vartheta}}$ et $\check{\mathbf{r}}$ quels que soient $\delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \in T_{\check{\mathbf{\Lambda}}} SO(3)$ et $\delta \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3$. Ce problème étant non linéaire dans le cas général, une méthode de résolution itérative doit être mise en place. À chaque itération k , une linéarisation de la forme faible des équations autour de la configuration $(\check{\mathbf{r}}_k, \check{\mathbf{\Lambda}}_k)$ doit être effectuée; les incréments $(\delta \check{\mathbf{r}}_k, \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}}_k)$ issus de la résolution du problème linéarisé permettent de mettre à jour la configuration d'après les formules :

$$\check{\mathbf{r}}_{k+1} = \check{\mathbf{r}}_k + \delta \check{\mathbf{r}}_k, \quad (2.47)$$

$$\check{\mathbf{\Lambda}}_{k+1} = \exp(\delta \check{\boldsymbol{\vartheta}}_k) \check{\mathbf{\Lambda}}_k. \quad (2.48)$$

où l'exponentielle est à calculer à partir de la formule (2.17), ce qui revient à projeter la rotation infinitésimale $\delta \check{\boldsymbol{\vartheta}}_k$ dans l'espace $SO(3)$ et permet à $\check{\mathbf{\Lambda}}_{k+1}$ d'être dans l'espace des variations admissibles de $\check{\mathbf{\Lambda}}$. L'utilisation de la formule (2.11) au lieu de (2.17) pour effectuer cette projection est également possible mais moins adaptée à l'implémentation du problème via l'utilisation de quaternions.

La mise à jour de la variation de courbure doit également être faite. Nous avons pu voir précédemment que différentes expressions existent en fonction de la paramétrisation

¹⁴notamment avec les conditions aux limites du problème

des rotations et du point de vue adopté pour décrire le problème. Si nous restons dans le cadre d'un incrément de rotation $\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k$ suiveur comme écrit dans (2.48), nous avons :

Point de vue spatial : $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k+1} = \partial_s(\check{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1})^t \check{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1}$ soit

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k+1} = \partial_s(\exp \mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k) \exp(-\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k) + \exp(\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k) \hat{\boldsymbol{\mu}}_k \exp(-\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k) \quad (2.49)$$

Point de vue matériel : $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{k+1} = {}^t\check{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1} \partial_s(\check{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1})$ soit

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k + {}^t\check{\boldsymbol{\Lambda}}_k \exp(-\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k) \partial_s(\exp \mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k) \check{\boldsymbol{\Lambda}}_k \quad (2.50)$$

Si l'incrément de rotation est un axe fixe, $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1} = \check{\boldsymbol{\Lambda}}_k \exp(\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\Theta}}_k)$ et dans ce cas, nous aurons :

Point de vue spatial : $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k+1} = \partial_s(\check{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1})^t \check{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1}$ soit

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_k + \check{\boldsymbol{\Lambda}}_k \partial_s(\exp \mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\Theta}}_k) \exp(-\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\Theta}}_k) {}^t\check{\boldsymbol{\Lambda}}_k \quad (2.51)$$

Point de vue matériel : $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{k+1} = {}^t\check{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1} \partial_s(\check{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1})$ soit

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{k+1} = \exp(-\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\Theta}}_k) \partial_s(\exp \mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\Theta}}_k) + \exp(-\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\Theta}}_k) \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k \exp \mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\Theta}}_k \quad (2.52)$$

Dans les expression précédentes, seule la dérivée de l'exponentielle pose problème et s'écrit - voir [2] pour la démonstration qui s'appuie sur (2.17) :

$$\partial_s(\exp \hat{\boldsymbol{\Theta}}) = \frac{2}{1 + \boldsymbol{\varpi} \cdot \boldsymbol{\varpi}} \left[\hat{\boldsymbol{\omega}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}_s \hat{\boldsymbol{\omega}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \hat{\boldsymbol{\omega}}_s - \frac{2 \boldsymbol{\varpi} \cdot \boldsymbol{\varpi}_s (\hat{\boldsymbol{\omega}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}^2)}{1 + \boldsymbol{\varpi} \cdot \boldsymbol{\varpi}} \right] \quad (2.53)$$

Nous ajoutons enfin que l'utilisation directe de la formule $\delta \boldsymbol{\mu} = \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}} - \boldsymbol{\mu} \times \delta \boldsymbol{\vartheta}$ pour mettre à jour $\boldsymbol{\mu}$ ne pourrait être envisageable que dans le cas de rotations infinitésimales ce qui est très peu courant en pratique lorsque l'on résoud le problème statique. En revanche, elle est très commode lorsque le premier pas de calcul s'effectue à partir de la solution analytique de la chaînette. C'est d'ailleurs le point de vue que nous avons envisagé dans [8]. Les déplacements se mettent à jour de façon standard : $\boldsymbol{r}_{k+1}^0 = \boldsymbol{r}_k^0 + \delta \boldsymbol{r}_k^0$.

Mise à jour des variables cinématiques II : Cas dynamique. La mise à jour des variables cinématiques dans le cas dynamique dépend naturellement du schéma numérique de discrétisation en temps retenu, mais une fois encore, ce sont les mises à jour des rotations qui nécessitent une attention particulière. En effet, il n'est pas possible combiner directement les rotations issues d'instantanés et de pas d'itération différents comme c'est le cas pour la mise à jour des déplacements. Nous illustrerons cette difficulté dans ce qui suit en traitant d'abord le cas de la mise à jour des déformations liées aux déplacements. Afin d'écrire le problème semi-discret en temps, nous nous donnons un pas de temps $\tau \in \mathbb{R}^+$ permettant de modéliser le temps continu $t \in [0, T]$ comme une suite finie ordonnée $\{t_n\}_{n=0}^N$ avec $t_n = n\tau$ et $n, N \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq N$ et $T = N\tau$. Une grandeur $a(t, s)$ est approchée par sa valeur au temps t_n par $a(t, s) = a(t_n, s) = a^n(s)$. On considère un schéma de Newmark classique à deux paramètres γ et β permettant d'exprimer les grandeurs cherchées à l'instant $t_{n+1} = (n+1)\tau$ en fonction des mêmes

grandeurs à l'instant précédent $t_n = n\tau$. Pour les grandeurs relatives au déplacement, nous avons :

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \tau \partial_t \mathbf{r}^n + \frac{1}{2} \tau^2 [(1 - 2\beta) \partial_{tt} \mathbf{r}^n + 2\beta \partial_{tt} \mathbf{r}^{n+1}], \quad (2.54)$$

$$\partial_t \mathbf{r}^{n+1} = \partial_t \mathbf{r}^n + \tau [(1 - \gamma) \partial_{tt} \mathbf{r}^n + \gamma \partial_{tt} \mathbf{r}^{n+1}]. \quad (2.55)$$

où ∂_t et ∂_{tt} désignent respectivement les dérivées première et seconde par rapport à t . Si $\beta \neq 0$, le schéma est implicite, et si de plus $1/2 \leq \gamma \leq 2\beta$, il est inconditionnellement stable pour les problèmes linéaires. Les valeurs $\gamma = 1/2$ et $\beta = 1/4$ correspondent à un schéma d'accélération moyenne couramment utilisé. Dans un problème linéaire, la connaissance de $\mathbf{r}^n$, $\partial_t \mathbf{r}^n$ et $\partial_{tt} \mathbf{r}^n$ doit permettre de résoudre directement le problème à l'instant $n+1$. Dans le cas non linéaire, une méthode itérative de résolution est à mettre en place et les équations (2.54) et (2.55) sont à adapter pour rendre compte du calcul itératif ayant lieu à chaque pas de temps. Si l'on se place à la k -ième itération, nous obtenons :

$$\mathbf{r}_k^{n+1} = \mathbf{r}^n + \tau \partial_t \mathbf{r}^n + \frac{1}{2} \tau^2 [(1 - 2\beta) \partial_{tt} \mathbf{r}^n + 2\beta \partial_{tt} \mathbf{r}_k^{n+1}], \quad (2.56)$$

$$\partial_t \mathbf{r}_k^{n+1} = \partial_t \mathbf{r}^n + \tau [(1 - \gamma) \partial_{tt} \mathbf{r}^n + \gamma \partial_{tt} \mathbf{r}_k^{n+1}]. \quad (2.57)$$

En écrivant les mêmes équations à l'itération $k+1$ et en retranchant terme à terme avec les précédentes, nous obtenons :

$$\mathbf{r}_{k+1}^{n+1} - \mathbf{r}_k^{n+1} = \beta \tau^2 [\partial_{tt} \mathbf{r}_{k+1}^{n+1} - \partial_{tt} \mathbf{r}_k^{n+1}], \quad (2.58)$$

$$\partial_t \mathbf{r}_{k+1}^{n+1} - \partial_t \mathbf{r}_k^{n+1} = \gamma \tau [\partial_{tt} \mathbf{r}_{k+1}^{n+1} - \partial_{tt} \mathbf{r}_k^{n+1}]. \quad (2.59)$$

En utilisant l'incrément $\delta \mathbf{r}_k^{n+1} = \mathbf{r}_{k+1}^{n+1} - \mathbf{r}_k^{n+1}$ nous pouvons réécrire (2.58) et (2.59) de façon à mettre en avant les grandeurs à mettre à jour en fonction des grandeurs calculées ou connues :

$$\partial_{tt} \mathbf{r}_{k+1}^{n+1} = \partial_{tt} \mathbf{r}_k^{n+1} + \frac{1}{\beta \tau^2} \delta \mathbf{r}_k^{n+1}, \quad (2.60)$$

$$\partial_t \mathbf{r}_{k+1}^{n+1} = \partial_t \mathbf{r}_k^{n+1} + \frac{\gamma}{\beta \tau} \delta \mathbf{r}_k^{n+1}. \quad (2.61)$$

Conformément aux recommandations données dans [96], l'initialisation de la méthode de Newton se fait en choisant $\mathbf{r}_1^{n+1} = \mathbf{r}^n$ puis en calculant $\partial_t \mathbf{r}_1^{n+1}$ et $\partial_{tt} \mathbf{r}_1^{n+1}$ à partir des équations (2.56) et (2.57).

Dans le cas des rotations, nous devons écrire des formules analogues à (2.60) et (2.61). Pour cela, nous considérons deux instants t_n et t_{n+1} successifs et nous introduisons pour chacun d'entre eux les rotations $\mathbf{\Lambda}^n$, $\mathbf{\Lambda}^{n+1}$, les vecteurs rotations associés $\boldsymbol{\vartheta}^n$, $\boldsymbol{\vartheta}^{n+1}$ et les quantités analogues $\mathbf{\Lambda}$ et $\boldsymbol{\vartheta}$ telles que $\mathbf{\Lambda}^{n+1} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^n = \exp(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \mathbf{\Lambda}^n$ où $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ est associée à $\boldsymbol{\vartheta}$. Notons ici une remarque importante liée à la nature eulérienne de $\boldsymbol{\vartheta}$. Lorsque l'on écrit la relation $\mathbf{\Lambda}^n = \exp(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^n)$ liant les composantes de $\boldsymbol{\vartheta}^n$ à $\mathbf{\Lambda}^n$, il est implicitement entendu que ces composantes sont celles de $\boldsymbol{\vartheta}^n$ dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ puisque $\mathbf{\Lambda}^n$ transporte cette base vers la base $\{\mathbf{b}_1^n, \mathbf{b}_2^n, \mathbf{b}_3^n\}$. Dans le cas de $\mathbf{\Lambda}$, les composantes du vecteur $\boldsymbol{\vartheta}$ sont donc prises dans la base $\{\mathbf{b}_1^n, \mathbf{b}_2^n, \mathbf{b}_3^n\}$: $\boldsymbol{\vartheta}$ est donc un axe suiveur. Le vecteur rotation correspondant dans les axes fixes $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ s'écrit simplement ${}^t\mathbf{\Lambda}^n \boldsymbol{\vartheta}$: il correspond au transport de l'incrément de rotation entre les configurations n et $n+1$ vers une base de

référence et nous l'avons noté $\Theta = {}^t\Lambda^n \vartheta$ auparavant. C'est dans cette base - fixe - de la description matérielle qu'il convient de faire la mise à jour de ${}^t\Lambda^n \vartheta$ et de $\partial_t({}^t\Lambda^n \vartheta)$:

$${}^t\Lambda^n \vartheta = \tau \partial_t({}^t\Lambda^n \vartheta^n) + \frac{1}{2} \tau^2 [(1 - 2\beta) \partial_{tt}({}^t\Lambda^n \vartheta^n) + 2\beta \partial_{tt}({}^t\Lambda^{n+1} \vartheta^{n+1})], \quad (2.62)$$

$$\partial_t({}^t\Lambda^n \vartheta) = \partial_t({}^t\Lambda^n \vartheta^n) + \tau [(1 - \gamma) \partial_{tt}({}^t\Lambda^n \vartheta^n) + \gamma \partial_{tt}({}^t\Lambda^{n+1} \vartheta^{n+1})]. \quad (2.63)$$

Qui peut également s'écrire :

$$\Theta = \tau \partial_t \Theta^n + \frac{1}{2} \tau^2 [(1 - 2\beta) \partial_{tt} \Theta^n + 2\beta \partial_{tt} \Theta^{n+1}], \quad (2.64)$$

$$\partial_t \Theta = \partial_t \Theta^n + \tau [(1 - \gamma) \partial_{tt} \Theta^n + \gamma \partial_{tt} \Theta^{n+1}]. \quad (2.65)$$

avec $\Theta^n = {}^t\Lambda^n \vartheta^n$ et $\Theta^{n+1} = {}^t\Lambda^{n+1} \vartheta^{n+1}$. Comme nous l'avons fait précédemment, nous envisageons la résolution d'équations non linéaires à chaque pas de temps et faisons donc dépendre les grandeurs au temps $n + 1$ d'un indice k :

$$\Theta_k = \tau \partial_t \Theta^n + \frac{1}{2} \tau^2 [(1 - 2\beta) \partial_{tt} \Theta_k^n + 2\beta \partial_{tt} \Theta_k^{n+1}], \quad (2.66)$$

$$\partial_t \Theta_k = \partial_t \Theta^n + \tau [(1 - \gamma) \partial_{tt} \Theta_k^n + \gamma \partial_{tt} \Theta_k^{n+1}]. \quad (2.67)$$

En réécrivant les équations précédentes à l'itération $k + 1$ et en soustrayant terme à terme, nous obtenons :

$$\partial_{tt} \Theta_{k+1}^{n+1} = \partial_{tt} \Theta_k^{n+1} + \frac{1}{\tau^2 \beta} [\Theta_{k+1} - \Theta_k], \quad (2.68)$$

$$\partial_t \Theta_{k+1}^{n+1} = \partial_t \Theta_k^{n+1} + \frac{\gamma}{\tau \beta} [\Theta_{k+1} - \Theta_k]. \quad (2.69)$$

À ce stade, il reste à donner la relation liant l'incrément $\delta \vartheta_k^{n+1}$ issu de la linéarisation autour de ϑ_k^{n+1} à l'itération k et l'incrément $\delta \vartheta_k$ issu de la linéarisation autour de ϑ_k . Nous donnons ce résultat sans le démontrer (voir l'appendice D. de [96] ou [100]) :

$$\delta \vartheta_k = \mathbf{F}(\vartheta_k) \delta \vartheta_k^{n+1}, \quad (2.70)$$

$$\delta \vartheta_k^{n+1} = \mathbf{F}^{-1}(\vartheta_k) \delta \vartheta_k. \quad (2.71)$$

avec :

$$\mathbf{F}(\vartheta_k) = \frac{1}{\vartheta_k^2} \left(\mathbf{I}_3 - \frac{\sin \vartheta_k}{\vartheta_k} \right) \mathbf{Z}_k + \frac{\sin \vartheta_k}{\vartheta_k} \mathbf{I}_3 + \left(\frac{1 - \cos \vartheta_k}{\vartheta_k^2} \right) \mathbf{S}_k \quad (2.72)$$

$$\mathbf{F}^{-1}(\vartheta_k) = \frac{1}{\vartheta_k^2} \mathbf{Z}_k + \frac{\vartheta_k/2}{\tan(\vartheta_k/2)} \left(\mathbf{I}_3 - \frac{1}{\vartheta_k^2} \mathbf{Z}_k \right) - \frac{1}{2} \mathbf{S}_k \quad (2.73)$$

où $\mathbf{Z}_k = \vartheta_k \otimes \vartheta_k$, c'est-à-dire $\mathbf{Z}_{k_{ij}} = \vartheta_{k_i} \vartheta_{k_j}$ pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$. Notons que l'application $\mathbf{F}$ cesse d'être une bijection lorsque ϑ_k vaut $2z\pi$ pour z entier. Bien que les notations dans (2.70) et (2.71) puissent prêter à confusion, nous rappelons que $\delta \vartheta_k^{n+1}$ est le vecteur associé à la rotation infinitésimale qui permet d'obtenir $\Lambda_k^{n+1, lin}$ à partir de Λ_k^{n+1} tandis que $\delta \vartheta_k$ est la variation du vecteur rotation associé à Λ permettant d'obtenir $\Lambda_k^{n+1, lin}$. La relation (2.70) donne également la linéarisation de $\partial_{tt} \vartheta_{k+1}^{n+1}$ et de $\partial_t \vartheta_{k+1}^{n+1}$ qui s'écrivent simplement :

$$\delta (\partial_{tt} \vartheta_{k+1}^{n+1}) = \frac{1}{\tau^2 \beta} {}^t\Lambda^n \mathbf{F}(\vartheta_k) \delta \vartheta_k^{n+1}, \quad (2.74)$$

$$\delta (\partial_t \vartheta_{k+1}^{n+1}) = \frac{\gamma}{\tau \beta} {}^t\Lambda^n \mathbf{F}(\vartheta_k) \delta \vartheta_k^{n+1}. \quad (2.75)$$

qui sont telles que données par [96], aux conventions de notation près.

5 Geometrically exact elastic rod: traditional implementation

In the following section, the classic theory of geometrically exact rod is presented as can be found in *e.g.* [2], [104], [107], [102], [5]. The position of any point of the rod in its reference configuration or its current configuration is defined by the vector $\mathbf{X} = \mathbf{r}^0 + X_1 \mathbf{b}_1^0 + X_2 \mathbf{b}_2^0$ or $\mathbf{x} = \check{\mathbf{r}} + x_1 \check{\mathbf{b}}_1 + x_2 \check{\mathbf{b}}_2$ respectively, where $\mathbf{r}^0$ or $\check{\mathbf{r}}$ is the position of the center of mass of the section. The rotations going from the inertial frame to the reference configuration $\mathbf{C}^0$ and cross to the current configuration $\check{\mathbf{C}}$, are called $\mathbf{\Lambda}^0$ and $\check{\mathbf{\Lambda}}$, respectively. Thus the reference and current configurations are fully determined by $(\mathbf{r}^0, \mathbf{\Lambda}^0)$ and $(\check{\mathbf{r}}, \check{\mathbf{\Lambda}})$. Moreover, $\mathbf{\Lambda}$ is defined as the rotation going from the reference configuration to the current configuration, with $\check{\mathbf{b}}_i = \mathbf{\Lambda} \mathbf{b}_i^0$ for $i \in \{1, 2, 3\}$.

Kinetic energy: Since neither warping nor Poisson effect are considered in the classical model, cross sections are considered rigid, as a consequence, $x_1 \check{\mathbf{b}}_1 + x_2 \check{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{\Lambda}(X_1 \mathbf{b}_1^0 + X_2 \mathbf{b}_2^0)$ and $\mathbf{x} = \check{\mathbf{r}} + \mathbf{\Lambda}(X_1 \mathbf{b}_1^0 + X_2 \mathbf{b}_2^0)$. Introducing the mass per reference length and the mass density of the body in the reference configuration $\rho A^0 = \int_{body} \rho^0 dv$, the kinetic energy of the cable is:

$$k_{in} = \frac{1}{2} \int_0^{L^0} \left(\int_{body} \rho^0 \mathbf{x}_t \cdot \mathbf{x}_t dv \right) ds \quad (2.76)$$

when $\mathbf{x}_t = \check{\mathbf{r}}_t + \mathbf{\Lambda}_t(X_1 \mathbf{b}_1^0 + X_2 \mathbf{b}_2^0)$ one obtains:

$$k_{in} = \frac{1}{2} \int_0^{L^0} (\rho A^0 \check{\mathbf{r}}_t \cdot \check{\mathbf{r}}_t + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{J}^0 \mathbf{\Omega}) ds \quad (2.77)$$

where:

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = {}^t \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}_t, \quad (2.78)$$

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{b}_1^0 + X_2 \mathbf{b}_2^0, \quad (2.79)$$

$$\mathbf{J}^0 = \int_{sec} {}^t \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{X}} \rho^0 dv \quad (2.80)$$

The variation δk_{in} reads:

$$\delta k_{in} = \int_0^{L^0} \left(\rho A^0 \delta \check{\mathbf{r}}_t \cdot \check{\mathbf{r}}_t + \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \cdot \mathbf{\Lambda} \mathbf{J}^0 \mathbf{\Omega} \right) ds. \quad (2.81)$$

where we made use of $\delta \mathbf{\Omega} = {}^t \mathbf{\Lambda} \delta \check{\mathbf{\vartheta}}$. Introducing the material angular acceleration $\hat{\mathbf{A}}$:

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{\Omega}}_t = {}^t \mathbf{\Lambda}_t \mathbf{\Lambda}_t + {}^t \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}_{tt} \quad (2.82)$$

it is possible to integrate by part $\int_0^\tau \delta k_{in} dt$ and thus obtain the variation of the kinetic energy:

$$\delta k_{in} = - \int_0^{L^0} \left(\rho A^0 \delta \check{\mathbf{r}} \cdot \check{\mathbf{r}}_{tt} + \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \cdot \mathbf{\Lambda} (\mathbf{J}^0 \mathbf{A} + \hat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{J}^0 \mathbf{\Omega}) \right) ds. \quad (2.83)$$

Internal or stress work. The components of $\check{\mathbf{n}} = Q_1\check{\mathbf{b}}_1 + Q_2\check{\mathbf{b}}_2 + Q_3\check{\mathbf{b}}_3$ and $\check{\mathbf{m}} = M_1\check{\mathbf{b}}_1 + M_2\check{\mathbf{b}}_2 + M_3\check{\mathbf{b}}_3$ are introduced. Their material counterparts are denoted by $\check{\mathbf{N}}$ and $\check{\mathbf{M}}$ which leads to the following relationships:

$${}^t\mathbf{\Lambda}\check{\mathbf{n}} = \check{\mathbf{N}} = Q_1\mathbf{b}_1^0 + Q_2\mathbf{b}_2^0 + Q_3\mathbf{b}_3^0, \quad (2.84)$$

$${}^t\mathbf{\Lambda}\check{\mathbf{m}} = \check{\mathbf{M}} = M_1\mathbf{b}_1^0 + M_2\mathbf{b}_2^0 + M_3\mathbf{b}_3^0. \quad (2.85)$$

Choosing hyper-elastic constitutive laws for the material and a potential $W_{in}(\check{\mathbf{E}}, \check{\mathbf{\Gamma}})$ leads to the following constitutive laws:

$$\check{\mathbf{N}} = \frac{\partial W}{\partial \check{\mathbf{E}}}, \quad (2.86)$$

$$\check{\mathbf{M}} = \frac{\partial W}{\partial \check{\mathbf{\Gamma}}}. \quad (2.87)$$

where $\check{\mathbf{E}}$ and $\check{\mathbf{\Gamma}}$ are the Lagrangian strain tensors related to displacements and rotations, respectively:

$$\check{\mathbf{E}} := {}^t\mathbf{\Lambda}\check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0, \quad (2.88)$$

$$\hat{\check{\mathbf{\Gamma}}} := {}^t\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}_s. \quad (2.89)$$

W is the stored energy function per unit reference arc length and where the skew-symmetric tensor $\hat{\check{\mathbf{\Gamma}}}$ has been represented by its associated vector $\check{\mathbf{\Gamma}}$. A physical linearization¹⁵ of the constitutive law around the stress-free configuration $\mathbf{C}^0$ leads to a symmetric second order tensor of elasticity that was split into two diagonal tensors, setting the other values to zero. In other words, a simple quadratic model was chosen for W_{in} :

$$W_{in} \approx \frac{1}{2}\check{\mathbf{E}} \cdot C_N\check{\mathbf{E}} + \frac{1}{2}\check{\mathbf{\Gamma}} \cdot C_M\check{\mathbf{\Gamma}} \quad (2.90)$$

where C_N and C_M are two second-order tensors. By introducing GA , EA , EI and EJ as the classical stiffnesses of the cable, they can be collected in $C_N = \text{diag}(GA, GA, EA)$ and $C_M = \text{diag}(EI, EI, EJ)$. Consequently:

$$\check{\mathbf{N}} = C_N\check{\mathbf{E}}, \quad (2.91)$$

$$\check{\mathbf{M}} = C_M\check{\mathbf{\Gamma}}. \quad (2.92)$$

It was also possible to choose the following strain tensors expressed in the global reference frame:

$$\check{\mathbf{E}} := {}^t\check{\mathbf{\Lambda}}\check{\mathbf{r}}_s - {}^t\mathbf{\Lambda}^0\mathbf{r}_s^0, \quad (2.93)$$

$$\hat{\check{\mathbf{\Gamma}}} := {}^t\check{\mathbf{\Lambda}}\check{\mathbf{\Lambda}}_s - {}^t\mathbf{\Lambda}^0\mathbf{\Lambda}_s^0. \quad (2.94)$$

leading to the same equations in the following but with $C_N \leftarrow \mathbf{\Lambda}^0 C_N {}^t\mathbf{\Lambda}^0$ and $C_M \leftarrow \mathbf{\Lambda}^0 C_M {}^t\mathbf{\Lambda}^0$. The linearization of strains can be written as:

$$\delta\check{\mathbf{E}} = {}^t\mathbf{\Lambda}(\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_s), \quad (2.95)$$

$$\delta\hat{\check{\mathbf{\Gamma}}} = {}^t\mathbf{\Lambda}\delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_s\mathbf{\Lambda}, \quad (2.96)$$

$$\delta\check{\mathbf{\Gamma}} = {}^t\mathbf{\Lambda}\delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}}.$$

¹⁵Assuming small transformations, ie $|\check{\mathbf{E}}| \ll 1$ and $|\check{\mathbf{\Gamma}}| \ll d$, where d is the diameter of the cable

The variation of internal work $\delta W_{in} = \int_0^{L^0} (\check{\mathbf{N}} \cdot \delta \check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{M}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}) ds$ can thus be written as:

$$\delta W_{in} = \int_0^{L^0} \left(C_N ({}^t \mathbf{\Lambda} \check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0) \cdot {}^t \mathbf{\Lambda} (\delta \mathbf{r}_s - \delta \boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_s) + C_M \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot {}^t \mathbf{\Lambda} \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds. \quad (2.97)$$

which is also:

$$\begin{aligned} \delta W_{in} &= \int_0^{L^0} \left(\mathbf{\Lambda} C_N ({}^t \mathbf{\Lambda} \check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0) \cdot (\delta \mathbf{r}_s - \delta \boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_s) + \mathbf{\Lambda} C_M \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds, \\ \delta W_{in} &= \int_0^{L^0} (\check{\mathbf{n}} \cdot (\delta \mathbf{r}_s - \delta \boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_s) + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}}) ds. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Work of external loads. Calling $\check{\mathbf{f}}$ and $\check{\mathbf{c}}$ the distributed external force and couple resultant per unit length of cable in its reference configuration, the work of external loads reads:

$$\delta W_{ext} = \int_0^{L^0} (\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{r} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta}) ds + \left[\check{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta \mathbf{r} + \check{\boldsymbol{\xi}} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right]_0^{L^0} \quad (2.99)$$

where $\check{\boldsymbol{\varphi}}$ and $\check{\boldsymbol{\xi}}$ are external force and moment applied on the two ends.

Weak formulation of the problem. Writing the principle of virtual displacements leads to:

$$\begin{aligned} \delta W_{in} &= \delta W_{ext} + \delta K_{in} \\ \int_0^{L^0} (C_N \check{\mathbf{E}} \cdot \delta \check{\mathbf{E}} + C_M \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}) ds &= \int_0^{L^0} \left((\check{\mathbf{f}} - \rho A^0 \check{\mathbf{r}}_{tt}) \cdot \delta \mathbf{r} + (\check{\mathbf{c}} - \mathbf{\Lambda} (J^0 \mathbf{A} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} J^0 \boldsymbol{\Omega})) \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right) ds \\ &\quad + \left[\check{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta \mathbf{r} + \check{\boldsymbol{\xi}} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right]_0^{L^0} \end{aligned} \quad (2.100)$$

The weak formulation of the problem becomes:

Find $\check{\mathbf{r}} \in \mathbf{R}^3$ and $\check{\mathbf{\Lambda}} \in SO(3)$ satisfying the boundary conditions and such that for every $\delta \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ and $\delta \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \in T_{\check{\mathbf{\Lambda}}} SO(3)$ the following equation holds for any $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{L^0} (\mathbf{\Lambda} C_N ({}^t \mathbf{\Lambda} \check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0) \cdot (\delta \mathbf{r}_s - \delta \boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_s) + \mathbf{\Lambda} C_M \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}}) ds &= \\ \int_0^{L^0} \left((\check{\mathbf{f}} - \rho A^0 \check{\mathbf{r}}_{tt}) \cdot \delta \mathbf{r} + (\check{\mathbf{c}} - \mathbf{\Lambda} (J^0 \mathbf{A} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} J^0 \boldsymbol{\Omega})) \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right) ds & \\ + \left[\check{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta \mathbf{r} + \check{\boldsymbol{\xi}} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right]_0^{L^0} & \end{aligned}$$

Static problem. Linear form of the weak formulation. The problem is non-linear and has to be solved via an iterative process. By introducing $\mathfrak{d}\mathbf{r}$ and $\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta}$ two increments of displacement and rotation such that:

$$\check{\mathbf{r}}_{k+1} = \check{\mathbf{r}}_k + \mathfrak{d}\mathbf{r}, \quad (2.101)$$

$$\check{\mathbf{\Lambda}}_{k+1} = \exp(\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta}) \check{\mathbf{\Lambda}}_k. \quad (2.102)$$

where k is the iteration step number, the following can be written:

$$\mathfrak{d}\check{\mathbf{E}} = {}^t\mathbf{\Lambda}_k(\mathfrak{d}\mathbf{r}_s - \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}), \quad (2.103)$$

$$\mathfrak{d}\check{\mathbf{\Gamma}} = {}^t\mathbf{\Lambda}_k\mathfrak{d}\bar{\boldsymbol{\vartheta}}. \quad (2.104)$$

Moreover:

$$\mathfrak{d}\delta\check{\mathbf{E}} = -{}^t\mathbf{\Lambda}_k(\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times (\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) + \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \mathfrak{d}\mathbf{r}_s), \quad (2.105)$$

$$\mathfrak{d}\delta\check{\mathbf{\Gamma}} = -{}^t\mathbf{\Lambda}_k\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}}. \quad (2.106)$$

Upon substitution, the linear form of the internal work becomes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}\delta W_{in} &= \int_0^{L^0} \left(C_N \mathfrak{d}\check{\mathbf{E}} \cdot \delta\check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{N}}_k \cdot \mathfrak{d}\delta\check{\mathbf{E}} + C_M \mathfrak{d}\check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta\check{\mathbf{\Gamma}} + \check{\mathbf{M}}_k \cdot \mathfrak{d}\delta\check{\mathbf{\Gamma}} \right) ds \\ &= \int_0^{L^0} \left(C_{n_k} (\mathfrak{d}\mathbf{r}_s - \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) \cdot (\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) + C_{m_k} \mathfrak{d}\bar{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}} - \check{\mathbf{n}}_k \cdot \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}} \right. \\ &\quad \left. - \check{\mathbf{n}}_k \cdot (\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times (\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) + \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \mathfrak{d}\mathbf{r}_s) \right) ds \end{aligned}$$

where $C_{n_k} = \mathbf{\Lambda}_k C_N {}^t\mathbf{\Lambda}_k$ and $C_{m_k} = \mathbf{\Lambda}_k C_M {}^t\mathbf{\Lambda}_k$. The linear form corresponding to the material and geometric tangent stiffness matrices can be split into two parts:

$$\mathfrak{d}\delta W_{mat} = \int_0^{L^0} \left(C_{n_k} (\mathfrak{d}\mathbf{r}_s - \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) \cdot (\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) + C_{m_k} \mathfrak{d}\bar{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds, \quad (2.107)$$

$$\mathfrak{d}\delta W_{geo} = - \int_0^{L^0} \left(\check{\mathbf{n}}_k \cdot (\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times (\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) + \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \mathfrak{d}\mathbf{r}_s) + \check{\mathbf{m}}_k \cdot \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds. \quad (2.108)$$

Rewriting δW_{in} and δW_{ext} at iteration k leads to:

$$\delta W_{in_k} = \int_0^{L^0} \left(\check{\mathbf{n}}_k \cdot (\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) + \check{\mathbf{m}}_k \cdot \delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds, \quad (2.109)$$

$$\delta W_{ext_k} = \int_0^{L^0} \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta\mathbf{r} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} \right) ds + \left[\check{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta\mathbf{r} + \check{\boldsymbol{\xi}} \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} \right]_0^{L^0}. \quad (2.110)$$

At each Newton iterative step, the following problem must be solved:

Find $\mathfrak{d}\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ and $\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \in SO(3)$ satisfying the boundary conditions and such that for every $\delta\check{\mathbf{r}} \in \mathbf{R}^3$ and $\delta\check{\boldsymbol{\vartheta}} \in T_{\check{\mathbf{\Lambda}}_k} SO(3)$:

$$\delta W_{in_k} - \delta W_{ext_k} = -\mathfrak{d}\delta W_{mat} - \mathfrak{d}\delta W_{geo}$$

Updates at each iteration are simply given by (2.101) and (2.102) plus the following formula for $\mathbf{\Gamma}_k$:

$$\mathbf{\Gamma}_{k+1} = \mathbf{\Gamma}_k + {}^t\mathbf{\Lambda}_k \exp(-\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta}_k) \partial_s (\exp \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta}_k) \mathbf{\Lambda}_k \quad (2.111)$$

Dynamics. Linear form of the weak formulation. Linearization of the inertia terms is done after the introduction of the time stepping scheme. Time discretization of displacements field is done via a classic γ, β -algorithm as follows:

$$\check{\mathbf{r}}^{n+1} = \check{\mathbf{r}}^n + \tau \dot{\check{\mathbf{r}}}^n + \frac{1}{2} \tau^2 \left[(1 - 2\beta) \ddot{\check{\mathbf{r}}}^n + 2\beta \ddot{\check{\mathbf{r}}}^{n+1} \right], \quad (2.112)$$

$$\dot{\check{\mathbf{r}}}^{n+1} = \dot{\check{\mathbf{r}}}^n + \tau \left[(1 - \gamma) \ddot{\check{\mathbf{r}}}^n + \gamma \ddot{\check{\mathbf{r}}}^{n+1} \right]. \quad (2.113)$$

In the present case, the standard values $\gamma = 1/2$ and $\beta = 1/4$ were chosen. (2.112) and (2.113) can be expressed as:

$$\ddot{\mathbf{r}}^{n+1} = \frac{1}{\beta\tau^2}(\check{\mathbf{r}}^{n+1} - \check{\mathbf{r}}^n) - \frac{1}{\beta\tau}\dot{\mathbf{r}}^n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{r}}^n, \quad (2.114)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\tau}(\check{\mathbf{r}}^{n+1} - \check{\mathbf{r}}^n) + (1 - \frac{\gamma}{\beta})\dot{\mathbf{r}}^n + \tau\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{r}}^n. \quad (2.115)$$

From the above formula, it is clear that the linearization of the acceleration and the velocity can be written as:

$$\mathfrak{d}\ddot{\mathbf{r}}^{n+1} = \frac{1}{\beta\tau^2}\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}, \quad (2.116)$$

$$\mathfrak{d}\dot{\mathbf{r}}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\tau}\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}. \quad (2.117)$$

Thus the linearized variation of the kinetic energy related to displacements is simply:

$$\mathfrak{d}\delta k_{in}^{di} = - \int_0^{L^0} \left(\frac{\rho A^0}{\beta\tau^2} \delta\check{\mathbf{r}} \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}} \right) ds. \quad (2.118)$$

Initialization at each time step is done choosing $\check{\mathbf{r}}_1^{n+1} = \check{\mathbf{r}}^n$ and computing $\dot{\mathbf{r}}_1^{n+1}$ and $\ddot{\mathbf{r}}_1^{n+1}$ with the above relationships, that is:

$$\check{\mathbf{r}}_1^{n+1} = \check{\mathbf{r}}^n, \quad (2.119)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1^{n+1} = -\frac{\tau}{\beta}\dot{\mathbf{r}}^n - \frac{\tau^2}{\beta}\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{r}}^n, \quad (2.120)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1^{n+1} = \dot{\mathbf{r}}^n + \tau \left[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{r}}^n + \gamma\ddot{\mathbf{r}}_1^{n+1} \right]. \quad (2.121)$$

If k is the step counter of the Newton-Raphson iteration, at the end of each step, updates are made via the following formulas:

$$\check{\mathbf{r}}_{k+1}^{n+1} = \check{\mathbf{r}}_k^{n+1} + \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}, \quad (2.122)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{k+1}^{n+1} = \ddot{\mathbf{r}}_k^{n+1} + \frac{1}{\beta\tau^2}\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}, \quad (2.123)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{k+1}^{n+1} = \dot{\mathbf{r}}_k^{n+1} + \frac{\gamma}{\beta\tau}\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}. \quad (2.124)$$

For rotations field, the same classic γ, β -algorithm scheme is applied on material objects since a spatial scheme would not lead to consistent upgrade formulas. The rotation suffered by the cable during one step time, $\mathbf{\Lambda}^{st}$, is introduced:

$$\mathbf{\Lambda}^{n+1} = \exp(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{st})\mathbf{\Lambda}^n = \mathbf{\Lambda}^n \exp(\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{st}). \quad (2.125)$$

where $\boldsymbol{\Theta}^{st}$ and $\boldsymbol{\vartheta}^{st}$ are the rotation vectors associated to $\mathbf{\Lambda}^{st}$ with respect to fixed or follower axis, respectively. Self-explanatory definitions are provided hereafter:

$$\mathbf{\Lambda}^n = \exp \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^n = \exp \hat{\boldsymbol{\Theta}}^n, \quad (2.126)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{n+1} = \exp \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{n+1} = \exp \hat{\boldsymbol{\Theta}}^{n+1}, \quad (2.127)$$

$$\delta\mathbf{\Lambda}^{n+1} = \delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}\mathbf{\Lambda}^{n+1} = \mathbf{\Lambda}^{n+1}\delta\hat{\boldsymbol{\Theta}}. \quad (2.128)$$

A perturbed rotation $\mathbf{\Lambda}_\epsilon^{n+1}$ can be expressed in terms of $\delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{st}$, or $\delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$:

$$\mathbf{\Lambda}_\epsilon^{n+1} = \exp(\epsilon\delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \exp(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{st}) \mathbf{\Lambda}^n, \quad (2.129)$$

$$\mathbf{\Lambda}_\epsilon^{n+1} = \exp(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{st} + \epsilon\delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{st}) \mathbf{\Lambda}^n. \quad (2.130)$$

where ϵ is a small positive parameter. Thus:

$$\exp(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{st} + \epsilon\delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{st}) = \exp(\epsilon\delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \exp(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{st}). \quad (2.131)$$

The relationship between $\delta\boldsymbol{\vartheta}^{st}$ and $\delta\boldsymbol{\vartheta}$ is given by (2.27):

$$\delta\boldsymbol{\vartheta}^{st} = \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}^{st}) \delta\boldsymbol{\vartheta}. \quad (2.132)$$

Equality (2.132) will be used for the acceleration and velocity linearization at time t_{n+1} after the Newmark scheme is set with material quantities:

$$\boldsymbol{\Theta}^{st} = \tau \boldsymbol{\Omega}^n + \frac{1}{2} \tau^2 \left[(1 - 2\beta) \mathbf{A}^n + 2\beta \mathbf{A}^{n+1} \right], \quad (2.133)$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{n+1} = \boldsymbol{\Omega}^n + \tau \left[(1 - \gamma) \mathbf{A}^n + \gamma \mathbf{A}^{n+1} \right]. \quad (2.134)$$

The previous equations can be rearranged to obtain:

$$\mathbf{A}^{n+1} = \frac{1}{\beta\tau^2} \boldsymbol{\Theta}^{st} - \frac{1}{\beta\tau} \boldsymbol{\Omega}^n + \left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \mathbf{A}^n, \quad (2.135)$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\tau} \boldsymbol{\Theta}^{st} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \boldsymbol{\Omega}^n + \tau \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \mathbf{A}^n. \quad (2.136)$$

As a reminder, operators $\delta(\cdot)$ and $\mathfrak{d}(\cdot)$ stand for the same mathematical operation and the linearized quantities can be written as follows with the $\mathfrak{d}(\cdot)$ notation:

$$\mathfrak{d}\mathbf{A}^{n+1} = \frac{1}{\beta\tau^2} \mathfrak{d}\boldsymbol{\Theta}^{st}, \quad (2.137)$$

$$\mathfrak{d}\boldsymbol{\Omega}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\tau} \mathfrak{d}\boldsymbol{\Theta}^{st}. \quad (2.138)$$

Since $\mathfrak{d}\boldsymbol{\Theta}^{st} = {}^t\mathbf{\Lambda}^n \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta}^{st}$:

$$\mathfrak{d}\mathbf{A}^{n+1} = \frac{1}{\beta\tau^2} {}^t\mathbf{\Lambda}^n \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}^{st}) \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta}, \quad (2.139)$$

$$\mathfrak{d}\boldsymbol{\Omega}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\tau} {}^t\mathbf{\Lambda}^n \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}^{st}) \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta}. \quad (2.140)$$

Thus the linearized variation of the kinetic energy related to rotations is:

$$\mathfrak{d}\delta k_{in}^{ro} = -\mathfrak{d} \int_0^{L^0} \left(\mathbf{\Lambda}(J^0 \mathbf{A} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} J^0 \boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} \right) ds \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{L^0} \left(\mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{\Lambda}(J^0 \mathbf{A} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} J^0 \boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{\Lambda}(J^0 \mathfrak{d}\mathbf{A} + \mathfrak{d}\hat{\boldsymbol{\Omega}} J^0 \boldsymbol{\Omega} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} J^0 \mathfrak{d}\boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} \right) ds \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{L^0} \left(\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{\Lambda}(J^0 \mathbf{A} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} J^0 \boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{\Lambda}(J^0 \mathfrak{d}\mathbf{A} + \mathfrak{d}\boldsymbol{\Omega} \times J^0 \boldsymbol{\Omega} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} J^0 \mathfrak{d}\boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} \right) ds \end{aligned} \quad (2.143)$$

Writing $\mathfrak{d}\delta k_{in}^{ro}$ at time t_{n+1} gives:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}\delta k_{in}^{ro} = - \int_0^{L^0} & \left(\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{\Lambda}(J^0 \mathbf{A} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} J^0 \boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right. \\ & + \frac{1}{\beta \tau^2} \boldsymbol{\Lambda} J^{0t} \boldsymbol{\Lambda}^n \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}^{st}) \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \\ & + \frac{\gamma}{\beta \tau} \boldsymbol{\Lambda}^t \boldsymbol{\Lambda}^n \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}^{st}) \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times J^0 \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \\ & \left. + \frac{\gamma}{\beta \tau} \boldsymbol{\Lambda} \hat{\boldsymbol{\Omega}} J^{0t} \boldsymbol{\Lambda}^n \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}^{st}) \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right) ds \end{aligned} \quad (2.144)$$

Expression (2.144) is the same as equation (3.15) in [96] with the modifications reported in equation (109) of [126]. Rewriting the Newmark relationships at iteration k and $k+1$ of the Newton iterative process leads to:

$$\mathbf{A}_{k+1}^{n+1} = \mathbf{A}_k^{n+1} + \frac{1}{\beta \tau^2} (\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^{st} - \boldsymbol{\Theta}_k^{st}), \quad (2.145)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{k+1}^{n+1} = \boldsymbol{\Omega}_k^{n+1} + \frac{\gamma}{\beta \tau} (\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^{st} - \boldsymbol{\Theta}_k^{st}). \quad (2.146)$$

which leads to the update formulas:

$$\mathfrak{d}\mathbf{A}_{k+1}^{n+1} = \frac{1}{\beta \tau^2} {}^t \boldsymbol{\Lambda}^n \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}_{k+1}^{st}) \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta}, \quad (2.147)$$

$$\mathfrak{d}\boldsymbol{\Omega}_{k+1}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \tau} {}^t \boldsymbol{\Lambda}^n \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}_{k+1}^{st}) \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta}. \quad (2.148)$$

The linearized form of the variational formulation is $\mathfrak{d}\delta k_{in}^{ro} + \mathfrak{d}\delta k_{in}^{di} + \mathfrak{d}\delta W_{mat} + \mathfrak{d}\delta W_{geo} = 0$.

6 Notes sur la modélisation des ancrages

Certains modèles ne permettent pas de prendre en compte correctement les différentes conditions aux limites présentes sur ouvrage: ancrages encastres ou guidés, déviations des câbles sous collier, etc. Or c'est précisément au niveau de ces points singuliers que les désordres apparaissent le plus souvent. Parmi les choix possibles nous notons les remarques suivantes:

- les modèles de type Irvine ne permettent pas d'imposer des conditions aux limites autres que celle du pivot ;
- les modèles de type poutre tendue ne permettent pas de prendre en compte l'effet de la courbure pour les câbles à forte flèche ;
- les modèles géométriquement exacts de tiges et poutres sans cisaillement sur-évaluent la flexion avec des conditions d'encastrement ;
- les modèles géométriquement exacts de tiges et poutres avec cisaillement ne permettent pas de prendre en compte le gauchissement des sections et soulèvent donc deux questions: les sections subissent-elles une forme de gauchissement dans un câble - même de fort diamètre - alors que les fils des différentes couches ne sont pas tous solidaires dans une même section du câble ? Comment détermine-t-on et justifie-t-on les lois de comportement associées ?

- les modèles de poutres courbes avec cisaillement et gauchissement des sections existent et entraînent le même questionnement que précédemment.

Sans aller jusqu'à prendre en compte le gauchissement des sections, la question des conditions aux limites représente une réelle source de questionnements théoriques [127] et pratiques [128], [129]. Elle est étroitement liée au type de modélisation envisagé. Le fait que certains câbles rencontrés sur ouvrage soient équipés de guides aux ancrages et de systèmes complexes d'anti-corrosion multipliant à la fois le nombre et la nature des barrières physiques entre l'acier du câble et les agents agressifs extérieurs poussent à envisager une modélisation de poutre géométriquement exact avec ou sans cisaillement mais aux rigidités variables le long du câble. L'idée est de trouver un juste équilibre entre la précision souhaitée à l'échelle du câble et à celle de l'ancrage. Dans cette optique, une modélisation aux éléments finis est un choix pragmatique puisque les bibliothèques de calculs actuellement disponibles permettent de mailler simplement et à volonté les différents espaces d'approximations des inconnues ou des paramètres du problème.

7 Notes sur les lois de comportement utilisées

L'ensemble des publications citées dans la bibliographie utilise les lois de comportements élastiques linéaires isotropes en petites déformations dont la forme est donnée, au moins implicitement, par la mécanique des milieux continus dans le cas des hypothèses de Saint-Venant. Les hypothèses choisies se traduisent par un tenseur d'élasticité d'ordre deux dont les coefficients non nuls sont au nombre de six ou plus si des couplages sont envisagés, comme c'est le cas dans [130] et [131] par exemple.

7.1 Aspects théoriques de modélisation

Nous reprenons à notre compte la démarche suivie et les commentaires faits dans le Chapitre 6 du cours de MM. Ballard et Millard [5] afin de repositionner dans un cadre clair les problèmes que posent le choix d'une loi de comportement au sein de la théorie des milieux de Cosserat monodimensionnels. Les questions soulevées par les deux auteurs sont essentielles et ont largement orienté le travail fait dans cette thèse. Elles sont principalement au nombre de deux: la première concerne la cohérence que doivent avoir la modélisation tridimensionnelle élastique linéarisé aux petites transformations et celle des frères Cosserat sous les mêmes hypothèses. La seconde se focalise sur la détermination des coefficients du tenseur d'élasticité, qui, dans le cas du milieu monodimensionnel, dépendent non seulement du matériau, mais également de sa géométrie. Du point de vue des auteurs, la théorie des milieux continus élastiques tridimensionnels permet de répondre aux deux questions. Il s'agit d'une part de justifier par le cadre théorique de la mécanique des milieux continus classique l'utilisation des modèles de poutre et leurs conditions d'utilisation et d'autre part de donner la démarche à suivre pour déterminer, de façon cohérente, leurs lois de comportement. Sur la justification théorique de l'utilisation des modèles de poutres et de leur cinématique particulière, le raisonnement exposé par les deux auteurs se déroule comme suit:

Premièrement:

On se place dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle en petites transformations,

Ensuite:

Le principe de Saint-Venant est énoncé et justifié - par le théorème de Toupin - ce qui permet de rappeler ses conditions d'utilisation, notamment de garder en mémoire que dans notre cas, la théorie de Saint-Venant ne permet pas de déterminer les contraintes au voisinage des ancrages.

Puis:

L'application du principe de Saint-Venant à un cylindre élastique homogène isotrope conduit - après quelques pages de calculs - à l'expression de la solution en déplacement de son équilibre lorsqu'il n'est sollicité qu'en ses extrémités. L'expression obtenue est la superposition de cas élémentaires - traction simple, flexion pure et flexion simple, torsion - permettant d'introduire directement les grandeurs physiques correspondantes - les raideurs en flexion, torsion, traction. Cette solution n'est pas valable dans le voisinage de ces dernières, mais elle s'écrit en toute généralité et avec les convention du cours Chapitre 6.4, equation (6.23):

$$\begin{aligned}
 \xi_x(x, y, z) &= \frac{F_x}{E|S|}x + \frac{F_y}{EI_z} \left[\frac{xy}{2} (x - 2L) + \eta_1(y, z) + \frac{2(1+\nu)zC I_z}{J} \psi(y, z) \right] \\
 &\quad + \frac{F_z}{EI_y} \left[\frac{xz}{2} (x - 2L) + \eta_2(y, z) - \frac{2(1+\nu)yC I_y}{J} \psi(y, z) \right] \\
 &\quad + \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ} \psi(y, z) + \frac{C_y}{EI_y} xz - \frac{C_z}{EI_z} xy, \\
 \xi_y(x, y, z) &= -\frac{\nu F_x}{E|S|}y + \frac{F_z}{EI_y} \left[\nu(L-x)yz + \frac{2(1+\nu)yC I_y}{J} xz \right] \\
 &\quad + \frac{F_y}{EI_z} \left[\frac{x^2}{6} (3L-x) + \frac{\nu}{2} (L-x)(y^2 - z^2) - \frac{2(1+\nu)zC I_z}{J} xz \right] \\
 &\quad - \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ} xz - \frac{\nu C_y}{EI_y} yz + \frac{C_z}{2EI_z} (x^2 + \nu y^2 - \nu z^2), \\
 \xi_z(x, y, z) &= -\frac{\nu F_x}{E|S|}z + \frac{F_y}{EI_z} \left[\nu(L-x)yz + \frac{2(1+\nu)zC I_z}{J} xy \right] \\
 &\quad + \frac{F_z}{EI_y} \left[\frac{x^2}{6} (3L-x) - \frac{\nu}{2} (L-x)(y^2 - z^2) - \frac{2(1+\nu)yC I_y}{J} xy \right] \\
 &\quad - \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ} xy + \frac{\nu C_z}{EI_z} yz - \frac{C_y}{2EI_y} (x^2 + \nu y^2 - \nu z^2).
 \end{aligned}$$

où le repère (O, x, y, z) a été placé en une extrémité de la barre, ξ_x , ξ_y et ξ_z sont respectivement les déplacements dans les directions x , y et z et où η_1 , η_2 et ψ sont des fonctions de gauchissement vérifiant les problèmes suivant:

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 \eta_1(y, z) &= -2y && \text{dans } S, \\
 \nabla \eta_1 \cdot \underline{n} &= \nu \left\{ \frac{y^2 - z^2}{2} n_y + yz n_z \right\} && \text{sur } \partial S, \\
 \Delta_2 \eta_2(y, z) &= -2z && \text{dans } S, \\
 \nabla \eta_2 \cdot \underline{n} &= \nu \left\{ -\frac{y^2 - z^2}{2} n_z + yz n_y \right\} && \text{sur } \partial S, \\
 \Delta_2 \psi(y, z) &= 0 && \text{dans } S, \\
 \nabla \psi \cdot \underline{n} &= zn_y - yn_z && \text{sur } \partial S.
 \end{aligned}$$

enfin J , y_C et z_C sont trois constantes telles que:

$$\begin{aligned} J &= \int_S y^2 + z^2 + y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ y_C &= \frac{1}{2(1+\nu)I_y} \int_S \nu \frac{y^3 + yz^2}{2} + y \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - z \frac{\partial \eta_2}{\partial y}, \\ z_C &= \frac{1}{2(1+\nu)I_z} \int_S \nu \frac{z^3 + y^2z}{2} - y \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + z \frac{\partial \eta_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

Enfin:

L'introduction de l'élancement dans les équations ci-dessus permet un développement asymptotique aux grands élancements qui montre que la cinématique des poutres est respectée jusqu'à un certain ordre. Elle montre également, qu'en toute rigueur et en dehors du cas où les sections d'extrémité ne sont sollicitées que par un effort de traction pur, c'est la loi de comportement standard inextensible qui s'impose, c'est-à-dire une loi de comportement respectant d'une part l'inextensibilité de la poutre et d'autre part les hypothèses de Navier-Bernoulli¹⁶.

Retenons que tous calculs faits, une poutre élancée homogène élastique linéaire isotrope aux petites transformations soumise à des efforts surfaciques sur les sections extrêmes présente un champs de déplacement de la forme:

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z) &= \left\{ \left[\frac{x^2}{6} (3L - x) \frac{F_y}{EI_z} + \frac{x^2}{2} \frac{C_z}{EI_z} \right] e_y + \left[\frac{x^2}{6} (3L - x) \frac{F_z}{EI_y} - \frac{x^2}{2} \frac{C_y}{EI_y} \right] e_z \right\} \\ &+ \left\{ \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ} x e_x + \left[\frac{x}{2} (x - 2L) \frac{F_z}{EI_y} + x \frac{C_y}{EI_y} \right] e_y \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{x}{2} (x - 2L) \frac{F_y}{EI_z} + x \frac{C_z}{EI_z} \right] e_z \right\} \times \{y e_y + z e_z\} \end{aligned} \quad (2.149)$$

où la cinématique de corps rigide apparait clairement $\xi = \bar{\xi} + \vartheta \times \{y e_y + z e_z\}$. Dans leur ouvrage, MM. Ballard et Millard traitent également le cas de la poutre courbe hétérogène et exposent, en suivant le même cheminement, le cadre de l'identification de la loi comportement qu'il faut développer pour donner au modèle de poutre une loi cohérente avec le cas tridimensionnel. Ce cadre n'exclut pas la possibilité d'extensibilité de la poutre ou de cisaillement des ses sections.

¹⁶ou Euler-Bernoulli. Les sections droites restent droites

Chapitre 3

Retour d'expérience, notes et discussions

Dans cette partie, nous présentons un retour d'expérience réalisé sur la mesure de tension dans les câbles de pont suspendu par méthode vibratoire et reportons les questions qu'elle soulève relatives aux difficultés rencontrées sur site.

Sommaire

1	Retour d'expérience sur la mesure de tension par méthode vibratoire : application aux ponts suspendus	56
1.1	Essais en laboratoire	56
1.2	Essais <i>in situ</i>	60
1.3	Retour d'expérience	63
2	Notes sur les raideurs et la masse linéique d'un câble . . .	63
2.1	Première approche, premiers questionnements	64
2.2	Sources de complexité	68
2.3	Conclusions sur les modules d'élasticité	69
2.4	Masse linéique du câble	69
3	Note sur les modèles	69
4	Conclusion du chapitre	70

1 Retour d'expérience sur la mesure de tension par méthode vibratoire : application aux ponts suspendus

Le retour d'expérience que nous présentons dans cette partie a été effectué sur trois méthodes vibratoires couramment utilisées. Les trois méthodes retenues ont été abordées au chapitre précédent et sont :

- la LPC35 [29] ;
- la méthode de MM. Zui et Schinke [33] ;
- la note sur la LPC35 de MM. Bouton et Crémone [30].

Ce choix relativement restreint est motivé par le fait que les méthodes citées sont disponibles, reconnues, et qu'elles ne nécessitent pas d'instrumentation coûteuse ni de logiciel commercial : elles sont applicables sans recours au développement de routines spécifiques.

L'expérience de terrain acquise au fil des années par notre département nous a amené à reconsidérer le domaine d'applicabilité de ces méthodes qui, au regard des exemples donnés dans la littérature, semble aller des haubans de ponts aux tirants utilisés dans le bâtiment. Sans que ne puisse s'en dégager à l'heure actuelle une quelconque règle de bon usage. Nous donnons dans ce qui suit une synthèse représentative de l'expérience de terrain dont dispose le département sur ces questions.

Notre retour d'expérience est divisé en deux parties. La première partie concerne des essais de laboratoire permettant un contrôle direct des résultats grâce à un montage disposant d'un peson. La seconde est une synthèse de l'application des méthodes sur l'ensemble des câbles de 2 ouvrages suspendus.

1.1 Essais en laboratoire

Banc d'essai

Le banc d'essai dont le laboratoire s'est doté à l'occasion de la présente thèse est une structure métallique composée de 7 modules de 3 m chacun permettant la mise en tension jusqu'à 440 kN d'un câble dont la longueur peut atteindre 21 m. Il sera présenté plus en détail dans le dernier chapitre de la thèse. Pour les essais effectués, outre l'étalonnage et l'installation de l'instrumentation nécessaire à l'application des méthodes, le banc est équipé d'une part d'un capteur de pression étalonné en amont du verin de mise en tension et d'autre part d'un peson qualifié pour les essais à l'aide d'une presse étalonnée. La Figure 3.1 montre une partie du banc, son vérin et l'essai de qualification du peson sous presse.



Figure 3.1: Gauche : Banc du laboratoire. Centre : vérin du banc et son peson. Droite : qualification du peson sous la presse à béton.

L'ensemble des étalonnages a fait l'objet de procès verbaux archivés.

Essais et résultats obtenus

Câble utilisé. Les caractéristiques du câble testés sont à trouver dans le tableau Table3.1. Le module d'Young a été déterminé à l'aide d'un essai de chargement. Les autres grandeurs ont été estimées ou calculées. La détermination des caractéristiques des câbles fait l'objet de discussions présentées dans la deuxième moitié du chapitre.

Masse linéique	3.35 kg.m ⁻¹
Module d'Young	159200 MPa
Diamètre	26.3 mm
Section	402 mm ²
EI	2047.4 Pa.m ⁴

Table 3.1: Principales caractéristiques du câble testé

Notons que les caractéristiques du câble choisi sont voisines de celles des suspentes que l'on peut rencontrer sur ouvrage.

Protocole d'essai. Une série de cinq tests sont effectués sur le câble à différentes tensions. Deux accéléromètres sont positionnés sur le câble et enregistrent quatre à cinq frappés au marteau sans rebond. Les données ainsi récupérées sont analysées à l'aide d'un logiciel maison permettant une visualisation simple des signaux et une récupération de leurs spectres fréquentiels via des transformées de Fourier. Les fréquences propres du câble pour les cinq essais sont identifiées et triées par l'opérateur. Les FFT sont calculées sur la base de signaux échantillonnés au kilo-Hertz et longs d'au moins 30 secondes.

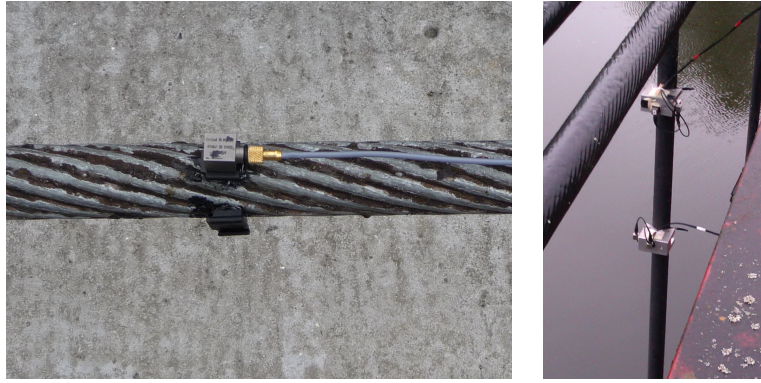


Figure 3.2: Gauche : Accéléromètre posé sur le câble testé en laboratoire. Droite : Accéléromètres posés sur une suspente.

Résultats. Le détail de chacune des trois méthodes n'est pas reporté ici. Nous nous contentons de donner les résultats obtenus. Pour la méthode de MM. Bouton et Crémone, trois résultats sont envisagés suivant que l'on considère une modélisation aux ancrages de type bi-rotulé, rotulé-encasté ou bi-encasté. Le tableau Table 3.2 montre les tensions et les fréquences obtenues au cours des cinq essais ainsi que les tensions données par les différentes méthodes. Les paramètres intermédiaires nécessaires à chaque méthode sont également reportés.

Comme nous pouvons le constater, sur les essais allant d'une tension de 46.5 kN à 125.7 kN, l'ensemble des résultats obtenus par les trois méthodes peut être considéré comme correct. Remarquons que l'hypothèse d'ancrages encasté-rotulé et l'utilisation de la méthode de MM. Bouton et Crémone donne d'excellents résultats sur l'ensemble des cinq cas envisagés. Ajoutons enfin un dernier commentaire d'importance : le premier critère d'application de la LPC35 est d'observer l'alignement des 7 premiers modes, ce qui n'est pas exactement le cas ici. Néanmoins la méthode donne des résultats tout à fait corrects. Ce n'est pas surprenant dans la mesure où le critère en question provient de la comparaison théorique entre le modèle de la corde vibrante et celui de la poutre tendue. La LPC35 permet d'ailleurs de s'affranchir, dans une certaine mesure, de ce critère d'application.

T_{peson} [kN]	46.49	71.34	88.34	104.14	125.73
f_1 [Hz]	2.73	3.39	3.77	4.10	4.50
f_2 [Hz]	5.46	6.79	7.55	8.20	9.00
f_3 [Hz]	8.19	10.18	11.32	12.31	13.52
f_4 [Hz]	10.97	13.64	15.18	16.48	18.06
f_5 [Hz]	13.76	17.05	18.98	20.59	22.58
f_6 [Hz]	16.66	20.66	22.92	24.85	27.29
f_7 [Hz]	19.57	24.14	26.78	29.03	31.80
T_{LPC35} [kN]	47.07	72.64	89.89	106.36	128.21
err [%]	1.26	1.83	1.76	2.14	1.98
C_{Shinke}	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
T_{Shinke} [kN]	45.01	70.01	86.89	103.03	124.44
err [%]	-3.18	-1.87	-1.64	-1.06	-1.03
ρ_1	52.05	64.68	71.97	78.31	86.01
ρ_2	104.1	129.56	144.14	156.63	172.02
ξ_1	101.85	127.13	141.71	154.39	169.79
ξ_2	101.85	127.32	141.9	154.39	169.79
R [%]	0.00	0.15	0.13	0.00	0.00
ξ_{Moyen}	101.85	127.22	141.81	154.39	169.79
T_{be} [kN]	45.06	70.25	87.23	103.35	124.91
err [%]	-3.07	-1.52	-1.25	-0.75	-0.65
ξ_1	103.04	128.31	142.89	155.57	170.96
ξ_2	103.04	128.5	143.08	155.57	170.96
R [%]	0.00	0.15	0.13	0.00	0.00
ξ_{Moyen}	103.04	128.4	142.98	155.57	170.96
T_{er} [kN]	46.12	71.56	88.69	104.93	126.64
err [%]	-0.8	0.31	0.4	0.76	0.73
ξ_1	104.05	129.33	143.91	156.59	171.99
ξ_2	103.91	129.41	144	156.5	171.9
R [%]	0.14	0.06	0.06	0.06	0.05
ξ_{Moyen}	103.98	129.37	143.96	156.55	171.95
T_{br} [kN]	46.97	72.64	89.9	106.26	128.11
err [%]	1.02	1.83	1.77	2.04	1.89

Table 3.2: Tensions et fréquences mesurées au cours des cinq essais et tensions calculées par les trois méthodes retenues. Modélisation des ancrages pour la méthode de MM. Bouton et Crémona : br=bi-rotulé, be=bi-encasté, er=encasté-rotulé

1.2 Essais *in situ*

Présentation des ouvrages

Comme expliqué en introduction, le contrôle du réglage de la suspension d'un pont suspendu est l'un des éléments importants de son diagnostic. Les deux campagnes d'essais réalisées ont été sollicitées par les gestionnaires ou effectuées avec leur accord pour avoir une idée de l'homogénéité des tensions dans les câbles de l'ouvrage. En dehors de son utilisation pour la détermination de tension à proprement parlé, le relevé des fréquences propres des câbles donne une indication quantitative sur leur *état de tension*. Cette indication est intéressante en soi et peut être observée au cours du temps.

Les vues d'ensemble des deux ouvrages, que nous appellerons A et B, sont reportées Figure 3.3. L'ouvrage A est un ouvrage à quatre travées suspendues et câbles de tête. Il possède 24 câbles de rives, 20 câbles de tête et 136 suspentes en tout ainsi que 8 câbles porteurs par travée. L'ouvrage B est un pont suspendu à une travée suspendue par 4 câbles porteurs, 142 suspentes et 2 câbles de retenue.

Les essais n'ont pas pu être effectués sur l'ensemble des câbles des deux ouvrages : nous reportons uniquement les essais pour lesquels des mesures ont été faites et sont considérées exploitables, c'est-à-dire que les capteurs et la chaîne d'acquisition ont fonctionné correctement.

Résultats obtenus

Dans le traitement des résultats, nous décidons de ne retenir que deux cas :

- les données d'entrée du problème permettent d'obtenir un résultat avec la méthode ;
- les données d'entrée du problème ne permettent pas d'obtenir un résultat avec la méthode.

Ce découpage nous permet d'utiliser les différentes méthodes sur des cas limites. Pour la LPC35 par exemple, le premier critère d'application, très contraignant, est de s'assurer de l'alignement des 7 premiers modes. S'il est rempli, la méthode garantit la justesse du résultat, sinon, la méthode est toujours applicable, mais sa justesse n'est plus garantie. Nous décidons d'appliquer la méthode pour les cas limites, y compris ceux pour lesquels les 7 premiers modes ne sont pas exactement alignés. En effet, et comme nous l'avons vu dans les cas testés en laboratoire, cette condition n'est pas nécessaire à la détermination d'une tension relativement bonne. Par ailleurs, les limites d'application de la LPC35 sont purement théoriques : elles proviennent de la différence entre deux modèles : celui de la corde vibrante et celui de la poutre tendue. Dans la mesure où nous pourrions comparer les résultats des différentes méthodes, nous faisons le choix suivant.

Lorsque la méthode permet d'obtenir un résultat, nous identifions deux sous-cas possibles : soit la valeur de tension obtenue est vraisemblable, c'est-à-dire compatible avec la réalité physique de l'ouvrage, soit elle ne l'est pas.

Il y a, pour les cas intermédiaires, une part d'arbitraire dans ce dernier classement qui est cependant à relativiser étant donné le faible nombre de cas litigieux dans notre étude. Remarquons enfin que les choix de classement présentés conduisent à un nombre surévalué de cas traités par les méthodes, notamment la LPC35.



Figure 3.3: Gauche : ouvrage A. Droite : ouvrage B.

Ouvrage A Sur l'ouvrage A, 94 suspentes de 55 mm de diamètre ont été testées. Leurs longueurs varient entre 2 et 10 m. Nous retenons la fourchette 5 – 350 kN comme critère de vraisemblance. Sur les 94 suspentes testées, une tension ou plusieurs tensions ont pu être calculées pour 93 d'entre elles. Sur ces suspentes, seules 80 avaient une ou plusieurs tensions vraisemblables.

Lorsque l'on regarde chacune des méthodes individuellement, la LPC35 donne une tension vraisemblable pour 58 suspentes, la méthode de MM. Zui et Shinke conduit à une tension vraisemblable pour 51 suspentes et celle de MM. Bouton et Crémona pour 77 suspentes.

Notons toutefois que les tensions calculées et vraisemblables présentent, pour un très grand nombre de suspentes, un écart moyen tel qu'il est difficile de discriminer les résultats.

Ajoutons de plus que l'ouvrage comporte 136 suspentes dont seules les 94 plus longues ont été testées. Dans ces conditions, il est malaisé de conclure quant à l'homogénéité du réglage de la suspension à partir des résultats obtenus.

Les résultats obtenus ont été mis sous forme d'histogrammes donnés en annexes.

Ouvrage B Sur l'ouvrage B, 142 suspentes de 30 ou 32 mm de diamètre ont été testées. Leurs longueurs varient entre 1.5 et 15 m. Nous retenons la fourchette 3 – 250 kN comme critère de vraisemblance.

Sur les 142 suspentes testées, une tension ou plusieurs tensions ont pu être calculées pour 142 d'entre elles. Sur ces suspentes, 141 avaient une ou plusieurs tensions vraisemblables. Lorsque l'on regarde chacune des méthodes individuellement, la LPC35 donne une tension vraisemblable pour 132 suspentes, la méthode de MM. Zui et Shinke conduit à une tension vraisemblable pour 31 suspentes et celle de MM. Bouton et Crémona pour 130 suspentes. Comme précédemment, il est difficile, étant donné la dispersion des résultats, d'aboutir à une valeur fiable de tension, et ce malgré la cohérence des résultats lorsqu'il y en a une.

Prenons comme exemple la première suspente de la ferme amont : les valeurs de tensions obtenues par la LPC35 et le cas bi-rotulé sont proches - respectivement 17.14 kN et 16.66 kN - mais c'est également le cas des tensions calculées sur les deux modèles bi-encastres avec 11.39 kN et 11.66 kN. Enfin sur cette suspente, le modèle intermédiaire encasturé-rotulé donne la valeur intermédiaire de 13.86 kN. Les résultats pour cette suspente comme pour d'autres, sont cohérents, mais avec un écart moyen trop important pour conclure de façon pertinente.

Les figures 3.4 et 3.5 montrent les histogrammes des résultats obtenus.

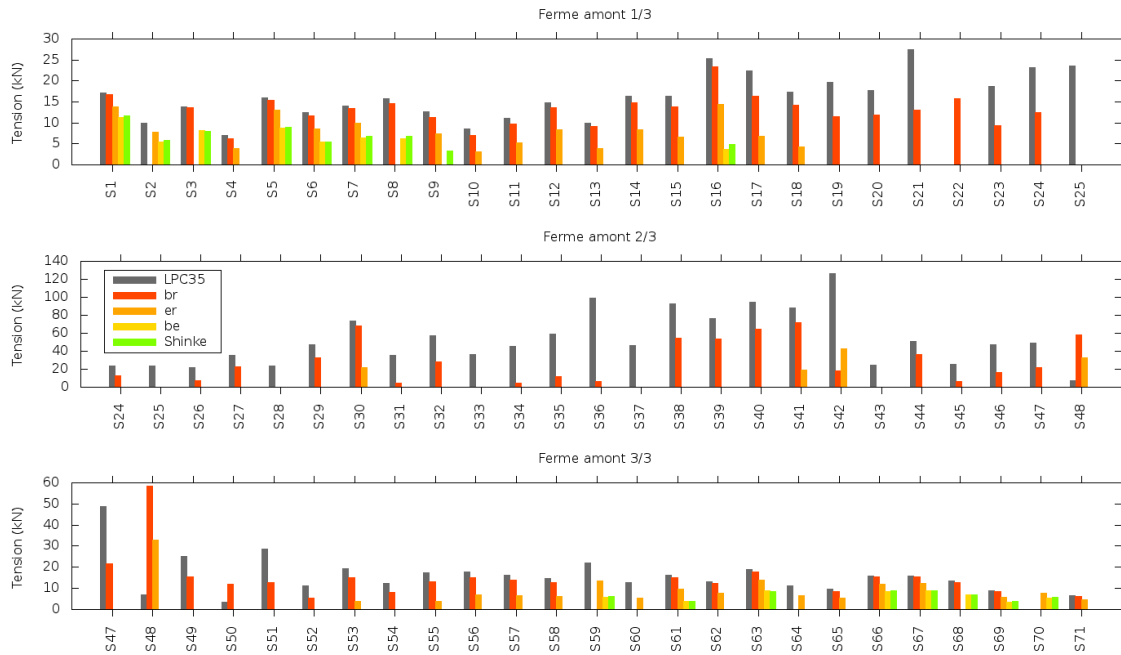


Figure 3.4: Histogrammes des tensions obtenues à partir des quatre méthodes retenues pour la ferme amont de l'ouvrage B.

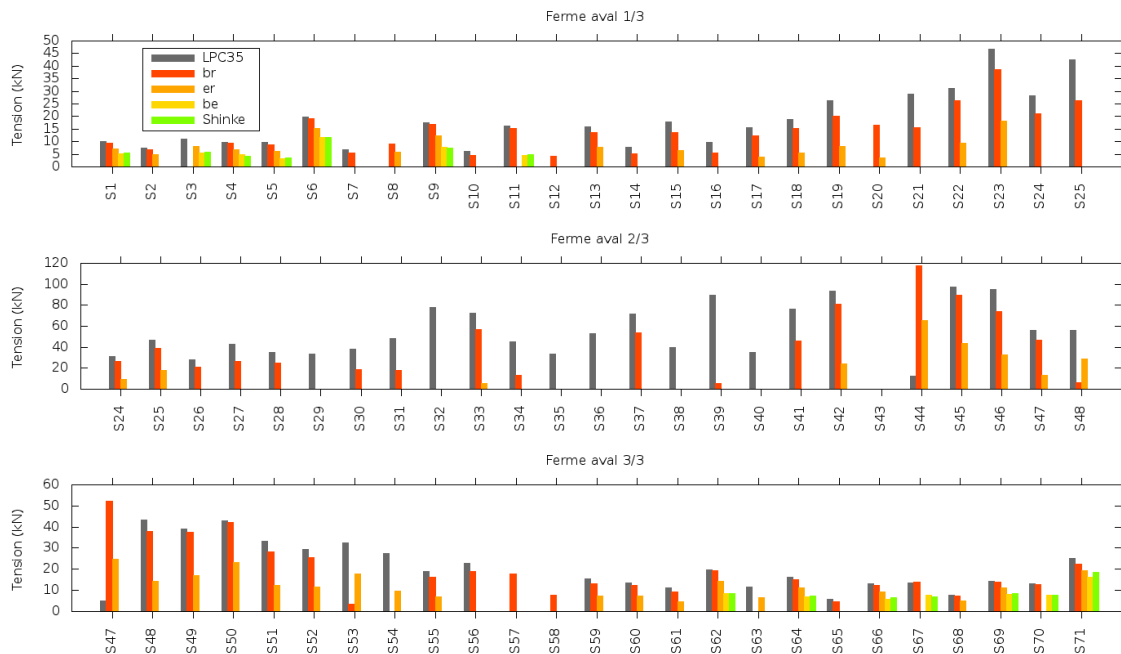


Figure 3.5: Histogrammes des tensions obtenues à partir des quatre méthodes retenues pour la ferme aval de l'ouvrage B.

1.3 Retour d'expérience

Le faible nombre de tensions calculées par l'application de ces trois méthodes (dont deux devraient être applicables aux barres tendues) s'explique en partie par la typologie des suspentes étudiées. Dans le cas de l'ouvrage A, les suspentes sont certes suffisamment longues pour espérer de bons résultats, mais elles ont également de larges diamètres. Dans le cas de l'ouvrage B, c'est principalement le grand nombre de suspentes qui a un double impact négatif sur le résultats : d'une part le pont présente un grand nombre de suspentes très courtes, d'autre part, la répartition de la charge sur les suspentes est d'autant plus hétérogène que le système est fortement redondant et possède donc des suspentes complètement lâches, surtout parmi les suspentes les plus longues.

Le profil en long des ponts suspendus et les éventuels glissements des suspentes longues sur la partie la plus pentue du câble porteur induisent de plus fortes tensions dans les suspentes les plus courtes (à mi-travée). Pour ces dernières, un modèle de barre tel que celui de la méthode de MM. Bouton et Crémone devrait donner de bons résultats. Il n'en est rien en raison des conditions d'attaches qui perturbent fortement la dynamique de la barre. Ce phénomène est bien connu et, comme nous l'avons dit au chapitre précédent, les chercheurs travaillant sur le sujet tentent de développer des méthodes d'identification des raideurs aux ancrages afin de prendre en compte le problème.

Concluons cette partie en insistant sur le fait que pour les haubans, les câbles de tête, les câbles de retenue et les suspentes suffisamment longues, il est possible d'espérer une évaluation de la tension à moins de 10 % près avec les méthodes étudiées. Comme nous l'avons montré, les suspentes des ponts suspendus sortent de leurs cadres d'utilisation, théoriques ou non.

À la vue des résultats obtenus, il semble que les méthodes vibratoires testées soient trop sensibles aux conditions aux limites pour les suspentes de faible longueur tandis que pour des longueurs dépassant les 20–25 m, elles donnent sensiblement le même résultat, l'effet de la rigidité en flexion étant probablement négligeable à partir de cette longueur. Il existe sans doute un *entre-deux* pour lequel la méthode de MM. Bouton et Crémone donne de meilleurs résultats, et une longueur au-delà de laquelle la méthode de MM. Zui et Shinke est à privilégier. Nous n'avons pas pu vérifier ces deux hypothèses sur le terrain, faute de cas d'étude correspondants.

2 Notes sur les raideurs et la masse linéique d'un câble

Comme nous l'avons vu au cours de notre étude bibliographique, la grande majorité des publications s'appuie sur un ensemble de six modules d'élasticité permettant d'écrire simplement les lois de comportement élastiques linéaires isotropes adaptées aux milieux monodimensionnels. La question de l'identification de ces modules ne représente pas un enjeu important dans la plupart des applications car il est admis que ces modules sont les modules de rigidité (ou raideurs) du câble et sont de la forme EA , GA_1 , GA_2 , EI_1 , EI_2 et GJ où E est le module d'Young du matériau, A , A_1 et A_2 sont respectivement l'aire de la section normale et les aires de cisaillements suivant deux axes normaux à la tangente du câble (ou de la poutre), G est le module de cisaillement de Coulomb, pris égal à $E/(2(1 + \nu))$ où ν est le coefficient de Poisson du matériau, I_1 et I_2 sont les moments quadratiques principaux et J le moment d'inertie de torsion.

Dans le cas des câbles à fils parallèles ou des câbles multitorons parallèles, la détermination des raideurs ne pose pas de réel problème et leurs valeurs sont souvent très proches de celles calculées à partir de la géométrie du câble et des modules d'élasticité de son matériau constitutif.

Dans cette partie, nous évoquons le calcul des modules de rigidité d'un câble idéalisé dont la géométrie est celle d'un monotoron multi-couches. Nous verrons que différentes approches impliquant des niveaux de difficulté peu commensurables sont envisageables.

2.1 Première approche, premiers questionnements

Généralités : Dans les articles de recherche, l'option la plus simple et la plus couramment retenue pour évaluer les raideurs d'un câble est d'opter pour une approche associant le module d'Young du câble aux aires et moments quadratiques de sa section. Il est coutume de considérer que l'aire de la section d'un câble monotoron multi-couches est sensiblement égale à l'aire de la section du cylindre de même diamètre multipliée par un coefficient dont la valeur est proche de 0.75. En la matière, l'Eurocode 3 – 1 – 11 Tableau 2.2 donne des valeurs de coefficient de remplissage comprises entre 0.73 et 0.77 suivant le nombre de couches de fils. Comme nous le verrons plus bas, cette approximation est assez bonne.

Une autre approximation, théoriquement plus juste, est de sommer l'aire de la section de chacun des fils constitutifs. Toutefois, différents diamètres de fils peuvent co-exister au sein d'un même toron, ce qui change le schéma - le plus simple - de répartition des $3n^2 + 3n + 1$ fils par couche de $6n$ fils. En France, de nombreux torons sont constitués de fils identiques, au moins à partir de la deuxième couche : si le diamètre du câble est suffisamment grand devant celui des fils, il sera possible d'approcher la section du câble en estimant qu'il contient environ $3n^2 + 3n + 1$ fils, n correspondant à un entier proche de $0.5(d_{\text{câble}}/d_{\text{fil}} - 1)$, où $d_{\text{câble}}/d_{\text{fil}}$ est le rapport entre le diamètre du câble et celui d'un fil de la couche extérieure. On remarque au passage qu'en supposant une structure à $3n^2 + 3n + 1$ fils, le coefficient de remplissage tend vers une valeur minimale de 0.75. Dans tous les cas, en l'absence de données sur la nature du câble, il n'est pas possible d'en connaître exactement la structure. L'aire du câble ne peut donc être qu'une donnée constructeur : sur les ouvrages anciens, elle n'est malheureusement pas toujours disponible. En ce qui concerne le calcul des moments quadratiques, il est également souvent pris comme la somme des moments des fils constitutifs. Enfin, les aires de cisaillement découlent de la théorie classique appliquée à un cylindre équivalent.

Représentation géométrique. Afin d'avoir un ordre de grandeur des erreurs commises avec ces différentes approximations, nous étudions le cas d'un monotoron multi-couches de 121 fils semblables présentant une répartition des fils sur 6 couches. Une représentation de sa structure est donnée en Figure 3.6. Nous nous plaçons dans un repère orthonormé direct, x_1 et x_2 repèrent la position d'un point du fil dans sa section tandis que x_3 donne sa position le long de l'axe du câble. Appelons a_c le rayon du fil central et a_n celui d'un fil sur la couche n . Concentrons nous sur les fils de la première couche, le raisonnement pouvant être répété pour les couches suivantes. $r_1 = a_c + a_1$ sera le rayon du cercle passant par les centres des fils de la première couche. En notant L_1 le pas de l'hélice décrite par les fils de la première couche et $l_1 = \sqrt{L_1^2 + (2\pi r_1)^2}$ leur longueur sur ce pas, il est possible de paramétrer la forme de leur section prise dans la

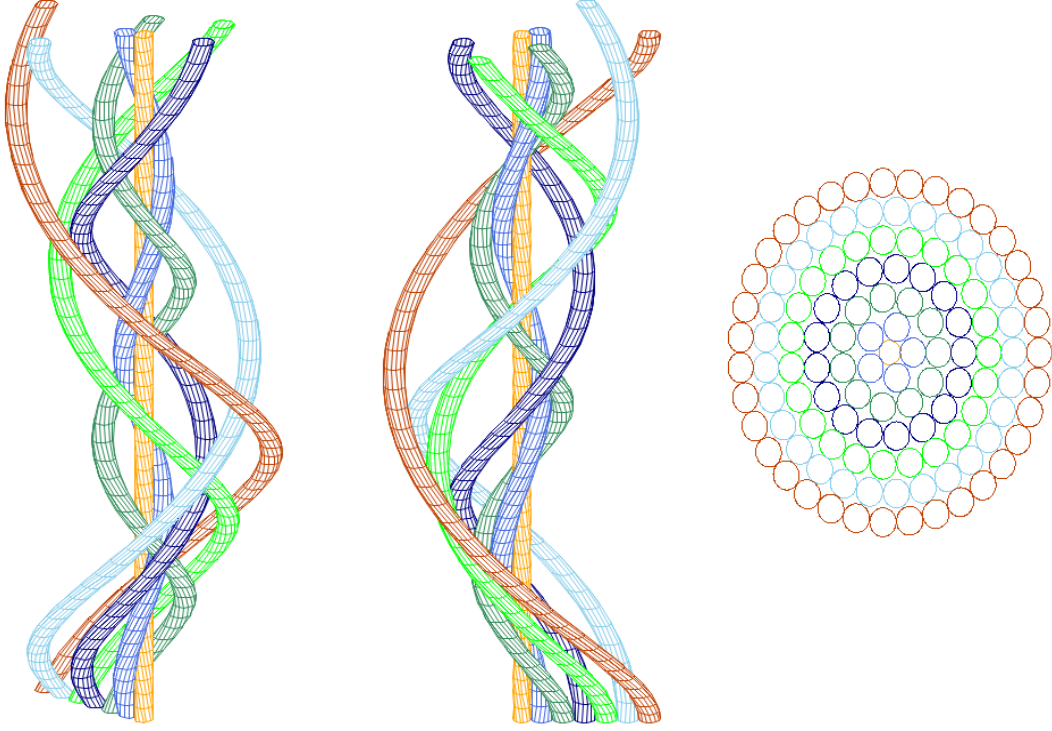


Figure 3.6: Représentations dans l'espace d'un toron multi-couches 1+5+11+17+23+29+35 et de sa section. Les repères utilisés ne sont pas orthonormés pour des raisons de lisibilité.

section droite du câble comme suit (les équations sont tirées de l'article [54] traitant des torons 7 brins) :

$$x_1(\phi) = (r_1 + a_1 \cos \phi) \cos [\psi(n, x_3) + \epsilon \sin \phi] - \alpha a_1 \sin \phi \sin [\psi(n, x_3) + \epsilon \sin \phi], \quad (3.1a)$$

$$x_2(\phi) = (r_1 + a_1 \cos \phi) \sin [\psi(n, x_3) + \epsilon \sin \phi] + \alpha a_1 \sin \phi \cos [\psi(n, x_3) + \epsilon \sin \phi]. \quad (3.1b)$$

où $\psi(n, x_3) = \frac{\pi(n-1)}{3} + \frac{2\pi x_3}{L_1}$ avec $n = \{1, \dots, 6\}$ donne la position du fil n en x_3 , $\alpha = \frac{L_1}{l_1}$, $\epsilon = \frac{4\pi^2 a_1 r_1}{L_1 l_1}$ et $\phi \in [0, 2\pi]$. Il n'est bien sûr pas possible de choisir indépendamment r_1 , L_1 et a_1 qui doivent, entre autres, respecter au moins deux contraintes physiques simples. Si les fils étaient parallèles, il est clair que $a_c = a_1$ donnerait un maximum de section résistante dans le cercle de rayon $a_c + 2a_1$ et les fils de la première couche seraient non seulement en contact avec le fil central, mais également entre eux. D'après les équations (3.1a) et (3.1b), les sections des fils hélicoïdaux ne sont pas des disques (ni des ellipses) et ils faut donc, *a minima*, que $a_c > a_1$. De plus, et afin de pouvoir bénéficier pleinement de la participation de l'ensemble des fils d'une couche sur une section droite du câble, il faut que la typologie du câble se rapproche de celle d'un câble à fils parallèles. Ceci implique d'une certaine façon que L_1 et l_1 aient des valeurs proches, ou que $L_1 \gg r_1$. On souhaite donc que les conditions $L_1 \gg r_1$ et $a_c > a_1$ soient respectées.

Ces considérations nous permettent d'écrire que $\alpha \approx 1$ et donc (3.1a) et (3.1b)

peuvent-être réécrites comme suit :

$$x_1(\phi) = [(r_1 + a_1 \cos \phi) \cos \psi(n, x_3) - \alpha a_1 \sin \phi \sin \psi(n, x_3)] \quad (3.2)$$

$$- \sin \phi [(r_1 + a_1 \cos \phi) \sin \psi(n, x_3) + \alpha a_1 \sin \phi \cos \psi(n, x_3)] \epsilon + O[\epsilon^2], \quad (3.3)$$

$$x_2(\phi) = [(r_1 + a_1 \cos \phi) \sin \psi(n, x_3) + \alpha a_1 \sin \phi \cos \psi(n, x_3)] \quad (3.4)$$

$$+ \sin \phi [(r_1 + a_1 \cos \phi) \cos \psi(n, x_3) - \alpha a_1 \sin \phi \sin \psi(n, x_3)] \epsilon + O[\epsilon^2]. \quad (3.5)$$

Lorsque L_1 devient très grand, nous retrouvons l'équation paramétrée d'un cercle, aisément reconnaissable si l'on pose $\psi(n, x_3) = 0$ et $\alpha = 1$. Ajoutons de plus que d'après le cours de Monsieur Grelot de 1946 [132] à la page 198 :

Les fils d'un câble doivent avoir la même longueur entre deux sections droites quelconques; dans l'hypothèse contraire, en effet, les fils ne subiraient pas tous la même contrainte pour un même allongement; le coefficient de sécurité du câble serait plus faible que celui sur lequel on compte en supposant implicitement l'égalité de tension de tous les fils

ce qui implique un angle de toronnage constant pour toutes les couches, ou, de façon équivalente, que leur rapport l/r soit le même. Enfin, si l'on calcule à l'aide des formules approchées les moments d'inertie du premier fil sur la première couche en $\psi(n, x_3) = 0$, $n = 1$ on obtient :

$$\int_S x_2^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} x_2(\phi, a)^2 \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\phi, a)} \right| da d\phi \quad (3.6)$$

$$= \alpha^3 J_{c11} + \frac{3\pi a_1^3 r_1}{4} \alpha^2 \epsilon + O[\epsilon^2] \quad (3.7)$$

$$\int_S x_1^2 dA = \alpha J_{c22} + \left[\frac{\pi a_1^3 r_1}{4} (3 - 2\alpha^2) + \pi a_1 r_1^3 \right] \epsilon + O[\epsilon^2] \quad (3.8)$$

$$\int_S (x_1^2 + x_2^2) dA = \alpha^3 J_{c11} + \alpha J_{c22} + \left[\frac{\pi a_1^3 r_1}{4} (3 + \alpha^2) + \pi a_1 r_1^3 \right] \epsilon + O[\epsilon^2] \quad (3.9)$$

$$\int_S x_1 x_2 dA = O[\epsilon^2]. \quad (3.10)$$

où les J_{cij} sont les moments d'inertie d'un fil cylindrique de même rayon placé au même endroit. On voit que l'erreur commise est *a priori* très faible, puisqu'elle est en ϵ . Il en va de même pour l'aire d'un fil qui est égal à :

$$\int_S dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\phi, a)} \right| da d\phi = \alpha \pi a_1^2 + \pi a_1 r_1 \epsilon + O[\epsilon^2]. \quad (3.11)$$

Dans ce qui suit, nous envisageons, à partir de ce qui vient d'être écrit, le cas d'un câble réel monté dernièrement sur un ouvrage français.

Applications numériques. Nous appliquons les formules données au paragraphe précédent à un câble test pour lequel les données constructeur sont les suivantes :

- la structure du câble en $1 + 5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35$ fils,
- le diamètre nominal des fils constitutifs du câble,

- le pas de toronnage de chacune des couches,
- l'aire du câble pris comme la somme des aires des fils.

Notons tout de suite que les fils du câble que nous étudions sont identiques, fil central - plus petit - mis à part, et suivent un schéma d'empilement $1 + 5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35$ qui comporte donc un fil de moins par couche que l'empilement compact. Les valeurs des α , ϵ et des rapports L/r n'étant pas tout à fait égales pour chaque couche, nous en donnons une valeur moyenne pour les couches de 2 à 6. Les valeurs obtenues sont regroupées dans le Tableau 3.3.

$(L/r)_{\text{moy}}$	α_{moy}	ϵ_{moy}	$A_{D\text{câble}/D\text{fil}}$	$0.75A_{\text{cylindre}}$	$A_{\text{constructeur}}$	A_{formules}
24.6	0.967	0.089	2203	2149	2094	2168

Table 3.3: Différents calculs d'aire pour un câble test réel. Unité de longueur : millimètre

Comme on peut le constater, les aires calculées restent voisines les unes des autres alors que le niveau d'information sur la structure du câble que leurs calculs nécessitent est très variable. Le Tableau 3.4 montre sous forme synthétique les données requises et non disponibles sur ouvrage pour les calculs de l'aire de la section du câble.

	Structure	L	a	a fils toronnés
$A_{D\text{câble}/D\text{fil}}$	nr-do	nr-do	nr-do	nr-do
$0.75A_{\text{cylindre}}$	nr-do	nr-do	nr-do	nr-do
$A_{\text{constructeur}}$	r	nr-do	r	nr-do
A_{formules}	r	r	nr-do	r

Table 3.4: Données requises et non disponibles sur ouvrage pour les calculs de l'aire de la section du câble. Requises : r, Non requises ou disponibles sur ouvrage : nr-do.

Il faut considérer que le calcul par application des formules écrites plus haut mène à une évaluation théoriquement juste de la section du câble mais devrait être appliquée avec les diamètres des fils toronnés. Les aires $A_{D\text{câble}/D\text{fil}}$, A_{formules} et $A_{\text{constructeur}}$ donnent par ailleurs une nette sur-évaluation de la section du câble lorsque sa structure (constructeur) est composée de $3n^2 + 3n + 1$ fils identiques. Dans le cas traité, la valeur réelle est sans doute voisine de A_{formules} mais est aussi difficile à trouver que ne le serait la masse volumique du câble. On remarque enfin que les écarts entre les différentes aires calculées sont de quelques pourcents. De plus, la valeur $0.75A_{\text{cylindre}}$ semble tout à fait acceptable.

Replacé dans le contexte de la mesure de tension, les incertitudes sur l'aire ont un impact :

- sur la détermination de la raideur du câble,
- sur la détermination de la masse linéique du câble.

Module d'Young du câble. Dans le cas particulier des câbles monotorons multicouches à torsion alternative, il est d'usage de considérer un module d'Young du câble égal à $E(\cos \theta)^3$, où E est le module d'Young de l'acier et θ est l'angle de toronnage supposé constant sur toutes les couches¹. Le cosinus au cube étant issu d'une succession de projection par rapport au fil toronné, le module $E(\cos \theta)^3$ doit être utilisé avec la surface du câble prise comme la somme des surfaces des sections droites de chaque fil. Dans le cas de notre câble test, $\cos(\theta)^2 = (L/l)^3 = 0.90$ ce qui donne un module d'Young de 190175 MPa. Afin de bien comprendre les subtilités que représente la détermination d'une raideur équivalente pour le câble, retenons simplement que le module d'Young du câble n'est pas celui que l'on trouve lors d'un essai de traction en laboratoire car la plupart des bancs d'essai pour les câbles sont horizontaux. Suivant le banc d'essai, si le câble ne repose pas sur des appuis intermédiaires mais est libre d'avoir une petite flèche, le module calculé est un module équivalent et est connu sous le nom de module idéalisé de Ernst. Il permet de remonter à E . Dans la gamme d'utilisation du câble test, les essais en laboratoire ont mené, après des cycles de stabilisation, à un module de Ernst de 168000 MPa. Le câble testé présentait une creusure très faible et le calcul permettant de remonter au module d'Young du câble a abouti à un module d'environ 167000 MPa. Cette valeur réelle est 12% plus petite que la valeur théorique attendue.

2.2 Sources de complexité

Nous avons vu quelques unes des difficultés rencontrées lors de la détermination de la valeur de la section et de la raideur axiale du câble. Sans entrer dans les détails, nous rappelons ici quelques éléments permettant de comprendre que ces difficultés sont d'autant plus grandes lorsque l'on envisage la flexion ou la torsion du câble. La lecture de références telles que [64], [20], [59] et bien d'autres montrent que les câbles possèdent différents modes de fonctionnement suivant leur état de précontrainte et le type et l'amplitude des sollicitations qu'ils subissent. Listons quelques idées à retenir sur le sujet :

- un chargement transversal au câble fera apparaître une force axiale dite secondaire induites par les frottements des fils hélicoïdaux,
- lors de la flexion d'un câble, les différents niveaux de contrainte dans la section du câble induisent des glissements interfilaire qui rendent la section localement gauchée et les contraintes qu'elle subit discontinues,
- la torsion alternée des couches donne naissance à un comportement en torsion non linéaire et non isotrope,
- les fils subissent localement une plastification au niveau des contacts interfilaire,
- la définition d'un équivalent du coefficient de Poisson pour le câble est rendue compliquée par l'effort radial que provoquent les fils extérieurs vers les couches inférieures.

¹Un calcul - peu intuitif - sur un fil hélicoïdal développé explique l'apparition du cosinus au cube. Il peut notamment être trouvé dans [64]

Les phénomènes cités prennent une ampleur d'autant plus grande lorsque l'on s'intéresse aux monotorons multi-couches clos des remontées mécaniques ou aux câbles torsadés. L'étude des câbles à fils parallèles est certes beaucoup plus simple dans le cas d'une sollicitation purement axiale, mais ne s'affranchit pas toujours des problèmes liés aux contacts interfilaire en flexion.

2.3 Conclusions sur les modules d'élasticité

L'étude des modules d'élasticité prenant en compte l'ensemble des considérations ci-dessus dépasse le cadre de la thèse. Nous retiendrons seulement qu'il n'est pas possible de connaître *a priori* et avec précision la section d'un câble, ni la valeur de ses moments quadratiques, ni celles de ses modules d'élasticité. Les approximations dont nous disposons sont d'un ordre de grandeur tout à fait acceptable dans le cadre d'un dimensionnement de structure mais ne sont pas satisfaisantes pour une utilisation dans le cadre d'un diagnostic.

2.4 Masse linéique du câble

D'un point de vue pratique, la masse linéique réelle du câble pourrait être évaluée à partir de l'aire de la section des torons et de la masse volumique des fils. En supposant qu'aucun autre produit que l'acier ne soit présent dans le câble, cette masse linéique est proche de celle de l'acier des fils tréfilés². En réalité, la masse volumique du câble dépend également des produits anticorrosifs présents dans et sur le câble tels que le zinc, les cires pétrolières et la peinture. Retenons que sur un toron multi-couches en place, elle ne peut être connue qu'à 5 à 10% près, ce qui a un impact non négligeable sur l'étude du comportement dynamique du câble.

3 Note sur les modèles

Revenons au problème de la modélisation du câble largement abordé dans la bibliographie du chapitre précédent. On a vu brièvement que l'utilisation d'un modèle de type Cosserat monodimensionnel devait nous amener à considérer le cas d'un cylindre - non nécessairement de révolution - homogène linéaire isotrope accompagné d'une loi qui ne peut être que standard inextensible. La restriction d'inextensibilité est éventuellement à aménager dans le cas des câbles étant donné l'ordre de grandeur de l'effort normal que l'on peut estimer proportionnel à l'élancement : l'analyse asymptotique développée dans [5] ferait alors réapparaître la rigidité axiale qui est présente dans tous les modèles de câbles, chaînette inextensible mise à part. Dans (2.149), il faudrait ajouter le terme :

$$\frac{F_x}{E|S|}x \tag{3.12}$$

L'hypothèse de Navier-Bernoulli n'est quant à elle pas à remettre en cause. Par ailleurs, le cadre de la théorie de Saint-Venant exclut dans tous les cas une connaissance fine de l'état de contraintes à proximité des ancrages.

Dans ce qui a précédé, nous avons insisté sur le fait que les désordres dans les câbles apparaissaient principalement au niveau des points singuliers, du fait notamment des

²De l'ordre de 7810 kg.m⁻³

surpressions localisées dont ils sont le siège. Il est connu depuis longtemps que l'utilisation d'une loi de comportement respectant les liaisons internes de Navier-Bernoulli conduit à une surrestimation des efforts locaux au voisinage d'un encastrement. L'étude [8] publiée par l'auteur de cette thèse montre que dans le cas des câbles, le raffinement consistant à considérer le câble comme une poutre de Timoshenko ne donne pas une idée plus précise de l'état de contrainte du câble au voisinage de son ancrage puisque le choix de la loi de comportement influe sur la configuration globale du câble qui est également liée à l'état de contrainte au niveau des ancrages.

L'identification de la loi de comportement en considérant le câble comme un cylindre hétérogène et/ou anisotrope serait une direction à suivre particulièrement pertinente mais cette solution n'est pas traitée dans notre étude. Nous évoquons plusieurs raisons à cela : la première est que sur sa plus grande partie, et notamment en partie courante, le câble à tout lieu de se comporter, au mieux comme une poutre tendue de Navier-Bernoulli si sa section est importante, sinon comme un câble simple. La seconde concerne l'étude du voisinage des points singuliers pour lesquels il nous faut pouvoir déterminer une loi de comportement dont on espère qu'elle traduira suffisamment bien l'état de contrainte pour qu'une tension soit localement identifiable et suivie au cours du temps. Pour ce faire, le modèle présenté dans le chapitre suivant fait intervenir un tenseur d'élasticité encore moins riche que celui d'une poutre dont il nous serait difficile de connaître tous les modules d'élasticité. En principe, l'identification n'en est que plus simple, néanmoins, elle dépend alors non seulement du matériau et de la géométrie de sa section, mais également de la configuration du câble statique, c'est-à-dire de son état de précontrainte.

4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons reporté l'ensemble des questionnements soulevés par la modélisation des câbles de ponts dans le cadre général du développement d'une méthode de diagnostic. Nous pouvons les résumer en trois points principaux.

Premièrement, la diversité des typologies de câble rencontrés sur ouvrage tend à privilégier une modélisation monodimensionnelle permettant de couvrir un plus large panel de câble qu'une modélisation tridimensionnelle plus fine. Pour les câbles les plus longs, qu'ils soient paraboliques ou non, une modélisation nonlinéaire aux grands déplacements est requise, ce qui oriente les choix de modélisation vers des modèles géométriquement exacts.

Deuxièmement, le retour d'expérience réalisé sur l'ensemble des deux fermes de deux ponts suspendus a permis de mettre l'accent sur deux aspects importants de la recherche de tension dans les câbles. Le premier concerne la difficulté d'obtenir une tension fiable pour les suspentes de pont suspendu, du fait de l'impact des conditions aux limites sur la dynamique des câbles et de l'impossibilité de valider les résultats obtenus par différentes méthodes. Le second concerne l'utilisation de méthodes directes ou semi-directes qui nécessitent la connaissance des paramètres du câbles *a priori*, ce qui est peu souvent le cas sur ouvrage. La méthode à développer doit donc être capable de prendre en compte les effets locaux tout en s'affranchissant de la connaissance *a priori* des caractéristiques physiques du câble. Une modélisation inverse prenant en compte les phénomènes de flexion peut donc être choisie.

Enfin, les limites des modèles monodimensionnels aux voisinages des points singuliers et les considérations faites sur leurs lois de comportements élastiques possibles permettent de donner un cadre d'utilisation de la famille de modèles envisagée pour mener à bien notre travail d'identification de la tension.

En définitive, et au regard des objectifs fixés par la thèse, le développement de modèles 1) monodimensionnels, 2) géométriquement exacts et 3) sous forme variationnelle sera étudié dans les chapitres suivants. Ils permettent de répondre aux contraintes respectives suivantes : 1) la loi de comportement doit être simple à identifier, 2) les grands déplacements doivent être pris en compte et 3) l'identification de la tension doit passer par une méthode inverse.

Chapter 4

Formulation of the cable model

In this chapter, we present the geometrically exact theory of cable with and without flexural stiffness following the path of the Cosserat brothers. Unlike what is commonly done in mechanical modeling, internal, external and inertial forces are all at once defined thanks to the action functional W . When no bending effects are considered, the classical nonlinear model of cable is obtained in a variational formulation. In order to ease the inverse problem presented in the following chapter, a Hu-Washizu kind of formulation is built, giving access to strains and tension as primary variables. Implementation aspects such as convergence and convergence speed are investigated on case studies. The non-linear dynamics of cable without flexural stiffness and the statics of cable with flexural stiffness are also presented.

Contents

1	Cable description(s)	74
2	General formulation of the problem	74
2.1	Kinematics	74
2.2	Action functional, variational formulation	78
2.3	A simpler formulation	80
2.4	Constitutive equations and physical linearization	82
2.5	Variational formulation	84
3	Static configuration of cables	85
3.1	A more efficient implementation: the Hu-Washizu functional for cables	94
3.2	An example with follower loads: the suspension bridge problem	99
3.3	Notes on curvature(s) and kinematic constraints	104
4	Nonlinear dynamics of cables	105
4.1	Case study: drop tests	109
5	Static configuration with flexural stiffness. Simple model .	114
6	Dynamics of a cable with flexural stiffness. Simple model .	117
7	Conclusions	118

1 Cable description(s)

A cable in the Newtonian basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ with origin O , can be described in two configurations: a stress-free configuration $\mathbf{B}^0$ and a current configuration $\check{\mathbf{B}}$ which could be static or not. In configuration $\mathbf{B}^0$ the cable is described by a curve $\mathbf{C}^0$ parameterized by its arc length s . The configuration $\mathbf{B}^0$ can be fully described as $\mathbf{B}^0 := \{\mathbf{r}^0 \text{ and } \{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\}, s \in [0, L]\}$, where L is the length of the cable $\mathbf{C}^0$, $\mathbf{r}^0$ is the position vector of a material point M of $\mathbf{C}^0$ at s and $\{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\}$ is a local frame attached to M . The unit tangential vector to the curve $\mathbf{C}^0$ is denoted $\mathbf{t}^0 = \mathbf{r}_s^0$. Similarly, quantities $\check{\mathbf{C}}$, $\check{s}$, $\check{\mathbf{r}}$, $\{\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3\}$, $\check{L}$, and $\check{\mathbf{t}}$ are defined for the configuration $\check{\mathbf{B}}$. The two configurations $\mathbf{B}^0$ and $\check{\mathbf{B}}$ are illustrated in Figure 4.1.

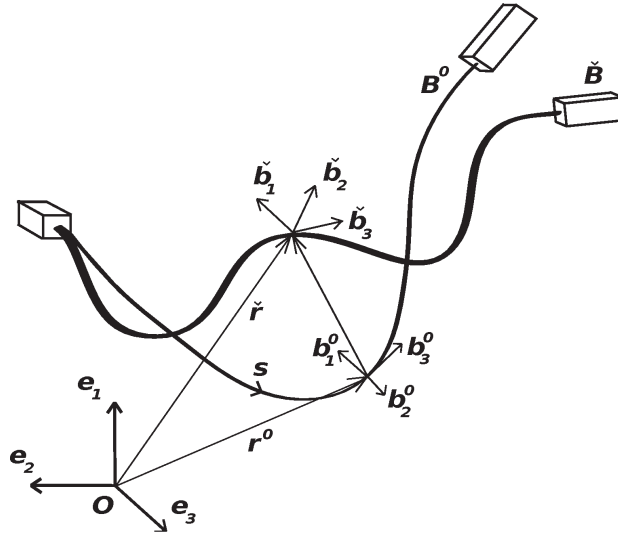


Figure 4.1: Reference configuration $\mathbf{B}^0$ and current configuration $\check{\mathbf{B}}$

For the remainder of the document, notations will be simplified by denoting differentiation with respect to a quantity ξ either by a subscript $(\cdot)_\xi$ or by $\partial_\xi(\cdot)$.

The cable description does not make any reference to the notion of cross-section because it is introduced with the local frames. This is in accordance with the conclusions drawn in the previous section on constitutive laws. This chapter is divided into three sections. The first section presents the most general formulation of the problem. The second one focuses on a special case of the Cosserat theory where the cable is described in a standard way, *ie* without flexural stiffness. The last section is built like an illustrative reminder of the general formulation and describes the cable with flexural stiffness.

2 General formulation of the problem

2.1 Kinematics

Kinematics are introduced for configurations $\mathbf{B}^0$ and $\check{\mathbf{B}}$. The rotation $\mathbf{\Lambda}$ from $\{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\}$ to the corresponding local basis $\{\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3\}$ describes finite rotations from the reference configuration $\mathbf{C}^0$ to the configuration $\check{\mathbf{C}}$. $\mathbf{\Lambda}^0$ and $\check{\mathbf{\Lambda}}$ correspond to the total rotations from the inertial global frame $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ to $\{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\}$ and $\{\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3\}$, respectively.

The following component representations of the position vector are possible:

$$\mathbf{r}^0 = R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2 + R_3 \mathbf{e}_3, \quad (4.1)$$

$$\check{\mathbf{r}} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{r}^0 = R_1^0 \mathbf{b}_1^0 + R_2^0 \mathbf{b}_2^0 + R_3^0 \mathbf{b}_3^0, \quad (4.3)$$

$$\check{\mathbf{r}} = \check{r}_1 \check{\mathbf{b}}_1 + \check{r}_2 \check{\mathbf{b}}_2 + \check{r}_3 \check{\mathbf{b}}_3. \quad (4.4)$$

Simplification can be achieved without loss of generality, by choosing: $\{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{\Lambda} = \check{\mathbf{\Lambda}}$ and $\mathbf{\Lambda}^0 = \mathbf{I}$.

As previously noticed (2.40), the following relationships hold true:

$$\begin{bmatrix} \check{r}_1 \\ \check{r}_2 \\ \check{r}_3 \end{bmatrix} = {}^t\check{\mathbf{\Lambda}} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

together with all possible similar expressions. The space and the time gradients $\mathbf{r}_s^0$, $\check{\mathbf{r}}_s$ and $\check{\mathbf{r}}_t$ can be written respectively:

$$\mathbf{r}_s^0 = R_{1s} \mathbf{e}_1 + R_{2s} \mathbf{e}_2 + R_{3s} \mathbf{e}_3, \quad (4.6)$$

$$\check{\mathbf{r}}_s = r_{1s} \mathbf{e}_1 + r_{2s} \mathbf{e}_2 + r_{3s} \mathbf{e}_3, \quad (4.7)$$

$$\check{\mathbf{r}}_t = r_{1t} \mathbf{e}_1 + r_{2t} \mathbf{e}_2 + r_{3t} \mathbf{e}_3. \quad (4.8)$$

Strain-displacements relationships. The shear strains η_1 and η_2 and the cable stretch ν are defined as the components of $\mathbf{r}_s$ in the local basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Consequently,

$$\check{\mathbf{r}}_s = \eta_1 \check{\mathbf{b}}_1 + \eta_2 \check{\mathbf{b}}_2 + \nu \check{\mathbf{b}}_3. \quad (4.9)$$

Using (4.5), the gradients in the local frame $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ can be expressed. The space gradient is then:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{r}_1 \\ \check{r}_2 \\ \check{r}_3 \end{bmatrix}_s + {}^t\check{\mathbf{\Lambda}} \check{\mathbf{\Lambda}}_s \begin{bmatrix} \check{r}_1 \\ \check{r}_2 \\ \check{r}_3 \end{bmatrix} = {}^t\check{\mathbf{\Lambda}} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_s \quad (4.10)$$

where the formerly introduced skew-symmetric matrix $\hat{\check{\mathbf{\Gamma}}} = {}^t\check{\mathbf{\Lambda}} \check{\mathbf{\Lambda}}_s$ is recognizable. By introducing the pseudo-vector $\check{\mathbf{\Gamma}}$ associated with $\hat{\check{\mathbf{\Gamma}}}$ and the vector $\bar{\check{\mathbf{r}}} = \partial_s \check{r}_1 \check{\mathbf{b}}_1 + \partial_s \check{r}_2 \check{\mathbf{b}}_2 + \partial_s \check{r}_3 \check{\mathbf{b}}_3$, (4.10) can be rephrased as:

$$\check{\mathbf{r}}_s = \bar{\check{\mathbf{r}}} + \check{\mathbf{\Gamma}} \times \check{\mathbf{r}} \quad (4.11)$$

Of course the notation is ambiguous since the expression is only valid when expressing $\check{\mathbf{r}}$ and $\check{\mathbf{r}}_s$ in the local frame $\{\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3\}$. The same relationship can be established for the velocity:

$$\check{\mathbf{r}}_t = v_1 \check{\mathbf{b}}_1 + v_2 \check{\mathbf{b}}_2 + v_3 \check{\mathbf{b}}_3 \quad (4.12)$$

introducing $\hat{\check{\mathbf{\Omega}}} = {}^t\check{\mathbf{\Lambda}} \check{\mathbf{\Lambda}}_t$ and its associated vector $\hat{\check{\mathbf{\Omega}}}$, $\mathbf{r}_t$ becomes:

$$\mathbf{r}_t = \dot{\mathbf{r}} + \hat{\check{\mathbf{\Omega}}} \times \mathbf{r} \quad (4.13)$$

where $\dot{\check{\mathbf{r}}} = \partial_t \check{\mathbf{r}}_1 \check{\mathbf{b}}_1 + \partial_t \check{\mathbf{r}}_2 \check{\mathbf{b}}_2 + \partial_t \check{\mathbf{r}}_3 \check{\mathbf{b}}_3$. Referring to [6], (4.10) yields equations (1) and (4) in their section 6:

$$\eta_1 = \tau_{11}r_{1s} + \tau_{21}r_{2s} + \tau_{31}r_{3s} = \partial_s \check{\mathbf{r}}_1 + \check{\Gamma}_2 \check{\mathbf{r}}_3 - \check{\Gamma}_3 \check{\mathbf{r}}_2 \quad (4.14)$$

$$\eta_2 = \tau_{12}r_{1s} + \tau_{22}r_{2s} + \tau_{32}r_{3s} = \partial_s \check{\mathbf{r}}_2 + \check{\Gamma}_3 \check{\mathbf{r}}_1 - \check{\Gamma}_1 \check{\mathbf{r}}_3 \quad (4.15)$$

$$\nu = \tau_{13}r_{1s} + \tau_{23}r_{2s} + \tau_{33}r_{3s} = \partial_s \check{\mathbf{r}}_3 + \check{\Gamma}_1 \check{\mathbf{r}}_2 - \check{\Gamma}_2 \check{\mathbf{r}}_3. \quad (4.16)$$

Similar relationships can be found for the velocity components using (4.12), (4.8) and (4.13).

Later, the variational formulation of the problem is presented following the path of the Cosserat brothers [6]. As can be seen from equations (4.7), (4.11) and (4.9), vector $\mathbf{r}_s$ has several expressions. Using the conventional denomination, $\mathbf{r}_s$ in (4.7) could be referred to as the spatial description of the strain. (4.9) is also a spatial description of the strain, however, expressed in the local frame.

Strain-displacements infinitesimal variations. Following [6], W denotes the action density by unit reference time and space area $\|\mathbf{r}_s^0 \times \mathbf{r}_t^0\| ds dt = ds dt^1$. W is a function of two infinitely close positions of the cable around its current configuration $\check{\mathbf{B}}$. Its variation is required to vanish at every point of the cable when it is subjected to any arbitrary, infinitesimal rigid displacement ². $\delta \check{\mathbf{r}}$ and the associated instantaneous rotation vector $\delta \check{\Theta}$ describe such virtual displacement. Once again, several component forms are possible for $\delta \check{\mathbf{r}}$, the following two are introduced:

$$\delta \check{\mathbf{r}} = \delta r_1 \mathbf{e}_1 + \delta r_2 \mathbf{e}_2 + \delta r_3 \mathbf{e}_3, \quad (4.17)$$

$$\delta \check{\mathbf{r}} = \delta \alpha_1 \check{\mathbf{b}}_1 + \delta \alpha_2 \check{\mathbf{b}}_2 + \delta \alpha_3 \check{\mathbf{b}}_3 \quad (4.18)$$

When using (4.5) it can be written:

$$\begin{bmatrix} \delta \alpha_1 \\ \delta \alpha_2 \\ \delta \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \check{\mathbf{r}}_1 \\ \delta \check{\mathbf{r}}_2 \\ \delta \check{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix} + \delta \check{\Theta} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{r}}_1 \\ \check{\mathbf{r}}_2 \\ \check{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix} = {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \begin{bmatrix} \delta r_1 \\ \delta r_2 \\ \delta r_3 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Moreover, introducing the following self-explanatory notations:

$$\delta \check{\mathbf{r}}_s = \partial_s \delta r_1 \mathbf{e}_1 + \partial_s \delta r_2 \mathbf{e}_2 + \partial_s \delta r_3 \mathbf{e}_3, \quad (4.20)$$

$$\delta \check{\mathbf{r}}_s = \delta \beta_1 \check{\mathbf{b}}_1 + \delta \beta_2 \check{\mathbf{b}}_2 + \delta \beta_3 \check{\mathbf{b}}_3. \quad (4.21)$$

the following can be written:

$$\begin{bmatrix} \delta \beta_1 \\ \delta \beta_2 \\ \delta \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \eta_1 \\ \delta \eta_2 \\ \delta \nu \end{bmatrix} + \delta \check{\Theta} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \nu \end{bmatrix} = {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \begin{bmatrix} \partial_s \delta r_1 \\ \partial_s \delta r_2 \\ \partial_s \delta r_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

using (4.19) to expand (4.22):

$$\begin{bmatrix} \delta \beta_1 \\ \delta \beta_2 \\ \delta \beta_3 \end{bmatrix} = {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \left(\check{\mathbf{\Lambda}} \left(\begin{bmatrix} \delta \check{\mathbf{r}}_1 \\ \delta \check{\mathbf{r}}_2 \\ \delta \check{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix} + \delta \check{\Theta} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{r}}_1 \\ \check{\mathbf{r}}_2 \\ \check{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix} \right) \right)_s \quad (4.23)$$

¹If an isolated cable traveling at a constant unit speed is considered as a reference state...

²this requirement complies with the principle of objectivity

which is also, according to (4.10):

$$\begin{bmatrix} \delta\beta_1 \\ \delta\beta_2 \\ \delta\beta_3 \end{bmatrix} = {}^t\check{\mathbf{\Lambda}}\delta\left(\check{\mathbf{\Lambda}}\left(\begin{bmatrix} \check{r}_1 \\ \check{r}_2 \\ \check{r}_3 \end{bmatrix}_s + \check{\mathbf{\Gamma}}\begin{bmatrix} \check{r}_1 \\ \check{r}_2 \\ \check{r}_3 \end{bmatrix}\right)\right) \quad (4.24)$$

Rearranging (4.23) and (4.24) leads to the already established relationship (2.39): $\delta\hat{\mathbf{\Gamma}} = \delta\hat{\mathbf{\Theta}}_s + \hat{\mathbf{\Gamma}}\delta\hat{\mathbf{\Theta}} - \delta\hat{\mathbf{\Theta}}\hat{\mathbf{\Gamma}}$. (4.19) and (4.22) can be used to obtain the fundamental variation of the strain-displacement relationships:

$$\begin{bmatrix} \delta\eta_1 \\ \delta\eta_2 \\ \delta\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 \\ \delta\alpha_3 \end{bmatrix}_s + \hat{\mathbf{\Gamma}}\begin{bmatrix} \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 \\ \delta\alpha_3 \end{bmatrix} - \delta\hat{\mathbf{\Theta}}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \nu \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

which is exactly equation (14) section 7 of [6]. Here the formulation appears to be material and expressed in the local body-attached frame and is therefore a point of view not usually used by modern authors. In order to lighten the formulation, the notation conventions are frozen in the following forms:

$$\check{\mathbf{r}} = \check{r}_1\check{\mathbf{b}}_1 + \check{r}_2\check{\mathbf{b}}_2 + \check{r}_3\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.26)$$

$$\check{\mathbf{\Gamma}} = \check{\Gamma}_1\check{\mathbf{b}}_1 + \check{\Gamma}_2\check{\mathbf{b}}_2 + \check{\Gamma}_3\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.27)$$

$$\delta\check{\mathbf{\Gamma}} = \delta\check{\Gamma}_1\check{\mathbf{b}}_1 + \delta\check{\Gamma}_2\check{\mathbf{b}}_2 + \delta\check{\Gamma}_3\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.28)$$

$$\delta\check{\mathbf{\Theta}} = \delta\check{\Theta}_1\check{\mathbf{b}}_1 + \delta\check{\Theta}_2\check{\mathbf{b}}_2 + \delta\check{\Theta}_3\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.29)$$

$$\check{\mathbf{r}}_s = \eta_1\check{\mathbf{b}}_1 + \eta_2\check{\mathbf{b}}_2 + \nu\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.30)$$

$$\delta\check{\mathbf{r}}_s = \delta\eta_1\check{\mathbf{b}}_1 + \delta\eta_2\check{\mathbf{b}}_2 + \delta\nu\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.31)$$

$$\delta\check{\mathbf{r}} = \delta\alpha_1\check{\mathbf{b}}_1 + \delta\alpha_2\check{\mathbf{b}}_2 + \delta\alpha_3\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.32)$$

$$\delta\check{\mathbf{r}} = \partial_s(\delta\alpha_1)\check{\mathbf{b}}_1 + \partial_s(\delta\alpha_2)\check{\mathbf{b}}_2 + \partial_s(\delta\alpha_3)\check{\mathbf{b}}_3. \quad (4.33)$$

(4.25) can thus be re-written:

$$\delta\check{\mathbf{r}}_s = \delta\check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{\Gamma}} \times \delta\check{\mathbf{r}} - \delta\check{\mathbf{\Theta}} \times \check{\mathbf{r}}_s. \quad (4.34)$$

Moreover, (2.39) reads now:

$$\delta\check{\mathbf{\Gamma}} = \delta\check{\mathbf{\Theta}} + \check{\mathbf{\Gamma}} \times \delta\check{\mathbf{\Theta}}. \quad (4.35)$$

Time derivations are obtained following the same procedure, introducing the following quantities:

$$\check{\mathbf{\Omega}} = \check{\Omega}_1\check{\mathbf{b}}_1 + \check{\Omega}_2\check{\mathbf{b}}_2 + \check{\Omega}_3\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.36)$$

$$\delta\check{\mathbf{\Omega}} = \delta\check{\Omega}_1\check{\mathbf{b}}_1 + \delta\check{\Omega}_2\check{\mathbf{b}}_2 + \delta\check{\Omega}_3\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.37)$$

$$\check{\mathbf{r}}_t = v_1\check{\mathbf{b}}_1 + v_2\check{\mathbf{b}}_2 + v_3\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.38)$$

$$\delta\check{\mathbf{r}}_t = \delta v_1\check{\mathbf{b}}_1 + \delta v_2\check{\mathbf{b}}_2 + \delta v_3\check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.39)$$

$$\delta\dot{\check{\mathbf{r}}} = \partial_t(\delta\alpha_1)\check{\mathbf{b}}_1 + \partial_t(\delta\alpha_2)\check{\mathbf{b}}_2 + \partial_t(\delta\alpha_3)\check{\mathbf{b}}_3 \quad (4.40)$$

where $\check{\check{\Omega}}$ is the vector associated with $\check{\check{\Omega}} = {}^t\check{\check{\Lambda}}_t$ and $\delta\check{\check{\Omega}}$ is the vector associated with $\delta\check{\check{\Omega}} = \delta\check{\check{\Theta}}_t + \check{\check{\Omega}}\delta\check{\check{\Theta}} - \delta\check{\check{\Theta}}\check{\check{\Omega}}$. The following expressions are given without proof:

$$\delta\check{\check{\mathbf{r}}}_t = \delta\check{\check{\mathbf{r}}} + \check{\check{\Omega}} \times \delta\check{\check{\mathbf{r}}} - \delta\check{\check{\Theta}} \times \check{\check{\mathbf{r}}}_t, \quad (4.41)$$

$$\delta\check{\check{\Omega}} = \delta\check{\check{\Theta}} + \check{\check{\Omega}} \times \delta\check{\check{\Theta}}, \quad (4.42)$$

Note that for $\delta\check{\check{\Gamma}}$ and $\delta\check{\check{\Omega}}$, in order to have homogeneous notations, the dot and bar notations are used in place of time and space derivations.

2.2 Action functional, variational formulation

It is possible to show ³ that W depends only on $\check{\check{\Gamma}}$, $\check{\check{\Omega}}$, $\check{\check{\mathbf{r}}}_s$ and $\check{\check{\mathbf{r}}}_t$ so that the action functional of the cable is:

$$\mathfrak{A} := \int_{t_1}^{t_2} \int_A^B W(\eta_1, \eta_2, \nu, \check{\check{\Gamma}}_1, \check{\check{\Gamma}}_2, \check{\check{\Gamma}}_3, v_1, v_2, v_3, \check{\check{\Omega}}_1, \check{\check{\Omega}}_2, \check{\check{\Omega}}_3) ds dt. \quad (4.43)$$

In Cosserat's theory, the stationarity of $\mathfrak{A}$ leads to the equations of motion and to the definitions of couples and of internal and external forces. It is:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_A^B W ds dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_A^B \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_s} \cdot \delta\check{\check{\mathbf{r}}}_s + \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Gamma}}} \cdot \delta\check{\check{\Gamma}} + \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_t} \cdot \delta\check{\check{\mathbf{r}}}_t + \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Omega}}} \cdot \delta\check{\check{\Omega}} \right) ds dt = 0. \quad (4.44)$$

Using (4.34), (4.41), (4.35) and (4.42) in (4.44) and focusing on the quantity related to $\delta\check{\check{\Theta}}$, $\delta\check{\check{\Theta}}$, $\delta\check{\check{\mathbf{r}}}$ and $\delta\check{\check{\mathbf{r}}}$ we make use of Green's formulas⁴ to obtain:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_s} \cdot \delta\check{\check{\mathbf{r}}}_s + \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Gamma}}} \cdot \delta\check{\check{\Gamma}} + \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_t} \cdot \delta\check{\check{\mathbf{r}}}_t + \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Omega}}} \cdot \delta\check{\check{\Omega}} \right) ds dt \\ &= \oint_c \left[\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_s} \cdot \delta\check{\check{\mathbf{r}}} + \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Gamma}}} \cdot \delta\check{\check{\Theta}} \right] dt - \left[\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_t} \cdot \delta\check{\check{\mathbf{r}}} + \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Omega}}} \cdot \delta\check{\check{\Theta}} \right] ds \\ & \quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left(\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_1} \right)_s \check{\check{\mathbf{b}}}_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta_2} \right)_s \check{\check{\mathbf{b}}}_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \nu} \right)_s \check{\check{\mathbf{b}}}_3 + \check{\check{\Gamma}} \times \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_s} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{\partial W}{\partial v_1} \right)_t \check{\check{\mathbf{b}}}_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial v_2} \right)_t \check{\check{\mathbf{b}}}_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v_3} \right)_t \check{\check{\mathbf{b}}}_3 + \check{\check{\Omega}} \times \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_t} \right) \cdot \delta\check{\check{\mathbf{r}}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Gamma}}_1} \right)_s \check{\check{\mathbf{b}}}_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Gamma}}_2} \right)_s \check{\check{\mathbf{b}}}_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Gamma}}_3} \right)_s \check{\check{\mathbf{b}}}_3 + \check{\check{\Gamma}} \times \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Gamma}}} \right) + \check{\check{\mathbf{r}}}_s \times \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_s} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Omega}}_1} \right)_t \check{\check{\mathbf{b}}}_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Omega}}_2} \right)_t \check{\check{\mathbf{b}}}_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Omega}}_3} \right)_t \check{\check{\mathbf{b}}}_3 + \check{\check{\Omega}} \times \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\check{\Omega}}} \right) + \check{\check{\mathbf{r}}}_t \times \frac{\partial W}{\partial \check{\check{\mathbf{r}}}_t} \right) \cdot \delta\check{\check{\Theta}} \right] ds dt. \end{aligned} \quad (4.45)$$

where the orientation of the line integral is given in Figure 4.2. In the Cosserat modeling,

³the demonstration invokes the material-frame indifference or principle of objectivity

⁴First an integration by parts and then we use Green's formulas

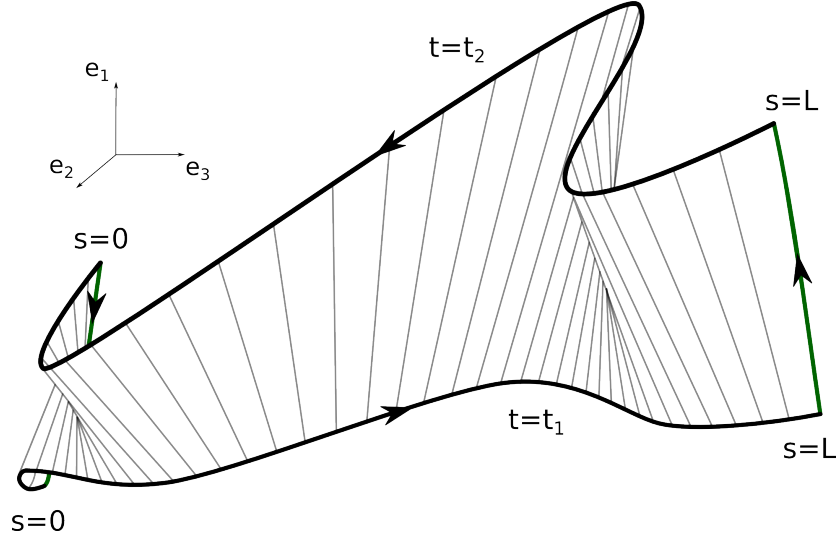


Figure 4.2: Orientation of the closed integration

internal, external and fictitious forces are defined all at once thanks to W :

$$\check{\mathbf{n}} := -\frac{\partial W}{\partial \eta_1} \check{\mathbf{b}}_1 - \frac{\partial W}{\partial \eta_2} \check{\mathbf{b}}_2 - \frac{\partial W}{\partial \nu} \check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.46)$$

$$\check{\mathbf{m}} := -\frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_1} \check{\mathbf{b}}_1 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_2} \check{\mathbf{b}}_2 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_3} \check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.47)$$

$$\check{\mathbf{v}} := -\frac{\partial W}{\partial v_1} \check{\mathbf{b}}_1 - \frac{\partial W}{\partial v_2} \check{\mathbf{b}}_2 - \frac{\partial W}{\partial v_3} \check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.48)$$

$$\check{\mathbf{o}} := -\frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}_1} \check{\mathbf{b}}_1 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}_2} \check{\mathbf{b}}_2 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}_3} \check{\mathbf{b}}_3, \quad (4.49)$$

$$\check{\mathbf{f}} := -\check{\mathbf{n}} - \check{\Gamma} \times \check{\mathbf{n}} - \check{\mathbf{v}} - \check{\Omega} \times \check{\mathbf{v}}, \quad (4.50)$$

$$\check{\mathbf{c}} := -\check{\mathbf{m}} - \check{\Gamma} \times \check{\mathbf{m}} - \check{\mathbf{o}} - \check{\Omega} \times \check{\mathbf{o}} - \check{\mathbf{r}}_s \times \check{\mathbf{n}} - \check{\mathbf{r}}_t \times \check{\mathbf{v}}, \quad (4.51)$$

We make here another reference to the Cosserat modeling: denoting M a point of the deformed cable, we let $\check{\mathbf{n}}$ and $\check{\mathbf{m}}$ be the effort and moment of deformation exerted on M by any portion of the cable included in AM and ending at M and let $\check{\mathbf{f}}$ and $\check{\mathbf{c}}$ be the external force and moment exerted on M . Moreover, we let $\check{\mathbf{v}}$ and $\check{\mathbf{o}}$ be the linear and angular momentum exerted on M .

As it can be seen, definitions (4.50) and (4.51) of external forces $\check{\mathbf{f}}$ and $\check{\mathbf{c}}$, respectively, give directly the strong form of the equations of the cable problem. Thus, for the Cosserat brothers, the action functional is the starting point of the theory from which external, kinetic and internal energies can be defined. With our conventions, the line integral becomes:

$$\oint_c - \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\Theta} \right] dt + \left[\check{\mathbf{v}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{o}} \cdot \delta \check{\Theta} \right] ds = \quad (4.52)$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\Theta} \right]_0^L dt - \int_0^L \left[\check{\mathbf{v}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{o}} \cdot \delta \check{\Theta} \right]_{t_1}^{t_2} ds$$

thus (4.44) can be rewritten as:

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L W \, ds \, dt = & \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Theta}} \right]_0^L dt - \int_0^L \left[\check{\mathbf{v}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{o}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Theta}} \right]_{t_1}^{t_2} ds \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Theta}} \right] ds \, dt
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

2.3 A simpler formulation

The variational formulation can be illustrated using a simple net drawing: we represent the curves of the cable and the trajectories of some of its material points. In Cosserat's work, trajectories and curve lines are the same mathematical objects: dynamics of the elastic rod or statics of the elastic plate are modeled in the same way.

Frame choice. As already mentioned, the problem is described in material point of view but is pushed forward on the actual configuration. This leads to a higher degree of complexity. For instance, using a more standard point of view for the variation of the strain-displacements relationships (4.25) would have led to:

$$\delta \check{\mathbf{r}}_s = {}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\mathbf{\Theta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right). \tag{4.54}$$

provided that:

$$\delta \check{\mathbf{r}}_s = {}^t [\delta \eta_1, \delta \eta_2, \delta \nu] \tag{4.55}$$

$$\check{\mathbf{r}}_s = {}^t [\partial_s r_1, \partial_s r_2, \partial_s r_3] \tag{4.56}$$

$$\delta \check{\mathbf{r}}_s = {}^t [\partial_s \delta r_1, \partial_s \delta r_2, \partial_s \delta r_3] \tag{4.57}$$

$$\delta \check{\mathbf{\Theta}} = \check{\mathbf{\Lambda}} {}^t [\delta \check{\Theta}_1, \delta \check{\Theta}_2, \delta \check{\Theta}_3] \tag{4.58}$$

Clearly, (4.54) is the expression of (4.25) in the global frame. Another example can be given with expressions (4.46-4.47) that correspond to a material description of the stresses via constitutive laws but pushed forward in the current configuration. The corresponding Lagrangian description is:

$$\check{\mathbf{N}} := - \frac{\partial W}{\partial \eta_1} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial W}{\partial \eta_2} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial W}{\partial \nu} \mathbf{e}_3, \tag{4.59}$$

$$\check{\mathbf{M}} := - \frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_1} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_2} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_3} \mathbf{e}_3, \tag{4.60}$$

$$\check{\mathbf{V}} := - \frac{\partial W}{\partial v_1} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial W}{\partial v_2} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial W}{\partial v_3} \mathbf{e}_3, \tag{4.61}$$

$$\check{\mathbf{O}} := - \frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}_1} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}_2} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}_3} \mathbf{e}_3, . \tag{4.62}$$

which is also $\check{\mathbf{N}} = \check{\mathbf{n}}$ and $\check{\mathbf{M}} = \check{\mathbf{m}}$. With the same arguments, we can rewrite (4.35), (4.41) and (4.42):

$$\delta\check{\mathbf{\Gamma}} = {}^t\check{\mathbf{A}}\delta\check{\mathbf{\vartheta}} \quad (4.63)$$

$$\delta\check{\mathbf{r}}_t = {}^t\check{\mathbf{A}} \left(\delta\check{\mathbf{r}}_t - \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_t \right) \quad (4.64)$$

$$\delta\check{\mathbf{\Omega}} = {}^t\check{\mathbf{A}}\delta\dot{\check{\mathbf{\vartheta}}} \quad (4.65)$$

where this time:

$$\delta\check{\mathbf{\Gamma}} = {}^t[\delta\Gamma_1, \delta\Gamma_2, \delta\Gamma_3] \quad (4.66)$$

$$\delta\check{\mathbf{\vartheta}} = {}^t[\partial_s\delta\vartheta_1, \partial_s\delta\vartheta_2, \partial_s\delta\vartheta_3] \quad (4.67)$$

$$\delta\check{\mathbf{r}}_t = {}^t[\delta v_1, \delta v_2, \delta v_3] \quad (4.68)$$

$$\check{\mathbf{r}}_t = {}^t[\partial_t r_1, \partial_t r_2, \partial_t r_3] \quad (4.69)$$

$$\delta\check{\mathbf{r}}_t = {}^t[\partial_t\delta r_1, \partial_t\delta r_2, \partial_t\delta r_3] \quad (4.70)$$

$$\delta\dot{\check{\mathbf{\vartheta}}} = {}^t[\partial_t\delta\vartheta_1, \partial_t\delta\vartheta_2, \partial_t\delta\vartheta_3] \quad (4.71)$$

We can finally write the action variation in two different forms, material and spatial:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\check{\mathbf{N}} \cdot {}^t\check{\mathbf{A}} \left(\delta\check{\mathbf{r}}_s - \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \check{\mathbf{M}} \cdot {}^t\check{\mathbf{A}}\delta\check{\mathbf{\vartheta}} + \check{\mathbf{V}} \cdot {}^t\check{\mathbf{A}} \left(\delta\check{\mathbf{r}}_t - \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_t \right) + \check{\mathbf{O}} \cdot {}^t\check{\mathbf{A}}\delta\dot{\check{\mathbf{\vartheta}}} \right) ds dt = \\ & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot \left(\delta\check{\mathbf{r}}_s - \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta\check{\mathbf{\vartheta}} + \check{\mathbf{v}} \cdot \left(\delta\check{\mathbf{r}}_t - \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_t \right) + \check{\mathbf{o}} \cdot \delta\dot{\check{\mathbf{\vartheta}}} \right) ds dt \end{aligned} \quad (4.72)$$

From now on, we will work exclusively with these two formulations. The use of Green's formula gives:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot \left(\delta\check{\mathbf{r}}_s - \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta\check{\mathbf{\vartheta}} + \check{\mathbf{v}} \cdot \left(\delta\check{\mathbf{r}}_t - \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_t \right) + \check{\mathbf{o}} \cdot \delta\dot{\check{\mathbf{\vartheta}}} \right) ds dt = \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left((\check{\mathbf{v}}_t + \check{\mathbf{n}}_s) \cdot \delta\check{\mathbf{r}} + (\check{\mathbf{m}}_s + \check{\mathbf{r}}_s \times \check{\mathbf{n}} + \check{\mathbf{o}}_t + \check{\mathbf{r}}_t \times \check{\mathbf{v}}) \cdot \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds dt \\ & + \int_0^t \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \right]_0^L dt - \int_0^L \left[\check{\mathbf{v}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{o}} \cdot \delta\dot{\check{\mathbf{\vartheta}}} \right]_{t_1}^{t_2} ds \end{aligned} \quad (4.73)$$

where this time $\delta\check{\mathbf{r}} = {}^t[\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3]$. External forces and moments are defined as previously:

$$\mathbf{f} := -\check{\mathbf{v}}_t - \check{\mathbf{n}}_s, \quad (4.74)$$

$$\mathbf{c} := -\check{\mathbf{m}}_s - \check{\mathbf{r}}_s \times \check{\mathbf{n}} - \check{\mathbf{o}}_t - \check{\mathbf{r}}_t \times \check{\mathbf{v}}. \quad (4.75)$$

which leads to the variational formulation:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot \left(\delta\check{\mathbf{r}}_s - \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta\check{\mathbf{\vartheta}} + \check{\mathbf{v}} \cdot \left(\delta\check{\mathbf{r}}_t - \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_t \right) + \check{\mathbf{o}} \cdot \delta\dot{\check{\mathbf{\vartheta}}} \right) ds dt = \\ & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\mathbf{f} \cdot \delta\check{\mathbf{r}} + \mathbf{c} \cdot \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds dt + \int_0^t \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta\check{\mathbf{\vartheta}} \right]_0^L dt - \int_0^L \left[\check{\mathbf{v}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{o}} \cdot \delta\dot{\check{\mathbf{\vartheta}}} \right]_{t_1}^{t_2} ds. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Since in Cosserat's modeling time and space are considered in the same way, a natural strategy to solve the above variational formulation would be to adopt a space-time finite

element method choosing suitable approximation spaces. This approach is challenging and goes beyond the scope of the present work but a large literature exists on the subject, especially dealing with contact and impact problems⁵. We choose to solve the problem via a standard Newmark implicit scheme that is detailed hereafter. We must first give a new form to (4.76) in order to isolate the kinetic part. We use (4.73) to obtain:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds dt = \quad (4.77) \\ - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\check{\mathbf{v}}_t \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + (\check{\mathbf{o}}_t + \check{\mathbf{r}}_t \times \check{\mathbf{v}}) \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds dt + \int_0^t \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right]_0^L dt. \end{aligned}$$

In (4.77), the integral over time can be omitted requiring the relationship to hold for any t in $[t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds - \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds = \quad (4.78) \\ - \int_0^L \left(\check{\mathbf{v}}_t \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + (\check{\mathbf{o}}_t + \check{\mathbf{r}}_t \times \check{\mathbf{v}}) \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds + \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right]_0^L \quad \forall t \in [t_1, t_2] \end{aligned}$$

In the following section, we introduce the constitutive laws using the material formulations, involving $\check{\mathbf{N}}$, $\check{\mathbf{M}}$, $\check{\mathbf{V}}$ and $\check{\mathbf{O}}$.

2.4 Constitutive equations and physical linearization

We choose the following strain and velocity measures:

$$\check{\Delta} := \frac{1}{2} (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1), \quad (4.79)$$

$$\check{R} := \sqrt{\check{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \check{\boldsymbol{\Gamma}}}, \quad (4.80)$$

$$\check{\Upsilon} := \sqrt{\check{\mathbf{r}}_t \cdot \check{\mathbf{r}}_t}, \quad (4.81)$$

$$\check{\Omega} := \sqrt{\check{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \check{\boldsymbol{\Omega}}}. \quad (4.82)$$

$\check{\Delta}$ is the Green strain measure, $\check{R}$ is a measure of curvature while $\check{\Upsilon}$ and $\check{\Omega}$ are measures of velocity and angular velocity, respectively. We remind the following notations:

$$\check{\mathbf{N}} = \check{Q}_1 \check{\mathbf{e}}_1 + \check{Q}_2 \check{\mathbf{e}}_2 + \check{N} \check{\mathbf{e}}_3, \quad (4.83)$$

$$\check{\mathbf{M}} = \check{M}_1 \check{\mathbf{e}}_1 + \check{M}_2 \check{\mathbf{e}}_2 + \check{M}_3 \check{\mathbf{e}}_3, \quad (4.84)$$

$$\check{\mathbf{V}} = \check{F}_1 \check{\mathbf{e}}_1 + \check{F}_2 \check{\mathbf{e}}_2 + \check{F}_3 \check{\mathbf{e}}_3, \quad (4.85)$$

$$\check{\mathbf{O}} = \check{O}_1 \check{\mathbf{e}}_1 + \check{O}_2 \check{\mathbf{e}}_2 + \check{O}_3 \check{\mathbf{e}}_3. \quad (4.86)$$

⁵[133], [134], [135], [136], to name but a few.

With definitions (4.79)-(4.82), it is possible to write W as a function of $\check{\Delta}$, $\check{R}$, $\check{\Upsilon}$ and $\check{\Omega}$ only. Introducing

$$\check{T} = -\frac{\partial W}{\partial \check{\Delta}}, \quad (4.87)$$

$$\check{M} = -\frac{\partial W}{\partial \check{R}}, \quad (4.88)$$

$$\check{V} = -\frac{\partial W}{\partial \check{\Upsilon}}, \quad (4.89)$$

$$\check{O} = -\frac{\partial W}{\partial \check{\Omega}}. \quad (4.90)$$

we can write:

$$\begin{aligned} \check{Q}_1 &= \check{T}\eta_1, & \check{M}_1 &= \check{M}\check{R}^{-1}\check{\Gamma}_1, & \check{F}_1 &= \check{V}\check{\Upsilon}^{-1}v_1, & \check{O}_1 &= \check{O}\check{\Omega}^{-1}\check{\Omega}_1, \\ \check{Q}_2 &= \check{T}\eta_2, & \check{M}_2 &= \check{M}\check{R}^{-1}\check{\Gamma}_2, & \check{F}_2 &= \check{V}\check{\Upsilon}^{-1}v_2, & \check{O}_2 &= \check{O}\check{\Omega}^{-1}\check{\Omega}_2, \\ \check{N} &= \check{T}\nu, & \check{M}_3 &= \check{M}\check{R}^{-1}\check{\Gamma}_3, & \check{F}_3 &= \check{V}\check{\Upsilon}^{-1}v_3, & \check{O}_3 &= \check{O}\check{\Omega}^{-1}\check{\Omega}_3. \end{aligned}$$

which are the components of the following constitutive equations:

$$\check{\mathbf{N}} = \check{T} \check{\mathbf{r}}_s, \quad (4.91)$$

$$\check{\mathbf{M}} = \check{M} \check{R}^{-1} \check{\mathbf{\Gamma}}, \quad (4.92)$$

$$\check{\mathbf{V}} = \check{V} \check{\Upsilon}^{-1} \check{\mathbf{r}}_t, \quad (4.93)$$

$$\check{\mathbf{O}} = \check{O} \check{\Omega}^{-1} \check{\mathbf{\Omega}}. \quad (4.94)$$

with

$$\check{\mathbf{r}}_s = {}^t[\eta_1, \eta_2, \nu] \quad (4.95)$$

$$\check{\mathbf{\Gamma}} = {}^t[\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3] \quad (4.96)$$

$$\check{\mathbf{r}}_t = {}^t[v_1, v_2, v_3] \quad (4.97)$$

$$\check{\mathbf{\Omega}} = {}^t[\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]. \quad (4.98)$$

For $t = t_1$ we suppose that the cable is in a known configuration, *i.e.* $\check{\mathbf{r}}(s, t_1)$ and its derivatives are known. Without loss of generality, we let this generic known configuration be the reference configuration $\mathbf{B}^0$. We assume that for $t \in [t_1, t_2]$, strains and velocities are small enough⁶ to allow a physical linearization around the static configuration. We let W_1 and W_2 be the first- and second-order development of W so that its linearization truncated at second-order is $W = W_0 + W_1 + W_2$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\Delta}} \right)_{\Delta^0, R^0, V^0, \Omega^0} (\check{\Delta} - \Delta^0) + \dots \\ W_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \check{\Delta}^2} \right)_{\Delta^0, R^0, V^0, \Omega^0} (\check{\Delta} - \Delta^0)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \check{\Delta} \partial \check{R}} \right)_{\Delta^0, R^0, V^0, \Omega^0} (\check{\Delta} - \Delta^0) (\check{R} - R^0) + \dots \end{aligned}$$

⁶For instance $\|\check{\mathbf{r}}_s\| \ll 1$ and $\|\check{\mathbf{r}}_t\| \ll c$

We can formally name $-\kappa_{ij}$ with $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ and $j \geq i$ the ten second derivatives in W_2 and use them to express T , M , V and O :

$$\check{T} = T^0 + \kappa_{11}(\check{\Delta} - \Delta^0) + \frac{1}{2}\kappa_{12}(\check{R} - R^0) + \frac{1}{2}\kappa_{13}(\check{\Upsilon} - \Upsilon^0) + \frac{1}{2}\kappa_{14}(\check{\Omega} - \Omega^0), \quad (4.99)$$

$$\check{M} = M^0 + \frac{1}{2}\kappa_{12}(\check{\Delta} - \Delta^0) + \kappa_{22}(\check{R} - R^0) + \frac{1}{2}\kappa_{23}(\check{\Upsilon} - \Upsilon^0) + \frac{1}{2}\kappa_{24}(\check{\Omega} - \Omega^0), \quad (4.100)$$

$$\check{V} = V^0 + \frac{1}{2}\kappa_{13}(\check{\Delta} - \Delta^0) + \frac{1}{2}\kappa_{23}(\check{R} - R^0) + \kappa_{33}(\check{\Upsilon} - \Upsilon^0) + \frac{1}{2}\kappa_{34}(\check{\Omega} - \Omega^0), \quad (4.101)$$

$$\check{O} = O^0 + \frac{1}{2}\kappa_{14}(\check{\Delta} - \Delta^0) + \frac{1}{2}\kappa_{24}(\check{R} - R^0) + \frac{1}{2}\kappa_{34}(\check{\Upsilon} - \Upsilon^0) + \kappa_{44}(\check{\Omega} - \Omega^0). \quad (4.102)$$

In their work, Eugène and François Cosserat did not make the constitutive laws explicit but showed how it is possible to recover the mass in the inertial term as it is usually done for the elastic moduli in Hooke's elastic laws. The above expressions are similar to those given by the two brothers and only differ because of the special choice of the strain and of the velocity measure we made.

It is easy to have an idea of the various coefficients κ_{ij} for simple load cases. Most of the time, we will let $\kappa_{ij} = 0$ for $i \neq j$. Clearly, κ_{33} is the mass per unit length of the cable, and κ_{44} could be a quantity related to $\mathbf{J}^0$. For κ_{11} and κ_{22} , depending on the static configuration and the external loads, their values are likely to be around EA or GA and EI or GJ , respectively. A great number of state of the art studies use simple hyper-elastic constitutive laws, *ie* $\check{T} = \check{T}(\check{\Delta}, \check{R})$, $\check{M} = \check{M}(\check{\Delta}, \check{R})$.

In the following, we let $\kappa_{ij} = 0$ for $i \neq j$ except for κ_{12} , $\kappa_{33} = \rho A^0$ and $\kappa_{44} = \mathbf{J}^0$. Furthermore, we assume that $\Delta^0 = 0 = R^0$, $\Upsilon^0 = 0 = \Omega^0$, $T^0 = 0 = M^0$ and $V^0 = 0 = O^0$. As a consequence:

$$\check{\mathbf{n}} = \check{T} \check{\mathbf{r}}_s, \quad (4.103)$$

$$\check{\mathbf{m}} = \mathbf{\Lambda} \check{M} \check{R}^{-1} \check{\mathbf{\Gamma}}, \quad (4.104)$$

$$\check{\mathbf{v}} = \rho A^0 \check{\mathbf{r}}_t, \quad (4.105)$$

$$\check{\mathbf{o}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{J}^0 \check{\mathbf{\Omega}}. \quad (4.106)$$

where $\check{T}$ and $\check{M}$ have to be expressed.

2.5 Variational formulation

We rewrite equation (4.78) using the constitutive equations (4.103)-(4.106):

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \mathbf{\Lambda} \check{M} \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds - \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds = \\ & - \int_0^L \left(\rho A^0 \check{\mathbf{r}}_{tt} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \left(\mathbf{\Lambda} \mathbf{J}^0 \check{\mathbf{\Omega}} \right)_t \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds + \left[\check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \mathbf{\Lambda} \check{M} \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right]_0^L \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (4.107)$$

With the material angular acceleration $\mathbf{A}$ already defined in (2.82):

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{\Omega}}_t = {}^t\mathbf{\Lambda}_t \mathbf{\Lambda}_t + {}^t\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}_{tt} \quad (4.108)$$

we recover a familiar form for the kinetic part of the variational formulation:

$$\delta k_{in} = - \int_0^{L^0} \left(\rho A^0 \check{\mathbf{r}}_{tt} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \mathbf{\Lambda} (\mathbf{J}^0 \mathbf{A} + \hat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{J}^0 \mathbf{\Omega}) \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds \quad (4.109)$$

Internal and external virtual work are also defined as:

$$\delta W_{in} = \int_0^L \left(\check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \check{\mathbf{A}} \check{M} \check{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds, \quad (4.110)$$

$$\delta W_{ext} = - \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} - \left[\check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{A}} \check{M} \check{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right]_0^L \right) ds \quad (4.111)$$

leading to:

$$\delta W_{in} + \delta W_{ext} + \delta k_{in} = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.112)$$

The general elasto-dynamic problem can be stated as follows:

Given $\check{\mathbf{r}}(s, 0)$ and $\check{\boldsymbol{\Gamma}}(s, 0)$, find $\check{\mathbf{r}}$ and $\check{\boldsymbol{\vartheta}}$ in appropriate displacement and rotation fields such that for all $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \check{\mathbf{A}} \check{M} \check{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds - \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds = \\ & - \int_0^L \left(\rho A^0 \check{\mathbf{r}}_{tt} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{A}} (\check{\mathbf{J}}^0 \check{\mathbf{A}} + \check{\hat{\Omega}} \check{\mathbf{J}}^0 \check{\Omega}) \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds + \left[\check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{A}} \check{M} \check{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.113)$$

for all $\delta \check{\mathbf{r}}$ and $\delta \check{\boldsymbol{\vartheta}}$ in appropriate displacement and small rotation fields.

3 Static configuration of cables

Most of the time, in its static configuration, the cable is either subjected to an uniformly distributed external force along its baseline (such as its own weight) or along its span, e.g. for the main cables of a suspension bridge. In these cases, because close-formed solutions exist, the static configuration is described as a catenary or as a parabola. It supposes strong mechanical hypothesis: hinged-hinged boundary conditions and six kinematical constraints ($\check{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathbf{o}$ and $\check{\mathbf{r}}_s = \check{\mathbf{r}}_s$). For engineering purposes, the static configuration can also consider an elongation reducing the number of kinematic constraints from six to five ($\check{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathbf{o}$ and $\check{\mathbf{r}}_s = d\check{s}/ds \check{\mathbf{r}}_s$). It allows to account for the total elongation of the cable without drastically increasing the complexity of the problem.

In the present work, $\check{\mathbf{B}}$ is an arbitrary configuration. More precisely, external loads can be various and the boundaries might be clamped, hinged or even more complex. Nevertheless, most of the studied initial static configurations are obtained perturbing the above mentioned catenary solution. In our modeling procedure, we first study the catenary configuration.

The theory describing the cable is said *special* when a specific set of hypothesis is made on W and its dependency on the strains⁷. In the catenary case, the cable cannot suffer bending since it has no flexural stiffness. In other words, it is supposed that W does not depend on Γ_1 , Γ_2 and Γ_3 . In the literature, the catenary can either be elastic or inelastic. In both cases, a closed-form solution exists and can easily be found in every mechanical engineering book. Within the frame of the theory of the Cosserat brothers, we will only address the elastic catenary case⁸. The inelastic case can be seen as a constrained version of the elastic case by adding a kinematic constraint⁹. In order to simplify - greatly - our problem, we make the following assumptions:

⁷See [6], paragraph 15.

⁸See [6] for the original version of the theory

⁹which is $\|\check{\mathbf{r}}_s\| = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \nu^2} = 1$

- $\mathbf{e}_1$ points upward,
- Since W does not depend on $\check{\mathbf{\Gamma}}$, the triads $(\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3)$ are not determined by the physical solution of our problem and we can freely choose their orientations. We let $(\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3)$ be equal to $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ for all $s \in [0, L]$.

It is clear that we now have $\check{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{o}$. In the considered configuration, the action functional $\mathfrak{A}$ is therefore $\int_A^B W \, ds = \int_A^B W(\eta_1, \eta_2, \nu) ds$. The stationnarity of $\mathfrak{A}$ is found using (4.78), keeping only non-zero terms:

$$\int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot (\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s) \right) ds - \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds = [\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}]_0^L \quad (4.114)$$

It is straightforward to obtain the variational formulation of our problem:

Find $\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}$ such as for all $\delta \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0$ (and $\delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \in \mathbb{W}_0$) :

$$\int_A^B [\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s] \, ds - \int_A^B \left[\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + (\check{\mathbf{c}} + \check{\mathbf{r}}_s \times \check{\mathbf{n}}) \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right] \, ds - [\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}]_A^B = 0. \quad (4.115)$$

where $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}_0$ and $\mathbb{W}_0$ are appropriate fields. Strong form of the equations are found integrating by part $\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s$:

$$\check{\mathbf{n}}_s + \check{\mathbf{f}} = \mathbf{o} \quad (4.116)$$

$$\check{\mathbf{r}}_s \times \check{\mathbf{n}} + \check{\mathbf{c}} = \mathbf{o}. \quad (4.117)$$

We will of course have $\check{\mathbf{c}} = \mathbf{o}$ and $\check{\mathbf{r}}_s \times \check{\mathbf{n}} = \mathbf{o}$, which is a fundamental relationship for the cable design and gives a tension necessarily tangent to its curve.

To solve our problem, we need to express the external forces, the boundary conditions and the constitutive equations.

Constitutive equations. To obtain the constitutive equations, we let $\check{\mathbf{n}} = \check{Q}_1 \check{\mathbf{b}}_1 + \check{Q}_2 \check{\mathbf{b}}_2 + \check{Q}_3 \check{\mathbf{b}}_3 = \check{Q}_1 \mathbf{e}_1 + \check{Q}_2 \mathbf{e}_2 + \check{N} \mathbf{e}_3$ in our case. It could be possible to write directly the second-order development of $W(\eta_1, \eta_2, \nu)$ around the stress-free configuration but since we made the choice of arbitrarily oriented local triads, it will be difficult to provide comprehensive meanings to the obtained elastic moduli within Hooke's theory of elasticity. A way to overcome this problem is to introduce a measure of the local elongation along the cable to express our constitutive equations. We choose a measure of the following form:

$$\check{\Delta} := \frac{1}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \nu^2 - 1) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d\check{s}}{ds} \right)^2 - 1 \right) \quad (4.118)$$

This choice leads to the Green strain measure in accordance with several authors [112]. Other measures can be explored in a similar way. According to our notations, we have $\check{\Delta} = 0.5 (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1)$ but in the special case of the catenary, we also have $\check{\Delta} = 0.5 (\check{\mathbf{r}} \cdot \check{\mathbf{r}} - 1)$. From these definitions, we can find the following relations:

$$\check{Q}_1 = -\frac{\partial W}{\partial \eta_1} = -\frac{\partial W}{\partial \check{\Delta}} \frac{\partial \check{\Delta}}{\partial \eta_1} = -\frac{\partial W}{\partial \check{\Delta}} \eta_1 = \check{T} \eta_1 \quad (4.119)$$

$$\check{Q}_2 = \check{T} \eta_2 \quad (4.120)$$

$$\check{Q}_3 = \check{T} \nu. \quad (4.121)$$

here $\check{T}$ is a function defined by $\check{T} := -\frac{\partial W}{\partial \check{\Delta}}$. Equations (4.119)-(4.121) were useful to find that W is actually a function of the strains only through $\check{\Delta}$, *i.e.* $W = W(\check{\Delta})$. The two first terms in the development of W around the stress-free configuration are zeros, as a consequence we have:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \check{\Delta}^2} \right)_{\Delta=0} \check{\Delta}^2 \quad (4.122)$$

and thus

$$\check{T} = - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \check{\Delta}^2} \right)_{\Delta=0} \check{\Delta} \quad (4.123)$$

The locally constant elastic modulus $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \check{\Delta}^2} \right)_{\Delta=0}$ has to be experimentally assessed. We can recover the classical constitutive equations starting with the definition of the tension of the cable: $\check{N} = \|\check{\mathbf{n}}\|$. A simple and well-known constitutive equation for $\check{N}$ is $\check{N} = EA(d\check{s}/ds - 1)$ where the mechanical characteristics of our cable are introduced, namely, its Young modulus E and its cross-sectional area A . Since $\check{\mathbf{r}}_s \times \check{\mathbf{n}} = \mathbf{o}^{10}$ and $\check{\mathbf{n}} = \check{T}\check{\mathbf{r}}_s$ we have $\check{N} = \check{T} d\check{s}/ds = EA(d\check{s}/ds - 1)$ from which we can obtain:

$$\check{T} = \frac{\check{N}EA}{\check{N} + EA} \quad (4.124)$$

and also¹¹:

$$- \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \check{\Delta}^2} \right)_{\Delta=0} \approx EA. \quad (4.125)$$

Finally, the constitutive equations are recovered

$$\check{Q}_1 = \check{T}\eta_1. \quad (4.126)$$

$$\check{Q}_2 = \check{T}\eta_2, \quad (4.127)$$

$$\check{Q}_3 = \check{T}\nu. \quad (4.128)$$

where $\check{T} = EA\check{\Delta}$

External forces and boundary conditions. External forces and boundary conditions are defined by the following hypothesis:

- the only external force applied on the cable is its own weight ¹² $\check{\mathbf{f}}(s) = -\rho A g \mathbf{e}_1$ with $s \in [0, L]$,
- Point A is in $(O, 0, 0, 0)$ and point B is in (O, L_1, L_2, L_3) . It gives $\check{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{o}$ and $\check{\mathbf{r}}(L) = L_1 \mathbf{e}_1 + L_2 \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3$.
- $L^2 \geq L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$.

Choosing $\check{\mathbf{r}}(L) = L_1 \mathbf{e}_1 + L_2 \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3$ does not really simplify our problem but leads to a general formulation. The additional condition $L^2 \geq L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ is only required in the inelastic catenary case.

¹⁰and also $\check{\mathbf{c}} = \mathbf{o}$.

¹¹Set $d\check{s} = (1 + \epsilon)ds$ with $\|\epsilon\| \ll 1$ to find the result

¹²Thus $\check{\mathbf{c}} = \mathbf{o}$

Minimization problem. As expected, $\delta\check{\boldsymbol{\vartheta}}$ is not required to solve the catenary problem which can now be completely written. We define a space of smooth enough displacement fields $\mathbb{H}$ over $[0, L]$ and the two spaces $\mathbb{V} = \{\check{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{H} \mid \check{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{o} \text{ and } \check{\boldsymbol{r}}(L) = L_1\boldsymbol{e}_1 + L_2\boldsymbol{e}_2 + L_3\boldsymbol{e}_3\}$ and $\mathbb{V}_0 = \{\delta\check{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{H} \mid \delta\check{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{o} \text{ and } \delta\check{\boldsymbol{r}}(L) = \boldsymbol{o}\}$. The problem is formulated as follows:

$$\begin{aligned} &\text{Find } \check{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{V} \text{ such that for every } \delta\check{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{V}_0 \\ &\int_A^B [\check{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\check{\boldsymbol{r}}_s] \, ds - \int_A^B [\check{\boldsymbol{f}} \cdot \delta\check{\boldsymbol{r}}] \, ds - [\check{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\check{\boldsymbol{r}}]_A^B = 0, \\ &\check{\boldsymbol{n}} = \check{T} \, \check{\boldsymbol{r}} \text{ for } s \in [0, L]. \end{aligned}$$

This problem is a nonlinear problem of the form¹³:

$$\text{Find } \check{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{V} \text{ minimizing } J(\check{\boldsymbol{r}}) = \int_A^B \left(\frac{1}{2} F(|\check{\boldsymbol{r}}_s|^2) - \check{\boldsymbol{r}} \cdot \check{\boldsymbol{f}} \right) ds \quad (4.129)$$

where F and its derivatives are:

$$F(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2, \quad F_x(x) = \frac{1}{2}(x-1), \quad F_{xx}(x) = \frac{1}{2}. \quad (4.130)$$

More precisely, our problem is the weak formulation of the problem:

$$\text{Find } \check{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{V} \text{ such as } \delta J(\check{\boldsymbol{r}}) = 0, \, \forall \delta\check{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{V}_0 \quad (4.131)$$

where as previously, the $\delta(\cdot)$ operator is a Gâteaux derivative in a given direction $\delta\check{\boldsymbol{r}}$ defined by:

$$\delta J(\check{\boldsymbol{r}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} J(\check{\boldsymbol{r}} + \epsilon \delta\check{\boldsymbol{r}}). \quad (4.132)$$

for $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ and $\delta\check{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{V}_0$.

Non-dimensional formulation. Table 4.1 gives an identification of the variables of this problem.

Variable	Name	Units
$\check{\boldsymbol{r}}$	Position vector	m
L	Initial cable length	m
ρ	Cable mass density	kg.m ⁻³
E	Young modulus of the cable	Pa
A	Cross section area of the cable	m ²
g	Value of the acceleration of gravity	m.s ⁻²

Table 4.1: Variables of the elastic catenary problem

A non-dimensional form of the problem is obtained introducing non-dimensional starred

¹³A 2D example of the same form is treated in the FEniCS manual [137]. We will follow exactly the same solving procedure.

quantities and spaces:

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{n}} &= EA\check{\mathbf{n}}^*, & \check{\mathbf{r}} &= L\check{\mathbf{r}}^*, & s &= Ls^*, & \check{\mathbf{f}} &= \frac{EA}{L}\check{\mathbf{f}}^*, \\ \mathbb{H}^* & \text{ a smooth enough non-dimensional displacement field over } [0, 1], \\ \mathbb{V}^* &= \{\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{H}^* \mid \check{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{o} \text{ and } \check{\mathbf{r}}(1) = \frac{1}{L}(L_1\mathbf{e}_1 + L_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3)\}, \\ \mathbb{V}_0^* &= \{\delta\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{H}^* \mid \delta\check{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{o} \text{ and } \delta\check{\mathbf{r}}(1) = \mathbf{o}\}.\end{aligned}$$

We immediately drop the star notation and we rewrite the problem in the following non-dimensional form:

$$\begin{aligned}\text{Find } \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V} \text{ such as for every } \delta\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0 \\ \int_A^B [\check{\mathbf{n}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}}_s] \, ds - \int_A^B [\check{\mathbf{f}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}}] \, ds = 0, \\ \check{\mathbf{n}} = \check{T} \check{\mathbf{r}}_s\end{aligned}$$

The nonlinearity of the problem is in the $|\check{\mathbf{r}}_s|^2$ term which comes from the strain definition. Dirichlet boundary conditions were taken into account in the unknown functional spaces $\mathbb{V}$ and $\mathbb{V}_0$. Accordingly, no additional boundary term appears in the formulation. In the following, we will need the second variation of J for the Newton-Rapshon iterative procedure. We will denote by $\mathfrak{d}$ this second variation to remind the incremental nature of the Newton algorithm but it is clear that $\mathfrak{d}$ and δ rely on the same kind of directional derivation operation. We have:

$$\delta\check{\mathbf{r}}_s = \partial_s(\delta r_1)\check{\mathbf{e}}_1 + \partial_s(\delta r_2)\check{\mathbf{e}}_2 + \partial_s(\delta r_3)\check{\mathbf{e}}_3, \quad (4.133)$$

$$\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s = \partial_s(\mathfrak{d}r_1)\check{\mathbf{e}}_1 + \partial_s(\mathfrak{d}r_2)\check{\mathbf{e}}_2 + \partial_s(\mathfrak{d}r_3)\check{\mathbf{e}}_3, \quad (4.134)$$

$$\mathfrak{d}\check{T} = \check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s, \quad (4.135)$$

$$\mathfrak{d}\check{\mathbf{n}} = (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s)\check{\mathbf{r}}_s + \check{T} \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s. \quad (4.136)$$

Linearization, N-R method. This problem can be solved using the Newton-Raphson iterative method according to the well-known formula: $\check{\mathbf{r}}_{k+1} = \check{\mathbf{r}}_k - (\nabla^2 J(\check{\mathbf{r}}_k))^{-1} \nabla J(\check{\mathbf{r}}_k)$. Here $\nabla J(\check{\mathbf{r}})$ represents the gradient of $J(\check{\mathbf{r}})$ with respect to a given base of $\mathbb{V}_0$ and $(\nabla^2 J(\check{\mathbf{r}}))^{-1}$ is the inverse of its hessian matrix according to the same base. In other words, the components of $\nabla J(\check{\mathbf{r}})$ are the $\delta J(\check{\mathbf{r}})$ obtained when $\delta\check{\mathbf{r}}$ spans a given base of $\mathbb{V}_0$. To evaluate the gradient and the hessian of $J(\check{\mathbf{r}})$, we use a finite element discretization method. Such method allows us to seek an approximated solution in a subspace of $\mathbb{V}_0$ having a finite dimension. In this subspace, numerical approximations of

$$\delta J(\check{\mathbf{r}}) = \int_A^B [\check{\mathbf{n}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}}_s] \, ds - \int_A^B [\check{\mathbf{f}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}}] \, ds, \quad \text{for } \delta\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0 \quad (4.137)$$

and

$$\mathfrak{d}\delta J(\check{\mathbf{r}}) = \int_A^B [(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s)(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta\check{\mathbf{r}}_s) + \check{T} \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta\check{\mathbf{r}}_s] \, ds, \quad \text{for } \delta\check{\mathbf{r}} \text{ and } \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0 \quad (4.138)$$

are easy to evaluate. If in (4.137) and in (4.138) we choose $\delta\check{\mathbf{r}}$ and $\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}$ spanning a finite base of the subspace, we evaluate an approximation of all the components of $\nabla J(\check{\mathbf{r}})$ and

$\nabla^2 J(\check{\mathbf{r}})$, respectively. Moreover for a given $\check{\mathbf{r}}$, $\check{T}$ and $\check{\mathbf{f}}$ are fully known, as a consequence, for a specific $\check{\mathbf{r}}$, we can define the following linear and bilinear forms:

$$l(\check{\mathbf{r}}, \check{\mathbf{f}}; \mathbf{v}) = - \int_A^B [\check{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_s] ds + \int_A^B [\check{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v}] ds, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_0, \quad (4.139)$$

$$a(\check{\mathbf{r}}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_A^B \left[\check{T} \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{v}_s + (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{u}_s) (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{v}_s) \right] ds, \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{V}_0^2. \quad (4.140)$$

With the introduced forms, $\delta J(\check{\mathbf{r}}) = -l(\check{\mathbf{r}}, \check{\mathbf{f}}; \delta \check{\mathbf{r}}_1)$ and $\mathfrak{d}\delta J(\check{\mathbf{r}}) = a(\check{\mathbf{r}}; \delta \check{\mathbf{r}}_1, \delta \check{\mathbf{r}}_2)$. It is now simple to express the Newton-Raphson iteration $\check{\mathbf{r}}_{k+1} = \check{\mathbf{r}}_k + \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}$ where $\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}$ is the solution of the problem:

$$\begin{aligned} &\text{Find } \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0 \text{ such as:} \\ &a(\check{\mathbf{r}}_k; \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}, \mathbf{v}) = l(\check{\mathbf{r}}_k, \check{\mathbf{f}}; \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_0 \end{aligned} \quad (4.141)$$

The Newton algorithm is implemented as:

- **Step 0:** Initialization:
 - Choose $\check{\mathbf{r}}_0$ complying with the boundary conditions
 - Set reasonable $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ and $N \in \mathbb{N}$
- **Step k:** While $k \leq N$, solve: Find $\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0$ such as $a(\check{\mathbf{r}}_k; \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}, \mathbf{v}) = l(\check{\mathbf{r}}_k, \check{\mathbf{f}}; \mathbf{v})$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_0$
 - If $\|\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_k\| \leq \epsilon$ then break
 - Else $\check{\mathbf{r}}_{k+1} = \check{\mathbf{r}}_k + \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}$
- **End:** $\check{\mathbf{r}} = \check{\mathbf{r}}_k + \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}$

In our study, we let $\check{\mathbf{r}}_0$ be a simple function in $\mathbb{V}$ and thus providing the Dirichlet boundary conditions. It also allows a simple introduction of load parameters for a step by step solving procedure. Of course, due to the highly non-linearity of specific problems, $\check{\mathbf{r}}_0$ can not be chosen completely randomly.

Implementation in FEniCS and validation. The variational problem is solved using FEniCS. As already mentioned, an explicit solution exists for both the inelastic and the elastic catenary problems, the latter is used as a reference solution for our implementation validation. The exact solution was obtained with a Maxima routine. Both routines can be found in the Annexes chapter.

Space discretization. We let $\mathbb{V}$ be a space of smooth enough displacement field, $\mathbb{V}_h$ a finite-dimensional subspace of $\mathbb{V}$, P a projection from $\mathbb{V}$ onto $\mathbb{V}_h$ and we denote by a left superscript h the the projection ${}^h\mathbf{y} := P(\mathbf{y})$ of a function $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$. We call $\{\{{}^i\psi\check{\mathbf{b}}_1\}_{i=1}^I, \{{}^i\psi\check{\mathbf{b}}_2\}_{i=1}^I, \{{}^i\psi\check{\mathbf{b}}_3\}_{i=1}^I\}$ a basis of $\mathbb{V}_h$ where $I^3 = \dim \mathbb{V}_h$ so that every function ${}^h\mathbf{y} \in \mathbb{V}_h$ can be expressed as ${}^h\mathbf{y} = {}^h\alpha_1\check{\mathbf{b}}_1 + {}^h\alpha_2\check{\mathbf{b}}_2 + {}^h\alpha_3\check{\mathbf{b}}_3$ where, using the Einstein summation convention only for $i = 1..I$, the components of ${}^h\mathbf{y}$ are ${}^h\alpha_1 = {}^i\alpha_1 {}^i\psi$, ${}^h\alpha_2 = {}^i\alpha_2 {}^i\psi$ and ${}^h\alpha_3 = {}^i\alpha_3 {}^i\psi$.

Without entering into definition details, we keep the previously used notation convention and we let $\mathbb{V}$ be a space of smooth enough unknown displacement field complying

with the problem boundary conditions and $\mathbb{V}_0$ the corresponding space of virtual displacement field.

Introducing the approximations ${}^h\delta\check{\mathbf{r}}$ and ${}^h\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}$ of $\delta\check{\mathbf{r}}$ and $\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}$ respectively, (4.137) and (4.138) become:

$$\delta J({}^h\check{\mathbf{r}}) = -l({}^h\check{\mathbf{r}}, {}^h\check{\mathbf{f}}; {}^h\delta\check{\mathbf{r}}) \quad \text{for } {}^h\delta\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_{h0}. \quad (4.142)$$

and

$$\mathfrak{d}\delta J({}^h\check{\mathbf{r}}) = a({}^h\check{\mathbf{r}}; {}^h\delta\check{\mathbf{r}}, {}^h\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}) \quad \text{for } {}^h\delta\check{\mathbf{r}} \text{ and } {}^h\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_{h0}. \quad (4.143)$$

In the following, we drop the h superscript to lighten the notations¹⁴. The approximation of problem (4.131) is now:

$$\text{Find } \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_h \text{ such as } l(\check{\mathbf{r}}, \check{\mathbf{f}}; \delta\check{\mathbf{r}}) = 0, \quad \forall \delta\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_{h0} \quad (4.144)$$

If $\{\{{}^i\psi\check{\mathbf{b}}_1\}_{i=1}^I, \{{}^i\psi\check{\mathbf{b}}_2\}_{i=1}^I, \{{}^i\psi\check{\mathbf{b}}_3\}_{i=1}^I\}$ is a basis of $\mathbb{V}_{h0}$, choosing $\delta\check{\mathbf{r}} = {}^i\psi\check{\mathbf{b}}_k$ with $i = 1..I$ and $k = 1..3$, leads to the following expression of (4.144):

$$\text{Find } \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_h \text{ such as } l(\check{\mathbf{r}}, \check{\mathbf{f}}; {}^i\psi\check{\mathbf{b}}_k) = 0 \quad \text{for } i = 1..I \text{ and } k = 1, 2, 3. \quad (4.145)$$

$l(\check{\mathbf{r}}, \check{\mathbf{f}}; {}^i\psi\check{\mathbf{b}}_k)$ with $i = 1..I$ and $k = 1, 2, 3$ is the numerical approximation of $\nabla J(\check{\mathbf{r}})$. On the other hand, the numerical approximation of (4.143) is obtained choosing $\delta\check{\mathbf{r}} = {}^i\psi\check{\mathbf{b}}_k$ and $\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}} = {}^j\psi\check{\mathbf{b}}_l$ with $i, j = 1..I$ and $k, l = 1..3$. The hessian matrix is evaluated computing:

$$\nabla^2 J(\check{\mathbf{r}}) = a(\check{\mathbf{r}}; {}^i\psi\check{\mathbf{b}}_k, {}^j\psi\check{\mathbf{b}}_l) \quad \text{for } i, j = 1..I \text{ and } k, l = 1, 2, 3. \quad (4.146)$$

Space fields and convergence study. First, we implement the problem choosing the following spaces of displacement field and their approximations:

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \{\mathbf{y} \in H^1([0, 1], \mathbb{R}^3)\} \\ \mathbb{V}_0 &= \{\mathbf{y} \in H^1([0, 1], \mathbb{R}^3) \mid \mathbf{y}(0) = \mathbf{o}, \mathbf{y}(1) = \mathbf{o}\} \\ \mathbb{V}_h &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{V} \mid \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \mathbf{y}|_{\mathcal{K}} \in Po\} \\ \mathbb{V}_{h0} &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{V}_0 \mid \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \mathbf{y}|_{\mathcal{K}} \in Po\} \end{aligned}$$

where $\mathcal{T}$ is a partition of $[0, 1]$ and Po is the set of polynomials of $\mathbb{R}$ with degree $\leq o$. Main characteristics of the tested cable can be found in Table 4.2.

Parameters	Dimensional	Non dimensional
L	21.00	1.00
L1	3.00	0.14
L2	4.00	0.19
L3	14.00	0.67
f_1	41.46	7.81E-5

Table 4.2: Parameters of the cable used for implementation and convergence tests

¹⁴The subscript h notation is kept for the spaces of displacement field

P order	n	$h = 1/n$	err	r	E	E_{real}
1	4	2.50E-01	9.65E-03	--	4.13E-12	1.93E-08
1	8	1.25E-01	8.77E-02	3.18	1.56E-02	1.98E-11
1	16	6.25E-02	5.68E-04	7.27	4.32E-12	4.36E-12
1	32	3.12E-02	1.42E-04	2.00	4.33E-12	4.33E-12
1	64	1.56E-02	3.54E-05	2.00	4.33E-12	4.33E-12
1	128	7.81E-03	8.84E-06	2.00	4.33E-12	4.33E-12
1	256	3.91E-03	2.21E-06	2.00	4.33E-12	4.33E-12
1	512	1.95E-03	2.37E-01	-16.71	4.76E-03	4.33E-12
2	4	2.50E-01	9.00E-03	--	9.09E-10	1.93E-08
2	8	1.25E-01	2.03E-03	6.21	3.45E-10	1.98E-11
2	16	6.25E-02	4.85E-02	4.58	3.47E-03	4.36E-12
2	32	3.12E-02	1.05E-04	8.85	4.78E-11	4.33E-12
2	64	1.56E-02	1.47E-02	-7.13	1.74E-03	4.33E-12
2	128	7.81E-03	2.01E-02	-0.46	2.60E-03	4.33E-12
2	256	3.91E-03	4.48E-03	2.17	7.05E-04	4.33E-12
2	512	1.95E-03	3.93E-03	0.19	5.43E-04	4.33E-12

Table 4.3: First convergence study

For the elastic catenary, only few parameters are required to solve the problem. Since an explicit solution can be calculated and defined as an expression object in FEniCS, a simple validation test for our routine is to evaluate:

$$err = \left(\int_0^1 |\check{\mathbf{r}} - \check{\mathbf{r}}_{real}| ds \right)^{1/2} \quad (4.147)$$

where $\check{\mathbf{r}}$ is the calculated solution with FEniCS and $\check{\mathbf{r}}_{real}$ is the analytic solution. In the calculation of err , both $\check{\mathbf{r}}$ and $\check{\mathbf{r}}_{real}$ are first interpolated in a $P5$ element space, as recommended in FEniCS manual and as implemented in the *errornorm* function. Moreover, we expect our linearized problem to exhibit an order of convergence equals to x when using Px elements. If we call n the number of intervals in our partition $\mathcal{T}$, the err value should be a function of n of the following form: $\#(1/n)^r$. Thus checking the order of convergence can be done calculating $r := \ln(err_i/err_{i-1})/\ln(n_{i-1}/n_i)$ where $i-1$ and i represent two consecutive tests with $n_i > n_{i-1}$. Finally, the following energy quantities are computed:

$$E = \int_0^1 \frac{1}{2} F(|\check{\mathbf{r}}|^2) ds \quad \text{and} \quad E_{real} = \int_0^1 \frac{1}{2} F(|\check{\mathbf{r}}_{real}|^2) ds$$

Choosing $\delta\check{\mathbf{r}}_1$ and $\delta\check{\mathbf{r}}_2$ in $\mathbb{V}_{h_0}$ and $\check{\mathbf{r}}$ in $\mathbb{V}_h$ leads to the results summarized in table 4.3.

In Table 4.3, results of a first convergence study is shown for the following choice of space discretization:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_h &= \{\mathbf{y} \in H^1([0, 1], \mathbb{R}^3) \mid \mathbf{y} \text{ is continuous and } \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \mathbf{y}|_{\mathcal{K}} \in Po\} \\ \delta\check{\mathbf{r}}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_{h_0} &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{V}_h \mid \mathbf{y}(0) = \mathbf{o}, \mathbf{y}(1) = \mathbf{o}\} \end{aligned}$$

where $o = 1$ or 2 . As it can be seen, not only the solution is accurately calculated when $n \geq 64$ but a correct convergence order is also found when using $P1$ Lagrangian

P order	n	$h = 1/n$	err	r	E	E_{real}
1	4	2.50E-01	9.65E-03	--	4.13E-12	1.93E-08
1	8	1.25E-01	8.77E-02	-3.18	1.56E-02	1.98E-11
1	16	6.25E-02	5.68E-04	7.27	4.32E-12	4.36E-12
1	32	3.12E-02	1.42E-04	2.00	4.33E-12	4.33E-12
1	64	1.56E-02	3.54E-05	2.00	4.33E-12	4.33E-12
1	128	7.81E-03	8.84E-06	2.00	4.33E-12	4.33E-12
1	256	3.91E-03	2.21E-06	2.00	4.33E-12	4.33E-12
1	512	1.95E-03	5.53E-07	2.00	4.33E-12	4.33E-12
2	4	2.50E-01	1.11E-03	--	2.08E-04	1.93E-08
2	8	1.25E-01	1.35E-04	3.04	1.34E-05	1.98E-11
2	16	6.25E-02	1.69E-05	3.00	8.57E-07	4.36E-12
2	32	3.12E-02	2.11E-06	3.00	5.39E-08	4.33E-12
2	64	1.56E-02	2.64E-07	3.00	3.38E-09	4.33E-12
2	128	7.81E-03	3.30E-08	3.00	2.15E-10	4.33E-12
2	256	3.91E-03	2.02E-03	-15.90	3.91E-04	4.33E-12
2	512	1.95E-03	8.71E-04	1.22	1.95E-04	4.33E-12

Table 4.4: Second convergence study

finite elements. The poor convergence obtained with continuous $P2$ finite elements is a well-known phenomenon [138] when solving linearized nonlinear problems: here it arises because we chose to make directly the computation of $\check{\Delta}$ in the calculation of $a(\check{\mathbf{r}}, \check{\mathbf{f}}; \delta\check{\mathbf{r}}, \mathbf{v})$ instead of computing it off-line and projecting the result in an appropriate discontinuous polynomial space. Table 4.4 shows better convergence orders when $\check{\Delta}$ is computed off-line and projected in a quadrature elements space.

Initial guess, order of convergence and expected solution. The same initial guess and the same ϵ have been used for all simulations in both Table 4.3 and Table 4.4. It can be noticed that simulations presented in Table 4.3 have not only sub-optimal convergence rates but also high error levels for large n values. In Table 4.4, sub-optimal convergence rates have almost disappeared but high error levels remain for large n values. Since all simulations were run with the same ϵ stop criterion, numerically correct solution were found but simple plots of the obtained configurations confirm that the solutions found can not be the expected ones for physical reasons. A debugging study showed that the chosen initial guess was responsible for the results obtained with large n . In other words, an initial guess can conduct to one solution when n is small and to another one for a larger n . Tests made showed that starting with another initial guess led indeed to a correct convergence order and consistent results that is decreasing err values and proper convergence order in Table 4.4.

We keep the tables as they are as a reminder for eventual future troubleshooting.

Figure 4.3 shows the components of the vector position $\check{\mathbf{r}}$ obtained with our simulated static configuration.

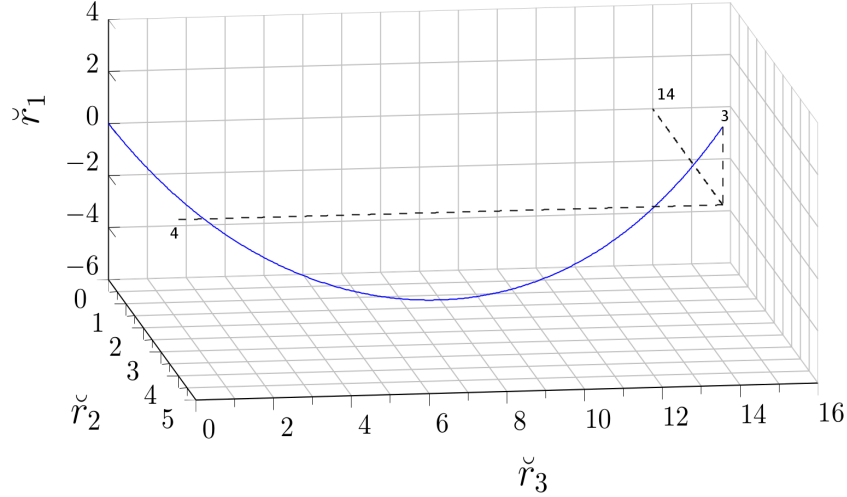


Figure 4.3: Calculated static configuration

3.1 A more efficient implementation: the Hu-Washizu functional for cables

The nonlinear cable problem can be fully solved via the principle of virtual displacements as it has been done in the previous section, in which case it is solved for displacements only. Because elongation and tension are two important parameters, we might want to evaluate both quantities. To do so, one possibility is to post-treat the solution and evaluate $\check{\Delta} = 0.5(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1)$ and $\check{T} = EA\check{\Delta}$. Both operations are easily done. It is however interesting for data assimilation purposes to introduce the strain as an unknown imposing its definition as a constrain. Among the several options to impose a constraint, we choose the method of Lagrange multipliers. We let λ be the Lagrange multiplier associated with the constraint $\check{\Delta} = \check{\Delta}^e$ where $\check{\Delta}^e := 0.5(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1)$. Thus, in non-dimensional form the problem (4.129) reads:

Find $\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}$, $\check{\Delta} \in \mathbb{P}_\Delta$ and $\lambda \in \mathbb{P}_\lambda$ such that

$$J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \lambda) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \check{\Delta}^2 - \check{\mathbf{r}} \cdot \check{\mathbf{f}} - \lambda (\check{\Delta} - \check{\Delta}^e) \right] ds \quad (4.148)$$

is a saddle point and $\check{\Delta}^e := \frac{1}{2} (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1)$

By saddle point we mean that such $J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T})$ is a relative minimum for $\check{\mathbf{r}}$ and $\check{\Delta}$ and a relative maximum for λ . We remember that the boundary conditions are taken into account thanks to appropriate spaces $\mathbb{V}$, $\mathbb{P}_\Delta$ and $\mathbb{P}_\lambda$. The first variation $\delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \lambda)$ of $J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \lambda)$ shall be zero and gives:

$$\delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \lambda) = \int_0^1 \left[(\check{\Delta} - \lambda) \delta \check{\Delta} + \lambda \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s - \check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} - (\check{\Delta} - \check{\Delta}^e) \delta \lambda \right] ds = 0. \quad (4.149)$$

In (4.149), we recognize three sets of equations:

- $\check{\Delta} = \lambda$ is the non-dimensional form of the constitutive equations. As expected, the Lagrange multiplier associated with the constraint is the tension $\check{T} \equiv \check{\Delta}$ in its non-dimensional form. Accordingly, from now on, we will use $\check{T}$ instead of λ ,

- $\check{\Delta} = \check{\Delta}^e$ are the strain-displacement relationships, they also are our constraint,
- After an integration by parts we recover the strong form of the static equilibrium $(\lambda \check{\mathbf{r}}_s)_s + \check{\mathbf{f}} = 0$.

It is clear that $J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T})$ is a Hu-Washizu functional¹⁵ - see for instance [139]. Its second variation $\mathfrak{d}\delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T})$ is simply:

$$\mathfrak{d}\delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T}) = \int_0^1 \left[(\mathfrak{d}\check{\Delta} - \mathfrak{d}\check{T}) \delta\check{\Delta} + \mathfrak{d}\check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta\check{\mathbf{r}}_s + \check{T} \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta\check{\mathbf{r}}_s - (\mathfrak{d}\check{\Delta} - \check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s) \delta\check{T} \right] ds. \quad (4.150)$$

The space discretization is done with $P1$ Lagrangian finite elements for the components of $\check{\mathbf{r}}$ and $P0$ discontinuous elements for $\check{\Delta}$ and $\check{T}$. Derivatives are projected at quadrature points.

Newton-Rapshon iterative procedure As previously, we solve the non-linear problem via an iterative procedure. At each step k , the linearized problem to be solved is:

$$\begin{aligned} &\text{Find } \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0, \mathfrak{d}\check{\Delta} \in \mathbb{P}_{\Delta} \text{ and } \mathfrak{d}\check{T} \in \mathbb{P}_{\check{T}} \text{ such that:} \\ &\mathfrak{d}\delta J(\check{\mathbf{r}}_k, \check{\Delta}_k, \check{T}_k) = -\delta J(\check{\mathbf{r}}_k, \check{\Delta}_k, \check{T}_k), \quad \forall \delta\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0, \delta\check{\Delta} \in \mathbb{P}_{\Delta} \text{ and } \delta\check{T} \in \mathbb{P}_{\check{T}}. \end{aligned} \quad (4.151)$$

and the update procedure is:

$$\begin{aligned} \check{\Delta}_{k+1} &= \check{\Delta}_k + \mathfrak{d}\check{\Delta}, \\ \check{\mathbf{r}}_{k+1} &= \check{\mathbf{r}}_k + \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}, \\ \check{T}_{k+1} &= \check{T}_k + \mathfrak{d}\check{T}, \end{aligned}$$

The Hu-Washizu formulation is of interest for monitoring purposes since it gives directly the strain as primal variables. The problem has been implemented on FEniCS and tested with the same case test used in the previous section. The static configuration is reached within less than 10 iterations, a good computational improvement if compared to the displacements only formulation, even if more unknowns are involved. Next section will enlighten the computational advantages of the Hu-Washizu formulation. In the following, we present the nonlinear dynamics of cable and we shall use the Veubeke-Hu-Washizu formulation: its implementation is given in annex together with the dynamic problem.

Hu-Washizu functional for cables: pros and cons

The Hu-Washizu functional shows more unknowns than the displacements only (DO) formulation derived from the principle of virtual work. In the cable case, the Hu-Washizu formulation (HW) increases the number of independent variables from 3 to 5: 3 for the displacement field $\check{\mathbf{r}}$, 1 for the strain $\check{\Delta}$ and one for the Lagrangian multiplier $\check{T}$.

We already mentioned the benefits of computing directly the strain as a primal variable for data assimilation purposes. In what follows, we test computational aspects of the HW formulation when compared to the DO one.

¹⁵Veubeke-Hu-Washizu

Our test uses the hanging cable simply supported between two ends already presented in the previous section. Since a closed form solution has been found semi-analytically, a direct comparison is made to see whether the routines achieve convergence toward the real solution. As a first step, we compare the two algorithm performances starting with a *reasonable* initial guess, that is a function which:

- respects the boundary conditions,
- is supposed to look like the expected solution.

In our case, a parabola with a moderate sag is a *reasonable* choice:

$$\check{\mathbf{r}}^{ini} = \begin{cases} \check{r}_1^{ini} = (2L_1 + 0.8c) s^2 - (L_1 + 0.8c) s \\ \check{r}_2^{ini} = L_2 s \\ \check{r}_3^{ini} = L_3 s \end{cases} \quad (4.152)$$

where the parameter c can tune the sag and is equal to 1.0 in this first study. Initial guesses for the deformation $\check{\Delta}$ and the Lagrangian multiplier $\check{T}$ are set to be constant functions with the value 0.000001 all along the cable.

For the two formulations, space discretization is done with $P1$ Lagrangian finite elements leading, as expected, to quadratic convergence rate when increasing the number of elements. The stop criterion for the Newton-Raphson iterative process is set to $\|\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}\| \leq 10\text{E-}14$ or $I \leq 200$, where I is the number of iterations.

As it can be seen in Table 4.5, the number of iterations within the Newton algorithm is significantly reduced when using the HW formulation.

n	1/n	$\ \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}\ $	err	itr
Hu-Washizu				
64	1.56E-02	3.84E-15	3.54E-05	6
128	7.81E-03	3.98E-15	8.84E-06	6
256	3.91E-03	4.01E-15	2.21E-06	6
512	1.95E-03	4.02E-15	5.53E-07	6
1024	9.77E-04	4.03E-15	1.38E-07	6
2048	4.88E-04	4.03E-15	3.46E-08	6
Displacement only				
64	1.56E-02	5.24E-17	3.54E-05	72
128	7.81E-03	5.44E-17	8.84E-06	51
256	3.91E-03	5.34E-17	2.21E-06	62
512	1.95E-03	5.55E-17	5.53E-07	65
1024	9.77E-04	5.54E-17	1.38E-07	70
2048	4.88E-04	5.79E-17	3.46E-08	82

Table 4.5: Comparison between HW and DO formulations. First case study. itr stands for Number of iterations

Two other tests are made: a first set of initial guesses is chosen as a curvy deformation of the parabola:

$$\tilde{\mathbf{r}}^{ini} = \begin{cases} \tilde{r}_1^{ini} = (c \sin(\pi s) \sin(2\pi s) + 1) ((2L_1 + 0.8)s^2 - (L_1 + 0.8)s) \\ \tilde{r}_2^{ini} = (c \sin(\pi s) \sin(2\pi s) + 1) L_2 s \\ \tilde{r}_3^{ini} = (c \sin(2\pi s) \sin(3\pi s) + 1) L_3 s \end{cases} \quad (4.153)$$

with the parameter $c \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$.

A second set of initial guess functions is tested increasing the sag of the parabola (4.152) with $c \in \{10, 20, 30, 40\}$. Figure 4.4 shows the two sets of initial guess tested.

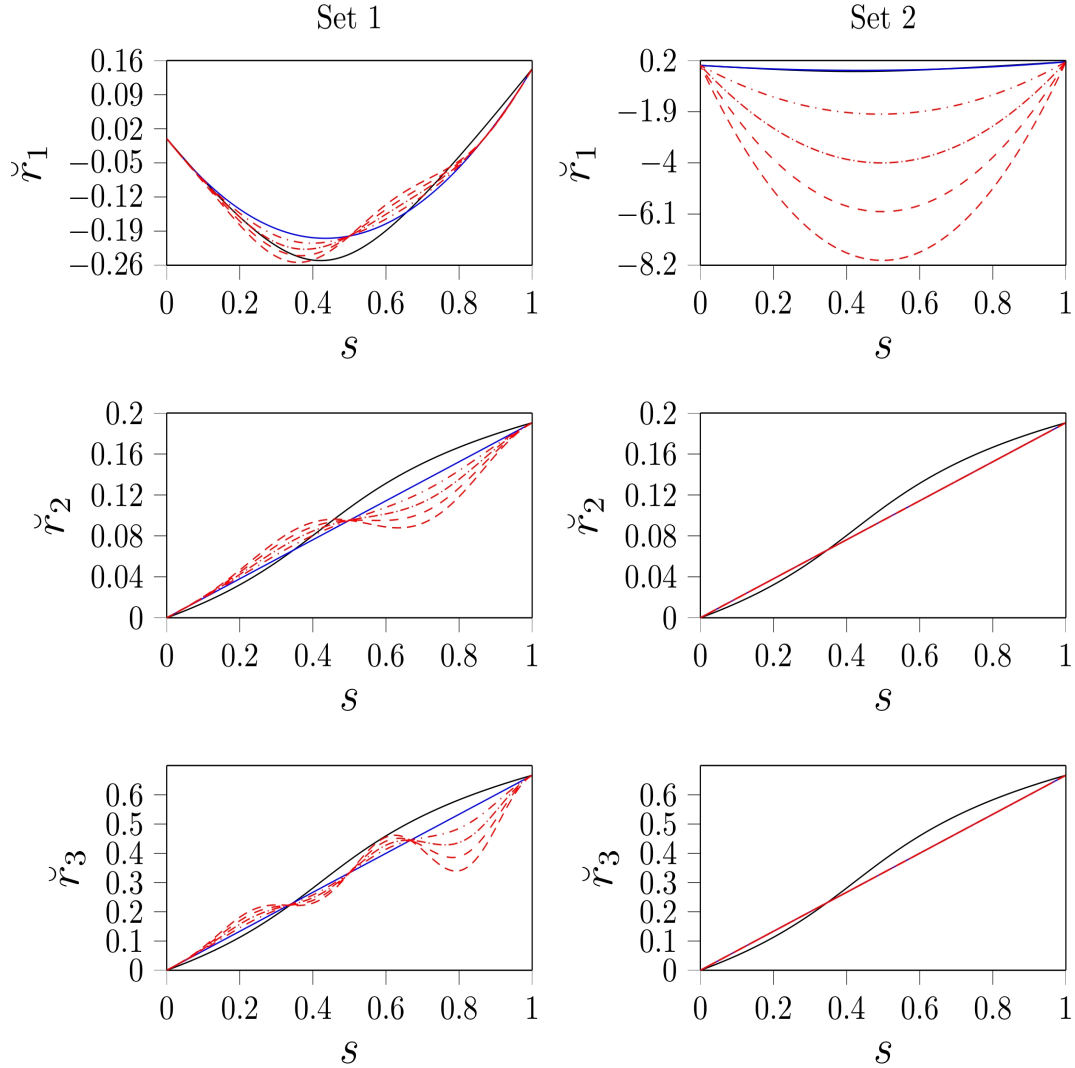


Figure 4.4: Sets of initial guesses used to test the Hu-Washizu and the displacements only formulations. Black line: Static configuration to be found. Blue line: reasonable initial guess. Red lines: tested initial guesses.

Looking at Table 4.6, it is possible to notice that the displacement only formulation is able to find the desired solution in almost every tested case. However, total computational cost is relatively high since the solution is reached within 34 to 104 iterations. Furthermore, the convergence criterion can lead to a solution which is only roughly the expected catenary. It is typically the case when $err \geq 1.0E-04$ which seems to occur only for Set 1.

Displacements only									
n	c	$\ \delta\tilde{r}\ $	err	itr	n	c	$\ \delta\tilde{r}\ $	err	itr
Set 1					Set 2				
64	0.1	6.50E-16	3.54E-05	81	64	10	5.21E-17	3.54E-05	34
128	0.1	5.63E-17	8.84E-06	86	128	10	1.10E-15	8.84E-06	78
256	0.1	5.45E-17	2.21E-06	67	256	10	5.59E-17	2.21E-06	55
512	0.1	5.69E-17	5.53E-07	82	512	10	9.95E-17	5.53E-07	71
1024	0.1	5.70E-17	2.83E-03	71	1024	10	5.81E-17	1.38E-07	66
2048	0.1	5.84E-17	3.46E-08	80	2048	10	7.08E-16	3.46E-08	79
64	0.2	5.25E-17	3.54E-05	74	64	20	9.01E-16	3.54E-05	34
128	0.2	5.89E-17	2.72E-02	73	128	20	6.62E-17	8.84E-06	34
256	0.2	5.75E-17	2.21E-06	90	256	20	5.64E-17	2.21E-06	83
512	0.2	7.98E-15	5.53E-07	81	512	20	5.98E-17	5.53E-07	56
1024	0.2	5.73E-17	1.38E-07	104	1024	20	4.27E-15	1.38E-07	70
2048	0.2	4.81E-16	3.46E-08	95	2048	20	2.44E-16	3.46E-08	63
64	0.3	5.49E-17	3.54E-05	61	64	30	5.84E-17	3.54E-05	33
128	0.3	4.25E-16	8.84E-06	74	128	30	5.86E-17	8.84E-06	47
256	0.3	5.88E-17	2.21E-06	89	256	30	5.79E-17	2.21E-06	58
512	0.3	5.77E-16	6.14E-03	74	512	30	5.56E-17	5.53E-07	62
1024	0.3	3.29E-15	9.86E-04	78	1024	30	5.72E-17	1.38E-07	68
2048	0.3	5.98E-17	3.46E-08	64	2048	30	5.82E-17	3.46E-08	54
64	0.4	5.39E-17	3.54E-05	62	64	40	5.21E-17	3.54E-05	63
128	0.4	1.71E-16	3.47E-02	63	128	40	3.19E-15	8.84E-06	40
256	0.4	5.53E-17	2.21E-06	72	256	40	2.73E-15	2.21E-06	45
512	0.4	5.57E-17	5.53E-07	81	512	40	5.77E-17	5.53E-07	66
1024	0.4	5.69E-17	1.38E-07	73	1024	40	3.49E-16	1.38E-07	57
2048	0.4	5.93E-17	3.46E-08	85	2048	40	1.45E-16	3.46E-08	63

Table 4.6: DO formulation results with various initial guesses. itr is the number of iterations used.

Table 4.7 shows results obtained with the Hu-Washizu formulation. It can be noticed that whenever convergence is reached, it is reached very fast and the solution obtained is the expected solution. However, for initial guesses in Set 1 or 2 which are *too far away from the solution*, the HW formulation fails where the DO formulation finds a solution. We also remark that convergence can be achieved without reaching with a good precision the catenary solution only with Set 2 which is the opposite behavior of the DO formulation.

In practice, we will avoid to choose an initial guess *too far away* from the expected solution in order to reap the full benefits of the HW formulation.

Hu-Washizu									
n	c	$\ \mathbf{\tilde{d}\tilde{r}}\ $	err	itr	n	c	$\ \mathbf{\tilde{d}\tilde{r}}\ $	err	itr
Set 1					Set 2				
64	0.1	0.00	3.54E-05	8	64	10	0.00	3.54E-05	9
128	0.1	0.00	8.84E-06	8	128	10	0.00	8.84E-06	9
256	0.1	0.00	2.21E-06	8	256	10	0.00	2.21E-06	9
512	0.1	0.00	5.53E-07	8	512	10	0.00	5.53E-07	9
1024	0.1	0.00	1.38E-07	8	1024	10	0.00	1.38E-07	9
2048	0.1	5.80E-17	3.46E-08	8	2048	10	5.82E-17	3.46E-08	9
64	0.2	0.00	3.54E-05	9	64	20	0.00	3.54E-05	13
128	0.2	0.00	8.84E-06	9	128	20	4.89E-16	8.84E-06	14
256	0.2	0.00	2.21E-06	9	256	20	0.00	2.21E-06	14
512	0.2	0.00	5.53E-07	9	512	20	0.00	5.53E-07	18
1024	0.2	0.00	1.38E-07	9	1024	20	0.00	1.38E-07	16
2048	0.2	5.80E-17	3.46E-08	9	2048	20	5.57E-17	3.46E-08	17
64	0.3	3.54E+00	2.14	200	64	30	3.57E+01	2.24E+01	200
128	0.3	6.72E-01	5.70E-01	200	128	30	2.57E-15	8.84E-06	16
256	0.3	4.64	4.65E-01	200	256	30	0.00	3.57E-03	21
512	0.3	7.53E-01	5.88E-01	200	512	30	1.25E-01	2.44E-01	200
1024	0.3	9.52E-17	1.38E-07	16	1024	30	0.00	3.97E-02	27
2048	0.3	9.07E-01	3.11E-01	200	2048	30	5.59E-17	3.46E-08	22
64	0.4	3.13E-01	3.17E-01	200	64	40	1.53E-15	3.54E-05	12
128	0.4	2.94E+01	2.40	200	128	40	3.24E-01	3.17E-01	200
256	0.4	4.46	1.37	200	256	40	3.33E-01	3.65E-01	200
512	0.4	1.93E+01	4.65	200	512	40	0.00	1.08E-02	20
1024	0.4	2.48	1.40	200	1024	40	0.00	1.78E-03	26
2048	0.4	2.87E-01	1.39E-01	200	2048	40	2.13E+03	1.14E+02	200

Table 4.7: HW formulation results with various initial guesses. itr is the number of iterations used.

3.2 An example with follower loads: the suspension bridge problem

Hereafter, we present a new approach to solve the suspension bridge problem via follower loads where the cable is subjected to a load distributed with respect to its span. When simple cases are considered, where the loads lay in the plan of the cable, this problem is very-well known and its solution can be easily found using the analogy between a cable and its associated isostatic beam - as explained in french in [140].

When the sag-to-span ratio of the cable is small¹⁶ and the load is constant along its span, the problem is even simpler and the solution can be correctly described by a parabola.

It is however interesting to have a general formulation frame to rely on for problems showing higher level of complexity. Compared to the previous section, nothing changes

¹⁶say equal to or less than 1/8

except the load $\check{\mathbf{f}}$ which is now a function of $\check{\mathbf{r}}$. A typical distributed load over the span oriented by $\mathbf{a}$ would be $\check{\mathbf{f}} = (a(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{a})/\|\check{\mathbf{r}}_s\|)\mathbf{e}_1$ where a is the load magnitude per unit length of span. If $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$, then:

$$\check{\mathbf{f}} = [a(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{e}_3)\|\check{\mathbf{r}}_s\|^{-1} - \rho Ag] \mathbf{e}_1, \quad (4.154)$$

$$\mathfrak{d}\check{\mathbf{f}} = a [(\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{e}_3)\|\check{\mathbf{r}}_s\|^{-1} - (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s)(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{e}_3)(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s)^{-3/2}] \mathbf{e}_1. \quad (4.155)$$

The problem 4.148 cannot simply be rewritten substituting the expression of $\check{\mathbf{f}}$, doing so would not lead to the correct strong form of the static problem. In fact, with the loads in their present form, it is not possible to find a variational formulation related to a specific minimization problem such as 4.148. In other words, we have to start our problem directly with (4.149) and try to find a solution for the equation $\delta J = 0$ where δJ is a notation that does not refer to any J . δJ and its linearization $\mathfrak{d}\delta J$ are:

$$\delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T}) = \int_0^1 \left[(\check{\Delta} - \check{T}) \delta \check{\Delta} + \check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s - \check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} - (\check{\Delta} - \check{\Delta}^e) \delta \check{T} \right] ds = 0 \quad (4.156)$$

and:

$$\mathfrak{d}\delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T}) = \int_0^1 \left[(\mathfrak{d}\check{\Delta} - \mathfrak{d}\check{T}) \delta \check{\Delta} + (\check{\mathbf{r}}_s \mathfrak{d}\check{T} + \check{T} \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s) \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s - (\mathfrak{d}\check{\Delta} - \check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s) \delta \check{T} - \mathfrak{d}\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} \right] ds \quad (4.157)$$

where $\check{\mathbf{f}}$ and $\mathfrak{d}\check{\mathbf{f}}$ are given by (4.154) and (4.155), respectively.

A real example. Let the span of the cable be 393.75 m, its cross-section area 0.11958 m², its length $L = 405.5$ m, its Young modulus $E = 170000$ MPa and its grade 1770 MPa. Moreover, let $a = 88$ kN.m⁻¹. This example is highly inspired by cables found on the Aquitaine's bridge (France).

An unrealistic example. Consider a similar situation than the previous example with a much longer cable $L = 505.5$ m.

Results of the two above examples can be found in Figure 4.5. As can be seen, the unrealistic configuration would lead to a higher efficiency as it would require less material for the same load case since its tension is half the tension of the existing real cable and its length is only 24% longer.

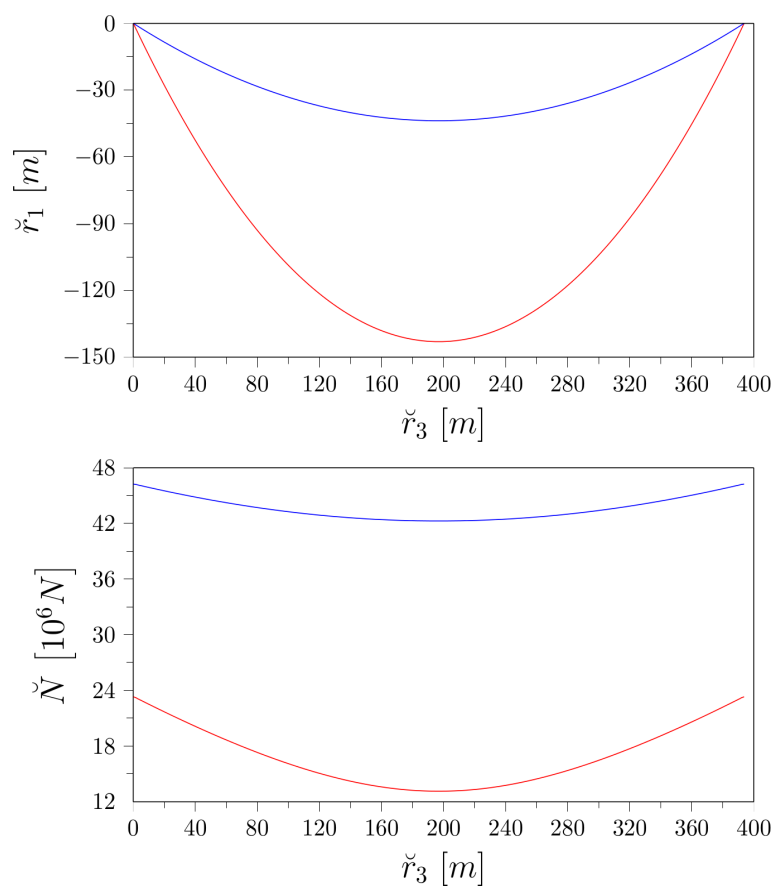


Figure 4.5: Static configurations and corresponding tensions found for the real and unrealistic examples. Red line: unrealistic static configuration. Blue line: existing static configuration

In practice, the cable is subjected to a design constraint on the tension $\check{N}$ imposing a safety factor of 2.5 as follows:

$$\check{N} \leq \frac{Af_y}{2.5} \quad (4.158)$$

where f_y is the grade of the cable material, say 1770 MPa. A first optimization of the cable could be to aim at the upper bound of the constraint everywhere along the cable, which would read:

$$\check{T}\|\check{\mathbf{r}}_s\| = \check{T}\check{r} = \frac{Af_y}{2.5} \quad (4.159)$$

With $\check{r} = (2\check{\Delta} + 1)^{1/2}$.

To the author's knowledge, no cable with a variable cross-section area is currently used in civil engineering, although it would be technically feasible, especially with composite materials. We can address the direct problem (4.156) subjected to the design constraint (4.159). To do so, the fonctionnal δJ has to be modified and a Lagragian multiplier γ associated with (4.159) is introduced. Moreover, the section A is now considered as an unknown:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^L \left[\left(EA\check{\Delta} - \check{T}(1 + \gamma\check{r}^{-1}) \right) \delta\check{\Delta} + \check{T}\check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta\check{\mathbf{r}}_s - \check{\mathbf{f}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}} \right. \\ \left. - \left(\check{\Delta} - \check{\Delta}^e + \gamma\check{r} \right) \delta\check{T} + \left(\frac{1}{2}E\check{\Delta}^2 + \gamma\frac{f_y}{2.5} \right) \delta A - \left(\check{T}\check{r} - \frac{Af_y}{2.5} \right) \delta\gamma \right] ds = 0 \end{aligned} \quad (4.160)$$

Note that the problem of a suspended bridge taking into account both the mass of the cable and the mass of the deck is known: the strong form of the static equilibrium equations can be integrated analytically and the integration depends on the value of the ratio $\rho A/a$. Moreover, the catenary problem with a cross-section proportional to the tension has been treated two centuries ago¹⁷. We treat here a mix of these two problems in a way that can easily be adapted to different load forms. We obtain the linearization $\mathfrak{d}\delta J(A, \check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T}, \gamma)$ as usual:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}\delta J = \int_0^L \left[\left(EA\mathfrak{d}\check{\Delta} - (1 + \gamma\check{r}^{-1}) \mathfrak{d}\check{T} - \check{T}\check{r}\mathfrak{d}\gamma + \gamma\check{T}\check{r}^{-3}\mathfrak{d}\check{\Delta} \right) \delta\check{\Delta} \right. \\ + \left(\check{\mathbf{r}}_s\mathfrak{d}\check{T} + \check{T}\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s \right) \cdot \delta\check{\mathbf{r}}_s - \mathfrak{d}\check{\mathbf{f}} \cdot \delta\check{\mathbf{r}} \\ - \left(\mathfrak{d}\check{\Delta} - \check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s + \check{r}\mathfrak{d}\gamma + \gamma\check{r}^{-1}\mathfrak{d}\check{\Delta} \right) \delta\check{T} \\ + \left(E\check{\Delta}\mathfrak{d}\check{\Delta} + \frac{f_y}{2.5}\mathfrak{d}\gamma \right) \delta A \\ \left. - \left(\check{r}\mathfrak{d}\check{T} + \check{T}\check{r}^{-1}\mathfrak{d}\check{\Delta} - \frac{f_y}{2.5}\mathfrak{d}A \right) \delta\gamma \right] ds. \end{aligned} \quad (4.161)$$

where $\check{\mathbf{f}}$ and $\mathfrak{d}\check{\mathbf{f}}$ are now:

$$\check{\mathbf{f}} = [a(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{e}_3)\|\check{\mathbf{r}}_s\|^{-1} - \rho Ag] \mathbf{e}_1, \quad (4.162)$$

$$\mathfrak{d}\check{\mathbf{f}} = a[(\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{e}_3)\|\check{\mathbf{r}}_s\|^{-1} - (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s)(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{e}_3)(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s)^{-3/2}] \mathbf{e}_1 - \rho g\mathfrak{d}A\mathbf{e}_1. \quad (4.163)$$

Results are shown in Figure 4.6 for the two examples.

¹⁷by Finck and Bobillier, Coriolis and others. www.mathcurve.com

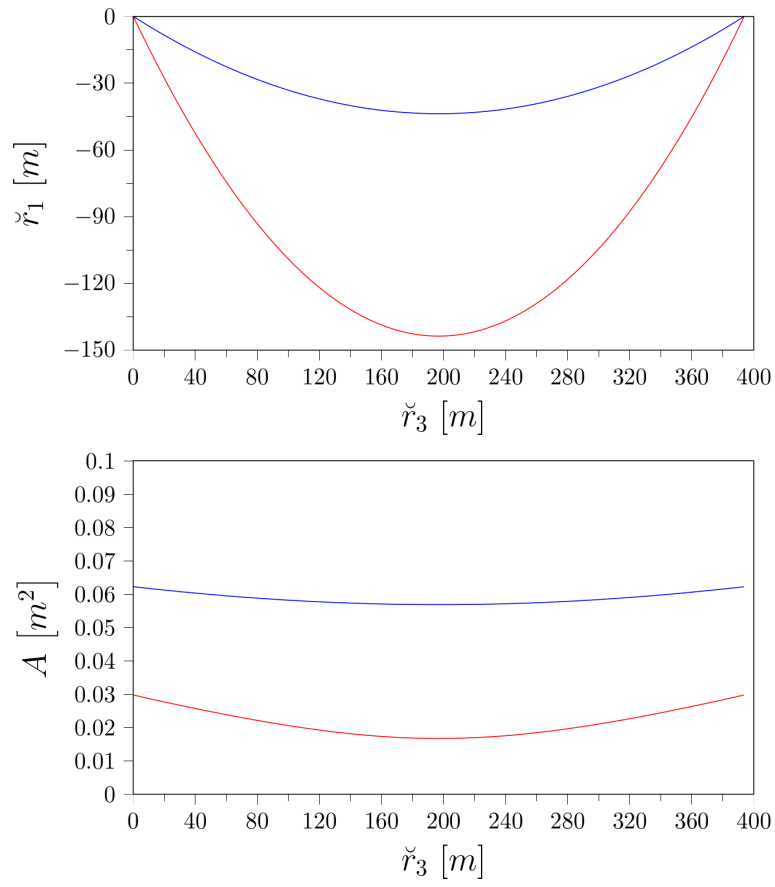


Figure 4.6: Static configurations and corresponding cross-section areas found for the real data based (blue) and unrealistic data based (red) examples, with optimized cross section area.

For the unrealistic example, total amount of steel cable would be 88.1 tons for an optimized cable, 117.3 for an optimized cable with a constant cross-section area and 472.1 tons with $A = 0.11958 \text{ m}^2$.

The total amount of steel cable is 186 tons with the realistic example and an optimized cable showing a variable cross-section to be compared to 196.8 tons for the same configuration with an optimized cable with a constant cross-section. On the real bridge, the total amount of steel is around 378.7 tons, however, to design the cable for a real suspended bridge more load cases have to be assessed.

Nevertheless, with our example, the longest cable would show higher efficiency. The optimization problem of the cable has always been treated considering a parabolic solution for the cable. Within the limit of this hypothesis, the problem is impacted by the pylons height and the deck stiffness: on the one hand, high pylons (corresponding to a large sagged cable) are expensive and more likely to suffer Euler's buckling; on the other hand, short pylons will suffer extreme horizontal loads at the cable support. Moreover, a large sagged cable will require a stiffer deck than a shallow one. Cost of material, working time, anchorages and foundations dimensions are also of great importance leading to an optimization problem showing a complexity that goes beyond the scope of this thesis. Information on the topic can be found in [13] or [16] - to name but a few. A last comment is to be made about the suspension bridge problem: according to [72], the parabolic approximation is accurate with sag-to-span ratios up to 0.25 – 0.20 which bounds the optimization made with the parabolic model of cable. Our unrealistic example illustrates the fact that the optimum cable design could be found for cable exhibiting sag-to-span ratios much greater than 0.25! For very large sag-to-span ratio, the problem can only be addressed with a model as complete as the one presented above.

3.3 Notes on curvature(s) and kinematic constraints

As previously stated, we have defined $\mathbf{\Gamma}$ as the change in local frames of the local frames with respect to the reference arc-length s . Local frames $(\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3)$ were freely chosen to be equal to $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ for all s in $[0, L]$. This choice is possible only because W has no dependency in $\mathbf{\Gamma}$ and we can choose $\mathbf{\Gamma}$ to be equal to zero. Obviously, it does not mean that the curve $\check{\mathbf{C}}$ of the catenary configuration has a zero-valued geometric curvature vector. For historical reasons, many authors prefer to choose Serret-Frenet local frames for $(\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3)$. Following them, we let $\check{\mathbf{b}}_3 := \check{\mathbf{r}}_s$ be the unit vector tangent to the curve. The normal vector $\check{\mathbf{b}}_1$ is then defined as $\check{\mathbf{b}}_1 := \partial_s \check{\mathbf{b}}_3 / |\partial_s \check{\mathbf{b}}_3|$ and the binormal unit vector $\check{\mathbf{b}}_2 := \check{\mathbf{b}}_3 \times \check{\mathbf{b}}_1$. The well known Serret-Frenet formulas give the values $\kappa = \check{\mathbf{b}}_1 \cdot \partial_s \check{\mathbf{b}}_3$ and $\tau = \check{\mathbf{b}}_2 \cdot \partial_s \check{\mathbf{b}}_1$ for the curvature and the torsion, respectively. With the introduced quantities, the following relations hold:

$$\partial_s \check{\mathbf{b}}_3 = \kappa \check{\mathbf{b}}_1 \quad \partial_s \check{\mathbf{b}}_2 = -\tau \check{\mathbf{b}}_1 \quad \partial_s \check{\mathbf{b}}_1 = -\kappa \check{\mathbf{b}}_3 + \tau \check{\mathbf{b}}_2$$

A commonly adopted definition for the curvature is the so-called first generalized curvature which is equal to κ in our case. The corresponding curvature vector is simply $\kappa \check{\mathbf{b}}_1$. It does not correspond to a geometrical curvature vector similar to $\check{\mathbf{\Gamma}}$ and defined along $\check{\mathbf{C}}$ via a Serret-Frenet apparatus. Calling $\check{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{g}}$ such quantity, its relation with the curvature κ and the torsion τ would be $\check{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{g}} = \kappa \check{\mathbf{b}}_2 + \tau \check{\mathbf{b}}_3$ with our conventions. Now, applying the chain rules to the previous expression leads directly to the expression of $\check{\mathbf{\Gamma}}$ which is $\check{\mathbf{\Gamma}} = d\check{s}/ds (\kappa \check{\mathbf{b}}_2 + \tau \check{\mathbf{b}}_3) = d\check{s}/ds \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}$. In the author opinion, the use of the Serret-Frechet

apparatus to solve the catenary problem might be confusing because it leads, within our formulation, to a curvature $\check{\mathbf{\Gamma}}$ that is linked to the purely geometrical curvature κ and torsion τ in a way that reminds bending and torsion while the elasticity lies all in the stretch $d\check{s}/ds$. Moreover, it seems that the variational formulation of the elastic static problem is more difficult to write in the Serret-Frechet frame. Nevertheless, choosing the Serret-Frenet local frames for $(\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3)$ leads to great simplifications if the problem is solved via the solidification principle because $\check{\mathbf{b}}_3 = \check{\mathbf{r}}_s = ds/d\check{s} \check{\mathbf{r}}_s$ together with simple Hookean behavior directly sets the problem in the principal stress axes. With our notations, it gives $\eta_1 = 0 = \eta_2$ and $d\check{s}/ds = \nu$ which are familiar but misleading expressions: they are the consequences of a strong hypothesis on W and a special choice for the local frames $(\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3)$ but are not kinematics constraint. If we let W depend on $\check{\mathbf{r}}_s$ and $\check{\mathbf{\Gamma}}$, the choice of the local frames is no more free: with $\mathbf{e}_3 := \check{\mathbf{r}}_s$ in the stress-free configuration, assuming $\check{\mathbf{b}}_3 := \check{\mathbf{r}}_s$ in the $\check{\mathbf{B}}$ configuration is equivalent to impose the kinematic constraints $\eta_1 = 0 = \eta_2$. This special theory is of great importance in the literature and is often the result of the following modeling steps:

- define a section in the reference configuration at each point of the curve,
- attach the local triads to these sections,
- impose the Navier-Bernoulli¹⁸ kinematic constraints $\eta_1 = 0 = \eta_2$.

which are the elementary assumptions for the theory of beams (unshearable beams, aka Euler-Bernoulli beams). We will not use the curvature κ nor the torsion τ in the following and therefore we drop the two notations.

4 Nonlinear dynamics of cables

In this section, we present the nonlinear dynamic of cables and its variational formulation. As previously mentioned in the state of the art, planar and 3D motions of taut or non shallow, elastic or inelastic cables have been widely studied, mostly through a strong formulation of the problem. We give a variational formulation of the 3D motions of geometrically exact elastic cable problem that is consistent with the Cosserat theory. As previously, the functional W does not depend on the variables related to the local triads and we can assume $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{o} = \mathbf{\Omega}$. Thus the stationarity of $\mathfrak{A}$ is:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_A W \, ds \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial \check{\mathbf{r}}_s} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s + \frac{\partial W}{\partial \check{\mathbf{r}}_t} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_t \right) ds \, dt = 0. \quad (4.164)$$

The corresponding adaptation of (4.78) is

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) \right) ds - \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} \right) ds = \\ & - \int_0^L \left(\check{\mathbf{v}}_t \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + (\check{\mathbf{r}}_t \times \check{\mathbf{v}}) \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds + [\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}]_0^L \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (4.165)$$

¹⁸only in France: elsewhere it is Euler-Bernoulli. For the Cosserat brothers, this kind of rod was firstly studied by Lord Kelvin and Tait in their *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part. II

We choose the following strain and velocity measures:

$$\begin{aligned}\check{\Delta} &:= \frac{1}{2} (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1), \\ \check{\Upsilon} &:= \sqrt{\check{\mathbf{r}}_t \cdot \check{\mathbf{r}}_t}.\end{aligned}$$

We note that W can be written as a function of $\check{\Delta}$ and $\check{\Upsilon}$ only. Introducing

$$\check{T} = -\frac{\partial W}{\partial \check{\Delta}}, \quad (4.166)$$

$$\check{V} = -\frac{\partial W}{\partial \check{\Upsilon}}. \quad (4.167)$$

we can write the following constitutive equations:

$$\check{\mathbf{n}} = \check{T} \check{\mathbf{r}}_s, \quad (4.168)$$

$$\check{\mathbf{v}} = \check{V} \check{\Upsilon}^{-1} \check{\mathbf{r}}_t. \quad (4.169)$$

with:

$$\check{\mathbf{r}}_s = {}^t [\partial_s r_1, \partial_s r_2, \partial_s r_3] \quad (4.170)$$

$$\check{\mathbf{r}}_t = {}^t [\partial_t r_1, \partial_t r_2, \partial_t r_3]. \quad (4.171)$$

For $t = t_1$ we suppose that the cable is in a known configuration, *ie* $\check{\mathbf{r}}(s, t_1)$ and its derivatives are known. Without loss of generality, we let this generic known configuration be the reference configuration $\mathbf{B}^0$. We assume that for $t \in [t_1, t_2]$, strains and velocities are small enough¹⁹. We can formally name $-\kappa_{ij}$ with $i, j \in \{1, 2\}$ and $j \geq i$ the four second derivatives in W_2 and use then to express T and V :

$$\check{T} = T^0 + \kappa_{11}(\check{\Delta} - \Delta^0) + \frac{1}{2} \kappa_{12}(\check{\Upsilon} - \Upsilon^0),$$

$$\check{V} = V^0 + \frac{1}{2} \kappa_{12}(\check{\Delta} - \Delta^0) + \kappa_{22}(\check{\Upsilon} - \Upsilon^0).$$

Assuming $T^0 = V^0 = \Delta^0 = \Upsilon^0 = \kappa_{12} = 0$, $\kappa_{11} = EA^0$ and $\kappa_{22} = \rho A^0$ where ρA^0 is the mass per unit length of the cable in configuration $\mathbf{B}^0$, we have:

$$\check{\mathbf{n}} = EA \check{\Delta} \check{\mathbf{r}}_s, \quad (4.172)$$

$$\check{\mathbf{v}} = \rho A \check{\Upsilon} \check{\mathbf{r}}_t. \quad (4.173)$$

We rewrite $\delta \mathfrak{A}$ omitting the integral over time and requiring the integrands to be zero at any time, leading to the variational formulation of the general elasto-dynamic problem:

Find $\check{\mathbf{r}}$ in appropriate displacement field such as at any time:

$$\int_0^L (\mathbf{n} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s) ds - [\mathbf{n} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}]_0^L = - \int_0^L (\rho A^0 \check{\mathbf{r}}_{tt} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}) ds + \int_0^L (\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}) ds \quad (4.174)$$

given $\check{\mathbf{r}}(s, 0)$ and for all $\delta \check{\mathbf{r}}$ in appropriate displacement field.

As in the static case, $\delta \boldsymbol{\vartheta}$ is obviously not required and since we chose $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{o} = \boldsymbol{\Omega}$, we can express the whole problem in the global inertial frame ignoring the differences between dot and time derivation and bar and space derivation.

¹⁹For instance $\|\check{\mathbf{r}}_s\| \ll 1$ and $\|\check{\mathbf{r}}_t\| \ll c$ where c is the speed of sound for instance...

External forces and boundary conditions. External forces and boundary conditions are defined by the following hypothesis:

- external force applied on the cable are its own weight $\check{\mathbf{f}}(s) = -\rho A g \mathbf{e}_1$ with $s \in [0, L]$ and a load $\mathbf{a}$
- Point A is in $(0, 0, 0, 0)$ and point B is in $(0, L_1, L_2, L_3)$. at any time. It gives $\check{\mathbf{r}}(0, t) = \mathbf{o}$ and $\check{\mathbf{r}}(L, t) = L_1 \mathbf{e}_1 + L_2 \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3$.
- $L^2 \geq L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$.

Non-dimensional variational formulation. The dimensional equations are now:

$$\int_0^L \left(EA \check{\Delta} \check{\mathbf{r}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s \right) ds = \int_0^L \left(\left(-\rho A \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{f}} \right) \cdot \delta \check{\mathbf{r}} \right) ds \quad (4.175)$$

As explained in section 3.1, we rewrite the problem to introduce the strain-displacements relationship as a constraint and the tension as its associated Lagrange multiplier:

$$\int_0^L \left[\left(EA \check{\Delta} - \check{T} \right) \delta \check{\Delta} + \check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s - \left(\check{\Delta} - \check{\Delta}^e \right) \delta \check{T} \right] ds = \int_0^L \left(\left(-\rho A \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{f}} \right) \cdot \delta \check{\mathbf{r}} \right) ds.$$

A non-dimensional form of the problem is obtained introducing non-dimensional starred quantities and spaces:

$$\check{\mathbf{n}} = EA \check{\mathbf{n}}^*, \quad \check{\mathbf{r}} = L \check{\mathbf{r}}^*, \quad s = L s^*, \quad \check{\mathbf{f}} = \frac{EA}{L} \check{\mathbf{f}}^*, \quad \omega_c = \sqrt{\frac{EA}{\rho AL^2}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{EA}{L} \mathbf{a}^*, \quad p = \omega_c p^*, \quad t = \frac{1}{\omega_c} t^*, \quad g = \frac{EA}{\rho AL} g^*, \quad \check{T} = EA \check{T}^*,$$

$\mathbb{H}^*$ a smooth enough non-dimensional displacement field over $[0, 1]$,

$$\mathbb{V}^* = \{ \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{H}^* \mid \check{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{o} \text{ and } \check{\mathbf{r}}(1) = \frac{1}{L} (L_1 \mathbf{e}_1 + L_2 \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3) \},$$

$$\mathbb{V}_0^* = \{ \delta \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{H}^* \mid \delta \check{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{o} \text{ and } \delta \check{\mathbf{r}}(1) = \mathbf{o} \},$$

$\mathbb{P}_\Delta^*$ a non-dimensional strain field over $[0, 1]$,

$\mathbb{P}_T^*$ a non-dimensional tension field over $[0, 1]$.

We immediately drop the star notation and we rewrite the problem in the following non-dimensional form:

$$\int_0^1 \left[\left(\check{\Delta} - \check{T} \right) \delta \check{\Delta} - \left(\check{\Delta} - \check{\Delta}^e \right) \delta \check{T} + \check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s \right] ds = \int_0^1 \left(\left(\check{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta \check{\mathbf{r}} \right) ds.$$

where $\check{\Delta}^e := 0.5(\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1)$.

Linearization. We introduce the functional $J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T})$ such that:

$$\delta J = \int_0^1 \left[\left(\check{\Delta} - \check{T} \right) \delta \check{\Delta} - \left(\check{\Delta} - \check{\Delta}^e \right) \delta \check{T} + \check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s \right] ds + \int_0^1 \left(\left(\check{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta \check{\mathbf{r}} \right) ds. \quad (4.176)$$

δJ is non-linear and has to be solved via an iterative procedure. We use a classical Newton-Raphson method for which we need the linearization of δJ . We make use of the linearized quantities:

$$\delta \check{\mathbf{r}}_s = \partial_s(\delta r_1)\check{\mathbf{e}}_1 + \partial_s(\delta r_2)\check{\mathbf{e}}_2 + \partial_s(\delta r_3)\check{\mathbf{e}}_3, \quad (4.177)$$

$$\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s = \partial_s(\mathfrak{d}r_1)\check{\mathbf{e}}_1 + \partial_s(\mathfrak{d}r_2)\check{\mathbf{e}}_2 + \partial_s(\mathfrak{d}r_3)\check{\mathbf{e}}_3, \quad (4.178)$$

$$\mathfrak{d}\check{\Delta}^e = \check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s. \quad (4.179)$$

to obtain the linearization of δJ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}\delta J = \int_0^1 & \left[\left(\mathfrak{d}\check{\Delta} - \mathfrak{d}\check{T} \right) \delta \check{\Delta} - \left(\mathfrak{d}\check{\Delta} - \check{\mathbf{r}}_s \cdot \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s \right) \delta \check{T} + \mathfrak{d}\check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s + \check{T} \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s \right] ds \\ & - \int_0^1 \left(\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} \right) ds. \end{aligned} \quad (4.180)$$

Time discretization. We consider an interval of time $[0, T_0]$ and we call $t_n = n\tau$ the discrete time with $n, N \in \mathbb{N}$ such as $n \leq N$ and $T_0 = N\tau$. In the present case, we can replace the time derivative notations by a dot notation. A generic quantity $a(t, s)$ is approximated at time t_n by a^n . Time discretization of displacement fields is done via a classical γ, β -algorithm as follows:

$$\check{\mathbf{r}}^{n+1} = \check{\mathbf{r}}^n + \tau \dot{\check{\mathbf{r}}}^n + \frac{1}{2}\tau^2 \left[(1 - 2\beta)\ddot{\check{\mathbf{r}}}^n + 2\beta\ddot{\check{\mathbf{r}}}^{n+1} \right], \quad (4.181)$$

$$\dot{\check{\mathbf{r}}}^{n+1} = \dot{\check{\mathbf{r}}}^n + \tau \left[(1 - \gamma)\ddot{\check{\mathbf{r}}}^n + \gamma\ddot{\check{\mathbf{r}}}^{n+1} \right]. \quad (4.182)$$

We choose the standard values $\gamma = 1/2$ and $\beta = 1/4$. Moreover, (4.181) and (4.182) can be expressed as:

$$\ddot{\check{\mathbf{r}}}^{n+1} = \frac{1}{\beta\tau^2}(\check{\mathbf{r}}^{n+1} - \check{\mathbf{r}}^n) - \frac{1}{\beta\tau}\dot{\check{\mathbf{r}}}^n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\check{\mathbf{r}}}^n, \quad (4.183)$$

$$\dot{\check{\mathbf{r}}}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\tau}(\check{\mathbf{r}}^{n+1} - \check{\mathbf{r}}^n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\check{\mathbf{r}}}^n + \tau \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\check{\mathbf{r}}}^n. \quad (4.184)$$

where the second equation has been obtained by substitution of (4.183) in (4.182). The problem is solved at time t_{n+1} knowing the values $\check{\mathbf{r}}^n$, $\dot{\check{\mathbf{r}}}^n$ and $\ddot{\check{\mathbf{r}}}^n$. Linearization of $\check{\mathbf{r}}^{n+1}$ is easily found with (4.183):

$$\mathfrak{d}\ddot{\check{\mathbf{r}}}^{n+1} = \frac{1}{\beta\tau^2}\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}^{n+1}. \quad (4.185)$$

Newton-Raphson. Initialization of the iterative process at each time step is done choosing $\check{\mathbf{r}}_1^{n+1} = \check{\mathbf{r}}^n$ and computing $\dot{\check{\mathbf{r}}}_1^{n+1}$ and $\ddot{\check{\mathbf{r}}}_1^{n+1}$ with the above relationships, that is:

$$\check{\mathbf{r}}_1^{n+1} = \check{\mathbf{r}}^n, \quad (4.186)$$

$$\dot{\check{\mathbf{r}}}_1^{n+1} = -\frac{1}{\tau\beta}\dot{\check{\mathbf{r}}}^n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\check{\mathbf{r}}}^n, \quad (4.187)$$

$$\ddot{\check{\mathbf{r}}}_1^{n+1} = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\check{\mathbf{r}}}^n + \tau \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\check{\mathbf{r}}}^n. \quad (4.188)$$

If we let k be the step counter of the Newton-Raphson iteration, at the end of each step, updates are made via the following formulas:

$$\check{\mathbf{r}}_{k+1}^{n+1} = \check{\mathbf{r}}_k^{n+1} + \mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}, \quad (4.189)$$

$$\check{\check{\mathbf{r}}}_{k+1}^{n+1} = \check{\check{\mathbf{r}}}_k^{n+1} + \frac{1}{\beta\tau^2}\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}, \quad (4.190)$$

$$\dot{\check{\mathbf{r}}}_{k+1}^{n+1} = \dot{\check{\mathbf{r}}}_k^{n+1} + \frac{\gamma}{\beta\tau}\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}, \quad (4.191)$$

$$\check{\Delta}_{k+1}^{n+1} = \check{\Delta}_k^{n+1} + \mathfrak{d}\check{\Delta}, \quad (4.192)$$

$$\check{T}_{k+1}^{n+1} = \check{T}_k^{n+1} + \mathfrak{d}\check{T}. \quad (4.193)$$

where $\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}$, $\mathfrak{d}\check{\Delta}$ and $\mathfrak{d}\check{T}$ are the solution of the problem:

Find $\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0$, $\mathfrak{d}\check{\Delta} \in \mathbb{P}_\Delta$ and $\mathfrak{d}\check{T} \in \mathbb{P}_{\check{T}}$ such that:

$$\mathfrak{d}\delta J(\check{\mathbf{r}}_k, \check{\Delta}_k, \check{T}_k)^{n+1} = -\delta J(\check{\mathbf{r}}_k, \check{\Delta}_k, \check{T}_k)^{n+1}, \quad \forall \delta\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}_0, \delta\check{\Delta} \in \mathbb{P}_\Delta \text{ and } \delta\check{T} \in \mathbb{P}_{\check{T}}.$$

We assume that convergence is reached when $\|\mathfrak{d}\check{\mathbf{r}}\| \leq \epsilon$ with $\epsilon = 10E - 8$.

4.1 Case study: drop tests

We consider two cables as describes in Table 4.8. The first cable is relatively sagged and the second cable is identical but shorter and taut. The same simulation test is performed with the two cables as illustrative examples of the Hu-Washizu model for cable.

	Sagged cable		Taut cable	
Parameters	Dimensional	Non dimensional	Dimensional	Non dimensional
L	21.00	1.00	14.84	1.00
L1	3.00	0.14	3.00	0.20
L2	4.00	0.19	4.00	0.27
L3	14.00	0.67	14.00	0.94
ρAg	40.67	7.66E-6	40.68	5.41E-6

Table 4.8: Parameters of the cables used for the drop tests

In a first time, the static solution of the cable subjected to its own weight and a point load $\mathbf{f}_{point} = 400\mathbf{e}_1 + 400\mathbf{e}_2$ at $s = 5.8$ m is found. The dynamic simulation is then performed without the point load: initial conditions reproduce a drop test. We have reported the displacements of a point located at $s = 0.5$ for the taut and sagged cases in Figures 4.7 and 4.8, respectively. Fast Fourier Transforms of the displacements of three points located at $s = 0.25$, $s = 0.5$ and $s = 0.625$ are reported in Figure 4.9 for the taut and sagged cables. It is worth noticing the good accordance with the string vibration theory in the taut case: natural frequencies are distributed according to the relation $n/(2l)\sqrt{N_3/\rho}$, where n is the order of the mode. For the first frequency, the formula would give $f_1 = 7.474$ and the FFT gives 7.471. We notice that with a drop at $s = 0.39$, anti-symmetric modes are not activated.

Figure 4.10 gives the variation of the nondimensional total energy of the two cables. The formula used is simply $Energy = 0.5 \int_0^1 \check{\Delta}^2 ds + 0.5 \int_0^1 \|\check{\mathbf{r}}_t\|^2 ds + 0.5 \int_0^1 \check{r}_1 ds$ As expected

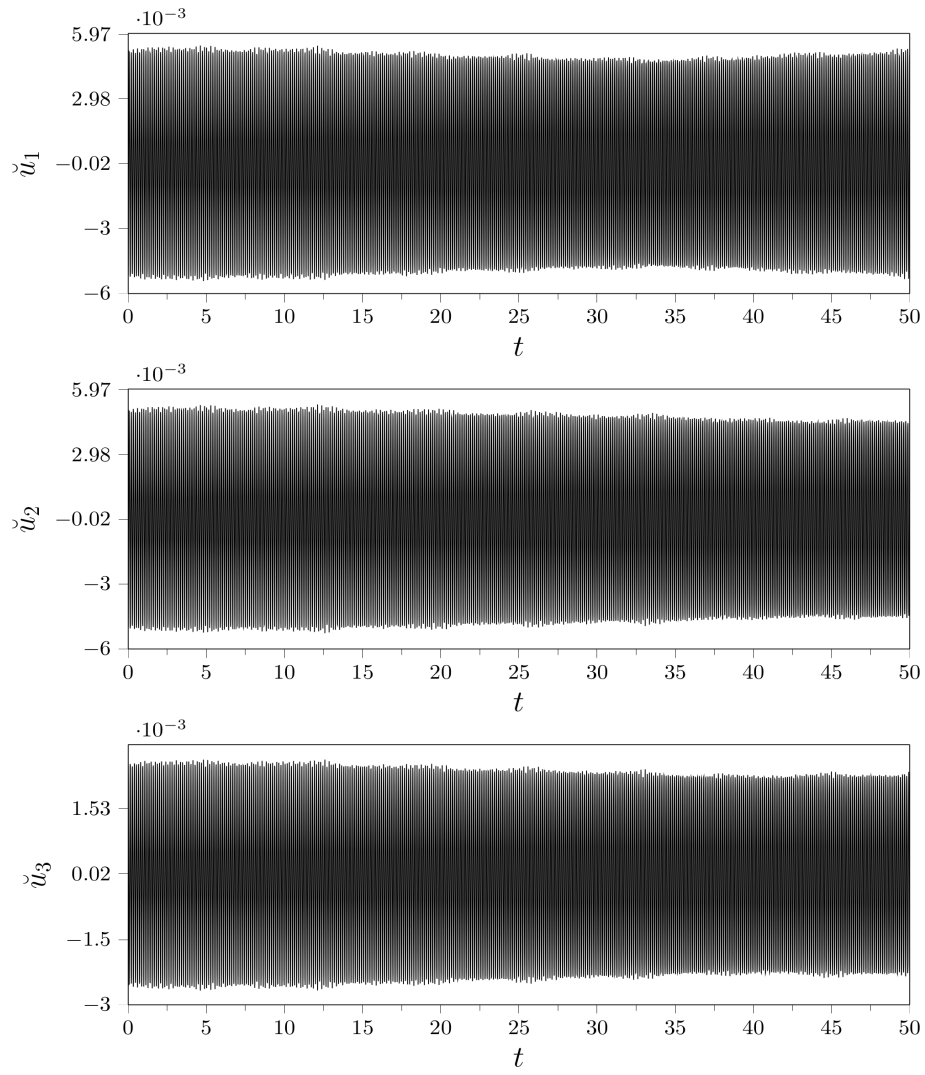


Figure 4.7: Displacement components of the point located at $s = 0.5$ for the drop test of the taut cable

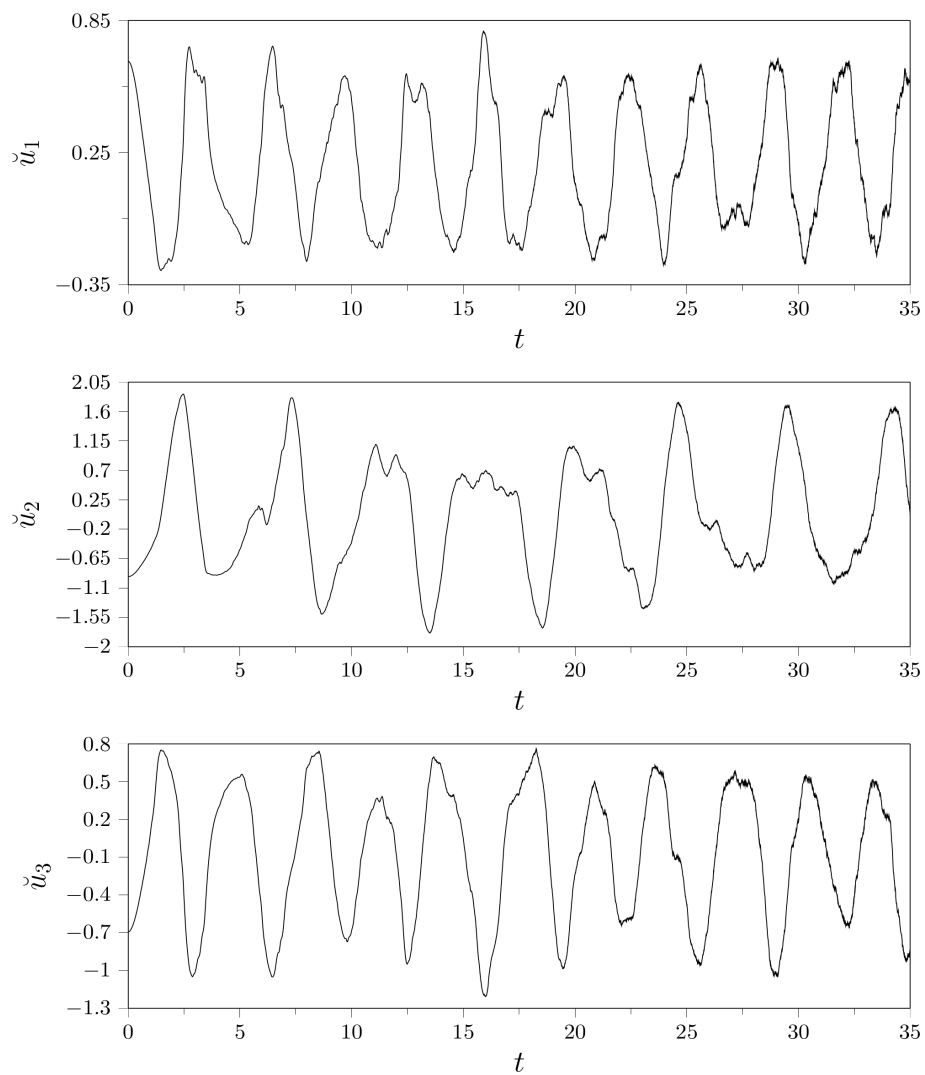


Figure 4.8: Displacement components of the point located at $s = 0.5$ for the drop test of the sagged cable

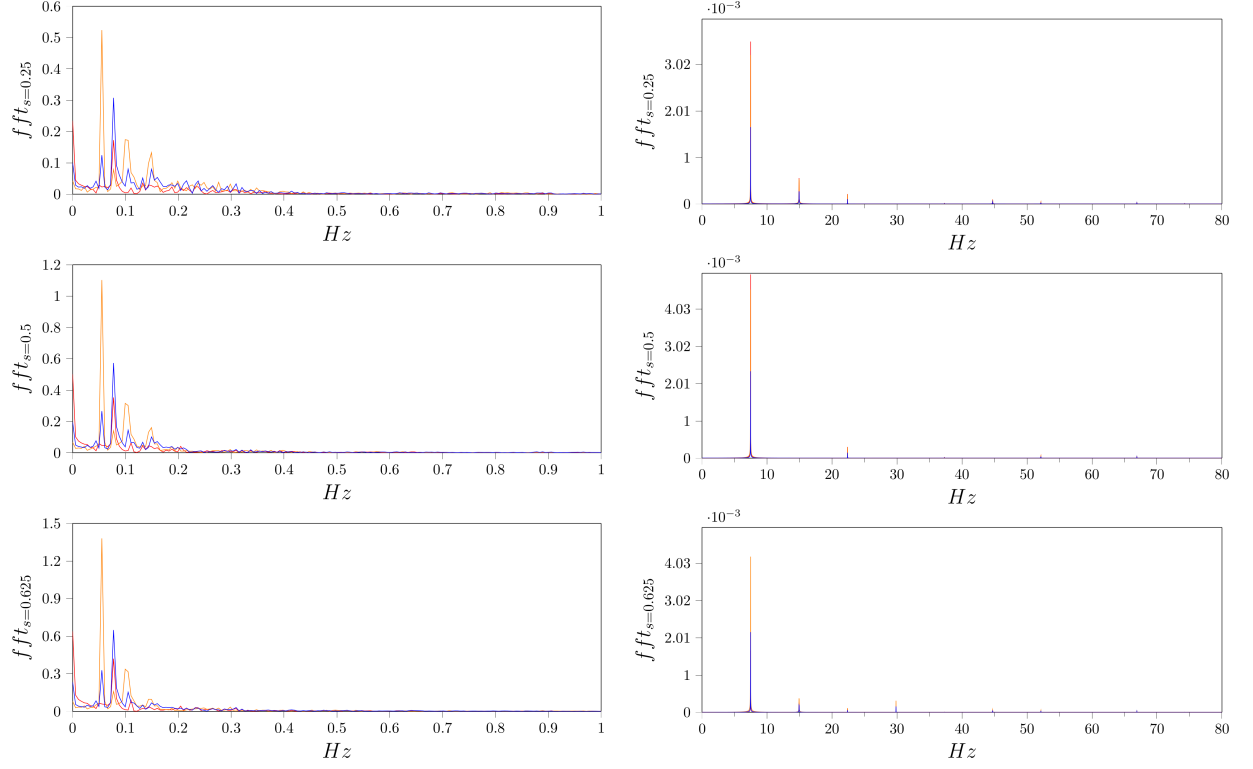


Figure 4.9: Fast Fourier Transform of the displacements of points located at $s = 0.25$, $s = 0.5$, and $s = 0.625$. Left: sagged cable, right: taut cable

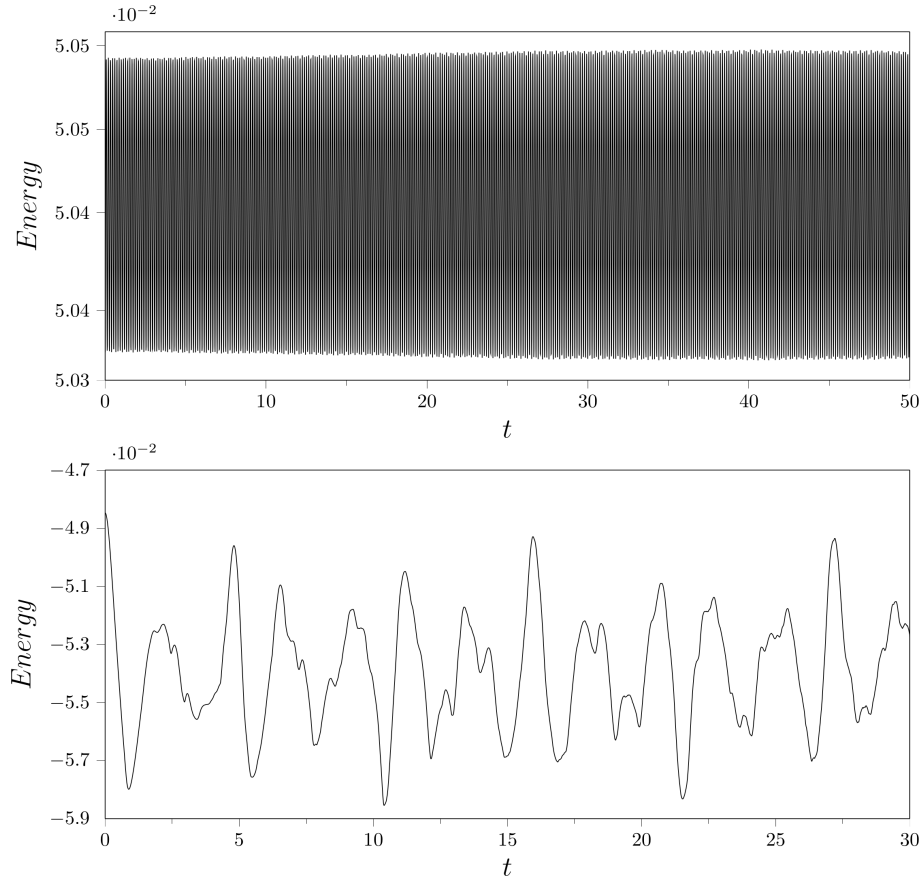


Figure 4.10: Energy during the drop simulations. Top: taut cable, bottom: sagged cable

[141] with a conservative system, the classical Newmark scheme with $\beta = 1/4$ and $\gamma = 1/2$ leads to an oscillating energy time.

5 Static configuration with flexural stiffness. Simple model

In the static configuration with flexural stiffness, the action functional $\mathfrak{A}$ is:

$$\int_0^L W ds = \int_0^L W(\eta_1, \eta_2, \nu, \check{\Gamma}_1, \check{\Gamma}_2, \check{\Gamma}_3) ds. \quad (4.194)$$

The stationarity of $\mathfrak{A}$ is obtained from (4.78):

$$\int_0^L \left(\check{n} \cdot (\delta \check{r}_s - \delta \check{\vartheta} \times \check{r}_s) + \check{m} \cdot \delta \check{\vartheta} \right) ds - \int_0^L \left(\check{f} \cdot \delta \check{r} + \check{c} \cdot \delta \check{\vartheta} \right) ds = \left[\check{n} \cdot \delta \check{r} + \check{m} \cdot \delta \check{\vartheta} \right]_0^L$$

In order to find the static configuration, external loads, constitutive laws and boundary conditions are needed.

Constitutive equations: The classic theory of geometrically exact rods uses a vectorial kind of strain measure:

$$\check{\mathbf{E}} = {}^t \mathbf{\Lambda} \check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0 \quad (4.195)$$

It is the difference evaluated on the reference configuration between the deformation in the current configuration and the deformation in the reference configuration. In the present simplified model, we want to express the strain measure in a scalar form:

$$\check{\Delta} = \sqrt{\check{\mathbf{E}} \cdot \check{\mathbf{E}}}. \quad (4.196)$$

Moreover, we choose the following curvature strain measures:

$$\check{R} := \sqrt{\check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \check{\mathbf{\Gamma}}}. \quad (4.197)$$

and we introduce the following quantities:

$$\check{Q}_1 = - \frac{\partial W}{\partial \eta_1} = - \frac{\partial W}{\partial \check{\Delta}} \frac{\partial \check{\Delta}}{\partial \eta_1} = - \frac{\partial W}{\partial \check{\Delta}} \eta_1^0 = \check{T} \check{\Delta}^{-1} \eta_1, \quad (4.198)$$

$$\check{Q}_2 = \check{T} \check{\Delta}^{-1} \eta_2, \quad (4.199)$$

$$\check{Q}_3 = \check{T} \check{\Delta}^{-1} (\nu - 1), \quad (4.200)$$

$$\check{M}_1 = - \frac{\partial W}{\partial \check{\Gamma}_1} = - \frac{\partial W}{\partial \check{R}} \frac{\partial \check{R}}{\partial \check{\Gamma}_1} = - \frac{\partial W}{\partial \check{R}} \check{R}^{-1} \check{\Gamma}_1 = \check{M} \check{R}^{-1} \check{\Gamma}_1, \quad (4.201)$$

$$\check{M}_2 = \check{M} \check{R}^{-1} \check{\Gamma}_2, \quad (4.202)$$

$$\check{M}_3 = \check{M} \check{R}^{-1} \check{\Gamma}_3. \quad (4.203)$$

With the previously defined notation: $W(\eta_1, \eta_2, \nu, \check{\Gamma}_1, \check{\Gamma}_2, \check{\Gamma}_3) = W(\check{\Delta}, \check{R})$ and considering a second order truncation of W around the stress-free configuration, we obtain the constitutive laws:

$$\check{T} = \kappa_{11} \check{\Delta}, \quad (4.204)$$

$$\check{M} = \kappa_{22} \check{R}. \quad (4.205)$$

where

$$\kappa_{11} := - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \check{\Delta}^2} \right)_{\check{\Delta}=0, \check{R}=0}, \quad (4.206)$$

$$\kappa_{22} := - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \check{R}^2} \right)_{\check{\Delta}=0, \check{R}=0}. \quad (4.207)$$

Now $\check{\mathbf{n}}$ and $\check{\mathbf{m}}$ are fully expressed in terms of the unknowns:

$$\check{\mathbf{N}} = \kappa_{11} \check{\mathbf{E}}, \quad (4.208)$$

$$\check{\mathbf{M}} = \kappa_{22} \check{\mathbf{\Gamma}}. \quad (4.209)$$

The internal energy can be written in a quadratic form:

$$W_{in} = \frac{1}{2} \kappa_{11} \check{\Delta}^2 + \frac{1}{2} \kappa_{22} \check{R}^2 \quad (4.210)$$

Its variation is:

$$\begin{aligned} \delta W_{in} &= \kappa_{11} \check{\mathbf{E}} \cdot \delta \check{\mathbf{E}} + \kappa_{22} \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}} \\ &= \check{\mathbf{N}} \cdot \delta \check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{M}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}. \end{aligned} \quad (4.211)$$

with:

$$\delta \check{\mathbf{E}} = {}^t \mathbf{\Lambda} \delta \check{\mathbf{r}}_s = {}^t \mathbf{\Lambda} (\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s), \quad (4.212)$$

$$\delta \check{\mathbf{\Gamma}} = {}^t \mathbf{\Lambda} \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \quad (4.213)$$

The expression of δW_{in} is also:

$$\delta W_{in} = - \int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s + \check{\mathbf{M}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}} \right) ds \quad (4.214)$$

where $\check{\mathbf{n}} = \check{\mathbf{\Lambda}} \check{\mathbf{N}}$. We can now rewrite our problem as:

$$\int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s + \check{\mathbf{M}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}} \right) ds - \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right]_0^L - \int_0^L \left[\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right] ds = 0. \quad (4.215)$$

where boundary conditions and external loads have to be defined.

Minimization problem: The problem can be expressed as:

Find $\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}$ and $\check{\boldsymbol{\vartheta}} \in \mathbb{W}$ minimizing :

$$J(\check{\mathbf{r}}, \check{\boldsymbol{\vartheta}}) = \int_0^L \left(W_{in}(\check{\Delta}, \check{R}) - \check{\mathbf{f}} \cdot \check{\mathbf{r}} - \check{\mathbf{c}} \cdot \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds - \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right]_0^L. \quad (4.216)$$

Non-dimensional formulation: We choose the following non-dimensional starred quantities to describe our problem:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{n}} &= \kappa_{11} \check{\mathbf{n}}^*, & \check{\mathbf{m}} &= \kappa_{11} l \check{\mathbf{m}}^*, & \check{\mathbf{r}} &= l \check{\mathbf{r}}^*, & \check{\mathbf{\Gamma}} &= \check{\mathbf{\Gamma}}^* / l, \\ s &= L s^*, & \check{\mathbf{f}} &= \kappa_{11} / l \check{\mathbf{f}}^*, & \check{\mathbf{c}} &= \kappa_{11} \check{\mathbf{c}}^*. \end{aligned}$$

Moreover we introduce the non-dimensional parameters:

$$K_{11} = 1, \quad K_{22} = \frac{\kappa_{22}}{\kappa_{11} l^2}.$$

The non-dimensional version of F is $W_{in}^*(x^*, y^*) = \frac{1}{2} K_{11} x^{*2} + \frac{1}{2} K_{22} y^{*2}$. We immediately drop the star notation, thus the non-dimensional problem is written:

Find $\check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}$ and $\check{\boldsymbol{\vartheta}} \in \mathbb{W}$ minimizing :

$$J(\check{\mathbf{r}}, \check{\boldsymbol{\vartheta}}) = \int_0^1 \left(W_{in}(\check{\Delta}, \check{R}) - \check{\mathbf{f}} \cdot \check{\mathbf{r}} - \check{\mathbf{c}} \cdot \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds - \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right]_0^1. \quad (4.217)$$

Linearization: Following the procedure developed to solve the elastic catenary problem, we want to evaluate δJ and $\delta \delta J$. δJ is given by (4.215) and is the Gâteaux derivative of $J(\check{\mathbf{r}}, \check{\boldsymbol{\vartheta}})$ in the direction $\delta \check{\mathbf{r}}, \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}}$:

$$\begin{aligned} \delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\boldsymbol{\vartheta}}) := & \int_0^1 \left(K_{11} \check{\mathbf{E}} \cdot \delta \check{\mathbf{E}} + K_{22} \check{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\Gamma}} \right) ds - \left[\check{\mathbf{n}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right]_0^1 \\ & - \int_0^1 \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds. \end{aligned} \quad (4.218)$$

The problem $\delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\boldsymbol{\vartheta}}) = 0$ is nonlinear for geometrical reasons since $\check{\boldsymbol{\Gamma}}$ is a non-linear function of $\check{\boldsymbol{\vartheta}}$. The linearization procedure leads to:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} \delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\boldsymbol{\vartheta}}) = & \int_0^1 K_{11} \mathfrak{d} \check{\mathbf{E}} \cdot \delta \check{\mathbf{E}} ds + \int_0^1 K_{11} \check{\mathbf{E}} \cdot \mathfrak{d} \delta \check{\mathbf{E}} ds \\ & + \int_0^1 K_{22} \mathfrak{d} \check{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\Gamma}} ds + \int_0^1 K_{22} \check{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \mathfrak{d} \delta \check{\boldsymbol{\Gamma}} ds. \end{aligned} \quad (4.219)$$

Recalling the strain linearizations:

$$\delta \check{\mathbf{E}} = {}^t \check{\boldsymbol{\Lambda}} \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) \quad (4.220)$$

$$\mathfrak{d} \delta \check{\mathbf{E}} = -{}^t \check{\boldsymbol{\Lambda}} \left(\mathfrak{d} \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s - \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s \right) + \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathfrak{d} \check{\mathbf{r}}_s \right) \quad (4.221)$$

$$\mathfrak{d} \check{\mathbf{r}}_s = \mathfrak{d} \check{\mathbf{r}}_s - \mathfrak{d} \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \check{\mathbf{r}}_s, \quad (4.222)$$

$$\mathfrak{d} \check{\boldsymbol{\Gamma}} = {}^t \check{\boldsymbol{\Lambda}} \mathfrak{d} \check{\boldsymbol{\vartheta}}, \quad (4.223)$$

$$\mathfrak{d} \delta \check{\boldsymbol{\Gamma}} = -{}^t \check{\boldsymbol{\Lambda}} \mathfrak{d} \check{\boldsymbol{\vartheta}} \times \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}}. \quad (4.224)$$

Comments. The model presented here is similar to the classic geometrically exact theory of rod but with only two elastic moduli. For static simulations of realistic load cases for cable, the results seem indistinguishable. It is consistent with the fact that for cables shear has a very small effect [8], and in most load cases, torsion is not activated. Two examples are given in Figure 4.11: the same load case is considered on two cables, one taut, the other sagged. The chosen load is a punctual force applied at $s = L/4$ and equals $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ in kilo-newtons.

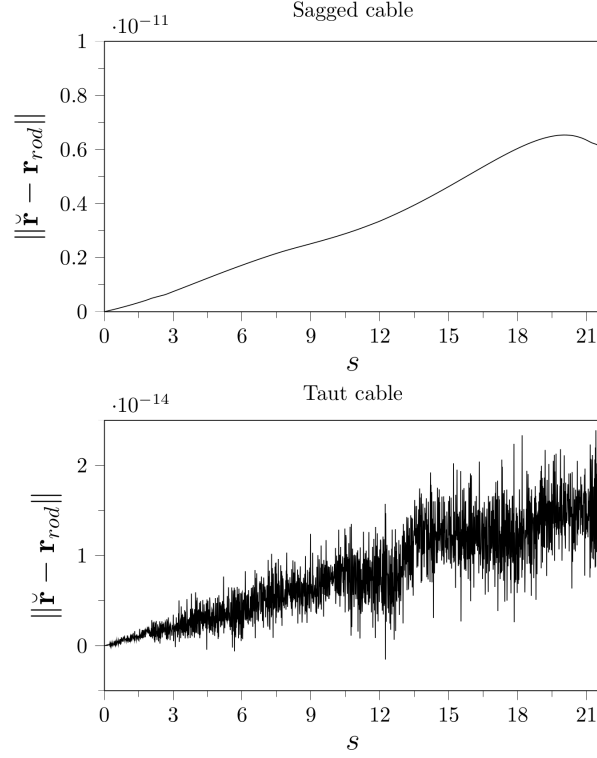


Figure 4.11: Difference between the classic model of rod and the proposed simplified model on a static load case. Top: sagged cable, bottom: taut cable

6 Dynamics of a cable with flexural stiffness. Simple model

To obtain the dynamic equations of the cable with flexural stiffness, we choose the following strain and velocity measures:

$$\check{\Delta} := \sqrt{\check{\mathbf{E}} \cdot \check{\mathbf{E}}}, \quad (4.225)$$

$$\check{R} := \sqrt{\check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \check{\mathbf{\Gamma}}}, \quad (4.226)$$

$$\check{\Upsilon} := \sqrt{\check{\mathbf{r}}_t \cdot \check{\mathbf{r}}_t}, \quad (4.227)$$

$$\check{\Omega} := \sqrt{\check{\mathbf{\Omega}} \cdot \check{\mathbf{\Omega}}}. \quad (4.228)$$

As a consequence, following the same procedure as we did in the last section, the constitutive equations are:

$$\check{\mathbf{N}} = \kappa_{11} \check{\mathbf{E}}, \quad (4.229)$$

$$\check{\mathbf{M}} = \kappa_{22} \check{\mathbf{\Gamma}}, \quad (4.230)$$

$$\check{\mathbf{v}} = \rho A^0 \check{\mathbf{r}}_t, \quad (4.231)$$

$$\check{\mathbf{o}} = \Lambda J^0 \check{\mathbf{\Omega}}. \quad (4.232)$$

Thus, the problem (4.113) can be rewritten as:

Given $\check{\mathbf{r}}(s, 0)$ and $\check{\mathbf{\Gamma}}(s, 0)$, find $\check{\mathbf{r}}$ and $\check{\mathbf{\vartheta}}$ in appropriate displacement and rotation fields such as for all $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\kappa_{11} \check{\mathbf{E}} \cdot \delta \check{\mathbf{E}} + \kappa_{22} \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}} \right) ds - \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds = \\ - \int_0^L \left(\rho A^0 \check{\mathbf{r}}_{tt} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \mathbf{\Lambda} (J^0 \mathbf{A} + \hat{\mathbf{\Omega}} J^0 \mathbf{\Omega}) \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right) ds + \left[\mathbf{n} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} + \mathbf{m} \cdot \delta \check{\mathbf{\vartheta}} \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.233)$$

for all $\delta \check{\mathbf{r}}$ and $\delta \check{\mathbf{\vartheta}}$ in appropriate displacement and small rotation fields.

The linearization of this problem is identical to the one presented for the geometrically exact rod/beam theory.

7 Conclusions

Following the path of the Cosserat brothers, the static and dynamic nonlinear equations of the cable have been recovered. Considering the problem of a simply supported cable without flexural stiffness, two variational formulations and their linearizations have been presented: the first one is a displacement only description of the cable while the second one is a Hu-Washizu kind of variational formulation. Pros and cons of the implementations of the two formulations have been discussed thanks to practical examples. Despite its larger number of unknowns, the Hu-Washizu formulation appears to converge faster. Illustrative dynamic examples show the reliability of the FEnICS implementation. In the last section, an original formulation for the nonlinear cable with flexural stiffness is proposed. Using the classic Reissner vectorial strain measure, a simple constitutive law is introduced thanks to two moduli of elasticity only, corresponding to axial and bending deformations. The model is not used in the present work but static simulations have shown its consistency with the classic geometrically exact model for rods and its suitability for cable monitoring purposes.

Chapter 5

Inverse problems

In this chapter, two inverse problems are presented: the first one uses the Hu-Washizu formulation for a cable presented in the previous chapter to minimize a displacements and strains misfit data functional. The second inverse problem is similar to the first, but relies on the geometrically exact theory of rods. The idea is to reap the benefits of a richer model that makes possible the use of a curvature based misfit data functional. The monitoring system able to measure curvature on cables is not available yet but the inverse problem can already be used for rods as it will be shown in the second part of the chapter. As it has been done for the geometrically exact model of cable without flexural stiffness, a Hu-Washizu kind of formulation is proposed.

The two inverse problems start with a parametric study from which it is possible to construct a strategy for the identification of the cable/rod parameters. The two obtained inverse problems consist in a two-step identification procedure. First, the length L of the cable is approximately found via a simple line search algorithm using finite differences to estimate the functional derivative with respect to L . Second, the other physical parameters are assessed using an adjoint method for which direct problem, adjoint problem and parameters sensitivities are found as derivatives of a Lagrangian functional with respect to dual variables, primary variables and parameters, respectively. The proposed methods do not allow exact parameters identification but do lead to a good tension assessment.

As an introduction to the inverse problem for cable/rods with flexural stiffness, effects of misalignment of clamped anchorages are investigated. The complete study can be found in [8] Annex E.

Contents

1	Inverse problem: general matters	120
2	Parametric studies and inverse problems	121
2.1	Simple model	121
2.2	Cable with flexural stiffness	132
3	Conclusion	155

1 Inverse problem: general matters

Our problem is an optimization problem. To describe it, we introduce three Hilbert spaces, namely the parameters space $\mathbb{M}$, the state space $\mathbb{U}$ and the data space $\mathbb{D}$.

The state equation gives the implicit relation between the parameters and the state:

$$F(a, u) = 0, \quad a \in \mathbb{M}, \quad u \in \mathbb{U} \quad (5.1)$$

The observation equation gives the relation between the observed data and the state:

$$d = Hu, \quad u \in \mathbb{U} \quad (5.2)$$

where H is the observation operator. Our problem is to find the parameters a such that $d = H(S(a))$ where $S(a)$ is the solution of $F(a, S(a)) = 0$. Let ϕ be the implicit function such that $\phi(a) = H(S(a))$. In practice, it is easier to minimize $|\phi(a) - d|$ than to find $\phi(a) = d$ and the problem can be rewritten as:

$$\text{Find } a \in \mathbb{M} \text{ such that } J(a) = \min J(m) = \min \frac{1}{2} \|\phi(m) - d\|_{\mathbb{D}}^2 \text{ for all } m \in \mathbb{M}_a \subset \mathbb{M}$$

This problem is well-posed according to Hadamard [142] iff i) a solution exists, ii) the solution is unique and iii) the solution's behavior changes continuously with the initial conditions. In our case, we can assume requirements i) and iii) *a priori* fulfilled. On the contrary, requirement ii) is more difficult to meet. For instance, we know that for the static elastic catenary problem, the solution is not unique whenever $\dim \mathbb{M} \geq 2$. In fact, for a given span, the static elastic catenary problem has only three parameters, namely its length L - or its sag - , its rigidity EA and its mass per unit length ρA . The subset $\mathbb{M}_a \subset \mathbb{M}$ can be introduced to reduce the ill-positioning of the problem but leads to a less interesting inverse problem in practice.

To solve the problem, we need to compute the gradient of $J(m)$. In the following, we use two techniques. Because the length of the cable L plays a preponderant role in tension assessment, we decide to treat its identification first, letting $J = J(m, L) = J(L)$ and freezing the other m parameters values to their initial guess values. The gradient of $J(L)$ can be easily estimated with finite difference formulas and using the direct problem. Once a length L has been found, we use an adjoint method to find the other m parameters of the cable. In the following, we briefly present the methodology used to find the gradient of $J(m)$. An introduction to inverse problem can be found in [143] or in [144]. If we consider u and a as independent variables, we can build a Lagrangian functional using $F(a, u)$ as a constraint of the minimization problem:

$$\mathfrak{L}(u, m, p) = \frac{1}{2} \|\phi(m) - d\|_{\mathbb{D}}^2 - \langle p, F(m, u) \rangle, \quad \forall p \in \mathbb{A} \quad (5.3)$$

where p is the Lagrangian multiplier of the constraint $F(m, u) = 0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product used and $\mathbb{A}$ is an Hilbert space.

The partial derivative of $\mathfrak{L}(u, m, p)$ with respect to p gives the variational formulation of the state equations:

$$\langle \delta p, F(m, u) \rangle = 0, \quad \forall \delta p \in \mathbb{A} \quad (5.4)$$

The partial derivative of $\mathcal{L}(u, m, p)$ with respect to u gives the variational formulation of the adjoint equations:

$$\langle H\delta u, Hu - d \rangle - \langle p, \partial_u F(m, u)\delta u \rangle = 0, \quad \forall \delta u \in \mathbb{U} \quad (5.5)$$

For $u(m)$ solution of the direct variational problem (5.4), we have:

$$\mathcal{L}(u(m), m, p) = J(m), \quad \text{for all } p \in \mathbb{A}. \quad (5.6)$$

A differentiation leads to:

$$\partial_m \mathcal{L}(u(m), m, p)\delta m + \partial_u \mathcal{L}(u(m), m, p)\delta u + \partial_p \mathcal{L}(u(m), m, p)\delta p = J_m(m)\delta m \quad (5.7)$$

Clearly $\partial_p \mathcal{L}(u(m), m, p)\delta p = 0$ since $F(m, u(m)) = 0$. Thus:

$$\partial_m \mathcal{L}(u(m), m, p)\delta m + \partial_u \mathcal{L}(u(m), m, p)\delta u = J_m(m)\delta m \quad (5.8)$$

Moreover, if p is the solution of the adjoint problem (5.5), $\partial_u \mathcal{L}(u(m), m, p)\delta u = 0$ and we have:

$$\partial_m \mathcal{L}(u(m), m, p)\delta m = J_m(m)\delta m \quad (5.9)$$

which is also:

$$\langle p, \partial_m F(u(m), m, p)\delta m \rangle = J_m(m)\delta m \quad (5.10)$$

In finite-dimensional space, we can use the relation between the differential of $J(m)$ and its gradient $J_m(m)\delta m = \nabla J(m)^t \delta m$. Once the gradient of J is found, a Barzilai-Borwein [145] algorithm is used to update the parameters.

2 Parametric studies and inverse problems

2.1 Simple model

In the following, we consider simple cables without flexural rigidity.

Irvine parameter

Irvine parameter λ has been introduced to characterize the cable behavior. It accounts for geometric and elastic effects and allows to distinguish which effect governs the cable response. It has been widely studied and is a very-well known parameter for cable's design. Its definition can be found in [72] Chapter 2 and is:

$$\lambda^2 = \left(\rho A g l / \check{N}_h \right)^2 l / \left(\check{N}_h L / EA \right) \approx E(\rho g l)^2 A^3 / \check{N}_h^3 \quad (5.11)$$

where $\check{N}_h$ is the horizontal component of the tension which is constant along the cable in classical cable models. Introducing θ_0 , the angle between the tangent of the cable at its upper end and its chord and assuming a safety factor γ and a yield stress f_y , we have:

$$\lambda^2 = \frac{E(\rho g)^2 \gamma^3}{f_y^3} \left(\frac{\check{N}_{max}}{\check{N}_h} \right)^3 l^3 / L \approx \frac{E(\rho g)^2 \gamma^3}{f_y^3} \cos^{-3}(\theta_0) l^3 / L. \quad (5.12)$$

where $\gamma = Af_y/\check{N}_{max}$. With steel cables, we can assume that $\rho \approx 7810 \text{ kg.m}^{-3}$, $E \approx 170000 \text{ MPa}$, $f_y \approx 1660 \text{ MPa}$ and $\gamma \approx 2.3$. For bars, we have $\rho \approx 7850 \text{ kg.m}^{-3}$, $E \approx 210000 \text{ MPa}$, $f_y \approx 355 \text{ MPa}$ and $\gamma \approx 2$. It leads to the following estimates for cables and bars:

$$\lambda_{cable}^2 \approx 2.65 \cdot 10^{-6} \cos^{-3}(\theta_0) l^3 / L, \quad (5.13)$$

$$\lambda_{bar}^2 \approx 2.23 \cdot 10^{-4} \cos^{-3}(\theta_0) l^3 / L \quad (5.14)$$

As reported in [72], there is a cutoff value for λ^2 at 24 *above which* [the cable's] *response has more in common with a heavy cable and below which it is akin to that expected of a taut string*. Relation (5.12) can give an idea of Irvine parameter just looking at the design project of the structure.

Taut cables

We choose to study a cable whose characteristics are reported in Table 5.1.

Variable	Name	Units	Value
L	cable length	m	21.567
ρA	mass per unit length	kg.m ⁻¹	2.969
EA	axial stiffness	N	48466900
l	span	m	21.658

Table 5.1: Main characteristics of the studied cable

As already mentioned, the length of the cable is often unknown while its span can be assessed. It is interesting to have an idea of the sensibility of γ with respect to the cable length. As it has been determined for the studied cable - see Figure 5.1 - if the cable length is known with a precision of 5 mm around its design value 21.567 m, γ varies from 2.18 to 2.43. When we make the same calculations with a length L varying in a range of ± 0.02 m, γ varies from 1.88 to 2.95. As expected, adding a 102 kg mass has a significant impact on γ and λ whenever the tension is low. Red curves of Figure 5.1 have been calculated with a localized mass of 1.0 kN positioned at $s = L/4$. Calculations have been generated with our routines, but can be easily checked with semi-analytic solutions given by [72]. Grey and black points show two cables with $L = 21.567$ m, $\gamma = 2.3$ (well-designed cable) and with $L = l$ and $\lambda^2 = 24$ (cutoff values for λ)

A last comment can be made on Irvine parameter: when we look at the γ graph in Figure 5.1, it is possible to see that the cutoff in behavior appears for high values of γ (around 50). Despite its theoretical importance, we will not use Irvine parameter in the following but will keep in mind that in most cases, we will work far away from its cutoff value.

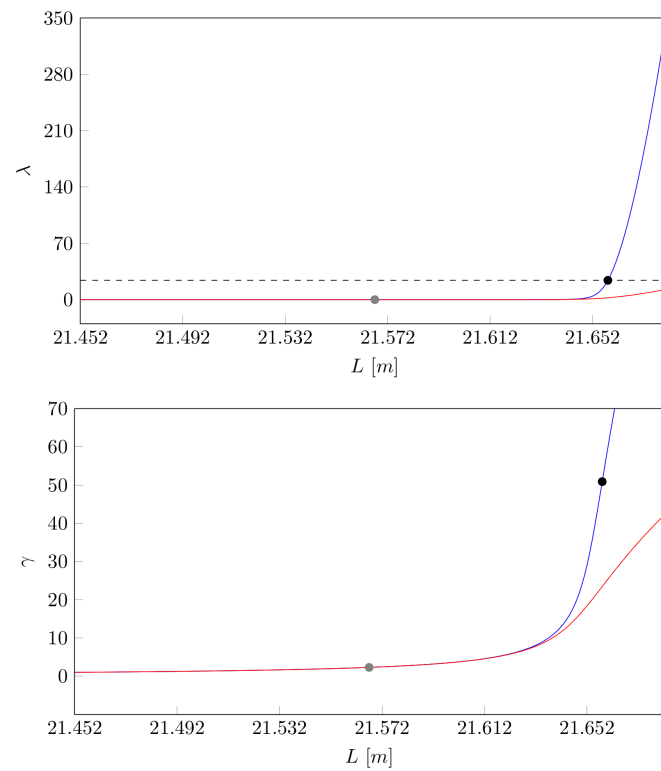


Figure 5.1: Safety factor γ and corresponding Irvine parameter λ when L varies at constant span l . Grey point: well designed cable. Black point: cable with $\lambda^2 = 24$. Red line: cable with additional localized mass at $s = L/4$. Blue line: cable without additional mass.

Data misfit functional

We suppose that the monitoring system consists of three strain gauges, two displacements sensors and a force sensor. Our goal is to recover the tension of the cable in its static configuration. We use the response of the cable to an applied load to study the following misfit data functional between two configurations a and b :

$$\mathfrak{J} = J_{def} + J_{depl} \quad (5.15)$$

$$J_{def} = \sum_{i=1}^3 \frac{10^{12}}{2} \left[\left(\check{\Delta}^{i,b} - \check{\Delta}^{i,a} \right) - \left(\Delta^{i,b} - \Delta^{i,a} \right) \right]^2 \quad (5.16)$$

$$J_{depl} = \sum_{j=1}^2 \frac{10^4}{2d_c^2} \left[\left(\check{r}_1^{j,b} - \check{r}_1^{j,a} \right) - \left(r_1^{j,b} - r_1^{j,a} \right) \right]^2 \quad (5.17)$$

where d_c is the diameter of the cable, superscripts i and j are the sensor numbers, superscripts a and b denote the load step, breve quantities are calculated via the direct problem 4.148 and other quantities are simulated measures with $\rho A = 2.96883 \text{ kg.m}^{-1}$ and $EA = 48466920 \text{ N}$. Weighting parameters in J_{def} and J_{depl} are such that 1) accuracies of the sensors are respected and 2) the two quantities J_{def} and J_{depl} are of the same order of magnitude.

Parametric study

We introduce the following non-dimensional parameters:

$$\begin{aligned} L^* &= L/l & l^* &= 1.0 & \kappa &= EA/EA_{th} & m &= 10^6 \rho A l / EA_{th} \\ \check{T}^* &= \check{T}/EA_{th} & \check{r}^* &= \check{r}/l & s^* &= s/l \end{aligned}$$

where $EA_{th} = 180000 \cdot 10^6 \times 0.75 \times 0.25 \times \pi d_c^2 \text{ N}$. We immediately drop the star notation. Note that m is not really non-dimensional but $-10^{-6} m g \mathbf{e}_1$ is. The additional point load $\mathbf{f}_{mass}$ is also made non-dimensional via $\mathbf{f}_{mass}/EA_{th}$.

If the length L is known Solving the direct variational problem with various (ρA) , (EA) and L , L being the same in configuration a and b , leads to the results shown in Figure 5.2. As it can be seen, once the length L is known and is around its design value, two situations can occur i) the cable is taut enough and we can find the tension looking at J_{depl} and taking advantage of its poor sensitivity to uncertainties on mass per unit length of cable and ii) the cable is more shallow and the problem can be solved with $J_{def} + J_{depl}$. This second case is not really within the scope of our study but seems to be easier to solve than the first case. We assume that it is the reason why the suspension of a suspended bridge is tuned via the control of the sag of the main parabolic cable. If we consider traditional frequency based methods, the determination of the tension is supposed to be easier in the taut case but it requires a good precision on the mass per unit length.

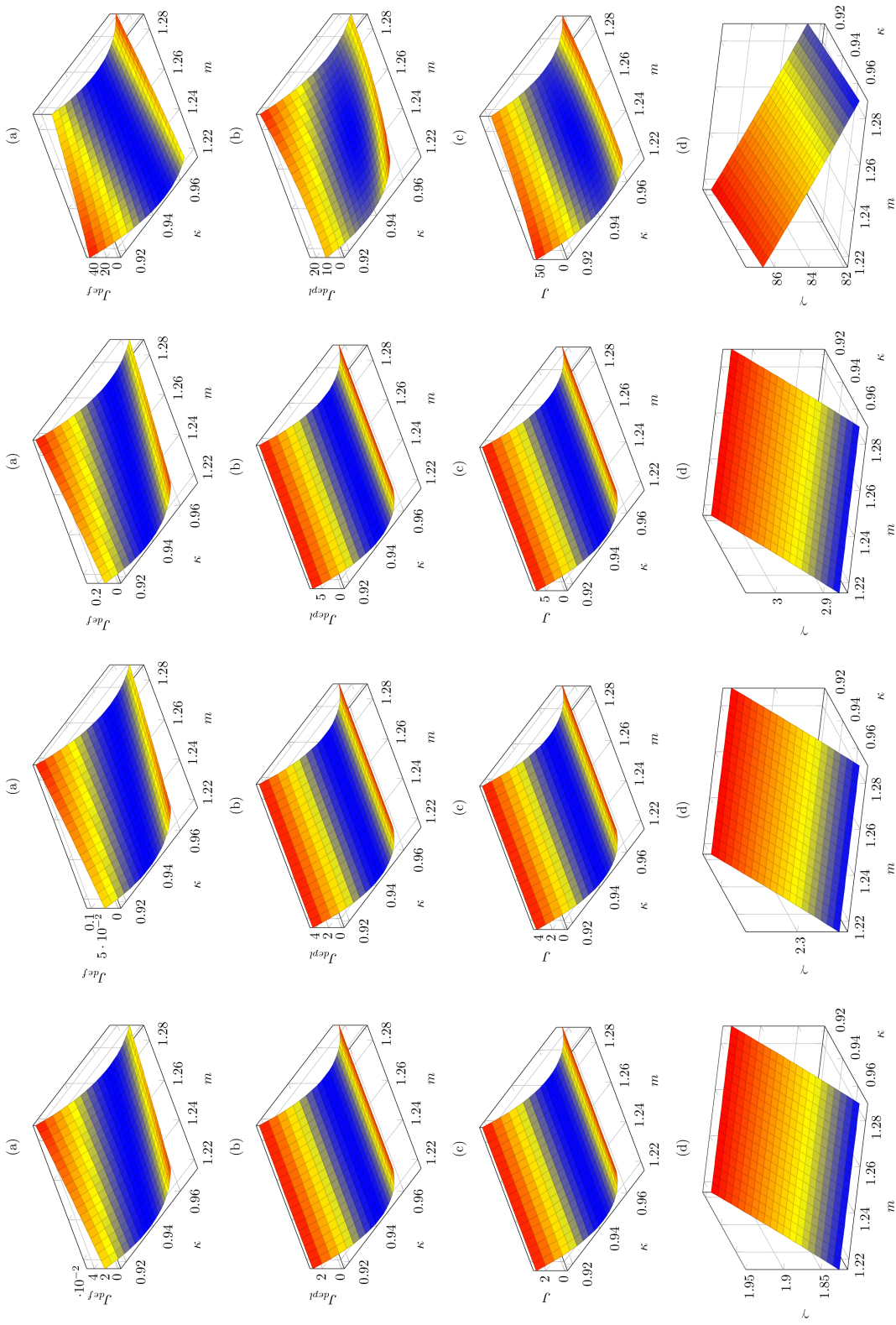


Figure 5.2: Graph are sorted by column and show the variation of J_{def} , J_{depl} and γ for $\rho A \in [2.88, 3.06]$ kg.m⁻¹, $EA \in [47020000, 49921000]$ N and for 4 different L . Parameters to be found are $\rho A = 2.96883$ kg.m⁻¹ and $EA = 48466920$ N which corresponds to $\kappa = 9.444 \cdot 10^{-1}$ and $m = 1.253$. From left to right in meters: $L = 21.547$, $L = 21.567$, $L = 21.587$ and $L = 21.667$.

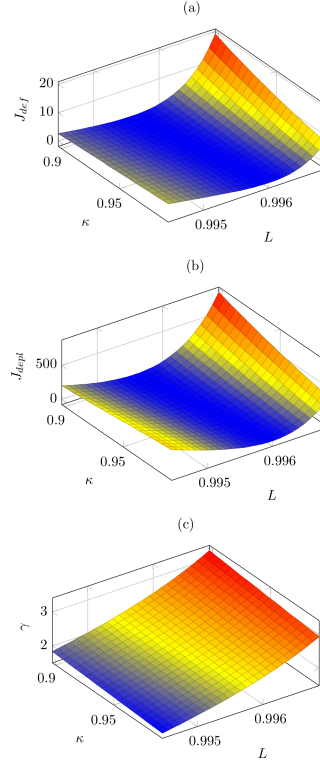


Figure 5.3: Parametric study with $\rho A = 2.96883 \text{ kg.m}^{-1}$, L and κ varying of $\pm 5\%$ around their target values.

If the length L is unknown Paying now attention to the two parameters EA and L and making a new parameter study shown in Figure 5.3, we notice that the problem is not really sensitive to small variations of EA while a small uncertainty on L changes completely both J_{depl} and J_{def} . Of course, this is no more true when EA varies with a large amplitude (say more than 5%). In fact, when we are looking at the minimal values of $\mathfrak{J}$, a small increase in L goes along a small increase of EA , in accordance with the physical meaning of $\mathfrak{J}$: to some extent, it is possible to have similar response to a specific load case with two different cables if the longest is stiffer.

In Figure 5.4, we present a parametric study of the same problem, but with L being different for the true cable and the simulated cable. The length of the true -here simulated- cable is $L = 21.567 \text{ m}$, other parameters are $\kappa = 9.444 \cdot 10^{-1}$ and $m = 1.253$. Tested lengths vary from $L = 21.565$ to $L = 21.569 \text{ m}$. If we look at the (d) graphs, we can see the expected high sensitivity of the tension with respect to the cable length. Considering (c) and (d) graphs together, it is possible to see that the targeted $\gamma = 2.3$ can be found via a minimization problem even when $L \neq 21.567 \text{ m}$: the stiffness of the cable κ for which $\mathfrak{J}$ is minimum when $L \neq 21.567 \text{ m}$ will be over- or under-estimated but will lead to reasonably good tension estimation. In fact, in this specific case, the stiffness that will be found via the inverse problem will compensate the length inaccuracy: if we assume $L \geq 21.567 \text{ m}$, then the minimum of $\mathfrak{J}$ is found for $\kappa \geq 9.444 \cdot 10^{-1}$ but the corresponding γ is still 2.3.

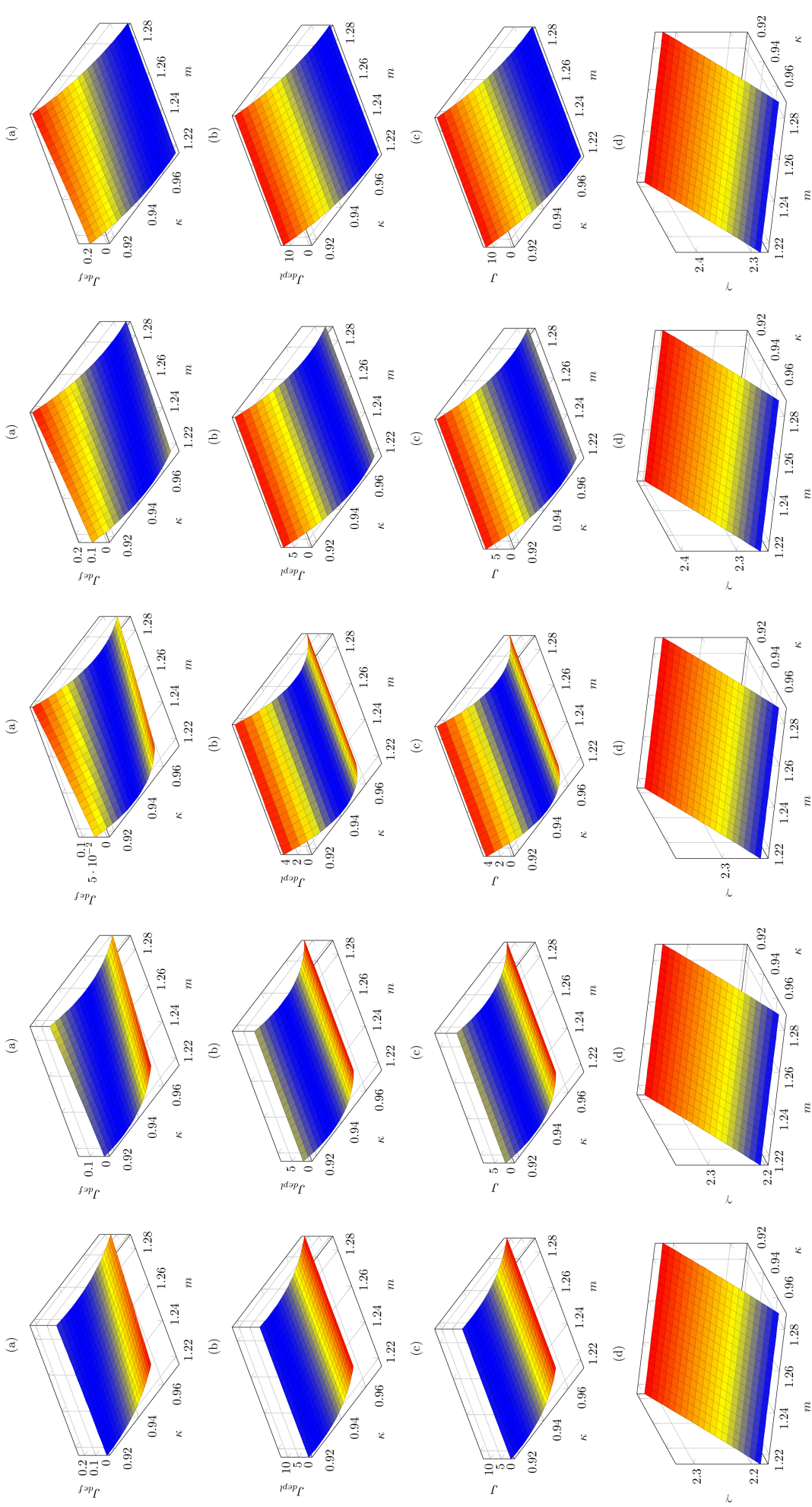


Figure 5.4: Graph are sorted by column and show the variation of J_{def} , J_{dept} and γ for $\rho A \in [2.88, 3.06]$ kg.m^{-1} , $EA \in [47020000, 49921000]$ N and for 5 different L . True cable has been simulated with $L = 21.567$ m, $\kappa = 9.444 \cdot 10^{-1}$ and $m = 1.253$. From left to right, in meters: $L = 21.565$, $L = 21.566$, $L = 21.567$, $L = 21.668$ and $L = 21.569$.

Inverse problem

For derivation purposes, we rewrite the functional with

$$J_{def} = \sum_{i=1}^3 \frac{10^{12}}{2} \left[\int_0^L \left(\check{\Delta}^{i,b} - \check{\Delta}^{i,a} \right) \psi^i(s) ds - \left(\Delta^{i,b} - \Delta^{i,a} \right) \right]^2 \quad (5.18)$$

$$J_{depl} = \sum_{j=1}^2 \frac{10^4}{2d_c^2} \left[\int_0^L \left(\check{r}_1^{j,b} - \check{r}_1^{j,a} \right) \psi^j(s) ds - \left(r_1^{j,b} - r_1^{j,a} \right) \right]^2 \quad (5.19)$$

where $\psi^i(s) = n/L \text{ Dirac}(s - s^i)$, n being the number of mesh element. The two factors $10^{12}/2$ and $10^4/2d_c^2$ were tuned to have the same order of magnitude between J_{def} and J_{depl} keeping in mind the expected precision of strain gauges and displacements sensors.

The **Lagrangian** $\mathfrak{L}$ is defined as follows:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{J} - J^b - J^a \quad (5.20)$$

where J^b is:

$$J^b = \int_0^L \left[\left(\kappa \check{\Delta}^b - \check{T}^b \right) \check{\Delta}^{*b} + \check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^b \cdot \check{\mathbf{r}}_s^{*b} - \left(\check{\Delta}^b - \check{\Delta}^{e,b} \right) \check{T}^{*b} - \mathbf{f}^b \cdot \check{\mathbf{r}}^{*b} \right] ds \quad (5.21)$$

and J^a has the same expression with a superscripts instead of b . We recall that $\check{\Delta}^e := \frac{1}{2} (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1)$ is the strain expressed in displacements.

Direct variational problem is obtained via $\mathfrak{L}$ derivatives with respect to starred quantities (dual variables):

$$\delta J^b = \int_0^L \left[\left(\kappa \check{\Delta}^b - \check{T}^b \right) \delta \check{\Delta}^{*b} + \check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^b \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s^{*b} - \left(\check{\Delta}^b - \check{\Delta}^{e,b} \right) \delta \check{T}^{*b} - \mathbf{f}^b \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^{*b} \right] ds = 0 \quad (5.22)$$

and δJ^a has the same expression with a superscripts instead of b .

An integration by parts of (5.22) gives:

$$\int_0^L \left[\left(\kappa \check{\Delta}^b - \check{T}^b \right) \delta \check{\Delta}^{*b} - \left(\left(\check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^b \right)_s + \mathbf{f}^b \right) \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^{*b} - \left(\check{\Delta}^b - \check{\Delta}^{e,b} \right) \delta \check{T}^{*b} \right] ds + \left[\check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^b \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^{*b} \right]_0^L = 0$$

which in turn leads to the strong form of the direct problem in b :

Equilibrium equations:	$\left(\check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^b \right)_s + \mathbf{f}^b = \mathbf{o}$
Constitutive law:	$\check{T}^b = \kappa \check{\Delta}^b$
Strain-displacements relationships:	$\check{\Delta}^b = \check{\Delta}^{e,b}$
Boundary conditions:	$\check{\mathbf{r}}^b(0), \check{\mathbf{r}}^b(L)$ given

Same equations with a superscripts complete the direct problem.

Adjoint problem is obtained thanks to the derivatives of $\mathfrak{L}$ with respect to primal variables:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_0^L \left(10^{12} \left(\int_0^L (\check{\Delta}^{i,b} - \check{\Delta}^{i,a}) \psi^i(s) ds - (\Delta^{i,b} - \Delta^{i,a}) \right) \right) \psi^i(s) \delta \check{\Delta}^b ds \\ & + \sum_{j=1}^2 \int_0^L \left(\frac{10^4}{d_c^2} \left(\int_0^L (\check{r}_1^{j,b} - \check{r}_1^{j,a}) \psi^j(s) ds - (r_1^{j,b} - r_1^{j,a}) \right) \right) \psi^j(s) \mathbf{e}_1 \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^b ds \\ & = \int_0^L \left[\left(\kappa \check{\Delta}^{*b} - \check{T}^{*b} \right) \delta \check{\Delta}^b + \left(\check{\mathbf{r}}_s^b \cdot \check{\mathbf{r}}_s^{*b} - \check{\Delta}^{*b} \right) \delta \check{T}^b + \left(\check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^{*b} + \check{T}^{*b} \check{\mathbf{r}}_s^b \right) \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s^b \right] ds \end{aligned} \quad (5.23)$$

and

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^3 \int_0^L \left(10^{12} \left(\int_0^L (\check{\Delta}^{i,b} - \check{\Delta}^{i,a}) \psi^i(s) ds - (\Delta^{i,b} - \Delta^{i,a}) \right) \right) \psi^i(s) \delta \check{\Delta}^a ds \\ & - \sum_{j=1}^2 \int_0^L \left(\frac{10^4}{d_c^2} \left(\int_0^L (\check{r}_1^{j,b} - \check{r}_1^{j,a}) \psi^j(s) ds - (r_1^{j,b} - r_1^{j,a}) \right) \right) \psi^j(s) \mathbf{e}_1 \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^a ds \\ & = \int_0^L \left[\left(\kappa \check{\Delta}^{*a} - \check{T}^{*a} \right) \delta \check{\Delta}^a + \left(\check{\mathbf{r}}_s^a \cdot \check{\mathbf{r}}_s^{*a} - \check{\Delta}^{*a} \right) \delta \check{T}^a + \left(\check{T}^a \check{\mathbf{r}}_s^{*a} + \check{T}^{*a} \check{\mathbf{r}}_s^a \right) \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s^a \right] ds \end{aligned} \quad (5.24)$$

Strong forms of the adjoint problem can be recovered from (5.23) and (5.24). Let $f^{\Delta,b}$, $\mathbf{f}^{r,b}$ be the following quantities:

$$\begin{aligned} f^{\Delta,b} &= - \sum_{i=1}^3 10^{12} \left(\int_0^L (\check{\Delta}^{i,b} - \check{\Delta}^{i,a}) \psi^i(s) ds - (\Delta^{i,b} - \Delta^{i,a}) \right) \psi^i(s), \\ \mathbf{f}^{r,b} &= - \sum_{j=1}^2 \frac{10^4}{d_c^2} \left(\int_0^L (\check{r}_1^{j,b} - \check{r}_1^{j,a}) \psi^j(s) ds - (r_1^{j,b} - r_1^{j,a}) \right) \psi^j(s) \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Let $f^{\Delta,a}$, $\mathbf{f}^{r,a}$ be similar quantities with a superscripts. An integration by parts of (5.23) gives:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\left(\check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^{*b} + \check{T}^{*b} \check{\mathbf{r}}_s^b \right)_s + \mathbf{f}^{r,b} \right) \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^b ds - \left[\left(\check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^{*b} + \check{T}^{*b} \check{\mathbf{r}}_s^b \right) \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^b \right]_0^L \\ & = \int_0^L \left[\left(\kappa \check{\Delta}^{*b} - \check{T}^{*b} - f^{\Delta,b} \right) \delta \check{\Delta}^b + \left(\check{\mathbf{r}}_s^b \cdot \check{\mathbf{r}}_s^{*b} - \check{\Delta}^{*b} \right) \delta \check{T}^b \right] ds \end{aligned}$$

where $\delta \check{\mathbf{r}}^b(0) = \delta \check{\mathbf{r}}^b(L) = \mathbf{o}$. The strong form of the adjoint problem has the following form:

Adjoint equilibrium equations:	$\left(\check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^{*b} + \check{T}^{*b} \check{\mathbf{r}}_s^b \right)_s + \mathbf{f}^{r,b} = \mathbf{o}$
Adjoint constitutive law:	$\check{T}^{*b} = \kappa \check{\Delta}^{*b} - f^{\Delta,b}$
Adjoint strain-displacements relationships:	$\check{\Delta}^{*b} = \check{\mathbf{r}}_s^b \cdot \check{\mathbf{r}}_s^{*b}$
Boundary conditions:	$\check{\mathbf{r}}^{*b}(0) = \check{\mathbf{r}}^b(0), \check{\mathbf{r}}^{*b}(L) = \check{\mathbf{r}}^b(L)$

We notice the introduction of an additional term in the equilibrium equations and in the constitutive law due to the misfit data functional. Moreover, it is possible to see in

the strain-displacements relationships and in the equilibrium equations the nature of the adjoint problem which has the same structure than the linearized direct problem around its equilibrium. Same equations with a superscripts complete the adjoint problem.

Sensitivities are obtained thanks to the derivatives of $\mathfrak{L}$ with respect to m and κ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \kappa} &= - \int_0^L \left(\check{\Delta}^b \check{\Delta}^{*b} + \check{\Delta}^a \check{\Delta}^{*a} \right) \delta(\kappa) \, ds \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial m} &= - \int_0^L 10^{-6} g \mathbf{e}_1 \cdot \left(\check{\mathbf{r}}^{*b} + \check{\mathbf{r}}^{*a} \right) \delta(m) \, ds\end{aligned}$$

If m and κ are constant along the cable:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \kappa} &= - \int_0^L \left(\check{\Delta}^b \check{\Delta}^{*b} + \check{\Delta}^a \check{\Delta}^{*a} \right) \, ds \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial m} &= - \int_0^L 10^{-6} g \mathbf{e}_1 \cdot \left(\check{\mathbf{r}}^{*b} + \check{\mathbf{r}}^{*a} \right) \, ds\end{aligned}$$

Table 5.2 gives the results obtained when the length of the cable L is known. Update have been performed via Barzilai-Borwein method [145] which pseudo-code is as follows.

Let $\mathbf{x} = {}^t[\kappa, m]$ and $\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathfrak{L}$.

- Initialization:
 - choose $\mathbf{x}_0$ and $\mathbf{x}_1$,
 - assess $\mathbf{g}_0$ and $\mathbf{g}_1$ via the adjoint problem,
 - compute $d\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_0$ and $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$.
 - compute $\alpha_1 = (d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{g}_1) / (d\mathbf{g}_1 \cdot d\mathbf{g}_1)$,
 - update solution $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \alpha_1 \mathbf{g}_1$,
- While $\|\mathbf{g}_k\| \geq \varepsilon$ do:
 - compute $d\mathbf{g}_k$ and $d\mathbf{x}_k$,
 - compute $\alpha_k = (d\mathbf{x}_k \cdot d\mathbf{g}_k) / (d\mathbf{g}_k \cdot d\mathbf{g}_k)$,
 - update solution $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k$,
 - $k+ = 1$,
 - assess $\mathbf{g}_k$ via the adjoint problem.

	Target parameters	Initial parameters	Final parameters
L [m]	21.567	21.567	21.567
l [m]	21.658	21.658	21.658
ρA [kg.m ⁻¹]	2.969	2.909	2.968
EA [N]	48466920	50890266	48467936
m	1.252955	1.278014	1.252787
κ	0.944444	0.991666	0.944464
γ	2.299444	2.189959	2.299396

Table 5.2: Numerical results of the inverse problem when the length L of the cable is known.

Finding the tension: Since the problem is ill-conditioned, for the multiplicity of solutions $L, \rho A, EA$, we choose to address first the length search at fixed ρA and EA and then use the inverse problem written above to find the good tension of the cable. In doing this, we will not be able to find true parameters $L, \rho A, EA$, but the tension will be assessed. Length search is done in a very simple way via a line search method. It uses the direct problem to numerically assess the derivative of $\mathfrak{J}$ with respect to L . Its pseudo code is:

- Initialization:
 - Fix $\rho A, EA, L_0$ and a parameter $h \in]0, 0.01]$
 - Evaluate $\mathfrak{J}_0$ via direct problem
 - Set $L_1 = L_0 - h$
 - Evaluate $\mathfrak{J}_1$ via direct problem
 - Find the descent direction $d_1 = \text{sgn}(dJ)$ with $dJ = (\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_0)/(L_1 - L_0)$
 - Update $L_3 = L_2 - hd_1$
- While $h > 10^{-10}$
 - Evaluate $\mathfrak{J}_k$ via direct problem
 - Find the descent direction $d_k = \text{sgn}(dJ_k)$ with $dJ_k = (\mathfrak{J}_k - \mathfrak{J}_{k-1})/(L_k - L_{k-1})$
 - Backtracking test:
 - * If $d_k d_{k-1} > 0$ then $L_k = L_{k-1} - hd_k$
 - * Else $h = h/a$ with $a \geq 2$ and $L_k = L_{k-1} - hd_k$

Once L have been found, we can tune EA and ρA with the inverse problem presented above. Table 5.3 show the results obtained starting with $L = 0.9999l$.

	Target parameters	Initial parameters	Final parameters
L [m]	21.567	21.656	21.569
l [m]	21.658	21.658	21.658
ρA [kg.m ⁻¹]	2.969	3.058	2.969
EA [N]	48466920	49436259	49436500
m	1.252955	1.290544	1.253192
κ	0.944444	0.963333	0.963338
γ	2.299444	41.105560	2.299455

Table 5.3: Numerical results for the tension assessment.

It can be seen that with the chosen initial guesses, the length identification leads to an overestimation of L but this discrepancy is then compensated in the adjoint method with an overestimation of the axial stiffness of the cable, leading to a correct tension.

2.2 Cable with flexural stiffness

Compared to the simple model of cable used in the previous section, the model of cable with flexural stiffness offers two main differences: first, if we consider a circular shape and an elastic isotropic homogeneous material for the cable, three new parameters appear, namely the flexural, the torsional and the shear stiffness. Second, while the simple model can only reproduce hinged-hinged boundary conditions, two more families of boundary conditions can be simulated when flexural stiffness is taken into account: clamped-clamped and hinged-clamped. Introducing the possibility of prescribing clamped boundary conditions is of great importance in practice since in most structures, ends of cables are only free to rotate during construction phases and are then naturally clamped by the applied loads. As it has been widely discussed in introduction of this work, over-stresses caused by bending at specific singular points of the cable such as anchorages and hangers attachments have been widely studied because of their important role in the initiation and propagation of fatigue damage.

In this section, we use the model with flexural stiffness to simulate the same cable we have studied in the previous section. We first study the impact of boundary layers and then we present a parametric study on the main parameters of the cable: its length and stiffness parameters.

Boundary layers

Even if geometrical non-linearity can add a significant complexity to the commonly used model of cable without flexural stiffness, it can only describe simply supported cables, *i.e.* cables hinged at both ends. On cable structures, anchorages are most of the time complex and cannot be modeled only with clamps: in many cases, anchorages show at least two different bending stiffness. A first investigation on clamped boundary conditions and the impact of small deviations was proposed by the author of this work in [8]. The model used is an updated Lagrangian formulation taking the prestressed catenary equilibrium under gravity as the start configuration and equations of motion of the cable are written in their strong form. We follow the path of the cited article focusing on the cable of the previous section using the classical total Lagrangian formulation

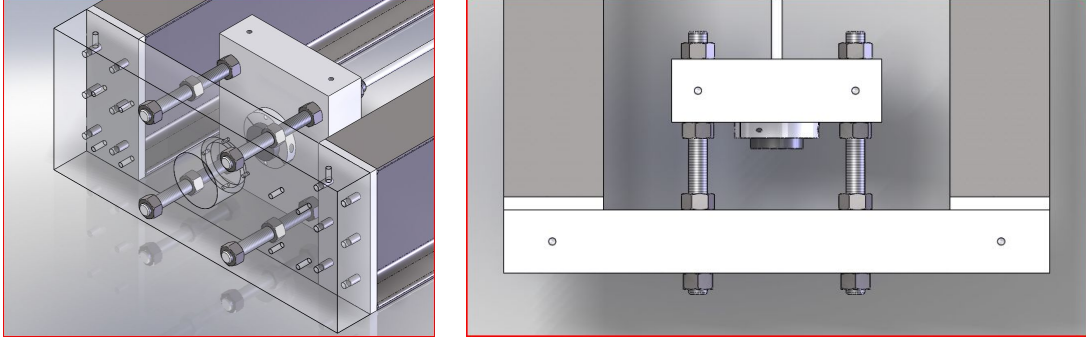


Figure 5.5: Boundary conditions in test bench.

described in section 2.2. The two approaches are possible to conduct the presented study, but the classical total Lagrangian formulation appears naturally in a variational form that eases the inverse problem setup as will be seen in the following.

Because we designed the bench test to reproduce old fashioned anchorages with one clamped end at the active anchorage and one almost clamped end at the passive one as shown in Figure 5.5, we will assume that boundary conditions of the cable read:

$$\check{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{o}, \quad \check{\mathbf{r}}(L) = L_3 \mathbf{e}_3, \quad \check{\mathbf{\Lambda}}(0) = \mathbf{I}, \quad \check{\mathbf{\Lambda}}(L) = \mathbf{I}.$$

We first give a non-dimensional form to the variational formulation:

Find $\mathfrak{d}\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ and $\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \in SO(3)$ satisfying the boundary conditions and such that for every $\delta\check{\mathbf{r}} \in \mathbf{R}^3$ and $\delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \in T_{\check{\mathbf{\Lambda}}_k} SO(3)$:

$$\delta W_{in_k} - \delta W_{ext_k} = -\mathfrak{d}\delta W_{mat} - \mathfrak{d}\delta W_{geo}$$

with updates at each iteration as described in section 2.2.

We recall the expressions of internal and external work.

Variation of internal work reads:

$$\begin{aligned} \delta W_{in} &= \int_0^L \left(\check{\mathbf{\Lambda}} C_N ({}^t \check{\mathbf{\Lambda}} \check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0) \cdot (\delta \mathbf{r}_s - \delta \boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_s) + \check{\mathbf{\Lambda}} C_M \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds \\ \delta W_{in} &= \int_0^L \left(\check{\mathbf{n}} \cdot (\delta \mathbf{r}_s - \delta \boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_s) + \check{\mathbf{m}} \cdot \delta \check{\boldsymbol{\vartheta}} \right) ds \end{aligned} \quad (5.25)$$

where the classical linear hyper-elasticity constitutive law leads to the following tensor of elasticity: $C_N = \text{diag}(GA, GA, EA)$ and $C_M = \text{diag}(EI, EI, GJ)$

Variation of external work is :

$$\delta W_{ext} = \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{r} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right) ds + \left[\check{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta \mathbf{r} + \check{\boldsymbol{\xi}} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right]_0^L \quad (5.26)$$

where $\boldsymbol{\varphi}$ and $\boldsymbol{\xi}$ are external force and moment applied on the two ends. In the specific case of our study, $\left[\check{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta \mathbf{r} + \check{\boldsymbol{\xi}} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right]_0^L = 0$ because of the prescribed Dirichlet boundary conditions.

Linearization of internal work at each iteration step k is $\mathfrak{d}\delta W_{in} = \mathfrak{d}\delta W_{mat} + \mathfrak{d}\delta W_{geo}$ with:

$$\mathfrak{d}\delta W_{mat} = \int_0^L (C_{n_k}(\mathfrak{d}\mathbf{r}_s - \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) \cdot (\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) + C_{m_k}\mathfrak{d}\bar{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}}) ds, \quad (5.27)$$

$$\mathfrak{d}\delta W_{geo} = - \int_0^L (\check{\mathbf{n}}_k \cdot (\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times (\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) + \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \mathfrak{d}\mathbf{r}_s) + \check{\mathbf{m}}_k \cdot \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}}) ds. \quad (5.28)$$

where $C_{n_k} = \mathbf{\Lambda}_k C_N {}^t\mathbf{\Lambda}_k$ and $C_{m_k} = \mathbf{\Lambda}_k C_M {}^t\mathbf{\Lambda}_k$. We introduce the following non-dimensional starred physical quantities:

$$s = ls^*, \quad \check{\mathbf{r}} = l\check{\mathbf{r}}^*, \quad \check{\mathbf{n}} = EA_{th}\check{\mathbf{n}}^*, \quad \check{\mathbf{m}} = EA_{th}l^2\check{\mathbf{m}}^*, \quad \check{\mathbf{f}} = EA_{th}/l\check{\mathbf{f}}^*$$

where $EA_{th} = 180000 \cdot 10^6 \times 0.75 \times 0.25 \times \pi d_c^2$. We immediately drop the star notation. It leads to the following non-dimensional parameters:

$$\kappa_{11} = EA/EA_{th}, \quad \kappa_{12} = GA/EA_{th}, \quad \kappa_{21} = EI/(EA_{th}l^2), \quad \kappa_{22} = GJ/(EA_{th}l^2), \quad m = \rho Al/EA_{th}$$

clearly, m is not dimensionless, but mg is. Dimensionless boundary conditions are:

$$\check{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{o}, \quad \check{\mathbf{r}}(L/l) = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{\Lambda}(L/l) = \mathbf{I}. \quad (5.29)$$

In the case of hinged cable with flexural stiffness, dimensionless boundary conditions are:

$$\check{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{o}, \quad \check{\mathbf{r}}(L/l) = \mathbf{e}_3, \quad \check{\mathbf{m}}(0) = \mathbf{o}, \quad \check{\mathbf{m}}(L/l) = \mathbf{o}.$$

Note that in the latter case, we only have to relax the Dirichlet boundary conditions for test function $\check{\boldsymbol{\vartheta}}$ in our routines.

Main characteristics of the cable with flexural stiffness are given in table 5.4.

Variable	Name	Units	Value	Dimensionless mane	Value
L	cable length	m	21.567	L	0.995798
l	span	m	21.658	l	1.0
ρA	mass per unit length	kg.m ⁻¹	2.969	m	0.927187E-6
EA	axial stiffness	N	48466900	κ_{11}	0.698889
GA	shear stiffness	N	24516846	κ_{12}	0.358404
EI	flexural stiffness	N.m ²	1902.029	κ_{21}	5.927742E-8
GJ	torsional stiffness	N.m ²	1463.099	κ_{22}	4.559802E-8

Table 5.4: Main characteristics of the studied cable

We let σ be the ideal maximum stress due to the normal force and bending moment. The problem lies in the $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ plane so we can define σ as:

$$\sigma = \frac{|\check{\mathbf{N}} \cdot \check{\mathbf{b}}_3|}{A} + \frac{|\check{\mathbf{M}} \cdot \check{\mathbf{b}}_2|d_c}{2I} \quad (5.30)$$

Rules used to design beams require the Von Mises criterion to be satisfied:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{f_y^2 + 3\tau_y^2} \geq \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (5.31)$$

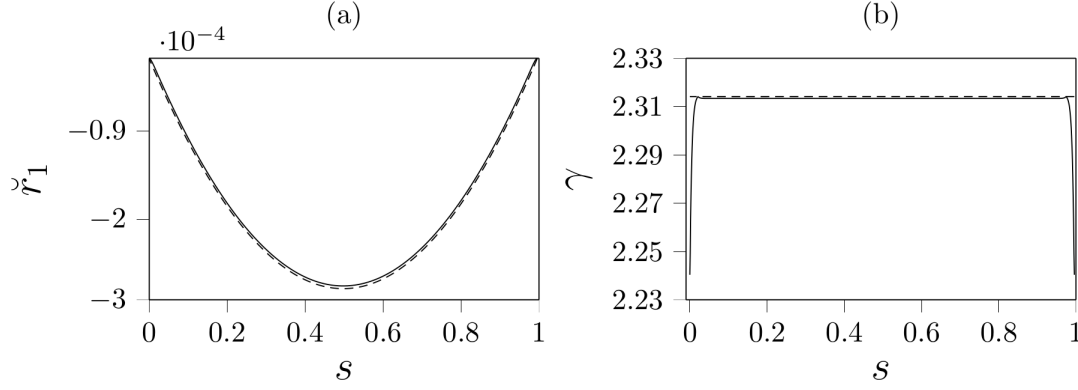


Figure 5.6: (a): Solid line: non-dimensional configuration of the cable described in Table 5.4 with clamped boundary conditions given by (5.29). Dashed line: same cable without flexural stiffness. (b): Solid line: safety factor γ . Dashed line: safety factor γ_s .

where $\tau_y = f_y/\sqrt{3}$ and the maximum tangential stress $\tau = 16/(3\pi d_c^2)\check{\mathbf{N}} \cdot \check{\mathbf{b}}_1$. In [8], the effect of tangential stress is shown to be negligible if compared to normal stress. Thus a direct comparison with the previous study is possible and we adopt the same design criterion. We define the safety factor γ as:

$$\gamma = f_y/\sigma \geq 2.3 \quad (5.32)$$

We remind that in the bench set-up, the tension sensor can only measure $F_s = |\check{\mathbf{N}}_3(0)|$ leading to a supposed safety factor γ_s equal to:

$$\gamma_s = Af_y/F_s \quad (5.33)$$

In Figure 5.6, static configuration of the cable defined in Table 5.4 with flexural stiffness and boundary conditions given by 5.29 is compared to the static configuration of the same cable without flexural stiffness. As reported in [8], imposed boundary rotations can induce higher or smaller normal stress depending on the direction of rotation and the way it impacts the stretching of the cable with respect to the catenary shape. With the prescribed boundary conditions, the tension sensor will assess a lower normal stress at the anchorage $\gamma = 2.314$ than the one calculated by the simple catenary solution which is $\gamma = 2.299$. Both are under-estimations of the maximum normal stress $\gamma = 2.24$ at the boundaries calculated for the flexible cable, as shown in Figure 5.6 (b).

Because of fatigue problem occurring at the anchorages, the French guidelines [19] strongly advise to carefully control the anchorage deviation or alignment during construction phases in order to stay within a precision of 5 mrad with respect to the design configuration. The latter is based on the classical catenary solution (without flexural stiffness). In Figure 5.7, results of analyses performed to investigate the effects of the cable bending at the left anchorage are presented. Rotation at the left anchorage are imposed in a range of ± 10 mrad around the catenary configuration. Our case study with boundary conditions defined in (5.29) has been inserted in the results (solid red lines). With a deviation of 1.14 mrad at both anchorages, it complies with the guideline requirements. Looking at Figure 5.7 (b), we notice that even for large rotations, differences with the catenary configuration are small: on our bench, they would be less than 0.1 mm. Moreover, the symmetries around the catenary configuration in graphs 5.7 (b) and (d) are typical of taut cables, as also visible in Figure 9 of [8].

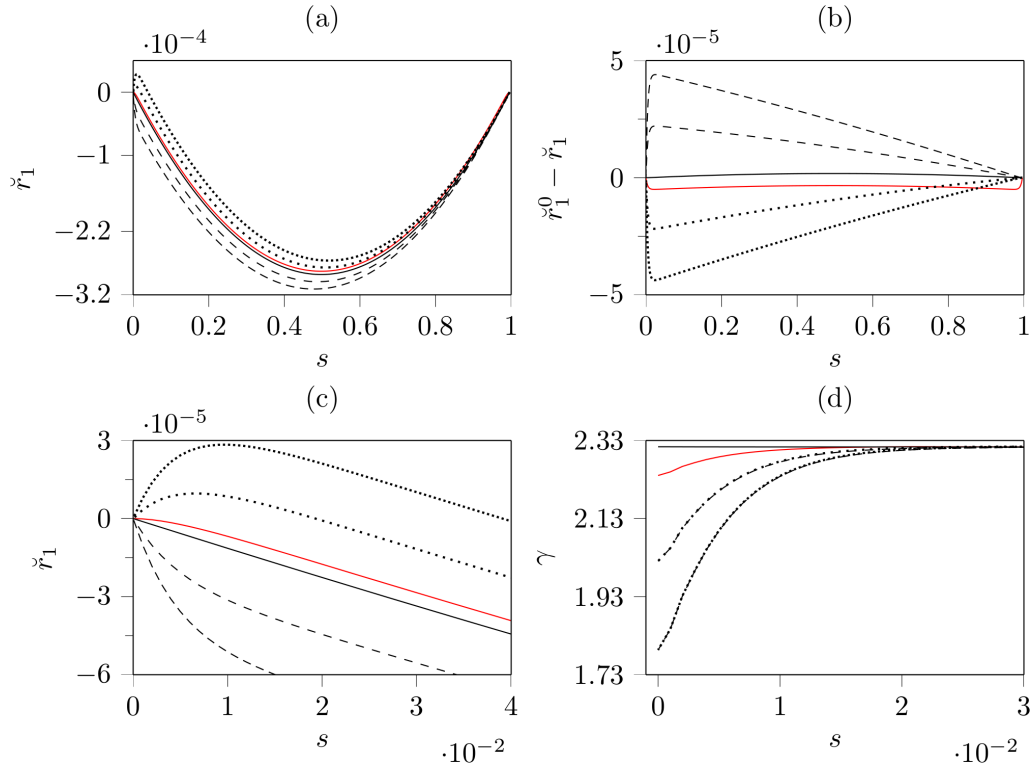


Figure 5.7: Configurations and local safety factors of cables with flexural stiffness for selected rotations at the left boundary around catenary configurations. Densely dotted lines: -0.01 rad, dotted lines: -0.005 rad, solid black lines: catenary configuration, solid red lines: boundary conditions given by 5.29, dashed lines: 0.005 rad, densely dashed lines: 0.01 rad. (a): nondimensional vertical component of the displacement. (b): vertical difference with the classical catenary solution. (c) Zoom of (a) at the left end of the cable. (d) local safety factors in the left anchorage vicinity.

As far as tension assessment is concerned, it can be said that, for taut cables, the tension in the cable free length is almost unaffected by a small rotations at the anchorages. On the contrary and as expected, the local normal stress is higher in the anchorage vicinity: for the studied cable, imposing (5.29) boundary conditions leads to a local reduction of 2.57% of the safety factor γ . For a deviation of 10 *mrad*, the reduction of the safety factor is more significant and goes up to 22% in full agreement with values found in chapter 6.2.3 of [19] with a an empirical model that can only be used for cable stays¹.

Data misfit functional

We use the model of a cable with flexural stiffness to conduct a parametric study as we did in the previous section. The main objective of this study is to estimate the sensitivities of a misfit data functional $\mathfrak{J}$ to small variations of parameters L , EA , EI , GA , GJ and ρA , which are the dimensionless parameters $L = L/l$, κ_{11} , κ_{22} , κ_{12} , κ_{21} and m , respectively. As previously, we consider the differences between two static states a and b , a being the static configuration of the cable under its own weight and b the static configuration of the same cable subjected to a localized load. We build a misfit data functional similar to the one used in the previous section but with the following quantities:

$$\mathfrak{J} = J_{E_3} + J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} + J_{depl} \quad (5.34)$$

$$J_{E_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{10^6}{2} \left[\left(\check{E}_3^{i,b} - \check{E}_3^{i,a} \right) - \left(E_3^{i,b} - E_3^{i,a} \right) \right]^2 \quad (5.35)$$

$$J_{\Gamma_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{10^6 d_c^2}{2} \left[\left(\check{\Gamma}_1^{i,b} - \check{\Gamma}_1^{i,a} \right) - \left(\Gamma_1^{i,b} - \Gamma_1^{i,a} \right) \right]^2 \quad (5.36)$$

$$J_{\Gamma_2} = \sum_{i=1}^3 \frac{10^6 d_c^2}{2} \left[\left(\check{\Gamma}_2^{i,b} - \check{\Gamma}_2^{i,a} \right) - \left(\Gamma_2^{i,b} - \Gamma_2^{i,a} \right) \right]^2 \quad (5.37)$$

$$J_{depl} = \sum_{j=1}^2 \frac{10^6}{2} \left[\left(\check{r}_1^{j,b} - \check{r}_1^{j,a} \right) - \left(r_1^{j,b} - r_1^{j,a} \right) \right]^2 \quad (5.38)$$

where we lightened the notations using $N_3^{i,a}$ for $N_3(s_i)$ in configuration a and similar relationships.

Application to rods For ropes, the relation between the local strains and the global curvature of a cable is complex and has been and still is a very active field of research -see e.g. [63]. For cables with parallel wires and for rods, the problem is simpler and we can find easily how to link the strain gauges datas with the strain measure of our model. We consider that for small loads, the cable suffers small deformations and thus we can use the equivalence between the elastic theory of rods and the de Saint-Venant solution for slender elastic homogeneous and isotropic cylinder as mentioned in Section 7.1 and clearly explained in [5]. The cable described locally by the equations obtained via an asymptotic development of the general de Saint-Venant solution *must* have Euler/Navier-Bernoulli

¹See [19] Chapter 6 for more details on the model used

kinematics, constitutive laws of the form:

$$M_1 = EI \partial_s \vartheta_1, \quad (5.39)$$

$$M_2 = EI \partial_s \vartheta_2, \quad (5.40)$$

$$M_3 = GJ \partial_s \vartheta_3. \quad (5.41)$$

and the inextensibility condition $d\check{s}/ds = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \nu^2} = |\nu| = 1$. Because we are dealing with cables that mainly suffer tension, we relax the inextensibility condition and write the last classical constitutive law:

$$N_3 = EAd\check{s}/ds \quad (5.42)$$

Using expressions (2.149) and (3.12) and rearranging with our notations lead to the well known formula:

$$\epsilon_{33}(s, x_1, x_2) = \frac{N_3(s)}{EA} + \frac{M_2(s)}{EI} x_1 - \frac{M_1(s)}{EI} x_2 \quad (5.43)$$

where (x_1, x_2) spans the section of the cable. It is deemed reasonable to use (5.43) to describe the quasi-static small transformation from configuration a to b :

$$\epsilon_{33}^b(s, x_1, x_2) - \epsilon_{33}^a(s, x_1, x_2) = \frac{N_3^b(s) - N_3^a(s)}{EA} + \frac{M_2^b(s) - M_2^a(s)}{EI} x_1 - \frac{M_1^b(s) - M_1^a(s)}{EI} x_2 \quad (5.44)$$

With (5.44), it is possible to express $\check{N}_3^{i,b} - \check{N}_3^{i,a}$, $\check{M}_1^{i,b} - \check{M}_1^{i,a}$ and similar quantities as simple functions of the strains given by the gauges. We assume that the monitoring system consists of 2 displacements sensors and 3×4 strain gauges. At each strain measuring point s_i with $i \in \{1, 2, 3\}$, the four strain gauges are located at $(0.5d_c \cos \theta_g, 0.5d_c \sin \theta_g)$ with $\theta_g = 0.5g\pi$ and $g \in \{0, 1, 2, 3\}$. If we call ${}^g\epsilon_{33}^{i,a}$ the measured strain by the gauge in configuration a located at $(0.5d_c \cos \theta_g, 0.5d_c \sin \theta_g, s_i)$, we have:

$$\check{N}_3^{i,b} - \check{N}_3^{i,a} = EA/4 \sum_{g=0}^4 {}^g\epsilon_{33}^{i,b} - {}^g\epsilon_{33}^{i,a}, \quad (5.45)$$

$$\check{M}_2^{i,b} - \check{M}_2^{i,a} = \frac{EI}{d_c} [({}^0\epsilon_{33}^{i,b} - {}^0\epsilon_{33}^{i,a}) - ({}^2\epsilon_{33}^{i,b} - {}^2\epsilon_{33}^{i,a})], \quad (5.46)$$

$$\check{M}_1^{i,b} - \check{M}_1^{i,a} = -\frac{EI}{d_c} [({}^1\epsilon_{33}^{i,b} - {}^1\epsilon_{33}^{i,a}) - ({}^3\epsilon_{33}^{i,b} - {}^3\epsilon_{33}^{i,a})]. \quad (5.47)$$

Given the Hookean linear elastic law adopted for our cable model, we have:

$$\check{E}_3^{i,b} - \check{E}_3^{i,a} = 0.25 \sum_{g=0}^4 {}^g\epsilon_{33}^{i,b} - {}^g\epsilon_{33}^{i,a}, \quad (5.48)$$

$$\check{\Gamma}_2^{i,b} - \check{\Gamma}_2^{i,a} = \frac{1}{d_c} [({}^0\epsilon_{33}^{i,b} - {}^0\epsilon_{33}^{i,a}) - ({}^2\epsilon_{33}^{i,b} - {}^2\epsilon_{33}^{i,a})], \quad (5.49)$$

$$\check{\Gamma}_1^{i,b} - \check{\Gamma}_1^{i,a} = -\frac{1}{d_c} [({}^1\epsilon_{33}^{i,b} - {}^1\epsilon_{33}^{i,a}) - ({}^3\epsilon_{33}^{i,b} - {}^3\epsilon_{33}^{i,a})]. \quad (5.50)$$

Expressions (5.48)-(5.50) exhibit the equivalency between the two models for small deformations. In order to reduce the number of independent parameters, we express EA , GA , GJ as functions of parameter Y only:

$$EA = Y A_{th}, \quad GA = \frac{Y A_{th}}{2(1+\nu)}, \quad EI = \frac{Y A_{th}^2}{4\pi}, \quad GJ = \frac{Y A_{th}^2}{4(1+\nu)\pi}. \quad (5.51)$$

where ν and $A_{th} = 0.1875\pi d_c^2$ are the Poisson coefficient and a theoretical estimate of the cross-section area of the cable, respectively, and Y is like its Young modulus. We introduce $\chi = Y/E_{th}$, the dimensionless counterpart of Y where $E_{th} = 1.8\text{E}11$. The mass per unit length of cable is considered a truly independent parameter.

Parametric studies

As previously, we conduct two kinds of parametric studies: in a first time, we assume that L is known and we look at the variations of $\mathfrak{J}(\chi, m)$ for various L to investigate the role played by a change of initial prestressed state a for our problem. In a second time, configuration a is fixed and we study the variation of $\mathfrak{J}(\chi, m, L)$ where L is now considered as an unknown. For the two studies, the additional mass is still of 102 kg and it is positioned at $L/4$. Moreover, the two studies are based on two sets of positions of sensors. Description of these sets is given in Table 5.5. As can be seen, strain gauges are 1 cm away from the two anchorages and the mass in set 2 and randomly positioned far away from these singular points in set 1. Set 2 is supposed to enlighten bending effects for the considered load case. The load case we chose makes the whole problem lie in the vertical plane, therefore $J_{r_1} = 0$ in this section.

Set 1				Set 2		
Strain gauges						
s_1	$L/2.1$	10.27	0.474190	$L/1.001$	21.545	0.994803
s_2	$L/5$	4.296	0.198366	$L/4.02$	5.365	0.247711
s_3	$L/8$	2.696	0.124475	$L/2000$	0.011	0.000498
Displacements sensors						
s_1	$L/1.9$	11.351	0.524104	$L/1.9$	11.351	0.524104
s_3	$L/3$	7.165	0.330830	$L/3$	7.165	0.330830

Table 5.5: Position of sensors in the two considered parametric studies. Numerical values are given for $L = 0.995798$ *i.e.* $L = 21.567\text{ m}$

Table 5.6 gives the ranges of values used for the parametric studies.

Variable	Min	Max	Variable	Min	Max
L	21.507	21.627	L	0.993028	0.998569
ρA	2.577	3.865	m	8.159245E-7	1.223887E-6
Y	1.36E11	2.04E11	χ	0.755556	1.133333

Table 5.6: Parametric study ranges

The length L is known In the following, we consider that L is known. We look at the variations of $\mathfrak{J}(\chi, m)$ for $L \in \{21.467, 21.517, 21.567, 21.617, 21.667\}$ meters. In all five cases, characteristics for the simulated true solution are $\chi = 0.944444$ and $m = 1.019905\text{E-}6$. Results for Set 1 and 2 are presented in Figures 5.8 and 5.9, respectively.

From the two Figures 5.8 and 5.9, two general comments arise. First, the model with flexural stiffness leads to similar results when compared to Figure 5.2: displacements contribution J_{depl} shows a relative insensitivity to the variation of mass per unit length of cable except when its sag-to-span ratio becomes large. In this specific case, J_{depl} exhibits a unique minimum making the problem well-posed. Second, the role played by bending seems to be little with the Set 1 monitoring system except in the case of low tension. On the contrary, J_{T_2} is clearly the dominant term of $\mathfrak{J}$ with the monitoring system Set 2 and its shape is very similar to the one of J_{depl} , except at low tension.

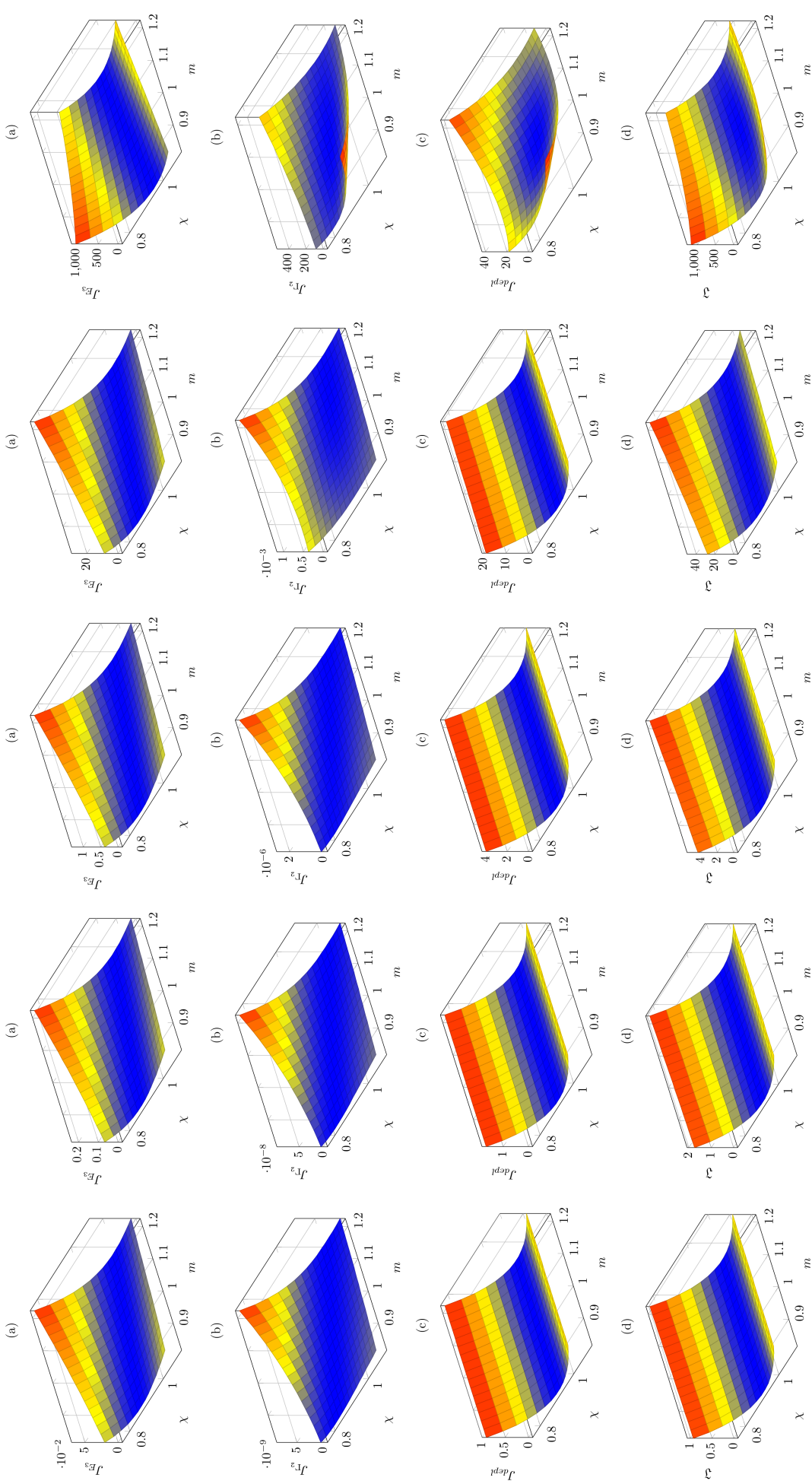


Figure 5.8: Graph are sorted by column and show the variation of (a) J_{E_3} , (b) J_{T_2} , (c) J_{depl} and (d) $\mathfrak{J}$ for m and χ in ranges given in Table 5.6. True cable has been simulated with parameters $\chi = 0.94444$ and $m = 1.019905E-6$. From left to right, in meters: $L = 21.517$, $L = 21.467$, $L = 21.567$, $L = 21.617$ and $L = 21.667$. Positions of sensors are given in Table 5.5 Set 1

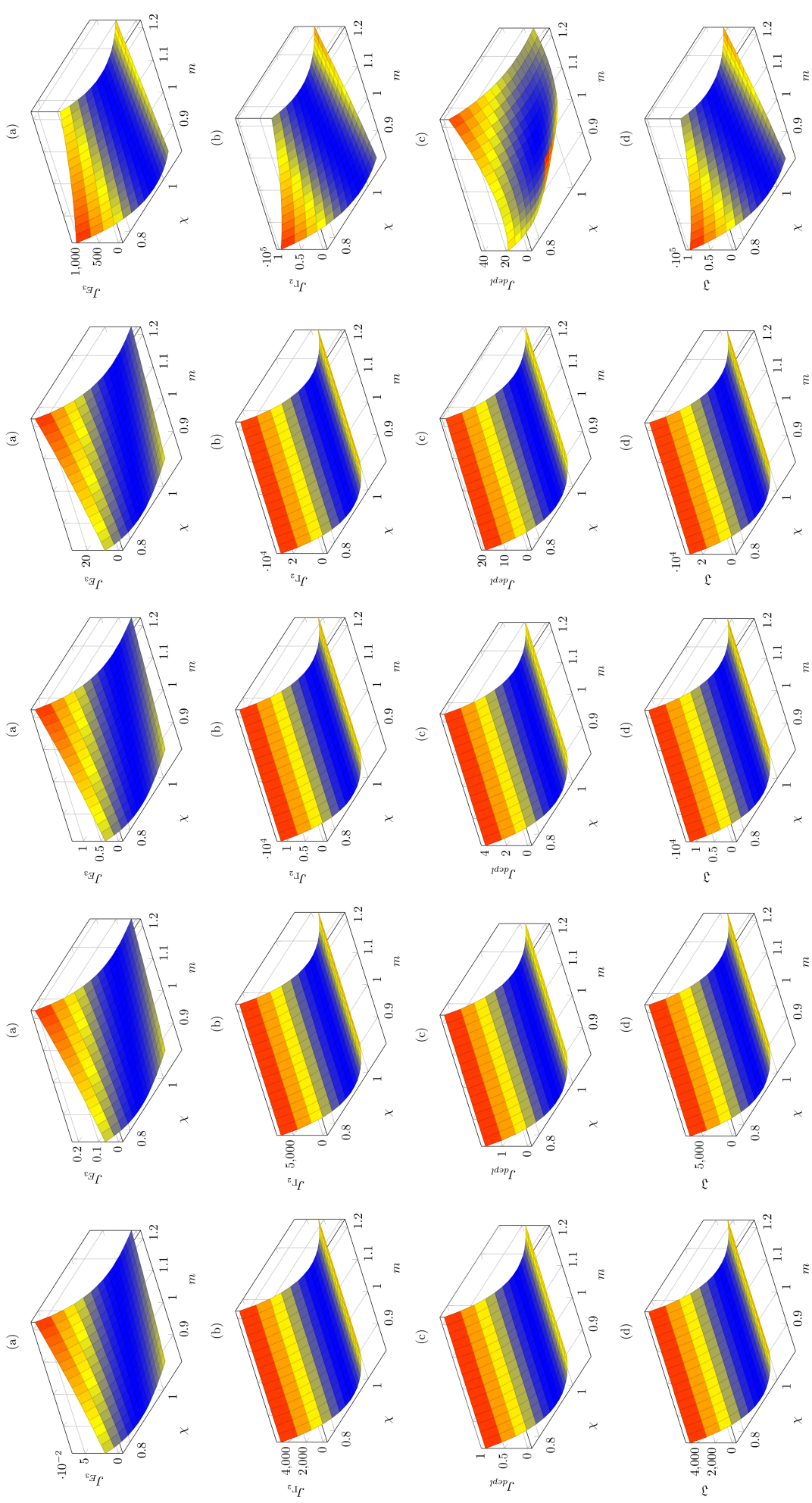


Figure 5.9: Graph are sorted by column and show the variation of (a) J_{E3} , (b) J_{T2} , (c) J_{depl} and (d) $\mathfrak{J}$ for m and χ in ranges given in Table 5.6. True cable has been simulated with parameters $\chi = 0.944444$ and $m = 1.019905E-6$. From left to right, in meters: $L = 21.517$, $L = 21.467$, $L = 21.567$, $L = 21.617$ and $L = 21.667$. Positions of sensors are given in Table 5.5 Set 2

The length L is not precisely known Hereafter, we present the results of parametric studies of $\mathfrak{J}(\chi, m, L)$ built around a reference cable for which the dimensional and dimensionless characteristics are reported in Table 5.7. In a first time consider a constant mass per unit length of cable and we let L and χ vary in ranges given in Table 5.6. Results are shown in Figure 5.10. We notice that $\mathfrak{J}$ is clearly dependent on both L and the rigidity as it should be.

Variable	Name	Units	Value	Dimensionless mane	Value
L	cable length	m	21.567	L	0.995798
l	span	m	21.658	l	1.0
ρA	mass per unit length	kg.m ⁻¹	3.221	m	1.019905E-6
Y	-	Pa	1.7E11	χ	0.944444

Table 5.7: Main characteristics of the studied cable

In Figure 5.11, we have reported safety factors γ and γ_s and a zoom of J_{Γ_2} , J_{E_3} and J_{depl} obtained with Set 1 and 2 for values of χ and L varying in a range of $\pm 5\%$ around their target values. The targeted safety factors γ and γ_s are 2.19 and 2.28, respectively. Starting with the examination of graphs (e) and (f), we see that the targeted safety factors are in the same loci as $\mathfrak{J}$ minima. Despite its low values, J_{Γ_2} obtained with Set 1 and shown in graph (a) presents a certain insensitivity to χ variations, we should therefore use it to find the length of the cable. Unfortunately, it is not realistic to assess J_{Γ_2} with such a good precision with standard strain gauges. Graphs (b), (c) and (d) suggest to use J_{E_3} or J_{depl} to assess the length of the cable.

Varying the mass per unit length of cable, with parameters χ , m and L spanning ranges of values given in Table 5.6, we obtain results for sets 1 and 2 presented in Figures 5.12 and 5.13, respectively. Once again as expected, J_{Γ_2} has completely different shapes for sets 1 and 2. J_{Γ_2} with Set 1 is negligible when $L \leq L_{target}$ and for high tensions while it seems mass per unit length dependent when $L \geq L_{target}$ and for low tensions. On the contrary, J_{Γ_2} is completely independent of the mass per unit length of cable in the studied range of variations of (m, χ) and behaves as J_{depl} .

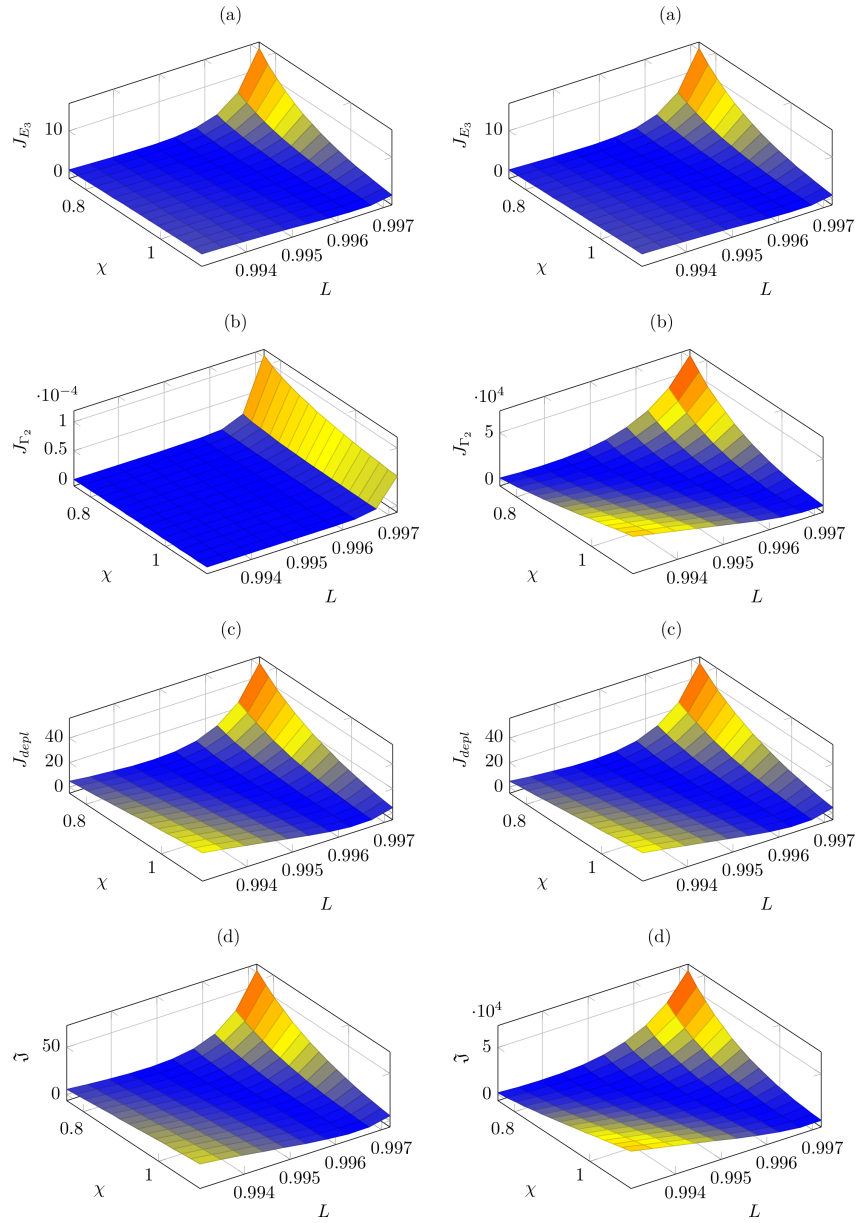


Figure 5.10: Graphs are sorted by column. Left column: Set 1, right: Set 2. (a) J_{E_3} , (b) J_{Γ_2} , (c) J_{depl} and (d) $\mathfrak{J}$ for various L and χ .

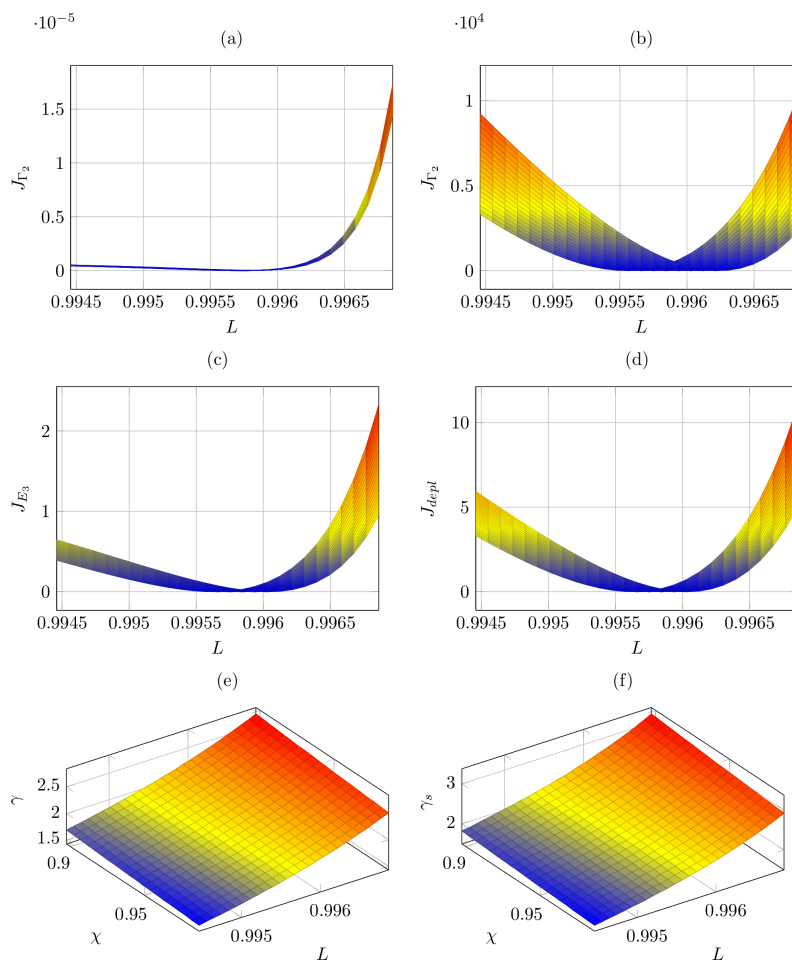


Figure 5.11: (a) and (b): J_{Γ_2} with sets 1 and 2, (b) and (c): J_{E_3} and J_{depl} , respectively, (d) γ and (e) γ_s for L and χ varying at $\pm 5\%$ around target values.

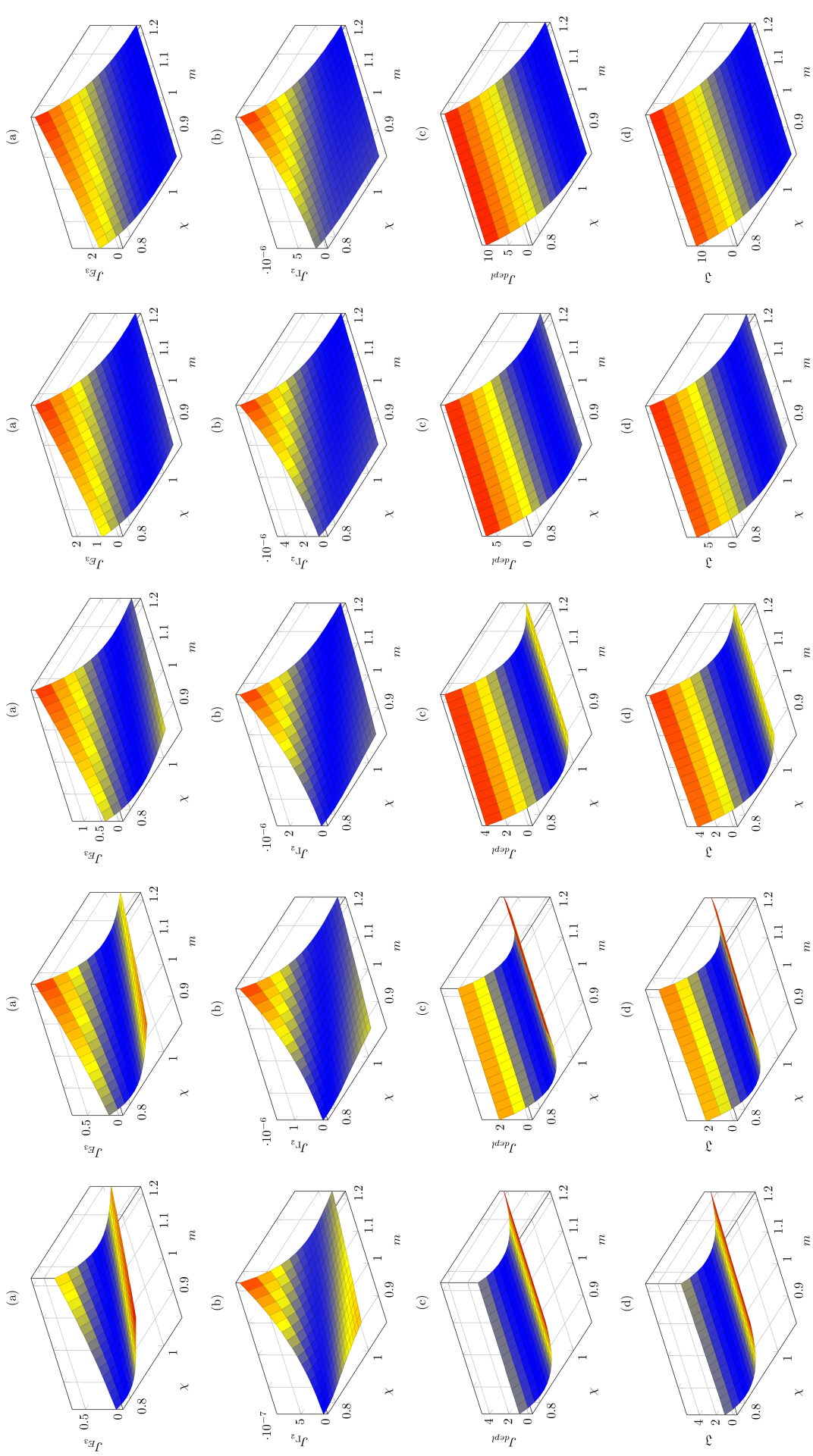


Figure 5.12: Graph are sorted by column and show the variation of (a) J_{E3} , (b) J_{Γ_2} , (c) J_{depl} and (d) ϵ for m and χ in ranges given in Table 5.6. True cable has been simulated with parameters given in Table 5.7. From left to right, in meters: $L = 21.557$, $L = 21.562$, $L = 21.567$, $L = 21.572$ and $L = 21.577$. Positions of sensors are given in Table 5.5 Set 1

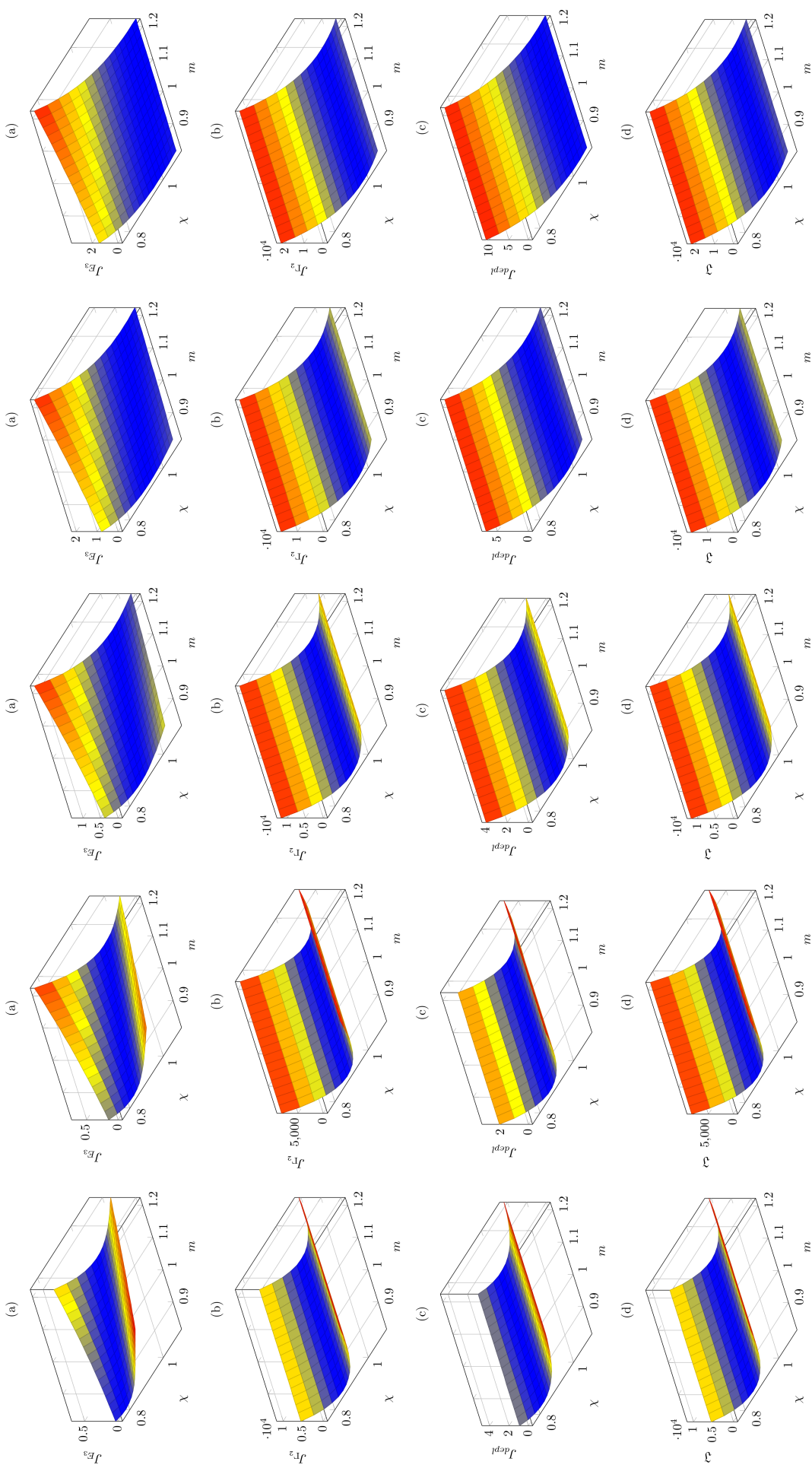


Figure 5.13: Graph are sorted by column and show the variation of (a) J_{E_3} , (b) J_{Γ_2} , (c) J_{depl} and (d) ϵ for m and χ in ranges given in Table 5.6. True cable has been simulated with parameters given in Table 5.7. From left to right, in meters: $L = 21.557$, $L = 21.562$, $L = 21.567$, $L = 21.572$ and $L = 21.577$. Positions of sensors are given in Table 5.5 Set 2

Figures 5.9 and 5.13 show a parametric study of $\mathfrak{J}(L, \chi, m)$ obtained with sets 1 and 2. Both Figures suggest that as previously, the length of the cable has to be determined in a first time in order to take advantage of the relative insensitivity of J_{depl} and J_{Γ_2} to a variation of mass per unit length of cable when tensed cable are considered.

Hu-Washizu model for cable with flexural stiffness

We modify slightly the classical model of rods in order to make available as primal variables both the tension and the moment. This *customization* of the model is made to ease the inverse problem construction, as it will be shown in the following. We proceed as we did for the cable without flexural stiffness: we impose the two vectorial strain-displacements relationships to the minimization problem via the introduction of two Lagrangian multipliers. Our unknowns are now $\check{\mathbf{r}}$, $\check{\mathbf{\Lambda}}$, $\check{\mathbf{E}}$, $\check{\mathbf{\Gamma}}$ and the two Lagrangian multipliers.

The variation of the internal work reads now:

$$\delta W_{in} = \int_0^L \left(C_N \check{\mathbf{E}} \cdot \delta \mathbf{E} + C_M \check{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta \mathbf{\Gamma} \right) ds \quad (5.52)$$

The variation of external work is still:

$$\delta W_{ext} = \int_0^L \left(\check{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{r} + \check{\mathbf{c}} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right) ds \quad (5.53)$$

Linearization of internal work at each iteration step is now

$$\mathfrak{d} \delta W_{int} = \int_0^L \left(C_N \mathfrak{d} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E} + C_M \mathfrak{d} \mathbf{\Gamma} \cdot \delta \mathbf{\Gamma} \right) ds \quad (5.54)$$

The two additional strain-displacements relationships are:

$$\check{\mathbf{E}} = \check{\mathbf{E}}^e, \quad (5.55)$$

$$\check{\mathbf{\Gamma}} = \check{\mathbf{\Gamma}}^e. \quad (5.56)$$

where :

$$\check{\mathbf{E}}^e := {}^t \mathbf{\Lambda} \check{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^0, \quad (5.57)$$

$$\check{\mathbf{\Gamma}}^e := {}^t \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}_s. \quad (5.58)$$

We *a priori* know that the two Lagrangian multipliers are the tension $\check{\mathbf{N}}$ and the bending moment $\check{\mathbf{M}}$ so that the two additional terms of our problem are:

$$- \int_0^L \left(\check{\mathbf{N}} \cdot \left(\check{\mathbf{E}} - \check{\mathbf{E}}^e \right) + \check{\mathbf{M}} \cdot \left(\check{\mathbf{\Gamma}} - \check{\mathbf{\Gamma}}^e \right) \right) ds \quad (5.59)$$

We recall that the following variations at step k :

$$\delta \mathbf{E}^e = {}^t \mathbf{\Lambda} (\delta \mathbf{r}_s - \delta \boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_s), \quad (5.60)$$

$$\delta \hat{\mathbf{\Gamma}}^e = {}^t \mathbf{\Lambda} \delta \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_s \mathbf{\Lambda}, \quad (5.61)$$

$$\delta \mathbf{\Gamma}^e = {}^t \mathbf{\Lambda} \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}}. \quad (5.62)$$

and associated linearizations at step k :

$$\mathfrak{d}\delta\mathbf{E}^e = -{}^t\mathbf{\Lambda}_k (\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times (\delta\mathbf{r}_s - \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \check{\mathbf{r}}_{s_k}) + \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \mathfrak{d}\mathbf{r}_s), \quad (5.63)$$

$$\mathfrak{d}\delta\mathbf{\Gamma}^e = -{}^t\mathbf{\Lambda}_k \mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \times \delta\bar{\boldsymbol{\vartheta}}. \quad (5.64)$$

Thus the variation of (5.59) is:

$$- \int_0^L \left(\delta\mathbf{N} \cdot (\check{\mathbf{E}} - \check{\mathbf{E}}^e) + \check{\mathbf{N}} \cdot (\delta\mathbf{E} - \delta\mathbf{E}^e) + \delta\mathbf{M} \cdot (\check{\mathbf{\Gamma}} - \check{\mathbf{\Gamma}}^e) + \check{\mathbf{M}} \cdot (\delta\mathbf{\Gamma} - \delta\mathbf{\Gamma}^e) \right) ds \quad (5.65)$$

Putting (5.52), (5.53) and (5.65) together leads to:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^L & \left((C_N \check{\mathbf{E}} - \check{\mathbf{N}}) \cdot \delta\mathbf{E} - (\check{\mathbf{E}} - \check{\mathbf{E}}^e) \cdot \delta\mathbf{N} + (C_M \check{\mathbf{\Gamma}} - \check{\mathbf{M}}) \cdot \delta\mathbf{\Gamma} - (\check{\mathbf{\Gamma}} - \check{\mathbf{\Gamma}}^e) \cdot \delta\mathbf{M} \right. \\ & \left. + \check{\mathbf{N}} \cdot \delta\mathbf{E}^e + \check{\mathbf{M}} \cdot \delta\mathbf{\Gamma}^e - \check{\mathbf{f}} \cdot \delta\mathbf{r} - \check{\mathbf{c}} \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} \right) ds. \end{aligned}$$

It is clearly possible to use δJ to directly recover the strain-displacements relationships and the constitutive equations. The static equilibrium can be found after an integration by parts. Linearization of δJ at step k is:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}\delta J = \int_0^L & \left((C_N \mathfrak{d}\mathbf{E} - \mathfrak{d}\mathbf{N}) \cdot \delta\mathbf{E} - (\mathfrak{d}\mathbf{E} - \mathfrak{d}\mathbf{E}^e) \cdot \delta\mathbf{N} + (C_M \mathfrak{d}\mathbf{\Gamma} - \mathfrak{d}\mathbf{M}) \cdot \delta\mathbf{\Gamma} - (\mathfrak{d}\mathbf{\Gamma} - \mathfrak{d}\mathbf{\Gamma}^e) \cdot \delta\mathbf{M} \right. \\ & \left. + \mathfrak{d}\mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{E}^e + \check{\mathbf{N}}_k \cdot \mathfrak{d}\delta\mathbf{E}^e + \mathfrak{d}\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{\Gamma}^e + \check{\mathbf{M}}_k \cdot \mathfrak{d}\delta\mathbf{\Gamma}^e \right) ds. \end{aligned}$$

where $\mathfrak{d}\mathbf{E}^e$ and $\mathfrak{d}\mathbf{\Gamma}^e$ are given by relationships similar to (5.60) and (5.62), respectively.

Find $\mathfrak{d}\mathbf{r}$, $\mathfrak{d}\mathbf{E}$, $\mathfrak{d}\mathbf{\Gamma}$, $\mathfrak{d}\mathbf{N}$, $\mathfrak{d}\mathbf{M}$ in appropriate fields and $\mathfrak{d}\boldsymbol{\vartheta} \in T_{\check{\mathbf{\Lambda}}_k} SO(3)$ satisfying the boundary conditions and such that for every $\delta\check{\mathbf{r}}$, $\delta\mathbf{E}$, $\delta\mathbf{\Gamma}$, $\delta\mathbf{N}$, $\delta\mathbf{M}$ and $\delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \in T_{\check{\mathbf{\Lambda}}_k} SO(3)$:

$$\mathfrak{d}\delta J = -\delta J_k$$

with updates at each iteration given by:

$$\check{\mathbf{r}}_{k+1} = \check{\mathbf{r}}_k + \mathfrak{d}\mathbf{r}, \quad (5.66)$$

$$\check{\mathbf{\Gamma}}_{k+1} = \check{\mathbf{\Gamma}}_k + \mathfrak{d}\mathbf{\Gamma}, \quad (5.67)$$

$$\check{\mathbf{N}}_{k+1} = \check{\mathbf{N}}_k + \mathfrak{d}\mathbf{N}, \quad (5.68)$$

$$\check{\mathbf{M}}_{k+1} = \check{\mathbf{M}}_k + \mathfrak{d}\mathbf{M}. \quad (5.69)$$

Update formulas for $\mathbf{\Lambda}_{k+1}$ and $\mathbf{\Gamma}_{k+1}^e$ are given in section and boundary conditions given by (5.29)

Inverse problem

As we did previously and for derivation purposes, we rewrite the functional:

$$\mathfrak{J} = J_{E_3} + J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} + J_{depl} \quad (5.70)$$

$$J_{E_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{10^6}{2} \left[\int_0^L \left(\check{E}_3^{i,b} - \check{E}_3^{i,a} \right) \psi^i(s) ds - (E_3^{i,b} - E_3^{i,a}) \right]^2 \quad (5.71)$$

$$J_{\Gamma_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{10^6 d_c^2}{2} \left[\int_0^L \left(\check{\Gamma}_1^{i,b} - \check{\Gamma}_1^{i,a} \right) \psi^i(s) ds - (\Gamma_1^{i,b} - \Gamma_1^{i,a}) \right]^2 \quad (5.72)$$

$$J_{\Gamma_2} = \sum_{i=1}^3 \frac{10^6 d_c^2}{2} \left[\int_0^L \left(\check{\Gamma}_2^{i,b} - \check{\Gamma}_2^{i,a} \right) \psi^i(s) ds - (\Gamma_2^{i,b} - \Gamma_2^{i,a}) \right]^2 \quad (5.73)$$

$$J_{depl} = \sum_{j=1}^2 \frac{10^6}{2} \left[\int_0^L \left(\check{r}_1^{j,b} - \check{r}_1^{j,a} \right) \psi^j(s) ds - (r_1^{j,b} - r_1^{j,a}) \right]^2 \quad (5.74)$$

where $\psi^i(s) = n/L \text{ Dirac}(s - s^i)$, n being the number of mesh element.

The following **Lagrangian** is introduced:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{J} - J^b - J^a \quad (5.75)$$

where J^b is:

$$\begin{aligned} J^b = \int_0^L & \left(\left(C_N \check{\mathbf{E}}^b - \check{\mathbf{N}}^b \right) \cdot \mathbf{E}^{*b} - \left(\check{\mathbf{E}}^b - \check{\mathbf{E}}^{e,b} \right) \cdot \mathbf{N}^{*b} + \left(C_M \check{\mathbf{\Gamma}}^b - \check{\mathbf{M}}^b \right) \cdot \mathbf{\Gamma}^{*b} - \left(\check{\mathbf{\Gamma}}^b - \check{\mathbf{\Gamma}}^{e,b} \right) \cdot \mathbf{M}^{*b} \right. \\ & \left. + \check{\mathbf{N}}^b \cdot \mathbf{E}^{e,b*} + \check{\mathbf{M}}^b \cdot \mathbf{\Gamma}^{e,b*} - \check{\mathbf{f}}^b \cdot \mathbf{r}^{*b} \right) ds. \end{aligned} \quad (5.76)$$

with

$$\mathbf{E}^{e,b*} = {}^t\mathbf{\Lambda}^b (\mathbf{r}_s^{*b} - \boldsymbol{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{r}}_s^b), \quad (5.77)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{e,b*} = {}^t\mathbf{\Lambda}^b \bar{\boldsymbol{\vartheta}}^{*b}. \quad (5.78)$$

We use similar definition for J^a with a superscripts.

The **direct variational problem** is obtained via the derivatives of $\mathfrak{L}$ with respect to the dual (starred) variables:

$$\begin{aligned} \delta J^b = \int_0^L & \left(\left(C_N \check{\mathbf{E}}^b - \check{\mathbf{N}}^b \right) \cdot \delta \mathbf{E}^{*b} - \left(\check{\mathbf{E}}^b - \check{\mathbf{E}}^{e,b} \right) \cdot \delta \mathbf{N}^{*b} + \left(C_M \check{\mathbf{\Gamma}}^b - \check{\mathbf{M}}^b \right) \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{*b} \right. \\ & \left. - \left(\check{\mathbf{\Gamma}}^b - \check{\mathbf{\Gamma}}^{e,b} \right) \cdot \delta \mathbf{M}^{*b} + \check{\mathbf{N}}^b \cdot \delta \mathbf{E}^{e,b*} + \check{\mathbf{M}}^b \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{e,b*} - \check{\mathbf{f}}^b \cdot \delta \mathbf{r}^{*b} \right) ds = 0. \end{aligned} \quad (5.79)$$

with the derivatives of (5.77) and (5.78) with respect to dual variables:

$$\delta \mathbf{E}^{e,b*} = {}^t\mathbf{\Lambda}^b (\delta \mathbf{r}_s^{*b} - \delta \boldsymbol{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{r}}_s^b), \quad (5.80)$$

$$\delta \mathbf{\Gamma}^{e,b*} = {}^t\mathbf{\Lambda}^b \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}}^{*b}. \quad (5.81)$$

Similar expression for δJ^a with a superscripts completes the direct variational problem. Strong form equations for the direct problem are easier to find using a mixed spatial/-material point point of view:

$$\int_0^L \left(\left(C_N \check{\mathbf{E}}^b - \check{\mathbf{N}}^b \right) \cdot \delta \mathbf{E}^{*b} - \left(\check{\mathbf{E}}^b - \check{\mathbf{E}}^{e,b} \right) \cdot \delta \mathbf{N}^{*b} + \left(C_M \check{\mathbf{\Gamma}}^b - \check{\mathbf{M}}^b \right) \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{*b} - \left(\check{\mathbf{\Gamma}}^b - \check{\mathbf{\Gamma}}^{e,b} \right) \cdot \delta \mathbf{M}^{*b} + \check{\mathbf{n}}^b \cdot (\delta \mathbf{r}_s^* - \delta \mathbf{\vartheta}^* \times \check{\mathbf{r}}_s^b) + \check{\mathbf{m}}^b \cdot \delta \mathbf{\vartheta}^* - \check{\mathbf{f}}^b \cdot \delta \mathbf{r}^{*b} \right) ds = 0$$

Using the scalar triple product identity leads to $-\check{\mathbf{n}}^b \cdot (\delta \mathbf{\vartheta}^* \times \check{\mathbf{r}}_s^b) = -\delta \mathbf{\vartheta}^* \cdot (\check{\mathbf{r}}_s^b \times \check{\mathbf{n}}^b)$. An integration by part in the second half of the integral gives:

$$\begin{aligned} \int_0^L & \left(\left(C_N \check{\mathbf{E}}^b - \check{\mathbf{N}}^b \right) \cdot \delta \mathbf{E}^{*b} - \left(\check{\mathbf{E}}^b - \check{\mathbf{E}}^{e,b} \right) \cdot \delta \mathbf{N}^{*b} + \left(C_M \check{\mathbf{\Gamma}}^b - \check{\mathbf{M}}^b \right) \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{*b} - \left(\check{\mathbf{\Gamma}}^b - \check{\mathbf{\Gamma}}^{e,b} \right) \cdot \delta \mathbf{M}^{*b} - \left(\check{\mathbf{n}}_s^b + \check{\mathbf{f}}^b \right) \cdot \delta \mathbf{r}^* - \left(\check{\mathbf{m}}_s^b + \check{\mathbf{r}}_s^b \times \check{\mathbf{n}}^b \right) \cdot \delta \mathbf{\vartheta}^* \right) ds \\ & + \left[\check{\mathbf{n}}^b \cdot \delta \mathbf{r}^* + \check{\mathbf{m}}^b \cdot \delta \mathbf{\vartheta}^* \right]_0^L = 0 \end{aligned}$$

which is the variational formulation of the problem. After an integration by parts, it is possible to recover the equivalent strong formulation:

$$\begin{aligned} \text{Equilibrium equations:} \quad & \check{\mathbf{n}}_s^b + \check{\mathbf{f}}^b = \mathbf{o}, \\ & \check{\mathbf{m}}_s^b + \check{\mathbf{r}}_s^b \times \check{\mathbf{n}}^b = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Constitutive law:} \quad & \check{\mathbf{N}}^b = C_N \check{\mathbf{E}}^b, \\ & \check{\mathbf{M}}^b = C_M \check{\mathbf{\Gamma}}^b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Strain-displacements relationships:} \quad & \check{\mathbf{E}}^b = \check{\mathbf{E}}^{e,b}, \\ & \check{\mathbf{\Gamma}}^b = \check{\mathbf{\Gamma}}^{e,b}. \end{aligned}$$

$$\text{Boundary conditions:} \quad \check{\mathbf{r}}^b(0), \check{\mathbf{r}}^b(L), \check{\mathbf{\Lambda}}^b(0), \check{\mathbf{\Lambda}}^b(L).$$

Same equations with a superscripts complete the strong form of the direct problem.

The **Adjoint problem** is obtained thanks to the derivatives of $\mathfrak{L}$ with respect to the primal variables. Knowing that $J_{M_1} = 0$ with the chosen load case, the first part of the

adjoint problem reads :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 10^6 \int_0^L \left(\int_0^L \left(\check{E}_3^{i,b} - \check{E}_3^{i,a} \right) \psi^i(s) ds - (E_3^{i,b} - E_3^{i,a}) \right) \psi^i(s) \delta \check{E}_3^{i,b} ds \\
& + \sum_{i=1}^3 10^6 d_c^2 \int_0^L \left(\int_0^L \left(\check{\Gamma}_2^{i,b} - \check{\Gamma}_2^{i,a} \right) \psi^i(s) ds - (\Gamma_2^{i,b} - \Gamma_2^{i,a}) \right) \psi^i(s) \delta \check{\Gamma}_2^{i,b} ds \\
& + \sum_{j=1}^2 10^6 \int_0^L \left(\int_0^L \left(\check{r}_1^{j,b} - \check{r}_1^{j,a} \right) \psi^j(s) ds - (r_1^{j,b} - r_1^{j,a}) \right) \psi^j(s) \mathbf{e}_1 \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^{j,b} ds \\
& = \int_0^L \left((C_N \mathbf{E}^{*b} - \mathbf{N}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^b + (\mathbf{E}^{e,b*} - \mathbf{E}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{N}}^b + \mathbf{N}^{*b} \cdot \delta \mathbf{E}^{e,b} + \check{\mathbf{N}}^b \cdot \delta \mathbf{E}^{e,b*} \right. \\
& \quad \left. + (C_M \mathbf{\Gamma}^{*b} - \mathbf{M}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^b + (\mathbf{\Gamma}^{e,b*} - \mathbf{\Gamma}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{M}}^b + \mathbf{M}^{*b} \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{e,b} + \check{\mathbf{M}}^b \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{e,b*} \right) ds
\end{aligned} \tag{5.82}$$

with:

$$\delta \mathbf{E}^{e,b} = {}^t \mathbf{\Lambda}^b \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s^b - \delta \boldsymbol{\vartheta}^b \times \check{\mathbf{r}}_s^b \right), \tag{5.83}$$

$$\delta \mathbf{\Gamma}^{e,b} = {}^t \mathbf{\Lambda}^b \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}}^b. \tag{5.84}$$

and the derivatives of (5.77) and (5.78) with respect to primal variables:

$$\delta \mathbf{E}^{e,b*} = -{}^t \mathbf{\Lambda}^b \left[\delta \boldsymbol{\vartheta}^b \times \left(\mathbf{r}_s^{*b} - \boldsymbol{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{r}}_s^b \right) + \boldsymbol{\vartheta}^{*b} \times \delta \check{\mathbf{r}}_s^b \right], \tag{5.85}$$

$$\delta \mathbf{\Gamma}^{e,b*} = -{}^t \mathbf{\Lambda}^b \delta \boldsymbol{\vartheta}^b \times \bar{\boldsymbol{\vartheta}}^{*b}. \tag{5.86}$$

The second part of the adjoint problem is:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^3 10^6 \int_0^L \left(\int_0^L \left(\check{E}_3^{i,b} - \check{E}_3^{i,a} \right) \psi^i(s) ds - (E_3^{i,b} - E_3^{i,a}) \right) \psi^i(s) \delta \check{E}_3^{i,b} ds \\
& - \sum_{i=1}^3 10^6 d_c^2 \int_0^L \left(\int_0^L \left(\check{\Gamma}_2^{i,b} - \check{\Gamma}_2^{i,a} \right) \psi^i(s) ds - (\Gamma_2^{i,b} - \Gamma_2^{i,a}) \right) \psi^i(s) \delta \check{\Gamma}_2^{i,b} ds \\
& - \sum_{j=1}^2 10^6 \int_0^L \left(\int_0^L \left(\check{r}_1^{j,a} - \check{r}_1^{j,b} \right) \psi^j(s) ds - (r_1^{j,a} - r_1^{j,b}) \right) \psi^j(s) \mathbf{e}_1 \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^{j,a} ds \\
& = \int_0^L \left((C_N \mathbf{E}^{*a} - \mathbf{N}^{*a}) \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^a + (\mathbf{E}^{e,a*} - \mathbf{E}^{*a}) \cdot \delta \check{\mathbf{N}}^a + \mathbf{N}^{*a} \cdot \delta \mathbf{E}^{e,a} + \check{\mathbf{N}}^a \cdot \delta \mathbf{E}^{e,a*} \right. \\
& \quad \left. + (C_M \mathbf{\Gamma}^{*a} - \mathbf{M}^{*a}) \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^a + (\mathbf{\Gamma}^{e,a*} - \mathbf{\Gamma}^{*a}) \cdot \delta \check{\mathbf{M}}^a + \mathbf{M}^{*a} \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{e,a} + \check{\mathbf{M}}^a \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{e,a*} \right) ds
\end{aligned} \tag{5.87}$$

with:

$$\delta \mathbf{E}^{e,a} = {}^t \mathbf{\Lambda}^a \left(\delta \check{\mathbf{r}}_s^a - \delta \boldsymbol{\vartheta}^a \times \check{\mathbf{r}}_s^a \right), \tag{5.88}$$

$$\delta \mathbf{\Gamma}^{e,a} = {}^t \mathbf{\Lambda}^a \delta \bar{\boldsymbol{\vartheta}}^a. \tag{5.89}$$

and the derivatives of (5.77) and (5.78) with respect to primal variables:

$$\delta \mathbf{E}^{e,a*} = -{}^t \mathbf{\Lambda}^a \left[\delta \boldsymbol{\vartheta}^a \times \left(\mathbf{r}_s^{*a} - \boldsymbol{\vartheta}^{*a} \times \check{\mathbf{r}}_s^a \right) + \boldsymbol{\vartheta}^{*a} \times \delta \check{\mathbf{r}}_s^a \right], \tag{5.90}$$

$$\delta \mathbf{\Gamma}^{e,a*} = -{}^t \mathbf{\Lambda}^a \delta \boldsymbol{\vartheta}^a \times \bar{\boldsymbol{\vartheta}}^{*a}. \tag{5.91}$$

To recover the strong formulation of the adjoint problem, we introduce $\mathbf{f}^{E3,b}$, $\mathbf{f}^{\Gamma2,b}$ and $\mathbf{f}^{r1,b}$ such that (5.82) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \mathbf{f}^{E3,b} \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^b ds + \int_0^L \mathbf{f}^{\Gamma2,b} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^b ds + \int_0^L \mathbf{f}^{r1,b} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^b ds \\ &= \int_0^L \left((C_N \mathbf{E}^{*b} - \mathbf{N}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^b + (\mathbf{E}^{e,b*} - \mathbf{E}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{N}}^b + \mathbf{N}^{*b} \cdot \delta \mathbf{E}^{e,b} + \check{\mathbf{N}}^b \cdot \delta \mathbf{E}^{e,b*} \right. \\ & \quad \left. + (C_M \mathbf{\Gamma}^{*b} - \mathbf{M}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^b + (\mathbf{\Gamma}^{e,b*} - \mathbf{\Gamma}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{M}}^b + \mathbf{M}^{*b} \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{e,b} + \check{\mathbf{M}}^b \cdot \delta \mathbf{\Gamma}^{e,b*} \right) ds \end{aligned}$$

Moreover, we use spatial quantities to ease the integration by parts:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \mathbf{f}^{E3,b} \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^b ds + \int_0^L \mathbf{f}^{\Gamma2,b} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^b ds + \int_0^L \mathbf{f}^{r1,b} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^b ds \\ &= \int_0^L \left((C_N \mathbf{E}^{*b} - \mathbf{N}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^b + (\mathbf{E}^{e,b*} - \mathbf{E}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{N}}^b + (C_M \mathbf{\Gamma}^{*b} - \mathbf{M}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^b \right. \\ & \quad \left. + (\mathbf{\Gamma}^{e,b*} - \mathbf{\Gamma}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{M}}^b - \check{\mathbf{n}}^b \cdot (\delta \mathbf{\vartheta}^b \times (\mathbf{r}_s^{*b} - \mathbf{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{r}}_s^b) + \mathbf{\vartheta}^{*b} \times \delta \check{\mathbf{r}}_s^b) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{n}^{*b} \cdot (\delta \check{\mathbf{r}}_s^b - \delta \mathbf{\vartheta}^b \times \check{\mathbf{r}}_s^b) + \mathbf{m}^{*b} \cdot \delta \bar{\mathbf{\vartheta}}^b - \check{\mathbf{m}}^b \cdot (\delta \mathbf{\vartheta}^b \times \bar{\mathbf{\vartheta}}^{*b}) \right) ds \end{aligned}$$

using first the triple product identity:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \mathbf{f}^{E3,b} \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^b ds + \int_0^L \mathbf{f}^{\Gamma2,b} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^b ds + \int_0^L \mathbf{f}^{r1,b} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^b ds \\ &= \int_0^L \left((C_N \mathbf{E}^{*b} - \mathbf{N}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^b + (\mathbf{E}^{e,b*} - \mathbf{E}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{N}}^b + (C_M \mathbf{\Gamma}^{*b} - \mathbf{M}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^b \right. \\ & \quad \left. + (\mathbf{\Gamma}^{e,b*} - \mathbf{\Gamma}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{M}}^b - \delta \mathbf{\vartheta}^b \cdot (\mathbf{r}_s^{*b} \times \check{\mathbf{n}}^b + \check{\mathbf{r}}_s^b \times \mathbf{n}^{*b} - (\mathbf{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{r}}_s^b) \times \check{\mathbf{n}}^b + \bar{\mathbf{\vartheta}}^{*b} \times \check{\mathbf{m}}^b) \right. \\ & \quad \left. + (\mathbf{n}^{*b} + \mathbf{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{n}}^b) \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s^b + \mathbf{m}^{*b} \cdot \delta \bar{\mathbf{\vartheta}}^b \right) ds \end{aligned}$$

finally, an integration by parts of the two last terms gives:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \mathbf{f}^{E3,b} \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^b ds + \int_0^L \mathbf{f}^{\Gamma2,b} \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^b ds + \int_0^L \mathbf{f}^{r1,b} \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^b ds \\ &= \int_0^L \left((C_N \mathbf{E}^{*b} - \mathbf{N}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{E}}^b + (\mathbf{E}^{e,b*} - \mathbf{E}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{N}}^b + (C_M \mathbf{\Gamma}^{*b} - \mathbf{M}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{\Gamma}}^b \right. \\ & \quad \left. + (\mathbf{\Gamma}^{e,b*} - \mathbf{\Gamma}^{*b}) \cdot \delta \check{\mathbf{M}}^b - (\check{\mathbf{r}}_s^b \times \mathbf{n}^{*b} + (\mathbf{r}_s^{*b} \times \check{\mathbf{n}}^b - \mathbf{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{r}}_s^b) \times \check{\mathbf{n}}^b + \mathbf{m}_s^{*b} + \bar{\mathbf{\vartheta}}^{*b} \times \check{\mathbf{m}}^b) \cdot \delta \mathbf{\vartheta}^b \right. \\ & \quad \left. - (\mathbf{n}^{*b} + \mathbf{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{n}}^b)_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^b \right) ds + \left[(\mathbf{n}^{*b} + \mathbf{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{n}}^b) \cdot \delta \check{\mathbf{r}}^b + \mathbf{m}^{*b} \cdot \delta \mathbf{\vartheta}^b \right]_0^L \end{aligned}$$

The following strong form of the adjoint problem in b is obtained:

Same equations with a superscripts complete the strong form of the adjoint problem.

Sensitivities are obtained via the derivatives of $\mathfrak{L}$ with respect to m and Y . We first notice that C_N and C_M can be rewritten as $C_N = Y D_N$ and $C_M = Y D_M$ with:

$$D_N = \text{DIAG} \left[\frac{A_{th}}{2(1+\nu)}, \frac{A_{th}}{2(1+\nu)}, A_{th} \right] \quad D_M = \text{DIAG} \left[\frac{A_{th}^2}{4\pi}, \frac{A_{th}^2}{4\pi}, \frac{A_{th}^2}{4(1+\nu)\pi} \right]$$

Equilibrium equations:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{n}^{*b} + \boldsymbol{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{n}}^b \right)_s + \mathbf{f}^{r1,b} &= \mathbf{o}, \\ \mathbf{m}_s^{*b} + \bar{\boldsymbol{\vartheta}}^{*b} \times \check{\mathbf{m}}^b + \check{\mathbf{r}}_s^b \times \mathbf{n}^{*b} &= \check{\mathbf{n}}^b \times \left(\mathbf{r}_s^{*b} - \boldsymbol{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{r}}_s^b \right). \end{aligned}$$

Constitutive law:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{*b} &= C_N \mathbf{E}^{*b} - \mathbf{f}^{E3,b}, \\ \mathbf{M}^{*b} &= C_M \boldsymbol{\Gamma}^{*b} - \mathbf{f}^{\Gamma 2,b}. \end{aligned}$$

Strain-displacements relationships:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{E}}^{*b} &= \check{\mathbf{E}}^{e,b,*}, \\ \check{\boldsymbol{\Gamma}}^{*b} &= \check{\boldsymbol{\Gamma}}^{e,b,*}. \end{aligned}$$

Boundary conditions:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{r}}^{*b}(0) &= \check{\mathbf{r}}^b(0), \quad \check{\mathbf{r}}^{*b}(L) = \check{\mathbf{r}}^b(L), \\ \check{\boldsymbol{\Lambda}}^{*b}(0) &= \check{\boldsymbol{\Lambda}}^b(0), \quad \check{\boldsymbol{\Lambda}}^{*b}(L) = \check{\boldsymbol{\Lambda}}^b(L). \end{aligned}$$

Sensitivities read:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi} &= - \int_0^L \left(D_N \check{\mathbf{E}}^b \cdot \mathbf{E}^{*b} + D_N \check{\mathbf{E}}^a \cdot \mathbf{E}^{*a} + D_M \check{\boldsymbol{\Gamma}}^b \cdot \boldsymbol{\Gamma}^{*b} + D_M \check{\boldsymbol{\Gamma}}^a \cdot \boldsymbol{\Gamma}^{*a} \right) \delta \chi \, ds \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial m} &= - \int_0^L 10^{-6} g e_1 \cdot \left(\check{\mathbf{r}}^{*b} + \check{\mathbf{r}}^{*a} \right) \delta m \, ds \end{aligned}$$

If m and Y are constant along the cable:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi} &= - \int_0^L \left(D_N \check{\mathbf{E}}^b \cdot \mathbf{E}^{*b} + D_N \check{\mathbf{E}}^a \cdot \mathbf{E}^{*a} + D_M \check{\boldsymbol{\Gamma}}^b \cdot \boldsymbol{\Gamma}^{*b} + D_M \check{\boldsymbol{\Gamma}}^a \cdot \boldsymbol{\Gamma}^{*a} \right) ds \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial m} &= - \int_0^L 10^{-6} g e_1 \cdot \left(\check{\mathbf{r}}^{*b} + \check{\mathbf{r}}^{*a} \right) ds \end{aligned}$$

If the length L of the cable is known, we can use the above inverse problem to find a couple (χ, m) that minimizes the functional $\mathfrak{J}$. This couple can in turn be used to find the tension of the cable. With our models, we are able to evaluate the end tension in at least three different ways. First, we can use (χ, m) to calculate γ according to formula (5.32) and (5.30) to obtain the minimum safety factor at the cable's end. It is also possible to use (5.33) to have the mean tension at one end of the cable, *i.e.* the tension given by the stress sensor. Finally, the catenary solution can be used to obtain the same information that we name hereafter γ_c . From a computational point of view, we proceed as we did in the previous section: we use a Barzilai-Borwein algorithm to update the parameters at each iteration of the inverse problem.

As it can be seen in Table 5.8, results of the inverse problem with Set 1 and Set 2 are identical up to the sixth decimal. In both cases, the safety factor γ_s is closely reached. As expected, the discrepancy in mass per unit length of cable does not really affect the final result in tension.

	Target	Initial guess	Set 1	Set 2
L [m]	21.567	21.567	21.567	21.567
l [m]	21.658	21.658	21.658	21.658
ρA [kg.m ⁻¹]	3.221312	3.317951	3.284755	3.284762
Y [Pa]	1.7E11	1.734E11	1.700E11	1.700E11
m	1.019906	1.050503	1.039992	1.039995
χ	0.944444	0.963333	0.944454	0.944441
γ	2.218192	2.173812	2.216356	2.216386
γ_s	2.314093	2.268716	2.314063	2.314096
γ_c	2.299513	2.254422	2.299483	2.299516

Table 5.8: Results of the inverse problem when the length of the cable is known.

Finding the tension: If the length is not well known, we must find a value of L sufficiently close to the true value in order to obtain a correct estimate of the tension. As mentioned in the previous section, the ideal choice of functional to assess L would be J_{Γ_2} with Set 1 but the precision of our monitoring system is not good enough. Nevertheless, starting with our generic initial guess leads to a numerical evaluated length $L = 0.995811$ which is a very good numerical approximation. In the following, we do not use this value since it cannot be physically assessed. Our second choice is either J_{depl} or J_{E_3} which are the same with both sets 1 and 2. They lead to very similar results: $L = 0.995881$ and $L = 0.995852$ with J_{depl} and J_{E_3} , respectively. For numerical tests, we use the value calculated with J_{E_3} . Table 5.9 shows the results obtained with both sets 1 and 2. Due to the very large values of J_{Γ_2} using Set 2, we apply a factor 0.0001 to its value.

	Target	Initial guess	Set 1	Set 2
L [m]	21.567	21.657	21.568	21.568
l [m]	21.658	21.658	21.658	21.658
ρA [kg.m ⁻¹]	3.221312	3.317951	3.284777	3.284777
Y [Pa]	1.7E11	1.734E11	1.722E11	1.722E11
L	0.995798	0.999999	0.995852	0.995852
m	1.019906	1.050503	1.039999	1.039999
χ	0.944444	0.963333	0.956538	0.956484
γ	2.218192	8.627070	2.215944	2.216064
γ_s	2.314093	56.234871	2.314298	2.314429
γ_c	2.299513	59.868400	2.299901	2.300031

Table 5.9: Results of the inverse problem when the length of the cable is unknown.

3 Conclusion

Two inverse problems have been presented using two models of geometrically exact cables with and without flexural stiffness. Since the two misfit data functionals make use of displacements and strains, two Hu-Washizu kind of variational formulations were used in order to ease the inverse problem writing.

Preliminary parametric studies led to the construction of a two-step identification problem in both cases: first, the length of the cable is found via a simple search line algorithm using finite differences to assess the derivative of the functional with respect to L and second, the other physical parameters of the cable are identified via direct, adjoint, and sensitivities equations. The results obtained with the two inverse problems show that it is possible to find the tension in the cable even when only the span and the diameter of the cable are known.

Chapitre 6

Étude expérimentale

Dans ce chapitre nous présentons l'étude expérimentale réalisée au cours de notre travail. La création, le dimensionnement et la réalisation des moyens d'essais sur les câbles faisant partie intégrante de la thèse, le chapitre commence par leur présentation. Le protocole d'essai envisagé afin de mettre en œuvre la recherche de tension dans les câbles présentée dans le chapitre précédent est ensuite décrit. L'analyse des résultats d'essais a conduit à privilégier l'utilisation du problème inverse s'appuyant sur le modèle de câble sans rigidité de flexion. Les résultats d'application de la méthode donnés en fin de chapitre montrent son efficience et la pertinence de l'approche adoptée.

Sommaire

1	Présentation du banc d'essais	158
2	Montage expérimental	159
3	Protocole d'essai	161
4	Résultats expérimentaux	163
4.1	Données brutes	163
5	Post-traitements	168
6	Conclusions du chapitre	171

1 Présentation du banc d'essais

Le Département Laboratoire de Bordeaux du Cerema s'est doté, dans le cadre de la présente thèse, d'un banc d'essai de mise sous tension des câbles. Le banc a été dessiné et dimensionné par M. Erick Merliot du Département COSYS de l'IFSTTAR. La vocation première du banc est de tester les méthodes de diagnostic de câble en conditions aussi proches que possible de celles rencontrées sur ouvrages. Son cahier des charges a été rédigé dès les premiers mois du travail du thèse. Depuis sa conception et sa réalisation initiale, il a fait l'objet de modifications portées par MM. Vaurigaud et Merliot. Nous le présentons dans sa configuration actuelle.

La structure. Le banc est constitué de 7 modules comprenant une paire de poutres munies de plaques soudées en leurs extrémités - voir la Figure 6.1. Plusieurs modules peuvent être retirés afin de modifier la longueur totale du banc : chaque module mesurant 3 m, cette dernière varie donc de 3 à 21 m environ. Les deux ensembles poutres plus plaques d'un même module possèdent exactement la même longueur afin de garantir la géométrie rectangulaire de chaque module. Deux platines massives d'about terminent le banc : la première sert d'appui au vérin creux permettant la mise en tension du câble et constitue donc son ancrage actif. La seconde permet l'accroche de l'ancrage passif par le biais de 4 barres filetées retenant la plaque d'appui dans laquelle s'insère le culot du câble. La longueur totale entre ancrages dépend donc de l'ouverture du vérin coté actif et de la position de la plaque d'ancrage coté passif. Le vérin a une capacité de 400 kN ce qui correspond à la limite d'utilisation du banc dans sa configuration complète sur 21 m. Des éléments de sécurité ont été imaginés afin d'éviter la projection des ancrages et le fouet du câble en cas de rupture, comme on peut le voir sur l'une des photographies de la Figure 6.1.

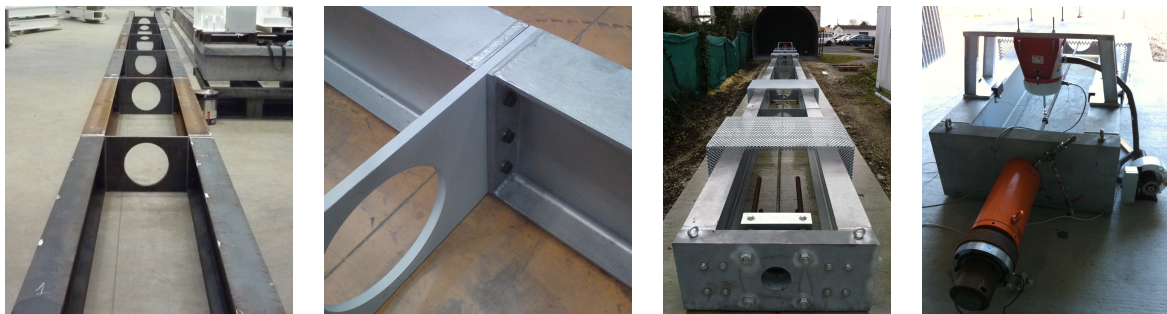


Figure 6.1: Structure du banc d'essai. De gauche à droite : banc en phase de réalisation dans l'usine Latecis, détail de la jonction entre deux modules, banc installé sur le site du Cerema/Département Laboratoire de Bordeaux, vérin de mise en tension et pot vibrant.

Les équipements et la chaîne de mesure. Le banc est équipé d'une chaîne d'acquisition complète. Les capteurs à disposition pour la réalisation d'essai sont les suivants :

- quatre accéléromètres mono-axe DeltaTron type 4507 B 002 Brüel & Kjær dont la plage de mesure est de $\pm 70 \text{ m.s}^{-2}$ peak ;

- deux accéléromètres tri-axe DeltaTron type 4506 B 003 Brüel & Kjær dont la plage de mesure est de $\pm 140 \text{ m.s}^{-2}$ peak ;
- deux capteurs de déplacements Intelligent-L300 Laser Sensor Keyence dont la plage de mesure va de 160 mm à 450 mm ;
- un capteur de force (peson) FN2796 Measurement Specialties dont la plage de mesure va jusqu'à 400 kN ;
- trois sondes de température PT100 classe B ;
- des jauges extensométriques Tokyo Sokki Kenkyujo Co.

Les capteurs sont reliés à une armoire dans laquelle se trouve l'ensemble de la chaîne. Elle contient, en plus de l'alimentation :

- un contrôleur Q.Pac de la marque Gantner ;
- dix modules raccordés au contrôleur :
 - un module Q.Bloxx A108 Gantner permettant l'acquisition des données relatives aux capteurs de déplacements et au capteur de force ;
 - quatre modules Q.Bloxx A107 Gantner permettant l'acquisition des données relatives aux sondes de température, au capteur de pression du vérin et au capteur à fil de longueur du câble ;
 - cinq modules Q.Bloxx A101 Gantner permettant l'acquisition des données relatives aux accéléromètres.

Les jauges d'extensométrie occupent beaucoup de voies et ont donc leur propre système d'acquisition HBM composé de deux boîtiers Canhead CB 1014 – 120 permettant le branchement de dix jauges sur chaque boîtier, le tout étant piloté par le logiciel Catman.

En dehors du cadre de la présente thèse, le banc a également été doté d'un pot vibrant LDS 440N et d'un capteur de force associé type 8230-001 $\pm 200\text{N}$ Brüel & Kjær. Il dispose par ailleurs d'un marteau instrumenté pour l'analyse modale.

L'enveloppe totale utilisée pour la construction et l'acquisition de l'ensemble du banc et de ses équipements était répartie en deux fonds de 60 k€ chacun environ.

2 Montage expérimental

Le montage expérimental a une double vocation : il permet d'une part d'améliorer notre connaissance des moyens expérimentaux nouvellement acquis et des informations que ces derniers peuvent donner sur le comportement des câbles, et d'autre part de tester la méthode inverse imaginée au chapitre précédent.

Pour l'essai de mesure de tension, nous utilisons le banc dans sa configuration complète avec un monotoron multi-couches 19 fils répartis en 3 couches 1 – 6 – 12 d'une longueur $L \approx 21 \text{ m}$, et d'un diamètre $d_c = 22 \text{ mm}$.

La chaîne d'instrumentation est composée de deux capteurs de déplacements, d'un capteur de pression, d'un capteur de force (peson), de deux accéléromètres, de trois sondes de température et de 3×4 jauges d'extensométrie. Les positions des capteurs, de la masse et du marteau nécessaires à la mise en œuvre du protocole défini dans le sous-chapitre suivant sont détaillées sur la Figure 6.2.

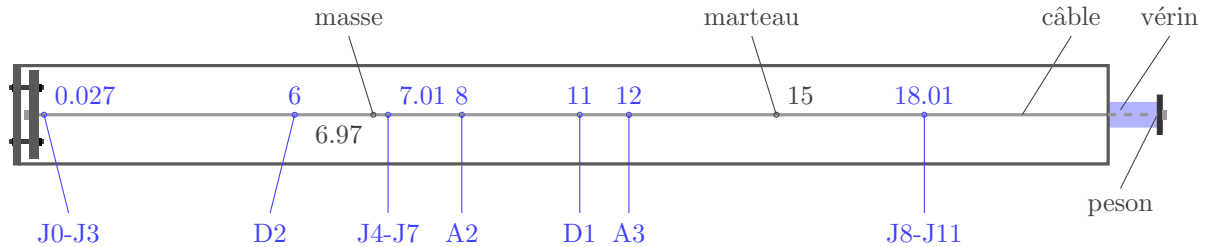


Figure 6.2: Schéma d'instrumentation du banc

Les jauges sont situées en trois points particuliers du câble : le premier à proximité directe de l'encastrement passif, le second se trouve dans le voisinage du point d'application de la charge additionnelle et le dernier est situé en partie courante, loin des ancrages et de la charge additionnelle. Chacun des trois points de mesure est équipé de quatre jauges positionnées à la périphérie de la section du câble comme les quarts d'heure sur le cadran d'une montre. Les jauges sont collées le long des fils et présentent donc un léger biais par rapport à l'axe du câble. La Figure 6.4 gauche montre un test préliminaire de collage de jauge sur un toron 7-fils. Une fois collée sur le câble, les jauges sont protégées par une couche de cire micro-cristalline fondue au chalumeau assurant son étanchéité, une couche de protection mécanique en mastic 3M VM-TAPE et un isolant électromagnétique 3M Tape Core Series 591 que l'on voit sur la Figure 6.5 à droite.

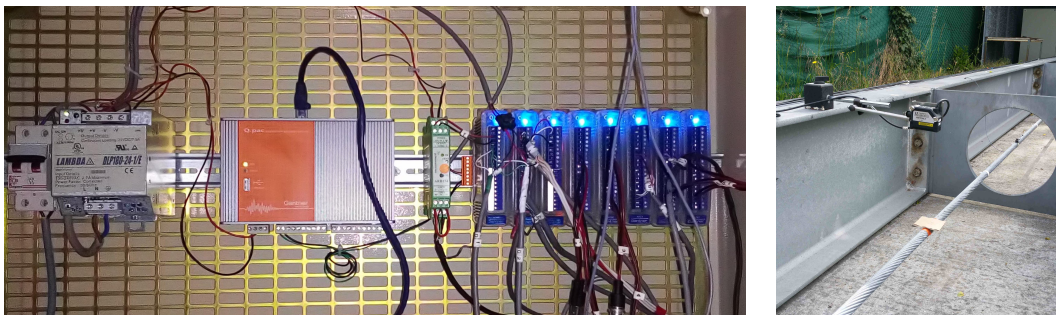


Figure 6.3: Instrumentation du banc d'essai. Gauche : intérieur de l'armoire contenant la centrale et les modules d'acquisition, droite : capteur de déplacement.



Figure 6.4: Instrumentation du banc d'essai. Gauche : test de collage de jauges sur toron 7-fils. droite : centrale d'acquisition supplémentaire pour les jauges au pied de l'armoire principale.

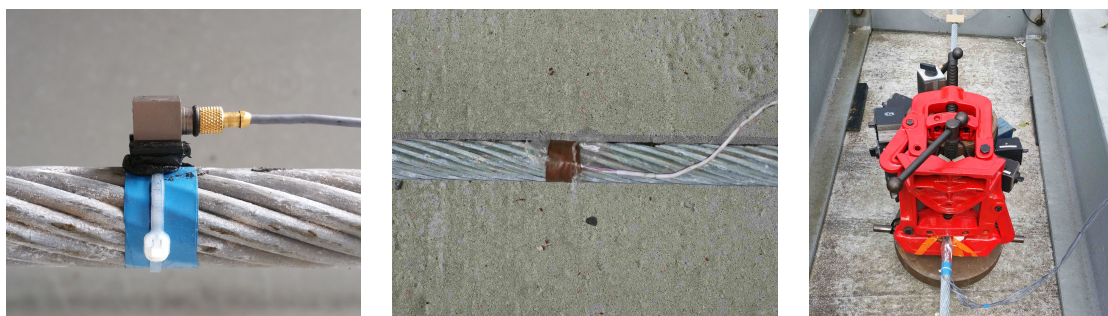


Figure 6.5: Instrumentation du banc d'essai. Gauche : accéléromètre monoaxe, milieu : sonde de température plaquée sur le câble. droite : masse additionnelle et 4 jauges $J4$ à $J7$.

3 Protocole d'essai

Le protocole d'essai doit permettre la mise en œuvre de la méthode inverse présentée au chapitre précédent sur un câble dont on néglige la rigidité en flexion. Il reproduit donc le cas de chargement étudié dans la partie théorique et qui permet la construction de la fonctionnelle à minimiser. Il s'agit d'observer deux états statiques du câble : un état a libre et un état b sous chargement ponctuel. En pratique, une fois l'ensemble des capteurs posés et opérationnels, les différentes étapes de l'essai se déroulent comme suit :

- mise sous tension du câble à une tension donnée ;
- fermeture du vérin de mise en tension ;
- acquisition de la tension du vérin fermé et stabilisé ;
- mesures au capteur laser 50 m de la longueur entre ancrages - 3 mesures - ;
- essai vibratoire : trois frappés au marteau à 15 m environ ;
- mise en place d'une masse de 86.120 kg à $L = 6.97$ m ;
- dépose de la masse et vérification du retour à la tension initiale du câble.

L'essai vibratoire permet de réaliser une comparaison simple avec la LPC35 dont les résultats sont *a priori* fiables aux niveaux de tension étudiés.

Le protocole ci-dessus est réalisé pour six tensions différentes réparties entre 55 kN et 205 kN par palier de 30 kN.

Nous donnons dans les paragraphes suivants quelques précisions sur l'instrumentation mise en place et les post-traitements des données effectués.

Positionnement. Le positionnement des capteurs et de la masse est réalisé par marquage sur le câble détendu.

Masse ponctuelle. La masse utilisée a été pesée en laboratoire et est composée d'objets métalliques dont l'accroche est ponctuelle, comme on peut le voir sur la Figure 6.5.

Longueur l entre ancrages. La distance entre ancrages l est évaluée sur la base de trois mesures effectuées au capteur laser 50 m.

Échantillonnage. Les jauges extensométriques sont échantillonnées à 150 Hz. Les capteurs de déplacements ainsi que les deux capteurs accélérométriques sont échantillonnés à 2000 Hz.

Temps d'attente de stabilisation. Lors de la mise en tension du câble un réarrangement des fils qui le constituent s'opère à court terme et tend à diminuer sa tension (effet de relaxation). Ce phénomène connu est d'autant plus marqué et long que la tension initiale est élevée. Dans notre cas, et pour les tensions les plus élevées, le phénomène de stabilisation est rapidement masqué par les effets thermiques - dès la première demie-heure. La Figure 6.6 donne une idée des variations de tension dans le câble tendu à 100 kN et soumis aux variations de températures extérieures. Les courbes de température T_1 , T_2 et T_3 sont données par des sondes situées respectivement à l'extérieur, sur le câble et sous l'abri du banc. On voit nettement l'augmentation de la tension dans le câble qui suit la baisse de la température et inversement. Le banc étant également métallique cette variation est également corrélée à la variation de longueur du banc. Le graphique montre clairement les trois cycles jour/nuit.

Ouverture et fermeture du vérin. Le vérin est équipé d'un capteur de pression étalonné nous permettant de connaître la tension appliquée au câble. Il dispose également d'une vis de fermeture. Il n'est pas possible d'avoir une pression constante au cours du temps avec le matériel dont nous disposons : les essais se font donc vis fermée. Par ailleurs, lors de la fermeture de la vis, une perte de tension liée au transfert de charge du système hydraulique sur la vis est observée par le peson. Une fois la vis fermée, seul le peson peut nous renseigner sur la valeur de la tension et il n'y a plus de redondance sur cette information.

Moyennes. L'étude des deux configurations statiques a et b ne peut se faire directement à partir des signaux de données qui couvrent l'ensemble des étapes du protocole défini plus haut. Les fichiers de données sont découpés et une moyenne est calculée au niveau des paliers statiques stabilisés.

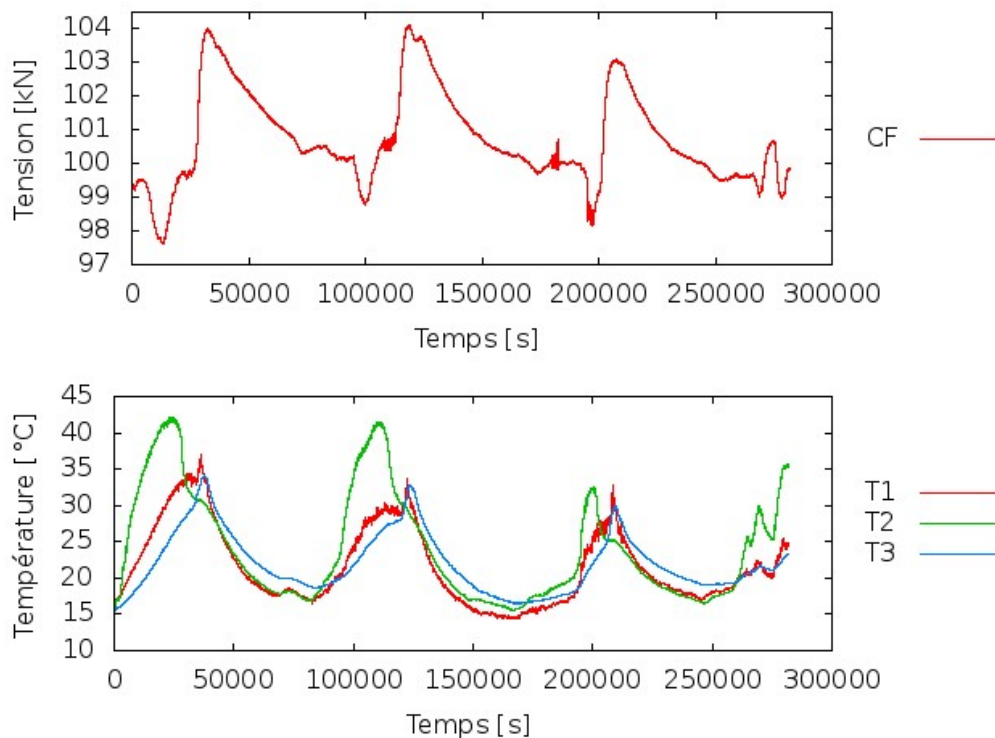


Figure 6.6: Suivi de la température et de la tension dans le câble pendant 3 jours avec une tension initiale de 100kN. Les trois sondes de température $T1$, $T2$ et $T3$ se situent respectivement à l'extérieur, sur le câble et sous l'abri du banc. Mai 2015.

Justesse des mesures. La justesse des capteurs de déplacement est millimétrique. Celles des jauges est d'un peu moins d'une μdef . La qualification du peson permet d'atteindre une justesse de 3 kN.

4 Résultats expérimentaux

4.1 Données brutes

Les Figures 6.7 et 6.8 montrent les fichiers de données des déplacements et des déformations recueillis au cours des six essais réalisés. Les graphiques se lisent par colonne ou par ligne : chaque colonne représente un essai réalisé à une tension donnée, la première ligne représente les déplacements des points situés en $s = 6$ m et $s = 11$ m et chacune des autres lignes renvoie à un point sur le câble muni de 4 jauges d'extensométrie.

Si l'on s'intéresse à la première ligne de graphes représentant les déplacements, on voit, conformément à ce qui est attendu, que la pose de la masse abaisse plus le point le plus proche de cette dernière. Par ailleurs, plus le câble est tendu, moins cet abaissement est grand. Remarquons que si le câble avait été lâche, il aurait été possible d'observer un réhaussement en certains points.

L'observation des graphes concernant les points de mesure des déformations permet de distinguer au moins deux types de comportement : sur la deuxième ligne des Figures 6.7 et 6.8, on remarque un comportement typique des poutres en flexion : lors de la pose de la charge, les jauges $J0$ et $J2$ d'une part et $J1$ et $J3$ d'autre part, qui sont en

opposition sur le câble, montrent une flexion importante dans le plan vertical et, selon les tensions, beaucoup moins significative dans le plan horizontal. Les phénomènes de flexion à l'encastrement ont été étudiés - voir notamment [20]- et dépassent le cadre de cette thèse, mais l'on peut en voir certains sur les résultats expérimentaux présentés ici. En particulier, on constate que les jauges posées à côté de la masse se comportent de façon similaire à celles jouxtant l'encastrement ce qui peut paraître paradoxal puisque la courbure y est opposée. Si l'on considère que les jauges sont collées sur les fils et que ceux-ci sont libres de glisser, on peut imaginer que le fils passant en fibre supérieure au niveau du point de mesure passe non loin de la fibre inférieure au niveau de la masse : il y subirait donc une sur-tension. Ce raisonnement, très simpliste, ne doit pas faire oublier la complexité des différents modes de fonctionnement par glissement, débatement ou frottements des fils au sein du câble. En particulier, les jauges sont collées sur des fils qui subissent également des phénomènes de flexion : ne connaissant ni l'histoire ni la nature des forces de contact dans le voisinage des fils instrumentés, il n'est pas possible d'interpréter les mesures obtenues. Seuls les graphes de la dernière ligne concernant le point en partie courante - où la flexion est très faible - peuvent être interprétés simplement puisqu'ils décrivent une extension sans glissement du câble.

Il est également possible de constater que les niveaux de déformation avant et après chargement ne sont pas toujours les mêmes au cours d'un essai, ce qui témoigne de microglissements entre les fils. Il est clair à la lecture d'ouvrages traitant de la flexion des monotorons multicouches - voir par exemple l'article [146], le livre [63] ou le mémoire de master bien documenté [147], pour n'en citer qu'un très petit nombre - que l'exploitation des courbes présentées en Figures 6.7 et 6.8 afin d'alimenter le modèle de câble avec rigidité en flexion n'est pas immédiat. Elle ne peut être envisagée dans le cadre de la présente thèse.

Nous nous limiterons donc à l'utilisation des capteurs de déplacements et des jauges collées en partie courante pour l'utilisation du problème inverse sans rigidité en flexion développé dans la partie précédente.

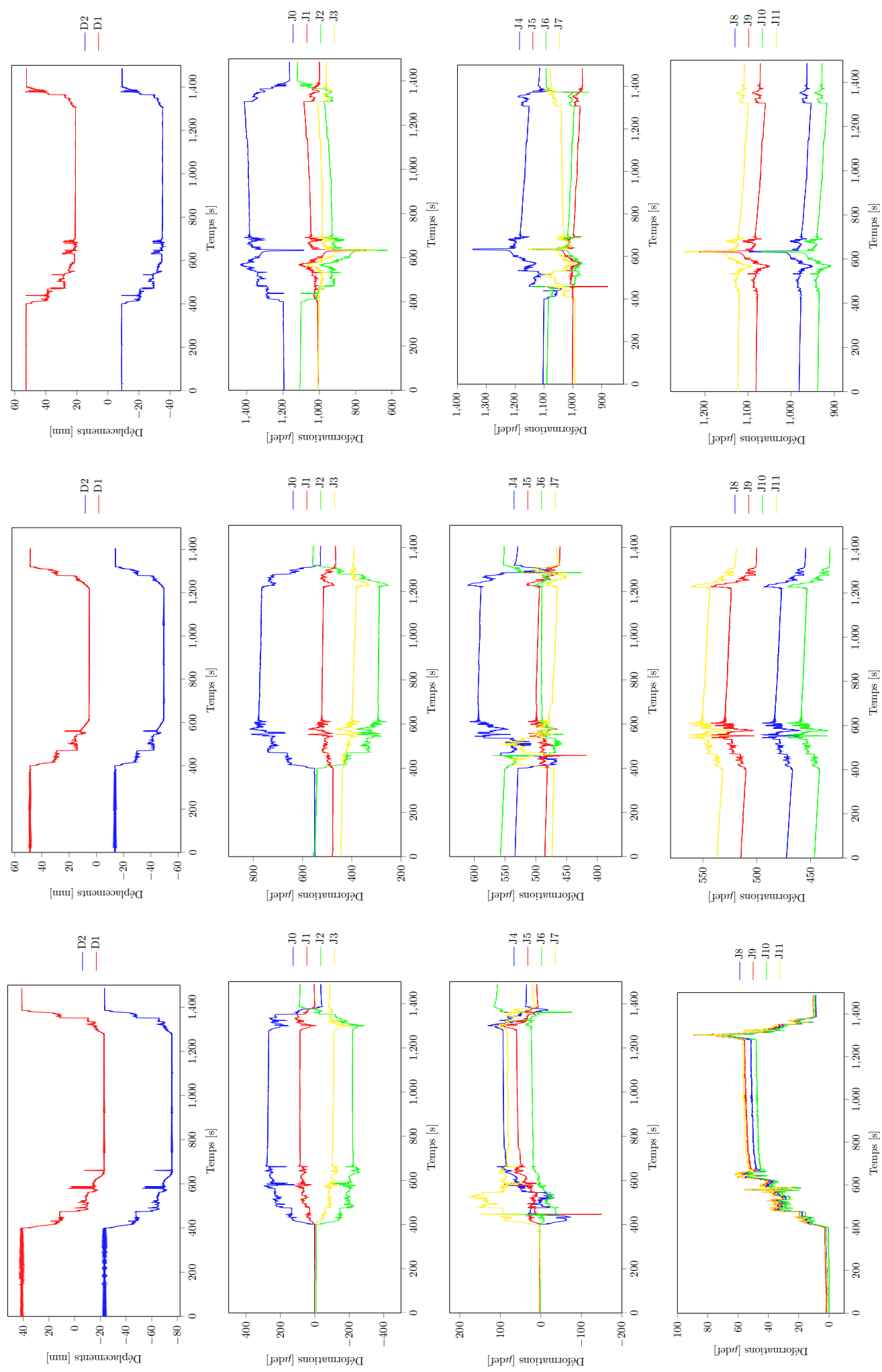


Figure 6.7: Données brutes classées par colonne. Gauche : essai à 85kN, milieu : essai à 55kN, droite : essai à 115kN.

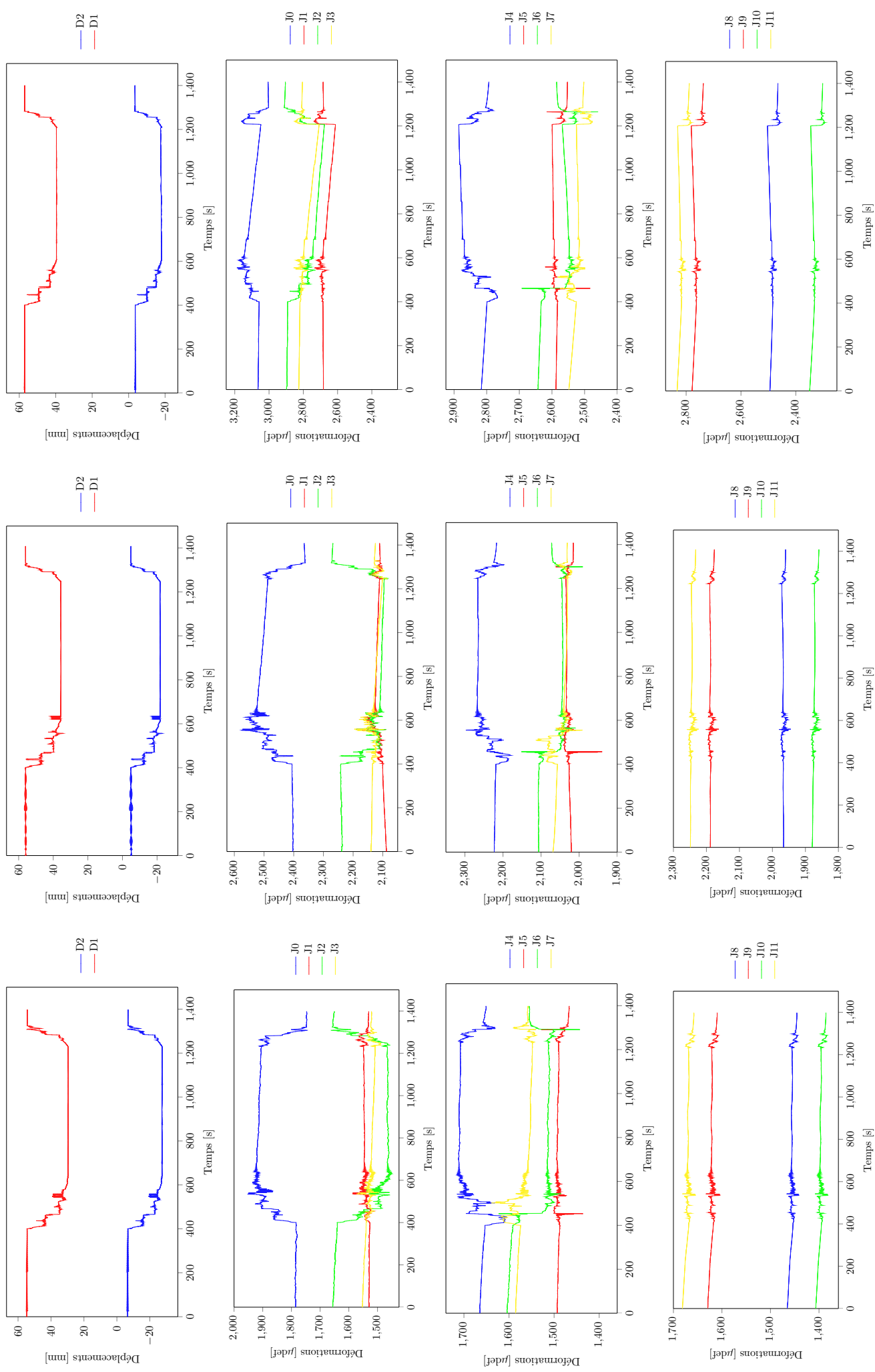


Figure 6.8: Données brutes classées par colonne. Gauche : essai à 175kN, milieu : essai à 145kN, droite : essai à 205kN.

La Figure 6.9 montre l'évolution de la tension et des températures relevées par trois sondes $T1$, $T2$ et $T3$ au cours du temps. Les sondes $T1$ et $T2$ sont situées à proximité du banc à deux endroits différents tandis que la sonde $T3$ est en contact direct avec le câble. Conformément à ce qui est attendu, nous constatons qu'une nette variation de la tension est visible lorsque l'on pose la masse sur le câble faiblement tendu. Cette variation est presque imperceptible lorsque le câble est fortement tendu.

À l'instar de ce qui a été observé au cours de l'essai spécifique réalisé sur plusieurs jours et présenté plus haut, les effets de la température ambiante ont un impact important sur la tension du câble, comme on peut le constater sur les essais à 115 et 145 kN. En effet, une hausse de 2°C de la température du câble entraîne un décalage d'un à deux kilo-Newtons en tension. Cet ordre de grandeur correspond bien à celui obtenu en calculant la dilatation du câble et en considérant que le banc ne subit pas tout de suite l'effet d'un changement de température.

Pour l'essai à 215 kN en revanche, il faut considérer que la diminution de tension est lié à l'effet de fluage à court terme évoqué plus haut.

Sur la durée des différents essais, les variations constatées restent inférieures à 1% sur les différents paliers étudiés, avec masse et sans masse.

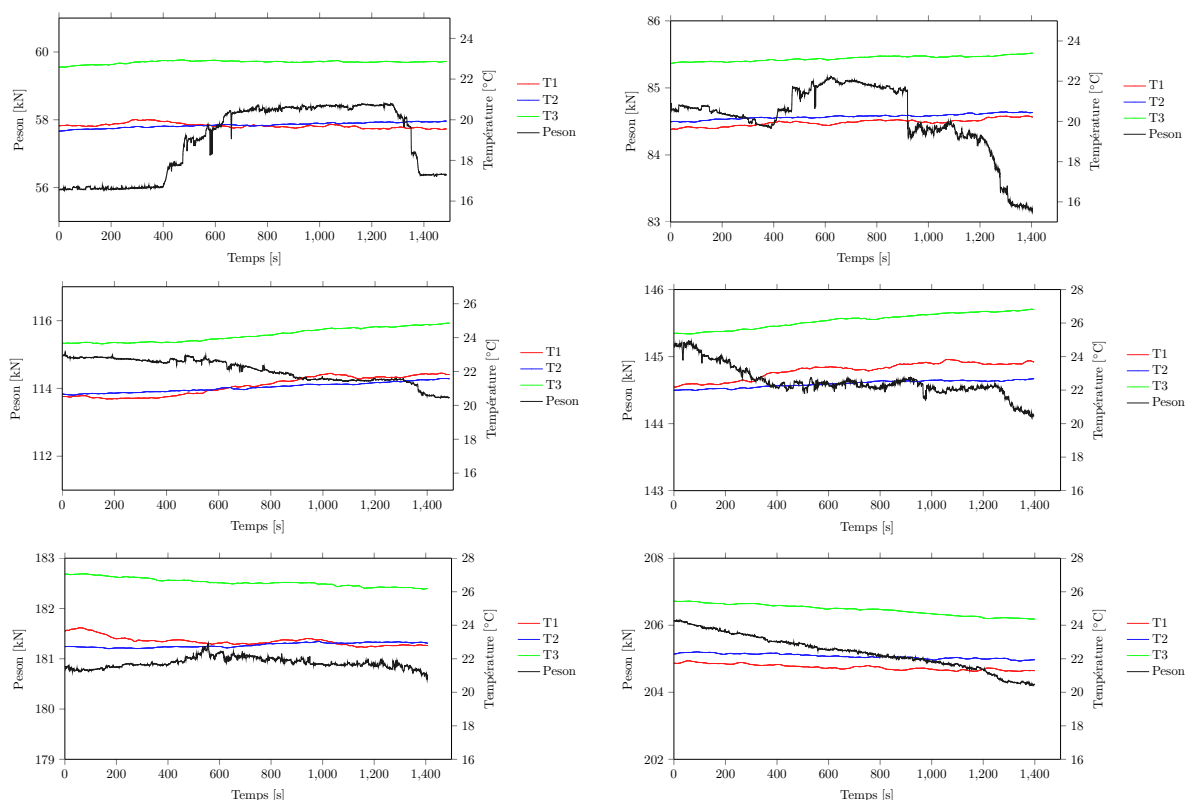


Figure 6.9: Température et force mesurées à l'aide des sondes $T1$, $T2$, $T3$ et du peson. De gauche à droite et de haut en bas : essais à 55 kN, 85 kN, 115 kN, 145 kN, 175 kN, 205 kN

5 Post-traitements

Pour les raisons expliquées plus haut, nous n'exploitons que les données issues des capteurs de déplacement et la moyenne des déformations des quatre jauges situées en partie courante à $s = 18.01$ m. Le Tableau 6.1 donne sous forme synthétique les valeurs utiles au problème inverse et extraites des données expérimentales.

Capteurs	Grandeur	Unités	Essais					
Peson	Tension	[kN]	55	85	115	145	175	205
Télémètre	l	[m]	21.733	21.747	21.763	21.777	21.794	21.809
J8-J11	$\check{\Delta}^b - \check{\Delta}^a$	[μ def]	47.56	17.57	1.38	3	0.4	1.6
D1	$r_1^{1,b} - r_1^{1,a}$	[mm]	-52.5	-35.7	-26.1	-20.7	-16.9	-14.4
D2	$r_1^{2,b} - r_1^{2,a}$	[mm]	-64.2	-43.3	-31.7	-24.8	-20.3	-17.5

Table 6.1: Extraction des données utiles au problème inverse à partir des mesures

Le problème inverse a été initialisé avec le même jeu de paramètres¹ pour tous les essais. Il correspond à des valeurs supposées de masse linéique suivant la formule $\rho A = 7810 \times 0.75\pi \times 0.011^2$ kg.m⁻¹ et de rigidité axiale $EA = 1.7\text{E}11 \times A$ Pa. La Longueur L supposée du câble est quant à elle prise légèrement plus faible que l puisque l'on sait le câble tendu, même pour la tension la plus faible.

	Init.	55 kN	85 kN	115 kN	145 kN	175 kN	205 kN
L [m]	21.7	21.710	21.712	21.714	21.715	21.718	21.720
l [m]	-	21.733	21.747	21.763	21.777	21.794	21.789
ρA [kg/m]	2.226	3.029	1.806	3.118	0.9896	3.368	0.725
EA [MN]	48.47	47.86	48.52	48.47	48.48	48.42	48.45
m	0.946268	1.282893	0.765484	1.322278	0.419954	1.430595	0.308111
κ	0.944444	0.932658	0.945515	0.944607	0.944730	0.943481	0.995918

Table 6.2: Tableau récapitulatif des résultats obtenus avec la méthode inverse mise en œuvre.

Les résultats pour l'ensemble des six essais ont été reportés dans le Tableau 6.2. Leur examen montre que les deux paramètres gouvernant le problème du câble tendu et à faible flèche sont la longueur L et la rigidité axiale EA , comme on l'a vu au cours des simulations numériques du chapitre précédent. La masse linéique n'est quant à elle qu'assez mal identifiée et il faut considérer que nos routines appliquées aux câbles dont le profil est plat ne convergent pas toujours vers une valeur vraisemblable de ce paramètre. L'analyse faite au chapitre précédent montre qu'il en sera autrement lorsque des profils à plus forte flèche seront abordés dans des travaux futurs.

Le Tableau 6.3 rassemble les tensions calculées par le biais du modèle inverse et par calcul à l'aide de la LPC35. Pour les six essais, les tests d'applicabilité de la LPC35 ont été pleinement vérifiés et l'alignement des 7 premiers modes a permis de s'assurer de la

¹hors longueur de la corde l qui est une donnée expérimentale

	Unités	55 kN	85 kN	115 kN	145 kN	175 kN	205 kN
T_{peson}	[kN]	55.935	84.698	114.750	145.074	174.645	205.694
T_{inv}	[kN]	50.928	79.296	110.125	139.634	171.173	199.786
err_{inv}	%	-8.9	-6.4	-4.0	-3.7	-2.0	-2.9
T_{LPC35}	[kN]	49.805	77.072	107.062	135.222	164.766	193.279
err_{LPC35}	%	-10.9	-9.0	-6.7	-6.8	-5.6	-6.0

Table 6.3: Tensions obtenues avec la méthode inverse et comparaison avec les tensions obtenues par méthode vibratoire.

fiabilité des résultats obtenus, aux incertitudes sur les paramètres près. Les paramètres utilisés pour la LPC35 sont les mêmes que ceux utilisés pour l'initialisation du problème inverse. Le câble étant graissé, sa masse linéique est sans doute sous-estimée de quelques pourcents (jusqu'à 10%), et donc la tension calculée également dans les mêmes proportions. Les pourcentages d'erreur, compris entre 10 et 2%, peuvent sembler élevés mais doivent tenir compte de l'incertitude sur la mesure du peson. En revanche, les pourcentages d'erreur pour la LPC35 ne devraient pas, dans les conditions de nos essais, varier autant. Dans le paragraphe suivant, nous tentons d'expliquer pourquoi et d'obtenir de meilleures valeurs de tension.

Recalcul de la tension : Dans la mesure où les critères d'application de la LPC35 sont parfaitement remplis pour toutes les tensions, nous devrions pouvoir identifier la masse linéique du câble à partir des tensions mesurées. En d'autres termes, pour la série d'essais effectuée, il n'y pas lieu de remettre en cause l'utilisation d'un modèle de corde vibrante et nous devrions trouver la même masse linéique en appliquant la formule :

$$\rho A = \frac{T}{4f_1^2 L^2} \quad (6.1)$$

	Unités	55 kN	85 kN	115 kN	145 kN	175 kN	205 kN
T_{peson}	[kN]	55.935	84.698	114.750	145.074	174.645	205.694
l	[m]	21.733	21.747	21.763	21.777	21.794	21.789
f_1	[Hz]	3.44	4.28	5.04	5.66	6.24	6.75
ρA	[kg.m ⁻¹]	2.5	2.45	2.39	2.39	2.36	2.37

Table 6.4: Identification de la masse linéique grâce à la formule de la corde vibrante (6.1)

Comme on peut le constater dans le tableau 6.4, la masse linéique n'est pas la même pour tous les essais malgré la validité du test d'alignement des fréquences. Nous sommes amenés à penser que les valeurs de tension données par le peson ne sont pas aussi justes que prévu pour l'ensemble des tensions au cours de son étalonnage sous presse.

Après vérifications effectuées sur l'ensemble {vérin + peson} à l'aide d'une presse certifiée Cofrac ², nous pensons qu'il s'agit d'un biais introduit par des conditions d'utilisation du matériel légèrement différentes au cours l'étalonnage et sur le banc.

²www.cofrac.fr

Nous choisissons la valeur de masse linéique obtenue pour la tension la plus élevée. La longueur des signaux enregistrés étant relativement constante sur l'ensemble des essais, c'est également à cette tension que la précision sur le calcul de la fréquence propre est la meilleure.

Nous supposons donc que les valeurs de tension les plus justes sont celles obtenues grâce à la formule (6.1) en prenant $\rho A = 2.37 \text{ kg.m}^{-1}$. Ces tensions, que nous appellerons tensions de référence T_{ref} , sont placées dans le tableau 6.5.

	Unités	55 kN	85 kN	115 kN	145 kN	175 kN	205 kN
T_{ref}	[kN]	53.004	82.022	113.939	143.907	175.349	205.694

Table 6.5: Tensions de référence calculées grâce à la formule (6.1) en prenant $\rho A = 2.37 \text{ kg.m}^{-1}$

Notons que les tensions de référence du tableau ne s'affranchissent pas des incertitudes sur les mesures de longueur et de fréquences. Néanmoins, la justesse du capteur laser est millimétrique, ce qui donne une précision inférieure au dix millième sur la longueur. Les longueurs d'enregistrement exploitables durant au moins une minute, nous pouvons espérer une précision au moins inférieure au pourcent sur les fréquences.

Retour aux résultats de l'étude Replaçons nous dans le cadre de notre étude en considérant que les vraies tensions sont données par le tableau 6.5 mais oublions que $\rho A = 2.37 \text{ kg.m}^{-1}$ et reprenons la valeur $\rho A = 7810 \times 0.75\pi \times 0.011^2 \text{ kg.m}^{-1}$. Le tableau 6.3 devient :

	Unités	55 kN	85 kN	115 kN	145 kN	175 kN	205 kN
T_{ref}	[kN]	53.004	82.022	113.939	143.907	175.349	205.694
T_{inv}	[kN]	50.928	79.296	110.125	139.634	171.173	199.786
err_{inv}	[%]	-3.9	-3.3	-3.3	-2.9	-2.4	-2.9
T_{LPC35}	[kN]	49.805	77.072	107.062	135.222	164.766	193.279
err_{LPC35}	[%]	-6.0	-6.0	-6.0	-6.0	-6.0	-6.0

Table 6.6: Tensions obtenues avec la méthode inverse et comparaison avec les tensions obtenues par méthode vibratoire.

On constate naturellement que l'erreur pour la LPC35 est directement liée à l'erreur faite sur ρA et est la même pour tous les essais. On remarque surtout que les erreurs pour la méthode inverse sont inférieures à 4% pour tous les essais.

Avantages et limites de la méthode inverse Afin d'illustrer les avantages que présente la méthode inverse lorsque l'on ne connaît pas avec précision les paramètres physiques du câble, concentrons nous sur le premier test à 55 kN. Si l'on refait les calculs en faisant varier $\rho A = 7810 \times 0.75\pi \times 0.011^2 \text{ kg.m}^{-1}$ de 10%, nous obtenons les résultats mis dans le tableau 6.7.

Comme nous pouvons le constater, le manque de précision sur la masse linéique n'influence pas le résultat obtenu par la méthode inverse. En revanche, et comme attendu, les résultats obtenus par la méthode vibratoire sont directement impactés.

	Init.	ρA	+2%	+4%	+6%	+8%	+10%
L [m]	21.7	21.710	21.710	21.710	21.710	21.710	21.710
ρA [kg/m]	-	3.029	3.029	3.029	3.029	3.029	3.028
EA [MN]	48.47	47.86	47.89	47.92	47.96	47.98	48.02
m	-	1.282893	1.282838	1.282782	1.282726	1.282682	1.282626
κ	0.944444	0.932658	0.933287	0.933917	0.934548	0.935054	0.935686
T_{inv} [kN]	-	50.928	50.925	50.923	50.921	50.919	50.916
err_{inv} [%]	-	-3.9	-3.9	-3.9	-3.9	-3.9	-3.9
T_{LPC35} [kN]	-	49.805	50.801	51.798	52.794	53.790	54.786
err_{LPC35} [%]	-	-6.0	-4.1	-2.3	-0.4	-1.5	-3.4

Table 6.7: Tableau récapitulatif des résultats obtenus en faisant varier la masse linéique initiale de 10%

Complétons nos observations en remarquant une nouvelle fois que la méthode inverse ne permet pas d'identifier à proprement parler les paramètres physiques qu'elle calcule et ne peut être utilisée que pour l'évaluation de la tension. Si nous regardons les résultats des simulations du tableau 6.7, nous voyons que la routine converge toujours vers les mêmes valeurs L , ρA , EA dont nous pouvons dire avec certitude qu'elles sont fausses pour au moins l'une d'entre elles. Rappelons que ce phénomène est lié à la multiplicité des solutions du problème de minimisation lorsque le câble est tendu.

La tension est quant à elle toujours déterminée à moins de 4% près, ce qui est très satisfaisant.

6 Conclusions du chapitre

Le volet expérimental de la thèse a débuté avec l'obtention des crédits, la conception et la réalisation du banc d'essai. Une phase de mise en service comprenant notamment l'utilisation du banc pour effectuer le retour d'expérience présenté au troisième chapitre et le suivi sur plusieurs jours de la tension dans un câble soumis aux chargements climatiques a permis de mettre au point le protocole expérimental de mesure de tension par méthode inverse.

L'observation des données issues des jauges extensométriques confirme que, conformément à la littérature, le câble possède un comportement qui s'apparente à celui d'une poutre mais que le toronnage des fils ne permet pas d'utiliser simplement les déformations mesurées en périphérie du câble pour remonter à sa courbure, comme cela est possible dans le cas de barres pleines ou des poutres. L'utilisation du modèle de câble avec rigidité en flexion n'est donc pas immédiatement possible sur les câbles avec notre instrumentation. Deux pistes sont envisageables à l'avenir pour résoudre ce problème : la première est de garder l'instrumentation telle qu'elle est et d'étudier la vaste littérature des modèles semi-analytiques permettant de relier l'état de déformation des fils à celui du câble vu comme un cylindre plein. La seconde est d'essayer d'obtenir la courbure du câble en changeant le système de monitoring, par exemple en testant l'utilisation de fibres optiques, de traitement d'image ou de scanner laser.

La méthode inverse s'appuyant sur le modèle de câble sans rigidité en flexion a donné des résultats en parfaite adéquation avec la mesure de tension réalisée par le peson et corroborés par une méthode vibratoire éprouvée. Contrairement à cette dernière, la méthode inverse ne requière pas une connaissance fine de la masse linéique du câble, ce qui constitue un avantage important dans la mesure où c'est un paramètre mal connu du problème.

Conclusions

La mesure de tension dans les câbles d'une structure joue un rôle central en matière de diagnostic. La diversité des typologies de câble et de leurs fonctionnements constitue une source de complications importante et s'est traduite par l'élaboration de très nombreuses méthodes d'évaluation de la tension, chacune plus ou moins adressée à un type ou une longueur de câble. Les trois premiers chapitres de cette thèse ont été écrits dans le but de donner une idée aussi claire que possible de cette diversité de typologies de câble, des problèmes qui leur sont liés, des modèles et méthodes qui leur ont été dédiés.

Dans le **premier chapitre**, nous avons présenté les différents types de câble rencontrés sur ouvrage et les désordres dont ils souffrent, principalement liés aux phénomènes de fatigue et de corrosion. Les systèmes de protection permettant de réduire les impacts de ces phénomènes ont également été donnés car ils ont une influence sur les paramètres physiques des câbles, tels que leur masse linéique ou leur amortissement.

Le **deuxième chapitre** a été consacré à l'étude bibliographique des différentes modélisations de câble, qu'elles s'intéressent à l'interaction entre leurs fils constitutifs ou aux aspects non-linéaires de leur comportement global. Nous avons particulièrement détaillé deux modèles qui occupent une place importante dans la littérature : le modèle dit d'Irvine, qui est en fait le modèle de câble le plus ancien et qui est utilisé en dimensionnement d'ouvrage, et le modèle de barres et poutres géométriquement exactes dont l'essor a eu lieu dans les années 1980.

Bien que l'utilisation du modèle de poutres en grands déplacements et rotations finies pour étudier les câbles soit récente, elle traduit la volonté de relier le comportement global du câble et les phénomènes locaux de surtensions liés à la flexion, notamment au niveau des ancrages. Le modèle a été implémenté sous FEniCS et sa validation a été réalisée sur des cas tests connus. La représentation d'un câble au moyen d'un modèle monodimensionnel, qu'elle prenne ou non en compte les rigidités en flexion et torsion, soulève de nombreuses questions qui ont été abordées dans le chapitre suivant.

Nous avons reporté dans le **troisième chapitre** le retour d'expérience réalisé en laboratoire et *in situ* de trois méthodes vibratoires utilisant les modèles de corde vibrante, de hauban avec rigidité en flexion et de poutre tendue. Il montre que les câbles des ponts suspendus courants ne rentrent pas complètement dans leurs domaines d'application respectifs : elles permettent toutefois une évaluation de la tension dans le cas de câbles suffisamment longs et dont le profil ne présente pas une flèche trop importante. Dans certains cas limites, les méthodes donnent des valeurs de tensions cohérentes entre elles mais s'étalant sur une plage de valeurs atteignant 20 à 35% de la valeur de la tension. En revanche, leur utilisation simultanée dans les autres cas donnent des résultats corrects,

aux approximations faites sur les paramètres du câble près. Ces approximations font également l'objet d'une discussion dont les conclusions tendent à privilégier les méthodes inverses d'identification de la tension plutôt que les méthodes directes, et ce dans la plupart des cas.

Dans le **quatrième chapitre**, nous avons présenté, en suivant les écrits des frères Cosserat, une modélisation générale de câble que nous avons développée afin d'obtenir deux modèles différents et fonctions des hypothèses cinématiques faites.

Le premier modèle présenté dans la thèse correspond au modèle de câble géométriquement exact sans rigidité en flexion dont nous donnons deux formulations variationnelles : l'une en déplacement, l'autre mixte. Une comparaison entre l'implémentation des deux formulations a été faite sur la base d'exemples concrets et montre que la formulation mixte converge plus rapidement malgré son nombre d'inconnues plus élevé. Elle permet en outre de rendre primales les variables de déformation et d'effort, ce qui facilite l'écriture de certains problèmes inverses. Le problème associé à la formulation mixte s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouvez } \check{\mathbf{r}} \in \mathbb{V}, \check{\Delta} \in \mathbb{P}_{\Delta} \text{ et } \check{T} \in \mathbb{P}_{\check{T}} \text{ tels que} \\ & J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T}) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \check{\Delta}^2 - \check{\mathbf{r}} \cdot \check{\mathbf{f}} - \check{T} (\check{\Delta} - \check{\Delta}^e) \right] ds \\ & \text{soit un point-selle et } \check{\Delta}^e := \frac{1}{2} (\check{\mathbf{r}}_s \cdot \check{\mathbf{r}}_s - 1) \end{aligned}$$

Par point-selle, nous entendons que $J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T})$ soit minimum vis-à-vis de $\check{\mathbf{r}}$ et $\check{\Delta}$ et maximum vis-à-vis de $\check{T}$. Les conditions aux limites sont prises en compte dans le choix des espaces $\mathbb{V}$, $\mathbb{P}_{\Delta}$ et $\mathbb{P}_{\check{T}}$.

La formulation variationnelle mixte s'écrit quant à elle :

$$\delta J(\check{\mathbf{r}}, \check{\Delta}, \check{T}) = \int_0^1 \left[(\check{\Delta} - \check{T}) \delta \check{\Delta} + \check{T} \check{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \check{\mathbf{r}}_s - \check{\mathbf{f}} \cdot \delta \check{\mathbf{r}} - (\check{\Delta} - \check{\Delta}^e) \delta \check{T} \right] ds = 0.$$

Au-delà de son utilisation dans le problème inverse développé au chapitre suivant, l'utilisation de cette formulation permet de traiter simplement des problèmes inverses couramment rencontrés en génie civil. Par exemple, le réglage d'un modèle de pont suspendu peut s'écrire en travée centrale :

$$\begin{aligned} & \text{Trouvez } L \text{ et } A \text{ rendant minimale} \\ & \mathfrak{J} = \frac{1}{2} \|\check{\mathbf{r}}_1(s=0.5) - \mathbf{f}\|^2 \\ & \text{sous les contraintes :} \\ & \delta J = 0 \\ & A\sigma_f \geq \gamma \|\check{\mathbf{n}}\| \end{aligned}$$

où $\mathbf{f}$ est la flèche de l'ouvrage sous son poids propre et γ un coefficient de sécurité. En travée de rive, le problème peut alors s'écrire grâce à l'équilibre des forces en tête de pylone : il faut trouver le câble vérifiant la géométrie et la condition d'équilibre en tête de pylone que l'on peut exprimer sous la forme d'une fonctionnelle à minimiser.

Le second modèle écrit prend en compte la rigidité en flexion du câble de façon simplifiée et conduit à une loi de comportement ne nécessitant que deux modules d'élasticité. Bien que non utilisé dans ce travail, ce modèle semble correspondre à un juste compromis pour le monitoring de câble, entre le modèle de câble sans rigidité en flexion et celui, plus riche, des barres et poutres présenté dans la partie bibliographique et utilisé au cinquième chapitre. Notons que ce dernier peut également être retrouvé grâce à la théorie des frères Cosserat.

Deux méthodes inverses ont été présentées au **cinquième chapitre**. Les fonctionnelles d'écarts aux mesures choisies sont construites à partir des incréments de déplacements et de déformations entre deux configurations statiques : l'une sous chargement ponctuel du câble, l'autre libre.

Le premier problème inverse étudié utilise le modèle de câble géométriquement exact sans rigidité en flexion dont les paramètres à identifier sont la longueur L du câble, sa masse linéique ρA et sa raideur axiale EA .

La longueur est dans un premier temps identifiée grâce à une évaluation de la dérivée de la fonctionnelle par différences finies puis les deux autres paramètres sont trouvés grâce à l'écriture d'un lagrangien dont les différentielles par rapport aux variables duales, primales et aux paramètres du câble donnent respectivement la formulation variationnelle mixte présentée au quatrième chapitre, le problème adjoint et les équations de sensibilité du problème. La formulation forte du problème direct s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Equilibrium equations:} & \quad \left(\check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^b \right)_s + \mathbf{f}^b = \mathbf{o} \\ \text{Constitutive law:} & \quad \check{T}^b = \kappa \check{\Delta}^b \\ \text{Strain-displacements relationships:} & \quad \check{\Delta}^b = \check{\Delta}^{e,b} \\ \text{Boundary conditions:} & \quad \check{\mathbf{r}}^b(0) \text{ and } \check{\mathbf{r}}^b(L) \text{ known} \end{aligned}$$

où l'exposant renvoie à la configuration statique b du câble sous poids propre avec ajout d'une masse ponctuelle. Le problème inverse correspondant s'écrit quant à lui :

$$\begin{aligned} \text{Adjoint equilibrium equations:} & \quad \left(\check{T}^b \check{\mathbf{r}}_s^{*b} + \check{T}^{*b} \check{\mathbf{r}}_s^b \right)_s + \mathbf{f}^{r,b} = \mathbf{o} \\ \text{Adjoint constitutive law:} & \quad \check{T}^{*b} = \kappa \check{\Delta}^{*b} - f^{\Delta,b} \\ \text{Adjoint strain-displacements relationships:} & \quad \check{\Delta}^{*b} = \check{\mathbf{r}}_s^b \cdot \check{\mathbf{r}}_s^{*b} \\ \text{Boundary conditions:} & \quad \check{\mathbf{r}}^{*b}(0) = \check{\mathbf{r}}^b(0), \check{\mathbf{r}}^{*b}(L) = \check{\mathbf{r}}^b(L) \end{aligned}$$

L'écriture des mêmes équations pour la configuration a libre complète le problème. C'est cette méthode qui a été mise en œuvre dans l'étude expérimentale et qui a donné de bons résultats sur le cas testé.

La seconde méthode, qui suit un cheminement similaire, tire bénéfice des informations supplémentaires apportées par le modèle de barres et poutres en grands déplacements dont la formulation variationnelle classique a été modifiée et rendue mixte pour les besoins de l'étude. Les formulations fortes des problèmes directs et inverses obtenus s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \text{Equilibrium equations:} \quad & \check{\mathbf{n}}_s^b + \check{\mathbf{f}}^b = \mathbf{o}, \\ & \check{\mathbf{m}}_s^b + \check{\mathbf{r}}_s^b \times \check{\mathbf{n}}^b = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Constitutive law:} \quad & \check{\mathbf{N}}^b = C_N \check{\mathbf{E}}^b, \\ & \check{\mathbf{M}}^b = C_M \check{\mathbf{\Gamma}}^b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Strain-displacements relationships:} \quad & \check{\mathbf{E}}^b = \check{\mathbf{E}}^{e,b}, \\ & \check{\mathbf{\Gamma}}^b = \check{\mathbf{\Gamma}}^{e,b}. \end{aligned}$$

$$\text{Boundary conditions:} \quad \check{\mathbf{r}}^b(0), \check{\mathbf{r}}^b(L), \check{\mathbf{\Lambda}}^b(0), \check{\mathbf{\Lambda}}^b(L).$$

et

$$\begin{aligned} \text{Equilibrium equations:} \quad & \left(\mathbf{n}^{*b} + \boldsymbol{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{n}}^b \right)_s + \mathbf{f}^{r1,b} = \mathbf{o}, \\ & \mathbf{m}_s^{*b} + \bar{\boldsymbol{\vartheta}}^{*b} \times \check{\mathbf{m}}^b + \check{\mathbf{r}}_s^b \times \mathbf{n}^{*b} = \check{\mathbf{n}}^b \times \left(\mathbf{r}_s^{*b} - \boldsymbol{\vartheta}^{*b} \times \check{\mathbf{r}}_s^b \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Constitutive law:} \quad & \mathbf{N}^{*b} = C_N \mathbf{E}^{*b} - \mathbf{f}^{E3,b}, \\ & \mathbf{M}^{*b} = C_M \mathbf{\Gamma}^{*b} - \mathbf{f}^{\Gamma 2,b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Strain-displacements relationships:} \quad & \check{\mathbf{E}}^{*b} = \check{\mathbf{E}}^{e,b*}, \\ & \check{\mathbf{\Gamma}}^{*b} = \check{\mathbf{\Gamma}}^{e,b*}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Boundary conditions:} \quad & \check{\mathbf{r}}^{*b}(0) = \check{\mathbf{r}}^b(0), \quad \check{\mathbf{r}}^{*b}(L) = \check{\mathbf{r}}^b(L), \\ & \check{\mathbf{\Lambda}}^{*b}(0) = \check{\mathbf{\Lambda}}^b(0), \quad \check{\mathbf{\Lambda}}^{*b}(L) = \check{\mathbf{\Lambda}}^b(L). \end{aligned}$$

où l'exposant b désigne la configuration statique b . L'écriture des mêmes équations pour la configuration a libre complète le problème.

Les simulations numériques ont montré de bons résultats quant à l'identification de la tension dans le câble, tant en partie courante qu'au niveau des ancrages. L'étude expérimentale et les éléments vus dans la première moitié de ce travail montrent toutefois que le modèle présente plusieurs inconvénients. Tout d'abord, sa loi de comportement possède au minimum six modules d'élasticité : le nombre de paramètres à identifier est donc élevé et il faudrait mener une étude approfondie afin de construire la (les) fonctionnelle(s) et le(s) protocole(s) permettant leurs identifications. De plus, l'accès à la courbure du câble n'est pas aussi immédiate que celui de ses déplacements. Il est néanmoins envisageable de reprendre les modèles semi-analytiques permettant de faire le lien entre l'état de déformation dans un fil périphérique et la courbure globale du câble. Une autre piste serait d'utiliser un système de monitoring permettant de remonter à la courbure, en tentant par exemple de coller des fibres optiques le long du câble en passant d'un fil à l'autre afin de suivre son axe.

Dans le **dernier chapitre**, nous avons présenté les moyens d’essais expérimentaux acquis au cours du présent travail de thèse et installés sur le terrain du Département Laboratoire de Bordeaux du Cerema Sud-Ouest. L’étude expérimentale menée sur l’efficience de la méthode inverse a donné de bons résultats que nous rappelons dans le tableau 6.8. Ils confortent nos choix d’orientation de développement de contrôle de santé des câbles par méthode inverse. En effet, l’étude a mis en lumière les avantages de la méthode qui détermine une tension correcte sans connaissance fine des paramètres physiques du câble.

	Unités	55 kN	85 kN	115 kN	145 kN	175 kN	205 kN
T_{ref}	[kN]	53.004	82.022	113.939	143.907	175.349	205.694
T_{inv}	[kN]	50.928	79.296	110.125	139.634	171.173	199.786
$ err_{inv} $	[%]	3.9	3.3	3.3	2.9	2.4	2.9

Table 6.8: Tensions obtenues avec la méthode inverse.

Les observations faites au cours des différents essais ont néanmoins montré l’importance de l’ambiance climatique sur la tension dans le câble testé. S’il est d’ores et déjà envisagé de développer une méthode inverse dynamique afin d’obtenir une identification plus fine et un suivi dans le temps des paramètres physiques que sont la longueur, la masse linéique et les différentes rigidités, il semble important d’inclure dans le modèle utilisé la possibilité de prendre en compte les effets thermiques. Dans ce contexte, et afin de ne pas multiplier le nombre de paramètres à identifier, une modification du modèle géométriquement exact simplifié présenté dans la partie modélisation semble, à moyen terme, pertinente.

Enfin, le travail présenté dans cette thèse pourrait assez directement être appliqué au problème du tensiomètre.

Annexes

A Elastic catenary problem

A.1 Exact catenary solutions. Elastic and inelastic cases

Exact elastic catenary solution: A well-known explicit solution exists for the elastic catenary problem. We recall only the main results. Using (4.124)-(4.128), it is easy to obtain:

$$\begin{aligned}\eta_1^0 &= Q_1^0 \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{N^0} \right), \\ \eta_2^0 &= Q_2^0 \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{N^0} \right), \\ \nu^0 &= Q_3^0 \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{N^0} \right).\end{aligned}$$

The global equilibrium of the cable in configuration $\mathbf{B}^0$ is written at s^0 , leading to expressions $N^0 = \left[(Q_1^0(0) + \rho Ags)^2 + Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2 \right]^{1/2}$, $Q_1^0(s) = Q_1^0(0) + \rho Ags$, $Q_2^0(s) = Q_2^0(0)$ and $Q_3^0(s) = Q_3^0(0)$. By substitution and integration, the solution is obtained:

$$\begin{aligned}\alpha_1^0(s) &= \frac{Q_1^0(0)}{EA} s + \frac{\rho g}{2E} s^2 + \frac{N^0(0)}{\rho Ag} \left(\sqrt{1 + \frac{2\rho Ag Q_1^0(0)}{N^0(0)^2} s + \left(\frac{\rho Ag}{N^0(0)} \right)^2 s^2} - 1 \right), \\ \alpha_2^0(s) &= \frac{Q_2^0(0)}{EA} s + \frac{Q_2^0(0)}{\rho Ag} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0) + \rho Ags}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0)}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) \right], \\ \alpha_3^0(s) &= \frac{Q_3^0(0)}{EA} s + \frac{Q_3^0(0)}{\rho Ag} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0) + \rho Ags}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0)}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) \right].\end{aligned}$$

where $Q_1^0(0)$, $Q_2^0(0)$ and $Q_3^0(0)$ have to be determined via the nonlinear system:

$$\begin{aligned}\alpha_1^0(L) = L_1^0 &= \frac{Q_1^0(0)}{EA} L + \frac{\rho g}{2E} L^2 + \frac{N^0(0)}{\rho Ag} \left(\sqrt{1 + \frac{2\rho Ag Q_1^0(0)}{N^0(0)^2} L + \left(\frac{\rho Ag}{N^0(0)} \right)^2 L^2} - 1 \right), \\ \alpha_2^0(L) = L_2^0 &= \frac{Q_2^0(0)}{EA} L + \frac{Q_2^0(0)}{\rho Ag} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0) + \rho AgL}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0)}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) \right], \\ \alpha_3^0(L) = L_3^0 &= \frac{Q_3^0(0)}{EA} L + \frac{Q_3^0(0)}{\rho Ag} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0) + \rho AgL}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0)}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) \right].\end{aligned}$$

Exact inelastic catenary solution: The inelastic catenary is obtain similarly starting with equations (4.119)-(4.121), $N^0 = \left[(Q_1^0(0) + \rho Ags)^2 + Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2 \right]^{1/2}$, $Q_1^0(s) = Q_1^0(0) + \rho Ags$, $Q_2^0(s) = Q_2^0(0)$ and $Q_3^0(s) = Q_3^0(0)$. By substitution and integration, the solution is obtained:

$$\begin{aligned}\alpha_1^0(s) &= \frac{N^0(0)}{\rho Ag} \left(\sqrt{1 + \frac{2\rho Ag Q_1^0(0)}{N^0(0)^2} s + \left(\frac{\rho Ag}{N^0(0)} \right)^2 s^2} - 1 \right), \\ \alpha_2^0(s) &= \frac{Q_2^0(0)}{\rho Ag} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0) + \rho Ags}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0)}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) \right], \\ \alpha_3^0(s) &= \frac{Q_3^0(0)}{\rho Ag} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0) + \rho Ags}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0)}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) \right].\end{aligned}$$

where $Q_1^0(0)$, $Q_2^0(0)$ and $Q_3^0(0)$ have to be determined via the nonlinear system:

$$\begin{aligned}\alpha_1^0(L) = L_1^0 &= \frac{N^0(0)}{\rho Ag} \left(\sqrt{1 + \frac{2\rho Ag Q_1^0(0)}{N^0(0)^2} L + \left(\frac{\rho Ag}{N^0(0)} \right)^2 L^2} - 1 \right), \\ \alpha_2^0(L) = L_2^0 &= \frac{Q_2^0(0)}{\rho Ag} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0) + \rho AgL}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0)}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) \right], \\ \alpha_3^0(L) = L_3^0 &= \frac{Q_3^0(0)}{\rho Ag} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0) + \rho AgL}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{Q_1^0(0)}{\sqrt{Q_2^0(0)^2 + Q_3^0(0)^2}} \right) \right].\end{aligned}$$

B Simo beam: classic examples

B.1 3D cantilever bend beam

In this example, a bend is clamped at one end and is subjected by an upward force of 600 at the other end. This problem is a *classic* and has been treated by many authors, firstly by Bathe and Borlourchi [148] and then by Cardona and *al.*, Simo and *al.*, Jelenić and *al.*, Ibrahimbegović and *al.* to name a few. For an overview of the results obtained by those authors, the reader can report to Table 2 of [103]. Main characteristics of the beam problem can be found in Table 6.9. Our results are reported in Table. 6.10 and

EA	10^7
$GA_1 = GA_2$	$5 \cdot 10^6$
$GI = EI_1 = EI_2$	$10^7/12$
L	25π
Load	$\check{\mathbf{f}} = 600\mathbf{e}_1$

Table 6.9: Parameters of the bend problem

are in agreement with the results obtained by other authors. Figure 6.10 shows initial

Nbr. of linear elements	$\check{r}_1 - r_1^0$	$\check{r}_2 - r_2^0$	$\check{r}_3 - r_3^0$
8	53.411329	-13.482175	-23.478191
200	53.475387	-13.603685	-23.560267

Table 6.10: Obtained tip displacements at full load

and final positions of the beam.

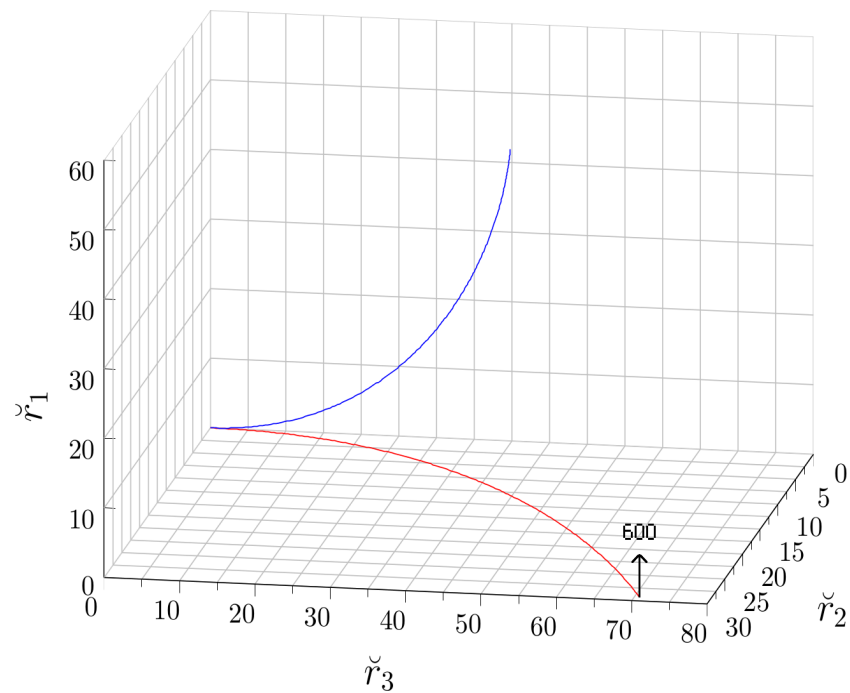


Figure 6.10: Displacement components of $\check{\mathbf{r}}$. Red line: reference configuration $\mathbf{C}^0$, blue line: static configuration $\check{\mathbf{C}}$ at equilibrium under a 600 load at the right end.

B.2 3D elbow

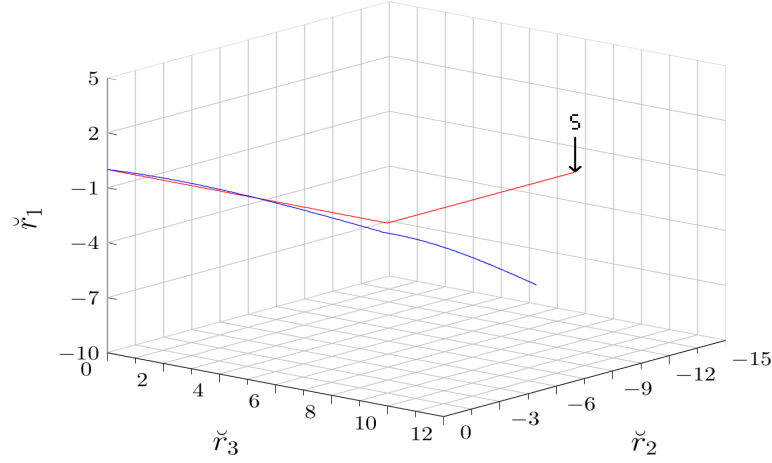
In this example, a cantilever elbow is subjected to a vertical force at the free end. Main characteristics of the elbow can be found in Table 6.11, tip displacements are reported in Table 6.12 and Figure 6.11 gives initial and final configurations.

Stiffness properties, dimension and load	
$EA=GA_1 = GA_2$	10^6
$GI = EI_1 = EI_2$	10^3
L	$10 + 10$
Load	$\check{\mathbf{f}} = -5.0\mathbf{e}_1$

Table 6.11: Parameters of the elbow problem

Nbr. of linear elements	$\check{r}_1 - r_1^0$	$\check{r}_2 - r_2^0$	$\check{r}_3 - r_3^0$
8	-6.878169	0.685868	-1.560804
200	-6.510352	1.659412	-0.434171
800	-6.491497	1.687591	-0.399018
1000	-6.490512	1.689521	-0.396710

Table 6.12: Obtained tip displacements at full load within 100 steps of load

Figure 6.11: Displacement components of $\check{\mathbf{r}}$. Red line: reference configuration $\mathbf{C}^0$, blue line: static configuration $\check{\mathbf{C}}$ at equilibrium under a -5.0 load at the right end.

Results reported for the elbow example are in accordance with the literature, see for instance [103].

B.3 Pure bending of a cantilever beam

In this example, a concentrated moment is applied at the free end of a cantilever beam. This example has been widely studied (see [2]) and the beam is expected to assume a circle shape for a moment applied of 4π . Main characteristics of the beam can be found in Table 6.13 and Figure 6.12 gives initial, intermediate - for a 4π load - and final configurations - for a 8π load.

Stiffness properties, dimension and load	
$EA=GA_1 = GA_2$	10^9
$GI = EI_1 = EI_2$	10^6
L	375.246
Load	$\check{\mathbf{f}} = -935.1\mathbf{e}_1$

Table 6.13: Parameters of the pure bending problem

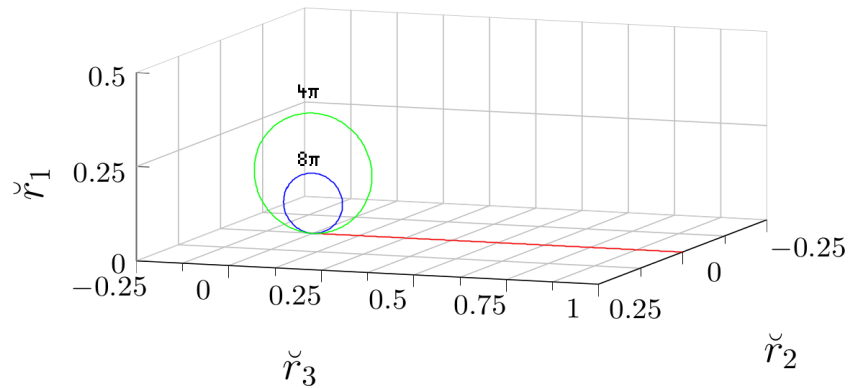


Figure 6.12: Displacement components of $\check{\mathbf{r}}$. Red line: reference configuration $\mathbf{C}^0$, green line: half loaded beam at equilibrium under a 4π load at the right end, blue line: full load configuration $\check{\mathbf{C}}$ at equilibrium under a 8π load at the right end.

It can be seen the good agreement between the obtained results and the expected ones.

B.4 Clamped-hinged arch subjected to point load

In this example, a deep circular hinged-clamped arch is loaded on its top with a concentrated load. This problem has been extensively studied by numerous authors ([2], [149], [99], [112]) and is well documented. Given the arch characteristics reported in Table.6.14, theoretical buckling is supposed to occur for a 897 load. In our analysis, convergence is achieved until a load of 935.1. The post-buckling study of this particular problem goes beyond the scope of the present work but we will keep in mind that our implementation on *FEniCS* potentially leads to an error up to 4%.

Stiffness properties, dimension and load	
$EI_1 = EI_2$	2
L	1.0
Load	$\check{\mathbf{m}} = 8\pi\mathbf{e}_2$

Table 6.14: Parameters of the deep circular hinged-clamped arch problem

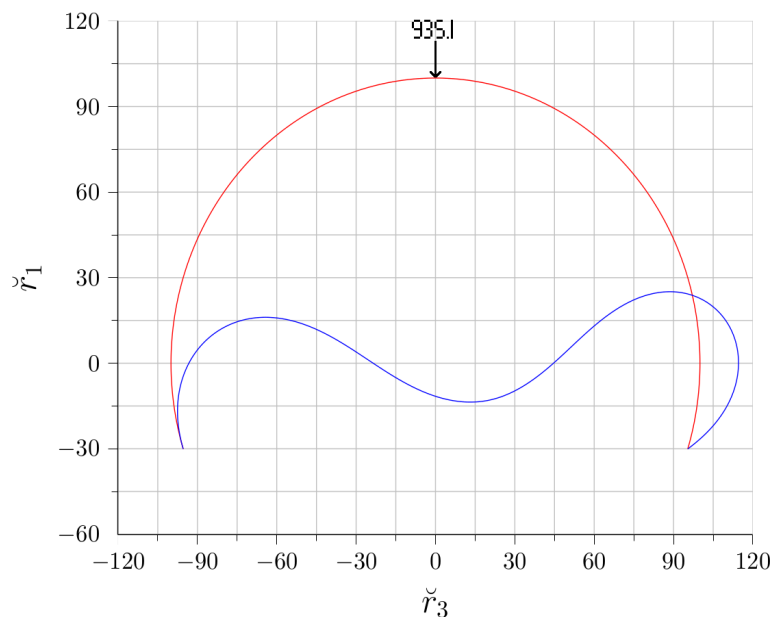


Figure 6.13: Displacement components of $\check{\mathbf{r}}$. Red line: reference configuration $\mathbf{C}^0$, blue line: full load configuration $\check{\mathbf{C}}$ at equilibrium under a 935.1 load at the mid span.

C Routines

C.1 Maxima routines: Explicit solution

```
chainette1.wxmx 1 / 1
[ (%i1) kill(all);
  (%o0) done

[ (%i1) L: 21$
    L1: 3$
    L2: 4$
    L3: 14$
    rb: 0.013$
    E: 210000000000.$
    A: 3.14159*rb^2 $
    rhog: 78100$
    rhog*A*L$

[ (%i10) T(s):= sqrt(Q2^2+N^2+(Q1+rhog*A*s)^2)$

[ (%i11) a1(s):=Q1/(E*A)*s+rhog/(2*E)*s^2-T(0)/(rhog*A)
          *(1-sqrt(1+2*rhog*A*Q1/T(0)^2*s+(rhog*A/T(0))^2*s^2))$
          a2(s):=Q2/(E*A)*s+Q2/(rhog*A)*
          (-asinh(Q1/sqrt(Q2^2+N^2))+asinh((Q1+rhog*A*s)/sqrt(Q2^2+N^2)))$
          a3(s):=N/(E*A)*s+N/(rhog*A)
          *(-asinh(Q1/sqrt(Q2^2+N^2))+asinh((Q1+rhog*A*s)/sqrt(Q2^2+N^2)))$

[ (%i14) load("mnewton")$

[ (%i15) mnewton([a1(L)-L1,a2(L)-L2,a3(L)-L3],[Q1,Q2,N],[-500,0,100])$

[ (%i16) Q1:-366.8446998471764$
          Q2:54.82129025686054$
          N:191.8745158990119$

[ (%i19) a1(s)$
          a2(s)$
          a3(s)$
```


C.2 FEniCS routines: Elastic catenary

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Spyder Editor
Etude de la convergence pour la chainette elastique
@author : A.PACITTI
"""

from dolfin import *
import numpy as np

# Error
def errornorm(u_e, u, Ve):
    u_Ve = interpolate(u, Ve)
    u_e_Ve = interpolate(u_e, Ve)
    e_Ve = Function(Ve)
    # Subtract degrees of freedom for the error field
    e_Ve.vector()[:] = u_e_Ve.vector().array() - \
        u_Ve.vector().array()
    error = e_Ve**2*dx
    return sqrt(assemble(error))

def compute(n,degree):
    # Define mesh
    mesh = UnitIntervalMesh(n)
    # Vectorspace def
    V = VectorFunctionSpace(mesh, "Lagrange", degree=degree, dim=3)
    Vq = VectorFunctionSpace(mesh, "Quadrature", degree=degree, dim=3)
    Ver = VectorFunctionSpace(mesh, "Lagrange", 5, dim=3) #high order
                                                         #interpolat
                                                         #for error
                                                         #estimation

    # Cable charcteristic parameters
    rb = 0.013 # rayon (m)
    E = 210000000000.0 # module d'Young (Pa)
    A = 3.14159*rb*rb # aire ( m )
    rho = 78100.0 # masse volumiq

    # Cable reference global geometry
    LL= 21.0
    LL1= 3.0/LL # CL adimension
    LL2= 4.0/LL
    LL3= 14.0/LL
    # Define unknowns
    delr1 = TrialFunction(V)
    delr1T = as_vector([delr1[0],delr1[1],delr1[2]])
    # Define virtual fields (test variables)
    delr2 = TestFunction(V)
    delr2T = as_vector([delr2[0],delr2[1],delr2[2]])
```

```

# Define increment solution
delr = Function(V)
# Initialisation de la boucle while
maxiter = 200
tol1 = 1.0E-14
# Analytical solution calculated elsewhere (maxima file)
rvraie = # solution
rv = interpolate(rvraie,V)
# Define loads
load1 = -(LL)/(A*E)*A*rho          # suivant e1
load2 = 0.0                        # suivant e2
load3 = 0.0                        # suivant e3
ld = Expression(('load1', 'load2', 'load3'), \
                load1=load1, load2=load2, load3=load3,\
                element = V.ufl_element())
fload = interpolate(ld, V)          # fonction CL interpol e dans
floadT = as_vector([fload[0],fload[1],fload[2]])
# Define boundary domains
tol = 1E-16
def left_boundary(x, on_boundary):
    return on_boundary and abs(x[0]) < tol

def right_boundary(x, on_boundary):
    return on_boundary and abs(x[0]-1) < tol

Gamma_0_delr = DirichletBC(V, Constant((0.0, 0.0, 0.0)), left_bound
Gamma_1_delr = DirichletBC(V, Constant((0.0, 0.0, 0.0)), right_boun
bcs_delr = [Gamma_0_delr, Gamma_1_delr]
# R solution it rative
r = interpolate(Expression(('2*x[0]*x[0]*x[0]*LL1-x[0]*LL1',\
                            'LL2*(-x[0]*x[0]*x[0]+x[0]*x[0]+x[0])',\
                            'LL3*(-x[0]*x[0]*x[0]+x[0]*x[0]+x[0])'),\
                            LL1=LL1, LL2=LL2, LL3=LL3,\
                            element = V.ufl_element()), V)

eps = 1
itr = 0
while eps > tol1 and itr < maxiter:
    itr+= 1
    # r derivative at quadrature point
    rp = Dx(r,0)
    rpq = project(rp,Vq)
    rpqT = as_vector([rpq[0],rpq[1],rpq[2]])
    # forme lin aire et bilin aire
    L1= dot(floadT,delr2T)*dx
    L2 = -0.5*(dot(rpqT,rpqT)-1.0)*dot(rpqT,Dx(delr2T,0))*dx
    L = L1+L2
    a1 = (dot(rpqT,Dx(delr1T,0))*dot(rpqT,Dx(delr2T,0)))*dx

```

```

    a2 = 0.5*(dot(rpqT,rpqT)-1.0)*dot(Dx(delr1T,0),Dx(delr2T,0))*dx
    a = a1+a2
    solve(a == L, delr, bcs_delr)
    # error estimation
    eps = np.linalg.norm(delr.vector().array(), ord=np.Inf)
    #print "iter", itr
    #print "Norm:", eps
    #Current solution update
    r.vector()[:] += delr.vector()
plot(r[0], interactive=True)
# errornorm
Err = errornorm(rvraie, r, Ver)
# energy type
energie1 = 0.125*(Dx(r[i],0)*Dx(r[i],0)-1)**2*dx
NRJ1 = assemble(energie1)
rvraiep = interpolate(rvraie,Ver)
energie2 = 0.125*(Dx(rvraiep[i],0)*Dx(rvraiep[i],0)-1)**2*dx
NRJ2 = assemble(energie2)
return NRJ1,NRJ2,Err

# CONVERGENCE STUDY!!
for deg in [1, 2]:
    set_log_active(False)
    degree=deg
    h = [] # element siyes
    E = [] # errors
    for n in [4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]:
        h.append(1.0/n)
        E.append(compute(n, degree))
    # Convergence rates
    from math import log as ln # (log is a dolfin name too)
    print "order=%d n=%d h=%0.2E E=%0.2E r=%s NRJ=%0.2E NRJv=%0.2E\"
        % (degree, 2**(2), h[0], E[0][2], "--", E[0][0], E[0][1])
    for q in range(1, len(E)):
        r = ln(E[q][2]/E[q-1][2])/ln(h[q]/h[q-1])
        print "order=%d n=%d h=%0.2E E=%0.2E r=%.2f NRJ=%0.2E NRJv=%0.2E
            % (degree, 2**(q+2), h[q], E[q][2], r, E[q][0], E[q][1])

```

C.3 FEniCS routines: Classic geometrically exact rod

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Jul 30 11:33:27 2015
@author: A.PACITTI. Algorithme notamment issu des publications
de Simo et Vu-Quoc, Cardona et G radin

"""

from dolfin import *
import numpy as np

#set_log_level(TRACE)
np.set_printoptions(threshold='nan')

def banc(n,degree,LL,module,coefremp,xo):
    def hThetab_to_Thetab(hThetab):
        Thetab=as_vector([hThetab[2,1],hThetab[0,2],hThetab[1,0]])
        return Thetab
    def Thetab_to_hThetab(Thetab):
        hThetab=as_matrix([[0.0,-Thetab[2],Thetab[1]],\
                           [Thetab[2],0.0,-Thetab[0]],\
                           [-Thetab[1],Thetab[0],0.0]])
        return hThetab
    def omegab_to_Lam(omegab):
        print "*****Debut omegab_to_Lam*****"
        omega2 = dot(omegab,omegab)
        homegab = Thetab_to_hThetab(omegab)
        ones = as_matrix([[1.0,0.0,0.0],\
                           [0.0,1.0,0.0],\
                           [0.0,0.0,1.0]])
        Lam= ones+ 2/(1+omega2)*(homegab+homegab*homegab)
        print "*****Fin omegab_to_Lam*****"
        return Lam
    def q_mult(q1, q2):
        "multiplie 2 quaternions"
        w = q1[0] * q2[0] - q1[1] * q2[1] - q1[2] * q2[2]\
            - q1[3] * q2[3]
        x = q1[0] * q2[1] + q1[1] * q2[0] + q1[2] * q2[3]\
            - q1[3] * q2[2]
        y = q1[0] * q2[2] + q1[2] * q2[0] + q1[3] * q2[1]\
            - q1[1] * q2[3]
        z = q1[0] * q2[3] + q1[3] * q2[0] + q1[1] * q2[2]\
            - q1[2] * q2[1]
        return as_vector([w, x, y, z])
    def thetab_to_q(Thetab):
        "Calcul du quaternion correspondant au vecteur rotation"
```

```

print "*****Debut thetab_to_q*****"
Theta=sqrt(dot(Thetab,Thetab))
q0=cos(0.5*Theta)
qb=sin(0.5*Theta)/Theta*Thetab
Q=as_vector([q0,qb[0],qb[1],qb[2]])
print "*****Fin thetab_to_q*****"
return Q
def q_to_Lam(Q):
print "*****Debut q_to_Lam*****"
#Calcul des cosinus directeurs Tau_ij
Tau_11=Q[0]*Q[0]+Q[1]*Q[1]-Q[2]*Q[2]-Q[3]*Q[3]
Tau_12=2*(Q[1]*Q[2]-Q[3]*Q[0])
Tau_13=2*(Q[1]*Q[3]+Q[2]*Q[0])
Tau_21=2*(Q[1]*Q[2]+Q[3]*Q[0])
Tau_22=Q[0]*Q[0]+Q[2]*Q[2]-Q[1]*Q[1]-Q[3]*Q[3]
Tau_23=2*(Q[2]*Q[3]-Q[1]*Q[0])
Tau_31=2*(Q[1]*Q[3]-Q[2]*Q[0])
Tau_32=2*(Q[2]*Q[3]+Q[1]*Q[0])
Tau_33=Q[0]*Q[0]+Q[3]*Q[3]-Q[1]*Q[1]-Q[2]*Q[2]
#Construction de la matrice
R = as_matrix([[Tau_11,Tau_12,Tau_13],\
               [Tau_21,Tau_22,Tau_23],\
               [Tau_31,Tau_32,Tau_33]])
print "*****fin q_to_Lam*****"
return R
def charg_to_Lam(thetbio,thetio):
print "*****Debut charg_to_Lam*****"
#Calcul des cosinus directeurs Tau_ij
c = project(Constant(0.0), P1)
s = project(Constant(0.0), P1)
c.vector()[:] = np.cos(thetio.vector().array())
s.vector()[:] = np.sin(thetio.vector().array())
Tau_11=thetbio[0]*thetbio[0]*(1-c)+c
Tau_12=thetbio[0]*thetbio[1]*(1-c)-thetbio[2]*s
Tau_13=thetbio[0]*thetbio[2]*(1-c)+thetbio[1]*s
Tau_21=thetbio[0]*thetbio[1]*(1-c)+thetbio[2]*s
Tau_22=thetbio[1]*thetbio[1]*(1-c)+c
Tau_23=thetbio[1]*thetbio[2]*(1-c)-thetbio[0]*s
Tau_31=thetbio[0]*thetbio[2]*(1-c)-thetbio[1]*s
Tau_32=thetbio[1]*thetbio[2]*(1-c)+thetbio[0]*s
Tau_33=thetbio[2]*thetbio[2]*(1-c)+c
#Construction de la matrice
R = as_matrix([[Tau_11,Tau_12,Tau_13],\
               [Tau_21,Tau_22,Tau_23],\
               [Tau_31,Tau_32,Tau_33]])
print "*****fin charg_to_Lam*****"
return R

```

```

def omegab_to_Gam(omegab, tLam, Lam, Gamo):
    print "*****Debut omegab_to_Gam*****"
    # M1
    M1 = Thetab_to_hThetab(Gamo)
    # omegab, omegab', homega, homegab'
    homegab = Thetab_to_hThetab(omegab)
    omegabp = Dx(omegab, 0)
    omegabpq = project(omegabp, Vq)
    homegabpq = Thetab_to_hThetab(omegabpq)
    omega2 = dot(omegab, omegab)
    # d(exp(Thetab))/ds
    M2 = 2/(1+omega2)*(homegabpq+homegabpq*homegab+homegab*homegabpq
        -(2*dot(omegab, omegabpq)*(homegab+homegab*homegab)))/(1+omeg
    # exp(-Thetab)
    M3 = omegab_to_Lam(-omegab)
    hGam = M1+tLam*M3*M2*Lam
    Gam = hThetab_to_Thetab(hGam)
    Gam = project(Gam, Vq)
    print "*****Fin omegab_to_Gam*****"
    return Gam

#####_Longueur de r f f rence de la poutre_#####
# Non utile si probleme adimensionel
LL1= 0.0 # CL adimension
LL2= 0.0
LL3= 21.658
#####_Maillage et bords_#####
# maillage
mesh = IntervalMesh(n, 0, LL)
# C ation de classes pour definir des bords
class Left(SubDomain):
    def inside(self, x, on_boundary):
        return near(x[0], 0.0)

class Right(SubDomain):
    def inside(self, x, on_boundary):
        return near(x[0], LL)

# Initialisation des instances de sous domaines
left = Left()
right = Right()
# Initialisation des fonction de mesh pour les bords
# Bord gauche: 1, bord droit: 2, reste 0
boundaries = FacetFunction("size_t", mesh)
boundaries.set_all(0)
left.mark(boundaries, 1)
right.mark(boundaries, 2)
# Define new measures associated with the exterior boundaries

```

```

# ds = Measure("ds")[boundaries]

# Fin maillage et marquage des domaines et bords
#####_Espaces d'interpolation_#####
#Scalaires
P1 = FunctionSpace(mesh, "CG", degree+1)
#Vecteurs
V1 = VectorFunctionSpace(mesh, "CG", degree+1, dim=3)
#Matrices
M1 = TensorFunctionSpace(mesh, "CG", degree+1, shape=(3,3))
# Quaternions
Q1 = VectorFunctionSpace(mesh, "CG", degree+1, dim=4)
#Quadrature
Vq = VectorFunctionSpace(mesh, "Quadrature", degree, dim=3)
#Mixte
W=MixedFunctionSpace([P1,P1,P1,P1,P1,P1])
#####_Fonctions Inconnues et test_#####
# Inconnues
Trial = TrialFunction(W)          #Vect Eta1,Mu1 (inconnues)
r1 = as_vector([Trial[0],Trial[1],Trial[2]])      #Definition tensoriel
Th1 = as_vector([Trial[3],Trial[4],Trial[5]])
# Tests
Test = TestFunction(W)
r2 = as_vector([Test[0],Test[1],Test[2]])          #Definition tensoriel
Th2 = as_vector([Test[3],Test[4],Test[5]])
# Solution
Sol = Function(W)
#####_Caracteristiques du cable_#####
rb = 0.011                                     # rayon (m)
A = 3.14159*rb*rb*coefremp                     # aire (m )
rho = 7810.0*9.81                             # masse volumique (kg.m^-3) *
Y=module
nu=0.33                                         # Coef Poisson acier
G = 0.5*Y/(1+nu)
EA=Y*A
GA=Y*A
I= A*A/(4*np.pi)                             #section circulaire
GI=G*I
EI=Y*I
#Matrices de rigidit
CN = as_matrix([[GA,0.0,0.0],\
                [0.0,GA,0.0],\
                [0.0,0.0,EA]])
CM = as_matrix([[EI,0.0,0.0],\
                [0.0,EI,0.0],\
                [0.0,0.0,GI]])

# project

```

```

CN=project(CN,M1)
CM=project(CM,M1)
#####_D finition des chargements_#####
load1 = -A*rho          # suivant e1
load2 = 0.0              # suivant e2
load3 = 0.0              # suivant e3
ld = Expression(('load1', 'load2', 'load3'), \
                load1=load1, load2=load2, load3=load3,\
                element = V1.ufl_element())
fload = interpolate(ld, V1)          # fonction CL interpol e dans
floadT = as_vector([fload[0],fload[1],fload[2]])
# Charges ponctuelle
mag = -(9.81*(10.65\
          +0.935+0.934+0.939+0.938+0.938\
          +0.980+0.995+0.983+0.990+0.985))
#####_D finition des conditions aux bords_#####
# Conditions aux limites de Dirichlet uniquement sur les bords.
bcs2 = DirichletBC(W, Constant((0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)),\
                  boundaries,2)
bcs1 = DirichletBC(W, Constant((0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)),\
                  boundaries,1)
#   bcs10 = DirichletBC(W.sub(0), Constant(0.0), boundaries,1)
#   bcs11 = DirichletBC(W.sub(1), Constant(0.0), boundaries,1)
#   bcs12 = DirichletBC(W.sub(2), Constant(0.0), boundaries,1)
bcs = [bcs1, bcs2]
#####_G om trie de d part_#####
# Initialisation de r
# Pour creer r initial (coh rent avec la g om etrie de d part ET
# conditions aux limites)
mesh_old = Mesh('mesh_cat.xml')
V_old = VectorFunctionSpace(mesh_old, "CG", degree+1, dim=3)
r_cat = Function(V_old, 'r_cat.xml')
rref = project(r_cat, V1)
#####_Init Boucle_#####
# parametres boucle while solveur
maxiter = 100
tol1 = 1.0E-10
# Rotation nulle
onequa=Expression(('1.0',\
                  '0.0',\
                  '0.0',\
                  '0.0'),\
                  element = Q1.ufl_element())
# small rotation around e2 left and right anchorage
class srLR(Expression):
    def eval(self, value, x):
        if near(x[0], 0.0):

```



```

        value[0] = 0.0
        value[1] = 0.0
        value[2] = 0.0
    elif near(x[0], LL):
        value[0] = 0.0
        value[1] = 0.0
        value[2] = 0.0
    else:
        value[0] = 0.0
        value[1] = 0.0
        value[2] = 0.0
def value_shape(self):
    return (3,)

SrLR = srLR(element=V1.ufl_element())
SRLR = interpolate(SrLR,V1)
Lm = project(Thetab_to_hThetab(SRLR),M1)
# Matrice de rotation Lambda
q = interpolate(onequa,Q1)
Lam = project(q_to_Lam(q)+Lm,M1)
tLam = transpose(Lam)
# Initialisation r et rpQ
r=project(rref,V1)
rp=Dx(r,0)
rpq=project(rp,Vq)
rpQ=as_vector([rpq[0],rpq[1],rpq[2]])
ba3 = rpQ
# Initialisation d formations
hGam = tLam*Dx(Lam,0)
Gam = hThetab_to_Thetab(hGam)
E = (tLam*rpQ-ba3)
# Initialisation eff. interieurs
nb = Lam*CN*E
mb = Lam*CM*Gam
# Initialisation coef elast
cn = Lam*CN*tLam
cm = Lam*CM*tLam
#####_Boucle de resolution_#####
eps = 1.0
itr = 0
while eps > tol1 and itr < maxiter:
    itr+= 1
    print itr
    #####_Formulation faible_#####
    de2 = Dx(r2,0)-cross(Th2,rpQ)
    de1 = Dx(r1,0)-cross(Th1,rpQ)
    dWin = (dot(nb,\

```

```

        de2)\
    + dot(mb,\
        Dx(Th2,0))) * dx
dWext= dot(floadT,r2)*dx
L = - dWin+dWext
ddWmat = (dot(cn*de1,de2)\
    + dot(cm*Dx(Th1,0),Dx(Th2,0))) * dx
ddWgeo = -(dot(nb,\
    (cross(Th1,de2)+cross(Th2,Dx(r1,0))))\
    +dot(mb,\
        cross(Th1,Dx(Th2,0)))) * dx
a = ddWmat + ddWgeo
res = np.linalg.norm(assemble(L).array())
print "res:", res
#####_Solveur_#####
# Assemblage du syst me
A,l=assemble_system(a,L,bcs)
#
#   delta = PointSource(W.sub(0), Point(xo), mag)
#   delta.apply(l)
solve(A,Sol.vector(),l)
rSol = project(as_vector([Sol[0],Sol[1],Sol[2]]),V1)
ThSol = project(as_vector([Sol[3],Sol[4],Sol[5]]),V1)
# Calcul du crit re d'arr t (Jelenic 1999)
eps = 100*np.linalg.norm(rSol.vector().array(), ord=np.Inf)/\
    np.linalg.norm(r.vector().array(), ord=np.Inf)
print "Norm:", eps
#####_Mises_ _jour_#####
# D placements
r.vector()[:] = r.vector().array()+rSol.vector().array()
# Deriv e de r
rp=Dx(r,0)
rpq=project(rp,Vq)
rpQ=as_vector([rpq[0],rpq[1],rpq[2]])
# Rotations
q1 = thetab_to_q(ThSol)
qnorm1 = project(q1/sqrt(dot(q1,q1)),Q1)
omegab = as_vector([qnorm1[1],qnorm1[2],qnorm1[3]])
# Mise   jour de Gam
Gam=omegab_to_Gam(omegab,tLam,Lam,Gam)
# exp(Thetab) et Lambda
exp = omegab_to_Lam(omegab)
Lam = project(exp*Lam,M1)
tLam = transpose(Lam)
# Mise   jour de E
E=(tLam*rpQ-ba3)
# Mise   jour efforts
nb = Lam*CN*E

```

```

        mb = Lam*CM*Gam
        # Mise      jour coeff.
        cn=Lam*CN*tLam
        cm=Lam*CM*tLam
    # Recuperation donn es
    NRJ=assemble((0.5*dot(nb,E)+0.5*dot(mb,Gam))*dx)
    s=interpolate(Expression('x[0]',element=P1.ufl_element()), P1)
#     File('mesh_cat.xml') << mesh
#     File('rref.xml') << r
    rp=Dx(r,0)
    rpq=project(rp,Vq)
    rpQ=as_vector([rpq[0],rpq[1],rpq[2]])
#     File('rrefp.xml') << rpQ

    # Deplacement et efforts int
    ri1,ri2,ri3 = rini.split(deepcopy=True)
    rb1,rb2,rb3 = r.split(deepcopy=True)

    return s,ri1,ri2,ri3,rb1,rb2,rb3

n=1000
degree=0
module=1700000000000.0
coefremp=0.75
xo=0
LL=21.66
s,ri1,ri2,ri3,rb1,rb2,rb3 = banc(n,degree,LL,module,coefremp,xo)

```

D Retour d'expérience sur la mesure de tension *in situ*

D.1 Histogrammes du pont A

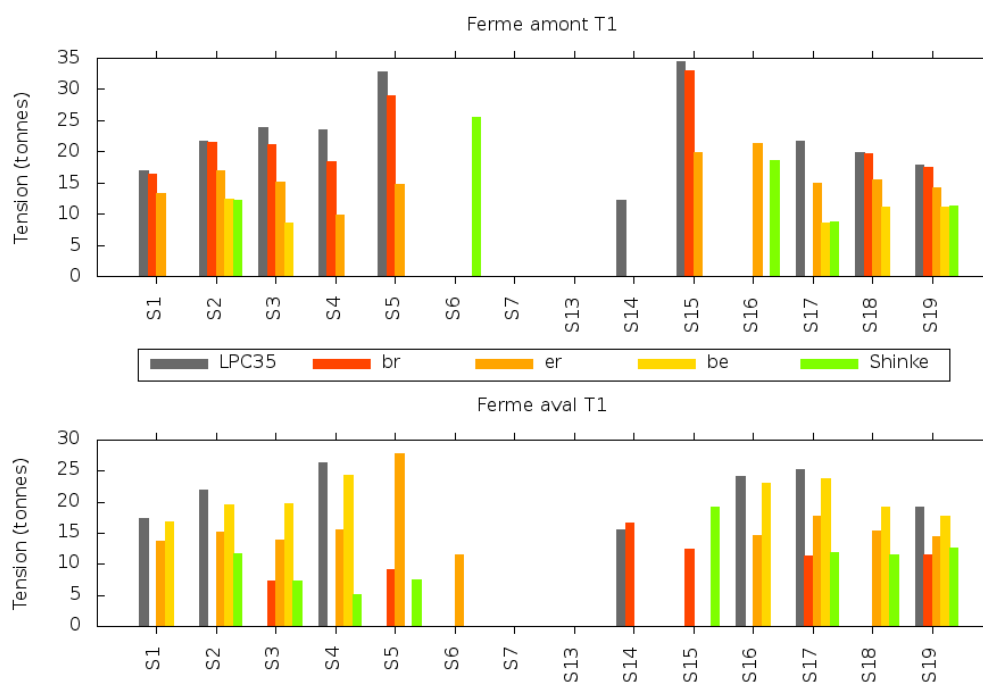


Figure 6.14: Histogramme des tensions calculées sur l'ouvrage A, travée 1.

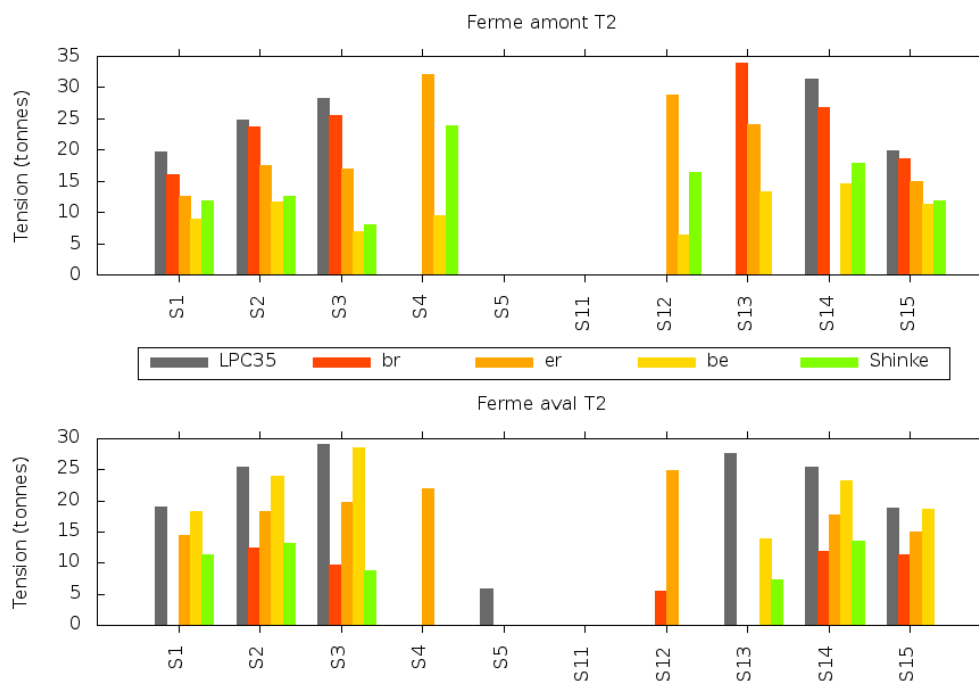


Figure 6.15: Histogramme des tensions calculées sur l'ouvrage A, travée 2.

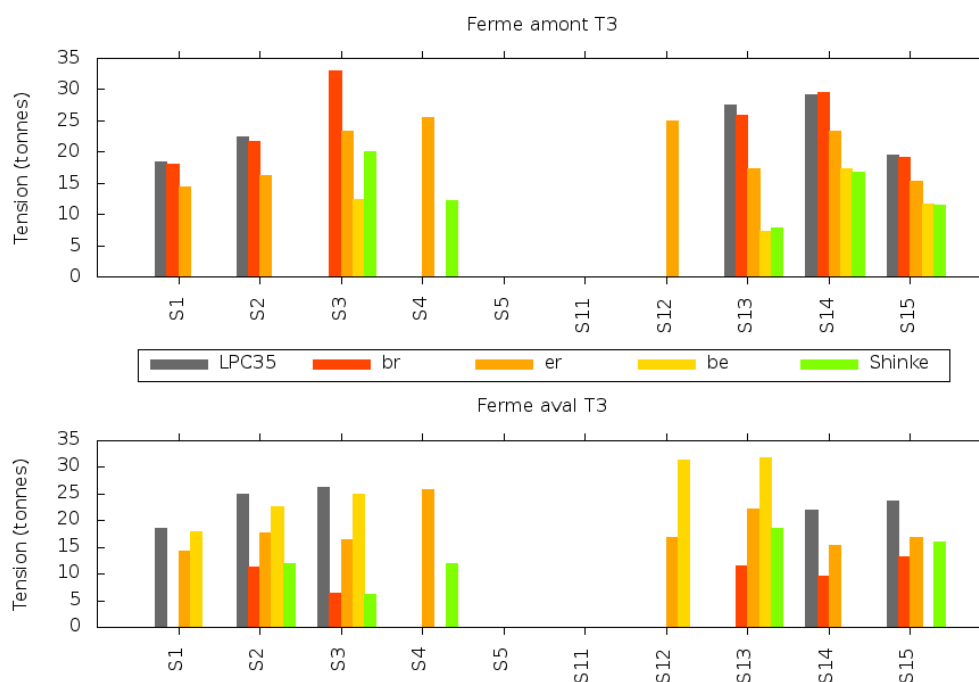


Figure 6.16: Histogramme des tensions calculées sur l'ouvrage A, travée 3.

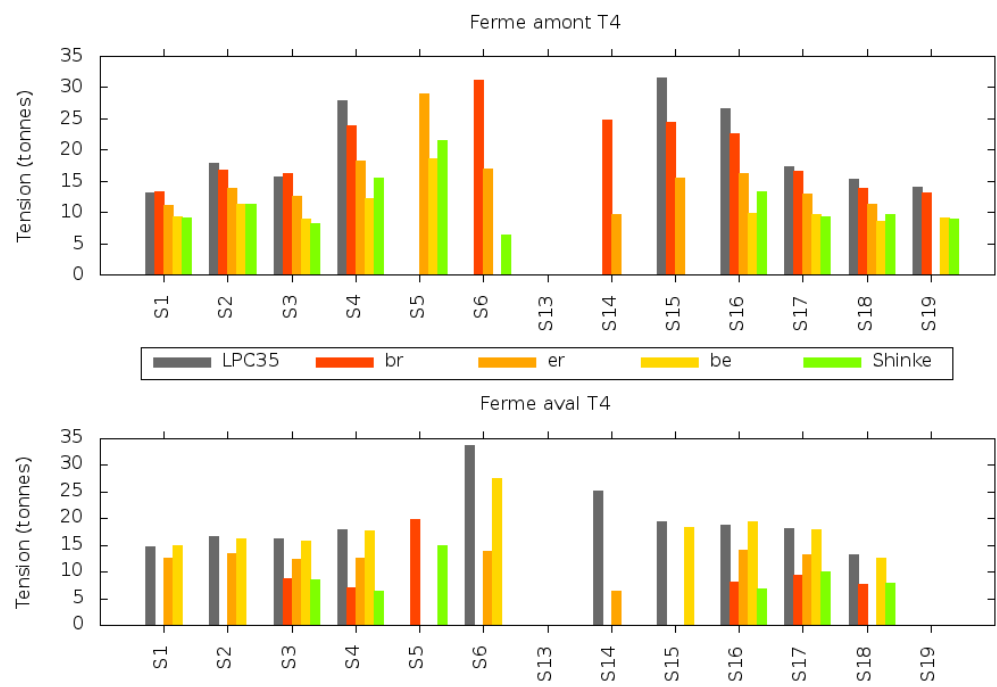


Figure 6.17: Histogramme des tensions calculées sur l'ouvrage A, travée 4.

E Nonlinear response of elastic cables with flexural-torsional stiffness

International Journal of Solids and Structures 87 (2016) 267–277



Contents lists available at ScienceDirect

International Journal of Solids and Structures

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijsolstr



Nonlinear response of elastic cables with flexural-torsional stiffness



Andrea Arena^a, Arnaud Pacitti^b, Walter Lacarbonara^{a,*}

^a Department of Structural and Geotechnical Engineering, Sapienza University of Rome, Rome 00184, Italy

^b CEREMA, Direction Territoriale du Sud-Ouest, DLB/PCI SDOAC, 24 rue Carton, CS 41635 33073 Bordeaux Cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 4 March 2015

Revised 10 September 2015

Available online 8 October 2015

Keywords:

Geometrically exact formulation

Nonlinear flexible cables

Boundary layers

Flexural/torsional cable response

ABSTRACT

A geometrically exact mechanical formulation is proposed to describe three-dimensional motions of flexible cables without any restriction on the amplitude of such motions. The nonlinear equations of motion are formulated via an updated Lagrangian formulation taking the prestressed catenary equilibrium under gravity as the start configuration. By employing a single space coordinate parametrization, the kinematics feature finite displacement and rotation of the cable cross sections, assumed rigid in their own planes. The ensuing generalized strain parameters and curvatures retain the full geometric nonlinearities. By considering several case-study cables within the groups of taut and shallow cables, nonlinear equilibrium analyses are performed to investigate the effects of the cable bending and torsional stiffness for nontrivial boundary conditions. The full nonlinear formulation allows to estimate the size of the boundary layers as well as the stress states within them otherwise unknown adopting classical theories of purely stretchable cables.

© 2015 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Cables are used in a wide spectrum of engineering applications ranging from civil to space structures. This is due to the fact that they are highly efficient elements characterized by high reliability, optimal use of the structural material, a straightforward design process. Nevertheless, when dealing with structural engineering applications, complex fretting-corrosion and/or corrosion-fatigue and/or corrosion phenomena within their metallic structure invariably lead to failure after a certain time of service that mainly depends on the cable material properties, its physical/chemical environment and its stress levels under both static and dynamic excitations (see for instance Li et al., 2010; Périer et al., 2009; Sih et al., 2008 and Lepidi and Gattulli, 2012; Lepidi et al., 2007). Beyond the choice of the most appropriate material and corrosion protection systems, cable designs must enable an enhanced resistance to static and cyclic axial and transverse loads.

By restricting attention to cables used as stays of cable-stayed bridges, it is known that angular deviations of the cable stays at their anchorages cause high localized stresses (potentially of the same order of magnitude as those due to tensile loads). This is why commonly used guidelines for stays design (PTI, 2007; SETRA, 2001) recommend to limit angular deviations at singular points (deviators, connections) and especially at anchorages. Two families of dispositions are used: a directional adjustment system (such as hinges) of the anchorages and a stiffening of the anchorage zone (as guides). Both methods in-

crease the life time of cable stays, without however totally preventing the anchorages from turning constraints which resemble clamps after number of loading cycles. During the 90s, great efforts were made to characterize damages and additional stresses locally caused by these clamping boundary conditions. Most of the times, these studies estimated a uniform overall bending moment evaluated from a specific curvature value of the cable together with richer inter-wire contact modeling (see for instance Costello, 1997; Papailiou, 1995; Raoof, 1990). An overview of the research conducted, for example, at the Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) on this topic can be found in Gourmelon (2003).

Introduction of flexural stiffness at the modeling stage, although in simplified contexts, appeared in the literature together with practical methods for tension evaluations. Initially based on the taut string model (LCPC, 1993), these methods were subsequently developed to rely on simple criteria, such as the ratio between tension and flexural rigidity, allowing to choose a computational strategy via taut string or via Euler-Bernoulli beam models (see Zui et al., 1996). The latter is an accurate and easy-to-handle method which thus inspired a great number of studies in the past decade. Among them, Mehrabi and Tabatabai (1998), Bouton and Crémona (2003) and Siegert et al. (2005) revealed some of the weaknesses of this method. In Mehrabi and Tabatabai (1998), Mehrabi considered various boundary conditions for a cable with flexural stiffness and with a variable cross section in a finite difference formulation. In Bouton and Crémona (2003), an improvement of LCPC method N° 35 based on Zui et al. (1996) was proposed for three kinds of boundary conditions (clamped-clamped, clamped-hinged and hinged-hinged) in order to apply Zui's method to short cables preserving its ease of application by extending it to

* Corresponding author. Tel.: +39 06 44585 111; fax: +39 06 4884852.

E-mail address: walter.lacarbonara@uniroma1.it (W. Lacarbonara).

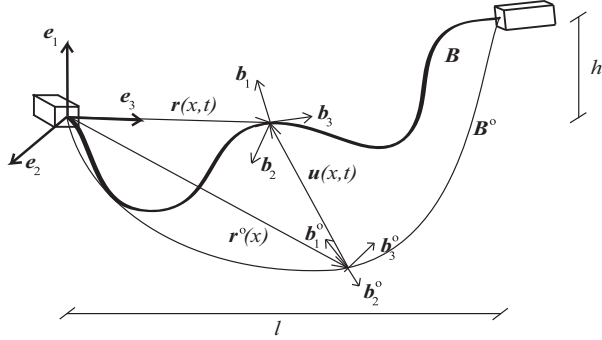


Fig. 1. Cable reference configuration $\mathbf{B}^0$ (thin line) and current configuration $\mathbf{B}$ (thick line).

the previously mentioned boundary cases. In Siegert et al. (2005), a model incorporating a hybrid elastic-hinged boundary condition was proposed to assess the tension of specific short cables. This assessment is performed via data fitting, giving up on the benefit of a simple formula application but improving the accuracy in the studied cases.

By and large, efforts to model the bending effects in the proximity of a cable anchorage have been made in two main situations: (i) at a very local scale to evaluate the additional stresses caused by a change in the geometrical curvature and the induced inter-wires slip, stick and wear phenomena (for damage characterization purposes), (ii) to assess more global characteristics of the cable such as tension and tension losses when the bending effects are no longer negligible (i.e., mostly for short taut cables). At the same time, large motions of long, nonshallow cables (such as power supply lines, mooring cables, etc.) have been extensively studied in the last fifteen years (Bouaani, 2006; Gattulli et al., 2008; Lacarbonara and Pacitti, 2008; Lacarbonara et al., 2007; Lepidi et al., 2009; Ricciardi and Saïta, 2008; Treysède, 2009; 2010). These motions are not supposed to be affected by the different kinds of boundary conditions for low-frequency dynamics and, therefore, only few models (Burgess, 1993; Lacarbonara and Pacitti, 2008; Ni et al., 2002) take into account the flexural stiffness of the cable in order to address tension loosening issues. To the authors' knowledge, the boundary layer problem (in the anchorage vicinity) has not been fully addressed together with the problem of the description of global motions of elastic cables. Lately, Boyer et al. (2011) applied the geometrically exact Kirchhoff theory of beams to describe nonlinear motions and fluid–structure interaction in cables.

2. Direct formulation for flexible elastic cables

Based on an updated Lagrangian formulation (ULF), a geometrically exact formulation of the equations of motion for flexible elastic cables is here presented. The proposed mechanical model is derived from the special Cosserat theory of rods and is based on finite three-dimensional kinematics describing the cable configurations induced by generalized forces and couples and nontrivial kinematic boundary conditions. Within the context of the ULF, the current configuration $\mathbf{B}$ is reached from the reference (catenary) equilibrium configuration $\mathbf{B}^0$ evaluated through the classical theory of unstretchable cables under self-weight. In the fixed Cartesian frame $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ having its origin in the left boundary of the cable, $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ represents the vertical plane, with $\mathbf{e}_1$ being the upward vertical direction, and $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ is the horizontal plane, with $\mathbf{e}_3$ collinear with the span covered by the cable suspended from two supports (see Fig. 1).

A reference material fiber $\mathbf{C}^0$ of the catenary configuration is chosen as the base curve (here coinciding with the centerline) and is

parametrized by the projection x along $\mathbf{e}_3$ of its arclength s , thus the total length L of the cable under its own weight projects itself into the span length l . Each material point of the material fiber $\mathbf{C}^0$ is endowed with a rigid cross section $\mathcal{S}^0$, within the here assumed one-dimensional (1D) theory of polar continuum (Lacarbonara, 2013). The cross section $\mathcal{S}^0$ is characterized by its cross-sectional area A^0 , the second moments of area J_1^0 and J_2^0 and the torsional inertia J_3^0 referred to the local frame $\{\mathbf{b}_1^0(x), \mathbf{b}_2^0(x), \mathbf{b}_3^0(x)\}$ body-fixed to each cross section. In the reference Cartesian frame, the base curve $\mathbf{C}^0$ is described by the position vector $\mathbf{r}^0(x) = y_0(x)\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_3$ where $y_0(x)$ is the catenary configuration while the orientation of the local frame $\{\mathbf{b}_1^0(x), \mathbf{b}_2^0(x), \mathbf{b}_3^0(x)\}$ with respect to the fixed frame $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ is given by the orthogonal tensor $\mathbf{R}^0(x)$ whose expression is given in the Appendix. At time t , the current cable configuration is described by the position vector $\mathbf{r}(x, t) = \mathbf{r}^0(x) + \mathbf{u}(x, t)$ of the base curve where $\mathbf{u}(x, t) = u_1(x, t)\mathbf{e}_1 + u_2(x, t)\mathbf{e}_2 + u_3(x, t)\mathbf{e}_3$ is the displacement from the reference configuration $\mathbf{B}^0$ to the current configuration $\mathbf{B}$ with $u_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$) being the i th displacement component in the fixed frame. The current local frame $\{\mathbf{b}_1(x, t), \mathbf{b}_2(x, t), \mathbf{b}_3(x, t)\}$ attached to the current disposition of the cable cross section is introduced to describe the change of the cross-section orientation due to dynamic loads and nontrivial boundary conditions. The rotation suffered by the frame $\{\mathbf{b}_1^0(x), \mathbf{b}_2^0(x), \mathbf{b}_3^0(x)\}$ into $\{\mathbf{b}_1(x, t), \mathbf{b}_2(x, t), \mathbf{b}_3(x, t)\}$ is described by the sequence of two flexural rotations $\theta_1(x, t)$ and $\theta_2(x, t)$ and the twisting rotation $\theta_3(x, t)$, respectively, through the orthogonal tensor $\mathbf{R}(x, t)$ whose expression is reported in the Appendix.

Generalized strains and stresses. In the here developed 1D continuum formulation, all deformation modes typical of a rod are considered in the dynamics of the cable. The first set of generalized strains (i.e., the stretch ν and the shear strains η_1 and η_2) is obtained through the following vectorial relations:

$$\begin{aligned}\eta_1(x, t) &= \cos \theta^0 \mathbf{r}'(x, t) \cdot \mathbf{b}_1, \\ \eta_2(x, t) &= \cos \theta^0 \mathbf{r}'(x, t) \cdot \mathbf{b}_2, \\ \nu(x, t) &= \cos \theta^0 \mathbf{r}'(x, t) \cdot \mathbf{b}_3,\end{aligned}\quad (1)$$

where $\cdot$ denotes the dot product and the prime, here and henceforth, indicates differentiation with respect to x ; θ^0 is the angle giving the orientation of the local frame $\{\mathbf{b}_1^0(x), \mathbf{b}_2^0(x), \mathbf{b}_3^0(x)\}$ with respect to the fixed frame $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, calculated according to $\cos \theta^0(x) = 1/\sqrt{1 + y_0'(x)^2}$. The cable catenary geometric curvature is described by the vector $\boldsymbol{\mu}^0(x) = \mu^0(x)\mathbf{b}_2^0$, while the elastic curvature is given by the vector $\boldsymbol{\mu}(x, t) = \mu_1(x, t)\mathbf{b}_1 + \mu_2(x, t)\mathbf{b}_2 + \mu_3(x, t)\mathbf{b}_3$ and calculated through the following relation:

$$\cos \theta^0(x) \boldsymbol{\mu}'(x, t) = \tilde{\boldsymbol{\mu}}(x, t) \times \mathbf{b}_i(x, t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

where $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(x, t) = \boldsymbol{\mu}^0(x) + \boldsymbol{\mu}(x, t)$ is the total curvature vector, the symbol $\times$ denotes the cross product; the expressions of the components $\mu^0(x)$ and $\mu_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$) are reported in the Appendix.

The vector of generalized contact forces, denoted by $\mathbf{n}(x, t)$, represents the incremental stress resultant with respect to the stress resultant in the catenary equilibrium. The component form is $\mathbf{n}(x, t) = Q_1(x, t)\mathbf{b}_1 + Q_2(x, t)\mathbf{b}_2 + N(x, t)\mathbf{b}_3$, where $N(x, t)$ is the tension and $Q_1(x, t)$ and $Q_2(x, t)$ are the shear forces. The total stress resultant, accounting for the prestress in the catenary configuration, is then described by the resultant vector $\tilde{\mathbf{n}}(x, t) = \mathbf{n}^0(x) + \mathbf{n}(x, t)$ where $\mathbf{n}^0(x) = N^0(x)\mathbf{b}_3^0$ and $N^0(x)$ denotes the cable tension in the catenary state. Finally, the vector of generalized contact couples is defined as $\mathbf{m}(x, t) = M_1(x, t)\mathbf{b}_1 + M_2(x, t)\mathbf{b}_2 + T(x, t)\mathbf{b}_3$, being $T(x, t)$ the torque and $M_1(x, t)$ and $M_2(x, t)$ the bending moments.

In the proposed flexible cable model, the constitutive behavior is assumed linearly elastic, thus the constitutive relations between generalized stress resultants and strain parameters can be expressed as:

$$\begin{aligned} N(x, t) &= E^0 A^0 (v(x, t) - 1), \quad Q_1(x, t) = G^0 A_s^0 \eta_1(x, t), \\ Q_2(x, t) &= G^0 A_s^0 \eta_2(x, t), \\ T(x, t) &= E^0 J_3^0 \hat{\mu}_3(x, t), \quad M_1(x, t) = E^0 J_1^0 \hat{\mu}_1(x, t), \\ M_2(x, t) &= E^0 J_2^0 \hat{\mu}_2(x, t), \end{aligned} \quad (3)$$

where E^0 and G^0 are the cable Young modulus and shear modulus, respectively, A^0 is the cable cross-sectional area; A_s^0 is the shear area; J_1^0, J_2^0 , and J_3^0 are the second moments of area and the torsional inertia with respect to the local axes $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ and $\mathbf{b}_3$, respectively. The expressions of the curvatures $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ and $\hat{\mu}_3$ are given in the [Appendix](#).

Note that, given the extremely high slenderness of long cables, shear deformations are expected to be negligible almost everywhere. Therefore, an unshearable rod model with only extension/bending/twisting deformations is expected to be sufficiently accurate. This implies the introduction of internal material constraints prescribing the shear strains to be zero no matter what the loading conditions are. On the other hand, it is also clear that the mechanical behavior of these cables within the boundary layers is pretty much close to that of a rod. Thus shear deformations may be localized in these regions. For this reason, we consider a very general rod model together with all the generalized constitutive laws.

Equations of motion. At time t , the cable equations of motion can be obtained from the balance of linear and angular momentum in the current configuration and cast in the following vector-valued form:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}' + \mathbf{f} &= \rho A \sec \theta^0 \ddot{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{c} &= \sec \theta^0 \rho J \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\sec \theta^0 \rho J \cdot \boldsymbol{\omega}), \end{aligned} \quad (4)$$

where the overdot, here and henceforth, indicates differentiation with respect to time t , $\mathbf{f}(x, t)$ and $\mathbf{c}(x, t)$ denote the total external forces and couples per unit length, respectively, ρA is the cable mass per unit length, ρJ is the tensor of the mass moments of the cross sections referred to the center of mass, whose nontrivial components are ρJ_{ij} ($i = j$), and $\boldsymbol{\omega}(x, t)$ is the angular velocity vector expressed as $\boldsymbol{\omega}(x, t) = \omega_1(x, t) \mathbf{b}_1 + \omega_2(x, t) \mathbf{b}_2 + \omega_3(x, t) \mathbf{b}_3$, satisfying the vector-valued relation: $\dot{\mathbf{b}}_i(x, t) = \boldsymbol{\omega}(x, t) \times \mathbf{b}_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$). The expressions of the components $\omega_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$) are reported in the [Appendix](#). By accounting for the constitutive laws (3), equations of motion (4) can be finally expressed in terms of the six kinematic parameters $u_i(x, t)$, $\theta_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$) describing the overall motion of the flexible cable.

The formulation is closed, in the first place, by trivial kinematic boundary conditions that assume the cable fixed at the two supports and such that the overall rotations at the boundaries are restrained (clamped-clamped boundary conditions):

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{0} = \mathbf{u}(l, t), \quad \theta_i(0, t) = 0 = \theta_i(l, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Finally, natural initial conditions are assumed: $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{0} = \dot{\mathbf{u}}(x, 0)$, $\theta_i(x, 0) = 0 = \dot{\theta}_i(x, 0)$ ($i = 1, 2, 3$).

Nondimensional parameters. The nondimensional form of the equations of motion is obtained to identify the main mechanical parameters governing the dynamics of the flexible cables. To this end, the cable span l and the frequency $\omega_c := \sqrt{E^0 A^0 / (\rho A l^2)}$ (i.e., the frequency governing the longitudinal elastic wave propagation) are adopted as characteristic parameters for the nondimensionalization. Thus, $\bar{x} = x/l$ and $\bar{t} = \omega_c t$ are the nondimensional space and time coordinates, respectively. Moreover, the following stiffness ratios can be defined:

$$\kappa_{f_1} = \frac{E^0 J_1^0}{\rho A \omega_c^2 l^4}, \quad \kappa_{f_2} = \frac{E^0 J_2^0}{\rho A \omega_c^2 l^4}, \quad \kappa_q = \frac{G^0 A_s^0}{\rho A \omega_c^2 l^4}, \quad \kappa_t = \frac{G^0 J_3^0}{\rho A \omega_c^2 l^4}, \quad (6)$$

indicating, respectively, the nondimensional flexural, shear and torsional cable stiffness. It turns out that $\kappa_q = 1$ (i.e., the nondimensional

axial stiffness). Consequently, the following nondimensional form of the kinematic parameters, curvatures, and contact forces and couples is obtained:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(\bar{x}, \bar{t}) &= u_i(x, t)/l, \quad \bar{\mu}_i(\bar{x}, \bar{t}) = l \mu_i(x, t), \quad i = 1, 2, 3, \\ \bar{\mu}^0(\bar{x}) &= l \mu^0(x), \quad \bar{n}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\mathbf{n}(x, t)}{\rho A \omega_c^2 l^2}, \\ \bar{m}(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{\mathbf{m}(x, t)}{\rho A \omega_c^2 l^3}, \quad \bar{N}^0(\bar{x}) = \frac{N^0(x)}{\rho A \omega_c^2 l^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

together with the following nondimensional constitutive laws:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_i(\bar{x}, \bar{t}) &= \kappa_q \eta_i(\bar{x}, \bar{t}), \quad (i = 1, 2), \quad \bar{N}(\bar{x}, \bar{t}) = \kappa_a (v(\bar{x}, \bar{t}) - 1), \\ \bar{M}_i(\bar{x}, \bar{t}) &= \kappa_{f_i} \hat{\mu}_i(\bar{x}, \bar{t}), \quad (i = 1, 2), \quad \bar{T}(\bar{x}, \bar{t}) = \kappa_t \hat{\mu}_3(\bar{x}, \bar{t}), \end{aligned} \quad (8)$$

where the overbar is used to indicate nondimensional quantities.

A well-known parameter characterizing the mechanics of cables is the nondimensional horizontal projection H^0 of the catenary axial force $N^0(x)$ since it is a measure of the prestress state in the cable under its own weight. Such parameter is usually defined through the expression $\gamma = \rho A g l / H^0$, where g is the gravity acceleration. Consistently with the proposed nondimensionalization, the nondimensional form of H^0 becomes

$$\bar{H}^0 = \frac{H^0}{\rho A \omega_c^2 l^2} = \frac{g}{\gamma \omega_c^2 l}. \quad (9)$$

A further parameter governing the dynamic behavior of cables is the well-known Irvine parameter λ ([Irvine, 1984](#)), defined as $\lambda^2 = \gamma^2 \kappa / \eta^e$ where $\eta^e = \int_0^1 \cos^3 \theta^0 d\bar{x}$ and κ represents the ratio between the cable axial stiffness and the horizontal projection of the catenary axial force: $\kappa = E^0 A^0 / H^0$. According to the nondimensional form here adopted, the Irvine parameter can be then also expressed as: $\lambda^2 = \gamma^2 \kappa_a / (\bar{H}^0 \eta^e)$.

The vector-valued form of the equations of motion (4) can be written in component form by projecting the latter in a suitable reference frame. In particular, choosing the current local frame $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, the projection of the balance of linear and angular momentum gives rise to the following six nondimensional scalar equations of motion:

$$\begin{aligned} (\bar{Q}_1 + R_{13} \bar{N}^0)' + \sec \theta^0 [\bar{N}(\bar{\mu}_2 + R_{22} \bar{\mu}^0) - \bar{Q}_2(\bar{\mu}_3 + R_{32} \bar{\mu}^0)] \\ + \sec \theta^0 \bar{N}^0 [R_{33} \bar{\mu}_2 - R_{23} \bar{\mu}_3 - (R_{23} R_{32} - R_{22} R_{33}) \bar{\mu}^0] + \bar{f}_1 \\ = \sec \theta^0 \bar{a}_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (\bar{Q}_2 + R_{23} \bar{N}^0)' - \sec \theta^0 [N(\bar{\mu}_1 + R_{12} \bar{\mu}^0) - \bar{Q}_1(\bar{\mu}_3 + R_{32} \bar{\mu}^0)] \\ - \sec \theta^0 \bar{N}^0 [R_{33} \bar{\mu}_1 - R_{13} \bar{\mu}_3 - (R_{13} R_{32} - R_{12} R_{33}) \bar{\mu}^0] + \bar{f}_2 \\ = \sec \theta^0 \bar{a}_2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\bar{N} + R_{33} \bar{N}^0)' - \sec \theta^0 [\bar{Q}_1(\bar{\mu}_2 + R_{22} \bar{\mu}^0) - \bar{Q}_2(\bar{\mu}_1 + R_{12} \bar{\mu}^0)] \\ + \sec \theta^0 \bar{N}^0 [R_{23} \bar{\mu}_1 - R_{13} \bar{\mu}_2 - (R_{13} R_{22} - R_{12} R_{23}) \bar{\mu}^0] + \bar{f}_3 \\ = \sec \theta^0 \bar{a}_3, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_1' - \sec \theta^0 [\bar{M}_2(\bar{\mu}_3 + R_{32} \bar{\mu}^0) - \bar{T}(\bar{\mu}_2 + R_{22} \bar{\mu}^0) \\ - \eta_2(\bar{N} + \bar{N}^0 R_{33}) + v(\bar{Q}_2 + \bar{N}^0 R_{23})] + \bar{c}_1 \\ = \bar{f}_1^m \sec \theta^0 \dot{\bar{\omega}}_1 + (\bar{f}_3^m - \bar{f}_2^m) \sec \theta^0 \dot{\bar{\omega}}_2 \bar{\omega}_3, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_2' + \sec \theta^0 [\bar{M}_1(\bar{\mu}_3 + R_{32} \bar{\mu}^0) - \bar{T}(\bar{\mu}_1 + R_{12} \bar{\mu}^0) \\ - \eta_1(\bar{N} + \bar{N}^0 R_{33}) + v(\bar{Q}_1 + \bar{N}^0 R_{13})] + \bar{c}_2 \\ = \bar{f}_2^m \sec \theta^0 \dot{\bar{\omega}}_2 + (\bar{f}_1^m - \bar{f}_3^m) \sec \theta^0 \dot{\bar{\omega}}_1 \bar{\omega}_3, \end{aligned} \quad (14)$$

Table 1
Main geometric and mechanical characteristics of the case-study cables.

	Taut				Shallow			
	h [m]	l [m]	δ [-]	H^0 [kN]	h [m]	l [m]	δ [-]	H^0 [kN]
Suspended	0	20	≈ 0	11.92	0	20	1/10	0.74
Stayed	30	20	≈ 0	6.61	30	20	1/15	0.87

$$\begin{aligned} \bar{T}' &= \sec \theta^0 [\bar{M}_1 (\bar{\mu}_2 + R_{22} \bar{\mu}^0) - \bar{M}_2 (\bar{\mu}_1 + R_{12} \bar{\mu}^0) \\ &\quad - \eta_1 (\bar{Q}_2 + \bar{N}^0 R_{23}) + \eta_2 (\bar{Q}_1 + \bar{N}^0 R_{13})] + \bar{c}_3 \\ &= \bar{f}_3^m \sec \theta^0 \dot{\omega}_3 + (\bar{f}_2^m - \bar{f}_1^m) \sec \theta^0 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2, \end{aligned} \quad (15)$$

where note that the prime and the overdot, here and henceforth, indicate differentiation with respect to the nondimensional space and time coordinates, respectively, and the term $\bar{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) is the i th nondimensional component of the acceleration vector $\bar{\mathbf{a}}(\bar{x}, \bar{t})$ in the local frame $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. The latter can be evaluated as

$$\bar{\mathbf{a}}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{\mathbf{a}}_u + \bar{\mathbf{a}}_\omega + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\mathbf{v}}_u + \bar{\mathbf{v}}_\omega) \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_u(\bar{x}, \bar{t}) &= \dot{\bar{u}}_1 \mathbf{b}_1 + \dot{\bar{u}}_2 \mathbf{b}_2 + \dot{\bar{u}}_3 \mathbf{b}_3, \\ \bar{\mathbf{a}}_u(\bar{x}, \bar{t}) &= \ddot{\bar{u}}_1 \mathbf{b}_1 + \ddot{\bar{u}}_2 \mathbf{b}_2 + \ddot{\bar{u}}_3 \mathbf{b}_3, \\ \bar{\mathbf{v}}_\omega(\bar{x}, \bar{t}) &= \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}^* = (\bar{\omega}_2 \bar{r}_3^* - \bar{\omega}_3 \bar{r}_2^*) \mathbf{b}_1 + (\bar{\omega}_3 \bar{r}_1^* - \bar{\omega}_1 \bar{r}_3^*) \mathbf{b}_2 \\ &\quad + (\bar{\omega}_1 \bar{r}_2^* - \bar{\omega}_2 \bar{r}_1^*) \mathbf{b}_3, \\ \bar{\mathbf{a}}_\omega(\bar{x}, \bar{t}) &= (\dot{\bar{\omega}}_2 \bar{r}_3^* + \bar{\omega}_2 \dot{\bar{u}}_3 - \dot{\bar{\omega}}_3 \bar{r}_2^* - \bar{\omega}_3 \dot{\bar{u}}_2) \mathbf{b}_1 \\ &\quad + (\dot{\bar{\omega}}_3 \bar{r}_1^* + \bar{\omega}_3 \dot{\bar{u}}_1 - \dot{\bar{\omega}}_1 \bar{r}_3^* - \bar{\omega}_1 \dot{\bar{u}}_3) \mathbf{b}_2 \\ &\quad + (\dot{\bar{\omega}}_1 \bar{r}_2^* + \bar{\omega}_1 \dot{\bar{u}}_2 - \dot{\bar{\omega}}_2 \bar{r}_1^* - \bar{\omega}_2 \dot{\bar{u}}_1) \mathbf{b}_3, \end{aligned} \quad (17)$$

with $\bar{r}_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) indicating the nondimensional i th component of the cable current position vector $\bar{\mathbf{r}}^*(\bar{x}, \bar{t})$ expressed in the local frame $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ which read:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1^*(\bar{x}, \bar{t}) &= (R_{11}^0 R_{11} + R_{31}^0 R_{13})(\bar{u}_1 + \bar{y}_0) + R_{12} \bar{u}_2 \\ &\quad + (R_{13}^0 R_{11} + R_{33}^0 R_{13})(\bar{u}_3 + \bar{x}), \\ \bar{r}_2^*(\bar{x}, \bar{t}) &= (R_{11}^0 R_{21} + R_{31}^0 R_{23})(\bar{u}_1 + \bar{y}_0) + R_{22} \bar{u}_2 \\ &\quad + (R_{13}^0 R_{21} + R_{33}^0 R_{23})(\bar{u}_3 + \bar{x}), \\ \bar{r}_3^*(\bar{x}, \bar{t}) &= (R_{11}^0 R_{31} + R_{31}^0 R_{33})(\bar{u}_1 + \bar{y}_0) + R_{32} \bar{u}_2 \\ &\quad + (R_{13}^0 R_{31} + R_{33}^0 R_{33})(\bar{u}_3 + \bar{x}). \end{aligned} \quad (18)$$

In Eqs. (10)–(15) and (18), R_{ij}^0 and R_{ij} represent the ij th element of the rotation matrices $\mathbf{R}^0(\mathbf{x})$ and $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$, respectively, whose expressions can be found in the Appendix. Moreover in Eqs. (10)–(15), $\bar{f}_i$ and $\bar{c}_i$ ($i = 1, 2, 3$) are the i th components in the current local frame of the nondimensional external forces and couples per unit horizontal length including the cable nondimensional weight (i.e., $\bar{\mathbf{f}}(\bar{x}, \bar{t}) = -[g \sec \theta^0 / (\omega_c^2 l)] \mathbf{e}_1 + \Delta \bar{\mathbf{f}}(\bar{x}, \bar{t})$, with $\Delta \bar{\mathbf{f}}(\bar{x}, \bar{t})$ being the incremental force).

Moreover, $\dot{\bar{u}}_i$ and $\bar{\omega}_i$ ($i = 1, 2, 3$) represent the i th components of the nondimensional velocity and angular velocity vector $\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\bar{x}, \bar{t})$ and $\bar{\boldsymbol{\omega}}(\bar{x}, \bar{t})$ in the local frame, respectively, and defined as $\dot{\bar{u}}_i = \dot{u}_i / (\omega_c l)$ and $\bar{\omega}_i = \omega_i / \omega_c$. Accordingly, the corresponding nondimensional time rates, $\ddot{\bar{u}}_i$ and $\dot{\bar{\omega}}_i$ ($i = 1, 2, 3$), are defined as $\ddot{\bar{u}}_i = \ddot{u}_i / (\omega_c^2 l)$ and $\dot{\bar{\omega}}_i = \dot{\omega}_i / \omega_c^2$, respectively. Finally, the nondimensional mass moments per unit length are $\bar{f}_i^m = \rho J_{ii} / (\rho A l^2)$ ($i = 1, 2, 3$), while the nondimensional cable mass per unit length turns out to be one.

3. Case studies

In this section suitable case studies are investigated to unfold the main features of the boundary layers arising in proximity of the constraints where rotations are enforced or near those regions where localized forces and couples are introduced. Notably these boundary

Table 2
Equivalent mechanical characteristics of the case-study cables.

A^0 [m ²]	A_s^0 [m ²]	J_1^0 [m ⁴]	J_2^0 [m ⁴]	J_3^0 [m ⁴]
3.81×10^{-4}	3.43×10^{-4}	1.47×10^{-8}	1.47×10^{-8}	2.94×10^{-8}
E^0 [GPa]	G^0 [GPa]	ρA [kgm]	$\rho J_1 = \rho J_2$ [kgm]	ρJ_3 [kgm]
180	69	2.97	1.15×10^{-4}	2.3×10^{-4}

Table 3
Characteristic nondimensional parameters.

	Taut			Shallow		
	γ	κ	λ	γ	κ	λ
Suspended	0.049	5755	3.72	0.79	92764	249.6
Stayed	0.088	10373	21.75	0.67	78463	424.5

Table 4
Characteristic nondimensional stiffness parameters.

κ_a	κ_{f_1}	κ_{f_2}	κ_q	κ_t
1	9.65×10^{-8}	9.65×10^{-8}	0.35	7.42×10^{-8}

layers cannot be investigated by adopting classical models of purely extensible cables. Two different dispositions of the suspended cables with the associated initial catenary equilibrium states are considered: a suspended configuration with the cable supports lying at the same height in the vertical plane $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ and a stayed configuration with the cable supports lying at different heights in the vertical plane $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$.

All cables, here considered of type ASTM A 416 Grade 270 (yield strength $f_y = 1.67$ GPa), have a span equal to $l = 20$ m while, in the stayed configuration, the difference in height between the supports is $h = 30$ m. For each of the considered catenary shapes, two prestress levels are considered: the first corresponding to a negligible sag-to-span ratio (taut cable) and the second due to a sag-to-span ratio $\delta = 1/10$ for the horizontal cable and $\delta = 1/15$ for the inclined cable, respectively. The boundary layers are induced by a flexural rotation $\bar{\theta}_2$ or a twisting rotation $\bar{\theta}_3$, respectively, applied at the left support. The characteristic parameters of the cables prestressed configurations here investigated are reported in Table 1.

Structural cables, such as those here investigated, are made of stranded ropes whose equivalent geometric and mechanical characteristics need to be first evaluated. The latter are reported in Table 2, while the characteristic nondimensional parameters are given in Tables 3 and 4.

The reference catenary configuration $\mathbf{C}^0$, evaluated through the theory of unstretchable cables, is described by the position vector $\mathbf{r}^0(\mathbf{x})$ which, in nondimensional form, reads $\bar{\mathbf{r}}^0(\bar{x}) = \bar{y}_0(\bar{x}) \mathbf{e}_1 + \bar{x} \mathbf{e}_3$ where the function $\bar{y}_0(\bar{x})$ has the well-known expression

$$\bar{y}_0(\bar{x}) = \frac{1}{\gamma} \left(\cosh \left(\frac{\gamma}{2} - \gamma \bar{x} \right) - \cosh \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right) \quad (19)$$

in the case of suspended cable, while for stayed cables $\bar{y}_0(\bar{x}; \gamma)$ becomes a more complicated transcendental function of $\bar{x}$ and γ satisfying the boundary conditions $\bar{y}_0(0; \gamma) = 0$ and $\bar{y}_0(1; \gamma) = h/l$ (see Lacarbonara, 2013 Chapter 3).

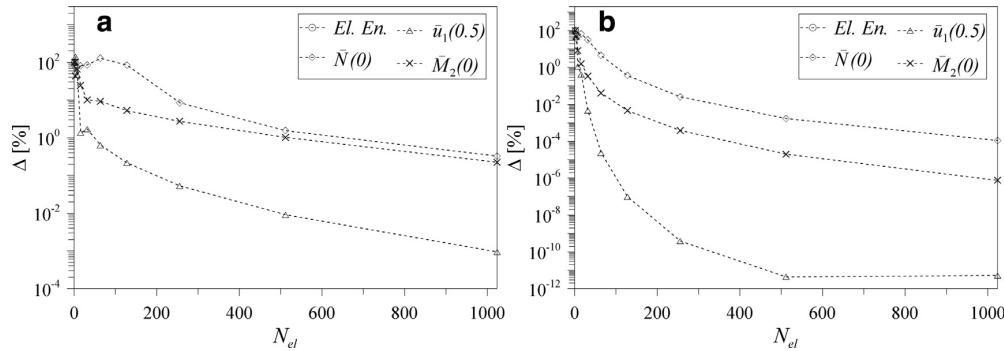


Fig. 2. Convergence of the stored energy (circles), midspan vertical displacement (triangles), tension (squares) and bending moment M_2 (crosses) vs. the number N_{el} of finite elements prescribing a flexural rotation $\theta_2 = 5^\circ$ at the left boundary: (a) second-order and (b) fourth-order Lagrangian polynomials. The vertical axes are in Log scale.

4. Computational approach

Equations of motion (4), cast in nondimensional form, are implemented in the computational platform **COMSOLMultiphysics** (2008) by using the partial differential equation (PDE) mode. By employing the PDE mode, systems of nonlinear PDEs can be treated through static, time-dependent and eigenvalue analyses via finite element (FE) discretization. The nondimensional, 1D space-wise domain $[0, 1]$ over which Eq. (4) is defined, is appropriately discretized in a sufficient number of finite elements such as to achieve the best accuracy for the sought numerical solution. Moreover, since the program also allows to adopt different trial functions to approximate each of the kinematic variables of the system, to evaluate the minimum number of FEs and the best trial function approximation, convergence tests are performed in order to minimize the size of the algebraic operators processed by the FE analysis. The test is conducted by solving the cable equilibrium under gravity and for the assigned nontrivial boundary conditions (20). In particular, a flexural rotation $\hat{\theta}_2 = 5^\circ$ is assigned at the left support of a shallow suspended cable. Second- and fourth-order Lagrange polynomials are used and the convergence test is carried out by monitoring the percent variations of a few key mechanical quantities by increasing the number of FEs. In Fig. 2, the cable stored energy, the vertical displacement at the mid-span, the maximum tension and bending moment are calculated for increasing levels of mesh refinements and their variations are reported in terms of number N_{el} of finite elements. Convergence is achieved when a variation of each mechanical quantity becomes lower than 1%. As shown, fourth-order Lagrangian polynomials ensure the best approximation of the solution with the minimum number, $N_{el} = 200$.

As expected, the most critical quantities requiring higher approximations are the bending moment and the tension, the generalized stresses that depend nonlinearly on the gradients of the kinematic variables, for which higher-order polynomials (i.e., fourth-order Lagrange polynomials) are necessary to correctly describe them. Therefore, 200 fourth-order Lagrangian finite elements, corresponding to 4806 degrees of freedom, are adopted for the selected case studies.

5. Effects of support rotations

The analyses for the four case studies (i.e., taut suspended cable, shallow suspended cable, taut stayed cable and shallow stayed cable) are aimed at investigating the effects of the cable flexural stiffness on the space-wise distribution of the stresses arising from the presence of bending moments and torque. To this end, the cable equilibrium, whose governing equations are obtained by setting the right-hand side of Eqs. (10)–(15) to zero, is computed for prescribed kinematic boundary conditions that induce flexural stresses in the cable. In particular, a nontrivial rotation about the local axis $\mathbf{b}_2^0$ first, followed by twisting rotation about the local axis $\mathbf{b}_3^0$, is prescribed to the left terminal section of the cable to simulate, for instance, the occurrence of a misalignment of the cable support. Thus, boundary conditions (5), cast in nondimensional form, are modified as follows

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(0) &= \mathbf{o}, \quad \tilde{\theta}_i(0) = 0 \quad (i = 1, 3), \quad \tilde{\theta}_2(0) = \hat{\theta}_2, \\ \tilde{\mathbf{u}}(1) &= \mathbf{o}, \quad \tilde{\theta}_i(1) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (20)$$

or

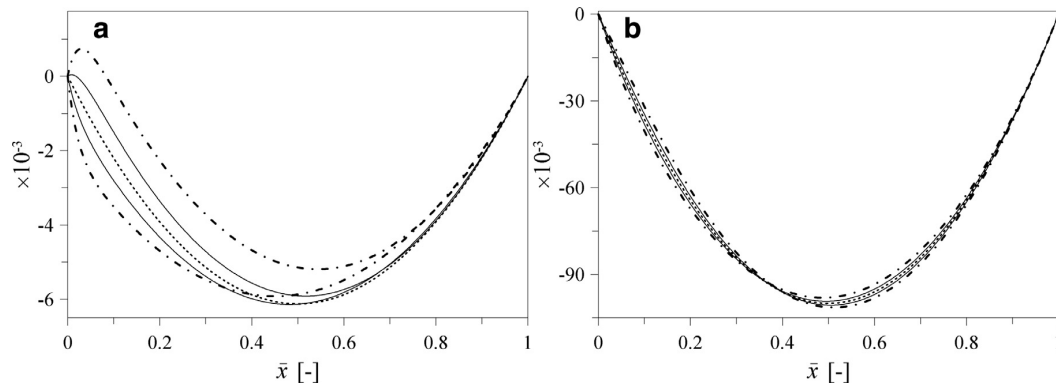


Fig. 3. Equilibrium states of taut (a) and shallow (b) suspended cables for given flexural rotations of the left support: dashed-dotted lines indicate $\hat{\theta}_2 = \pm 5^\circ$, solid lines represent $\hat{\theta}_2 = \pm 2^\circ$. The dotted line represents the catenary configuration. Note the different scales on the vertical axes.

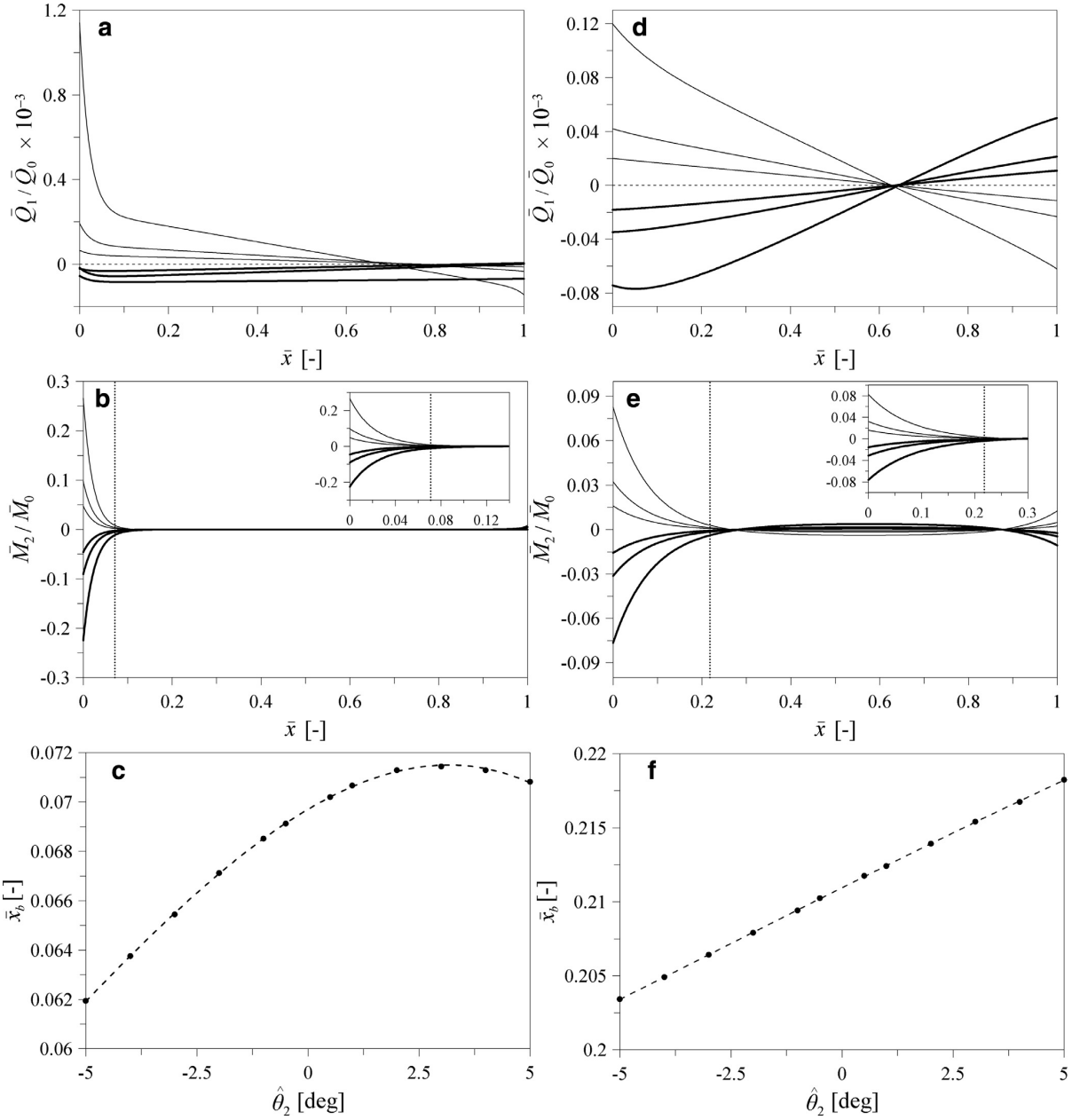


Fig. 4. The taut (shallow) cable is shown in the left (right) column. In the first row, the shear force-to-limit shear ratios are shown. The second row portrays the moment-to-limit moment ratios. The last row shows the extension of the boundary layers vs. the boundary rotation. The thick lines denote $\hat{\theta}_2 = 1^\circ, 2^\circ, 5^\circ$, while the thin lines describe $\hat{\theta}_2 = -1^\circ, -2^\circ, -5^\circ$.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(0) &= \mathbf{o}, \quad \bar{\theta}_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \bar{\theta}_3(0) = \hat{\theta}_3, \\ \bar{\mathbf{u}}(1) &= \mathbf{o}, \quad \bar{\theta}_i(1) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (21)$$

where $\bar{\theta}_i(\bar{x})$ ($i = 1, 2, 3$) represents the incremental rotation about $\mathbf{b}_i^0$ ($i = 1, 2, 3$). The expressions of such rotations are given by

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= \theta_1 \cos \theta_2 + \theta_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2, \quad \bar{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_3 \sin \theta_1, \\ \bar{\theta}_3 &= \theta_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \theta_1 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Despite the fact that the classical theory of cables does not allow to account for flexural effects, a simplified procedure to evaluate the flexural stresses induced in cables by support rotations, typically

adopted in the design of cable elements, [SETRA \(2001\)](#), is based on an empirical model which yields the following simplified expression of the induced bending moment:

$$M^*(x) = \hat{\theta}_2 \sqrt{E^0 J_2^0 N^0} \exp \left(-x \sec \theta^0 \sqrt{\frac{N^0}{E^0 J_2^0}} \right), \quad (23)$$

which, in nondimensional form, can be expressed as $\bar{M}^*(\bar{x}) = M^*(x)/(\rho A \omega_c^2 l^3)$. Thus, besides the normal stress $\sigma_N = N^0/A^0$, where N^0 is the maximum tension in the catenary state, the contribution given by the bending-induced normal stress $\sigma_M = M^* d^0/(2J_2^0)$,

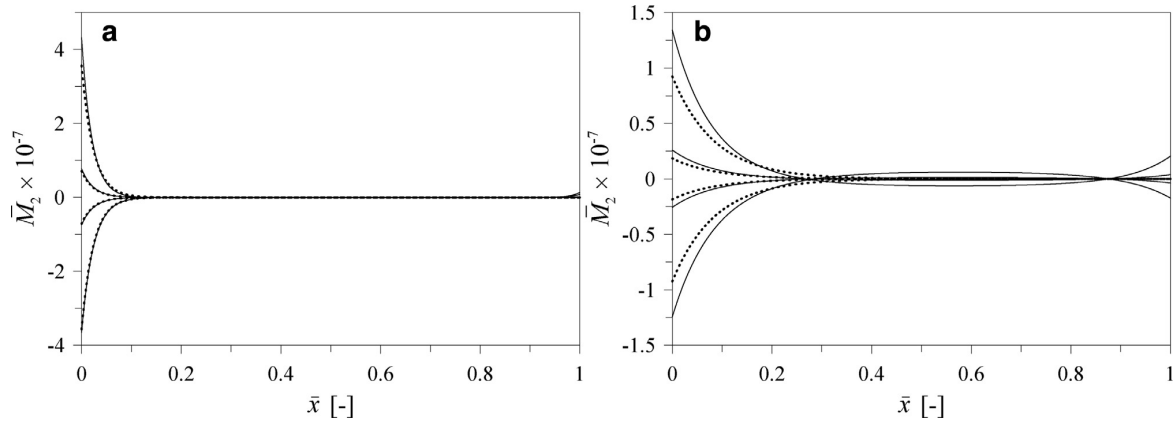


Fig. 5. Nondimensional bending moment $\bar{M}_2$ evaluated by the proposed nonlinear model (solid lines) and by the empirical model (dashed lines) for selected flexural rotations $\hat{\theta}_2$ of the left support ($\hat{\theta}_2 = \pm 1^\circ, \pm 5^\circ$): (a) taut suspended cable and (b) shallow suspended cable.

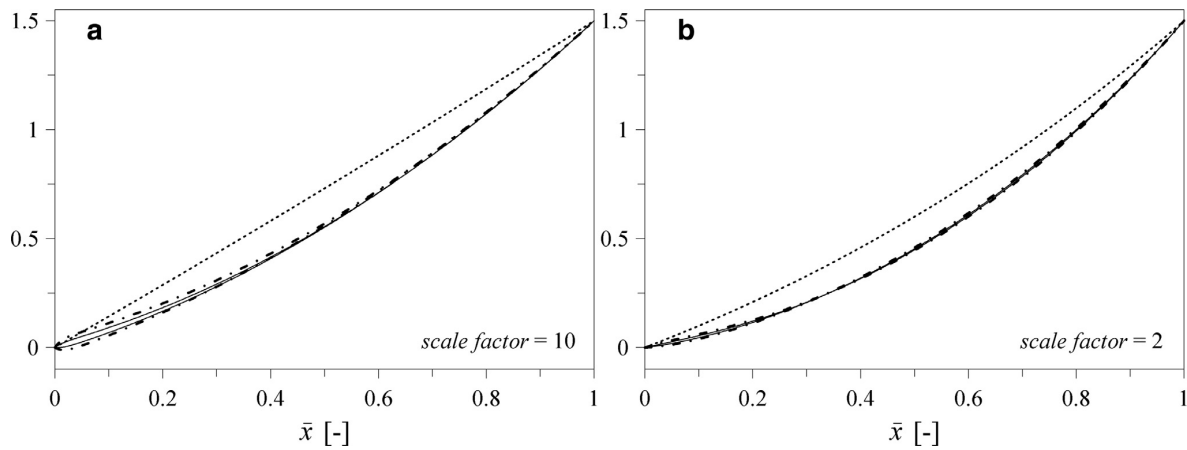


Fig. 6. Equilibrium states of (a) taut and (b) shallow stayed cables for selected flexural rotations at the left support: dashed-dotted lines indicate $\hat{\theta}_2 = \pm 5^\circ$, solid lines represent $\hat{\theta}_2 = \pm 2^\circ$. The dotted line represents the catenary equilibrium.

where $d^0 = \sqrt{4A^0/\pi}$ is the equivalent cable diameter, can be used to evaluate the additional stress generated in the vicinity of the boundaries. Further details about the simplified model can be found in SETRA (2001). Comparisons between the simplified computation of the bending moment given by Eq. (23) and the proposed fully nonlinear model are performed next.

Suspended cable: taut vs. shallow states. In this section the equilibrium response of a suspended cable subject to a flexural rotation at the left support is investigated. The two initial prestress catenary states, taut and shallow, are considered and compared. The ratio between the shear force $Q_1(x)$ and the yielding (limit) shear Q_0 and that between the bending moment $M_2(x)$ and the limit moment M_0 induced in the cable by the nontrivial boundary condition are more meaningful quantities to compute than the absolute values. The limit shear and moment are given by

$$Q_0 = \frac{f_y A_s^0}{\sqrt{3}}, \quad M_0 = f_y \frac{2J_2^0}{d^0}, \quad (24)$$

which, in nondimensional form, read $\bar{Q}_0 = Q_0/(\rho A \omega_c^2 l^2)$, $\bar{M}_0 = M_0/(\rho A \omega_c^2 l^3)$ and where f_y is the limit stress. The boundary layer is evaluated as the length x_b where such ratios are higher than 5%. Finally, the comparison between the bending moment evaluated by the proposed model of flexible cable and the empirical expression (23) is performed.

Fig. 3 shows the cable equilibrium states (Fig. 3(a) and (b) portray shallow and taut states, respectively) for selected rotations of the left support. Positive counterclockwise rotations $\hat{\theta}_2$ induce lifted configurations with respect to the catenary shape represented by the dotted lines. The induced bending stresses are reported in Fig. 4 in terms of nondimensional shear force $\bar{Q}_1$ and bending moment $\bar{M}_2$ divided by the limit values $\bar{Q}_0$ and $\bar{M}_0$, respectively. Note that the maximum bending moment at the left support can be as large as 30% of the limit moment for relatively small rotations (i.e., $\pm 5^\circ$) in taut cables and 9% in shallow cables. On the other hand, the maximum shear force is negligible since it is below 0.1% of the limit shear. The localization of stresses due to bending cannot be captured by the classical model of purely stretchable cables. Moreover, in shallow cables, also at the opposite boundary, the bending moment and the shear force can become nonnegligible for higher rotations $\hat{\theta}_2$. As shown in Fig. 4(c) and (f), the size of the region where the cable bending moment is higher than 5% of the limit moment increases for counterclockwise (positive) rotations and can reach an extension of about 20% of the cable span l .

In Fig. 5 the bending moment evaluated by the proposed flexible cable model is compared to that obtained by the empirical expression (23). It is clear that the empirical model does not allow to consider the effects in terms of induced moment at the right boundary. Moreover, it underestimates the maximum bending moment arising at the boundary where the rotation is prescribed.

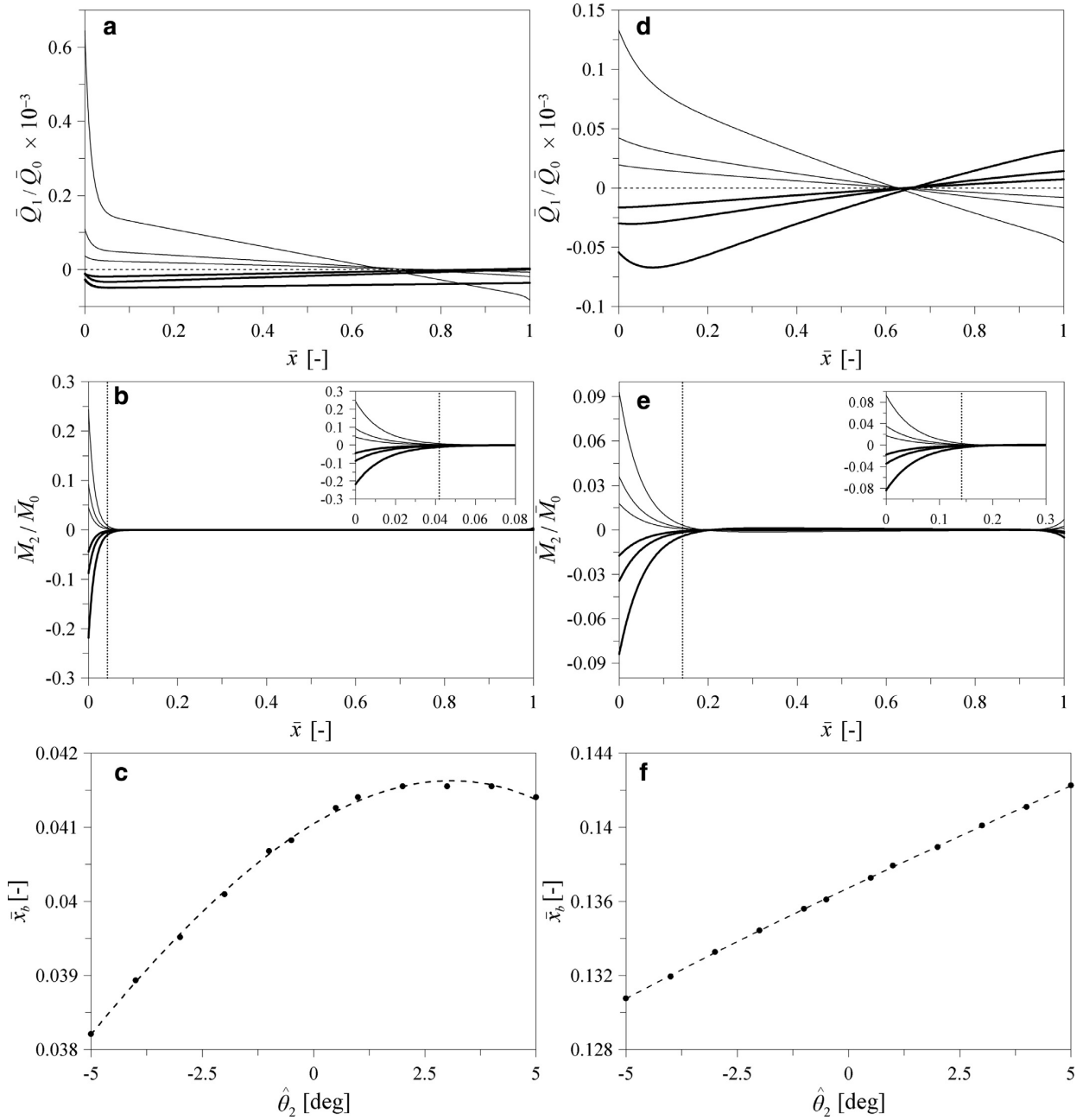


Fig. 7. The taut (shallow) cable is shown in the left (right) column. In the first row, the shear force-to-limit shear ratios are shown. The second row portrays the moment-to-limit moment ratios. The last row shows the extension of the boundary layers vs. the support rotation. The thick lines denote $\hat{\theta}_2 = 1^\circ, 2^\circ, 5^\circ$, while the thin lines describe $\hat{\theta}_2 = -1^\circ, -2^\circ, -5^\circ$.

Stayed cable: taut vs. shallow states. The same analyses performed for suspended cables are carried out for stayed cables. Fig. 6(a) and (b) show the equilibrium states of the taut and shallow cables, respectively, when the rotations $\hat{\theta}_2 = \pm 5^\circ$ are assigned at the left support. Suitable rescalings were adopted to highlight the equilibrium states with respect to the catenary equilibrium (dashed lines). Response features similar to those exhibited by horizontal cables, in terms of shear force and bending moment, are obtained for stayed cables, although slightly smaller boundary layer lengths arise as shown in Fig. 7(c) and (f).

Fig. 8 shows the comparison between the bending moment evaluated by the proposed flexible cable model and the results obtained by adopting the empirical expression (23). Also for stayed cables the empirical model misses to predict the moment near the right boundary, especially in the case of shallow cables. It further underestimates the maximum bending moment within the boundary layer.

Fig. 9 summarizes the most interesting results obtained by adopting the proposed nonlinear model of flexible cables. Fig. 9(a) shows the maximum increment $\Delta \bar{N}$ of the tension $\bar{N}$ with respect to the tension $\bar{N}^0$ in the catenary equilibrium and induced by the prescribed

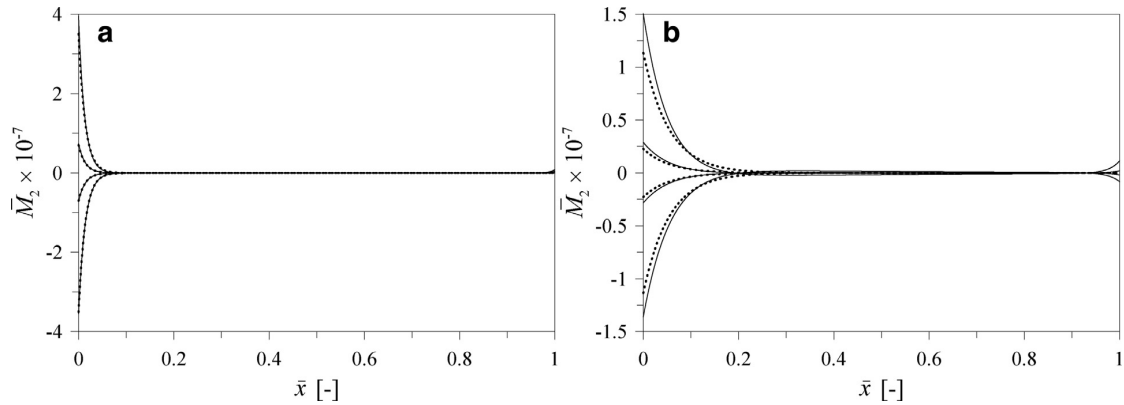


Fig. 8. Nondimensional bending moment $\bar{M}_2$ evaluated by the proposed nonlinear model (solid lines) and by the empirical model (dashed lines) for selected flexural rotations $\hat{\theta}_2$ of the left support ($\theta_2 = \pm 1^\circ, \pm 5^\circ$): (a) taut suspended cable and (b) shallow stayed cable.

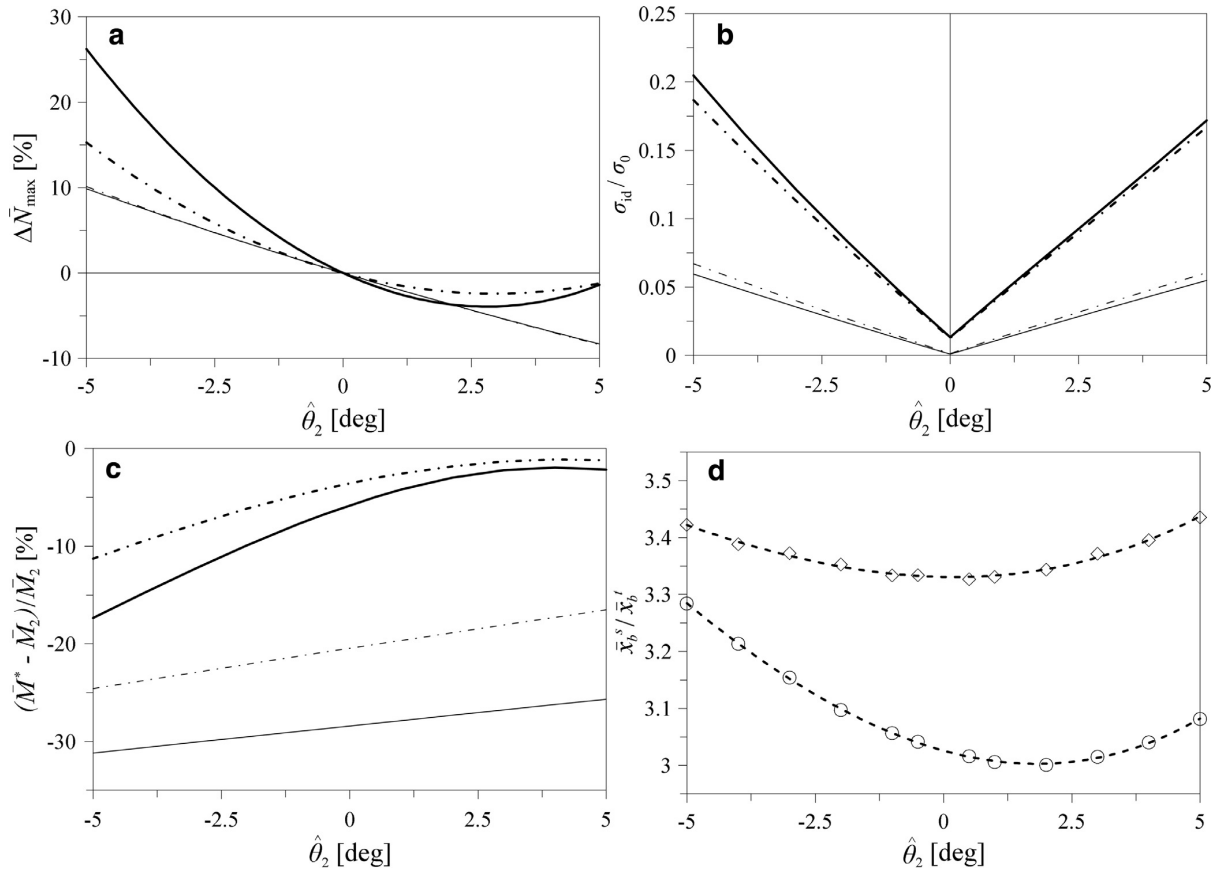


Fig. 9. (a) Increment of the maximum tension N , (b) ratio between the von Mises stress σ_{id} at the left boundary and the limit stress σ_0 and (c) the difference between the maximum bending moment obtained by the empirical model ($\bar{M}^*$) and that obtained by the proposed nonlinear model ($\bar{M}_2$) at the left boundary in the suspended cable (solid lines) and stayed cable (dashed-dotted lines), taut configurations (thick lines) and shallow configurations (thin lines); (d) ratio between the boundary layer lengths of shallow (x_b^s) and taut (x_b^t) cables, suspended (circles) and stayed (squares).

rotation $\hat{\theta}_2$. Note that clockwise rotations induce higher tension in the cable by stretching the cable with respect to the catenary shape, as also evident also in Figs. 3 and 6. Fig. 9(b) shows the ratio between the maximum von Mises stress σ_{id} expressed as $\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ and the von Mises yielding stress $\sigma_0 = f_y$. The normal stress σ is evaluated as

$$\sigma = \frac{|\tilde{N}|}{A^0} + \frac{|M_2| d^0}{2J_2^0}, \quad (25)$$

while the maximum shear stress as $\tau = \frac{16}{3} Q_1 / (\pi d^{02})$. In Eq. (25), $\tilde{N}$ is the total tension in the cable (defined as $\tilde{N} = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}_3$) and M_2 is bending moment, which reaches its maximum value at the left support.

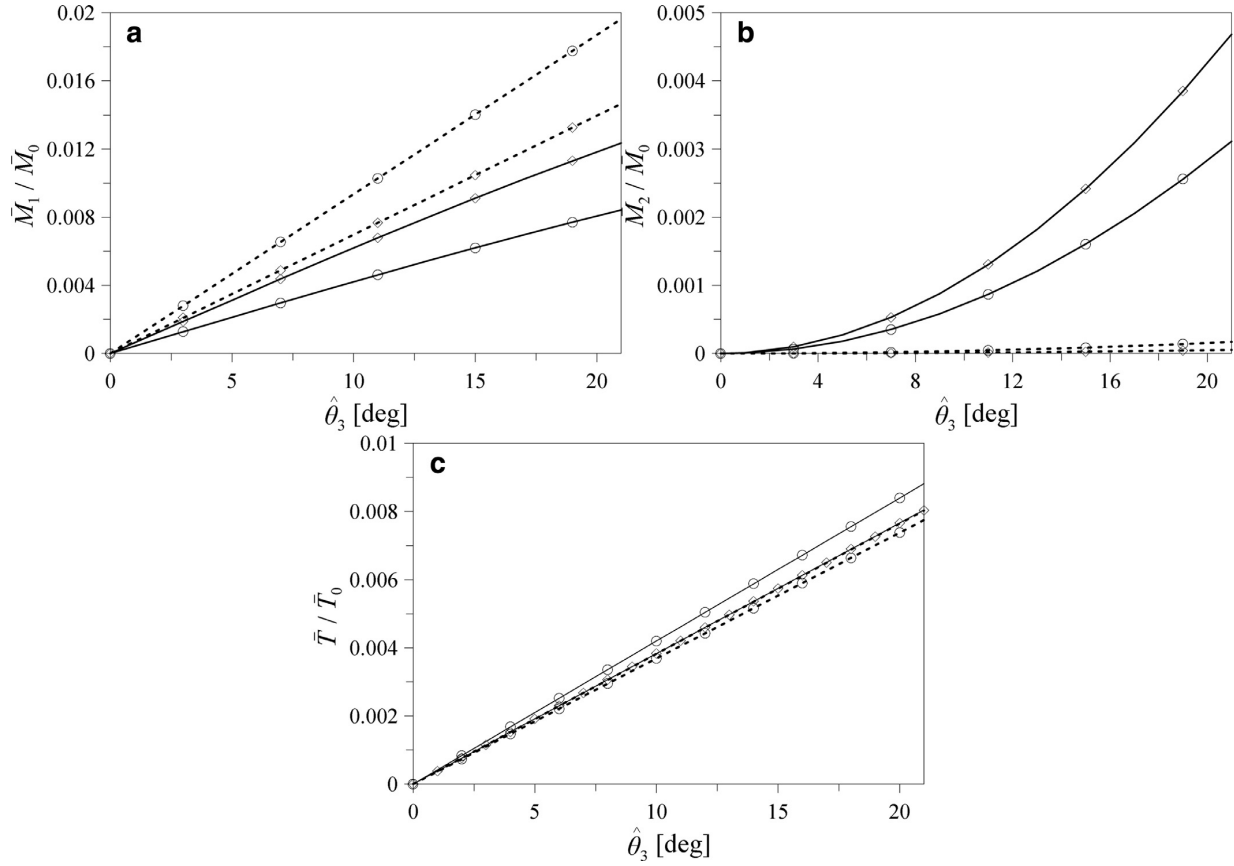


Fig. 10. Bending moments (a) $\bar{M}_1$ and (b) $\bar{M}_2$ divided by $\bar{M}_0$ and (c) torque $\bar{T}$ divided by $\bar{T}_0$ vs. $\hat{\theta}_3$: stayed taut cable (squares), stayed shallow cable (circles), left boundary (solid lines), right boundary (dashed lines).

The von Mises stress σ_{id} is computed at different positions along the cable span and its maximum value is then compared to the yielding stress σ_0 . As shown in Fig. 9(b), for taut configurations (thin lines) the von Mises stress σ_{id} can reach values up to 30% of the yielding stress σ_0 whereas it is lower than 10% for shallow configurations (thick lines).

Further interesting conclusions can be drawn from Fig. 9(c) where the ratio between the maximum bending moment, obtained by the proposed cable model, and the maximum moment predicted by the empirical model, Eq. (23), is evaluated for the considered four cable configurations and for several rotations $\hat{\theta}_2$. The error associated with the empirical model, and already highlighted in Figs. 5 and 8, shows that the underestimation of the maximum bending moment within the boundary layer can reach values of almost 30% for shallow cables. This is not surprising since shallow configurations possess a larger geometric curvature thus higher geometric stiffness not considered by the empirical model. A further consequence of the initial geometric stiffness is the larger size of the boundary layer shown by shallow configurations with respect to taut shapes, as shown in Fig. 9(d) where the ratio between the nondimensional boundary layer length of shallow cables $\bar{x}_b^s$ and that of taut cables $\bar{x}_b^t$, evaluated for the whole range of prescribed rotations, turns out to vary in the range [3, 3.5], both in suspended and in stayed configurations.

The case of a twisting rotation. The boundary conditions given by (21) are considered to investigate the response to a twisting rotation prescribed at the left support. The analysis is aimed at reproducing the effect of a possible misalignment occurring during standard operations of cables pretensioning in stayed bridges. To this aim, only the

stayed configuration of the cable is considered in the analyses and the effect of the initial equilibrium shape (taut and shallow cable) is studied. The ratios between the bending moments $\bar{M}_1$ and $\bar{M}_2$ and the limit moment $\bar{M}_0$ and between the torque $\bar{T}$ and the limit torque $\bar{T}_0 := 2J_3^0 f_y / (d^0 \sqrt{3} \rho A \omega_c^2 l^3)$ are evaluated in the range of twisting rotations $\hat{\theta}_3 = [0^\circ, 20^\circ]$. The ratios of the bending moments and the torque at the right boundary are also calculated. As expected, Fig. 10 shows that, even for large twisting rotations, values of the order of 2% of the limit moment and torque are reached.

6. Conclusions

This work presented a fully nonlinear model of cables based on the special Cosserat theory of rods. As such, the model conceives the elastic cable as a very slender rod that suffers extension, bending, shear and twist. Notably, the bending and torsional stiffnesses are much lower than the axial elastic stiffness and the geometric stiffness. Since the bending and torsional stiffnesses multiply the terms with the highest derivatives, boundary layers arise near the supports or the regions where point-wise forces and couples are applied. The states of stress within these boundary layers can be quite complex and can be much higher than the normal stresses predicted by the classical theory of purely stretchable cables. From an engineering point of view, this uncertainty in the states of stress is overcome using approximate models based on the linear Euler–Bernoulli beam theory. The computations carried out in the present work show that the approximate models underestimate the stresses within the boundary layers by as much as 30%. This estimate is based on consideration of flexural

rotations of the support. Moreover, it was shown that the initial pre-stress state of the cable (taut vs. shallow cables) drives differently the onset of the boundary layers, the stress peaks within them and their spatial extension.

The lack of accuracy in the estimation of the boundary layers becomes more critical in dynamical situations where the cables are subject to cyclic stresses within the boundary layers that can give rise to a fatigue life prediction much higher than the actual fatigue life thus leading to unsafe assessments of the cable service life.

Acknowledgments

The partial support of the Italian Ministry of Education, University and Scientific Research (2010–2011 PRIN grant no. 2010BFXRHS-002) and of [Sapienza University](#) (grant no. C26A13JPY9) is gratefully acknowledged.

Appendix

The orthogonal tensors $\mathbf{R}^0(x)$, describing the orientation of the cable reference local frame $\{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\}$ with respect to the reference fixed frame $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ can be expressed as

$$\mathbf{R}^0(x) = \begin{bmatrix} \cos \theta^0 & 0 & -\sin \theta^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta^0 & 0 & \cos \theta^0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

where

$$\cos \theta^0 = \frac{1}{\sqrt{1 + y_o'(x)^2}}, \quad \sin \theta^0 = \frac{y_o'(x)}{\sqrt{1 + y_o'(x)^2}}. \quad (27)$$

The orthogonal tensors $\mathbf{R}(x, t)$, describing the orientation of the cable local frame in the current configuration $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ with respect to the reference local frame $\{\mathbf{b}_1^0, \mathbf{b}_2^0, \mathbf{b}_3^0\}$ during the motion is given by

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(x, t) \\ = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

Therefore, the orientation of the cable local frame $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, in the current configuration, with respect to the fixed frame $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ is given by the orthogonal tensor $\mathbf{R}(x, t) = \tilde{\mathbf{R}}(x, t) \cdot \mathbf{R}^0(x)$ and the following relations hold:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^0(x) &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{R}_{ij}^0(x) \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, \\ \mathbf{b}_i(x, t) &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{R}_{ij}(x, t) \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (29)$$

where $\mathbf{R}_{ij}^0$ and $\mathbf{R}_{ij}$ represent the ij th element of the rotation matrix $\mathbf{R}^0(x)$ and $\mathbf{R}(x, t)$, respectively. Moreover, the generalized strains can be evaluated as

$$\begin{aligned} \eta_1(x, t) &= \cos \theta^0 \sum_{i=1}^3 r_i' R_{1i}, \quad \eta_2(x, t) = \cos \theta^0 \sum_{i=1}^3 r_i' R_{2i}, \\ \nu(x, t) &= \cos \theta^0 \sum_{i=1}^3 r_i' R_{3i}. \end{aligned} \quad (30)$$

The components of the curvature vectors $\boldsymbol{\mu}^0(x)$, $\boldsymbol{\mu}(x, t)$, and the components $\hat{\mu}_i (i = 1, 2, 3)$ can be expressed as (see [Lacarbonara, 2013](#) Chapter 7)

$$\begin{aligned} \mu^0(x) &= \theta^{0'} \cos \theta^0, \\ \mu_1(x, t) &= \cos \theta^0 (\theta_1' \cos \theta_3 + \theta_2' \cos \theta_1 \sin \theta_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2(x, t) &= \cos \theta^0 (\theta_2' \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \theta_1' \sin \theta_3), \\ \mu_3(x, t) &= \cos \theta^0 (\theta_3' - \theta_2' \sin \theta_1), \\ \hat{\mu}_1(x, t) &= \cos \theta^0 [\theta_1' \cos \theta_3 + (\theta^{0'} + \theta_2') \cos \theta_1 \sin \theta_3], \\ \hat{\mu}_2(x, t) &= \cos \theta^0 [(\theta^{0'} + \theta_2') \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \theta_1' \sin \theta_3 - \theta^{0'}], \\ \hat{\mu}_3(x, t) &= \cos \theta^0 [\theta_3' - (\theta^{0'} + \theta_2') \sin \theta_1]. \end{aligned} \quad (31)$$

Similarly, the components of the angular velocity vector read:

$$\begin{aligned} \omega_1(x, t) &= \dot{\theta}_1 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin \theta_3, \\ \omega_2(x, t) &= \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_3, \\ \omega_3(x, t) &= \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2 \sin \theta_1. \end{aligned} \quad (32)$$

References

- Bouaani, N., 2006. Numerical investigation of the modal sensitivity of suspended cables with localized damage. *J. Sound Vib.* 292, 1015–1030.
- Bouton, E., Crémone, C., 2003. Note sur la méthode d'essai Lcpc n°35. Technical Report. LCPC.
- Boyer, F., De Nayer, G., Leroy, A., Visonneau, M., 2011. Geometrically exact Kirchhoff beam theory: application to cable dynamics. *J. Comput. Nonlinear Dyn.* 6, 041004.
- Burgess, J.J., 1993. Bending stiffness in a simulation of undersea cable deployment. *Int. J. Offshore Polar Eng.* 3, 197–204.
- COMSOL Multiphysics, 2008. User's Guide Version 3.5. COMSOL AB, Stockholm.
- Costello, G.A., 1997. *Theory of Wire Rope*. Springer-Verlag.
- Gattulli, V., Alaggio, R., Potenza, F., 2008. Analytical prediction and experimental validation for longitudinal control of cable oscillations. *Int. J. Non-Linear Mech.* 43, 36–52. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2007.10.001.
- Gourmelon, J.P., 2003. Fatigue des câbles de haubanage: organisation et principaux résultats du programme de recherche dirigé par le LCPC. *Bull. des Lab. des Ponts et Chaussées* 244–245, 53–71.
- Irvine, H.M., 1984. *Cable Structures*. Dover Publications.
- Lacarbonara, W., 2013. *Nonlinear Structural Mechanics. Theory, Dynamical Phenomena and Modeling*. Springer, New York.
- Lacarbonara, W., Pacitti, A., 2008. Nonlinear modeling of cables with flexural stiffness. *Math. Probl. Eng.* 2008 Article ID 370767, 21 pages. doi:10.1155/2008/370767.
- Lacarbonara, W., Paolone, A., Vestroni, F., 2007. Nonlinear modal properties of non-shallow cables. *Int. J. of Non-Linear Mech.* 42, 542–554.
- LCPC, 1993. *Mesure de la Tension des Câbles Par Vibration: Méthode D'essai LPC N. 35*. IST Publications.
- Lepidi, M., Gattulli, V., 2012. Static and dynamic response of elastic suspended cables with thermal effects. *Int. J. Solids Struct.* 49, 1103–1116.
- Lepidi, M., Gattulli, V., Vestroni, F., 2007. Static and dynamic response of elastic suspended cables with damage. *Int. J. Solids Struct.* 44, 8194–8212.
- Lepidi, M., Gattulli, V., Vestroni, F., 2009. Damage identification in elastic suspended cables through frequency measurement. *J. Vib. Control* 15, 867–896. doi:10.1177/1077546308096107.
- Li, C., Tang, X., Xiang, G., 2010. Fatigue crack growth of cable steel wires in a suspension bridge: multiscale and mesoscopic fracture mechanics. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 53, 113–126.
- Mehrabi, A., Tabatabai, H., 1998. Unified finite difference formulation for free vibration of cables. *J. Struct. Eng.* 124, 1313–1322.
- Ni, Y.Q., Ko, J.M., Zheng, G., 2002. Dynamic analysis of large-diameter sagged cables taking into account flexural rigidity. *J. Sound Vib.* 257, 301–319.
- Papailiou, K.O., 1995. *Bending of Helically Twisted Cables Under Variable Bending Stiffness Due to Internal Friction, Tensile Force and Cable Curvature*. Eidgenössische Technische Hochschule Zurich (Ph.D. thesis).
- Périer, V., Dieng, L., Gaillet, L., Tessier, C., Fouvry, S., 2009. Fretting-fatigue behaviour of bridge engineering cables in a solution of sodium chloride. *Wear* 267, 308–314.
- PTI (Ed.), 2007. *Recommendations for Stay Cables Design, Testing and Installation*. PTI.
- Raoof, M., 1990. Free bending of structural strand. *J. Eng. Mech.* 116, 512–529.
- Ricciardi, G., Saitta, F., 2008. A continuous vibration analysis model for cables with sag and bending stiffness. *Eng. Struct.* 30, 1459–1472.
- SETRA (Ed.), 2001. *HAUBANS - Recommandations de la Commission Interministérielle de la Précontrainte*. SETRA.
- Siebert, D., Dieng, L., Brevet, P., Toutlemonde, F., 2005. Parameter identification of a hanger or stay-cable model based on measured resonant frequencies. In: *Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures*.
- Sih, G., Tang, X., Li, Z., Li, A., Tang, K., 2008. Fatigue crack growth behavior of cables and steel wires for the cable-stayed portion of Runyang bridge: disproportionate loosening and/or tightening of cables. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 49, 1–25.
- Treysède, F., 2009. Free linear vibrations of cables under thermal stress. *J. Sound Vib.* 327, 1–8. doi:10.1016/j.jsv.2009.07.005.
- Treysède, F., 2010. Vibration analysis of horizontal self-weighted beams and cables with bending stiffness subjected to thermal loads. *J. Sound Vib.* 329, 1536–1552. doi:10.1016/j.jsv.2009.11.018.
- Zui, H., Shinke, T., Namita, Y., 1996. Practical formulas for estimation of cable tension by vibration method. *J. Struct. Eng.* 122, 651–656.

Bibliography

- [1] E. Reissner. On finite deformation of space-curved beams. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 32:734–744, 1981.
- [2] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. A three-dimensional finite-strain rod model. part ii: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:79–116, 1986.
- [3] A. Cardona and M. Geradin. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(11):2403–2438, 1988.
- [4] S. S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity Second Edition*. Springer, 2005.
- [5] Patrick Ballard and Alain Millard. *Poutres et arcs élastiques*. Ecole polytechnique, Palaiseau, 2009.
- [6] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Librairie scientifique A Hermann, 1909.
- [7] E. Cosserat and F. Cosserat. *Note sur la théorie de l’action euclidienne*, volume t.3, pages 557–629. Paul Appell, 1909.
- [8] Andrea Arena, Arnaud Pacitti, and Walter Lacarbonara. Nonlinear response of elastic cables with flexural-torsional stiffness. *International Journal of Solids and Structures*, 87:267 – 277, 2016.
- [9] James Finley. A description of the patent chain bridge. *The Port Folio, Bradford and Inskeep*, III, 1810.
- [10] Navier. Rapport et mémoire sur les ponts suspendus. Technical report, 1823.
- [11] D.B. Steinman. *The Builders of the Bridge; The Story of John Roebling and His Son*. 1945.
- [12] Michel Cotte. *Les fonds d’archives Seguin - aux origines de la révolution industrielle en France*. 1997.
- [13] Niels J. Gimsing and Christos T. Georgakis. *Cable Supported Bridges, Concept and Design, Third Edition*. John Wiley and Sons, Ltd, third edition edition, 2012.
- [14] Didier Leinekugel Le Cocq. *Ingénieurs des ponts, L’histoire de la famille Arnodin-Leinekugel Le Cocq*. 2010.

-
- [15] Patrick Losset. Câbles et suspension des ponts. In *Bulletin du Centre des Techniques d'Ouvrages d'Art*. Sétra, 2009.
 - [16] René Walther, Bernard Houriet, Walmar Isler, and Pierre Moïa. *Ponts haubanés*. 1985.
 - [17] LCPC-SETRA. *Les ponts suspendus en France*. LCPC-SETRA, 1989.
 - [18] Sétra. Surveillance et entretien des ouvrages d'art - 2ème partie - fascicule 34-2 - ponts à haubans. In *ITSEOA. Sétra - Les outils*, 2008.
 - [19] SETRA, editor. *HAUBANS - Recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte*. SETRA, 2001.
 - [20] D. Siegert. *Mécanismes de fatigue de contact dans les câbles de haubanage de Génie Civil*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 1997.
 - [21] Pierre Brevet, André Raharinaïvo, and Dominique Siegert. Microstructure et propriétés mécaniques des aciers pour câbles. synthèses des travaux du lcpc (1970-2000). *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 2004.
 - [22] V. Périer, L. Dieng, L. Gaillet, C. Tessier, and S. Fouvry. Fretting-fatigue behaviour of bridge engineering cables in a solution of sodium chloride. *Wear*, 267:308–314, 2009.
 - [23] C.X. Li, X.S. Tang, and G.B. Xiang. Fatigue crack growth of cable steel wires in a suspension bridge: Multiscaling and mesoscopic fracture mechanics. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 53:113–126, 2010.
 - [24] G.C. Sih, X.S. Tang, Z.X. Li, A.Q. Li, and K.K. Tang. Fatigue crack growth behavior of cables and steel wires for the cable-stayed portion of runyang bridge: Disproportionate loosening and/or tightening of cables. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 49:1–25, 2008.
 - [25] J.-P. Gourmelon. Fatigue des câbles de haubanage. organisation et principaux résultats du programme de recherche dirigé par le lcpc. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 244-245:53–71, 2003.
 - [26] H. Marneffe. Fragilité à basse température des aciers d'anciens ponts suspendus. actualisation des données relatives à ce risque. In *Journées Techniques Ouvrages d'Art 2013*, 2013.
 - [27] Fascicule n°56 - protection des ouvrages métalliques contre la corrosion, février 2004.
 - [28] Marianne Perrin. *Étude et caractérisation par émission acoustique et mesures électrochimiques de la fragilisation par l'hydrogène des câbles de précontrainte. Application aux ouvrages d'art*. PhD thesis, INSA Lyon, 12 2009.
 - [29] Techniques et méthodes des laboratoires de ponts et chaussées, editor. *LPC 35: Mesure de la tension des câbles par vibration*. IST Publications, 1993.

- [30] E. Bouton and C. Crémona. Note sur la méthode d'essai lcpc n°35. Technical report, LCPC, 2003.
- [31] P. De Mars and D. Hardy. Mesure des efforts dans les structures à câbles. *Annales des Travaux Publics de Belgique*, 6:515–531, 1985.
- [32] P.M.C. Morse and K.U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, 1968.
- [33] H. Zui, T. Shinke, and Y. Namita. Practical formulas for estimation of cable tension by vibration method. *Journal of Structural Engineering*, 122:651–656, 1996.
- [34] M. A. Ceballos and C. A. Prato. Determination of the axial force on stay cables accounting for their bending stiffness and rotational end restraints by free vibration tests. *Journal of Sound and Vibration*, 317:127–141, 2008.
- [35] A. Bellino, S. Marchesiello, A. Fasana, and L. Garibaldi. Cable tension estimation by means of vibration response and moving mass technique. *Mécanique et Industries*, 11:505–512, 2010.
- [36] H. Nam and N.Y. Nghia. Estimation of cable tension using measured natural frequencies. *Procedia Engineering*, 14:1510–1517, 2011.
- [37] S. Kangas, A. Helmicki, V. Hunt, R. Sexton, and J. Swanson. Identification of cable forces on cable-stayed bridges: A novel application of the music algorithm. *Experimental Mechanics*, 50(7):957–968, 2010.
- [38] J. Lardiès and M.-N. Ta. Modal parameter identification of stay cables from output-only measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010.
- [39] Sooyong Park, Sanghyun Choi, Soon-Taek Oh, Norris Stubbs, and Hwa-Cheol Song. Identification of the tensile force in high-tension bars using modal sensitivities. *International Journal of Solids and Structures*, 43(10):3185 – 3196, 2006.
- [40] Dominique Siegert, Lamine Dieng, M. Goursat, and F. Toutlemonde. Frequency monitoring of stay-cables. In *2007 IMAC-XXV: Conference & Exposition on Structural Dynamics*, 2007.
- [41] B. H. Kim and T. Park. Estimation of cable tension force using the frequency-based identification method. *Journal of Sound and Vibration*, 304:660–676, 2007.
- [42] N. Tullini and F. Laudiero. Dynamic identification of beam axial loads using one flexural mode shape. *Journal of Sound and Vibration*, 318:131–147, 2008.
- [43] Giordano Avellaneda, Ricardo Noguera, and Edgar Muñoz. Desarrollo de un algoritmo computacional para la estimación de la tensión de cables en puentes atirantados con base en la medición experimental en laboratorio y campo de sus modos y frecuencias naturales de vibración. *Revista Ingeniería de Construcción*, 27:155–180, 2012.
- [44] S. Li, E. Reynders, K. Maes, and G. De Roeck. Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 332:795–806, 2013.

- [45] Elsa Caetano. On the identification of cable force from vibration measurements. *IABSE-IASS Symposium London*, 2011.
- [46] N. Bouaanani. Numerical investigation of the modal sensitivity of suspended cables with localized damage. *Journal of Sound and Vibration*, 292:1015–1030, 2006.
- [47] Antonino Morassi. Damage detection and generalized fourier coefficients. *Journal of Sound and Vibration*, 302:229–259, 2007.
- [48] Marco Lepidi, Vincenzo Gattulli, and Fabrizio Vestroni. Static and dynamic response of elastic suspended cables with damage. *International Journal of Solids and Structures*, 44:8194–8212, 2007.
- [49] M. Lepidi, V. Gattulli, and F. Vestroni. Damage identification in elastic suspended cables through frequency measurement. *Journal of Vibration and Control*, 2009.
- [50] Arnaud Pacitti. Détection de défauts dans les câbles de pont par méthode vibratoire. Master’s thesis, Université Bordeaux I, 2009.
- [51] D. Degrauwe, G. De Roeck, and G. Lombaert. Uncertainty quantification in the damage assessment of a cable-stayed bridge by means of fuzzy numbers. *Computers and Structures*, 87:1077–1084, 2009.
- [52] Christian Crémona and Olivier Rasson. Approche probabiliste de la résistance résiduelle des câbles de structures. *Revue Française de Génie Civil*, 6(3):397–407, 2002.
- [53] M. Raoof and I. Kraincanic. Determination of wire recovery length in steel cables and its practical applications. *Computers and Structures*, 68:445–459, 1998.
- [54] F. Treyssède. Vibration analysis of horizontal self-weighted beams and cables with bending stiffness subjected to thermal loads. *Journal of Sound and Vibration*, 329:1536–1552, 2010.
- [55] F. Treyssède. Free linear vibrations of cables under thermal stress. *Journal of Sound and Vibration*, 327:1–8, 2009.
- [56] Marco Lepidi and Vincenzo Gattulli. Static and dynamic response of elastic suspended cables with thermal effects. *International Journal of Solids and Structures*, 49(9):1103 – 1116, 2012.
- [57] G. A. Costello. *Theory of Wire Rope*. Springer-Verlag, 1997.
- [58] M. Raoof. Free bending of structural strand. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(3):512–529, 1990.
- [59] M. Raoof. Axial fatigue life prediction of structural cables from first principles. *Proceedings of the institution of civil engineers*, 91:19–38, 1991.
- [60] K.-J. Hong, A. Der Kiureghian, and J. L. Sackman. Bending behavior of helically wrapped cables. *Journal of Engineering Mechanics*, 131(5):500–511, 2005.

- [61] Francesco Foti and Luca Martinelli. Mechanical modeling of metallic strands subjected to tension, torsion and bending. *International Journal of Solids and Structures*, 91:1 – 17, 2016.
- [62] A. Cardou and C. Jolicoeur. Mechanical models of helical strands. *Applied Mechanics Reviews*, 50(1):1, 1997.
- [63] Klaus Feyrer. *Wire Ropes*. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [64] K. O. Papailiou. *Bending of helically twisted cables under variable bending stiffness due to internal friction, tensile force and cable curvature*. PhD thesis, Eidgenössische Technische Hochschule Zurich, 1995.
- [65] L Xiang, HY Wang, Y Chen, YJ Guan, YL Wang, and LH Dai. Modeling of multi-strand wire ropes subjected to axial tension and torsion loads. *International Journal of Solids and Structures*, 58:233–246, 2015.
- [66] Zhihua Chen, Yujie Yu, Xiaodun Wang, Xiaofeng Wu, and Hongbo Liu. Experimental research on bending performance of structural cable. *Construction and Building Materials*, 96:279 – 288, 2015.
- [67] AS Nemov, AI Borovkov, and BA Schrefler. Finite element modeling of the iter superconducting cables mechanical behaviour using ls-dyna code. 2009.
- [68] T.D. Vu, D. Durville, and P. Davies. Finite element simulation of the mechanical behavior of synthetic braided ropes and validation on a tensile test. *International Journal of Solids and Structures*, 58:106 – 116, 2015.
- [69] Reza Ghoreishi. *Modélisation analytique et caractérisation expérimentale du comportement de câbles synthétiques*. PhD thesis, Ecole centrale de Nantes, 2005.
- [70] Seyed Reza Ghoreishi, Tanguy Messenger, Patrice Cartraud, and Peter Davies. Validity and limitations of linear analytical models for steel wire strands under axial loading, using a 3d fe model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49:1251–1261, 2007.
- [71] Dansong Zhang and Martin Ostoja-Starzewski. Finite element solutions to the bending stiffness of a single-layered helically wound cable with internal friction. *Journal of Applied Mechanics*, nov 2015.
- [72] H. M. Irvine. *Cable Structures*. Dover Publications, 1984.
- [73] Najib Bouaanani and Mohamed Ighouba. A novel scheme for large deflection analysis of suspended cables made of linear or nonlinear elastic materials. *Advances in Engineering Software*, 42(12):1009 – 1019, 2011.
- [74] M. Ahmadizadeh. Three-dimensional geometrically nonlinear analysis of slack cable structures. *Computers & Structures*, 128:160 – 169, 2013.
- [75] Shaorui Wang, Zhixiang Zhou, Yanmei Gao, and Yayi Huang. Analytical calculation method for the preliminary analysis of self-anchored suspension bridges. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015.

- [76] S. S. Antman. Dynamical problems for geometrically exact theories of nonlinearly viscoelastic rods. *Journal of Nonlinear Science*, 6:1–18, 1996.
- [77] Walter Lacarbonara. *Nonlinear Structural Mechanics*. Springer Science + Business Media, 2013.
- [78] J.W. Larsen and S.R.K. Nielsen. Non-linear stochastic response of a shallow cable. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41:327 – 344, 2006.
- [79] W. Lacarbonara, A. Paolone, and F. Vestroni. Nonlinear modal properties of non-shallow cables. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42:542 – 554, 2007.
- [80] L Wang and Y Zhao. Large amplitude motion mechanism and non-planar vibration character of stay cables subject to the support motions. *Journal of Sound and Vibration*, 327:121–133, 2009.
- [81] J. H. G. Macdonald, M. S. Dietz, S. A. Neild, A. Gonzalez-Buelga, A. J. Crewe, and D. J. Wagg. Generalised modal stability of inclined cables subjected to support excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 329:4515–4533, 2010.
- [82] Hervé Clement and Christian Crémona. Étude mathématique du phénomène d’excitation paramétrique appliqué aux haubans de pont. *études et recherches des laboratoires des ponts et chaussées*, OA18, 1996.
- [83] O. Boujard, S. Pernot, A. Berlioz, and C.-H. Lamarque. Phénomène de résonance paramétrique nonlinéaire dans un hauban du pont d’iroise: Modélisation et expérimentation. In *18^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 2007.
- [84] Huu-Tai Thai and Seung-Eock Kim. Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47:237–246, 2011.
- [85] A. Mehrabi and H. Tabatabai. Unified finite difference formulation for free vibration of cables. *Journal of Structural Engineering*, 124:1313–1322, 1998.
- [86] C.G. Koh and Y. Rong. Dynamic analysis of large displacement cable motion with experimental verification. *Journal of Sound and Vibration*, 272:187–206, 2004.
- [87] Y. Q. Ni, J. M. Ko, and G. Zheng. Dynamic analysis of large-diameter sagged cables taking into account flexural rigidity. *Journal of Sound and Vibration*, 257(2):301–319, 2002.
- [88] Angelo Luongo, Daniele Zulli, and Giuseppe Piccardo. On the effect of twist angle on nonlinear galloping of suspended cables. *Computers and Structures*, 87:1003–1014, 2009.
- [89] Q. Wu, K. Takahashi, and S. Nakamura. Non-linear vibration of cables considering loosening. *Journal of Sound and Vibration*, 261:385–402, 2003.
- [90] W. Lacarbonara and A. Pacitti. Nonlinear modeling of cable with flexural stiffness. *Mathematical Problems in Engineering*, 2008.

- [91] E. Reissner. On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory. *Studies in Applied Mathematics*, LII:87–95, 1973.
- [92] D. Q. Cao and R. W. Tucker. Nonlinear dynamics of elastic rods using the cosserat theory: Modelling and simulation. *International Journal of Solids Structures*, 45:460–477, 2008.
- [93] J.H. Argyris, P.C. Dunne, and D.W. Scharpf. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 14(3):401 – 451, 1978.
- [94] J.H. Argyris, O. Hilpert, G.A. Malejannakis, and D.W. Scharpf. On the geometrical stiffness of a beam in spacea consistent v.w. approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20(1):105 – 131, 1979.
- [95] J Argyris. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(13):85 – 155, 1982.
- [96] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions - a geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:125–161, 1988.
- [97] M. Iura and S. N. Atluri. Dynamic analysis of finitely streched and rotated three-dimensional space-curved beams. *Computers & Structures*, 29(5):875–889, 1988.
- [98] M. Iura and S. N. Atluri. On a consistent theory, and variational formulation of finitely streched and rotated 3-d space-curved beams. *Computational Mechanics*, 4:73–88, 1989.
- [99] A. Ibrahimbegović. On finite element implementation of geometrically nonlinear reissner’s beam theory: three-dimensional curved beam elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122:11–26, 1995.
- [100] Adnan Ibrahimbegovic. On the choice of finite rotation parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149(14):49 – 71, 1997.
- [101] Gordan Jelenić and Miran Saje. A kinematically exact space finite strain beam modelfinite element formulation by generalized virtual work principle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 120(1):131–161, 1995.
- [102] G. Jelenić and M. A. Crisfield. Interpolation of rotational variables in nonlinear dynamics of 3d beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(7):1193–1222, 1998.
- [103] G. Jelenić and M.A. Crisfield. Geometrically exact 3d beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171:141–171, 1999.
- [104] J. C. Simo, N. Tarnow, and M. Doblare. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: Exact energy and momentum conserving algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(9):1431–1473, 1995.

-
- [105] M. Crisfield and G. Jelenić. Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 455:1125–1147, 1999.
 - [106] Adnan Ibrahimbegovic and Robert L. Taylor. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(45):5159 – 5176, 2002.
 - [107] S. S. Antman and T. I. Seidman. The parabolic-hyperbolic system governing the spatial motion of nonlinearly viscoelastic rods. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 175:85–150, 2005.
 - [108] R. K. Kapania and J. Li. On a geometrically exact curved/twisted beam theory under rigid cross-section assumption. *Computational Mechanics*, 30:428–443, 2003.
 - [109] P. M. Pimenta and E. M. B. Campello. A fully nonlinear multi-parameter rod model incorporating general cross-sectional in-planes and out-of-plane warping. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1:119–140, 2003.
 - [110] F. Auricchio, P. Carotenuto, and A. Reali. On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 45:4766–4781, 2008.
 - [111] P. Jung, S. Leyendecker, J. Linn, and M. Ortiz. A discrete mechanics approach to the cosserat rod theory - part 1: static equilibria. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85:31–60, 2011.
 - [112] EDF R&D, editor. *Code_Aster, Code général pour l’étude du comportement mécanique des structures diffusé sous licence GNU GPL*, <http://www.code-aster.org>.
 - [113] F. Boyer, G De Nayer, A. Leroyer, and M. Visonneau. Geometrically exact kirchhoff beam theory: Application to cable dynamics. *Journal of computational and nonlinear dynamics*, 6(4):041004, 2011.
 - [114] F. Boyer, S. Ali, and M. Porez. Macrocontinuous dynamics for hyperredundant robots: Application to kinematic locomotion bioinspired by elongated body animals. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, 28(2):303–317, APRIL 2012.
 - [115] H. Lang and M. Arnold. Numerical aspects in the dynamic simulation of geometrically exact rods. *Applied Numerical Mathematics*, 62:1411–1427, 2012.
 - [116] J. Linn, H. Lang, and A. Tuganov. Geometrically exact cosserat rods with kelvin-voigt type viscous damping. *Mechanical Sciences*, 4:79–96, 2013.
 - [117] Olivier A. Bauchau and Lorenzo Trainelli. The vectorial parameterization of rotation. *Nonlinear Dynamics*, 32(1):71–92, 2003.
 - [118] J. Stuelpnagel. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM*, 6(4):422–430, 1964.
 - [119] Sebastian Grassia. Practical parametrization of rotations using the exponential map. *Journal of Graphics Tools*, 3.3, 1998.

- [120] Ignacio Romero. The interpolation of rotations and its application to finite element models of geometrically exact rods. *Computational Mechanics*, 34:121–133, 2004.
- [121] Thanh Nam Le. *Nonlinear dynamics of flexible structures using corotational beam elements*. PhD thesis, INSA Rennes, 2013.
- [122] Remo Magalhes De Souza and Remo Magalhes De Souza. *Force-based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames*. PhD thesis, 2000.
- [123] G. Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces, Première Partie*. Gauthier-Villars, 1914.
- [124] Enrico Da Lozzo. Geometrically exact three-dimensional beam theory: modeling and fem implementation for statics and dynamics analysis. Master’s thesis, Università degli Studi di Pavia, 2010.
- [125] J.E. Marsden and T.J.R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2012.
- [126] F. A. McRobie and J. Lasenby. Simovu quoc rods using clifford algebra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(4):377–398, 1999.
- [127] S. S. Antman and M. Lanza de Cristoforis. Peculiar instabilities due to the clamping of shearable rods. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32(1):31–54, 1997.
- [128] C. A. Prato and M. A. Ceballos. Dynamic bending stresses near the ends of parallel-bundle stay cables. *Structural Engineering International*, 1:64–68, 2003.
- [129] A. Caballero and M. Poser. Local bending stresses in stay cables with an elastic guide. *Structural Engineering International*, 20(3):254–259, 2010.
- [130] P. Nardinocchi, L. Terisi, and A. Tiero. Constitutive identification of affine rods. *Mechanics Research Communications*, 30:61–68, 2003.
- [131] O.M. O’Reilly. On constitutive relations for elastic rods. *International Journal of Solids Structures*, 35(11):1009–1024, 1998.
- [132] Louis Grelot. *Cours de ponts métalliques*. 1946.
- [133] Lucas Adélaïde. *Méthode des éléments finis espace-temps : adaptation du maillage en cours d’évolution du contact*. PhD thesis, Université de Montpellier II, December 2001.
- [134] J.H. Argyris and D.W. Scharpf. Finite elements in time and space. *Nuclear Engineering and Design*, 10(4):456 – 464, 1969.
- [135] Thomas J.R. Hughes and Gregory M. Hulbert. Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(3):339 – 363, 1988.
- [136] Jonathan Baptista. Space-time finite elements methods in elastodynamics. Master’s thesis, SUPMECA / Ecole Centrale de Paris, 2011.

- [137] Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells, et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012.
- [138] J.C. Simo and R.L. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48(1):101 – 118, 1985.
- [139] Jihuan He. Equivalent theorem of hellinger-reissner and hu-washizu variational principles. *Journal of Shanghai University (English Edition)*, 1(1):36–41, jun 1997.
- [140] Pierre Latteur. *Calculer une structure, de la théorie à l'exemple*. Academia Bruylant, 2006.
- [141] Couro Kane. *Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems*. PhD thesis, caltech, 1999.
- [142] Jacques Hadamard. Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 13:49–52, 1902.
- [143] H. D. Bui. *Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction*. Éditions Eyrolles, 1 edition, 6 1994.
- [144] Michel Kern. Problèmes inverses.
- [145] J. Barzilai and J. M. Borwein. Two-point step size gradient methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 8(1):141–148, 1988.
- [146] KO Papailiou. On the bending stiffness of transmission line conductors. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 12(4):1576–1588, 1997.
- [147] Jean-Philippe Houle-Paradis. *Modélisation de la flexion libre d'un câble multicouche tenant compte de l'élasticité des contacts*. Université de Sherbrooke, 2011.
- [148] Klaus-Jürgen Bathe and Saïd Bolourchi. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(7):961–986, 1979.
- [149] D. A. Da Deppo and R. Schmidt. Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load. *Journal of Applied Mechanics*, 42:894, 1975.