



**HAL**  
open science

# Modélisation et analyse structurelle du fonctionnement dynamique des systèmes électriques

Mohamed Belhocine

► **To cite this version:**

Mohamed Belhocine. Modélisation et analyse structurelle du fonctionnement dynamique des systèmes électriques. Automatique. Université Paris Saclay (COmUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLN047 . tel-01537113

**HAL Id: tel-01537113**

**<https://theses.hal.science/tel-01537113>**

Submitted on 12 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLN047

THESE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY  
PREPAREE A  
“L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN (ECOLE NORMALE  
SUPERIEURE PARIS-SACLAY)”

ECOLE DOCTORALE N° 580  
Sciences et Technologies de L'information et de la Communication (STIC)

Spécialité de doctorat : Automatique

Par

**Mr Mohamed BELHOCINE**

Modélisation et analyse structurelle du fonctionnement dynamique des systèmes  
électriques

**Thèse présentée et soutenue à « L'ENS Cachan », le «25/11/2016 » :**

**Composition du Jury :**

Mr, MOUNIER, Hugues  
Mr, THOMAS, Jean-Luc  
Mr, BARBOT, Jean-Pierre  
Mr, QUADRAT, Alban  
Mr, MARINESCU, Bogdan  
Mr, HEYBERGER, Jean-Baptiste

Professeur Laboratoire L2S Paris-Saclay  
Professeur CNAM Paris  
Professeur ENSEA Cergy  
Directeur de Recherche Inria-LILLE  
Professeur Ecole Centrale de Nantes  
Ingénieur RTE

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Directeur de thèse  
Invité







## *Remerciements*

Les travaux présentés dans cette thèse ont été réalisés au sein du Département Expertise Systèmes de RTE (Réseau de Transport d'Electricité) dans le cadre d'un contrat CIFRE faisant intervenir le laboratoire SATIE de l'ENS de Cachan.

Au début, je tiens à remercier mon directeur de thèse monsieur Bogdan MARINESCU (actuellement professeur à l'Ecole Centrale de Nantes) d'avoir dirigé et encadré cette thèse. Je remercie également le professeur Hugues MOUNIER du laboratoire L2S d'avoir accepté de participer à la supervision de cette thèse et de présider le jury. Mes remerciements s'adressent également aux deux professeurs monsieur Jean-Pierre BARBOT de l'ENSEA de Cergy et monsieur Jean-Luc THOMAS du CNAM de Paris d'avoir accepté de rapporter cette thèse avec une attention et un intérêt remarquables. Je ne manque pas aussi de remercier monsieur Alban QUADRAT directeur de recherches à l'Inria de Lille et monsieur Jean-Baptiste HYBERGER chef du pôle INT chez RTE pour leur participation au jury de cette thèse ainsi que pour leurs pertinentes remarques. Des remerciements particuliers s'adressent à monsieur Patrick PANCIATICI conseiller scientifique chez RTE pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse depuis son lancement ainsi qu'à tout le personnel du département DES de RTE.

Dans ces remerciements, je n'oublie pas aussi mes amis du laboratoire IRCCyN de l'Ecole Centrale de Nantes pour leur aide et leur soutien qui m'ont été indispensables. Je leur dis encore une fois un grand merci.

Je termine avec des remerciements d'un genre très particulier qui s'adressent à ma famille qui a toujours été à mes côtés surtout dans les moments difficiles. *Si je ferais couler tout l'encre du monde je ne saurais remercier ma mère comme il se doit.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Contexte général et motivations . . . . .	7
1.2	Problématiques . . . . .	9
1.3	Démarche et contributions . . . . .	16
1.4	Organisation du manuscrit . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Liens entre les modèles utilisés pour une ligne électrique : une analyse systémique</b>	<b>18</b>
2.1	Introduction . . . . .	18
2.2	Présentation et classement des modèles des lignes électriques . . . . .	19
2.2.1	Modèles à paramètres distribués . . . . .	21
2.2.2	Modèle à retard . . . . .	24
2.2.3	Modèles de dimension finie . . . . .	25
2.2.4	Tableau d'orientation . . . . .	27
2.3	Comparaison classique : une analyse des trajectoires . . . . .	28
2.4	Un cadre systémique . . . . .	31
2.4.1	Structures dynamiques des modèles des lignes . . . . .	31
2.5	Une comparaison structurelle . . . . .	43
2.5.1	Un point de vue systémique . . . . .	43
2.5.2	Comportements . . . . .	45
2.5.3	Cas des lignes courtes . . . . .	47
2.6	Conclusion . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Réduction des modèles dynamiques des systèmes électriques interconnectés</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Motivations et enjeux liés à la réduction des systèmes électriques . . . . .	50
3.2.1	Un exemple illustratif . . . . .	50
3.2.2	L'intérêt de la réduction . . . . .	52
3.2.3	Les principaux enjeux . . . . .	52
3.3	Formulation du problème et stratégies courantes . . . . .	55
3.3.1	Formulation pour la réduction . . . . .	55

---

3.3.2	Positionnement par rapport à des méthodes courantes . . . . .	57
3.4	Nouvelle méthodologie : une approche mixte . . . . .	69
3.4.1	Cadre théorique : outils et définitions . . . . .	70
3.4.2	Fondements de la méthode proposée . . . . .	74
3.4.3	Formalisation et développement de la nouvelle approche . . . . .	76
3.4.4	Algorithme récapitulatif . . . . .	82
3.4.5	Réduction avec préservation de la structure physique . . . . .	83
3.4.6	Algorithme général . . . . .	87
3.5	Validation : exemples et applications industrielles . . . . .	87
3.5.1	Exemple 1 : Cas d'une chute dans le spectre de Hankel . . . . .	89
3.5.2	Exemple 2 : Cas d'un système multivariables . . . . .	92
3.5.3	Applications industrielles . . . . .	96
3.6	Conclusion . . . . .	111
<b>4</b>	<b>Nombre et choix des entrées : une approche algébrique</b>	<b>113</b>
4.1	Introduction . . . . .	113
4.2	Position du problème et exemples de motivation . . . . .	114
4.2.1	Problème général . . . . .	114
4.2.2	Exemples de motivation . . . . .	115
4.3	Cadre général : une approche algébrique . . . . .	118
4.3.1	Préliminaires mathématiques . . . . .	118
4.3.2	Approche système . . . . .	123
4.3.3	Approche comportementale . . . . .	124
4.3.4	Connexion entre l'approche système et l'approche comportementale	125
4.4	Notion d'entrées : définitions formelles . . . . .	127
4.4.1	Point de vue système . . . . .	127
4.4.2	Point de vue comportement . . . . .	127
4.5	Entrées et autonomie : vers un lien avec le contrôle frontière . . . . .	130
4.5.1	Degré d'autonomie . . . . .	131
4.5.2	Comportements finis et infinis . . . . .	135
4.5.3	Paramétrisation de l'espace des solutions . . . . .	137
4.6	Nouvelles réflexions : quelques pistes proposées . . . . .	140
4.6.1	Perspectives multidimensionnelles . . . . .	142
4.7	Conclusion . . . . .	145
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>146</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>
	<b>A Production scientifique</b>	<b>156</b>
	<b>B</b>	<b>157</b>
B.1	Modèle à paramètres répartis de la ligne . . . . .	157
B.1.1	Expression explicite des trajectoires . . . . .	165
B.1.2	Fonction de transfert . . . . .	166

---

---

<b>C</b>	<b>168</b>
C.1 Preuves et Démonstrations . . . . .	168
C.1.1 Preuve de la Définition 3.1 . . . . .	168
C.1.2 Démonstration du Lemme 3.1 . . . . .	169
C.1.3 Démonstration du Lemme 3.2 . . . . .	169
C.1.4 Démonstration du Théorème 3.1 . . . . .	169
C.1.5 Démonstration du Lemme 3.3 . . . . .	170
C.1.6 Démonstration du Théorème 3.2 . . . . .	171
C.1.7 Preuve de l’expression des résidus en fonction des participations . .	172
<b>D</b>	<b>173</b>
D.1 Modèles utilisés dans les benchmarks . . . . .	173
D.1.1 Transformations entre les repères . . . . .	173
D.1.2 Modèle du générateur . . . . .	174
D.1.3 Ligne de transmission . . . . .	175
D.1.4 Régleur en charge . . . . .	176
D.1.5 Charge . . . . .	176
D.1.6 Liaison HVDC . . . . .	177
D.1.7 Valeurs numériques des paramètres . . . . .	179

# Table des figures

1.1	Modèle en $\pi$ de la ligne . . . . .	10
1.2	Structure physique d'une ligne de transmission électrique . . . . .	11
1.3	Un simple système de transmission . . . . .	11
1.4	Valeurs singulières de Hankel du système de transmission . . . . .	12
2.1	Structure en quadripôle de la ligne . . . . .	23
2.2	Représentation du modèle à retard de la ligne . . . . .	24
2.3	Structure en $\pi$ de la ligne . . . . .	26
2.4	Structure en série de $\pi$ . . . . .	26
2.5	Tableau d'orientation dans le choix du modèle des lignes électriques . . . . .	27
2.6	Tensions harmoniques à l'extrémité de la ligne . . . . .	30
2.7	Réponse d'une ligne ouverte à un échelon de tension . . . . .	30
2.8	Ligne ouverte : comportement fréquentiel des modèle $\pi$ et complet . . . . .	45
2.9	Réponse à un échelon du modèle en $\pi$ et la troncature modale à l'ordre 1 . . . . .	46
2.10	Réponse harmonique du modèle en $\pi$ et la troncature modale à l'ordre 1 . . . . .	47
3.1	Un simple système de transmission . . . . .	51
3.2	Réponse fréquentielle de la tension de sortie . . . . .	53
3.3	Structure entrée-sortie d'un système interconnecté . . . . .	54
3.4	Schéma d'une approche par hypothèses . . . . .	57
3.5	Système de transmission avec modèle en $\pi$ . . . . .	58
3.6	Réponses indicielles du système de transmission . . . . .	59
3.7	Valeurs singulières de Hankel . . . . .	68
3.8	Tracé de Bode du modèle issu de la troncature équilibrée et du modèle DP . . . . .	69
3.9	Comparaison fréquentielle . . . . .	85
3.10	Algorithme général. . . . .	88
3.11	Valeurs singulières de Hankel. . . . .	90
3.12	Réponses indicielles du modèle complet d'ordre 301, du modèle réduit par la troncature équilibrée et du nouveau modèle réduit. . . . .	90
3.13	Variations par rapport à $ \Gamma_b $ . . . . .	91
3.14	Réponses impulsionnelles des modèles original et réduit pour différent ordres . . . . .	93
3.15	Variation de $\mathcal{C}_r$ et de $\mathcal{J}_r = \mu$ en fonction de l'ordre $ \Lambda $ . . . . .	94
3.16	Pôles et valeurs singulières . . . . .	94
3.17	Comparaison des réponses indicielles : modèle complet et le nouveau modèle réduit. . . . .	95

---

3.18	Comparaison fréquentielle du modèle complet et du nouveau modèle réduit.	96
3.19	Comparaison des réponses indicielles : nouveau modèle réduit, l'original et celui issu de la troncature modale. . . . .	97
3.20	Comparaison fréquentielle : nouveau modèle réduit, l'original et celui issu de la troncature modale (premier transfert, i.e., de $u_1$ vers $y_1$ ) . . . . .	98
3.21	Comparaison temporelle : modèle original et son nouveau modèle réduit. . . . .	99
3.22	Réponse indicielle de la troncature modale classique d'ordre 172. . . . .	99
3.23	Comparaison fréquentielle : modèle original et son nouveau modèle réduit.	100
3.24	Premier benchmark. . . . .	100
3.25	Écroulement de la tension de charge . . . . .	102
3.26	Second benchmark. . . . .	103
3.27	Réponse de $V_{dc}$ à un échelon sur $V_{dc_{ref}}$ . . . . .	105
3.28	Réponse de $U_{ac}$ à un échelon sur $V_{dc_{ref}}$ . . . . .	105
3.29	Réponse indicielle du transfert $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$ en utilisant les modèles $\pi$ et DP de la ligne . . . . .	106
3.30	Réponse fréquentielle du transfert $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$ en utilisant les modèles $\pi$ et DP de la ligne . . . . .	106
3.31	Réponse indicielle du transfert $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$ : modèle complet et nouveau modèle réduit . . . . .	109
3.32	Réponse fréquentielle du transfert $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$ : modèle complet et nouveau modèle réduit . . . . .	110
3.33	Réponse de la tension $U_{ac}$ à un échelon sur $V_{dc_{ref}}$ . . . . .	110
3.34	Réponse de la tension $V_{dc}$ à un échelon sur $V_{dc_{ref}}$ . . . . .	111
4.1	Système masse-ressort . . . . .	130
4.2	Droite réelle . . . . .	134
4.3	Domaine rectangulaire associé à l'équation de la chaleur en 2 dimensions . . . . .	144
D.1	Angles $\gamma$ , $\delta$ et $\omega_0 t$ . . . . .	174
D.2	Schéma d'une phase d'un transformateur à multi-prises. . . . .	176
D.3	Structure d'une liaison VSC-HVDC. . . . .	177
D.4	Structure de la dqPLL. . . . .	179
D.5	Schéma de contrôle de la liaison HVDC. . . . .	180

# Liste des tableaux

1.1	Pôles, résidus et normes infinies des fractions . . . . .	13
2.1	Domaines de tension selon la norme NF C18-510 . . . . .	20
3.1	Valeurs exactes et approchées des pôles et résidus . . . . .	63
3.2	Pôles et norme $H_\infty$ de chaque fraction partielle $\ \cdot\ _\infty = \frac{ r_k }{ Re(\lambda_k) }$ . . . . .	64
3.3	Nombre de variables d'état et de modes importants pour chaque transfert .	107
3.4	Nombre de modes pour chacun des transferts . . . . .	108
3.5	Nombre de modes autour de chaque fréquence $F_i$ . . . . .	109
D.1	Valeurs pour le benchmark 1 . . . . .	181
D.2	Valeurs pour le benchmark 2 . . . . .	181

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte général et motivations

La particularité des systèmes électriques interconnectés réside dans le fait qu'ils sont le siège d'une multitude de problématiques aussi bien pratiques que théoriques. Parmi elles, celles liées à la modélisation et la mise en œuvre des modèles dynamiques à des fins d'analyse, de simulation ou de commande. Ce à quoi sont confrontés les principaux utilisateurs des modèles dynamiques des systèmes électriques tels que les Gestionnaires du Réseau de Transport (GRTs) d'électricité dont le français RTE<sup>1</sup>. En Europe, par exemple, l'interconnexion entre les systèmes électriques des différents pays conduit à un système dynamique, d'une dizaine de milliers de variables d'état. Ce système est géré localement par chaque GRT en coordination avec les autres acteurs européens afin d'assurer au client un accès à une alimentation électrique de qualité. Néanmoins, pour accomplir une telle tâche, les GRTs procèdent à des techniques de simplification en phase de modélisation car il est quasiment impossible de simuler et d'analyser le modèle détaillé du système électrique résultant de toutes les interconnexions. Ainsi, diverses questions se posent, surtout sur la viabilité des différents niveaux d'approximation des modèles utilisés en simulation et l'aptitude de ces modèles à reproduire les phénomènes générés par toutes les interconnexions. A fortiori dans le contexte moderne où l'introduction de nouveaux éléments basés, par exemple, sur l'électronique de puissance comme les FACTS (Flexible AC Transmission Systems) et les liaisons à courant continu (HVDC) complexifie d'avantage la modélisation. Tout cela est bien évidemment accentué par le type de modélisation de certains composants électriques tels que les lignes de transmission qui sont modélisées par des Équations aux Dérivées Partielles (EDPs). Par conséquent, le système électrique dans sa globalité devient difficile à analyser et à simuler même dans les cas des systèmes les plus simples.

Dans ce contexte, l'entreprise RTE a exprimé, en proposant le sujet de cette thèse, ses différents besoins en matière de clarification, d'amélioration et d'évolution des techniques actuelles de modélisation ou de simplification. Le but est d'enrichir les connaissances et acquérir une expertise notable sur les techniques standards de simplification des modèles

---

1. Réseau de Transport d'Electricité : une filiale du groupe EDF, [www.rte-france.com](http://www.rte-france.com)

dynamiques. Ensuite, monter en compétences à travers la construction d'un savoir-faire *méthodologique* qui soit plus général, plus précis et s'adapte assez facilement à l'évolution technologique des systèmes de transport de l'électricité. Cela favorise la capacité d'extension et d'adaptation des approches actuelles aux nouveaux cas d'applications comme les réseaux de distribution de l'électricité. Toutes ces attentes ont été motivées par la rigidité des techniques de simplification, employées à ce jour, et la nécessité de s'affranchir de la traditionnelle méthode essai-erreur pour la validation des simplifications. En effet, il existe, à ce jour, différentes techniques de simplification qui offrent des classes de modèles simplifiés qui s'adaptent, principalement, aux problématiques usuelles des réseaux de transport de l'électricité, toutefois les liens entre les degrés d'approximation de ces modèles et leur validité, au-delà des applications usuelles, sont peu approfondis. A titre d'exemple, pour les lignes de transmission, il existe principalement deux types de modèles actuellement implémentés dans deux logiciels utilisés par RTE. Un premier modèle, appelé modèle en  $\pi$ , qui est utilisé en grande partie dans le logiciel Eurostag [49] pour diverses applications dont la synthèse des régulateurs et l'étude de certains phénomènes électromécaniques de basses fréquences comme les oscillations entre les arbres mécaniques des machines distantes (interzones). Un deuxième modèle, plus détaillé, dit *à paramètres distribués* est utilisé dans le logiciel EMTP (ElectroMagnetic Transients Program) [24] pour reproduire et analyser les phénomènes électromagnétiques ainsi que les dynamiques rapides causées, par exemple, par des commutations dans le système. Actuellement, l'utilisation de chacun de ces outils dépend de l'application et des phénomènes que l'on souhaite capter à travers le modèle utilisé pour modéliser, entre autres, la ligne de transmission. Toutefois, le choix d'un modèle, ou d'un logiciel est généralement guidé par une forte connaissance des mécanismes mis en jeu dans l'application traitée, ou par des validations expérimentales a posteriori. De plus, les explications connues sur les raisons de l'incapacité du modèle en  $\pi$  à capter tous les phénomènes, captés par le modèle à paramètres distribués, ne sont pas suffisantes pour établir un lien direct et clair entre ces deux modèles dynamiques.

C'est pourquoi RTE a souhaité, entre autres, se projeter vers des techniques permettant l'ajustement du modèle de la ligne aux phénomènes que l'on souhaite analyser ou reproduire par des simulations numériques. Ceci n'est pas une finalité en soi, mais fait partie d'un processus global par lequel on cherche à ajuster aussi les modèles d'autres composants du système électrique tels que les transformateurs ou les liaisons HVDC. Cela rentre dans le cadre de la volonté mentionnée précédemment. Concernant le volet applicatif, ce savoir-faire recherché, en matière de simplification des modèles dynamiques, s'inscrit dans la feuille de route établie par RTE pour le développement de nouveaux outils de simulation et de gestion des grands systèmes électriques modernes (Smart Grids). Dans ce cadre, la modélisation et la simulation numérique sont au cœur des projets récents comme iTESLA (Innovative Tools for Electrical System Security within Large Areas). Cet effort montre l'intérêt de la simplification des modèles dynamiques pour accélérer les simulations, d'une part, et améliorer, d'autre part, la qualité des résultats à travers une modélisation appropriée.

Parmi tous les objectifs discutés précédemment, la priorité, dans cette thèse, est donnée à la simplification des modèles pour une utilisation principale à la simulation numérique et l'analyse. Pour cause, ces deux applications constituent, entre autres, le cœur du métier des unités de recherche et développement R&D des GRTs. En effet, vu le degré de complexité des modèles dynamiques des systèmes électriques interconnectés, il est indispensable de procéder à des simulations numériques afin d'étudier le comportement du système et d'identifier, par exemple, les objectifs à atteindre par les différents moyens d'intervention sur le système. A titre d'exemple, la plupart des actions menées sur le réseau, en cas de perturbations, sont planifiées à l'aide des scénarios simulés et étudiés à l'avance. Quant à l'analyse, son intérêt principal réside dans la compréhension des différents mécanismes, mis en jeu dans le système, qui conduisent aux résultats observés en simulation. L'analyse modale, en particulier, constitue l'une des techniques d'analyse les plus importantes car elle permet l'étude et la commande de la plupart des phénomènes liés au transport de l'énergie électrique qui peuvent être détectés par une analyse linéaire. En effet, les oscillations interzones (e.g., [72]), les oscillations hypo-synchrones, les résonances sous-synchrones (e.g., [59]) sont quelques exemples de phénomènes qui sont étudiés à l'aide de l'analyse modale. D'où la nécessité de pouvoir représenter les modèles simplifiés par une forme d'état afin de pouvoir analyser ce type de phénomènes. Cet aspect, qui est pris en considération dans cette thèse, en plus de la reproduction des phénomènes qui présentent un intérêt dans le système, s'ajoute aux objectifs liés à la méthodologie de simplification envisagée.

Enfin, dans la perspective d'offrir un maximum de flexibilité à la méthodologie de simplification envisagée, on s'est intéressé également dans cette thèse à la proposition d'un processus *d'hierarchisation* par lequel on commence d'abord par sélectionner les entrées du système. Ensuite, procéder à sa simplification afin de générer un modèle de taille réduite. Cela minimiserait, par exemple, le risque d'un mauvais choix des variables de commande du système ou une mauvaise évaluation de leur nombre. A fortiori dans le contexte de la modernisation, à court et à long terme, des équipements et des outils de gestion des systèmes de transport de l'électricité.

## 1.2 Problématiques

Clairement, les différents objectifs fixés dans cette thèse ont pour finalité une amélioration et une meilleure gestion des techniques de modélisation et de simulation des systèmes de transport d'électricité. Néanmoins, plusieurs difficultés d'ordre méthodologique, théorique et technique y sont associées. En premier lieu, on peut mentionner la complexité de certains modèles dynamiques comme ceux des lignes de transmission qui ne sont simplifiés usuellement que par des approches basées sur des hypothèses simplificatrices. Ce type d'approches, a donné naissance à plusieurs modèles simplifiés de la ligne (voir, par exemple, [50], [84], [24]), mais ne donnent pas toujours satisfaction. La raison principale à cela est que la structure dynamique du système, dont le modèle complexe fait partie, n'est pas prise en compte lors de la phase de simplification. Ce qui a pour effet d'accroître

le risque d'une mauvaise reproduction du comportement du système dans son ensemble. Pour pallier à cela, les approches structurales dites de *réduction de modèles* sont une bonne alternative, mais il n'est pas évident de trouver, parmi les techniques standard, celles qui répondent positivement aux objectifs de la simplification tels qu'ils sont fixés dans cette thèse. Pour cause, les aspects pratiques et théoriques sont rarement pris en compte ensemble afin de faire face à des enjeux comme l'ordre élevé du modèle réduit et l'usage auquel il est destiné. Cela est dû, en grande partie, au fait que les techniques utilisées généralement pour évaluer l'importance des dynamiques d'un modèle ne conviennent pas à tous les systèmes de transmission. A cela s'ajoute aussi des problématiques d'ordre théoriques qui concernent principalement la question du choix des entrées. En effet, si les questions posées peuvent trouver assez rapidement des réponses lorsque la structure physique d'un composant du système est bien connue, elles restent toutefois compliquées à résoudre dans une vision globale. Plus particulièrement, lorsque le système comporte des éléments modélisés par des équations aux dérivées partielles comme les lignes de transmission. Ci-dessous, trois exemples sont présentés pour illustrer l'ensemble des problématiques soulevées dans cette thèse.

**Exemple 1.1.** Le premier exemple met en évidence l'approximation d'un modèle dynamique à paramètres distribués d'une ligne de transmission par un modèle en  $\pi$  dont la structure est montrée en Fig. 1.1.

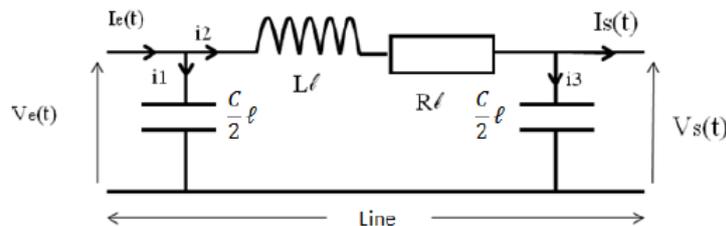


FIGURE 1.1 – Modèle en  $\pi$  de la ligne

Il s'agit d'une approximation qui perdure depuis longtemps dont la validité a toujours été justifiée par une comparaison de trajectoires (voir, e.g., [39]). Plus précisément, lorsque le modèle complet de la ligne, représenté ici par la structure de la Fig. 1.2, est excité par une tension à l'extrémité  $x = 0$ , la réponse qui en résulte à l'autre extrémité  $x = \ell$  est reproduite, sous certaines conditions, par le modèle en  $\pi$ . Les principales conditions sont une longueur modérée de la ligne (jusqu'à 250) et un signal sinusoïdal en entrée de fréquence  $f$  tel que  $2\pi f\sqrt{LC}\ell \ll 1$ . Une telle approximation est généralement utilisée lorsque les phénomènes de propagation ont un effet négligeable pour reproduire, par exemple, avec le reste du système les phénomènes électromécaniques qui sont relativement lents comme les oscillations interzones (voir, e.g., [72]). En revanche, pour capter des phénomènes électromagnétiques, qui sont plus rapides, une approximation plus détaillée comme celle présentée dans [24] doit être utilisée.

En outre, l'approximation par le modèle en  $\pi$ , tout comme l'approximation citée précédemment, est basée sur des considérations physiques et une connaissance assez forte du mode de fonctionnement des lignes électriques. Par conséquent, son adéquation

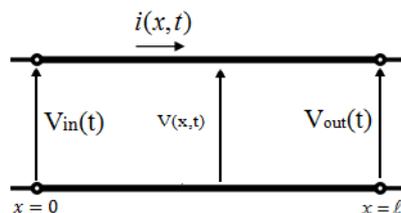


FIGURE 1.2 – Structure physique d’une ligne de transmission électrique

à reproduire un phénomène donné est généralement validée *a posteriori* par des tests expérimentaux. De ce fait, pour être en mesure de pouvoir lier le modèle utilisé aux phénomènes reproduits, la question, d’un point de vue *système*, se pose au delà d’une comparaison des trajectoires qui ne permet pas de conclure sur la nature du lien qui existe entre les structures dynamiques de ces systèmes.

C’est pourquoi, la priorité dans cette thèse a été d’abord donnée à la clarification et la compréhension de ce lien structurel afin d’être capable de bien maîtriser l’approximation et de pouvoir l’étendre ensuite à une échelle plus grande comme c’est fait dans le Chapitre 3. Le résultat issu des investigations met en évidence un lien de *troncature* entre les deux modèles comme il est résumé en Section 1.3 et expliqué en détails dans le Chapitre 2.

**Exemple 1.2.** Comme mentionné précédemment, l’une des problématiques les plus importantes abordée dans cette thèse est l’approximation des modèles dynamiques des systèmes électriques interconnectés. Il s’agit de réduire la complexité des modèles utilisés pour la simulation et l’analyse en réduisant, principalement, leur nombre d’équations et de variables de manière à reproduire assez fidèlement le comportement dynamique du système original. Pour cela, il faut avant tout évaluer l’importance de chaque dynamique dans le système afin de sélectionner que les plus pertinentes et les garder ensuite dans le modèle réduit. A cet effet, chaque méthode de réduction dispose d’un indicateur ou indice qui permet de mesurer *quantitativement* l’importance d’une dynamique par rapport à une autre. Deux classes de systèmes sont présentés ci-dessous avec comme indices de choix des dynamiques : l’énergie des variables d’état et l’amplitude maximale entrée-sortie des dynamiques modales.

- 1) **Première classe (faible décroissance des indices énergétiques)** : prenons l’exemple du système de transmission représenté par la Fig. 1.3.

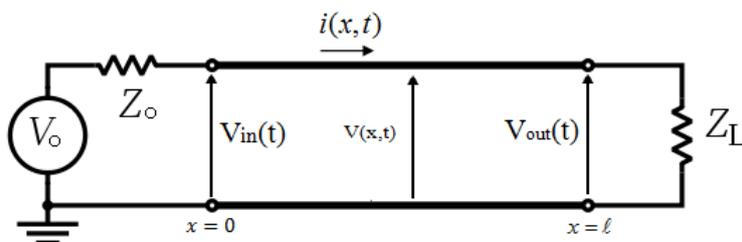


FIGURE 1.3 – Un simple système de transmission

Comme il est indiqué en Section 3.2.1, son modèle dynamique est de dimension

infinie (dû au modèle (1.4) de la ligne) qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - Ri(x,t) \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \\ v(x,t)|_{x=0} = V_0(t) - Z_0 i(x,t)|_{x=0} \\ v(x,t)|_{x=\ell} = Zi(x,t)|_{x=\ell} \end{cases} \quad (1.1)$$

Le système (1.1) a un nombre infini de variables d'état et peut ainsi s'écrire sous la forme équilibrée ci-dessous (voir, e.g., [33], [21])

$$\begin{cases} \dot{X}_\infty(t) = \mathbb{A}_\infty X_\infty(t) + \mathbb{B}_\infty u(t) \\ y(t) = \mathbb{C}_\infty X_\infty(t) \end{cases}, \quad (1.2)$$

où les matrices  $\mathbb{A}_\infty, \mathbb{B}_\infty$  et  $\mathbb{C}_\infty$  peuvent être approximés par  $\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n$ . Les coefficients de ces dernières sont calculés, par exemple, à l'aide d'une intégration numérique basée sur une approximation de la réponse impulsionnelle comme on peut voir dans [80]. A partir de cette approximation de dimension finie, il est ainsi possible d'approximer les premières valeurs singulières (car théoriquement il existe une infinité) du système (1.1). La Fig. 1.4 montre une approximation des 1000 premières valeurs singulières (obtenues par la procédure expliquée en Section C.3) où chacune d'elles représente l'énergie d'une variable d'état de (1.2).

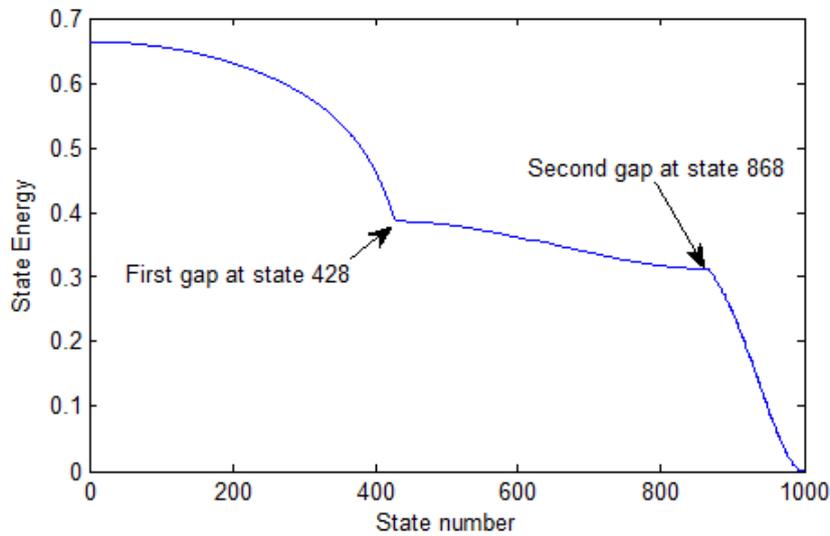


FIGURE 1.4 – Valeurs singulières de Hankel du système de transmission

Notons toutefois, que les valeurs singulières ne représentent les énergies des variables d'état que si la réalisation du système est équilibrée. Ainsi, une méthode comme la troncature équilibrée [52], qui consiste à ne garder, dans le modèle réduit, que les variables d'état les plus pertinentes utilise les valeurs singulières de Hankel comme

indice de troncature. Il s'agit en effet de repérer un écart (chute) *significatif* entre deux valeurs singulières successives à partir duquel le vecteur d'état est tronqué (voir Section C).

Pour le cas présenté ici, on peut clairement remarquer que les valeurs singulières de Hankel décroissent assez lentement avec uniquement deux petits écarts au niveau des variables d'état 428 et 868 comme le montre la Fig. 1.4. Ainsi, de ce point de vue énergétique, les dynamiques liées aux variables d'état du système (1.1) sont toutes importantes et doivent être gardées dans le modèle réduit afin d'obtenir des bons résultats. Et ceci pour tous les systèmes qui n'ont pas de chute dans le spectre des valeurs singulières de Hankel. D'un point de vue applicatif, ceci n'est pas très intéressant car l'ordre du modèle réduit qui en résulte est assez élevé ce qui rend son implémentation difficile. C'est pourquoi, dans la nouvelle méthodologie, présentée en Section 3.4, l'évaluation des dynamiques n'est pas basée uniquement sur les valeurs singulières de Hankel.

- 2) **Deuxième classe (faible décroissance des indices d'amplitudes entrée-sortie)** : considérons la fonction de transfert suivante d'ordre 6 d'un système linéaire stationnaire :

$$L(s) = \frac{200s + 2 * 10^4}{s^2 + 200s + 2 * 10^4} + \frac{182s + 16380}{s^2 + 180s + 1 * 10^8} + \frac{1}{s + 1} + \frac{10,05}{s + 9,8}. \quad (1.3)$$

(1.3) n'a que des pôles simples et peut ainsi s'écrire sous la forme

$$L(s) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{r_i}{s - \lambda_i}}_{L_i(s)},$$

avec  $n = 6$ . Les valeurs des pôles  $\lambda_i$  et des résidus  $r_i$  associés sont donnés dans le Tableau 1.1.

TABLE 1.1 – Pôles, résidus et normes infinies des fractions

$k$	pôles $\lambda_i$	résidus $r_i$	$\ L_i(s)\ _\infty$
1	$\lambda_1 = -100 + 100i$	100	1,000
2	$\lambda_2 = -100 - 100i$	100	1,000
3	$\lambda_3 = -90 + 1 \times 10^4 i$	91	1,011
4	$\lambda_4 = -90 - 1 \times 10^4 i$	91	1,011
5	$\lambda_5 = -1$	1	1,000
6	$\lambda_6 = -9,8$	10,05	1,025

Ainsi, pour une méthode comme la troncature modale (voir, e.g., [76]), l'indice qui est, généralement, utilisé pour évaluer l'importance des dynamiques est la norme infinie des fractions de (3.9), i.e., les amplitudes maximales des dynamiques liées aux modes. Ceci est justifié par le fait que les fractions ayant les plus grandes normes infinies contribuent efficacement à la minimisation de la norme infinie de l'erreur de troncature comme on peut le voir en Section B).

De là, il résulte ainsi que toutes les dynamiques de (1.3) ont le même niveau d'importance car, comme le montre le Tableau 1.1, les normes infinies des fractions sont quasiment toutes égales. Ce qui montre ainsi que, pour cette classe de systèmes dynamiques, cet indice d'évaluation ne permet pas d'avoir des résultats très utiles pour l'implémentation.

Aux problématiques liées à ces deux classes de systèmes qu'on vient de présenter, s'ajoute également le besoin de préserver la structure physique du système après l'étape de réduction. Dans ce cas, il s'agit d'évaluer l'importance des dynamiques d'un sous-système particulier en prenant en compte la structure dynamique de tout le système dont il fait partie.

**Exemple 1.3.** Aux deux problématiques précédentes s'ajoute celle du choix des entrées qui consiste à dénombrer et choisir les variables qui peuvent servir de commandes. En effet, pour un système dynamique on ne peut pas fixer librement n'importe quel nombre de variables car ces dernières sont, avant tout, liées par des équations qui imposent leurs évolutions. Pour donner une illustration, considérons de nouveau la structure en  $\pi$  de la Fig. 1.1. Il est montré dans l'Exemple 4.4, que si l'on fixe deux variables, toutes les autres y dépendent et on a ainsi deux commandes. De là, si on se limite juste au nombre, on peut fixer, par exemple, les deux tensions ou courants aux extrémités ou bien les combiner. La réponse est obtenue dans ce cas à l'aide d'un formalisme algébrique qui montre que le nombre d'entrées d'un système de dimension finie est donné par le rang du module définissant le système comme c'est expliqué par exemple dans [28] ou [8] et présenté dans le Chapitre 4.

Toutefois, pour les systèmes auxquels nous nous intéressons, et qui sont décrits par des EDPs, la situation est différente et plus difficile. Prenons, par exemple, la structure de la Fig. 1.2. Par expertise et comme on connaît le processus physique, on sait très bien qu'on peut imposer, par exemple, indépendamment les deux tensions aux deux extrémités de la ligne, i.e., à  $x = 0$  et  $x = \ell$ . Cependant, lorsqu'on dispose uniquement des équations mathématiques qui décrivent le fonctionnement du système sans connaître sa structure physique, la réponse est moins évidente. Pour mieux voir cela, rappelons les équations ci-dessous

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - Ri(x,t), \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.4)$$

qui décrivent l'évolution du courant et de la tension le long de la structure de la Fig. 1.2. Le système (1.4) est déterminé (i.e., le nombre de ses inconnues (fonctions) est égal au nombre de ses équations) et il est perçu, dans l'approche algébrique, comme un ensemble de variables reliées par un ensemble d'équations. Il est représenté ainsi par la forme ci-dessous

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & (L \frac{\partial}{\partial t} + R) \\ C \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = 0, \quad (1.5)$$

où  $v$  et  $i$  représentent les générateurs du module et  $A$  sa matrice de présentation. Le tout, i.e., (1.5) est dit *module de présentation finie donné par générateurs et relations*. Pour les entrées, le rang du module (1.5) vaut zéro ce qui signifie que ni  $i(x, t)$  ni  $v(x, t)$  ne peuvent être fixés librement, i.e., le nombre de commandes de ce système est égal à zéro. Ce qui, bien évidemment, ne concorde pas avec le fait qu'on peut imposer la tension aux deux extrémités de la ligne. On peut voir cela aussi en discrétisant en espace les équations (1.4) où on sera *contraint* de spécifier les valeurs des variables à  $x = 0$  et  $x = \ell$  (i.e., aux bords) afin de pouvoir intégrer les équations.

Formellement, ceci n'est pas contradictoire mais met en évidence le fait que, pour ce type de systèmes, le rang du module ne permet de renvoyer que le nombre d'entrées dites *dans le domaine*, i.e., appliquées en tout point du domaine spacial ou une région de celui-ci mise à part les bords (voir, e.g., [5]). Si l'on regarde le système (1.4), on constate ainsi qu'il ne possède aucune entrée de ce type. L'autre classe de commandes appelées *contrôles frontières* qui, quant à elle, est appliquée via les conditions aux bords, n'est donc pas donnée par le rang du module. A ce titre, des investigations doivent encore avoir lieu à propos de cette classe particulière de commandes, ce qui fait l'objet d'une importante partie du Chapitre 4.

### 1.3 Démarche et contributions

Pour traiter efficacement les problématiques soulevées précédemment, notre démarche se base sur la vision *systemique* comme cadre méthodologique. Ceci permet de surpasser les approches locales et d'offrir une vision plus large et plus générale des questions abordées. Cela a permis en premier lieu de clarifier le lien structurel entre le modèle à paramètres distribués des lignes de transmission et leur approximation par un modèle en  $\pi$ . L'apport est une mise en évidence d'un lien de réduction entre les structures dynamiques des deux modèles qui complète ainsi la comparaison classique des trajectoires. A terme, l'avantage d'un tel résultat est de pouvoir lier les phénomènes simulés aux modèles utilisés dans les simulateurs numériques.

La question de la réduction a été ensuite plus investie dans cette thèse, pour aboutir au final à une nouvelle méthodologie de troncature plus adaptée aux modèles dynamiques des systèmes de transport de l'électricité. Son apport, comparé aux techniques existantes, est d'offrir l'avantage de pouvoir à la fois faire un tri efficace des dynamiques, même dans des situations particulières, et de prendre en considération des besoins liés à l'exploitation du modèle réduit comme la préservation des structures dynamique et physique. Elle contribue ainsi à une meilleure gestion des systèmes électriques modernes en améliorant les techniques actuelles de simulation et d'analyse. Ce qui permet une prise en compte plus facile et plus efficace des nouvelles technologies de production et du transport de l'énergie électrique.

Ceci est complété par la question du choix des entrées pour laquelle le cadre systémique, et en particulier l'approche algébrique, a permis de mieux approfondir la problématique et de proposer des pistes de solutions encourageantes. En effet, bien qu'une réponse complète à la question n'est toujours pas délivrée, l'apport du travail effectué ici, à ce sujet, est la position du problème dans le contexte de la théorie des systèmes dynamiques.

### 1.4 Organisation du manuscrit

Le manuscrit est composé de quatre chapitres en plus de la conclusion générale, les perspectives et quatre annexes. L'organisation ainsi que des brefs résumés des trois chapitres qui restent sont donnés comme suit :

**Chapitre 2.** Dans ce chapitre sont présentés tout d'abord les différents modèles des lignes dont il est fait usage dans cette thèse avec une description des propriétés de chacun. Un rappel est fait ensuite sur la comparaison classique entre les trajectoires issues du modèle à paramètres distribués de la ligne et le modèle en  $\pi$  afin de montrer le besoin de se tourner vers un cadre plus systémique. A l'aide de ce dernier, les structures dynamiques des modèles sont comparés et il est montré, principalement, que le modèle en  $\pi$  est proche d'une troncature modale à l'ordre 1 du modèle complet de la ligne. Ce résultat est obtenu suite à une utilisation des outils développés pour les systèmes de dimension infinie comme les opérateurs et les semi-groupes.

**Chapitre 3.** Il constitue le chapitre central de cette thèse où une nouvelle méthodologie de réduction qui s'adapte mieux aux systèmes modernes de transport d'électricité est développée. C'est une approche mixte qui est basée à la fois sur le principe de la troncature modale et l'évaluation des dynamiques via l'énergie de la réponse impulsionnelle. Son développement est motivé par la pénurie de méthodes permettant d'évaluer efficacement les dynamiques du système, lorsque le spectre des valeurs singulières de Hankel ne présente pas une chute significative, et de satisfaire des objectifs de réduction, que sont essentiellement la préservation des structures dynamique et physique. En effet, lorsque le système présente un nombre assez élevé de dynamiques qui sont difficiles à évaluer, l'ordre du modèle réduit issu des méthodes standards ne favorise pas son implantation. A l'aide des différents exemples et applications industrielles traités, il est montré que la méthode proposée permet d'obtenir des résultats assez satisfaisants.

**Chapitre 4.** La problématique abordée dans ce chapitre concerne le nombre et le choix des entrées des systèmes à paramètres distribués. Il s'agit, du point de vue de l'automatique, de savoir quel est le nombre d'entrées (i.e., les variables qui servent de commandes) de ce type de systèmes qui a la particularité de pouvoir être commandé par les bords, e.g., les extrémités d'une ligne. Le cadre proposé à cet effet est une approche algébrique qui consiste à appliquer des théories algébriques comme celle des modules pour étudier et mettre en évidence des propriétés structurelles des systèmes dynamiques. Vu la difficulté de la tâche et la pénurie de travaux à ce sujet, la contribution se présente sous forme d'une étude détaillée de l'état de l'art et une mise en évidence de deux types de commandes ainsi que la proposition d'une piste pour résoudre le problème.

Au final, une conclusion générale ainsi que la manière dont nos résultats peuvent être exploités sont présentés à la fin du document avant une liste de références bibliographiques. Le tout suivi de quatre annexes qui contiennent principalement la liste des publications obtenues dans cette thèse, les preuves et les démonstrations ainsi qu'une description des modèles utilisés dans les applications industriels traités.

## Chapitre 2

# Liens entre les modèles utilisés pour une ligne électrique : une analyse systémique

### 2.1 Introduction

Dans un système électrique, les lignes de transmission jouent un rôle prépondérant car elles assurent l'acheminement de l'énergie électrique depuis sa production, par les machines, jusqu'à sa consommation par les charges. Leur structure guide ainsi le courant et la tension qui se propagent avec une vitesse limitée d'un bout à l'autre. La dynamique de cette propagation est décrite par un modèle à paramètres répartis qui consiste en deux équations aux dérivées partielles. Il est ainsi dit de *dimension infinie*. Une fois ce modèle connecté au reste du circuit électrique, il conduit à une description complète des phénomènes induits par les interconnexions. Et ceci, en allant des plus rapides tels que les phénomènes électromagnétiques jusqu'au plus lents comme les oscillations électromécaniques. Toutefois, pour analyser et étudier tous ces phénomènes, on ne peut guère compter sur une solution analytique car elle ne peut être obtenue que pour des cas de figures qui restent loin des situations réelles. De là est venue l'idée, qui est même devenu une nécessité, d'approximer le modèle à paramètres répartis des lignes.

A cet effet, plusieurs modèles simplifiés ont été proposés dont l'utilisation reste très attachée aux besoins. Pour reproduire les phénomènes électromagnétiques, par exemple, il est suggéré d'utiliser le modèle à retard [24] qui découle d'une solution, dans des conditions particulières, des équations de la ligne. Il trouve ainsi place dans des simulateurs comme EMTP [24] où il est combiné à une intégration par trapèzes pour délivrer l'allure des trajectoires de tout le système électrique. On trouve également ce modèle dans la SimPower Toolbox de Matlab (see [82]). Par ailleurs, lorsqu'on considère que les phénomènes de propagation sont négligeables (notamment pour les lignes courtes), les lignes sont représentées par la structure dite en  $\pi$  de la Fig. 1.1. Le modèle qui en résulte est de dimension finie donné par des équations différentielles ordinaires. Il est intégré à l'ensemble du système soit seul soit dupliqué, i.e., sous forme d'une série de modèles en  $\pi$  (voir Fig. 2.4). Cela permet de reproduire des phénomènes lents comme les oscillations interzones,

les dynamiques de tension ou encore, sous certaines conditions supplémentaires, les oscillations hyposynchrones. On s'en sert, par exemple, dans [49] pour l'analyse de la stabilité transitoire, la stabilité en petits mouvement ou la synthèse des régulateurs.

Bien que tous ces modèles que l'on vient de mentionner découlent du fonctionnement dynamique de la structure physique des lignes, leur adéquation aux phénomènes simulés reste, la plupart du temps, guidée par des validations expérimentales. C'est ce qui nous a incité à comparer les structures dynamiques de tous ces modèles afin de mieux comprendre les liens entre les modèles utilisés pour la simulation et les phénomènes à reproduire. La comparaison est systémique et repose principalement sur une analyse modale. Cela dégage plus de propriétés dynamiques qu'une analyse de trajectoires classique. En effet, le modèle en  $\pi$ , par exemple, fut longtemps utilisé comme une approximation avant qu'une similitude des trajectoires (voir e.g., [39]) avec le modèle complet ne soit trouvée. Ici, il est montré que ce modèle en  $\pi$  est très proche d'une troncature modale à l'ordre un du modèle complet. Ce résultat, ainsi que cette vision systémique, se révéleront d'autant plus utiles dans le prochain chapitre où des questions relatives à l'approximation du système tout entier seront abordées.

## 2.2 Présentation et classement des modèles des lignes électriques

Les modèles représentatifs des lignes électriques sont généralement classés en fonction de la longueur de la ligne, car ce paramètre joue un rôle important dans la propagation des ondes à travers la ligne. On distingue ainsi des modèles pour les lignes dites *courtes* dont la longueur ne dépasse généralement pas 80 Km, des modèles pour les lignes de *longueurs modérées* qui sont entre 80 Km et 250 Km. Et enfin, des modèles pour les lignes *longues* dont la longueur dépasse 250 Km. Toutes ces classes de modèles ont été développées en adéquation avec le fonctionnement réel de la ligne et les hypothèses simplificatrices que l'on peut faire dans chaque situation. Ainsi, pour chaque classe de modèles correspond une gamme de phénomènes que l'on peut capter. De ce fait, l'utilisation de chaque modèle dépend de l'application et des phénomènes que l'on veut analyser ou reproduire par simulation numérique. On note aussi que, d'un point de vue de la modélisation, les modèles utilisés pour représenter les lignes aériennes conviennent aussi aux lignes souterraines (dites *câbles*) mais avec des valeurs différentes des paramètres (résistance, inductance, capacitance, conductance transverse). Cela est dû au fait que les câbles n'ont pas les mêmes caractéristiques physiques que les lignes aériennes, notamment au niveau de l'isolation entre les conducteurs et la distance entre eux (voir, par exemple, [39] pour plus de détails). Pour les systèmes de transport d'électricité, les lignes aériennes sont généralement les plus utilisées. Mais là aussi, les valeurs des paramètres dépendent de la fréquence et du niveau de la tension auxquels les lignes sont soumises<sup>1</sup> (voir [39], page 209, pour quelques valeurs numériques). On donne ci-dessous un tableau<sup>2</sup> qui montre les différents niveaux de tension, appelés *domaines de tension*, auxquels les installations des

1. En France, le transport de l'électricité se fait à une fréquence de 50 Hz et un niveau de tension entre 63 kV et 400 kV.

2. Ce tableau ne contient que les domaines HTA et HTB, car ils sont liés au transport de l'électricité, mais un tableau plus exhaustive est présenté, par exemple, dans [78].

réseaux de transport et de distribution de l'électricité fonctionnent habituellement.

TABLE 2.1 – Domaines de tension selon la norme NF C18-510

Domaine de tension	Valeur de la tension nominale		Usage
	Courant alternatif	Courant continu	
HTA (haute tension A)	$1\text{kV} < U_n \leq 50\text{kV}$	$1.5\text{kV} < U_n \leq 50\text{kV}$	Distribution
HTB (haute tension B)	$U_n > 50\text{kV}$	$U_n > 75\text{kV}$	Transport

En outre, pour chaque type de lignes aériennes, un aperçu sur les modèles les plus utilisés est présenté ci-dessous :

**Lignes courtes :** Pour ce type de lignes, les phénomènes liés à la propagation (comme le retard par exemple) ont très peu d'effet sur les trajectoires du courant et de la tension. Ainsi, le modèle qui est généralement utilisé pour modéliser ces lignes est constitué d'une résistance en série avec une inductance, car on fait l'hypothèse qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte le caractère distribué des paramètres. Ce modèle est fréquemment utilisé pour représenter certaines lignes du réseau de transport, mais il convient mieux aux lignes courtes du réseau de distribution car à des tensions inférieures à 20kV, la capacitance et la conductance transverse sont considérées négligeables pour une ligne courte. Lorsqu'il est utilisé dans les systèmes de transport d'électricité, ce modèle suffit pour reproduire, avec le reste du système, des phénomènes de basses fréquences comme les modes interzones qui sont généralement entre 0.1 Hz et 0.7 Hz. Il est aussi utilisé pour un calcul d'écoulement de charges (load-flow). Cependant, ce modèle peut ne pas convenir pour des câbles de longueurs similaires (inférieurs à 80 Km) car la capacitance et la conductance transverse peuvent avoir un effet non négligeable.

**Lignes de longueurs modérées :** Dans ce cas, on fait aussi l'hypothèse que les phénomènes de propagation n'ont pas beaucoup d'influence sur le comportement des tensions et des courants aux points terminaux de la ligne. Cependant, par rapport aux lignes courtes, on considère que l'effet de la capacitance n'est plus négligeable dans ce cas, car ces lignes acheminent l'énergie sur des distances plus grandes avec un niveau de tension qui dépasse généralement les 50kV (elles font partie du réseau de transport). Ce qui fait apparaître des phénomènes que l'on peut pas capter avec le modèle précédent. Par conséquent, le modèle qui est le plus utilisé, pour représenter ces lignes, est le modèle en  $\pi$  de la Fig. 1.1. Un tel modèle convient, par exemple, à l'étude de la stabilité transitoire et des phénomènes électromécaniques comme indiqué précédemment.

**Lignes longues :** Lorsque la longueur de la ligne dépasse 250 Km, l'effet distribué des paramètres devient important à prendre en compte et les phénomènes électromagnétiques deviennent plus significatifs. C'est la raison pour laquelle d'autres modèles, dits à *paramètres distribués*, sont utilisés. Ils diffèrent de ceux cités ci-dessus par le fait que les paramètres physiques de la ligne (comme la résistance) ne sont plus agrégés en un seul paramètre (par exemple, résistance équivalente), mais distribués le long de la ligne. Ce

qui permet de capter la dynamique de propagation des ondes ainsi que les phénomènes qui lui sont associées comme le retard. Il est aussi possible, avec de tels modèles, de capter des dynamiques très rapides comme les phénomènes transitoires ou encore l'effet de peau. Par ailleurs, il arrive aussi que les lignes longues soient modélisées par plusieurs modèles en  $\pi$  connectés en série comme le montre la Fig. 2.4. Cela repose sur le fait que le caractère distribué des paramètres peut être pris en compte en subdivisant la ligne en plusieurs sections (théoriquement une infinité) de longueur très petite où chacune d'elles est modélisée par un modèle en  $\pi$ . Toutefois, cette modélisation est souvent réservée à des cas particuliers où on sait, par l'expérience, qu'elle permet de reproduire les phénomènes recherchés. En effet, il est très difficile de connaître, a priori, le nombre de modèles en  $\pi$  qui doit être utilisé et quelle gamme de phénomènes cela permet de capter. Généralement, la fréquence des signaux auxquels la ligne est soumise ainsi que sa longueur sont des facteurs déterminants pour trouver le modèle adéquat. A titre d'exemple, un tableau est présenté dans [97] montrant le nombre de modèles en  $\pi$  à utiliser afin de couvrir une plage de fréquence donnée. Dans les systèmes de transmission, ce genre de modèles est utilisé par exemple pour étudier la stabilité du système ainsi que les phénomènes générés suite à des défauts ou des commutations rapides (hautes fréquences) dans le système.

Au final, tous les modèles que l'on vient de mentionner se divisent en deux catégories. D'une part, les modèles de dimension finie, comme le modèle en  $\pi$  ou en série de  $\pi$ , qui sont décrits par des équations différentielles ordinaires, car ils n'incluent pas l'effet de la dimension spatiale. D'autre part, les modèles de dimension infinie (à paramètres distribués) dans lesquels les courants et les tensions le long de la ligne sont fonction, à la fois, du temps et de l'espace. Une description mathématique de l'ensemble de ces modèles est présentée ci-dessous.

### 2.2.1 Modèles à paramètres distribués

Comme mentionné précédemment, dans une ligne de transmission, la dynamique de propagation des tensions et des courants est modélisée par des équations aux dérivées partielles. Cela conduit principalement à deux types de modèles à paramètres distribués. Un premier modèle dont les paramètres varient en fonction de la fréquence et un second modèle dont les paramètres sont constants et *uniformément* (ne dépendent pas de la distance) répartis sur toute la longueur de la ligne. Tous les deux ont leurs utilités respectives dans les systèmes de transmission, mais celui à paramètres constants est le plus utilisé, car il est généralement suffisant pour étudier les différents phénomènes qui apparaissent dans les systèmes de transport d'électricité. Par ailleurs, lorsque la fréquence des signaux qui traversent la ligne sont de l'ordre du GHz, ce qui n'arrive pas généralement dans les systèmes de transmission, il est important de prendre en compte la dépendance fréquentielle des paramètres. En effet, à de telles fréquences, des phénomènes comme l'effet de peau, qui ne sont pas captés par le modèle à paramètres constants, peuvent avoir un impact considérable.

### 2.2.1.1 Modèle à dépendance fréquentielle

Pour une ligne monophasée, dont la structure est montrée en Fig. 1.2, les deux équations décrivant l'évolution de la tension  $v(x, t)$  et le courant  $i(x, t)$  à chaque point  $x$  et à chaque instant  $t$  sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -L(w) \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - R(w) i(x, t) \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C(w) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - G(w) v(x, t) \end{cases}, \quad (2.1)$$

où les paramètres  $R(w)$ ,  $L(w)$ ,  $C(w)$  et  $G(w)$  sont, respectivement, la résistance, l'inductance, la capacitance et la conductance transverse par unité de longueur. Leur dépendance de la pulsation  $w = 2\pi f$  est liée à certains phénomènes électromagnétiques, comme l'effet de peau, qui apparaissent lorsque la ligne est soumise à des signaux de très hautes fréquences. Ceci résulte d'une modélisation assez détaillée des conducteurs de la ligne en se basant sur les équations de Maxwell [50]. Notons que, pour les lignes aériennes, la conductance transverse  $G(w)$  est souvent négligée à cause de son faible impact. Par conséquent, elle sera omise dans tous les modèles des lignes considérés dans cette thèse.

D'une manière générale, les paramètres  $R(w)$ ,  $L(w)$  et  $C(w)$  peuvent être des fonctions très complexes dont on ne connaît que des expressions asymptotiques (voir, par exemple, [50]). Ainsi, selon la gamme de phénomènes auxquels on s'intéresse, des simplifications peuvent être faites au niveau de la modélisation. Par exemple, lorsqu'on ne considère que l'effet de peau pour les lignes aériennes, la modélisation peut être simplifiée pour aboutir au modèle ci-dessous dont les paramètres  $L(w)$  et  $C(w)$  sont constants

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left( R'(t) * i(x, t) \right) \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \end{cases}, \quad (2.2)$$

et  $(*)$  symbolise le produit de convolution.  $R'(t)$  est une résistance transitoire qui peut être approximée par la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire ayant un nombre assez important (en fonction de la plage de fréquence à prendre en compte) de pôles et zéros (voir, par exemple, [68]). Elle modélise ainsi l'effet de la fréquence sur la distribution des charges au niveau de la surface des conducteurs de la ligne.

De là, il est intéressant de noter, à propos du modèle (2.2), qu'il admet une forme d'état (dont les matrices sont indépendantes de la fréquence) moyennant une discrétisation spatiale. Ainsi, d'un point de vue système, il peut être approximé par un modèle linéaire à paramètres constants ayant un nombre assez important de variables d'état.

### 2.2.1.2 Modèle à paramètres constants

Après avoir vu le modèle à dépendance fréquentielle, celui à paramètres constants admet des équations analogues aux (2.1) sauf que les paramètres sont, dans ce cas, tous constants, i.e.,  $R(w) = R$ ,  $L(w) = L$  et  $C(w) = C$ , ce qui donne

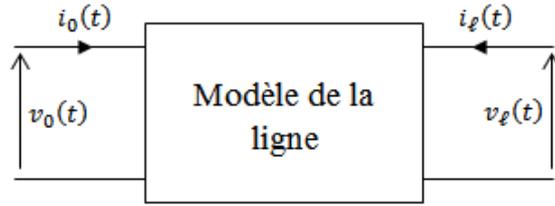


FIGURE 2.1 – Structure en quadripôle de la ligne

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - Ri(x, t) \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans le milieu industriel, l'utilisation du modèle (2.3) est assez fréquente car il est suffisamment détaillé pour reproduire la plupart des phénomènes liés au transport de l'électricité. Ainsi, il fera l'objet d'une analyse assez détaillée par la suite.

### 2.2.1.3 Insertion dans le système

Pour qu'un modèle comme (2.3), (2.2) ou (2.1) puisse être connecté à d'autres éléments électriques, il faut d'abord lui fixer des conditions aux bords. Ces dernières servent à définir le système au niveau des bords et jouent le rôle de *ports* de connexion à travers lesquels il interagit avec les autres composants (du circuit électrique) auxquels il est connecté. Ceci peut être formulé, d'une manière plus générale, comme un système *Port-Hamiltonien* (voir, par exemple, [36]). Dans notre cas, et en se basant sur la structure physique de la Fig. 1.2, on peut constater qu'à  $x = 0$  on peut définir un courant  $i(x, t)|_{x=0} = i_0(t)$  et une tension  $v(x, t)|_{x=0} = v_0(t)$ . De même pour l'extrémité  $x = \ell$ , on définit  $i(x, t)|_{x=\ell} = i_\ell(t)$  et  $v(x, t)|_{x=\ell} = v_\ell(t)$ . Cela conduit au final à la structure en quadripôle de la ligne avec deux ports de connexions comme le montre la Fig. 2.1.

L'évolution de  $i_0(t)$ ,  $i_\ell(t)$ ,  $v_0(t)$  et  $v_\ell(t)$  dépend du circuit dans lequel la ligne est insérée. Pour une ligne ouverte, par exemple, i.e., branchée à une source de tension  $V_e(t)$  à  $x = 0$  et laissée libre à  $x = \ell$ , on fixe, comme conditions aux bords :

$$\begin{cases} v(x, t)|_{x=0} = V_e(t) \\ i(x, t)|_{x=\ell} = 0 \end{cases}, \quad (2.4)$$

ce qui donne  $v_0(t) = V_e(t)$ ,  $i_\ell(t) = 0$  et enfin  $i_0(t)$ ,  $v_\ell(t)$  qui résultent d'une intégration du système d'équations (2.3)-(2.4).

Par ailleurs, il est important de noter que, pour aboutir à la structure de la Fig. 2.1, le nombre de commandes aux bords doit être connu au préalable. En effet, comme les variables d'interconnexion sont définies à partir des conditions aux bords, le nombre de ces dernières doit être connu à l'avance. Ceci est lié à la question du nombre et choix des entrées qui est abordée dans le Chapitre 4.

### 2.2.2 Modèle à retard

Dans les applications réalistes, le modèle à paramètres distribués, (2.3), de la ligne est généralement remplacé par un modèle à retard qui offre plus d'avantages au niveau de la simulation numérique. En effet, il est relativement facile de prendre en compte un retard lors de l'intégration numérique des équations comme cela se fait, par exemple, dans EMTP ou Matlab/Simulink via une intégration par la méthode des trapèzes. Ainsi, le modèle à retard de la ligne, utilisé dans ces deux simulateurs, résulte de la solution des équations (2.3) dans le cas où  $R = 0$  (ligne sans pertes). Dans ce cas, le courant  $i(x, t)$  et la tension  $v(x, t)$  s'écrivent sous la forme générale de d'Alembert comme suit

$$\begin{aligned} i(x, t) &= f_1(x - vt) + f_2(x + vt), \\ v(x, t) &= Z_c f_1(x - vt) - Z_c f_2(x + vt), \end{aligned}$$

où  $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$  est dite *impédance caractéristique* et  $f_1(\cdot)$ ,  $f_2(\cdot)$  sont deux fonctions arbitraires. D'un point de vue physique, cela montre que le courant et la tension, dans une ligne sans pertes, sont tous les deux la somme d'une onde *incidente*  $f_1(x - vt)$  qui se propage dans le sens des valeurs positives de  $x$  avec une vitesse constante  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , et d'une onde réfléchie  $f_2(x + vt)$ , qui se propage dans le sens opposé avec la même vitesse. Cela conduit au modèle connu sous le nom de *modèle de Bergeron* obtenu par la méthode des caractéristiques (voir par exemple [24] pour plus de détails). Il est basée sur le fait que les tensions  $(v(0, t) + Z_c i(0, t))$  et  $(v(\ell, t) + Z_c i(\ell, t))$ , à chaque bout de la ligne, coïncident après une durée de  $\tau = \ell\sqrt{LC}$  sec. Plus précisément,  $(v(0, t) + Z_c i(0, t))$  à  $x = 0$  conserve sa valeur durant la propagation (de  $x = 0$  à  $x = \ell$ ) et arrive à  $x = \ell$  après un temps de retard (de propagation) égal à  $\tau$ . Le même raisonnement s'applique aussi pour la tension  $(v(\ell, t) + Z_c i(\ell, t))$  qui se propage de  $x = \ell$  vers  $x = 0$ . Mathématiquement, cela s'écrit

$$\begin{aligned} v(0, t) + Z_c i(0, t) &= v(\ell, t - \tau) + Z_c i(\ell, t - \tau), \\ v(\ell, t) + Z_c i(\ell, t) &= v(0, t - \tau) + Z_c i(0, t - \tau). \end{aligned}$$

A partir de là, on déduit le schéma représentatif ci-dessous

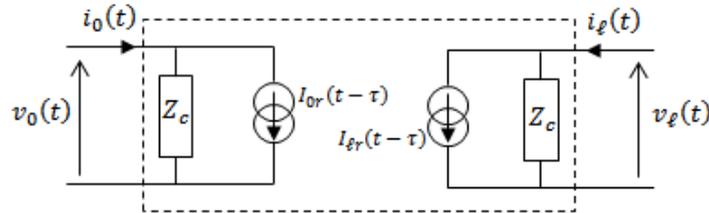


FIGURE 2.2 – Représentation du modèle à retard de la ligne

dans lequel  $I_{0r}(t - \tau)$  et  $I_{lr}(t - \tau)$  représentent deux sources de courant re-

tardées dont les expressions sont données par

$$I_{0r}(t - \tau) = - \left( \frac{1}{Z_c} \right) v_0(t - \tau) - i_0(t - \tau), \quad (2.5a)$$

$$I_{\ell r}(t - \tau) = - \left( \frac{1}{Z_c} \right) v_\ell(t - \tau) - i_\ell(t - \tau). \quad (2.5b)$$

On remarque ainsi qu'on retrouve la structure en quadripôle de la Fig. 2.1.

Par ailleurs, le modèle que l'on vient de décrire correspond à une ligne idéale (sans pertes), mais en réalité les conducteurs ont une résistance non nulle. Afin de prendre en compte l'effet de cette résistance, on fait l'hypothèse (voir, par exemple, [24]) que la résistance totale de la ligne est répartie en  $\frac{R}{4}$  aux extrémités et  $\frac{R}{2}$  au milieu. Cela revient à remplacer l'impédance  $Z_c$ , dans la Fig. 2.2, par  $Z = Z_c + \frac{R}{4}$  des deux côtés et de remplacer les sources de courant  $I_{0r}(t - \tau)$ ,  $I_{\ell r}(t - \tau)$  par

$$I_{0r}(t - \tau) = \left( \frac{1+h}{2} \right) \times \{I_{0r}(t - \tau) \text{ de (2.5a)}\} + \left( \frac{1-h}{2} \right) \times \{I_{\ell r}(t - \tau) \text{ de (2.5b)}\},$$

$$I_{\ell r}(t - \tau) = \left( \frac{1+h}{2} \right) \times \{I_{\ell r}(t - \tau) \text{ de (2.5b)}\} + \left( \frac{1-h}{2} \right) \times \{I_{0r}(t - \tau) \text{ de (2.5a)}\},$$

où  $h = \frac{Z_c - \frac{R}{4}}{Z_c + \frac{R}{4}}$ . Ceci est donc valable tant que le rapport  $\left(\frac{R}{4}\right)$  est assez faible devant l'impédance caractéristique  $Z_c$ .

Concernant le cadre applicatif, le modèle à retard que l'on vient de présenter est utilisé au même titre que le modèle à paramètres distribués décrit par les équations (2.3). En outre, il est implémenté sous la même forme dans le logiciel EMTP et la SimPower Toolbox de Matlab.

*Remarque 2.1.* Pour des phénomènes qui se manifestent en très hautes fréquences, comme l'effet de peau, les deux modèles (à retard et (2.3)) ne conviennent pas car les valeurs des paramètres  $R, L$ , et  $C$  dépendent de la fréquence. Dans une telle situation, on se dirige plutôt vers des modèles comme (2.1) ou (2.2).

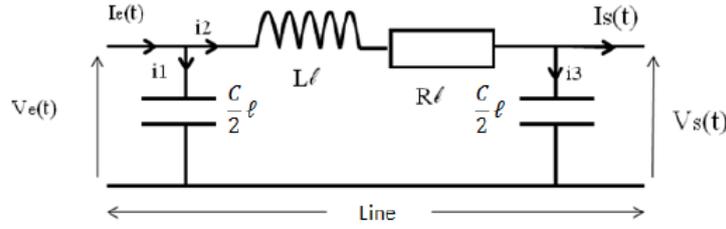
### 2.2.3 Modèles de dimension finie

Les modèles de dimension finie des lignes sont issus du fonctionnement de la structure physique de la Fig. 1.2 en se basant sur des hypothèses simplificatrices. Plusieurs modèles existent, mais ceux présentés ici sont les plus utilisés. Le premier est ce qu'on appelle le modèle en  $\pi$  et le second est une cascade de modèles en  $\pi$ .

#### 2.2.3.1 Modèle en $\pi$

Rappelons la structure de la Fig. 1.1,

Elle est utilisée comme une simplification de la structure originale (voir Fig. 1.2) dans le cas des lignes de longueurs modérées (jusqu'à 250 Km environ). L'application des lois de Kirchoff conduit au modèle suivant

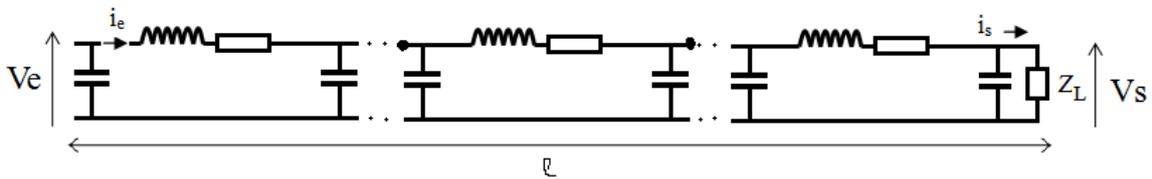
FIGURE 2.3 – Structure en  $\pi$  de la ligne

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{2}\ell \frac{dV_e}{dt} = i_1 \\ \frac{C}{2}\ell \frac{dV_s}{dt} = i_3 \\ V_e = R\ell (I_e - i_1) + L\ell \frac{d}{dt} (I_e - i_1) + V_s \\ I_e - i_1 = I_s + i_3 \\ I_e - i_1 = i_2 \end{array} \right. , \quad (2.6)$$

qui décrit l'évolution des tensions et courants dans le circuit de la Fig. 2.3, où  $\ell$  représente la longueur de la ligne. Il ne dépend pas de la variable de distance,  $x$ , et il est dit algébro-différentiel du fait qu'il est composé d'un mélange d'équations différentielles ordinaires et algébriques. De ce fait, il ne convient pas aux phénomènes liés à la propagation car ces derniers dépendent de la distance  $x$ . Sa structure en quadripôle est aisément déduite. De plus, comme il est de dimension finie, le problème du nombre et de choix des entrées est résolu. Ce modèle, fera l'objet, par la suite, d'une analyse systémique bien détaillée.

### 2.2.3.2 Modèle en série de $\pi$

Une autre façon d'approximer le modèle (2.3) est de considérer plusieurs éléments ayant la structure en  $\pi$  de la Fig. 2.3 et de les connecter en série l'un à l'autre comme le montre la Fig. 2.4.

FIGURE 2.4 – Structure en série de  $\pi$ 

Le modèle dynamique de chaque élément est décrit par les équations (2.6) dont les paramètres ( $R, L, C$ ) sont divisés par le nombre  $n$  d'éléments utilisés. Ainsi, lorsque le nombre de ces éléments tend vers l'infini, le modèle dynamique correspondant à la structure de la Fig. 2.4 se confond avec (2.3). Une preuve de cela est donnée en Section 2.4.1.3 où la notion de fonction de transfert est utilisée.

### 2.2.4 Tableau d'orientation

Après avoir présenté les différentes classes des modèles représentatifs des lignes électriques, on présente désormais le Tableau 2.5 qui récapitule l'ensemble des informations données auparavant et oriente le lecteur dans le choix du modèle de la ligne selon les besoins.

		Modèle de la ligne				
		Modèle à dépendance fréquentielle (2.1)	Modèle à paramètres distribués (2.3)	Modèle à retard	Modèle en $\pi$	Modèle en série de $\pi$
Type de la ligne*	courte	√	√	√	√	√
	modérée	√	√	√	√	√
	longue	√	√	√	—	√
Utilisation fréquente	calcul du Load-flow	—	—	—	√	√
	stabilité transitoire	√	√	√	√	√
	analyse modale	—	—	—	√	√
Phénomènes captés	oscillations électromécaniques	√	√	√	√	√
	retard	√	√	√	—	√**
	propagation	√	√	√	—	√**
	effet de peau	√	—	—	—	—

\* Selon la longueur

\*\* Selon le nombre de sections utilisées

FIGURE 2.5 – Tableau d'orientation dans le choix du modèle des lignes électriques

## 2.3 Comparaison classique : une analyse des trajectoires

Dans la plupart des cas, la validation des modèles simplifiés, utilisés dans les simulateurs des réseaux électriques, est basée sur une comparaison des trajectoires. Il s'agit principalement de comparer le comportement du modèle simplifié avec celui d'un modèle plus élaboré qui a été calés expérimentalement. Ainsi, les trajectoires provenant du modèle en  $\pi$  présenté en Section 2.2.3.1 ont été comparées avec celles qui proviennent du modèle à paramètres distribués décrit par les équations (2.3). Sous certaines conditions, notamment celle des lignes de longueurs modérées (voir, e.g., [39]), les résultats montrent des similitudes entre les trajectoires. Ainsi, notre intérêt derrière le rappelle de cette analyse est double. D'une part, donner plus d'arguments sur les raisons pour lesquelles une analyse de trajectoires ne suffit pas, à elle seule, pour identifier les liens entre les modèles et les phénomènes simulés. D'autre part, donner des motivations au cadre systémique présenté dans les sections à venir.

En premier, mentionnons que la forme des solutions analytiques des équations (2.3) dépend de la nature des signaux par lesquels la ligne est excitée. Ainsi, l'étape qui précède la comparaison, consiste à chercher une solution particulière pour simplifier l'analyse. Pour cela, l'hypothèse qui fût utilisée est celle du régime sinusoïdal établi (i.e., ni la fréquence ni le module changent en fonction du temps). En effet, lorsque le courant et la tension, à chaque point  $x$  de la ligne, sont supposés sinusoïdaux de pulsation  $w$  et de module  $I(x)$ ,  $V(x)$ , respectivement, l'équation (2.3) admet une solution sous la forme dite *phaseur* (voir, e.g., [39] ou [50]). Plus précisément, le courant  $i(x, t)$  et la tension  $v(x, t)$  s'écrivent sous la forme ci-dessous,

$$\begin{cases} v(x, t) = V(x) e^{j\omega t}, \\ i(x, t) = I(x) e^{j\omega t}, \end{cases}$$

où les modules  $V(x)$  et  $I(x)$  s'obtiennent en résolvant deux équations différentielles. En effet, en régime sinusoïdal établi, les équations (2.3) se transforment en des équations différentielles ordinaires en  $x$  qui sont données par

$$\begin{cases} \frac{dV(x)}{dx} = -(jL\omega + R)I(x), \\ \frac{dI(x)}{dx} = -jC\omega V(x). \end{cases} \quad (2.7)$$

Leurs solutions s'écrivent sous la forme (voir, e.g., [39] ou [60])

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{V_0 + Z_c I_0}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_0 - Z_c I_0}{2} e^{-\gamma x}, \\ I(x) &= \frac{V_0/Z_c + I_0}{2} e^{\gamma x} - \frac{V_0/Z_c - I_0}{2} e^{-\gamma x}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $V_0$ ,  $I_0$  sont issus des conditions aux bords imposées à  $x = 0$ , i.e.,  $v(x, t) |_{x=0} = V_0 e^{j\omega t}$

et  $i(x, t) |_{x=0} = I_0 e^{j\omega t}$ , avec :

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) j\omega C}, \quad Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}}.$$

Ainsi, pour obtenir une relation entrée-sortie, on se met à  $x = \ell$ , ce qui transforme (2.8) en,

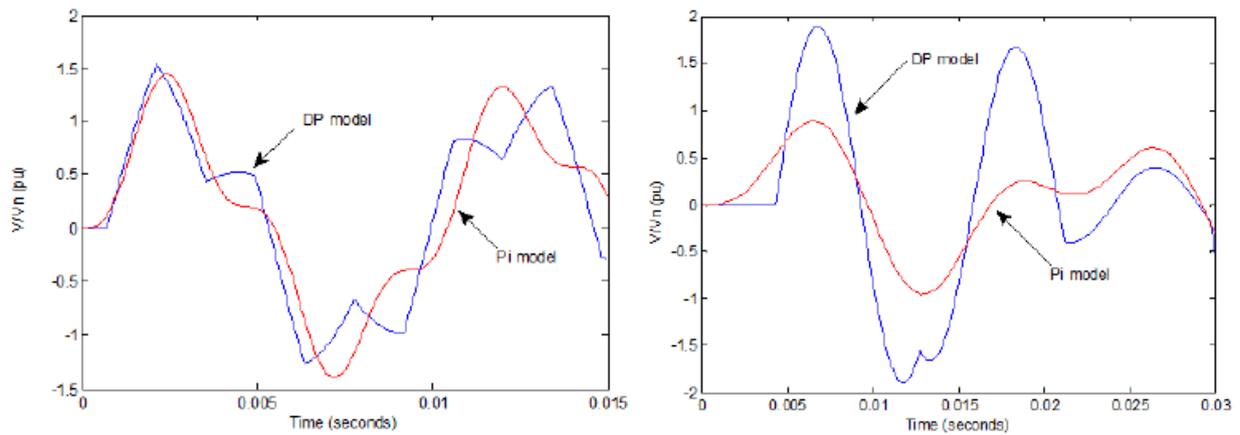
$$\begin{aligned} V(\ell) &= V_0 \cosh(\gamma\ell) + Z_c I_0 \sinh(\gamma\ell), \\ I(\ell) &= I_0 \cosh(\gamma\ell) + \frac{V_0}{Z_c} \sinh(\gamma\ell), \end{aligned} \quad (2.9)$$

Via quelques manipulations, il est montré dans [39] que, sous la condition  $\gamma\ell \ll 1$  (qui peut se transformer en  $j\omega\sqrt{LC}\ell \ll 1$  car généralement  $R \ll L\omega$ ), les trajectoires de  $V(\ell)$ ,  $I(\ell)$  données par (2.9) deviennent identiques à celles fournies par le modèle en  $\pi$ . Autrement dit, à  $V_s$  et  $I_s$  de (2.6) en régime sinusoïdal établi. C'est ce qui a conduit à conclure que, pour les lignes de longueurs modérées, le modèle en  $\pi$  fournit une bonne approximation du modèle complet. Pour discuter ces propos, quelques résultats numériques dans différentes situations sont présentés en Fig. 2.6.

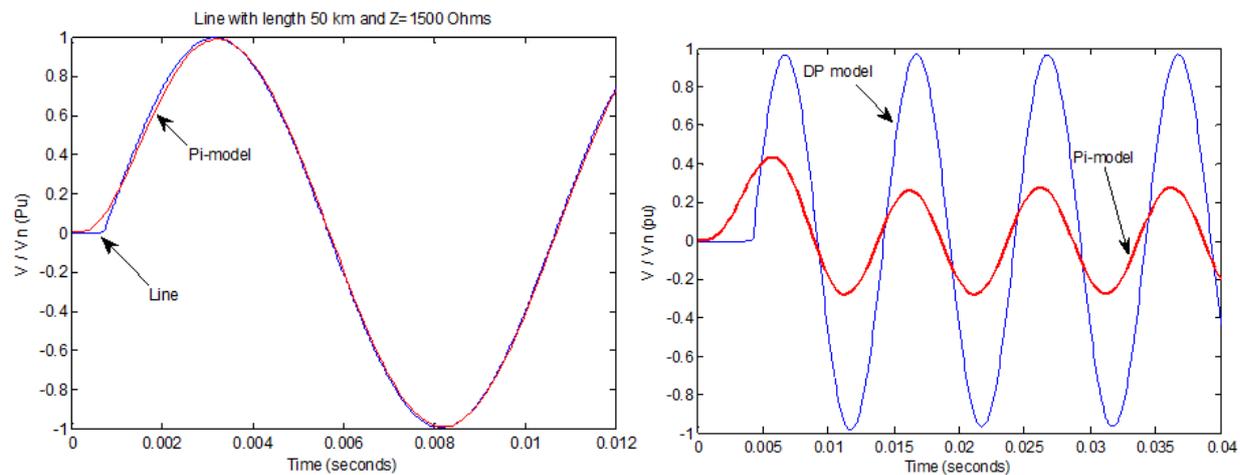
Il est remarquable que les résultats montrés en Fig. 2.6 viennent soutenir les arguments présentés plus haut. En effet, pour les lignes courtes, on voit bien à travers les Figs. 2.6a et 2.6c que les trajectoires provenant du modèle en  $\pi$  et du modèle complet présentent une forte ressemblance. Tandis que pour des lignes longues, les écarts sont assez conséquents comme le montre les Figs. 2.6b et 2.6d. Toutefois, il est notable que le modèle en  $\pi$  ne capte pas les phénomènes de propagation y compris dans le cas des lignes courtes. Cela est bien illustré en Fig. 2.6a. On voit que pour une ligne de 50 Km à extrémité ouverte, l'allure générale des trajectoires est bien reproduite mais pas les dynamiques liées à la propagation comme les pics entre 0.005 et 0.01 sec. En revanche, quand ces pics s'atténuent par l'ajout d'une charge résistive, la Fig. 2.6c montre que la seule différence bien visible se situe au niveau du retard dû au temps de propagation, i.e., au fait que la quantité  $\tau = \ell\sqrt{LC}$  n'est pas nulle.

Après avoir présenté cette comparaison, il s'ensuit que les résultats obtenus mettent bien en évidence les conditions pour lesquelles le modèle en  $\pi$  fournit une bonne approximation du modèle à paramètres distribués donné par (2.3). Toutefois, ceci ne dégage pas un lien clair entre les structures dynamiques des deux modèles et leurs trajectoires respectives. Pour y voir plus clair, prenons l'exemple de la ligne courte ouverte à une extrémité. On voit bien en Fig. 2.6a que le modèle en  $\pi$  ne capte pas les phénomènes transitoires qui sont principalement liés à la propagation des ondes à travers la ligne. Ceci résulte d'une propriété structurelle qui n'est pas révélée par la comparaison faite précédemment entre les trajectoires. Afin d'appuyer ces propos, on montre en Fig. 2.7 la tension à l'extrémité de la ligne ouverte dans le cas où l'entrée est un échelon unitaire au lieu d'une sinusoïde.

Il est bien visible sur la Fig. 2.7 qu'avec une entrée échelon (qui n'excite pas toutes les dynamiques de la ligne) et un modèle à paramètres distribués indépendants de fréquence, les différences par rapport au cas de la sinusoïde sont plus visibles. Dans le cas où les paramètres dépendent de la fréquence et l'entrée excite un nombre important de dynamiques



(a) Modèles  $\pi$  et complet pour une ligne ouverte de 50 Km (b) Modèles  $\pi$  et complet pour une ligne ouverte de 300 Km



(c) Modèles  $\pi$  et complet pour une ligne de 50 Km chargée à 1500 $\Omega$  (d) Modèles  $\pi$  et complet pour une ligne de 300 Km chargée à 1500 $\Omega$

FIGURE 2.6 – Tensions harmoniques à l'extrémité de la ligne

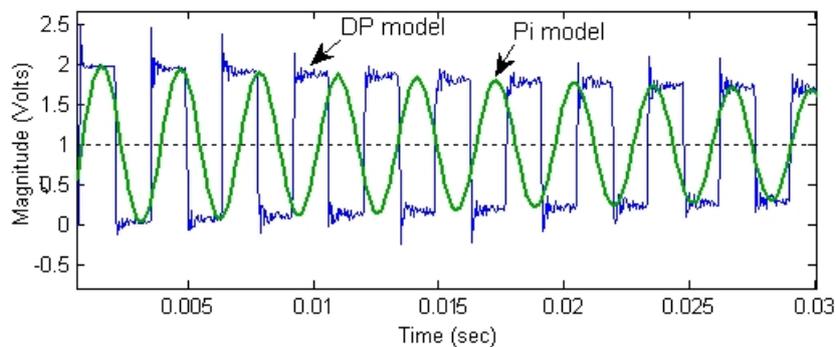


FIGURE 2.7 – Réponse d'une ligne ouverte à un échelon de tension

(en terme de fréquence), les différences seront plus importantes notamment à cause de l'effet de peau.

Physiquement, la réponse du modèle à paramètres distribués (DP) montrée en Fig. 2.7 reflète l'effet de propagation des ondes le long de la ligne de transmission. Plus précisément, il s'agit, à chaque instant, de la somme d'une onde incidente ( $v^+$ ) et onde réfléchie ( $v^-$ ). Dans le cas d'une ligne ouverte, ceci génère une réponse sous forme de créneaux qui se répète périodiquement en s'atténuant pour se stabiliser enfin à l'amplitude  $v_0$  de l'échelon d'excitation. Après un temps  $\tau = \ell\sqrt{LC}$  qui correspond à la durée nécessaire à la première onde incidente ( $v_1^+$ ) pour atteindre l'extrémité  $x = \ell$ , la période des créneaux est de  $4\tau$  dont un changement de cap chaque  $2\tau$ . Pour une ligne idéale (sans pertes par effet Joule) excitée par une source de tension (échelon) ayant une impédance interne  $Z_0 \neq 0$ , ces créneaux sont parfaitement lisses comme on peut voir, par exemple dans [4]. Dans notre cas, chaque changement est accompagné d'une dynamique transitoire due à la résistance de la ligne. De ce fait, le modèle en  $\pi$  n'en capte que la composante principale du comportement global du modèle complet. Pour comprendre les liens existants entre ces résultats et les modèles dynamiques (2.3) et (2.6), une analyse plus approfondie de leurs propriétés dynamiques s'impose. C'est pourquoi un cadre systémique plus approprié est présenté dans la prochaine section.

## 2.4 Un cadre systémique

Il ressort de ce qui précède qu'il est nécessaire d'investiguer les propriétés structurelles du modèle à paramètre distribués de la ligne et ceux du modèle en  $\pi$  afin de parvenir à un lien systémique entre ces deux modèles. Pour cela, on se place désormais dans le cadre de la théorie des systèmes qui facilite considérablement cette tâche. En effet, les modèles sont perçus comme des entités dynamiques dont les propriétés relatives à leurs structures sont intrinsèquement liées à leurs comportements. Par conséquent, il devient plus commode de comparer des systèmes dynamiques entre eux en se basant, par exemple, sur les modes ou les fonctions de transferts. De plus, cela nous apprendra d'avantage sur les liens qui existent entre ces modèles et dégage ainsi des stratégies de réduction de modèles. Et ceci, y compris dans le cas des systèmes à paramètres distribués comme le modèle (2.3) de la ligne. Dans ce cas, les notions de pôles et fonction de transfert sont bien définis. Seulement, les outils pour les obtenir sont ceux définis pour les systèmes de dimension infinie tels que les opérateurs, les bases et les semi-groupes (voir, e.g., [21] ou [85]).

### 2.4.1 Structures dynamiques des modèles des lignes

La première étape dans ce nouveau contexte est la mise sous forme d'état et fonction de transfert de chacun des modèles des lignes présentés en Sections 2.2.1.2, 2.2.3.1 et 2.2.3.2. Cela fera apparaître leurs propriétés dynamiques et facilitera leur comparaison qui est présentée en Section 2.5.

#### 2.4.1.1 Modèle à paramètres distribués

Pour commencer, rappelons que l'aboutissement à une forme d'état ou une fonction de transfert passe nécessairement par un choix des entrées et des sorties. Ainsi, pour le

système (2.3), ce choix se traduit par l'ajout de conditions aux bords comme il a été mentionné en Section 2.2.1.2. Dans notre cas, on se met dans la situation où la ligne est ouverte à une extrémité et le transfert est pris entre la tension d'entrée et la tension de sortie. Pour cela, les conditions à imposer à la tension et au courant à  $x = 0$  et  $x = \ell$  sont données par (2.4). De plus, en combinant les équations entre elles, on peut éliminer le courant  $i(x, t)$  et on aboutira au final au modèle entrée-sortie donné par (voir Annexe B),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial^2 x} - LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial^2 t} - RC \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0 \\ v(x, t) |_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} |_{t=0} = 0 \\ v(x, t) |_{x=0} = V_e(t) \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} |_{x=\ell} = 0 \\ v(x, t) |_{x=\ell} = y(t) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où  $y(t)$  représente la sortie et  $v(x, t) |_{t=0}$ ,  $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} |_{t=0}$ , sont les conditions initiales à  $t = 0$ .

En physique, la première équation de (2.10) est appelée *équation des télégraphistes* ou encore équation d'ondes amorties. Tandis qu'en théorie des systèmes dynamiques, le modèle (2.10) est appelé *problème de contrôle frontière* (voir, e.g., [21], [85]), car les entrées sont appliquées au niveau des frontières, ici à  $x = 0$ . Sa forme générale s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) = \mathfrak{A}z(t), \quad z(t) |_{t=0} = z_0, \\ \mathfrak{B}z(t) = u(t), \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  sont des *opérateurs* et  $z_0$  est une condition initiale. Afin d'écrire (2.10) sous cette forme, considérons

$$z_1 = v(x, t), \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}.$$

On peut donc écrire,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}}_{z(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha \frac{\partial^2}{\partial^2 x} & \beta \end{bmatrix}}_{\mathfrak{A}} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \\ \mathfrak{B} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = z_1(0) = V_e(t) \end{array} \right., \quad (2.12)$$

où  $\alpha = \frac{1}{LC}$  et  $\beta = -R/L$ . A ce stade, quelques explications sont à donner à propos des notations. Premièrement,  $z(t)$  n'exprime pas uniquement une dépendance du temps mais c'est juste pour faire référence à un problème temporel, sinon  $z$  dépend bien du temps  $t$  et de l'espace  $x$ . Deuxièmement,  $z_1(0)$  ne signifie pas  $z_1$  à  $t = 0$  mais plutôt  $z_1$  à  $x = 0$ . En outre, l'opérateur différentiel  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  (Laplacien) sera noté par la suite  $(-A_0)$  avec,

$$A_0 = -\frac{d^2}{dx^2}.$$

On reviendra également sur l'avant dernière condition de (2.10) ainsi que sur la sortie  $y(t)$ .

Pour l'instant, notons qu'on ne dispose pas vraiment d'une forme d'état qui nous permet d'aller vers les propriétés dynamiques du système (2.10). En effet, la forme (2.12) n'est qu'une forme intermédiaire qui, après certaines manipulations, nous conduirait à une représentation d'état ayant la forme,

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}V_e(t), \quad (2.13)$$

où les propriétés des opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  se déduisent à partir de ceux de (2.12). Afin d'y parvenir, commençons par introduire certaines notions relatives à la nature du système (2.12). Tout d'abord, en se comparant au cas de la dimension finie, on remarque ici que la notion de matrices telle que la matrice d'état est remplacée par celle d'opérateurs qui est plus étendue. Par conséquent, les trajectoires du système, qui sont habituellement dans des espaces tels que  $\mathbb{R}^n$  dans le cas de la dimension finie, prennent un sens plus large. Elles sont pour la dimension infinie dans ce qu'on appelle les espaces *fonctionnels* tels que l'espace d'Hilbert, de Sobolev et autres. Ceci entraîne plus de définitions relatives à l'existence des solutions, à la bonne position du problème ainsi qu'à l'aboutissement à la forme d'état (2.13). Tous les opérateurs jouent un rôle important ainsi que leurs domaines de définition.

Pour cela, définissons,  $Z$  et  $U$  comme étant des espaces de Hilbert complexes qui correspondent à l'espace des solutions et d'entrées respectivement. D'une manière plus claire, pour un instant  $t$  donné, les trajectoires  $z(t)$ , qui seront des fonctions de  $x$ , vont être dans  $Z$  et l'entrée  $u$  dans  $U$  (par exemple  $\mathbb{C}$ ). A cet effet, les opérateurs de (2.12) seront définis par,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} : D(\mathfrak{A}) \subset Z &\rightarrow Z, & \text{i.e., } \mathfrak{A} &\in \mathcal{L}(D(\mathfrak{A}), Z), \\ \mathfrak{B} : D(\mathfrak{B}) \subset Z &\rightarrow U, & \text{i.e., } \mathfrak{B} &\in \mathcal{L}(D(\mathfrak{B}), U), \end{aligned}$$

avec la propriété  $D(\mathfrak{A}) \subset D(\mathfrak{B})$  et  $D(\cdot)$  qui symbolise le domaine de définition de l'opérateur. A partir de là, deux types de conditions sont à satisfaire pour que (2.12) admette une forme d'état (2.13) avec une solution (trajectoire) unique. Le premier type de conditions est pour que (2.12) soit ce qu'on appelle un *système de contrôle frontière*. Dans le cas général, i.e. pour (2.11), il est mentionné, par exemple dans [21], que les conditions à satisfaire sont les suivantes :

i) L'opérateur  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow Z$  avec  $D(\mathcal{A}) = D(\mathfrak{A}) \cap \text{Ker}(\mathfrak{B})$  et

$$\mathcal{A}z = \mathfrak{A}z \quad \text{pour } z \in D(\mathcal{A}) \quad \text{i.e., } \mathcal{A} = \mathfrak{A}|_{\text{Ker}(\mathfrak{B})},$$

est un générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe  $\mathcal{S}(t)$  sur  $Z$  (voir [21]).

ii) Il existe un  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$  tel que pour tout  $u \in (U)$  et  $Bu \in D(\mathfrak{A})$ , l'opérateur  $\mathfrak{A}B$  est un élément de  $\mathcal{L}(U, Z)$  et

$$\mathfrak{B}Bu = u, \quad u \in U.$$

Notons également qu'il existe d'autres conditions équivalentes, voir, par exemple, [85]. Une fois ces deux conditions vérifiées, i.e., (2.11) est un système de contrôle frontière, le deuxième type de conditions est relatif à l'unicité de la solution. Autrement dit, les conditions pour que (2.11) soit bien posé et admette une solution unique. Pour cela, ce qu'il faut satisfaire c'est la condition de compatibilité, i.e.,

$$\mathfrak{B}z(t) |_{t=0} = u(0),$$

sous l'hypothèse  $u(t) \in C^2([0, \tau]; U)$  pour tout  $\tau > 0$ . A partir de là, la Proposition 10.1.8 de [85] confirme que la solution  $z(t)$  de (2.13) est unique. Il est possible aussi de déduire cette solution  $z(t)$  à partir du changement de variable suivant

$$h(t) = z(t) - Bu(t),$$

car l'équation

$$\dot{h}(t) = \mathcal{A}h(t) - B\dot{u}(t) + \mathfrak{A}Bu(t),$$

est bien posée dans  $Z$  et admet une solution unique sous la condition  $h(t) |_{t=0} = z(t) |_{t=0} - Bu(0) \in D(\mathcal{A})$  et l'hypothèse  $u(t) \in C^2([0, \tau]; U)$ ,  $\tau > 0$ , (voir Théorème 3.3.3 de [21]). Une fois toutes ces conditions réunies, les trajectoires  $z(t)$  de (2.11) sont données par :

$$z(t) = \mathcal{S}(t)z_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau) \mathfrak{B}u(\tau) d\tau. \quad (2.14)$$

Ou encore [21],

$$z(t) = Bu(t) - \mathcal{S}(t)Bu(0) + \mathcal{S}(t)z_0 - \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau) B\dot{u}(\tau) d\tau + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau) \mathfrak{A}Bu(\tau) d\tau,$$

qui, par le biais d'une intégration par parties, peut se transformer en

$$z(t) = \mathcal{S}(t)z_0 - \mathcal{A} \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau) Bu(\tau) d\tau + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau) \mathfrak{A}Bu(\tau) d\tau, \quad (2.15)$$

*Remarque 2.2.* Bien évidemment, (2.15) n'est valable qu'en dehors de  $\mathfrak{B}z(t)$  car, avant d'effectuer l'intégration par parties, on a bien  $\mathfrak{B}z(t) = u(t)$ . Ainsi, pour (2.12), on verra un peu plus loin que le semi-groupe  $\mathcal{S}(t)$  est un opérateur nul à  $x = 0$ . Par conséquent, en évaluant (2.15) à  $x = 0$ , on a  $z(t) = 0$ . Mais, juste avant de faire l'intégration par parties on peut facilement vérifier que  $\mathfrak{B}z(t) = z_1(\ell) = V_e(t)$ .

A ce stade de développement, il est important de noter que pour notre démarche de comparaison, le rôle des trajectoires (2.14) ou (2.15) se révélera très utile par la suite. En effet, le semigroup  $\mathcal{S}(t)$ , contient, entre autres, les modes du système (2.12) qui sont liés au spectre de l'opérateur  $\mathcal{A}$  ce qui permet d'écrire la fonction de transfert. Ainsi, comme les trajectoires  $z(t)$  contiennent assez d'informations sur les propriétés du système, elles sont utilisées en Section 2.5 pour faire une comparaison avec celles du modèle en  $\pi$ . Pour cela, la priorité est désormais de s'assurer que le modèle de ligne (2.12) satisfait bien les deux types de conditions (i) et (ii) mentionnées plus haut. Commençons ainsi par la première,

*i) l'opérateur  $\mathcal{A}$  génère un  $C_0$ -semigroup  $\mathcal{S}(t)$  dans  $Z$  :* En premier lieu, posons  $Z = D\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) \oplus X$  et équipons le du produit scalaire suivant

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z = \left\langle \sqrt{\alpha} A_0^{\frac{1}{2}} f_1, \sqrt{\alpha} A_0^{\frac{1}{2}} g_1 \right\rangle_X + \langle f_2, g_2 \rangle_X, \quad (2.16)$$

avec  $X = \mathbf{L}^2(0, \ell)$  l'espace des fonctions de carrés intégrables, et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  le produit scalaire ordinaire de  $\mathbf{L}^2(0, \ell)$  (voir, e.g., [17]). Par ailleurs, on peut s'assurer que (2.16) vérifie toutes les propriétés d'un produit scalaire dans l'espace d'Hilbert  $Z$ . Définissons aussi,

$$A_0 f = -\frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{pour } f \in D(A_0),$$

avec

$$D(A_0) = \left\{ f \in \mathbf{L}^2(0, \ell) \mid f \text{ et } \frac{df}{dt} \text{ absolument continues, } \frac{d^2 f}{dx^2} \in \mathbf{L}^2(0, \ell) \text{ et } f(0) = \frac{df}{dx}(\ell) = 0 \right\}.$$

et,

$$D\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) = \left\{ f \in \mathbf{L}^2(0, \ell) \mid f \text{ absolument continues, } \frac{df}{dx} \in \mathbf{L}^2(0, \ell) \text{ et } f(0) = 0 \right\}.$$

L'intérêt de la définition de  $D(A_0)$ , est d'être en accord avec les propriétés de l'équation (2.10). En effet,  $v(x, t)$  est continue et dérivable deux fois par rapport à  $x$ , d'où la conditions  $f$  et  $\frac{df}{dx}$  continues. On a aussi comme conditions aux bords  $v(0, t)$  et  $\frac{\partial v(\ell, t)}{\partial x}$ . Ce qui justifie l'apparition de  $f(0)$  et  $\frac{df}{dx}(\ell)$  dans  $D(A_0)$ .

Désormais, on peut retourner à (2.12) et associer à l'opérateur  $\mathfrak{A}$  le domaine  $D(\mathfrak{A})$  comme suit

$$D(\mathfrak{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in Z \mid f_1, \frac{df_1}{dx} \text{ absolument continues, } \frac{d^2 f_1}{dx^2} \in \mathbf{L}^2(0, \ell), \frac{df_1}{dx}(\ell) = 0 \text{ et } f_2 \in D\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) \right\}$$

où  $\frac{df_1}{dx}(\ell) = 0$  reflète l'avant dernière équation de (2.10), i.e.,  $\frac{\partial v(\ell, t)}{\partial x} = 0$ . Par la suite, on pose  $U = \mathbb{C}$  et on a pour l'opérateur de bord  $\mathfrak{B} : D(\mathfrak{B}) \subset Z \rightarrow \mathbb{C}$  avec

$$D(\mathfrak{B}) = D(\mathfrak{A}).$$

Ainsi, le domaine de l'opérateur  $\mathcal{A}$  de (2.13), défini comme  $D(\mathcal{A}) = D(\mathfrak{A}) \cap \ker \mathfrak{B}$ , est donné par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in Z \mid f_1, \frac{df_1}{dx} \text{ absolument continues, } \frac{d^2 f_1}{dx^2} \in \mathbf{L}^2(0, \ell), f_1(0) = \frac{df_1}{dx}(\ell) = 0 \text{ et } f_2 \in D\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) \right\}.$$

D'une manière équivalente,  $D(\mathcal{A}) = D(A_0) \oplus D\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$ . Après avoir donné tous ces éléments, il faut vérifier que l'opérateur  $\mathcal{A}$  génère un  $C_0$  semi-groupe  $\mathcal{S}(t)$  dans  $Z$ . Il

est mentionné, par exemple, dans [21] qu'il suffit pour ceci que l'opérateur  $\mathcal{A}$  soit fermé et qu'il vérifie

$$\begin{cases} \Re(\langle \mathcal{A}f, f \rangle) \leq k \|f\|^2, \\ \Re(\langle \mathcal{A}^*f, f \rangle) \leq k \|f\|^2, \end{cases}$$

où  $\Re(\cdot)$  est la partie réelle,  $(\cdot)^*$  est l'adjoint et  $k$  une constante quelconque.

*Remarque 2.3.* Afin de ne pas alourdir ce chapitre, toutes les démonstrations et les calculs se trouvent en Annexe B. Ici il ne sera présenté que les résultats qui vont être utilisés par la suite.

Dans notre cas, i.e., pour le système (2.12), l'opérateur  $\mathcal{A}$  est un générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe  $\mathcal{S}(t)$  dans  $Z$ . Afin de donner son expression analytique, mentionnons tout d'abord que  $\mathcal{A}$  admet comme valeurs et fonctions propres les quantités suivantes, respectivement,

$$\lambda_{n1,2}(n) = \frac{\beta}{2} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\alpha \left( \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \right)^2 - \beta^2} \quad \text{et} \quad \Phi_n = \{\phi_{n1}, \phi_{n2}\}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

qui vérifient,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\phi_{n1}(x) &= \lambda_{n1}\phi_{n1}(x), \\ \mathcal{A}\phi_{n2}(x) &= \lambda_{n2}\phi_{n2}(x), \end{aligned} \tag{2.17}$$

où

$$\phi_{n1} = \begin{pmatrix} \phi_{1n1} \\ \lambda_{n1}\phi_{1n1} \end{pmatrix}, \quad \phi_{n2} = \begin{pmatrix} \phi_{1n1} \\ \lambda_{n2}\phi_{1n1} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \phi_{1n1}(x) = \frac{\ell\sqrt{2\alpha}}{\alpha(2n-1)\pi} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x\right).$$

Il est montré également (voir, Annexe B) que  $\Phi(x)$  forme une base de Riez, i.e., il existe une famille  $\Psi_n = \{\psi_{n1}, \psi_{n2}\}$  de telle sorte à ce que chaque élément  $z$  dans  $Z$  s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \phi_{n1} \rangle \psi_{n2} + \langle z, \phi_{n2} \rangle \psi_{n1}, \tag{2.18}$$

avec

$$\begin{cases} \psi_{n1}(x) = -\frac{\beta\bar{\lambda}_{n1}\gamma_n}{1 - \beta^2\gamma_n^2 |\lambda_{n1}|^2} \phi_{n1}(x) + \frac{1}{1 - \beta^2\gamma_n^2 |\lambda_{n1}|^2} \phi_{n2}(x), \\ \psi_{n2}(x) = \frac{1}{1 - \beta^2\gamma_n^2 |\lambda_{n1}|^2} \phi_{n1}(x) - \frac{\beta\bar{\lambda}_{n1}\gamma_n}{1 - \beta^2\gamma_n^2 |\lambda_{n1}|^2} \phi_{n2}(x), \end{cases}$$

où  $\psi_{n1}$  et  $\psi_{n2}$  sont biorthogonaux à  $\phi_{n2}$  et  $\phi_{n1}$  respectivement (voir Annexe B). De là, le  $C_0$ -semigroup  $\mathcal{S}(t)$ , qui est lui-même un opérateur, s'écrit :

$$\mathcal{S}(t) \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}_z = e^{At} z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_{n1}t} \langle z, \phi_{n1} \rangle \psi_{n2} + e^{\lambda_{n2}t} \langle z, \phi_{n2} \rangle \psi_{n1}. \tag{2.19}$$

Il est finalement donné par

$$\mathcal{S}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} d_{n_1} (\lambda_{n_2} e^{\lambda_{n_1} t} - \lambda_{n_1} e^{\lambda_{n_2} t}) \langle \cdot, \varphi_n \rangle \varphi_n & \sum_{n=1}^{\infty} d_{n_1} (e^{\lambda_{n_2} t} - e^{\lambda_{n_1} t}) \langle \cdot, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} d_{n_2} (e^{\lambda_{n_1} t} - e^{\lambda_{n_2} t}) \langle \cdot, \varphi_n \rangle \varphi_n & \sum_{n=1}^{\infty} d_{n_1} (\lambda_{n_2} e^{\lambda_{n_2} t} - \lambda_{n_1} e^{\lambda_{n_1} t}) \langle \cdot, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où

$$d_{n_1} = \frac{1}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}}, \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x\right),$$

$$d_{n_2} = \frac{\lambda_{n_2} \lambda_{n_1}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}},$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  qui symbolise le produit scalaire ordinaire dans  $\mathbf{L}^2(0, \ell)$ . Juste pour revenir aux propos de la Remarque 2.2, on peu facilement voir qu'à  $x = 0$ , le semigrout (2.20) est une matrice nulle car  $\varphi_n(0) = 0, \forall n$ . Après ces résultats, notre démarche se poursuit pour monter que le système (2.12) est un système de contrôle frontière dont les trajectoires sont principalement gouvernées par (2.20). Pour cela, il reste à vérifier la condition (ii).

*ii) Il existe un opérateur  $B$  tel que  $\mathfrak{B}Bu = u$  :* Pour cette seconde condition, il suffit juste de remarquer que l'opérateur

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

satisfait bien la condition  $\mathfrak{B}Bu = u$ , pour tout  $u \in \mathbb{C}$ . On en déduit ainsi que (2.12) est un système de contrôle frontière. Il admet également des trajectoires uniques données par (2.14) ou (2.15) dans le cas où la condition  $\mathfrak{B}z_0 = u(0)$  est satisfaite. Autrement dit, si la tension  $V_e(t)$  à  $t = 0$  est compatible (i.e., la même) avec la tension  $v(x, t)|_{t=0, x=0}$  présente initialement à l'entrée de la ligne, i.e., à  $x = 0$ . Cette condition est, généralement, respectée car il existe souvent des procédures qui font que la compatibilité entre les états initiaux du système et les entrées soit conservée. Ainsi, d'un point de vue de la théorie des systèmes dynamiques, on peut désormais s'assurer que le système (2.12) est bien posé. Reste à exploiter les résultats donnés ci-dessus afin d'analyser et d'examiner ses propriétés dynamiques pour des fins de comparaisons.

**A) Trajectoires** Désormais, pour écrire formellement la trajectoire  $v(x, t)$  du modèle dynamique (2.10), on peut se baser directement sur la forme générale (2.15). En effet, étant donné que l'expression du semigrout  $\mathcal{S}(t)$  ainsi que celle des bases  $\Phi_n$  et  $\Psi_n$  est connue, les trajectoires  $z(x, t)$  de (2.12) s'écrivent (voir Annexe B),

$$z(t) = \mathcal{S}(t) z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{A_n(t-\tau)} B_n V_e(\tau) d\tau, \quad (2.22)$$

où

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell\sqrt{LC}}\right)^2 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(2n-1)\pi}{2} \left(\frac{2}{\ell^2 LC}\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x\right) \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$y(t) = \mathcal{C}z(t) = z_1(\ell) = v(\ell, t),$$

avec  $\mathcal{C} = (\langle \delta_{x=\ell}, \cdot \rangle_X \quad 0)$ , où  $\delta_{x=\ell}$  représente la masse de Dirac à  $x = \ell$ . De là, on peut écrire explicitement l'expression de  $y(t)$  comme,

$$y(t) = \mathcal{C}\mathcal{S}(t)z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t C_n e^{A_n(t-\tau)} B_n(\ell) V_e(\tau) d\tau, \quad (2.23)$$

avec :

$$C_n = (1 \quad 0), \quad B_n(\ell) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(2n-1)\pi}{2} \left(\frac{2}{\ell^2 LC}\right) (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

**B) Forme d'état infinie** Comme il a été mentionné auparavant, le semigroupe  $\mathcal{S}(t)$  contient des informations relatives aux modes du système. En effet, les valeurs propres  $\lambda_{n_{1,2}}$  de l'opérateur  $\mathcal{A}$  sont, dans ce cas, les pôles du système dont les dynamiques modales sont supportées par  $\mathcal{S}(t)$  comme le montre (2.19). De là, on peut facilement voir qu'à partir de (2.23), il est possible de construire un modèle d'état  $\Sigma_{\infty}(A_{\infty}, B_{\infty}, C_{\infty}, D_{\infty})$  du système (2.10) dont le nombre d'états est infini et les valeurs propres de  $A_{\infty}$  sont les pôles  $\lambda_{n_{1,2}}$ . Pour y parvenir, il suffit juste de remarquer que dans (2.23), à chaque  $n$ , on dispose d'une trajectoire d'un système du second ordre qui conduit facilement à une représentation d'état  $\Sigma_n(A_n, B_n(\ell), C_n)$ . Ainsi, en parcourant tous les  $n$  et en groupant les différentes représentations d'états, on arrive au modèle global suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{\infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\infty} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{\infty} \end{pmatrix} V_e(t), \quad (2.24)$$

$$y(t) = (C_1 \quad \cdots \quad C_{\infty}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\infty} \end{pmatrix}$$

qui donne une description complète de la dynamique entrée-sortie du système (2.10). Toutefois, pour avoir plus de souplesse lors des comparaisons, on préfère utiliser la fonction de transfert qui est définie dans le paragraphe qui suit. En effet, elle a une forme plus compacte et offre une vision plus claire sur les propriétés structurelles du système.

**C) Fonction de transfert** Tout d'abord, mentionnons que la fonction de transfert d'un système dynamique a la propriété d'être unique. Cela implique que différentes méthodes peuvent être employées pour l'obtenir sans altérer le résultats final. Ainsi, pour les systèmes tels que (2.11), deux voies sont possibles, soit passer par un résultat faisant intervenir le développement (2.19) comme expliqué dans [21], soit passer par une transformée de Laplace des équations (2.12). Ici, on utilise la seconde méthode qui conduit à un problème de Cauchy. Ceci permet d'illustrer, sous un autre angle, les points de différence avec le

cas de la dimension finie et conduit à une fonction de transfert qui est facile à comparer avec celle du modèle en  $\pi$ .

L'application de la transformée de Laplace au système linéaire (2.10), par rapport à la variable  $t$ , conduit à une équation différentielle ordinaire en  $x$  qui est donnée par

$$\frac{d^2 \hat{V}(x, s)}{dx^2} - (LCs^2 - RCs) \hat{V}(x, s) = 0, \quad (2.25)$$

avec :

$$\hat{V}_0(0, s) = V_e(s), \quad \frac{d\hat{V}(x, s)}{dx} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad \text{et } Y(s) = \hat{V}(\ell, s). \quad (2.26)$$

Sa solution générale s'écrit sous la forme

$$\hat{V}(x, s) = \alpha_1(s) e^{x\sqrt{(LCs^2 - RCs)}} + \alpha_2(s) e^{-x\sqrt{(LCs^2 - RCs)}}, \quad (2.27)$$

où  $\alpha_1(s)$  et  $\alpha_2(s)$  sont des fonctions de  $s$  qui sont déterminées en considérant les deux premières conditions de (2.26). Au final, en évaluant (2.27) à  $x = \ell$ , on aboutit à l'expression suivante,

$$\frac{Y(s)}{\hat{V}_e(s)} = \frac{\hat{V}(\ell, s)}{\hat{V}_e(s)} = \frac{1}{\cosh\left(\ell\sqrt{Cs(R + Ls)}\right)}, \quad (2.28)$$

qui représente la fonction de transfert entre la tension de sortie  $\hat{V}(\ell, s)$  et la tension d'entrée  $V_e(s)$ . Notons, au passage que l'apparition de la variable  $x$  dans (2.27) illustre le fait qu'on peut obtenir un transfert entre la tension à n'importe quel point  $x = x_0$  de la ligne et la tension d'entrée. Ce qui n'est pas possible en utilisant un modèle de dimension finie comme on le verra dans les sections qui suivent. De plus, on peut remarquer également que l'évaluation de (2.27) à un point  $x_0$  ne fait pas changer le dénominateur de (2.28) car les pôles  $\lambda_{n_1, 2}$  du système (2.10) sont indépendants de la variable  $x$  tel qu'on a eu l'occasion de le voir précédemment.

*Remarque 2.4.* A ce stade les différences entre (2.28) et une simple fonction de transfert dans le cas de la dimension finie sont bien visibles. En effet, on voit bien que le dénominateur de (2.28) est une fonction de  $s$  et non pas un simple polynôme de degré fini. D'un point de vue formel, cela traduit le fait que la fonction (2.28) est *irrationnelle* (voir par exemple [20]) et non pas rationnelle comme dans le cas de la dimension finie. Cela explique également le fait que le système (2.10) a un nombre infini de pôles dont l'expression dépend fortement du choix des conditions aux bords. En vertu de ces particularités, les investigations dont a bénéficié cette classe de fonctions de transfert irrationnelles ont fait apparaître des notions propres aux systèmes de dimension infinie (voir e.g., [21] et [20]).

Dans l'état actuel, il est à noter que la fonction de transfert (2.28) se présente sous une forme difficile à exploiter et doit être développée afin d'aboutir à une forme plus familière qui fait apparaître explicitement les pôles du système. A cet effet, on peut la réécrire comme une somme de fractions partielles en utilisant le théorème des résidus de Cauchy (voir Annexe B). Ou sous une forme d'un produit infini à l'aide du développement

d'Hadamard (voir, e.g., [41] ou [93]). Pour nos objectifs de comparaison, cette deuxième forme est plus intéressante car elle est plus adaptée et offre une plus grande flexibilité. Ainsi, en utilisant le développement d'Hadamard, qui consiste à développer la fonction entière  $\cosh(z)$  sous forme d'un produit infini suivant ses zéros, on obtient

$$\cosh(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{4z^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right). \quad (2.29)$$

On remarque bien que pour chaque  $n$ , le produit s'annule à  $z_n = \pm j \frac{(2n-1)\pi}{2}$  qui est bien un zéro de la fonction  $\cosh(z)$ . D'où la formule (2.29). Pour le dénominateur de (2.28), il suffit donc de poser

$$z = \ell \sqrt{Cs(R+Ls)},$$

et d'appliquer (2.29). Ce qui conduit au final à la forme ci-dessous

$$\frac{Y(s)}{\hat{V}_e(s)} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4\ell^2 LC}{(2n-1)^2 \pi^2} s^2 + \frac{4\ell^2 RC}{(2n-1)^2 \pi^2} s + 1 \right)}, \quad (2.30)$$

pour laquelle on vérifie aisément que les racines du dénominateur, i.e.,

$$s_{1,2}(n) = -\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} \pm j \sqrt{4 \left( \frac{(2n-1)\pi}{2\ell\sqrt{LC}} \right)^2 - \left( \frac{R}{L} \right)^2} \right), \quad (2.31)$$

sont identiques à  $\lambda_{n1,2}$ , ce qui confirme qu'elles sont bien les pôles du système (2.10). Par ce résultat, on achève ainsi cette section sur la présentation de la structure dynamique du modèle à paramètres distribués des lignes et on passe aux modèles de dimension finie.

#### 2.4.1.2 Modèle en $\pi$

Pour une représentation structurelle du modèle en  $\pi$ , on se base sur les équations (2.6). Afin de se mettre dans les mêmes conditions que le cas précédent, i.e., ligne ouverte à l'extrémité  $x = \ell$ , il suffit de poser  $I_s(t) = 0$  dans (2.6). Il résulte ainsi une équation différentielle second ordre décrivant l'évolution de la tension de sortie  $V_s(t)$  en fonction de la tension d'entrée  $V_e(t)$ . Elle est donnée par

$$\frac{d^2 V_s(t)}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{dV_s(t)}{dt} - \frac{2}{LC\ell^2} V_s(t) + \frac{2}{LC\ell^2} V_e(t),$$

qui peut aisément se mettre sous la forme d'état suivante

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{LC\ell^2} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{LC\ell^2} \end{pmatrix}}_B V_e(t), \\ y(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $x_1(t) = V_s(t)$  et  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ . Contrairement au cas précédent, on remarque bien qu'à chaque instant  $t$ , la solution  $x(t)$  est dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi, les trajectoires de (2.32) sont uniques pour une condition initiale  $x(0) = (x_1(0), x_2(0))^T$  donnée. Elles s'écrivent,

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BV_e(\tau) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}. \quad (2.33)$$

Par ailleurs, on peut remarquer aussi que la notion de semigroup  $\mathcal{S}(t)$ , évoquée dans le cas du modèle à paramètres distribués, devient ici une simple exponentielle de matrice  $e^{At}$ .

**A) Fonction de transfert** De (2.32), la fonction de transfert  $\frac{\hat{V}_s(s)}{\hat{V}_e(s)}$  entre la tension de sortie  $V_s$  et la tension d'entrée  $V_e$  s'obtient par une simple transformée de Laplace. Son expression est donnée par le forme ci-dessous

$$\frac{\hat{V}_s(s)}{\hat{V}_e(s)} = \frac{1}{\left(\frac{LC\ell^2}{2}s^2 + \frac{RC\ell^2}{2}s + 1\right)}. \quad (2.34)$$

Ainsi, les pôles du système (2.32) sont,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} \pm j\sqrt{8 \left( \frac{1}{LC\ell^2} \right) - \left( \frac{R}{L} \right)^2} \right). \quad (2.35)$$

Dans ce cas, on voit bien que la variable  $x$  n'intervient pas car les modèles de dimension finie ne représentent qu'un transfert entre deux points. De plus, en comparant (2.34) et (2.30), on constate qu'ici le dénominateur est un simple polynôme de degré deux qui n'admet que deux racines. Par ailleurs, dans la prochaine section, on verra qu'en mettant une infinité de modèles en  $\pi$  connectés en série, il est possible d'aboutir à une fonction de transfert identique à (2.30).

### 2.4.1.3 Modèle en série de $\pi$

Comme présenté en Section 2.2.3.2, le modèle en série de  $\pi$  est composé de plusieurs modèles en  $\pi$  identiques raccordés les uns aux autres. Ainsi, la fonction de transfert de l'ensemble peut s'obtenir en se basant sur celle d'un seul élément. En ce qui concerne le modèle d'état, il est donné, par exemple, dans [45]. Ici, on se concentre plutôt sur la fonction de transfert. Pour cela, considérant un seul élément  $j$ . A partir de (2.6), Il vérifie les relations ci-dessous,

$$\begin{bmatrix} I_{2_j}(s) \\ V_{2_j}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 + Cs(R + Ls)\delta^2 & -Cs\delta \\ -(R + Ls)\delta & 1 \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} I_{1_j}(s) \\ V_{1_j}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

où  $\delta = \frac{\ell}{n}$ , avec  $n$  qui est le nombre d'éléments en  $\pi$ . En outre,  $V_{2_j}(s), I_{2_j}(s), V_{1_j}(s), I_{1_j}(s)$  sont les transformées de Laplace des grandeurs temporelles. Du fait que (2.36) fait partie

d'une connexion en série, on déduit que l'entrée d'un élément est la sortie du précédent. Autrement dit, on a

$$\begin{bmatrix} I_{1j}(s) \\ V_{1j}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{2j-1}(s) \\ V_{2j-1}(s) \end{bmatrix},$$

pour chaque élément  $j$ . Ainsi, par un processus itératif, on déduit finalement le lien entre  $I_s(s)$ ,  $V_s(s)$  et  $I_e(s)$ ,  $V_e(s)$  qui obéit à l'équation suivante,

$$\begin{bmatrix} I_s(s) \\ V_s(s) \end{bmatrix} = G^n \begin{bmatrix} I_e(s) \\ V_e(s) \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

Ceci s'explique par le fait que les  $n$  éléments sont tous identiques, ce qui conduit à multiplier la matrice polynomiale  $G(s)$  (définie dans (2.36))  $n$  fois par elle-même. L'expression analytique de  $G^n$  se présente sous la forme,

$$G^n = \begin{bmatrix} G_{11}(n) & G_{12}(n) \\ G_{21}(n) & G_{22}(n) \end{bmatrix},$$

où,

$$\begin{aligned} G_{11}(n) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab}{4\delta^{-1}+ab\delta}} (\alpha_1^n - \alpha_2^n) + \frac{1}{2} (\alpha_1^n + \alpha_2^n), \\ G_{12}(n) &= \frac{b}{\sqrt{4ab+(ab\delta)^2}} (\alpha_1^n - \alpha_2^n), \\ G_{21}(n) &= \frac{a}{\sqrt{4ab+(ab\delta)^2}} (\alpha_1^n - \alpha_2^n), \\ G_{22}(n) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab}{4\delta^{-1}+ab\delta}} (\alpha_1^n - \alpha_2^n) + \frac{1}{2} (\alpha_1^n + \alpha_2^n), \end{aligned}$$

$a = -(R + Ls)$ ,  $b = -Cs$ , et,

$$\begin{aligned} \alpha_1^n &= \left( 1 + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} \frac{abl^2}{n} + \frac{1}{2} \ell \sqrt{ab} \sqrt{4 + \left( \frac{abl}{n} \right)^2} \right) \right)^n \\ \alpha_2^n &= \left( 1 + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} \frac{abl^2}{n} - \frac{1}{2} \ell \sqrt{ab} \sqrt{4 + \left( \frac{abl}{n} \right)^2} \right) \right)^n. \end{aligned}$$

Notons que pour aboutir à ces résultats analytiques, la démarche consiste à factoriser la matrice  $G$  de (2.36), en utilisant un outil de calcul formel comme Maple [10], puis élever les valeurs propres à la puissance  $n$ . Ainsi, si l'on considère désormais une infinité d'éléments en  $\pi$ , on a  $n$  qui tend vers l'infini et  $\delta$  qui tend vers zéro. Et comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x,$$

on obtient le résultat ci-dessous,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G^n = \begin{bmatrix} \cosh(\ell\sqrt{ab}) & \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh(\ell\sqrt{ab}) \\ \sqrt{\frac{a}{b}} \sinh(\ell\sqrt{ab}) & \cosh(\ell\sqrt{ab}) \end{bmatrix}.$$

Pour se mettre dans les mêmes conditions que les deux cas précédents, i.e., une ligne ouverte à l'extrémité  $x = \ell$ , on fait tendre la charge  $Z$  (voir Fig. 2.4) vers l'infini. Ce qui

revient à imposer  $I_s(s) = 0$  dans (2.37). Dans ces conditions, le transfert entre  $V_s(s)$  et  $V_e(s)$  et finalement donné par

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{\cosh\left(\ell\sqrt{Cs}(R+Ls)\right)}, \quad (2.38)$$

qui est identique à (2.28) et admet la même expression que (2.30). Cela montre ainsi qu'une mise en série d'une infinité de modèle en  $\pi$  permet de représenter le modèle à paramètres distribués de la ligne. Toutefois, la section qui suit révélera qu'un nombre fini d'éléments (ce qui est le cas en général) ne conduit pas nécessairement aux résultats attendus.

## 2.5 Une comparaison structurelle

A l'issue de la Section 2.4.1, les structures dynamiques de tous les modèles des lignes sont mises sous des formes standards. Par conséquent, on est désormais dans un cadre favorable à une comparaison systémique basée directement sur les propriétés dynamiques des modèles. La démarche consiste à comparer les structures dynamiques entre elles à l'aide de fonctions de transfert et leurs pôles. Ensuite, déceler les liens entre leurs différentes structures en employant des concepts tels que la réduction de modèle. De ce fait, les comparaisons présentées ici portent principalement sur deux aspects. L'un systémique, où on comparera les modes des systèmes, i.e., les pôles de leurs fonctions de transfert. L'autre est comportemental et concerne les trajectoires ce qui viendra compléter la comparaison.

### 2.5.1 Un point de vue systémique

#### 2.5.1.1 A propos du modèle en $\pi$

Commençons par examiner soigneusement les fonctions de transfert (2.34) et (2.30). A première vue, elles sont différentes car le dénominateur de l'une est de degré deux tandis que celui de l'autre est de degré infini. Cependant, il est tout à fait remarquable que (2.30) est un produit d'une infinité de fonctions de transfert second ordre. De là, une manière de comparer la structure du modèle en  $\pi$  avec celle du modèle à paramètres distribués, consiste à limiter (2.30) à un ordre fini. A  $n = 1$ , on obtient l'expression suivante

$$H(s) = \frac{\hat{Y}(s)}{\hat{V}_e(s)} \Big|_{n=1} = \frac{1}{\left(\frac{8}{\pi^2} \frac{\ell^2 LC}{2} s^2 + \frac{8}{\pi^2} \frac{\ell^2 RC}{2} s + 1\right)}, \quad (2.39)$$

qui est une fonction de transfert du second ordre qui représente uniquement le premier mode. En effet, les pôles de (2.39) sont

$$p_{1,2}(n=1) = -\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} \pm j \sqrt{\frac{\pi^2}{8} \left( \frac{8}{\ell^2 LC} \right) - \left( \frac{R}{L} \right)^2} \right). \quad (2.40)$$

En comparant ainsi les pôles (2.40) avec ceux du modèle en  $\pi$ , i.e., avec (2.35), il résulte qu'ils ne sont pas tout à fait identiques mais assez proches. La seule différence provient

du facteur  $\frac{\pi^2}{8}$  sous la racine. On retrouve également ce même facteur, mais inversé (i.e.,  $\frac{8}{\pi^2}$ ), en comparant les dénominateurs de (2.34) et (2.39). Toutefois, du moment que le facteur  $\frac{\pi^2}{8}$  n'est pas très loin de l'unité ( $\frac{\pi^2}{8} \approx 1,23$ ), on peut considérer que la fonction de transfert du modèle en  $\pi$  présente d'assez fortes similitudes avec (2.39).

D'un point de vue systémique, ce résultat s'identifie à une réduction de modèle. Plus précisément, une réduction modale. En effet, la limitation d'une fonction de transfert comme (2.30) à un ordre fini en préservant les modes s'appelle une *troncature modale*. Au début elle a été développée pour les systèmes de dimension finie (voir, e.g., [2], [76]) puis étendue, par la suite, aux cas de la dimension infinie (voir, e.g. [20], [21]). Elle nous sera d'une grande utilité pour la suite comme il est montré dans le prochain chapitre.

Par le biais de ces constatations, il est désormais acceptable de situer le modèle en  $\pi$  comme étant une troncature modale du modèle à paramètres distribués de la ligne. Bien évidemment, tout en ayant pris en considération le fait qu'on est dans le cas des ligne ouvertes à une extrémité. Par ailleurs, en comparaison avec l'analyse des trajectoires présentée précédemment, on voit bien, qu'à travers ce cadre systémique, on a eu une meilleure compréhension du lien entre ces deux modèles. Ces résultats sont complétés en Section 2.5.2 par une analyse du comportement.

### 2.5.1.2 A propos d'un modèle en série de $\pi$

Après avoir analysé le  $\pi$  tout seul, on s'intéresse désormais à sa mise en série. Vu la complexité des calculs, les résultats sont moins détaillés que pour le cas précédent mais suffisamment pour en tirer des conclusions. En Section 2.4.1.3, il est montré que la fonction de transfert (2.30) peut être obtenue via une mise en série d'une infinité de modèles en  $\pi$ . Ici, on considère le cas où ce nombre est fini. Pour cela, prenons, par exemple, deux éléments, i.e.,  $n = 2$ , dans (2.37). Le dénominateur de la fonction de transfert qui en résulte est de degré 4 et s'écrit sous la forme de :

$$D_1 = (LC)^2 \ell^4 s^4 + 2RLC^2 \ell^4 s^3 + (12LC\ell^2 + (RC)\ell^4) s^2 + 24\ell^2 s + 32. \quad (2.41)$$

Comparons ainsi (2.41) avec le dénominateur de (2.30) tronqué à l'ordre deux (i.e.,  $n \in \{1, 2\}$ ). Comme ce dernier est donné par

$$D_2 = (LC)^2 \ell^4 s^4 + 2RLC^2 \ell^4 s^3 + \left(\frac{5}{2}LC\ell^2 + (RC)\ell^4\right) s^2 + \frac{5}{2}\ell^2 s + \frac{9\pi^4}{16}, \quad (2.42)$$

on remarque qu'en passant d'un seul élément en  $\pi$  à deux, l'écart ne s'affine pas d'avantage. Autrement dit, l'écart ne diminue pas nécessairement en se mettant à un ordre plus élevé pour comparer (2.30) et un nombre fini d'éléments en  $\pi$ . Il est facile de remarquer, par exemple, qu'il y a plus d'écart entre (2.41) et (2.42) qu'entre les dénominateurs de (2.34) et (2.39). Cet écart se répercute ensuite sur les pôles obtenus traduisant ainsi le fait qu'on ne dispose pas d'un lien précis qui indique a priori le nombre d'éléments en  $\pi$  nécessaire pour préserver les propriétés dynamiques du système. Dans les applications à grande échelle,

lorsqu'on est amené à utiliser ce type de modèles, le nombre nécessaire d'éléments en  $\pi$  est, généralement, déterminé par tâtonnements.

### 2.5.2 Comportements

Après la comparaison des modèles, la seconde étape de cette démarche systématique consiste à comparer le comportement du modèle en  $\pi$  avec celui de la troncature à l'ordre 1 du modèle complet (2.30). D'un point de vue des trajectoires, cela permet d'évaluer l'impact de la différence  $\frac{\pi^2}{8}$  provenant de la comparaison faite en Section 2.5.1.1 entre les fonctions de transfert (2.34) et (2.39). Avant cela, commençons tout d'abord par donner une lecture systématique aux résultats de la Fig. 2.7.

En Section 2.4.1.2, on a vu que le modèle en  $\pi$  ne contient qu'un seul mode. Par conséquent, lorsqu'on excite ce mode par un échelon, la trajectoire obtenue, i.e., (2.33), oscille à la fréquence de ce mode comme on peut le voir en Fig. 2.7. Tandis que (2.24) contient une infinité de modes qui, une fois excités par un échelon, fournissent chacun une trajectoire oscillatoire avec une fréquence qui augmente comme le montre la partie imaginaire des pôles (2.31). De ce fait, la somme (2.23) de ces trajectoires conduit aux effets dynamiques observés dans la Fig. 2.7, i.e., l'effet transitoire visible en haut et en bas de la trajectoire de tension. Par ailleurs, via cette lecture systématique, on explique également le fait que les dynamiques transitoires sont plus prononcées en Fig. 2.7 qu'en Fig. 2.6a. En effet, l'échelon contient un spectre fréquentiel assez large et donc il excite plusieurs modes qu'une sinusoïde qui ne contient qu'une seule fréquence. Afin d'y voir plus clair, les tracés de Bode (en gain) montrés en Fig. 2.8 résument bien la situation.

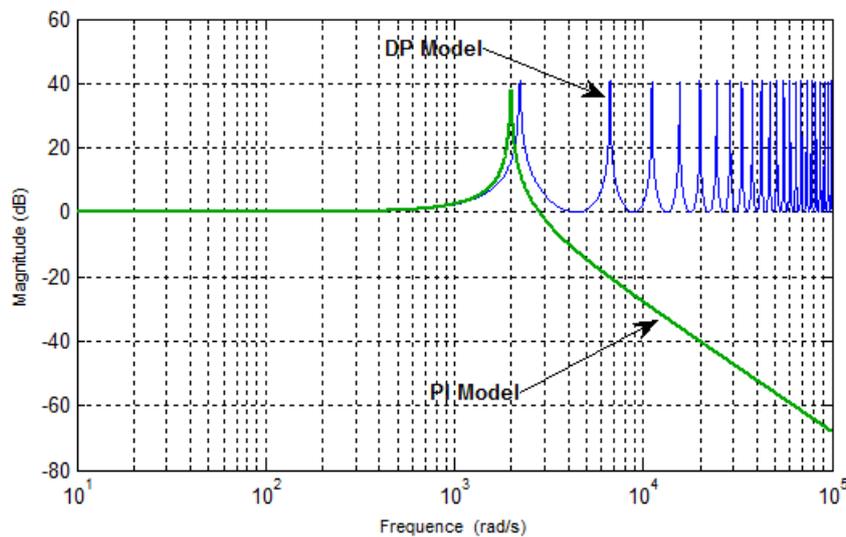


FIGURE 2.8 – Ligne ouverte : comportement fréquentiel des modèle  $\pi$  et complet

En effet, on voit apparaître plusieurs pics qui correspondent aux modes du modèle complet de la ligne. Comme ils ont quasiment la même amplitude (environ 40 db), on peut donc conclure que plus le spectre de l'entrée est large, plus cela fait réagir un nombre important de modes comme expliqué précédemment. Pour le modèle en  $\pi$ , un seul mode réagit (le pic autour de  $2.10^3$  rad/sec), ce qui rejoint les explications données auparavant.

Au final, les arguments que l'on vient de donner jusqu'à lors témoignent d'une meilleure compréhension du lien entre les modèles dynamiques et leurs trajectoires reproduites par les simulations. En effet, on sait désormais que les phénomènes de propagation sont le résultat d'une somme infinie de trajectoires modales dont le modèle en  $\pi$  n'en capte que la première, ce qui n'était pas clair au niveau de l'analyse classique des trajectoires présentées en Section 2.3. Pour compléter l'analyse, revenons à l'effet du facteur  $\frac{\pi^2}{8}$  et écrivons en premier

$$y_1 = \int_0^t C_1 e^{A_1(t-\tau)} B_1 V_e(\tau), \quad (2.43)$$

qui représente la trajectoire de (2.39) avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\pi}{2\ell\sqrt{LC}}\right)^2 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi^2}{8} \frac{2}{\ell^2 LC} \end{pmatrix}, \text{ et } C_1 = (1 \ 0).$$

Ainsi, en comparant (2.43) avec (2.33), on constate qu'il y a une première différence entre les matrices  $A$  et  $A_1$ , ce qui engendre la différence de  $\frac{\pi^2}{8}$  entre les pôles (2.35) et (2.40). Et une seconde différence, encore de  $\frac{\pi^2}{8}$ , entre  $B$  et  $B_1$ , i.e.,  $B_1 = \frac{\pi^2}{8} B$ . Pour analyser l'effet de ces différences, les Figs. 2.9 et 2.10 montrent une réponse de (2.34) et (2.39) à un échelon et une sinusoïde respectivement.

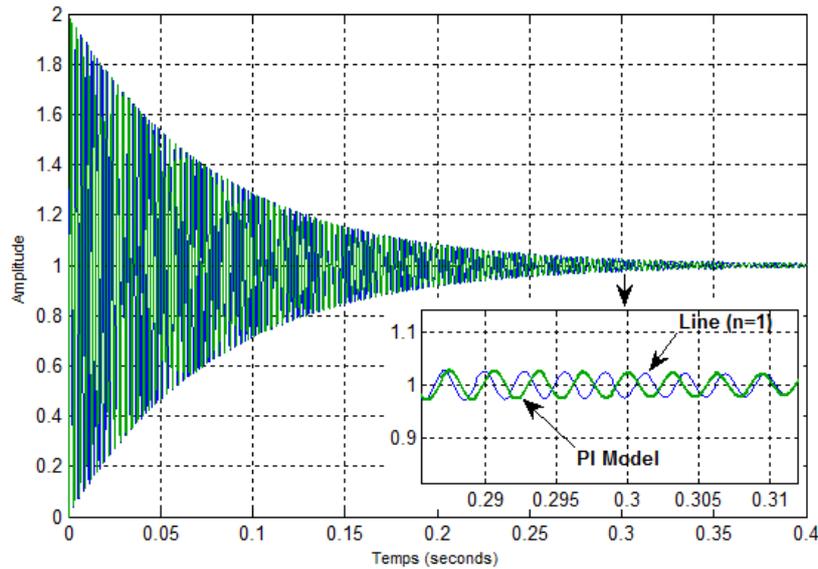


FIGURE 2.9 – Réponse à un échelon du modèle en  $\pi$  et la troncature modale à l'ordre 1

Sur la première figure, i.e., Fig. 2.9, on voit que les trajectoires sont assez similaires avec un léger déphasage dû au facteur  $\frac{\pi^2}{8}$  entre les fréquences des pôles (2.35) et (2.40). Ceci s'explique également de la réponse fréquentielle de la Fig. 2.8 où on constate un petit décalage entre le pic du modèle en  $\pi$  et le premier pic du modèle complet. Quant aux réponses harmoniques de la Fig. 2.10, elles montrent des légères différences au régime transitoire mais qui s'affinent significativement en régime permanent. Elles sont dues principalement au fait que la fréquence de la sinusoïde utilisée coïncide avec la fréquence

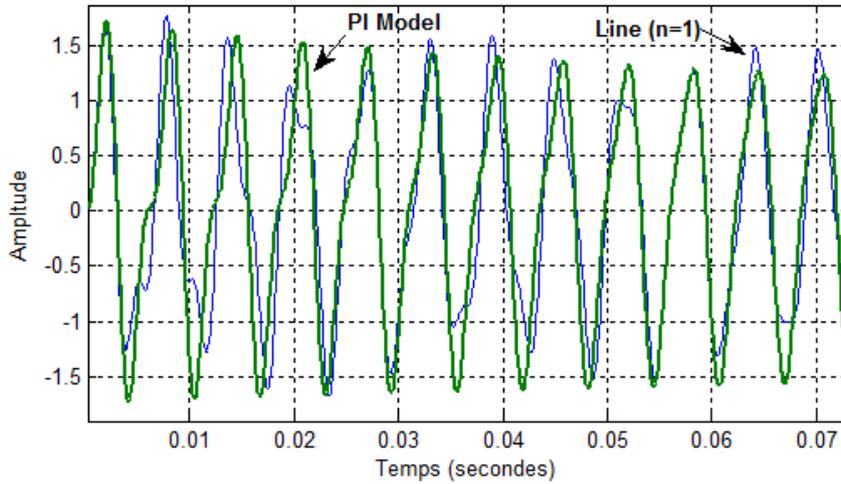


FIGURE 2.10 – Réponse harmonique du modèle en  $\pi$  et la troncature modale à l'ordre 1

du mode correspondant au modèle en  $\pi$  (i.e., le mode est excité). Autrement, pour de faibles fréquences ( $< 10^3$  rad/sec), la Fig. 2.8 montre que le comportement fréquentiel est quasiment identique.

À l'issue de cette comparaison des trajectoires, on constate que les résultats présentés viennent confirmer l'analyse systémique de la Section 2.5.1.1. Ce qui valide ainsi le lien de réduction entre le modèle en  $\pi$  (2.32) et le modèle à paramètres distribués (2.10) de la ligne. Dans la section qui suit, ce lien de réduction est exploité pour expliquer l'approximation des lignes courtes.

### 2.5.3 Cas des lignes courtes

Tel qu'on a pu le voir en Section 2.3, le modèle en  $\pi$  fournit une bonne approximation du comportement des lignes ayant une longueur modérée. Cette déduction repose principalement sur la condition  $w\ell\sqrt{LC} \ll 1$ , sans pour autant révéler un lien avec les propriétés structurelles des modèles dynamiques en question, i.e., (2.32) et (2.10). Ici, par le biais des structures dynamiques (2.34) et (2.30), ce lien structurel est clarifié. Pour commencer, analysons en premier l'effet de la condition  $\ell\sqrt{LC} \approx 0$  (hypothèse des lignes courtes) sur la fonction de transfert (2.30). Sous cette condition, les facteurs

$$4 \frac{(\ell\sqrt{LC})^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \text{ et } \frac{R}{L} \frac{(\ell\sqrt{LC})^2}{(2n-1)^2 \pi^2},$$

associées à  $s$  et  $s^2$  dans le dénominateur de (2.30) seront très faibles, d'autant plus quand  $n > 1$ . Ainsi, cela conduit le dénominateur de (2.30) à pouvoir être approximé par :

$$\left( \frac{4\ell^2 LC}{(2n-1)^2 \pi^2} s^2 + \frac{4\ell^2 RC}{(2n-1)^2 \pi^2} s + 1 \right) \approx 1 \text{ pour } n > 1.$$

D'où le résultat ci-dessous :

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{V}_e(s)} \approx \frac{1}{\left(\frac{8}{\pi^2} \frac{\ell^2 LC}{2} s^2 + \frac{8}{\pi^2} \frac{\ell^2 RC}{2} s + 1\right)}, \quad (2.44)$$

qui est une troncature à l'ordre 1 de (2.30) tel qu'on a pu le voir en Section 2.5.1.1. De là, on déduit ainsi que pour les lignes de longueurs modérées, le modèle complet (2.30) s'approche de sa réduction modale du premier ordre. C'est ce qui explique, dans ce cas, la similitude entre les trajectoires du modèle complet et celles du modèle en  $\pi$ .

*Remarque 2.5.* Notons que le fait d'utiliser la condition  $\ell\sqrt{LC} \approx 0$ , au lieu de  $w\ell\sqrt{LC} \ll 1$ , pour se référer aux lignes relativement courtes n'altère pas le résultat. Pour s'en convaincre, il suffit juste de remplacer  $s$  par  $jw$  dans le dénominateur de (2.30) et constater ainsi qu'on aboutit aux mêmes conclusions qu'avec la première condition.

Par ailleurs, le fait que ce soit le premier mode de (2.30) qui apparaît dans (2.44), implique que, dans ce cas, la dynamique entrée-sortie du modèle (2.10) n'est dominée que par ce mode. Tous les autres modes (i.e., ceux pour lesquels  $n > 1$ ) ont peu d'influence sur le comportement entrée-sortie et peuvent ainsi être négligés. Cependant, on verra dans le prochain chapitre qu'une telle conclusion ne suffit pas quand la ligne fait partie de tout un système interconnecté. Plus précisément, les modes négligés peuvent avoir un impact important sur le comportement de l'ensemble du système.

## 2.6 Conclusion

A l'aide d'une approche systémique, un lien structurel est établi entre le modèle à paramètres distribués (dont les paramètres sont indépendants de la fréquence) d'une ligne électrique et sa modélisation alternative par des modèles en  $\pi$ . D'une manière plus précise, la structure dynamique du modèle en  $\pi$  s'est montrée très proche d'une troncature modale à l'ordre un du modèle à paramètres distribués. Ceci offre une vision plus claire sur la relation entre les structures dynamiques des modèles et leurs comportements, ce qui complète l'analyse classique des trajectoires. De plus, l'acheminement vers ce résultat repose sur un cadre systémique qui a fait apparaître plusieurs propriétés dynamiques du modèle à paramètres répartis. C'est ce qui a joué un rôle clé lors de la comparaison des différents modèles.

De ce fait, cette vision systématique présente plusieurs avantages, surtout, au niveau des comparaisons où les différences entre les modèles sont mieux identifiés. C'est ce qui a servi, entre autres, à montrer qu'il n'est pas évident de trouver a priori le nombre de modèles en  $\pi$  à mettre en série afin de bien approximer un mode donné du modèle à paramètres distribués. De plus, au niveau de la réduction des modèles, on a pu constater qu'une troncature du spectre de l'opérateur est mieux pour garder un lien avec le modèle physique lui-même. En particulier, avec les phénomènes oscillatoires générés comme on l'a vu via la relation entre les phénomènes de propagation et les modes de la ligne. In fine, ce point de vue systémique et, surtout, cette vision modale sont des points d'appui importants pour les questions de réduction abordées au prochain chapitre.

## Chapitre 3

# Réduction des modèles dynamiques des systèmes électriques interconnectés

### 3.1 Introduction

Pour les systèmes de grande taille, la réduction de modèle est un des aspects les plus importants car il constitue une étape souvent incontournable pour faciliter l'implantation des modèles, l'analyse, la simulation numérique ainsi que la synthèse des régulateurs. L'objectif final consiste à obtenir un modèle de plus petite taille (ordre) qui reproduit assez fidèlement le comportement dynamique du système original avec, bien évidemment, la focalisation sur les phénomènes qui présentent un intérêt particulier. A cet effet, plusieurs méthodes ont été développées afin d'atteindre cet objectif. Cependant, ce qui fait la différence entre une approche et une autre, ce sont essentiellement la facilité liée à son application et les divers besoins à satisfaire ensuite. Dans le cas des systèmes électriques, les besoins sont, en priorité, la préservation de la structure dynamique, qui permet de conserver l'empreinte d'un phénomène physique comme les oscillations électromécaniques, et la préservation de la structure physique qui offre plus de flexibilité dans les applications. Toutefois, la prise en compte de ces spécificités n'est pas le seul défi à relever car une modélisation plus détaillée, de certains composants comme les lignes de transmission, a pour effet d'accroître le nombre de dynamiques importantes dans le système. Par conséquent, il devient très difficile, dans ces conditions, de pouvoir évaluer l'importance de chaque dynamique présente dans le système en vue d'en choisir que les plus pertinentes.

Dans ce contexte particulier, les méthodes de réduction standard ne permettent pas de relever tous ces défis qui nécessitent une nouvelle méthodologie de réduction afin de mieux les prendre en compte. En effet, la difficulté avec les méthodes standard vient du fait qu'elles ne sont pas assez flexibles pour une prise en compte simultanée des spécificités citées précédemment afin d'aboutir à un résultat satisfaisant. A titre d'exemple, la préservation de la structure dynamique peut très bien être accomplie par une troncature modale classique mais l'inconvénient est alors le choix des modes qui n'est pas toujours approprié. Plus particulièrement, lorsque tous les indices évaluant l'importance des modes sont presque

égaux, l'ordre du modèle réduit qui donne des bon résultats reste généralement assez élevé.

En vertu de ces enjeux, une nouvelle méthodologie de réduction est proposée dans cette thèse afin de pouvoir traiter *ensemble* les difficultés liées à l'évaluation des dynamiques et les différents besoins mentionnés plus haut. Il s'agit d'une méthode mixte modal/énergétique basée sur une analyse structurelle et systémique qui fait intervenir l'énergie de la réponse impulsionnelle afin de bien choisir les dynamiques importantes à garder dans le modèle réduit. Le point clé, réside dans l'usage des *facteurs de participation* qui permettent de faire le lien entre les variables d'état d'un système dynamique linéaire et les modes qui lui sont associés. Par l'intermédiaire de cet outil, entre autres, il est montré ainsi qu'il est possible de sélectionner un nombre relativement faible de modes qui ont un impact assez important sur la dynamique de tout le système. Un pas est franchi après ce résultat car il s'est rapidement retrouvé au centre des thématiques traitées puisque il répond, d'une part, à la problématique de l'ordre élevé du modèle réduit et, d'autre part, à la préservation des structures physique et dynamique.

## 3.2 Motivations et enjeux liés à la réduction des systèmes électriques

Tel qu'on a eu l'occasion de le constater à travers les lignes de transmission, les systèmes électriques font intervenir des structures dont les modèles dynamiques sont assez complexes. On peut citer aussi d'autres exemples tels que les transformateurs et les arbres des machines qui sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Ceci a pour effet d'amplifier d'avantage la complexité car un système dans son ensemble est le résultat d'une interconnexion de toutes ces structures. Ainsi, il devient très difficile de faire usage de tels modèles à des fins de simulation ou d'analyse du comportement dynamique du système comme il a été mentionné plus haut. Un exemple illustratif est donné ci-dessous en considérant un générateur, une ligne de transmission et une charge.

### 3.2.1 Un exemple illustratif

Afin de consolider les propos ci-dessus, prenons un cas simple qui met bien l'accent sur les difficultés auxquelles on est confronté. Comme le montre la Fig. 3.1, il s'agit d'un système de transmission comportant trois éléments interconnectés. Un générateur représenté par une source de tension  $V_0(t)$  derrière une impédance  $Z_0$  comme cela se fait souvent dans les études des phénomènes liés à la tension (voir, e.g., [39]), une ligne de transmission modélisée par le modèle à paramètres répartis de la Section 2.2.1.2 et, enfin, une charge  $Z_L$  prise ici comme une simple résistance. Le modèle dynamique décrivant le comportement de l'ensemble du système est obtenu en connectant chaque modèle à un autre. Suivant le schéma de la Fig.3.1, une manière simple d'y parvenir est de prendre la structure en quadripole de la Fig. 2.1 pour la ligne et d'écrire ensuite les lois de Kirchhoff

des deux côtés. Ce qui donne au final

$$\begin{aligned} v_0(t) &= V_0(t) - Z_0 i_0(t), \\ v_\ell(t) &= Z_L(t) i_\ell, \end{aligned}$$

où  $(v_0, i_0)$ ,  $(v_\ell, i_\ell)$  sont respectivement, tension et courant au point  $x = 0$  de la ligne, et la même chose au point  $x = \ell$ .

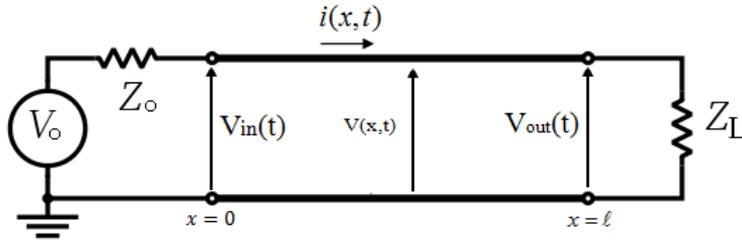


FIGURE 3.1 – Un simple système de transmission

Ainsi, le modèle complet qui en résulte est de dimension infinie (dû au modèle de la ligne) et s'écrit sous la forme,

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{z}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}}_{z(t)}, \\ \mathcal{B}z(t) = V_0(t), \quad z(0, x) = z_0(x), \\ \mathcal{C}z(t) = y(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $z_1(t) = v(x, t)$ ,  $z_2(t) = i(x, t)$ , avec

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[z_1(t) \ z_2(t)]^T &= v(0, t) - Z_0 i(0, t) = V_0(t), \\ \mathcal{C}[z_1(t) \ z_2(t)]^T &= v(\ell, t) = y(t), \end{aligned}$$

qui représentent désormais l'entrée et la sortie respectivement. Bien évidemment, d'autres choix de sorties sont possibles (par exemple le courant) mais ceci ne change pas l'objectif de notre exemple qui est de montrer les difficultés liées à un tel modèle.

En s'appuyant sur la Section 2.2.1.2, la forme (3.1) nous est désormais familière car on a vu qu'elle constitue un problème de contrôle frontière. On a vu également toute la démarche qu'elle a fait intervenir pour parvenir à expliciter les propriétés dynamiques du système et écrire analytiquement ses trajectoires. Pour (3.1), la situation se complique d'avantage car il n'est pas possible d'obtenir une forme explicite et analytique des trajectoires. Ceci est dû au fait que les équations (2.17), qui par l'ajout des termes liés à la charge  $Z_L$ , ne permettent plus de trouver des expressions analytiques aux valeurs et fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

Ceci montre bien les difficultés auxquelles on est confronté et qui le seront d'avantage pour des applications plus complexes (comme celles traitées en Section 3.5.3) où les composants électriques sont, généralement, représentés par leurs modèles détaillés.

Par conséquent, la voie analytique rencontre rapidement ses limites et reste réservée uniquement à des cas très simples. C'est plutôt la simulation numérique qui est utilisée en échange mais, hélas là encore, plusieurs difficultés surgissent. Pour en donner une illustration, la façon la plus simple est de faire une discrétisation en espace du problème (3.1). Cela, conduit à un ensemble d'équations différentielles reliées entre elles comme expliqué dans la Section B). Plus la grille de discrétisation est fine, plus le nombre d'équations est important. Ceci pose des problèmes d'implantation a fortiori en présence de plusieurs lignes de transmission, de générateurs et de charges. Afin de palier à de telles difficultés, plusieurs techniques sont envisageables comme expliqué dans la section ci-dessous.

### 3.2.2 L'intérêt de la réduction

Face aux problèmes mentionnés précédemment, la réduction du nombre d'équations se veut une voie efficace, voir indispensable, pour faciliter l'analyse et la simulation des systèmes électriques interconnectés. Elle contribue fortement à la mise en œuvre des modèles en rendant le système global beaucoup plus exploitable pour étudier des phénomènes générés par les interconnexions, étudier la stabilité et réaliser encore plus de tâches. Cela ouvre également une grande porte vers l'évolution des simulateurs électriques que ce soit au niveau de l'implémentation des modèles eux-mêmes ou au niveau de la gestion des temps de calcul. D'autant plus qu'aujourd'hui les échanges énergétiques se font à une grande échelle, ce qui impacte fortement le savoir faire actuel et rend ainsi l'étape de réduction des modèles encore plus utile et attrayante.

Habituellement, on parle souvent de simplification en faisant référence à la réduction de la complexité d'un modèle, mais en théorie des systèmes dynamiques ceci constitue un champs de recherche entier connu sous le nom de *réduction des modèles dynamiques*. Bien évidemment, quelque soit la terminologie employée, la finalité reste tout de même la réduction du nombre d'équations et de variables en conservant un comportement proche de celui du modèle complet. Ce qui fait la différence entre les méthodes de réduction, ce sont les besoins à satisfaire car, d'une application à une autre, les exigences peuvent varier. En ce qui concerne les systèmes électriques, les enjeux et les problématiques auxquels se heurte la tâche de la réduction sont discutés dans la section qui suit.

### 3.2.3 Les principaux enjeux

D'un point de vue général, le critère principal associé à la réduction des systèmes électriques est la reproduction des phénomènes qui présentent un intérêt particulier. Sur cette base, le résultat d'une réduction est souvent évalué par rapport aux phénomènes usuels qui ont des signatures particulières, tels que les oscillations inter-zones, les oscillations hypo-synchrones, la puissance maximale transmissible ou encore l'écroulement de tension. Tout ceci en se basant, dans la plupart du temps, sur un savoir faire assez *restreint* par lequel les modèles complexes sont remplacés a priori par des modèles *ad hoc* tel qu'il a été mentionné auparavant. Par conséquent, il arrive que dans certaines situations (surtout en présence de composants à base d'électronique de puissance), on ne détecte pas des phénomènes qui peuvent avoir un impact considérable sur le comportement dynamique du système. Quelques exemples de ce type seront traités en Section 3.5.3. Ainsi,

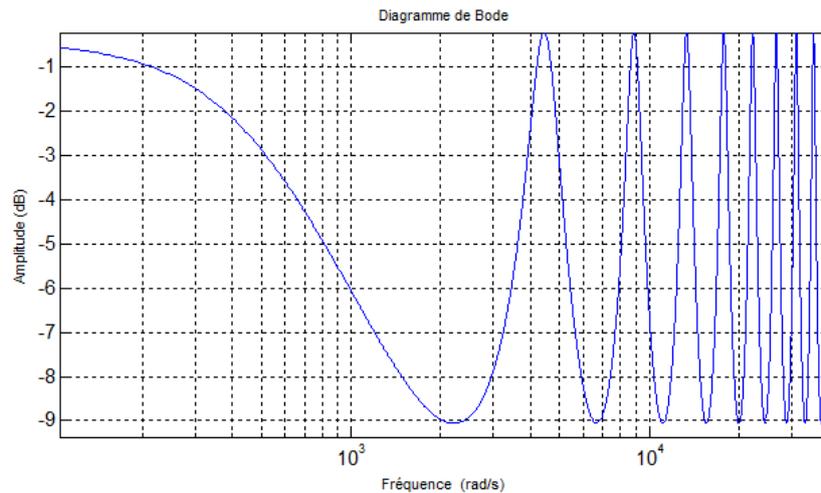


FIGURE 3.2 – Réponse fréquentielle de la tension de sortie

il est nécessaire de fonder le concept de la réduction sur une approche beaucoup plus systémique qui vise à détecter toutes les dynamiques importantes du système. Ensuite, construire le modèle réduit de telle sorte à les reproduire, tout en ayant une mesure quantitative de l'erreur de réduction. Cependant, ceci n'est pas toujours évident et, pour se faire une idée, on peut considérer, par exemple, la réponse fréquentielle représentée en Fig. 3.2 qui correspond au comportement fréquentiel entrée-sortie du système de transmission de la Fig. 3.1. Il est tout à fait remarquable que les pics se répètent avec quasiment le même niveau d'amplitude car le système a, dans ce cas, de nombreuses dynamiques importantes. Dans une telle situation, la tâche de la réduction se complique d'avantage et même les techniques classiques les plus utilisées peinent à donner satisfaction comme il est expliqué en Section 3.3.2.2.

A tout cela, s'ajoutent également des questions liées à des aspects pratiques comme la préservation du sens physique des phénomènes ainsi que la préservation de la structure physique du système qui s'avère très utile dans les applications. Les deux sont présentées ci-dessous.

### 3.2.3.1 Préservation de la structure dynamique

Dans la plupart des applications industrielles, les phénomènes générés par le système ont tous un sens physique comme ceux qu'on a mentionné dans la section précédente. Ainsi, lors d'une réduction de modèle, il est important qu'on puisse garder un lien avec le système physique d'origine de telle sorte à pouvoir interpréter les résultats de la même manière que sur le système de départ. Sur le plan applicatif, ceci a de multiples avantages comme faire un lien direct avec les phénomènes physiques tels que l'oscillation mécanique d'un arbre d'une machine, sa vitesse de rotation ou encore une résonance électromagnétique d'un circuit. Aussi, cela facilite considérablement la synthèse des régulateurs pour, par exemple, amortir des modes oscillants du système.

D'un point de vue dynamique, les phénomènes qu'on vient d'évoquer sont directement liés aux propriétés structurelles du système et, plus précisément, à ses modes comme on

a eu l'occasion de le voir en Section 2.5.2. Ainsi, pour préserver le sens physique d'un phénomène donné, il est important que le/les modes liés à ce phénomène soient bien conservés dans le modèle réduit. C'est pourquoi on parle de la préservation de la *structure dynamique* qui se distingue de la *structure physique* qu'on abordera juste après.

### 3.2.3.2 Préservation de la structure physique

Rappelons d'abord qu'un système électrique interconnecté est composé de plusieurs sous-systèmes (générateurs, lignes et autres) connectés entre eux comme on peut le voir en Fig. 3.1. De ce fait, la *structure physique* représente la façon dont les sous-systèmes sont connectés les uns aux autres comme on peut mieux le voir en Fig. 3.3, où les sous-systèmes sont représentés par des blocs entrée-sortie reliés par un ensemble d'interconnexions. Par ailleurs, dans le cas où l'un des sous-systèmes a sa propre structure physique comme, par exemple, une machine avec ses régulateurs, cette structure est soit explicitée pour faire partie de la structure globale, soit intégrée dans une représentation entrée-sortie du sous-système en question.

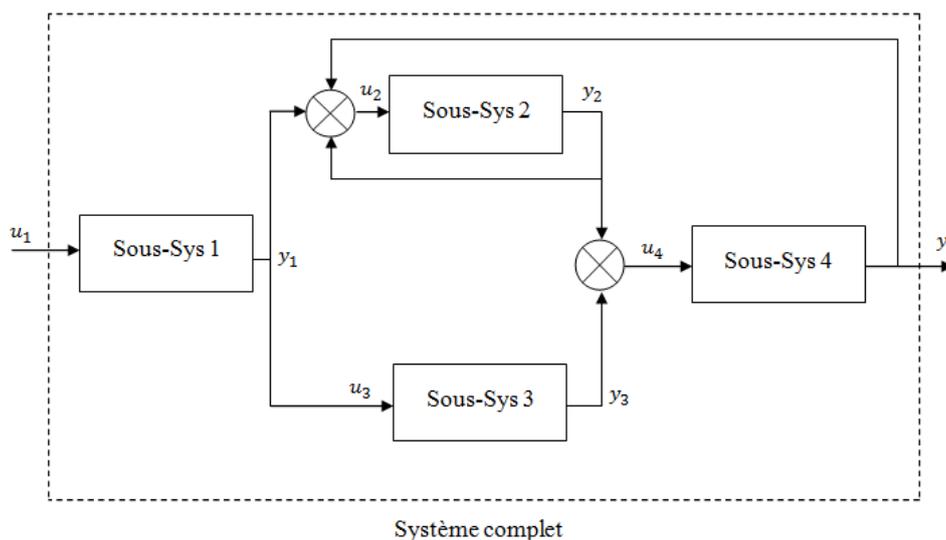


FIGURE 3.3 – Structure entrée-sortie d'un système interconnecté

Le modèle dynamique qui résulte de l'interconnexion est ensuite exploité pour étudier le comportement dynamique du système et développer, par exemple, des stratégies de commande et des plans d'action pour faire face aux perturbations qui affectent le bon fonctionnement du système. De ce fait, l'intérêt de la structure physique est de conserver le sens des grandeurs physiques comme les courants et les tensions et de faciliter la prise en compte des événements qui perturbent le système tels qu'une variation de charge, une déconnexion d'une ligne ou encore un défaut, i.e., un court circuit. En outre, comme mentionné auparavant, elle présente également un intérêt pour la synthèse des régulateurs pour des éléments spécifiques (tels que les générateurs) afin d'assurer une bonne conduite du système.

Pour toutes ces raisons, il est donc essentiel de préserver la structure physique du

système après la réduction de son modèle dynamique. La stratégie pour y parvenir est de réduire uniquement le modèle du sous-système auquel on s'intéresse sans modifier la manière dont il est connecté au reste du système. Un exemple de ce type est traitée en Section 3.5.3 où uniquement le modèle de la ligne de transmission est réduit puis réintégré dans le système en gardant les mêmes connexions qu'avant. Tout ceci passe par une formulation dans un contexte de réduction des modèles dynamiques tel qu'il est expliqué dans la section ci-après.

### 3.3 Formulation du problème et stratégies courantes

Afin d'aboutir à une méthodologie qui permet de répondre au mieux aux besoins évoqués précédemment, il est nécessaire de procéder à une formulation plus élaborée de la problématique. Pour cela, il est important de se positionner par rapport aux méthodes usuelles afin de formuler des questions plus objectives qui cernent mieux les besoins. D'un point de vue applicatif, la plupart des stratégies de réduction existantes ne répondent pas à nos objectifs de réduction mais certaines ont tout de même des atouts très utiles. Surtout en ce qui concerne l'aspect *structurel* qui permet une meilleure prise en compte de la structure dynamique du système et offre ainsi une vision plus large sur le rôle de ses dynamiques car c'est là où réside la grande partie du problème. En effet, toute la question se concentre autour du choix des dynamiques importantes à garder dans le modèle réduit afin de pouvoir reproduire assez fidèlement les phénomènes qui présentent un intérêt. C'est dans ce contexte également que certaines méthodes, telles que la troncature équilibrée et modale, se montrent moins efficaces face à des systèmes qui ont un nombre assez élevé de dynamiques difficiles à évaluer.

#### 3.3.1 Formulation pour la réduction

Avant d'aborder la question de la réduction et les méthodes qui lui sont dédiées, il est important de débiter par une mise en forme du modèle dynamique des systèmes électriques. Tout d'abord, mentionnons que ces derniers sont généralement modélisés par des modèles non linéaires comme on peut le voir en Annexe D. De plus, comme la plupart des modèles sont algébro-différentiels tels que (2.6), l'interconnexion conduit à un modèle du même type, voir plus compliqué, car le couplage entre les équations différentielles, algébriques et aux dérivées partielles (comme ceux des lignes) conduit à des équations *algébro-différentielles partielles* (voir, e.g., [47]). Un exemple d'un tel mélange est donné en Annexe D. Le modèle que l'on vient de décrire est trop complexe pour être exploité directement et il est souvent soumis à toute une série de simplifications. L'une d'entre elles consiste à linéariser le modèle autour d'un point d'équilibre afin de pouvoir l'exploiter plus facilement, surtout, pour des fins d'analyse ou de réduction (voir, e.g., [46], [59]). On reviendra également sur d'autres simplifications par la suite tout en montrant en Section 3.5.3 que les résultats obtenus justifient bien cette démarche.

A présent, la forme du modèle que l'on retient pour un système électrique interconnecté s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \\ y(t) = \mathcal{C}x(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  sont des opérateurs comme on l'a vu en Section 2.4.1.1 et  $x(t)$  contient les variables physique du système (vitesses, tensions, courants et autres).

*Remarque 3.1.* En général, la linéarisation conduit à un modèle linéarisé décrit par des équations algébro-différentielles partielles. Ainsi, pour aboutir à la forme (3.2), il existe toute une procédure qui s'appelle *réduction d'index* et qui consiste à manipuler les équations afin de faire disparaître les variables algébriques. En analyse numérique, c'est un sujet qui est toujours actif car il est généralement plus commode de travailler avec une forme d'état telle que (3.2).

### 3.3.1.1 Principe de la réduction

Pour un modèle tel que (3.2), le problème de la réduction, que ce soit dans le cas de la dimension infinie ou finie, consiste à réduire l'ordre du modèle. Autrement dit passer de (3.2), qui contient une infinité (un grand nombre dans le cas de la dimension finie) de variables d'état (comme dans (2.24)), au modèle réduit ci-dessous

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t), \\ y_r(t) = C_r x_r(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

qui n'en contient que  $r \ll n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) variables d'état avec comme critère  $y_r(t)$  proche de  $y(t)$ , i.e.,

$$\|y - y_r\| \leq \epsilon. \quad (3.4)$$

Par la suite, on reviendra plus en détail sur le modèle réduit (3.3) et le critère (3.4) car plusieurs normes peuvent être considérées (par exemple, norme 2, norme infinie, etc) et c'est là où sont situés nos objectifs de réduction. En effet, pour préserver la structure dynamique, par exemple, il est impératif que les valeurs propres de  $A_r$ , qui sont les pôles de (3.3), soient parmi celles de (3.2), i.e., la réduction doit préserver les pôles à l'identique. Ceci n'est pas systématique pour toute méthode de réduction car le fait d'avoir une norme relativement faible de la différence entre les sorties n'implique pas nécessairement que les pôles sont préservés à l'identique.

A cela, s'ajoute la question du sens physique des variables d'état de (3.3) car, suite à une réduction du modèle (3.2), la signification des variables (par exemple, vitesses, tensions, courants) est généralement perdue. Ceci est vrai pour la majorité<sup>1</sup> des méthodes de réduction, y compris celle proposée ici pour la préservation de la structure dynamique, car cela est dû à toutes les transformations qui précèdent la réduction. En revanche, dans le cas où la structure physique est préservée (en réduisant uniquement des sous-systèmes), on parvient assez facilement à répondre positivement à cette question. Tous ces aspects sont mieux expliqués et élucidés dans la prochaine section.

---

1. Les méthodes permettant de garder la nature physique d'un système sont réservées à des structures physiques (voir [70]) ayant un modèle de dimension finie et elles sont plutôt propres à chaque système. Par exemple pour un circuit électrique RLC, le modèle réduit est lui aussi un circuit RLC (voir, e.g., [76]) et il en est de même, par exemple, en mécanique.

### 3.3.2 Positionnement par rapport à des méthodes courantes

Comme on l'avait mentionné auparavant, les questions objectives auxquelles nous apporterons des réponses par la suite s'affinent en se positionnant par rapport à quelques méthodes existantes. En passant en revue deux types d'approches, qui sont celles basées sur des hypothèses simplificatrices et celles dites *structurelles*, on sortira avec des objectifs mieux identifiés, notamment en ce qui concerne l'intérêt de prendre en compte toute la structure dynamique du système dans le processus de réduction. Mais aussi de la manière dont il faut choisir les dynamiques afin de garantir à la fois une bonne approximation du comportement et une préservation de la structure dynamique. Tout cela est, en outre, appuyé par des exemples tests qui montrent la position de chaque approche par rapport à nos objectifs de réduction.

#### 3.3.2.1 Approches par hypothèses simplificatrices

En ce qui concerne ce type d'approches, la simplification repose, en grande partie, sur des connaissances assez solides du fonctionnement du système physique. Le premier pas consiste, en général, à réunir l'ensemble des considérations pratiques (e.g., une fréquence de travail fixe, un niveau de puissance bien connu) à partir desquelles des hypothèses simplificatrices sont formulées en s'appuyant sur un œil d'expert. Ensuite, l'étape de réduction est réalisée en simplifiant le modèle d'un sous-système donné après l'avoir isolé du système global. Un schéma illustratif de cette procédure est donné en Fig. 3.4.

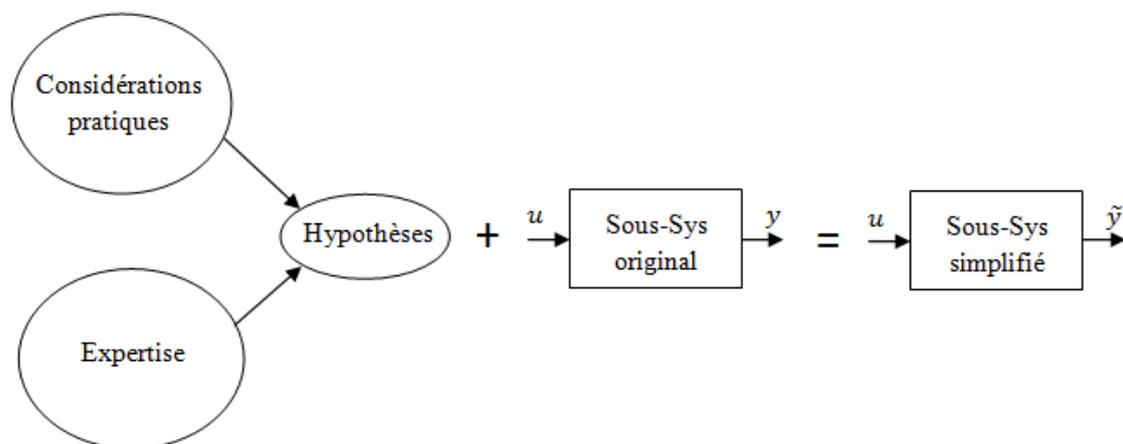


FIGURE 3.4 – Schéma d'une approche par hypothèses

Le modèle simplifié obtenu remplacera ensuite le modèle original du sous-système en question. Il est à préciser aussi que cette simplification n'est pas juste réservée aux équations (telle qu'une suppression de dynamiques rapides) mais peut s'étendre à la structure physique elle-même comme pour le modèle en  $\pi$  traité en Section 2.2.3.1. Dans ce dernier cas on parle plutôt d'*agrégation* car on réunit des éléments physiques qui présentent des similitudes pour ne former qu'un seul au final.

Bien que cette démarche, dont on vient de rappeler le principe, est couramment utilisée dans les applications, elle reste peu flexible car la structure dynamique du système

entier n'est pas prise en compte dans le processus de réduction. Ce qui fait que l'on n'a pas une vision claire et globale de l'impact de chaque dynamique du système sur son comportement. Afin d'illustrer ceci, considérons à nouveau le système de la Fig. 3.1 en remplaçant, cette fois-ci, le modèle (2.3) de la ligne par un modèle en  $\pi$ . La structure qui en résulte est montrée en Fig. 3.5.

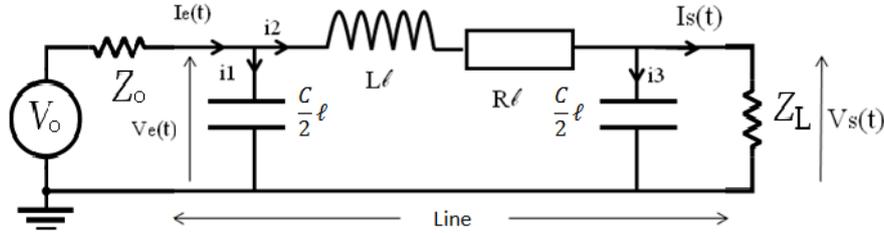


FIGURE 3.5 – Système de transmission avec modèle en  $\pi$

Son modèle dynamique est donné par

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{2R\ell+2Z_L}{LC\ell^2Z_L}\right) & -\left(\frac{2L+RC\ell Z_L}{LC\ell Z_L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{LC\ell^2} \end{bmatrix} V_0(t), \quad (3.5)$$

où  $x_1 = V_s(t)$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$  et  $Z_0$  est négligée.

La Fig. 3.6 montre la réponse à un échelon sur  $V_0(t)$  des systèmes (3.2) (avec Modèle DP<sup>2</sup> et le modèle à retard de EMTP) et (3.5) (PI Model) respectivement. La différence entre la trajectoire obtenue en utilisant le modèle en  $\pi$  est les deux autres trajectoires est assez remarquable et montre clairement que l'utilisation du modèle en  $\pi$ , dans ce cas, ne permet pas de reproduire correctement la dynamique de propagation qui se caractérise par un effet escalier accompagné d'oscillations amorties. Ce phénomène résulte de la somme répétitive des ondes de tension incidentes ( $v^+$ ) et réfléchies ( $v^-$ ) au point  $x = \ell$  de la ligne. Selon le coefficient de réflexion  $\rho = \frac{v^-}{v^+}$ , les sauts de tension peuvent augmenter, diminuer ou s'annuler dans le cas d'une adaptation d'impédance à l'aide d'un choix particulier de la valeur de  $Z_L$  (voir, par exemple, [4] pour plus de détails). Dans notre cas, le premier saut de tension apparaît après un temps de retard égal à  $\tau = \ell\sqrt{LC}$  et se répète chaque  $t = 2\tau$  (voir Fig. 3.6) en s'atténuant jusqu'à ce que la tension se stabilise à une valeur finale qui dépend de l'amplitude  $v_0$  de l'échelon et des valeurs des impédances  $Z_0$ ,  $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$  et  $Z_L$ . Quant aux oscillations qui accompagnent les sauts, elles sont dues à la résistance de la ligne. D'un point de vue systémique, ce phénomène de propagation s'explique par l'excitation des modes du modèle complet de la ligne qui ne sont pas présents dans le modèle en  $\pi$  comme on a eu l'occasion de le voir en Section 2.5.2. Ce qui montre ainsi qu'il n'est pas toujours évident de prévoir le comportement dynamique du système en se limitant uniquement à une vision locale basée sur des hypothèses de fonctionnement. La tâche est d'autant plus complexe pour des applications réalistes du fait que ce type

2. Pour réaliser les simulation, le modèle à paramètres distribués (3.2) est discrétisé en espace (comme expliqué en Paragraphe B) et le modèle qui en résulte est d'ordre 1000.

d'approches est généralement suivi de plusieurs tests *a posteriori* afin de valider le modèle réduit.

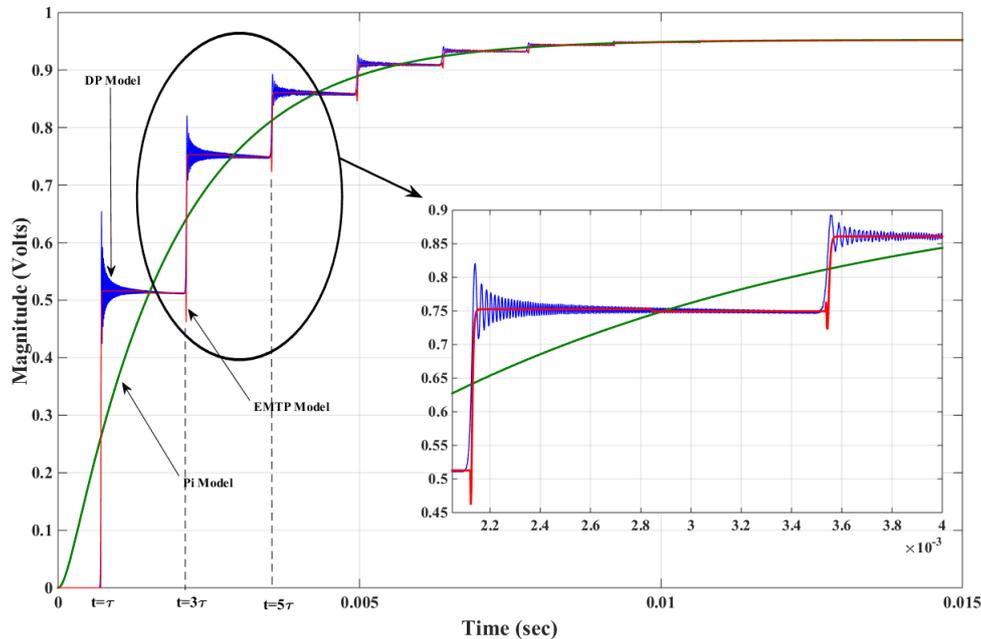


FIGURE 3.6 – Réponses indicielles du système de transmission

Pour palier à de telles difficultés, les approches structurales, présentées ci-après, prennent en compte toute la structure dynamique du système et permettent une évaluation *a priori* du résultat de la réduction.

### 3.3.2.2 Approches structurales

Comparée au cas précédent, une réduction structurale d'un modèle dynamique tel que (3.2) est une façon d'aboutir au modèle réduit (3.3) en ne gardant que les dynamiques qui ont un impact majeur sur le comportement entrée-sortie du système. A cet effet, différents indices sont employés pour mesurer cet impact en triant les dynamiques selon leurs caractéristiques (e.g., rapides, énergétiques, contrôlables/observables ou l'amplitude entrée-sortie). De là, chaque méthode de réduction utilise un indice particulier et fournit un modèle réduit qui contient uniquement les dynamiques qui correspondent aux plus grands indices, i.e., importantes. La réduction via la Décomposition Orthogonal Propre (POD), par exemple, utilise un indice relatif aux bases de projection alors que la troncature équilibrée utilise les valeurs singulières de Hankel qui reflètent l'énergie des états. Il y a aussi la troncature modale qui sélectionne les dynamiques suivant leur impact dans la norme infinie du système. In fine, le résultat de la réduction est, généralement, évalué en utilisant un critère tel que (3.4). Toutes ces techniques sont rappelées ci-dessous et leurs performances pour les systèmes électriques sont discutées via l'exemple de la Fig. 3.1.

**A) Réduction via la Projection Orthogonale Propre** Comme son nom l'indique, cette technique comporte généralement deux étapes. La première consiste à trouver une base de projection moyennant une décomposition orthogonale propre. Ensuite, une projection comme celle de Galerkin est utilisée pour passer d'un modèle décrit par des équations aux dérivées partielles à un ensemble d'équations différentielles (généralement de taille raisonnable). Une fois ces équations intégrées, on obtient ainsi une approximation du comportement entrée-sortie du modèle dynamique de départ. Avant d'examiner les performances de cette technique, vis-à-vis des systèmes électriques et de nos objectifs de réduction en particulier, commençons par rappeler succinctement son fondement. Globalement, il s'agit de trouver une base de taille finie  $\xi(x) = \{\xi_1(x), \dots, \xi_N(x)\}$  de telle sorte à ce que la trajectoire  $y(x, t)$  d'un système de dimension infinie puisse être approximée par

$$y_N(x, t) = y_0(x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \xi_i(x), \quad (3.6)$$

où  $y_0(x)$  est une réalisation moyenne et  $\alpha_i(t)$  sont des fonctions temporelles. De là,  $y_0(x)$  ainsi que les fonctions de base  $\xi_i(x)$  sont généralement calculées par ce qu'on appelle la méthode des *clichés*. Plus précisément, soit,

$$\{y_1(x), \dots, y_{N_c}(x)\},$$

où  $y_k(x) = y(x, t_k)$ ,  $k = \{1, \dots, N_c\}$ , un ensemble de  $N_c$  clichés de la trajectoire originale  $y(x, t)$  pris à différents instants  $t_k$ . Ainsi, on a

$$y_0(x) = \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} y_k(x), \quad \text{et} \quad \xi_i(x) = \sum_{k=1}^{N_c} v_k^i y_k(x),$$

où  $v_k^i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur propre  $v^k$  solution de

$$K v^k = \lambda_k v^k,$$

avec  $K$  qui est dite matrice de *corrélations* car  $K_{i,j} = \langle y_i(x) - y_0(x), y_j(x) - y_0(x) \rangle$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N_c\}$ , avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  qui est le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ , où  $\Omega$  est le domaine de définition du système. A partir de là, l'ordre de réduction  $N$  de (3.6) est obtenu de telle sorte à satisfaire

$$\frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k}{\sum_{j=1}^{N_c} \lambda_j} \approx 1 \quad \text{ou encore} \quad \|y(x, t) - y_N(x, t)\|_2^2 \leq \epsilon.$$

Une fois cette étape accomplie, la réduction de modèle se fait en projetant simplement les trajectoires du système sur les éléments de la base  $\xi$ . Pour y voir plus clair, supposons que  $y(x, t)$  décrit le comportement du modèle dynamique donné par

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = F(y(x, t)), \quad (3.7)$$

où  $F(\cdot)$  est une fonction dépendante de  $y$  et de ses dérivées spatiales. Ainsi, en remplaçant  $y$  par (3.6) et en multipliant par  $\xi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , on aura donc l'ensemble d'équations

différentielles ci-dessous (car les  $\xi_i(x)$  sont orthogonales, i.e.,  $\langle \xi_i(x), \xi_j(x) \rangle = 0$  pour  $i \neq j$ )

$$\frac{d\alpha_i}{dt} \langle \xi_i(x), \xi_i(x) \rangle = \langle F(y_N), \xi_i(x) \rangle \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.8)$$

qui représente le modèle réduit d'ordre  $N$  du modèle original (3.7) (voir, e.g., [38] ou [74] pour des exemples d'application). Par ailleurs, si l'on regarde bien la trajectoire (3.6), on remarque qu'elle ressemble à (2.22) dans le sens où c'est une superposition de produits de deux fonctions dont une de  $x$  et l'autre de  $t$ . C'est ce que l'on appelle une *séparation de variables* (voir e.g., [54] pour plus de détails). Une telle séparation est couramment utilisée comme, par exemple, dans la Décomposition Propre Généralisée (PGD), qui est une méthode de réduction plus évoluée que la POD (voir, e.g., [15], [16]).

Bien que les deux techniques (POD et PGD) fournissent généralement d'excellents résultats et s'appliquent même aux cas non linéaires, certaines remarques sont à faire quant à leur intérêt pour nos objectifs de réduction. En premier, on peut remarquer qu'en (2.22) les fonctions temporelles sont directement liées au modes du système comme c'est expliqué en Section 2.4.1.1. Tandis que dans (3.6) les  $\alpha_i(t)$  vérifient les équations (3.8) mais aucune indication n'est donnée à propos des modes, de leur préservation ou tout simplement de la structure dynamique du modèle original. D'ailleurs, ce que l'on appelle modes dans (3.6) est plutôt les fonctions  $\xi_i(x)$  que les dynamiques liées aux pôles du système. Ainsi, un modèle réduit tel que (3.8) est plus un *modèle de simulation* que d'analyse car il sert principalement à décrire les trajectoires. Néanmoins, il est mentionné en Section 3.2.3.1 que l'analyse, le contrôle et l'étude des phénomènes générés par un système électrique se basent plutôt sur les modes que sur les trajectoires toutes seules. A cela s'ajoute aussi la notion de clichés employées dans la POD qui constitue un frein dans les applications, car il est toujours très délicat de simuler un grand systèmes avant de le simplifier. Les méthodes comme celles présentées ci-dessous sont, en revanche, plus proches de la structure dynamique du système et fournissent des modèles réduits adaptés aussi bien pour l'analyse que pour les simulations.

**B) Troncature modale :** Tel qu'on l'a vu à travers l'exemple de la Section 2.4.1.1, une troncature modale consiste à tronquer un système en gardant uniquement un certain nombre de dynamiques liées à ses pôles. Dans le cas des systèmes multivariables, qui ont des pôles simples, la troncature se base sur la forme

$$G(s) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{R_k}{s - \beta_k}}_{G_k(s)}, \quad (3.9)$$

qui est une décomposition en *fractions rationnelles* de la matrice de transfert  $G(s)$  du système où  $\beta_k$  sont les pôles et  $R_k$  la matrice résidu du pôle  $\beta_k$ , i.e.,  $R_k = \lim_{s \rightarrow \beta_k} (s - \beta_k) G(s)$ . Dans le cas où le système est de dimension infinie tel que (2.28), la décomposition (3.9), si elle existe, est d'ordre infinie, i.e.,  $n = \infty$  (voir [20] pour plus de détails). Ainsi, le modèle réduit est construit en gardant uniquement  $N < n$  fractions parmi celles de (3.9), i.e., une réduction d'ordre  $N$  de  $G(s)$  s'écrit :

$$G^N(s) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{s - \beta_k}. \quad (3.10)$$

Ce qui montre ainsi que cette méthode préserve la structure dynamique (voir Section 3.2.3.1) car en passant de (3.9) à (3.10), les modes sont conservés à l'identique. On note, toutefois, que les modes gardés dans (3.10) ne sont pas nécessairement les premiers, i.e.,  $1, 2, \dots, N$ . La prochaine étape consiste ainsi à choisir lesquels garder dans (3.10) afin de bien approximer le comportement entrée-sortie du modèle original (3.9). A cet effet, différentes techniques sont usuellement utilisées, et parmi elles :

- faire un classement des modes selon les valeurs absolues des parties réelles des pôles, i.e.,  $|\Re(\beta_1)| \leq |\Re(\beta_2)| \leq \dots$ , en vue d'en choisir que ceux dont les valeurs absolues sont les plus faibles, i.e., les modes les plus lents (voir, e.g., [2])
- faire un classement selon la norme (module dans le cas monovariante) des résidus, i.e.,  $\|R_1\| \geq \|R_2\| \geq \dots$ , puis choisir ceux ayant les plus fortes valeurs.

Cependant, la technique qui reste la plus utilisée est le choix basé sur la norme  $H_\infty$  de l'erreur de troncature. Plus précisément, on a

$$\|G(s) - G^N(s)\|_\infty = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{R_k}{s - \beta_k} \right\|_\infty \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \left\| \frac{R_k}{s - \beta_k} \right\|_\infty.$$

Ce qui conduit au final à

$$\|G(s) - G^N(s)\|_\infty \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\|R_k\|_2}{|\Re(\beta_k)|}. \quad (3.11)$$

De (3.11), il est donc clair que les fractions de (3.9) dont la norme  $H_\infty$  est grande sont importantes à garder dans le modèle réduit (3.10) afin de minimiser la norme infinie de l'erreur de troncature. Néanmoins, on verra par la suite qu'aucune stratégie de choix des modes parmi celles qu'on vient de citer n'est adaptée aux systèmes électriques et, en particulier, à l'exemple de la Fig. 3.1. Pour cause, un nombre important de modes (presque la totalité) doit être gardé dans le modèle réduit afin d'obtenir des résultats satisfaisants.

**B.1) Mise en œuvre :** Pour le cas général du système de la Fig. 3.1 (i.e., avec charge) comme pour un système intrconnecté plus grand, il n'est pas possible d'obtenir analytiquement la décomposition (3.9) de la fonction de transfert  $G(s)$ . C'est pourquoi, on effectue généralement des approximations numériques afin de pouvoir réaliser la troncature. L'algorithme d'approximation utilisé dans notre cas est décrit ci-dessous

- 1) Trouver une approximation  $(A_n, B_n, C_n)$  des opérateurs  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  via un schéma numérique d'ordre  $n$ .
- 2) Calculer les pôles du système  $\Sigma^n(A_n, B_n, C_n)$  ainsi que leurs résidus.

- 3) Construire la décomposition en fractions rationnelles de la fonctions de transfert et enfin réduire le système en gardant uniquement les fractions dont la norme  $H_\infty$  est grande.

Bien évidemment, la première étape de l'algorithme ci-dessus est très importante car elle est à la base du calcul des pôles et des résidus. Dans notre cas, puisque le modèle des lignes (2.3) n'a qu'une seule dimension spatiale, i.e.,  $x$ , la technique d'approximation utilisée est celle des *différences finies*. Afin de tester sa validité, considérons le modèle (3.1) dans le cas particulier d'une ligne ouverte et une source de tension idéale (i.e.,  $Z_0 = 0$  et  $Z_L = \infty$  dans la structure de la Fig. 3.1). Comme ce cas est traité analytiquement en Section 2.4.1.1, le Tableau 3.1 montre les valeurs exactes et approchées des pôles et résidus liés aux dix premiers modes. Compte tenu des résultats, on peut donc considérer que cette technique de différences finies fournie une assez bonne approximation des propriétés dynamiques du système original. De ce fait, son utilisation dans les applications traitées ici consiste à approcher la structure en quadripôle de la Fig. 2.1 par une autre qui est représentée par un nombre fini de variables différentielles.

TABLE 3.1 – Valeurs exactes et approchées des pôles et résidus

	pôles		résidus	
	Exact	Approché	Exact	Approché
1	$-12.5 \pm j2, 22.10^3$	$-12.5 \pm j2, 219.10^3$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4128$
2	$-12.5 \pm j6, 66.10^3$	$-12.5 \pm j6, 657.10^3$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4128$
3	$-12.5 \pm j1, 11.10^4$	$-12.5 \pm j1, 109.10^4$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4127$
4	$-12.5 \pm j1, 55.10^4$	$-12.5 \pm j1, 55.10^4$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4126$
5	$-12.5 \pm j1, 99.10^4$	$-12.5 \pm j1, 99.10^4$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4125$
6	$-12.5 \pm j2, 44.10^4$	$-12.5 \pm j2, 44.10^4$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4124$
7	$-12.5 \pm j2, 88.10^4$	$-12.5 \pm j2, 88.10^4$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4122$
8	$-12.5 \pm j3, 33.10^4$	$-12.5 \pm j3, 328.10^4$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4120$
9	$-12.5 \pm j3, 77.10^4$	$-12.5 \pm j3, 77.10^4$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4118$
10	$-12.5 \pm j4, 22.10^4$	$-12.5 \pm j4, 215.10^4$	$\pm j1.4142$	$\pm j1.4115$

Après avoir fait ce test de validation, considérons désormais le cas où la charge  $Z_L = 500\Omega$  dans (3.1). Dans ce cas, le Tableau 3.2 présente les pôles et la norme  $H_\infty$  des fractions partielles de la fonction de transfert du modèle complet (i.e., modèle DP) et du modèle approximé (3.5) utilisant la structure en  $\pi$ . Les résultats montrent que, pour le modèle DP, la norme infinie des fractions partielles décroît très lentement sans *chute* importante (i.e.,  $\|G_r\|_\infty \gg \|G_{r+1}\|_\infty$ , par exemple un facteur 10) qui pourrait donner une indication sur l'ordre  $r$  de la troncature modale. Ceci s'explique également par le tracé de Bode (en gain) de la Fig. 3.2 où les rapports  $\frac{|r_k|}{|\Re(\lambda_k)|}$  correspondant à l'amplitude des pics de résonances liés aux  $n$  modes du système ont pratiquement la même amplitude (environ 0 db).

TABLE 3.2 – Pôles et norme  $H_\infty$  de chaque fraction partielle  $\|\cdot\|_\infty = \frac{|r_k|}{|Re(\lambda_k)|}$ 

Modèle complet			modèle en $\pi$	
k	poles ( $\lambda_{k,k+1}$ )	$\ \cdot\ _\infty$	poles	$\ \cdot\ _\infty$
1; 2	$-3, 94.10^2 \pm 6, 85.10^5 i$	1, 0000789	<b><math>-5, 62.10^2</math></b>	1, 03
3; 4	$-4, 14.10^2 \pm 6, 34.10^5 i$	1, 0000788	$-74, 621.10^2$	0, 07
5; 6	$-4, 12.10^2 \pm 6, 38.10^5 i$	1, 0000786		
7; 8	$-3, 96.10^2 \pm 6, 81.10^5 i$	1, 0000782		
9; 10	$-3, 97.10^2 \pm 6, 77.10^5 i$	1, 0000777		
11; 12	$-4, 09.10^2 \pm 6, 46.10^5 i$	1, 0000771		
13; 14	$-4, 11.10^2 \pm 6, 42.10^5 i$	1, 0000764		
15; 16	$-4, 06.10^2 \pm 6, 53.10^5 i$	1, 0000757		
17; 18	$-4, 00.10^2 \pm 6, 69.10^5 i$	1, 0000745		
19; 20	$-3, 99.10^2 \pm 6, 73.10^5 i$	1, 0000737		
⋮				
591	<b><math>-5, 48.10^2</math></b>	0, 975424		
⋮				

Face à une telle situation, prenons donc  $\epsilon = 0.1$  comme une borne maximale de l'erreur (3.11) afin de déduire un ordre de troncature  $N$  tel que :

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|r_k|}{|Re(\beta_k)|} = \epsilon.$$

De là, le modèle réduit qui en résulte de la troncature modale est d'ordre 981 tout en sachant que le modèle complet est d'ordre 1000. Par conséquent, la trajectoire de la tension  $v(\ell, t)$  fournie par ce modèle réduit est quasiment identique à celle du modèle DP montrée en Fig. 3.6. Ce qui signifie que toutes les dynamiques importantes dans le modèle original sont reproduits par ce modèle réduit.

Quant à l'utilisation du modèle en  $\pi$ , le Tableau 3.2 montre que parmi les deux pôles de (3.5), un seul (i.e.,  $-5.62.10^2$ ) est proche du pôle ( $-5.48.10^2$ ) contenu dans le modèle DP. Ce qui explique ainsi la différence entre les trajectoires de la Fig. 3.6. De plus, cela montre que le lien de réduction expliqué en Section 2.5.1.1 entre le modèle en  $\pi$  et le modèle DP pour les lignes ouvertes n'est plus valable dans ce cas. En déduisant ainsi que, lorsqu'on remplace le modèle de la ligne en Fig. 3.1 par un modèle en  $\pi$ , le modèle simplifié qui en résulte, i.e., (3.5) n'est pas nécessairement une réduction structurelle du modèle complet (3.1). Il est tout de même remarquable que le mode de fréquence nulle (i.e., réel), gardé suite à l'utilisation du modèle en  $\pi$ , joue un rôle important dans la trajectoire comme le montre la Fig. 3.6. D'ailleurs, ce même pôle est aussi gardé dans le modèle réduit d'ordre 981 obtenu par la troncature modale. Ainsi, le classement par la norme  $H_\infty$  privilégie les modes de hautes fréquences (pôles à grandes parties imaginaires) tel qu'on peu le voir en Tableau 3.2. Par conséquent, tous les pôles ayant des parties imaginaires faibles (de basses fréquences) ou nulles occupent des rangs moins élevés comme le pôle ( $-5.48.10^2$ ) qui est à la position  $k = 591$ . De ce fait, pour arriver à les garder dans le modèle réduit afin de

bien approximer la trajectoire, le nombre final de dynamiques doit être assez important car ce sont les pôles de hautes fréquences qui les précèdent.

Une fois ces éléments donnés, on constate ainsi que la troncature modale ne donne pas des résultats tout à fait satisfaisants dans ce cas. La raison à cela, est que pour bien approximer les trajectoires, un nombre très élevé de modes doit être retenu dans le modèle réduit ce qui rend ce dernier difficilement exploitable. Par ailleurs, en analysant la situation de plus près, on remarque que ce grand nombre de dynamiques est la conséquence de la manière dont sont choisis les modes à garder dans le modèle réduit. En effet, comme la norme  $H_\infty$  des fractions  $G_k(s)$  est quasiment la même, cela implique que, selon cette mesure, toutes les dynamiques ont la même importance et les unes ne peuvent pas être privilégiées par rapport aux autres. De plus, même si l'on choisi les modes en utilisant une autre technique standard parmi celles mentionnées précédemment, on arrive aux mêmes conclusions. Pour cause, les parties réelles des pôles ne sont pas très différentes comme on peut le voir en Tableau 3.2 et de même les modules des résidus car leurs divisions par les parties réelles des pôles (i.e., la norme  $H_\infty$ ) ne varient pas significativement. Ceci est encore plus accentué dans le cas des lignes ouvertes où on peut clairement voir en Tableau 3.1 que les parties réelles des pôles, tout comme les résidus, sont quasiment inchangés. De là, on déduit que les modèles dynamiques ayant ces propriétés particulières constituent une *classe particulière* des systèmes pour lesquels la troncature modale classique est inefficace. Une autre particularité du système de la Fig. 3.1 qui est liée cette fois-ci aux propriétés énergétiques de ses dynamiques est présentée ci-dessous.

**C) Troncature via la réalisation équilibrée** De même que dans le cas de la dimension finie, une troncature équilibrée de (3.2) consiste à faire une réduction en gardant uniquement les états les plus commandables/observables. Autrement dit, ceux qui jouent un rôle important dans le transfert d'énergie entre les entrées et les sorties. Pour cela, la procédure se déroule en deux étapes :

- 1) Équilibrer le modèle (3.2) par une réalisation  $\Sigma^b(\mathcal{A}^b, \mathcal{B}^b, \mathcal{C}^b)$  de  $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  qui a la même fonction de transfert que  $\Sigma$  et pour laquelle les grammiens de commandabilité/observabilité sont égaux et diagonaux.
- 2) Trouver un ordre de troncature  $r$  en repérant une chute dans les valeurs singulières de Hankel puis tronquer la réalisation  $\Sigma^b$  à cet ordre  $r$ .

Ainsi, pour pouvoir se positionner par rapport à cette méthode, commençons d'abord par donner une vision plus formelle sur les deux étapes ci-dessus ainsi que leur mise en œuvre. C'est ce qui permettra, entre autres, de l'appliquer à l'exemple de la Fig. 3.1. En premier, et pour un modèle ayant la forme (3.2), la réalisation équilibrée est donnée par (voir e.g., [21], [33]),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij}^b &= \sqrt{\frac{\sigma_j}{\sigma_i}} \int_0^\infty g_i^T(t) \dot{g}_j(t) dt, \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_j}{\sigma_i}} \int_0^\infty \dot{f}_i^T(t) f_j(t) dt, \end{aligned} \quad i, j \in \{1, \dots, \infty\} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{B}^b = [\sqrt{\sigma_1} f_1(0), \sqrt{\sigma_2} f_2(0), \dots]^T, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{C}^b = [\sqrt{\sigma_1} g_1(0), \sqrt{\sigma_2} g_2(0), \dots], \quad (3.14)$$

où  $\sigma_{1, \dots, \infty}$  sont les valeurs singulières de Hankel du système et  $f_{1, \dots, \infty}(t)$ ,  $g_{1, \dots, \infty}(t)$  sont les vecteurs singuliers de l'opérateur de Hankel. On remarque que (3.12) fait intervenir des dérivées temporelles, ce qui ne facilite pas son implémentation. C'est pourquoi elle est souvent remplacée par la forme équivalente ci-dessous,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij}^b &= \frac{\sqrt{\sigma_i \sigma_j}}{\sigma_i^2 - \sigma_j^2} \left( \sigma_j f_i(0)^T f_j(0) - \sigma_i g_i(0)^T g_j(0) \right), \quad i \neq j, \\ \mathcal{A}_{ii}^b &= -\frac{1}{2} f_i(0)^T f_i(0) = -\frac{1}{2} g_i(0)^T g_i(0), \end{aligned}$$

qui offre plus de souplesse (voir [80] pour un exemple d'utilisation). Notons que l'intérêt de passer de  $\Sigma$  à  $\Sigma^b$  est de découpler les états d'un point de vue énergétique. En effet, pour  $\Sigma^b$ , l'énergie de chaque état  $x_i^b$  correspond à la valeurs singulière  $\sigma_i$ , ce qui permet une meilleure évaluation du rôle des états dans l'énergie entrée-sortie. Dans la Section 3.4.3.2, nous reviendrons plus en détails sur ce découplage dont il sera fait usage.

Compte tenu de (3.12)-(3.14), il est donc nécessaire de connaître en premier les quantités  $\sigma_i, f_i, g_i$  afin de pouvoir équilibrer le système et enfin le tronquer. Bien évidemment, toutes ces quantités sont proprement définies (voir, e.g., [21]) et leurs définitions sont rappelées ci-dessous.

**C.1) Valeurs singulières de Hankel :** Pour un système stable, commandable et observable, les valeurs singulières de Hankel sont définies comme étant les racines carrées des valeurs propres de  $\mathcal{W}_o \mathcal{W}_c$ , i.e.,

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathcal{W}_o \mathcal{W}_c)},$$

où

$$\mathcal{W}_c(\bullet) = \int_0^\infty \mathcal{T}(t) \mathcal{B} \mathcal{B}^* \mathcal{T}^*(t) (\bullet) dt, \quad (3.15)$$

$$\mathcal{W}_o(\bullet) = \int_0^\infty \mathcal{T}(t)^* \mathcal{C}^* \mathcal{C} \mathcal{T}(t) (\bullet) dt, \quad (3.16)$$

sont respectivement, les gramiens de commandabilité et d'observabilité, avec  $\mathcal{T}(t)$  qui est le semigroupe associé au système (voir, e.g., [21]). Ils sont tous les deux solutions des équations de Lyapunov ci-dessous :

$$\mathcal{A} \mathcal{W}_c z + \mathcal{W}_c \mathcal{A}^* z + \mathcal{B} \mathcal{B}^* z = 0, \quad \forall z \in D(\mathcal{A}^*), \quad (3.17)$$

$$\mathcal{A}^* \mathcal{W}_o z + \mathcal{W}_o \mathcal{A} z + \mathcal{C}^* \mathcal{C} z = 0, \quad \forall z \in D(\mathcal{A}). \quad (3.18)$$

Ainsi, comme (3.15) et (3.16) sont des opérateurs *auto-adjoints* et positifs, tous les  $\sigma_i$  sont positifs et vérifient la propriété,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$ , qui est la clé de lecture pour la réduction comme on verra par la suite. De plus, si le système est *atomique*, i.e.,

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{d^2s} G(x + jy) dx dy < \infty, \quad (3.19)$$

où  $G(s)$  est la fonction de transfert, on a aussi la propriété  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i < \infty$ . Au final, pour (3.12)-(3.14), on a :

$$W_c^b = W_o^b = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\infty}).$$

*Remarque 3.2.* Comme les valeurs singulières  $\sigma_i$  ne peuvent être obtenues que pour les systèmes commandables et observables, on déduit rapidement que la troncature via la réalisation équilibrée ne s'applique qu'aux parties stables, commandables et observables d'un système.

**C.2) Opérateur de Hankel :** Pour  $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ , l'opérateur de Hankel est défini par :

$$\Gamma(\bullet) = \int_0^{\infty} \mathcal{C}\mathcal{T}(t) \mathcal{B}(\bullet) dt. \quad (3.20)$$

De là, les vecteurs singuliers  $(f_i, g_i)$  qui interviennent dans (3.12)-(3.14) satisfont

$$\Gamma f_i(t) = \sigma_i g_i(t), \quad (3.21)$$

$$\Gamma^* g_i(t) = \sigma_i f_i(t), \quad (3.22)$$

et ils sont dis *paire de Schmidt* de  $\Gamma$ , où les  $\sigma_i$  sont les valeurs singulières de Hankel définis plus haut. En outre, il est montré également dans [21] qu'elles vérifient,

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathcal{W}_o \mathcal{W}_c)} = \sqrt{\lambda_i(\Gamma^* \Gamma)}.$$

Une fois ces définitions données, la deuxième étape, qui consiste à tronquer le système, est désormais plus claire. En effet, comme les grammiens  $W_c^b, W_o^b$  de la réalisation équilibrée  $\Sigma^b$  sont égaux et diagonaux, l'impact de chaque variable d'état  $x_i^b$  dans le transfert d'énergie entrée-sortie est mesuré par  $\sigma_i$ . Ainsi, pour réduire le modèle (3.2), il suffit juste de repérer un indice  $r$  tel que  $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$  et puis tronquer (3.12)-(3.14) à l'ordre  $r$ , i.e.,  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ . Ce qui conduit au final à un modèle réduit  $\Sigma^r(A_r, B_r, C_r)$  d'ordre  $r$  pour lequel l'erreur de troncature vérifie,

$$\|G(s) - G^r(s)\|_{\infty} \leq 2 \sum_{i=r+1}^{\infty} \sigma_i.$$

De cette manière, le comportement du système original  $\Sigma$  est bien approximé par le modèle réduit  $\Sigma^r$  tout en garantissant la préservation de la stabilité. Quant à la structure dynamique, elle n'est, généralement, pas préservée car aucune condition n'impose aux valeurs propres de  $A_r$  d'être parmi celles de (3.12) (i.e., de  $\mathcal{A}^b$  comme dans la troncature modale vue précédemment). On en profite également pour faire la remarque sur le sens physique des variables évoqué en Section 3.3.1.1 car, en effet, les variables d'état  $x_i^b$  de  $\Sigma^b$  n'ont pas la même signification que ceux de  $\Sigma$ .

**C.3) Mise en œuvre :** Comme dans le cas de la troncature modale, l'approximation numérique constitue une étape incontournable pour l'application de cette méthode à des cas plus réalistes. En effet, les valeurs singulières  $\sigma_i$  ainsi que la paire de Schmidt  $(f_i, g_i)$ , nécessaires à la troncature, ne sont calculables généralement que pour certains cas très simples comme celui traité dans [58]. D'où l'intérêt de les approximer numériquement afin de réduire le système. Parmi les techniques d'approximation qui existent (voir, e.g., [79], [75]), celle utilisée ici se base sur l'approximation numérique  $(A_n, B_n, C_n)$  des opérateurs comme pour la troncature modale. La démarche consiste à calculer les grammiens  $W_c^n$  et  $W_o^n$  de  $\Sigma^n(A_n, B_n, C_n)$ , puis déduire l'approximation des valeurs singulières  $\sigma_i$  à partir de la factorisation ci-dessous (voir, e.g., [21]),

$$W_c^n W_o^n = T \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Et enfin, construire la réalisation équilibrée  $\Sigma^b(TA_nT^{-1}, TB_n, C_nT^{-1})$  et la tronquer en se basant sur la critère  $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$  (en général un facteur de 10 ou 100 suffit largement).

Après l'application de cette démarche au système (3.1), en fixant l'ordre de l'approximation à  $n = 1000$ , la Fig. 3.7 montre les valeurs singulières de Hankel qui en résultent. Clairement, il est tout à fait remarquable que les valeurs singulières décroissent très lentement sans une chute importante (i.e., tel que  $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$ ) pouvant indiquer l'ordre  $r$  de la troncature. Tous ce que l'on voit, ce sont deux petits écarts au niveau des états 428 et 868 qui sont peu significatifs car le premiers est de  $2,9 \cdot 10^{-3}$  et le deuxième encore moins  $1,2 \cdot 10^{-3}$ . Dans une telle situation, il est donc à conclure que selon le point de vue énergétique employé dans la troncature équilibrée, tout les états du système jouent un rôle important dans le transfert d'énergie entrées-sorties. D'une manière équivalente, ils sont tous fortement commandables et observables.

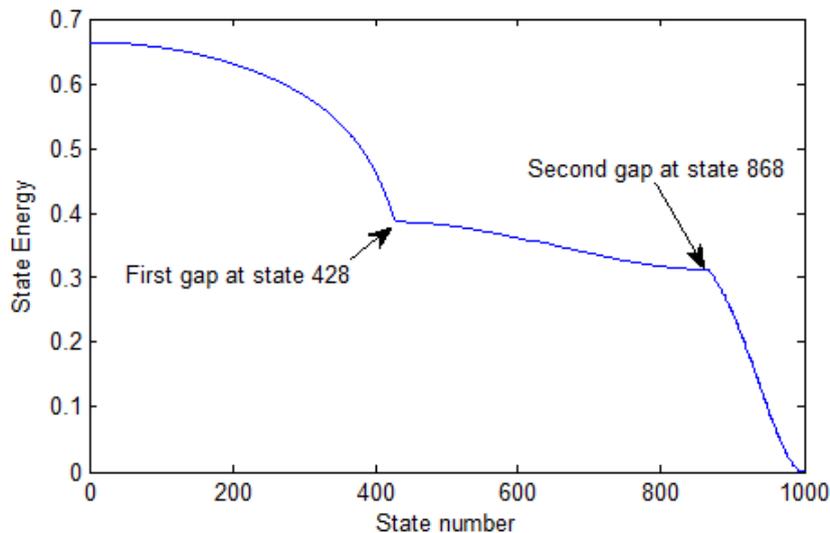


FIGURE 3.7 – Valeurs singulières de Hankel

Pour tester le résultat de la troncature dans ces conditions, la Fig. 3.8 montre la

réponse en fréquence du modèle réduit obtenu par une troncature à l'ordre  $r = 428$  qui correspond au premier écart en Fig. 3.7. Clairement, il fournit une mauvaise approximation du comportement fréquentiel du modèle DP surtout dans la plage de fréquence allant jusqu'à  $7.10^3$  rad/s. De plus, on remarque qu'à partir de  $10^{-4}$  red/s uniquement un pic sur deux est approximé. Par conséquent, son comportement temporel est assez loin de celui du modèle original. A l'inverse, la troncature au niveau du second gap (i.e.,  $r = 868$ ), fournit, quant à elle, de très bons résultats que ce soit dans le domaine fréquentiel ou temporel mais l'inconvénient est l'ordre élevé du modèle réduit qui est égal à 868.

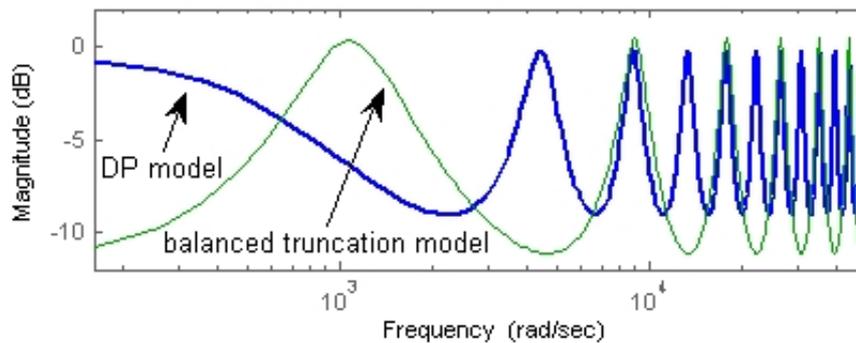


FIGURE 3.8 – Tracé de Bode du modèle issu de la troncature équilibrée et du modèle DP

Suite à ces tests, il est désormais clair qu'en absence d'une chute significative entre deux valeurs singulières successives, la troncature via une réalisation équilibrée conduit à de très mauvais résultats. L'amélioration n'est attendue que si le nombre de dynamiques retenues dans le modèle réduit avoisine celui contenu dans le modèle original, ce qui n'est, bien évidemment, pas intéressant d'un point de vue pratique. Ceci implique, qu'au niveau du choix des dynamiques à garder dans le modèle réduit et l'ordre de celui-ci, on est toujours face à la même difficulté qu'avec la troncature modale sauf qu'ici le problème vient des valeurs singulières de Hankel et leur utilisation comme le seul moyen d'évaluation des dynamiques du système. De là, résulte ainsi le fait que la troncature équilibrée n'est pas bien adaptée au système électrique de la Fig. 3.1, et à toute la classe particulière des systèmes dynamiques qui n'ont pas de chute importante dans leur spectre des valeurs singulières de Hankel.

### 3.4 Nouvelle méthodologie : une approche mixte

La Section 3.3.2 a dévoilé un aspect fondamental dans la réduction des systèmes électriques et quelques classes particulières des systèmes dynamiques. Cet aspect lié à l'évaluation des dynamiques d'un système en vue d'en choisir que les plus importantes, occupe désormais le centre de tous les enjeux évoqués en Section 3.2.3. En effet, il est à présent clair que la préservation de la structure dynamique nécessite un choix plus adapté des modes à préserver afin de surmonter les difficultés rencontrées avec la troncature modale classique. De même, pour la préservation de la structure physique, il est indispensable de connaître toutes les dynamiques importantes générées par le système interconnecté afin de bien ajuster le modèle réduit du sous-système. Ce qui permet, entre autres, de surpasser

les approches par hypothèses qui offrent des résultats peu fiables. Ainsi, notre démarche pour traiter la question dans un cadre structurel et systémique, repose principalement sur une approche *mixte*. L'idée est de tirer profit des approches modales et énergétiques en les combinant dans une nouvelle méthodologie afin de bien approximer le comportement entrée-sortie du système tout en préservant sa structure dynamique. Dans la littérature, cette idée a déjà fait l'objet d'un usage, e.g., dans [86], où la troncature équilibrée est appliquée uniquement à certaines parties de la fonction de transfert du système original. Cela donne généralement de bons résultats au niveau des trajectoires mais ne permet pas pour autant de préserver la structure dynamique du système. Plus précisément, l'application directe de la troncature équilibrée à des parties de la fonction de transfert ne garantit pas la préservation des modes du système original tel qu'on la mentionné précédemment. De là, résulte une perte du lien physique (voir Section 3.2.3.1) entre le modèle réduit qui en résulte et le modèle original.

Une autre manière de combiner les approches modales et énergétique est également proposée à travers l'algorithme [66], où l'utilisateur choisit les modes à préserver, et l'algorithme fournit un modèle réduit qui les préserve avec des performances optimales au sens de la norme  $H_2$ . Bien entendu, ceci préserve la structure dynamique, puisque les modes choisis sont préservés à l'identique, mais la difficulté est de connaître à *l'avance* les modes importants du système qui conduisent à une bonne approximation de son comportement dynamique. C'est pourquoi, le lien entre les modes et l'énergie  $E_H$  de la réponse impulsionnelle est largement approfondi ici afin de trouver les modes du système qui ont le plus fort impact dans son comportement entrée-sortie. La démarche consiste à trouver d'abord les variables d'état qui contribuent le plus dans  $E_H$ , puis utiliser les facteurs de participation pour remonter jusqu'aux modes. Plus de détails sont donnés dans le reste de cette section ainsi que le cadre théorique de cette nouvelle approche.

### 3.4.1 Cadre théorique : outils et définitions

D'un point de vue théorique, le lien entre les modes du système et l'énergie  $E_H$  de sa réponse impulsionnelle, est appréhendé ici d'une manière assez générale qui fait intervenir, essentiellement, des notions issues de la théorie des systèmes dynamiques. Il s'agit, d'une part, de la notion d'énergie qui est exploitée ici pour quantifier la contribution de chaque variable d'état du système dans son comportement dynamique et, d'autre part, celle des facteurs de participation qui permet de relier les états aux modes et vice versa. C'est cette combinaison qui permet de trouver les modes à garder dans le modèle réduit, mais avant d'entamer les développements techniques, on tient tout d'abord à présenter ces deux notions ainsi que leurs essences mathématiques.

#### 3.4.1.1 Énergie de la réponse impulsionnelle : relation avec la norme $H_2$

Pour définir et calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle, la première condition est d'avoir une représentation entrée-sortie du modèle dynamique du système. Celle prise ici est déduite à partir d'une approximation à l'ordre  $n$  de la forme (3.2), car cette dernière fait intervenir des opérateurs et, par conséquent, elle est assez complexe pour être exploitée directement (voir les explications en Section 3.2.1). Une telle approximation se présente

ainsi sous la forme d'un système linéaire de grande taille qui est obtenu en utilisant la technique de discrétisation expliquée en Section B.1). A partir de là, tous les développements et les résultats qui suivent ont pour point de départ la forme d'état ci-dessous

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = A_n x_n(t) + B_n u(t) \\ y(t) = C_n x(t) \end{cases}, \quad (3.23)$$

avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B = [b_1 | \dots | b_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $C = [c_1^T | \dots | c_q^T]^T \in \mathbb{R}^{q \times n}$ . La réponse impulsionnelle  $H(t)$  de (3.23) est donc une matrice de taille  $(p \times q)$  obtenue par l'application d'une séquence de  $p$  impulsions de Dirac, i.e.,

$$U_1^{p \times 1} = \begin{bmatrix} \delta(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, U_2^{p \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, U_p^{p \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \delta(t) \end{bmatrix},$$

avec des conditions initiales nulles, i.e.,  $x_n(0) = 0$  dans (3.23). Ceci conduit ainsi à la réponse suivante des variables d'état

$$X(t) = [x^1 | \dots | x^p],$$

où

$$x^i(t) = e^{A_n t} b_{ni}. \quad (3.24)$$

Par conséquent,  $H(t)$  peut facilement s'écrire sous la forme

$$H(t) = C_n X(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & \dots & h_{1p}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ h_{q1}(t) & \dots & h_{qp}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

avec  $h_{ij}(t) = c_{ni} e^{A_n t} b_{nj}$ . A ce stade, pour définir l'énergie  $E_H$  de la réponse impulsionnelle  $H(t)$ , on a besoin d'introduire l'espace fonctionnel  $\mathcal{L}^2(jw)$  des fonctions matricielles à valeurs complexes. Toute matrice  $H(jw)$  qui appartient à  $\mathcal{L}^2(jw)$  satisfait automatiquement la condition

$$H(jw) \in \mathcal{L}^2(jw) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(H(jw) H^*(jw)) dw < \infty,$$

où  $w \in \mathbb{R}$ ,  $(\cdot)^*$  symbolise le transpose conjugué et  $\text{tr}(\cdot)$  la trace d'une matrice. Ainsi,  $\mathcal{L}^2(jw)$  est un espace de Hilbert dans lequel l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{L}^2(jw) \times \mathcal{L}^2(jw) \rightarrow \mathbb{C}$ , définie un produit vectoriel dans  $\mathcal{L}^2(jw)$ , i.e.,

$$\langle H(jw), F(jw) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(H(jw) F^*(jw)) dw,$$

et

$$\|H(jw)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(H(jw) H^*(jw)) dw \right)^{\frac{1}{2}},$$

la norme  $\mathcal{L}^2$  induite notée usuellement  $\|\cdot\|_2$  (voir, e.g., [98] pour plus de détails).

Si l'on pose désormais  $H(jw)$  comme étant la matrice fonction de transfert de (3.23), i.e.,  $H(s) = C_n(sI - A_n)^{-1}B_n$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , on a par l'identité de Parseval,<sup>3</sup>

$$\|H(jw)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(H(jw)H^*(jw)) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(H(t)H^*(t)) dt.$$

L'expression ci-dessus, définie donc l'énergie de la réponse impulsionnelle  $H(t)$  (i.e., sa norme  $H_2$ ), qui peut s'écrire, en particulier, pour les temps positifs (i.e.,  $t \in \mathbb{R}^+$ ) comme

$$E_H = \|H(t)\|_2^2 = \text{tr} \left( \int_0^{\infty} H(t)H^*(t) dt \right). \quad (3.26)$$

Une fois ce résultat annoncé, il devient ainsi possible via (3.24) de faire le lien entre l'énergie  $E_H$  et les états du système. En effet, comme  $H(t) = C_n X(t)$  et  $X(t) = e^{A_n t} B_n$ , l'énergie  $E_H$  peut se mettre sous la forme compacte ci-dessous

$$\|H(t)\|_2^2 = \text{tr}[W_c^n C_n^* C_n], \quad (3.27)$$

où

$$W_c^n = \int_0^{\infty} X(t)X^*(t) dt = \int_0^{\infty} e^{A_n t} B_n B_n^* e^{A_n^* t} dt \quad (3.28)$$

est le gramien de commandabilité associé au système (3.23). Bien évidemment, on tient à noter que la même énergie (3.27) peut s'écrire en fonction du *gramien d'observabilité* car  $\text{tr}[H(t)H^*(t)] = \text{tr}[H^*(t)H(t)]$  (voir, e.g., [98] pour plus d'explications).

Chaque  $k^{\text{ième}}$  composante dans la diagonale de (3.28) est la somme sur  $k = 1, \dots, n$ , des énergies de l'état  $x_k^i(t)$ , i.e., de la  $k^{\text{ième}}$  composante du vecteur (3.24) obtenu pour chaque entrée impulsionnelle  $U_1, \dots, U_p$ . Quant aux éléments extra-diagonaux, ce sont des énergies croisées, i.e.,

$$W_{c_{k,j}}^n = \begin{cases} \sum_{i=1}^p \int_0^{\infty} x_k^i(t) x_k^{i*}(t) dt = \sum_{i=1}^p \|x_k^i(t)\|_2^2 \text{ pour } k = j \\ \sum_{i=1}^p \int_0^{\infty} x_k^i(t) x_j^{i*}(t) dt = \sum_{i=1}^p \langle x_k^i, x_j^i \rangle \text{ pour } k \neq j \end{cases}, \quad (3.29)$$

où chaque  $x^i(t)$  est tel qu'il est défini par (3.24).

### 3.4.1.2 Relation entre les modes et les états : facteurs de participation

Pour un système linéaire donné par une représentation d'état comme (3.23), il existe une relation très étroite entre les variables d'état et les modes. En effet, de la Définition 3.1, ressortent deux nombres complexes  $p_{ij}$  et  $p_{kij}$  qui expriment une sensibilité des pôles du système par rapport aux éléments de la matrice d'états. Ce qui fait que dans les systèmes dynamique, ils sont interprétés comme des mesures quantitatives.

---

3.  $\text{tr} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)v^*(t) dt \right) = \frac{1}{2\pi} \text{tr} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} V(w)V^*(w) dw \right)$ , i.e., le calcul de l'énergie d'un signal réel ou complexe dans le domaine fréquentiel ou temporel conduit au même résultat.

**Définition 3.1.** (voir, e.g., [31]) Pour un système linéaire, autonome et stationnaire décrit par

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad (3.30)$$

où la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est supposée avoir des valeurs propres distinctes, i.e.,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  pour  $i \neq j$ , les facteurs de participation sont les quantités  $p_{ij} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{ii}} = v_i^j w_i^j \in \mathbb{C}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , qui expriment la sensibilité d'un pôle  $\lambda_j$  par rapport à un élément  $a_{ii}$  de la matrice  $A$ . D'une manière équivalente, les termes croisés  $p_{kij} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{jk}} = v_k^i w_j^i \in \mathbb{C}$ , appelés *participations généralisées*, expriment la sensibilité d'un pôle  $\lambda_i$  par rapport à un élément  $a_{jk}$ ,  $j \neq k$  de la matrice  $A$ . Les vecteurs  $v^i$  et  $w^i$ , sont respectivement, les  $i^{\text{èmes}}$  vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice  $A$ , i.e., solutions de,

$$\begin{cases} Av^i = \lambda_i v^i \\ w^i A = \lambda_i w^i \end{cases}, \quad (3.31)$$

et  $v_j^i, w_j^i$  désignent leurs  $j^{\text{ème}}$  composante. En outre,  $p_{ij}$  et  $p_{kij}$  sont des quantités sans dimensions et vérifient les propriétés suivantes (voir la preuve en Annexe C),

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n p_{kij} = 0.$$

De là, pour faire le lien avec les variables d'état, rappelons que, dans le cas d'une réponse impulsionnelle, chaque variable  $x^i(t)$  satisfait

$$x^i(t) = \sum_{\ell=1}^n e^{\lambda_\ell t} v_\ell^i w_\ell^i b_i.$$

Ce qui fait que la  $k^{\text{ème}}$  composante du vecteur d'état  $x(t)$  de (3.23) s'écrit pour  $i = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} x_k^i(t) &= \sum_{\ell=1}^n e^{\lambda_\ell t} v_k^\ell w_\ell^i b_i \\ &= \sum_{\ell=1}^n e^{\lambda_\ell t} p_{k\ell} b_{ki} + \sum_{\ell=1}^n e^{\lambda_\ell t} \left[ \sum_{j=1, j \neq k}^n p_{k\ell j} b_{ji} \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ainsi,  $p_{ij}$  est une mesure de la participation du mode  $j$  dans l'état  $i$  et vice versa car il ne fait intervenir que la composante  $i$  des vecteurs à gauche et à droite liés au mode  $\lambda_j$  et  $p_{kij}$  est considéré comme une quantification du lien entre les états  $k$  et  $i$  via le mode  $j$ .

Un usage particulier de l'expression (3.32) sera fait par la suite, car c'est elle qui permet, entre autres, de faire le lien entre les modes et l'énergie (3.27).

*Remarque 3.3.* Il est important de noter que les participations  $p_{ij}$  et  $p_{kij}$ , ne sont pas des *invariants* du système, et changent d'une réalisation à une autre. Autrement dit, pour deux réalisations équivalentes  $x(t)$  et  $\bar{x}(t)$  de (3.23), les facteurs de participation associés sont différents.

### 3.4.2 Fondements de la méthode proposée

Il est important à ce stade, de rappeler qu'une troncature structurelle de (3.23) consiste à ne garder dans le modèle réduit qu'un nombre réduit de dynamiques modales car elles portent en elles un sens physique. Une manière simple de faire, consiste à appliquer directement le principe de la troncature modale (présentée en Section B)), i.e., tronquer la matrice fonction de transfert de (3.23) écrite sous la forme

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{s - \lambda_k}, \quad (3.33)$$

en conservant uniquement les fractions qui correspondent aux modes importants. Ainsi, l'apport de notre méthodologie à ce niveau est d'offrir la possibilité de trouver, d'un point de vue *systemique*, tous les modes du système qui jouent un rôle important dans son comportement dynamique entrée-sortie. Pour être plus précis, définissons en premier deux ensembles  $I$  et  $\bar{I}$  pour les indices des modes du système avec les propriétés  $I \cup \bar{I} = \{1, \dots, n\}$  et  $I \cap \bar{I} = \emptyset$ . Ceci, permet de scinder (3.33) en deux parties qui correspondent à cette partition, i.e.,

$$H(s) = \underbrace{\sum_{i \in I} \frac{R_i}{s - \lambda_i}}_{H^r(s)} + \underbrace{\sum_{j \in \bar{I}} \frac{R_j}{s - \lambda_j}}_{\Delta(s)}. \quad (3.34)$$

où  $H^r(s)$  est liée aux modes  $\lambda_i, i \in I$  et  $\Delta(s)$  aux modes  $\lambda_j, j \in \bar{I}$ .

Si on considère que la partie  $H^r(s)$  est celle qui est gardée, la matrice fonction de transfert d'ordre  $r = |I|$  (cardinal de  $I$ ) du modèle réduit qui en résulte s'écrit

$$H^r(s) = \sum_{i \in I} \frac{R_i}{s - \lambda_i}. \quad (3.35)$$

Une fois cette forme donnée, notre tâche et notre stratégie, est de trouver parmi toutes les représentations d'ordre  $r$  issues du modèle complet (3.34), celle qui *minimise* au mieux l'énergie de l'écart (donné par la norme  $H_2$ ) entre  $H(s)$  et  $H^r(s)$ , i.e.,

$$\mathcal{E} = \|H(jw) - H^r(jw)\|_2^2 = \left\| \sum_{j \in \bar{I}} \frac{R_j}{jw - \lambda_j} \right\|_2^2. \quad (3.36)$$

D'un point de vue technique, l'accomplissement de cette tâche est relativement difficile si on se limite juste à (3.36). Et c'est la raison pour laquelle le Théorème 3.1, présenté en Section 3.4.3.2, est développé ici pour apporter plus de flexibilité. Il montre, principalement, que la minimisation de  $\mathcal{E}$  est équivalente à la minimisation de la différence entre l'énergie de  $H(s)$  et celle de  $H^r(s)$ , i.e., *l'écart énergétique*  $\mathcal{J}$  défini par

$$\mathcal{J} = \left| \|H(jw)\|_2^2 - \|H^r(jw)\|_2^2 \right|. \quad (3.37)$$

Ainsi, il s'agit donc trouver l'ensemble  $I$  de telle sorte à ce que l'énergie de  $H^r(s)$  reste *suffisamment* proche de celle de  $H(s)$ . Pour y parvenir, la stratégie employée est de

sélectionner tous les modes du système qui ont une contribution assez forte dans les états *importants* de (3.23), i.e., ceux qui ont un impact majeur dans  $E_H$ . De cette manière, on obtient ainsi un ensemble  $\Lambda = \{\lambda_i, i \in I\}$  que l'on appelle ici *noyau* comme dans [67]. Afin d'y voir plus clair, soit

$$E_H = \sum_{k=1}^n E_k, \quad (3.38)$$

avec

$$E_k = \sum_{i=1}^p \left( \left( \sum_{d=1}^q c_{dk}^2 \right) \|x_k^i(t)\|_2^2 + \sum_{j=1, j \neq k}^n \left( \sum_{d=1}^q c_{dk} c_{dj} \right) \langle x_k^i, x_j^i \rangle \right),$$

une décomposition de l'énergie  $E_H$  définie par (3.27). Il apparait clairement que chaque terme  $E_k$  dépend, d'une part, de l'énergie de la variable d'état  $x_k^i$  pondérée par les éléments de la matrice  $C_n$  et, d'autre part, des énergies d'interaction entre  $x_k^i$  et toutes les autres variables d'état du système. On note également que cela dépend d'une manière implicite des éléments de la matrice  $B_n$  car chaque état défini par (3.24) en dépend. Ainsi, pour minimiser (3.37), il est essentiel de trouver d'abord les états qui sont associés au termes dominants dans (3.38) car il est montré en Section 3.4.3 que les modes importants  $\lambda_i, i \in I$ , sont ceux de fortes participations (mesurées par  $|p_{ki}|$ ) dans ces états.

Cependant, pour y arriver, la forme (3.38) n'est pas la plus appropriée car, comme il est expliqué en Section 3.4.3.2, les énergies d'interaction entre les états conduisent à une mauvaise évaluation de leur contribution dans  $E_H$ . Pour voir ceci d'une manière plus claire, il suffit, par exemple, de séparer les états de (3.23) en introduisant deux ensembles  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$  de sorte à avoir  $x_k^i(t), k \in \Gamma$  et  $x_\beta^i(t), \beta \in \bar{\Gamma}$  avec  $i = 1, \dots, p$ ,  $\Gamma \cup \bar{\Gamma} = \{1, \dots, n\}$  et  $\Gamma \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$ . Ceci va permettre d'écrire la matrice fonction de transfert  $H(s)$  sous la forme suivante :

$$H(s) = \underbrace{\sum_{k \in \Gamma} C_k [X_k^1(s), \dots, X_k^p(s)]}_{H_\Gamma(s)} + \underbrace{\sum_{\beta \in \bar{\Gamma}} C_\beta [X_\beta^1(s), \dots, X_\beta^p(s)]}_{H_{\bar{\Gamma}}(s)}.$$

De là, l'énergie  $E_H$  qui s'écrit désormais

$$E_H = \|H_\Gamma(jw)\|_2^2 + \|H_{\bar{\Gamma}}(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle H_\Gamma(jw), H_{\bar{\Gamma}}(jw) \rangle), \quad (3.39)$$

fait apparaitre, d'un côté, les énergies  $\|H_\Gamma(jw)\|_2^2$  et  $\|H_{\bar{\Gamma}}(jw)\|_2^2$  qui font intervenir les états  $x_k^i(t), k \in \Gamma$  et  $x_\beta^i(t), \beta \in \bar{\Gamma}$  respectivement et, d'un autre côté, l'énergie  $2\Re(\langle H_\Gamma(jw), H_{\bar{\Gamma}}(jw) \rangle)$  liée aux interactions entre les deux ensembles d'états. Par conséquent, il n'est pas plausible, dans une telle situation, de comparer uniquement les deux premières énergies pour conclure sur une dominance d'un ensemble d'états par rapport à un autre. En effet, le terme  $2\Re(\langle H_\Gamma(jw), H_{\bar{\Gamma}}(jw) \rangle)$  peut avoir une contribution relativement importante dans (3.39), et biaise ainsi le résultat de la comparaison. C'est pour cette raison, qu'une autre réalisation de (3.23) appelée *réalisation équilibrée* est utilisée ici afin d'aboutir à une forme plus simple de  $E_H$ . Ceci est expliqué d'une manière plus formelle et plus détaillée dans les sections qui suivent.

### 3.4.3 Formalisation et développement de la nouvelle approche

Désormais, il est clair que pour trouver les modes importants du système d'une manière systémique, l'enjeu principal est de minimiser l'écart énergétique  $\mathcal{J}$  défini par (3.37). Pour cela, des nouveaux résultats théoriques démontrés en Annexe C sont obtenus pour bien fonder cette nouvelle approche. Ce qui la rend plus général dans le sens où elle ne se limite pas uniquement aux systèmes avec les spécificités particulières mentionnées en Sections B) et C), mais couvre en effet une gamme plus large.

Pour bien comprendre le sens des développements qui vont suivre ainsi que l'orientation vers un choix de modes basé sur l'énergie, il est important de revenir en premier lieu sur les deux écarts  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{J}$  introduits en Section 3.4.2. Il est mentionné dans cette même section qu'ils sont équivalents dans le sens où la minimisation de  $\mathcal{J}$  conduit *nécessairement* à la minimisation de  $\mathcal{C}$ . Pour en arriver à ce résultat, le Théorème 3.1 ci-dessous constitue l'élément fondamental.

**Théorème 3.1.** *Soit  $H(jw)$  la matrice de transfert du modèle complet et  $H^r(jw)$  celle du modèle réduit obtenu par une troncature modale. Les propriétés suivantes sont vérifiées*

i) Si  $H^r(s)$  satisfait

$$\|H^r(jw)\|_2^2 = \|H(jw)\|_2^2 \quad \text{alors} \quad H^r(jw) = H(jw).$$

ii) Si  $|\|H(jw)\|_2^2 - \|H^r(jw)\|_2^2| \leq \eta \|H(jw)\|_2^2$  où  $\eta \in [0, 1]$ , alors

$$\|H(jw) - H^r(jw)\|_2^2 \leq \eta \|H(jw)\|_2^2.$$

**Lemme 3.1.** *Étant donnée une matrice de transfert  $F^{p \times q}(jw) \in \mathcal{L}_2(jw)$ , la solution de*

$$\|\Delta(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle \Delta(jw), F(jw) \rangle) = 0 \tag{3.40}$$

*pour  $\Delta^{p \times q}(jw) \in \mathcal{L}_2(jw)$  et  $\Delta(jw) \neq -2F(jw)$  est nécessairement  $\Delta(jw) \equiv 0$ .*

**Lemme 3.2.** *Si  $\eta \in [0, 1]$ , alors*

$$\left(1 - \sqrt{1 - \eta}\right)^2 \leq \eta.$$

En effet, le Théorème 3.1 montre que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{J}$  ont pour point commun la borne supérieure  $\eta \|H(jw)\|_2^2$ , i.e., si on maintient  $\mathcal{J}$  égal à cette limite ou en dessous, il en est forcément de même pour  $\mathcal{C}$ . Ceci est très important car il signifie que plus les énergies du modèle réduit et complet sont proches, plus leurs réponses impulsionnelles respectives le sont également. En particulier, dans le cas d'une égalité, on conclut qu'il n'y a pas eu de réduction, i.e., le modèle réduit s'identifie au complet. D'où l'intérêt de choisir les modes à garder dans le modèle réduit de telle sorte à ce que l'énergie de ce dernier reste suffisamment proche de celle du modèle complet  $H(s)$ . Plus de détails sur la manière dont ce résultat est exploité, en particulier pour choisir les modes, sont données le long des sections qui suivent.

### 3.4.3.1 Stratégie du choix des modes

Afin de développer et d'expliquer formellement la stratégie du choix des modes introduite en Section 3.4.2, on fait apparaître *explicitement* les facteurs de participations présentés en Section 3.4.1.2 dans l'expression des résidus  $R_i, i \in I$  de (3.35). L'intérêt de ceci est de pouvoir évaluer l'importance de chaque mode du système dans l'énergie du modèle réduit  $H^r(s)$  pour minimiser  $\mathcal{J}$  en faisant intervenir toutes les variables d'état du système. Pour y voir plus clair, rappelons au début que les résidus matriciels  $R_i$  sont *uniques*, et peuvent ainsi s'écrire en fonction des matrices de la forme d'état (3.23) comme suit

$$R_i = C_n v^i w^i B_n,$$

où  $v^i$  et  $w^i$  sont, respectivement, les vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice  $A_n$ . De là, et en s'appuyant sur les développements de la Section 3.4.1.2, on peut écrire chaque résidu matriciel  $R_i$  sous la forme (voir la preuve en Annexe C)

$$R_i = \sum_{k=1}^n C_k \left[ \left( p_{ki} b_{k1} + \sum_{\ell=1, \ell \neq k} p_{ki\ell} b_{\ell 1} \right), \dots, \left( p_{ki} b_{kp} + \sum_{\ell=1, \ell \neq k} p_{ki\ell} b_{\ell p} \right) \right],$$

où  $C_k$  représente la  $k^{\text{ème}}$  colonne de  $C_n$ . Ceci conduit donc à écrire le modèle réduit (3.35) sous la forme ci-dessous qui fait clairement apparaître les modes ainsi que leurs participations dans les variables d'état du système.

$$H^r(s) = \sum_{k=1}^n C_k \left( \sum_{i \in I} \frac{1}{s - \lambda_i} \left[ \left( p_{ki} b_{k1} + \sum_{\ell=1, \ell \neq k} p_{ki\ell} b_{\ell 1} \right), \dots, \left( p_{ki} b_{kp} + \sum_{\ell=1, \ell \neq k} p_{ki\ell} b_{\ell p} \right) \right] \right).$$

En effet, dans la l'expression ci-dessus, la somme sur  $i$  est pour les modes  $\lambda_i, i \in I$  alors que celle sur  $k$  parcourt les variables d'état  $x_k^i(t), k = 1, \dots, n$ . Par conséquent, si on sépare ces dernières en  $x_k^i(t), k \in \Gamma$  et  $x_\beta^i(t), \beta \in \bar{\Gamma}$  comme on l'avait fait en Section 3.4.3, la matrice de transfert  $H^r(s)$  du modèle réduit prendra la forme

$$H^r(s) = \sum_{k \in \Gamma} C_k \left( \sum_{i \in I} \frac{1}{s - \lambda_i} \left[ \left( p_{ki} b_{k1} + \sum_{\ell=1, \ell \neq k} p_{ki\ell} b_{\ell 1} \right), \dots, \left( p_{ki} b_{kp} + \sum_{\ell=1, \ell \neq k} p_{ki\ell} b_{\ell p} \right) \right] \right) + \mathcal{K}(s),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s) = & \sum_{\beta \in \bar{\Gamma}} C_\beta \left( \sum_{i \in I} \frac{1}{s - \lambda_i} \left[ \left( p_{\beta i} b_{\beta 1} + \sum_{\ell=1, \ell \neq \beta} p_{\beta i \ell} b_{\ell 1} \right), \dots, \left( p_{\beta i} b_{\beta p} + \sum_{\ell=1, \ell \neq \beta} p_{\beta i \ell} b_{\ell p} \right) \right] \right) - \\ & - \sum_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma \left( \sum_{m \in \bar{I}} \frac{1}{s - \lambda_m} \left[ \left( p_{\gamma m} b_{\gamma 1} + \sum_{\ell=1, \ell \neq \gamma} p_{\gamma m \ell} b_{\ell 1} \right), \dots, \left( p_{\gamma m} b_{\gamma p} + \sum_{\ell=1, \ell \neq \gamma} p_{\gamma m \ell} b_{\ell p} \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

A partir de là, une simple transformée de Laplace des variables d'états  $x_k^i(t)$  définies par (3.32), conduit aisément au résultat ci-dessous

$$\mathbf{H}^r(s) = \underbrace{\sum_{k \in \Gamma} C_k [X_k^1(s), \dots, X_k^p(s)]}_{\mathbf{H}_\Gamma} + \mathcal{K}(s), \quad (3.42)$$

auquel est associée l'énergie

$$\|\mathbf{H}^r(jw)\|_2^2 = \|\mathbf{H}_\Gamma(jw)\|_2^2 + \|\mathcal{K}(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle \mathcal{K}(jw), \mathbf{H}_\Gamma(jw) \rangle).$$

Ce qui conduit finalement à réécrire l'écart  $\mathcal{J}$  sous la forme

$$\left| \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2 - \|\mathbf{H}^r(jw)\|_2^2 \right| = \left| \underbrace{(\|\mathbf{H}(jw)\|_2^2 - \|\mathbf{H}_\Gamma(jw)\|_2^2)}_{\delta_1} - \underbrace{(\|\mathcal{K}(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle \mathcal{K}(jw), \mathbf{H}_\Gamma(jw) \rangle))}_{\delta_2} \right|. \quad (3.43)$$

L'écriture ci-dessus montre ainsi que la minimisation de  $\mathcal{J}$  est liée à deux quantités  $\delta_1$  et  $\delta_2$  qui font intervenir, respectivement, les états  $X_k, k \in \Gamma$  et les modes  $\lambda_i, i \in I$  du système. De ce fait, on remarque qu'en plus des modes, les variables d'état à partir desquelles sont déduit les modes doivent elles aussi être bien choisies afin de minimiser autant que possible l'écart (3.37). Pour illustrer ces propos, commençons en premier par le terme

$$\delta_2 = \|\mathcal{K}(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle \mathcal{K}(jw), \mathbf{H}_\Gamma(jw) \rangle).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, permet de borner le terme ci-dessus comme ceci

$$\|\mathcal{K}(jw)\|_2^2 - 2\|\mathcal{K}(jw)\|_2\|\mathbf{H}_\Gamma(jw)\|_2 \leq \|\mathcal{K}(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle \mathcal{K}(jw), \mathbf{H}_\Gamma(jw) \rangle) \leq \|\mathcal{K}(jw)\|_2^2 + 2\|\mathcal{K}(jw)\|_2\|\mathbf{H}_\Gamma(jw)\|_2.$$

Ce qui signifie que, pour une  $\mathbf{H}_\Gamma(s)$  donnée, la condition pour minimiser  $\delta_2$  est d'avoir  $\|\mathcal{K}(jw)\|_2$  aussi petit que possible. D'après le Lemme 3.3 et (3.41), une manière de faire est de choisir *convenablement* les modes de telle sorte à ce que tous les numérateurs de  $\mathcal{K}(jw)$  soient très faibles. En effet, comme (3.41) fait intervenir directement les participations  $p_{ki}$  et  $p_{kij}$  définies en Section 3.4.1.2, il suffit donc de choisir les modes  $\lambda_i, i \in I$ , et  $\lambda_m, m \in \bar{I}$  d'une façon à avoir le *module* de la majorité des participations proche de zéro. Ceci est possible car, si l'on veut que les  $(|p_{\beta i}|)$  soient proches de zéro, les modes  $\lambda_i, i \in I$  doivent être sélectionnés de sorte à avoir des participations de très faibles modules dans les états  $x_\beta, \beta \in \bar{\Gamma}$ . Il en est de même pour les  $(|p_{\gamma m}|)$  si  $\lambda_m, m \in \bar{I}$  ont des participations de très faibles modules dans les variables d'état  $x_\gamma(t), \gamma \in \Gamma$ . Cependant, la situation est légèrement différente pour les  $|p_{kil}|$  et  $|p_{\gamma ml}|$  car un choix particulier de modes ne permet pas de les rendre tous proches de zéro. C'est pourquoi la Proposition 3.1 est développée ici afin de montrer que si un mode  $\lambda_\ell$  a des participations très faibles à la fois dans  $x_k(t)$  et  $x_j(t)$ , alors  $p_{klj}$  est lui aussi faible. Enfin, comme

$$\sum_{i \in I} p_{ki} + \sum_{m \in \bar{I}} p_{km} = 1 \quad \text{pour } k \in \Gamma \cup \bar{\Gamma}$$

et  $|p_{ki}| \approx 0$  signifie que les parties réelle et imaginaire de  $p_{ki}$  sont toutes les deux proches de zéro, on peut facilement déduire que les modes recherchés  $\lambda_i, i \in I$  sont ceux qui participent le plus dans les états  $x_\gamma(t), \gamma \in \Gamma$ , ou inversement, le moins dans  $x_\beta, \beta \in \bar{\Gamma}$ .

**Lemme 3.3.** *Étant donnée une fonction matricielle  $F^{p \times q}(jw) \in \mathcal{L}_2(jw)$  à coefficients complexes, de la forme*

$$F(jw) = \sum_{k=1}^K \frac{M_k}{jw - \lambda_k}, \text{ avec } M_k \in \mathbb{C}^{p \times q},$$

il s'ensuit que

$$\|F(jw)\|_2 \leq \left( \sum_{k=1}^K \frac{\|M_k\|_F^2}{2|\Re(\lambda_k)|} + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1, j \neq i}^K \frac{|\beta_{ij}|}{|\Re(\lambda_i) + \Re(\lambda_j)|} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.44)$$

où  $\beta_{i,j} = \text{tr}(M_i M_j^*) \in \mathbb{C}$  et  $\|\cdot\|_F$  est la norme de Frobenius.

**Proposition 3.1.** *Pour un mode  $\lambda_\ell$  ayant de faibles participations  $p_{k\ell}, p_{j\ell}$  dans les états  $x_k(t)$  et  $x_j(t)$  respectivement, le facteur  $p_{k\ell j}$  qui relie les deux états via le mode  $\ell$  est proche de zéro.*

*Démonstration.* Supposons que  $p_{k\ell} = v_k^\ell w_k^\ell$  et  $p_{j\ell} = v_j^\ell w_j^\ell$  sont négligeables (proches de zéro). Ensuite, comme  $p_{k\ell j} = v_k^\ell w_j^\ell$ , nous avons  $p_{k\ell} p_{j\ell} = v_k^\ell w_j^\ell v_j^\ell w_k^\ell = p_{k\ell j} p_{j\ell k}$ . Par conséquent,  $|p_{k\ell}| |p_{j\ell}| = |p_{k\ell j}| |p_{j\ell k}|$ . Finalement, du fait que  $|p_{k\ell j}|$  et  $|p_{j\ell k}|$  sont égaux, on déduit le résultat  $|p_{k\ell}| |p_{j\ell}| = |p_{k\ell j}|^2$  qui montre que si  $|p_{k\ell}| \approx |p_{j\ell}| = \varepsilon$ , cela conduit à  $|p_{k\ell j}| = \sqrt{|p_{k\ell}| |p_{j\ell}|} = \varepsilon$ , i.e., les parties réelle et imaginaire de  $p_{k\ell j}$  sont proches de  $\varepsilon$ .  $\square$

Au vu de ces résultats et explications, on peut conclure ainsi que pour minimiser (3.43), il suffit de bien choisir les variables d'états indexées par  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$  afin d'avoir des valeurs assez petites pour  $\delta_1$ .

### 3.4.3.2 Stratégie du choix des états : une approche basée sur l'énergie

Les résultats de la section précédente ont montré que pour trouver les modes  $\lambda_i, i \in I$  qui minimisent  $\delta_2$ , les états  $x_k^i(t), k \in \Gamma$  et  $x_\beta^i(t), \beta \in \bar{\Gamma}$  peuvent être librement fixés. Ceci n'est pas le cas pour une minimisation complète de (3.43) car leur choix s'avère très important pour s'assurer que la différence

$$\delta_1 = \|H(jw)\|_2^2 - \|H_\Gamma(jw)\|_2^2 \quad (3.45)$$

reste assez faible, i.e., l'énergie  $\|H_\Gamma(jw)\|_2^2$  suffisamment proche de  $\|H(jw)\|_2^2$  (égale aussi à  $E_H$ ). Par conséquent, tel qu'il est mentionné en Section 3.4.3, la tâche se focalise à ce niveau sur la manière de trouver l'ensemble  $\Gamma$  afin que  $\|H_\Gamma(jw)\|_2^2$  soit dominante dans (3.39), i.e.,  $\|H_\Gamma(jw)\|_2^2 \gg (\|H_{\bar{\Gamma}}(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle H_\Gamma(jw), H_{\bar{\Gamma}}(jw) \rangle))$ . Au stade actuel de la présentation, cette tâche est particulièrement difficile car, d'une part, les états  $x_k^i(t), k \in \Gamma$  ne peuvent être trouvés que si les énergies de chaque variable d'état du système ainsi que

celles de toutes les interactions sont calculées. D'autre part, si l'on suppose qu'il existe  $K$  variables d'états, i.e.,  $|\Gamma| = K$ , qui permettent de minimiser (3.45), cela suggère qu'il faudra plusieurs combinaisons pour les trouver car à chaque fois un ensemble de  $K$  états est testé. A cela s'ajoute aussi l'impact du terme  $2\Re(\langle H_\Gamma(jw), H_{\bar{\Gamma}}(jw) \rangle)$  dans (3.39) qui ne peut être ignoré. En effet, puisque on a

$$-2 \|H_\Gamma(jw)\|_2 \|H_{\bar{\Gamma}}(jw)\|_2 \leq 2\Re(\langle H_\Gamma(jw), H_{\bar{\Gamma}}(jw) \rangle) \leq 2 \|H_\Gamma(jw)\|_2 \|H_{\bar{\Gamma}}(jw)\|_2,$$

cela signifie que si  $\|H_{\bar{\Gamma}}(jw)\|_2^2$  est négligeable devant  $\|H_\Gamma(jw)\|_2^2$ , ceci ne veut pas nécessairement dire que le terme  $2\Re(\langle H_\Gamma(jw), H_{\bar{\Gamma}}(jw) \rangle)$  lié aux interactions n'a pas d'importance dans (3.39). Plus précisément, si les états sont sélectionnés uniquement pour maximiser  $\|H_\Gamma(jw)\|_2^2$ , l'énergie du modèle réduit qui en résulte peut être proche de  $\|H_\Gamma(jw)\|_2^2$  mais pas forcément de  $E_H$ , i.e. de l'énergie du modèle complet.

Tout ceci, conduit ainsi à dire que le modèle réduit obtenu dans ces conditions ne garanti pas une facilité de mise en œuvre et une reproduction assez fidèle du comportement du système original. C'est pourquoi, notre solution consiste à trouver une autre réalisation équivalente du système (3.23) dans laquelle les propriétés structurelles restent inchangées, tandis que les états soient *énergétiquement* découplés, i.e., pas d'interactions énergétiques entre eux. Une telle réalisation existe et elle est dite *réalisation équilibrée*. Elle a fait l'objet d'une utilisation dans [52] pour tronquer les états, et ici on l'utilise pour séparer leurs énergies. Pour expliquer ceci, soit la forme ci-dessous

$$\Sigma^b : \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \end{cases}, \quad (3.46)$$

une réalisation équilibrée de (3.23) pour laquelle les états de  $\bar{x}(t)$  sont scindés en  $\bar{x}_k(t)$ ,  $k \in \Gamma_b$  et  $\bar{x}_\beta(t)$ ,  $\beta \in \bar{\Gamma}_b$  avec  $\Gamma_b \cup \bar{\Gamma}_b = \{1, \dots, n\}$  et  $\Gamma_b \cap \bar{\Gamma}_b = \emptyset$  où l'indice  $b$  fait référence à la réalisation (3.46). A partir de là, et comme le gramien de commandabilité  $\bar{W}_c^b$  et celui d'observabilité  $\bar{W}_o^b$  de (3.46) son égaux et diagonaux, le Théorème 3.2 présenté ci-dessous montre que toutes les interactions énergétiques entre les composantes de  $\bar{x}(t)$  sont nulles.

**Théorème 3.2.** *Pour la réalisation équilibrée (3.46) avec  $u(t) = \delta(t)$ , les propriétés suivantes sont vérifiées*

$$i) \sum_{i=1}^p \langle \bar{x}_k^i(t), \bar{x}_j^i(t) \rangle = 0 \text{ pour } k \neq j.$$

$$ii) \sum_{i=1}^p \|\bar{x}_k^i(t)\|_2^2 = \sigma_k.$$

$$iii) E_H = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sigma_k \text{ avec } \alpha_k = \left( \sum_{d=1}^q \bar{c}_{dk}^2 \right).$$

$$iv) \langle H_{\Gamma_b}(jw), H_{\bar{\Gamma}_b}(jw) \rangle = 0,$$

où  $\sigma_k$  sont les valeurs singulières de Hankel du système et  $\bar{c}_{dk}$ ,  $d = 1, \dots, q$ , les coefficients de la  $k^{\text{ème}}$  colonne de  $\bar{C}$ .

Le théorème ci-dessus constitue l'un des résultats les plus importants dans cette nouvelle méthodologie car il permet de faciliter considérablement la tâche de trouver les variables d'état qui peuvent rendre la différence  $(\|H(jw)\|_2^2 - \|H_{\Gamma_b}(jw)\|_2^2)$  assez petite. En effet, puisque l'énergie  $E_H$  peut désormais s'écrire

$$E_H = \underbrace{\sum_{\gamma \in \Gamma_b} \alpha_\gamma \sigma_\gamma}_{E_{\Gamma_b}} + \underbrace{\sum_{\beta \in \bar{\Gamma}_b} \alpha_\beta \sigma_\beta}_{E_{\bar{\Gamma}_b}} \quad (3.47)$$

avec  $(\alpha_j \sigma_j)_{j=1, \dots, n}$  qui sont tous positifs, il suffit juste de faire un classement dans l'ordre croissant dans (3.47) et de ne garder ensuite que les indices des termes les plus dominants. Autrement dit, construire  $\Gamma_b$  de telle sorte à avoir  $E_{\Gamma_b} \gg E_{\bar{\Gamma}_b}$ . Compte tenu de ces développements, (3.43) prend désormais la forme suivante

$$\left| \|H(jw)\|_2^2 - \|H^r(jw)\|_2^2 \right| = \left| E_{\bar{\Gamma}_b} - (\|\mathcal{K}_b(jw)\|_2^2 + 2\operatorname{Re} \langle \mathcal{K}_b(jw), H_{\Gamma_b}(jw) \rangle) \right|, \quad (3.48)$$

qui peut être bornée comme ceci

$$\left| E_{\bar{\Gamma}_b} - \|\mathcal{K}_b(jw)\|_2^2 - 2\|\mathcal{K}_b(jw)\|_2 \|H(jw)\|_2 \left( \sqrt{1 - \delta} \right) \right| \leq \left| \|H(jw)\|_2^2 - \|H^r(jw)\|_2^2 \right| \leq \left| E_{\bar{\Gamma}_b} - \|\mathcal{K}_b(jw)\|_2^2 + 2\|\mathcal{K}_b(jw)\|_2 \|H(jw)\|_2 \left( \sqrt{1 - \delta} \right) \right|,$$

avec  $\delta = \frac{E_{\bar{\Gamma}_b}}{\|H(jw)\|_2^2} \leq 1$  et  $\mathcal{K}_b(jw)$  qui a la même forme que (3.41) sauf qu'il correspond à la réalisation (3.46). In fine, tout ceci mène à conclure que les conditions pour minimiser  $\mathcal{J}$  sont en nombre de deux. Tout d'abord, trouver l'ensemble  $\Gamma_b$  de telle sorte à satisfaire  $E_{\Gamma_b} \gg E_{\bar{\Gamma}_b}$ . Ensuite, à partir des variables d'état correspondantes  $\bar{x}_\gamma(t)$ ,  $\gamma \in \Gamma_b$ , déduire les modes  $\lambda_i$ ,  $i \in I$  en suivant la procédure présentée en Section 3.4.3.1 qui consiste à ne sélectionner que les modes qui participent le plus de les états trouvés. Un algorithme résumant l'ensemble de ces étapes est présenté en Section 3.4.4.

*Remarque 3.4.* Dans le cas où la taille du système (3.23) est assez importante (e.g., plus de 10000 variables d'état), il existe des algorithmes assez performants pour résoudre les équations de Lyapunov nécessaires à l'obtention de la réalisation équilibrée. Le lecteur peut voir, par exemple, [48] ou encore [34] où un modèle d'ordre plus que 20000 a été traité.

Au vu de tous les résultats obtenus jusqu'à lors, le modèle réduit qui préserve la structure dynamique du système peut enfin être construit et ses propriétés sont discutés en détails dans la section qui suit.

### 3.4.3.3 Modèle réduit : préservation de la structure dynamique

Une fois le noyau  $\Lambda$  des modes trouvés, la structure dynamique du système (3.23) est donc préservée car les modes de  $\Lambda$  sont gardés dans le modèle réduit (3.35). Ainsi, l'ordre  $r$  de ce dernier est donné par le nombre de modes contenus dans  $\Lambda$ , i.e., par le cardinal de  $I$ . De ce fait, comparée à d'autres méthodes de réduction, celle proposée ici présente,

entre autres, l'avantage de trouver l'ordre  $r$  du modèle réduit directement à partir d'une analyse du système, i.e., sans avoir à le fixer au préalable par des techniques empiriques ou des données externes. En outre, la valeur de  $r$  est conditionnée par deux paramètres à fixer :

- le nombre de variables d'état  $\bar{x}_\gamma(t)$ ,  $\gamma \in \Gamma_b$  (e.g., garder moins) tel que la différence relative ci-dessous

$$\mathcal{E}_r = \frac{E_H - E_{\Gamma_b}}{E_H},$$

reste toujours petite, i.e.,  $\mathcal{E}_r \ll 1$ .

- la limite inférieure à partir de laquelle les modes sont considérés de faibles participations dans les états (i.e.,  $\lambda_j \notin \Lambda$ ). Si l'on fixe, e.g., 0.01 (i.e., 1%) comme étant la limite inférieure, on aura  $|I|$  qui peut être plus grand que dans le cas où la limite est fixée à 0.1 (i.e., 10%) et vice versa.

In fine, pour avoir une mesure *quantitative* de l'adéquation du modèle réduit obtenu à approximer le comportement dynamique du modèle complet, on utilise comme indicateur l'énergie des fractions supprimées de (3.34) qui sont liées aux modes  $\lambda_j$ ,  $j \in \bar{I}$ . Autrement dit, l'écart  $\mathcal{C}$  défini par (3.36). Compte tenu du Théorème 3.1, si  $|\|\mathbf{H}(j\omega)\|_2^2 - \|\mathbf{H}^r(j\omega)\|_2^2| = \mu \|\mathbf{H}(j\omega)\|_2^2$  avec  $\mu \leq \eta$ , on aura toujours  $\mathcal{C} \leq \mu \|\mathbf{H}(j\omega)\|_2^2$  ou, d'une manière plus appropriée, les grandeurs relative ci-dessous

$$\mathcal{J}_r = \frac{|\|\mathbf{H}(j\omega)\|_2^2 - \|\mathbf{H}^r(j\omega)\|_2^2|}{\|\mathbf{H}(j\omega)\|_2^2} = \mu, \quad (3.49)$$

$$\mathcal{C}_r = \frac{\|\mathbf{H}(j\omega) - \mathbf{H}^r(j\omega)\|_2^2}{\|\mathbf{H}(j\omega)\|_2^2} \leq \mu, \quad (3.50)$$

car, lorsque l'énergie  $\|\mathbf{H}(j\omega)\|_2^2$  du modèle complet est assez importante,  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{C}$  peuvent avoir de grandes valeurs. De plus, l'utilisation de (3.34) dans (3.50) via le Lemme 3.3, permet de mesurer l'impact de chaque fraction supprimée de (3.34) dans l'erreur globale de troncature. Le résultat se présente comme suit

$$\mathcal{C}_r \leq \frac{\sum_{k \in \bar{I}} \frac{\|R_k\|_F}{2|\Re(\lambda_k)|} + \sum_{i \in \bar{I}} \sum_{j \in \bar{I}, j \neq i} \frac{|\text{tr}(R_i R_j^*)|}{|\Re(\lambda_i) + \Re(\lambda_j)|}}{\|\mathbf{H}(j\omega)\|_2^2}.$$

### 3.4.4 Algorithme récapitulatif

Les étapes d'implémentation de la méthode proposée sont toutes résumées dans l'algorithme suivant :

**Étape 1.** Trouver une approximation  $\Sigma(A_n, B_n, C_n)$  de la représentation entrée-sortie lorsque le système est de dimension infinie.

**Étape 2.** Trouver l'ensemble  $\Gamma_b$  ainsi que les variables d'état  $\bar{x}_\gamma(t)$ ,  $\gamma \in \Gamma_b$  qui lui correspondent (voir Section 3.4.3.2).

**Étape 3.** Calculer les facteurs de participations des modes du système dans les variables d'état sélectionnées dans l'étape 2.

**Étape 4.** Trouver le noyau  $\Lambda$  en sélectionnant les modes qui participent le plus dans les variables d'état trouvées à l'étape 2 (voir Section 3.4.3.1).

**Étape 5.** Garder les modes du noyau  $\Lambda$  trouvé à l'étape 4 dans le modèle réduit en utilisant la troncature modale.

#### 3.4.4.1 Cas des systèmes avec pôles multiples

A ce stade on remarque bien que notre développement repose sur le fait que la matrice  $A$  de (3.30) a des valeurs propres distinctes. En effet, dans le cas contraire, les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  ont des multiplicités  $m_i > 1$  et les vecteurs propres associés sont dits *vecteurs propres généralisés*. Par conséquent, la matrice  $A$  n'est pas *diagonalisable* dans ce cas et admet uniquement une forme de Jordan (voir, e.g., [30]). Ainsi, dans une telle situation, il n'est pas possible d'utiliser directement les facteurs de participation tels qu'ils sont donnés par la Définition 3.1 (voir, e.g., [72]). Pour cause, la relation entre les états et les modes ne peut pas être établie uniquement par les participations  $p_{ki}$  comme dans le cas des valeurs propres distinctes. C'est pourquoi, l'extension de notre méthodologie à des systèmes ayant des pôles multiples nécessite au préalable une définition des participations dans le cas des valeurs propres multiples.

Par ceci, s'achève ainsi la technique de réduction avec préservation de la structure dynamique dont la validité est discutée en Section 3.5 à l'aide de plusieurs exemples. Dans la prochaine section, la réduction avec préservation de la structure physique sera abordée, car elle occupe une place importante tel qu'il a été mentionné auparavant.

#### 3.4.5 Réduction avec préservation de la structure physique

Tel qu'il est détaillé en Section 3.2.3.2, l'idée derrière la préservation de la structure physique est de conserver les interconnexions en réduisant juste le modèle d'un ou plusieurs sous-systèmes. C'est ce qui conduit au final à un modèle réduit plus représentatif du système physique comparé à un modèle purement mathématique comme (3.35). Toutefois, la difficulté face à une telle tâche réside dans le choix des dynamiques importantes à garder dans le modèle réduit du sous-système. En effet, comme on peut le voir en Section 3.5.3.3, les dynamiques importantes d'un sous-système dépendent de l'interaction avec les autres dynamiques du système tout entier. Par conséquent, une analyse structurelle du comportement dynamique de ce dernier s'impose en premier lieu. Il s'agit d'évaluer d'abord la contribution de toutes les dynamiques du sous-système dans la dynamique de l'ensemble du système pour ne garder ensuite, dans le modèle réduit du sous-système, que celles qui ont des contributions significatives. Une telle procédure a été proposée, e.g., dans [32] où le sous-système est réduit par une troncature modale après une évaluation de l'impact de ses modes dans ceux du système entier. Cette technique donne des bons résultats mais son utilisation est, généralement, réservée aux systèmes dont le modèle dynamique a une structure bien particulière, comme en mécanique. Pour les systèmes électriques, ceci

constitue un handicap car il n'est pas facile de mettre le modèle dynamique sous cette forme particulière. Ainsi, notre stratégie pour surmonter cette difficulté est d'utiliser de nouveau le noyau  $\Lambda$  introduit en Section 3.4.2 afin d'en déduire les modes importants d'un sous-système. Pour y voir plus clair, considérons en premier l'ensemble

$$\Lambda_{sub} = \{\lambda_{sub_1}, \dots, \lambda_{sub_d}\},$$

comme étant les modes du modèle complet d'ordre  $d$  d'un sous-système isolé du reste du système. Rappelons ensuite que les dynamiques liées aux modes du noyau  $\Lambda$  sont celles qui impactent le plus le comportement entrée-sortie du système interconnecté représenté par (3.23). Par conséquent, la contribution d'un mode  $k$  du sous-système dans le comportement du système entier peut se traduire par l'impact de  $\lambda_{sub_k}$  sur les modes de  $\Lambda$ . Une manière directe d'évaluer cet impact est de calculer les sensibilités de tous les modes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{m=|I|}$  de  $\Lambda$  par rapport à ceux de  $\Lambda_{sub}$ . Plus précisément, comme le système global est composé de plusieurs sous-systèmes interconnectés, la matrice  $A_n$  de (3.23) fait nécessairement intervenir la matrice d'état  $A_{sub}$  du sous-système en question. Ainsi, le rôle que joue chaque valeur propre  $\lambda_{sub_k}$  de  $A_{sub}$  dans celles de  $A$  peut être quantifié à l'aide des sensibilités  $M_{ki}$  ci-dessous

$$M_{ik} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \lambda_{sub_k}}, \quad \text{avec } i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, d\}, \quad (3.51)$$

à partir desquelles l'impact des modes de  $\Lambda_{sub}$  sur ceux de  $\Lambda$  se déduit aisément. Néanmoins, dans un cas comme le notre, la relation (3.51) fait intervenir des dérivées qui sont difficiles à calculer analytiquement afin d'aboutir à une forme facile à exploiter pour l'implémentation. Par conséquent, il n'est pas facile, dans une telle situation, d'évaluer la contribution des modes d'un sous-système dans ceux du noyau  $\Lambda$  à l'aide d'un calcul direct. C'est la raison pour laquelle on s'intéresse ici à chercher, parmi les modes du sous-système, ceux qui interagissent le plus avec ceux du noyau  $\Lambda$  pour enfin les garder dans son modèle réduit. La technique employée à cet effet consiste à comparer les fréquences des modes afin d'avoir une indication sur l'interaction entre eux qui se manifeste, principalement, par une similitude des fréquences. En effet, on peut voir e.g., dans [83] que les fréquences des modes d'un sous-système ne changent pas considérablement suite à sa connexion à l'ensemble du système. Ce qui signifie que, parmi les modes du noyau  $\Lambda$ , ceux qui ont des fréquences proches des modes du sous-système doivent leur existence, en grande partie, à celui-ci. Ainsi, la première étape dans notre procédure consiste à sélectionner parmi les modes de  $\Lambda$  un ensemble  $\mathbb{K}_S$  de ceux qui participent le plus dans les variable d'état liées au sous-système en question. Ensuite, comparer les fréquences de ces modes avec celles des modes du sous-système déconnecté, i.e.,  $\Lambda_{sub}$ . De cette manière, pour chaque mode de  $\mathbb{K}_S$ , on peut trouver tous les modes du sous-système qui lui sont proches en fréquence comme le montre la Fig. 3.9. En effet, pour chaque fréquence  $w_i$  d'un mode de  $\mathbb{K}_S$ , correspond un voisinage fréquentiel  $F_i$  qui contient les modes du sous-système (isolé) qui ont des fréquences proches de  $w_i$ . In fine, en considérant tous les modes de  $\mathbb{K}_S$ , on obtient un ensemble  $\Delta_{sub}$  de  $N$  modes parmi ceux du sous-système qui ont des fréquences proches de  $\{w_1, \dots, w_K\}$ . Tous les modes obtenus, sont par la suite, gardés dans le modèle réduit du sous-système à l'aide d'une troncature modale.

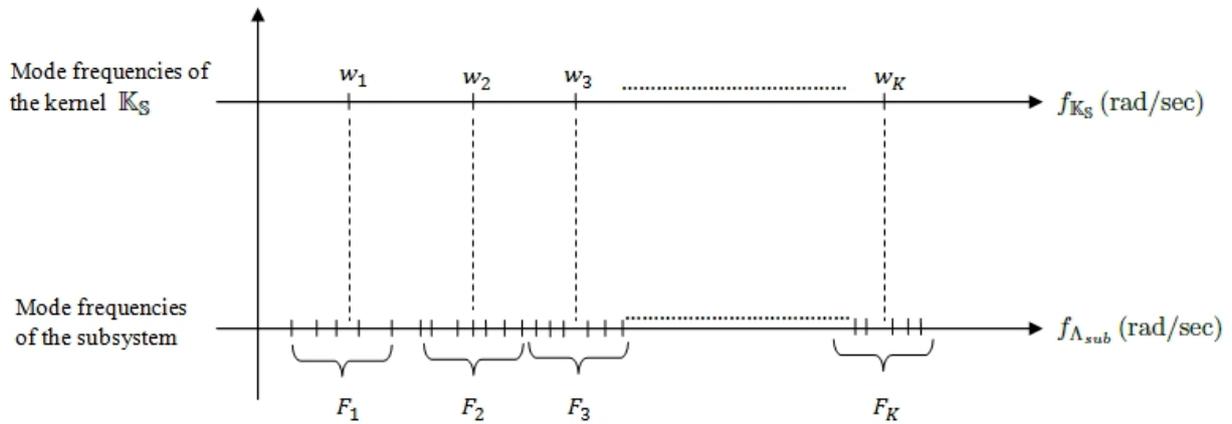


FIGURE 3.9 – Comparaison fréquentielle

*Remarque 3.5.* Dans le cas des modes réels (i.e., de fréquence nulle) on utilise plutôt les participations car il n'existe pas de voisinages fréquentiels. Il faut d'abord repérer les variables d'état du sous-système dans lesquelles participe le plus le mode réel de  $\mathbb{K}_S$ , puis sélectionner parmi les mode de  $\Lambda_{sub}$  ceux qui participent le plus dans ces états. Au final, les modes trouvés s'ajoutent à l'ensemble  $\Delta_{sub}$ .

Par ailleurs, il est tout a fait remarquable que la procédure qu'on vient de présenter pour trouver les modes du sous-système fournit des résultats propres à chaque choix d'un transfert entrée-sortie. En effet, comme le noyau des modes  $\Lambda$  est obtenu suite à un choix particulier des entrées et sorties du système (3.23), les modes de l'ensemble  $\Delta_{sub}$  sont eux aussi liés à ce choix particulier. Autrement dit, pour chaque transfert donné correspond un ensemble  $\Lambda$  de modes importants ainsi qu'un ensemble  $\Delta_{sub}$  des modes du sous-système qui jouent un rôle considérable dans ce transfert. Ainsi, pour couvrir une gamme plus large de phénomènes à reproduire, il suffit de prendre plusieurs transferts auxquels on s'y intéresse et appliquer ensuite (pour chacun d'eux) la procédure de choix des modes. De cette manière, on obtient à chaque fois les modes à garder dans le sous-système qui sont groupés au final pour être tous gardés dans le modèle réduit du sous-système. Ce qui permet, une fois ce modèle réduit connecté à l'ensemble du système, de reproduire tous les phénomènes qui présentent un intérêt dans les transferts sectionnés.

A cela, s'ajoute également l'avantage de pouvoir prendre en compte quelques non linéarités telles que l'effet d'une variations de consignes. En effet, comme mentionné précédemment, le modèle des systèmes électriques est non linéaire ce qui fait que notre approche n'est valable qu'autour du point d'équilibre où le modèle a été linéarisé. Ainsi, pour réduire le sous-système, tout en prenant en compte des variations d'amplitude sur l'entrée  $u$ , on peut fixer en premier un intervalle de variation, e.g.,  $u \in [V_{\min} V_{\max}]$ . Ensuite, faire des linéarisations autour de plusieurs valeurs de  $u$  dans  $[V_{\min} V_{\max}]$  ce qui conduit au final à une multitude de modèles linéarisés comme (3.23). Pour chacun d'eux, et via la procédure présentée ci-dessus, il est ainsi possible de trouver à chaque fois un ensemble  $\Delta_{sub}$  contenant les modes importants du sous-système. Tous les modes trouvés peuvent ensuite être groupés est gardés ensemble dans le modèle réduit du sous-système afin de

couvrir au mieux la plage de variation de l'entrée  $u$ .

### 3.4.5.1 Technique d'intégration au système non linéaire

Après avoir réduit le modèle du sous-système, on aborde désormais la question de l'intégration de ce modèle réduit au reste du système à des fins d'analyse ou de simulation numérique. En effet, le caractère non linéaire du modèle initial du système interconnecté suggère une adaptation du modèle réduit du sous-système afin qu'il puisse *s'emboîter* normalement dans l'ensemble. Plus particulièrement, sans provoquer des *incompatibilités* numériques au niveau des points de connexion, car ces derniers avaient des valeurs bien déterminées lors de la linéarisation du modèle initial. Dans une approche de type Bond Graph (voir, par exemple, [22]), cela correspond à la conservation de l'énergie échangée entre deux systèmes connectés l'un à l'autre. De ce fait, pour garantir la compatibilité aux points de connexion, des procédures d'initialisation ont été développées (dans la littérature) dans le cadre de l'approche Bond Graph notamment pour les systèmes hybrides (voir, par exemple, [25]). Globalement, ce type de procédures vise à maintenir les valeurs initiales d'un ensemble bien choisi de variables d'état et de modifier, par un processus itératif, les conditions initiales des variables d'état restantes. Dans notre cas, il est possible de considérer le système comme étant de nature hybride, où on commute d'un modèle à un autre autour d'un point de fonctionnement. Toutefois, le type de procédures d'initialisation que l'on vient d'évoquer peut ne pas convenir vis-à-vis de nos objectifs. Plus précisément, comme les variables d'état pour lesquelles les conditions initiales ont été changées peuvent ne pas appartenir au même sous-système physique, le nouveau point de fonctionnement qui en résulte peut s'éloigner *significativement* du point de fonctionnement avant la réinitialisation. Ce qui peut faire *diverger* la simulation numérique pour des raisons de stabilité, car pour un système non linéaire le point de fonctionnement est très important. De plus, comme le modèle réduit est valable autour d'un point de fonctionnement bien choisi, il se peut, si le point de fonctionnement change significativement, que le modèle global ne donne pas des résultats correctes. Ainsi, il paraît difficile d'initialiser correctement le modèle réduit de telle sorte à avoir une compatibilité au niveau des points de connexion et un point de fonctionnement proche du point initial. Pour y voir plus clair, considérons la représentation d'état ci-dessous

$$\begin{cases} \dot{x}_{sub}(t) = A_{sub}x_{sub}(t) + B_{sub}u_{sub}(t) \\ y_{sub}(t) = C_{sub}x_{sub}(t) \end{cases}, \quad (3.52)$$

comme étant le modèle complet (i.e., non réduit) du sous-système. A l'équilibre on a,

$$\begin{cases} u_{sub}(t) = u_0, \\ y_{sub}(t) = y_0, \\ x_{sub}(t) = x_0 = -A_{sub}^{-1}B_{sub}u_0, \\ y_0 = -C_{sub}A_{sub}^{-1}B_{sub}u_0 \end{cases} \quad (3.53)$$

où  $(-C_{sub}A_{sub}^{-1}B_{sub})$  représente le gain statique du modèle (3.52) et  $(u_0, y_0)$  les valeurs aux points d'interconnexions. Une fois (3.52) tronqué selon la procédure expliquée précédemment,

son modèle dynamique s'écrit,

$$\begin{cases} \hat{x}_{sub}(t) = \hat{A}_{sub}\hat{x}_{sub}(t) + \hat{B}_{sub}u_{sub}(t) \\ y_{sub}(t) = \hat{C}_{sub}\hat{x}_{sub}(t) \end{cases} \quad (3.54)$$

A partir de là, on voit bien qu'à l'équilibre, le modèle (3.54) ne garantit pas le maintien des valeurs  $(u_0, y_0)$  aux points d'interconnexions car,

$$\hat{x}_0 = -\hat{A}_{sub}^{-1}\hat{B}_{sub}u_0,$$

ne satisfait pas nécessairement la dernière relation de (3.53). En effet, si le gain statique de (3.54) est différent de celui de (3.52), i.e.,  $(-\hat{C}_{sub}\hat{A}_{sub}^{-1}\hat{B}_{sub} \neq -C_{sub}A_{sub}^{-1}B_{sub})$ , la sortie de (3.54) à l'équilibre, i.e.,  $(-\hat{C}_{sub}\hat{A}_{sub}^{-1}\hat{B}_{sub}u_0)$  sera différente de  $y_0$ . C'est ce qui cause une incompatibilité au point de connexion qui peut conduire à une instabilité numérique. Ainsi, notre proposition pour rester proche du point de fonctionnement du système, tout en préservant les modes du sous-système, est d'introduire des petites modifications sur les matrices  $\hat{B}_{sub}$  et  $\hat{C}_{sub}$  de (3.54) afin de pouvoir garder les mêmes valeurs aux points d'interconnexion. Ceci passe par la résolution du problème d'optimisation ci-dessous,

$$\begin{aligned} \min_{\hat{C}_{new}, \hat{B}_{new}} & \left( \|\hat{C}_{new} - \hat{C}_{sub}\|_2^2 + \|\hat{B}_{new} - \hat{B}_{sub}\|_2^2 \right) \\ \text{s.t} & \quad , \\ & -\hat{C}_{new}\hat{A}_{sub}^{-1}\hat{B}_{new} = -C_{sub}A_{sub}^{-1}B_{sub} \end{aligned} \quad (3.55)$$

qui donne les matrices  $\hat{C}_{new}$  et  $\hat{B}_{new}$  à utiliser dans (3.54) à la place de  $\hat{C}_{sub}$  et  $\hat{B}_{sub}$  afin d'avoir des valeurs compatibles au niveau des points d'interconnexion. Une application de ce type est présentée en Section 3.5.3.3 où le problème (3.55) a été résolu en utilisant la fonction *fmincon* de Matlab. Bien évidemment, d'autres programmes peuvent être utilisés pour résoudre (3.55) mais en prenant soin d'adopter l'initialisation  $\hat{C}_{new} = \hat{C}_{sub}$  et  $\hat{B}_{new} = \hat{B}_{sub}$  afin de rester proche de  $\hat{C}_{new}$  et  $\hat{B}_{new}$ .

### 3.4.6 Algorithme général

Après avoir présenté en détails les étapes de la nouvelle méthodologie proposée ici, on expose désormais un algorithme de synthèse présenté en Fig. 3.10 qui sert de support à l'implantation numérique. Il regroupe à la fois les étapes conduisant à une préservation de la structure dynamique et physique afin de donner une vision d'ensemble.

## 3.5 Validation : exemples et applications industrielles

Après avoir présenté le concept et les fondements théoriques de cette nouvelle méthodologie de troncature, on passe désormais à sa validation en traitant différents cas. Tous les exemples et les applications choisis à cet effet mettent l'accent sur les particularités et les enjeux évoqués et discutés au cours des sections précédentes. Les deux premiers exemples, illustrent en particulier la troncature dans le cas où il existe ou non une chute importante

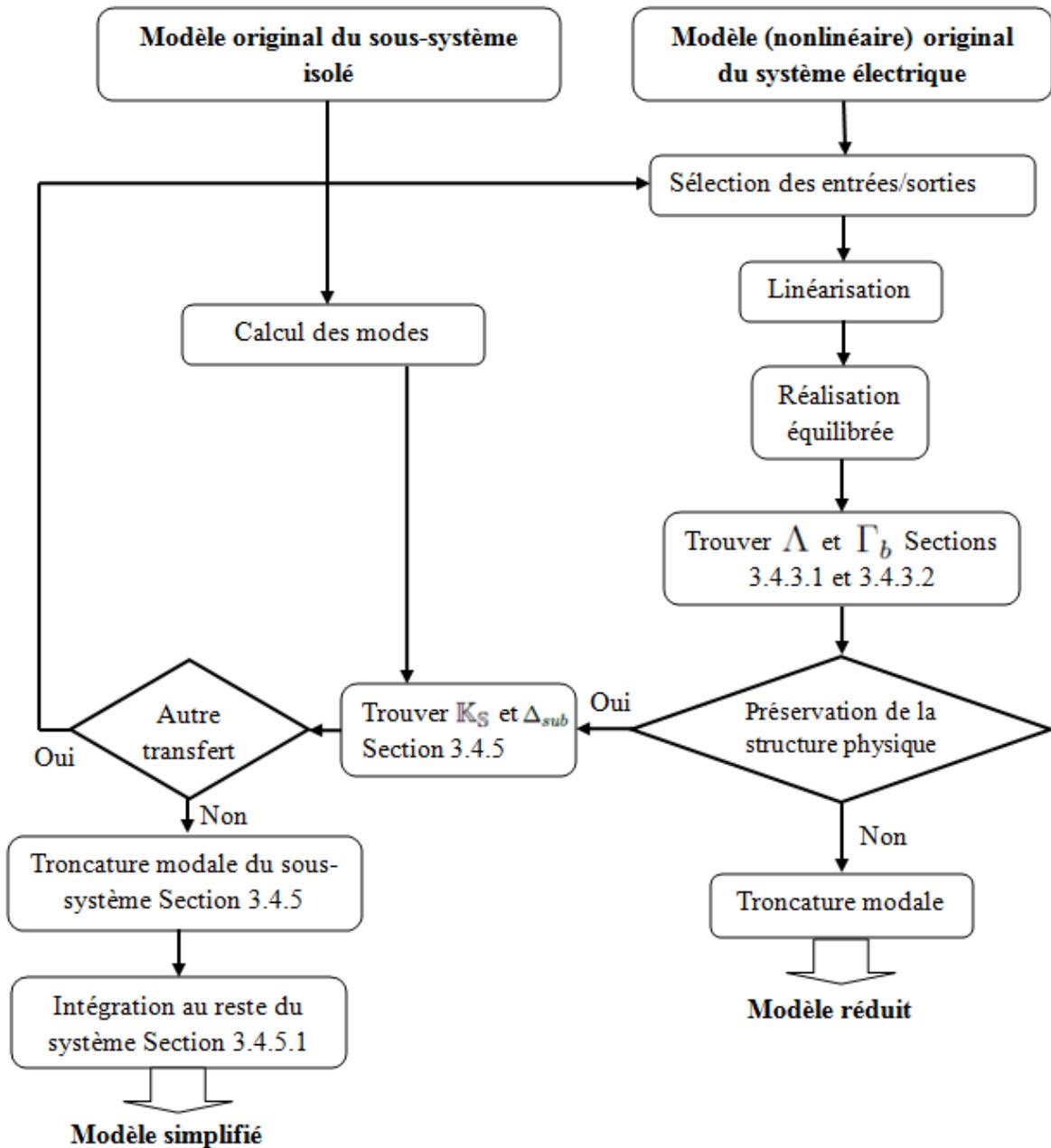


FIGURE 3.10 – Algorithme général.

dans le spectre des valeurs singulières de Hankel. Quant aux applications industrielles traitées, elles illustrent en grande partie la troncature des sous-systèmes en abordant des problématiques usuellement rencontrées dans les systèmes électriques. Il s’agit en particulier de l’écroulement de tension et l’impact d’intégration d’une liaison à courant continu (HVDC) dans un système à courant alternatif (AC). Des comparaisons sont également faites avec d’autres techniques de troncature afin de consolider la validation de cette nouvelle méthodologie et d’élargir son cadre applicatif.

### 3.5.1 Exemple 1 : Cas d'une chute dans le spectre de Hankel

Parmi les systèmes dynamiques qui ont une chute dans leur spectre de valeurs singulières de Hankel, il existe certains pour lesquels les variables d'état liées aux grandes valeurs singulières n'ont pas toutes la même importance. Ainsi, une technique comme la troncature équilibrée, vue précédemment, a besoin de garder toutes ces variables d'état malgré que certains sont de moindre importance dans le comportement dynamique du système. Dans une telle situation, et en plus des cas sans chute, la nouvelle méthodologie donne, quant à elle, des résultats très satisfaisants tant pour l'ordre du modèle réduit que pour le comportement dynamique entrée-sortie. Ceci est illustré ici à l'aide d'un système linéaire monovarié présenté ci-dessous.

#### 3.5.1.1 Présentation du modèle et ses propriétés

Le modèle considéré pour appuyer les propos de la section précédente est d'ordre 301 donné par la forme d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (3.56)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}[A_1, \dots, A_{100}, -0.009, -1, \dots, -100], \text{ avec} \\ A_j &= \begin{bmatrix} -0.001 & \sqrt{j^3} \\ -j & -0.001 \end{bmatrix}, j = 1, \dots, 100, \\ B &= [1, 1, \dots, 1]^T \end{aligned} \quad (3.57)$$

et

$$C = \left[ \underbrace{1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0}_{200}, 5, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{100} \right].$$

Comme le montre la Fig. 3.11, son spectre de valeurs singulières de Hankel présente une chute assez importante d'environ 105 à l'état 201, i.e.,  $\frac{\sigma_{201}}{\sigma_{202}} \approx 150$ . Une fois l'indice 201 dépassé, toutes les valeurs singulières décroissent considérablement en passant de 1,84 à  $4,45 \times 10^{-14}$ . Cette situation est fortement favorable à l'application de la troncature équilibrée tel qu'il est expliqué dans la section qui suit.

#### 3.5.1.2 Approximation et validation

Vu l'importante chute que présente le spectre de Hankel de la Fig. 3.11, la troncature équilibrée garde tous les états de plus grandes énergies, i.e., correspondants aux 201 premières valeurs avant la chute. Par conséquent, comme le montre la Fig. 3.12a, le modèle réduit d'ordre 201 qui en résulte fournit une très bonne approximation du comportement entrée-sortie du modèle original. Néanmoins, parmi l'ensemble des variables d'état du système, seulement 53, d'entre elles, ont été prises en compte dans la nouvelle méthodologie car elles ont une contribution assez significative dans l'énergie  $E_H$  (i.e.,

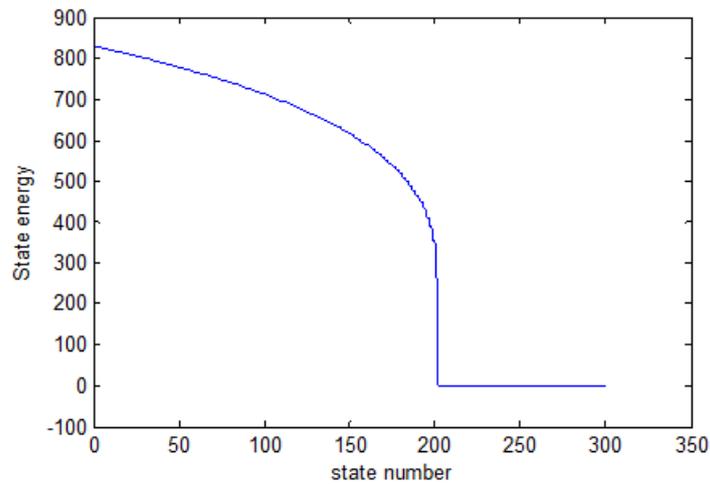
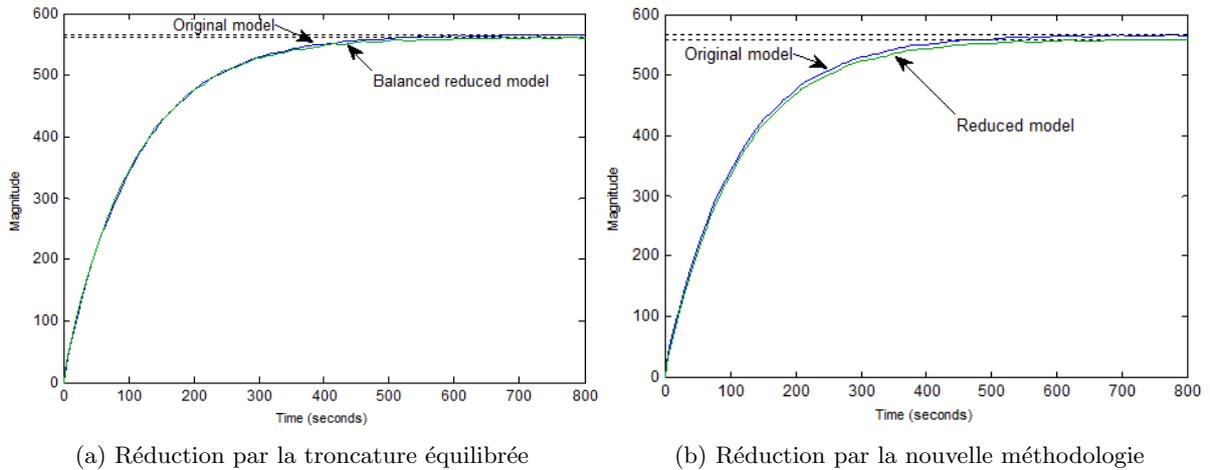


FIGURE 3.11 – Valeurs singulières de Hankel.

( $|\Gamma_b| = 53$ ). De ce fait, le noyau de modes  $\Lambda$  construit à partir de ces variables d'état (en sélectionnant les modes qui participent le plus) contient 105 modes (i.e.,  $|\Lambda| = |I| = 105$ ) et conduit à  $\mathcal{C}_r = 0.3524$ .



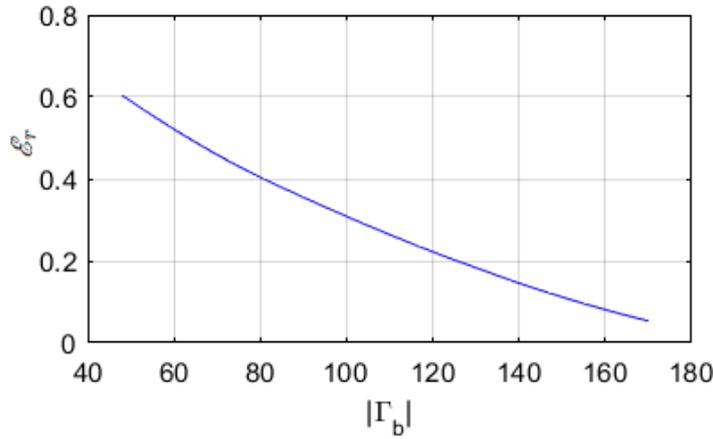
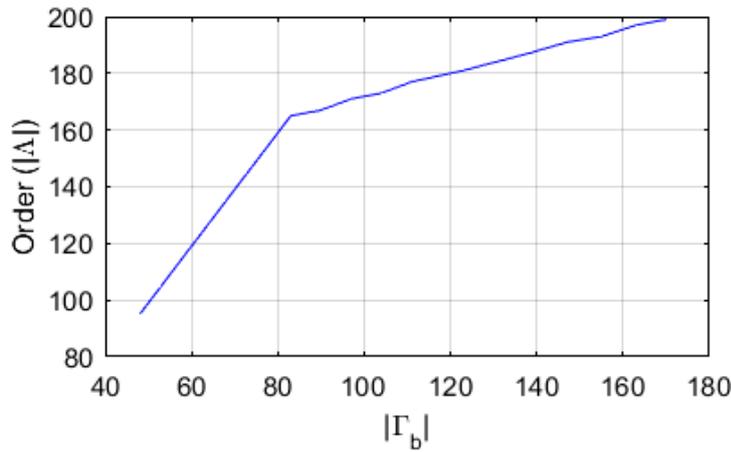
(a) Réduction par la troncature équilibrée

(b) Réduction par la nouvelle méthodologie

FIGURE 3.12 – Réponses indicielles du modèle complet d'ordre 301, du modèle réduit par la troncature équilibrée et du nouveau modèle réduit.

En outre, pour mieux voir le rapport entre la qualité de l'approximation et l'erreur relative  $\mathcal{C}_r$ , une variation d'ordre du modèle réduit est effectuée en se basant sur les explications de la Section 3.4.3.3. Les résultats obtenus sont présentés en Figs. 3.13, 3.14 et 3.15.

Sur les Figs. 3.13a et 3.13b on voit, respectivement, l'évolution de la différence relative  $\mathcal{E}_r$ , et de l'ordre  $r = |\Lambda|$  du modèle réduit en fonction du nombre de variables d'état sélectionnées (i.e.,  $|\Gamma_b|$ ) qui passe de 48 à 170. Il est tout à fait remarquable qu'en augmentant le nombre  $|\Gamma_b|$  de variables d'état utilisées pour construire le noyau  $\Lambda$ , la différence entre les énergies  $E_H$  et  $E_{\Gamma_b}$  décroît assez vite avec un taux quasiment constant. Ceci

(a) Variation de la différence relative  $\mathcal{E}_r$  en fonction de  $|\Gamma_b|$ (b) Variation de l'ordre  $r$  en fonction de  $|\Gamma_b|$ FIGURE 3.13 – Variations par rapport à  $|\Gamma_b|$ 

témoigne d'un bon choix de l'ensemble  $\bar{\Gamma}_b$  car ceci conduit l'énergie  $E_{\bar{\Gamma}_b}$  à suivre la même forme de décroissance (puisque  $E_H = E_\Gamma + E_{\bar{\Gamma}_b}$ ), ce qui est avantageux pour minimiser (3.48) en sélectionnant peu de variables d'état. Par ailleurs, lorsque  $|\Gamma_b|$  augmente, la Fig. 3.13b montre que l'ordre du modèle réduit suit une évolution quasi linéaire par morceaux avec deux pentes différentes. Au début, lorsque  $|\Gamma_b|$  passe de 48 à 82, le taux d'évolution est de  $|\Lambda| = 2 |\Gamma_b|$  avant qu'il ne soit, par la suite, pratiquement divisé par 4, i.e.,  $|\Lambda| \approx \frac{1}{2} |\Gamma_b|$ . Ceci s'explique par le fait que les variables d'état  $\bar{x}_k, k \in \Gamma$  sélectionnées entre  $|\Gamma_b| = 48$  et  $|\Gamma_b| = 82$ , contiennent la plupart des modes importants du système comparées aux autres variables d'état (celles sélectionnées après  $|\Gamma_b| = 82$ ) qui en contiennent moins. D'une façon générale, pour que les variables d'état sélectionnées puisse contenir tous les modes importants du système, la condition est un ratio assez grand entre les énergies  $E_{\Gamma_b}$  et  $E_{\bar{\Gamma}_b}$ , e.g.,  $\frac{E_{\Gamma_b}}{E_{\bar{\Gamma}_b}} \geq 10$ . En pratique, même si ce ratio n'est pas aussi important, on peut constater des bons résultats comme pour (3.56)-(3.57) où les 53 variables d'état sélectionnées conduisent à un ratio de 0.65 alors que la Fig. 3.12b montre une bonne approximation de la réponse indicielle. Toutefois, un ratio aussi faible n'est pas sans conséquences car, contrai-

rement à la réponse indicielle, le modèle réduit peut présenter des moindres performances pour la réponse impulsionnelle (lorsque les modes sont quasiment tous excités) comme le montre la Fig. 3.14a. De ce fait, pour avoir une indication a priori sur l'adéquation du modèle réduit à reproduire la réponse impulsionnelle du modèle original, on utilise, comme mesure quantitative, la différence relative  $\mathcal{C}_r$  introduite en Section 3.4.3.3. La Fig. 3.15 montre l'allure de  $\mathcal{C}_r$  lorsque l'ordre du modèle réduit varie de 95 à 199, i.e.,  $|\Gamma_b|$  de 48 à 70. A première vue, on peut déjà remarquer que  $\mathcal{C}_r$  qui varie de 0.402 à 0.0033 décroît assez rapidement avec une dynamique d'évolution similaire à celle de la différence relative  $\mathcal{E}_r$  montrée en Fig. 3.13a. De plus, comme la décroissance est *monotone*, ceci montre que plus l'ordre du modèle réduit est élevé, mieux il approxime la réponse impulsionnelle du modèle complet. Pour illustrer ceci, la Fig. 3.14b montre la réponse impulsionnelle lorsque l'ordre du modèle réduit est fixé à 187 et conduit à  $\mathcal{C}_r = 0.0273$ . En comparant avec le modèle réduit d'ordre 105 obtenu précédemment, il est tout à fait clair que, dans ce cas, l'approximation est de meilleure qualité.

Ce résultat est particulièrement intéressant car il montre que, même si l'on fixe pas convenablement le ratio  $\frac{E_{\Gamma_b}}{E_{\bar{\Gamma}_b}}$ , on peut toujours s'attendre à une meilleure qualité d'approximation en augmentant l'ordre du modèle réduit. Cela vient s'ajouter au fait que l'écart relatif  $\mathcal{J}_r$  introduit en Section 3.4.3.3, est un très bon indicateur de la performance du modèle réduit car, comme le montre la Fig. 3.15,  $\mathcal{C}_r$  est très proche de  $\mathcal{J}_r = \mu$ . Tous ces résultats et ces avantages restent valables aussi dans le cas multivariable comme le montre l'exemple de la section qui suit.

### 3.5.2 Exemple 2 : Cas d'un système multivariables

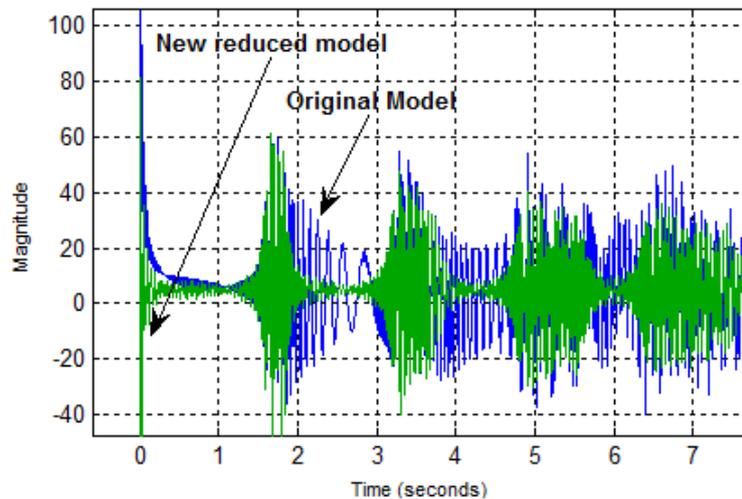
En plus d'être multivariables, cet exemple illustre l'efficacité de l'approche face à des cas plus difficiles où les valeurs singulières de Hankel ne décroissent quasiment pas. Le modèle dynamique à réduire est d'ordre 49 et possède deux entrées et deux sorties. Il est donné par la forme d'état (3.56) avec

$$A = \text{diag}[A_1, \dots, A_{24}, -0.1], C = \left[ \begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0.05 & \dots & 1 & 0.05 & 0.4 \end{array} \right] \text{ et} \quad (3.58)$$

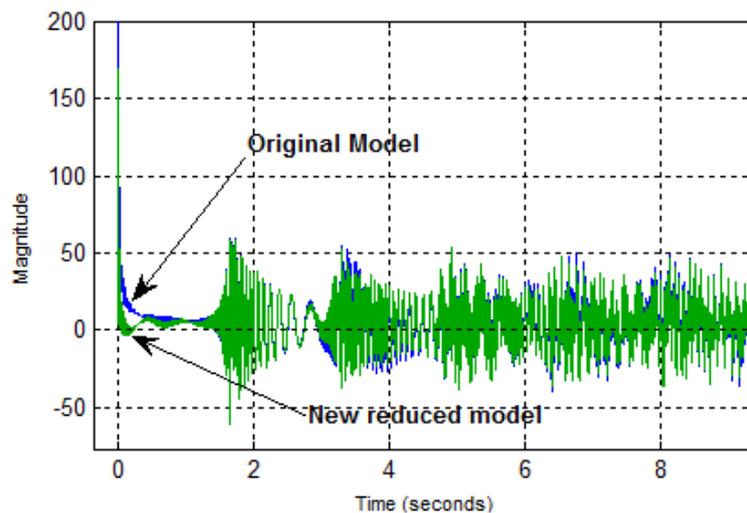
$$B = C^T, \text{ où}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} -0.01 & n^2 \\ -n^2 & -0.01 \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Son spectre des valeurs singulières est presque constant (les différences sont de l'ordre de  $10^{-4}$ ) comme le montre la Fig. 3.16a avec une seule chute à la fin (entre l'avant dernier et le dernier état) qui est de 10 environ. Par ailleurs, tel qu'on peut le voir en Fig. 3.16b, ceci est accompagné d'une quasi égalité des parties réelles des modes (sauf pour le mode réel  $-0.1$ ) comme on la déjà constaté dans le cas des lignes ouvertes (voir la deuxième colonne du Tableau 3.1). Ce qui laisse supposer un lien étroit entre cette invariance des parties réelles des modes et la décroissance très lente des valeurs singulières de Hankel.



(a) Comparaison des réponses impulsionnelles du modèle original et le réduit d'ordre 105



(b) Comparaison des réponses impulsionnelles du modèle original et le réduit d'ordre 187

FIGURE 3.14 – Réponses impulsionnelles des modèles original et réduit pour différents ordres

### 3.5.2.1 Approximation et validation

Vu le spectre des valeurs singulières, toutes les variables d'état du système, i.e., 49, doivent être gardées par la troncature équilibrée afin d'obtenir de bons résultats. Par la nouvelle méthode, 10 variables d'état, parmi celles du système, sont sélectionnées car elles sont plus importantes, ce qui conduit à un modèle réduit d'ordre 25 (i.e., le cardinal de  $\Lambda$ ). Ses propriétés sont discutées le long de cette section en se basant sur les résultats présentés en Figs. 3.17, 3.18, 3.19 et 3.20.

Sur la Fig. 3.17, on voit la réponse à un échelon unitaire du modèle complet ainsi que celle du réduit obtenu par la méthode proposée. De prime abord, les différences entre les deux réponses sont peu perceptibles, c'est pourquoi un agrandissement est ajouté sur la même figure afin de pouvoir les distinguer. Comme on peut le constater, les différences

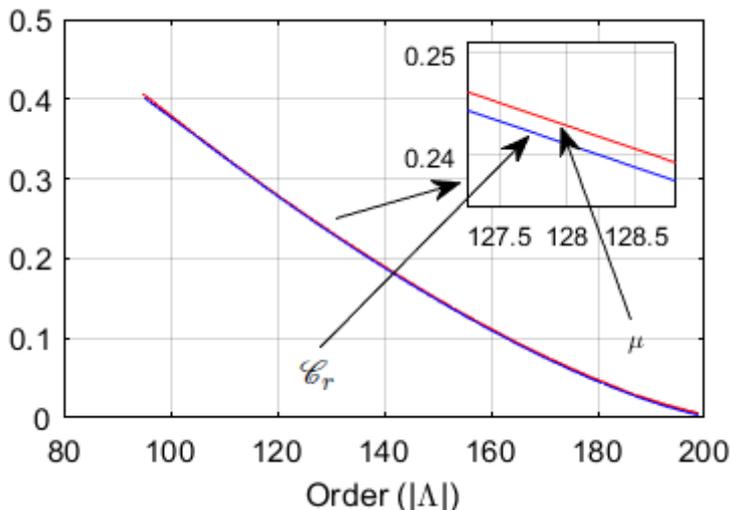


FIGURE 3.15 – Variation de  $\mathcal{E}_r$  et de  $\mathcal{J}_r = \mu$  en fonction de l'ordre  $|\Lambda|$ .

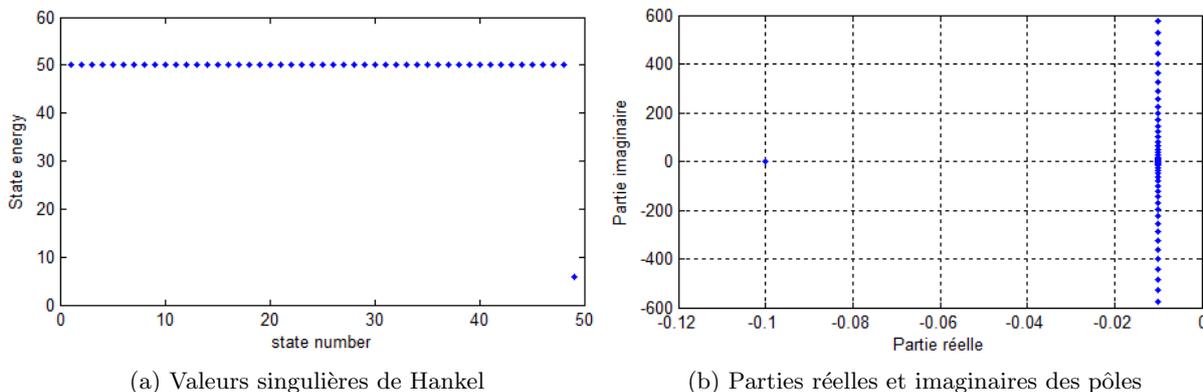


FIGURE 3.16 – Pôles et valeurs singulières

sont tellement petites qu'elles peuvent être négligées, ce qui montre ainsi que le nouveau modèle réduit reproduit assez fidèlement la réponse à un échelon du modèle complet. Un tel résultat s'explique assez facilement à partir du diagramme de Bode (de gain) de la Fig. 3.18. En effet, on voit que les modes gardés dans le modèle réduit sont, en grande partie, de faibles fréquences allant jusqu'à 83.5 rad/s avec quelques-uns en haute fréquences (e.g., de  $4 \times 10^2$  rad/s). Ainsi, lorsqu'on applique une entrée comme un échelon, qui excite principalement les modes de faibles fréquences, la réponse temporelle du modèle réduit sera quasiment la même que celle du modèle original. Par ailleurs, il est tout à fait remarquable que si l'un des modes, parmi ceux qui ne sont pas gardés dans le modèle réduit (i.e.,  $\lambda \notin \Lambda$ ), est excité séparément par une entrée qui cible sa fréquence (i.e.,  $10^2$  rad/s en Fig. 3.18), le modèle réduit peut se montrer moins efficace. Afin de pallier à cette situation, la solution consiste à ajouter, à travers la forme (3.34), tous les modes dont les fréquences sont dans la plage fréquentielle, qui est supposée connue dans ce cas, de l'entrée.

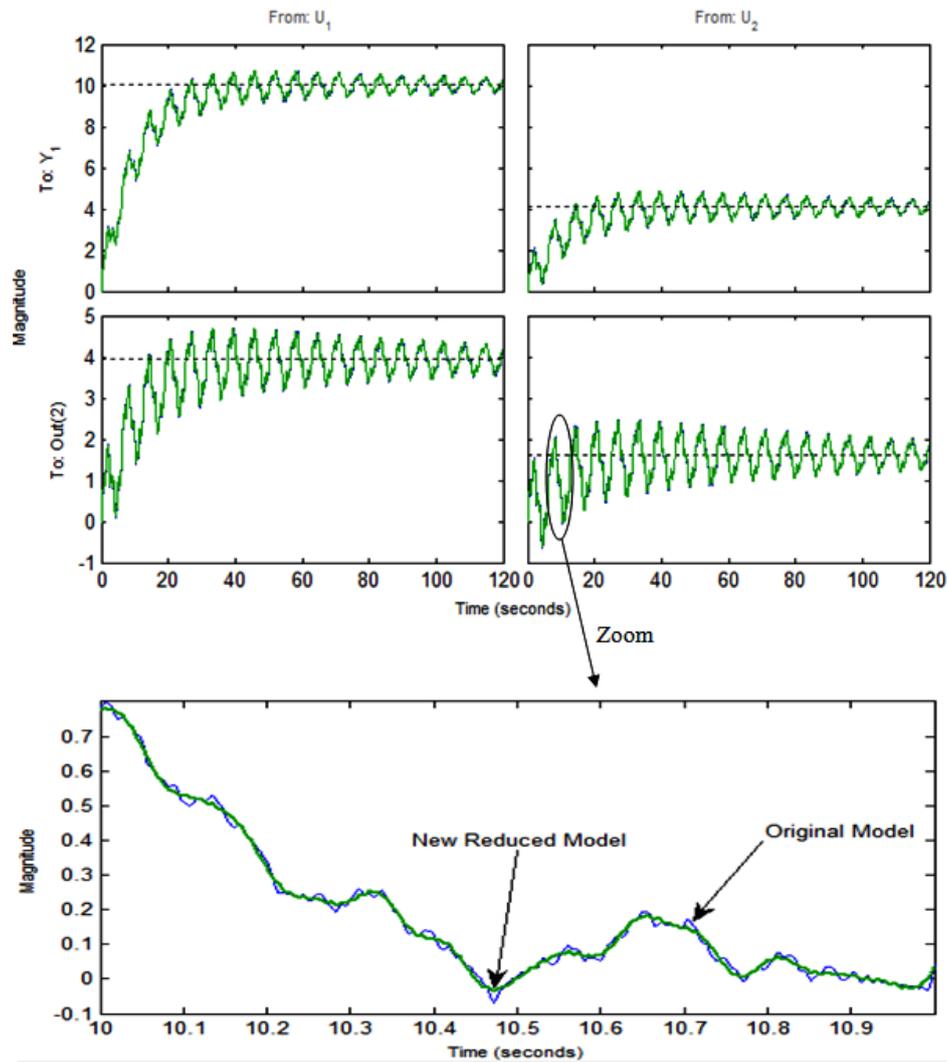


FIGURE 3.17 – Comparaison des réponses indicielles : modèle complet et le nouveau modèle réduit.

**Comparaisons :** En plus des résultats montrés précédemment, le nouveau modèle réduit est comparé avec celui obtenu par la troncature modale classique en utilisant l’algorithme SAMDP (voir [73] ou [76]) avec comme critère de choix des modes la norme  $H_\infty$  des fractions. Cependant, comme cette norme est presque la même pour toutes les fractions (i.e., pas d’indice clair de troncature), l’ordre de troncature est fixé manuellement à 25 afin de pouvoir se comparer avec notre modèle réduit. Dans le domaine temporel, la comparaison est faite en se basant sur la réponse indicielle comme le montre la Fig. 3.19 où on voit clairement que les deux modèles réduits (nouveau et standard) donnent des résultats très similaires. Comme dans le cas précédent, ceci est dû au fait que l’échelon excite principalement les modes de bases fréquences qui sont présents dans les deux modèles réduits tel qu’on peut le voir dans le tracé de Bode (en gain) de la Fig.3.20. En outre, le calcul de l’erreur relative  $\mathcal{E}_r$  montre, dans ce cas, qu’elle est pratiquement la même pour les deux modèles réduits ( $\mathcal{E}_{r_{new}} \simeq \mathcal{E}_{r_{standard}} = 0.4985$ ), ce qui fait que leurs réponses impulsionnelles

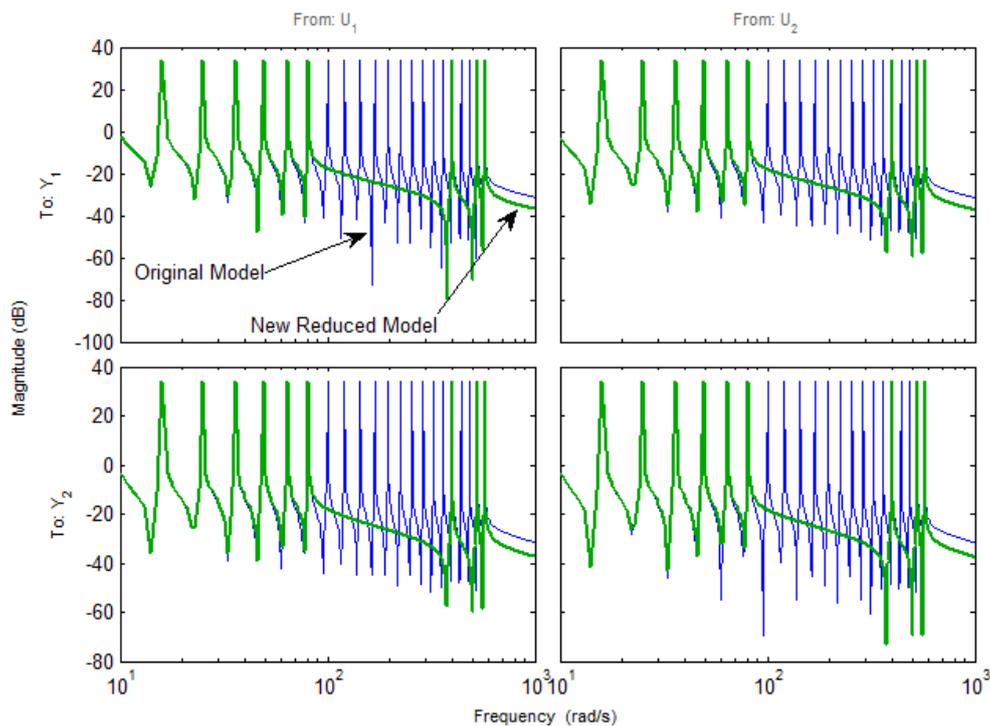


FIGURE 3.18 – Comparaison fréquentielle du modèle complet et du nouveau modèle réduit.

sont presque confondues.

### 3.5.3 Applications industrielles

Les applications industrielles traitées dans cette section sont des cas d'étude proposés par RTE et mettent l'accent, en particulier, sur les différents enjeux et besoins discutés en Section 3.2.3. Leur choix est motivé, d'une part, par le fait qu'elles s'impliquent assez souvent dans les cas d'étude considérés dans les systèmes de transport d'électricité. Et d'autre part, par le fait qu'elles mettent en évidence, rien qu'en échelle réduite, les écarts qu'il peut y avoir, au niveau des résultats de simulation, entre une modélisation simplifiée (par les techniques classiques) du système et une modélisation plus détaillée. Il s'agit, plus précisément, du système de transmission présenté en Section 3.2.1, du phénomène d'écroulement de tension, et enfin de l'intégration d'une liaison à courant continu (HVDC) dans un système à courant alternatif (AC). Pour chacune de ces applications, nous nous focalisons sur le modèle de la ligne de transmission afin de montrer l'apport de notre méthodologie de troncature pour la synthèse des modèles réduits pour l'analyse et la simulation.

#### 3.5.3.1 Système de transmission

Comme on a eu l'occasion de le voir précédemment, le système de transmission de la Fig. 3.1 est un cas industriel pour lequel ni la troncature équilibrée ni la troncature modale ne peuvent donner satisfaction. La difficulté est due à l'absence de chute dans le spectre des valeurs singulières comme le montre la Fig. 3.7 mais aussi aux propriétés fréquentielles

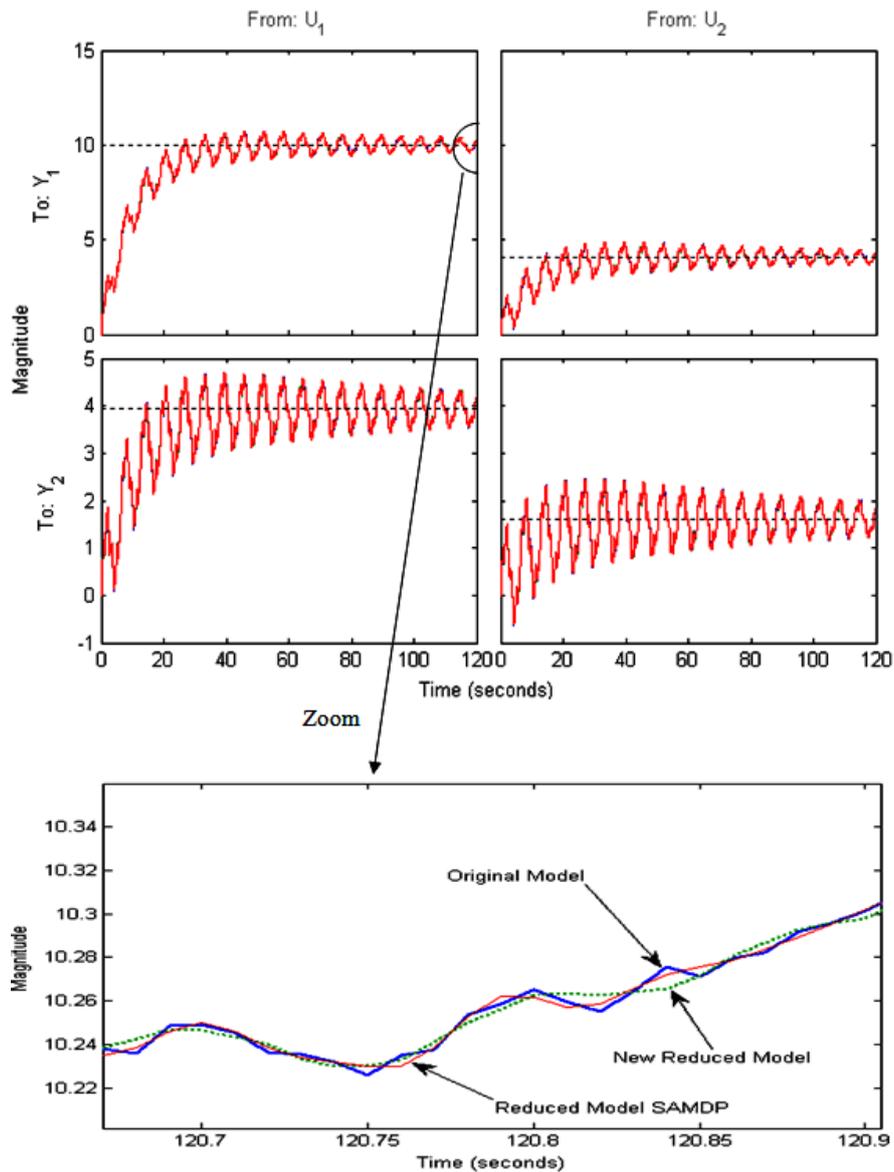


FIGURE 3.19 – Comparaison des réponses indicielles : nouveau modèle réduit, l'original et celui issu de la troncature modale.

du système. En effet, comme le montre le tracé de Bode (de gain) de la Fig. 3.2, le système dispose d'une bande passante (fréquentielle) très large (théoriquement infinie). Autrement dit, toute fréquence injectée par la source de tension à  $x = 0$  se retrouve au niveau de la tension à  $x = \ell$ , i.e., aux bornes de la charge  $Z_L$ . Bien évidemment, ceci n'est valable que dans la plage de fréquence pour laquelle le modèle à paramètres distribués et constants est valable. En effet, pour les très hautes fréquences (de l'ordre de GHz), l'influence de la fréquence sur les paramètres de la ligne devient un aspect important à prendre en compte. Dans notre cas, on considère que la bande passante s'étant jusqu'à des fréquences de l'ordre de MHz. Ainsi, l'approximation, lorsque la bande passante est aussi large, est habituellement précédée par une restriction à un intervalle fréquentiel fixé a priori afin de pouvoir appliquer des méthodes classiques (voir [40] ou [2]). Toutefois, la structure

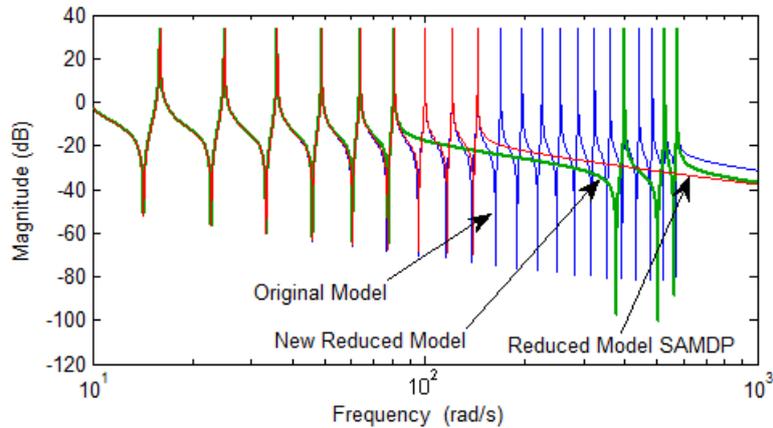


FIGURE 3.20 – Comparaison fréquentielle : nouveau modèle réduit, l’original et celui issu de la troncature modale (premier transfert, i.e., de  $u_1$  vers  $y_1$ )

dynamique du système initial n’est généralement pas préservée suite à l’application des filtres de pondération. De plus, il n’est pas toujours facile de connaître a priori la plage fréquentielle des phénomènes qui présentent un intérêt dans le système. Avec la nouvelle méthodologie, les résultats présentés ci-dessous montrent qu’elle permet, d’une part, de surmonter la difficulté liée aux choix des dynamiques importantes et, d’autre part, de préserver la structure dynamique du système.

**Approximation et validation :** L’approximation est faite en suivant les étapes décrites dans l’algorithme de la Section 3.4.4 comme pour les deux exemples traités précédemment. A partir de la représentation d’état  $\Sigma^n(A_n, B_n, C_n)$  de (3.1) avec  $n = 1000$  (voir paragraphe B de la Section 3.3.2.2), on déduit un ensemble dominant de 591 variables d’état et un noyau  $\Lambda$  de 171 modes. Par ailleurs, il est intéressant de mentionner que les modes trouvés, ne sont ni ceux qui correspondent aux fractions de plus grandes normes  $H_\infty$  (voir Section B)), ni ceux qui correspondent aux premières plus grandes valeurs singulières de Hankel. Ce qui montre ainsi, que, d’un point de vue énergétique, les modes les plus importants ne sont pas nécessairement liés aux plus grandes valeurs des indexes précédents, mais plutôt ceux qui contribuent le plus dans l’énergie  $E_H$  de la réponse impulsionnelle.

La Fig. 3.21 montre une comparaison entre la réponse indicielle du modèle réduit obtenu (d’ordre 171) et celle du modèle complet. On peut clairement constater que le nouveau modèle réduit reproduit assez fidèlement la réponse indicielle du modèle complet, contrairement au modèle réduit issu de la troncature modale classique comme on peut le voir en Fig. 3.22. L’approximation est toute aussi satisfaisante dans le domaine fréquentiel car, comme on peut le voir en Fig. 3.23, le comportement en fréquence du système complet est bien approximé dans une large bande de fréquence allant jusqu’à  $3.73 \times 10^5$  rad/s. Ceci est un avantage considérable, car les phénomènes ayant des fréquences assez élevées (environ 60 KHz) peuvent être ainsi reproduits par le nouveau modèle réduit.

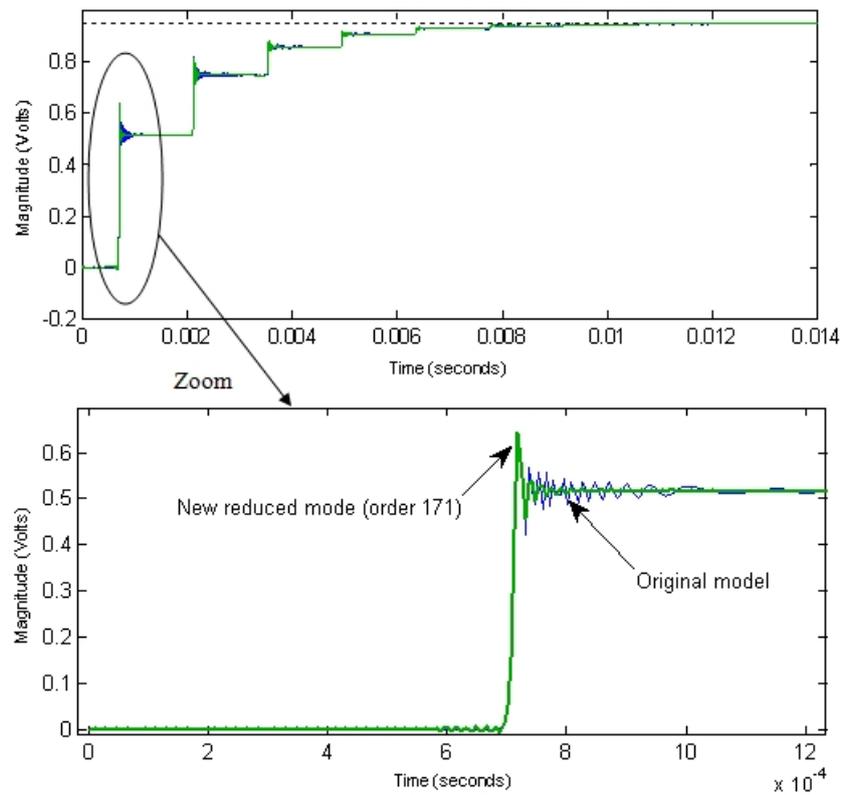


FIGURE 3.21 – Comparaison temporelle : modèle original et son nouveau modèle réduit.

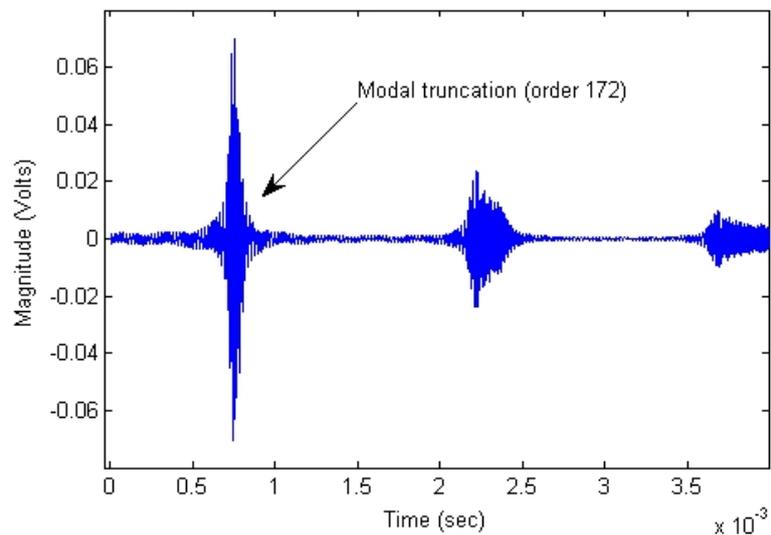


FIGURE 3.22 – Réponse impulsionnelle de la troncature modale classique d'ordre 172.

### 3.5.3.2 Écroulement de tension

Afin de montrer un cas industriel où la méthodologie de réduction proposée ici conduit à de meilleurs résultats, qu'une approximation classique, considérons le système électrique de la Fig. 3.24. Il s'agit d'une structure utilisée pour l'analyse du transfert de

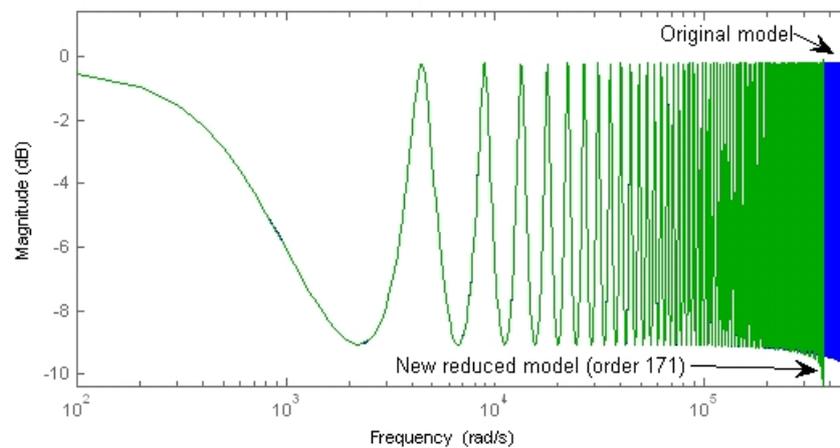


FIGURE 3.23 – Comparaison fréquentielle : modèle original et son nouveau modèle réduit.

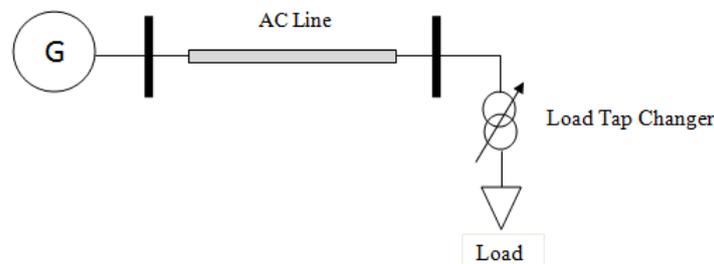


FIGURE 3.24 – Premier benchmark.

puissance entre un générateur  $G$  et une charge (résistive dans notre cas) via une ligne de transmission électrique. Ces analyses se focalisent essentiellement sur la quantité maximale de puissance active qu'on peut transporter à travers la ligne AC sans que le système ne perd sa stabilité. En effet, l'augmentation de la charge provoque naturellement une chute de tension aux bornes de la charge qui est ensuite compensée par le régleur en charge (LTC) qui maintient la tension à une valeur désirée. Le dispositif en question permet de modifier le nombre de spires, d'un des enroulements du transformateur, afin de faire varier le rapport de transformation de telle sorte à maintenir la tension, au secondaire du transformateur, à une valeur de consigne. Néanmoins, comme le transfert de puissance entre le générateur et la charge est limité par une *puissance maximale transmissible*, liée en grande partie à la ligne de transmission, le fonctionnement du système à un transfert plus élevé conduit au phénomène *d'écroulement de tension*. Il se manifeste par une décroissance vers zéro de la tension aux bornes de la charge sans que le régleur en charge ne puisse la remettre à la valeur désirée, ce qui conduit généralement à une instabilité dynamique appelée *perte de synchronisme*. En effet, dans le cas général, la ligne se trouve entre deux nœuds du système, auxquels sont connectés plusieurs lignes, charges et générateurs. Ainsi, si la tension baisse considérablement au niveau d'un des nœuds, la perturbation peut se propager à une zone assez étendue autour du nœud en question.

De là, il s'avère ainsi crucial de reproduire assez fidèlement le comportement du système afin d'être en mesure d'agir d'une manière efficace en cas d'écroulement. A l'aide, par

exemple, d'un réglage plus adapté des moyens de protection ou encore par la mise en place d'un plan d'action préventif basé sur des scénarios simulés et analysés auparavant. Toutefois, ceci n'est faisable, généralement, qu'à l'aide des simplifications car, comme mentionné précédemment, le modèle des lignes comporte un nombre important de variables d'état ce qui complique considérablement sa mise en œuvre. De plus, une approximation de tout le système interconnecté par un modèle purement mathématique comme (3.35) ne suffit pas, car il est important de préserver la structure physique du système afin de pouvoir cibler les composants sur lesquels il faut agir pour maîtriser la dynamique du système. C'est pourquoi il s'avère ainsi plus commode, dans une pareille situation, de simplifier uniquement le modèle de la ligne, comme étant un sous-système, afin de réduire la complexité du modèle global. Habituellement, ceci se fait en remplaçant le modèle de la ligne par celui de la structure en  $\pi$  comme on a eu l'occasion de le voir précédemment. Ici, on montre en Fig. 3.25 la dynamique de l'écroulement de tension en représentant la ligne par le modèle en  $\pi$ , d'une part, et le modèle DP d'autre part. Pour obtenir ceci, une augmentation de la tension de consigne (de 0.73 pu à 0.75 pu) du régleur en charge est faite à  $t = 150$  sec afin de faire augmenter la tension au secondaire du transformateur (aux bornes de la charge). Un résultat similaire peut être obtenu si l'on fait augmenter la charge en fixant la consigne de la tension du régleur en charge à une valeur constante. Par ailleurs, comme la dynamique des phénomènes liés à la tension est relativement lente (généralement entre 1 sec et 10 sec) le générateur est modélisé par le modèle simplifié (D.3) qui permet de reproduire et d'analyser la dynamique de la tension. Idem pour le régleur en charge (associé ici à un transformateur idéal) dont la dynamique de transition, d'une prise à une autre, est approximée par le modèle continu (D.6). L'ensemble du système est simulé en utilisant le logiciel *Dymola* (voir, par exemple, [11]) destiné à la modélisation et la simulation de divers processus industriels.

On voit ainsi, sur la Fig. 3.25, que l'utilisation du modèle en  $\pi$ , dans ce cas où la longueur de la ligne est de 300 Km, ne permet pas de reproduire assez correctement la dynamique de l'écroulement de la tension aux bornes de la charge.

En effet, on aperçoit un décalage temporel assez important d'environ 24 sec entre les deux trajectoires de la tension, montrant ainsi que l'utilisation du modèle en  $\pi$  dans ce cas n'est pas une manière appropriée pour étudier et analyser les propriétés et les phénomènes dynamiques du modèle initial. D'autant plus qu'il est assez difficile d'établir un lien clair entre le paramètre  $\ell\sqrt{LC}$ , dont on a parlé en Section 2.5.3, et le comportement de tout le système interconnecté. Ici, par exemple, on a  $(\ell\sqrt{LC})^2 = 4,4 \times 10^{-5}$ , qui est une valeur assez faible, alors qu'on voit très bien que la dynamique de l'ensemble du système n'est pas correctement reproduite. De plus, les difficultés ne sont pas nécessairement surmontées en utilisant une série de modèles en  $\pi$  ou en gardant plus de modes dans le modèle (2.30) (voir [84]). Pour cause, le nombre de modes ou de modèles en  $\pi$ , nécessaire à une bonne approximation, n'est connu qu'après une validation a posteriori. Pour éviter cela, l'approximation n'est faite ici qu'après une prise en compte de toute la structure dynamique du système.

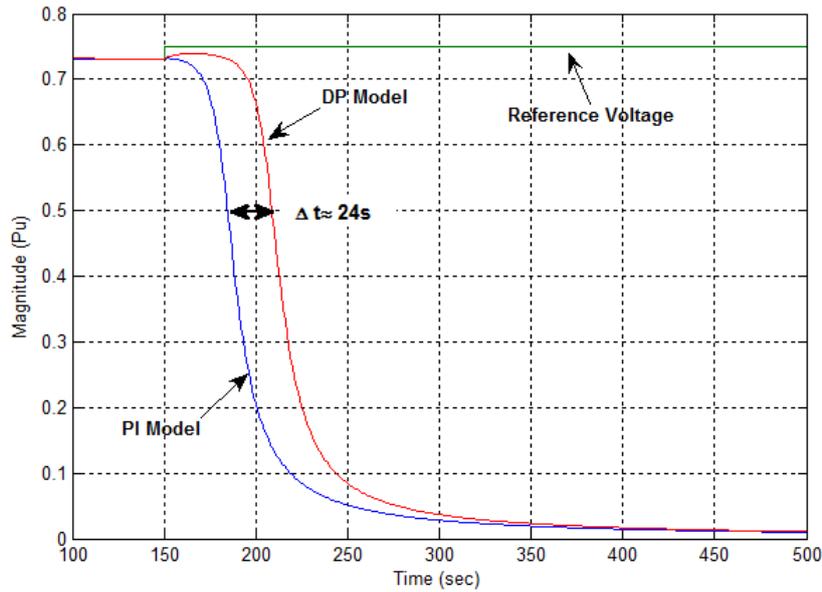


FIGURE 3.25 – Écroulement de la tension de charge

**Approximation et validation du modèle réduit :** Il est mentionné plus haut que le phénomène d'écroulement de tension, observé dans le cas du système de la Fig. 3.24, est fortement non linéaire et ne peut être reproduit par un modèle réduit linéaire de l'ensemble. Ainsi, pour pouvoir approximer uniquement le modèle de la ligne, par la nouvelle méthodologie, la première étape consiste à choisir un transfert avant de faire une linéarisation entrée-sortie du système autour d'un point d'équilibre qui se situe juste avant le déclenchement du phénomène de l'écroulement. Le transfert le plus approprié pour cela, est celui entre la tension de référence  $V_{Lref}$  du régulateur en charge LTC et la tension  $V_L$  aux bornes de la charge, i.e., au final  $V_L/V_{Lref}$ . Après linéarisation, l'analyse de dominance expliquée en Section 3.2.3.2 montre ainsi qu'aucun mode du noyau  $\Lambda$  ne participe dans le modèle de la ligne, ce qui signifie que  $\Delta_{sub}$  est vide. Dans ce cas, un simple modèle *algébrique* de la ligne suffit donc pour reproduire le phénomène de l'écroulement. Pour y voir plus clair, considérons (3.52) comme étant le modèle complet de la ligne de transmission. En absence de dynamiques, i.e., de modes, (3.55) conduit à  $\hat{G} = -C_{sub}A_{sub}^{-1}B_{sub}$  où  $\hat{G}$ , dans le cas traité ici, est une simple matrice de constantes exprimant ainsi le fait que la relation entre les entrées et les sorties est, dans ce cas, purement algébrique. Par conséquent, on déduit ici que le modèle de la ligne de transmission ne contribue, dans le phénomène de l'écroulement de tension, que par son gain statique que l'on peut voir à travers la matrice (3.59) pour une ligne de 300 Km avec les paramètres donnés en Table D.1. Sur le plan dynamique, le modèle réduit qui en résulte (i.e., en utilisant le modèle algébrique pour la ligne) reproduit à l'identique la trajectoire de la Fig. 3.25 correspondante au modèle DP.

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 0.2233 & 0.1129 & -60.8612 & 64.5243 \\ 60.8612 & -64.5243 & 0.2233 & 0.1129 \\ -0.1129 & -0.2233 & -64.5243 & 60.8612 \\ 64.5243 & -60.8612 & -0.1129 & -0.2233 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

### 3.5.3.3 Intégration d'une HVDC dans un système AC

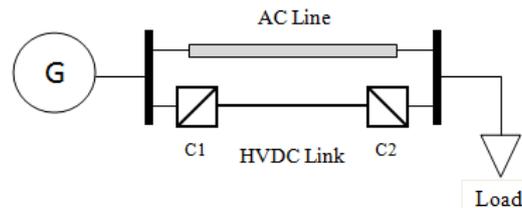


FIGURE 3.26 – Second benchmark.

Par rapport à l'exemple de la section précédente, la structure de la Fig. 3.26 inclue une technologie appelée liaison HVDC (High Voltage Direct Current) qui est de plus en plus utilisée dans les systèmes de transport d'électricité. Il s'agit d'un élément actif qui est utilisé principalement pour renforcer le transfert de puissance dans le réseau AC, mais aussi comme moyen d'action sur le système. En effet, comme il s'agit d'un élément qui interagit avec le réseau AC, en injectant des courants ou des tensions aux points de raccordement, il offre plus de flexibilité, notamment, en matière d'échange de puissance (import/export). Mais aussi au niveau de la régulation où il peut être utilisé, par exemple, pour réguler la tension aux points de raccordement (en absorbant ou en fournissant de la puissance réactive) avec le réseau AC ou encore pour l'amortissement des modes interzones via une modulation de la puissance active ou réactive (voir, par exemple, [72]). Actuellement, il existe deux types de liaisons HVDC basées sur deux technologies différentes. D'une part, les liaisons LCC-HVDC dites *classiques* utilisant les thyristors pour la commutation et, d'autre part, les liaisons VSC-HVDC utilisant les transistors IGBT. Pour notre application, on a fait le choix d'une liaison VSC-HVDC.

La particularité de cette nouvelle technologie réside dans le fait qu'elle fait intervenir des composants à base d'électronique de puissance comme les transistors (commutateurs) IGBT (voir, e.g., [1]) qui fonctionnent à des échelles de temps relativement basses (de l'ordre du milli ou micro seconde). Ceci génère des dynamiques très rapides qui sont injectées aux points de connexion avec le système AC. De ce fait, notre intérêt, derrière cet exemple, est de montrer, d'une part, l'effet des dynamiques rapides injectées par la liaison VSC-HVDC sur la dynamique de l'ensemble du système. Et, d'autre part, montrer l'efficacité de notre méthode de simplification, par rapport à une simplification classique, pour la synthèse d'un modèle simplifié pour des fins de simulation ou d'analyse. Pour cela, la liaison VSC-HVDC considérée est dotée de régulateurs dits de *haut niveau*. Il s'agit, principalement, des boucles de régulation qui commandent la tension du câble DC, qui relie les deux stations de conversion (C1 et C2 dans la Fig. 3.26), ainsi que la puissance

active transitée et la puissance réactive fournie ou absorbée par la liaison HVDC (voir Section D.1.6 pour plus de détails).

Ainsi, pour illustrer l'effet des dynamiques rapides sur le comportement de tout le système, on ne considère dans notre application que l'impact des boucles de régulation les plus rapides. Cela suffit pour exciter les dynamiques de hautes fréquences des composants du système AC comme la ligne de transmission. En effet, en situation réelle, les signaux de commande, issus des régulateurs de haut niveau, sont utilisés pour commander les commutateurs des convertisseurs à travers lesquels les courants ou les tensions sont injectés dans le réseau AC. Cependant, la fréquence du fonctionnement des commutateurs IGBT (quelques dizaines de kHz) est plus élevée que la fréquence des signaux issus des régulateurs de haut niveau. C'est pourquoi on considère ici que le passage des consignes provenant des régulateurs de haut niveau aux courants injectés par les onduleurs de la liaison VSC-HVDC se fait d'une manière très rapide. Généralement, on représente cette transition, qui modélise l'électronique de puissance, par un système de premier ordre d'une constante de temps de l'ordre de la milliseconde (voir Sections D.1.6 et D.1.7). Bien évidemment, les signaux injectés par la liaison VSC-HVDC peuvent aussi contenir des harmoniques de très hautes fréquences (par exemple de l'ordre de 20 kHz), dues à la commande des convertisseurs par la technique de la modulation de largeur d'impulsion (MLI). Dans notre cas, on considère que ces harmoniques sont filtrées avant que les signaux ne soient injectés dans le système AC. Ainsi, la rapidité des courants ou des tensions injectés aux points de raccordement de la liaison VSC-HVDC sont à l'image de la rapidité des boucles de régulation de haut niveau. Parmi ces dernières, la boucle qui régule la tension du câble DC est généralement la plus rapide avec un temps de réponse d'environ 1 ms. C'est la raison pour laquelle on considère ici la réponse du système à un échelon sur la tension de référence du câble DC. Par ailleurs, comme on ne considère pas des perturbations de type *court-circuit*, la structure des régulateurs est simplifiée (voir Section D.1.6). Cela est fait en enlevant quelques parties, comme les saturations et les bandes mortes, qui protègent les composants de la liaison VSC-HVDC, en cas de défaut, et assurent un fonctionnement normal du système après l'élimination du défaut.

Les Figs. 3.27 et 3.28 montrent, respectivement, le comportement de la tension  $V_{dc}$  du câble DC et la tension  $U_{ac}$  aux bornes de la charge (résistive) suite à un échelon d'amplitude 0.01, appliqué à  $t = 410$  sec, sur la tension de référence  $V_{dc_{ref}}$  du câble DC. Et cela lorsque la ligne est modélisée par le modèle en  $\pi$ , d'une part, et par le modèle DP d'autre part. Les simulations numériques ont été faites, là aussi, à l'aide du logiciel Dymola et pour les valeurs des paramètres données au Tableau D.2.

Au vu de ces résultats, on conclut que la simplification du modèle dynamique du système, en représentant la ligne par le modèle en  $\pi$ , ne suffit pas pour capter les dynamiques oscillatoires dues à l'excitation des modes de hautes fréquence de la ligne. Dans une pareille situation, on doit donc prendre en compte toute la structure dynamique du système afin d'être en mesure de simplifier le modèle de la ligne de telle sorte à reproduire assez correctement le comportement de tout le système. Cela passe d'abord par trouver les modes importants de tout le système comme illustré ci-dessous.

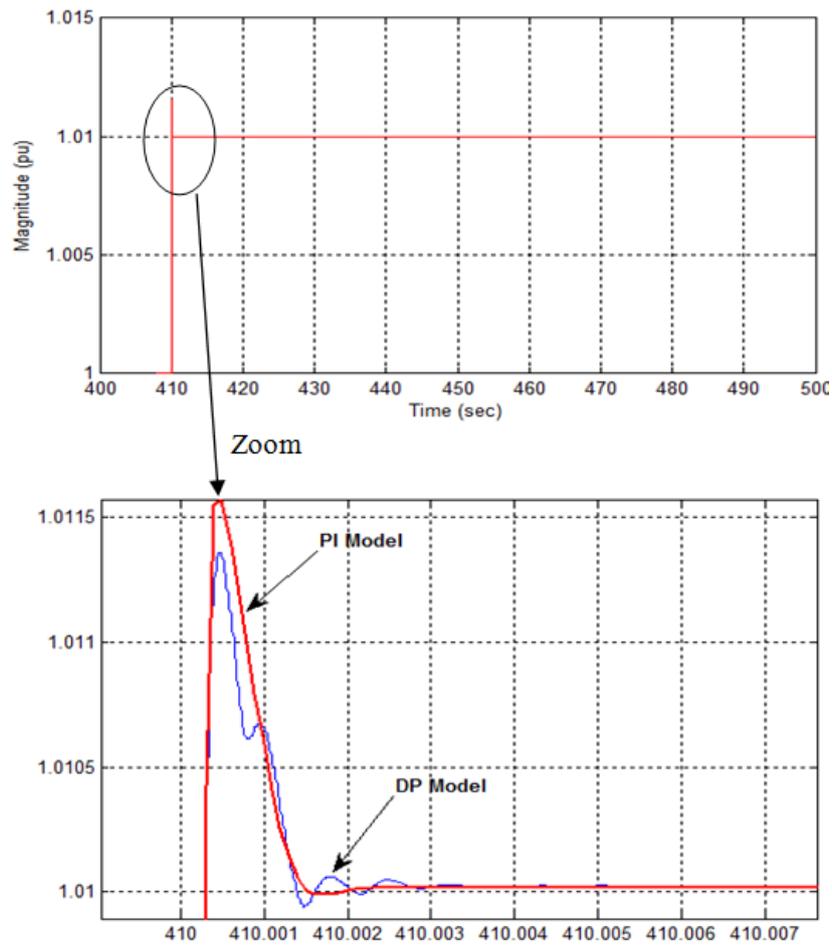


FIGURE 3.27 – Réponse de  $V_{dc}$  à un échelon sur  $V_{dc_{ref}}$

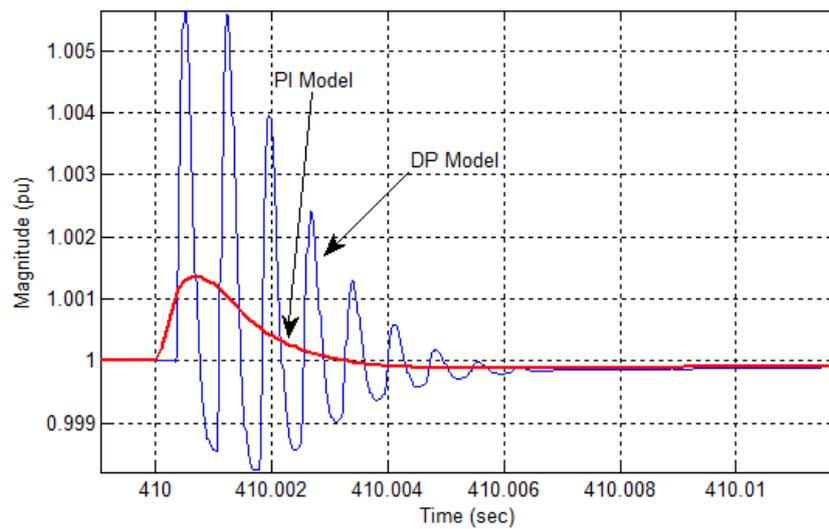


FIGURE 3.28 – Réponse de  $U_{ac}$  à un échelon sur  $V_{dc_{ref}}$ .

**Approximation et validation du modèle réduit :** Avant d'appliquer la nouvelle méthodologie sur cet exemple, commençons tout d'abord par faire une analyse structurale afin de donner une interprétation systémique des résultats montrés en Figs. 3.27 et 3.28. Pour cela, considérons en premier les Figs. 3.29 et 3.30 qui montrent la réponse fréquentielle (en gain) du système de la Fig. 3.26 lorsque la ligne est représentée par le modèle DP, d'une part, et en  $\pi$  d'autre part.

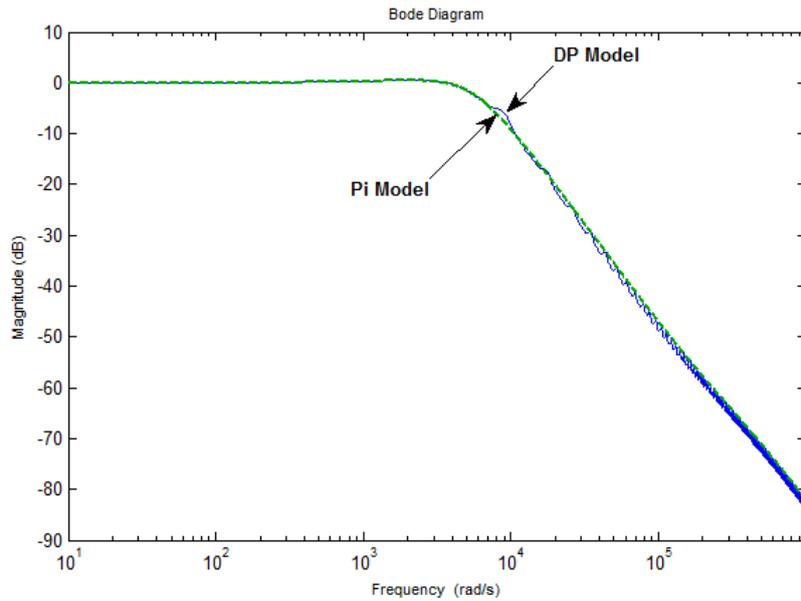


FIGURE 3.29 – Réponse indicielle du transfert  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$  en utilisant les modèles  $\pi$  et DP de la ligne

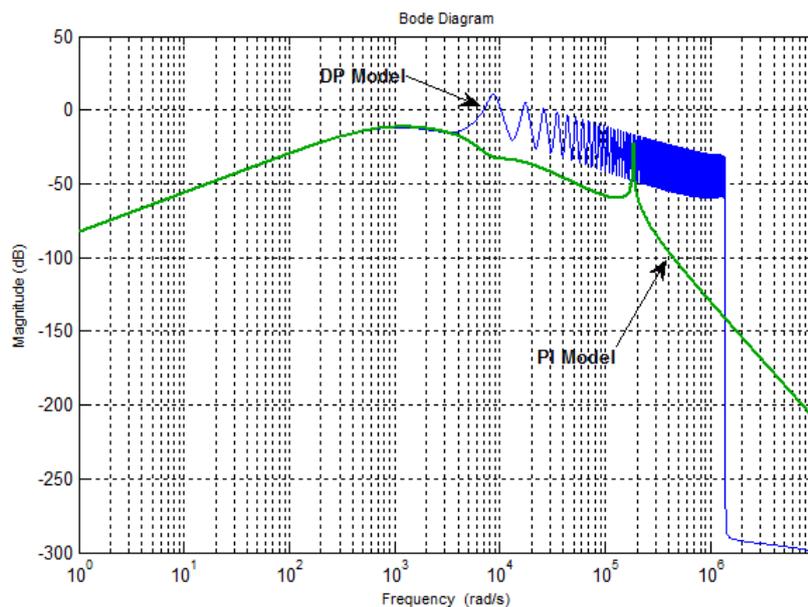


FIGURE 3.30 – Réponse fréquentielle du transfert  $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$  en utilisant les modèles  $\pi$  et DP de la ligne

Pour le transfert  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$ , entre la tension de référence  $V_{dc_{ref}}$  et celle du câble continu de la liaison HVDC (voir Annexe D), la Fig. 3.29 montre que la différence la plus significative entre les deux courbes se situe au niveau du pic autour de  $10^4$  rad/s ( $\simeq 1,6$  KHz). L'amplitude de ce dernier dépasse les  $-10$  db et il est principalement lié au modèle DP de la ligne car l'analyse des participations montre que les modes autour de ce pic ont de grandes participations dans ce modèle. Par conséquent, lorsque les dynamiques rapides de la liaison HVDC (d'environ 1 milliseconde) entrent en interaction (sous forme d'excitation) avec de tels modes, ils se produisent les oscillations qu'on voit sur la réponse indicielle de la Fig. 3.27. Bien évidemment, ces oscillations ne sont pas reproduites lorsqu'on utilise un modèle en  $\pi$  car ce dernier ne comporte pas des modes de fréquences aussi hautes ce qui est confirmé par le résultat de la Fig. 3.29 où on ne voit pas de pic autour de  $10^4$  rad/s. L'effet d'excitation de ces modes de hautes fréquences est encore plus visible et plus important sur le transfert  $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$  entre la tension de référence  $V_{dc_{ref}}$  et la tension  $U_{ac}$  au point de connexion avec la liaison HVDC comme le montre la réponse fréquentielle de la Fig. 3.30. En effet, on voit clairement les pics situés en hautes fréquences (à partir de  $3 \times 10^4$  rad/s) avec une importance particulière autour de  $10^4$  rad/s où les amplitudes des pics dépassent les 0 db. C'est ce qui fait que sur la réponse indicielle de la Fig. 3.28, les oscillations apparaissent avec une plus grande amplitude comparée au cas précédent.

Après cette analyse systémique, qui montre que les modes importants d'un sous-système dépendent de l'interaction avec les autres dynamiques du système, on applique désormais notre méthodologie afin de pouvoir les détecter et les garder dans le modèle réduit. Ceci se fait en deux étapes. La première consiste à faire une analyse pour chacun des transferts précédents afin d'en déduire les modes du noyau  $\Lambda$ , i.e., ceux qui dominent le comportement dynamique de l'ensemble du système. Ensuite, montrer les différents aspects de la méthode proposée en faisant, d'une part, une troncature globale entrée-sortie et, d'autre part, une troncature de sous-système en se focalisant sur le modèle de la ligne.

**Détermination du noyau  $\Lambda$  :** Pour le transfert  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$ , la première ligne du Tableau 3.3 montre que 2 variables d'état (i.e.,  $|\Gamma_b|$ ) sont sélectionnées (car leurs correspondantes valeurs  $\alpha_i \sigma_i$  sont dominantes dans (3.47)) à partir desquelles 5 modes sont choisis (car ils participent le plus). Quant au transfert  $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$ , la deuxième ligne de ce même tableau montre que le nombre de variable d'état ( $|\Gamma_b| = 19$ ) et de modes (42) est plus élevé que dans le cas du premier transfert.

TABLE 3.3 – Nombre de variables d'état et de modes importants pour chaque transfert

Transfer	$m =  \Gamma_b $	$r =  \Lambda_i $
$V_{dc}/V_{dc_{ref}}$	2	5
$U_{ac}/V_{dc_{ref}}$	19	42

Deux remarques sont à faire à propos de ces résultats :

- Pour les 19 variables d'état sélectionnées pour le transfert  $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$ , l'ordre d'importance ne suit pas celui des valeurs singulières car on a ici  $\sigma_1 = 2,2467$ ,  $\sigma_2 =$

2, 1944,  $\sigma_3 = 1, 1310$  alors que les termes associées  $\alpha_i \sigma_i$  dans (3.47) sont respectivement  $4, 7521.10^3$ ,  $216, 3734$  et  $1, 1744.10^3$ . Ce qui signifie ainsi que  $\bar{x}_2$  est moins important que  $\bar{x}_3$  même si  $\sigma_2 > \sigma_3$ .

- La raison pour laquelle on trouve 42 modes pour le transfert  $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$  comparé à 5 pour  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$ , est que les pics autour de  $10^4$  rad/s sont beaucoup plus importants pour le premier transfert que pour le second comme le montre les Figs. 3.30 et 3.29.

Au final, le noyau des modes  $\Lambda$  sera composé de l'union (sans répétition) des deux noyaux trouvés (i.e., un pour chaque transfert), et il servira ensuite pour effectuer la troncature comme on peut le voir dans les deux prochains paragraphes.

**Troncature globale :** Lors d'une troncature globale entrée-sortie, le résultat est un modèle réduit de la forme (3.35) dont les variables d'état ont uniquement un sens mathématique. Ici, deux choix se présentent car, pour chacun des transferts  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$  et  $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$ , il est possible d'obtenir un tel modèle réduit qui donne une approximation du comportement dynamique entrée-sortie de chaque transfert. Pour illustration, le choix est porté sur le premier transfert pour lequel la Fig. 3.31 montre une comparaison entre la réponse indicelle du modèle complet et celle du modèle réduit d'ordre 5 obtenu en suivant les étapes de l'algorithme présenté en Section 3.4.6. Vu la similitude entre les deux trajectoires, il apparaît clairement que le modèle réduit obtenu reproduit assez fidèlement le comportement du modèle complet et en particulier les oscillations. Ceci se confirme aussi à partir du résultat de la Fig. 3.32 où on voit que le modèle réduit a, pratiquement, le même comportement en fréquence que le modèle complet surtout autour du pic situé à  $10^4$  rad/s.

**Troncature d'un sous-système :** A l'aide de la procédure présentée en Section 3.2.3.2, l'approximation du système électrique de la Fig. 3.26 est effectuée dans cette section en réduisant uniquement le modèle dynamique de la ligne de transmission. Pour cela, les résultats obtenus précédemment pour les transferts  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$  et  $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$  sont tous les deux pris en compte car les modes contenus dans le modèle de la ligne ne jouent pas le même rôle dans tous les transferts. Bien évidemment, d'autres transferts peuvent être ajoutés, mais dans notre cas ceux considérés suffisent largement pour trouver les modes de la ligne qui affectent le plus le comportement global du système.

TABLE 3.4 – Nombre de modes pour chacun des transferts

Transfer	$ \Lambda_S $	$ \mathbb{K}_S $	$ \Delta_{sub} $
$V_{dc}/V_{dc_{ref}}$	5	2	2
$U_{ac}/V_{dc_{ref}}$	42	42	46

Pour chaque transfert, le Tableau 3.4 montre, respectivement, le nombre des modes contenus dans le noyau  $\Lambda$  (correspondant à chaque transfert), dans  $\mathbb{K}_S$  et dans  $\Delta_{sub}$ . Ainsi, on peut voir, par exemple, que pour le transfert  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$ , deux modes parmi ceux du noyau  $\Lambda$  participent considérablement dans le modèle de la ligne ce qui conduit

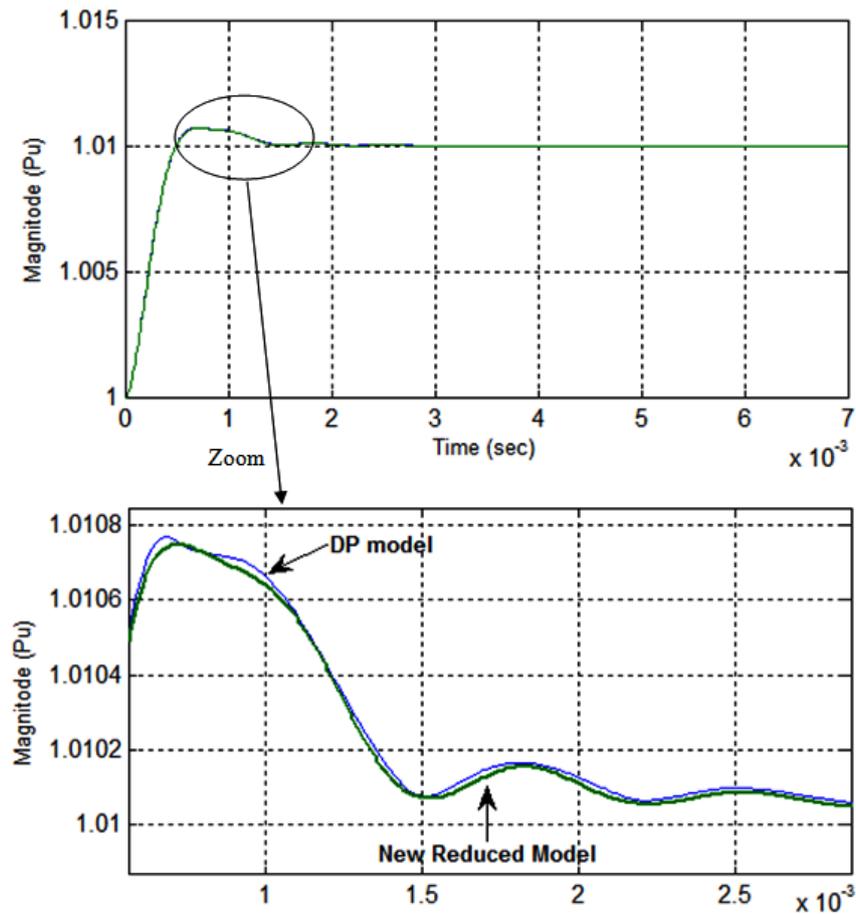


FIGURE 3.31 – Réponse indicielle du transfert  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$  : modèle complet et nouveau modèle réduit

(par le biais de la comparaison fréquentielle) à deux modes dans  $\Delta_{sub}$ . En revanche, pour  $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$ , tous les 42 modes du noyau  $\Lambda$  ont des participations significatives dans le modèle de la ligne, ce qui conduit, via la comparaison fréquentielle, à 46 modes dans  $\Delta_{sub}$  comme l'on peut voir au Tableau 3.5.

TABLE 3.5 – Nombre de modes autour de chaque fréquence  $F_i$

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$
$f(rad/s) \cdot 10^4$	$\approx 0,01$	$\approx 0,8$	$\approx 0,9$	$\approx 1$	$\approx 2$	$\approx 3$	$\approx 4$	$\approx 5$	$\approx 6$	$\approx 7$	$8 \sim 9$
$ \mathbb{K}_S $	2	2	2	4	4	4	4	4	6	6	4
$ \Delta_{sub} $	2	2	2	4	4	4	4	4	6	6	8

Parmi les 46 modes du modèle de la ligne, trouvés en considérant  $U_{ac}/V_{dc_{ref}}$ , deux sont les mêmes que ceux trouvés dans le cas de  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$ , ce qui conduit au final à un modèle réduit de la ligne d'ordre 46 obtenu en appliquant la technique de la troncature modale. Son utilisation à la place du modèle DP dans le système de la Fig. 3.26 conduit à un modèle simplifié qui reproduit correctement le comportement du système complet comme le montrent les réponses indicielles présentées en Figs. 3.33 et 3.34. Un tel résultat est

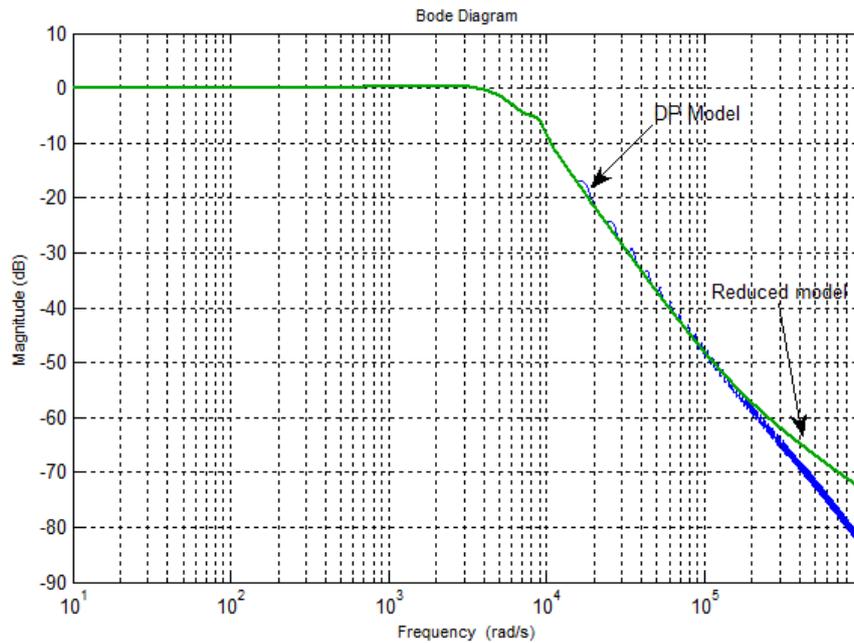


FIGURE 3.32 – Réponse fréquentielle du transfert  $V_{dc}/V_{dc_{ref}}$  : modèle complet et nouveau modèle réduit

assez encourageant car il montre que, même si l'analyse et la réduction ont été effectuées dans un cadre linéaire, les performances finales restent suffisamment acceptables.

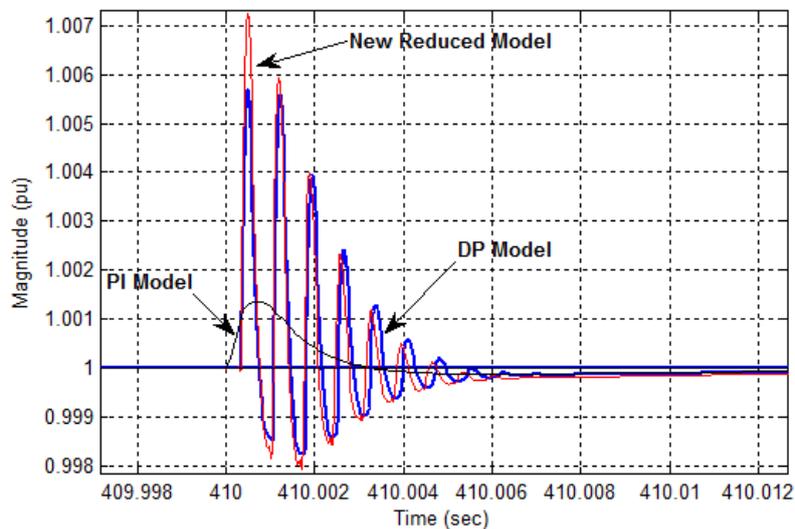


FIGURE 3.33 – Réponse de la tension  $U_{ac}$  à un échelon sur  $V_{dc_{ref}}$

Suite à l'analyse des différents résultats présentés ici, il s'avère que la méthodologie de réduction proposée en Section 3.4 constitue un moyen efficace pour la synthèse d'un modèle simplifié à partir d'un modèle plus complexe. En effet, par rapport à une technique standard où les propriétés structurelles du système ne sont pas prises en compte dans l'étape de simplification, les modèles obtenus sont beaucoup plus fidèles aux modèles

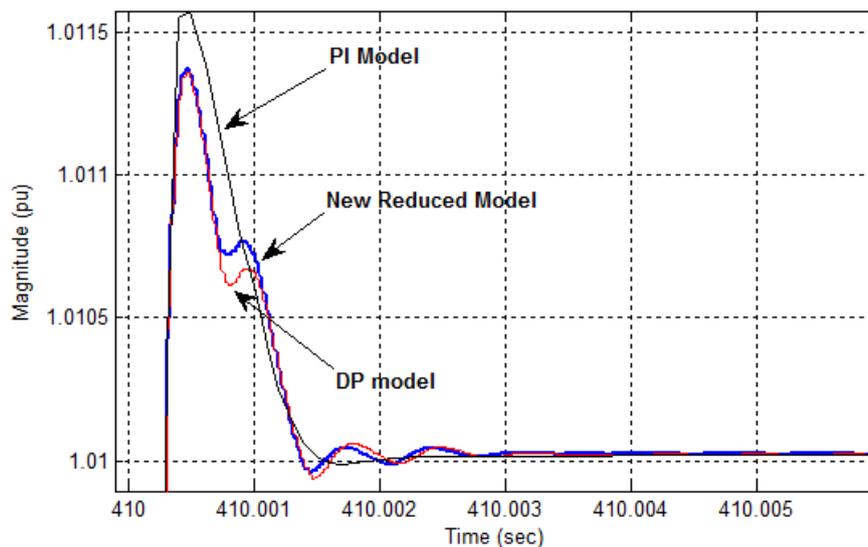


FIGURE 3.34 – Réponse de la tension  $V_{dc}$  à un échelon sur  $V_{dc_{ref}}$

originaux, notamment en terme de comportement et de propriétés structurelles. Cela constitue un avantage non négligeable, car dans la plupart des applications la simulation et l'analyse sont des étapes essentielles. A titre d'exemple, pour la synthèse d'un régulateur la première étape consiste généralement à simuler le comportement du système afin de fixer les objectifs de la commande. Ensuite, faire une analyse structurelle (comme l'analyse modale) afin d'identifier, par exemple, les modes sur lesquels on doit agir afin d'améliorer le comportement dynamique du système. Dans les systèmes de transport d'électricité, cela est particulièrement intéressant, car l'analyse modale constitue souvent une étape incontournable pour la synthèse des régulateurs et l'étude de la plupart des phénomènes captés par une analyse linéaire. D'où la nécessité d'avoir des modèles simplifiés (comme ceux obtenus ici) qui puissent être représentés par une forme d'état. En effet, un modèle à retard de la ligne, comme celui présenté en Section 2.2.2 et implémenté dans la SimPower Toolbox de Matlab, permet d'avoir les mêmes résultats de simulation avec le modèle DP utilisé ici, mais il pose de réels difficultés pour l'analyse modale.

Par ailleurs, on note que la simplicité des applications industrielles traitées ici, ainsi que les approximations faites au niveau de la modélisation, n'influent pas sur le spectre d'application de la méthodologie proposée. Cette dernière peut, en effet, être appliquée de la même manière pour des cas plus complexes et/ou des modélisations plus détaillées. Le plus important est de pouvoir représenter le modèle à simplifier par une forme d'état et d'avoir des outils suffisamment puissants pour pouvoir faire les différents calculs nécessaires.

### 3.6 Conclusion

Les éléments donnés dans ce chapitre s'inscrivent dans une démarche de formulation et de développement d'une nouvelle méthodologie de réduction des modèles dynamiques des systèmes électriques interconnectés. La méthode développée combine à la fois le prin-

cipe de la troncature modale et l'évaluation des dynamiques en utilisant l'énergie de la réponse impulsionnelle afin de surmonter les difficultés liées à la réduction et de mieux répondre aux divers besoins considérés. Il s'agit de ne garder, dans le modèle réduit, que les dynamiques modales qui ont une contribution assez importante dans l'énergie de la réponse impulsionnelle, i.e., dans le comportement dynamique du système. Par rapport aux méthodes existantes, l'apport de la méthode proposée réside, d'une part, dans la prise en compte des systèmes pour lesquels il est difficile d'évaluer l'importance et l'impact de chaque dynamique dans le comportement du système. Et, d'autre part, la préservation des structures dynamique et physique par un modèle réduit dont l'ordre est, à la fois, plus faible et plus facile à obtenir comparé aux méthodes de réduction standard. Ces avantages ont été mis à profit de divers exemples et applications industrielles. Les résultats obtenus montrent que la méthodologie de réduction proposée permet de synthétiser des modèles simplifiés dont le comportement et les propriétés structurelles sont assez proches de ceux des modèles originaux. Au niveau applicatif, les systèmes de transport de l'électricité sont les principaux bénéficiaires de la nouvelle méthodologie mais le spectre d'application peut aussi s'étendre à d'autres secteurs comme celui de l'aéronautique où la réduction des modèles occupe une place importante.

## Chapitre 4

# Nombre et choix des entrées : une approche algébrique

### 4.1 Introduction

Ici, on abordera la question de la *définition des entrées* des systèmes dynamiques à *paramètres distribués* (i.e., donnés par des équations aux dérivées partielles) au sens de la commande des systèmes. Cette question intervient dans la plupart des problèmes liés à la commande, et il n'est pas toujours évident d'avoir une réponse claire dès le départ. Dans le cas des systèmes électriques, par exemple, l'interconnexion entre les composants modélisés par des équations algébro-différentielles et ceux modélisés par des EDP's tels que les lignes se fait en empilant toutes les équations. Par conséquent, il est difficile, dans un tel cas, de déduire directement quelles sont les variables à fixer afin de pouvoir simuler le comportement du système ou de reproduire sa réponse à une quelconque perturbation. De là, on définit une *entrée* comme étant une variable du système qui influe *continuellement* (i.e., dépend du temps) sur son comportement et qu'on peut fixer arbitrairement et indépendamment des autres variables. Ainsi, la dimension d'un ensemble maximal de variables qui vérifient cette définition est dit *le nombre d'entrées* du système. Il servira, par exemple, à la commande du système dans un contexte du contrôle ou, plus généralement, comme des variables qu'il *faut* fixer (associées aux conditions initiales) pour *déterminer* le comportement du système (i.e., les trajectoires ou solutions des équations). A cela, s'ajoute également une question, que nous tenons juste à mentionner ici, qui est le *choix* des entrées, i.e., après avoir déterminé le nombre, il va falloir déterminer quelles sont les variables qui peuvent servir comme entrées du système.

Une fois ces définitions données, deux cas se distinguent. Le cas de la dimension finie et celui de la dimension infinie qui nous intéresse en particulier. Pour les systèmes de dimension finie, la question a été abordée dans une *approche algébrique* qu'on verra le long de ce chapitre et le nombre d'entrées noté  $\mathbf{dim}\{\mathbf{u}\}$  est *intrinsèquement* défini comme étant le *rang du module* définissant le système dynamique (e.g., [28], [69]). Ce nombre est *invariant* et ne dépend pas d'une réalisation particulière du système comme on peut le voir à travers l'Exemple 4.4 de la Section 4.2. Ceci, confère à cette approche algébrique un caractère plus systémique et plus intrinsèque, ce qui a fait que la question du choix

des entrées a été aussi formulée dans cette approche et résolue même pour les systèmes de dimension finie à temps variant (voir [9] pour plus de détails). Les atouts de cette approche ont servis également aux systèmes de dimension infinie (voir, e.g., [63], [96]). Cependant, la question des entrées n'a pas été abordée dans un contexte de *l'automatique* qui est nourri par les problématiques rencontrées dans les applications. A cet effet, les contributions à ce sujet n'ont pas été abondantes et les résultats constatés répondent partiellement à la problématique telle qu'elle est posée dans cette thèse. En effet, pour les systèmes de dimension infinie, décrits par des EDPs, on distingue deux types d'entrées. Les entrées dans le *domaine* appelées *contrôles internes* et les entrées aux *bords* appelées *contrôles frontières* (voir par exemple [5]). Concernant, les contrôles internes, ce sont des commandes (fonctions qui dépendent du temps et de l'espace) qui sont appliquées soit dans tout le domaine spatial, soit dans une région de celui-ci (mise-à-part les frontières). Leur nombre coïncide avec le rang du module définissant le système comme dans le cas de la dimension finie. En revanche, les contrôles frontières, quant à eux, se situent à la limite du domaine et constituent une classe à part. Leur nombre n'est pas clair et dépend souvent de la *géométrie* du domaine comme le montre l'Exemple 4.2. Ainsi, toute la question se focalise désormais autour de cette classe particulière de commandes qui n'est pas détectable par le rang du module. Dans l'état actuel, les questions liées à ces commandes frontières et leur nombre, ne sont abordées ni dans un contexte du contrôle des systèmes, ni dans un contexte d'analyse de trajectoires. Et c'est pour cette raison que ce chapitre a pour vocation de clarifier et de bien poser la problématique d'un point de vue théorique.

Bien que la question n'est pas complètement résolue, vu la complexité du problème, les notions données dans ce chapitre constituent une contribution à la *formulation* du problème d'un point de vue théorique. En effet, la bibliographie exhaustive, faite autour du sujet, nous a conduit à bien poser et positionner le problème d'un point de vue de la commande des systèmes en se mettant dans le cadre algébrique qui se veut plus général est plus intrinsèque. Quelques propriétés structurelles sont tout de même dégagées, mais au delà des définitions proprement dites, des questions appuyées par des exemples sont posées le long du chapitre et dont les réponses pourront faire progresser le raisonnement et apporter plus d'éclaircissement au sujet. In fine, la méthodologie et la démarche proposées serviront de support aux futurs travaux sur le sujet.

## 4.2 Position du problème et exemples de motivation

L'intérêt de cette section est de poser le problème des entrées dans un contexte de la commande des systèmes. **En s'appuyant sur différents exemples dont certains sont physiques, diverses questions apparaissent notamment d'ordre théorique.**

### 4.2.1 Problème général

D'une manière générale, tous les *systèmes dynamiques* modélisés par des équations aux dérivées partielles linéaires à *coefficients constants* peuvent s'écrire sous la forme ci-dessous (voir, e.g., [37])

$$\begin{cases} F_1 \left( u_1, u_2, \dots, u_k, \frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{r_i} u_i}{\partial^{\beta_i} t \partial^{\alpha_1} x_1, \dots, \partial^{\alpha_n} x_n} \right) = 0, \\ \vdots \\ F_m \left( u_1, u_2, \dots, u_k, \frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{r_i} u_i}{\partial^{\beta_i} t \partial^{\alpha_1} x_1, \dots, \partial^{\alpha_n} x_n} \right) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $(u_1, \dots, u_k)(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont  $k$  fonctions dépendantes de  $(n + 1)$  variables indépendantes, i.e.,  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , et qui sont reliées par  $m$  relations linéaires  $(F_1, \dots, F_m)$ . Ainsi, la question que l'on se pose dans cette thèse est de savoir, *d'un point de vue de la commande des systèmes, quel serait le nombre de commandes du système (4.1)*? D'une manière équivalente, on cherche à connaître le nombre de fonctions  $u_j, j \in \{1, \dots, k\}$  et le nombre maximum et/ou minimum de conditions aux bords qu'on peut ou qu'on doit fixer (associées aux conditions initiales) pour déterminer les trajectoires du système (4.1). Afin d'étayer plus cette questions, des exemples d'illustration et de motivation sont proposés ci-après.

#### 4.2.2 Exemples de motivation

**Exemple 4.1.** (*système de dimension finie*) Les équations physiques ci-dessous décrivent le comportement du circuit en  $\pi$  présenté en Section 2.2.3.1.

$$\begin{cases} \frac{C}{2} \ell \frac{dV_e}{dt} = i_1, \\ \frac{C}{2} \ell \frac{dV_s}{dt} = i_3, \\ V_e = R\ell(I_e - i_1) + L\ell \frac{d}{dt}(I_e - i_1) + V_s, \\ I_e - i_1 = I_s + i_3, \\ I_e - i_1 = i_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Le mélange d'équations différentielles et algébriques ci-dessus, forme ce qu'on appel un système algébro-différentielle ou plus généralement DAE (Differential Algebraic Equations). Si l'on s'intéresse, désormais, à dénombrer ses entrées, on doit déterminer le nombre de variables *nécessaires* à fixer afin que toutes les autres variables s'écrivent en fonction de celles-ci. En premier lieu, on peut appliquer une règle simple qui consiste à faire la différence entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues. Cela donnerait pour le système (4.2),

$$\#variables - \#équations = 7 - 5 = 2.$$

Ce résultat est tout à fait correct car on peut facilement vérifier que si on fixe deux variables dans (4.2), toutes les autres vont en résulter, ce qui signifie que le nombre d'entrées est égal à deux. Toutefois, ce simple calcul est sensible à la représentation du système et peut conduire à des résultats erronés. Pour illustrer ceci, ajoutant par exemple l'équation,

$$I_s + i_3 = i_2,$$

au système (4.2). D'un point de vue physique, cela ne change rien au système car il s'agit d'une combinaison linéaire des deux dernières équations de (4.2) qui est vérifiée physiquement. Ainsi, le même calcul que le précédent donne, dans ce cas là, une seule entrée (i.e.,  $7 - 6 = 1$ ) ce qui n'est pas correct du fait que le système n'a pas changé. Cela montre bien la difficulté de la tâche, a fortiori, pour les grands systèmes où différents types de modélisations tels que les équations aux différences, les retards et autres peuvent coexister. Pour cette raison, la question est traitée dans un formalisme plus général et plus adapté en Section 4.4.2.1.

**Exemple 4.2.** (*système de dimension infinie*) La propagation des ondes dans le plan est modélisée par un système à paramètres distribués qui peut être donné généralement par l'EDP linéaire suivante

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (4.3)$$

où  $u(x, t)$  est le déplacement vertical,  $c$  est la vitesse de propagation,  $x$  est la variable d'espace et  $f$  une fonction dite *source*. Comme pour l'exemple précédent, il s'agit de déterminer le nombre de variables à fixer dans l'équation (4.3) pour que toutes les autres s'écrivent en fonction de ces dernières. A première vue, la question est plus compliquée dans ce cas puisque il n'est pas claire si on doit fixer les variables (i.e., les fonctions) partout, i.e., à tout points d'espace, ou uniquement dans certaines régions d'espace. Mise à part la question de *causalité*, on peut fixer, par exemple, la fonction  $u(x, t)$  pour tout couple  $(x, t)$  et déduire par la suite la fonction  $f(x, t)$ . On déduit ainsi que  $f$  s'écrit uniquement en fonction de  $u$  ce qui laisse entendre que le nombre d'entrées est égale à 1. Néanmoins, si on fixe la fonction  $f(x, t)$ , faudrait-il encore fixer la fonction  $u$  en des endroits d'espace particuliers ou pas? Autrement dit, pourrions-nous intégrer l'équation (4.3) et fixer la trajectoire (en spécifiant les conditions initiales) sans prendre en compte la géométrie du domaine spatial. Cette question est le centre de ce chapitre car plusieurs résultats peuvent être distingués en fonction de la géométrie du domaine dans lequel le système est défini. Par exemple, pour (4.3), trois cas sont possibles, soit le système est défini sur toute la droite réelle, i.e.,  $x \in ]-\infty + \infty[$ , soit sur une semi-droite, i.e.,  $x \in ]-\infty x_0]$  ou  $x \in [x_1 + \infty[$ , soit sur un segment,  $x \in [x_0 x_1]$ . Pour simplifications, si l'on suppose que la fonction  $f(x, t)$  est fixée à zéro, la solution générale (i.e., indépendante de la forme du domaine) de (4.3) s'écrit

$$u(x, t) = h(x + ct) + g(x - ct), \quad (4.4)$$

où  $h(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  sont des fonctions *arbitraires* d'une variable chacune. A partir de là, le domaine joue un rôle important dans la détermination de ces fonctions. Par exemple dans le cas où  $x \in ]-\infty + \infty[$  et en y ajoutant les conditions initiales  $u(x, t)|_{t=0} = \phi_0(x)$  et  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = \phi_1(x)$ , la fonction  $u(x, t)$  de (4.4) est donnée par la solution de D'Alembert suivante :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\phi_0(x - ct) + \frac{1}{2}\phi_0(x + ct) + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Selon la définition générale des entrées donnée en Section 4.1, on voit bien qu'il n'y a aucune fonction (mise à part  $f$  qu'on a fixé à zéro) dépendante du temps (i.e., influe

continument sur la trajectoire) qu'on peut fixer arbitrairement dans (4.5). Ainsi,  $u$  est fonction uniquement de  $f$  et des conditions initiales  $\phi_0(\cdot)$ ,  $\phi_1(\cdot)$  qui sont fixées au début et ne dépendent que de  $x$ . Cela dit, on a pu trouver une trajectoire  $u$ , i.e., intégrer le système (4.3), sans avoir besoin de fixer  $u$  dans des endroits particuliers d'espace. Dans ce cas, la seule entrée du système est la fonction  $f$ . En revanche, quand  $x \in ]-\infty, x_0]$  ou  $x \in [x_1, +\infty[$ , on peut voir, par exemple dans [23], que la trajectoire  $u(x, t)$  dépend de  $f$ , des conditions initiales  $\phi_0(\cdot)$  et  $\phi_1(\cdot)$  mais aussi des conditions aux bords  $u(x, t)|_{x=x_0}$  et  $u(x, t)|_{x=x_1}$  respectivement. Ces dernières sont par définition des entrées et ils sont spécifiées à  $x = x_0$  et  $x = x_1$  respectivement. Ainsi, en passant d'un domaine infini à un domaine semi-fini, le nombre d'entrées passe de 1 à 2 respectivement. Pour le dernier cas, i.e.,  $x \in [x_0, x_1]$ , il est nécessaire de fixer à la fois  $u(x, t)|_{x=x_0}$  et  $u(x, t)|_{x=x_1}$  (voir par exemple [23]), ce qui fait augmenter le nombre d'entrées à 3. D'un point de vue de l'analyse fonctionnelle, et dans le cas d'une seule EDP définie sur un domaine borné, i.e., délimité de partout, le maximum de conditions aux bords (i.e., les entrées dépendantes du domaines) que l'on peut fixer est égal au *degré de l'opérateur* dérivée qui correspond à la variable spatiale. Par exemple, pour (4.3),  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  est de degré 2 ce qui veut dire que le maximum de conditions au bords à fixer suivant  $x$  est 2. Toutefois, il n'y a pas de définition formelle qui, à partir d'une EDP ou un système d'EDPs (i.e., plusieurs équation empilées), donne a priori un nombre minimum et/ou maximum de conditions aux bords qui pourraient conduire à des entrées supplémentaires à fixer. Par conséquent, on se fie généralement aux connaissances liées au fonctionnement du système afin de déterminer le nombre de conditions aux bords nécessaires. On sait, par exemple, que pour une ligne électrique on doit fixer la tension ou le courant au deux extrémités de la ligne. Enfin, on voit bien à travers les arguments donnés dans cette section qu'il n'est, a priori, pas facile de répondre à la question de départ en mettant de côté la géométrie du domaine spatial. Une formulation plus théorique de cette problématique est présentée en Section 4.4 en s'appuyant sur l'approche algébrique.

**Exemple 4.3.** (*système de type fini ou à trajectoires finies*) Afin de mettre le point sur une autre propriété sous-jacente des entrées, considérons les équations suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y \partial x} = 0, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + u(x, y, t) = 0, \end{array} \right. \quad (4.6)$$

qui définissent un système de dimension infinie. L'intérêt de cet exemple est de montrer que les systèmes de dimension infinie n'admettent pas tous des entrées au bords. En effet, la solution générale du système (4.6) qui s'écrit

$$u(x, y, t) = k(x + y) e^{-t}, \quad (4.7)$$

ne dépend que d'une *constante* arbitraire  $k$  qui peut être déterminée par une simple condition supplémentaire de type  $u(x_0, y_0, t_0) = cste$ . Cette catégorie de systèmes est

dite *de trajectoires finies* car la solution des équations telles que (4.7) ne dépend que des constantes et ne fait pas intervenir des fonctions inconnues comme celles vues dans l'Exemple 4.2. Ceci met bien l'accent sur le fait qu'il n'est pas évident de dire *d'emblée* qu'un système décrit par des EDPs admet ou pas des entrées aux bords même si le domaine est défini. On voit par exemple, à travers (4.7), que si l'on définit le système (4.6) sur  $x \in [x_0 \ x_1]$ ,  $y \in [y_0 \ y_1]$ , cela ne change pas la forme de la trajectoire (4.7) car tout ce que l'on peut fixer c'est une constante. Cette propriété sera bien mise en évidence dans la Section 4.5.2 en définissant ce qu'on appelle le *comportement fini* des systèmes à plusieurs dimensions.

A partir des exemples présentés dans cette section, il en ressort qu'il est nécessaire de formaliser cette problématique portant sur les entrées des systèmes à paramètres distribués dans un cadre plus général et plus intrinsèque. Cela, permettra d'approfondir la question et d'y apporter des éléments de réponses clairs et bien fondés ainsi que de bâtir une voie plus appropriée et plus structurelle pour les recherches ultérieures sur le sujet. Tel est l'objet du restant de ce chapitre.

### 4.3 Cadre général : une approche algébrique

Tout d'abord, précisons que tout système dynamique soit-il possède des propriétés propres à lui qui sont dites *structurelles*. Ainsi, les méthodes permettant de les déterminer peuvent varier mais le résultat final est nécessairement commun. A titre d'exemple, les pôles d'un système linéaire (de dimension fini) restent parfaitement inchangés qu'ils soient déterminés par les valeurs propres de la matrice d'état ou par les racine du dénominateur de la fonction de transfert. Toutefois, dans la plupart des cas les méthodes d'analyse et de synthèse reposent sur des représentations particulières ou bien standards du système dynamique. Ceci n'est pas sans conséquences puisqu'un choix particulier de représentation peut constituer une *contrainte* pour l'analyse de quelques propriétés bien particulières. On peut prendre comme exemple la représentation d'état qui est assez familière en théorie des systèmes. Bien qu'elle est tout à fait utile pour la synthèse et l'analyse, elle n'est pas appropriée pour aborder, par exemple, la question du choix des entrées. Pour cause, les signaux d'entrées/sorties doivent être choisis au préalable avant d'aboutir à une forme d'état. De là, il est plus judicieux qu'un système dynamique soit perçu à un niveau plus *intrinsèque*, i.e., vu comme un ensemble de variables reliées par un ensemble d'équations indépendamment d'une forme particulière de représentation. D'où, l'appellation *système généralisé* d'un point de vue de l'analyse algébrique, voir par exemple [56] ou [28]. Celle-ci est donc le cadre proposé dans cette thèse pour aborder la question des entrées.

#### 4.3.1 Préliminaires mathématiques

Cette section présente les outils mathématiques nécessaires pour représenter et analyser un système dynamique linéaire à paramètres constants par des propriétés algébriques. Le long de cette section et de celle qui suit, un accent particulier est mis sur les entrées. De plus, les propriétés en dimensions finie et infinie sont souvent comparées afin de mieux voir les points qu'ils les distinguent.

### 4.3.1.1 Rang d'un module

La dimension d'un espace vectoriel sur un corps est donnée par le nombre minimum de générateurs ou par le nombre maximum (appelé aussi cardinal) d'éléments linéairement indépendants. Ce second aspect de dimension est généralisé à la notion de 'rang'. On a donc la définition ci-dessous.

**Définition 4.1.** ([12]) Soit  $\mathbf{R}$  un anneau Noetherien,  $M$  un  $\mathbf{R}$ -module et  $Q$  le corps de fractions de  $\mathbf{R}$ . Alors,  $M$  est de rang  $k$  si le produit tensoriel  $M \otimes Q$  est un  $Q$ -module libre de rang  $k$ . D'une manière équivalente, la dimension de  $M \otimes Q$ , vu comme un espace vectoriel, est égale à  $k$ .

Précisons, par ailleurs, que si le produit  $M \otimes Q$  est égal à zéro, alors  $M$  est de rang 0 et il est dit *de torsion*. Finalement, nous pouvons dire, sans ambiguïté, que le rang d'un  $\mathbf{R}$ -module  $M$  est le nombre maximum d'éléments de  $M$   $\mathbf{R}$ -linéairement indépendants.

**Proposition 4.1.** Soit  $\mathbf{R}$  un anneau et  $M$  un  $\mathbf{R}$ -module de présentation finie qui satisfait

$$\mathbf{R}^p \xrightarrow{\bullet A} \mathbf{R}^q \xrightarrow{\bullet \phi} M \longrightarrow 0,$$

où  $A \in \mathbf{R}^{p \times q}$  est la matrice de présentation de  $M$  et  $\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q$  deux  $\mathbf{R}$ -modules libres de rang  $p$  et  $q$  respectivement. On a alors les équivalences suivantes :

- (i)  $M$  est de rang  $k$  ;
- (ii)  $k = q - \text{rang} A$  ;
- (iii)  $M$  a un sous module libre  $N$  de rang  $k$  tel que  $M/N$  est de torsion.

Pour le cas général et la preuve de cette proposition nous renvoyons à [12].

### 4.3.1.2 Dualité des modules

**Définition 4.1.** Soit  $M$  un  $\mathbf{R}$ -module à gauche finiment généré, et  $G$  un  $\mathbf{R}$ -module arbitraire. Le dual de  $M$  par rapport à  $G$  noté  $D(M)$  est le  $\mathbf{R}$ -module à droite défini par  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(M, G)$ , et ses éléments s'appellent les formes linéaires sur  $M$ , et on écrit formellement

$$D(M) = \text{Hom}_{\mathbf{R}}(M, G),$$

où le  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\bullet, G)$  est un foncteur contravariant de la catégorie des  $\mathbf{R}$ -modules dans celle des groupes abéliens. Dans le cas des modules de présentations finie, cette définition produit deux séquences

$$\mathbf{R}^p \xrightarrow{\bullet A} \mathbf{R}^q \xrightarrow{\bullet \phi} M \longrightarrow 0. \quad (4.8)$$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{R}}(M, G) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\bullet, G)} \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^q, G) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\bullet A, G)} \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^p, G). \quad (4.9)$$

La suite (4.8) est exacte si et seulement si la suite (4.9) est exacte. On dit aussi que le foncteur  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\bullet, G)$  est contravariant exact à gauche. Le résultat suivant nous permet, à ce stade, de définir quelques propriétés que nous utiliserons par la suite.

### Propriétés

(i) Pour qu'une application  $\mathbf{R}$ -linéaire  $u : E \rightarrow F$ , (où  $E$  et  $F$  sont des  $\mathbf{R}$ -Modules) soit *surjective* (resp. *bijjective*, resp. *nulle*) il faut et il suffit que, pour tout  $\mathbf{R}$ -module  $G$ , l'application  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(u, 1_G) : \text{Hom}_{\mathbf{R}}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{R}}(E, G)$  soit *injective* (resp. *bijjective*, resp. *nulle*).

(ii)  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^p, G) \cong \mathbf{R}^p$ ,  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^q, G) \cong \mathbf{R}^q$ .

Pour plus de détails théoriques voir [6, 9, 56].

#### 4.3.1.3 Anneaux de polynômes

Les anneaux de polynômes sont des anneaux commutatifs intègres (sans diviseur de zéro) [6] dont les éléments sont des polynômes en les indéterminées  $X_i$  à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$ . Ils sont dits de Cohen-Macaulay [12], et on les note habituellement par  $\mathbb{K}[X_1, X_2, \dots, X_n]$  ou tout simplement  $\mathbb{K}[X]$  lorsqu'il y a pas d'ambiguïté. Chaque élément de  $\mathbb{K}[X]$  s'écrit d'une manière unique sous la forme  $u = \sum_i a_i X_1^{\alpha_{1i}} X_2^{\alpha_{2i}} \dots X_n^{\alpha_{ni}}$ , où les  $a_i \in \mathbb{K}$  sont tous nuls à l'exception d'un nombre fini. Le degré du polynôme  $u$  est le  $\max_i (\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \dots + \alpha_{ni})$ , et on désigne également par  $\mathbb{K}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  le corps des fractions de  $\mathbb{K}[X]$ . Dans ce qui suit, les indéterminés  $X_i$  vont représenter des opérateurs de dérivées. Ainsi, pour leur donner plus de sens, on adoptera plutôt la notation  $\mathbf{R} = \mathbb{K}[\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n]$  tout le long de du chapitre.

#### A) Propriétés des modules sur les anneaux de polynômes

**A.1) Cas d'une seule indéterminée :** Dans le cas d'une seule indéterminée, l'anneau  $\mathbf{R} = \mathbb{K}[\partial_1]$  est principal (est donc un domaine de Bezout), i.e., tout idéal de  $\mathbf{R}$  peut être généré par un seul élément donc principal et maximal à la fois [7, 9]. Par conséquent, chaque matrice polynomiale  $S^{p \times q}$  à coefficients dans  $\mathbf{R}$  se décompose de manière unique en un produit de matrices unimodulaires et une matrice centrale appelée *forme de Smith* de  $S$ . A partir de cette dernière, on peut extraire une matrice diagonale non nulle de taille  $(r \times r)$  dont les éléments sont appelés *facteurs invariants* et permettent de lire des informations comme la torsion par exemple.

Une autre propriété qui est liée au caractère principal de l'anneau  $\mathbf{R}$  est la décomposition canonique du module en somme directe de deux sous modules appelés, respectivement, sous module de torsion  $\Gamma$  et sous module libre  $\Phi$ , i.e.,

$$M = \Gamma \oplus \Phi$$

avec  $\Gamma = \{m \in M \mid \exists \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\} : \lambda m = 0\}$ .

Pour un  $\mathbf{R}$ -module  $M$  sur ce type d'anneau, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i)  $M$  libre.

(ii)  $M$  projectif.

(iii)  $M$  est sans torsion.

En plus de cela, si  $M$  est de rang  $r$ , alors  $M$  admet une base de cardinal  $r$  et si  $M$  est sans torsion il est alors libre de rang  $r$ .

**A.2) Cas de plusieurs indéterminées :** En passant d'une seule indéterminée à plusieurs, la propriété de principalité n'existe plus, car les anneaux à plusieurs indéterminées ne sont pas principaux [7]. Par conséquent, les modules définis sur ce type d'anneaux n'ont pas les mêmes propriétés que les précédents, ce qui conduit à redéfinir certaines notions :

- (i) Un  $\mathbf{R}$ -module  $M$  ne se décompose pas nécessairement en somme directe d'un sous module libre et d'un sous module de torsion
- (ii) La notion de facteurs invariants n'existe pas et la forme de Smith n'est pas définie également.
- (iii) Si  $M$  est libre alors il est sans torsion mais l'inverse n'est généralement pas vrai, on définit donc le caractère *sans torsion*.
- (iii) Si  $M$  est sans torsion, les éléments  $\mathbf{R}$ -linéairement indépendants de  $M$  ne forment pas nécessairement une base.

**Proposition 4.2.** (Quillen, Suslin) [27, 92] Dans un anneau de polynômes à une ou plusieurs indéterminées, à coefficients dans un corps, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $M$  est libre.
- (ii)  $M$  est projectif.

#### 4.3.1.4 Idéaux de Fitting d'un module de présentation finie

Les idéaux de Fitting appelés aussi invariants de Fitting sont des objets algébriques puissants et intrinsèques pour l'étude des modules donnés par générateurs et relations ou tout simplement de présentation finie.

**Définition 4.2.** Si  $A \in \mathbf{R}^{p \times q}$  est une matrice de présentation d'un  $\mathbf{R}$ -module  $M$  donné par  $q$  *générateurs* liés par  $p$  *relations*, l'idéal de Fitting d'ordre  $n$  du module  $M$ , noté  $\mathfrak{F}_n(M)$ , est l'idéal de  $\mathbf{R}$  engendré par les mineurs d'ordre  $(q - n)$  de la matrice  $A$ , i.e.,

$$\mathfrak{F}_n(M) = \mathfrak{D}_{q-n}(A),$$

où  $\mathfrak{D}_{q-n}(A)$  dénote l'idéal défini par l'ensemble des mineurs d'ordre  $(q - n)$  de la matrice  $A$ . Par convention, si  $(q - n) > \min(p, q)$ , alors  $\mathfrak{D}_{q-n}(A) = 0$ , et dans le cas où  $(q - n) < 1$  il est égal à 1.

#### A) Propriétés

**Invariance par réalisation :** Les idéaux de Fitting ne dépendent pas d'une réalisation particulière de la matrice de présentation mais du module lui-même. Par exemple, si l'on rajoute à la matrice de présentation  $A$  une ligne, qui est une combinaison  $\mathbf{R}$ -linéaire des autres, ou si l'on rajoute un élément générateur, qui s'écrit en fonction des autres, l'idéal de Fitting  $\mathfrak{F}_n(M)$  ne change pas [[55], Thm 1, p. 58]. L'une des conséquences, les plus importantes, de ce théorème est que si deux  $\mathbf{R}$ -modules  $M$  et  $M'$  sont isomorphes, i.e.,  $M \cong M'$ , alors  $\mathfrak{F}_n(M) = \mathfrak{F}_n(M')$  [[55], p. 59].

**Inclusion :** Pour tout  $\mathbf{R}$ -module  $M$  de présentation finie avec  $q$  générateurs, nous avons la suite d'inclusions suivante :

$$\mathfrak{F}_0(M) \subseteq \mathfrak{F}_1(M) \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{F}_q(M) = \mathbf{R}.$$

En particulier, si  $M$  est un  $\mathbf{R}$ -module projectif de rang  $r$ , nous avons alors :

$$\mathfrak{F}_0(M) = \dots = \mathfrak{F}_{r-1}(M) = \{0\} \subseteq \mathfrak{F}_r(M) = \mathbf{R}.$$

Ou d'une manière équivalente, les mineurs d'ordre  $q$  de  $A$  n'ont pas de zéros communs.

**B) Lien avec les annulateurs :** On appelle idéal de Fitting *initial*, l'idéal  $\mathfrak{F}_0(M)$  et on le note tout simplement  $\mathfrak{F}(M)$ . Une relation étroite existe alors entre cet idéal et les annulateurs de  $M$ . Elle s'énonce comme suit [[55], Th 5, p. 60] : Pour un  $\mathbf{R}$ -module  $M$  de présentation finie donnée par  $q$  générateurs, nous avons :

$$[Ann_{\mathbf{R}}(M)]^q \subseteq \mathfrak{F}(M) \subseteq Ann_{\mathbf{R}}(M).$$

En particulier, dans le cas où l'ensemble des générateurs contient un seul élément, alors  $\mathfrak{F}(M) = Ann_{\mathbf{R}}(M)$ . De plus,

$$\text{rad}(Ann_{\mathbf{R}}(M)) = \text{rad}(\mathfrak{F}(M)),$$

où  $\text{rad}(\cdot)$  symbolise le radical.

**C) Lien avec le rang du module** Soit  $A^{p \times q}$  une matrice à coefficients dans  $\mathbf{R}$ , on définit le rang de cette matrice par *le plus grand*  $v$  tel que  $\mathfrak{D}_v(A) \neq 0$ , et on note  $\text{rang}(A) = v$  [[55], p. 62]. En tenant compte de cette définition, de la Proposition 4.1 et de la Section A), on peut écrire sans ambiguïté  $\text{rang}(M) = q - v$ . En posant  $v = q - n$ , la plus grande valeur de  $v$  tel que  $\mathfrak{D}_v(A) \neq 0$  correspond à la plus petite valeur de  $n$ . Et comme  $\mathfrak{F}_n(M) = \mathfrak{D}_{q-n}(A)$ , alors on peut définir le rang de  $M$  comme étant le plus petit  $n$  tel que  $\mathfrak{F}_n(M) \neq \{0\}$ , pour  $0 \leq n \leq q$ . En particulier si  $n \geq 1$ , et si cet idéal engendre tout  $\mathbf{R}$ , alors le module est projectif de rang  $n$ .

#### 4.3.1.5 Notion d'invariants

Les invariants d'un module de présentation finie sont des quantités indépendantes d'une réalisation particulière de sa matrice de présentation, i.e, intrinsèquement liées au module. Ces invariants sont principalement la *dimension* et la *multiplicité* d'un module.

Tout au long de cette section, on note par  $\mathbf{R} = \mathbb{K}[\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n]$  un anneau des polynômes en  $n$  variables à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , ( $\mathbf{R}$  est une algèbre commutative graduée, i.e.,  $\mathbf{R} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathbf{R}_i$  avec  $\mathbf{R}_0 = \mathbb{K}$ ),  $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$  un  $\mathbf{R}$ -module,  $I$  un idéal de  $\mathbf{R}$  engendré par les polynômes  $p_1, p_2, \dots, p_s \in \mathbf{R}$ , et  $\mathcal{A} = \mathbf{R}/I$  l'algèbre quotient.

**A) Polynôme et série de Hilbert :** Soit

$$HF_M : n \longrightarrow \dim_k M_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.10)$$

une fonction qui fait correspondre à chaque  $n$  la dimension, au sens d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de  $M_n$ . Cette fonction est appelée **fonction de Hilbert** de  $M$ . On définit également la **série de Hilbert** de  $M$ , aussi appelée série de Hilbert-Poincaré, par :

$$HS_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} HF_M(n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]]. \quad (4.11)$$

Si  $M$  est généré par  $d$  éléments homogènes de degrés  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d > 0$ , alors la série (4.11) s'écrit :

$$HS_M(t) = \frac{P(t)}{\prod_{i=1}^d (1 - t^{\delta_i})},$$

et dans le cas où les  $\delta_i$  sont égaux à 1, on a

$$HS_M(t) = \frac{P(t)}{(1-t)^d}, \quad (4.12)$$

où  $P(t)$  est un polynôme à coefficients entiers. L'entier  $d$  est appelé *dimension* de  $M$  sur  $\mathbf{R}$  et on note  $\dim_{\mathbf{R}}(M) = d$ .

*Remarque 4.1.* Il ne faut pas confondre la dimension de  $M$  sur  $\mathbf{R}$  avec la dimension de  $M$  comme un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$ , notée  $\dim_{\mathbb{K}}(M)$ . La première, représente la dimension de Krull de  $M$ , notée  $\dim_{Krull}(M)$ , et elle est nécessairement finie si le nombre d'indéterminées de l'anneau de polynômes  $\mathbf{R}$  est fini. La deuxième ( $\dim_{\mathbb{K}}(M)$ ), en revanche, peut ne pas être finie.

### 4.3.2 Approche système

Un système dynamique est un ensemble de  $q$  variables liées par  $p$  relations (différentielles, algébro-différentielles, aux différences, aux dérivées partielles, etc). D'un point de vue algébrique, ce système peut être vu comme un  $\mathbf{R}$ -module qui a comme générateurs les variables physiques du système et comme relations les équations qui lient ces variables. On aura ainsi ce que l'on appelle un  $\mathbf{R}$ -module de présentation finie donné par générateurs et relations.

#### 4.3.2.1 Définition d'un $\mathbf{R}$ -système

**A) Définition générale** Compte tenu des propos précédents, il existe alors une matrice  $A \in \mathbf{R}^{p \times q}$  à coefficients dans  $\mathbf{R}$ , appelées matrice de présentation, tel qu'on est la représentation ci-dessous pour un système linéaire

$$Aw = 0, \quad (4.13)$$

où  $w = [w_1, w_2, \dots, w_q]^T$  joue le rôle de générateurs. Contrairement au module  $M$ , la matrice  $A$  n'est pas un objet intrinsèque puisque elle n'est pas unique. En effet, on peut changer, par exemple, la position de deux lignes de la matrice  $A$  sans que cela ne change le module  $M$ . On a donc la suite suivante

$$\mathbf{R}^p \xrightarrow{\bullet A} \mathbf{R}^q \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0, \quad (4.14)$$

qui est *exacte* puisque  $\text{Ker}(\phi) = \text{Im}_{\mathbf{R}}(\bullet A)$  ou d'une manière équivalente  $(\bullet A)$  est une injection et  $(\phi)$  est une surjection canonique. A partir de là, on peut définir le  $\mathbf{R}$ -module  $M$ , lié au système dynamique, comme étant le conoyau du morphisme  $(\bullet A)$ , et, on écrit formellement

$$M \cong \mathbf{R}^q / \text{Im}_{\mathbf{R}}(\bullet A) \triangleq \text{coker}_{\mathbf{R}}(\bullet A).$$

Pour plus de détails sur ces définitions nous renvoyons le lecteur à [56, 9, 53, 63], où elles sont largement discutées.

**A.1) Cas de la dimension finie** Étant donné que les systèmes dynamiques continus de dimension finie font intervenir que des équations différentielles ordinaires, le  $\mathbf{R}$ -module correspondant peut être défini sur un anneau de polynômes à une seule indéterminée, i.e.,  $\frac{d}{dt} \equiv \partial_t$ . On aura ainsi, un module défini sur un anneau principal,  $\mathbf{R} = \mathbb{C}[\partial_t]$ , dont les propriétés associées sont présentées en Section 4.3.1.3. Notons également que l'analyse des systèmes discrets peut aussi bénéficier de ce cadre algébrique en considérant, comme indéterminée de l'anneau, l'opérateur de décalage. Le cadre mathématique employé, généralement, dans ce cas ce sont les algèbres de Ore (voir, par exemple, [18]).

**A.2) Cas de la dimension infinie :** Pour les systèmes continus de dimension infinie, la particularité réside dans la multitude des arguments dont dépendent les fonctions définissant le comportement du système ainsi que les différentes dérivées partielles qui y sont associées. De là, l'anneau sur lequel est défini le module correspondant au système (tel que (4.1)) comporte plusieurs indéterminées,  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t, \frac{\partial}{\partial x_1} \equiv \partial_{x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \equiv \partial_{x_n}$ . C'est ce qui conduit à considérer le système sur l'anneau  $\mathbf{R} = \mathbb{C}[\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}]$  qui n'est plus principal et possède quelques propriétés différentes (voir Section 4.3.1.3) par rapport au cas d'une seule indéterminée. Là encore, on peut reprendre la remarque faite plus haut pour les systèmes discrets en considérant, cette fois-ci, plusieurs opérateurs de décalage en se mettant dans le cadre des algèbres de Ore (voir, par exemple, [18] pour plus de détails).

### 4.3.3 Approche comportementale

Une autre manière de représenter un système linéaire est de considérer ses solutions plutôt que ses équations. Dans le cas 1–D, cette approche a été développée par Willems

[87, 62], où on définit un système linéaire par un triplet  $(\mathcal{A}, q, \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{A}$  désigne l'espace des signaux,  $q \in \mathbb{Z}^+$  est le nombre de composantes et  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^q$  est le *comportement* (behaviour) dont les éléments sont appelés *trajectoires*. L'espace des signaux  $\mathcal{A}$ , qui peut être un espace quelconque (de fonctions, de distributions, d'hyperfonctions, etc), est aussi un  $\mathbf{R}$ -module à gauche, i.e., chaque relation entre les éléments de  $\mathcal{A}$  donne un élément de  $\mathcal{A}$  (par exemple, dans l'espace des fonctions dérivables,  $f(x_1, \dots, x_n)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  sont dans le même espace, donc dans le même module sur l'anneau des opérateurs différentiels).

#### 4.3.3.1 Formalisation

Reprenons la relation  $Aw = 0$ . On peut voir  $w$  comme un élément de  $\mathcal{A}^q$  et  $A \in \mathbf{R}^{p \times q}$  comme une matrice à coefficients dans  $\mathbf{R}$ . Le *comportement* du système est défini donc de la manière suivante

$$\mathcal{B} = \text{Ker}_{\mathcal{A}}(A\bullet) = \{w \in \mathcal{A}^q : Aw = 0\},$$

où  $\mathcal{B}$  est constitué de trajectoires du système qui sont les solutions des équations de  $Aw = 0$ .

**Exemple :** Pour bien illustrer cette approche comportementale, considérons un simple système  $\mathcal{S}$  défini par [9],

$$\mathcal{S} : \frac{dy(t)}{dt} = y(t).$$

Le  $\mathbf{R}$ -système  $\mathcal{S}$  correspondant s'écrit  $\mathcal{S} = \text{coker}_{\mathbf{R}}(\partial - 1)$  avec  $\mathbf{R} = \mathbb{C}[\partial]$ . De là, si l'on s'intéresse aux solutions des équations (i.e., comportement) du système  $\mathcal{S}$ , on peut écrire :

- Si l'on cherche les solutions dans l'espace des fonctions  $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , alors,

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \{y \in \mathcal{A} : t \rightarrow ce^t, c \in \mathbb{C}\}.$$

- Si l'on cherche les solutions dans l'espace  $\mathbb{C}[t]$ , alors nous avons :

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \{0\}.$$

A travers cet exemple, on voit bien l'importance de l'espace des signaux  $\mathcal{A}$  dans lequel on cherche les solutions. C'est ce qui fait la différence entre cette seconde approche et celle exposée en Section 4.3.2 dans laquelle les générateurs du module ne sont pas considérés comme des trajectoires. Bien que ces deux approches semblent différentes, de part leurs concepts, on verra, dans la section qui suit, qu'il existe, sous certaines conditions sur l'espace des signaux  $\mathcal{A}$ , un lien de dualité entre elles.

#### 4.3.4 Connexion entre l'approche système et l'approche comportementale

Dans les deux sections précédentes, on a vu deux approches algébriques qui permettent de représenter et d'étudier les propriétés des systèmes linéaires de dimension finie et infinie. Ces deux approches, bien qu'elles ont été développées séparément, ont un lien étroit qui

est la dualité entre les modules définissant les entités « système » et « comportement ». L'intérêt ici de définir une telle propriété de connexion est de montrer la flexibilité qui nous est offerte par ces deux approches. Plus précisément, il est possible de passer de l'une à l'autre par le principe de dualité. Ainsi, on peut exploiter les avantages offerts par chaque approche tout en garantissant le caractère structurel des résultats et l'équivalence entre les différentes définitions.

#### 4.3.4.1 Dualité des deux modules

Comme il a été présenté dans la Section 4.3.1.2, le  $\mathbf{R}$ -système  $M$  a un dual par rapport à un certain  $\mathbf{R}$ -module  $G$  par le biais du foncteur contravariant exact à gauche. En définissant l'objet  $\text{Ker}_{\mathcal{A}}(A\bullet)$ , qui est noté  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M)$ , comme étant le  $\mathcal{A}$ -comportement associé au  $\mathbf{R}$ -module  $M$  et le  $\mathbf{R}$ -module  $G$  comme étant le  $\mathbf{R}$ -module  $\mathcal{A}$ , la question que l'on se pose concerne les conditions qu'il faut satisfaire, pour  $\mathcal{A}$ , afin que  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(M, A) \cong \mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M)$ , i.e., que le foncteur exact induit une dualité entre les modules finiment générés. La réponse à cette question a été donnée par Malgrange [44] pour les systèmes à paramètres distribués ( $n$ -D), mais qui s'applique aussi pour les systèmes 1-D (en stationnaire et non stationnaire), où il a été démontré que la condition nécessaire et suffisante est que  $\mathcal{A}$  soit un *cogénérateur injectif large*, voir par exemple [56] ou [9], sur  $\mathbf{R} = \mathbb{K}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

Par ailleurs, on montre aussi, dans [56], que les  $\mathbf{R}$ -modules  $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, k)$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, k)$  (espace des distributions) et quelques autres espaces sont des cogénérateurs injectifs larges.

Par conséquent, les liens entre les deux approches sont fait et on peut passer du module  $M$  au  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M)$ , par l'intermédiaire du foncteur  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(M, \mathcal{A})$ , et inversement  $M$  est déterminé d'une manière unique par  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M)$  quand  $\mathcal{A}$  est un large cogénérateur injectif. D'une manière équivalente, le foncteur  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\bullet, \mathcal{A})$  est *fidèle*, voir [9] pour le cas 1-D temps variant et [56] pour le cas  $n$ -D stationnaire. La suite (4.14) donne alors la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\bullet\phi, \mathcal{A})} \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^q, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\bullet A, \mathcal{A})} \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^p, \mathcal{A}). \quad (4.15)$$

Nous avons aussi les isomorphismes canoniques (Section 4.3.1.2)  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^q, \mathcal{A}) \cong \mathcal{A}^q$  et  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^p, \mathcal{A}) \cong \mathcal{A}^p$ . Ainsi, les identifications suivantes peuvent être faites :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\bullet\phi, \mathcal{A}) &= \iota\bullet, \\ \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\bullet A, \mathcal{A}) &= A\bullet, \\ \mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M) &= \text{Ker}_{\mathcal{A}}(A\bullet). \end{aligned}$$

Ce qui permet de récrire la séquence (4.15) sous la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M) \xrightarrow{\iota\bullet} \mathcal{A}^q \xrightarrow{A\bullet} \mathcal{A}^p, \quad (4.16)$$

où nous identifions  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M)$  à  $\mathcal{B}$  dont les éléments sont les trajectoires (section 4.3.3).

#### 4.3.4.2 Propriétés induites : dualité du rang

Dans la Section 4.3.2, on a vu que le rang d'un  $\mathbf{R}$ -module  $M$  associé à un système coïncide avec le nombre d'entrées, et dans la Section 4.3.3 que le nombre d'entrées se calcule de la même manière que le rang de  $M$ . On a aussi par le principe de dualité que nous venons de voir que  $M \equiv \mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M)$ , i.e.,  $\text{Coker}_{\mathbf{R}}(\bullet A) \equiv \text{Ker}_{\mathcal{A}}(A\bullet)$ . Ainsi,  $\text{rang}(M) = \text{rang}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M))$ .

### 4.4 Notion d'entrées : définitions formelles

Comme mentionné en Section 4.1, et appuyé par les exemples de la Section 4.2.1, pour un système dynamique donné par plusieurs inconnues et équations, il n'est pas évident, en général, de quantifier et de choisir, dès le départ, les entrées de contrôle du système. A cet effet, l'approche par les modules, introduite dans les Sections 4.3.2 et 4.3.3, facilite considérablement la tâche que l'on se met côté système ou côté comportement. En effet, la définition des entrées prend des formes différentes mais le constat est le même, i.e., une entrée est une variable, parmi celles du système, qui peut être fixée *librement*, i.e., elle n'obéit à aucune équation particulière. Elle est donc dite *variable libre*, et les définitions ci-dessous nous donne un aperçu de la manière dont ces variables sont définies suivant que l'on se base sur l'approche système ou comportement.

#### 4.4.1 Point de vue système

Dans le cas linéaire, et pour les systèmes de dimension finie, Fliess [28] donne une définition des entrées qui est assez proche de la théorie des systèmes. Il définit les entrées d'un  $\mathbf{R}$ -système linéaire  $M$ , comme étant l'ensemble de variables  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  qui doit être tel qu'il définit une dynamique  $\mathcal{D}$  ( $\mathbf{R}$ -système  $M$  équipé d'une entrée), i.e., le module quotient  $M/[\mathbf{u}]_{\mathbf{R}}$  doit être de torsion. Les entrées sont indépendantes si et seulement si le  $\mathbf{R}$ -module  $[\mathbf{u}]_{\mathbf{R}}$  est libre de rang  $m$ . D'une manière équivalente,  $\mathbf{u}$  est une base de  $[u]_{\mathbf{R}}$  et le nombre minimum de variables de contrôle est égal au rang du module définissant la dynamique, i.e.,  $m = \text{rang}_{\mathbf{R}}(M)$  (Proposition 4.1). Ainsi, un système linéaire est dit *autonome* si le  $\mathbf{R}$ -système correspondant est de torsion.

Cependant, pour les systèmes dynamiques de dimension infinie (n-D), tels que (4.1), les définitions recensées, dans la littérature, à ce sujet n'incluent pas les commandes aux bords. En effet, si l'on regarde les définitions avec l'œil de l'automaticien, on constate que la notion de variables libres, qui coïncide avec le rang du module de  $\mathbf{R}$ -système  $M$ , couvre uniquement ce que l'on a appelé en Section 4.1 les variables de contrôle internes et ne s'étend pas aux commandes frontières. On parle, par exemple, dans [65] de variables de paramétrisation dans le cas où le module est sans torsion.

#### 4.4.2 Point de vue comportement

Dans l'approche comportement, comme dans l'approche système, les définitions des entrées dans le cas de la dimension finie et infinies restent analogues. Ainsi, pour un système donné par  $(\mathcal{A}, q, \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{B} = \text{Ker}_{\mathcal{A}}(A\bullet) \subseteq \mathcal{A}^q$ , on définit un ensemble de variables

libres  $\mathbf{u}$  de  $\mathcal{B}$  comme étant un sous ensemble de  $w$  de taille  $\sigma \in \{1, \dots, q\}$ , tel que le morphisme  $\Psi_{\bullet} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^{\sigma}$  soit *surjectif* [88, 94, 29]. Comme les deux approches (système et comportement) sont duales, cette définition se justifie aussi par le principe de dualité défini en Section 4.3.1.2. En effet, on sait, par [6], que pour qu'un sous ensemble  $\mathbf{u}$  de  $w$  de taille  $\sigma \in \{1, \dots, q\}$  soit une famille libre de  $M$ , il faut, et il suffit, que le morphisme

$$\bullet\rho : \mathbf{R}^{\sigma} \rightarrow M$$

soit *injectif*. Par dualité, on obtient ainsi le morphisme  $\Psi_{\bullet} : \mathcal{B}_{\mathcal{A}}(M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^{\sigma}, \mathcal{A})$  qui peut s'écrire aussi comme  $\Psi_{\bullet} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^{\sigma}$  (voir Section 4.3.4.1). D'après la Section 4.3.1.2, si le morphisme  $(\Psi_{\bullet})$  est *surjectif* alors le morphisme  $(\bullet\rho)$  est *injectif*, c'est ce qui justifie la définition. Il est à noter aussi que, contrairement au cas de la dimension finie, l'ensemble  $\mathbf{u}$ , des entrées indépendantes, ne constitue pas nécessairement une base du module (voir Section A.2)). Enfin, le nombre de variables libres de  $\mathcal{B}$ , noté  $\mathbf{m}(\mathcal{B})$ , est égal à la taille maximale de l'ensemble  $\mathbf{u}$ , i.e., le maximum d'éléments  $\mathbf{R}$ -linéairement indépendants de  $[\mathbf{u}]_{\mathcal{A}}$ . Ce nombre est donné par la relation suivante [56] :

$$\mathbf{m}(\mathcal{B}) = q - \text{rang}(A),$$

où le rang de  $A$  est défini sur le corps de fractions de  $\mathbf{R}$ . On note aussi dans [94, 56, 90] que  $\mathbf{m}(\mathcal{B})$  est nécessairement le nombre d'entrées du système.

#### 4.4.2.1 Exemples illustratifs

Afin d'illustrer les définitions qu'on vient de donner plus haut, considérons les deux exemples suivants :

**Exemple 4.4.** Reprenons les équations du modèle en  $\pi$  présentés dans l'Exemple 4.1. En définissant  $\partial \equiv \frac{d}{dt}$ , comme étant un symbole représentant la dérivée par rapport au temps, le système (4.2) peut se réécrire sous la forme (4.13) comme suit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{2}\ell\partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{C}{2}\ell\partial \\ (R+L\partial)\ell & -(R+L\partial)\ell & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A(\partial)} \underbrace{\begin{bmatrix} I_e \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ I_s \\ V_e \\ V_s \end{bmatrix}}_w = 0, \quad (4.17)$$

(4.17) définit ainsi un  $\mathbf{R}$ -système. Les relations entre les variables physiques sont regroupées dans la matrice de présentation  $A(\partial)$  et les variables physiques elles-mêmes (tensions et courants) qui génèrent le module sont représentées par  $w$ . Comme mentionné plus haut, le nombre d'entrées  $\mathbf{m}$  du système (4.2) est donné par le rang de son module représenté par (4.17). Étant donné que le nombre de générateurs (variables physiques)  $q$  et le rang

de la matrice  $A(\partial)$  sont, respectivement,  $q = 7$  et  $\text{rang}(A(\partial)) = 5$ , la Proposition 4.1 conduit au résultat suivant,

$$\mathbf{m} = q - \text{rang}(A(\partial)) = 7 - 5 = 2.$$

On remarque bien que ce dernier résultat est le même que celui trouvé en Exemple 4.1, ce qui confirme que le système (4.2) admet deux entrées indépendantes. Afin de vérifier que ce résultat est intrinsèque, i.e., propre au système physique lui-même et non pas à sa représentation, reprenons la manipulation de l'Exemple 4.1, qui consiste à ajouter au système (4.2) une équation qui est une combinaison linéaire de deux équations parmi celles de départ. D'un point de vue de la théorie des modules, ce qui va changer pour le  $\mathbf{R}$ -système dans ce cas là c'est uniquement la matrice de présentation  $A(\partial)$  qui devient,

$$\bar{A}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\ell\partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\ell\partial \\ (R + L\partial)\ell & -(R + L\partial)\ell & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

En remarquant que la dernière ligne de la matrice (4.18) est une soustraction (combinaison linéaire) des deux dernières, on déduit que le rang de la matrice  $\bar{A}(\partial)$  chute, est il est donné par  $\text{rang}(\bar{A}(\partial)) = 5$ . Les générateurs étant toujours les mêmes, i.e.,  $q = 7$ , le nombre d'entrées

$$\bar{\mathbf{m}} = q - \text{rang}(\bar{A}(\partial)) = 7 - 5 = 2,$$

reste inchangé, et montre que cette approche algébrique n'est pas sensible à la représentation et préserve bien les propriétés structurelles du système.

**Exemple 4.5.** Reconsidérons l'équation des ondes de l'Exemple 4.2. En posant  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$  et  $\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x$ , le  $\mathbf{R}$ -système correspondant est défini sur l'anneau  $\mathbf{R} = \mathbb{R}[\partial_t, \partial_x]$  et s'écrit :

$$\underbrace{[\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 \quad -1]}_{A(\partial_t, \partial_x)} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ f \end{bmatrix}}_w = 0. \quad (4.19)$$

La dimension de  $w$  étant  $q = 2$  et  $\text{rang}(A(\partial_t, \partial_x)) = 1$ , le nombre d'entrées  $\mathbf{m}$  est égal à  $\mathbf{m} = 2 - 1 = 1$ , ce qui signifie qu'il est possible de fixer  $u$  ou  $f$  d'une manière indépendante. En revanche, aucune indication n'est donnée sur le nombre de commandes aux bords évoquées dans l'Exemple 4.2. Pour y voir plus clair, considérons  $f$  comme étant l'entrée. Le module quotient  $M/[f]_{\mathbf{R}}$  qui en résulte, i.e.,

$$\underbrace{[\partial_t^2 - c^2\partial_x^2]}_{\bar{A}(\partial_t, \partial_x)} \underbrace{[u]}_{\bar{w}} = 0, \quad (4.20)$$

est bien de torsion car le rang de  $M/[f]_{\mathbf{R}}$  est zéro, ce qui laisse entendre qu'aucune autre variable ne peut être fixée dans le système. Néanmoins, ceci n'est pas, tout à fait, le cas car

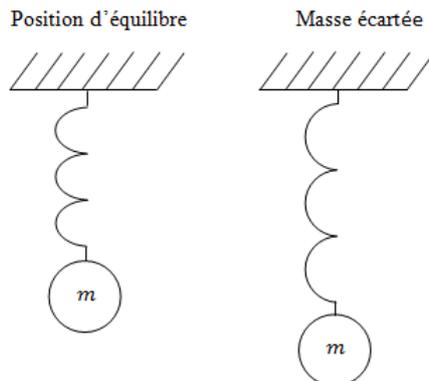


FIGURE 4.1 – Système masse-ressort

on peut aussi agir sur le système par les variables de bords. A cet effet, la notion d'autonomie définie dans la section suivante, bien qu'elle ne répond pas complètement à la question, elle dégage des propriétés intéressantes qui permettent une meilleure compréhension du lien avec les variables de bords.

#### 4.5 Entrées et autonomie : vers un lien avec le contrôle frontière

Pour un système dynamique, l'autonomie exprime l'absence du contrôle, i.e., l'évolution du système n'est due qu'aux conditions initiales. Si l'on traduit cela dans un langage mathématique on dirait que toute variable physique du système vérifie au moins une équation, i.e., aucune d'elles ne peut être fixée arbitrairement. L'exemple concret le plus simple et le plus parlant pour illustrer ce fait est le système masse-ressort de la Fig. 4.1, aussi appelé oscillateur harmonique.

Si on écarte légèrement la masse  $m$  de sa position d'équilibre puis on la relâche, celle-ci va se mettre à osciller autour de sa position d'équilibre grâce à l'effet du ressort. L'équation dynamique décrivant l'évolution de ces oscillations au cours du temps peut s'écrire sous la forme

$$\dot{x}(t) = \Lambda x(t),$$

où les composantes du vecteur  $x$  représentent le mouvement de la masse et sa vitesse. Ainsi, si l'on mesure la position de la masse  $m$  et sa vitesse à chaque instant  $t$ , à l'aide d'un appareil de mesure, on s'apercevra qu'elles vérifient,

$$x(t) = e^{\Lambda(t-t_0)}x_0, \quad (4.21)$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  représente l'écartement et la vitesse qu'on a donné à la masse  $m$  à l'instant initial  $t_0$ . A travers cet exemple, on voit bien qu'une fois les conditions initiales fixées, la trajectoire de la masse  $m$  vérifiera bien la solution (4.21) et elle ne pourra être modifiée par aucun autre moyen. C'est ce qui exprime le caractère autonome du système.

D'un point de vue formel, cette autonomie que l'on vient de voir correspond à la torsion du module définissant le système car, d'après la définition donnée en Section 4.4.1, si un système n'a pas d'entrées, i.e.,  $\mathbf{m} = 0$ , le rang de son module  $M$  est nul est donc de

torsion. Cette propriété, qui se généralise à tous les systèmes de dimension finie, est définie par Willems dans l'approche comportement comme étant la non égalité à zéro du déterminant de la matrice carrée  $A$ . Autrement dit, un comportement  $\mathcal{B} = \text{Ker}_{\mathcal{A}}(A\bullet)$  est autonome si chaque trajectoire de  $\mathcal{B}$  est déterminée *uniquement* par ses valeurs sur un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  (par exemple, les conditions initiales). L'extension de cette définition pour les systèmes distribués (n-D) a été introduite dans [61], où on lie l'autonomie d'un comportement  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^q$ , à la *restriction* de la *variété caractéristique*  $\mathbf{V}(I_q(A))$  de l'idéal engendré par les mineurs d'ordre  $q$  de la matrice  $A \in \mathbf{R}^{p \times q}$  correspondante, i.e., les zéros communs des polynômes engendrant cet idéal forment un sous ensemble  $\mathbb{T}^n$  de  $\mathbb{C}^n$  qui n'est pas vide ou égal à tout  $\mathbb{C}^n$  ( $n$  est le nombre d'indéterminées). Cela implique aussi que l'idéal engendré par les mineurs d'ordre  $q$  de  $A$  ne doit pas être nul. Par conséquent, on peut établir les équivalences suivantes qui s'appliquent pour les systèmes linéaires n-D ( $n \geq 1$ ) (voir [29], [90, 95], pour détails et preuves)

- (i)  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^q$  est autonome.
- (ii)  $\mathcal{B}$  n'a pas de variables libres.
- (iii) pour tout  $\mathcal{B} = \text{Ker}_{\mathcal{A}}(A\bullet)$ ,  $A$  est de plein rang sur les colonnes.
- (iiii)  $\text{Ann}(\mathcal{B}) \neq 0$ .

A partir de ces définitions que l'on vient d'annoncer, on peut aisément conclure que, pour un système dynamique de dimension finie, l'autonomie est synonyme de l'absence de *toute forme* de contrôle soit-elle. Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les systèmes de dimension infinie, car comme on a mentionné auparavant (voir Section 4.4), ces systèmes peuvent avoir des contrôles frontières (au niveau des bords). En outre, si l'on interprète la définition de l'autonomie données plus haut pour les système n-D, on s'aperçoit qu'elle correspond uniquement à l'absence des contrôles internes. D'un point de vue général, cela ne suffit pas car la notion d'autonomie doit prendre un sens plus large afin d'éviter que des entrées, comme celles aux bords, se *mêlent* à l'autonomie proprement dite, qui signifie l'absence totale de commandes.

#### 4.5.1 Degré d'autonomie

D'autres travaux (voir, par exemple, [89], [18], [64]) sur l'autonomie des trajectoires ont abouti à un caractère appelé *degré d'autonomie*. Il exprime l'étendu de la notion d'autonomie pour les systèmes n-D en y ajoutant un degré qui reflète la liberté des trajectoire. On a vu, par exemple, que pour un système de dimension finie, les seuls paramètres qu'ils peuvent être fixés librement dans les trajectoires (telles que 4.21) du système autonome sont des constantes qui correspondent aux conditions initiales. C'est ce qui explique le fait que les trajectoires sont complètement figées une fois les conditions initiales fixées. En revanche, pour les systèmes à paramètres distribués, le comportement peut contenir même des fonctions libres ou un mélange de constantes et de fonctions. Ceci s'explique, en partie, par le fait qu'une condition initiale d'un système de dimension infinie peut être toute une fonction qui dépend des  $n$  dimensions du système. Par exemple, si l'on veut décrire la température initiale dans une salle, on aura besoin d'une fonction à  $n$  variables spatiales car, à chaque point de la salle, la température peut être différente. D'autre part,

comme ces fonctions arbitraires ne dépendent pas que des variables spatiales mais aussi du temps, il vient que leur détermination peut faire intervenir aussi les conditions aux bords, ce qui donne lieu à des contrôles frontières. Si l'on prend, par exemple, la trajectoire (4.4) qui correspond à l'équation des ondes (4.3) sans contrôle interne (i.e., sans la fonction  $f$ ), on remarque bien que les fonctions arbitraires dépendent de  $(x + t)$  et  $(x - t)$  respectivement. Ainsi, elles sont déterminées soit par les conditions initiales, toutes seules, ou par un mélange de conditions initiales et conditions aux bords comme c'est détaillé dans l'Exemple 4.2. De là, nous cherchons à travers cette notion de degré d'autonomie d'avoir plus d'informations sur les trajectoires (solutions) afin de mieux comprendre le lien avec les contrôles frontières.

Pour définir formellement ce concept de degré d'autonomie, on considère un comportement  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^q$ , et un sous espace affine  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Z}^n$  qui a la plus grande dimension possible notée  $\ell$  (i.e., qu'il a  $\ell$  degrés de liberté) et  $i \in \{1, \dots, q\}$  tel que  $w_i \in \mathcal{B}$  n'est pas autonome en  $\mathcal{L}$ . Autrement dit, pour une fonction donnée  $\alpha : \mathcal{L} \rightarrow k$ , il existe  $w \in \mathcal{B}$  tel que  $w_i|_{\mathcal{L}} = \alpha$ . On définit alors le degré d'autonomie de  $\mathcal{B}$  noté  $autodeg(\mathcal{B})$  par  $n - \ell$ , qui est, par définition, égal à  $\infty$  pour  $\mathcal{B} = 0$ . Il est possible aussi de relier ce degré d'autonomie à un objet algébrique (dont nous parlerons plus loin) qui est le *degré de primalité à droite* de la matrice de présentation  $A$ .

En réalité, ce qui caractérise la liberté des trajectoires c'est plutôt  $n - autodeg(\mathcal{B})$  qui nous informe sur l'ensemble d'appartenance des inconnus qu'on doit fixer (i.e., est-ce un ensemble de constantes? De fonctions d'une seule variable? De fonctions de deux variables? etc.). Par exemple, pour une trajectoire autonome non nulle d'un système 2-D (par exemple, l'équation des ondes autonome), le  $autodeg$  peut prendre deux valeurs (1 et 2). Si le  $autodeg$  est égal à 2, cela signifie que la trajectoire contient des variables libres qui sont des constantes (car  $2 - 2 = 0$ ) et s'il est égal à 1, les trajectoires contiennent des variables libres qui sont des fonctions d'une seule variable (un axe). Évidemment, le cas où il est égal à 0 ne peut pas se présenter sinon cela voudrait dire que le comportement  $\mathcal{B}$  n'est pas autonome, i.e., qu'il contient une ou plusieurs variables libres (voir Section 4.4.2). Enfin, le degré d'autonomie se calcule à l'aide de la définition ci-dessous.

**Définition 4.2.** *Pour un comportement donné par  $\mathcal{B} = Ker(A\bullet)$ , avec  $A \in \mathbf{R}^{p \times q}$  et  $q \leq p$ , le degré d'autonomie s'écrit  $autodeg(\mathcal{B}) = primedeg(A)$ , i.e., est égal au degré de primalité de la matrice polynomiale  $A$ .*

**Exemple 4.6.** Afin de bien mettre en avant les notions d'autonomie et du degré d'autonomie introduites ci-dessus, considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) = 0, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + v(x, t) = 0, \end{cases} \quad (4.22)$$

dont la solution générale est donnée par,

$$\begin{cases} u(x, t) = f(x) e^{-t}, \\ v(x, t) = \frac{df(x)}{dx} e^{-t}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Le  $\mathbf{R}$ -système  $(\Sigma)$  correspondant à (4.22) s'écrit,

$$\Sigma : \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_t + 1 & 0 \\ \partial_x & 1 \end{bmatrix}}_{A(\partial_t, \partial_x)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0. \quad (4.24)$$

Étant donné que la matrice de présentation  $A(\partial_t, \partial_x)$  de (4.24) est de taille  $2 \times 2$ , l'idéal engendré par les mineurs d'ordre  $q = 2$  (autrement dit, l'idéal initial de Fitting  $\mathfrak{F}_0(M)$  défini en Section 4.3.1.4) coïncide avec le déterminant de la matrice  $A(\partial_t, \partial_x)$ . Il a pour expression,

$$I_{q=2} = \mathfrak{F}_0(\Sigma) = \langle \partial_t + 1 \rangle, \quad (4.25)$$

où la notation  $\langle \rangle$  indique que les éléments de  $I_q$  sont des combinaisons  $\mathbf{R}$ -linéaires des éléments entre crochets. Afin de conclure sur l'autonomie du système (4.22) au sens de la Définition 4.2, on passe tout d'abord par le calcul des points de la variété caractéristique  $V(\mathfrak{F}_0(\Sigma))$  qui sont les solutions de l'équation ci-dessous

$$\{ \partial_t + 1 = 0, \quad (4.26)$$

avec  $\partial_x$  quelconque, i.e., libre. Le système polynomial (4.26) admet donc comme solutions

$$\{(\partial_t, \partial_x) \in \mathbb{C}^2 \mid (\partial_t, \partial_x) = (-1, \lambda) \forall \lambda \in \mathbb{C}\}$$

On peut bien vérifier aussi que cela entraîne  $\text{rang}(A(-1, \lambda)) = 1 < 2$  (voir Section 4.5.2). Ainsi,

$$\mathbb{T}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \end{bmatrix} \subset \mathbb{C}^2.$$

Par le fait que  $\mathbb{T}^2 \neq \mathbb{C}^2$ , on peut donc déduire que le système (4.22) est autonome dans le sens où il ne comporte pas de contrôles internes, i.e., autonome au sens de la torsion.

A partir de là, la prochaine étape est d'employer le degré d'autonomie des trajectoires, défini précédemment, afin de conclure sur une éventuelle relation avec les contrôles frontières. Pour cela, il va falloir calculer la quantité  $(n - \text{autodeg}(\mathcal{B}))$  qui reflète le degré de liberté des trajectoires. D'après la Définition 4.2, cela revient à évaluer le degré de primalité à droite de la matrice  $A(\partial_t, \partial_x)$ . Bien que ce dernier peut être obtenu par un calcul direct, on préfère utiliser son lien avec la dimension de la variété  $V(\mathfrak{F}_0(\Sigma))$ . Plus précisément, en utilisant le principe de dualité, défini en Section 4.3.4.1, on arrive à montrer que pour une matrice  $A \in \mathbf{R}^{p \times q}$  à coefficients dans  $\mathbf{R}$ , on a

$$\text{primedeg}(A) = n - \dim(V(I_q)) = \text{codim}(V(I_q)),$$

où  $n$  est le nombre d'indéterminées de l'anneau  $\mathbf{R}$  et  $\dim(V(I_q))$ ,  $\text{codim}(V(I_q))$  la dimension, respectivement, la codimension de la variété caractéristique du module définissant le système, i.e.,  $V(\mathfrak{F}_0(M))$ . De là, on déduit que

$$(n - \text{autodeg}(\mathcal{B})) = \dim(V(\mathfrak{F}_0(\Sigma))).$$

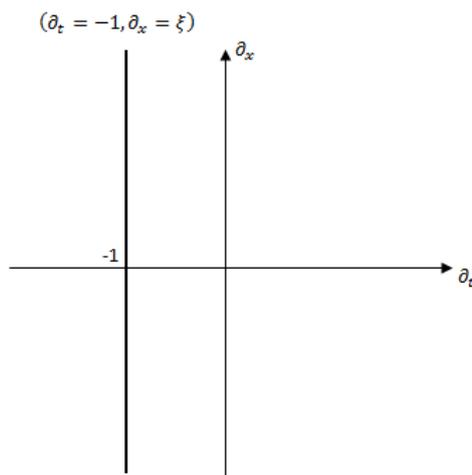


FIGURE 4.2 – Droite réelle

La dimension de la variété caractéristique  $V(\mathfrak{F}_0(\Sigma))$  étant un invariant du module  $(\Sigma)$ , différentes approches peuvent être employées pour la déterminer. En géométrie algébrique, par exemple, on se basera plutôt sur l'algèbre quotient  $\mathbb{R}[\partial_t, \partial_x]/\mathfrak{F}_0(\Sigma)$  où  $\dim(V(\mathfrak{F}_0(\Sigma)))$  sera égale à  $\dim_{K_{rull}}(\mathfrak{F}_0(\Sigma))$  ou encore au degré du polynôme d'Hilbert (voir Section A) du module  $(\Sigma)$ . Une autre façon de faire est de compter le nombre de paramètres libres paramétrant la variété caractéristique  $V(\mathfrak{F}_0(\Sigma))$  (voir par exemple [26]). Cette seconde définition donne

$$\dim(V(\mathfrak{F}_0(\Sigma))) = 1,$$

car, comme on a vu auparavant, la variété caractéristique de l'idéal (4.25) est paramétrée par un seul paramètre libre  $\xi$  tel que  $\partial_x = \xi$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ , i.e., toute la droite réelle tel qu'il est montré en Fig. 4.2.

Désormais, on peut conclure que les trajectoires du système (4.22) possèdent 1 degré de liberté, ce qui se traduit par l'existence, dans les solutions des équations, d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires d'une seule variable réelle. Ici ce sont des fonctions de  $x$  puisque c'est  $\partial_x$  qui est libre ( $\partial_x = \xi$ ) dans  $V(\mathfrak{F}_0(\Sigma))$ . En comparant ce que l'on vient de conclure avec la solution générale (4.23), on s'aperçoit que les trajectoires du système (4.22) possèdent en effet une fonction arbitraire de la variable  $x$ . De ce fait, le système n'admet pas de contrôle frontière puisque la fonction arbitraire, qui ne dépend que de  $t$ , peut être déterminée par une condition initiale de Cauchy. En effet, puisque le système (4.22) est de degré un en temps (la fonction  $u$  n'est dérivée qu'une seule fois par rapport au temps), la condition initiale  $u(x, t)|_{t=0} = \phi(x)$  conduit à une solution unique (localement) complètement déterminée. On verra dans la prochaine section qu'il existe toute une classe de systèmes dynamiques décrits par des EDPs qui n'admettent pas de contrôles frontières. Il sont dit *systèmes de type fini*.

### 4.5.2 Comportements finis et infinis

Une des conséquences du degré d'autonomie défini dans la section précédente est la classification des comportements correspondants aux systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles en deux catégories principales. Celle contenant les comportements de *dimension infinie* et celle contenant ceux de *dimension finie* ou fortement autonomes. La première catégorie, i.e., de dimension infinie, englobe tous les comportements qui vérifient  $(n - \text{autodeg}(\mathcal{B})) > 0$ , i.e., les systèmes pour lesquels les solutions des équations possèdent des fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles. C'est ce qui pourrait donner lieu à des éventuels contrôles frontières. La seconde, i.e., de dimension finie, est tel que  $(n - \text{autodeg}(\mathcal{B})) = 0$ . Autrement dit, les systèmes pour lesquels les solutions des équations ne dépendent que des constantes et, par conséquent, aucun contrôle n'est possible au niveau des frontières. Les définitions et les développements présentés, ci-dessous, mettent l'accent sur cette deuxième catégorie de comportements.

**Définition 4.3.** *Un comportement  $\mathcal{B}$  est dit de dimension finie si il est fini comme espace vectoriel sur  $k$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  [61, 29].*

Cette définition traduit le fait que chaque trajectoire s'écrit comme une combinaison  $k$  linéaire finie de fonctions entières. Par le théorème de Malgrange [43], ces fonctions entières sont des fonctions exponentielles et polynomiales ( $w_{1,\dots,q} = \sum_i p_i(x) e^{\langle x, \xi_i \rangle}$ ), où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  est le vecteur de variables,  $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in})$  est le vecteur des *points caractéristiques*, i.e., les points pour lesquels le  $\text{rang}(A(\xi_i)) < \text{rang}(A)$ ,  $p_i(x)$  sont des polynômes à  $n$  variables dont le degré de  $p_i$  dépend de la multiplicité de  $\xi_i$  et enfin  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  désigne le produit scalaire de  $k^n$ . Dans le cas 1-D, la variété caractéristique  $\mathbf{V}(I_q(A))$  est toujours *discrète*, i.e., qu'elle a un nombre *fini* de points caractéristiques qui annulent l'idéal engendré par les mineurs d'ordre  $q$  de  $A$ . En d'autres termes,  $\mathbf{V}(I_q(A))$  est un ensemble fini de  $\mathbb{C}$ , ce qui implique la finitude de la somme précédente, mais ceci n'est pas toujours le cas pour les systèmes n-D où cette variété peut être discrète comme elle peut ne pas l'être (c'est le cas, par exemple, d'une droite). A partir de là, on peut tirer la définition suivante [61, 57]

**Définition 4.4.** *Un comportement qui est donné par  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^q$  est dit fortement autonome (de dimension finie) si et seulement si la variété caractéristique  $V(I_q(A))$  est discrète (i.e., si  $\mathbf{R}/(I_q(A))$  a une dimension de Krull nulle).*

**Exemple 4.7.** Pour bien mettre l'accent sur cette notion de comportement fini, reprenons l'Exemple 4.3. Le  $\mathbf{R}$ -système  $\Sigma$  correspondant définit sur l'anneau  $\mathbf{R} = \mathbb{R}[\partial_t, \partial_x, \partial_y]$  s'écrit,

$$\Sigma : \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_t \partial_x + \partial_y \\ \partial_y \partial_x \\ \partial_t + 1 \end{bmatrix}}_{A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)} \underbrace{[u]}_w = 0. \quad (4.27)$$

Ici,  $\Sigma$  est généré par un seul élément, i.e.,  $q = 1$ , et comme le rang de la matrice de présentation  $A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$  est aussi égal à 1, le système (4.27) est autonome dans le sens où le module correspondant est de torsion. Comme,  $q = 1$ , les mineurs d'ordre  $q$  de

$A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$  sont les lignes de cette dernière, ce qui implique que l'idéal  $I_1$  engendré par les mineurs d'ordre 1 s'écrit sous la forme,

$$I_{q=1} = \mathfrak{F}_0(\Sigma) = \langle \partial_t \partial_x + \partial_y, \partial_y \partial_x, \partial_t + 1 \rangle. \quad (4.28)$$

La variété caractéristique  $\mathbf{V}(I_q(A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)))$  de l'idéal (4.28) est l'ensemble de points  $\mathbb{T}^3 \subset \mathbb{C}^3$ , tel que

$$\begin{cases} \partial_t \partial_x + \partial_y = 0, \\ \partial_y \partial_x = 0, \\ \partial_t + 1 = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

Le système polynomial (4.29) admet pour solution,

$$(\partial_t, \partial_x, \partial_y) = (-1, 0, 0),$$

avec une multiplicité de deux, i.e., une racine double. Par conséquent, l'ensemble des points de  $\mathbf{V}(I_q(A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)))$ , qui est donné par,

$$\mathbb{T}^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3,$$

est fini de cardinal<sup>1</sup> 1, ce qui signifie que la variété caractéristique  $\mathbf{V}(I_q(A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)))$  du  $\mathbf{R}$ -système (4.27) est discrète. A ce niveau, on peut, par exemple, faire une comparaison avec l'exemple précédent où les points de la variété étaient tous sur la droite de la Fig. 4.2, i.e., la variété n'était pas discrète et comportait un nombre infini de points. Par conséquent, le comportement correspondant est de dimension infinie.

Compte tenu de la Définition 4.4, il s'ensuit donc que le comportement du système (4.27) est fortement autonome ou fini. Il en résulte aussi, par le théorème de Malgrange introduit plus haut, que la trajectoire  $u(x, y, t)$  de (4.27) s'écrit,

$$u(x, y, t) = p(t, x, y) e^{\langle (-1, 0, 0), (t, x, y) \rangle} = p(t, x, y) e^{-t}.$$

De plus, comme  $(\partial_t = -1)$ , et la multiplicité deux de la racine  $(-1, 0, 0)$  vient des variables  $(x, y)$ , le polynôme  $p(t, x, y)$  est de la forme  $p(t, x, y) = k(x + y)$ , ce qui est identique à (4.7) de l'Exemple 4.3. Il est aussi remarquable que le comportement n'est paramétré que par une constante qu'une fois fixée, la trajectoire sera figée et ne pourra plus être modifiée au cours du temps. De là, on confirme le fait que les systèmes de dimension infinie ayant un comportement fini (i.e., les variétés caractéristiques de leur  $\mathbf{R}$ -systèmes correspondants sont discrètes) n'admettent pas d'autres entrées que celles dans le domaine (contrôles internes).

Il est désormais clair, à la suite de toutes ces définitions et investigations faites autour du degré d'autonomie, que la catégorie des systèmes qui est concernée par le contrôle frontière est celle ayant un comportement infinie. De plus, l'avantage qu'offre l'approche

---

1. Le cardinal d'un ensemble est défini comme étant sa taille, i.e., le nombre d'éléments sans répétition contenus dans l'ensemble.

algébrique pour analyser les trajectoires sans résoudre explicitement les équations constitue un atout majeur dans la compréhension des liens existants entre le nombre de contrôles frontières et les trajectoires du système. Ceci va dans le sens des notions présentées dans la section suivante qui apportent de nouveaux éléments sur la liberté des trajectoires.

### 4.5.3 Paramétrisation de l'espace des solutions

A partir des sections précédentes, il s'ensuit que le degré d'autonomie constitue un premier pas vers l'exploration des trajectoires des systèmes de dimension infinie. Cependant, pour une compréhension plus poussée des liens existants entre les fonctions arbitraires et les contrôles frontières, il n'est pas suffisant de compter uniquement sur le degré d'autonomie. Pour cause, ce dernier ne fournit pas suffisamment de détails sur les fonctions arbitraires qui sont présentes dans les solutions des équations. En effet, ce que l'on peut savoir à travers le degré d'autonomie c'est uniquement l'existence de fonctions arbitraires comportant un nombre maximum d'arguments. Si l'on prend, e.g., le cas de l'Exemple 4.6, on peut voir, en effet, qu'on a pu déduire qu'il existait une fonction d'une seule variable mais on ne pouvait pas savoir quel est le nombre de ces fonctions. De même, si une solution dépend, par exemple, de constantes, de fonctions d'une seule variable et de fonctions de deux variables, le degré d'autonomie indique juste l'existence des fonctions dépendantes, au maximum, de deux variables. Il ne permet ni de les dénombrer, ni de savoir qu'il existe des constantes et des fonctions d'une seule variable et encore moins les quantifier. A cet effet, un moyen plus efficace, basé sur les *caractères de Cartan* [13], vient enrichir nos connaissances sur les fonctions arbitraires qui paramètrent le comportement d'un système.

#### 4.5.3.1 Quelques hypothèses

Avant d'annoncer les résultats qui nous aideront à dénombrer les fonctions arbitraires dans un comportement, nous rappelons quelques conditions, que le système dynamique doit satisfaire, pour des raisons d'unicité (voir par exemple [77] pour plus de détails).

- i) Le système différentiel doit être involutif.
- ii) La solution en séries formelles des trajectoires peut être construite ordre par ordre.
- iii) La forme générale des trajectoires peut s'écrire sous une forme algébrique (i.e., sans dérivations ou intégrales) comme suit,

$$u_j(t, \mathbf{x}) = F_j(t, \mathbf{x}, \dots, F_\lambda(\phi_1(t, \mathbf{x}), \dots, \phi_k(t, \mathbf{x})), \dots) \quad (4.30)$$

où  $j$  fait référence à la  $j^{\text{ème}}$  trajectoire,  $F_j$  représentent des fonctions fixes et  $F_\lambda, 0 \leq \lambda \leq (n+1)$  dénote une famille de  $f_k$  fonctions arbitraires qui dépendent de  $k$  variables indépendantes. Enfin,  $\phi_i(t, \mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, k$  représentent les variables de dépendance des fonctions arbitraires, alors que  $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ . Bien évidemment, les fonctions qui dépendent de zéro variables sont des constantes.

Afin d'illustrer l'hypothèse iii), on peut prendre comme exemple la solution générale (4.4) correspondante à l'équation des ondes (avec  $f = 0$ ). Comme  $u(x, t) = h(x + ct) +$

$g(x - ct)$ , on a une représentation algébrique de la solution générale avec deux fonctions arbitraires ( $f_k = 2$ ) d'une variable chacune ( $k = 1$ ). Ainsi,  $F(a, b) = a + b$ ,  $F_1 = \{h, g\}$ ,  $F_0 = \{ \}$  et enfin  $\phi_1(t, \mathbf{x}) = x + ct$  et  $\phi_2(t, \mathbf{x}) = x - ct$ , i.e.,  $h$  dépend de  $\phi_1$  et  $g$  dépend de  $\phi_2$ .

#### 4.5.3.2 Les fonctions arbitraires

Pour un système différentiel qui vérifie les hypothèses annoncées plus haut, il est possible d'établir, d'une manière unique, le nombre de fonctions arbitraires dans la solution générale des équations ainsi que le nombre de leurs variables de dépendance. Cela repose sur le théorème ci-dessous [77],

**Théorème 4.1.** (*Cartan-Kähler*) *S'il existe une représentation par une forme algébrique de la solution générale d'un système différentiel  $(\Sigma_q)$  involutif, avec les caractères de Cartan  $\alpha_q^{(k)}$  et dont la série formelle peut se construire ordre par ordre, alors la solution générale contient  $f_k$  fonctions libres dépendantes de  $k$  variables, où les  $f_k$  peuvent être déterminés par les formules de récurrences suivantes*

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \alpha_q^{(n+1)} \\ f_k &= \alpha_q^{(k)} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{(k-1)!}{(i-1)!} \left( \alpha_q^{(i)} s_{i-k}^{(i-1)}(0) - f_i s_{i-k}^{(i-1)}(q) \right), 0 < k < (n+1). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Une telle représentation n'existe que si les solutions (i.e.,  $f_k$ ) de ces équations récurrentes sont des entiers non-négatifs.

Afin de ne pas confondre les notations, nous précisons que, dans (4.31),  $q$  correspond à l'ordre de la dérivée la plus supérieure dans les équations qui définissent le système dynamique. Quant aux  $s_i^{(k)}(\cdot)$  et le lien entre les  $\alpha_q^{(k)}$  et le polynôme d'Hilbert mentionné en Section A), nous renvoyons à [77] ou [63], où ils sont définis en détails.

Précisons aussi que le Théorème 4.1, contrairement au degré d'autonomie, ne se limite pas qu'aux systèmes qui n'ont pas de contrôles internes (i.e., autonomes au sens de la torsion). En effet, le caractère de Cartan  $\alpha_q^{(n+1)}$  donne le nombre de fonctions arbitraires, i.e. *libres*, qui dépendent de  $(n+1)$  variables (i.e., le temps  $t$  plus les variables spatiales  $x_1, \dots, x_n$ ). Celles-ci, correspondent bien aux contrôles dans le domaine et leur nombre coïncide avec le rang du module  $M$  correspondant au système (voir Section 4.4.2), i.e.,  $\alpha_q^{(n+1)} = \text{rang}_{\mathbf{R}}(M)$ . Comme les modules que nous considérons ici sont tous de torsion (car l'intérêt c'est d'établir un lien avec les contrôles frontières), i.e.,  $M/[u_{\text{domaine}}]_{\mathbf{R}}$ , le caractère de Cartan  $\alpha_q^{(n+1)}$  sera toujours nul.

#### 4.5.3.3 A propos du lien avec les contrôles frontières

D'une manière générale, on peut donc dire que, pour un système dont le comportement  $\mathcal{B}$  respecte les hypothèses annoncées précédemment, le Théorème 4.1 constitue plus qu'un complément du degré d'autonomie qu'on a défini auparavant. En effet, il permet, sans résoudre explicitement les équations du système, de dénombrer les constantes et les fonctions arbitraires d'un comportement est de savoir aussi de combien de variables

dépend chaque fonction arbitraire. Bien que ceci constitue en soi un résultat très important, il est, néanmoins, pas suffisant car quelques difficultés émergent pour établir un lien avec les contrôles frontières. Plus précisément, pour pouvoir parler d'un contrôle frontière, il faut savoir au préalable si le comportement du système (solutions) comporte des fonctions arbitraires dépendantes de la variable temps,  $t$ , comme dans le cas de la solution (4.4). Or, à travers le Théorème 4.1, on ne peut qu'évaluer le nombre de variables dont dépendent les fonctions arbitraires mais pas de connaître leurs expressions, i.e., les  $\phi_i(t, \mathbf{x})$  de (4.30) demeurent, pour le moment, inconnues. De plus, le rapport entre le nombre maximum et/ou minimum de contrôles frontières (conditions aux bords) et le nombre de fonctions arbitraires dépendantes du temps n'est pas tout à fait clair. On ignore, par exemple, si le nombre maximum de conditions aux bords que l'on peut fixer correspond systématiquement au nombre de fonctions arbitraires dépendantes du temps comme dans le cas de la solution (4.4) de l'équation des ondes. De même, il demeure pas clair aussi à quoi est lié le nombre minimum de conditions aux bords. Afin d'illustrer ces propos, considérons l'exemple de l'équation de la chaleur unidimensionnelle qui s'écrit comme suit,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4.32)$$

Bien qu'on ne dispose pas d'une forme explicite de la solution générale de (4.32), il est cependant possible d'en extraire des informations relatives aux fonctions arbitraires en se basant sur le Théorème 4.1. Le système  $(\Sigma_q)$ , i.e., (4.32), est involutif avec  $q = 2$  et  $n = 1$ . Ainsi, selon (4.31), sa solutions générale comporte deux fonctions arbitraires d'une variable chacune (voir, e.g., [77]), i.e.,  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 2$  et  $f_2 = 0$ . Étant donné que les  $f_k$  sont tous des entiers positifs ou nuls, on peut noter au passage que le comportement du système 4.32 respecte bien les hypothèses annoncées en Section 4.5.3.1.

D'un point de vue de la physique, il est connu que, pour une barre métallique par exemple, l'équation (4.32) peut être résolue rien qu'on fixant la température initiale (conditions initiales). Il est également possible d'obtenir des solutions en fixant, par exemple, les températures ou les flux de chaleur aux deux bouts de la barre (voir, e.g., [53], [23]). Ce qui conduit à déduire empiriquement que le système admet deux contrôles frontières au maximum et zéro au minimum. En revanche, si l'on se base uniquement sur les résultats obtenu par le Théorème 4.1 sur le comportement du système, il nous est difficile de se prononcer d'une manière formelle sur le nombre maximum et/ou minimum de contrôles frontières. Pour cause, on ignore tout d'abord de quelles variables dépendent les fonctions arbitraires et combien sont celles qui dépendent du temps. Ces informations servent à avoir une indication comme pour le système (4.22) où on avait conclu immédiatement qu'il n'admet pas un contrôle frontière car la fonction arbitraire ne dépendait que de  $x$ . En plus, on ne dispose pas d'un moyen formel qui à partir d'un nombre de fonctions arbitraires dépendantes du temps, associe un nombre maximum et/ou minimum de conditions aux bords. De là, on déduit finalement que la clarification du lien entre le nombre de contrôles frontières et le comportement du système doit être *précédée* de plus d'investigations permettant de préciser l'expression des  $\phi_i(t, \mathbf{x})$  de (4.30), et d'en faire le lien avec le nombre de conditions aux bords.

## 4.6 Nouvelles réflexions : quelques pistes proposées

Après avoir conclu que la clarification du lien entre le nombre de commandes aux bords et le comportement du système nécessite plus de développements, nous proposons ici quelques réflexions qui visent à élargir la vision du problème. Bien que ces réflexions n'en sont qu'à leur début, elles dégagent, tout de même, des résultats intéressants qui méritent une attention particulière. Ceci, conduirait, éventuellement, à des pistes plus prometteuses pour apporter des éléments de réponse à la question du nombre des commandes, mais aussi à d'autres questions liées aux propriétés structurelles.

La démarche proposée est inspirée du calcul opérationnel et repose en particulier sur le cadre algébrique présenté précédemment. En effet, le calcul opérationnel a été, pour longtemps, utilisé pour la résolution des équations différentielles ainsi que certaines équations aux dérivées partielles (voir par exemple [23]). Il s'agit, plus spécifiquement, du calcul opérationnel de Mikusinski (voir, e.g., [91]) et la transformée de Laplace qui font l'objet d'une utilisation assez fréquente en théorie des systèmes linéaires pour des synthèses et des analyses à partir des transferts entrée-sortie du système. Bien que leur utilisation pour les systèmes dynamiques de dimension infinie, décrits par des EDPs, se limite généralement à une seule dimension spatiale (voir, par exemple, [53] et [23]), il est intéressant d'examiner de plus près le concept des entrées une fois que les équations sont transformées.

Pour commencer, considérons l'exemple de l'équation de la chaleur (4.32). L'objet du calcul opérationnel est de donner un sens à l'équation différentielle en remplaçant un opérateur de dérivée par un opérateur  $s$  dont les propriétés sont bien définies (voir, e.g., [91]). Ainsi, l'équation (4.32) peut se transformer en,

$$\frac{d^2 \hat{u}(x, s)}{dx^2} = s \hat{u}(x, s). \quad (4.33)$$

De (4.33), on remarque bien qu'après avoir remplacé  $\frac{\partial}{\partial t}$  par l'opérateur  $s$ , l'équation (4.32) s'est transformée en une équation différentielle du second ordre en la variable  $x$ . Sa solution générale peut s'écrire sous la forme,

$$\hat{u}(x, s) = C_1(s) e^{x\sqrt{s}} + C_2(s) e^{-x\sqrt{s}}, \quad (4.34)$$

ou encore :

$$\hat{u}(x, s) = \cosh(x\sqrt{s}) \lambda_1(s) + \frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \lambda_2(s). \quad (4.35)$$

A partir de là, (4.35) peut être exploitée à plusieurs fins. Si l'on s'intéresse, par exemple, à la solution analytique de (4.32), on fixe alors  $\lambda_1(s)$  et  $\lambda_2(s)$ , par des conditions aux bords, puis on retourne aux coordonnées  $(x, t)$  via une inversion appropriée. De même, on peut aussi s'intéresser à analyser les propriétés du transfert entrée-sortie (voir, par exemple, [53]). Ici, on s'intéresse plutôt au nombre d'entrées. A cet effet, ce qui nous préoccupe dans (4.35) ce sont, en priorité, les fonctions arbitraires  $\lambda_1(s)$  et  $\lambda_2(s)$ . En effet, ces dernières sont indépendantes de la variable  $x$  et leur détermination est directement liée aux conditions supplémentaires en  $x$  que l'on impose à la fonction  $\hat{u}(x, s)$ , e.g.,  $\hat{u}(x, s)|_{x=x_0} = f_1(s)$ ,  $\hat{u}(x, s)|_{x=x_1} = f_2(s)$ . Ainsi, le nombre maximum de ces conditions

coïncide avec le nombre de fonctions libres, i.e., avec l'ordre supérieur de la dérivée par rapport à  $x$  dans l'équation différentielle (4.33). Toutefois,  $\lambda_1(s)$  et  $\lambda_2(s)$ , bien qu'elles sont vues comme des constantes par rapport à la variables  $x$  dans (4.35), elles ne sont pas des simples constantes dans la solution  $u(x, t)$ . En effet, comme l'inversion fait correspondre au paramètre  $s$  la variable  $t$ , elles sont, en réalité, des fonctions dépendantes du temps donc des contrôles d'un point de vue système. De plus, comme elles sont déterminées en imposant des conditions sur  $x$  à la fonction  $u(x, t)$ , on déduit ainsi qu'elles sont des contrôles frontières du système (4.32). Ce qui signifie que ce dernier admet donc au maximum deux contrôles frontières, et ceci est cohérent avec le fait que l'on peut contrôler la températures d'une barre métallique en agissant par les deux extrémités.

En tenant compte de ce résultat, l'idée consiste à étendre ce concept aux systèmes à paramètres distribués de dimension supérieure (i.e., n-D avec  $n > 1$ ) en se mettant dans un cadre algébrique. Plus précisément, on cherche à exploiter cette possibilité de déterminer le nombre maximum de contrôles frontières en réduisant un système d'équations aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles ordinaires. Dans un langage algébrique, ceci peut se traduire par une réduction à zéro de la dimension du module (i.e.,  $\dim(V(Iq))$ ) définissant le système en changeant la conception de l'anneau. Afin d'y voir plus clair, prenons par exemple le système,

$$(\Sigma) : [\partial_t - \partial_x^2] [u] = 0 \quad (4.36)$$

correspondant à (4.32), qui est défini sur l'anneau  $\mathbf{R} = \mathbb{R}[\partial_t, \partial_x]$ . Si l'on se met dans le même cadre que le calcul opérationnel, i.e.,  $\partial_t \equiv s$ , l'opérateur  $\partial_t$  ne sera plus vu comme une indéterminée de l'anneau  $\mathbb{R}[\partial_t, \partial_x]$ , mais plutôt comme un paramètre externe  $s \in \mathbb{R}(s)$ . En d'autres termes, le nouveau anneau sera défini comme  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbb{R}(s)[\partial_x]$  qui est un anneau à une indéterminée tout comme ceux sur lesquels sont définis les systèmes de dimension finie (voir Section A.1)). De là, le système  $\Sigma$ , i.e., (4.36) définit initialement sur  $\mathbb{R}[\partial_t, \partial_x]$ , se transforme en

$$(\hat{\Sigma}) : [s - \partial_x^2] [\hat{u}] = 0, \quad (4.37)$$

qui est défini, cette fois-ci, sur  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbb{R}(s)[\partial_x]$ , i.e., comme un systèmes de dimension finie à coefficients dans  $\mathbb{R}(s)$ . En faisant ainsi, on voit bien que la dimension du module  $(\Sigma)$ , qui était de 1 (i.e.,  $\dim(\mathbf{V}(\{\partial_t - \partial_x^2\})) = 1$ ) sur l'anneau  $\mathbb{R}[\partial_t, \partial_x]$ , s'est réduite à zéro sur l'anneau  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbb{R}(s)[\partial_x]$  (i.e.,  $\dim(\mathbf{V}(\{s - \partial_x^2\})) = 0$ ) car  $s$  n'est désormais qu'un paramètre appartenant à  $\mathbb{R}(s)$ . Ainsi,  $\partial_x = \pm\sqrt{s}$ , et si l'on applique le théorème de Malgrange introduit en Section 4.5.2, on retrouve la solution (4.34) annoncée auparavant. Notons au passage, que les racines  $\pm\sqrt{s}$  ainsi que  $C_1(s)$ ,  $C_2(s)$  de (4.34), ne sont pas nécessairement dans dans  $\mathbb{R}(s)$ , mais plutôt dans un objet algébrique qui englobe l'ensemble des fonctions de  $s$  (i.e.,  $(\sqrt{s}, e^s, \cos(s))$  et autres). Ici, on se limitera juste d'appeler cet objet,  $\mathbf{K}$  tel que,  $\mathbb{R}(s) \subseteq \mathbf{K}$ .

Bien évidemment, le fait que les  $C_i(s)$  soient dans  $\mathbf{K}$  n'empêchera pas de les dénombrer afin de faire correspondre leur nombre à celui du nombre maximum de conditions en  $x$  (contrôles frontières) que l'on peut imposer à la fonctions  $u(x, t)$ . Pour cela, l'idée consiste à faire usage de la variété caractéristique de  $\hat{\Sigma}$ . En effet, il est mentionné dans [77] que,

pour les systèmes de dimension finie, le nombre de constantes dans la solution générale coïncide avec le *degré* de la variété caractéristique noté  $\deg(\mathbf{V}(I_q(M)))$  qui coïncide à son tour avec la *cyclicité* du module  $M$  (voir par exemple [19]). Un simple calcul<sup>2</sup>, donne, pour (4.37),  $\deg\left(\mathbf{V}\left(\mathfrak{F}_0\left(\hat{\Sigma}\right)\right)\right) = 2$  ce qui signifie que le comportement de (4.37) a deux fonctions libres qui dépendent de  $s$  (i.e., vues comme des constantes par rapport à  $x$ ). Ce résultat peut aisément être vérifié à partir de (4.34).

Notons également que si l'on s'intéresse à dénombrer les conditions initiales de (4.32), il est possible de procéder de la même manière en considérant le système sur l'anneau  $\mathbb{R}(\mathbf{x})[\partial_t]$  ( $\mathbf{x} \equiv \partial_x$ ) au lieu de  $\mathbb{R}(s)[\partial_x]$ .

Ainsi, il paraît donc plausible que, dans le cas d'une seule dimension spatiale, le nombre maximum d'entrées aux bords coïncide avec le degré de la variété caractéristique correspondante au module  $M$  restreint à l'anneau  $\mathbb{R}(s)[\partial_x]$ . C'est pourquoi, dans la section qui suit on procède de la même manière afin de voir si ce raisonnement peut s'étendre au cas multidimensionnel.

#### 4.6.1 Perspectives multidimensionnelles

Les résultats cohérents obtenus dans le cas 1-D font que nos perspectives s'étendent désormais au cas général, i.e., aux systèmes multidimensionnels  $n$ -D. Plus précisément, il s'agit d'itérer la technique de réduction d'anneau, présentée précédemment, pour couvrir l'ensemble des  $n$  dimensions, i.e., pour chaque variable spatiale on écrit un système d'équations différentielles ordinaires. Ainsi, pour un système défini initialement sur l'anneau  $\mathbb{R}[\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}]$ , on le considère d'abord sur  $\mathbb{R}(s, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})[\partial_{x_n}]$  puis sur  $\mathbb{R}(s, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)[\partial_{x_{n-1}}]$  et ainsi jusqu'à  $\mathbb{R}(s, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)[\partial_{x_1}]$ . De cette manière, on espère dégager à chaque fois le nombre maximum de contrôles frontières que l'on peut appliquer au niveau de chaque variable  $x_i, i = 1, \dots, n$ . Ensuite, voir si la somme de tous les nombres maximaux obtenus correspond au nombre maximal de conditions aux bords que l'on peut imposer au système de départ (i.e., avec les  $n$  dimensions).

Pour qu'une telle démarche soit concluante, il est nécessaire de connaître, a priori, le *vrai* nombre maximum de conditions aux bords doit être connu à *priori* afin qu'il puisse servir de référence aux comparaisons. C'est la raison pour laquelle notre approche est testée sur un système qui a fait l'objet de plusieurs considérations en physique et en mathématiques, et pour lequel le nombre de conditions aux bords à fixer est connu pour un domaine de géométrie donnée. Il s'agit, plus particulièrement, du modèle décrivant la diffusion de la chaleur dans une plaque (surface) métallique d'épaisseur négligeable. Étant donné que le Laplacien s'écrit dans ce cas

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y},$$

l'équation (4.32), en deux dimensions ( $x$  et  $y$ ), prend la forme ci-dessous

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial^2 y}. \quad (4.38)$$

---

2. Il est possible aussi de calculer le degré d'une variété discrète (i.e., qui a un nombre fini de zéros) en comptant le nombre de racines avec multiplicité.

D'un point de vue général, l'équation (4.38) peut décrire l'évolution de la température  $u(x, y, t)$  dans des surfaces de différentes formes géométriques, i.e., toute forme dans le plan  $(x, y)$ . Cela est dû au fait que (4.38) admet une solution *générale* à partir de laquelle découlent plusieurs solutions particulières en fonction des conditions supplémentaires que l'on impose à l'équation (4.38). Ainsi, pour pouvoir fixer une trajectoire, on doit spécifier au moins la condition initiale  $u(t, x, y)|_{t=0}$  qui décrit le niveau initial de la température dans toute la surface métallique. Ensuite, viennent les conditions aux bords qui servent à contraindre la température  $u$  à avoir un comportement *spécifique* au niveau des frontières de la plaque (i.e., les bords du domaine  $\Omega$  dans lequel (4.38) est définie). Dans notre cas, le choix est porté sur une plaque de forme rectangulaire car, en plus d'être simple, c'est l'une des formes 2-D pour lesquelles on impose généralement le plus de conditions aux bords. Le domaine  $\Omega$  associé à l'équation (4.38) est représenté par un rectangle  $\Omega = [x_0 \ x_1] \times [y_0 \ y_1]$  de bord  $\partial\Omega$  comme le montre la Fig. 4.3. Sur chacun des quatre côtés de  $\partial\Omega$ , on peut fixer une grandeur (température, flux de chaleur ou une combinaison des deux) de telle sorte à agir sur la température  $u$  partout ailleurs dans  $\Omega$ . A titre d'exemple, les équations (4.39) montrent un cas où la température  $u$  est maintenue à  $T_1(x, t)$ ,  $T_2(y, t)$  au niveau des deux frontières 1 et 2 (voir Fig. 4.3) respectivement. Tandis qu'au niveau de 3 et 4, c'est le flux de chaleur qui est maintenu à  $F_1(x, t)$ ,  $F_2(y, t)$  respectivement. Par conséquent, il en résulte un *système de contrôle* pour lequel on a *au plus* 4 commandes ( $T_1, T_2, F_1, F_2$ ) au niveau des bords.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \\ u(x, y, t)|_{t=0} = U_0(x, y), \\ u(x, y, t)|_{y=y_1} = T_1(x, t), \\ u(x, y, t)|_{x=x_1} = T_2(y, t), \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}|_{y=y_0} = F_1(x, t), \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}|_{x=x_0} = F_2(x, t) \end{array} \right. \quad \Omega = [x_0 \ x_1] \times [y_0 \ y_1] \quad (4.39)$$

Après avoir exposé ce cas, où le nombre maximum de commandes frontières est de quatre, appliquons désormais l'approche de réduction de module sur le même exemple afin de comparer les résultats. Le  $\mathbf{R}$ -système  $\Sigma$  correspondant à (4.38) défini sur l'anneau à trois indéterminées  $\mathbb{R}[\partial_t, \partial_x, \partial_y]$  s'écrit :

$$[\partial_t - \partial_x^2 - \partial_y^2][u] = 0. \quad (4.40)$$

Comme expliqué précédemment, le passage de l'équation aux dérivées partielles (4.38) à une équation différentielle suggère la redéfinition du module (4.40) sur un anneau à une indéterminée. Pour cela, on pose, en premier,  $s \equiv \partial_t$  et  $\mathbf{y} \equiv \partial_y$  afin de traiter l'équation (4.38) comme étant une équation différentielle en  $x$  à coefficients dans  $\mathbb{R}[s, \mathbf{y}]$ . De là, le système (4.40) est vu comme un module  $\Sigma_1$ , i.e.,

$$\Sigma_1 : [s - \mathbf{y}^2 - \partial_x^2][\hat{u}] = 0, \quad (4.41)$$

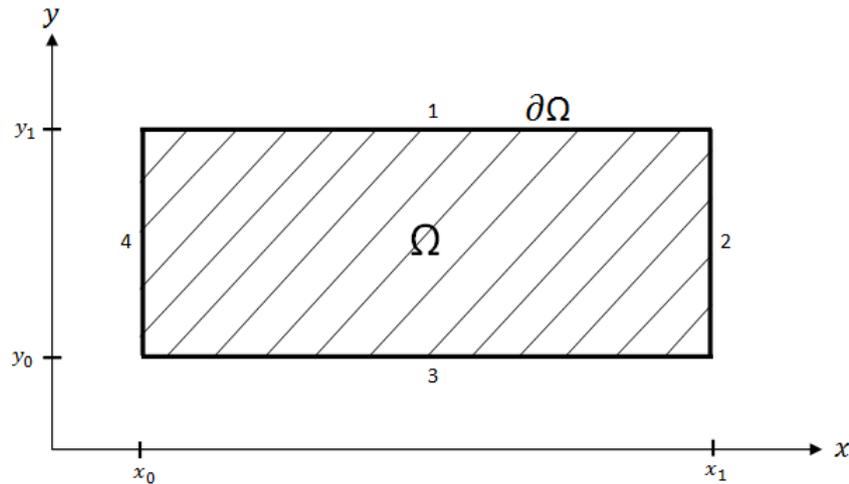


FIGURE 4.3 – Domaine rectangulaire associé à l'équation de la chaleur en 2 dimensions

sur l'anneau  $\mathbf{R}_1 = \mathbb{R}(s, \mathbf{y})[\partial_x]$  à une indéterminée. L'étape qui suit consiste à déterminer le degré de la variété  $\mathbf{V}(\mathfrak{F}_0(\Sigma_1))$  qui nous donne le nombre de fonctions libres contenues dans le comportement de  $\Sigma_1$ . En faisant un calcul similaire à celui de l'exemple précédent, on aboutit au résultat ci-dessous

$$\partial_x = \pm\sqrt{s - \mathbf{y}^2},$$

à partir duquel on déduit que  $\deg(\mathbf{V}(\mathfrak{F}_0(\Sigma_1))) = 2$ . Le comportement de (4.41) s'écrit donc,

$$\hat{u}(x, s, \mathbf{y}) = C_1(s, \mathbf{y}) e^{x\sqrt{s - \mathbf{y}^2}} + C_2(s, \mathbf{y}) e^{-x\sqrt{s - \mathbf{y}^2}}. \quad (4.42)$$

Ce résultat, indique ainsi que les fonctions  $C_1(s, \mathbf{y})$  et  $C_2(s, \mathbf{y})$ , qui sont indépendantes de la variable  $x$ , peuvent être fixées par deux conditions (*au plus*) en  $x$  que l'on ajoute à la fonction  $\hat{u}(x, s, \mathbf{y})$ . Là aussi, on fait la même remarque que précédemment quant à l'apparence de ces deux fonctions libres. En effet, à chaque fois, les fonctions  $C_k$  ne dépendent que des paramètres qui ne sont pas considérés comme des indéterminées de l'anneau réduit comme l'on peut voir, par exemple, à travers le comportement (4.42). Par conséquent, elles appartiennent à un objet algébrique plus étendu tel que celui mentionné en Section 4.6, mais ceci n'impacte pas leur quantification. Toutefois, si l'on s'intéresse à des propriétés telles que la communicabilité, l'observabilité ou les pôles, il devient alors nécessaire de prendre en compte leur appartenance à un tel l'objet.

Après avoir traité l'équation (4.38), en la réduisant à une équation différentielle en  $x$ , on change à nouveau la conception de l'anneau  $\mathbb{R}[\partial_t, \partial_x, \partial_y]$  afin de la traiter, cette fois-ci, en  $y$ . D'une manière analogue à la précédente, le système  $\Sigma_2$ , qui correspond à l'équation différentielle en  $y$ , est défini désormais sur l'anneau  $\mathbf{R}_2 = \mathbb{R}(s, \mathbf{x})[\partial_y]$  et il est donné par :

$$\Sigma_2 : [s - \mathbf{x}^2 - \partial_y^2] [\bar{u}] = 0. \quad (4.43)$$

En suivant la même procédure qu'avant, on trouve que le degré de la variété  $\mathbf{V}(\mathfrak{F}_0(\Sigma_2))$  est égal à deux, et le comportement de (4.43) a deux fonctions libres  $C_1(s, \mathbf{x})$  et  $C_2(s, \mathbf{x})$ . Ces dernières sont à fixer par un nombre maximum de deux conditions aux bords en  $y$ .

Suite à ces résultats, on déduit ainsi que la somme des nombres maximaux trouvés (i.e., en se particularisant à  $x$  puis à  $y$ ) est de quatre, i.e., deux conditions pour  $x$  et deux pour  $y$ . Ce qui coïncide avec le nombre de conditions aux bords imposées au système (4.39), i.e., une commande frontière sur chaque côté du domaine  $\Omega$  représenté par le rectangle de la Fig. 4.3. Un tel résultat est bien évidemment encourageant car il montre une cohérence même dans le cas multidimensionnel mais laisse, néanmoins, plusieurs points à clarifier. Parmi eux, les liens entre le système lorsque il est défini sur l’anneau initial à  $n$  indéterminées et lorsque il est défini sur l’anneau réduit à une indéterminée. En effet, contrairement au cas 1–D, il n’est pas garantie que le nombre de fonctions  $C_k$ , qui sort de chaque passage à une dimension, puisse effectivement être fixé dans la solution des équations de départ, i.e., dans le comportement  $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . D’une manière plus explicite, si dans (4.42), par exemple, on fixe  $C_1(s, \mathbf{y})$  et  $C_2(s, \mathbf{y})$ , par deux conditions en  $x$ , il n’est pas sûr à cause de la dimension  $y$  que l’on puisse imposer deux conditions en  $x$  à la solutions  $u(t, x, y)$  de (4.38). C’est pourquoi notre approche a encore besoin de plus d’investigations avant de pouvoir affirmer que le nombre maximum de contrôles frontières correspond à la somme des nombres maximaux obtenus par la technique de réduction d’anneau.

## 4.7 Conclusion

La problématique abordée, tout au long de ce chapitre, est celle de la détermination du nombre d’entrées des systèmes dynamiques à paramètres répartis tels que les modèles des lignes de transmission présentés au Chapitre 2. Il est établi en se mettant dans un cadre algébrique que pour ce type de systèmes, on distingue, d’une part, les entrées dans le domaine et, d’autre part, les entrées aux bords ou contrôles frontières. Pour la première variante d’entrées, leur nombre est donné par le rang du module définissant le système, tandis que pour la seconde, la réponse n’est pas encore connue et demande des investigations plus poussées. Après une présentation et une analyse des différentes notions liées à ce sujet, une nouvelle approche est proposée pour tenter de répondre à la question. Elle repose principalement sur une technique de réduction d’anneau et elle donne des résultats très encourageants tant pour le cas monodimensionnel 1–D que multidimensionnel  $n$ –D. Au stade actuel des investigations, certains points sont encore à clarifier mais l’intérêt reste accru quant aux résultats que peut porter l’investissement dans cette nouvelle direction. Et ceci, non pas uniquement pour dénombrer les contrôles frontières mais aussi pour le choix des entrées et d’autres questions liées aux propriétés structurelles.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion générale

Le travail de cette thèse constitue une démarche de clarification, d'analyse et de simplification des modèles dynamiques issus de plusieurs techniques de modélisation des différents composants des systèmes électriques interconnectés. Le tout dans un cadre structurel, basé sur une vision *systemique*, qui vise à prendre en compte toute la structure dynamique du système afin de pouvoir analyser ses propriétés d'une manière plus approfondie. Ceci a été motivé par l'insuffisance des approches classiques qui se limitent généralement à une analyse superficielle des propriétés structurelles du système à travers une étude de son comportement dynamique. Le cadre proposé a permis d'abord de clarifier avec succès le lien entre le modèle à paramètres distribués d'une ligne électrique de transmission et son approximation par un modèle en  $\pi$ . Dans le passé, uniquement la ressemblance entre les trajectoires provenant de ces deux modèles, était connue.

Après ce résultat, un cap a été franchi pour se diriger ensuite vers une méthodologie de réduction structurelle qui vise à améliorer les techniques de simplification actuelles d'une part. Et d'autre part, construire un point d'appui et un cadre méthodologique pour la simplification des modèles dynamiques des systèmes électriques modernes. Ces derniers incluent différentes évolutions en matière de production comme les énergies renouvelables, de transport comme les liaisons HVDC et de consommation comme les voitures électriques. Dans ce cadre, une nouvelle approche de réduction des modèles dynamiques, décrits par une représentation d'état, a été proposée et développée afin de répondre au mieux aux différents besoins exprimés par RTE en matière de modélisation des systèmes de transport de l'énergie électrique. Cela a permis aussi d'enrichir la thématique de réduction de modèles en proposant une solution alternative et mieux adaptée à la réduction de certaines classes de systèmes dynamiques pour lesquels l'évaluation de l'importance des dynamiques pose un réel défi. La méthode proposée est une approche mixte qui exploite, d'une part, le principe de la troncature modale pour préserver les modes et, d'autre part, l'énergie de la réponse impulsionnelle pour mieux choisir les dynamiques à garder dans le modèle réduit. Une telle combinaison a été ensuite utilisée pour satisfaire d'autres exigences comme la préservation de la structure physique du système. Cette méthode a été testée par des simulations numériques en considérant différents exemples et applications industrielles. Les résultats montrent ainsi qu'elle s'adapte aussi bien aux systèmes de transport de l'électricité qu'à d'autres systèmes dynamiques. Par ailleurs, les modèles réduits qui en résultent sont principalement destinés à l'analyse et la simulation numérique.

Pour insérer la méthode de réduction développée dans un processus structuré et

hiérarchisé, la question du choix des entrées a été posée et analysée du point de vue de l'automatique. Ceci dans le but d'éviter un mauvais choix des variables de commande qui pourrait conduire par exemples à des problèmes de causalité. La question a été investiguée dans un sens large en utilisant l'approche algébrique qui présente l'avantage d'être intrinsèque et indépendante d'une représentation particulière du système. Ce dernier est considéré en effet comme un ensemble de variables reliées par un ensemble d'équations. Ceci est important car une approche basée, par exemple, sur une représentation d'état n'offre pas les mêmes avantages puisque les entrées et les sorties du système doivent être spécifiées à l'avance. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour l'approche algébrique, où les investigations menées ont permis de clarifier certains points et d'affiner encore d'avantage la problématique. En effet, compte tenu des avancées actuelles, il est assez difficile de donner une réponse complète et affirmative à la question. Pour cause, les systèmes à paramètres distribués comme les lignes électriques peuvent avoir deux types d'entrées. D'une part, les entrées dans le domaine et, d'autre part, les entrées aux bords. Ceci complexifie considérablement la tâche par rapport aux systèmes de dimension finie qui n'ont qu'un seul type d'entrées. De ce fait, une piste de solution, basée sur une restriction successive d'anneau, a été proposée afin de favoriser une direction qui s'est montrée encourageante.

Bien évidemment, l'ensemble de ces avancées ne confère pas aux solutions proposées un caractère générique et complet. Néanmoins, cela montre les avantages de la vision systémique comme cadre méthodologique pour l'analyse et la simplification des systèmes modernes de transport de l'énergie électrique. Les résultats de cette thèse ouvrent ainsi une porte à l'entreprise RTE pour améliorer les outils actuels de gestion et de simulation numérique des grands systèmes électriques interconnectés. Il s'agit notamment de développer des algorithmes de simplification des modèles afin d'optimiser le temps de calcul et de gérer efficacement les spécificités liées au contexte moderne du transport de l'électricité. Dans la durée, ces travaux peuvent être étendus pour prendre en compte d'autres aspects (par exemple, liés à la synthèse des régulateurs, au comportement non linéaire, etc.). Ceci ouvre la porte à des perspectives très intéressantes sur le plan scientifique et applicatif.

## Perspectives

Au regard des résultats obtenus, plusieurs perspectives sont dégagées en termes d'extension, de développement, d'exploitation et d'implémentation des solutions proposées. En premier lieu, tester la méthodologie de simplification en considérant des systèmes électriques comportant plusieurs éléments connectés par un maillage assez dense. Au niveau applicatif, cela peut se faire en simplifiant, par exemple, le modèle de la ligne par la nouvelle méthode, puis l'insérer dans le système à l'aide d'un logiciel comme EMTP, Dymola ou Matlab/SimPower Toolbox<sup>3</sup>. Ces outils offrent la possibilité de connecter des éléments ayant une structure physique à des modèles purement mathématiques de type

---

3. Dans les versions récentes de MATLAB, la SimPower Toolbox est intégrée au module Simscape qui offre plus de flexibilité au niveau de la modélisation.

fonction de transfert. Ensuite, étendre la méthode de réduction développée aux cas des systèmes dynamiques ayant des pôles multiples. La limitation dans ce cas est due à l'utilisation des facteurs de participation qui doivent être définis pour les systèmes à pôles multiples afin de rendre l'extension possible. Cela permettrait de pouvoir considérer, par exemple, des systèmes avec des structures symétriques comme la connexion de plusieurs générateurs identiques (ayant les mêmes régulateurs) au même nœud dans réseau.

Par ailleurs, comme les tests de simulation ont montré des résultats favorables, il est tout à fait envisageable d'utiliser le principe de réduction développé pour traiter d'autres applications industrielles. A titre exemple, reproduire et analyser les phénomènes à l'interface Transport/Distribution qui se sont accentués depuis l'introduction significative des nouveaux moyens de production et de consommation de l'énergie électrique. Cela préoccupe tant les gestionnaires des réseaux de transport et de distribution de l'électricité. De même, il paraît aussi possible d'exploiter la technique proposée pour la réduction des sous-systèmes afin d'avoir une indication sur la structure et le niveau de détail requis pour la modélisation d'un composant donné. Plus précisément, on peut, à partir d'une structure suffisamment détaillée du composant en question, trouver toutes les parties qui participent activement dans le comportement du système. A partir de là, on peut ainsi juger si le fait d'utiliser une structure plus simple et moins détaillée n'aura pas un impact majeur sur le comportement du système. Cela permet dans le cas des liaisons HVDC, par exemple, de conclure si une modélisation détaillée du câble DC est nécessaire ou en revanche peut être omise. Pour ce faire, il suffit de voir si parmi les modes importants du système ceux liés à la dynamique du câble DC ont peu d'influence sur le comportement de l'ensemble du système. En outre, si la nouvelle approche de réduction est développée principalement pour faciliter l'analyse et la simulation, il est également intéressant de tester son attractivité pour d'autres tâches afin de mieux définir son spectre d'application. Par exemple, voir si elle est en mesure de générer des modèles réduits utiles pour la synthèse des régulateurs ou d'observateurs dynamiques.

Enfin, pour le choix des entrées, il est utile de comparer le principe de solution proposé avec d'autres approches comme Bond Graph ou Port-Hamiltonien. Cela pourrait dégager des pistes intéressantes pouvant conduire à une solution au problème. Une fois cette étape achevée, la méthode de réduction pourrait ainsi s'intégrer dans un processus global sous forme d'algorithme.

# Bibliographie

- [1] Y. Amirnaser and I. Reza. Voltage-sourced converters in power systems, 2010.
- [2] A. C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM, Philadelphia, USA, 2005.
- [3] L. Arioua. *Commande des liaisons à courant continu HVDC dans un contexte réseau*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2014.
- [4] R. Bansal. *Handbook of engineering electromagnetics*. CRC Press, USA, 2004.
- [5] A. Bensoussan, G. Da Parto, M. C. Delfour, and S. K. Mitter. *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*. Birkhäuser Boston, 2 edition, 2007.
- [6] N. Bourbaki. *Algèbre*, chapter 1-3. Hermann, 1970.
- [7] N. Bourbaki. *Algèbre*, chapter 4-7. Masson, 1981.
- [8] H. Bourles and B. Marinescu. Infinite poles and zeros : a module theoretic standpoint with application. In *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on*, volume 4, pages 4236–4241. IEEE, 1996.
- [9] H. Boulès and B. Marinescu. *Linear Time-Varying Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [10] A. S. Bregman, A. Achim, and P. A. Ahad. The maple software system. *Montreal, Quebec, Canada : McGill University*, 1992.
- [11] D. Brück, H. Elmqvist, S. E. Mattsson, and H. Olsson. Dymola for multi-engineering modeling and simulation. In *Proceedings of modelica*, volume 2002. Citeseer, 2002.
- [12] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge University Press, 1993.
- [13] É. Cartan. *Les systemes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Hermann Paris, 1971.
- [14] F.E. Cellier and E. Kofman. *Continuous System Simulation*. Springer, USA, 2006.
- [15] F. Chinesta, A. Ammar, A. Leygue, and R. Keunings. An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(11) :578–592, 2011.

- 
- [16] F. Chinesta, P. Ladeveze, and E. Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4) :395–404, 2011.
- [17] O. Christensen. *Functions, spaces, and expansions : mathematical tools in physics and engineering*. Springer Science & Business Media, London, 2010.
- [18] F. Chyzak, A. Quadrat, and D. Robertz. Effective algorithms for parametrizing linear control systems over ore algebras. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 16(5) :319–376, 2005.
- [19] S. C. Coutinho. *A primer of algebraic D-modules*, volume 33. Cambridge University Press, 1995.
- [20] R. F. Curtain and K. Morris. Transfer functions of distributed parameter systems : A tutorial. *Automatica*, pages 1101–1116, 2009.
- [21] R. F. Curtain and H.J. Zwart. *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, New York, USA, 1995.
- [22] G. Dauphin-Tanguy. *Les bond graphs*. Hermès science publications, 2000.
- [23] V. Ditkine and A. Proudnikov. *Calcul Opérationnel*. MIR, Moscou, 1979.
- [24] H. W. Dommel. Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase networks. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-88(4) :388–399, 1969.
- [25] K. Edström. *Mode initialization when simulating switched bond graphs, version II*. Linköping University Electronic Press, 1998.
- [26] M. Elkadi and B. Mourrain. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*, volume 59. Springer Science & Business Media, 2007.
- [27] D. Ferrand. Les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes sur un corps sont libres. In *Séminaire N. Bourbaki exp. 484*, pages 202–221, 1975-1976.
- [28] M. Fliess. Some basic structural properties of generalized linear systems. *Systems Control Letters*, 15 :391–396, 1990.
- [29] E. Fornasini, P. Rocha, and S. Zampieri. State space realisation of 2-d finite-dimensional behaviours. *SIAM J. Control and Optim*, 31 :1502–1517, November 1993.
- [30] J. N. Franklin. *Matrix Theory*. Dover Edition, USA, 2000.
- [31] F. Garofalo, L. Iannelli, and F. Vesca. Participation factors and their connection to residues and relative gain array. In *Proc. of the 15th triennial world congress of the international federation of automatic control (IFAC)*, pages 21–26, 2002.
-

- 
- [32] D. Givoli, P. E. Barbone, and I. Patlashenko. Which are the important modes of a subsystem? *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 59 :1657–1678, 2004.
- [33] K. Glover, R. F. Curtain, and J. R. Partington. Realisation and approximation of linear infinite-dimensional systems with error bounds. *SIAM J. Control and Optimization*, 26(4) :863–898, July 1988.
- [34] S. Gugercin, D.C. Sorensen, and A.C. Antoulas. A modified low-rank smith method for large-scale lyapunov equations. *Numerical Algorithms*, 32(1) :27–55, 2003.
- [35] M. Ilic and J. Zaborszky. *Dynamics and control of large electric power systems*. Wiley New York, 2000.
- [36] B. Jacob and H. Zwart. *Linear port-Hamiltonian systems on infinite-dimensional spaces*, volume 223. Springer Science & Business Media, 2012.
- [37] M. Janet. *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*. Gauthier-Villars, Paris, France, 1930.
- [38] G. Kerschen, J-C. Golinval, A. F. Vakakis, and L. A. Bergman. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : an overview. *Nonlinear dynamics*, 41(1-3) :147–169, 2005.
- [39] P. Kundur, N. J. Balu, and M. G. Lauby. *Power system stability and control*, volume 7. McGraw-hill New York, 1994.
- [40] S. Lefebvre. Reduced order transmission line models for power system analysis. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 21(3) :211–223, 1999.
- [41] B. Ya. Levin. *Lectures on entire functions*. American mathematical society, USA, 1996.
- [42] J. Machowski, J. W. Bialek, and J. R. Bumby. *Power System Dynamics and Stability*. John Wiley & Sons Ltd, England, 1997.
- [43] B. Malgrange. Sur les systèmes différentiels à coefficients constants. In *Séminaire Jean Leray, exp. 7*, pages 1–13, 1961-1962.
- [44] B. Malgrange. systèmes différentiels à coefficients constants. In *Séminaire N. Bourbaki, exp. 246*, pages 1–11, 1962-1963.
- [45] M. S. Mamis and M. Köksal. Some renovations in transient analysis of transmission line by state-space techniques. *Mathematical & Computational Applications*, 1(1) :181–190, 1996.
- [46] B. Marinescu, B. Mallem, and L. Rouco. Large-scale power system dynamic equivalents based on standard and border synchrony. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 25(4) :1873–1882, 2010.
-

- 
- [47] M. Matthes. *Numerical Analysis of Nonlinear Partial Differential-Algebraic Equations : A Coupled and an Abstract Systems Approach*. Logos Verlag, Berlin, Germany, 2012.
- [48] V. Mehrmann and T. Stykel. Balanced truncation model reduction for large-scale systems in descriptor form. In Peter Benner, DannyC. Sorensen, and Volker Mehrmann, editors, *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, volume 45 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 83–115. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [49] B. Meyer and M. Stubbe. Eurostag, a single tool for power system simulation. *Transmission & Distribution International*, pages 47–52, 1992.
- [50] G. Miano and A. Maffucci. *Transmission Lines and Lumped Circuits*. Academic Press, USA, 2001.
- [51] F. Milano. *Power system modelling and scripting*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [52] B. C. Moore. Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1) :17–32, February 1981.
- [53] H. Mounier. *Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retard : Aspects théoriques et pratiques*. PhD thesis, Université Paris Sud, 1995.
- [54] T. Myint-U and L. Debnath. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser, Boston, USA, fourth edition, 2007.
- [55] D. G. Northcott. *Finite Free Resolutions*, volume 71. Cambridge University Press, 1976.
- [56] U. Oberst. Multidimensional constant linear systems. *Acta Applicandae Mathematicae*, 20 :1–175, 1990.
- [57] U. Oberst. Finite dimensional systems of partial differential or difference equations. *Advances In Applied Mathematics*, 17 :337–356, 1996.
- [58] M. R. Opmeer. Model reduction for distributed parameter systems : A functional analytic view. In *Proc. of the IEEE American Control Conference (ACC)*, pages 1418–1423. IEEE, 2012.
- [59] K. R. Padiyar. *Analysis of subsynchronous resonance in power systems*, volume 471. Springer Science & Business Media, 1998.
- [60] C. R. Paul. *Analysis of multiconductor transmission lines*. John Wiley & Sons, 2 edition, 2008.
- [61] H. K. Pillai and S. Shankar. A behavioral approach to control of distributed systems. *SIAM J. Control Optim*, 37 :388–408, 1998.
-

- 
- [62] H. K. Pillai and J. Willems. The behavioural approach to distributed systems. In *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, December 1999.
- [63] J.-F. Pommaret. *Partial Differential Control Theory*, volume 1, 2. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [64] J. F. Pommaret and A. Quadrat. Algebraic analysis of linear multidimensional control systems. *IMA Journal of Mathematical control and Information*, 16(3) :275–297, 1999.
- [65] J. F. Pommaret and A. Quadrat. Localization and parametrization of linear multidimensional control systems. *Systems and Control Letters*, 37 :247–260, 1999.
- [66] C. Poussot-Vassal and P. Vuillemin. An iterative eigenvector tangential interpolation algorithm for large-scale lti and a class of lpv model approximation. In *Proceedings of the European Control Conference*, pages 4490–4495, 2013.
- [67] G. N. Ramaswamy, G. C. Verghese, L. Rouco, C. Vialas, and C. L. Demarco. Synchrony, aggregation and multi-area eigenanalysis. *IEEE Trans. Power Syst.*, 10(4) :1986—1993, Nov. 1995.
- [68] A. I. Ramírez. *Advanced Models for Electromagnetic Transient Simulation of Power Transmission Lines*. PhD thesis, Université de Guadalajara, Mexico, 2001.
- [69] J-P. Richard, H. Mounier, A. Achour, L. Belkoura, S. B. Attia, M. Dambrine, M. Ksouri, W. Perruquetti, J. Rudolph, S. Salhi, et al. *Mathématiques pour l'ingénieur*. 2009.
- [70] P.J. Ripert, P. Chevrel, and D. Lefebvre. Physical simplification of mimo linear models from elementary components manipulations. In *2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC'04)*, 2004.
- [71] J. P. Rodriguez. *Dynamic Averaged Models of VSC-Based HVDC Systems for Electromagnetic Transient Programs*. PhD thesis, Université de Montréal, 2013.
- [72] G. Rogers. *Power System Oscillations*. Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 2000.
- [73] J. Rommes. *Methods for eigenvalue problems with applications in model order reduction*. PhD thesis, Utrecht University, 2007.
- [74] W. C. Rowley. Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(03) :997–1013, 2005.
- [75] F. R. Saragih, R. Bambang, and Y. Soeharyadi. Model reduction for infinite dimensional systems using reciprocal transformation. In *In 7th Asian Control Conference*, pages 1426–1431, 2009.
- [76] W. H. A. Schilders, H. A. van der Vorst, and J. Rommes. *Model Order Reduction : Theory, Research Aspects and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Germany, 2008.
-

- 
- [77] M. W. Seiler. *Involutions : The formal theory of differential equations and its applications in computer algebra*, volume 24. Springer Science & Business Media, 2009.
- [78] D. Serre. *Installations Electriques HTA : Reglementation, Structure, Protections*. Ed. Techniques Ingénieur, 2008.
- [79] J. R. Singler. Balanced pod for model reduction of linear pde systems : convergence theory. *Numerische Mathematik*, 121(1) :127–164, 2012.
- [80] J. R. Singler. Model reduction of linear pde systems : A continuous time eigensystem realization algorithm. In *American Control Conference*, 2012.
- [81] G. Sivasankar and Dr M. Sailaja. Decoupled stationary reference frame pll for interconnecting renewable energy systems to the grid. *International Journal of Engineering Research and Technology (IJERT)*, 3(8) :447–453, 2014.
- [82] G. Sybille, P. Brunelle, R. Champagne, L. Dessaint, H. Lehuy, and P. Mercier. *Simpowersystems user’s guide*, 2004.
- [83] L. Thibault, P. Avitabile, J. Foley, and J. Wolfson. Equivalent reduced model technique development for nonlinear system dynamic response. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36(2) :422–455, 2013.
- [84] D.M. Triesenberg. An efficient state variable transmission line model. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-98(2) :484–492, March 1979.
- [85] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and Control for Operator Semigroups*. Birkhäuser Verlag AG, Basel, Switzerland, 2009.
- [86] A. Varga. Enhanced modal approach for model reduction. *Mathematical Modelling of Systems*, 1(2) :91–105, 1995.
- [87] J. C. Willems. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 36 :259–294, 1991.
- [88] J. Wood, U. Oberst, E. Rogers, and D. H. Owens. A behavioral approach to the pole structure of one-dimensional and multidimensional linear systems. *SIAM J. Control Optim*, 38 :627–661, 2000.
- [89] J. Wood, E. Rogers, and D. H. Owens. A formal theory of matrix primeness. *Math. Control Signals Systems*, 11 :40–78, 1998.
- [90] J. Wood, E. Rogers, and D. H. Owens. Controllable and autonomous nd linear systems. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 10 :33–69, 1999.
- [91] K. Yosida. *Operational Calculus*. Springer-Verlag, 1984.
- [92] D. C. Youla and P. F. Pickel. The quillen-suslin theorem and the structure of n-dimensional elementary polynomial matrices. *IEEE Transactions On Circuits and Systems*, Cas-31 :513–518, 1984.
-

- [93] R. M. Young. *An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series, Revised Edition, 93*. Academic Press, 2001.
- [94] P. Zaris, J. Wood, and E. Rogers. Controllable and uncontrollable poles and zeros of nd systems. *Math. Control Signals Systems*, 14 :281–298, 2001.
- [95] E. Zerz. Primeness of multivariate polynomial matrices. *Systems and Control Letters*, 29 :139–145, 1996.
- [96] E. Zerz. *Topics in multidimensional linear systems theory*. Springer Science & Business Media, Germany, 2000.
- [97] X-P. Zhang and H. Chen. Analysis and selection of transmission line models used in power system transient simulations. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 17(4) :239–246, 1995.
- [98] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of robust control*, volume 180. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998.

## Annexe A

# Production scientifique

- M. Belhocine, B. Marinescu. A systemic viewpoint on the approximation of a power transmission line model. Accepted for publication in the 20<sup>th</sup> *IFAC World Congress*, July 2017.
- M. Belhocine, B. Marinescu. A mix balanced-modal truncations for power systems model reduction. In proceedings of *IEEE European Control Conference (ECC)*, pages 2721-2726, 2014.
- M. Belhocine, B. Marinescu. On the connection between used models of power transmission lines. In proceedings of *IEEE Power and Energy Society General Meeting (PES)*, pages 1-5, 2013.

# Annexe B

## B.1 Modèle à paramètres répartis de la ligne

Au début, rappelons tout d'abord les deux équations ci-dessous

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - Ri(x,t) \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \end{cases}, \quad (\text{B.1})$$

qui décrivent l'évolution de la tension et du courant dans une ligne de longueur  $\ell$ . Pour aboutir à une représentation entrée-sortie faisant apparaître soit la tension  $v(x,t)$ , comme dans (2.10), ou le courant  $i(x,t)$ , il suffit d'appliquer en premier la règle de permutation suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Ensuite, ajouter les conditions aux bords qui définissent l'état de la ligne (e.g., ouverte ou en charge). Dans le cas d'une ligne ouverte à l'extrémité  $x = \ell$ , on a donc  $i(x,t)|_{x=\ell} = 0$  qui une fois remplacée dans la première équation de (B.1) donnera

$$\left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\ell} = 0.$$

De là, on peut donc réécrire (B.1), soit comme

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial^2 x} = -L \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \right) - R \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \right) = -C \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial^2 t} \end{cases}, \quad (\text{B.2})$$

ou inversement, i.e.,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) = -L \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial^2 t} - R \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial^2 x} = -C \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right) \end{cases}. \quad (\text{B.3})$$

Ainsi, en appliquant la règle de commutation décrite précédemment, on peut soit combiner les équations de (B.2) avec la deuxième équation de (B.1) pour éliminer le courant  $i(x,t)$ ,

ce qui donne au final

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial^2 x} - LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial^2 t} - RC \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0,$$

Ou bien, combiner uniquement les deux équations de (B.3) pour éliminer, cette fois-ci, la tension  $v(x, t)$  et aboutir à l'équation ci-dessous,

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial^2 x} - LC \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial^2 t} - RC \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = 0,$$

qui est bien évidemment la même que la précédente, mais ce qui fait la différence ce sont les conditions aux bords qui ne sont pas les mêmes pour la tension que pour le courant.

Après avoir donné ces propriétés, revenons désormais au système (2.12) afin de montrer que l'opérateur  $\mathcal{A} = \mathfrak{A}|_{\ker(\mathfrak{B})}$  génère un  $C_0$ -semigroup, et donner son expression par la suite. Pour cela, montrons en premier que la forme

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z = \left\langle \sqrt{\alpha} A_0^{\frac{1}{2}} f_1, \sqrt{\alpha} A_0^{\frac{1}{2}} g_1 \right\rangle_X + \langle f_2, g_2 \rangle_X, \quad (\text{B.4})$$

définit bien un produit scalaire dans  $Z = D\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) \oplus X$ , avec  $X = L^2(0, \ell)$ . En se basant sur la Définition A.2.23 de [21], qui regroupe les propriétés d'un produit scalaire, on peut facilement déduire que (B.4) vérifie bien les deux premières conditions. Quant à la dernière condition, on a

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z = \left\langle \sqrt{\alpha} A_0^{\frac{1}{2}} f_1, \sqrt{\alpha} A_0^{\frac{1}{2}} f_1 \right\rangle_X + \langle f_2, f_2 \rangle_X = \left( \alpha \left\| A_0^{\frac{1}{2}} f_1 \right\|_X^2 + \|f_2\|_X^2 \right) \geq 0. \quad (\text{B.5})$$

Et comme  $\left(A_0^{\frac{1}{2}} f_1 = 0\right) \Rightarrow f_1 = \text{cste}$ , on a nécessairement  $f_1 = 0$  car  $f_1 \in D\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$ , i.e.,  $f_1(0) = 0$ . De là, on déduit donc que  $\langle f, f \rangle_Z = 0$  uniquement si  $f = 0$ , i.e.,  $f_1 = f_2 = 0$ , ce qui prouve au final que (B.4) est un produit scalaire dans  $Z$ . Passons maintenant à l'opérateur  $\mathcal{A}$  pour prouver qu'il génère un  $C_0$ -semigroup dans  $Z$ . Comme mentionné en Section 2.4.1.1, et dans [21], les conditions suffisantes pour cela est d'avoir l'opérateur  $\mathcal{A}$  fermé est qui vérifie les deux inégalités ci-dessous

$$\begin{cases} \Re(\langle \mathcal{A}f, f \rangle) \leq k \|f\|^2, \\ \Re(\langle \mathcal{A}^* f, f \rangle) \leq k \|f\|^2. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Pour la fermeture, il suffit de montrer qu'il existe un opérateur  $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(Z)$  tel que  $(\mathcal{A} + \mathcal{R})$  est fermé (voir Théorème A.3.46 de [21]). Soit

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} (\lambda I_{1 \times 1} - A_0)^{-1} & \frac{1}{\alpha} (\lambda I_{1 \times 1} - A_0)^{-1} \\ I_{1 \times 1} & 0 \end{pmatrix},$$

un opérateur borné avec  $\lambda \in \rho(A_0)$ , i.e., dans le spectre de  $A_0$ . Il est donc facile de vérifier

que,

$$\left( \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_{1 \times 1} \\ -\alpha A_0 & \beta \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha \lambda I_{1 \times 1} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{R}} \right) Q = I_{2 \times 2}.$$

Ce qui prouve que  $(\mathcal{A} + \mathcal{R})$  est fermé car il admet un inverse et donc  $\mathcal{A}$  est également fermé. Revenons maintenant aux conditions (B.6). Premièrement, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -I_{1 \times 1} \\ \alpha A_0 & \beta \end{pmatrix}}^{\mathcal{K}} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z &= -\alpha \left\langle A_0^{\frac{1}{2}} f_1, A_0^{\frac{1}{2}} g_2 \right\rangle_X + \alpha \left\langle A_0^{\frac{1}{2}} f_2, A_0^{\frac{1}{2}} g_1 \right\rangle_X + \beta \langle f_2, g_2 \rangle_X. \\ &= \langle \mathcal{A}f, g \rangle_Z \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'opérateur  $\mathcal{K}$  est bien l'adjoint de  $\mathcal{A}$ , i.e.,  $\mathcal{A}^* = \mathcal{K}$  avec  $D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A})$ . Ensuite, pour (B.6), on vérifie aisément que

$$\Re(\langle \mathcal{A}f, f \rangle) = \Re(\langle \mathcal{A}^*f, f \rangle) = \beta \|f_2\|_X^2 \leq 0 \quad \text{car} \quad \beta < 0.$$

D'où la preuve que l'opérateur  $\mathcal{A}$  génère bien un  $C_0$ -semigroup  $\mathcal{S}(t)$  dans  $Z$ . Afin de donner son expression, calculons d'abord les valeurs et les fonctions propres de  $\mathcal{A}$  qui sont solutions de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha A_0 & \beta \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{pmatrix}}_{\Phi_n} = \lambda_n \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{pmatrix}}_{\Phi_n}.$$

On aboutit, ensuite, au système suivant d'équations

$$\begin{cases} \phi_{2n} = \lambda_n \phi_{1n} \\ -\alpha A_0 \phi_{1n} + \beta \phi_{2n} = \lambda_n \phi_{2n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{2n} = \lambda_n \phi_{1n} \\ \frac{d^2 \phi_{1n}(x)}{dx^2} + \left( \frac{\beta \lambda_n - \lambda_n^2}{\alpha} \right) \phi_{1n}(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

dont la deuxième équation de (B.7) est appelée équation de *Sturm-Liouville* (voir, e.g., [54]). Sa solution générale s'écrit sous la forme

$$\phi_{1n}(x) = k_1 \cosh(\gamma(s)x) + k_2 \frac{\sinh(\gamma(s)x)}{\gamma(s)}, \quad (\text{B.8})$$

avec  $\gamma(s) = \sqrt{\frac{\beta \lambda_n - \lambda_n^2}{\alpha}}$  et  $k_1, k_2$  qui sont à déterminer à partir des conditions supplémentaires.

En effet, comme  $\phi_{1n} \in D(A_0)$ , elle vérifie en plus,  $\phi_{1n}(0) = 0$  et  $\frac{d}{dx} \phi_{1n}(\ell) = 0$  (voir Section 2.4.1.1). Ce qui conduit à écrire

$$\begin{cases} \phi_{1n}(0) = 0 \\ \frac{d}{dx}\phi_{1n}(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 \cosh(\gamma(s)\ell) = 0 \end{cases}.$$

Et comme  $k_2 \neq 0$  (sin non on aurait  $\phi_{1n}(x) \equiv 0$ ), on se retrouve avec l'équation suivante,

$$\cosh(\gamma(s)\ell) = 0,$$

dont la solution est,

$$\gamma(s)\ell = j\frac{(2n-1)\pi}{2} \Rightarrow \lambda_n^2 - \beta\lambda_n + \alpha \left( \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \right)^2 = 0, \quad n = 1, \dots, \infty. \quad (\text{B.9})$$

Finalement, à partir de (B.9), on a deux solutions pour  $\lambda_n$  qui sont :

$$\lambda_{n_1} = \frac{\beta}{2} + \frac{j}{2} \sqrt{4\alpha \left( \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \right)^2 - \beta^2}, \quad \text{et} \quad \lambda_{n_2} = \frac{\beta}{2} - \frac{j}{2} \sqrt{4\alpha \left( \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \right)^2 - \beta^2}.$$

Mentionnons juste que dans (B.9), on a pris  $n \in \mathbb{N}^*$  pour deux raisons. Premièrement, le cas où  $n$  est négatif sont absorbés par la puissance carrée. Deuxièmement, on a choisi d'écrire  $(2n-1)$  au lieu de  $(2n+1)$ , i.e.,  $n$  commence à partir de 1 au lieu de 0. Par ailleurs, comme  $\phi_{2n} = \lambda_n \phi_{1n}$ , les deux familles de valeurs propres  $\lambda_{n_1}$  et  $\lambda_{n_2}$  conduisent automatiquement à deux familles de fonctions propres. C'est pour cela que l'on retiendra pour la suite l'écriture  $\Phi_n = \{\phi_{n_1}, \phi_{n_2}\}$  où

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_{n_1}(x) = \lambda_{n_1}\phi_{n_1}(x) \\ \mathcal{A}\phi_{n_2}(x) = \lambda_{n_2}\phi_{n_2}(x) \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \phi_{n_1} = \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_1}\phi_{1n_1} \end{pmatrix}, \quad \phi_{n_2} = \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_2}\phi_{1n_1} \end{pmatrix}.$$

A partir de là, reste ainsi à trouver l'expression de  $\phi_{1n_1}$  qui découle directement de (B.8) en remplaçant  $\gamma(s)$  par  $j\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}$ . Plus précisément, on a

$$\phi_{1n_1} = k_2 \frac{2\ell}{j(2n-1)\pi} \sinh\left(j\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x\right) \Rightarrow \phi_{1n_1} = k_2 \frac{2\ell}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x\right).$$

Sur cette dernière expression, on remarque bien qu'il y a toujours la constante  $k_2$  qui n'est pas encore déterminée. En effet, comme il s'agit d'une constante quelconque, différentes manières peuvent être utilisées pour l'obtenir. Dans notre cas, elle est calculée de telle sorte à normaliser la famille de fonction  $\phi_{n_1}$  dans  $Z$ , i.e.,  $k_2$ , tel que

$$\langle \phi_{n_1}, \phi_{n_1} \rangle_Z = 1.$$

Ici, on a

$$\langle \phi_{n_1}, \phi_{n_1} \rangle_Z = k_2^2 \ell \alpha,$$

ce qui conduit à  $k_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha\ell}}$  et donne au final,

$$\phi_{1n_1}(x) = \frac{\ell\sqrt{2\alpha}}{\alpha(2n-1)\pi} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x\right)}_{\varphi_n(x)}.$$

Suite à ce résultat, on déduit aisément les expressions ci-dessous, dont il sera fait usage par la suite,

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{n_1}, \phi_{m_1} \rangle_Z &= \delta_{nm}, \\
\langle \phi_{n_2}, \phi_{m_2} \rangle_Z &= \delta_{nm}, \\
\langle \phi_{n_1}, \phi_{m_2} \rangle_Z &= \beta \lambda_{n_1} \frac{2\ell^2}{\alpha ((2n-1)\pi)^2} \delta_{nm}, \\
\langle \phi_{n_2}, \phi_{m_1} \rangle_Z &= \beta \lambda_{n_2} \underbrace{\frac{2\ell^2}{\alpha ((2n-1)\pi)^2}}_{\gamma_n} \delta_{nm}.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

A ce stade, on cherche à écrire chaque élément  $z \in Z$  comme une combinaison linéaire des éléments de  $\Phi_n$  i.e.,

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n_1} \phi_{n_1} + c_{n_2} \phi_{n_2}). \tag{B.11}$$

Si tous les éléments de  $\Phi_n$  formaient une base *orthonormal*, le problème serait résolu car on peut facilement montrer que  $c_{n_1}$  et  $c_{n_2}$  s'écrivent, dans un tel cas, d'une manière unique comme  $c_{n_1} = \langle z, \phi_{n_1} \rangle_Z$  et  $c_{n_2} = \langle z, \phi_{n_2} \rangle_Z$ . Cependant, dans notre cas, on voit très bien, à partir de (B.10), que les deux dernières expressions ne sont pas égales à  $\delta_{nm}$ , i.e.,  $\{\phi_{n_1}, \phi_{n_2}\}$  n'est pas une base orthonormal. Bien évidemment, ceci est parfaitement justifiable car l'opérateur  $\mathcal{A}$  n'est pas *auto-adjoint* dans notre cas (i.e.,  $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}^*$  pour  $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}^*)$ ) comme on a eu l'occasion de le constater plus haut. C'est pour cette raison qu'il existe un autre moyen pour exprimer  $c_{n_1}$  et  $c_{n_2}$  de (B.11) appelé *bases de Riez* (voir, e.g., [21] ou [85] pour les définitions). Le principe consiste à trouver une famille  $\{\psi_{n_1}, \psi_{n_2}\}$  de telle sorte à ce que  $\{\phi_{n_1}, \psi_{n_2}\}$  et  $\{\phi_{n_2}, \psi_{n_1}\}$  soient *biorthogonales*, i.e.,

$$\langle \phi_{n_1}, \psi_{m_2} \rangle_Z = \langle \phi_{n_2}, \psi_{m_1} \rangle_Z = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}^*.$$

Ce qui permet au final d'exprimer  $z$  par

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} (\langle z, \psi_{n_2} \rangle \phi_{n_1} + \langle z, \psi_{n_1} \rangle \phi_{n_2}), \tag{B.12}$$

ou inversement comme dans (2.18). Néanmoins, pour pouvoir écrire (B.12), il est nécessaire que la famille  $\Phi_n = \{\phi_{n_1}, \phi_{n_2}\}$  forme une base de Riez, i.e., qu'elle vérifie les deux conditions ci-dessous [21] :

- 1)  $\overline{\text{span}}_{n \in \mathbb{N}^*} \{\Phi_n\} = Z$  ou d'une manière équivalente, la famille  $\Phi_n$  est maximale dans  $Z$ .
- 2) Il existe deux constantes positives  $m, M$  tel que pour n'importe quel  $N \in \mathbb{N}$  et n'importe quels scalaires  $\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2}$ ,  $n = 1, \dots, N$ , on ait

$$m \sum_{n=1}^N (|\gamma_{n_1}|^2 + |\gamma_{n_2}|^2) \leq \left\| \sum_{n=1}^N (\gamma_{n_1} \phi_{n_1} + \gamma_{n_2} \phi_{n_2}) \right\|_Z^2 \leq M \sum_{n=1}^N (|\gamma_{n_1}|^2 + |\gamma_{n_2}|^2) \tag{B.13}$$

Ainsi, pour montrer que la famille  $\Phi_n$  forme une base de Riez dans notre cas, commençons en premier par vérifier que  $\{\phi_{n_1}, \phi_{n_2}\}$  est maximale. Pour cela, supposons qu'il existe un élément  $z \in Z$  qui est orthogonal à tous les éléments de  $\Phi_n$ , i.e.,  $\langle z, \phi_{n_1} \rangle_Z = \langle z, \phi_{n_2} \rangle_Z = 0$ . En développant ces deux expressions on a donc,

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_1} \phi_{1n_1} \end{pmatrix} \right\rangle_Z &= \alpha \left\langle A_0^{\frac{1}{2}} z_1, A_0^{\frac{1}{2}} \phi_{1n_1} \right\rangle_X + \langle z_2, \lambda_{n_1} \phi_{1n_1} \rangle_X = 0, \\ \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_2} \phi_{1n_1} \end{pmatrix} \right\rangle_Z &= \alpha \left\langle A_0^{\frac{1}{2}} z_1, A_0^{\frac{1}{2}} \phi_{1n_1} \right\rangle_X + \langle z_2, \lambda_{n_2} \phi_{1n_1} \rangle_X = 0. \end{aligned}$$

La soustraction de ces deux dernières relations conduit ainsi au résultat suivant,

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_1} \phi_{1n_1} \end{pmatrix} \right\rangle_Z - \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_2} \phi_{1n_1} \end{pmatrix} \right\rangle_Z = (\bar{\lambda}_{n_1} - \bar{\lambda}_{n_2}) \frac{\ell \sqrt{2\alpha}}{\alpha (2n-1) \pi} \langle z_2, \varphi_n \rangle_X = 0,$$

à partir duquel on déduit facilement que  $z_2 = 0$  car  $\varphi_n(x)$  est maximale dans  $X$ . Par le même argument, on trouve également que  $z_1 = 0$ . A partir de là, on a donc  $z = 0$  car  $z_1 = z_2 = 0$ , ce qui prouve ainsi que la famille  $\{\phi_{n_1}, \phi_{n_2}\}$  est maximale dans  $Z$ . Une fois cette première condition vérifiée, on passe désormais à (B.13). On a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N (\gamma_{n_1} \phi_{n_1} + \gamma_{n_2} \phi_{n_2}) \right\|_Z^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^N (\gamma_{n_1} \phi_{n_1} + \gamma_{n_2} \phi_{n_2}), \sum_{m=1}^N (\gamma_{m_1} \phi_{m_1} + \gamma_{m_2} \phi_{m_2}) \right\rangle_Z \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^N \gamma_{n_1} \phi_{n_1}, \sum_{m=1}^N \gamma_{m_1} \phi_{m_1} \right\rangle_Z + \left\langle \sum_{n=1}^N \gamma_{n_1} \phi_{n_1}, \sum_{m=1}^N \gamma_{m_2} \phi_{m_2} \right\rangle_Z \\ &\quad + \left\langle \sum_{n=1}^N \gamma_{n_2} \phi_{n_2}, \sum_{m=1}^N \gamma_{m_1} \phi_{m_1} \right\rangle_Z + \left\langle \sum_{n=1}^N \gamma_{n_2} \phi_{n_2}, \sum_{m=1}^N \gamma_{m_2} \phi_{m_2} \right\rangle_Z \end{aligned}$$

De l'équation ci-dessus, et en utilisant les propriétés (B.10), on trouve l'égalité suivante,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N (\gamma_{n_1} \phi_{n_1} + \gamma_{n_2} \phi_{n_2}) \right\|_Z^2 &= \sum_{n=1}^N \left( |\gamma_{n_1}|^2 + |\gamma_{n_2}|^2 + \overbrace{\beta \lambda_{n_1} \frac{2\ell}{\alpha ((2n-1)\pi)^2} \gamma_{n_1}}^{r_1} \underbrace{\bar{\gamma}_{n_2}}_{\bar{r}_2} \right. \\ &\quad \left. + \overbrace{\beta \lambda_{n_2} \frac{2\ell}{\alpha ((2n-1)\pi)^2} \bar{\gamma}_{n_1}}^{\bar{r}_1} \underbrace{\gamma_{n_2}}_{r_2} \right) \end{aligned}$$

qui vérifie aussi l'inégalité ci-dessous

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N (\gamma_{n_1} \phi_{n_1} + \gamma_{n_2} \phi_{n_2}) \right\|_Z^2 &\leq \sum_{n=1}^N \left( \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) |\gamma_{n_1}|^2 + 2|\gamma_{n_2}|^2 \right) \\ &\leq \underbrace{2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)}_M \sum_{n=1}^N (|\gamma_{n_1}|^2 + |\gamma_{n_2}|^2), \end{aligned}$$

car  $r_1 \bar{r}_2 + \bar{r}_1 r_2 \leq |r_1|^2 + |r_2|^2$  et  $\alpha > 0$ . Finalement, via le résultat ci-dessus, on conclut aisément que la deuxième condition (B.13) est vérifiée avec  $M = 2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$ , ce qui prouve que la famille  $\Phi_n = \{\phi_{n_1}, \phi_{n_2}\}$  forme bien une base de Riez. L'étape qui suit est donc de trouver l'expression de cette base afin d'arriver à (2.20). D'une manière générale, ceci peut se calculer à partir de l'opérateur adjoint  $\mathcal{A}^*$  comme le mentionne le Théorème 2.3.5 de [21]. Cependant, pour des raisons de simplicité, on préfère plutôt utiliser un raccourci. En effet, comme on a

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \phi_{n_1} \rangle \psi_{n_2} + \langle z, \phi_{n_2} \rangle \psi_{n_1},$$

il suffit juste de remplacer  $z$  par les fonctions  $\phi_{k_1}$  et  $\phi_{k_2}$  successivement, i.e.,

$$\begin{aligned} \phi_{k_1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_{k_1}, \phi_{n_1} \rangle \psi_{n_2} + \langle \phi_{k_1}, \phi_{n_2} \rangle \psi_{n_1}, \\ \phi_{k_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_{k_2}, \phi_{n_1} \rangle \psi_{n_2} + \langle \phi_{k_2}, \phi_{n_2} \rangle \psi_{n_1}. \end{aligned}$$

Et en utilisant les propriétés (B.10), on aboutit ainsi au système d'équations ci-dessous,

$$\begin{cases} \phi_{k_1} = \psi_{k_2} + \beta \lambda_{n_1} \gamma_n \psi_{k_1} \\ \phi_{k_2} = \beta \bar{\lambda}_{n_1} \gamma_n \psi_{k_2} + \psi_{k_1} \end{cases},$$

dont les solutions sont données par

$$\begin{aligned} \psi_{k_1}(x) &= -\frac{\beta \bar{\lambda}_{k_1} \gamma_k}{1 - \beta^2 \gamma_k^2 |\lambda_{k_1}|^2} \phi_{k_1}(x) + \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_k^2 |\lambda_{k_1}|^2} \phi_{k_2}(x), \\ \psi_{k_2}(x) &= \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_k^2 |\lambda_{k_1}|^2} \phi_{k_1}(x) - \frac{\beta \lambda_{k_1} \gamma_k}{1 - \beta^2 \gamma_k^2 |\lambda_{k_1}|^2} \phi_{k_2}(x). \end{aligned}$$

De là, on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \langle \phi_{m_1}, \psi_{n_2} \rangle_Z &= \left\langle \phi_{m_1}, -\frac{\beta \lambda_{n_1} \gamma_n}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \phi_{n_2} \right\rangle_Z + \left\langle \phi_{m_1}, \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \phi_{n_1} \right\rangle_Z \\ &= -\frac{\beta \bar{\lambda}_{n_1} \gamma_n}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \langle \phi_{m_1}, \phi_{n_2} \rangle_Z + \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \langle \phi_{m_1}, \phi_{n_1} \rangle_Z \\ &= -\frac{\beta^2 \bar{\lambda}_{n_1} \lambda_{n_1} \gamma_n^2}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \delta_{mn} + \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \delta_{mn} = \delta_{mn} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{m_2}, \psi_{n_1} \rangle_Z &= \left\langle \phi_{m_2}, \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \phi_{n_2} \right\rangle_Z - \left\langle \phi_{m_2}, \frac{\beta \bar{\lambda}_{n_1} \gamma_n}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \phi_{n_1} \right\rangle_Z \\
&= \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \langle \phi_{m_2}, \phi_{n_2} \rangle_Z - \frac{\beta \lambda_{n_1} \gamma_n}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \langle \phi_{m_2}, \phi_{n_1} \rangle_Z \\
&= \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \delta_{mn} - \frac{\beta^2 \lambda_{n_1} \bar{\lambda}_{n_1} \gamma_n^2}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \delta_{mn} = \delta_{mn}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre ainsi la biorthogonalité de  $\{\phi_{n_1}, \psi_{n_2}\}$  et de  $\{\phi_{n_2}, \psi_{n_1}\}$ . Une fois cette étape achevée, il est désormais possible de faire usage du développement (B.12) afin d'obtenir l'expression (2.20). En effet, l'action du semigroupe  $\mathcal{S}(t)$  sur un vecteur  $z \in Z$  s'écrit à présent,

$$\mathcal{S}(t) \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}_z = e^{At} z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_{n_1} t} \langle z, \psi_{n_2} \rangle \phi_{n_1} + e^{\lambda_{n_2} t} \langle z, \psi_{n_1} \rangle \phi_{n_2}. \quad (\text{B.14})$$

Cela donne, bien évidemment, le même résultat que (2.19). De là, il ne reste ainsi qu'à développer un peu plus les termes de (B.14) qui s'écrit encore d'une manière plus explicite comme suit

$$\mathcal{S}(t) z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_{n_1} t} \langle z, \psi_{n_2} \rangle \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_1} \phi_{1n_1} \end{pmatrix} + e^{\lambda_{n_2} t} \langle z, \psi_{n_1} \rangle \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_2} \phi_{1n_1} \end{pmatrix}.$$

Développons en premier les termes  $\langle z, \psi_{n_2} \rangle$  et  $\langle z, \psi_{n_1} \rangle$ . On a

$$\langle z, \psi_{n_2} \rangle = \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \langle z, \phi_{n_1} \rangle - \frac{\beta \bar{\lambda}_{n_1} \gamma_n}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \langle z, \phi_{n_2} \rangle$$

pour laquelle,

$$\begin{aligned}
\langle z, \phi_{n_2} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_2} \phi_{1n_1} \end{pmatrix} \right\rangle_Z = \left\langle A_0^{\frac{1}{2}} z_1, A_0^{\frac{1}{2}} \phi_{1n_1} \right\rangle + \underbrace{\bar{\lambda}_{n_2}}_{=\lambda_{n_1}} \langle z_2, \phi_{1n_1} \rangle \\
&= \frac{\gamma_n}{2} \langle z_1, \phi_{1n_1} \rangle + \lambda_{n_1} \langle z_2, \phi_{1n_1} \rangle
\end{aligned}$$

et,

$$\langle z, \phi_{n_1} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_{1n_1} \\ \lambda_{n_1} \phi_{1n_1} \end{pmatrix} \right\rangle_Z = \frac{\gamma_n}{2} \langle z_1, \phi_{1n_1} \rangle + \lambda_{n_2} \langle z_2, \phi_{1n_1} \rangle.$$

Ensuite,

$$\langle z, \psi_{n_1} \rangle = \frac{1}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \langle z, \phi_{n_2} \rangle - \frac{\beta \lambda_{n_1} \gamma_n}{1 - \beta^2 \gamma_n^2 |\lambda_{n_1}|^2} \langle z, \phi_{n_1} \rangle,$$

ce qui donne, après calcul,

$$\langle z, \psi_{n_2} \rangle \phi_{1n_1} = \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_1, \varphi_n \rangle \varphi_n - \frac{1}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_2, \varphi_n \rangle \varphi_n,$$

et

$$\langle z, \psi_{n_1} \rangle \phi_{1n_1} = -\frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_1, \varphi_n \rangle \varphi_n + \frac{1}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_2, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Au final, la relation (B.14) prend la forme ci-dessous

$$\mathcal{S}(t) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{\lambda_{n_1} t} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_1, \varphi_n \rangle \varphi_n - \frac{1}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_2, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ \frac{\lambda_{n_2} \lambda_{n_1}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_1, \varphi_n \rangle \varphi_n - \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_2, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{pmatrix} + e^{\lambda_{n_2} t} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_1, \varphi_n \rangle \varphi_n + \frac{1}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_2, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ -\frac{\lambda_{n_1} \lambda_{n_2}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_1, \varphi_n \rangle \varphi_n + \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \langle z_2, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{pmatrix} \right],$$

à partir de laquelle en déduit facilement l'expression (2.20). De plus, en remarquant que

$$e^{A_n t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_{n_1}} & \frac{1}{\lambda_{n_2}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_{n_1} t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_{n_2} t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{n_1} \lambda_{n_2}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} & -\frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \\ -\frac{\lambda_{n_1} \lambda_{n_2}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} & \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} \end{pmatrix},$$

avec

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell\sqrt{LC}}\right)^2 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix},$$

il est possible de récrire l'expression (2.20) du semigrout  $\mathcal{S}(t)$  comme suit,

$$\mathcal{S}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} \langle \cdot, \varphi_n \rangle \varphi_n(x). \quad (\text{B.15})$$

### B.1.1 Expression explicite des trajectoires

Une fois l'expression (B.15) obtenue, on passe désormais aux trajectoires du système (2.12) qui s'écrivent à l'aide de la forme générale (2.15). A cet effet, rappelons, tout d'abord, l'expression (2.21) de l'opérateur  $B$ , i.e.,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci permet d'écrire les trajectoires  $z(x, t)$  de (2.12) sous la forme

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{A_n t} \underbrace{\begin{pmatrix} \langle z_{10}, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ \langle z_{20}, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{pmatrix}}_{=\langle \cdot, \varphi_n \rangle \varphi_n z_0} - \int_0^{\infty} \mathcal{A} e^{A_n(t-\tau)} \begin{pmatrix} \langle 1, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} V_e(\tau) d\tau \right)$$

car,  $\mathfrak{A}B = (0 \ 0)^T$ . De là, un calcul intermédiaire donnera,

$$-\int_0^\infty \mathcal{A}e^{A_n(t-\tau)} \begin{pmatrix} \langle 1, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} V_e(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A_n(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} \langle 1, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{pmatrix} V_e(\tau) d\tau,$$

ce qui conduit finalement à l'expression (2.22) des trajectoires.

### B.1.2 Fonction de transfert

Comme indiqué au paragraphe C de la Section 2.4.1.1, la fonction de transfert d'un système est unique mais peut s'écrire sous différentes formes. Ainsi, pour le système (2.10), et en plus de la forme (2.30) obtenu à l'aide d'un développement d'Hadamard, on utilise le théorème des résidus afin de la récrire, cette fois-ci, comme une somme de fractions partielles. Pour cela, rappelons tout d'abord la forme irrationnelle (2.28) de  $G(s)$ , i.e.,

$$G(s) = \frac{\hat{V}(\ell, s)}{\hat{V}_e(s)} = \frac{1}{\cosh\left(\ell\sqrt{Cs(R+Ls)}\right)}. \quad (\text{B.16})$$

L'application du théorème des résidus de Cauchy permet d'écrire  $G(s)$  sous la forme suivante (voir, e.g., [20]),

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Res}(\lambda_k)}{s - \lambda_k},$$

où  $\lambda_k$  sont les pôles avec le résidu à  $\lambda_k$  qui est donné par,

$$\text{Res}(\lambda_k) = \lim_{s \rightarrow \lambda_k} (s - \lambda_k) G(s).$$

Ou encore,

$$\text{Res}(\lambda_k) = \frac{N(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)},$$

dans le cas où (B.16) peut s'écrire sous la forme  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  avec  $N(s)$  et  $D(s)$  qui sont des fonctions entières et  $\frac{dD}{ds}(\lambda_k) \neq 0$ . Dans notre cas, il est ainsi facile de remarquer qu'on peut poser, pour (B.16),

$$\begin{cases} N(s) = 1, \\ D(s) = \cosh\left(\ell\sqrt{Cs(R+Ls)}\right). \end{cases}$$

A partir de là, une simple dérivation donne le résultat suivant,

$$\frac{dD(s)}{ds} = \frac{\ell}{2} \frac{2LCs + RC}{\sqrt{Cs(R+Ls)}} \sinh\left(\ell\sqrt{Cs(R+Ls)}\right),$$

qui, une fois évalué aux pôles  $\lambda_{n_1}$  et  $\lambda_{n_2}$ , conduit aux deux expressions ci-dessous

$$D'(\lambda_{n_1}) = \ell^2 \frac{\sqrt{4\alpha \left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}\right)^2 - \beta^2}}{\alpha(2n-1)\pi} (-1)^{n+1} \text{ et } D'(\lambda_{n_2}) = -\ell^2 \frac{\sqrt{4\alpha \left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}\right)^2 - \beta^2}}{\alpha(2n-1)\pi} (-1)^{n+1}.$$

Partant de ce dernier résultat, les résidus de (B.16) aux pôles  $\lambda_{n_1}$  et  $\lambda_{n_2}$  s'écrivent, respectivement,

$$\text{Res}(\lambda_{n_1}) = \frac{\alpha}{\ell^2} \frac{(2n-1)\pi(-1)^{n+1}}{\sqrt{4\alpha\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}\right)^2 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad \text{Res}(\lambda_{n_2}) = -\frac{\alpha}{\ell^2} \frac{(2n-1)\pi(-1)^{n+1}}{\sqrt{4\alpha\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}\right)^2 - \beta^2}}$$

Ce qui donne au final,

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\text{Res}(\lambda_{n_1})}{s - \lambda_{n_1}} + \frac{\text{Res}(\lambda_{n_2})}{s - \lambda_{n_2}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(2n-1)\pi}{\ell^2 LC} (-1)^{n+1}}{(s - \lambda_{n_1})(s - \lambda_{n_2})}. \quad (\text{B.17})$$

Par ailleurs, on peut très bien remarquer qu'une transformée de Laplace inverse de (B.17) conduit aisément à la trajectoire (2.23) de la tension  $V_\ell(t)$  ainsi qu'à la forme d'état (2.24). En effet, pour cela il suffit de remarquer qu'à partir de (B.17) il est tout à fait possible d'écrire une forme d'état dont les matrices de présentation sont exactement  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  de (2.23). C'est ce qui justifie ainsi nos propos.

# Annexe C

## C.1 Preuves et Démonstrations

Ce chapitre présente des preuves et des démonstrations détaillées des nouveaux outils développés et ceux utilisés dans le cadre de la nouvelle méthode de réduction.

### C.1.1 Preuve de la Définition 3.1

Afin de justifier les propos de la Définition 3.1, écrivons d'abord la première relation de (3.31) comme suit,

$$w^i A v^i = \lambda_i$$

avec  $v^i$  et  $w^i$  choisis tel que  $w^i v^i = 1$ . De là, la dérivée de la valeur propre  $\lambda_i$  par rapport à un paramètre  $a_{jk}$  de la matrice  $A$  s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{jk}} &= \frac{\partial w^i}{\partial a_{jk}} \underbrace{A v^i}_{\lambda_i v^i} + w^i \frac{\partial A}{\partial a_{jk}} v^i + \underbrace{w^i A}_{\lambda_i w^i} \frac{\partial v^i}{\partial a_{jk}} \\ &= w^i \frac{\partial A}{\partial a_{jk}} v^i + \lambda_i \frac{\partial}{\partial a_{jk}} \underbrace{(w^i v^i)}_{=1} = w^i \frac{\partial A}{\partial a_{jk}} v^i. \end{aligned}$$

Et comme les éléments de la matrice  $\frac{\partial A}{\partial a_{jk}}$  sont tous nuls à part l'élément à la position  $(j, k)$ , qui vaut 1, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kk}} &= w_k^i v_k^i = p_{ki}, \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{jk}} &= w_j^i v_k^i = p_{kij}, \quad j \neq k. \end{aligned}$$

Finalement, comme  $w^i v^i = \sum_{k=1}^n \underbrace{w_k^i v_k^i}_{p_{ki}} = 1$ , on a bien  $\sum_{k=1}^n p_{ki} = 1$ .

Pour tout complément de preuve concernant cette démonstration, nous renvoyons à [31].

### C.1.2 Démonstration du Lemme 3.1

En écrivant (3.40) comme ceci

$$(\|\Delta(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle \Delta(jw), F(jw) \rangle) + \|F(jw)\|_2^2) - \|F(jw)\|_2^2 = 0,$$

on a

$$\|\Delta(jw) + F(jw)\|_2^2 = \|F(jw)\|_2^2,$$

ce qui implique nécessairement que  $\Delta(jw) = -2F(jw)$  ou  $\Delta(jw) \equiv 0$ .

### C.1.3 Démonstration du Lemme 3.2

Pour  $\eta = 0$  et  $\eta = 1$ , il est facile de vérifier que l'inégalité est satisfaite. Ainsi, supposons que

$$(1 - \sqrt{1 - \eta})^2 > \eta \quad \text{pour } \eta \in ]0, 1[.$$

Ce qui implique que  $2(1 - \sqrt{1 - \eta}) > 2\eta$ , i.e.,  $\sqrt{1 - \eta} < (1 - \eta)$ . Néanmoins, ceci n'est pas possible car  $(1 - \eta) < 1$ , et la racine carrée d'un nombre qui est inférieur à 1 est toujours supérieur à ce nombre lui-même. Par conséquent, on a forcément  $(1 - \sqrt{1 - \eta})^2 \leq \eta$ .

### C.1.4 Démonstration du Théorème 3.1

Tout d'abord, notons que les propriétés *i*) sont une conséquence directe du Lemme 3.1. En effet, dans le cas de la troncature modale, la matrice fonction de transfert  $H(s)$  du modèle complet peut s'écrire comme suit

$$H(jw) = H^r(jw) + \Delta(jw),$$

où  $H^r(jw)$  contient les modes à retenir et  $\Delta(jw)$  ceux à supprimer. Ainsi, comme on a

$$\|H(jw)\|_2^2 = \|H^r(jw)\|_2^2 + \|\Delta(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle \Delta(jw), H^r(jw) \rangle), \quad (\text{C.1})$$

il s'ensuit que si  $\|H^r(jw)\|_2^2 = \|H(jw)\|_2^2$ , alors

$$\|\Delta(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle \Delta(jw), H^r(jw) \rangle) = 0.$$

Par l'intermédiaire du Lemme 3.1, on a donc  $\Delta(jw) \equiv 0$  car  $\Delta(jw) \neq H^r(jw)$  et au final  $H^r(jw) = H(jw)$ . Pour montrer la deuxième propriété *ii*), supposons d'abord que

$$|\|H(jw)\|_2^2 - \|H^r(jw)\|_2^2| \leq \eta \|H(jw)\|_2^2 \quad \text{avec } \eta \in [0, 1].$$

En se basant sur (C.1), on peut donc écrire l'inégalité suivante

$$|\|\Delta(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle \Delta(jw), H^r(jw) \rangle)| \leq \eta \|H(jw)\|_2^2,$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme ci-dessous

$$|2\Re(\langle \Delta(jw), H(jw) \rangle) - \|\Delta(jw)\|_2^2| \leq \eta \|H(jw)\|_2^2, \quad (\text{C.2})$$

car  $H^r(jw) = H(jw) - \Delta(jw)$ . Par la suite, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz<sup>1</sup> conduit à l'écriture suivante

$$-2 \|\Delta(jw)\|_2 \|\mathbf{H}(jw)\|_2 \leq 2\Re(\langle \Delta(jw), \mathbf{H}(jw) \rangle) \leq 2 \|\Delta(jw)\|_2 \|\mathbf{H}(jw)\|_2. \quad (\text{C.3})$$

Ainsi, lorsque (C.3) est utilisée dans (C.2), on peut distinguer trois cas :

- $2\Re(\langle \Delta(jw), \mathbf{H}(jw) \rangle) = 0$  ce qui implique que  $\|\Delta(jw)\|_2^2 \leq \eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$ .
- $-2 \|\Delta(jw)\|_2 \|\mathbf{H}(jw)\|_2 \leq 2\Re(\langle \Delta(jw), \mathbf{H}(jw) \rangle) < 0$  qui signifie aussi que  $\|\Delta(jw)\|_2^2 \leq \eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$  car lorsque  $2\Re(\langle \Delta(jw), \mathbf{H}(jw) \rangle) < 0$ , on a  $|2\Re(\langle \Delta(jw), \mathbf{H}(jw) \rangle)| + \|\Delta(jw)\|_2^2 \leq \eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$ .
- $0 < 2\Re(\langle \Delta(jw), \mathbf{H}(jw) \rangle) \leq 2 \|\Delta(jw)\|_2 \|\mathbf{H}(jw)\|_2$ . Pour ce dernier cas, la situation limite c'est quant  $2\Re(\langle \Delta(jw), \mathbf{H}(jw) \rangle) = 2 \|\Delta(jw)\|_2 \|\mathbf{H}(jw)\|_2$ , ce qui conduit à  $|2 \|\Delta(jw)\|_2 \|\mathbf{H}(jw)\|_2 - \|\Delta(jw)\|_2^2| \leq \eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$  ou d'une manière équivalente à  $-\eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2 \leq 2 \|\Delta(jw)\|_2 \|\mathbf{H}(jw)\|_2 - \|\Delta(jw)\|_2^2 \leq \eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$ .

En posant  $x = \|\Delta(jw)\|_2$ , l'inégalité précédente se réécrit  $-\eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2 \leq f(x) \leq \eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$  avec  $f(x) = -x^2 + 2(\|\mathbf{H}(jw)\|_2)x$ . Ceci conduit à deux solutions valables :  $0 \leq x \leq \|\mathbf{H}(jw)\|_2(1 - \sqrt{1 - \eta})$  et  $\|\mathbf{H}(jw)\|_2(1 + \sqrt{1 - \eta}) \leq x \leq \|\mathbf{H}(jw)\|_2(1 + \sqrt{1 + \eta})$ , mais le deuxième est rejetée car lorsque  $\eta = 0$ , on aura  $x = 2 \|\mathbf{H}(jw)\|_2$  alors que  $\Delta(jw) \equiv 0$  comme on la montré précédemment. De là, on peut ainsi déduire que  $0 \leq \|\Delta(jw)\|_2^2 \leq (1 - \sqrt{1 - \eta})^2 \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$ . Cette dernière satisfait aussi  $0 \leq \|\Delta(jw)\|_2^2 \leq \eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$  car le Lemme 3.2 montre que  $(1 - \sqrt{1 - \eta})^2$  est toujours inférieur ou égal à  $\eta$ . Au final, on a dans toutes les situations,  $\|\Delta(jw)\|_2^2 \leq \eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$ , i.e.,  $\|\mathbf{H}(jw) - H^r(jw)\|_2^2 \leq \eta \|\mathbf{H}(jw)\|_2^2$ , ce qui conclut la preuve.

### C.1.5 Démonstration du Lemme 3.3

De la Section 3.4.1.1, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|F(jw)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^K \frac{M_k}{jw - \lambda_k} \right) \left( \sum_{\gamma=1}^K \frac{M_\gamma^*}{-jw - \lambda_\gamma^*} \right) dw \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{tr}(M_k M_k^*)}{(jw - \lambda_k)(-jw - \lambda_k^*)} dw + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1, j \neq i}^K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{tr}(M_i M_j^*)}{(jw - \lambda_i)(-jw - \lambda_j^*)} dw. \end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , on obtient

$$\|F(jw)\|_2^2 = - \sum_{k=1}^K \frac{\operatorname{tr}(M_k M_k^*)}{2\Re(\lambda_k)} - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1, j \neq k}^K \frac{\operatorname{tr}(M_i M_j^*)}{\lambda_i + \lambda_j^*}, \quad (\text{C.4})$$

1.  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$

avec  $\text{tr}(M_k M_k^*) = \|M_k\|_F^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\text{tr}(M_i M_j^*) = \beta_{ij} \in \mathbb{C}$ . Par conséquent, l'inégalité triangulaire<sup>2</sup>, conduit l'équation (C.4) à satisfaire

$$\|F(jw)\|_2^2 \leq \sum_{k=1}^K \frac{\|M_k\|_F^2}{2|\Re(\lambda_k)|} + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1, j \neq i}^K \frac{|\beta_{ij}|}{|\lambda_i + \lambda_j|},$$

et comme  $|\lambda_i + \lambda_j^*| \geq |\Re(\lambda_i) + \Re(\lambda_j)|$ , on obtient au final l'inégalité (3.44).

### C.1.6 Démonstration du Théorème 3.2

Au début, rappelons que le gramien de controllabilité de la réalisation équilibrée (3.46) est d'une forme diagonale donnée par

$$\bar{W}_c = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Par conséquent, les propriétés *i*), *ii*) et *iii*) sont directement obtenus en comparant (C.5) avec (3.29). En effet, à partir de cette comparaison, on peut facilement déduire que  $\sum_{i=1}^p \|\bar{x}_k^i(t)\|_2^2 = \sigma_k$  et  $\sum_{i=1}^p \langle \bar{x}_k^i(t), \bar{x}_j^i(t) \rangle = 0$  pour  $i \neq j$ . Ceci conduit ainsi l'énergie (3.38) à s'écrire

$$E_H = \sum_{k=1}^n \underbrace{\left( \sum_{d=1}^q \bar{c}_{dk}^2 \right)}_{\alpha_k} \left( \sum_{i=1}^p \|\bar{x}_k^i(t)\|_2^2 \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sigma_k.$$

Pour montrer *iv*), considérons l'équation (3.25) qui peut s'écrire pour (3.46) comme suit

$$H(s) = \bar{C} \left[ \bar{X}^1(s), \dots, \bar{X}^p(s) \right] = \sum_{k=1}^n \bar{C}_k \left[ \bar{X}_k^1(s), \dots, \bar{X}_k^p(s) \right],$$

où  $\bar{X}_k^i(s)$  est la transformée de Laplace de  $\bar{x}_k^i(t)$ . En utilisant la propriété  $\Gamma_b \cup \bar{\Gamma}_b = \{1, \dots, n\}$ , on obtient l'expression suivante

$$H(s) = \underbrace{\sum_{m \in \Gamma_b} \bar{C}_m \left[ \bar{X}_m^1(s), \dots, \bar{X}_m^p(s) \right]}_{H_{\Gamma_b}} + \underbrace{\sum_{\ell \in \bar{\Gamma}_b} \bar{C}_\ell \left[ \bar{X}_\ell^1(s), \dots, \bar{X}_\ell^p(s) \right]}_{H_{\bar{\Gamma}_b}},$$

pour laquelle l'énergie s'écrit

$$\|H(jw)\|_2^2 = \|H_{\Gamma_b}(jw)\|_2^2 + \|H_{\bar{\Gamma}_b}(jw)\|_2^2 + 2\Re(\langle H_{\Gamma_b}(jw), H_{\bar{\Gamma}_b}(jw) \rangle),$$

avec

$$\langle H_{\Gamma_b}(jw), H_{\bar{\Gamma}_b}(jw) \rangle = \frac{1}{2\pi} \text{tr} \left( \sum_{m \in \Gamma_b} \sum_{\ell \in \bar{\Gamma}_b} \bar{C}_m \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \bar{X}_m^1(s), \dots, \bar{X}_m^p(s) \right] \left[ \bar{X}_\ell^1(s), \dots, \bar{X}_\ell^p(s) \right]^* dw \right) \bar{C}_\ell \right).$$

2.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Finalement, puisque

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(jw) \bar{X}^*(jw) dw = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

on déduit facilement que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \bar{X}_m^1(s), \dots, \bar{X}_m^p(s) \right] \left[ \bar{X}_\ell^1(s), \dots, \bar{X}_\ell^p(s) \right]^* ds = 0 \text{ for } m \neq \ell,$$

et donc  $\langle H_{\Gamma_b}(jw), H_{\bar{\Gamma}_b}(jw) \rangle = 0$  car  $\Gamma_b \cap \bar{\Gamma}_b = \emptyset$ .

### C.1.7 Preuve de l'expression des résidus en fonction des participations

Au début, écrivons la matrice  $C_n$  de (3.23) comme

$$C_n = [C_1 | C_2 | \dots | C_p],$$

où  $C_1, \dots, C_p$  sont les  $p$  colonnes  $C$ . Ensuite, comme

$$X(s) = [X^1(s), \dots, X^p(s)] \text{ and } X^j(s) = [X_1^j(s), \dots, X_n^j(s)]^T, j = 1, \dots, p,$$

on obtient,

$$H(s) = C_n X(s) = \sum_{k=1}^n C_k [X_k^1(s), \dots, X_k^p(s)].$$

Ainsi, en remplaçant chaque  $X_k^j(s)$ ,  $j = 1, \dots, p$  par son expression, i.e., la transformée de Laplace de  $x_k^j(t)$  défini par (3.32), et en comparant la matrice fonction de transfert  $H(s)$ , qui en résulte, avec  $H(s)$  donnée par (3.33), on trouve au final le résultat annoncé, i.e.,

$$R_i = \sum_{k=1}^n C_k \left[ \left( p_{ki} b_{k1} + \sum_{\ell=1, \ell \neq k} p_{kil} b_{\ell 1} \right), \dots, \left( p_{ki} b_{kp} + \sum_{\ell=1, \ell \neq k} p_{kil} b_{\ell p} \right) \right].$$

# Annexe D

## D.1 Modèles utilisés dans les benchmarks

D'une manière générale, les modèles dynamiques des systèmes de transmission électriques tels que ceux représentés par les Figs. 3.24 et 3.26, résultent d'une interconnexion des modèles des différents composants électriques. Ainsi, pour obtenir le modèle complet, chaque composant est modélisé à part, puis connecté aux autres modèles en accord avec la façon dont les composants sont physiquement interconnectés. D'un point de vue modélisation, ceci repose principalement sur des transformations entre les repères, car les composants sont généralement triphasés, et les équations qui décrivent leur fonctionnement sont souvent écrites dans des repères locaux. Pour un système triphasé et équilibré, par exemple, les équations sont assez souvent écrites dans un repère bidimensionnel  $(d, q)$  au lieu du repère tridimensionnel  $(a, b, c)$ . Et pour pouvoir effectuer les interconnexions, un autre repère commun  $(D, Q)$  est défini à son tour. Une description assez détaillée de ces transformations, ainsi que des modèles utilisés ici, est présentée tout au long de cette section.

### D.1.1 Transformations entre les repères

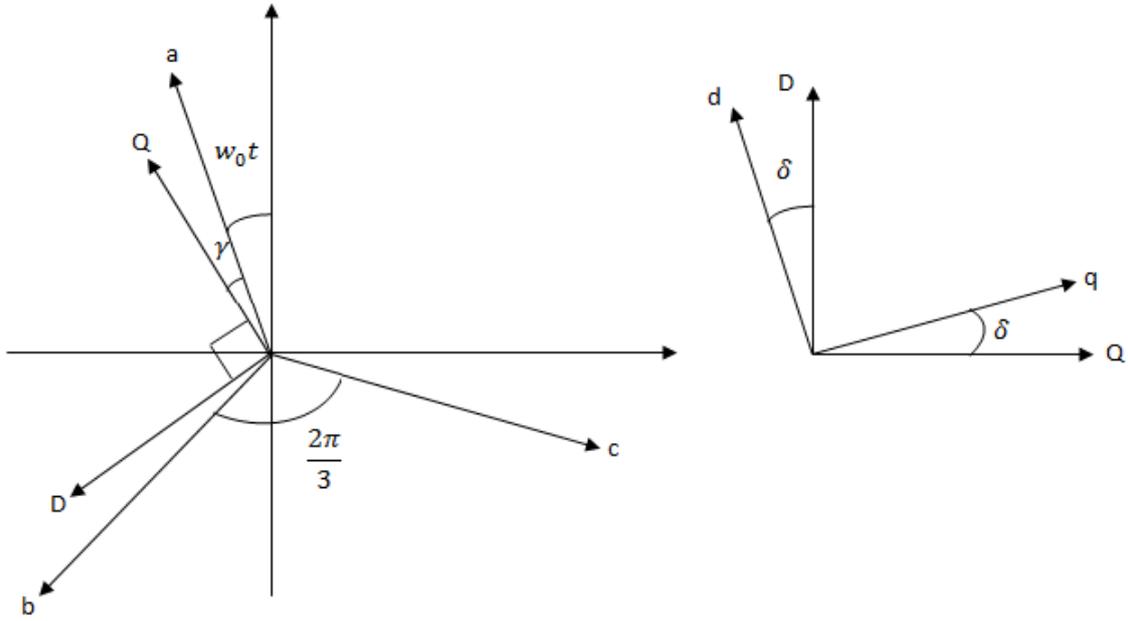
Les transformations utilisées dans notre cas sont celles dite de *Park* et de *Kron's* (voir, e.g., [59]). La première qui se présente comme suit,

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t + \gamma) & \sin(\omega_0 t + \gamma) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\omega_0 t + \gamma - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\omega_0 t + \gamma - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\omega_0 t + \gamma + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\omega_0 t + \gamma + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_D \\ f_Q \\ f_0 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

permet le passage d'un repère tridimensionnel  $(a, b, c)$  à un repère commun bidimensionnel  $(D, Q)$ . Tandis que la seconde, qui est donnée par

$$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_D \\ f_Q \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

permet le passage d'un repère commun  $(D, Q)$  à un repère local  $(d, q)$ , et vice versa. Par ailleurs, tous les angles impliqués dans ces deux transformations sont représentés sur la Fig. D.1.

FIGURE D.1 – Angles  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\omega_0 t$ 

### D.1.2 Modèle du générateur

Dans le cas général, un générateur électrique est modélisé dans le repère  $(d, q)$  par un modèle non linéaire de six équations différentielles incluant l'équation du swing, les dynamiques des tensions, et celles des flux magnétiques. Pour des raisons de simplicité, le modèle utilisé dans notre cas est une version simplifiée qui contient uniquement l'équation du swing accompagnée d'une seule dynamique de tension (sur l'axe  $q$ ). Il est donné par le modèle non linéaire ci-dessous (voir, e.g., [35] ou [42]) écrits sous la forme DAE,

$$\left\{ \begin{array}{l} T'_{d0} \frac{deq'}{dt} = -eq' + (x_d - x'_d) id + E_{fd} \\ 2H \frac{dw}{dt} = P_m - (vdid + vqiq) - r(id^2 + iq^2) \\ \frac{d\delta}{dt} = w - w_0 \\ vd = -x_q iq - rid \\ vq = eq' + x'_d id - riq \end{array} \right. \quad (D.3)$$

où  $T'_{d0}$ ,  $x_d$ ,  $x'_d$ ,  $H$ ,  $r$ ,  $w_0$ , sont des paramètres constants, et  $\delta$ ,  $w$ ,  $(vd, vq, eq')$ ,  $(id, iq)$ ,  $E_{fd}$ ,  $P_m$ , sont respectivement, l'angle, la vitesse de rotation, les tensions et les courants dans le repère  $(d, q)$ , la tension d'excitation, et finalement la puissance mécanique.

#### D.1.2.1 Régulateurs associés aux générateurs

Afin d'assurer un comportement correcte du système électrique, chaque générateur est doté d'un certain nombre de régulateurs en fonction du besoin (voir, e.g., [72] pour des exemples). Dans notre cas, les régulateurs utilisés consiste en un régulateur de tension

(AVR), qui agit sur la variable  $E_{fd}$  du modèle (D.3), et un régulateur de vitesse (Governor) qui agit sur  $P_m$ . Les deux, sont des régulateurs du type proportionnel intégral (*PI*), dont les fonctions de transfert sont, respectivement,

**AVR :**

$$\frac{E_{fd}(s)}{V_{ref}(s) - E(s)} = K_a \left( T_a + \frac{1}{s} \right),$$

**Governor :**

$$\frac{P_m(s)}{w_{ref}(s) - w(s)} = K_g + \frac{1}{T_g s},$$

où l'indice *ref* signifie la consigne ou le signal de référence.

### D.1.3 Ligne de transmission

Comme il a été largement discuté au Chapitre 2, le modèle utilisé ici pour modéliser les lignes de transmission est celui présenté en Section 2.2.1.2. Il est écrit pour une seule phase, mais dans le cas d'un système triphasé avec inductances mutuelles négligées, il est écrit de la même façon pour chaque phase. Ainsi, en employant la transformation (D.1), on peut l'écrire directement dans le repère commun ( $D, Q$ ) comme suit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial i_D(x, t)}{\partial t} = -\frac{w_r}{X_L} \frac{\partial v_D(x, t)}{\partial x} - \frac{\bar{R}}{X_L} w_r i_D(x, t) - w_0 w_r i_Q(x, t) \\ \frac{\partial i_Q(x, t)}{\partial t} = -\frac{w_r}{X_L} \frac{\partial v_Q(x, t)}{\partial x} - \frac{\bar{R}}{X_L} w_r i_Q(x, t) + w_0 w_r i_D(x, t) \\ \frac{\partial v_D(x, t)}{\partial t} = -\frac{w_r}{X_c} \frac{\partial i_D(x, t)}{\partial x} - w_0 w_r v_Q(x, t) \\ \frac{\partial v_Q(x, t)}{\partial t} = -\frac{w_r}{X_c} \frac{\partial i_Q(x, t)}{\partial x} + w_0 w_r v_D(x, t) \end{array} \right., \quad (D.4)$$

où les conditions aux bords sont données par

$$\begin{array}{l} i_D(0, t), \quad v_D(0, t), \quad i_D(\ell, t), \quad v_D(\ell, t) \\ i_Q(0, t), \quad v_Q(0, t), \quad i_Q(\ell, t), \quad v_Q(\ell, t) \end{array}.$$

Il est à noter aussi que, dans (D.4), les paramètres  $R, L, C$  que l'on voit, e.g., dans (B.1) ont tous subis un per-unitage, i.e., qu'ils sont désormais des paramètres relatifs et sans unités. Tout ceci, nous mène, via l'application d'une discrétisation spatiale par la méthode des lignes (voir, e.g., [14]), à écrire le modèle (D.4) sous la forme d'état ci-dessous

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{array} \right., \quad (D.5)$$

qui est d'ordre 2000. Dans ce dernier, le vecteur d'entrées  $u(t)$  est constitué de  $i_D(0, t)$ ,  $i_Q(0, t)$ ,  $i_D(\ell, t)$ ,  $i_Q(\ell, t)$ , et celui des sorties  $y(t)$  de  $v_D(0, t)$ ,  $v_Q(0, t)$ ,  $v_D(\ell, t)$ ,  $v_Q(\ell, t)$ . Ceci sert, par la suite, à l'interconnecter avec d'autres modèles.

### D.1.4 Régleur en charge

Dans un transformateur électrique à rapport de transformation variable, le régleur en charge, appelé aussi changeur de prise, est un dispositif permettant de modifier le rapport de transformation du transformateur en passant d'une prise à une autre. Pour cela, les enroulements du transformateur (généralement ceux du primaire) sont subdivisés en plusieurs sections appelées prises où chacune d'elles comporte un certain nombre de spires comme le montre la Figure D.2. De ce fait, la sélection de chaque section par le régleur en charge a pour effet la modification du rapport de transformation.

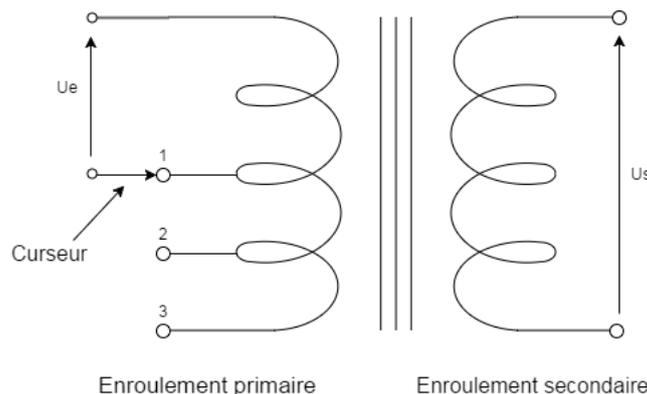


FIGURE D.2 – Schéma d'une phase d'un transformateur à multi-prises.

Généralement, le mécanisme de sélection (passage d'une prise à une autre) est modélisé par un modèle à événements discrets qui peut être approximé par un modèle continu dans le temps afin de faciliter les études. Parmi les modèles continus qui existent, le plus simple est donné par l'équation du premier ordre ci-dessous (voir, e.g., [51]),

$$\tau \frac{d\rho(t)}{dt} = -\varepsilon \rho(t) + (V_{ref} - V_{mes}), \quad (D.6)$$

où  $\tau$  est une constante de temps,  $\varepsilon$  un paramètre assez petit, et  $V_{ref}$ ,  $V_{mes}$  sont, respectivement, la tension de référence et la tension mesurée aux bornes de la charge. Notons également que le transformateur est considéré dans notre cas comme idéal, i.e., la valeur de  $\rho(t)$  correspond au rapport de transformation du transformateur. De plus, comme (D.6) est écrite pour chaque phase, l'application de la transformation (D.1) permet de passer directement au référentiel commun  $(D, Q)$ , et les relations entre les courants et les tensions s'écrivent,

$$\begin{aligned} v_{Dout} &= \rho(t) v_{Din}, & v_{Qout} &= \rho(t) v_{Qin} \\ i_{Dout} &= \frac{1}{\rho(t)} i_{Din}, & i_{Qout} &= \frac{1}{\rho(t)} i_{Qin}. \end{aligned}$$

### D.1.5 Charge

Parmi tous les types de charges qui existent, celle utilisée ici est une charge *active* qui est constituée d'une résistance  $R_{load}$  pour chaque phase. De ce fait, les équations qui

relient les tensions  $v_{D_{load}}$ ,  $v_{Q_{load}}$  et les courants  $i_{D_{load}}$ ,  $i_{Q_{load}}$  dans le repère commun  $(D, Q)$  s'écrivent,

$$\begin{cases} v_{D_{load}} = (R_{load}) \times i_{D_{load}} \\ v_{Q_{load}} = (R_{load}) \times i_{Q_{load}} \end{cases} \quad (D.7)$$

### D.1.6 Liaison HVDC

Le schéma décrivant la structure d'une liaison VSC-HVDC est donné en Fig. D.3. Il s'agit d'un schéma similaire à celui présenté dans [1].

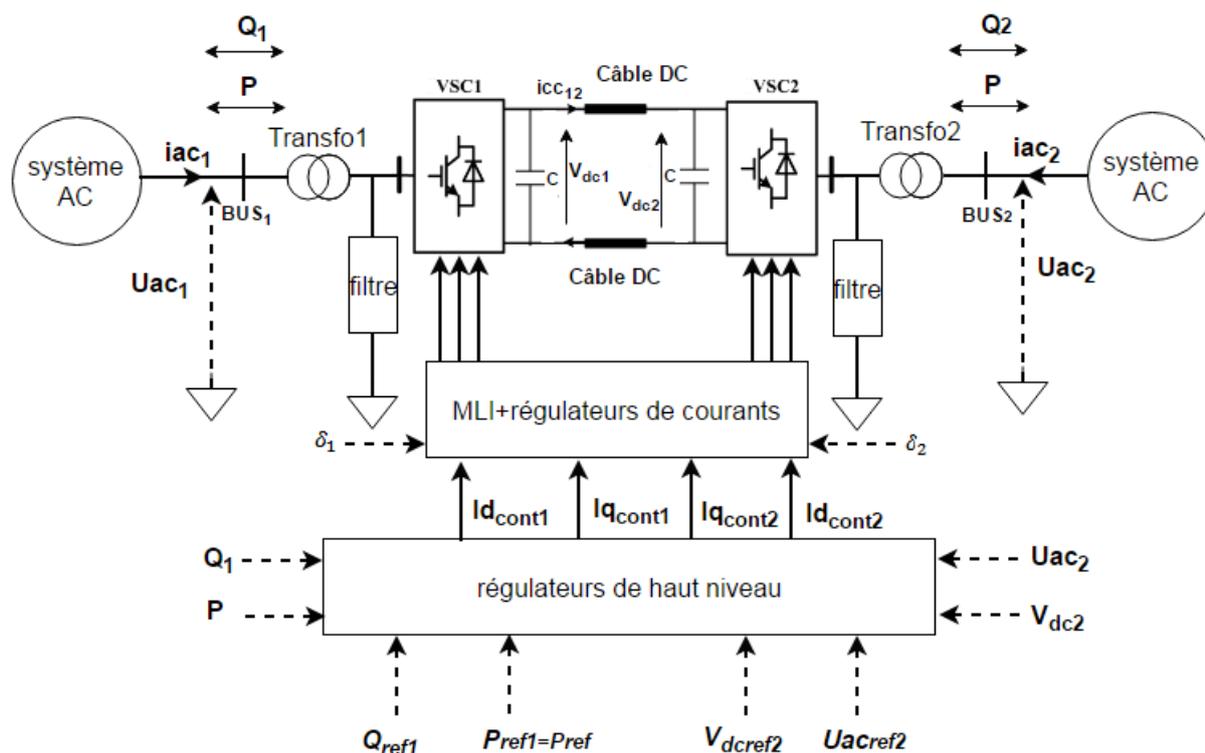


FIGURE D.3 – Structure d'une liaison VSC-HVDC.

D'un point de vue modélisation, le modèle détaillé de la structure présentée en Fig. D.3 est assez complexe à obtenir. En effet, les parties qui font intervenir des composants électroniques, comme les commutateurs (transistors IGBT) des deux stations de conversions et la commande par modulation de largeur d'impulsion (MLI), sont très difficile à modéliser. Dans la littérature, il existe des modèles détaillés, incluant l'électronique de puissance, comme celui implémenté dans la SimPower Toolbox de Matlab mais ils sont rarement utilisés en raison de leur complexité. C'est pourquoi des modèles dits *moyens* (voir, e.g., [1] ou [71]) ont été développés afin de faciliter la simulation et l'étude du comportement de la liaison VSC-HVDC et son interaction avec le système AC. Par rapport au modèle détaillé, les simplifications résident, essentiellement, dans l'approximation du fonctionnement des convertisseurs et de la commande MLI par des filtres linéaires ayant un temps de réponse très faible. Ceci est justifié par le fait que les signaux de commande

( $Idcont_{1,2}$  et  $Iqcont_{1,2}$ ), envoyés à la MLI, sont moins rapides que le temps de réponse de l'ensemble MLI-Convertisseurs. De ce fait, le modèle qui en résulte est dit *modèle injecteur* qui peut être soit un *injecteur de courants* ou un *injecteur de tensions*. Ici, on considère un modèle injecteur de courants et cela signifie que la liaison VSC-HVDC interagit avec système AC en injectant des courants dans la partie AC en fonction des courants  $Idcont_{1,2}$  et  $Iqcont_{1,2}$ . Ces derniers sont des courants de consigne qui proviennent des régulateurs de haut niveau qui régulent les tensions,  $V_{dc}$ ,  $Uac_{1,2}$ , ou encore les puissances réactives,  $Q_{1,2}$  de chaque côté, ainsi que la puissance active  $P$  qui transite via la liaison VSC-HVDC. Cela dépend du choix effectué comme on peut voir par la suite. Notons également que pour des raisons de simplicité, le câble DC (à courant continu) que l'on peut observer en Fig. D.3 est représenté dans notre cas par une simple résistance  $R_{dc_{12}}$ . Selon le besoin, il peut être représenté, par exemple, par le modèle en  $\pi$  de la Fig. 2.3 ou encore le modèle à EDP présenté en Section 2.2.1.2. Ainsi, le modèle mathématique qui décrit le fonctionnement de la partie DC (dans le repère local) peut s'écrire comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i = vd_i \times Idcont_i + vq_i \times Iqcont_i \\ Q_i = vd_i \times Iqcont_i - vq_i \times Idcont_i \\ idc_i \times v_{dc_i} = P_{mes_i} \\ C \frac{dv_{dc_i}}{dt} = idc_i \pm icc_{12} \\ icc_{12} = \frac{(v_{dc_2} - v_{dc_1})}{R_{dc_{12}}} \end{array} \right. , \quad (D.8)$$

où  $i \in \{1, 2\}$ , et  $P_i$ ,  $Q_i$  sont, respectivement, les puissances actives et réactives de chaque côté de la liaison VSC-HVDC. De même,  $vd_i$  et  $vq_i$  sont les composantes  $d - q$ , dans le repère local de la liaison VSC-HVDC, des tensions alternatives  $Uac_{1,2}$  aux points de raccordement avec le système AC.

A ce stade, il est important de noter que le modèle (D.8) a deux degrés de liberté. D'une manière équivalente, deux variables inconnues, parmi toutes celles du système, peuvent être fixées librement et indépendamment. Dans le contexte du Chapitre 4, ce sont des entrées. En effet, via chaque station de conversion, on peut contrôler la puissance active et/ou réactive injectée, la tension au point de liaison avec le système AC, ou encore la tension du câble DC. De ce fait, plusieurs stratégies de contrôle sont possibles en fonction de l'usage qu'on souhaite faire de la liaison VSC-HVDC (voir [3] pour un exemple d'application). Ici, la première station (à gauche en Fig. D.3 ou **C1** en Fig. 3.26) est utilisée pour la régulation des puissances  $P_1$ ,  $Q_1$  et la deuxième (**C2** en Fig. 3.26) assure la régulation de la tension  $V_{dc}$  du câble DC ainsi que la tension  $Uac_2$  côté AC. A cet effet, tous les régulateurs utilisés sont des *PI* (Proportionnel Intégral) qui ont la structure suivante

$$\frac{I_{(dcont,qcont)_i}}{X_{ref} - X_{mes}} = K_p + \frac{K_I}{s},$$

où  $X_{ref}$ ,  $X_{mes}$  peuvent être des puissances ou des tensions. Ainsi, ce sont les courants  $idref_{1,2}$  et  $iqref_{1,2}$ , à la sortie des blocs du premier ordre modélisant la dynamique de

l'ensemble MLI-Convertisseurs, qui sont injectés afin d'assurer l'interaction entre la liaison VSC-HVDC et le système AC. Toutefois, comme les courants  $idref_{1,2}$  et  $iqref_{1,2}$  sont dans le repère local de la liaison VSC-HVDC, l'application de la transformée (D.2) est nécessaire afin de les transformer en grandeurs réseau, i.e.,  $ID_{1,2}$  et  $IQ_{1,2}$ . Ces dernières sont les composantes directes dans le repère réseau  $DQ$  des courants  $iac_{1,2}$  côté AC. Il est à noter aussi que, pour les liaison VSC-HVDC, les angles  $\delta_{1,2}$  (voir Fig. D.3), entre le repère local et le repère commun, ne sont généralement pas mesurés directement mais estimés par ce qu'on appelle une *Phase-Locked Loop* (PLL). Bien qu'il existe des modèles très sophistiqués de PLL, celui utilisé ici est assez simple appelé *dqPLL* (voir, e.g., [81]) dont la structure est donnée en Fig. D.4. Son principe de fonctionnement consiste à modifier l'angle  $\delta$  de la transformation  $abc/dq$ , via un régulateur PI, afin de faire annuler la composante  $v_q$  de la tension. Ainsi, l'angle  $\delta_{est}$  correspondant à cette situation représente l'estimation de l'angle entre les repères  $abc$  et  $dq$  de la tension du réseau, car en annulant  $v_q$ ,  $v_d$  sera aligné avec la tension de la phase  $a$  de la tension triphasée  $V_{abc}$ . En outre, on précise que dans toutes les applications traitées dans cette thèse, le système triphasé est considéré équilibré.

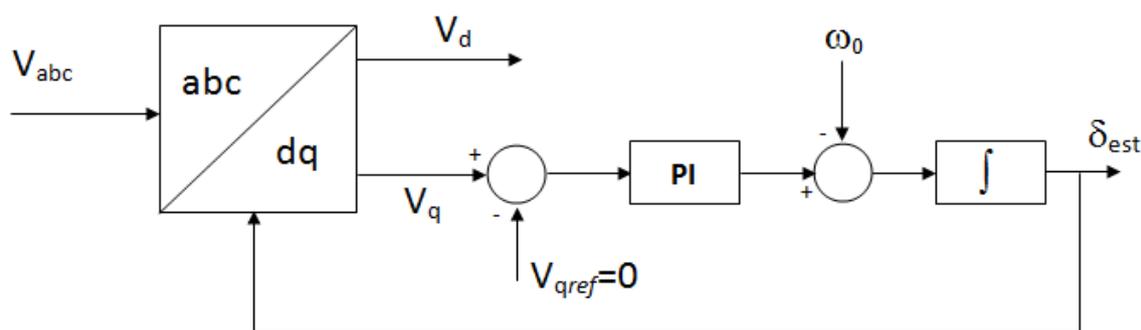


FIGURE D.4 – Structure de la dqPLL.

Au final, en considérant tous ces éléments, le schéma de commande et d'implémentation de la liaison VSC-HVDC, présentée en Fig. D.3, est donné en Fig. D.5 ci-après. Il convient de préciser que dans ce schéma de commande on a fait l'hypothèse que les axes  $d$  et  $q$  sont découplés. Autrement dit, les interactions *directes* entre les courants actifs (portés par l'axe  $d$ ) et réactifs (portés par l'axe  $q$ ) sont supposés négligeables. A titre d'exemple, un échelon de puissance sur  $P_{ref1}$  aura un impact direct sur  $Idcont_1$ , mais indirect sur  $Iqcont_1$ , car ce dernier est lié directement à la puissance réactive. En général, ceci n'est pas le cas car il existe toujours des interactions, mais dans une application simple comme la nôtre il est assez fréquent de négliger les interactions pour simplifier les études.

### D.1.7 Valeurs numériques des paramètres

Après avoir présenté en détail les modèles utilisés, on donne désormais en Tableaux D.1 et D.2, les valeurs des paramètres qui ont servi à réaliser les différentes simulations. Sauf indication, toutes les valeurs sont réalistes et données en per-unit (pu), i.e., relatives et sans unités. On précise également que des générateurs identiques sont utilisés pour les

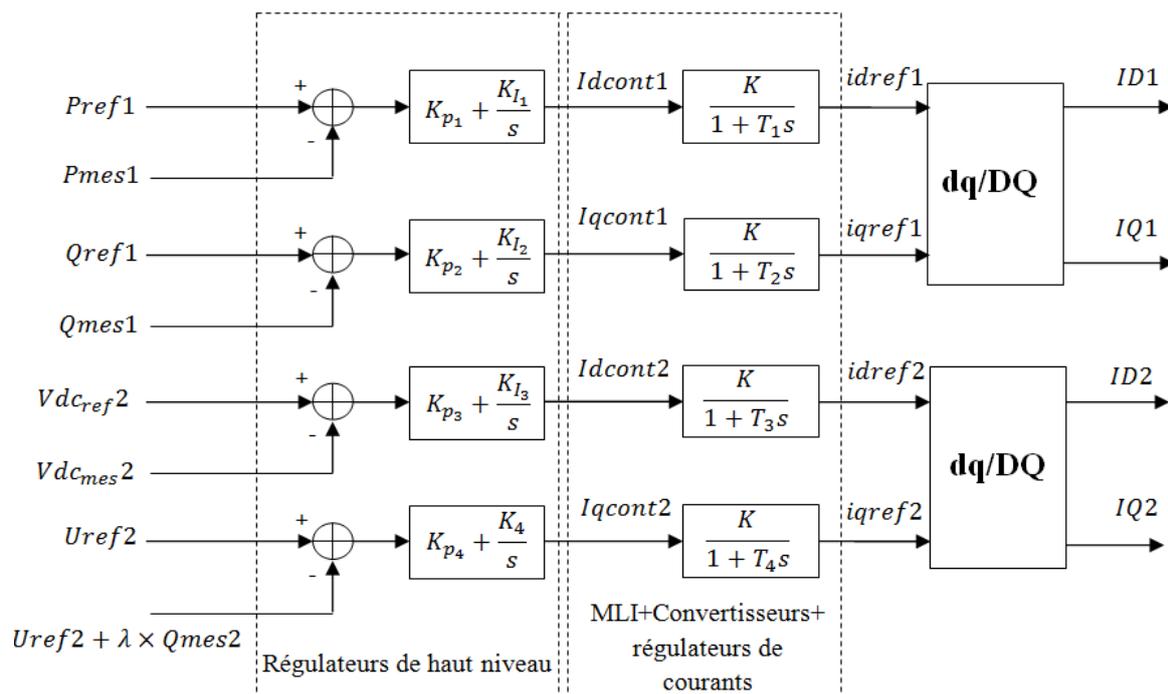


FIGURE D.5 – Schéma de contrôle de la liaison HVDC.

benchmarks présentés en Figs. 3.24 et 3.26.

TABLE D.1 – Valeurs pour le benchmark 1

Component	Parameter	Value (pu)
Generator	$T'_{d0}$	9.67
	$x_d$	2.38
	$x'_d$	0.336
	$x_q$	1.21
	$r$	$0.03 \times \frac{S_b}{V_b^2}$
	$w_0$	1
	$H$	0.1
	$S_n = S_b$ $V_n = V_b$	7.33 MVA 10 Kv
AVR	$K_a$	70
	$T_a$	0.4
Governor	$K_g$	0.05
	$T_g$	4
Line	$X_L$	$0.33 \times \frac{S_b}{V_b^2}$
	$X_c$	$3.86 \times 10^{-6} \times \frac{V_b^2}{S_b}$
	$\bar{R}$	$0.03 \times \frac{S_b}{V_b^2}$
	$w_r = w_b$ $\ell$	$2\pi 50$ 300 Km
Load	$R_{load}$	$110 \times \frac{S_b}{V_b^2}$
LTC	$\tau$	2
	$\epsilon$	$10^{-6}$

TABLE D.2 – Valeurs pour le benchmark 2

Component	Parameter	Value (pu)
Continuous Bus	$C_{eq}$	0.00199
	$Rdc_{12}$	0.00244
Inverters	$K$	1
	$T_1$	$1.1 \times 10^{-4}$
	$T_2$	$1.2 \times 10^{-4}$
	$T_3$ $T_4$	$1.3 \times 10^{-4}$ $1.4 \times 10^{-4}$
Controllers	$K_{p1}$	0
	$K_{I1}$	31
	$K_{p2}$	0
	$K_{I2}$	32
	$K_{p3}$	0
	$K_{I3}$ $K_{p4}$ $K_{I4}$	33 24 734
PLL	$K_{pPLL1}$	$9,2 \times 10^4$
	$K_{IPLL1}$	5
	$K_{pPLL2}$	$9,2 \times 10^4$
	$K_{IPLL2}$	10
Line	$\ell$	100 Km
Load	$R_{load}$	$100 \times \frac{S_b}{V_b^2}$

**Titre :** Modélisation et analyse structurelle du fonctionnement dynamique des systèmes électriques

**Mots clés :** Réduction de modèle, systèmes à paramètres distribués, systèmes électriques interconnectés, approche algébrique.

**Résumé :** Cette thèse traite des problématiques relatives à la modélisation, l'analyse et la simulation des systèmes électriques interconnectés. Elle a été principalement motivée par le besoin de comprendre et de clarifier les niveaux de modélisation de certains composants électriques comme les lignes de transmission ainsi que leur habilité à reproduire les différents phénomènes qui présentent un intérêt dans le système. En effet, pour faciliter les études et les simulations, les modèles les plus détaillés et les plus complexes sont généralement remplacés par des modèles plus simples selon le type des phénomènes visés. Usuellement, la structure dynamique de l'ensemble du système n'est pas prise en compte dans l'étape de simplification, ce qui fait que, dans la plupart du temps, des validations expérimentales sont nécessaires. C'est pourquoi, un cadre *structurel* et une vision *systémique* sont proposés dans cette thèse afin d'apporter des solutions plus générales et plus fiables qui s'adaptent mieux à l'approximation des systèmes électriques modernes. Le cadre proposé a permis, d'une part, d'expliquer, par le biais de la réduction, l'approximation du modèle à paramètres distribués d'une ligne par un modèle plus simple de dimension finie appelé  $\pi$ . Et d'autre part, d'étendre les investigations à une échelle plus grande où une nouvelle méthodologie de troncature est proposée pour

l'approximation des modèles dynamiques de grande taille. Elle se distingue des méthodes standards par l'efficacité d'évaluation des dynamiques du système, même dans des situations particulières, ainsi que la prise en compte de divers besoins pratiques. Il s'agit d'une approche mixte qui combine, d'une part, le principe de la troncature modale et, d'autre part, l'énergie de la réponse impulsionnelle afin de préserver les structures dynamique et physique du système. A cela s'ajoute également la problématique du choix des entrées qui vise à offrir plus de flexibilité à la méthode de réduction développée en minimisant le risque d'un mauvais choix des entrées du système. L'approche utilisée à cet effet est algébrique, et la contribution est une étude assez détaillée de l'état de l'art sur le sujet qui a finalement affiné d'avantage la problématique et conduit à de nouvelles pistes prometteuses car la question est jusqu'alors partiellement résolue. Plus précisément, les investigations doivent se concentrer désormais sur les commandes dites *aux bords* ou frontières. Dans l'avenir, les résultats obtenus dans cette thèse peuvent être exploités pour améliorer et faciliter les techniques actuelles de simulation et d'analyse des systèmes électriques en adaptant, par exemple, chaque modèle utilisé aux phénomènes à reproduire.



**Title :** Modeling and structural analysis of power systems dynamic model

**Keywords :** Model reduction, distributed parameters systems, power systems, algebraic approach

**Abstract:** This thesis was motivated by the need to better understand the connection between the models used in simulation of the power systems dynamics and the phenomena which have to be analyzed or reproduced by the simulation. Indeed, to study and to simulate the behavior of the interconnected power systems, the sophisticated models such as the one of the transmission lines are generally replaced by simple ones. Usually, a dynamic structure of the whole system is not taken into account in a simplification step. As a consequence, experimental validations are generally needed to assess the result of the approximation. For this reason, a structural framework and a systemic viewpoint are proposed to make the solutions more general and more appropriate to the approximation of modern power systems. First, this allows explaining the link between the distributed parameters model of the transmission lines and the finite dimensional one called  $\pi$  model based on the model reduction. Next, a novel mixed approximation methodology for large-scale dynamic models is proposed which allows one to better rate the dynamics of the system in different situations, and to take into account several practical needs. This methodology is based on a mixture between the modal truncation and the energy of the impulse response so that the dynamical and the physical structures of the system remain unchanged. Moreover, in the context of the *automatic control* theory, the issue related to a choice of input variables for distributed parameters systems is discussed. To address this issue, an algebraic approach is applied. Here, the main contribution is the detailed study conducted on the basis of the state of the art by which a new way is proposed. Because the issue is not fully solved, more investigations have to be focused on the so called *boundary control* variables. For practical applications, all the results presented in this study can be exploited to further improve numerical simulations and behavioral studies of large-scale power systems.

