



**HAL**  
open science

# Analyse mathématique de quelques équations intervenant en dynamique des populations et en cinétique des gaz

Abdul Majeed Al Izeri

► **To cite this version:**

Abdul Majeed Al Izeri. Analyse mathématique de quelques équations intervenant en dynamique des populations et en cinétique des gaz. Mathématiques générales [math.GM]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2016. Français. NNT : 2016CLF22765 . tel-01539433

**HAL Id: tel-01539433**

**<https://theses.hal.science/tel-01539433v1>**

Submitted on 14 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre : D.U. 2765

**UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL**  
UFR Sciences et Technologies

**ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES  
FONDAMENTALES**

N° 895

**THÈSE**

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITÉ**

**Spécialité :**

**Mathématiques appliquées**

Par : **AL IZERI ABDUL MAJEED**

**Analyse mathématique de quelques équations intervenant en  
dynamique des populations et en cinétique des gaz**

Soutenue publiquement le 8 décembre 2016, devant la commission d'examen composée de :

Président :	Ahmed ZEGHAL	-	Professeur, Université Sultan Slimane
Directeur :	Khalid LATRACH	-	Professeur, Université Blaise Pascal
Rapporteurs :	Jesús GARCÍA-FALSET	-	Professeur, Université de València
	Noureddine IGBIDA	-	Professeur, Université de Limoges
	Ahmed ZEGHAL	-	Professeur, Université Sultan Slimane
Examineur :	Véronique BAGLAND	-	MCF, Université Blaise Pascal



## Merci !

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de thèse monsieur Khalid Latrach. Merci pour votre gentillesse, votre disponibilité, vos conseils, votre rigueur scientifique et votre aide très précieuse tant au niveau personnel que professionnel. Je vous remercie aussi pour votre soutien moral sans faille et votre optimisme. Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur Ahmed ZEGHAL Professeur, Université Sultan Moulay Slimane en acceptant de présider ce Jury. Mes respectueux remerciements s'adressent aux rapporteurs de cette thèse, Jesús GARCÍA-FALSET Professeur, Université de València, Poggiale et Nouredine IGBIDA Professeur, Université de Limoges, pour avoir consacré du temps et de l'énergie à la lecture de mon manuscrit et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je suis également très reconnaissant envers Madame Véronique BAGLAND Maître de conférence, Université Blaise Pascal d'avoir spontanément accepté de se joindre au Jury et je la remercie de l'intérêt qu'elle a porté à mon travail.

Un immense merci à mon ami, Yousouf Kosad, un ami très spécial, qui m'a énormément soutenu dès le début, peu importe les différents endroits où nous étions tous.

Je ne peux terminer ces lignes sans remercier mes amis et mes proches qui n'ont jamais cessé de m'encourager. Mes proches, à qui je ne trouverai pas les mots pour leur dire exactement tout ce que je leur dois. A chaque pas et à chaque détour du chemin ils sont là, avec sollicitude et affection, avec la confiance en moi qui en manque parfois... Merci à mes parents Hussein, Mohammed et Zabnah de m'avoir amené si loin, à mes soeurs Anwar, Aktiar et mes frères Taha, Talal, Nashwan, Sultan d'être là et merci à toute ma famille et ma belle famille du fond du coeur. Enfin, merci à toi, Eman, pour ton soutien et ton amour. Dans les moments noirs, où je me sais être invivable, tu m'as réconforté. Dans mes colères, mes coups durs, tu m'as soutenu. Dans mes joies, mes bonheurs. Merci pour tout et simplement, merci d'être là.



# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>v</b>
0.1 Introduction . . . . .	v
0.2 Description des résultats du Chapitre 2 . . . . .	v
0.3 Description des résultats du chapitre 3 . . . . .	vi
0.4 Description des résultats du chapitre 4 . . . . .	vii
0.5 Description des résultats du chapitre 5 . . . . .	viii
0.6 Description des résultats du chapitre 6 . . . . .	ix
<b>1 Résultats préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Opérateurs accréatifs . . . . .	1
1.2 Opérateurs de type Nemytskii . . . . .	5
1.3 Mesure de non faible compacité . . . . .	5
1.4 Éléments de la théorie spectrale . . . . .	6
1.5 Le type essentiel . . . . .	7
1.6 Perturbations bornées . . . . .	8
1.7 Continuité en norme et compacité des restes de la série de Dyson-Phillips . . . . .	9
<b>2 A nonlinear age structured model of population dynamics with inherited properties</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction . . . . .	11
2.2 Notations and preliminaries . . . . .	12
2.3 Preparatory results . . . . .	16
	iii

2.4	Main results . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Well-posedness of a nonlinear model of proliferating cell populations with inherited cycle length</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	25
3.2	Notations and preliminaries . . . . .	27
3.3	Local boundary conditions . . . . .	29
3.4	Nonlocal boundary conditions . . . . .	32
<b>4</b>	<b>On the solutions for a nonlinear boundary value problem modeling a proliferating cell population with inherited cycle length</b>	<b>45</b>
4.1	Introduction . . . . .	45
4.2	Notation and Preliminaries . . . . .	47
4.3	Existence results . . . . .	57
<b>5</b>	<b>On a nonlinear version of Rotenberg model with infinite maturation velocities</b>	<b>67</b>
5.1	Introduction . . . . .	67
5.2	Notations and preliminaries . . . . .	68
5.3	Existence results . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Théorie spectrale d'un opérateur transport avec des opérateurs de collision élastiques et inélastiques</b>	<b>81</b>
6.1	Introduction . . . . .	81
6.2	Notations et préliminaires . . . . .	83
6.3	Analyse spectrale . . . . .	87
6.3.1	Cas $p \in (1, \infty)$ . . . . .	87
6.3.2	Cas $p = 1$ . . . . .	90
6.4	Problème d'évolution avec des conditions aux limites périodiques dans $L^p(\Omega \times V, dx dv)$ , $1 < p < +\infty$ . . . . .	93
	<b>Bibliographie</b>	<b>102</b>

---

## 0.1 Introduction

Cette thèse est composée de six chapitres. On commence tout d'abord par un chapitre intitulé *Résultats préliminaires* où on rappelle quelques résultats et définitions classiques d'analyse fonctionnelle dont on fera usage dans ce travail afin de le rendre plus autonome et de limiter les renvois systématiques à la littérature. Dans le second chapitre, on s'intéresse à un problème d'évolution non linéaire intervenant en dynamique des populations. Il est essentiellement motivé par le papier [23] où il est établi que le problème (0.2.1) admet une bonne solution (solution au sens de Bénilan) unique dans l'espace  $L^1$ . L'objet de ce chapitre est d'étendre les résultats obtenus dans [23] aux espaces  $L^p$ ,  $1 < p < +\infty$ . Dans le Chapitre 3, on aborde un problème d'évolution non linéaire obtenu comme perturbation (non linéaire) du problème considéré dans le Chapitre 2. Il s'agit d'une perturbation introduite dans le cadre linéaire dans [10, 11]. On montre que le problème est bien posé dans une classe d'espaces  $L^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , avec poids. L'analyse porte sur des conditions aux limites aussi bien locales que non locales. Le Chapitre 4 porte sur les résultats d'existence pour un problème non linéaire issu du modèle de Lebowitz-Rubinow [39] pour des longueurs du cycle infinies. Dans le cinquième chapitre, on étudie les résultats d'existence des solutions dans les espaces  $L^p$  pour une version non linéaire du modèle de Rotenberg [52] lorsque les vitesses de maturation peuvent être infinie. Le dernier chapitre est consacré à l'a+

analyse spectrale d'un opérateur de transport faisant intervenir des opérateurs de collision élastiques et inélastiques. Il s'agit d'étendre les résultats obtenus dans [30, 54] pour les conditions aux limites absorbantes à des conditions aux limites abstraites. On termine ce chapitre par l'étude de la compacité du reste d'ordre un de la série de Dyson-Phillips pour des conditions aux limites périodiques.

## 0.2 Description des résultats du Chapitre 2

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier l'existence et l'unicité des solutions du problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, a, l) = -\frac{\partial f}{\partial a}(t, a, l) + \sigma(a, l, f(t, a, l)), \\ f(0, a, l) = f_0(a, l), \\ f(t, 0, l) = [Kf(t, \cdot, \cdot)](l), \end{cases} \quad (0.2.1)$$

où  $0 < a < l$  et  $0 < l_1 < l < l_2$  et  $t \in [0, +\infty)$ . Ce problème est une version non linéaire d'un modèle linéaire introduit en 1974 par Lebowitz et Rubinow [39] pour décrire l'évolution d'une population cellulaire. Chaque cellule est distinguée par son âge  $a$  et sa longueur du cycle  $l$ . La longueur du cycle est une propriété héréditaire, elle représente le temps entre la naissance et la division des cellules. La constante  $l_1$  (resp.  $l_2$ ) désigne la longueur minimale (resp. maximale) du cycle. La fonction  $f(t, a, l)$  désigne la densité de population ayant l'âge  $a$  et la longueur du cycle  $l$  à l'instant  $t$ . La fonction  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  est le





---

$L^p$  avec poids où  $1 \leq p < \infty$ . Notre analyse porte aussi bien sur des conditions aux limites locales que non locales. On montre que le problème (0.3.1), pour chacune de ces conditions aux limites, admet une bonne solution unique dans  $L^1$ . Lorsque  $p \in (1, +\infty)$  cette solution est une solution faible parce que les espaces fonctionnels du problème admettent la propriété de Radon-Nikodym. De plus, si la donnée initiale est dans le domaine de l'opérateur  $T_K$  (voir Chapitre 3), alors la solution obtenue est une solution forte.

## 0.4 Description des résultats du chapitre 4

Dans ce chapitre, on étudie l'existence de solutions pour le problème aux limites non linéaire suivant :

$$\frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) + \sigma(a, l, \psi(a, l)) + \lambda \psi(a, l) = \int_{l_1}^{+\infty} \kappa(a, l, l') f(a, l', \psi(a, l')) \chi_{\Omega}(a, l') dl', \quad (0.4.1)$$

où  $\lambda$  est un nombre réel et  $\chi_{\Omega}$  désigne une fonction caractéristique de l'ensemble

$$\Omega := \{(a, l); 0 < a < l, 0 < l_1 < l < +\infty\}.$$

Pour la signification des différentes variables intervenant dans l'équation (0.4.1), on renvoie à la description du Chapitre 2. Il s'agit d'une version non linéaire du modèle de Lebowitz et Rubinow [39] étudiée dans les Chapitres 2 et 3. Comme précédemment, à la mitose, les cellules mères et les cellules filles sont liées par une loi de reproduction non linéaire, à savoir

$$\psi(0, l) = [K\psi(\cdot, \cdot)](l). \quad (0.4.2)$$

Ici  $K$  est évidemment un opérateur non linéaire défini comme dans les Chapitres 2 et 3.

Lorsque le maximum de la longueur du cycle est fini ( $l_2 < +\infty$ ), ce problème a été étudié dans [26] dans les cadres des espaces  $L^p$  où  $1 < p < \infty$ . Il a été montré que le problème (0.4.1)-(0.4.2) admet au moins une solution. Les arguments des preuves sont basés sur des résultats de compacité valides dans les espaces  $L^p$  pour  $1 < p < \infty$  et les théorèmes du point fixe de Schauder et de Krasnosel'skii. Le cas de l'espace  $L^1$  a été considéré dans [36]. En raison du manque de compacité dans  $L^1$ , les techniques des preuves ont été basées sur les propriétés spécifiques des sous-ensembles faiblement compacts de  $L^1$ . L'objectif principale de ce chapitre est d'étudier l'existence des solutions du problème (0.4.1)-(0.4.2) dans l'espace  $L^1$  lorsque la longueur maximale du cycle est infinie ( $l_2 = +\infty$ ). Les preuves utilisent des théorèmes du point fixe récents établis pour la topologies faible et utilisent une mesure de non faible compacité spécifique au problème. On montre que le problème (0.4.1)-(0.4.2) admet au moins une solution dans  $L^1([0, l] \times [l_1, +\infty), dadl)$ . On considère tout d'abord le cas où  $\sigma(a, l, \psi(a, l)) = \sigma(a, l)\psi(a, l)$  (opérateur de multiplication, ici on garde pour la fonction de multiplication le même nom  $\sigma$ ). Lors de l'étude du problème général (0.4.1)-(0.4.2), on a supposé que l'opérateur  $K$  est additif (sinon le problème ne peut pas être formulé sous la forme d'un problème du point fixe).

## 0.5 Description des résultats du chapitre 5

Le chapitre 5 porte sur l'étude du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} v \frac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu, v) + \sigma(\mu, v, \psi(\mu, v)) + \lambda \psi(\mu, v) \\ \psi|_{\Gamma_0} = K(\psi|_{\Gamma_1}), \end{cases} = \int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \psi(\mu, v')) dv', \quad (0.5.1)$$

où  $\mu \in [0, 1]$ ,  $v, v' \in [0, +\infty)$ ,  $\Gamma_0 = \{0\} \times [0, +\infty)$  et  $\Gamma_1 = \{1\} \times [0, +\infty)$ ,  $\psi|_{\Gamma_0}$  (resp.  $\psi|_{\Gamma_1}$ ) désigne la restriction de  $\psi$  à  $\Gamma_0$  (resp.  $\Gamma_1$ ) et  $K$  un opérateur non linéaire d'un espace fonctionnel approprié défini sur  $\Gamma_1$  vers un espace similaire défini sur  $\Gamma_0$ . La variable  $\mu$  (resp.  $v$ ) représente le degré de maturation (resp. la vitesse de maturation) des cellules. La fonction  $\psi(\mu, v)$  désigne la densité de population ayant le degré de maturation  $\mu$  et la vitesse de maturation  $v$ . Le noyau  $\zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \cdot)$  est le taux de transition des cellules de la vitesse de maturation  $v'$  à la vitesse de maturation  $v$ , tandis que  $\sigma(\mu, v, \cdot)$  désigne le taux de mortalité des cellules dû à des causes autres que la mitose et  $\lambda$  un nombre complexe.

Il s'agit d'une version non linéaire du modèle de Rotenberg introduit dans [52] décrivant la dynamique d'une population cellulaire. Le modèle linéaire de Rotenberg [52] a été considéré par de nombreux auteurs pour divers types de conditions aux limites. On renvoie, en particulier, aux travaux [9, 15, 34, 16]. Le modèle non linéaire ci-dessus a été tout d'abord étudié dans [33] dans les espaces  $L^p$ ,  $1 < p < +\infty$  lorsque la vitesse de maturation est finie. Moyennant des résultats de compacité (de type moyennes en vitesses dans le cadre neutronique). Il a été montré que le problème admet au moins une solution. L'analyse est basée sur les théorèmes du point fixe topologiques (théorèmes de Schauder et Krasnosel'skii). Les résultats du papier précédent ont été complétés dans [38] où une analyse de ce problème dans l'espace  $L^1$  a été présentée avec des arguments de preuves complètement différents.

Lorsque la vitesse de maturation  $v$  peut être infinie, c'est-à-dire  $v \in [0, +\infty)$ , ce problème a été étudié dans [12] dans l'espace  $L^1$ . Il a été montré que le problème (0.5.1) admet au moins une solution. Les arguments des preuves sont basés sur les propriétés des sous-ensembles faiblement compacts des espaces  $L^1$ , le fait que ces espaces admettent la propriété de Dunford-Pettis et des théorèmes du point fixe récents pour la topologie faible dans les espaces non réflexifs. Le but de ce chapitre est de compléter les résultats obtenus dans [12] en les généralisant aux espaces  $L^p$  où  $p \in (1, +\infty)$ . Moyennant le concept d'opérateurs réguliers (comme en neutronique), on montre un résultat de compacité pour ce problème. Ensuite, en écrivant ce dernier sous la forme d'un problème du point fixe, on montre, via les théorèmes classiques de Schauder et Krasnosel'skii, que le problème admet au moins une solution. On présente aussi des résultats d'existence de solutions positives et des solutions positives non triviales.

## 0.6 Description des résultats du chapitre 6

Dans ce chapitre, on étudie les propriétés spectrales de l'opérateur de transport suivant :

$$\begin{aligned}
A_H \varphi(x, v) &:= -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, v) - \sigma(v) \varphi(x, v) + \int_V k_c(x, v, v') \varphi(x, v') d\mu(v') \\
&+ \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_d^j(x, \rho_j, \omega, \omega') \varphi(x, \rho_j \omega') d\omega' \\
&+ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x, \rho, \omega, \omega') \varphi(x, \rho \omega') d\omega' \tag{0.6.1}
\end{aligned}$$

où  $x \in \Omega$  et  $v = \rho\omega \in V =: I \times \mathbb{S}^{N-1}$  avec  $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ ,  $\rho \in I := (\rho_{\min}, \rho_{\max})$  et  $V \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mu(\cdot)$  une mesure de Radon positive et bornée sur  $\mathbb{R}^N$ .  $V$  le support de  $\mu(\cdot)$ . Il s'agit d'un opérateur de transport étudié par E. W. Larsen et P. F. Zweifel dans [30] (voir aussi [54, 53]) pour des conditions aux limites absorbantes (flux rentrant nul). Il met en jeu des opérateurs de collision plus complexes partiellement élastiques et inélastiques. La fonction  $\varphi(x, v)$  représente la densité de probabilité des particules d'un gaz ayant la position  $x$  et la vitesse  $v$ . La fonction  $\sigma(\cdot)$  est appelée, la fréquence de collision. Les fonctions  $k_c(\cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $k_e(\cdot, \cdot, \cdot)$  et  $k_d^j(\cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $j = 1, \dots, l$ , sont les noyaux des opérateurs  $K_c$ ,  $K_e$  et  $K_d = \sum_{j=1}^l K_d^j$  appelés opérateurs de collisions classique, élastiques et inélastiques respectivement. L'objet de la première partie de ce travail est d'étendre les résultats obtenus dans [30, 54, 53] aux conditions aux limites abstraites. Les conditions aux bords seront modélisées par un opérateur frontière abstrait reliant les flux rentrant et les flux sortant. Il agit comme suit :

$$\varphi|_{\Gamma^-} = H(\varphi|_{\Gamma^+}). \tag{0.6.2}$$

L'ensemble  $\Gamma^-$  (resp.  $\Gamma^+$ ) représente la partie rentrante (resp. sortante) de l'espace des phases  $D \times V$ ;  $\varphi|_{\Gamma^-}$  (resp.  $\varphi|_{\Gamma^+}$ ) est la restriction de  $\varphi$  sur  $\Gamma^-$  (resp.  $\Gamma^+$ ) et  $H$  désigne un opérateur linéaire borné d'un espace de fonctions sur  $\Gamma^+$  convenable vers un espace similaire  $\Gamma^-$ .

L'opérateur  $A_H$  s'écrit sous la forme  $A_H = T_H + K$  où  $T_H$  désigne l'opérateur d'advection et  $K$  l'opérateur de collision avec  $K = K_c + K_e + K_d$ . On note que la connaissance du spectre de  $A_H$  est d'une importance fondamentale pour décrire les propriétés de la solution (lorsqu'elle existe) du problème de Cauchy gouverné par l'opérateur  $A_H$ . Une analyse détaillée des propriétés spectrales de l'opérateur  $A_0$  (c'est-à-dire  $H = 0$ ) est donnée dans les travaux [30, 54, 53] aussi bien pour le cas stationnaire que pour le problème d'évolution.

On montre que, si  $K_c$  est un opérateur régulier, alors  $K_c(\lambda - T_H - K_d - K_e)^{-1}$  et  $(\lambda - T_H - K_d - K_e)^{-1} K_c$  sont des opérateurs compacts dans les espaces  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ ,  $1 < p < \infty$  (voir, Proposition 6.3.1) et l'opérateur  $K_c(\lambda - T_H - K_e - K_d)^{-1} K_c$  est faiblement compact dans  $L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  (voir, Proposition 6.3.2). De plus, si  $\lambda \in \rho(T_H + K_c + K_e + K_d) \cap \rho(T_H + K_e + K_d)$  tel que  $(\lambda - T_H - K_c - K_e - K_d)^{-1} - (\lambda - T_H - K_e - K_d)^{-1}$  est

compact, alors on a  $\sigma_{ess}(T_H + K_e + K_d) = \sigma_{ess}(T_H + K_c + K_e + K_d)$  lorsque  $p \in (1, +\infty)$  où  $\sigma_{ess}(U)$  désigne le spectre essentiel de l'opérateur  $U$  (voir le corollaire 6.3.1). On note que ce résultat est ouvert pour  $p = 1$ . Enfin, on montre que  $\sigma(T_H + K_c + K_d + K_e) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -\tilde{\lambda} + \|K_e + K_d\|\}$  consiste au plus, à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie dans  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ ,  $1 \leq p < \infty$  (voir, les Théorèmes 6.3.1 et 6.3.2).

La seconde partie de ce travail est consacrée à l'étude de la compacité du reste d'ordre un de la série de Dyson-Philips du problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = (T_p + K)\varphi(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \varphi|_{x_i=-a_i} = \varphi|_{x_i=a_i} \end{cases} \quad (0.6.3)$$

où  $\Omega = \prod_{i=1}^N (-a_i, a_i)$ ,  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , est un pavé ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On montre que le reste d'ordre 1,  $R_1(t)$ , de la série de Dyson-Philips est compact dans les espaces  $L^p(\Omega \times V, dx dv)$ , ( $1 < p < \infty$ ). Comme conséquence immédiate de ce résultat, on a

$$\sigma_{ess}(e^{t(T_p+K_c+K_e+K_d)}) = \sigma_{ess}(e^{t(T_p+K_e+K_d)}) \quad (0.6.4)$$

ce qui entraîne l'égalité des types essentiels suivants

$$\omega_{ess}(e^{t(T_p+K_c+K_e+K_d)}) = \omega_{ess}(e^{t(T_p+K_e+K_d)}). \quad (0.6.5)$$

L'égalité (0.6.5) joue un rôle fondamental dans l'analyse du comportement asymptotique de la solution du problème de Cauchy (0.6.3).

On termine cette introduction par quelques introductions bibliographiques concernant ce travail.

- Le chapitre 2 est paru dans *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(4), (2016), 1571–1587.
- Le chapitre 3 est paru dans *Acta Mathematica Scientia*, 36(5), (2016), 1225–1244.
- Le chapitre 4 est paru dans *Nonlinear Analysis, T. M. A.*, 143, (2016), 1–18.
- Le chapitre 5 est paru dans *Applicable Analysis*, 95(6), (2016), 1256–1270.

# Résultats préliminaires

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques résultats et définitions classiques d'analyse fonctionnelle dont on fera usage dans ce travail. Ceci permettra de rendre le travail plus autonome et de limiter les renvois systématiques à la littérature.

## 1.1 Opérateurs accréatifs

Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach muni du crochet

$$[x, y]_s = \inf_{\lambda > 0} \frac{|x + \lambda y| - |y|}{\lambda}, \quad \forall x, y \in X.$$

Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow 2^X$  un opérateur multivoque de domaine  $\mathcal{D}(A) := \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$ . On peut identifier  $A$  à son graphe  $G(A) \subseteq X \times X$  où

$$G(A) = \{(x, y) \in X \times X \text{ tel que } y \in Ax\}.$$

On dit que  $(x, y) \in A$  si et seulement si  $x \in \mathcal{D}(A)$  et  $y \in Ax$ .

Dans tout ce travail, on note par  $R(A)$  l'image de l'opérateur  $A$ .

**Définition 1.1.1.** Soit  $\mathbf{J} : X \rightarrow 2^{X^*}$  l'application de dualité définie par

$$\mathbf{J}(x) = \{x^* : x^* \in X^*, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 \text{ et } \|x^*\| = \|x\|\},$$

pour tout  $x \in X$ . En outre, on définit  $\mathbf{J}_1(x)$  par

$$\mathbf{J}_1(x) = \{x^* : x^* \in X^*, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 \text{ et } \|x^*\| = 1\} = \frac{\mathbf{J}(x)}{\|x\|},$$

pour tout  $x \in X$ .

On note que  $[\cdot, \cdot]_s$  peut aussi s'exprimer en fonction de  $\mathbf{J}(\cdot)$  de la manière suivant :

$$[x, y]_s = \sup\{x^*(y) : x^* \in \mathbf{J}(x)\}.$$

• On dit que  $A$  est accréatif dans  $X$  s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- (i) pour tout  $\lambda > 0$ , la résolvante  $\mathcal{J}_\lambda^A := (I + \lambda A)^{-1}$  est une contraction de  $\mathcal{D}(\mathcal{J}_\lambda^A) = R(I + \lambda A)$  vers  $\mathcal{D}(A)$ ;
- (ii) pour tout  $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A$ , on a  $[x - \hat{x}, y - \hat{y}]_s \geq 0$ .

• On dit que  $A$  est  $m$ -accréatif sur  $X$  si  $A$  est accréatif et  $R(I + \lambda A) = X, \forall \lambda > 0$ .

• Soit  $\omega > 0$ . L'opérateur  $A$  est dit  $\omega$ -accréatif (resp.  $\omega$ - $m$ -accréatif) si  $A + \omega I$  est accréatif (resp.  $m$ -accréatif) où  $I$  est l'opérateur identité dans  $X$ .

**Proposition 1.1.1.** *Soit  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow 2^X$  un opérateur sur  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $A$  est un opérateur  $\omega$ - $m$ -accréatif;
- l'inégalité  $[u - v, x - y]_s \geq -\omega \|x - y\|$  est satisfaite pour tous  $x, y \in \mathcal{D}(A)$ ,  $u \in Ax$  et  $v \in Ay$ ;
- Pour chaque  $0 < \lambda < \frac{1}{\omega}$ , la résolvante  $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1} : R(I + \lambda A) \rightarrow \mathcal{D}(A)$  est une application  $\frac{1}{1 - \omega\lambda}$ -Lipschitzienne.

### Bonnes Solutions

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + A(u(t)) \ni f(t), & t \in (0, T), \\ u(0) = x_0 \in \mathcal{D}(A), \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où  $A$  est un opérateur accréatif sur  $X$ ,  $T > 0$  et  $f \in L^1(0, T; X)$ . On utilise la théorie des semi-groupes non-linéaires pour étudier (1.1.1), où on considère la discrétisation par le schéma implicite par rapport à  $t$ ,

$$\begin{cases} \frac{u_\epsilon^i - u_\epsilon^{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Au_\epsilon^i \ni f_\epsilon^i, \\ u_\epsilon^i \in \mathcal{D}(A), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

où  $\epsilon > 0$  et  $(t_0, t_1, \dots, t_n : f_\epsilon^1, \dots, f_\epsilon^n)$  est une discrétisation telle que

$$\begin{cases} 0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T, \quad t_i - t_{i-1} < \epsilon, \quad T - t_n \leq \epsilon, \\ |t_0| \leq \epsilon, f_\epsilon^1, \dots, f_\epsilon^n \in X \text{ et } \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_\epsilon^i\| dt < \epsilon. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

---

**Définition 1.1.2.** On appelle *bonne solution* de (1.1.3) toute application  $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$  telle que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $u_\epsilon^0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$  et  $(t_0, t_1, \dots, t_n : f_\epsilon^1, \dots, f_\epsilon^n)$  vérifiant (1.1.3) et pour lesquels (1.1.2) détermine  $(u_\epsilon^1, \dots, u_\epsilon^n)$  telles que  $\|u(t) - u_\epsilon^i\| < \epsilon$  pour tout  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

On a le résultat suivant (voir [8] ou [6, Corollaire 4.1]) :

**Proposition 1.1.2.** Si  $A$  est  $\omega$ - $m$ -accrétif sur  $X$  et  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ , alors le problème (1.1.1) admet une bonne solution unique  $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$  telle que  $u(0) = u_0$ .

• Si  $A$  est un opérateur accrétif sur  $X$ ,  $f, \hat{f} \in L^1(0, T; X)$  et  $u, \hat{u}$  sont les bonnes solutions respectives de  $\frac{du}{dt} + A(u(t)) \ni f(t)$  et  $\frac{d\hat{u}}{dt} + A(\hat{u}(t)) \ni \hat{f}(t)$ , alors (voir, [8])

$$\frac{d}{dt} \|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq [u(t) - \hat{u}(t), f(t) - \hat{f}(t)]_s \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T). \quad (1.1.4)$$

### Solutions intégrales

**Définition 1.1.3.** On appelle *solution intégrale* sur  $[0, T]$  de l'équation  $u'(t) + A(u(t)) \ni f(t)$ , toute fonction  $u \in C(0, T; X)$  vérifiant

$$\|u(t) - x\| \leq e^{w(t-s)} \|u(s) - x\| + \int_s^t e^{w(t-\tau)} [f(\tau) - y, u(\tau) - x]_s d\tau, \quad (1.1.5)$$

pour tous  $(x, y) \in A$  et  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

• Si  $u, v$  sont des solutions intégrales de  $u'(t) + A(u(t)) \ni f(t)$  et  $v'(t) + A(v(t)) \ni g(t)$ , respectivement, avec  $f, g \in L^1(0, T, X)$ , alors

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{wt} \|u(0) - v(0)\| + \int_0^t e^{w(t-s)} \|f(s) - g(s)\| ds. \quad (1.1.6)$$

### Solutions fortes

**Définition 1.1.4.** Soient  $X$  un espace de Banach et  $T > 0$  un réel donné. Une application  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite *absolument continue*, si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\sum_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i) < \delta \quad \text{implique} \quad \sum_{i=1}^N \|f(\beta_i) - f(\alpha_i)\|_X < \epsilon$$

pour toute famille de segments  $]\alpha_1, \beta_1[, \dots, ]\alpha_N, \beta_N[$  de  $[0, T]$ .

**Définition 1.1.5.** Une solution forte du problème (1.1.1) est une fonction  $u \in W^{1,\infty}(0, T; X)$ , i.e.,  $u$  est localement absolument continue et dérivable presque partout, et  $u'(t) + A(u(t)) \ni f(t)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ .



On introduit la propriété de Radon-Nikodym portant sur les espaces de Banach.

**Définition 1.1.6.** *On dit qu'un espace de Banach  $X$  admet la propriété de Radon-Nikodym, si toute application  $f : [0, T] \rightarrow X$  absolument continue est différentiable presque partout sur  $[0, T]$ .*

On rappelle le résultat suivant portant sur l'existence de solutions fortes (voir, par exemple, [6, Theorem 4.5] ou [8, p. 108]).

**Théorème 1.1.1.** *Soient  $X$  un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym,  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow 2^X$  un opérateur quasi- $m$ -accrétif et  $f \in BV(0, T; X)$ , i.e.,  $f$  est une fonction à variation bornée sur  $[0, T]$ . Alors, si  $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ , le problème (1.1.1) admet une solution forte unique.*

Nos résultats reposent aussi sur le théorème suivant établi dans [6, p. 150].

**Théorème 1.1.2.** *Soient  $X$  est un espace de Banach réflexif,  $A$  un opérateur quasi- $m$ -accrétif dans  $X$  et  $F : X \rightarrow X$  une application localement Lipschitzienne. Alors, pour tout  $y_0 \in \mathcal{D}(A)$ , le problème*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni F(u(t)) \\ u(0) = y_0 \end{cases}$$

*admet une solution forte locale.*

*En outre, si  $\langle -Fu, w \rangle \geq -\alpha \|u\|^2 + \beta$ ,  $\forall u \in X$  et  $\forall w \in \mathbf{J}_1(u)$ .*

*Alors, la solution est globale.*

### Solutions faibles

**Définition 1.1.7.** *On dit que  $u \in C(0, T; X)$  est une solution faible du problème (1.1.1), s'il existe des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W^{1, \infty}(0, T; X)$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(0, T; X)$  vérifiant les assertions suivantes :*

1.  $u'_n(t) + Au_n(t) \ni f_n(t)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_\infty = 0$ ;
3.  $u(0) = x_0$ ;
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ .

On rappelle aussi le résultat suivant portant sur l'existence des solutions faibles pour les espaces de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym.

**Théorème 1.1.3.** *Si  $X$  est un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym. Alors, le problème (1.1.1) admet une solution faible unique qui est la bonne solution de ce problème.*

---

## 1.2 Opérateurs de type Nemytskii

On rappelle tout d'abord la notion de fonction de Carathéodory qui est à la base de la définition des opérateurs de type Nemytskii (ou superposition). Pour plus d'informations sur les opérateurs de Nemytskii, on renvoie le lecteur, par exemple, aux références [3, 4].

**Définition 1.2.1.** Soit  $\Omega$  un-sous ensemble de  $\mathbb{R}^N$ . On dit qu'une fonction  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de Carathéodory sur  $\Omega \times \mathbb{R}$  si elle vérifie les conditions suivantes

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } u \rightarrow f(u, t) \text{ est mesurable sur } \Omega; \\ \text{p.p. en } u \in \Omega, \text{ la fonction } t \rightarrow f(u, t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si  $f$  est une fonction de Carathéodory, on peut définir l'opérateur  $\mathcal{N}_f$  sur l'ensemble des fonctions mesurables  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$(\mathcal{N}_f \psi)(z) := f(z, \psi(z))$$

pour tout  $z \in \Omega$ . L'opérateur  $\mathcal{N}_f$  est appelé l'opérateur Nemytskii (ou superposition) engendré par  $f$ . On rappelle un résultat important de la théorie des opérateurs de Nemytskii sur les espaces  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , (voir, par exemple, [3, 4]).

**Lemme 1.2.1.** Soient  $p \in [1, +\infty)$  et  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Carathéodory. Si l'opérateur  $\mathcal{N}_f$  envoie  $L^p(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$ , alors  $\mathcal{N}_f$  est continu et envoie les sous-ensembles bornés dans les sous-ensembles bornés. De plus, il existe une constante  $\eta > 0$  et une fonction  $h(\cdot)$  positive de  $L^p(\Omega)$  telles que

$$|f(x, y)| \leq h(x) + \eta |y| \text{ presque partout en } x, \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Pour la preuve (voir, par exemple, [3, 4]).

## 1.3 Mesure de non faible compacité

L'objectif de cette section est de faire quelques rappels sur la notion de mesure de non faible compacité dans les espaces de Banach. Soit  $\mathfrak{B}(X)$  l'ensemble de toutes les parties non vides bornées de  $X$  et  $\mathcal{W}(X)$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{B}(X)$  composé de toutes les parties faiblement compactes de  $X$ .

**Définition 1.3.1.** Une application  $\mu : \mathfrak{B}(X) \rightarrow [0, +\infty)$  est dite une mesure de non faible compacité sur  $X$  si elle satisfait les conditions suivantes :

- 1) Si  $\mu(M) = 0$ , alors  $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(X)$ ;
- 2)  $M_1 \subset M_2 \implies \mu(M_1) \leq \mu(M_2)$ ;
- 3)  $\mu(\overline{\text{co}}(M)) = \mu(M)$ ;

$$4) \mu(M \cup N) = \max(\mu(M), \mu(N)).$$

La famille  $\ker \mu$  est appelée le noyau de la mesure de non faible compacité  $\mu(\cdot)$ .

On note que  $\mu(\cdot)$  satisfait la propriété suivante :

$$5) \mu(\overline{M}^w) = \mu(M),$$

où  $\overline{M}^w$  désigne la fermeture de  $M$  dans  $X$  pour la topologie faible  $\sigma(X, X^*)$ . En effet, la propriété 5) résulte des inclusions  $M \subseteq \overline{M}^w \subseteq \overline{\sigma}(M)$  et les propriétés 2) et 3) de la définition ci-dessus.

La mesure de non faible compacité  $\mu$  est dite homogène si, pour tout  $M \in \mathfrak{B}(X)$ , on a

$$6) \mu(\lambda M) = |\lambda| \mu(M), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

et elle dite sous-additive si elle vérifie

$$7) \mu(M + N) \leq \mu(M) + \mu(N), \quad \forall M, N \in \mathfrak{B}(X).$$

On note que si  $\mu(\cdot)$  est une mesure de non faible compacité sur un espace de Banach (au sens de la définition 1.3.1). On déduit de l'axiome du maximum 4) la propriété suivante :

8) si  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fermés de  $\mathfrak{B}(X)$  décroissante (au sens de l'inclusion) telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(M_n) = 0$ , alors l'intersection  $M_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$  est non vide et faiblement compact de  $X$ .

## 1.4 Éléments de la théorie spectrale

Soit  $X$  un espace de Banach complexe et  $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$  un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans  $X$ . On appelle ensemble résolvant de  $A$ , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X \text{ est bijectif}\}.$$

Le spectre de  $A$ ,  $\sigma(A)$ , est le complémentaire de  $\rho(A)$  dans  $\mathbb{C}$ . On note que si  $\lambda \in \rho(A)$ , alors l'inverse

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$$

est défini sur tout l'espace  $X$  et est borné,  $R(\lambda, A)$  est dite la résolvante de  $A$ .

On appelle borne spectrale de l'opérateur  $A$ , le réel défini par

$$s(A) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Si  $A$  est un opérateur borné de  $X$  dans lui même, on appelle rayon spectral de  $A$ , le nombre

$$r_\sigma(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

En fait dans ce cas, le spectre de  $A$  est un compact de  $\mathbb{C}$ .

Soit  $A$  un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans  $X$ . On dit que  $A$  est un opérateur de Fredholm si :

- 
1.  $\alpha(A) = \dim(N(A)) < \infty$  ;
  2.  $R(A)$  est fermé ;
  3.  $\beta(A) = \text{codim}(R(A)) < \infty$

où  $R(A)$  et  $N(A)$  sont, respectivement, l'image et le noyau de l'opérateur  $A$ . On rappelle que la co-dimension d'un sous-ensemble  $M$  d'un espace de Banach est définie par  $\text{codim}(M) := \dim(X/\overline{M})$ .

Soit  $A$  un opérateur de Fredholm sur  $X$ . On appelle indice de  $A$ , le nombre  $i(A) = \alpha(A) - \beta(A)$  .

On appelle le domaine de Fredholm de  $A$  la partie du plan complexe définie par

$$\Phi_A := \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda - A \text{ est un opérateur de Fredholm sur } X\}.$$

**Définition 1.4.1.** Soit  $A$  un opérateur fermé à domaine dense. On définit le spectre essentiel (au sens de Schechter) de  $A$  par

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{K}(X)} \sigma(A + C),$$

où  $\mathcal{K}(X)$  désigne l'idéal des opérateurs compacts sur  $X$ .

Enfin, on signale le résultat suivant portant sur la stabilité du spectre essentiel (voir, par exemple, [48, Theorem 4.7, p. 17]).

**Théorème 1.4.1.** Soit  $A$  et  $B$  deux opérateurs fermés à domaine dense dans  $X$ . S'il existe  $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$  tel que  $(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1}$  est un opérateur compact, alors

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B).$$

## 1.5 Le type essentiel

Soient  $X$  un espace de Banach et  $(T(t))_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu (ou  $C_0$ -semi-groupe) d'opérateurs de  $\mathcal{L}(X)$  de générateur  $A$  (pour la définition et les propriétés élémentaires, on pourra consulter [19, 49]). Selon le théorème 2.2 dans [49, p. 4], il existe  $M \geq 1$  et  $w \geq 0$  tel que

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad \text{pour } t \in [0, +\infty). \quad (1.5.1)$$

On appelle le type du  $C_0$ -semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ , le réel  $\omega$  défini par

$$\omega = \inf \{w \in \mathbb{R} : \exists M \geq 1, w > 0 \text{ tels que l'équation (1.5.1) est satisfaite}\}.$$

On note que l'on peut aussi définir le type de  $(T(t))_{t \geq 0}$  par

$$\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|.$$

Lorsque  $\omega$  est le type du  $C_0$ -semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ , on a, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$r(T(t)) = e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

D'après [58], il existe  $-\infty \leq \omega_{ess} \leq \omega$  tel que

$$r_{ess}(T(t)) = e^{\omega_{ess} t} \quad \forall t \geq 0.$$

La constante  $\omega_{ess}$  s'appelle le type essentiel du  $C_0$ -semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ .

On note que, si  $\omega_{ess} < \omega$ , alors l'ensemble  $\{\eta \in \sigma(T(t)) : |\eta| > e^{\omega_{ess} t}\}$  est un ensemble vide ou formé au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique fini.

## 1.6 Perturbations bornées

Soit  $X$  un espace de Banach,  $T$  un opérateur fermé dans  $X$  et  $K \in \mathcal{L}(X)$ . Si  $T$  engendre un  $C_0$ -semi-groupe  $(U(t))_{t \geq 0}$ , alors par le théorème classique des perturbations bornées de Phillips [49, Theorem 1.1, p. 76] (voir aussi [19, p. 158]),  $T+K$  engendre un  $C_0$ -semi-groupe  $(V(t))_{t \geq 0}$ , donné par la série de Dyson-Phillips :

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j = \sum_{j=0}^{n-1} U_j(t) + R_n(t), \quad (1.6.1)$$

où

$$U_0(t) = U(t), \quad \text{et} \quad U_{j+1}(t) = \int_0^t U_0(s) K_c U_j(t-s) ds \quad (j \geq 0).$$

La série (1.6.1) converge dans  $\mathcal{L}(X)$  uniformément sur les intervalles bornés. De plus, le terme  $R_n(t)$ , appelé le reste d'ordre  $n$  de la série, est donné par

$$R_n(t) = \int_{s_1+s_2+\dots+s_n \leq t, s_i \geq 0} U(s_1) K \dots K U(s_n) K U\left(t - \sum_{i=1}^n s_i\right) ds_1 \dots ds_n.$$

On présente maintenant le théorème fondamental suivant qui illustre l'incidence de la compacité d'un reste de la série de Dyson-Phillips sur l'étude du comportement asymptotique.

**Théorème 1.6.1.** *Soit  $X$  un espace de Banach. Avec les mêmes notations que ci-dessus, si un certain reste  $R_n(t)$  est compact pour  $t \geq t_0$ , alors*

$$r_{ess}(U(t)) = r_{ess}(V(t)), \quad t \geq 0.$$

En outre, l'ensemble

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega_{ess}(t)}\}, \quad t \geq 0$$

est formé, au plus, de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie [55].

---

Ce travail a été initié par Jorgen [27] et ensuite I. Vidav [57]. Ce dernier a été le premier à montrer (sous certaines conditions restrictives) via l'alternative de Fredholm (dite aussi l'alternative de Gohberg-Shmulyan) que  $\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega_{ess}(T)}\}$  consiste, au plus, à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Plus tard, le travail de I. Vidav a été simplifié et amélioré par J. Voigt [58], L. Weis [61] et M. Mokhtar-Kharroubi [46, Chapter 2] :

**Théorème 1.6.2.** *On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $R_n(t)$  soit compact sur  $L^p(\Omega)$ , ( $1 < p < +\infty$ ). Alors,*

$$\omega_{ess}(V(t)) = \omega_{ess}(U(t)), \quad t \geq 0. \quad (1.6.2)$$

## 1.7 Continuité en norme et compacité des restes de la série de Dyson-Phillips

On présente maintenant quelques outils pour l'étude des restes de la série de Dyson Phillips.

**Définition 1.7.1.** *Soient  $f, g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  deux applications fortement continues. Leur convolution est donnée par*

$$f * g(t) : X \ni x \rightarrow \int_0^t f(t-s)g(s)x ds \in \mathcal{L}(X), \quad t \geq 0.$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$[f]^n = f * f * \dots * f \quad (n \text{ fois}).$$

On note que l'opérateur  $*$  est associatif.

La relation entre  $U_n(t)$  et  $R_n(t)$  est donnée dans la proposition suivante (voir [46, Lemme 2.1, p. 14]) :

**Proposition 1.7.1.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$U_n(t) = [UK]^n * U(t) \quad \text{et} \quad R_n(t) = [UK]^n * V(t).$$

On a aussi le résultat suivant (voir [46, Lemme 2.3]) :

**Proposition 1.7.2.** *Soient  $f, g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  deux applications fortement continues et soit  $0 < M \leq +\infty$  :*

- (i) *Si  $f(t)$  ou  $g(t)$  est compacte pour tout  $t \in ]0, M[$  alors  $f * g(t)$  est compacte pour tout  $t \in ]0, M[$ .*
- (ii) *Si  $]0, M[ \ni t \rightarrow f(t)$  ou  $]0, M[ \ni t \rightarrow g(t)$  est continue en norme, alors  $]0, M[ \ni t \rightarrow f * g(t)$  l'est aussi.*

Comme conséquence des propositions 1.7.1 et 1.7.2, on a :

**Théorème 1.7.1.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors*

- (i) *Si  $[UK]^n(t)$  est compact pour tout  $t > 0$ , alors  $U_n(t)$  l'est aussi.*
- (ii) *Si  $0 < t \rightarrow [UK]^n(t)$  est continue en norme, alors  $0 < t \rightarrow U_n(t)$  l'est également.*

Le résultat suivant lie la régularité de  $R_n(t)$  à celle du terme  $U_n(t)$ . Le lecteur pourra consulter, par exemple, les théorèmes 2.6 et 2.7 dans [46].

**Théorème 1.7.2.** *Soit  $0 < M \leq +\infty$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a*

- (i) *Le reste  $R_n(t)$  est compact pour tout  $t \in ]0, M[$  si et seulement si  $U_n(t)$  est compact pour tout  $t \in ]0, M[$ .*
- (ii) *L'application  $]0, M[ \ni t \rightarrow R_n(t) \in \mathcal{L}(X)$  est continue en norme si et seulement si  $]0, M[ \ni t \rightarrow U_n(t) \in \mathcal{L}(X)$  est aussi continue en norme .*

On termine cette section par rappeler le résultat d'interpolation suivant établi dans [20, Theorem 3.10, p. 57].

**Théorème 1.7.3.** *Soit*

$$B \in \cap_{p \geq 1} \mathcal{L}(L^p(\Lambda)).$$

*S'il existe  $1 \leq p_0 < \infty$  tel que  $B$  soit compact dans  $L^{p_0}(\Lambda)$ , alors  $B$  est compact dans tout  $L^p(\Lambda)$ ,  $1 < p < \infty$ .*

# A nonlinear age structured model of population dynamics with inherited properties

## 2.1 Introduction

In this chapter we are concerned with existence and uniqueness of solutions to the initial-boundary value problem

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, a, l) = -\frac{\partial f}{\partial a}(t, a, l) + \sigma(a, l, f(t, a, l)), \\ f(0, a, l) = f_0(a, l), \\ f(t, 0, l) = [Kf(t, \cdot, \cdot)](l), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

where  $t > 0$ ,  $0 < a < l$  and  $0 < l_1 < l < l_2$ .

The linear version of this model was introduced by Lebowitz and Rubinow [39] for modeling microbial populations. Individual cells are distinguished by the age  $a$  and the cells cycle length  $l$ . The function  $f(t, a, l)$  represents the density of population with age  $a$  and cell cycle length  $l$  at time  $t$ . By cell cycle length we mean the time between cell birth and cell division. It is an inherent characteristic of cells determined at birth, i.e. the duration of the cycle from cell birth to cell division is determined at birth. The constant  $l_1$  (resp.  $l_2$ ) denotes the minimum cycle length (resp. the maximum cycle length). The function  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  is the rate of cell mortality or loss due to causes other than division. Various mathematical aspects concerning the Cauchy problem : well-posedness (generation results), spectral analysis, time asymptotic behavior of solution (when it exists) were discussed in many papers (we refer, for example, to the works [59, 60, 34] and the references therein).



As it was observed by Rotenberg [52], it seems that the linear model is not adequate. Indeed, the cells under consideration are in contact with a nutrient environment which is not part of the mathematical formulation. Fluctuations in nutrient concentration and other density-dependent effects such as contact inhibition of growth make the transition rates functions of the population density, thus creating a nonlinear problem. On the other hand, the biological boundary of  $l_1$  and  $l_2$  are fixed and tightly coupled through out mitosis. The conditions present at the boundaries are felt throughout the system and cannot be remote. This phenomena suggests that at mitosis the daughter cells and parent cell are related by a nonlinear reproduction rule.

At mitosis, the daughter and mother cells are related by a nonlinear rule which describes the boundary conditions. It writes in the shape

$$f(t, 0, l) = [Kf(t, \cdot, \cdot)](l), \tag{2.1.2}$$

where  $K$  stands for a nonlinear operator on suitable trace spaces, called the transition operator, and is intended to model the transition from mother cycle length to daughter cycle length covering, in particular, the usual biological models [39, 59, 60, 34].

This work is inspired and motivated by the work [23] where the well-posedness of Problem (2.1.1)-(2.1.2) was discussed in the space  $L^1$ . This work is intended to complete the results obtained in [23]. We prove that Problem (2.1.1)-(2.1.2) has a unique mild solution in  $L^p$ -spaces with  $1 < p < \infty$ . Since these spaces have the Radon-Nikodym property, if the initial data  $f_0$  belongs to  $\mathcal{D}(T_K)$  or  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$ , then this solution is a strong one.

The structure of this chapter is as follows. In the next section we introduce the functional setting of the problem and the main assumptions. In Section 3 some preparatory lemmas required in the proof of our results are collected. The main results of this paper are stated in Section 4. In Theorem 2.4.1 we suppose that  $0 \leq l_1$  and the boundary operator  $K$  is a strict contraction. Under these hypotheses, Problem (2.1.1)-(2.1.2) is well posed on the spaces  $X_p$ . In contrast to the first theorem, in Theorem 2.4.2 we suppose that  $l_1 > 0$  and  $K$  is a Lipschitz operator without any condition on the size of its Lipschitz constant. Under these conditions we prove that Problem (2.1.1)-(2.1.2) is well-posed in the weighted spaces  $X_p^\omega$ . Evidently, Theorem 2.4.2 is not valid if  $l_1 = 0$ .

Note that Problem (2.1.1)-(2.1.2) was considered for nonlocal boundary conditions on  $L^p$ -spaces in [56]. A stationary version of this problem was also discussed in [36]. We point out that the book [50] provides a detailed account for transport equations in Biology where the mathematical analysis of various kinds of such equations was derived.

## 2.2 Notations and preliminaries

The main goal of this work is to discuss existence and uniqueness of solution to the time-dependent problem (2.1.1)-(2.1.2). In order the state our result, we will first fix the

---

notations and introduce the functional setting of the problem. Let  $1 < p < \infty$  and set

$$X_p = L_p(\Delta, dadl)$$

where  $\Delta := \{(a, l); 0 < a < l, l_1 < l < l_2\}$  with  $0 < l_1 < l < l_2 < \infty$ . The space  $X_p$  is endowed with its natural norm is a Banach space. We denote by  $X_p^1$  and  $X_p^2$  the boundary spaces

$$X_p^1 = L_p(\Gamma_1, dl), \quad X_p^2 = L_p(\Gamma_2, dl),$$

where

$$\Gamma_1 := \{(0, l) : l \in (l_1, l_2)\} \quad \text{and} \quad \Gamma_2 := \{(l, l) : l \in (l_1, l_2)\}.$$

Let  $W_p$  be the partial Sobolev space defined by

$$W_p = \left\{ f \in X_p : \frac{\partial f}{\partial a} \in X_p \right\}.$$

$W_p$  equipped with the norm

$$\|f\|_{W_p} = \left[ \|f\|_p^p + \left\| \frac{\partial f}{\partial a} \right\|_p^p \right]^{1/p}$$

is a Banach space. For the traces, we shall use the following notations :

$$\begin{cases} \gamma_0(f) = f|_{\Gamma_1}(l) = f(0, l), \\ \gamma_1(f) = f|_{\Gamma_2}(l) = f(l, l). \end{cases}$$

We recall that it is proved in [34, Lemma 2.1] that, if  $f|_{\Gamma_1} \in X_p^1$  (resp.  $f|_{\Gamma_2} \in X_p^2$ ), then  $f|_{\Gamma_2} \in X_p^2$  (resp.  $f|_{\Gamma_1} \in X_p^1$ ).

One can define the space  $\widetilde{W}_p$  be the space

$$\widetilde{W}_p = \{f \in W_p \text{ such that } f|_{\Gamma_1} \in X_p^1\}.$$

Therefore, we have also

$$\widetilde{W}_p = \{f \in W_p \text{ such that } f|_{\Gamma_2} \in X_p^2\}.$$

So, any function  $f \in \widetilde{W}_p$  has traces  $f|_{\Gamma_1}$  and  $f|_{\Gamma_2}$  belonging to the boundary spaces  $X_p^1$  and  $X_p^2$ , respectively.

As indicated in the introduction, the boundary conditions are modeled by an operator  $K$  defined from  $X_p^2$  into  $X_p^1$ . It is a nonlinear reproduction rule relating mother cells to daughter cells. We suppose that  $K$  satisfies the following condition :

- (H1) There exists  $\kappa > 0$  such that, for all  $u, v \in X_p^2$ , we have

$$\|K(u) - K(v)\| \leq \kappa \|u - v\|.$$

Let  $T_K$  be the operator defined by

$$\begin{cases} T_K : \mathcal{D}(T_K) \subset X_p \longrightarrow X_p, \\ f \longrightarrow (T_K f)(a, l) = \frac{\partial f}{\partial a}(a, l), \\ \mathcal{D}(T_K) = \{f \in \widetilde{W}_p : f|_{\Gamma_1} = K(f|_{\Gamma_2})\}. \end{cases}$$

Let  $\omega$  be an arbitrary real number satisfying

$$\omega > \max\left(0, \frac{1}{l_1} \ln(\kappa)\right).$$

( $\kappa$  is the constant appearing in the hypothesis (H1)) and define the weighted space  $X_p^\omega$  by

$$X_p^\omega = L_p(\Delta, h^\omega da dl).$$

where the weight function  $h^\omega(\cdot, \cdot)$  is given by

$$h^\omega(a, l) = e^{-\omega(l-a)}.$$

The space  $X_p^\omega$  is endowed with the

$$\|f\|_{p,\omega} = \left( \int_{\Delta} |f|^p h^\omega(a, l) da dl \right)^{1/p} = \left( \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l |f|^p h^\omega(a, l) da \right) dl \right)^{1/p}$$

is a Banach space.

Let  $W_p^\omega$  be the space defined by

$$W_p^\omega = \left\{ f \in X_p^\omega : \frac{\partial f}{\partial a} \in X_p^\omega \right\}$$

equipped with the norm

$$\|f\|_{W_p^\omega} = \left[ \|f\|_{p,\omega}^p + \left\| \frac{\partial f}{\partial a} \right\|_{p,\omega}^p \right]^{1/p}$$

is a Banach space.

Let us now prove a result similar to that of Lemma 2.2.1 in [34] for the space  $X_p^\omega$ .

**Lemma 2.2.1.** *Let  $f \in W_p^\omega$ . If  $f|_{\Gamma_1} \in X_p^1$ , then  $f|_{\Gamma_2} \in X_p^2$  and vice versa.*

**Proof.** Let  $f \in W_p^\omega$  such that  $f|_{\Gamma_1} \in X_p^1$ . We have

$$f(l, l) = f(0, l) + \int_0^l \frac{\partial f}{\partial a}(a, l) da. \tag{2.2.1}$$

Now observe that

$$1 \leq e^{\omega(l-a)} e^{-\frac{1}{q}\omega(l-a)} e^{-\frac{1}{p}\omega(l-a)} \leq e^{l_2\omega} e^{-\frac{1}{p}\omega(l-a)}$$

where  $q$  is the exponent conjugate of  $p$ . Then, applying Holder inequality we get

$$|f(l, l)| \leq |f(0, l)| + e^{l_2\omega} l_2^{1/q} \left( \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left| \frac{\partial f}{\partial a}(a, l) \right|^p da \right)^{1/p}$$

and consequently,

$$|f(l, l)|^p \leq 2^p [ |f(0, l)|^p + e^{pl_2\omega} l_2^{p/q} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left| \frac{\partial f}{\partial a}(a, l) \right|^p da ].$$

This yields

$$\begin{aligned} \int_{l_1}^{l_2} |f(l, l)|^p dl &\leq 2^p \left[ \int_{l_1}^{l_2} |f(0, l)|^p dl + e^{pl_2\omega} l_2^{p/q} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left| \frac{\partial f}{\partial a}(a, l) \right|^p dadl \right] \\ &\leq 2^p \left[ \|f|_{\Gamma_1}\|_{X_p^1} + e^{pl_2\omega} l_2^{p/q} \left\| \frac{\partial f}{\partial a} \right\|_{X_{p,\omega}}^p \right] < +\infty. \end{aligned}$$

Writing Eq. (2.2.1) in the form  $f(0, l) = f(l, l) - \int_0^l \frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, l) da$  and arguing as above we derive the converse.  $\square$

Next, we define the space

$$\widetilde{W}_p^\omega = \{f \in W_p^\omega \text{ such that } f|_{\Gamma_1} \in X_p^1\}. \quad (2.2.2)$$

Clearly, by Lemma 2.2.1, we have

$$\widetilde{W}_p^\omega = \{f \in W_p^\omega \text{ such that } f|_{\Gamma_2} \in X_p^2\}.$$

Accordingly, any function  $f \in \widetilde{W}_p^\omega$  has traces  $f|_{\Gamma_1}$  and  $f|_{\Gamma_2}$  belonging to the boundary spaces  $X_p^1$  and  $X_p^2$ , respectively.

Let  $T_K^\omega$  be the operator defined by

$$\begin{cases} T_K^\omega : \mathcal{D}(T_K^\omega) \subset X_p^\omega \longrightarrow X_p^\omega, \\ f \longrightarrow T_K^\omega(f)(a, l) = \frac{\partial f}{\partial a}(a, l), \\ \mathcal{D}(T_K^\omega) = \{f \in \widetilde{W}_p^\omega : f|_{\Gamma_1} = K(f|_{\Gamma_2})\}. \end{cases}$$

We close this section by introducing the following hypotheses required below.

- (H2) The function  $\sigma : \Delta \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  is a Carathéodory function satisfies the following condition : there exists  $\zeta \in L^\infty(\Delta)$  such that

$$|\sigma(a, l, z_1) - \sigma(a, l, z_2)| \leq |\zeta(a, l)| |z_1 - z_2|,$$

where  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ .

- (H3) There exist a function  $\tilde{\sigma} : \Delta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and two constants  $\underline{\tilde{\sigma}} \in \mathbb{R}$  and  $\overline{\tilde{\sigma}} > 0$  such that

$$\sigma(a, l, z) = \tilde{\sigma}(a, l, z)z, \text{ for all } (a, l, z) \in \Delta \times \mathbb{R},$$

and

$$\underline{\tilde{\sigma}} \leq \tilde{\sigma}(a, l, f) \leq \overline{\tilde{\sigma}}, \text{ for all } (a, l) \in \Delta, f \geq 0.$$

Since  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  is a Carathéodory function, one can define the Nemytskii operator  $\mathcal{N}_\sigma : X_p^\omega \rightarrow X_p^\omega$  by

$$(\mathcal{N}_\sigma f)(a, l) = \sigma(a, l, f(a, l)).$$

## 2.3 Preparatory results

In this section we will discuss the  $m$ -accretivity of the operator  $T_K$  on the space  $X_p$  and the  $\omega$ - $m$ -accretivity of  $T_K^\omega$  on the space  $X_p^\omega$  where  $1 < p < \infty$ . For simplicity, in the remainder of this paper, we shall identify  $X_p^1$  and  $X_p^2$  with the space

$$Y_p := L_p([l_1, l_2], dl).$$

Before going further, let us first recall that the function  $\text{sgn}_0$  is defined by

$$\text{sgn}_0(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r > 0, \\ 0 & \text{if } r = 0, \\ -1 & \text{if } r < 0, \end{cases}$$

and the definition of the symbol  $[\cdot, \cdot]_s$  is recalled in Section 1.1 (see also [6, pp. 102-103]).

**Lemma 2.3.1.** *Assume that the transition operator  $K$  is a strict contraction with Lipschitz constant  $\kappa$  and  $0 \leq l_1$ . Then  $T_K$  is a  $m$ -accretive on  $X_p$ .*

**Proof.** We first prove that  $T_K$  is accretive on  $X_p$ . Indeed, let  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T_K)$  and put  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ , we have

$$\begin{aligned} [T_K(\varphi_1) - T_K(\varphi_2), \psi]_s &\geq \|\psi\|_p^{1-p} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l |\psi|^{p-1} \frac{\partial}{\partial a}(\psi(a, l)) \text{sgn}_0(\psi) da dl \\ &= \|\psi\|_p^{1-p} \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l |\psi|^{p-1} \frac{\partial}{\partial a}(|\psi(a, l)|) da \right) dl \\ &= \|\psi\|_p^{1-p} \frac{1}{p} \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l \frac{\partial}{\partial a}(|\psi(a, l)|^p) da \right) dl. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Since  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T_K)$ , the right hand side of (2.3.1) is greater than or equal to

$$\frac{\|\psi\|_p^{1-p}}{p} \int_{l_1}^{l_2} \left( |(\varphi_1|_{\Gamma_2} - \varphi_2|_{\Gamma_2})(l)|^p - |K(\varphi_1|_{\Gamma_2})(l) - K(\varphi_2|_{\Gamma_2})(l)|^p \right) dl.$$

---

Using the fact that  $K$  is strictly contractive we conclude that

$$[T_K(\varphi_1) - T_K(\varphi_2), \psi]_s \geq \frac{(1 - \kappa^p) \|\psi\|_p^{1-p}}{p} \left\| \varphi_1|_{\Gamma_2} - \varphi_2|_{\Gamma_2} \right\|_{Y_p}^p \geq 0.$$

This proves that  $T_K$  is accretive on  $X_p$ .

To complete the proof, it suffices to establish that  $R(I + T_K) = X_p$  where  $R(I + T_K)$  denotes the range of  $I + T_K$ . To this end, for a given function  $g \in X_p$ , we seek for a function  $\varphi \in \mathcal{D}(T_K)$  such that

$$\varphi + T_K\varphi = g.$$

Thus, we look for the solution to the equation

$$\varphi(a, l) + \frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, l) = g(a, l). \quad (2.3.2)$$

Since Eq. (2.3.2) is linear with respect to the variable  $a$ , we obtain the following solution

$$\varphi(a, l) = e^{-a}\chi(l) + \int_0^a g(s, l)e^{s-a} ds. \quad (2.3.3)$$

We claim that, if  $\chi \in Y_p$ , then  $\varphi \in \widetilde{W}^p$ . Indeed, simple calculations using the estimate  $(|a + b|)^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$  and the Hölder inequality imply

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p^p &\leq 2^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \left[ |\chi(l)|^p + \left( \int_0^a e^{s-a} |g(s, l)| ds \right)^p \right] dadl \\ &\leq 2^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l |\chi(l)|^p dadl + 2^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \left[ \int_0^a e^{s-a} |g(s, l)| ds \right]^p dadl \\ &\leq 2^p l_2 \|\chi\|_{Y_p}^p + 2^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \left[ l^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^l |g(s, l)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p dadl \\ &\leq 2^p l_2 \|\chi\|_{Y_p}^p + 2^p l_2^p \|g\|_p^p \end{aligned}$$

and thus

$$\|\varphi\|_p \leq 2l_2^{\frac{1}{p}} \|\chi\|_{Y_p} + 2l_2 \|g\|_p.$$

Moreover, the use of (2.3.2) gives

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right\|_p = \|g - \varphi\|_p \leq \|g\|_p + \|\varphi\|_p.$$

The last two inequalities imply that  $\varphi \in \widetilde{W}_p$  which proves our claim.

So, in order to complete the proof, it suffices to check that functions belonging to  $\mathcal{D}(T_K)$  are in the form (2.3.3) where  $\varphi|_{\Gamma_1} = \chi \in Y_p$ . To do so, put

$$\psi(a, l) = \int_0^a g(s, l)e^{s-a} ds.$$

The following condition should be satisfied

$$\varphi|_{\Gamma_2} = (e^{-a}\chi)|_{\Gamma_2} + \psi|_{\Gamma_2}. \quad (2.3.4)$$

Since  $\varphi \in \mathcal{D}(T_K)$ , we have  $\varphi|_{\Gamma_1} = K(\varphi|_{\Gamma_2})$  and consequently

$$\varphi|_{\Gamma_2}(l) = e^{-l}K(\varphi|_{\Gamma_2})(l) + (\psi|_{\Gamma_2})(l). \quad (2.3.5)$$

Now define the operator  $P : Y_p \rightarrow Y_p$  by

$$P(u)(l) = e^{-l}K(u)(l).$$

It is easily seen that

$$\|P(u_1) - P(u_2)\|_{Y_p} \leq e^{-l_1\kappa} \|u_1 - u_2\|_{Y_p} \quad (2.3.6)$$

for any  $u_1, u_2 \in Y_p$ . Since  $e^{-l_1\kappa} < 1$ , for  $u, v \in Y_p^2$ , we have

$$\|(I - P)u - (I - P)v\|_{Y_p} \geq (1 - e^{-l_1\kappa}) \|u - v\|_{Y_p}.$$

This yields the injectivity of the operator  $I - P$ . Next, putting  $y_1 = (I - P)u$  and  $y_2 = (I - P)v$ , we get

$$\|(I - P)^{-1}y_1 - (I - P)^{-1}y_2\|_{Y_p} \leq \frac{1}{1 - e^{-l_1\kappa}} \|y_1 - y_2\|_{Y_p}$$

which proves the continuity of the operator  $(I - P)^{-1}$ .

Our objective now is to check that the operator  $(I - P)$  is surjective. Indeed, let  $g$  be a function in  $Y_p$ , we have to prove that there exists  $u \in Y_p$  such that  $(I - P)u = g$ . To this end, define the operator  $\Pi : Y_p \rightarrow Y_p$  by  $\Pi(u) = e^{-l}K(u)(l) + g$ . It is easy to see that

$$\|\Pi(u_1) - \Pi(u_2)\|_{Y_p} \leq e^{-l_1\kappa} \|u_1 - u_2\|_{Y_p}$$

for any  $u_1, u_2 \in Y_p$ . Hence  $\Pi$  is strict contraction. Applying the Banach fixed point theorem we infer that the equation  $(I - P)u = g$  has a unique solution which proves the surjectivity of  $(I - P)$ .

Summarizing the steps above we can write

$$\varphi(a, l) := (I + T_K)^{-1}(g) = e^{-a}K(I - P)^{-1}(\psi|_{\Gamma_2})(l) + \psi(a, l) \in \widetilde{W}_p.$$

This yields that  $R(I + T_K) = X_p$  and completes the proof.  $\square$

**Remark 2.3.1.** It follows from (2.3.6) that the result of Lemma 2.3.1 is valid even if  $l_1 = 0$ .

**Lemma 2.3.2.** If the hypothesis (H1) is satisfied, then  $T_K^\omega$  is a  $\omega$ -m-accretive operator on  $X_p^\omega$ .

---

**Proof.** We first prove that  $R(I + \lambda T_K^\omega) = X_p^\omega$ . Let  $\lambda \in (0, 1/\omega)$ ,  $g \in X_p^\omega$  and consider the equation  $\varphi + \lambda T_K^\omega(\varphi) = g$  where  $\varphi$  must be sought in  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$ . Arguing as in the proof of Lemma 2.3.1, we look for a function  $\varphi$  satisfying

$$\varphi(a, l) = e^{-\frac{a}{\lambda}} \chi(l) + \frac{1}{\lambda} \int_0^a g(s, l) e^{\frac{s-a}{\lambda}} ds. \quad (2.3.7)$$

We break the argument into two steps.

**Step 1.** Assume that  $\chi \in Y_p$ , we will show that necessarily  $\varphi \in \widetilde{W}_p^\omega$ . As in the previous lemma, the use of the estimate  $(|a + b|)^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$  and the Hölder inequality leads to

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{p,\omega}^p &= \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left| e^{-\frac{a}{\lambda}} \chi(l) + \left( \frac{1}{\lambda} \int_0^a e^{\frac{s-a}{\lambda}} g(s, l) ds \right) \right|^p dadl \\ &\leq 2^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left| e^{-\frac{a}{\lambda}} \chi(l) \right|^p dadl \\ &\quad + 2^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left( \frac{1}{|\lambda|} \int_0^a e^{\frac{s-a}{\lambda}} |g(s, l)| ds \right)^p dadl \\ &= 2^p I + 2^p J. \end{aligned}$$

It is clear that

$$\begin{aligned} I &= \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} e^{-p\frac{a}{\lambda}} |\chi(l)|^p dadl \leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} |\chi(l)|^p dadl \\ &\leq \frac{1}{\omega} \|\chi\|_{Y_p}^p. \end{aligned}$$

Further, simple calculations using the fact that  $\omega(l-s) \geq \omega(a-s)$  show and that

$$\begin{aligned} J &\leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left( \frac{1}{|\lambda|} \int_0^l e^{-\omega(l-s)} |g(s, l)| ds \right)^p dadl \\ &\leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left( \frac{1}{|\lambda|} \left( \int_0^l e^{-\omega(l-s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^l e^{-\omega(l-s)} |g(s, l)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dadl \\ &\leq \int_{l_1}^{l_2} \frac{l_2^{\frac{p}{q}}}{|\lambda|^p} l_2 \left( \int_0^l e^{-\omega(l-s)} |g(s, l)|^p ds \right) dl \\ &= \left( \frac{l_2}{\lambda} \right)^p \|g\|_{p,\omega}^p. \end{aligned}$$

Hence,

$$\|\varphi\|_{p,\omega} \leq 2 \max \left( \frac{1}{\omega^{\frac{1}{p}}}, \frac{l_2}{\lambda} \right) \left[ \|\chi\|_{Y_p}^p + \|g\|_{p,\omega}^p \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2.3.8)$$

Further, it follows from  $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial a} = g - \varphi$  that

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right\|_{p,\omega} = \frac{1}{\lambda} \|g - \varphi\|_{p,\omega} \leq \frac{1}{\lambda} \left( \|g\|_{p,\omega} + \|\varphi\|_{p,\omega} \right). \quad (2.3.9)$$



Accordingly,  $\varphi$  belongs to  $\widetilde{W}_p^\omega$  whenever  $\chi$  belongs to  $Y_p$ .

**Step 2.** Let  $\varphi$  be an arbitrary function in  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$ . We shall prove now that  $\varphi$  is in the form (2.3.7) where  $\varphi|_{\Gamma_1} = \chi$ . To this end, put

$$\psi_\lambda(a, l) = \int_0^a g(s, l) e^{\frac{s-a}{\lambda}} ds.$$

The following condition should be satisfied

$$\varphi|_{\Gamma_2} = (e^{-\frac{a}{\lambda}} \chi)|_{\Gamma_2} + \frac{1}{\lambda} (\psi_\lambda)|_{\Gamma_2}. \quad (2.3.10)$$

Since  $\varphi \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$ , we have  $\varphi|_{\Gamma_1} = K(\varphi|_{\Gamma_2})$  and consequently

$$\varphi|_{\Gamma_2}(l) = e^{-l/\lambda} K(\varphi|_{\Gamma_2})(l) + \left( \frac{1}{\lambda} (\psi_\lambda)|_{\Gamma_2} \right)(l). \quad (2.3.11)$$

Now define the operator  $P_\lambda : Y_p \rightarrow Y_p$  by  $P_\lambda(u)(l) = e^{-\frac{a}{\lambda}} K(u)(l)$ . It is easily seen that

$$\|P_\lambda(u_1) - P_\lambda(u_2)\|_{Y_p} \leq e^{-\frac{l_1}{\lambda}} \kappa \|u_1 - u_2\|_{Y_p} \quad (2.3.12)$$

for any  $u_1, u_2 \in Y_p$ . Since  $e^{-\frac{l_1}{\lambda}} \kappa < 1$ , we have

$$\|(I - P_\lambda)u - (I - P_\lambda)v\|_{Y_p} \geq (1 - e^{-\frac{l_1}{\lambda}} \kappa) \|u - v\|_{Y_p} \quad \forall u, v \in Y_p$$

and therefore the operator  $I - P_\lambda$  is injective. Next, for  $u, v \in Y_p$ , putting  $y_1 = (I - P_\lambda)u$  and  $y_2 = (I - P_\lambda)v$ , we get

$$\|(I - P_\lambda)^{-1}y_1 - (I - P_\lambda)^{-1}y_2\|_{Y_p} \leq \frac{1}{1 - e^{-\frac{l_1}{\lambda}} \kappa} \|y_1 - y_2\|_{Y_p}$$

which proves the continuity of  $(I - P_\lambda)^{-1}$ .

Let us now check that  $(I - P_\lambda)$  is surjective. To do so, let  $g \in Y_p$ . We seek for a function  $u \in Y_p$  such that  $(I - P_\lambda)u = \frac{1}{\lambda}g$ . Let  $\Pi_\lambda : Y_p \rightarrow Y_p$  be defined by  $\Pi_\lambda(u) = e^{-\frac{l}{\lambda}} K(u)(l) + \frac{1}{\lambda}g$ . Let  $u_1, u_2 \in Y_p$ . The use of (H1) shows that

$$\begin{aligned} \|\Pi_\lambda(u_1) - \Pi_\lambda(u_2)\|_{Y_p} &= \left( \int_{l_1}^{l_2} e^{-\frac{lp}{\lambda}} |K(u_1)(l) - K(u_2)(l)|^p dl \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq e^{-\frac{l_1}{\lambda}} \kappa \|u_1 - u_2\|_{Y_p}. \end{aligned}$$

By Banach's fixed point theorem, we infer that  $\Pi_\lambda$  has a unique fixed point in  $Y_p$  which is the solution of the equation  $(I - P_\lambda)u = g$ . Hence the operator  $(I - P_\lambda)$  is surjective. Summarizing the steps above we get

$$\varphi(a, l) := (I + \lambda T_K^\omega)^{-1}(g) = e^{-\frac{a}{\lambda}} K(I - P_\lambda)^{-1}(\psi_\lambda)|_{\Gamma_2}(l) + \frac{1}{\lambda} \psi_\lambda(a, l) \in \widetilde{W}_p^\omega.$$

Accordingly  $R(I + \lambda T_K^\omega) = X_p^\omega$  for all  $\lambda \in (0, 1/\omega)$ .

To complete the proof, we have to prove that, the operator  $T_K^\omega$  is  $\omega$ -accretive. To this end, let  $\varphi_1, \varphi_2$  be two elements of  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$  and put  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Hence we have

$$\begin{aligned}
[T_K^\omega(\varphi_1) - T_K^\omega(\varphi_2), \psi]_s &\geq \|\psi\|_{p,\omega}^{1-p} \int_{\Omega} e^{-\omega(l-a)} |\psi|^{p-1} \frac{\partial}{\partial a} (\psi) \operatorname{sgn}_0(\psi)(a, l) da dl \\
&= \frac{\|\psi\|_{p,\omega}^{1-p}}{p} \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left( \frac{\partial}{\partial a} (|\psi|^p) \right) (a, l) da \right) dl \\
&= \frac{\|\psi\|_{p,\omega}^{1-p}}{p} \left( \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \frac{\partial (e^{-\omega(l-a)} |\psi|^p)}{\partial a} (a, l) da dl \right. \\
&\quad \left. - \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l |\psi|^p \left( \frac{\partial e^{-\omega(l-a)}}{\partial a} \right) (a, l) da dl \right) \\
&= \frac{\|\psi\|_{p,\omega}^{1-p}}{p} \times \int_{l_1}^{l_2} \left( |\varphi_{1|\Gamma_2}(l) - \varphi_{2|\Gamma_2}(l)|^p - e^{-\omega l} |\varphi_{1|\Gamma_1}(l) - \varphi_{2|\Gamma_1}(l)|^p \right) dl \\
&\quad - \omega \|\psi\|_{p,\omega}.
\end{aligned}$$

Since  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$ , we get

$$[T_K^\omega(\varphi_1) - T_K^\omega(\varphi_2), \psi]_s \geq -\omega \|\psi\|_{p,\omega} - \frac{\|\psi\|_{p,\omega}^{1-p}}{p} (e^{-l_1 \omega} \kappa^p - 1) \|\varphi_{1|\Gamma_2} - \varphi_{2|\Gamma_2}\|_{Y_p}^p$$

Now, remembering that  $\omega$  satisfies the estimate

$$\omega > \max \left( 0, \frac{1}{l_1} \ln(\kappa) \right).$$

Since  $e^{-l_1 \omega} \kappa^p - 1 < 0$ , we obtain

$$[T_K^\omega(\varphi_1) - T_K^\omega(\varphi_2), \psi]_s \geq -\omega \|\psi\|_{p,\omega}$$

This proves that  $T_K^\omega$  is  $\omega$ -accretive and the proof is complete.  $\square$

**Lemma 2.3.3.** *Let  $1 < p < +\infty$ . Then,  $\overline{\mathcal{D}(T_K)}^{X_p} = X_p$  and  $\overline{\mathcal{D}(T_K^\omega)}^{X_p^\omega} = X_p^\omega$ .*

**Proof.** It is enough to prove that

$$C_0^\infty(\overline{\Delta}) \subseteq \overline{\mathcal{D}(T_K)}^{X_p} \quad \text{and} \quad C_0^\infty(\overline{\Delta}) \subseteq \overline{\mathcal{D}(T_K^\omega)}^{X_p^\omega}.$$

The proof is similar to the first part of the proof of [23, Theorem 3] and so it is omitted.  $\square$

**Lemma 2.3.4.** *If the hypothesis (H2) holds true and  $\mathcal{N}_\sigma$  maps  $X_p^\omega$  into itself and  $X_p$  into itself. Then there exist two constants  $C_1 > 0$  and  $C_2 > 0$  such that*

1.  $\|\mathcal{N}_\sigma(f_1) - \mathcal{N}_\sigma(f_2)\|_{p,\omega} \leq C \|f_1 - f_2\|_{p,\omega}, \quad \forall f_1, f_2 \in X_p^\omega$
2.  $\|\mathcal{N}_\sigma(g_1) - \mathcal{N}_\sigma(g_2)\|_p \leq C \|g_1 - g_2\|_p, \quad \forall g_1, g_2 \in X_p.$

**Proof.** Since  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  is a Carathéodory function, one can define the Nemytskii operator  $\mathcal{N}_\sigma : X_p^\omega \rightarrow X_p^\omega$  by

$$(\mathcal{N}_\sigma f)(a, l) = \sigma(a, l, f(a, l)).$$

It follows from Lemma 1.2.1 that the operator  $\mathcal{N}_\sigma$  is continuous and maps bounded sets into bounded ones.

Let  $(f_1, f_2) \in X_p^\omega \times X_p^\omega$ , we have

$$\mathcal{N}_\sigma(f_1) - \mathcal{N}_\sigma(f_2) = \sigma(a, l, f_1) - \sigma(a, l, f_2).$$

It follows from (H2) that

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\sigma(f_1) - \mathcal{N}_\sigma(f_2)\|_{p,\omega}^p &= \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l h^\omega(a, l) |\mathcal{N}_\sigma(f_1)(a, l) - \mathcal{N}_\sigma(f_2)(a, l)|^p \, dadl \\ &= \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l h^\omega(a, l) |\sigma(a, l, f_1(a, l)) - \sigma(a, l, f_2(a, l))|^p \, dadl \\ &\leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l h^\omega(a, l) |\zeta(a, l)|^p |f_1(a, l) - f_2(a, l)|^p \, dadl \\ &\leq \|\zeta\|_\infty^p \|f_1 - f_2\|_{p,\omega}^p. \end{aligned}$$

Accordingly,

$$\|\mathcal{N}_\sigma(f_1) - \mathcal{N}_\sigma(f_2)\|_{p,\omega} \leq \|\zeta\|_\infty \|f_1 - f_2\|_{p,\omega},$$

where  $C = \|\zeta\|_\infty$ . This proves (1).

A similar reasoning proves the second estimate. □

## 2.4 Main results

We are now ready to state the first result of this work.

**Theorem 2.4.1.** *Assume that the condition (H2) holds true and the transition operator  $K$  is a strict contraction and  $0 \leq l_1$ . Then the problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t) + T_K(f(t)) = \mathcal{N}_\sigma(f(t)) \\ f(0) = f_0 \in X_p \end{cases} \quad (2.4.1)$$

*has a unique mild solution. In fact, it is a weak solution. Moreover, if  $f_0 \in \mathcal{D}(T_K)$ , then it is a strong solution.*

---

**Proof.** According to Lemmas 2.3.1, the operator  $T_K$  is m-accretive on  $X_p$ . By Lemma 2.3.4,  $\mathcal{N}_\sigma$  is  $\|\zeta\|_\infty$ -Lipschitz continuous on  $X_p$ . Hence, the operator  $T_K - \mathcal{N}_\sigma$  is quasi-m-accretive on  $X_p$ . Applying Proposition 1.1.2, we conclude that Problem (2.4.1) has a unique mild solution. On the other hand, since  $X_p$  is a Banach space with the Radon-Nikodym property, applying Theorem 1.1.3 we infer that it is a weak solution on  $X_p$ . Further, if  $f_0 \in \mathcal{D}(T_K) = \mathcal{D}(T_K - \mathcal{N}_\sigma)$ , then, by Theorem 1.1.1, this solution is a strong solution.  $\square$

Our second result reads as follows :

**Theorem 2.4.2.** *If the assumptions (H1)-(H3) hold true, then the problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t) + T_K^\omega(f(t)) = \mathcal{N}_\sigma(f(t)) \\ f(0) = f_0 \in X_p^\omega \end{cases} \quad (2.4.2)$$

*has a unique mild solution. This mild solution is, in fact, a weak solution. Further, if  $f_0 \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$ , then it is a strong solution.*

**Proof.** By Lemma 2.3.2,  $T_K^\omega$  is a quasi-m-accretive operator in  $X_p^\omega$ . It follows from Lemma 2.3.4 that  $\mathcal{N}_\sigma : X_p^\omega \rightarrow X_p^\omega$  is a Lipschitzian mapping on  $X_p^\omega$ , so  $T_K^\omega + \mathcal{N}_\sigma$  is quasi-m-accretive on  $X_p^\omega$ . The first part of the theorem follows from Proposition 1.1.2. As in the proof of Theorem 2.4.1, we conclude that this solution is a weak solution because the space  $X_p^\omega$  possesses the Radon-Nikodym property. Moreover, by Theorem 1.1.1, for each  $f_0$  belonging to  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$ , it is a strong solution. On the other hand, if the hypothesis (H3) holds true,  $f \in X_p^\omega$  and  $g \in \mathbf{J}_1(f)$ , then one can writes

$$\begin{aligned} \langle -\mathcal{N}_\sigma(f), g \rangle_s &= \langle -\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot, f)f, g \rangle_s \\ &= -\|g\|_{p,\omega}^{1-p} \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \operatorname{sgn}_0(g) |g|^{p-1} \tilde{\sigma}(\cdot, \cdot, f) f da \right) dl. \end{aligned}$$

This yields

$$\langle -\mathcal{N}_\sigma(f), g \rangle_s \geq -\tilde{\alpha}_1 \|f\|_{p,\omega}^2 \geq -\alpha \|f\|_{p,\omega}^2,$$

where  $\alpha := \tilde{\alpha}_1$ . Now, using Theorem 1.1.2, we conclude that the strong solution is global.  $\square$

**Remark 2.4.1.** Note that an examination of the proofs of lemmas of Section 3 shows that Theorems 2.4.1 and 2.4.2 are not valid for infinite cycle length ( $l_2 = +\infty$ ). However, in contrast to Theorems 2.4.1 (cf. Remark 2.3.1), Theorems 2.4.2 is not valid for null cycle length ( $l_1 = 0$ ).



# Well-posedness of a nonlinear model of proliferating cell populations with inherited cycle length

## 3.1 Introduction

In the works [10, 11], the author discuss the well-posedness and various mathematical aspects of solution to the Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, a, l) = -\frac{\partial f}{\partial a}(t, a, l) - \sigma(a, l)f(t, a, l) + (Pf)(t, a, l), \\ f(0, a, l) = f_0(a, l), \end{cases} \quad (3.1.1)$$

where

$$(Pf)(t, a, l) = \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} k(a, l, a', l') f(t, a', l') da' dl',$$

$t > 0$ ,  $0 < a, a' < l$ ,  $0 < l_1 < l$ ,  $l' < l_2$  and  $f_0$  stands for the initial data. The function  $f := f(t, a, l)$  denotes the cell density with respect to cell cycle length  $l$ , and age  $a$  at time  $t$ , and  $\sigma(a, l)$  denotes the rate of cell mortality. By cell cycle length we mean the time between cell birth and cell division. It is an inherent characteristic of cells determined at birth, i.e. the duration of the cycle from cell birth to cell division is determined at birth. The constant  $l_1$  (resp.  $l_2$ ) denotes the minimum cycle length (resp. the maximum cycle length). The function  $k(a, l, a', l')$  denotes the transition rate at which cells change their cell cycle length from  $l'$  to  $l$  and their age from  $a'$  to  $a$ . The problem (3.1.1) is complemented with a general biological reproduction rule given by

$$f(t, 0, l) = (Kf(t, \cdot, \cdot))(l) \quad (3.1.2)$$

where  $K$  is a bounded linear operator on suitable function spaces.

In the case where  $P = 0$  and  $(Kf(t, \cdot, \cdot))(l) = \int_{l_1}^{l_2} r(l, l')f(t, l', l')dl'$ , where  $r(\cdot, \cdot)$  is a measurable function, we find a model originally introduced by Lebowitz and Rubinow [39] for modeling proliferating microbial populations. It was extensively studied by many authors and various mathematical aspects concerning the Cauchy problem : well-posedness (generation results), spectral analysis, time asymptotic behavior of solution (when it exists) were discussed in many papers (see, for example, the works [34, 42, 59, 60] and the references therein).

We point out that the well-posedness of nonlinear initial boundary value problems derived from Rotenberg model were already discussed in [56, 23] and [1]. However, it seems that the well-posedness of nonlinear time dependent versions derived from (3.1.1) has not yet been investigated. The main goal of this chapter is to present and to discuss two nonlinear versions of the model (3.1.1) in a weighted  $L^p$ -spaces,  $1 \leq p < \infty$ , on the set  $\Omega := \{(a, l); 0 < a < l, l_1 < l < l_2\}$  where the total cross section  $\sigma$  and the transition rate  $k$  are assumed to be nonlinear functions of the total density of population  $f$  and, at the mitosis, daughter and mother cells are related by a nonlinear reproduction rule which describes constraints at boundaries.

The structure of this chapter is as follows. In the next section we introduce the functional setting of the problem and the main assumptions. In Section 3.3 we study the initial boundary value problem (3.3.1) in the case where  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  and  $k(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  are nonlinear functions of the density of population  $f$ , and  $K$  is a nonlinear operator on suitable trace spaces modeling the biological rule. Following the same strategy as in the works [23, 56] for Lebowitz-Rubinow's model (also see [7] and [24]) we discuss existence and uniqueness of solutions to Problem (3.3.1). The main result of this section is Theorem 3.3.1 which asserts that, under reasonable assumptions, Problem (3.3.1) has a unique mild solution on appropriate weight  $L^p$  spaces where  $1 \leq p < \infty$ . If  $p > 1$ , then this solution is also a weak solution of the problem. Further, if the initial data belongs to the domain of  $T_K^\omega$  (see Section 3.2 for the definition of  $T_K^\omega$ ), then we obtain a strong solution. Further, we derive sufficient conditions guaranteeing that Problem (3.3.1) possesses a unique global strong solution.

Section 3.4 focuses on Problem (3.4.1) where  $\sigma_1(\cdot, \cdot, \cdot)$  is a nonlinear function of  $\langle f \rangle(t)$  with  $\langle f \rangle(t) := \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l f(t, a, l)dadl$  (the usual  $L^1$  norm of  $L^1(\Omega)$ ) and  $k_1(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  is a nonlinear function of the density of population  $f$ . Here the boundary conditions are modeled by

$$f(t, 0, l) = \int_{l_1}^{l_2} k_2(l, l', \langle f \rangle(t), f(t, l', l'))dl' + \sigma_2(l, \langle f \rangle(t), f(t, l, l)),$$

where  $\sigma_2(\cdot, \cdot, \cdot)$  and  $k_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  are nonlinear functions of both  $f(t, \cdot, \cdot)(l)$  and  $\langle f \rangle(t)$ . After giving some preparatory results, we state the main result of this section (Theorem 3.4.1). We establish that under appropriate conditions, the existence of a local weak solution on weighted  $L^p$ -spaces with  $1 < p < \infty$ . Moreover, if the initial data belongs to the domain

---

of  $T_K^\omega$ , then we have a local strong solution and, if further the conditions (A7) is satisfied, then we get a unique global strong solution. Moreover, we have a unique global weak solution whenever the initial data does not belong to  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$ . On the other hand, if  $p = 1$ , then Problem 3.4.2 possesses a local mild solution on a weighted  $L^1$ -space. Our analysis uses the approach developed for semi-linear evolution equations in [43] (see also [56, 24]).

## 3.2 Notations and preliminaries

The goal of this section is to first fix the notations and to introduce the functional setting of the problem. To do so, let  $1 \leq p < \infty$  and set

$$X_p = L_p(\Omega, dadl)$$

where  $\Omega := \{(a, l); 0 < a < l, l_1 < l < l_2\}$  and  $0 < l_1 < l_2 < \infty$ . The space  $X_p$  endowed with its natural norm is a Banach space. We denote by  $X_p^1$  and  $X_p^2$  the boundary spaces

$$X_p^1 = L_p(\Gamma_1, dl), \quad X_p^2 = L_p(\Gamma_2, dl),$$

where

$$\Gamma_1 := \{(0, l) : l \in (l_1, l_2)\} \quad \text{and} \quad \Gamma_2 := \{(l, l) : l \in (l_1, l_2)\}.$$

Let  $\omega > 0$  be an arbitrary real number and define the weighted space  $X_p^\omega$  by

$$X_p^\omega = L_p(\Omega, h_\omega dadl)$$

where the weight function  $h_\omega(\cdot, \cdot)$  is given by

$$h_\omega(a, l) = e^{-\omega(l-a)}.$$

The space  $X_p^\omega$  endowed with the norm

$$\|f\|_{p,\omega} = \left( \int_\Omega |f(a, l)|^p h_\omega(a, l) dadl \right)^{1/p} = \left( \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l |f(a, l)|^p h_\omega(a, l) dadl \right)^{1/p}$$

is a Banach space. Let  $W_p^\omega$  be the partial Sobolev space defined by

$$W_p^\omega = \left\{ f \in X_p^\omega \text{ such that } \frac{\partial f}{\partial a} \in X_p^\omega \right\}.$$

The space  $W_p^\omega$  equipped with the norm

$$\|f\|_{W_p^\omega} = \left[ \|f\|_{p,\omega}^p + \left\| \frac{\partial f}{\partial a} \right\|_{p,\omega}^p \right]^{1/p}$$

is a Banach space.

Let us now recall the following lemma established in [1].



**Lemma 3.2.1.** *Let  $f \in W_p^\omega$ . If  $f|_{\Gamma_1} \in X_p^1$ , then  $f|_{\Gamma_2} \in X_p^2$  and vice versa.*

According to Lemme 3.2.1 in [1], if  $f|_{\Gamma_1} \in X_p^1$  (resp.  $f|_{\Gamma_2} \in X_p^2$ ), then  $f|_{\Gamma_2} \in X_p^2$  (resp.  $f|_{\Gamma_1} \in X_p^1$ ). So, we can define the space

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_p^\omega &= \{f \in W_p^\omega \text{ such that } f|_{\Gamma_1} \in X_p^1\} \\ &= \{f \in W_p^\omega \text{ such that } f|_{\Gamma_2} \in X_p^2\}. \end{aligned}$$

Accordingly, any function  $f \in \widetilde{W}_p^\omega$  has traces  $f|_{\Gamma_1}$  and  $f|_{\Gamma_2}$  belonging to the boundary spaces  $X_p^1$  and  $X_p^2$ , respectively.

Let  $T_K^\omega$  be the operator defined by

$$\begin{cases} T_K^\omega : \mathcal{D}(T_K^\omega) \subset X_p^\omega \longrightarrow X_p^\omega, \\ f \longrightarrow (T_K^\omega f)(a, l) = \frac{\partial f}{\partial a}(a, l), \\ \mathcal{D}(T_K^\omega) = \{f \in \widetilde{W}_p^\omega : f|_{\Gamma_1} = K(f|_{\Gamma_2})\}. \end{cases}$$

Before going further we shall prove the following lemma which is required below.

**Lemma 3.2.2.** *Let  $1 \leq p < +\infty$ . If  $f \in X_p$ , then  $f \in X_p^\omega$  and conversely. In particular we have*

$$(i) \quad \|f\|_{p,\omega} \leq \|f\|_p \leq e^{\frac{\omega l_2}{p}} \|f\|_{p,\omega},$$

$$(ii) \quad \|f\|_1 \leq e^{\omega l_2} \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,\omega},$$

where  $q$  denotes the conjugate exponent of  $p$ .

**Proof.** Let  $f \in X_p$ . Since  $l \geq a$ , we have

$$\|f\|_{p,\omega}^p = \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} |f(a, l)|^p da dl \leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l |f(a, l)|^p da dl = \|f\|_p^p,$$

hence  $f \in X_p^\omega$ . Conversely, let  $f \in X_p^\omega$ . One can write

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{\omega(l-a)} e^{-\omega(l-a)} |f(a, l)|^p da dl \\ &\leq e^{\omega l_2} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} |f(a, l)|^p da dl = e^{\omega l_2} \|f\|_{p,\omega}^p. \end{aligned}$$

This proves the first assertion and (i).

(ii) It is clear that  $\|f\|_1 = \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l |f(a, l)| da dl \leq e^{\omega l_2} \left( \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} |f(a, l)| da dl \right)$ . Now applying Hölder's inequality we get

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &\leq e^{\omega l_2} \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} |f(a, l)|^p da dl \right)^{1/p} \\ &\leq e^{\omega l_2} \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,\omega}. \end{aligned}$$



where  $\kappa$  is the constant appearing in the hypothesis (A1).

The function  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  is assumed to be a Carathéodory function (see Chapter 1), so its generates a Nemytskii operator  $\mathcal{N}_\sigma$  given by

$$\begin{cases} \mathcal{N}_\sigma : X_p^\omega \rightarrow X_p^\omega \\ (\mathcal{N}_\sigma f)(a, l) = \sigma(a, l, f(a, l)). \end{cases}$$

Let  $\mathfrak{B}$  be the operator defined by

$$\begin{cases} \mathfrak{B} : X_p^\omega \rightarrow X_p^\omega, \\ f \rightarrow \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} k(a, l, a', l', f(t, a', l')) da' dl' \end{cases}$$

and put

$$(\mathfrak{F}_p f)(a, l) := (\mathfrak{B}f)(a, l) - (\mathcal{N}_\sigma f)(a, l).$$

Now the problem (3.3.1) may be written abstractly as :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t) + T_K^\omega(f(t)) = \mathfrak{F}_p(f(t)) \\ f(0, a, l) = f_0(a, l) \in X_p^\omega. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

For the sake of completeness, we shall recall the following result established in [1].

**Lemma 3.3.1.** *If the condition (A1) is satisfied, then  $T_K^\omega$  is a  $\omega$ - $m$ -accretive operator on  $X_p^\omega$ .*

**Remark 3.3.1.** *Note that the result of Lemma 3.3.1 holds also true for  $p = 1$  (see Theorem 2 in [23])*

**Lemma 3.3.2.** *Let  $p \in [1, +\infty)$  and assume that the condition (A1) is satisfied. Then  $\overline{\mathcal{D}(T_K^\omega)}^{X_p^\omega} = X_p^\omega$ .*

**Proof.** It is enough to prove that  $C_0^\infty(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{\mathcal{D}(T_K^\omega)}^{X_p^\omega}$ . The proof is similar to that of Theorem 3 in [23] and then it is omitted.  $\square$

**Lemma 3.3.3.** *Let  $p \in [1, +\infty)$ . If the hypothesis (A2) holds true and  $\mathcal{N}_\sigma$  maps  $X_p^\omega$  into itself, then there exists a constant  $C > 0$  such that*

$$\|\mathfrak{F}_p(\varphi_1) - \mathfrak{F}_p(\varphi_2)\|_{p,\omega} \leq C \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega} \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in X_p^\omega$$

**Proof.** For all  $(\varphi_1, \varphi_2) \in X_p^\omega \times X_p^\omega$ , we have

$$\mathfrak{F}_p(\varphi_1) - \mathfrak{F}_p(\varphi_2) = \mathfrak{B}(\varphi_1) - \mathfrak{B}(\varphi_2) - (\mathcal{N}_\sigma(\varphi_1) - \mathcal{N}_\sigma(\varphi_2)).$$

Using (A2) together with Hölder's inequality we get

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{F}_p(\varphi_1)(a, l) - \mathfrak{F}_p(\varphi_2)(a, l)| &\leq \|\rho\|_\infty \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} |\varphi_1(a', l') - \varphi_2(a', l')| da' dl' \\
&\quad + \|\zeta\|_\infty |\varphi_1(a, l) - \varphi_2(a, l)| \\
&\leq \|\rho\|_\infty e^{\omega l_2} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} e^{-\omega(l'-a')(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})} |\varphi_1(a', l') - \varphi_2(a', l')| da' dl' \\
&\quad + \|\zeta\|_\infty |\varphi_1(a, l) - \varphi_2(a, l)| \\
&\leq \|\rho\|_\infty e^{\omega l_2} \left[ \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} e^{-\omega(l'-a')\frac{1}{p}} |\varphi_1(a', l') - \varphi_2(a', l')| da' dl' \right. \\
&\quad \left. + \|\zeta\|_\infty |\varphi_1(a, l) - \varphi_2(a, l)| \right] \\
&\leq \|\rho\|_\infty e^{\omega l_2} \left( \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} da' dl' \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left( \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} e^{-\omega(l'-a')} |\varphi_1(a', l') - \varphi_2(a', l')|^p da' dl' \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \|\zeta\|_\infty |\varphi_1(a, l) - \varphi_2(a, l)| \\
&\leq \|\rho\|_\infty e^{\omega l_2} \left( \frac{l_2^2}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega} + \|\zeta\|_\infty |\varphi_1(a, l) - \varphi_2(a, l)|.
\end{aligned}$$

Next, simple calculations using the estimate  $(|a| + |b|)^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$  lead to

$$\begin{aligned}
\int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} |\mathfrak{F}_p(\varphi_1)(a, l) - \mathfrak{F}_p(\varphi_2)(a, l)|^p dadl &\leq 2^p \|\rho\|_\infty^p e^{\omega l_2 p} \left( \frac{l_2^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l dadl \\
&\quad + 2^p \|\zeta\|_\infty^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} |\varphi_1(a, l) - \varphi_2(a, l)|^p dadl \\
&\leq 2^p \left[ \|\rho\|_\infty^p e^{\omega l_2 p} \left( \frac{l_2^2}{2} \right)^{\frac{p}{q} + 1} + \|\zeta\|_\infty^p \right] \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}^p
\end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{F}_p(\varphi_1) - \mathfrak{F}_p(\varphi_2)\|_{p, \omega} &\leq 2 \left[ \|\rho\|_\infty^p e^{\omega l_2 p} \left( \frac{l_2^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} + \|\zeta\|_\infty^p \right]^{\frac{1}{p}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega} \\
&\leq C \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}
\end{aligned}$$

where  $C = 2 \left[ \|\rho\|_\infty^p e^{\omega l_2 p} \left( \frac{l_2^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} + \|\zeta\|_\infty^p \right]^{\frac{1}{p}}$ . This proves of Lemma 3.3.3.  $\square$

**Theorem 3.3.1.** *Let  $\omega$  be an arbitrary real satisfying  $\omega > \max\left(0, \frac{1}{l_1} \ln(\kappa)\right)$  and let  $1 \leq p < \infty$ . Assume that the conditions (A1) and (A2) hold true and  $\mathcal{N}_\sigma$  maps  $X_p^\omega$  into itself. Then Problem (3.3.2) has a unique mild solution on  $X_p^\omega$  for all  $f_0 \in X_p$ . Further, if  $p \in (1, +\infty)$ , then this mild solution is in fact a weak solution and it is a strong solution whenever the initial data  $f_0$  belongs to  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$ .*



The function  $\sigma_1(\cdot, \cdot, \cdot)$  is a nonlinear function of  $\langle f \rangle$  while  $\sigma_2(\cdot, \cdot, \cdot)$  and  $k_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  are nonlinear functions of both the density of population  $f$  and  $\langle f \rangle$ . Here  $f_0$  denotes the initial data.

Before going further, we introduce the following hypotheses required in the sequel.

- (A3) The function  $\sigma_1(\cdot, \cdot, \cdot)$  is measurable and for any  $\mathbf{r} > 0$ , there exists  $\Lambda_{\mathbf{r}} > 0$  such that

$$|\sigma_1(a, l, z_1) - \sigma_1(a, l, z_2)| \leq \Lambda_{\mathbf{r}} |z_1 - z_2|$$

for all  $(a, l) \in \Omega$ ,  $z_1, z_2 \in [-\mathbf{r}, \mathbf{r}]$ .

- (A4) There exist a function  $\sigma_1 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and two constants  $\underline{\sigma}_1 \in \mathbb{R}$  and  $\bar{\sigma}_1 > 0$  such that

$$\underline{\sigma}_1 \leq \sigma_1(a, l, z) \leq \bar{\sigma}_1, \quad \forall (a, l, z) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

- (A5) The function  $k_1(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  is measurable and satisfies

$$|k_1(a, l, a', l', f_1(a', l')) - k_1(a, l, a', l', f_2(a', l'))| \leq |\rho(a, l, a', l')| |f_1(a', l') - f_2(a', l')|,$$

where  $f_1, f_2 \in X_p^\omega$  and  $\rho \in L^\infty(\Omega^2)$ .

- (A6) The functions  $\sigma_2(\cdot, \cdot, \cdot)$  and  $k_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  are measurable and there exist two constants  $C_1 > 0$  and  $C_2 > 0$  such that

$$|\sigma_2(l, \eta, \zeta) - \sigma_2(l, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})| \leq C_1(|\eta - \tilde{\eta}| + |\zeta - \tilde{\zeta}|)$$

and

$$|k_2(l, l', \eta, \zeta) - k_2(l, l', \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})| \leq C_2(|\eta - \tilde{\eta}| + |\zeta - \tilde{\zeta}|)$$

for all  $(l, l') \in [l_1, l_2] \times [l_1, l_2]$  and  $\eta, \tilde{\eta}, \zeta, \tilde{\zeta} \in \mathbb{R}$ .

- (A7) There exist a function  $\tilde{k}_1 : \Omega^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and two constants  $\tilde{k}_1 \in \mathbb{R}$  and  $\bar{\tilde{k}}_1 > 0$  such that

$$k_1(a, l, a', l', z) = \tilde{k}_1(a, l, a', l', z)z, \quad \text{for all } (a, l, a', l', z) \in \Omega^2 \times \mathbb{R},$$

and

$$\tilde{k}_1 \leq \tilde{k}_1(a, l, a', l', z) \leq \bar{\tilde{k}}_1, \quad \text{for all } (a, l, a', l', z) \in \Omega^2 \times \mathbb{R}.$$

We now define the operator  $\mathfrak{F}_p^1$  by

$$(\mathfrak{F}_p^1 f)(a, l) := (\mathfrak{B}^1 f)(a, l) - (Uf)(a, l)$$

where

$$\begin{cases} U : X_p^\omega \rightarrow X_p^\omega, \\ (Uf)(a, l) = \sigma_1(a, l, \langle f \rangle) f, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \mathfrak{B}^1 : X_p^\omega \rightarrow X_p^\omega, \\ f \rightarrow \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} k_1(a, l, a', l', f(t, a', l')) da' dl'. \end{cases}$$

Hence, Problem (3.4.1) may be written abstractly as :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t) + T_K^\omega(f(t)) = \mathfrak{F}_p^1(f(t)), \\ f(0) = f_0 \in X_p^\omega, \\ f(t, 0, l) = [\mathbf{K}f(t, \cdot, \cdot)](l), \end{cases} \quad (3.4.2)$$

where  $\mathbf{K}$  denotes the following nonlocal boundary operator

$$\begin{cases} \mathbf{K} : Y_p \times X_p^\omega \longrightarrow Y_p, \\ (v, f)(l) \longrightarrow \mathbf{K}(v, f)(l) = \int_{l_1}^{l_2} k_2(l, l', \langle f \rangle, v(l')) dl' + \sigma_2(l, \langle f \rangle, v(l)). \end{cases}$$

In the remainder of this section, the space  $Y_p \times X_p^\omega$  will be equipped with the norm  $\|\cdot\|_*$  given by

$$\|(v, f)\|_* = \left[ \|v\|_{Y_p}^p + \|f\|_{p,\omega}^p \right]^{1/p}, \quad \forall (v, f) \in Y_p \times X_p^\omega.$$

**Lemma 3.4.1.** *Let  $\mathbf{r} > 0$  and  $p \in [1, +\infty)$ . If the conditions (A3)-(A6) hold true. Then there exist two constants  $C_{\mathbf{r}} > 0$  and  $\vartheta > 0$  such that*

$$(i) \quad \left\| \mathfrak{F}_p^1(\varphi_1) - \mathfrak{F}_p^1(\varphi_2) \right\|_{p,\omega} \leq C_{\mathbf{r}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega}, \quad \forall \varphi_i \in B_{\mathbf{r}}^{p,\omega} := \{f \in X_p^\omega : \|f\|_{p,\omega} \leq \mathbf{r}\}, \quad i = 1, 2.$$

$$(ii) \quad \|\mathbf{K}(v_1, \varphi_1) - \mathbf{K}(v_2, \varphi_2)\|_{Y_p} \leq \vartheta \|(v_1, \varphi_1) - (v_2, \varphi_2)\|_*, \quad \forall (v_i, \varphi_i) \in Y_p \times X_p^\omega, \quad i = 1, 2.$$

**Proof.** (i) For all  $(\varphi_1, \varphi_2) \in B_{\mathbf{r}}^{p,\omega} \times B_{\mathbf{r}}^{p,\omega}$ , we have

$$\mathfrak{F}_p^1(\varphi_1) - \mathfrak{F}_p^1(\varphi_2) = \mathfrak{B}^1(\varphi_1) - \mathfrak{B}^1(\varphi_2) - (U(\varphi_1) - U(\varphi_2)).$$

Using (A5) together with Hölder's inequality we get

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}^1(\varphi_1) - \mathfrak{B}^1(\varphi_2)| &\leq \|\rho\|_\infty \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} |\varphi_1(a', l') - \varphi_2(a', l')| da' dl' \\ &\leq \|\rho\|_\infty e^{\omega l_2} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} e^{-\omega(l'-a')\frac{1}{q}} e^{-\omega(l'-a')\frac{1}{p}} |\varphi_1(a', l') - \varphi_2(a', l')| da' dl' \\ &\leq \|\rho\|_\infty e^{\omega l_2} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} e^{-\omega(l'-a')\frac{1}{p}} |\varphi_1(a', l') - \varphi_2(a', l')| da' dl' \\ &\leq \|\rho\|_\infty e^{\omega l_2} \left(\frac{l_2^2}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega}. \end{aligned}$$

Applying Lemma 3.2.2, we get  $|\langle \varphi_1 \rangle - \langle \varphi_2 \rangle| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_1 \leq e^{\omega l_2} \left(\frac{l_2^2 - l_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega}$ . So, a simple calculation using the estimate  $(|a| + |b|)^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$  and (A3)-(A4) gives

$$\begin{aligned} |U(\varphi_1) - U(\varphi_2)|^p &= |\sigma_1(a, l, \langle \varphi_1 \rangle)(\varphi_1 - \varphi_2) + (\sigma_1(a, l, \langle \varphi_1 \rangle) - \sigma_1(a, l, \langle \varphi_2 \rangle))\varphi_2|^p \\ &\leq 2^p |\sigma_1(a, l, \langle \varphi_1 \rangle)(\varphi_1 - \varphi_2)|^p + 2^p |(\sigma_1(a, l, \langle \varphi_1 \rangle) - \sigma_1(a, l, \langle \varphi_2 \rangle))\varphi_2|^p \\ &\leq 2^p \bar{\sigma}_1^p |\varphi_1 - \varphi_2|^p + 2^p \Lambda_{\mathbf{r}}^p |\langle \varphi_1 \rangle - \langle \varphi_2 \rangle|^p |\varphi_2|^p \\ &\leq 2^p \bar{\sigma}_1^p |\varphi_1 - \varphi_2|^p + 2^p \Lambda_{\mathbf{r}}^p \left(\frac{l_2^2 - l_1^2}{2}\right)^{\frac{p}{q}} e^{\omega l_2 p} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega}^p |\varphi_2|^p. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
\int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left| \mathfrak{F}_p^1(\varphi_1)(a, l) - \mathfrak{F}_p^1(\varphi_2)(a, l) \right|^p dadl &\leq 2^p \|\rho\|_\infty^p e^{\omega l_2 p} l_2^{\frac{2p}{q}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}^p \\
&\quad \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l dadl + 2^p \left[ 2^p \bar{\sigma}_1^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} |\varphi_1 - \varphi_2|^p dadl \right. \\
&\quad \left. + 2^p \Lambda_{\mathbf{r}}^p \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} e^{\omega l_2 p} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}^p \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} |\varphi_2|^p dadl \right] \\
&\leq 2^p \|\rho\|_\infty^p e^{\omega l_2 p} l_2^{2p} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}^p \\
&\quad + 2^p \left[ 2^p \bar{\sigma}_1^p + 2^p \Lambda_{\mathbf{r}}^p \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} e^{\omega l_2 p} \|\varphi_2\|_{p, \omega}^p \right] \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}^p \\
&\leq 2^p \|\rho\|_\infty^p e^{\omega l_2 p} l_2^{2p} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}^p \\
&\quad + 2^p \left[ 2^p \bar{\sigma}_1^p + 2^p \mathbf{r}^p \Lambda_{\mathbf{r}}^p \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} e^{\omega l_2 p} \right] \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}^p
\end{aligned}$$

and therefore,

$$\left\| \mathfrak{F}_p^1(\varphi_1) - \mathfrak{F}_p^1(\varphi_2) \right\|_{p, \omega} \leq C_{\mathbf{r}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p, \omega}$$

where  $C_{\mathbf{r}} := 2 \left[ \|\rho\|_\infty^p e^{\omega l_2 p} l_2^{2p} + 2^p \bar{\sigma}_1^p + 2^p \mathbf{r}^p \Lambda_{\mathbf{r}}^p \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} e^{\omega l_2 p} \right]^{\frac{1}{p}}$ . This proves (i).

(ii) Now, we shall show the second estimate. For  $(v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2) \in Y_p \times X_p^\omega$ , we can write

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{K}(v_1, \varphi_1) - \mathbf{K}(v_2, \varphi_2)\|_{Y_p} &\leq \left( \int_{l_1}^{l_2} \left[ \int_{l_1}^{l_2} |k_2(l, l', \langle \varphi_1 \rangle, v_1(l')) - k_2(l, l', \langle \varphi_2 \rangle, v_2(l'))| dl' \right]^p dl \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left( \int_{l_1}^{l_2} |\sigma_2(l, \langle \varphi_1 \rangle, v_1(l)) - \sigma_2(l, \langle \varphi_2 \rangle, v_2(l))|^p dl \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Using assumption (A6) together with Lemma 3.2.2(ii), we get

$$\begin{aligned}
\int_{l_1}^{l_2} |k_2(l, l', \langle \varphi_1 \rangle, v_1(l')) - k_2(l, l', \langle \varphi_2 \rangle, v_2(l'))| dl' &\leq \int_{l_1}^{l_2} C_2 (|\langle \varphi_1 \rangle - \langle \varphi_2 \rangle| + |v_1(l') - v_2(l')|) dl' \\
&\leq \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{q}} l_2 C_2 e^{\omega l_2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\omega, p} \\
&\quad + C_2 \int_{l_1}^{l_2} |v_1(l') - v_2(l')| dl'.
\end{aligned}$$

Applying Hölder's inequality we get

$$\int_{l_1}^{l_2} |v_1(l') - v_2(l')| dl' \leq l_2^{\frac{1}{q}} \left( \int_{l_1}^{l_2} |v_1(l') - v_2(l')|^p dl' \right)^{\frac{1}{p}} = l_2^{\frac{1}{q}} \|v_1 - v_2\|_{Y_p}.$$



A simple calculations using the estimate  $(|a + b|)^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$  gives

$$\begin{aligned} J_1^p &\leq \int_{l_1}^{l_2} \left[ C_2 e^{\omega l_2} \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{q}} l_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega} + C_2 l_2^{\frac{1}{q}} \|v_1 - v_2\|_{Y_p} \right]^p dl \\ &\leq 2^p C_2^p e^{\omega l_2 p} \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} l_2^p \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega}^p l_2 + 2^p C_2^p l_2^{\frac{p}{q}+1} \|v_1 - v_2\|_{Y_p}^p \\ &\leq 2^p C_2^p l_2 \max \left( e^{\omega l_2 p} \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} l_2^p, l_2^{\frac{p}{q}} \right) \left[ \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega}^p + \|v_1 - v_2\|_{Y_p}^p \right], \end{aligned}$$

and therefore

$$J_1 \leq \vartheta_1 \|(v_1, \varphi_1) - (v_2, \varphi_2)\|_*$$

where  $\vartheta_1 = 2C_2 l_2^{\frac{1}{p}} \max \left( e^{\omega l_2} \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{q}} l_2, l_2^{\frac{1}{q}} \right)$ .

On the other hand, using (A6) and the estimate  $(|a + b|)^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$ , we get

$$\begin{aligned} J_2^p &= \int_{l_1}^{l_2} |\sigma_2(l, \langle \varphi_1 \rangle, v_1(l)) - \sigma_2(l, \langle \varphi_2 \rangle, v_2(l))|^p dl \\ &\leq \int_{l_1}^{l_2} 2^p C_1^p \left( |\langle \varphi_1 \rangle - \langle \varphi_2 \rangle|^p + |v_1(l) - v_2(l)|^p \right) dl \\ &\leq \int_{l_1}^{l_2} 2^p C_1^p \left( \left( \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{q}} e^{\omega l_2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega} \right)^p + |v_1(l) - v_2(l)|^p \right) dl \\ &\leq 2^p C_1^p \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} e^{\omega l_2 p} l_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega}^p + 2^p C_1^p \|v_1 - v_2\|_{Y_p}^p. \end{aligned}$$

This yields the inequality

$$\begin{aligned} J_2 &\leq 2C_1 \left( \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{p}{q}} l_2 e^{\omega l_2 p} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega}^p + \|v_1 - v_2\|_{Y_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \vartheta_2 \|(v_1, \varphi_1) - (v_2, \varphi_2)\|_* \end{aligned}$$

where  $\vartheta_2 = 2C_1 \max \left( l_2^{\frac{1}{p}} \left( \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{q}} e^{\omega l_2}, 1 \right)$ . Putting  $\vartheta = \max(\vartheta_1, \vartheta_2)$ , we get

$$\|\mathbf{K}(v_1, \varphi_1) - \mathbf{K}(v_2, \varphi_2)\|_{Y_p} \leq \vartheta \|(v_1, \varphi_1) - (v_2, \varphi_2)\|_*.$$

This proves (ii). □

**Remark 3.4.1.** *In the following lemma, we will show that  $T_K^\omega$  is quasi-accretive on  $X_p^\omega$  whenever  $\omega > \max\{0, \frac{1}{l_1} \ln(\vartheta)\}$  where  $\vartheta$  is the constant appearing in Lemma 3.4.1(ii).*

---

**Lemma 3.4.2.** *Let  $p \in [1, +\infty)$  and let  $\omega$  be an arbitrary real number satisfying  $\omega > \max(0, \frac{1}{l_1} \ln(\vartheta))$ . If the hypothesis (A6) holds true, then, there exist a constant  $\delta := \delta(p) > 0$  such that*

(i) *if  $p = 1$ , then, for all  $g_1, g_2 \in X_1^\omega$ , we have*

$$\left\| (I - \lambda T_K^\omega)^{-1}(g_1) - (I - \lambda T_K^\omega)^{-1}(g_2) \right\|_{1,\omega} \leq \frac{1}{1 - \lambda\delta} \|g_1 - g_2\|_{1,\omega},$$

*for all  $\lambda \in (0, \frac{1}{\delta})$ ;*

(ii) *if  $p \in (1, +\infty)$ , then, for all  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$ , we have*

$$\langle T_K^\omega(\varphi_1) - T_K^\omega(\varphi_2), \psi_\delta \rangle_s \geq -\delta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\omega},$$

*for some  $\psi_\delta \in \mathbf{J}_\delta(\varphi_1 - \varphi_2)$  and  $\lambda \in (0, \frac{1}{\delta})$ .*

**Proof.** (i) Define the real  $\delta(1)$  by  $\delta(1) = \omega + 1$  and let  $g_1, g_2 \in X_1^\omega$  be such that

$$\varphi_1 = (I + \lambda T_K^\omega)^{-1}(g_1), \quad \varphi_2 = (I + \lambda T_K^\omega)^{-1}(g_2).$$

Hence we have

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\omega} &= \left\| (I + \lambda T_K^\omega)^{-1}(g_1) - (I + \lambda T_K^\omega)^{-1}(g_2) \right\|_{1,\omega} \\ &\leq -\lambda \int_{\Omega} e^{-\omega(t-a)} \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial a} \operatorname{sgn}_0(\varphi_1 - \varphi_2) da dl \\ &\quad + \int_{\Omega} e^{-\omega(t-a)} (g_1 - g_2) \operatorname{sgn}_0(\varphi_1 - \varphi_2) da dl \\ &\leq -\lambda \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l \frac{\partial}{\partial a} \left| e^{-\omega(t-a)} (\varphi_1 - \varphi_2) \right| da \right) dl \\ &\quad + \lambda \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l |\varphi_1 - \varphi_2| \left( \frac{\partial e^{-\omega(t-a)}}{\partial a} \right) da \right) dl + \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l e^{-\omega(t-a)} |g_1 - g_2| da \right) dl \\ &\leq -\lambda \int_{l_1}^{l_2} \left( \left| \varphi_{1|\Gamma_2}(l) - \varphi_{2|\Gamma_2}(l) \right| - e^{-\omega l} \left| \varphi_{1|\Gamma_1}(l) - \varphi_{2|\Gamma_1}(l) \right| \right) dl \\ &\quad + \lambda\omega \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\omega} + \|g_1 - g_2\|_{1,\omega}. \end{aligned}$$

Since  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$ , applying Lemma 3.4.1(ii) we get

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\omega} &\leq \lambda \times \left\{ e^{-\omega l_1} \left\| \mathbf{K}(\varphi_{1|\Gamma_2}, \varphi_1) - \mathbf{K}(\varphi_{2|\Gamma_2}, \varphi_2) \right\|_{Y_1} - \left\| \varphi_{1|\Gamma_2} - \varphi_{2|\Gamma_2} \right\|_{Y_1} \right\} \\ &\quad + \lambda\omega \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\omega} + \|g_1 - g_2\|_{1,\omega} \\ &\leq \lambda\vartheta e^{-\omega l_1} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\omega} + \lambda(\vartheta e^{-\omega l_1} - 1) \left\| \varphi_{1|\Gamma_2} - \varphi_{2|\Gamma_2} \right\|_{Y_1} \\ &\quad + \lambda\omega \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\omega} + \|g_1 - g_2\|_{1,\omega}. \end{aligned}$$

Since  $\vartheta e^{-\omega l_1} \leq 1$ , we get

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\omega} &\leq \lambda(\omega + 1) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\omega} + \|g_1 - g_2\|_{1,\omega} \\ &\leq \frac{1}{1 - \lambda(\omega + 1)} \|g_1 - g_2\|_{1,\omega} \\ &= \frac{1}{1 - \lambda\delta(1)} \|g_1 - g_2\|_{1,\omega}. \end{aligned}$$

(ii) Now, we consider the case  $p \in (1, +\infty)$  with  $p > 1$ . Let  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$  be such that  $\varphi_1 \neq \varphi_2$  and consider the real  $\delta(p) = \omega + \frac{1}{p}$ . Putting  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , we can write

$$\begin{aligned} [T_K^\omega(\varphi_1) - T_K^\omega(\varphi_2), \psi_\delta]_s &\geq \|\varphi\|_{p,\omega}^{1-p} \int_\Omega e^{-\omega(l-a)} |\varphi|^{p-1} \frac{\partial}{\partial a}(\varphi) \operatorname{sgn}_0(\varphi)(a, l) dadl \\ &= \frac{\|\varphi\|_{p,\omega}^{1-p}}{p} \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left( \frac{\partial}{\partial a}(|\varphi|^p) \right)(a, l) da \right) dl \\ &= \frac{\|\varphi\|_{p,\omega}^{1-p}}{p} \left( \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \frac{\partial(e^{-\omega(l-a)} |\varphi|^p)}{\partial a}(a, l) dadl \right. \\ &\quad \left. - \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l |\varphi|^p \left( \frac{\partial e^{-\omega(l-a)}}{\partial a} \right)(a, l) dadl \right) \\ &= \frac{\|\varphi\|_{p,\omega}^{1-p}}{p} \times \int_{l_1}^{l_2} \left( |\varphi_{1|\Gamma_2}(l) - \varphi_{2|\Gamma_2}(l)|^p - e^{-\omega l} |\varphi_{1|\Gamma_1}(l) - \varphi_{2|\Gamma_1}(l)|^p \right) dl - \omega \|\varphi\|_{p,\omega}. \end{aligned}$$

Since  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$ , applying Lemma 3.4.1(ii), we get

$$\begin{aligned} [T_K^\omega(\varphi_1) - T_K^\omega(\varphi_2), \psi_\delta]_s &\geq -\omega \|\varphi\|_{p,\omega} \\ &\quad - \frac{\|\varphi\|_{p,\omega}^{1-p}}{p} \left\{ e^{-\omega l_1} \left\| \mathbf{K}(\varphi_{1|\Gamma_2}, \varphi_1) - \mathbf{K}(\varphi_{2|\Gamma_2}, \varphi_2) \right\|_{Y_p}^p - \left\| \varphi_{1|\Gamma_2} - \varphi_{2|\Gamma_2} \right\|_{Y_p}^p \right\} \\ &\geq -\omega \|\varphi\|_{p,\omega} - \frac{1}{p} \left( \vartheta^p e^{-\omega l_1} \right) \|\varphi\|_{p,\omega}^{1-p} \|\varphi\|_{p,\omega}^p \\ &\quad - \frac{1}{p} \left( \vartheta^p e^{-\omega l_1} - 1 \right) \|\varphi\|_{p,\omega}^{1-p} \left\| \varphi_{1|\Gamma_2} - \varphi_{2|\Gamma_2} \right\|_{Y_p}^p. \end{aligned}$$

Since  $\vartheta^p e^{-\omega l_1} \leq 1$ , we get

$$\begin{aligned} [T_K^\omega(\varphi_1) - T_K^\omega(\varphi_2), \psi_\delta]_s &\geq -\left(\omega + \frac{1}{p}\right) \|\varphi\|_{p,\omega} \\ &= -\delta(p) \|\varphi\|_{p,\omega}. \end{aligned}$$

□

---

Let  $g \in X_p^\omega$  and consider the problem

$$(I + \lambda T_K^\omega) f = g. \quad (3.4.3)$$

where  $f$  must be sought in  $\in \mathcal{D}(T_K^\omega)$ .

For any  $\lambda > 0$ , the solution of Problem (3.4.3) is given

$$f(a, l) = e^{-\frac{a}{\lambda}} \mathbf{K}(f|_{\Gamma_2}, f)(l) + \frac{1}{\lambda} \int_0^a e^{-\frac{s-a}{\lambda}} g(s, l) ds. \quad (3.4.4)$$

For  $a = l$ , we get

$$f(l, l) := f|_{\Gamma_2} = e^{-\frac{l}{\lambda}} \mathbf{K}(f|_{\Gamma_2}, f)(l) + \frac{1}{\lambda} \int_0^l e^{-\frac{s-l}{\lambda}} g(s, l) ds. \quad (3.4.5)$$

In order to write abstractly equations (3.4.4) and (3.4.5), we define the following linear operators :

$$\begin{cases} A_\lambda : Y_p \longrightarrow Y_p \\ u \rightarrow (A_\lambda u)(l) := u(l) e^{-\frac{l}{\lambda}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_\lambda : Y_p \longrightarrow X_p^\omega \\ u \rightarrow (B_\lambda u)(a, l) := u(l) e^{-\frac{a}{\lambda}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_\lambda : X_p^\omega \longrightarrow Y_p \\ g \rightarrow (C_\lambda g)(l) := \frac{1}{\lambda} \int_0^l e^{-\frac{s-l}{\lambda}} g(s, l) ds \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} D_\lambda : X_p^\omega \longrightarrow X_p^\omega \\ g \rightarrow (D_\lambda g)(a, l) := \frac{1}{\lambda} \int_0^a e^{-\frac{s-a}{\lambda}} g(s, l) ds. \end{cases}$$

For  $u \in Y_p$ , we have

$$\|A_\lambda u\|_{Y_p}^p = \int_{l_1}^{l_2} \left| e^{-\frac{l}{\lambda}} u(l) \right|^p dl \leq e^{-p\frac{l_1}{\lambda}} \int_{l_1}^{l_2} |u(l)|^p dl = e^{-p\frac{l_1}{\lambda}} \|u\|_{Y_p}^p$$

which implies

$$\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(Y_p)} \leq e^{-\frac{l_1}{\lambda}}. \quad (3.4.6)$$

Similarly, for  $u \in Y_p$ , we can write

$$\begin{aligned} \|B_\lambda u\|_{X_p^\omega}^p &= \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left| e^{-\frac{a}{\lambda}} u(l) \right|^p da dl \leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-p\frac{a}{\lambda}} |u(l)|^p da dl \\ &\leq \frac{\lambda}{p} \|u\|_{Y_p}^p. \end{aligned}$$

This yields

$$\|B_\lambda\|_{\mathcal{L}(Y_p, X_p^\omega)} \leq \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.4.7)$$

Next, using Hölder's inequality and the fact that  $1 \leq e^{\omega l_2} e^{-\omega(l-s)}$ , for  $g \in X_p^\omega$ , we have

$$\begin{aligned} \|C_\lambda g\|_{Y_p}^p &\leq \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{\lambda^p} \left[ \int_0^l e^{\frac{s-l}{\lambda}} |g(s, l)| ds \right]^p dl \\ &\leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{l_1}^{l_2} \left[ \left( \int_0^l ds \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^l |g(s, l)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p dl \\ &\leq \frac{l_2^{\frac{p}{q}}}{\lambda^p} e^{\omega l_2} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-s)} |g(s, l)|^p ds dl \\ &= \frac{l_2^{\frac{p}{q}} e^{\omega l_2}}{\lambda^p} \|g\|_{p, \omega}^p \end{aligned}$$

and therefore

$$\|C_\lambda\|_{\mathcal{L}(X_p^\omega, Y_p)} \leq \frac{l_2^{\frac{1}{q}}}{\lambda} e^{\frac{\omega l_2}{p}}. \quad (3.4.8)$$

In the same way we can write

$$\begin{aligned} \|D_\lambda g\|_{X_p^\omega}^p &\leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \frac{1}{\lambda^p} \left[ \int_0^l e^{\frac{s-l}{\lambda}} |g(s, l)| ds \right]^p da dl \\ &\leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \frac{1}{\lambda^p} \left[ \int_0^l |g(s, l)| ds \right]^p da dl \\ &\leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \left[ \left( \int_0^l ds \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^l |g(s, l)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p da dl \\ &\leq \frac{l_2^p}{\lambda^p} e^{\omega l_2} \|g\|_{p, \omega}^p \end{aligned}$$

and consequently

$$\|D_\lambda\|_{\mathcal{L}(X_p^\omega, X_p^\omega)} \leq \frac{l_2}{\lambda} e^{\frac{\omega l_2}{p}}. \quad (3.4.9)$$

Now using these operators and the fact that  $f$  must satisfy the boundary conditions, equations (3.4.4) and (3.4.5) may be written in the form

$$\begin{cases} f = B_\lambda \mathbf{K}(f|_{\Gamma_2}, f) + D_\lambda g, \\ f|_{\Gamma_2} = A_\lambda \mathbf{K}(f|_{\Gamma_2}, f) + C_\lambda g. \end{cases}$$

Accordingly,  $(f|_{\Gamma_2}, f)$  is a solution to the fixed point problem  $F_\lambda(v, w) = (v, w)$  on the product space  $Y_p \times X_p^\omega$  where

$$F_\lambda(v, w) = (F_\lambda^1, F_\lambda^2)(v, w) = \left( A_\lambda \mathbf{K}(v, w) + C_\lambda g, B_\lambda \mathbf{K}(v, w) + D_\lambda g \right). \quad (3.4.10)$$

---

**Lemma 3.4.3.** *If the assumption (A6) holds true. There exists a constant  $\lambda_p > 0$  such that, for any  $\lambda \in (0, \lambda_p)$  and  $g \in X_p^\omega$ , there exists a function  $f \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$  such that*

$$f + \lambda T_K^\omega(f) = g. \quad (3.4.11)$$

**Proof.** As we have seen above, in order to solve Problem (3.4.11), it suffices to prove that the fixed point problem  $F_\lambda(u, f) = (u, f)$  has a unique solution in  $Y_p \times X_p^\omega$  where the operator  $F_\lambda$  is defined by (3.4.10). To do so, let  $\lambda_p$  be the real defined by

$$\lambda_p := \sup \left\{ \lambda > 0 : \left( e^{-p\frac{l_1}{\lambda}} + \frac{\lambda}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \vartheta < 1 \right\}$$

where  $\vartheta$  is the constant given in Lemma 3.4.1(ii).

Let  $(u_1, f_1), (u_2, f_2) \in Y_p \times X_p^\omega$ . Using Lemma 3.4.1(ii) together with the estimates (3.4.6)-(3.4.9), we get

$$\begin{aligned} \|F_\lambda(u_1, f_1) - F_\lambda(u_2, f_2)\|_*^p &= \|A_\lambda \mathbf{K}(u_1, f_1) - A_\lambda \mathbf{K}(u_2, f_2)\|_*^p + \|B_\lambda \mathbf{K}(u_1, f_1) - B_\lambda \mathbf{K}(u_2, f_2)\|_*^p \\ &\leq e^{-p\frac{l_1}{\lambda}} \|\mathbf{K}(u_1, f_1) - \mathbf{K}(u_2, f_2)\|_*^p + \frac{\lambda}{p} \|\mathbf{K}(u_1, f_1) - \mathbf{K}(u_2, f_2)\|_*^p \\ &\leq \left( e^{-p\frac{l_1}{\lambda}} + \frac{\lambda}{p} \right) \vartheta^p \|(u_1, f_1) - (u_2, f_2)\|_*^p. \end{aligned}$$

This yields

$$\|F_\lambda(u_1, f_1) - F_\lambda(u_2, f_2)\|_* \leq \left( e^{-p\frac{l_1}{\lambda}} + \frac{\lambda}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \vartheta \|(u_1, f_1) - (u_2, f_2)\|_*.$$

Taking into account of the definition of the real  $\lambda_p$ , it is clear that, for each  $\lambda \in (0, \lambda_p)$ , the operator  $F_\lambda$  is then a strict contraction mapping. Applying the fixed point theorem of Banach we infer that, for such  $\lambda$ , Problem (3.4.11) has a unique solution in  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$ .  $\square$

**Remark 3.4.2.** It follows from Lemmas 3.4.2 and 3.4.3 that  $T_K^\omega$  is a quasi-m-accretive operator in  $X_p^\omega$ . Note also that, in this case,  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$  is a dense subset of  $X_p^\omega$  (see, for example, [23, 24]).

The main result of this section is the following.

**Theorem 3.4.1.** *Let  $\mathbf{r} > 0$ ,  $\omega > \max(0, \frac{1}{l_1} \ln(\vartheta))$  and assume that the conditions (A3)-(A6) are satisfied. Then the following hold true.*

- (i) *If  $p \in (1, +\infty)$ , then, for each  $f_0 \in X_p^\omega$ , problem (3.4.2) has a local weak solution. If the initial data  $f_0$  belongs to  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$ , then problem (3.4.2) has a local strong solution. Assume, further, that (A7) is satisfied, then problem (3.4.2) has a unique global strong solution for each  $f_0 \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$  and it is a unique global weak solution if  $f_0 \notin \mathcal{D}(T_K^\omega)$ .*
- (ii) *If  $p = 1$ , then, for each  $f_0 \in X_1^\omega$ , problem (3.4.2) has a local mild solution.*

**Proof.** (i) According to Remark 3.4.2,  $T_K^\omega$  is quasi-m-accretive on  $X_p^\omega$ . It follows from Lemma 3.4.1 that  $\mathfrak{F}_p^1$  is locally Lipschitzian on  $X_p^\omega$ . Hence, the use of the fact that  $X_p^\omega$  is reflexive together with Theorem 1.1.2, implies the existence of a local strong solution  $f$  to (3.4.2) whenever the initial data  $f_0$  belongs to  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$ .

Next, let  $f_0 \notin \mathcal{D}(T_K^\omega)$ . Since  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$  is dense in  $X_p^\omega$ , there exists a sequence  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contained in  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$  such that  $f_n \rightarrow f_0$  as  $n \rightarrow \infty$  and put  $M := \sup\{\|f_n\|_{p,\omega} : n = 0, 1, \dots\}$ . A similar proof to that of Theorem 1.1.2 allows us deduce the existence of real  $T_M > 0$  such that for each  $n \in \mathbb{N}$ , the problem

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t) + T_K^\omega(f(t)) = \mathfrak{F}_p^1(f(t)), \\ f(0) = f_n \in X_p^\omega, \end{cases}$$

possesses a unique strong solution, say  $g_n$ , on the interval  $(0, T_M)$ . To prove the existence of a local weak solution, we have only to check that the sequence  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is a Cauchy sequence in the Banach space  $C(0, T_M; X_p^\omega)$ . This follows immediately from (1.1.6).

To discuss the existence of a unique global strong solution to Problem 3.4.2, we assume that the condition (A7) is satisfied. If  $g \in \mathbf{J}_1(f)$ , then one can write

$$\begin{aligned} \langle -\mathfrak{F}_p^1(f), g \rangle_s &= \langle \sigma_1(a, l, \langle f \rangle) f - \mathfrak{B}^1(f), g \rangle_s \\ &= \|g\|_{p,\omega}^{1-p} \left( \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \operatorname{sgn}_0(g) |g|^{p-1} \sigma_1(\cdot, \cdot, \langle f \rangle) f da \right) dl \right. \\ &\quad \left. - \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_0^l e^{-\omega(l-a)} \left( \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{l'} e^{\omega(l'-a')} e^{-\omega(l'-a')} \operatorname{sgn}_0(g) |g|^{p-1} \tilde{k}_1(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, f) f da' dl' \right) da \right) dl \right) \\ &\geq \underline{\sigma}_1 \|f\|_{p,\omega}^2 - \bar{k}_1 e^{2\omega(l_1-l_2)} \|f\|_{p,\omega}^2 \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l dadl \\ &\geq \underline{\sigma}_1 \|f\|_{p,\omega}^2 - \bar{k}_1 e^{2\omega(l_1-l_2)} \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \|f\|_{p,\omega}^2 \end{aligned}$$

This yields to

$$\begin{aligned} \langle -\mathfrak{F}_p^1(f), g \rangle_s &\geq \underline{\sigma}_1 \|f\|_{p,\omega}^2 - \bar{k}_1 e^{2\omega(l_1-l_2)} \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \|f\|_{p,\omega}^2 \\ &\geq -\alpha \|f\|_{p,\omega}^2, \end{aligned}$$

where  $\alpha := \bar{k}_1 e^{2\omega(l_1-l_2)} \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} - \underline{\sigma}_1$ . Applying Theorem 1.1.2, we conclude that  $f$  is a global strong solution.

(ii) By hypothesis  $f_0 \in X_1^\omega$ . Let  $\mathbf{r} > 1$  be a real such that  $\|f_0\|_{1,\omega} \leq \mathbf{r} - 1$ . Let  $R$  be the function defined on  $X_1^\omega$  by

$$R(g) = \begin{cases} g & \text{if } \|g\|_{1,\omega} \leq \mathbf{r}, \\ \frac{\mathbf{r}}{\|g\|_{1,\omega}} g & \text{if } \|g\|_{1,\omega} \geq \mathbf{r}. \end{cases}$$

---

We know from Lemmas 3.4.2 and 3.4.3 (see also Remark 3.4.2) that  $T_K^\omega$  is  $\omega$ -m-accretive. The use Lemma 3.4.1(i) together with [22] shows that the function  $\mathfrak{F}_1^1(R(\cdot))$  is  $2C_r$ -Lipschitz on  $X_1^\omega$  where  $C_r$  is the Lipschitz constant of  $\mathfrak{F}_1^1$  on  $B_r^{1,\omega}$  (cf. Lemma 3.4.1(i)). Consequently, the operator  $T_K^\omega - \mathfrak{F}_1^1(R(\cdot))$  is  $(\omega + 2C_r)$ -m-accretive on  $X_1^\omega$  or, equivalently,  $T_K^\omega - \mathfrak{F}_1^1(R(\cdot))$  is quasi-accretive on  $X_1^\omega$ . Applying Proposition 1.1.2 we infer that the problem

$$\begin{cases} f'(t) + T_K^\omega(f(t)) = \mathfrak{F}_1^1(R(f(t))) \\ f(0) = f_0, \end{cases}$$

has a unique mild solution  $f$  on  $X_1^\omega$ .

Next, using the fact that  $\mathcal{D}(T_K^\omega)$  is dense in  $X_1^\omega$ , we can choose  $h_0 \in \mathcal{D}(T_K^\omega)$  such that  $\|h_0 - f_0\|_{1,\omega} \leq 1/2$ . It is clear that  $h_0 \in B_r^{1,\omega}$ . Set  $\eta_0 = T_K^\omega(h_0) - \mathfrak{F}_1^1(R(h_0)) = T_K^\omega(h_0) - \mathfrak{F}_1^1(h_0)$ . The use of (1.1.5) yields

$$\begin{aligned} \|u(t) - h_0\|_{1,\omega} &\leq e^{\omega t} \|h_0 - f_0\|_{1,\omega} + \int_0^t e^{\omega(t-s)} [-\eta_0, u(s) - h_0]_s ds \\ &\leq e^{\omega t} \left( \|h_0 - f_0\|_{1,\omega} + \frac{1}{\omega} \|\eta_0\|_{1,\omega} (1 - e^{-\omega t}) \right). \end{aligned}$$

Accordingly

$$\|u(t)\|_{1,\omega} \leq \|h_0\|_{1,\omega} + 1 \leq \mathbf{r},$$

for  $0 \leq t \leq T_{\mathbf{r}}$  where  $T_{\mathbf{r}} > 0$  is suitably chosen. This shows that  $u(\cdot)$  is a mild solution to Problem (3.4.2) in the interval  $[0, T_{\mathbf{r}}]$  which completes the proof.  $\square$

**Remark 3.4.3.** *It should be noticed that in the case where the perturbation is trivial ( $P = 0$ ), Problem 3.4.1 coincide with Problem (DE)-(DC) in [56]. So, Theorem 3.4.1 extends Theorems 5.5 and 6.5 in [56] to a more general framework.*





# On the solutions for a nonlinear boundary value problem modeling a proliferating cell population with inherited cycle length

## 4.1 Introduction

The purpose of this chapter is to establish some existence results for the following nonlinear integro-differential equation

$$\frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) + \lambda \psi(a, l) + \sigma(a, l, \psi(a, l)) = \int_{l_1}^{+\infty} \kappa(a, l, l') f(a, l', \psi(a, l')) \chi_{\Omega}(a, l') dl', \quad (4.1.1)$$

where  $\lambda$  is a real number and  $\chi_{\Omega}$  denotes the characteristic function of the set

$$\Omega := \{(a, l); 0 < a < l, 0 < l_1 < l < +\infty\}.$$

This equation is derived from an age-structured proliferating cell population model with inherited properties introduced by Lebowitz and Rubinow [39]. The variable  $l$  denotes the cycle length of individual cells which is the time between cell birth and cell division. The cell cycle length of individual cells is an inherent characteristic determined at birth. The variable  $a$  is the age of the individual cells. It is defined so that cells born at  $a = 0$  (daughter cells) and divide at  $a = l$  (mother cells). The constant  $l_1$  is the minimum cycle length of cells while the maximum cycle length of cells is allowed to be infinite ( $l_2 = +\infty$ ). Here  $\psi(a, l)$  denotes the density of the population with respect to age  $a$  and cell cycle length  $l$ . The function  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  is the rate of cells mortality or loss due to causes other than division,  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$  is a measurable function from  $\Omega \times \mathbb{R}$  into  $\mathbb{R}$  and  $\kappa(\cdot, \cdot, \cdot)$  is a measurable function from  $\mathbb{R}^+ \times [l_1, +\infty) \times [l_1, +\infty)$  into  $\mathbb{R}$ .

The model originally proposed by Lebowitz and Rubinow [39] is a linear partial differential equation, but as observed by Rotenberg [52], it seems that the linear model is not adequate. Indeed, the cells under consideration are in contact with a nutrient environment which is not part of the mathematical formulation. Fluctuations in nutrient concentration and other density-dependent effects such as contact inhibition of growth make the transition rates functions of the population density, thus creating a nonlinear problem. So the rate of cell mortality  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  and the function  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$  are assumed to be nonlinear functions of the density of cells  $\psi(\cdot, \cdot)$ . On the other hand, the biological boundary is fixed and tightly coupled through out mitosis and the conditions present at the boundaries are felt throughout the system and cannot be remote. This phenomena suggest that at mitosis daughter cells and parent cells are related by a nonlinear reproduction rule which describes the boundary conditions. It writes in the shape

$$\psi(0, l) = (\mathbf{R}\psi)(l, l), \tag{4.1.2}$$

where  $\mathbf{R}$  stands for a nonlinear operator which is intended to model the transition from mother cells of cycle length  $l$  to daughter cells of cycle length  $l$ . It covers, in particular, the usual biological models (cf. [39, 59, 60, 34, 42] and the references therein).

The model (4.1.1)-(4.1.2) has been analyzed in [26] in  $L^p$ -spaces,  $1 < p < \infty$ , in the case where the maximum cycle length ( $l_2 < +\infty$ ) is finite. The analysis follows the same strategy as that used by the second author in [31] in the context of rarefied gas dynamics. It is based essentially on compactness results established only for  $1 < p < \infty$  and uses the Schauder and Krasnosel'skii fixed point theorems. Due to the lack of compactness in  $L^1$ -spaces, this approach fails in the  $L^1$  context (which is the convenient and natural setting of the problem because  $\psi(a, l)$  has the meaning of a density of cells with respect to the age  $a$  and the cells cycle length  $l$ ). The case of  $L^1$ -spaces was considered in [36]. The approach is based on topological methods and uses the specific properties of weakly compact sets in  $L^1$ -spaces. Note also that the well-posedness of nonlinear evolution equations derived from the model of Lebowitz and Rubinow was discussed in the works [56, 23, 1, 2]. The main purpose of this chapter is to present an existence theory for the boundary value problem (4.1.1)-(4.1.2) on  $L^1$ -spaces in the case where the maximum cycle length is infinite ( $l_2 = +\infty$ ).

The organization of this chapter is as follows. In Section 2 we introduce the functional setting of the problem and we establish some preliminary results. We recall some facts from functional analysis and two fixed point theorems established in [35, 37] needed in the sequel. We also introduce a measure of weak noncompactness adapted to the problem. In Section 4.3, establish an existence result for the boundary value problem (4.1.1)-(4.1.2) (cf. Theorem 4.3.1) in the special case where  $\sigma(a, l, \psi(a, l)) = \sigma(a, l)\psi(a, l)$  ( $\sigma$  is not re-labeled) is a multiplication operator. The proof of this result consists in writing problem (4.1.1)-(4.1.2) as a fixed point problem involving a nonlinear ws-compact operator, depending on the real  $\lambda$ ,  $\mathbf{G}_\lambda$ , and we show that it satisfies the hypotheses of Theorem 4.2.1 on an appropriate subset of  $L^1(\Omega)$ . Existence results for the general boundary value problem (4.1.1)-(4.1.2) (i.e.  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  is a nonlinear function of  $\psi(\cdot, \cdot)$ ) is the subject of Theorem 4.3.2. In order to transform (4.1.1)-(4.1.2) into a fixed point problem, the additivity of the

---

transition operator  $\mathbf{R}$  (and consequently its linearity because it is continuous) is required. Under this hypothesis, we first transform (4.1.1)-(4.1.2) into a fixed point problem involving two nonlinear operators depending on the real number  $\lambda$ , say,  $\psi = \mathcal{F}(\lambda)\psi + \mathcal{H}(\lambda)\psi$ . Restricting ourselves to an adequate subset of  $L^1(\Omega)$  we show that  $\mathcal{F}(\lambda)$  and  $\mathcal{H}(\lambda)$  satisfy the hypotheses of Theorem 4.2.2.

## 4.2 Notation and Preliminaries

In this section we fix notations and introduce the functional setting of the problem. Let

$$\mathbf{X} := L^1(\Omega; dadl),$$

where  $\Omega := \{(a, l); 0 < a < l, l_1 < l < +\infty\}$  with  $0 < l_1 < +\infty$  and denote by  $\mathbf{Z}_1$  and  $\mathbf{Z}_2$  the boundary spaces, that is,  $\mathbf{Z}_1 := L^1(\Gamma_1; dl)$  and  $\mathbf{Z}_2 := L^1(\Gamma_2; dl)$  where  $\Gamma_1 := \{(0, l) : l \in (l_1, +\infty)\}$  and  $\Gamma_2 := \{(l, l) : l \in (l_1, +\infty)\}$ . Let  $\mathbf{W}$  be the partial Sobolev space defined by

$$\mathbf{W} = \left\{ \psi \in \mathbf{X} : \frac{\partial \psi}{\partial a} \in \mathbf{X} \right\}.$$

Let us now prove a result similar to that of Proposition 2.1 in [34] for the space  $\mathbf{X}$ .

**Lemma 4.2.1.** *Let  $\psi \in \mathbf{W}$ . If  $\psi|_{\Gamma_1} \in \mathbf{Z}_1$ , then  $\psi|_{\Gamma_2} \in \mathbf{Z}_2$  and vice versa.*

**Proof.** For any  $\psi \in \mathbf{W}$ , we have

$$\psi(l, l) = \psi(0, l) + \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) da. \quad (4.2.1)$$

and therefore  $|\psi(l, l)| \leq |\psi(0, l)| + \int_0^l \left| \frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) \right| da$ . If  $\psi|_{\Gamma_1} \in \mathbf{Z}_1$ , then

$$\begin{aligned} \int_{l_1}^{+\infty} |\psi(l, l)| da &\leq \int_{l_1}^{+\infty} |\psi(0, l)| dl + \int_{l_1}^{+\infty} \int_0^l \left| \frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) \right| dadl \\ &\leq \|\psi\|_{\mathbf{Z}_1} + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) \right\|_{\mathbf{X}} < \infty \end{aligned}$$

which implies that  $\psi|_{\Gamma_2} \in \mathbf{Z}_2$ .

Writing Eq. (4.2.1) in the form  $\psi(0, l) = \psi(l, l) - \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) da$  and arguing as above we derive the converse.  $\square$

In the remainder of this chapter we will use the following space

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \{ \psi \in \mathbf{W} \text{ such that } \psi|_{\Gamma_1} \in \mathbf{Z}_1 \} = \{ \psi \in \mathbf{W} \text{ such that } \psi|_{\Gamma_2} \in \mathbf{Z}_2 \}.$$

For simplicity, we shall identify  $Z_1$  and  $Z_2$  with the space

$$Y := L^1([l_1, +\infty); dl)$$

We suppose that the transition boundary operator  $\mathbf{R}$  defined from  $Y$  into  $Y$  satisfies the condition

(A1) There exists  $\alpha > 0$  such that

$$\|\mathbf{R}(\psi_1) - \mathbf{R}(\psi_2)\|_Y \leq \alpha \|\psi_1 - \psi_2\|_Y \text{ for all } \psi_1, \psi_2 \in Y.$$

It is clear that  $\mathbf{R}$  is continuous. Moreover, for all  $\psi \in Y$ , we have

$$\|\mathbf{R}(\psi)\|_Y \leq \alpha \|\psi\|_Y + \|\mathbf{R}(0)\|_Y. \quad (4.2.2)$$

So,  $\mathbf{R}$  maps bounded sets of  $Y$  into bounded sets of  $Y$ .

Now, we will define the operator

$$\begin{cases} S_{\mathbf{R}} : \mathcal{D}(S_{\mathbf{R}}) \subset X \longrightarrow X \\ \psi \longrightarrow S_{\mathbf{R}}(\psi)(a, l) = -\frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) - \sigma(a, l)\psi(a, l) \end{cases}$$

with domain

$$\mathcal{D}(S_{\mathbf{R}}) = \{\psi \in \widetilde{W} \text{ such that } \psi|_{\Gamma_1} = \mathbf{R}(\psi|_{\Gamma_2})\}$$

where  $\sigma(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\Omega, dadl)$ . In the remainder of this work we set

$$\underline{\sigma} = \text{ess-inf}\{\sigma(a, l), \quad (a, l) \in \Omega\}.$$

We consider the resolvent equation for the operator  $S_{\mathbf{R}}$ ,  $(\lambda - S_{\mathbf{R}})\psi = \varphi$ , where  $\varphi$  is a given function of  $X$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  and the unknown  $\psi$  must be sought in  $\mathcal{D}(S_{\mathbf{R}})$ . For  $\lambda > -\underline{\sigma}$ , the solution is formally given by

$$\psi(a, l) = \psi(0, l)e^{-\int_0^a (\lambda + \sigma(s, l))ds} + \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda + \sigma(\tau, l))d\tau} \varphi(s, l)ds. \quad (4.2.3)$$

Accordingly, for  $a = l$ , we get

$$\psi(l, l) = \psi(0, l)e^{-\int_0^l (\lambda + \sigma(s, l))ds} + \int_0^l e^{-\int_s^l (\lambda + \sigma(\tau, l))d\tau} \varphi(s, l)ds, \quad (4.2.4)$$

The last equation may be written in the form

$$\psi(l, l) = P_\lambda \mathbf{R}\psi(l, l) + \Pi_\lambda \varphi \quad (4.2.5)$$

where  $P_\lambda$  stands for the linear operator

$$Y \ni u \longrightarrow (P_\lambda u)(l) := u(0, l)e^{-\int_0^l (\lambda + \sigma(s, l))ds} \in Y,$$

---

while  $\Pi_\lambda$  is the linear operator given by

$$\mathbb{X} \ni \varphi \longrightarrow (\Pi_\lambda \varphi)(l) := \int_0^l e^{-\int_s^l (\lambda + \sigma(\tau, l)) d\tau} \varphi(s, l) ds \in \mathbb{Y}.$$

It is easy to check that  $P_\lambda$  and  $\Pi_\lambda$  are bounded and

$$\|P_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Y})} \leq e^{-l_1(\lambda + \underline{\sigma})}, \quad \|\Pi_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} \leq 1.$$

Consider now the equation

$$u = P_\lambda \mathbf{R}(u) + f \tag{4.2.6}$$

where  $f$  is a given function of  $\mathbb{Y}$ . Let  $A_{(\lambda, f)}$  be the operator defined by

$$\begin{cases} A_{(\lambda, f)} : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Y} \\ u \longrightarrow A_{(\lambda, f)} u := P_\lambda \mathbf{R}(u) + f. \end{cases}$$

Since  $\|P_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Y})} \leq e^{-l_1(\lambda + \underline{\sigma})}$ , for all  $u, v \in \mathbb{Y}$ , we have

$$\|A_{(\lambda, f)}(u) - A_{(\lambda, f)}(v)\| \leq \alpha e^{-l_1(\lambda + \underline{\sigma})} \|u - v\|.$$

So, for every  $\lambda > \max(0, -\underline{\sigma} + \frac{1}{l_1} \ln(\alpha))$ , the operator  $A_{(\lambda, f)}$  is a strict contraction mapping on  $\mathbb{Y}$  and therefore, by the Banach fixed point theorem, Problem (4.2.6) has a unique solution  $u = u(\lambda, f)$ . Let  $J_\lambda$  be the operator defined by

$$\begin{cases} J_\lambda : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Y} \\ f \longrightarrow J_\lambda f := u \end{cases}$$

where  $u$  stands for the unique solution of the equation (4.2.6).

**Lemma 4.2.2.** *Let  $\zeta > 0$  and let  $\lambda \in \mathbb{R}$  be such that  $\lambda > \max(\zeta, -\underline{\sigma} + \frac{1}{l_1} \ln(\alpha))$  and assume that the hypothesis (A1) is satisfied. Then  $J_\lambda$  is continuous on  $\mathbb{Y}$  and maps bounded sets into bounded ones.*

**Proof.** By the definition of  $J_\lambda(f)$ , Eq. (4.2.5) may be written in the form  $J_\lambda(f) = P_\lambda \mathbf{R}(J_\lambda(f)) + f$ . Hence, for any  $f_1, f_2 \in \mathbb{Y}$ , we have  $\|J_\lambda(f_1) - J_\lambda(f_2)\|_{\mathbb{Y}} \leq \alpha e^{-l_1(\zeta + \underline{\sigma})} \|J_\lambda(f_1) - J_\lambda(f_2)\|_{\mathbb{Y}} + \|f_1 - f_2\|_{\mathbb{Y}}$ . This leads to the estimate

$$\|J_\lambda(f_1) - J_\lambda(f_2)\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{1}{1 - \alpha e^{-l_1(\zeta + \underline{\sigma})}} \|f_1 - f_2\|_{\mathbb{Y}}$$

which proves the continuity of  $J_\lambda$ . Next, putting  $f_2 = 0$  in last equation we get

$$\|J_\lambda(f_1)\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{1}{1 - \alpha e^{-l_1(\zeta + \underline{\sigma})}} \|f_1\|_{\mathbb{Y}} + \|J_\lambda(0)\|_{\mathbb{Y}} \tag{4.2.7}$$

which proves that  $\mathbb{Y}$  maps bounded sets into bounded ones. □

Note that Eq. (4.2.3) may be written as

$$\psi = Q_\lambda \mathbf{R}\psi(l, l) + \Xi_\lambda(\varphi) \quad (4.2.8)$$

where  $Q_\lambda$  and  $\Xi_\lambda$  are the linear operators given by

$$\mathbf{Y} \ni u \longrightarrow (Q_\lambda u)(a, l) := u(0, l) e^{-\int_0^a (\lambda + \sigma(s, l)) ds} \in \mathbf{X},$$

and

$$\mathbf{X} \ni \varphi \longrightarrow (\Xi_\lambda \varphi)(a, l) := \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda + \sigma(\tau, l)) d\tau} \varphi(s, l) ds \in \mathbf{X}.$$

One checks readily that, for  $\lambda > -\underline{\sigma}$ , these operators are bounded, positive (in the case where  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) and satisfy

$$\|Q_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})} \leq \frac{1}{\lambda + \underline{\sigma}}, \quad \|\Xi_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq \frac{1}{\lambda + \underline{\sigma}}.$$

Substituting  $\psi(l, l) = \mathbf{J}_\lambda \Pi_\lambda(\varphi)$  into (4.2.8), we get  $\psi = Q_\lambda \mathbf{R} \mathbf{J}_\lambda \Pi_\lambda(\varphi) + \Xi_\lambda(\varphi)$ . This proves that  $(\lambda - S_{\mathbf{R}})$  is invertible and

$$(\lambda - S_{\mathbf{R}})^{-1} = Q_\lambda \mathbf{R} \mathbf{J}_\lambda \Pi_\lambda + \Xi_\lambda. \quad (4.2.9)$$

**Remark 4.2.1.** (a) It should be noted that for  $\lambda > \underline{\sigma}$ , the operators  $P_\lambda$ ,  $Q_\lambda$ ,  $\Pi_\lambda$  and  $\Xi_\lambda$  are positive in the lattice sense.

(b) It is obvious that the operator  $(\lambda - S_{\mathbf{R}})^{-1}$  is continuous on  $\mathbf{X}$  and maps bounded sets into bounded ones. This follows from the properties of the operators  $P_\lambda$ ,  $Q_\lambda$ ,  $\Pi_\lambda$ ,  $\Xi_\lambda$ ,  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{J}_\lambda$ .

Let  $\mathbf{E}$  be the space defined by

$$\mathbf{E} := L^1(\mathbb{R}^+ \times [l_1, +\infty), dadl).$$

**Definition 4.2.1.** Let  $\kappa : \mathbb{R}^+ \times [l_1, +\infty) \times [l_1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be a measurable function. We say that  $\kappa(\cdot, \cdot, \cdot)$  is an admissible kernel if the linear operator  $\mathbb{B}$  defined by

$$\begin{cases} \mathbb{B} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E} \\ \psi \longrightarrow \int_{l_1}^{+\infty} \kappa(a, l, l') \psi(a, l') dl' \end{cases} \quad (4.2.10)$$

is bounded.

An easy example of admissible kernel is given by  $\kappa(a, l, l') = \theta(a) \vartheta(l) v(l')$  where  $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^+, da)$ ,  $\vartheta \in L^1([l_1, +\infty), dl)$  and  $v \in L^\infty([l_1, \infty), dl)$ . Indeed, let  $\psi \in \mathbf{E}$ , easy calculations using Fubini's theorem show that

$$\|\mathbb{B}(\psi)\| \leq \|\theta\|_\infty \|\vartheta\|_{L^1} \|v\|_\infty \|\psi\|_{\mathbf{E}}.$$

---

This shows that the operator  $\mathbb{B}$  defined by the kernel  $\kappa(a, l, l') = \theta(a)\vartheta(l)v(l')$  is bounded and

$$\|\mathbb{B}\| \leq \|\theta\|_\infty \|\vartheta\|_{L^1} \|v\|_\infty.$$

In the remainder of this chapter the kernel  $\kappa(\cdot, \cdot, \cdot)$  is always assumed to be admissible.

We denote by  $B$  the linear operator defined by

$$\begin{cases} B : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{X} \\ \psi \longrightarrow \int_{l_1}^{+\infty} \kappa(a, l, l') \chi_\Omega(a, l) \psi(a, l') dl'. \end{cases} \quad (4.2.11)$$

where  $\chi_\Omega(\cdot, \cdot)$  denotes the characteristic function of the set  $\Omega$ .

It is clear that  $\mathbb{B}$  is local in  $a \in \mathbb{R}^+$ . So, it may be viewed as an operator on  $\mathsf{Y} = L^1([l_1, +\infty); dl)$  depending on a parameter  $a \in \mathbb{R}^+$ . We assume that the function  $\mathbb{B}(\cdot)$  is strongly measurable, i.e. for every  $u \in \mathsf{Y}$ , the function

$$\mathbb{R}^+ \ni a \rightarrow \mathbb{B}(a)u \in \mathcal{L}(\mathsf{Y})$$

is measurable and the map  $\mathbb{R}^+ \ni a \rightarrow \|\mathbb{B}(a)\|_{\mathcal{L}(\mathsf{Y})}$  is essentially bounded. Here  $\mathcal{L}(\mathsf{Y})$  stands for the set of all bounded linear operators on  $\mathsf{Y}$ .

**Remark 4.2.2.** Let  $\kappa^+(a, l, l')$  and  $\kappa^-(a, l, l')$  denote the positive part and the negative part of  $\kappa(a, l, l')$ , respectively. We know that

$$\kappa(a, l, l') = \kappa^+(a, l, l') - \kappa^-(a, l, l').$$

So, we can define the operators  $\mathbb{B}^+$  and  $\mathbb{B}^-$  by

$$\mathsf{E} \ni \varphi \rightarrow \mathbb{B}^+ \varphi(a, l) := \int_{l_1}^{+\infty} \kappa^+(a, l, l') \psi(a, l') dl' \in \mathsf{E}.$$

and

$$\mathsf{E} \ni \varphi \rightarrow (\mathbb{B}^- \varphi)(a, l) := \int_{l_1}^{+\infty} \kappa^-(a, l, l') \psi(a, l') dl' \in \mathsf{E}.$$

It is obvious that  $\mathbb{B}^+$  and  $\mathbb{B}^-$  are positive linear operators. □

We introduce the following hypothesis :

(A2) the kernel  $\kappa(\cdot, \cdot, \cdot)$  of the operator  $\mathbb{B}$  satisfies the condition  $\{\kappa(a, \cdot, l'), (a, l') \in \Omega\}$  is a relatively weakly compact subset of  $\mathsf{Y}$ .

This condition says that  $\mathbb{B}$  is a regular operator on  $\mathsf{E}$  (in the sense of regular collision operators in neutron transport theory (see, for example, [41])). So, arguing as in the work [41, pp. 1052-1053], one can prove the following result.

**Lemma 4.2.3.** *If the condition (A2) is satisfied, then there exists a sequence  $(\mathbb{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $\mathcal{L}(\mathsf{E})$  such that*



- (a)  $0 \leq \mathbb{B}_n \leq \mathbb{B}$  for any  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (b) for each  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{B}_n$  is dominated by a rank-one operator in  $\mathcal{L}(\mathbf{Y})$ ;
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{B} - \mathbb{B}_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E})} = 0$ .

We note that Item (b) of Lemma 4.2.3 means that each operator  $\mathbb{B}_n$  is dominated by an operator on  $\mathbf{X}$  which acts as follows

$$\varphi \in X \longrightarrow \theta_n(l) \int_{l_1}^{+\infty} \varphi(a, l') dl'. \quad (4.2.12)$$

where  $\theta_n$  is a non-negative bounded function on  $[l_1, +\infty)$  with compact support.

Now we are in a position to prove following result which is fundamental for our purpose.

**Proposition 4.2.1.** *Assume that  $\mathbb{B}$  satisfies (A1)-(A2) and let  $\lambda$  be a real satisfying  $\lambda > \max(\zeta, -\underline{\sigma} + \frac{1}{l_1} \ln(\alpha))$ , then the operator  $(\lambda - S_{\mathbf{R}})^{-1}B$  is weakly compact on  $\mathbf{X}$ .*

To prove this proposition we shall make use of the following two results. The first one is owing to Dieudonné [17, Theorem 4].

**Lemma 4.2.4.** *Let  $E$  be a nonempty measurable subset of  $\mathbb{R}^d$  (not necessary bounded). A bounded subset  $\mathcal{O}$  of  $L^1(E; dl)$  is relatively weakly compact in  $L^1(E; dl)$  if and only if*

- (a) for any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\delta > 0$  such that  $\mu(A) \leq \delta$  implies  $\int_A |f| dl < \varepsilon$ , for all  $f \in \mathcal{O}$ ,
- (b) for any  $\varepsilon > 0$ , there exists a compact subset  $C \subset E$  such that  $\int_{E \setminus C} |f| dl < \varepsilon$ , for all  $f \in \mathcal{O}$ .

The second one is due to Dodds-Fremlins which was improved afterward by Aliprantis-Burkinshaw (see, for example, [44, p. 223]). We state this result in the context of  $L^1$ -spaces.

**Lemma 4.2.5.** *Let  $\Sigma$  be an arbitrary bounded open subset of  $\mathbb{R}^n$  and let  $L^1(\Sigma)$  be the set of all Lebesgue integrable functions on  $\Sigma$ . If  $S$  and  $T$  are two positive bounded linear operators on  $L^1(\Sigma)$  satisfying  $0 \leq S \leq T$  and  $T$  is weakly compact, then  $S$  is weakly compact too.*

**Proof of Proposition 4.2.1.** Let  $\zeta > 0$  and let  $\lambda$  be a real such that  $\lambda > \max(\zeta, -\underline{\sigma} + \frac{1}{l_1} \ln(\alpha))$ . According to (4.2.9), it suffices to prove the weak compactness of the operators  $Q_\lambda \mathbf{R} J_\lambda \Pi_\lambda B$  and  $\Xi_\lambda B$ . Our first step is to check that  $\Pi_\lambda \mathbb{B}$  and  $\Xi_\lambda \mathbb{B}$  are weakly compact on  $\mathbf{E}$ . Indeed, according to Lemma 4.2.3 and (4.2.12), it suffices to establish the weak compactness of  $\Pi_\lambda \mathbb{B}$  and  $\Xi_\lambda \mathbb{B}$ , where  $\mathbb{B}$  is an operator defined on  $\mathbf{E}$  by

$$\mathbb{B}(\psi)(a, l) = \int_{l_1}^{+\infty} \theta(l) \psi(a, l') dl',$$

where  $\theta$  is non-negative bounded function on  $[l_1, +\infty)$  with compact support. Let  $\Pi_\lambda \mathbb{B}$  may be written in the form  $\Pi_\lambda \mathbb{B} = \Gamma_\lambda \mathbb{R}$  where  $\mathbb{R}$  and  $\Gamma_\lambda$  are the two bounded linear operators given by

$$\begin{cases} \mathbb{R} : \mathbf{E}_1 \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^+, da) \\ \varphi \longrightarrow (\mathbb{R}\varphi)(a) := \int_{l_1}^{+\infty} \varphi(a, l) dl \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \Gamma_\lambda : L^1(\mathbb{R}^+, da) \longrightarrow \mathbf{Y} \\ \varphi \longrightarrow \int_0^l \theta(l) e^{-\int_s^l (\lambda + \sigma(\tau, l)) d\tau} \varphi(s) ds. \end{cases}$$

Thus, we claim that  $\Gamma_\lambda$  is weakly compact. To do so, let  $\mathcal{O}$  be a bounded subset of  $L^1(\mathbb{R}^+, da)$  and let  $\psi \in \mathcal{O}$ . We first observe that, for all measurable subsets  $A$  of  $[l_1, +\infty)$ , we have

$$\int_A |(\Gamma_\lambda \psi)(l)| dl \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^+, da)} \int_A \theta(l) dl.$$

Since  $\theta(\cdot)$  is a bounded function with compact support, we have

$$\int_A |(\Gamma_\lambda \psi)(l)| dl \rightarrow 0 \text{ as } |A| \rightarrow 0, \text{ for any } \psi \in \mathcal{O}$$

where  $|A|$  stands for the Lebesgue measure of  $A$ .

Next, let  $T > 0$  and put  $C = [0, T]$ . Hence, we have

$$\begin{aligned} \int_{[l_1, +\infty) \setminus C} |(\Gamma_\lambda \psi)(l)| dl &= \int_T^{+\infty} |(\Gamma_\lambda \psi)(l)| dl \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^+, da)} \int_T^{+\infty} \theta(l) dl \\ &= \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^+, da)} \int_{l_1}^{+\infty} \theta(l) \chi_{[l_1, +\infty)}(l) dl. \end{aligned}$$

Since  $\theta(l) \chi_{[l_1, +\infty)}(l) \leq \theta(l)$  and  $\theta(l)$  is a bounded function on  $[l_1, +\infty)$  with compact support, applying the Lebesgue dominated convergence theorem, we infer that  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_T^{+\infty} \theta(l) dl = 0$ , and therefore,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_T^{+\infty} |(\Gamma_\lambda \psi)(l)| dl = 0, \text{ for any } \psi \in \mathcal{O}.$$

Now using Lemma 4.2.4, we conclude the weak compactness of the operator  $\Pi_\lambda \mathbb{B}$  as an operator from  $\mathbf{E}$  into  $\mathbf{Y}$ .

Arguing as above we prove also the weak compactness of the operator  $\Xi_\lambda \mathbb{B}$  on  $\mathbf{E}$ .

Since  $\lambda$  is a real number, it is clear that  $\Pi_\lambda \mathbb{B}$  and  $\Xi_\lambda \mathbb{B}$  are positive and satisfy

$$0 \leq \Xi_\lambda B \leq \Xi_\lambda \mathbb{B} \quad \text{and} \quad 0 \leq \Pi_\lambda B \leq \Pi_\lambda \mathbb{B}.$$

Therefore, the use of Lemma 4.2.5 gives the weak compactness of the operators  $\Pi_\lambda B$  and  $\Xi_\lambda B$ .

Since  $Q_\lambda$  is linear (then weakly continuous), in order to complete the proof, it suffices to show the weak compactness of the operator  $\mathbf{R}J_\lambda\Pi_\lambda B$ . To this end, let  $\mathcal{O}$  be a bounded subset of  $\mathbf{E}$  and put  $\mathcal{U} = \Pi_\lambda\mathbb{B}(\mathcal{O})$ . We note that  $\mathcal{U}$  is relatively weakly compact.

Let  $f \in \mathcal{U}$ . Easy calculations using (A1),(4.2.2) and (4.2.7) give

$$|\mathbf{R}J_\lambda(f)(l)| \leq |\mathbf{R}(0)| + \alpha |J_\lambda(0)| + \frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-l_1(\zeta+\varrho)}} |f(l)|.$$

For any measurable subset  $A$  of  $[l_1, +\infty)$ , we have

$$\int_A |\mathbf{R}J_\lambda(f)(l)| dl \leq \int_A (|\mathbf{R}(0)| + \alpha |J_\lambda(0)|) dl + \frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-l_1(\zeta+\varrho)}} \int_A |f(l)| dl.$$

Since sets consisting of one element are weakly compact and  $f$  belongs to  $\mathcal{U}$ , we get

$$\lim_{|A| \rightarrow 0} \int_A |\mathbf{R}J_\lambda(f)(l)| dl = 0.$$

Next, let  $T > 0$  and  $\forall f \in \mathcal{U}$ , we have

$$\int_T^{+\infty} |\mathbf{R}J_\lambda(f)(l)| dl \leq \int_T^{+\infty} (|\mathbf{R}(0)| + \alpha |J_\lambda(0)|) dl + \frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-l_1(\zeta+\varrho)}} \int_T^{+\infty} |f(l)| dl.$$

Using the fact that  $\mathcal{U}$  is relatively weakly compact, we infer that

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_T^{+\infty} |\mathbf{R}J_\lambda(f)(l)| dl = 0.$$

Now, applying Lemma 4.2.4, we conclude the weak compactness of the operator  $\mathbf{R}J_\lambda\Pi_\lambda B$ . This ends the proof.  $\square$

In the remainder of this section we shall recall some results required in the proofs of our existence results.

**Definition 4.2.2.** *Let  $\Sigma$  be an arbitrary bounded open subset of  $\mathbb{R}^n$ . A function  $g : \Sigma \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  is said to satisfy the Carathéodory conditions if  $g(x, y)$  is measurable in  $x$  for all  $y \in \mathbb{C}$  and is continuous in  $y$  for almost all  $x$ .*

If  $g$  satisfies the Carathéodory conditions, then we can define the operator  $\mathcal{N}_g$  on the set of functions  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  by  $(\mathcal{N}_g\psi)(a, l) = g(a, l, \psi(a, l))$  for every  $(a, l) \in \Sigma$ . The operator  $\mathcal{N}_g$  is called the Nemytskii (or superposition) operator generated by  $g$ . We now quote a useful result which states a basic fact for the theory of Nemytskii's operators on  $L^1$ -spaces (see, for example, [3, 4]).

**Lemma 4.2.6.** *Assume that  $f$  is a Carathéodory function. If  $\mathcal{N}_f : L^1(\Sigma) \rightarrow L^1(\Sigma)$ , then  $\mathcal{N}_f$  is continuous and takes bounded sets into bounded sets. Moreover, there is a constant  $\eta > 0$  and the function  $0 \leq h(\cdot) \in L^1(\Sigma)$  such that*

$$|f(x, y)| \leq h(x) + \eta |y| \text{ a.e. in } x, \text{ for all } y \in \mathbb{R}.$$

For the proof we refer to [4].

A Banach space  $X$  has the Dunford-Pettis property if, for every sequence  $(x_n)_n$  in  $X$  converging weakly to 0 and every sequence  $(x_n^*)_n$  in  $X^*$  (the dual space of  $X$ ) converging weakly to 0, the sequence  $(x_n^*(x_n))$  converges to 0.

The following result gives a characterization of a Banach spaces with the Dunford-Pettis property (see, for example, [21, p. 596] )

**Lemma 4.2.7.** *Let  $X$  be a Banach space. Then, the following assertions are equivalent.*

- (a)  $X$  has the Dunford-Pettis property.
- (b) Every weakly compact operator from  $X$  into any Banach space  $Y$  maps weakly compact sets of  $X$  into norm compact sets of  $Y$ .

*A measure of weak noncompactness.* We introduce a measure of weak noncompactness required in the proofs of our results. Let  $\mathfrak{B}(\mathbf{E})$  be the set of all nonempty bounded subsets of  $\mathbf{E}$ . We denote by  $\mathcal{W}(\mathbf{E})$  the subset of  $\mathfrak{B}(\mathbf{E})$  consisting of all weakly compact subsets of  $\mathbf{E}$ . Inspired by the works [5, 12], we define the map  $\omega : \mathfrak{B}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty)$  by

$$\omega(M) = \omega_1(M) + \omega_2(M), \quad \forall M \in \mathfrak{B}(\mathbf{E})$$

where

$$\omega_1(M) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\psi \in M} \left( \int_D |\psi(a, l)| \, dadl : |D| < \epsilon \right) \right\},$$

and

$$\omega_2(M) = \lim_{T, T' \rightarrow +\infty} \sup_{\psi \in M} \left\{ \sup_{\psi \in M} \left( \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |\psi(a, l)| \, dadl \right) \right\},$$

for every subset  $M \in \mathfrak{B}(\mathbf{E})$ . Here  $|D|$  denotes the Lebesgue measure of  $D$ .

**Proposition 4.2.2.** *Let  $M, M_1$  and  $M_2$  be three elements of  $\mathfrak{B}(\mathbf{E})$ . Then, the following properties are satisfied*

1. If  $M_1 \subseteq M_2$ , then  $\omega(M_1) \leq \omega(M_2)$ ;
2.  $\omega(M_1 \cup M_2) = \max\{\omega(M_1), \omega(M_2)\}$ ;
3.  $\omega(\lambda M) = |\lambda| \omega(M)$  for any  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
4.  $\omega(M_1 + M_2) \leq \omega(M_1) + \omega(M_2)$ ;
5.  $\omega(M) = 0$  if and only if  $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(\mathbf{E})$  is the weak closure of  $M$ ;
6.  $\omega(\text{co}(M)) = \omega(M)$ ;
7.  $\omega(\overline{M}^w) = \omega(M)$ .

The proof of this result requires the following Lemma (see, for example, [18, p. 292]).

**Lemma 4.2.8.** *A subset  $M$  of  $L^1(\Sigma, d\nu)$  is weakly compact if and only if  $M$  is bounded and, for any decreasing sequence of measurable subsets  $(E_n)_n$  of  $\Sigma$  such that  $\bigcap_{n \geq 0} E_n = \emptyset$ , we have*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f(x) d\nu(x) = 0, \quad \text{uniformly for } f \in M.$$

**Proof of Proposition 4.2.2.** The proof of the properties (1), (2), (3) and (4) is clear, we shall prove the following statements

(5) The fact that  $\omega(M) = 0$  implies  $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(\mathbb{E})$  is a consequence of Lemma 4.2.4. First, we suppose that  $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(\mathbb{E})$ . Given by Lemma 4.2.4(a) that  $\omega_1(M) = 0$ , it remains to prove that  $\omega_2(M) = 0$ . Let  $C_n = [T_n, +\infty) \times [T_n, +\infty)$  with  $(T_n)_n$  be a nondecreasing sequences such that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$ . It follows from Lemma 4.2.8 that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\psi \in M} \int_{T_n}^{+\infty} \int_{T_n}^{+\infty} |\psi(a, l)| \, dadl = 0.$$

This proves of  $\omega_2(M) = 0$ .

(6) Let  $M \in \mathfrak{B}(\mathbb{E})$ . It is clear that  $M \subset co(M)$ , using the property (1), we get  $\omega(M) \leq \omega(co(M))$ , it remains to prove that  $\omega(co(M)) \leq \omega(M)$ . Let  $D$  be a measurable subset of  $\Omega$  such that  $|D| < \varepsilon$ . For  $\psi \in co(M)$ , there exist  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  with  $a_i \geq 0$  and  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$  with  $\varphi_i \in M$  such that  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  and  $\psi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ . Clearly,

$$\begin{aligned} \int_D |\psi(a, l)| \, dadl &\leq \sum_{i=1}^n a_i \int_D |\varphi_i(a, l)| \, dadl \leq \sum_{i=1}^n a_i \sup_{1 \leq i \leq n} \int_D |\varphi_i(a, l)| \, dadl \\ &= \sup_{1 \leq i \leq n} \int_D |\varphi_i(a, l)| \, dadl \leq \sup_{\varphi \in M} \int_D |\varphi(a, l)| \, dadl. \end{aligned}$$

Hence,

$$\sup_{\psi \in co(M)} \int_D |\psi(a, l)| \, dadl \leq \sup_{\varphi \in M} \int_D |\varphi(a, l)| \, dadl.$$

This proves of  $\omega_1(co(M)) \leq \omega_1(M)$ .

Further, for any  $T, T' > 0$ , a similar proof as before shows that

$$\sup_{\psi \in co(M)} \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |\psi(a, l)| \, dadl \leq \sup_{\varphi \in M} \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |\varphi(a, l)| \, dadl.$$

Hence, when  $T$  and  $T'$  go to  $+\infty$ , we get  $\omega_2(co(M)) \leq \omega_2(M)$ . Accordingly, we have

$$\omega(co(M)) \leq \omega(M)$$

which proves that  $\omega(co(M)) = \omega(M)$ .

(7) Since  $M \subset \overline{M}^w$ , the use of (1) gives  $\omega(M) \leq \omega(\overline{M}^w)$ .

To prove the converse inequality, using the inclusion  $M \subseteq \overline{M}^w \subseteq \overline{co}(M)$  we get  $\omega(\overline{M}^w) \leq \omega(\overline{co}(M))$ . Thus, we have only to check that  $\omega(M) = \omega(\overline{M})$ . By (1), we have the inequality  $\omega(M) \leq \omega(\overline{M})$ . Next, for  $\psi \in \overline{M}$ , there exists a sequence  $(\psi_n)_n$  such that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = \psi$ .

Hence,

$$\begin{aligned} \int_D |\psi(a, l)| \, dadl &\leq \int_D |\psi(a, l) - \psi_n(a, l)| \, dadl + \int_D |\psi_n(a, l)| \, dadl \\ &\leq \|\psi - \psi_n\|_{\mathbb{E}} + \omega_1(M), \end{aligned}$$

---

and therefore, for  $n$  large enough, we have

$$\lim_{T, T' \rightarrow +\infty} \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |\psi(a, l)| da dl \leq \omega_2(M).$$

Thus, we conclude that  $\omega_2(\overline{M}) \leq \omega_2(M)$ . Next, the use of (6) gives  $\omega(\overline{co}(M)) = \omega(co(M)) = \omega(M)$ , which implies  $\omega(\overline{M}^w) = \omega(M)$  and ends the proof of (7).

We conclude this section by recalling the notions of **ws**-compact and **ww**-compact operators and two fixed point theorems related to these operators established in [37, 35] which we shall use below.

**Definition 4.2.3.** *Let  $X$  be a Banach space and let  $J$  be an operator from  $X$  into itself.*

- (a)  *$J$  is said to be **ws**-compact, if for each weakly convergent sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $X$ ,  $(Jx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  has a strongly convergent subsequence.*
- (b)  *$J$  is said to be **ww**-compact, if for each weakly convergent sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $X$ ,  $(Jx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  has a weakly convergent subsequence.*

**Theorem 4.2.1.** *Let  $M$  be a bounded closed convex subset of a Banach space  $X$ . If  $f$  is a continuous **ws**-compact operator and  $f(M)$  is relatively weakly compact, then there exists  $x \in M$  such that  $f(x) = x$ .*

**Theorem 4.2.2.** *Let  $M$  be a nonempty closed bounded convex subset of a Banach space  $X$ . Suppose that  $f : M \rightarrow X$  and  $g : X \rightarrow X$  such that :*

- a)  *$f$  is continuous and **ws**-compact ;*
- b) *there exists  $\gamma \in [0, 1[$  such that  $w(f(S) + g(S)) \leq \gamma w(S)$  for all subset  $S$  of  $M$  ;*
- c)  *$g$  is a strict contraction ;*
- d)  *$f(M) + g(M) \subseteq M$ .*

*Then, there exists  $z \in M$  such that  $f(z) + g(z) = z$ .*

### 4.3 Existence results

Throughout this section the kernel  $\kappa(\cdot, \cdot, \cdot)$  is assumed to be admissible in the sense of Definition 4.2.2.

In the first part of this section our interest concentrates on existence results for the boundary value problem (4.1.1) in the case where  $\sigma(a, l, \psi(a, l))$  satisfies the hypothesis

$$(A3) \quad \sigma(a, l, \psi(a, l)) = \sigma(a, l)\psi(a, l) \quad \text{with} \quad \sigma(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\Omega; da dl)$$

( $\sigma$  is not relabeled). The general case will be treated at the end of this section. For this purpose, we use the notations and the preparatory results presented in Section 4.2.

In the following we need the following hypothesis

$$(A4) \quad f \text{ satisfies the Carathéodory conditions and the Nemytskii operator } N_f \text{ acts from } X \text{ into itself.}$$

Now we are ready to prove

**Lemma 4.3.1.** *If (A4) holds true, then  $\mathbf{N}_f$  is ww-compact.*

**Proof.** Let  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a weakly convergent sequence in  $\mathbf{X}$ , then  $\mathbf{Z} := \{\psi_n, n \in \mathbb{N}\}$  is a relatively weakly compact set of  $\mathbf{X}$ . According to Lemma 4.2.6, there are a constant  $\eta > 0$  and function  $h(\cdot, \cdot) \in \mathbf{X}^+$  (the positive cone of  $\mathbf{X}$ ) such that

$$|f(x, \zeta, \psi_n(x, \zeta))| \leq h(x, \zeta) + \eta |\psi_n(x, \zeta)|.$$

Thus, for any measurable subset  $A$  of  $\mathbb{R}^+ \times [l_1, +\infty)$ , we have

$$\int_{A \cap \Omega} |\mathbf{N}_f \psi(a, l)| \, dadl \leq \int_{A \cap \Omega} |h(a, l)| \, dadl + \eta \int_{A \cap \Omega} |\psi(a, l)| \, dadl$$

and so,

$$\int_{A \cap \Omega} |\mathbf{N}_f \psi(a, l)| \, dadl \longrightarrow 0 \text{ as } |A \cap \Omega| \longrightarrow 0 \text{ for any } \psi \in \mathbf{Z}$$

where  $|A \cap \Omega|$  denotes the Lebesgue measure of  $A \cap \Omega$ .

Further, let  $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$  and  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be two sequences of real numbers such that  $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} T_m, T_n = +\infty$ . For any  $\psi \in \mathbf{Z}$ , we obtain

$$\begin{aligned} \int_{T_m}^{+\infty} \int_{T_n}^{+\infty} |\mathbf{N}_f \psi(a, l) \chi_\Omega(a, l)| \, dadl &\leq \int_{T_m}^{+\infty} \int_{T_n}^{+\infty} |h(a, l) \chi_\Omega(a, l)| \, dadl \\ &+ \eta \int_{T_m}^{+\infty} \int_{T_n}^{+\infty} |\psi(a, l) \chi_\Omega(a, l)| \, dadl. \end{aligned}$$

Thus, since  $\mathbf{Z}$  is relatively weakly compact, for any  $\psi \in \mathbf{Z}$ , we have

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \int_{T_m}^{+\infty} \int_{T_n}^{+\infty} |\mathbf{N}_f \psi(a, l) \chi_\Omega(a, l)| \, dadl = 0.$$

Now, applying Lemma 4.2.4, we conclude that  $\mathbf{N}_f(\mathbf{Z})$  is relatively weakly compact which ends the proof.  $\square$

Let  $\mathbf{r} > 0$  and set

$$\mathbb{B}_{\mathbf{r}} = \left\{ \psi \in \mathbf{X} \text{ such that } \|\psi\|_{\mathbf{X}} \leq \mathbf{r} \right\}.$$

**Theorem 4.3.1.** *Let (A1)-(A4) be satisfied. Then, for each  $\mathbf{r} > 0$ , there exists a real  $\lambda_0 > 0$  such that, for all real  $\lambda$  satisfying  $\lambda > \lambda_0$ , the boundary value problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) + (\lambda + \sigma(a, l))\psi(a, l) = \int_{l_1}^{+\infty} \kappa(a, l, l') f(a, l', \psi(a, l')) dl', \\ \psi|_{\Gamma_1} = \mathbf{R}(\psi|_{\Gamma_2}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

*has at least one solution in  $\mathbb{B}_{\mathbf{r}}$ .*

---

**Proof.** Let  $\mathbf{r} > 0$  and let  $\varepsilon$  be a real number such that  $\varepsilon > \max(0, -\underline{\sigma} + \frac{1}{l_1} \ln(\alpha))$ . Hence, according to (4.2.9), for any real number  $\lambda$  satisfying  $\lambda \geq \varepsilon$ , the operator  $(\lambda - S_{\mathbf{R}})$  is invertible and then Problem (4.3.1) may be transformed into the following fixed point problem

$$\psi = \mathbf{G}_\lambda(\psi), \quad \psi|_{\Gamma_1} = \mathbf{R}(\psi|_{\Gamma_2}),$$

where  $\mathbf{G}_\lambda = (\lambda - S_{\mathbf{R}})^{-1} B \mathcal{N}_f$ .

The proof may be derived in four steps.

The continuity of  $\mathbf{G}_\lambda$  follows immediately from Remark 4.2.1 (b), Lemma 4.2.6 and the boundedness of  $B$ .

We shall now check that, for suitable  $\lambda$ ,  $\mathbf{G}_\lambda$  leaves  $\mathbb{B}_{\mathbf{r}}$  invariant. Since  $f$  satisfies (A4), then by Lemma 4.2.6, there exist a constant  $\eta > 0$  and a function  $0 \leq h(\cdot, \cdot) \in \mathbf{X}$  such that

$$|f(a, l, \psi(a, l))| \leq h(a, l) + \eta |\psi(a, l)| \quad \text{a.e. in } (a, l), \quad \text{for all } \psi \in \mathbf{X}.$$

Let  $\psi \in \mathbb{B}_{\mathbf{r}}$ , it follows from (4.2.2), (4.2.7) and (4.2.9), that

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_\lambda \psi\|_{\mathbf{X}} &\leq \|(Q_\lambda \mathbf{R} J_\lambda \Pi_\lambda B \mathcal{N}_f)(\psi)\|_{\mathbf{X}} + \|(\Xi_\lambda B \mathcal{N}_f)(\psi)\|_{\mathbf{X}} \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

It is clear that

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \|Q_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})} \|\mathbf{R}(J_\lambda \Pi_\lambda B \mathcal{N}_f) \psi\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \frac{\alpha}{\lambda + \underline{\sigma}} \|J_\lambda(\Pi_\lambda B \mathcal{N}_f) \psi\|_{\mathbf{X}} + \frac{\|\mathbf{R}(0)\|_{\mathbf{Y}}}{\lambda + \underline{\sigma}} \\ &\leq \frac{\alpha \|\Pi_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})} \|B\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} \|\mathcal{N}_f \psi\|_{\mathbf{X}}}{(1 - \alpha e^{-l_1(\varepsilon + \underline{\sigma})})(\lambda + \underline{\sigma})} + \frac{\alpha \|J_\lambda(0)\|_{\mathbf{Y}} + \|\mathbf{R}(0)\|_{\mathbf{Y}}}{\lambda + \underline{\sigma}} \\ &\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} \alpha (\|h\|_{\mathbf{X}} + \eta \mathbf{r})}{(1 - \alpha e^{-l_1(\varepsilon + \underline{\sigma})})(\lambda + \underline{\sigma})} + \frac{\alpha \|J_\lambda(0)\|_{\mathbf{Y}} + \|\mathbf{R}(0)\|_{\mathbf{Y}}}{\lambda + \underline{\sigma}} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \|\Xi_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|B\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} \|\mathcal{N}_f \psi\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} (\|h\|_{\mathbf{X}} + \eta \mathbf{r})}{\lambda + \underline{\sigma}}. \end{aligned}$$

This yields

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_\lambda \psi\|_{\mathbf{X}} &\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} (\|h\|_{\mathbf{X}} + \eta \mathbf{r}) \left( \alpha (1 - \alpha e^{-l_1(\varepsilon + \underline{\sigma})})^{-1} + 1 \right)}{\lambda + \underline{\sigma}} + \frac{\alpha \|J_\lambda(0)\|_{\mathbf{Y}} + \|\mathbf{R}(0)\|_{\mathbf{Y}}}{\lambda + \underline{\sigma}} \\ &= \Theta(\lambda). \end{aligned}$$



Note that  $\Theta(\cdot)$  is continuous, strictly decreasing and satisfies  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Theta(t) = 0$ . Hence, there exists  $\lambda_0 > 0$  such that  $\Theta(\lambda_0) \leq \mathbf{r}$ , and therefore, for any real  $\lambda$  such that  $\lambda > \lambda_0$ , we have  $G_\lambda(\mathbb{B}_\mathbf{r}) \subset \mathbb{B}_\mathbf{r}$ .

The operator  $G_\lambda$  is ws-compact. Indeed, let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a weakly converging sequence in  $\mathbb{B}_\mathbf{r}$ . According to Lemma 4.3.1, the set  $\{\mathcal{N}_f(x_n), n = 0, 1, \dots\}$  is relatively weakly compact on  $X$ . Since  $X$  has the Dunford-Pettis property and the linear operators  $\Pi_\lambda B$  and  $\Xi_\lambda B$  are weakly compact (see the proof of Proposition 4.2.1), applying Lemma 4.2.7, we infer that the sets  $\{\Pi_\lambda B \mathcal{N}_f(x_n), n = 0, 1, \dots\}$  and  $\{\Xi_\lambda B \mathcal{N}_f(x_n), n = 0, 1, \dots\}$  are relatively compact. Using the continuity of  $Q_\lambda \mathbf{R} J_\lambda$ , we conclude that  $\{(\lambda - S_\mathbf{R})^{-1} B \mathcal{N}_f(x_n), n = 0, 1, \dots\}$  is relatively compact and therefore  $G_\lambda$  is ws-compact.

Let  $\lambda$  be such that  $\lambda \geq \lambda_0$  and set  $\mathcal{C}_\lambda := \overline{\text{co}}(G_\lambda(\mathbb{B}_\mathbf{r}))$  (the closed convex hull of  $G_\lambda(\mathbb{B}_\mathbf{r})$ ). The set  $G_\lambda$  is weakly compact. Indeed, since  $\mathbb{B}_\mathbf{r}$  is a closed convex subset of  $X$  and  $G_\lambda(\mathbb{B}_\mathbf{r}) \subset \mathbb{B}_\mathbf{r}$ , then  $\mathcal{C}_\lambda \subset \mathbb{B}_\mathbf{r}$  and therefore  $G_\lambda(\mathcal{C}_\lambda) \subset G_\lambda(\mathbb{B}_\mathbf{r}) \subset \overline{\text{co}}(G_\lambda)(\mathbb{B}_\mathbf{r})$ . Therefore  $G_\lambda$  maps  $\mathcal{C}_\lambda$  into itself. Moreover, since  $\mathcal{N}_f(\mathbb{B}_\mathbf{r})$  is a bounded subset of  $X$ , according to Proposition 4.2.1, the set  $G_\lambda(\mathbb{B}_\mathbf{r}) = [(\lambda - S_\mathbf{R})^{-1} B] \mathcal{N}_f(\mathbb{B}_\mathbf{r})$  is relatively weakly compact. Hence, applying the Krein-Šmulian theorem (see [18, p. 434]), one sees that  $\mathcal{C}_\lambda$  is weakly compact.

Since  $G_\lambda(\mathcal{C}_\lambda) \subseteq \mathcal{C}_\lambda$  and  $\mathcal{C}_\lambda$  is weakly compact, we infer that  $G_\lambda(\mathcal{C}_\lambda)$  is relatively weakly compact. Hence, applying Theorem 4.2.1 to the operator  $G_\lambda : \mathcal{C}_\lambda \rightarrow \mathcal{C}_\lambda$ , we conclude that there exists  $z \in \mathcal{C}_\lambda \subseteq \mathbb{B}_\mathbf{r}$  such that  $G_\lambda(z) = z$  which ends the proof.  $\square$

In the following we shall give two results concerning the existence of positive solutions to the boundary value problem (4.3.1). Recall that an operator  $T$  from a Banach lattice  $X$  into a Banach lattice  $Y$  is said to be positive if  $T(X^+) \subseteq Y^+$  where  $X^+$  (resp.  $Y^+$ ) is the positive cone of  $X$  (resp.  $Y$ ).

Note that our functional spaces  $X$  and  $Y$  are Banach lattice spaces. Their positive cones will be denoted respectively  $X^+$  and  $Y^+$ . If  $\mathbf{r} > 0$ , the set  $\mathbb{B}_\mathbf{r}^+$  stands for  $\mathbb{B}_\mathbf{r} \cap X^+$ .

The proof of the following corollary is similar to that of Theorem 4.3.1, it suffices to replace  $\mathbb{B}_\mathbf{r}$  by  $\mathbb{B}_\mathbf{r}^+$ . So, it is omitted.

**Corollary 4.3.1.** *Let the hypotheses (A1)-(A4) be satisfied. If the operators  $\mathbf{R}$ ,  $B$  and  $\mathcal{N}_f$  are positive, then, for any  $\mathbf{r} > 0$ , there exists  $\lambda_0 > 0$  such that, for all  $\lambda > \lambda_0$ , the problem (4.3.1) has at least one solution on  $\mathbb{B}_\mathbf{r}^+$ .*

The following result ensures the existence of nontrivial positive solutions.

**Corollary 4.3.2.** *Let  $\mathbf{r} > 0$  and assume the hypotheses of Corollary 4.3.1 are satisfied. Moreover, if there is  $\rho > 0$  and  $0 \neq \psi_0 \in \mathbb{B}_\mathbf{r}^+$  such that*

1.  $\psi_0 \notin \ker(B)$  ( $\ker(B)$  denotes the null space of  $B$ ),
2.  $(\mathcal{N}_f \psi)(x, v) \geq \rho \psi_0(x, v)$  for all  $\psi \in \mathbb{B}_\mathbf{r}^+$ ,

*then there exists  $\tilde{\lambda} > 0$  such that for any  $\lambda > \tilde{\lambda}$  there is  $\eta > 0$  such that the problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) + (\lambda + \sigma(a, l))\psi(a, l) = \eta \int_{l_1}^{+\infty} \kappa(a, l, l') f(a, l', \psi(a, l')) dl', \\ \psi|_{\Gamma_1} = \mathbf{R}(\psi|_{\Gamma_2}), \end{cases} \quad (4.3.2)$$

---

has at least one solution on  $\psi^* \in \mathbb{B}_{\mathbf{r}}^+$  satisfying  $\|\psi^*\| = \mathbf{r}$ .

**Proof.** It is similar to that of Proposition 3.2 in [36], so it is dropped.  $\square$

The remaining part of this section is devoted to the existence of solutions to the following more general boundary value problem

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) + \lambda \psi(a, l) + \sigma(a, l, \psi(a, l)) = \int_{l_1}^{+\infty} \kappa(a, l, l') f(a, l', \psi(a, l')) dl', \\ \psi|_{\Gamma_1} = \mathbf{R}(\psi|_{\Gamma_2}), \quad \text{and } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

**Remark 4.3.1.** In order to transform Problem 4.3.3 to a fixed point problem, the additivity of the transition operator  $\mathbf{R}$  is required, that is  $\mathbf{R}(u+v) = \mathbf{R}(u) + \mathbf{R}(v)$ , for all  $u, v \in \mathbf{Y}$ . However, since  $\mathbf{R}$  is assumed to be continuous, the additivity of  $\mathbf{R}$  implies that it is necessarily linear and therefore  $\mathbf{R} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y})$ .

We need the the following assumptions

(A5)  $\mathbf{R}$  is a bounded linear transition boundary operator and, for each  $\mathbf{r} > 0$ , we have

$$|\sigma(a, l, \psi_1(a, l)) - \sigma(a, l, \psi_2(a, l))| \leq |\rho(a, l)| |\psi_1 - \psi_2|, \quad \text{for all } \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{B}_{\mathbf{r}}$$

where  $\rho(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\Omega, dadl)$  and  $\mathcal{N}_{-\sigma}$  acts from  $\mathbb{B}_{\mathbf{r}}$  into itself.

Note that, according to Lemma 4.2.6, there exists a function  $0 \leq \tilde{a}(\cdot, \cdot) \in \mathbf{X}$  and a constant  $\tilde{b} > 0$  such that for all  $(a, l) \in \Omega$ , we have

$$|\sigma(a, l, \psi(a, l))| \leq \tilde{a}(a, l) + \tilde{b} |\psi(a, l)|. \quad (4.3.4)$$

Define the operator  $\mathbf{T}_{\mathbf{R}}$  by

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{\mathbf{R}} : \mathcal{D}(\mathbf{T}_{\mathbf{R}}) \subset \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X} \\ \psi \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{R}}(\psi)(a, l) = -\frac{\partial \psi}{\partial a}. \end{cases}$$

Since the function  $\sigma(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\Omega, dadl)$ , the operator  $S_{\mathbf{R}}$  is a bounded perturbation of  $\mathbf{T}_{\mathbf{R}}$ , hence

$$\mathcal{D}(\mathbf{T}_{\mathbf{R}}) = \mathcal{D}(S_{\mathbf{R}}).$$

Note that  $\mathbf{T}_{\mathbf{R}}$  is derived from  $S_{\mathbf{R}}$  by putting  $\sigma(\cdot, \cdot) \equiv 0$ . It is clear that, since  $\mathbf{R}$  is linear,  $\mathbf{T}_{\mathbf{R}}$  is a closed densely defined linear operator on  $\mathbf{X}$ . Moreover, simple computations show that the resolvent set  $\rho(\mathbf{T}_{\mathbf{R}})$  of  $\mathbf{T}_{\mathbf{R}}$  contains the half-plane  $\Pi := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \frac{1}{l_1} \ln(\|\mathbf{R}\|)\}$ .

So, for any  $\lambda \in \Pi$ , we have

$$(\lambda - \mathbf{T}_{\mathbf{R}})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\lambda}^0 \mathbf{R} (P_{\lambda}^0 \mathbf{R})^n \Pi_{\lambda}^0 + \Xi_{\lambda}^0, \quad (4.3.5)$$

where  $P_\lambda^0, Q_\lambda^0, \Pi_\lambda^0$  and  $\Xi_\lambda^0$  are bounded linear operators derived from  $P_\lambda, Q_\lambda, \Pi_\lambda$  and  $\Xi_\lambda$  by taking  $\sigma(\cdot, \cdot) \equiv 0$ . Their norms are bounded above by  $e^{-l_1\lambda}, \frac{1}{\lambda}, 1$  and  $\frac{1}{\lambda}$ .

Note also that, for any  $\lambda > \max(0, \frac{\ln(\|\mathbf{R}\|)}{l_1})$ , easy calculations using the bounds of the linear operators  $P_\lambda^0, Q_\lambda^0, \Pi_\lambda^0$  and  $\Xi_\lambda^0$  give

$$\left\| (\lambda - \mathbf{T}_\mathbf{R})^{-1}f \right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} \leq \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1\lambda}} \right) \|f\| \quad \text{for all } f \in \mathbf{X} \quad (4.3.6)$$

where  $\|\mathbf{R}\| = \|\mathbf{R}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})}$ .

**Remark 4.3.2.** It should be noticed that the same arguments as in the proof of Proposition 4.2.1 show that if  $B$  satisfies the condition (A2), then  $(\lambda - \mathbf{T}_\mathbf{R})^{-1}B$  is a weakly compact operator on  $\mathbf{X}$ .

Let  $\varepsilon > 0$  and let  $\lambda$  be a real number such that  $\lambda \geq \varepsilon > \max(0, \frac{1}{l_1} \ln(\|\mathbf{R}\|))$ . It is clear that Problem (4.3.3) may be written in the form

$$\psi = \mathcal{F}(\lambda)\psi + \mathcal{H}(\lambda)\psi, \quad \psi^0 = \mathbf{R}(\psi^1),$$

where  $\mathcal{F}(\lambda) := (\lambda - \mathbf{T}_\mathbf{R})^{-1}B\mathcal{N}_f$  and  $\mathcal{H}(\lambda) := (\lambda - \mathbf{T}_\mathbf{R})^{-1}\mathcal{N}_{-\sigma}$ .

We are now in a position to prove the following theorem.

**Theorem 4.3.2.** *Let  $\mathbf{R}$  be a linear boundary operator and assume that the hypotheses (A2), (A4) and (A5) are satisfied. Then for any  $\mathbf{r} > 0$ , there exists  $\lambda_0 > 0$ , such that, for all  $\lambda \in \mathbb{R}$  satisfying  $\lambda > \lambda_0$ , the problem (4.3.3) has at least one solution in  $\mathbb{B}_\mathbf{r}$ .*

**Proof.** Our proof consists in showing that the operators  $\mathcal{F}(\lambda)$  and  $\mathcal{H}(\lambda)$  satisfy the conditions of Theorem 4.2.2. Let  $\varepsilon > 0$  and let  $\lambda$  be a real number such that  $\lambda > \lambda_0 \geq \varepsilon > \max(0, \frac{1}{l_1} \ln(\|\mathbf{R}\|))$ . The continuity of the operators  $\mathcal{F}(\lambda)$  and  $\mathcal{H}(\lambda)$  is obvious. The proof will be made in several steps.

The operator  $\mathcal{F}(\lambda)$  is ws-compact. Indeed, let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a weakly converging sequence in  $\mathbb{B}_\mathbf{r}$ . According Lemma 4.3.1,  $\{\mathcal{N}_f(x_n), n = 0, 1, \dots\}$  has a weakly converging subsequence which we denote by  $(\mathcal{N}_f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ . There exists a subsequence  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  such that  $\{\mathcal{N}_f(x_{n_k}), k = 0, 1, \dots\}$  is relatively weakly compact. Since  $\mathbf{X}$  has the Dunford-Pettis property, using Lemma 4.2.7 (b) and the linear operators  $\Pi_\lambda^0 B$  and  $\Xi_\lambda^0 B$  are weakly compact (see Remark 4.3.2), we infer that the sets  $\{\Pi_\lambda^0 B \mathcal{N}_f(x_{n_k}), k = 0, 1, \dots\}$  and  $\{\Xi_\lambda^0 B \mathcal{N}_f(x_{n_k}), k = 0, 1, \dots\}$  are relatively compact. Further, using the continuity of  $\sum_{n=0}^\infty Q_\lambda^0 \mathbf{R} (P_\lambda^0 \mathbf{R})^n$ , we conclude that  $\{(\lambda - \mathbf{T}_\mathbf{R})^{-1} B \mathcal{N}_f(x_{n_k}), k = 0, 1, \dots\}$  is relatively compact. This proves that  $\mathcal{F}(\lambda)$  is ws-compact.

There exists  $\gamma \in [0, 1)$  such that  $\omega(\mathcal{F}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) \leq \gamma\omega(M)$  for all sets  $M \in \mathcal{B}(\mathbb{E})$ . Indeed, let  $M \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$  and let  $E$  be a measurable subset of  $\Omega$  with finite measure. Using Lemma 4.2.4 and the estimate (4.3.6), for any  $\psi \in M$ , we have

$$\begin{aligned} \int_E |\mathcal{F}(\lambda)(\psi)(a, l)| \, dadl &= \int_E |(\lambda - \mathbf{T}_{\mathbf{R}})^{-1} B \mathcal{N}_f(\psi)(a, l)| \, dadl \\ &\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}}{\lambda} \left(1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}}\right) \int_E |\mathcal{N}_f(\psi)(a, l)| \, dadl \\ &\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}}{\lambda} \left(1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}}\right) \left[ \int_E h(a, l) \, dadl + \eta \int_E |\psi(a, l)| \, dadl \right]. \end{aligned}$$

Since sets consisting in one element are weakly compact, we infer that

$$\omega_1(\mathcal{F}(\lambda)(M)) \leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} \eta}{\lambda} \left(1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}}\right) \omega_1(M).$$

On the other hand, using the estimates (4.3.4) and (4.3.6) and arguing as in the preceding text, for any  $\psi \in M$ , we obtain

$$\begin{aligned} \int_E |\mathcal{H}(\lambda)(\psi)(a, l)| \, dadl &= \int_E |(\lambda - \mathbf{T}_{\mathbf{R}})^{-1} \mathcal{N}_{-\sigma}(\psi)(a, l)| \, dadl \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}}\right) \int_E |\mathcal{N}_{-\sigma}(\psi)(a, l)| \, dadl \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}}\right) \left[ \int_E \tilde{a}(a, l) \, dadl + \tilde{b} \int_E |\psi(a, l)| \, dadl \right]. \end{aligned}$$

As before, we conclude that

$$\omega_1(\mathcal{H}(\lambda)(M)) \leq \frac{\tilde{b}}{\lambda} \left(1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}}\right) \omega_1(M).$$

Next, let  $\psi \in M$  and  $T, T' > 0$ . We have

$$\begin{aligned} \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |\mathcal{F}(\lambda)(\psi)(a, l)| \, dadl &= \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |(\lambda - \mathbf{T}_{\mathbf{R}})^{-1} B \mathcal{N}_f(\psi)(a, l)| \, dadl \\ &\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}}{\lambda} \left(1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}}\right) \left[ \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} h(a, l) \, dadl \right. \\ &\quad \left. + \eta \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |\psi(a, l)| \, dadl \right] \end{aligned}$$

and therefore,

$$\omega_2(\mathcal{F}(\lambda)(M)) \leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E})} \eta}{\lambda} \left(1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}}\right) \omega_2(M).$$

For any  $\psi \in M$  and  $T, T' > 0$ , similar calculations give

$$\begin{aligned} \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |\mathcal{H}(\lambda)(\psi)(a, l)| \, dadl &= \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |(\lambda - \mathbf{R})^{-1} \mathcal{N}_{-\sigma}(\psi)(a, l)| \, dadl \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}} \right) \left[ \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} \tilde{a}(a, l) \, dadl \right. \\ &\quad \left. + \tilde{b} \int_{T'}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |\psi(a, l)| \, dadl \right]. \end{aligned}$$

This implies that

$$\omega_2(\mathcal{H}(\lambda)(M)) \leq \frac{\tilde{b}}{\lambda} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}} \right) \omega_2(M).$$

Summarizing the above calculations, we infer that for any bounded subset  $M$  of  $\mathbf{X}$ , we have

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{F}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) &= \omega_1(\mathcal{F}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) + \omega_2(\mathcal{F}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) \\ &\leq \frac{\|\mathbb{B}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E})} \eta + \tilde{b}}{\lambda} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}} \right) \omega(M). \end{aligned}$$

So, setting  $\lambda_1 := 2(\|\mathbb{B}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E})} \eta + \tilde{b}) \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}} \right)$ , we infer that, for any real  $\lambda$  satisfying  $\lambda \geq \lambda_1$ , we have

$$\omega(\mathcal{F}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) \leq \frac{1}{2} \omega(M)$$

which proves our claim.

We shall now check that, for suitable real  $\lambda$ , the operator  $\mathcal{H}(\lambda)$  is a strict contraction. Indeed, let  $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{X}$  and let  $\lambda$  be such that  $\lambda > \lambda_0$ . Using (A5) and the estimate (4.3.6), we get

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(\lambda)(\psi_1) - \mathcal{H}(\lambda)(\psi_2)\|_{\mathbf{X}} &\leq \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}} \right) \|\mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_1) - \mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_2)\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \frac{\|\rho\|_{\infty}}{\lambda} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}} \right) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Next, put  $\lambda_2 := \|\rho\|_{\infty} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}} \right)$ . It is clear that, for any  $\lambda$  satisfying  $\lambda > \lambda_2$ , the operator  $\mathcal{H}(\lambda)$  is a strict contraction on  $\mathbf{X}$ .

For suitable real numbers  $\lambda$ , we have  $\mathcal{F}(\lambda)(\mathbb{B}_{\mathbf{r}}) + \mathcal{H}(\lambda)(\mathbb{B}_{\mathbf{r}}) \subseteq (\mathbb{B}_{\mathbf{r}})$ . Indeed, let  $\psi, \varphi \in \mathbb{B}_{\mathbf{r}}$ , we have

$$\|\mathcal{F}(\lambda)(\psi) + \mathcal{H}(\lambda)(\varphi)\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} N(\mathbf{r}) + N'(\mathbf{r})}{\lambda} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}} \right)$$

where  $N(\mathbf{r})$  (resp.  $N'(\mathbf{r})$ ) denotes the upper bound of  $\mathcal{N}_f$  (resp.  $\mathcal{N}_{-\sigma}$ ) on  $\mathbb{B}_{\mathbf{r}}$ . Set

$$\lambda_3 := \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} N(\mathbf{r}) + N'(\mathbf{r})}{\mathbf{r}} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| e^{-l_1 \varepsilon}} \right).$$

---

It is obvious that, for any real  $\lambda$  such that  $\lambda > \lambda_3$ , we have

$$\|\mathcal{F}(\lambda)(\psi) + \mathcal{H}(\lambda)(\varphi)\|_{\mathbf{X}} \leq \mathbf{r}$$

which proves that, for  $\lambda > \lambda_3$ ,  $\mathcal{F}(\lambda)(\mathbb{B}_{\mathbf{r}}) + \mathcal{H}(\lambda)(\mathbb{B}_{\mathbf{r}}) \subset (\mathbb{B}_{\mathbf{r}})$ .

Let  $\tilde{\lambda} = \max(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . It is clear that for all  $\lambda$  such that  $\lambda > \tilde{\lambda}$ , the operators  $\mathcal{F}(\lambda)$  and  $\mathcal{H}(\lambda)$  satisfy the conditions of Theorem 4.2.2. Accordingly, for all  $\lambda$  such that  $\lambda > \tilde{\lambda}$ , problem (4.3.3) has at least one solution  $\psi$  in  $\mathbb{B}_{\mathbf{r}}$  which concludes the proof.  $\square$

### Concluding remarks.

1. We did not succeed to prove the analogue of Lemma 4.2.2 for  $L^p$ -spaces with  $p \in (1, +\infty)$ . It seems that for a function  $f$  belonging to the space  $\{\psi \in L^p(\Omega) : \frac{\partial \psi}{\partial a} \in L^p(\Omega) \text{ and } \psi|_{\Gamma_1} \in L^p([l_1, +\infty); dl)\}$ , the trace function  $f|_{\Gamma_2}$  does not belong necessary to  $L^p([l_1, +\infty); dl)$  (in any case we did not succeed to prove this assertion). So existence results for the problem (4.1.1)-(4.1.2) in  $L^p$ -spaces are an open problem.
2. Note that Theorems 4.3.1 and 4.3.2 are valid for  $l_1 = 0$  in the case where the transition boundary operator  $\mathbf{R}$  is a strict contraction.
3. In contrast to the works [26, 36] where the parameter  $\lambda$  is a complex number, here  $\lambda$  is assumed to be a real number. This restriction is due to the fact that the proof of Proposition 4.2.1 is based upon Lemma 4.2.5 and uses positivity (in the lattice sense) arguments.  $\square$



# On a nonlinear version of Rotenberg model with infinite maturation velocities

## 5.1 Introduction

In this chapter we are concerned with existence of solutions to the following boundary value problem

$$v \frac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu, v) + \sigma(\mu, v, \psi(\mu, v)) + \lambda \psi(\mu, v) = \int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \psi(\mu, v')) dv' \quad (5.1.1)$$

where  $(\mu, v) \in [0, 1] \times [0, +\infty)$ . Equation (5.1.1) is a stationary nonlinear version of Rotenberg equation [52] which describes the growth of a cell population where each cell is distinguished by its degree of maturity  $\mu \in [0, 1]$  and its maturation velocity  $v$ . The degree of maturation is defined so that  $\mu = 0$  at the birth and  $\mu = 1$  at mitosis, i.e. cells born at  $\mu = 0$  and divide at  $\mu = 1$ . In this model, the function  $\psi(\mu, v)$  represents the density of population with the degree of maturation  $\mu$  and the velocity of maturation  $v$ . The kernel  $\zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \cdot)$  denotes the transition rate. It specifies the transition of cells from the maturation velocity  $v'$  to  $v$  while  $\sigma(\mu, v, \cdot)$  denotes the total transition cross section.

We recall that Rotenberg model consists in a linear transport equation where the maturation velocities are finite. The well-posedness of the Cauchy problem governed by this equation was discussed by many authors (see, for example, [9, 15, 34, 16] and the references therein). However, in the Introduction of his paper, Rotenberg pointed out that the adequate formulation of his model seems to be a nonlinear one. Actually, the cells under consideration are in contact with a nutrient environment which is not part of the mathematical formulation. Fluctuations in nutrient concentration and other density-dependent effects such as contact inhibition of growth make the transition rates and the total transition cross section are functions of the population density, thus creating a nonlinear problem. On the other hand, the biological boundary at  $\mu = 0$  and  $\mu = 1$  are fixed and tightly



coupled throughout mitosis. The conditions present at the boundaries are felt throughout the system and cannot be remote. This phenomena suggests that at mitosis daughter cells and parent cells are related by a nonlinear reproduction law.

In [38] a modified nonlinear stationary version of the Rotenberg model was discussed for finite maturation velocities. The transition rate and the total cross section were assumed to depend on the density of population, as in equation (5.1.1), and, at mitosis, the daughter and mother cells are related by a nonlinear rule which describes the boundary conditions.

It should be noticed that the well posedness of the Cauchy problem governed by the original Rotenberg's transport equation was discussed in [9] for infinite maturation velocities, i.e.  $v \in [0, +\infty)$ . On the other hand, in the work [12], the authors discussed the existence of solutions on the space  $L^1([0, 1] \times [0, +\infty); d\mu dv)$  to the Problem (5.1.1) supplemented with the following boundary conditions

$$\psi^0 = \mathbf{K}(\psi^1) \tag{5.1.2}$$

where  $\psi^i$  denotes the restriction of  $\psi$  to  $\Gamma_i := \{i\} \times [0, +\infty)$ ,  $i = 0, 1$  and  $\mathbf{K}$  is a nonlinear operator from a suitable function space on  $\Gamma_1$  to a similar one on  $\Gamma_0$ .

The main purpose of this chapter is to complete the results obtained in [12] by discussing the existence of solutions to the boundary value problem (5.1.1)-(5.1.2) on the spaces  $L^p([0, 1] \times [0, +\infty); d\mu dv)$  where  $p \in (1, +\infty)$ .

The outline of this chapter is as follows. In Section 2 we introduce the functional setting of the problem and we establish some preliminary results needed in the rest of the paper. In Section 3 we present our existence results : Theorems 5.3.1 and 5.3.2. Our first result is established in the case where

$$(A1) \quad \sigma(\mu, v, \psi(\mu, v)) = \sigma(\mu, v)\psi(\mu, v) \quad \text{with} \quad \sigma(\cdot, \cdot) \in L^\infty([0, 1] \times [0, +\infty); d\mu dv)$$

( $\sigma$  is not relabeled) a multiplication operator. The general boundary value problem (5.1.1)-(5.1.2) (i.e.  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  is a nonlinear function of  $\psi$ ) is the object in Theorem 5.3.2. The proof of Theorem 5.3.2 is rather more complicated and requires the linearity of the transition operator  $K$ . We first transform the problem (5.1.1)-(5.1.2) into a fixed point one involving two nonlinear operators depending on the parameter  $\lambda$ , say,  $\psi = \mathcal{J}(\lambda)\psi + \mathcal{I}(\lambda)\psi$  and we show that  $\mathcal{J}(\lambda)$  and  $\mathcal{I}(\lambda)$  satisfy the hypotheses of Krasnoselskii's fixed point theorem.

## 5.2 Notations and preliminaries

In this section, we fix notations and introduce the functional setting of the problem. Let  $1 < p < \infty$  and set

$$X_p := L_p(\Omega, d\mu dv),$$

where  $\Omega = [0, 1] \times [0, +\infty)$ . We denote by  $X_p^0$  and  $X_p^1$  the boundary spaces, that is,

$$X_p^0 := L_p(\{0\} \times [0, +\infty), vdv) \quad \text{and} \quad X_p^1 := L_p(\{1\} \times [0, +\infty), vdv).$$

---

Let  $W_p$  be the partial Sobolev space defined by

$$W_p = \{\psi \in X_p \text{ such that } v \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \in X_p \text{ and } v\psi \in X_p\}.$$

Note that functions belonging to  $W_p$  has traces on the spatial boundary  $\{0\}$  and  $\{1\}$  belonging to the spaces  $X_p^0$  and  $X_p^1$ , respectively [25]. In the remainder of this chapter we use the notations  $\psi^0(v) = \psi(0, v) \in X_p^0$  and  $\psi^1(v) = \psi(1, v) \in X_p^1$ .

For simplicity we shall identify  $X_p^0$  and  $X_p^1$  with the space

$$Y_p := L_p([0, +\infty), vdv)$$

and we denote by  $Z_p$  the space

$$Z_p := L_p([0, +\infty), dv).$$

Let  $K$  be the boundary operator

$$\begin{cases} K : Y_p \longrightarrow Y_p \\ u \longrightarrow K(u). \end{cases}$$

(A2) There exists  $\alpha < 1$ , such that

$$\|K(f_1) - K(f_2)\| \leq \alpha \|f_1 - f_2\| \text{ for all } f_1, f_2 \in Y_p.$$

It is clear that  $K$  is continuous. Moreover,  $\forall f \in Y_p$  we have

$$\|K(f)\| \leq \alpha \|f\| + \|K(0)\|. \quad (5.2.1)$$

Hence  $K$  maps bounded sets of  $Y_p$  into bounded sets of  $Y_p$ .

We define the streaming operator  $S_K$  by

$$\begin{cases} S_K : \mathcal{D}(S_K) \subset X_p \longrightarrow X_p \\ \psi \longrightarrow S_K(\psi)(\mu, v) = -v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu, v) - \sigma(\mu, v)\psi(\mu, v) \\ \mathcal{D}(S_K) = \{\psi \in W_p \text{ such that } \psi^0 = K(\psi^1)\} \end{cases}$$

where  $\sigma(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\Omega)$ .

We consider the resolvent equation for the operator  $S_K$

$$(\lambda - S_K)\psi = \varphi$$

where  $\varphi$  is a given function of  $X_p$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  and the unknown  $\psi$  must be sought in  $\mathcal{D}(S_K)$ . Let  $\underline{\sigma}$  be the real defined by

$$\underline{\sigma} = \text{ess-inf}\{\sigma(\mu, v), \quad (\mu, v) \in \Omega\}.$$

For  $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\sigma}$ , the solution is formally given by

$$\psi(\mu, v) = \psi(0, v)e^{-\frac{1}{v}\int_0^\mu(\lambda+\sigma(s,v))ds} + \frac{1}{v}\int_0^\mu e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^\mu(\lambda+\sigma(\tau,v))d\tau}\varphi(\mu', v)d\mu'. \quad (5.2.2)$$

Accordingly, for  $\mu = 1$ , we get

$$\psi(1, v) = \psi(0, v)e^{-\frac{1}{v}\int_0^1(\lambda+\sigma(s,v))ds} + \frac{1}{v}\int_0^1 e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^1(\lambda+\sigma(\tau,v))d\tau}\varphi(\mu', v)d\mu'. \quad (5.2.3)$$

We describe the formulation (5.2.2) and (5.2.3) by the following operators

$$\begin{cases} P_\lambda : Y_p \longrightarrow Y_p \\ u \rightarrow (P_\lambda u)(v) := u(v)e^{-\frac{1}{v}\int_0^1(\lambda+\sigma(s,v))ds}; \\ Q_\lambda : Y_p \longrightarrow X_p \\ u \rightarrow (Q_\lambda u)(\mu, v) := u(v)e^{-\frac{1}{v}\int_0^\mu(\lambda+\sigma(s,v))ds}; \\ \Pi_\lambda : X_p \longrightarrow Y_p \\ \varphi \rightarrow (\Pi_\lambda \varphi)(v) := \frac{1}{v}\int_0^1 e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^1(\lambda+\sigma(\tau,v))d\tau}\varphi(\mu', v)d\mu'; \end{cases}$$

and finally

$$\begin{cases} \Xi_\lambda : X_p \longrightarrow X_p \\ \varphi \rightarrow (\Xi_\lambda \varphi)(\mu, v) := \frac{1}{v}\int_0^\mu e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^\mu(\lambda+\sigma(\tau,v))d\tau}\varphi(\mu', v)d\mu'. \end{cases}$$

Let  $\lambda$  be a complex number satisfying  $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\sigma}$ . For  $u \in Y$  we have

$$\begin{aligned} \|P_\lambda u\|_{Y_p}^p &= \int_0^{+\infty} \left| e^{-\frac{1}{v}\int_0^1(\lambda+\sigma(s,v))ds} u(v) \right|^p v dv \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{v}(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} |u(v)|^p v dv \\ &\leq \int_0^{+\infty} |u(v)|^p v dv \\ &= \|u\|_{Y_p}^p \end{aligned}$$

which implies

$$\|P_\lambda\|_{\mathcal{L}(Y_p)} \leq 1.$$

Similarly, for each  $u \in Y_p$ , we can write

$$\begin{aligned} \|Q_\lambda u\|_{X_p}^p &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left| e^{-\frac{1}{v}\int_0^\mu(\lambda+\sigma(s,v))ds} u(v) \right|^p d\mu dv \leq \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-\frac{p\mu}{v}(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} |u(v)|^p d\mu dv \\ &\leq \frac{1}{p(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} \int_0^{+\infty} |u(v)|^p v dv \\ &= \frac{1}{p(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} \|u\|_{Y_p}^p. \end{aligned}$$

Accordingly,

$$\|Q_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y}_p, \mathbf{X}_p)} \leq \frac{1}{[p(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})]^{1/p}}.$$

Next, for  $\varphi \in \mathbf{X}_p$ , the use of Hölder's inequality yields

$$\begin{aligned} \|\Pi_\lambda \varphi\|_{\mathbf{Y}_p}^p &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^p} \left| \int_0^1 e^{-\frac{1}{v} \int_{\mu'}^1 (\lambda + \sigma(\tau, v)) d\tau} \varphi(\mu', v) d\mu' \right|^p v dv \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^p} \left( \int_0^1 e^{-\frac{1-\mu'}{v}(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} d\mu' \right)^{p/q} \left( \int_0^1 e^{-\frac{1-\mu'}{v}(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} |\varphi(\mu', v)|^p d\mu' \right) v dv \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})^{p/q}} \int_0^1 |\varphi(\mu', v)|^p v d\mu' dv \\ &= \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})^{p/q}} \|\varphi\|_{\mathbf{X}_p}^p, \end{aligned}$$

and therefore

$$\|\Pi_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p)} \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})^{1/q}}.$$

In the same way we can write

$$\begin{aligned} \|\Xi_\lambda \varphi\|_{\mathbf{X}_p}^p &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{v^p} \left| \int_0^\mu e^{-\frac{1}{v} \int_{\mu'}^\mu (\lambda + \sigma(\tau, v)) d\tau} \varphi(\mu', v) d\mu' \right|^p d\mu dv \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{v^p} \left( \int_0^\mu e^{-\frac{\mu-\mu'}{v}(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} d\mu' \right)^{p/q} \left( \int_0^\mu e^{-\frac{\mu-\mu'}{v}(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} |\varphi(\mu', v)|^p d\mu' \right) d\mu dv \\ &\leq \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})^p} \|\varphi\|_{\mathbf{X}_p}^p, \end{aligned}$$

and consequently

$$\|\Xi_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_p, \mathbf{X}_p)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma}}.$$

Thus, equation (5.2.3) may be written as

$$\psi^1 = P_\lambda K \psi^1 + \Pi_\lambda \varphi. \quad (5.2.4)$$

Consider now the equation

$$u = P_\lambda K(u) + f \quad (5.2.5)$$

where  $f$  is a given function of  $\mathbf{Y}_p$ . Let  $A_{(\lambda, f)}$  be the operator defined by

$$\begin{cases} A_{(\lambda, f)} : \mathbf{Y}_p \longrightarrow \mathbf{Y}_p \\ u \longrightarrow A_{(\lambda, f)} u := P_\lambda K(u) + f \end{cases}$$

Since  $\|P_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y}_p)} \leq 1$ , we have

$$\|A_{(\lambda, f)}(u) - A_{(\lambda, f)}(v)\| \leq \|K(u) - K(v)\| \leq \alpha \|u - v\|$$

for all  $u, v \in Y_p$ . So, for every  $\lambda$  such that  $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\sigma}$ , the operator  $A_{(\lambda, f)}$  is a contraction mapping on  $Y_p$  and therefore, by the Banach fixed point theorem, the problem (5.2.5) has a unique solution  $u = u(\lambda, f)$ . Let  $J_\lambda$  be the operator defined by

$$\begin{cases} J_\lambda : Y_p \longrightarrow Y_p \\ f \longrightarrow J_\lambda f := u \end{cases}$$

where  $u$  stands for the unique solution of the equation (5.2.5).

**Lemma 5.2.1.** *Assume that the hypothesis (A2) is satisfied and let  $\lambda$  be such that  $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\sigma}$ . Then*

(1)  $J_\lambda$  is continuous on  $Y_p$  and maps bounded sets into bounded ones.

(2)  $(\lambda - S_K)$  is invertible and  $(\lambda - S_K)^{-1}$  is given by

$$(\lambda - S_K)^{-1} = Q_\lambda K J_\lambda \Pi_\lambda + \Xi_\lambda. \quad (5.2.6)$$

(3)  $(\lambda - S_K)^{-1}$  is continuous on  $X_p$  and maps bounded sets into bounded ones.

**Proof.** (1) Let  $f \in Y_p$ , we have  $J_\lambda(f) = P_\lambda K(J_\lambda(f)) + f$ . Let  $f_1, f_2 \in Y_p$ , then

$$\|J_\lambda(f_1) - J_\lambda(f_2)\|_{Y_p} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \|f_1 - f_2\|_{Y_p}$$

which proves the continuity of  $J_\lambda$ . Next, putting  $f_2 = 0$  in last equation we get

$$\|J_\lambda(f_1) - J_\lambda(0)\|_{Y_p} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \|f_1\|_{Y_p}$$

and therefore

$$\|J_\lambda(f_1)\|_{Y_p} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \|f_1\|_{Y_p} + \|J_\lambda(0)\|_{Y_p} \quad (5.2.7)$$

which ends the proof of (1).

(2) Since, for  $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\sigma}$ , the solution of equation (5.2.3) is given by  $\psi^1 = J_\lambda \Pi_\lambda(\varphi)$ , equation (5.2.2) writes abstractly as  $\psi = Q_\lambda K \psi^1 + \Xi_\lambda \varphi$ . Substituting  $\psi^1$  into the expression of  $\psi$  we get  $\psi = Q_\lambda K J_\lambda \Pi_\lambda(\varphi) + \Xi_\lambda(\varphi)$ . This proves that  $(\lambda - S_K)$  is invertible and  $(\lambda - S_K)^{-1}$  is given by (5.2.6).

(3) This statement follows from the boundedness of the linear operators  $P_\lambda, Q_\lambda, \Pi_\lambda, \Xi_\lambda$  and the properties of the operators  $K$  and  $J_\lambda$ .  $\square$

Let  $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot)$  be a measurable function given by

$$\begin{cases} \zeta : [0, 1] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mu, v, v') \longrightarrow \zeta(\mu, v, v'). \end{cases}$$

It defines the following bounded collision operator

$$\begin{cases} B : X_p \longrightarrow X_p \\ \psi \longrightarrow \int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') \psi(\mu, v') dv'. \end{cases}$$

---

It is clear that the operator  $B$  is local in  $\mu$ , so it may be regarded as an operator on  $Z_p$  depending on a parameter  $\mu \in [0, 1]$ . We assume that the function  $B(\cdot)$  is strongly measurable, i.e. for each  $u \in Z_p$ , the function

$$\mu \in [0, 1] \rightarrow B(\mu)u \in \mathcal{L}(Z_p)$$

is measurable and the map  $\mu \in [0, 1] \rightarrow \|B(\mu)\|_{\mathcal{L}(Z_p)}$  is essentially bounded. Here  $\mathcal{L}(Z_p)$  stands for the set of all bounded linear operators on  $Z_p$ .

**Definition 5.2.1.** *We say that  $B$  is a regular operator on  $X_p$  if,*

a)  $\{B(\mu) : \mu \in [0, 1]\}$  is a set of collectively compact operators on  $Z_p$ , i.e.

$$\{B(\mu)v : \mu \in [0, 1], \|v\|_{Z_p} \leq 1\} \quad \text{is relatively compact in } Z_p.$$

b) For every  $v' \in Z_q$ ,

$$\{B'(\mu)v' : \mu \in [0, 1], \|v'\|_{Z_q} \leq 1\} \quad \text{is relatively compact in } Z_q$$

where  $B'(\mu)$  denotes the dual operator of  $B(\mu)$  and  $q$  is the conjugate exponent of  $p$ .

We now recall the following useful approximation property of regular collision operators established in [47]

**Lemma 5.2.2.** *Let  $1 < p < +\infty$ . The class of regular operators on  $X_p$  is the closure in the operator norm of the class of collision operators with kernels of the form*

$$\zeta(\mu, v, v') = \sum_{i \in I} \eta_i(\mu) \theta_i(v) \beta_i(v')$$

where  $\eta_i(\cdot) \in L^\infty([0, 1], d\mu)$ ,  $\theta_i(\cdot) \in Z_p$  and  $\beta_i(\cdot) \in Z_q$  ( $I$  is finite and  $q$  denotes the conjugate of  $p$ ).

Now we are in a position to prove

**Lemma 5.2.3.** *Let  $1 < p < +\infty$  and assume that (A2) holds true. If  $B$  is a regular collision operator, then, for any  $\lambda \in \mathbb{C}$  such that  $\text{Re}\lambda > -\underline{\sigma}$ , the operator  $(\lambda - S_K)^{-1}B$  is compact on  $X_p$ .*

**Proof.** Let  $\lambda$  be such that  $\text{Re}\lambda > \lambda$ . We know from (5.2.6) that

$$(\lambda - S_K)^{-1}B = \sum_{n \geq 0} Q_\lambda K (P_\lambda K)^n \Pi_\lambda B + \Xi_\lambda B.$$

To prove the compactness of  $(\lambda - S_K)^{-1}B$ , it suffices to show that the operators  $\Pi_\lambda B$  and  $\Xi_\lambda B$  are compact. Since  $B$  is a regular operator, it follows from Lemma 5.2.2 that  $B$  can be approximated, in the uniform topology, by a sequence  $B_n$  of finite rank operators on  $Z_p$  which converges, in the operator norm, to  $B$ . Accordingly, it suffices to establish the

result for a finite rank operator, that is  $\zeta_n(\mu, v, v') = \sum_{j=1}^n \eta_j(\mu) \theta_j(v) \beta_j(v')$  where  $\eta_j(\cdot) \in L^\infty([0, 1], d\mu)$ ,  $\theta_j(\cdot) \in Z_p$  and  $\beta_j(\cdot) \in Z_p$  ( $q$  denotes the conjugate of  $p$ ). So, we infer from the linearity and the stability of the compactness by summation that it suffices to prove the result for an operator  $B$  whose kernel is in the form  $\zeta(\mu, v, v') = \eta(\mu) \theta(v) \beta(v')$  where  $\eta(\cdot) \in L^\infty([0, 1], d\mu)$ ,  $\theta(\cdot) \in Z_p$  and  $\beta(\cdot) \in Z_q$ . Let  $g \in X_p$ , we have

$$\begin{cases} (\Pi_\lambda Bg)(\mu, v) &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{v} \eta(\mu) \theta(v) e^{-\frac{1}{v} \int_\mu^1 (\lambda + \sigma(\tau, v)) d\tau} \beta(v') g(\mu, v') d\mu dv' \\ &= (I_\lambda Hg)(\mu, v) \end{cases}$$

where  $H$  and  $I_\lambda$  stand for the bounded operators

$$\begin{cases} H : X_p \longrightarrow L^p([0, 1], d\mu) \\ \varphi \longrightarrow (H\varphi)(\mu) = \int_0^{+\infty} \beta(v) \varphi(\mu, v) dv \\ \\ I_\lambda : L^p([0, 1], d\mu) \longrightarrow Y_p \\ \psi \longrightarrow \int_0^1 \frac{\eta(\mu) \theta(v)}{v} e^{-\frac{1}{v} \int_\mu^1 (\lambda + \sigma(\tau, v)) d\tau} \psi(\mu) d\mu. \end{cases}$$

It is then sufficient to check that  $I_\lambda$  is compact. This will follow from Theorem 11.6 in [28, p. 275] if we show that

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_0^1 \left| \frac{1}{v} \eta(\mu) \theta(v) e^{-\frac{1}{v} \int_\mu^1 (\lambda + \sigma(\tau, v)) d\tau} \right|^q d\mu \right]^{\frac{p}{q}} v dv < +\infty$$

where  $q$  denotes the conjugate exponent of  $p$  ( $I_\lambda$  is then a Hille-Tamarkin operator). To do so, let us first observe that

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{1}{v} \eta(\mu) \theta(v) e^{-\frac{1}{v} \int_\mu^1 (\lambda + \sigma(\tau, v)) d\tau} \right|^q d\mu &\leq \|\eta\|_\infty^q \frac{|\theta(v)|^q}{v^q} \int_0^1 e^{-q \frac{(\operatorname{Re} \lambda + \sigma)}{v} (1-\mu)} d\mu \\ &\leq \|\eta\|_\infty^q \frac{|\theta(v)|^q}{q(\operatorname{Re} \lambda + \sigma) v^{(q-1)}} \end{aligned}$$

which leads to

$$\left[ \int_0^1 \left| \frac{1}{v} \eta(\mu) \theta(v) e^{-\frac{1}{v} \int_\mu^1 (\lambda + \sigma(\tau, v)) d\tau} \right|^q d\mu \right]^{\frac{p}{q}} \leq \|\eta\|_\infty^p \frac{|\theta(v)|^p}{(q(\operatorname{Re} \lambda + \sigma))^{\frac{p}{q}}} v^{(\frac{p}{q}-p)}$$

Integrating in  $v$  from 0 to  $+\infty$  we obtain

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_0^1 \left| \frac{1}{v} \eta(\mu) \theta(v) e^{-\frac{1}{v} \int_\mu^1 (\lambda + \sigma(\tau, v)) d\tau} \right|^q d\mu \right]^{\frac{p}{q}} v dv \leq \int_0^{+\infty} \|\eta\|_\infty^p \frac{|\theta(v)|^p}{(q(\operatorname{Re} \lambda + \sigma))^{\frac{p}{q}}} v^{(\frac{p}{q}-p)} v dv$$

---


$$\leq \|\eta\|_\infty^p \frac{\|\theta\|^p}{(q(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma}))^{\frac{p}{q}}}.$$

This proves the compactness of the operator  $\Pi_\lambda B$ .

A similar reasoning as above allows us to reach the same result for the operator  $\Xi_\lambda B$ . This completes the proof.  $\square$

### 5.3 Existence results

In this section our interest concentrates on existence results for the boundary value problem (1.1)-(1.2) in the case where the function  $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$  satisfies the hypothesis (A1). The general case will be treated at the end of this section.

Let  $\Sigma$  be an arbitrary bounded open subset of  $\mathbb{R}^n$ . A function  $g : \Sigma \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  is said to satisfy the Carathéodory conditions if  $g(x, y)$  is measurable in  $x$  for all  $y \in \mathbb{C}$  and is continuous in  $y$  for almost all  $x$ .

If  $g$  satisfies the Carathéodory conditions, then we can define the operator  $\mathcal{N}_g$  on the set of functions  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  by  $(\mathcal{N}_g\psi)(x) = g(x, \psi(x))$  for every  $x \in \Sigma$ . The operator  $\mathcal{N}_g$  is called the Nemytskii (or superposition) operator generated by  $g$ . We now quote a useful result which states a basic fact for the theory of Nemytskii's operators on  $L^p$ -spaces (see, for example, [20] or [3]).

**Lemma 5.3.1.** *Assume that  $f$  is Carathéodory function. If  $\mathcal{N}_f : L_{p_1}(\Sigma) \rightarrow L_{p_2}(\Sigma)$ ,  $p_1, p_2 \geq 1$ , then  $\mathcal{N}_f$  is continuous and takes bounded sets into bounded sets.*

In the following we suppose that

(A3)  $f$  satisfies the Carathéodory conditions and the Nemytskii operator  $\mathcal{N}_f$  acts from  $X_p$  into  $X_p$ .

Let  $\mathbf{r}$  be a positive real and set

$$B_{\mathbf{r}} = \left\{ \psi \in X_p \text{ such that } \|\psi\|_{X_p} \leq \mathbf{r} \right\}.$$

Now we are ready to prove

**Theorem 5.3.1.** *Let  $p \in (1, \infty)$  and let  $B$  be a regular operator  $X_p$ . If (A1)-(A3) are satisfied, then, for every  $\mathbf{r} > 0$ , there exists a real  $\lambda_0 > 0$  such that, for all  $\lambda$  satisfying  $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$ , the problem*

$$\begin{cases} v \frac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu, v) + (\lambda + \sigma(\mu, v))\psi(\mu, v) = \int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \psi(\mu, v')) dv', \\ \psi^0 = K(\psi^1), \end{cases} \quad (5.3.1)$$

has at least one solution on  $B_{\mathbf{r}}$ .



**Proof.** Let  $\lambda$  be a complex number such that  $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\sigma}$ . According to Lemma 5.2.1,  $(\lambda - S_K)$  is invertible and then Problem (5.3.1) may be written in the form

$$\psi = \mathbf{G}_\lambda(\psi), \quad \psi^0 = K(\psi^1),$$

where  $\mathbf{G}_\lambda = (\lambda - S_K)^{-1}B\mathcal{N}_f$ . Let  $\mathbf{r} > 0$ . It is clear that  $\mathbf{G}_\lambda$  is a continuous operator. Since  $f$  is a Carathéodory function, by Lemma 5.3.1,  $\mathcal{N}_f$  is bounded on  $B_{\mathbf{r}}$ . So, there exists a constant  $\Lambda_1(\mathbf{r})$  such that, for all  $\psi \in B_{\mathbf{r}}$ ,  $\|\mathcal{N}_f\psi\|_{X_p} \leq \Lambda_1(\mathbf{r})$ . Taking into account of Lemma 5.2.1 and Eqs. (5.2.1),(5.2.7), for any  $\psi \in B_{\mathbf{r}}$ , we have

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_\lambda\psi\|_{X_p} &\leq \|(Q_\lambda K J_\lambda \Pi_\lambda B\mathcal{N}_f)(\psi)\|_{X_p} + \|(\Xi_\lambda B\mathcal{N}_f)(\psi)\|_{X_p} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Using the estimates (5.2.1) and (5.2.7), we obtain

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|Q_\lambda\|_{\mathcal{L}(Y_p, X_p)} \|K(J_\lambda \Pi_\lambda B\mathcal{N}_f)\psi\|_{X_p} \\ &\leq \frac{\alpha}{[p(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})]^{1/p}} \|J_\lambda(\Pi_\lambda B\mathcal{N}_f)\psi\|_{X_p} + \frac{\|K(0)\|_{Y_p}}{[p(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})]^{1/p}} \\ &\leq \frac{\alpha \|\Pi_\lambda\|_{\mathcal{L}(X_p, Y_p)} \|B\|_{\mathcal{L}(X_p)} \|\mathcal{N}_f\psi\|_{X_p}}{(1-\alpha)(p)^{1/p}[\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma}]^{1/p}} + \frac{\alpha \|J(0)\|_{Y_p} + \|K(0)\|_{Y_p}}{[p(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})]^{1/p}} \\ &\leq \frac{\alpha \|B\|_{\mathcal{L}(X_p)} \Lambda_1(\mathbf{r})}{(1-\alpha)(p)^{1/p}(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} + \frac{\alpha \|J(0)\|_{Y_p} + \|K(0)\|_{Y_p}}{[p(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})]^{1/p}} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \|\Xi_\lambda\|_{\mathcal{L}(X_p, X_p)} \|B\|_{\mathcal{L}(X_p)} \|\mathcal{N}_f\psi\|_{X_p} \\ &\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(X_p)} \Lambda_1(\mathbf{r})}{(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_\lambda\psi\|_{X_p} &\leq \frac{\alpha \|B\|_{\mathcal{L}(X_p)} \Lambda_1(\mathbf{r}) + p^{1/p}(1-\alpha) \|B\|_{\mathcal{L}(X_p)} \Lambda_1(\mathbf{r})}{p^{1/p}(1-\alpha)(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})} + \frac{\alpha \|J_\lambda(0)\|_{Y_p} + \|K(0)\|_{Y_p}}{[p(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\sigma})]^{1/p}} \\ &:= \tau(\operatorname{Re}\lambda) \end{aligned}$$

Clearly,  $\tau(\cdot)$  is continuous, strictly decreasing and satisfies  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = 0$ . Hence, there exists  $\lambda_0 > 0$  such that  $\tau(\lambda_0) \leq \mathbf{r}$ , and therefore,  $\mathbf{G}_\lambda B_{\mathbf{r}} \subset B_{\mathbf{r}}$  for  $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$ . Since  $B$  is a regular operator, according to Lemma 5.2.3,  $\mathbf{G}_\lambda$  is compact. Now applying Schauder's fixed point theorem we get the desired result.  $\square$

Our next task is devoted to the existence of positive solutions to the boundary value problem (5.3.1). First, recall that an operator  $U$  from a Banach lattice  $X$  into a Banach

lattice  $Y$  is said to be positive if  $U(X^+) \subseteq Y^+$  where  $X^+$  (resp.  $Y^+$ ) is the positive cone of  $X$  (resp.  $Y$ ).

It should be noticed that our functional spaces  $X_p$ ,  $Y_p$  and  $Z_p$ ,  $p \in (1, +\infty)$  are Banach lattices, their positive cone are denoted by  $X_p^+$ ,  $Y_p^+$  and  $Z_p^+$ , respectively. For  $\mathbf{r} > 0$ , we denote by  $B_{\mathbf{r}}^+$  the set  $B_{\mathbf{r}}^+ = B_{\mathbf{r}} \cap X_p^+$ .

**Proposition 5.3.1.** *Let the hypotheses (A1)-(A3) be satisfied. If the operators  $K$ ,  $B$  and  $\mathcal{N}_f$  are positive, then, for any  $\mathbf{r} > 0$ , there exists  $\lambda_0 > 0$  such that, for all  $\lambda > \lambda_0$ , the problem (5.3.1) has at least one solution on  $B_{\mathbf{r}}^+$ .*

**Proof.** Let  $\lambda$  be a real such that  $\lambda > \max(0, -\underline{\sigma})$ . Let  $f \in Y_p^+$  and consider the sequence in  $Y_p$  defined by

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = A_{(\lambda, f)}(u_n) = P_\lambda K u_n + f.$$

Using the positivity of  $P_\lambda K$  and  $f$  one sees, by induction, that  $u_n \in Y_p$ . Moreover, since the operator  $A_{(\lambda, f)}$  is a contraction mapping (see Section 2), it follows from the Banach fixed point theorem that  $u_n$  converges to  $J_\lambda(f)$ . Thus  $J_\lambda(f) \in Y_p^+$  and therefore  $J_\lambda(Y_p^+) \subset Y_p^+$ . Now taking into account the positivity of the operators  $Q_\lambda$ ,  $\Pi_\lambda$ ,  $\Xi_\lambda$ ,  $K$  and  $B$  we infer that  $G_\lambda$  is positive too. The remainder of the proof is similar to that of Theorem 3.1, it suffices to replace  $B_{\mathbf{r}}$  by  $B_{\mathbf{r}}^+$ .  $\square$

The following result ensures the existence of nontrivial positive solutions.

**Proposition 5.3.2.** *Let  $\mathbf{r} > 0$  and assume the hypotheses of Proposition 5.3.1 are satisfied. Moreover, if there is  $\rho > 0$  and  $0 \neq \psi_0 \in B_{\mathbf{r}}^+$  such that*

1.  $\psi_0 \notin \ker(B)$  ( $\ker(B)$  denotes the null space of  $B$ ),
2.  $(\mathcal{N}_f \psi)(x, v) \geq \rho \psi_0(x, v)$  for all  $\psi \in B_{\mathbf{r}}^+$ ,

*then there exists  $\tilde{\lambda} > 0$  such that for any  $\lambda > \tilde{\lambda}$  there is  $\eta > 0$  such that the problem*

$$\begin{cases} v \frac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu, v) + (\lambda + \sigma(\mu, v))\psi(\mu, v) = \eta \int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \psi(\mu, v')) dv', \\ \psi^0 = K(\psi^1), \end{cases} \quad (5.3.2)$$

*has at least one solution on  $\psi^* \in B_{\mathbf{r}}^+$  satisfying  $\|\psi^*\| = \mathbf{r}$ .*

**Proof.** Arguing as in the proofs of Theorems 5.3.1 and Proposition 5.3.1 we infer that there is a constant  $\lambda_0 > 0$  such that, for all  $\lambda \geq \lambda_0$ , the operator  $G_\lambda$  maps  $B_{\mathbf{r}}^+$  into itself. On the other hand, for  $\lambda \geq \lambda_0$ , using the positivity of  $(\lambda - S_K)^{-1}$  and  $B$  we see that

$$G_\lambda \psi \geq \rho(\lambda - S_K)^{-1} B \psi_0 \geq 0 \text{ and } (\lambda - S_0)^{-1} B \psi_0 \neq 0 \text{ for all } \psi \in B_{\mathbf{r}}^+.$$

Accordingly,

$$\|G_\lambda \psi\| \geq \rho \left\| (\lambda - S_K)^{-1} B \psi_0 \right\| > 0 \quad \text{for all } \psi \in B_{\mathbf{r}}^+$$

and consequently

$$\inf \{ \|G_\lambda \psi\|, \psi \in B_{\mathbf{r}}^+ \} > 0.$$

Hence, for  $\lambda \geq \lambda_0$ , one can define the operator

$$H_\lambda(\psi) = \frac{\mathbf{r}G_\lambda(\psi)}{\|G_\lambda\psi\|} \quad \text{for all } \psi \in B_{\mathbf{r}}^+.$$

Now, using the same arguments as in the proof of the Theorem 5.3.1, we see that  $H_\lambda$  has a fixed point  $\psi^* \in B_{\mathbf{r}}^+$  satisfying  $\|\varphi^*\| = \mathbf{r}$ . Putting  $\eta = \frac{\mathbf{r}}{\|G_\lambda(\psi^*)\|}$ , we get  $G_\lambda(\psi^*) = \eta^{-1}\psi^*$ .

Consequently,  $\psi^* \in D(S_K) \cap B_{\mathbf{r}}^+$  and

$$v \frac{\partial \psi^*}{\partial \mu}(\mu, v) + (\lambda + \sigma(\mu, v))\psi^*(\mu, v) = \eta \int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \psi^*(\mu, v')) dv'.$$

This completes the proof. □

The remainder of this section is devoted to the existence of solutions to the following more general boundary value problem

$$\begin{cases} v \frac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu, v) + \lambda \psi(\mu, v) + \sigma(\mu, v, \psi(\mu, v)) = \int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \psi(\mu, v')) dv', \\ \psi|_{\Gamma_0} = \mathbf{K}(\psi|_{\Gamma_1}) \quad \text{and} \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (5.3.3)$$

When dealing with this problem some technical difficulties arise, so we introduce the following assumptions

(A4)  $K$  is a linear operator from  $\mathbf{Y}_p$  into itself and satisfying  $\|K\| < 1$ .

Moreover, for each  $\mathbf{r} > 0$  we have

$$|\sigma(\mu, v, \psi_1(\mu, v)) - \sigma(\mu, v, \psi_2(\mu, v))| \leq |\rho(\mu, v)| |\psi_1 - \psi_2| \quad (\psi_1, \psi_2 \in B_{\mathbf{r}})$$

where  $\rho(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\Omega, d\mu dv)$  and  $\mathcal{N}_{-\sigma}$  acts from  $B_{\mathbf{r}}$  into itself.

Define the free streaming operator  $\tilde{S}_K$  by

$$\begin{cases} \tilde{S}_K : \mathcal{D}(\tilde{S}_K) \subset \mathbf{X}_p \longrightarrow \mathbf{X}_p \\ \psi \longrightarrow \tilde{S}_K(\psi)(\mu, v) = -v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \\ \mathcal{D}(\tilde{S}_K) = \{\psi \in \mathbf{W}_p \text{ such that } \psi^0 = K(\psi^1)\} \end{cases}$$

Note that  $\tilde{S}_K$  is derived from  $S_K$  by taking  $\sigma(\cdot, \cdot) \equiv 0$ . It is clear that, since the transition operator  $K$  is linear,  $\tilde{S}_K$  is a closed densely linear operator on  $\mathbf{X}_p$  and, by Lemma 5.2.3, the resolvent set  $\rho(\tilde{S}_K)$  of  $\tilde{S}_K$  contains the half-plane  $\Upsilon := \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Re}\lambda > 0\}$ . So, for any  $\lambda \in \Upsilon$ , we have

$$(\lambda - \tilde{S}_K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_\lambda^0 K (P_\lambda^0 K)^n \Pi_\lambda^0 + \Xi_\lambda^0,$$

where  $P_\lambda^0, Q_\lambda^0, \Pi_\lambda^0$  and  $\Xi_\lambda^0$  are bounded linear operators derived from  $P_\lambda, Q_\lambda, \Pi_\lambda$  and  $\Xi_\lambda$  by taking  $\sigma(\cdot, \cdot) = 0$ . Their norms are bounded above, respectively, by 1,  $\frac{1}{(p\text{Re}\lambda)^{\frac{1}{p}}}$ ,  $\frac{1}{(\text{Re}\lambda)^{\frac{1}{q}}}$

---

and  $1/\operatorname{Re}\lambda$ . Let  $\lambda \in \mathbb{C}$  be such that  $\operatorname{Re}\lambda > 0$ . Note further that, if  $K$  satisfies the assumption (A2), then necessarily we have  $\|K\| < 1$ . Consequently, for any  $\lambda \in \Upsilon$ , these observations lead to the estimate

$$\left\| (\lambda - \tilde{S}_K)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_p)} = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \left( 1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{p}} [I - \|K\|]} \right). \quad (5.3.4)$$

**Theorem 5.3.2.** *Let  $p \in (1, \infty)$  and assume that the hypotheses (A3) and (A4) are satisfied. If  $B$  is a regular operator on  $X_p$ , then there exists  $\lambda_0 > 0$ , such that, for all  $\lambda$  satisfied  $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$ , the problem (5.3.3) has at least one solution in  $B_{\mathbf{r}}$ .*

Note that the proof of Theorem 5.3.2 consists in writing (5.3.3) as a fixed point problem. However, in contrast to the proof of Theorem 5.3.1, we can not apply the Schauder fixed point theorem because the problem (5.3.3) is derived from (5.3.1) as a perturbation by a non constant Nemytskii operator (then it is not compact on  $X_p$ ). The proof of this result is based upon a fixed point theorem owing to Krasnosel'skii (see, for example, Theorem 11.B in [62, p. 501]). It asserts that, if  $M$  is a nonempty closed, bounded and convex subset of a Banach space  $X$  and  $A$  and  $B$  are two maps from  $M$  into  $X$  such that  $AM + BM \subset M$ ,  $A$  is compact and  $B$  is a contraction mapping, then  $A + B$  has at least one fixed point in  $M$ .

**Proof of Theorem 3.2** Let  $\lambda$  a complex number such that  $\operatorname{Re}\lambda > 0$ . Clearly  $\lambda \in \rho(\tilde{S}_K)$ , so Problem (5.3.3) may be written in the form

$$\psi = \mathcal{I}(\lambda)\psi + \mathcal{J}(\lambda)\psi, \quad \psi^0 = K(\psi^1)$$

where  $\mathcal{I}(\lambda) := (\lambda - \tilde{S}_K)^{-1} \mathcal{N}_{-\sigma}$  and  $\mathcal{J}(\lambda) := (\lambda - \tilde{S}_K)^{-1} B \mathcal{N}_f$ .

Using the fact that  $B$  is a regular collision operator and arguing as in the proof of Theorem 5.3.1, we infer that the operator  $\mathcal{J}(\lambda)$  is compact. Next we check that the operator  $\mathcal{I}(\lambda)$  is a strict contraction mapping. Indeed, let  $\psi_1, \psi_2 \in X_p$ . According to (A4) and (5.3.4) we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}(\lambda)\psi_1 - \mathcal{I}(\lambda)\psi_2\| &= \left\| (\lambda - \tilde{S}_K)^{-1} \right\| \|\mathcal{N}_{-\sigma}\psi_1 - \mathcal{N}_{-\sigma}\psi_2\| \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \left( 1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{p}} [I - \|K\|]} \right) \|\mathcal{N}_{-\sigma}\psi_1 - \mathcal{N}_{-\sigma}\psi_2\|, \end{aligned}$$

Taking into account of the assumption (A4), we get

$$\|\mathcal{N}_{-\sigma}\psi_1 - \mathcal{N}_{-\sigma}\psi_2\| \leq \|\rho\|_{\infty} \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

which leads to

$$\|\mathcal{I}(\lambda)\psi_1 - \mathcal{I}(\lambda)\psi_2\| \leq \frac{\|\rho\|_{\infty}}{\operatorname{Re}(\lambda)} \left( 1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{p}} [I - \|K\|]} \right) \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Set  $\lambda_1 = \|\rho\|_\infty \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{p}}[I - \|K\|]}\right)$ . Then, for any  $\lambda$  satisfying  $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_1$ , the operator  $\mathcal{I}(\lambda)$  is a strict contraction mapping.

On the other hand, let  $\psi, \varphi \in B_{\mathbf{r}}$ , we can write

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}(\lambda)\varphi - \mathcal{J}(\lambda)\psi\| &\leq \|(\lambda - \tilde{S}_K)^{-1}\| \{\|B\| \Lambda_2(\mathbf{r}) + \Lambda_3(\mathbf{r})\} \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{p}}[I - \|K\|]}\right) \{\|B\| \Lambda_2(\mathbf{r}) + \Lambda_3(\mathbf{r})\}. \end{aligned}$$

where  $\Lambda_2(\mathbf{r})$  (resp.  $\Lambda_3(\mathbf{r})$ ) denotes the upper bound of  $\mathcal{N}_f$  (resp.  $\mathcal{N}_{-\sigma}$ ) on  $B_{\mathbf{r}}$ . Putting

$$\lambda_2 = \frac{1}{\mathbf{r}} \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{p}}[I - \|K\|]}\right) \{\|B\| \Lambda_2(\mathbf{r}) + \Lambda_3(\mathbf{r})\}.$$

It is clear that, for any  $\lambda$  satisfying  $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_2$ , we have  $\|\mathcal{I}(\lambda)\varphi - \mathcal{J}(\lambda)\psi\| \leq \mathbf{r}$ . Thus, for such  $\lambda$ , we have  $\mathcal{I}(\lambda)B_{\mathbf{r}} + \mathcal{J}(\lambda)B_{\mathbf{r}} \subset B_{\mathbf{r}}$ . In conclusion, if we set  $\lambda_0 = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ , then, for  $\lambda$  such that  $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$ , the operators  $\mathcal{I}(\lambda)$  and  $\mathcal{J}(\lambda)$  satisfy the hypotheses of the Krasnosel'skii fixed point theorem. Therefore, for all  $\lambda \in \mathbb{C}$  satisfying  $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$ , the problem (5.3.3) has at least one solution in  $B_{\mathbf{r}}$ .  $\square$

# Théorie spectrale d'un opérateur transport avec des opérateurs de collision élastiques et inélastiques

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés spectrales de l'opérateur de transport suivant :

$$\begin{aligned}
 A_H \varphi(x, v) &:= -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, v) - \sigma(v) \varphi(x, v) + \int_V k_c(x, v, v') \varphi(x, v') d\mu(v') \\
 &+ \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_d^j(x, \rho_j, \omega, \omega') \varphi(x, \rho_j \omega') d\omega' \\
 &+ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x, \rho, \omega, \omega') \varphi(x, \rho \omega') d\omega'
 \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

où  $x \in \Omega$  et  $v = \rho \omega \in V =: I \times \mathbb{S}^{N-1}$  avec  $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ ,  $\rho \in I := (\rho_{\min}, \rho_{\max})$  et  $V \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mu(\cdot)$  une mesure de Radon positive, bornée sur  $\mathbb{R}^N$  de support  $V$ . Il s'agit d'un opérateur de transport étudié par E. W. Larsen et P. F. Zweifel dans [30] (voir aussi [54, 53]) pour des conditions aux limites absorbantes (flux rentrant nul). Il met en jeu des opérateurs de collision plus complexes partiellement élastiques et inélastiques. La fonction  $\varphi(x, v)$  représente la densité de probabilité des particules d'un gaz ayant la position  $x$  et la vitesse  $v$ . La fonction  $\sigma(\cdot)$  est appelée, la fréquence de collision. Les fonctions  $k_c(\cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $k_e(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  et  $k_d^j(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $j = 1, \dots, l$ , sont les noyaux des opérateurs  $K_c$ ,  $K_e$  et  $K_d = \sum_{j=1}^l K_d^j$  appelés opérateurs de collisions classique, élastiques et inélastiques respectivement. L'objet de la première partie de ce travail est d'étendre

les résultats obtenus dans [30, 54, 53] aux conditions aux limites abstraites couvrant la plupart des conditions aux limites rencontrées dans la pratique (conditions aux limites périodiques, réflexions spéculaires, réflexions diffuses et conditions aux limites mixtes). Les conditions aux bords seront alors modélisées par un opérateur frontière abstrait reliant le flux rentrant et le flux sortant. Il agit comme suit :

$$\varphi|_{\Gamma^-} = H(\varphi|_{\Gamma^+}). \quad (6.1.2)$$

L'ensemble  $\Gamma^-$  (resp.  $\Gamma^+$ ) représente la partie rentrante (resp. sortante) de l'espace des phases  $D \times V$ ;  $\varphi|_{\Gamma^-}$  (resp.  $\varphi|_{\Gamma^+}$ ) est la restriction de  $\varphi$  sur  $\Gamma^-$  (resp.  $\Gamma^+$ ) et  $H$  est un opérateur linéaire borné d'un espace fonctionnel sur  $\Gamma^+$  vers un espace fonctionnel sur  $\Gamma^-$ .

L'opérateur  $A_H$  s'écrit sous la forme  $A_H = T_H + K$  où  $T_H$  désigne l'opérateur d'advection et  $K$  l'opérateur de collision avec  $K = K_c + K_e + K_d$ . On note que la connaissance du spectre de  $A_H$  est d'une importance fondamentale pour décrire les propriétés de la solution (lorsqu'elle existe) du problème de Cauchy gouverné par l'opérateur  $A_H$ . Une analyse détaillée des propriétés spectrales de l'opérateur  $A_0$  (c'est-à-dire  $H = 0$ ) est donnée dans les travaux [30, 54, 53] aussi bien pour le cas stationnaire que pour le problème d'évolution.

L'opérateur  $K_c$  est l'opérateur de collision qui intervient en neutronique, il s'écrit sous la forme

$$K_c\varphi(x, v) = \int_V k_c(x, v, v')\varphi(x, v')d\mu(v').$$

L'opérateur  $K_d$  est appelé l'opérateur de collision inélastique, il est donné par la relation

$$K_d\varphi(x, v) = \sum_{j=1}^l K_d^j\varphi(x, v) = \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_d^j(x, \rho_j, \omega, \omega')\varphi(x, \rho_j\omega')d\omega',$$

où chaque opérateur  $K_d^j$  ( $j = 1, \dots, l$ ) décrit les collisions lors desquelles une quantité d'énergie  $E_j$  est perdue par le neutron se trouvant à la position  $x$  avec une vitesse initiale  $\rho_j$  et une vitesse finale  $\rho$ . La vitesse initiale  $\rho_j$  est déterminée par

$$E_j = \frac{1}{2}M(\rho_j)^2 - \frac{1}{2}M(\rho)^2,$$

où  $M$  représente la masse d'un neutron. Enfin,  $K_e$  est appelé l'opérateur de collision élastique. Il est donné par

$$K_e\varphi(x, v) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x, \rho, \omega, \omega')\varphi(x, \rho\omega')d\omega'.$$

Il décrit les collisions ne faisant pas varier l'énergie cinétique des neutrons, il n'agit qu'à travers la partie angulaire  $\omega$  de la variable de vitesse.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 6.2, on introduit le cadre fonctionnel du problème et on établit quelques résultats préliminaires nécessaires pour notre analyse. Dans la section 6.3, on montre que, si  $K_c$  est un opérateur régulier (voir la définition 6.3.2), alors  $K_c(\lambda - T_H - K_d - K_e)^{-1}$  et  $(\lambda - T_H - K_d - K_e)^{-1}K_c$  sont des

opérateurs compacts dans les espaces  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ ,  $1 < p < \infty$  (voir, Proposition 6.3.1) et l'opérateur  $K_c(\lambda - T_H - K_e - K_d)^{-1}K_c$  est faiblement compact dans  $L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  (voir, Proposition 6.3.2). De plus, si  $\lambda \in \rho(T_H + K_c + K_e + K_d) \cap \rho(T_H + K_e + K_d)$  tel que  $(\lambda - T_H - K_c - K_e - K_d)^{-1} - (\lambda - T_H - K_e - K_d)^{-1}$  est compact, alors on a  $\sigma_{ess}(T_H + K_e + K_d) = \sigma_{ess}(T_H + K_c + K_e + K_d)$  lorsque  $p \in (1, +\infty)$  où  $\sigma_{ess}(U)$  désigne le spectre essentiel de l'opérateur  $U$  (voir le corollaire 6.3.1). On note que ce résultat est ouvert lorsque  $p = 1$ . Enfin, on montre que  $\sigma(T_H + K_c + K_d + K_e) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}\lambda > -\tilde{\lambda} + \|K_e + K_d\|\}$  consiste au plus, à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie dans  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ ,  $1 \leq p < \infty$  (voir, les Théorèmes 6.3.1 et 6.3.2). La section 6.4 est consacrée à l'étude de la compacité du reste d'ordre un de la série de Dyson-Philips du problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = (T_p + K)\varphi(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \varphi|_{x_i=-a_i} = \varphi|_{x_i=a_i} \end{cases} \quad (6.1.3)$$

où  $\Omega = \prod_{i=1}^N (-a_i, a_i)$ ,  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , est un pavé ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On montre que le reste d'ordre 1,  $R_1(t)$ , de la série de Dyson-Philips est compact dans les espaces  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ , ( $1 < p < \infty$ ). Comme conséquence immédiate de ce résultat, on a

$$\sigma_{ess}(e^{t(T_p + K_c + K_e + K_d)}) = \sigma_{ess}(e^{t(T_p + K_e + K_d)}) \quad (6.1.4)$$

ce qui entraîne l'égalité des types essentiels suivants

$$\omega_{ess}(e^{t(T_p + K_c + K_e + K_d)}) = \omega_{ess}(e^{t(T_p + K_e + K_d)}). \quad (6.1.5)$$

L'égalité (6.1.5) joue un rôle fondamental dans l'analyse du comportement asymptotique (pour les temps grands) de la solution du problème de Cauchy (6.1.3).

## 6.2 Notations et préliminaires

Le but de cette section est de rappeler quelques définitions et résultats de base, pour l'équation du transport des neutrons. Soient  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $\mu(\cdot)$  une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}^N$  tels que  $\mu(0) = 0$ . On désigne par  $V$  le support de la mesure  $\mu(\cdot)$ . On appelle  $V$  l'espace des vitesses. Pour tout  $(x, v) \in \bar{\Omega} \times V$ , on définit les réels  $t^\pm(x, v)$  par

$$t^\pm(x, v) = \sup\{t > 0, x \pm sv \in \Omega, 0 < s < t\} = \inf\{t > 0, x \pm sv \notin \Omega\}$$

et

$$\tau(x, v) := t^+(x, v) + t^-(x, v) \text{ pour tout } (x, v) \in \bar{\Omega} \times V.$$

On note par

$$\Gamma_\pm = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V, \pm v \cdot \nu_x \geq 0\}$$



où  $\nu_x$  représente le vecteur normal unitaire au point  $x \in \Omega$  dirigé vers l'extérieur.

Il est clair que, pour tout  $(x, v) \in \Gamma_{\pm}$ , on a  $t^{\mp}(x, v) \geq 0$  et, dans tous les cas, on a  $x \pm t^{\pm}(x, v)v \in \Gamma_{\pm}$ .

On introduit l'espace fonctionnel suivant :

$$W^p = \left\{ \varphi \in L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)) \text{ tel que } v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)) \right\}.$$

Il est bien connu que les fonctions de  $W^p$  ont des traces appartenant à  $L_{\text{loc}}^{p, \pm} := L_{\text{loc}}^p(\Gamma_{\pm}; |v \cdot \nu_x| d\gamma_x d\mu(v))$  (voir. M. Cessenat [13] ou [14]) et pas nécessairement à  $L^{p, \pm} := L^p(\Gamma_{\pm}; |v \cdot \nu_x| d\gamma_x d\mu(v))$ . Toutefois, si  $\varphi \in W^p$  et  $\varphi^- := \varphi|_{\Gamma^-} \in L^p(\Gamma^-; |v \cdot \nu_x| d\gamma_x d\mu(v))$ , alors  $\varphi^+ := \varphi|_{\Gamma^+} \in L^p(\Gamma^+; |v \cdot \nu_x| d\gamma_x d\mu(v))$  et inversement. Il est clair que toute fonction  $\varphi$  de  $\widetilde{W}^p$  admet des traces  $\varphi^- \in L^{p, -}$  et  $\varphi^+ \in L^{p, +}$ . En fait, on a l'identité

$$\widetilde{W}^p := \left\{ \varphi \in W^p, \varphi^- \in L^{p, -} \right\} = \left\{ \varphi \in W^p, \varphi^+ \in L^{p, +} \right\} \subseteq W^p.$$

Pour aborder le problème, on se place alors dans l'espace  $\widetilde{W}^p$ . Les conditions aux limites peuvent s'écrire alors de manière abstraites comme suit :

$$\varphi^- = H\varphi^+$$

où  $H : L^{p, +} \rightarrow L^{p, -}$  est un opérateur linéaire borné.

On définit l'opérateur d'advection  $T_H$  par

$$\begin{cases} T_H : \mathcal{D}(T_H) \subseteq L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)) \longrightarrow L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)) \\ \varphi \longmapsto T_H \varphi(x, v) = -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, v) - \sigma(v)\varphi(x, v) \\ \mathcal{D}(T_H) = \left\{ \varphi \in \widetilde{W}_p \text{ tel que } \varphi^- = H(\varphi^+) \right\} \end{cases}$$

où la fréquence des collision  $\sigma(\cdot)$  satisfait  $0 \leq \sigma(\cdot) \in L^\infty(V)$ .

Pour le calcul de la résolvante de l'opérateur  $T_H$ , on procède comme dans [32]. On considère l'équation

$$(\lambda - T_H)\psi(x, v) = \varphi(x, v) \tag{6.2.1}$$

où  $\lambda$  est un nombre complexe,  $\varphi$  une fonction donnée dans  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  et l'inconnue  $\psi$  doit être cherchée dans  $\mathcal{D}(T_H)$ . On pose

$$\tilde{\lambda} = \mu\text{-ess-} \inf_{v \in V} \sigma(v).$$

Pour  $\text{Re} \lambda + \tilde{\lambda} > 0$ , la solution de l'équation (6.2.1) est donnée formellement par

$$\psi(x, v) = \psi(x - t^-(x, v)v, v) e^{-(\lambda + \sigma(v))t^-(x, v)} + \int_0^{t^-(x, v)} e^{-(\lambda + \sigma(v))s} \varphi(x - sv, v) ds. \tag{6.2.2}$$

De plus, pour  $(x, v) \in \Gamma_+$ , (6.2.2) devient

$$\psi^+ = \psi^- e^{-(\lambda+\sigma(v))\tau(x,v)} + \int_0^{\tau(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s} \varphi(x - sv, v) ds. \quad (6.2.3)$$

où  $\tau(x, v) := t^+(x, v) + t^-(x, v)$  (comme  $(x, v) \in \Gamma_+$ ,  $t^+(x, v) = 0$ ). Pour avoir une formulation abstraite des équations (6.2.2) et (6.2.3), on définit les opérateurs :

$$\begin{aligned} M_\lambda &: L^{p,-} \longrightarrow L^{p,+}, & u &\longrightarrow M_\lambda u := u e^{-(\lambda+\sigma(v)) \tau(x,v)} ; \\ B_\lambda &: L^{p,-} \longrightarrow L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)), & u &\longrightarrow B_\lambda u := u e^{-(\lambda+\sigma(v)) t^-(x,v)} ; \\ \left\{ \begin{array}{l} G_\lambda : L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)) \longrightarrow L^{p,+}, \\ \varphi \longrightarrow G_\lambda \varphi := \int_0^{\tau(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s} \varphi(x - sv, v) ds; \end{array} \right. \end{aligned}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} C_\lambda : L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)) \longrightarrow L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)), \\ \varphi \longrightarrow C_\lambda \varphi := \int_0^{t^-(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s} \varphi(x - sv, v) ds. \end{array} \right.$$

Un calcul simple utilisant l'inégalité Hölder montre que ces opérateurs sont bornés. En fait, les normes de  $B_\lambda$  et  $C_\lambda$  sont inférieures respectivement à  $[p(\operatorname{Re}\lambda + \tilde{\lambda})]^{-\frac{1}{p}}$  et à  $(\operatorname{Re}\lambda + \tilde{\lambda})^{-1}$  où  $q$  désigne l'exposant conjugué de  $p$ . De plus, l'opérateur  $M_\lambda u = [B_\lambda u]_{|\Gamma_+}$  est une contraction et  $G_\lambda \varphi = [C_\lambda \varphi]_{|\Gamma_+}$  est de norme inférieure à  $[q(\operatorname{Re}\lambda + \tilde{\lambda})]^{-\frac{1}{q}}$ .

**Remark 6.2.1.** On note que, pour  $\lambda > -\tilde{\lambda}$ , les opérateurs  $M_\lambda$ ,  $B_\lambda$ ,  $G_\lambda$  et  $C_\lambda$  sont positifs au sens de l'ordre.

En utilisant ces opérateurs et le fait que la fonction  $\psi$  doit satisfaire les conditions aux bords, l'équation (6.2.3) devient

$$\psi^+ = M_\lambda H \psi^+ + G_\lambda \varphi.$$

La solution de cette équation est réduite à l'inversibilité de l'opérateur  $\mathcal{U}(\lambda) := I - M_\lambda H$ . En particulier, si  $\|H\| < 1$ , alors  $\{\mathcal{U}(\lambda)\}^{-1}$  existe. On peut donc écrire

$$\psi^+ = \{\mathcal{U}(\lambda)\}^{-1} G_\lambda \varphi. \quad (6.2.4)$$

D'autre part, l'équation (6.2.2) peut s'écrire comme sous la forme

$$\psi = B_\lambda H \psi^+ + C_\lambda \varphi.$$

En substituant (6.2.4) dans cette dernière équation, on obtient

$$\psi = B_\lambda H \{\mathcal{U}(\lambda)\}^{-1} G_\lambda \varphi + C_\lambda \varphi.$$

Ainsi, on a

$$(\lambda - T_H)^{-1} = B_\lambda H \{\mathcal{U}(\lambda)\}^{-1} G_\lambda + C_\lambda. \quad (6.2.5)$$

On rappelle le résultat suivant obtenu dans [32].

**Lemme 6.2.1.** *Soit  $p \in [1, \infty)$ . Si  $\|H\| \leq 1$ , alors pour tout  $\lambda$  tel que  $\operatorname{Re}\lambda > -\tilde{\lambda}$ , on a*

$$\|(\lambda - T_H)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda + \tilde{\lambda}}.$$

Dans le reste de cette section, on pose  $\tilde{K} = K_e + K_d$ .

On considère maintenant l'équation

$$\lambda\psi(x, v) - T_H\psi(x, v) - \tilde{K}\psi(x, v) = \varphi(x, v) \quad (6.2.6)$$

où  $\lambda$  est un nombre complexe,  $\varphi$  une fonction donnée dans  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  et l'inconnue  $\psi$  doit être cherchée dans  $\mathcal{D}(T_H)$ . On note que, pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}\lambda > -\tilde{\lambda}$ ,  $\lambda \in \rho(T_H)$  et l'équation (6.2.6) s'écrit alors

$$(\lambda - T_H)[I - (\lambda - T_H)^{-1}\tilde{K}]\psi(x, v) = \varphi(x, v). \quad (6.2.7)$$

Pour inverser l'opérateur  $I - (\lambda - T_H)^{-1}\tilde{K}$ , il suffit que  $\|(\lambda - T_H)^{-1}\| \|\tilde{K}\| < 1$  ou encore  $\operatorname{Re}\lambda > -\tilde{\lambda} + \|\tilde{K}\|$ . Pour de telles  $\lambda$ , l'opérateur  $I - (\lambda - T_H)^{-1}\tilde{K}$  est inversible et l'équation (6.2.7) devient alors

$$\psi(x, v) = \sum_{n \geq 0} ((\lambda - T_H)^{-1}\tilde{K})^n (\lambda - T_H)^{-1} \varphi(x, v).$$

Ceci montre que  $\lambda \in \rho(T_H + \tilde{K})$  et

$$(\lambda - T_H - \tilde{K})^{-1} = \sum_{n \geq 0} ((\lambda - T_H)^{-1}\tilde{K})^n (\lambda - T_H)^{-1}. \quad (6.2.8)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|(\lambda - T_H - \tilde{K})^{-1}\| &\leq \sum_{n \geq 0} \|(\lambda - T_H)^{-1}\|^{n+1} \|\tilde{K}\|^n \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\|\tilde{K}\|^n}{(\operatorname{Re}\lambda + \tilde{\lambda})^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda + \tilde{\lambda} - \|\tilde{K}\|}. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Enfin, on introduit l'hypothèse suivante :

(A1) les fonctions  $k_d^{(j)}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $j = 0, \dots, l$ , apparaissant dans les noyaux des opérateurs  $K_d^j$  sont positives, mesurables et il existe des constantes  $M_d^j$ ,  $j = 0, \dots, l$ , telles que

$$0 \leq k_d^j(x, \rho_j, \omega, \omega') \leq M_d^j.$$

---

## 6.3 Analyse spectrale

Dans le papier [30] par E. W. Larsen et P. F. Zweifel, l'analyse fine des propriétés spectrales de l'opérateur  $T_H + K_e + K_d + K_c$  a été donnée pour des conditions aux limites absorbantes ( $H = 0$ ) dans l'espace  $L^1$ . Dans [53], cette analyse a été étendue aux espaces  $L^p$ ,  $p \in [1, +\infty)$  en y incluant l'analyse spectrale du problème d'évolution. Notre objectif ici est de compléter cette analyse lorsque le flux rentrant est non nul, c'est-à-dire  $H \neq 0$ .

### 6.3.1 Cas $p \in (1, \infty)$ .

Dans cette sous-section, on va s'intéresser au spectre de l'opérateur  $T_H + \widetilde{K} + K_c$  dans l'espace  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ . On rappelle que l'opérateur de collision  $K_c$  est, en général un opérateur linéaire borné intégral par rapport aux vitesses de la forme

$$K_c \varphi(x, v) := \int_V k_c(x, v, v') \varphi(x, v') d\mu(v') \quad (6.3.1)$$

où  $\varphi \in L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  et  $k_c : \Omega \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable.

Il est clair que  $K_c$  est local en  $x$  et donc il peut être regardé comme une application de la variable  $x$ ,

$$x \in \Omega \rightarrow K_c(x) \in \mathcal{L}(L^p(V, d\mu(v)))$$

où

$$K_c(x) : \varphi \in L^p(V, d\mu(v)) \rightarrow K_c(x)\varphi = \int_V k_c(x, v, v') \varphi(v') d\mu(v')$$

est borné, i.e.

$$\operatorname{ess-sup}_{x \in \Omega} \|K_c(x)\|_{L^p(V, d\mu(v))} < \infty.$$

**Définition 6.3.1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces normés,  $\mathcal{B}$  la boule unité fermée de  $X$  et  $\mathcal{C}$  une partie de  $\mathcal{L}(X, Y)$ . On dit que  $\mathcal{C}$  est collectivement compact si et seulement si

$$\mathcal{C}(\mathcal{B}) = \{C(x); C \in \mathcal{C}, x \in \mathcal{B}\} \text{ est relativement compact dans } Y.$$

Dans la suite, on utilise le concept d'opérateurs réguliers introduit par M. M. Kharroubi ([45] ou [47]).

**Définition 6.3.2.** On dit qu'un opérateur  $K_c$  de la forme (6.3.1) est régulier sur  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  si,

- a)  $\{K_c(x) : x \in \Omega\}$  est un ensemble d'opérateurs collectivement compacts sur  $L^p(V, d\mu(v))$ , i.e.

$$\{K_c(x)\varphi : x \in \Omega, \|\varphi\|_{L^p(V, d\mu(v))} \leq 1\} \text{ est relativement compact dans } L^p(V, d\mu(v)).$$

b) Pour tout  $\varphi' \in L^q(V, d\mu(v))$ ,

$$\{K_c(x)\varphi' : x \in \Omega, \|\varphi'\|_{L^q(V, d\mu(v))} \leq 1\} \text{ est relativement compact dans } L^q(V, d\mu(v))$$

où  $q$  est l'exposant conjugué de  $p$  ( $q = \frac{p}{p-1}$ ).

L'intérêt des opérateurs de collision réguliers réside dans le fait qu'ils satisfont la propriété d'approximation suivante.

**Lemme 6.3.1.** [47] *Les opérateurs de collision réguliers sont la fermeture pour la topologie uniforme de la classe d'opérateurs dont le noyau sont de la forme*

$$\sum_{i \in J} \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v'),$$

où  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega, dx)$ ,  $f_i \in L^p(V, d\mu(v))$  et  $g_i \in L^q(V, d\mu(v))$  où  $q = \frac{p}{p-1}$  et  $J$  est un ensemble d'indices fini.

On suppose que la mesure  $\mu(\cdot)$  satisfait l'hypothèse

$$(A2) \quad \begin{cases} \text{les hyperplans ont zéro } \mu\text{-mesure, i.e.} \\ \text{pour chaque } e \in \mathbb{S}^{N-1}, \mu\{v \in \mathbb{R}^N, v \cdot e = 0\} = 0 \\ \text{où } \mathbb{S}^{N-1} \text{ désigne la sphère unité de } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On rappelle tout d'abord le résultat suivant obtenu dans [32].

**Lemme 6.3.2.** *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble convexe borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $K_c$  un opérateur de collision régulier sur  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ . Si  $p \in (1, +\infty)$ ,  $\|H\| \leq 1$  et  $\mu$  satisfait (A2), alors les opérateurs  $K_c(\lambda - T_H)^{-1}$  et  $(\lambda - T_H)^{-1}K_c$  sont compacts.*

On pose

$$\mathcal{S} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > -\tilde{\lambda} + \|\tilde{K}\| \right\}.$$

On est maintenant en mesure de montrer le résultat suivant :

**Proposition 6.3.1.** *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble convexe borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $\lambda \in \mathcal{S}$ . On suppose que la condition (A2) est satisfaite. Si  $K_c$  est un opérateur de collision régulier, alors les opérateurs*

$$K_c(\lambda - T_H - \tilde{K})^{-1} \text{ et } (\lambda - T_H - \tilde{K})^{-1}K_c$$

*sont compacts.*

---

*Démonstration.* En raison de la propriété de la dualité  $[K_c^*((\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1})^*]^* = (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c$  et le théorème 2 dans [18, p. 485], il suffit de montrer le résultat par l'opérateur

$$K_c(\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1} = K_c(\lambda - T_H)^{-1} + \sum_{n \geq 1} K_c((\lambda - T_H)^{-1}\widetilde{K})^n(\lambda - T_H)^{-1}.$$

La compacité de  $K_c(\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}$  découle du lemme 6.3.2. Ceci termine la preuve.  $\square$

**Théorème 6.3.1.** *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 6.3.1, l'ensemble*

$$\sigma(T_H + \widetilde{K} + K_c) \cap \mathbb{S}$$

*consiste, au plus, à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.*

*Démonstration.* Soient  $\varphi \in L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On considère le problème

$$(\lambda - T_H - K)\psi = \varphi \tag{6.3.2}$$

où  $\psi$  est la fonction inconnue. Comme  $K = \widetilde{K} + K_c$ , si  $\lambda \in \mathbb{S}$ , alors on a

$$[I - (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c]\psi = (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}\varphi.$$

En tenant compte de (6.2.8), on peut écrire

$$(\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c = (\lambda - T_H)^{-1}K_c + \sum_{n \geq 1} ((\lambda - T_H)^{-1}\widetilde{K})^n(\lambda - T_H)^{-1}K_c.$$

Soit  $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)))$  la fonction définie par  $\mathbb{S} \ni \lambda \rightarrow F(\lambda) = (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)))$ . En raison de la proposition 6.3.1, on a  $F(\lambda) \in \mathcal{K}(L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)))$  ( $\mathcal{K}(L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v)))$  l'espace des opérateurs compacts sur  $L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ ).

En outre, comme  $\|H\| \leq 1$ , en utilisant l'estimation (6.2.9), on obtient

$$\|F(\lambda)\| < \frac{\|K_c\|}{\operatorname{Re}\lambda + \widetilde{\lambda} - \|\widetilde{K}\|}.$$

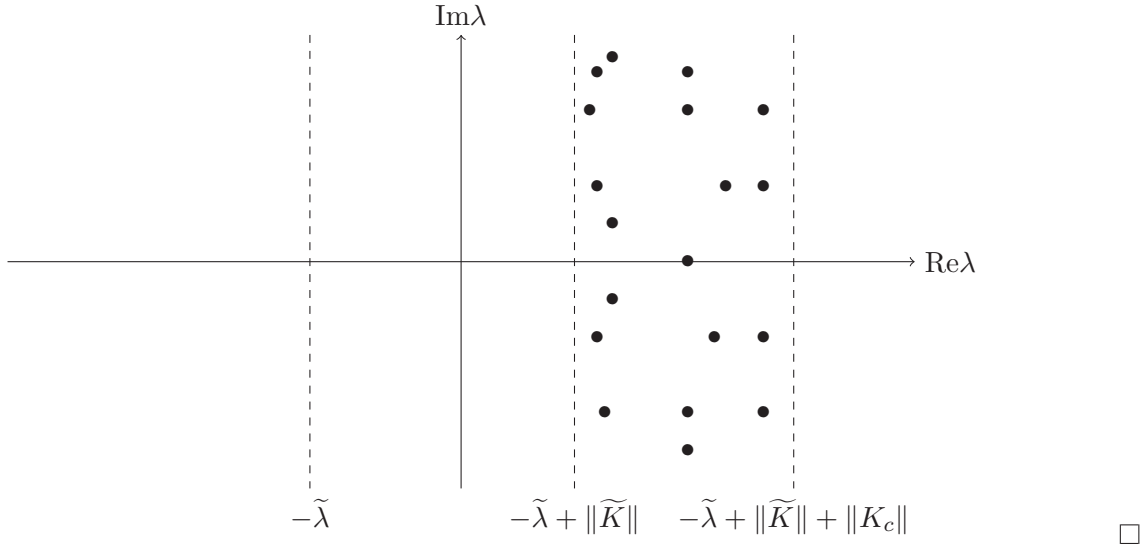
Comme  $r_\sigma(F(\lambda)) \leq \|F(\lambda)\|$ , il résulte de l'estimation précédente que

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow \infty} r_\sigma(F(\lambda)) = 0. \tag{6.3.3}$$

Ceci montre qu'il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{S}$  assez grand tel que  $(I - F(\lambda_0))$  est inversible. En tenant compte du théorème de Gohberg-Smul'yan (voir, par exemple, [29, Theorem 11.4] ou [51, Theorem VI.14]), on déduit que  $(I - F(\lambda))$  est inversible pour tout  $\lambda \in \mathbb{S}$  sauf pour un sous-ensemble dénombrable  $D$  contenu dans  $\mathbb{S}$ . Ainsi, pour  $\lambda \in \mathbb{S} \setminus D$ , on a

$$(\lambda - T_H - \widetilde{K} - K_c)^{-1} = [1 - F(\lambda)]^{-1}(\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}.$$

Les points de  $D$  sont des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.



**Corollaire 6.3.1.** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 6.3.1, on a :*

$$\sigma_{ess}(T_H + \widetilde{K}) = \sigma_{ess}(T_H + \widetilde{K} + K_c)$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in L^p(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\text{Re}\lambda > -\tilde{\lambda} + \|\widetilde{K}\| + \|K_c\|$ . On note que le problème d'inconnue  $\psi$ ,  $(\lambda - T_H - \widetilde{K})\varphi - K_c\varphi = \psi$ , peut s'écrire sous la forme

$$(\lambda - T_H - \widetilde{K})[\psi - (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c\psi] = \varphi.$$

En raison de l'équation (6.3.3), il est clair que si  $\text{Re}\lambda > -\tilde{\lambda} + \|\widetilde{K}\| + \|K_c\|$ , on a  $\|(\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c\| < 1$  et donc l'opérateur  $\lambda - T_H - \widetilde{K} - K_c$  est inversible. On a alors

$$(\lambda - T_H - \widetilde{K} - K_c)^{-1} = (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1} + \sum_{n \geq 1} ((\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c)^n (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}$$

ou encore

$$(\lambda - T_H - \widetilde{K} - K_c)^{-1} - (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1} = \sum_{n \geq 1} ((\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c)^n (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}.$$

En raison de la compacité de  $(\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c$ , l'opérateur  $(\lambda - T_H - \widetilde{K} - K_c)^{-1} - (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}$  est compact, la stabilité du spectre essentiel résulte du théorème 1.4.1.  $\square$

### 6.3.2 Cas $p = 1$ .

On se place maintenant dans l'espace  $L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ . L'opérateur de collision  $K_c$  est un opérateur borné de la forme (6.3.1) défini sur  $L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ .

On note que dans l'espace  $L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ , on a une définition alternative pour les opérateurs réguliers.

---

**Définition 6.3.3.** *L'opérateur de collision  $K_c$  est dit régulier sur  $L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ , si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'ensemble*

$$\{k_c(x, \cdot, v') : (x, v') \in \Omega \times V\}$$

*est faiblement compact dans  $L^1(V, d\mu(v))$  ;*

2. *l'application  $\Omega \ni x \rightarrow K_c(x) \in \mathcal{L}(L^1(V, d\mu(v)))$  satisfait*

$$\text{ess-} \sup_{(x, v') \in \Omega \times V} \int_V |k_c(x, v, v')| d\mu(v) < \infty.$$

On introduit les hypothèses suivantes requises ci-dessous.

(A3) La mesure  $\mu$  satisfait la propriété géométrique suivante

$$\int_{c_1 \leq x \leq c_2} \mu \int_0^{c_3} \chi_A(tx) dt \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } |A| \rightarrow 0,$$

pour chaque  $c_1 < c_2 < \infty$  et  $c_3 < \infty$ . Par  $|A|$  on désigne la mesure de Lebesgue de  $A$  et  $\chi_A(\cdot)$  représente la fonction caractéristique de  $A$ .

(A4)  $H$  est faiblement compact.

On rappelle le résultat suivant obtenu dans [32].

**Lemme 6.3.3.** *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble convexe borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $K_c$  un opérateur de collision régulier sur  $L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ . Si les conditions (A3) et (A4) sont satisfaites, alors l'opérateur  $K_c(\lambda - T_H)^{-1}K_c$  est faiblement compact.*

On rappelle que  $S$  désigne l'ensemble

$$S := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{Re} \lambda > -\tilde{\lambda} + \|\tilde{K}\| \right\}.$$

On est en mesure de montrer le résultat suivant :

**Proposition 6.3.2.** *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble convexe borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $\lambda \in S$ . On suppose que les conditions (A3) et (A4) sont satisfaites. Si  $K_c$  est un opérateur de collision régulier, alors l'opérateur*

$$K_c(\lambda - T_H - \tilde{K})^{-1}K_c$$

*est faiblement compact.*

*Démonstration.* Pour tout  $\lambda \in S$ , on peut écrire

$$K_c(\lambda - T_H - \tilde{K})^{-1}K_c = K_c(\lambda - T_H)^{-1}K_c + \sum_{n \geq 1} K_c((\lambda - T_H)^{-1}\tilde{K})^n(\lambda - T_H)^{-1}K_c.$$

En raison du lemme 6.3.3, il suffit de montrer que  $K_c(\lambda - T_H)^{-1}K_c$  et  $K_c^{(j)}(\lambda - T_H)^{-1}K_c$  ( $j = 1, \dots, l$ ), sont faiblement compacts. On va se contenter de montrer la faible compacité



de l'opérateur  $K_e(\lambda - T_H)^{-1}K_c$ , celle des autres opérateurs se fait de la même manière. Selon l'équation (6.2.5), on a

$$K_e(\lambda - T_H)^{-1}K_c = K_e B_\lambda H(I - M_\lambda H)^{-1}G_\lambda K_c + K_e(\lambda - T_0)^{-1}K_c.$$

Comme  $K_e(\lambda - T_0)^{-1}K_c$  est faiblement compact (voir, [53, Théorème 5.3.1]), il reste à montrer la faible compacité de  $K_e B_\lambda H(I - M_\lambda H)^{-1}G_\lambda K_c$ , celle-ci découle de la faible compacité de  $H$ .  $\square$

**Théorème 6.3.2.** *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 6.3.2, l'ensemble*

$$\sigma(T_H + \widetilde{K} + K_c) \cap \mathbb{S}$$

*consiste, au plus, à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On considère le problème

$$(\lambda - T_H - \widetilde{K})\psi - K_c\psi = \varphi, \tag{6.3.4}$$

où  $\psi$  est la fonction inconnue. Comme  $\mathbb{S} \subset \rho(T_H + \widetilde{K})$ , on a

$$[I - (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c]\psi = (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}\varphi.$$

Soit  $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{L}(L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v)))$  la fonction définie par  $\mathbb{S} \ni \lambda \rightarrow F(\lambda) = (\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}K_c \in \mathcal{L}(L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v)))$ . Comme  $(F(\lambda))^2$  est faiblement compact et l'espace  $L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$  admet la propriété de Dunford-Pettis, il résulte de [18, Corollary 13, p. 510] que  $(F(\lambda))^4 \in \mathcal{K}(L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v)))$  ( $\mathcal{K}(L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v)))$  l'espace des opérateurs compacts sur  $L^1(\Omega \times V, dx d\mu(v))$ ). En outre, en utilisant l'estimation (6.2.9), on obtient

$$\|(F(\lambda))^4\| < \frac{\|K_c\|^4}{(\operatorname{Re}\lambda + \widetilde{\lambda} - \|\widetilde{K}\|)^4}.$$

En tenant compte du fait que  $r_\sigma((F(\lambda))^4) \leq \|(F(\lambda))^4\|$ , on déduit de l'estimation précédente que

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow \infty} \left\| r_\sigma((F(\lambda))^4) \right\| = 0 \tag{6.3.5}$$

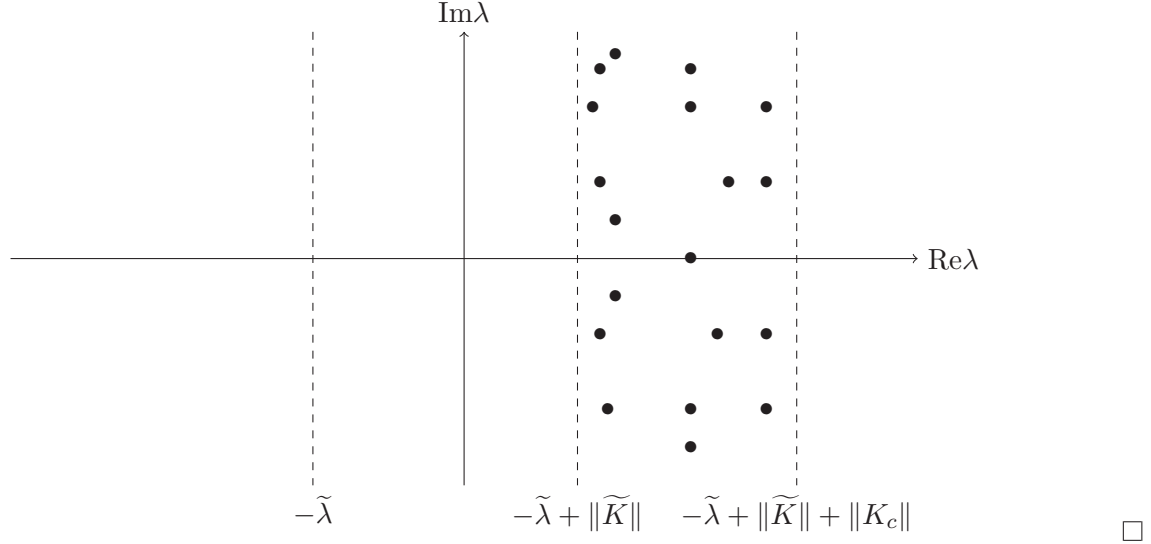
ce qui montre l'opérateur  $(I - F(\lambda)^4)^{-1}$  existe, pour tout  $\lambda_0 \in \mathbb{S}$  assez grand. En tenant compte du théorème de Gohberg-Smul'yan, on déduit que  $(I - F(\lambda))$  est inversible pour tout  $\lambda \in \mathbb{S}$  sauf pour un sous-ensemble dénombrable  $D$  contenu dans  $\mathbb{S}$ . En outre, comme  $I - (F(\lambda))^4 = (I - F(\lambda))(I + F(\lambda) + (F(\lambda))^2 + (F(\lambda))^3)$ , d'où, pour tout  $\lambda \in \mathbb{S} \setminus D$ , on a

$$(I - F(\lambda))^{-1} = (I + F(\lambda) + (F(\lambda))^2 + (F(\lambda))^3)(I - (F(\lambda))^4)^{-1}.$$

Par conséquent, pour tout  $\lambda \in \mathbb{S} \setminus D$  on a :

$$(\lambda - T_H - \widetilde{K} - K_c)^{-1} = (I + F(\lambda) + (F(\lambda))^2 + (F(\lambda))^3)(I - (F(\lambda))^4)^{-1}(\lambda - T_H - \widetilde{K})^{-1}.$$

Les points de  $D$  sont des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.



## 6.4 Problème d'évolution avec des conditions aux limites périodiques dans $L^p(\Omega \times V, dx dv)$ , $1 < p < +\infty$ .

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude du problème

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, v, t) = & -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, v, t) - \sigma(v)\varphi(x, v, t) + \int_V k_c(x, v, v')\varphi(x, v', t)dv' \\ & + \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_d^j(x, \rho_j, \omega, \omega')\varphi(x, \rho_j \omega', t)d\omega' \\ & + \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x, \rho, \omega, \omega')\phi(x, \rho \omega', t)d\omega' \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

avec la distribution initiale

$$\varphi(x, v, 0) = \varphi_0(x, v). \quad (6.4.2)$$

et soumis aux conditions aux limites (périodiques)

$$\varphi(x, v, t) |_{x_i=-a_i} = \varphi(x, v, t) |_{x_i=a_i}, \quad (6.4.3)$$

où  $\Omega = \prod_{i=1}^N (-a_i, a_i)$ ,  $a_i > 0, i = 1, \dots, N$ , est un pavé ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . L'ensemble  $V$  désigne l'espace des vitesse admissibles. On rappelle que la fréquence de collision  $\sigma(\cdot)$  est telle que

$$0 < \sigma(\cdot) \in L^\infty(V, dv), \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Les opérateurs de collisions  $K_c, K_e$  et  $K_d$  sont linéaires et bornés, i.e.

$$K_c \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V, dx dv)), \quad K_e, K_d \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}, dx p d\omega)).$$

On définit l'opérateur d'advection périodique  $T_p$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T_p) = W_{per}^p(\Omega \times V, dx dv), \\ T_p \varphi(x, v) = -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, v) - \sigma(v) \varphi(x, v) \end{cases}$$

où

$$W_{per}^p(\Omega \times V, dx dv) = \left\{ \varphi \in L^p(\Omega \times V, dx dv); \quad v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^p(\Omega \times V, dx dv) \text{ et} \right. \\ \left. \varphi|_{x_i=-a_i} = \varphi|_{x_i=a_i}, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Il est bien connu que  $T_p$  engendre un  $C_0$ -semi-groupe. Comme les opérateurs  $K_e + K_d$  et  $K_c + K_e + K_d$  sont bornés, par le théorème de perturbation de Phillips, les opérateurs  $T_p + K_e + K_d$  et  $T_p + K_c + K_e + K_d$  engendre les semi-groupes  $(e^{t(T_p + K_e + K_d)})_{t \geq 0}$  et  $(e^{t(T_p + K_c + K_e + K_d)})_{t \geq 0}$  respectivement.

Pour l'étude spectrale du semi-groupe  $(e^{t(T_p + K_c + K_e + K_d)})_{t \geq 0}$ , on rappelle que

$$e^{t(T_p + K_c + K_e + K_d)} = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t) = \sum_{i=0}^{n-1} V_i(t) + R_n(t)$$

où

$$V_0(t) = e^{t(T_p + K_e + K_d)} \quad \text{et} \quad V_{i+1}(t) = \int_0^t V_0(s) K_c V_i(t-s) ds.$$

Le reste d'ordre  $n$  de la série de Dyson-Phillips est donné par

$$R_n(t) = \sum_{i=n}^{\infty} V_i(t) = [e^{t(T_p + K_e + K_d)} K_c]^n * e^{t(T_p + K_e + K_d)}.$$

Le but de ce travail est d'établir la compacité du reste d'ordre 1 de la série de Dyson-Phillips,

$$R_1(t) = e^{t(T_p + K_c + K_e + K_d)} - e^{t(T_p + K_e + K_d)}.$$

On rappelle que s'il existe  $n \geq 1$  tel que  $R_n(t)$  est un opérateur compact, alors on a

$$\omega_{ess}(e^{t(T_p + K_c + K_e + K_d)}) = \omega_{ess}(e^{t(T_p + K_e + K_d)}).$$

En outre, si  $R_1(t)$  est compact, alors on a

$$\sigma_{ess}(e^{t(T_p + K_c + K_e + K_d)}) = \sigma_{ess}(e^{t(T_p + K_e + K_d)}).$$

On rappelle que  $K_c$  est un opérateur de collision régulier (voir la section précédente).

L'opérateur de collision élastique  $K_e$  est défini par

$$\begin{cases} K_e : L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}, dx d\rho d\omega) \longrightarrow L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}, dx d\rho d\omega) \\ \psi \longrightarrow \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x, \rho, \omega, \omega') \psi(x, \rho, \omega') d\omega'. \end{cases} \quad (6.4.4)$$

On introduit l'hypothèse suivante :

(A5) • pour tout  $\psi \in L^p(\mathbb{S}^{N-1}, d\omega)$ , l'ensemble

$$\left\{ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x, \rho, \omega, \omega') \psi(\omega') d\omega' : (x, \rho) \in \Omega \times I, \|\psi\|_{L^p(\mathbb{S}^{N-1}, d\omega)} \leq 1 \right\}$$

est relativement compact dans  $L^p(\mathbb{S}^{N-1}, d\omega)$ ;

• pour tout  $\psi' \in L^q(\mathbb{S}^{N-1}, d\omega)$ ,

$$\left\{ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x, \rho, \omega, \omega') \psi'(\omega) d\omega : (x, \rho) \in \Omega \times I \right\}$$

est relativement compact dans  $L^q(\mathbb{S}^{N-1}, d\omega)$ .

Sous l'hypothèse (A5), on a :

$$\|K_e\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}, dx d\rho d\omega))} = \text{ess-sup}_{(x, \rho) \in \Omega \times I} \|K_e(x, \rho)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{S}^{N-1}, d\omega))}. \quad (6.4.5)$$

$$\text{où } K_e(x, \rho) : \psi \in L^p(\mathbb{S}^{N-1}) \longrightarrow \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x, \rho, \omega, \omega') \psi(\omega') d\omega'.$$

Dans la suite, on utilise le résultat suivant dû à M. Sbihi [54].

**Lemme 6.4.1.** *Un opérateur de collisions élastiques satisfaisant (A5) peut être approché dans des opérateurs possédant un noyau de la forme*

$$k_e^i(x, \rho, \omega, \omega') = \sum_{i \in J} \alpha_i(x, \rho) f_i(\omega) g_i(\omega')$$

où  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega \times I)$ ,  $f_i \in L^p(\mathbb{S}^{N-1})$  et  $g_i \in L^q(\mathbb{S}^{N-1})$  où  $q = \frac{p}{p-1}$  et  $J$  est un ensemble d'indices fini.

On suppose que les noyaux  $k_d^j(\cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $j = 1, \dots, l$ , satisfont l'hypothèse (A1).

Maintenant, on est en mesure de montrer le résultat suivant :

**Théorème 6.4.1.** *Soit  $K_c$  un opérateur de collision régulier dans  $L^p(\Omega \times V, dx dv)$ . On suppose que les hypothèses (A1) et (A5) sont satisfaites. Si pour tout  $D$  borné contenu dans  $I \times \mathbb{S}^{N-1}$  tel que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_D e^{-ix \cdot \rho \omega} d\omega = 0, \quad (6.4.6)$$

alors, pour tout  $t \geq 0$ , l'opérateur  $R_1(t) = e^{t(T_p + K_e + K_d + K_c)} - e^{t(T_p + K_e + K_d)}$  est compact.

Avant de montrer ce résultat, on rappelle tout d'abord le développement des fonctions de  $L^2(\Omega \times V, dx dv)$  en séries de Fourier. Soit  $\varphi \in L^2(\Omega \times V, dx dv)$ , on peut écrire

$$\varphi(x, v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{\sqrt{2a}} \varphi_k(v) e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot x}$$

où  $\varphi_k(\cdot)$  est le coefficient de Fourier de  $\varphi$  d'ordre  $k$ , c'est-à-dire

$$\varphi_k(v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot x} \varphi(x, v) dx, \quad v \in V, \quad k \in \mathbb{Z}^N.$$

On note tout d'abord que le volume du pavé  $\Omega$  est donnée par

$$|\Omega| = 2 \prod_{i=1}^N a_i, \quad a_i > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Par convention, on pose

$$\sqrt{2a} = \sqrt{|\Omega|} = \prod_{i=1}^N \sqrt{2a_i} \quad \text{et} \quad \frac{k}{a} = \left( \frac{k_1}{a_1}, \dots, \frac{k_N}{a_N} \right), \quad (k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, N).$$

La formule de Parseval permet d'écrire

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega \times V, dx dv)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \|\varphi_k\|_{L^2(V, dv)}^2.$$

Le domaine de  $T_p$  est alors donné par

$$\mathcal{D}(T_p) := \left\{ \varphi(x, v) \in L^2(\Omega \times V, dx dv) : \varphi(x, v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{\sqrt{2a}} \varphi_k(v) e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot x}, \right. \\ \left. \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \left\| \frac{k}{a} \cdot v \varphi_k(v) \right\|_{L^2(V, dv)}^2 < \infty \right\},$$

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(T_p)$ ,  $T_p \varphi$  est donné par

$$T_p \varphi(x, v) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{\sqrt{2a}} (-i\pi \frac{k}{a} \cdot v - \sigma(v)) \varphi_k(v) e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot x}.$$

D'autre part, l'action du  $C_0$ -semi-groupe  $(U_0(t))_{t \geq 0}$  sur  $\varphi \in L^2(\Omega \times V, dx dv)$  est donnée par

$$U_0 \varphi(x, v) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{\sqrt{2a}} \varphi_k(v) e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot (x-vt)} e^{-\sigma(v)t}, \quad (x, v) \in \Omega \times V, t \geq 0.$$

**Preuve du Théorème 6.4.1** D'après le théorème 1.7.2(i), il suffit de montrer que pour tout  $t > 0$ ,

$$\int_0^t e^{(t-s)(T_p + K_e + K_d)} K_c e^{s(T_p + K_e + K_d)} ds \quad (6.4.7)$$

est compact. Comme  $K_c$  est régulier, il suffit d'établir la preuve pour un opérateur de collision  $K_c$  de la forme

$$K_c\varphi(x, v') := \alpha(x)f(v) \int_V g(v')\varphi(x, v')dv' \quad (6.4.8)$$

où  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  et les fonctions  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  sont positives, continues et à supports compacts.

En tenant compte du théorème 1.7.3, il suffit de prouver le résultat pour  $p = 2$ . On note que l'opérateur  $U_0K_c$  est défini par

$$U_0(t)K_c\varphi(x, v) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{\sqrt{2a}} \alpha(x)f(v) \left( \int_V g(v')e^{-\sigma(v')t} \varphi_k(v')e^{-i\pi \cdot \frac{k}{a} \cdot v't} dv' \right) e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot x}$$

où

$$\varphi_k(v') = \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot x} \varphi(x, v') dx, \quad v' \in V, \quad k \in \mathbb{Z}^N.$$

Par ailleurs, on peut exprimer  $(e^{t(T_p+K_e+K_d)})_{t \geq 0}$  à l'aide de la série de Dyson-Phillips relativement à  $(e^{tT_p})_{t \geq 0}$ , *i.e.*

$$e^{t(T_p+K_e+K_d)} = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t)$$

où

$$U_0(t) = e^{tT_p} \text{ et } U_{j+1}(t) = \int_0^t U_0(s)(K_e + K_d)U_j(t-s)ds.$$

Nous savons aussi que la suite  $K_c(\sum_{j=0}^n U_j(t))_n$  converge dans  $\mathcal{L}(L^2(\Omega \times V, dx dv))$  vers  $K_c e^{t(T_p+K_e+K_d)}$  uniformément borné en  $t$ . Il suffit donc de montrer que  $K_c \sum_{j=0}^n U_j(t)$  est compact pour tous  $j \in \mathbb{N}$ .

**Cas 1**  $j = 0$ . Dans ce cas, il suffit de montrer la compacité de  $K_c U_0(t)$  par le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, on est amené à montrer que, pour tout  $\mathfrak{B} \subset L^2(\Omega \times V, dx dv)$  est borné. Alors

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} \|\tau_h U_0(t)K_c\varphi - U_0(t)K_c\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (6.4.9)$$

La preuve de l'égalité (6.4.9) est similaire à celle du théorème 2.7 dans [40].

**Cas 2**  $j \geq 1$ . Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} K_c U_j &= K_c [U_0(K_e + K_d)]^j * U_0 \\ &= [K_c U_0 K_e * U_0 K_e + K_c U_0 K_e * U_0 K_d + K_c U_0 K_d * U_0 K_e + K_c U_0 K_d * U_0 K_d] * Z \end{aligned}$$

où  $Z = [U_0(K_e + K_d)]^{j-2} * U_0$ , il suffit de montrer que les opérateurs  $K_c U_0 K_e$  et  $K_c U_0 K_d$  sont compacts. D'abord, on commence de montrer la compacité de l'opérateur  $K_c U_0 K_e$ . En

raison du lemme 6.4.1 et l'équation (6.4.8), l'opérateur  $K_c U_0 K_e$  peut se factoriser comme suit

$$K_c U(t) K_e = \Theta_1 S(t)$$

En tenant compte du théorème 1.7.3, il suffit de démontrer le résultat pour  $p = 2$ . On définit les opérateurs suivants

$$\begin{aligned} \Theta_1 : \psi \in L^2(\Omega) &\rightarrow \alpha_1(x) f_1(v) \psi(x) \in L^2(\Omega \times V), \\ S(t) : \varphi \in L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) &\rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{\sqrt{2a}} \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\rho \omega) f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho \omega)t} e^{-i\pi \cdot \frac{k}{a} \cdot \rho \omega t} d\omega \right) \\ &\times \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_2(\omega') M_k[\varphi](\rho, \omega') d\omega' e^{i\pi \cdot \frac{k}{a} \cdot t} \in L^2(\Omega \times I) \end{aligned}$$

où

$$M_k[\varphi](\rho, \omega) := \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{\Omega} \alpha_2(x, \rho) \varphi(x, \rho \omega) e^{-i\pi \cdot \frac{k}{a} \cdot t} dx, \quad \omega \in \mathbb{S}^{N-1}, \rho \in I, k \in \mathbb{Z}^N. \quad (6.4.10)$$

Il suffit de montrer la compacité de  $S(t)$ . D'après le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, on est amené à montrer que, pour tout  $\mathfrak{B} \subset L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}, dx d\rho d\omega')$  est borné. Alors

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} \|\tau_h S(t) \varphi - S(t) \varphi\|_{L^2(\Omega \times I)} \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} \sup_{\rho \in I} \|\tau_h S(t)[\rho] \varphi - S(t)[\rho] \varphi\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (6.4.11)$$

Soit  $\varphi \in \mathfrak{B}$ . On pose

$$\psi_k(\rho) := \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_2(\omega') M_k[\varphi](\rho, \omega') d\omega' \quad (k \in \mathbb{Z}^N).$$

Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} \int_I |\psi_k(\rho)|^2 d\rho &= \int_I \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left( g_2(\omega') \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{\Omega} \alpha_2(x, \rho) \varphi(x, \rho \omega') dx \right) d\omega' \right|^2 d\rho \\ &\leq \int_I \left\{ \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |g_2(\omega')|^2 d\omega' \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left| \int_{\Omega} \alpha_2(x, \rho) \varphi(x, \rho \omega) dx \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 d\rho \\ &\leq \frac{\|\alpha_2\|_{L^\infty(\Omega \times I)}^2}{(\sqrt{2a})^2} \|g_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}^2 \int_I \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left( \int_{\Omega} |\varphi(x, \rho \omega)| dx \right)^2 d\omega \right) d\rho \\ &\leq \frac{\|\alpha_2\|_{L^\infty(\Omega \times I)}^2}{(\sqrt{2a})^2} \|g_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}^2 \int_I \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left( \int_{\Omega} I_\Omega(x) dx \right) \left( \int_{\Omega} |\varphi(x, \rho \omega)|^2 dx \right) d\omega \right) d\rho \\ &= \frac{\|\alpha_2\|_{L^\infty(\Omega \times I)}^2}{2a} \|g_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}^2 |\Omega| \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\psi_k\|_{L^2(I)} &\leq \frac{\|\alpha_2\|_{L^\infty(\Omega \times I)}}{\sqrt{2a}} \|g_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})} \sqrt{|\Omega|} \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})} \\ &= \|\alpha_2\|_{L^\infty(\Omega \times I)} \|g_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})} \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})}. \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

Par l'identité de Parseval

$$\begin{aligned} \sup_{\rho \in I} \|\tau_h S(t)[\rho]\varphi - S(t)[\rho]\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{\sqrt{2a}} (e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot h} - 1) \psi_k \sup_{\rho \in I} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\omega) [\rho] f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot x} \right|^2 dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \left| e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot h} - 1 \right|^2 |\psi_k|^2 \sup_{\rho \in I} \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\omega) [\rho] f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2. \end{aligned}$$

Soit  $N_0 \in \mathbb{N}$ . Selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{\left|\frac{k}{a}\right| \leq N_0} \left| e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot h} - 1 \right|^2 |\psi_k|^2 \sup_{\rho \in I} \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\omega) [\rho] f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2 \\ &\leq 4 \sup_{\left|\frac{k}{a}\right| \leq N_0} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{a} \cdot h\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} |\psi_k|^2 \sup_{\rho \in I} \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\omega) [\rho] f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2 \\ &\leq 4 \sup_{\left|\frac{k}{a}\right| \leq N_0} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{a} \cdot h\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} |\psi_k|^2 \sup_{\rho \in I} \left\{ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |g_1(\omega) [\rho]| |f_2(\omega)| d\omega \right\}^2 \\ &\leq 4 \sup_{\left|\frac{k}{a}\right| \leq N_0} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{a} \cdot h\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} |\psi_k|^2 \sup_{\rho \in I} \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |g_1(\omega) [\rho]|^2 d\omega \right) \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |f_2(\omega)|^2 d\omega \right) \\ &= 4 \sup_{\left|\frac{k}{a}\right| \leq N_0} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{a} \cdot h\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} |\psi_k|^2 C_g \|f_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}^2 \end{aligned}$$

où

$$C_g := \sup_{\rho \in I} \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |g_1(\omega) [\rho]|^2 d\omega \right).$$

Maintenant, en utilisant l'équation (6.4.12), on peut écrire

$$\begin{aligned} &\sum_{\left|\frac{k}{a}\right| \leq N_0} \left| e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot h} - 1 \right|^2 |\psi_k|^2 \sup_{\rho \in I} \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\rho\omega) f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2 \\ &\leq 4 \sup_{\left|\frac{k}{a}\right| \leq N_0} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{a} \cdot h\right) \right|^2 \|\alpha_2\|_{L^\infty(\Omega \times I)}^2 \|g_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}^2 \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})}^2 C_g \|f_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}^2 \end{aligned}$$



Comme  $\mathfrak{B}$  est borné, il est clair que lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $\left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{a} \cdot h\right) \right| \rightarrow 0$  et donc on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} \sup_{\rho \in I} \sum_{\left| \frac{k}{a} \right| \leq N_0} \left| e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot h} - 1 \right|^2 |\psi_k|^2 \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\rho\omega) f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2 = 0. \quad (6.4.13)$$

On suppose que  $\frac{k}{a} \geq N_0$ , on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\left| \frac{k}{a} \right| \geq N_0} \left| e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot h} - 1 \right|^2 |\psi_k|^2 \sup_{\rho \in I} \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\omega) [\rho] f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2 \\ & \leq 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} |\psi_k|^2 \sup_{\left| \frac{k}{a} \right| \geq N_0} \|f_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}^2 \sup_{\rho \in I} \left| \int_{\text{supp}(g_1)} g_1(\omega) [\rho] e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2. \end{aligned}$$

En outre, en utilisant l'équation (6.4.12), on peut écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{\left| \frac{k}{a} \right| \geq N_0} \left| e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot h} - 1 \right|^2 |\psi_k|^2 \sup_{\rho \in I} \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\omega) [\rho] f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2 \\ & \leq 4 \|g_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}^2 \|\alpha_2\|_{L^\infty(\Omega \times I)}^2 \|\varphi\|^2 \|f_2\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}^2 \sup_{\rho \in I} \left| \int_{\text{supp}(g_1)} g_1(\omega) [\rho] e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2 \end{aligned}$$

Comme  $\text{Supp } g_1$  est compact et  $g_1(\omega) [\rho] e^{-\sigma(\rho\omega)t} d\omega$  est absolument continue par rapport à  $d\omega$ , l'hypothèse 6.4.6 implique que

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} \sup_{\left| \frac{k}{a} \right| \geq N_0} \sum_{\left| \frac{k}{a} \right| \geq N_0} \sup_{\rho \in I} \left| \int_{\text{supp}(g_1)} g_1(\omega) [\rho] e^{-\sigma t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2 = 0. \quad (6.4.14)$$

Comme  $\mathfrak{B}$  est borné, en utilisant l'équation (6.4.14), on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \sup_{h \in \mathbb{R}^N} \sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} \sup_{\rho \in I} \sum_{\left| \frac{k}{a} \right| \geq N_0} \left| e^{i\pi \frac{k}{a} \cdot h} - 1 \right|^2 |\psi_k|^2 \\ & \quad \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g_1(\omega) [\rho] f_2(\omega) e^{-\sigma(\rho\omega)t} e^{-i\pi \frac{k}{a} \cdot \rho\omega t} d\omega \right|^2 = 0. \quad (6.4.15) \end{aligned}$$

Ensuite, en tenant compte des équations (6.4.13) et (6.4.15), on déduit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} \|\tau_h S(t)\varphi - S(t)\varphi\|_{L^2(\Omega \times I)} = 0.$$

Ceci permet de conclure que  $K_c U_0 K_e$  est compact.

Pour compléter la démonstration, il suffit d'établir que l'opérateur  $K_c U_0 K_d$  est compact. En effet, selon la condition (A1), l'opérateur  $K_d$  est borné, en tenant compte du résultat du cas  $j = 0$ , on voit que  $K_c U_0$  est compact et donc l'opérateur  $K_c U_0 K_d$  est compact sur  $L^2(\Omega \times V, dx dv)$ .

---

Enfin, par interpolation (voir théorème 1.7.3),  $e^{t(T_p+K_c+K_e+K_d)} - e^{t(T_p+K_e+K_d)}$  est compact sur  $L^p(\Omega \times V, dx dv)$  pour tout  $p \in (1, +\infty)$ . Ceci achève la démonstration.  $\square$

Comme conséquence immédiate du théorème 6.4.1, on a :

**Corollaire 6.4.1.** *Si les conditions (A1) et (A5) sont satisfaites, alors pour tout  $t \geq 0$  on a  $\sigma_{ess}(e^{t(T_p+K_c+K_e+K_d)}) = \sigma_{ess}(e^{t(T_p+K_e+K_d)})$ . En particulier,*

$$\omega_{ess}(e^{t(T_p+K_c+K_e+K_d)}) = \omega_{ess}(e^{t(T_p+K_e+K_d)}).$$

**Remarque finale.**

Pour le problème d'évolution, il reste à traiter le cas de l'espace  $L^1(\Omega \times V, dx dv)$ . Il s'agit d'un travail en cours. On pense qu'on a la faible compacité du Reste d'ordre deux de la série de Dyson-Phillips. Pour les applications et en particulier pour l'analyse du comportement asymptotique (pour les grands temps) de la solution du problème du Cauchy (6.4.1)-(6.4.3), ce résultat est amplement suffisant car il entraîne le fait que le semi-groupe  $(e^{t(T_p+K_e+K_d)})_{t \geq 0}$  et le semi-groupe  $(e^{t(T_p+K_c+K_e+K_d)})_{t \geq 0}$  ont le même type essentiel.



# Bibliographie

- [1] A. Al-Izeri and K. Latrach. On an evolution equation modeling age structured cell populations with inherited properties. *Mediterr. J. Math*, 13 :1571–1587, 2016.
- [2] A. Al-Izeri and K. Latrach. Well-posedness of a nonlinear model of proliferating cell populations with inherited cycle length. *Acta Math. Sci. Eng. Ser*, 36(5) :1225–1244, 2016.
- [3] J. Appell. The superposition operator in function spaces – a survey. *Expo. Math*, (6) :209–270, 1988.
- [4] J. Appell and P. P. Zabrejko. *Nonlinear Superposition Operators, Cambridge Tracts in Mathematics*. vol. 95. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [5] J. Banas and Z. Knap. Measure of weak noncompactness and nonlinear integral equations of convolution type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 146 :353–362, 1990.
- [6] V. Barbu. *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*. Springer, Berlin, 2010.
- [7] V. Barbu and M. Iannelli. The semigroup approach to non-linear age-structured equations. *Rend. Istit. Univ. Trieste*, 28 :59–71, 1997.
- [8] Ph. Bénilan, M. G. Crandall, and A. Pazy. Evolution equations governed by accretive operators, (forthcoming).
- [9] M. Boulanouar. Transport equations in cell population dynamics i-ii. *Electron. J. Differential Equations*, 144 :40 pp, 2010.
- [10] M. Boulanouar. A mathematical analysis of a model of structured population (i). *Differential Integral Equations*, 25 :821–852, 2012.
- [11] M. Boulanouar. A mathematical analysis of a model of structured population (ii). *J. Dyn. Control Syst*, 18 :499–527, 2012.
- [12] M. Boumhamdi, K. Latrach, and A. Zeghal. Existence results for a nonlinear version of rotenberg model with infinite maturation. *Math. Methods Appl. Sci*, 38 :1795–1807, 2015.

- 
- [13] M. Cessenat. Théorèmes de trace  $l^p$  pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 299(16) :831–834, 1984.
- [14] M. Cessenat. Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 300(3) :89–92, 1985.
- [15] A. Dehici, A. Jeribi, and K. Latrach. Spectral analysis of a transport operator arising in growing cell populations. *Acta. Appl. Math*, 92 :37–62, 2006.
- [16] C. Van der Mee and P. Zweifel. A fokker-plank equation for growing cell populations. *J. Math. Biol*, 25 :61–72, 1987.
- [17] J. Dieudonné. Sur les espaces de khöthe. *J. Anal. Math*, 1 :8–115, 1951.
- [18] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators : Part I*. Intersciences, New York, 1958.
- [19] K.-J. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equation*. Springer, York Berlin Heidelberg, 1999.
- [20] M. A. Krasnosel'skii et al. *Integral Operators in Space of Summable Functions*. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.
- [21] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler. *Banach Spaces Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. Springer Verlag, New York, 2011.
- [22] D. De Figueiredo and L. Karlovitz. On the radial projection in normed spaces. *Bull. Amer. Math. Soc*, 73 :364–368, 1967.
- [23] J. Garcia-Falset. Well-posedness of a nonlinear evolution equation arising in growing cell population. *Math. Methods. Appl. Sci*, 34 :1658–1666, 2011.
- [24] J. Garcia-Falset, K. Latrach, and A. Zeghal. Existence and uniqueness results for a nonlinear evolution equation arising in growing cell populations. *Nonlinear. Anal*, 97 :210–227, 2014.
- [25] W. Greenberg, C. Van der Mee, and V. Protopopescu. *Boundary Value Problems in Abstract Kinetic Theory*. Birkhäuser, 1987.
- [26] A. Jeribi. A nonlinear problem arising in the theory of growing cell populations. *Nonlinear Anal. Real World Appl*, 3 :85–105, 2002.
- [27] K. Jörgens. An asymptotic expansion in the theory of neutron transport. *Comm. Pure and Appl. Math*, XI :219–242, 1958.
- [28] K. Jörgens. *Linear Integral Operators*. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.
- [29] H. G. Kaper, C. G. Lekkerkerker, and J Hejtmanek. *Spectral methods in linear transport theory*. Operator Theory (Birkhäuser), 1982.
- [30] Edward W. Larsen and Paul F. Zweifel. On the spectrum of the linear transport operator. *J. Mathematical Phys*, 15 :1987–1997, 1974.
- [31] K. Latrach. On a nonlinear stationary problem arising in transport theory. *J. Math. Phys*, 37 :1336–1348, 1996.
- [32] K. Latrach. Compactness results for transport equations and applications. *Math. Models Methods Appl. Sci*, 11 :1181–1202, 2001.

- 
- [33] K. Latrach and A. Jeribi. A nonlinear boundary value problem arising in growing cell populations. *Nonlinear Anal*, 36 :843–862, 1999.
- [34] K. Latrach and M. Mokhtar-Kharroubi. On an unbounded linear operator arising in the theory of growing cell population. *J. Math. Anal. Appl*, 211 :273–294, 1997.
- [35] K. Latrach and M. A. Taoudi. Existence results for a generalized nonlinear hammerstein equation on  $l^1$ -spaces. *Nonlinear Anal*, 66 :2325–2333, 2007.
- [36] K. Latrach, M A. Taoudi, and A. Zeghal. On the solvability of a nonlinear boundary value problem arising in the theory of growing cell populations. *Math. Methods Appl. Sci*, 28 :991–1006, 2005.
- [37] K. Latrach, M A. Taoudi, and A. Zeghal. Some fixed point theorems of the schauder and krasnosel’skii type and application to nonlinear transport equations. *J. Differential. Equations*, 221 :256–271, 2006.
- [38] K. Latrach and A. Zeghal. Existence results for a boundary value problem arising in growing cell populations. *Math. Models Methods Appl. Sci*, 13 :1–17, 2003.
- [39] J. L. Lebowitz and S. I. Rubinow. A theory for the age and generation time distribution of a microbial population. *J. Math. Biol*, 1 :17–36, 1974.
- [40] B. Lods. *Théorie spectrale des équations cinétiques*. Thèse de Doctorat de l’université de Franche-Comté, Besançon, 2002.
- [41] B. Lods. On linear kinetic equations involving unbounded cross-section. *Math. Methods Appl. Sci*, 27 :1049–1075, 2004.
- [42] B. Lods and M. Mokhtar-Kharroubi. On the theory of a growing cell population with zero minimum cycle length. *J. Math. Anal. Appl*, 266 :70–99, 2002.
- [43] T. Matsumoto and S. Oharu. Semilinear evolution equation with nonlinear constraints and applications. *J. Evol. Equ*, 2 :197–222, 2002.
- [44] P. Mayer-Niберг. *Banach Lattices*. Springer Verlag, 1991.
- [45] M. Mokhtar-Kharroubi. Time asymptotic behaviour and compactness in transport theory. *European J. Mech. B Fluids*, 11 :39–68, 1992.
- [46] M. Mokhtar-Kharroubi. Mathematical topics in neutron transport theory new aspects. *World Sci. Series on advances in Mathematics for applied Sciences Vol*, 46, 1997.
- [47] M. Mokhtar-Kharroubi. Optimal spectral theory of the linear boltzmann equation. *J. Funct. Anal*, 226 :21–47, 2005.
- [48] M. Schechter. *Spectra of Partial Differential Operators*. North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [49] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York,, 1983.
- [50] B. Perthame. *Transport equations in biology*. Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [51] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Academic Press, New York-London, 1972.

- 
- [52] M. Rotenberg. Transport theory for growing cell populations. *J. Theor. Biol*, 103 :181–199, 1983.
- [53] M. Sbihi. *Analyse Spectrale De Modèles Neutroniques*. Thèse de Doctorat de l’université de Franche-Comté, Besançon, 2005.
- [54] M. Sbihi. Spectral theory of neutron transport semigroups with partly elastic collision operators. *J. Math. Phys*, 47 :123502, 12 pp, 2006.
- [55] G. Schluchtermann. On weakly compact operators. *Math. Ann*, 292 :263–266, 1992.
- [56] C. N. Shanthidevi, T. Matsumoto, and S. Oharu. Nonlinear semigroup approach to age structured proliferating cell population with inherited cycle length. *Nonlinear Anal. Real World Appl*, 9 :1905–1917, 2008.
- [57] I. Vidav. Existence and uniqueness of nonnegative eigenfunctions of the boltzmann operator. *J. Math. Anal. Appl*, 22 :144–155, 1968.
- [58] J. Voigt. A perturbation theorem for the essential spectral radius of strongly continuous semigroups. *Mh. Math*, 90 :153–161, 1980.
- [59] G. F. Webb. A model of proliferating cell populations with inherited cycle length. *J. Math. Biol*, 23 :269–282, 1986.
- [60] G. F. Webb. Dynamic of structured populations with inherited properties. *Compt. Math. Appl*, 13 :749–757, 1987.
- [61] L. Weis. A generalization of the vidav-jorgens perturbation theorem for semigroup and its application to transport theory. *J. Math. Anal. Appl*, 129 :6–23, 1988.
- [62] E. Zeidler. *Nonlinear Functional analysis and its Applications I : Fixed-Point Theorems*. Springer-Verlag : New York, 1993.

---

## Analyse mathématique de quelques équations intervenant en dynamique des populations et en cinétique des gaz

**Résumé** Les travaux présentés dans cette thèse portent sur l'analyse mathématique de quelques équations intervenant en dynamique des populations et en cinétique des gaz. On s'est intéressé tout d'abord à une version non linéaire d'un modèle dû à Lebowitz et Rubinow en 1974 pour décrire une population cellulaire. On a établi des résultats d'existence et d'unicité aussi bien les solutions au sens de Bénilan que les solutions fortes du problème d'évolution correspondant. Cette analyse a été étendue ensuite à une perturbation de ce modèle par un opérateur non linéaire et pour des conditions aux limites locales et non locales. Cette partie a été complétée par l'étude des résultats d'existence des solutions du problème stationnaire correspondant. Le second volet de ce travail traite de l'existence des solutions d'une version non linéaire stationnaire d'un modèle dû à Rotenberg en 1983. Le dernier chapitre de ce travail a été consacré à l'analyse spectrale d'une équation de transport neutronique faisant intervenir des opérateurs de collision élastiques et inélastiques. Le problème d'évolution correspondant ainsi que le comportement asymptotique (pour les grands temps) de la solution ont été considérés pour des conditions aux limites périodiques.

**Mots-clés** Équations d'évolution, opérateur  $m$ -accréatif, solution au sens de Bénilan, solution forte, opérateur de transport, dynamique des populations.

## Mathematical analysis of some equations arising in the dynamics of populations and the kinetic of gas

**Abstract** The work presented in this thesis deals with the mathematical analysis of some equations arising in the dynamics of populations and the kinetic of gas. First, we focused on a non-linear version of a model introduced by Lebowitz and Rubinow in 1974 to describe a cells population. We discussed the existence and the uniqueness of solutions of both Bénilan's solution and strong solutions to the corresponding evolution equation. This analysis was subsequently extended to a perturbation of this model by a nonlinear operator for local and non-local boundary conditions. This part was supplemented by the study of existence of solutions to the corresponding stationary problem. In chapter 5, we discuss the existence of solutions to a stationary nonlinear version of a model describing the evolution of a cells population introduced by Rotenberg in 1983. The last chapter of this work is devoted to the spectral analysis of a neutron transport equation involving elastic and inelastic collision operators. The corresponding evolution problem as well as the asymptotic behavior (for large times) of the solution was considered for periodic boundary conditions.

**Keywords** Equations of evolution,  $m$ -accretive operator, solution in the sense of Bénilan, strong solution, transport operator, dynamic of populations.