



**HAL**  
open science

# Commande modale de robots parallèles à câbles flexibles

Xavier Weber

► **To cite this version:**

Xavier Weber. Commande modale de robots parallèles à câbles flexibles. Automatique / Robotique. Université de Strasbourg, 2016. Français. NNT : 2016STRAD026 . tel-01544522

**HAL Id: tel-01544522**

**<https://theses.hal.science/tel-01544522>**

Submitted on 21 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**École doctorale MSII**

ICube - UMR 7357

**THÈSE** présentée par :  
**Xavier WEBER**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/S spécialité : **SIAR - Robotique**

soutenue le : **11 Juillet 2016**

**Commande modale de robots parallèles à câbles flexibles**

*Directeur de thèse*

**Jacques GANGLOFF** Professeur, Université de Strasbourg

*Encadrant*

**Loïc CUVILLON** Maître de Conférences, Université de Strasbourg

*Rapporteurs*

**Jean-Pierre MERLET** Directeur de Recherche, INRIA

**Stéphane CARO** Chargé de Recherche, IRCCyN

*Examineurs*

**Nicolas ANDREFF** Professeur, FEMTO-ST

**Marc GOUTTEFARDE** Chargé de Recherche, LIRMM

**Jacques GANGLOFF** Professeur, ICube



# Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement tous ceux qui ont contribué à rendre possible et agréable l'expérience de la recherche qui a mené à la rédaction du présent document.

Sans hiérarchie particulière, je souhaite remercier particulièrement mes encadrants, mon jury, mes collègues, mes proches et mes étudiants.

Merci à Pierre de m'avoir présenté la recherche lors de mon premier stage au laboratoire, ce qui m'a motivé à poursuivre.

Merci à Jacques de m'avoir donné ma chance, de m'avoir fait confiance et d'avoir fait preuve de sincérité tout le long de notre travail. Merci pour ton implication sans faille et pour le respect que tu as témoigné concernant mes opinions ou mes propositions. Nos échanges ont été très enrichissants pour ma part, et j'espère aussi pour la tienne. Ton travail, parfois ingrat, sur les différents outils permettant de construire et programmer nos robots à câbles a été essentiel, et servira encore à beaucoup d'autres.

Merci à Loïc pour son soutien et ses efforts. Ton sens avancé du détail nous a été salutaire à plusieurs reprises. Ton humilité et ton investissement personnel te font unanimement apprécier par tes collègues et tes étudiants. Merci pour ton aide et ta confiance pour mener nos enseignements communs. Cette expérience m'a beaucoup plu, au point de faire un service complet d'ATER cette année, malgré les mises en garde sur la charge de travail associée.

Merci à Édouard, Iulia et Adlane pour leur accueil, leurs conseils et leur bienveillance. Merci également à Bernard, Vincent, Dominique, Nicole, Michel et tous les autres pour les enseignements que nous avons pu mener ensemble dans les meilleures conditions possibles.

Merci à Champimilien pour son travail sur le firmware EV3.14 qui améliore les performances de nos robots.

Merci à Laurence pour son enthousiasme à mener les essais de traction dont j'avais besoin.

Merci à François et Arnaud pour leur aide sur la mécanique et le prototypage rapide.

Merci à mes collègues doctorants et stagiaires pour tous les excellents moments passés ensemble. Les discussions autour d'un café, les conseils, les petits coups de main, les encouragements ont beaucoup compté pour moi. Grâce à vous, j'ai pu vraiment apprécier mon expérience au laboratoire, à l'IRCAD comme à Illkirch.

Merci aux permanents, ingénieurs de recherche et enseignants chercheurs, d'avoir pris le temps de répondre à mes nombreuses questions.

Un grand merci également aux rapporteurs, Jean-Pierre Merlet et Stéphane Caro, d'accepter de se charger de la tâche pénible de relire mon travail. J'espère que vous trouverez sa lecture plus agréable que sa rédaction. Merci aux examinateurs, Nicolas Andreff et Marc Gouttefarde, pour nos échanges antérieurs, et pour votre participation au jury.

Merci à tous mes étudiants pour s'être montrés indulgents envers un enseignant débutant, et souvent intéressés par ce que j'essayais d'expliquer. J'ai beaucoup aimé l'enseignement durant ma thèse, et c'est aussi grâce à vous.

Merci à ma famille de n'avoir pas trop mal pris que je ne fasse pas un « vrai travail » tout de suite après mon diplôme d'ingénieur, et de n'avoir pas cessé de m'encourager par la suite. Merci d'être présents pour les moments importants.

Mes remerciements tous particuliers à Merlène, qui m'a accompagné du début à la fin de la thèse, et qui m'accompagnera j'espère encore longtemps pour la suite. Tu as été là à tous les instants, et tu as été la victime consentante de tous mes moments de doute, de lassitude et de colère. Ce travail, je l'ai surtout fait pour toi, qui est une vraie passionnée de la recherche. J'espère qu'à ton tour, tu pourras réaliser les projets dont tu rêves.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>4</b>
1.1 Définitions . . . . .	5
1.1.1 Mécanisme parallèle . . . . .	5
1.1.2 Robot parallèle à câbles . . . . .	5
1.1.3 Robots pleinement contraints et suspendus . . . . .	6
1.2 Applications . . . . .	8
1.3 Modélisation géométrique et mécanique . . . . .	13
1.3.1 Modélisation et notations . . . . .	13
1.3.2 Comportement des câbles . . . . .	14
1.3.3 Statique du robot à câbles . . . . .	15
1.3.4 Problème géométrico-statique . . . . .	16
1.4 Espaces de travail . . . . .	16
1.4.1 Problématique . . . . .	16
1.4.2 Définitions . . . . .	17
1.4.3 Méthodes de conception . . . . .	18
1.5 Commande et dynamique . . . . .	18
1.5.1 Robot sur-contraint . . . . .	19
1.5.2 Robot sous-contraint . . . . .	20
1.6 Rigidité et Vibrations . . . . .	20
1.7 Commande pour le rejet de vibrations . . . . .	22
<b>2 Modélisation</b>	<b>24</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Loi de mouvement d'un robot parallèle à câbles avec roues à inertie . . . . .	25
2.2.1 Notations . . . . .	26
2.2.2 Notions de mécanique utilisées . . . . .	27
2.2.3 Cas de l'effecteur sans roues à inertie . . . . .	28
2.2.4 Cas d'un robot à câbles muni d'une seule roue à inertie . . . . .	29
2.2.5 Cas d'un robot à câbles muni de plusieurs roues à inertie . . . . .	34
2.2.6 Modélisation du robot parallèle à câbles . . . . .	35
2.3 Modélisation des câbles . . . . .	38

2.3.1	Hypothèses	38
2.3.2	Problème de la portion de câble enroulée	39
2.3.3	Modèle élastique linéaire	39
2.4	Analyse des vibrations	40
2.4.1	Hypothèses	41
2.4.2	Linéarisation du modèle dynamique	41
2.4.3	Analyse Modale	45
2.5	Amortissement actif de vibrations	47
2.5.1	Fonction de transfert dans l'espace modal	47
2.5.2	Fonction de transfert en boucle ouverte du système complet	48
<b>3</b>	<b>Plateforme expérimentale</b>	<b>50</b>
3.1	Introduction	51
3.2	Ressources utilisées	51
3.2.1	Mécatronique embarquée	51
3.2.2	Logiciel	53
3.3	Commande des moteurs embarqués	55
3.3.1	Moteurs utilisés	55
3.3.2	Identification des moteurs	56
3.3.3	Asservissement en position	57
3.3.4	Limitation du courant dans l'asservissement	58
3.3.5	Anti-saturation	58
3.4	Mesure des vitesses opérationnelles	59
3.5	Mesure de la pose	60
3.6	Caractérisation des câbles utilisés	60
3.7	Simulation du robot complet	62
3.7.1	Simulation mécanique	62
3.7.2	Simulation des capteurs	63
3.7.3	Simulation des actionneurs	64
3.7.4	Calcul de la commande de rejet de vibrations	65
<b>4</b>	<b>CaWiRo : Robot plan équipé de deux roues à inertie</b>	<b>66</b>
4.1	Introduction	67
4.2	Plateforme CaWiRo	67
4.2.1	Description	67
4.3	Caractéristiques vibratoires	70
4.4	Commande	73
4.4.1	Identification	73
4.4.2	réglage des correcteurs	74
4.5	Stabilisation	76
4.5.1	Simulation	76
4.5.2	Expériences	76
4.6	Conclusion	80
<b>5</b>	<b>CoMiRo : Robot à 8 câbles et 6 degrés de liberté</b>	<b>82</b>
5.1	Introduction	83
5.2	Plateforme CoMiRo	83
5.2.1	Description	83
5.2.2	Contrôleur	88
5.2.3	Gestion du mouvement	92

5.3	Caractéristiques vibratoires . . . . .	93
5.4	Expériences de stabilisation . . . . .	94
5.4.1	Stabilisation avec correcteurs fixes . . . . .	95
5.4.2	Stabilisation avec adaptation des gains . . . . .	95
5.4.3	Stabilisation en mouvement avec adaptation des gains . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>102</b>
6.1	Synthèse . . . . .	102
6.2	Perspectives . . . . .	105
6.2.1	Effecteur intégré . . . . .	105
6.2.2	Applications . . . . .	105
	<b>Bibliographie</b>	<b>107</b>
<b>A</b>	<b>Démonstrations</b>	<b>II</b>
A.1	Linéarisation du modèle dynamique : détails du calcul . . . . .	II
<b>B</b>	<b>Code Matlab</b>	<b>IV</b>
B.1	Code d'asservissement RST d'un moteur en position . . . . .	IV
B.2	Code du calcul de la commande moteurs d'amortissement actif de vibrations	V
<b>C</b>	<b>Liste des acronymes</b>	<b>XII</b>
<b>D</b>	<b>Glossaire</b>	<b>XIII</b>
<b>E</b>	<b>Liste des symboles</b>	<b>XIV</b>



# Liste des figures

1.1	Exemple de robot pleinement contraint . . . . .	7
1.2	Exemple de robot suspendu . . . . .	7
1.3	Skycam . . . . .	8
1.4	Prototype du robot suspendu NIST Robocrane . . . . .	9
1.5	radio-télescope FAST en Chine . . . . .	10
1.6	Schéma de principe du télescope LAR incluant un robot parallèle à câbles suspendu à un ballon . . . . .	11
1.7	Robot INCA-6D de Haption avec son ordinateur de commande . . . . .	11
1.8	Prototype d'un robot de la série IPAnema conçu pour la manipulation rapide . . . . .	12
1.9	Robot suspendu CoGiRo à 8 câbles et 6 degrés de liberté au LIRMM à Montpellier . . . . .	13
1.10	Notations pour la modélisation d'un robot à câbles . . . . .	14
2.1	Schéma d'un CDPR à plusieurs roues à inertie . . . . .	26
2.2	Notations pour le calcul dynamique . . . . .	30
2.3	Notations pour le modèle géométrique . . . . .	36
2.4	Schéma bloc pour la réjection de vibrations . . . . .	48
3.1	Pièces de la collection Lego Mindstorms (arstechnica.com) . . . . .	52
3.2	Principe général de RPIt . . . . .	54
3.3	Essais de traction sur des câbles polymères . . . . .	61
3.4	Essai de traction sans rupture sur le câble Shimano avec plusieurs cycles . . . . .	62
3.5	Diagramme Simulink de la modélisation mécanique de l'effecteur . . . . .	63
3.6	Diagramme Simulink de la modélisation mécanique d'un câble . . . . .	63
3.7	Diagramme Simulink de la modélisation d'une centrale inertielle . . . . .	64
3.8	Diagramme Simulink de la modélisation d'un moteur . . . . .	65
4.1	Schéma du CaWiRo muni de deux roues à inertie . . . . .	67
4.2	Dispositif de roue libre du CaWiRo . . . . .	68
4.3	Photo légendée de l'effecteur du CaWiRo . . . . .	69
4.4	Réglage d'un correcteur discret pour un mode à l'aide du lieu des racines . . . . .	75
4.5	Amortissement actif en simulation du CaWiRo . . . . .	77
4.6	Amortissement actif en translation autour de Z . . . . .	78
4.7	Amortissement actif en translation autour de Y . . . . .	79
4.8	Amortissement actif en rotation autour de X . . . . .	79
4.9	Amortissement actif en rotation autour de Z . . . . .	80
5.1	Schéma du CoMiRo avec ses dimensions et repères . . . . .	84
5.2	Photo légendée du CoMiRo . . . . .	85
5.3	Photo légendée du MiCaRo . . . . .	86

5.4	Réglage d'un correcteur continu pour un mode à l'aide du lieu des racines .	91
5.5	Amortissement actif du mode 2 en réponse à une sollicitation du mode 2 . .	95
5.6	Amortissement actif du mode 2 en réponse à une sollicitation du mode 2 en simulation . . . . .	96
5.7	Essai d'amortissement actif dans l'espace modal pour une sollicitation simultanée des modes 1 et 3 du CoMiRo en position (2) . . . . .	97
5.8	Réponses amorties des vitesses modales du CoMiRo en simulation avec gains adaptés . . . . .	98
5.9	Réponses amorties des vitesses modales du CoMiRo en simulation avec correcteurs fixes . . . . .	99
5.10	Réponses libres des vitesses modales du CoMiRo en mouvement avec sollicitation de tous les modes . . . . .	100
5.11	Réponse activement amorties des vitesses modales du CoMiRo en mouvement avec sollicitation de tous les modes . . . . .	101

# Liste des tableaux

1.1	Modèles de câbles . . . . .	15
3.1	Fonctions de transfert entre tension en % et vitesse en $\text{rad s}^{-1}$ identifiées des moteurs Lego . . . . .	57
4.1	Modes et fréquences naturels du CaWiRo . . . . .	72
4.2	Comparaison des fréquences naturelles ( $\text{rad s}^{-1}$ ) entre théorie et prototype . . . . .	72
4.3	Caractéristiques des fonctions de transfert identifiées . . . . .	74
4.4	Comparaison des amplitudes maximales de vibrations sur le CaWiRo . . . . .	77
4.5	Comparaison des valeurs efficaces des vibrations sur le CaWiRo . . . . .	78
5.1	Modes et fréquences naturels du CoMiRo . . . . .	94
5.2	Valeurs efficaces des vitesses modales en $10^{-2}\text{ms}^{-1}$ . . . . .	97

# Introduction

Cette thèse s'intitule « Commande modale de robots parallèles à câbles flexibles ». Elle a été préparée sous la direction de Jacques Gangloff, professeur à l'Université de Strasbourg, et avec l'encadrement du Docteur Loïc Cuvillon, au sein de l'équipe Automatique, Vision et Robotique (AVR) du laboratoire ICube de Strasbourg.

Les **Robots Parallèles à Câbles (RPC)** ou *Cable-Driven Parallel Robot* sont des robots possédant un effecteur relié à une base uniquement à l'aide de câbles, dont il est possible de modifier la longueur, voire la position d'attache.

Cette architecture particulière leur confère des caractéristiques différentes d'autres gammes de robots. Ils sont ainsi naturellement légers, peu gourmands en énergie, capables de mouvements très rapides, peu dangereux pour les personnes grâce à la légèreté des pièces en mouvement, et peu coûteux à fabriquer. Il est également possible de construire de très grands **RPCs** sans difficulté, puisqu'il s'agit simplement de modifier la longueur des câbles et la structure de la base pour agrandir le volume que peut atteindre le robot.

Cependant, plusieurs difficultés limitent l'adoption massive de ces robots très prometteurs dans la pratique. Un câble n'est capable d'exercer qu'un effort de traction. Les câbles doivent ainsi être maintenus sous une tension positive en permanence pour supporter l'effecteur, faute de quoi le comportement mécanique du robot devient fortement non linéaire. Des câbles antagonistes supplémentaires peuvent être ajoutés pour assurer le maintien sous tension de l'ensemble des câbles, mais c'est souvent au détriment de l'encombrement de l'espace de travail. En outre, les câbles sont beaucoup plus flexibles que les segments rigides traditionnels des robots parallèles qu'ils remplacent. La rigidité de l'effecteur d'un **RPC** est ainsi très faible par rapport à son homologue parallèle rigide, ce qui conduit régulièrement à des vibrations de l'effecteur d'amplitude importante et de fréquence naturelle basse. Cette faible rigidité amoindrit la précision et la répétabilité du robot, et les vibrations limitent sa capacité à effectuer des mouvements brusques. Le modèle des câbles est aussi une question à prendre en considération, ceux-ci pouvant être sujets à un affaissement sous leur propre poids non négligeable quand leur longueur en l'air est importante.

Le travail de recherche présenté ici constitue l'un des premiers de l'équipe AVR dans le domaine de la robotique parallèle à câbles. Au lancement du projet, deux thèses en cours de préparation s'intéressaient à ce sujet, l'une en commande et l'autre en robotique médicale. Le laboratoire avait fait l'acquisition d'un robot parallèle à 8 câbles et 6 degrés de liberté pleinement contraint conçu pour la réalité virtuelle.

Pour cette thèse, l'idée consistait à allier les compétences de l'équipe en automatique, vision et robotique pour faire progresser la robotique parallèle à câbles. Le constat de départ est qu'une mesure extéroceptive de pose, c'est à dire une mesure effectuée en observant le robot dans son environnement (une caméra par exemple) et non son état interne (à l'aide de codeurs sur les axes mobiles par exemple), se révèle très intéressante pour les **RPCs**. Elle permet en effet de s'affranchir de l'obstacle majeur qu'est la détermi-

nation de la pose du robot à l'aide des longueurs des câbles via le modèle géométrique direct. La vision par ordinateur semble un choix relativement logique pour réaliser une telle mesure. Les compétences en robotique de l'équipe peuvent être exploitées pour la réalisation de prototypes, ainsi que pour la modélisation du comportement mécanique des robots en tenant compte de la flexibilité des câbles. De plus, jusqu'à présent, peu d'études se sont penchées sur la modélisation dynamique et la commande avancée de tels systèmes.

L'utilisation de câbles très flexibles, et donc très fins, est un choix délibéré, qui sert plusieurs objectifs :

- négliger le phénomène d'affaissement, proportionnel au poids du câble,
- illustrer les effets de l'élasticité de tels câbles sur les prototypes, afin de mettre clairement en évidence les résultats théoriques obtenus,
- et la possibilité d'exploiter cette flexibilité pour la commande du robot, ce qui implique qu'elle doit être assez grande pour que la sensibilité des forces de traction aux variations de longueurs des câbles soit suffisamment faible.

Avec les câbles que nous utilisons et les paramètres mécaniques de nos prototypes, les fréquences naturelles de vibrations calculées et observées expérimentalement sont suffisamment faibles pour entrer dans la bande passante de la boucle de position de moteurs à courant continu classiques (de l'ordre de quelques Hz). Il est ainsi théoriquement possible d'utiliser les mêmes moteurs qui réalisent l'enroulement des câbles pour déplacer le robot afin de rejeter activement les vibrations indésirables de l'effecteur.

Ce manuscrit aborde donc la problématique de la réjection active de vibrations de l'effecteur d'un robot parallèle à câbles flexibles.

Nous proposons pour cela de réaliser une commande indépendante pour chaque mode de vibrations du modèle dynamique du robot. L'analyse modale est utilisée pour découpler les modes de vibrations à partir de mesures de vitesses ou d'accélération sur l'effecteur du robot. Le but est d'obtenir un modèle simple comprenant plusieurs systèmes monovariables découplés, ce qui permet une simplification drastique de la commande et de sa synthèse.

Par contre, quand le robot change de position, ses caractéristiques vibratoires, définies par les modes et fréquences naturelles, varient. Ce phénomène implique de concevoir une commande robuste à ces variations, mais au prix des performances, ou de modifier la commande durant le fonctionnement du robot.

Ce travail s'intègre dans une démarche exploratoire autour de la robotique parallèle à câbles, sans application ou cahier des charges précis envisagés dès le départ. Les objectifs que nous nous fixons sont surtout qualitatifs, nous cherchons ainsi à amortir les vibrations d'un [RPC](#) au mieux. Les travaux existants dans le domaine sont en effet trop peu nombreux et trop différents pour permettre une comparaison entre leurs approches.

L'état de l'art de la robotique parallèle à câbles, et plus particulièrement les questions autour des vibrations et de la commande de ces robots sont abordés dans un premier chapitre.

Par la suite, les questions théoriques sont traitées dans un second chapitre. Celui-ci décrit notamment la modélisation mécanique, l'étude théorique des phénomènes vibratoires, et la commande choisie pour la réjection active de ces vibrations sur un [RPC](#).

Le troisième chapitre décrit la plateforme expérimentale mise en place au cours de la thèse pour réaliser différents prototypes permettant de valider la modélisation et la

commande développées. La simulation et les outils logiciels exploités par les prototypes y sont notamment expliqués.

Enfin, les deux derniers chapitres montrent des résultats expérimentaux obtenus à l'aide de deux RPCs construits pour l'occasion. Le premier possède deux degrés de liberté, deux câbles et est muni de deux roues à inertie, et le second présente six degrés de liberté et huit câbles.

Le travail menant à la préparation de cette thèse a apporté plusieurs contributions dans le domaine de la robotique parallèle à câbles. En effet, l'effecteur embarquant toute la mécanique et les actionneurs du RPC ainsi que l'utilisation de roues à inertie constitue une innovation sur ce type de robot. De même, l'amortissement actif de vibrations sur ces robots et la commande dans l'espace modal sont une première à notre connaissance. La simulation physique développée nous a également été d'une grande aide, et sera exploitée à nouveau par la suite pour la validation de lois de commande et de caractéristiques de vibrations.

Les premiers résultats expérimentaux sur notre robot plan ont été présentés à la conférence IROS en 2014 [WEBER et collab., 2014]. La commande dans l'espace modal a ensuite fait l'objet d'une publication pour la conférence ICRA en 2015, avec des résultats sur un prototype spatial qui n'est pas détaillé dans cette thèse [WEBER et collab., 2015]. Un article de revue couvrant l'ensemble de la théorie et des expériences sur le robot spatial CoMiRo est en cours de relecture.

# Chapitre 1

## État de l'art

*« The thing about quotes on the internet is that you can not confirm their validity. »*

---

Abraham Lincoln

### Sommaire

---

<b>1.1 Définitions</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1.1 Mécanisme parallèle . . . . .	5
1.1.2 Robot parallèle à câbles . . . . .	5
1.1.3 Robots pleinement contraints et suspendus . . . . .	6
<b>1.2 Applications</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1.3 Modélisation géométrique et mécanique</b> . . . . .	<b>13</b>
1.3.1 Modélisation et notations . . . . .	13
1.3.2 Comportement des câbles . . . . .	14
1.3.3 Statique du robot à câbles . . . . .	15
1.3.4 Problème géométrico-statique . . . . .	16
<b>1.4 Espaces de travail</b> . . . . .	<b>16</b>
1.4.1 Problématique . . . . .	16
1.4.2 Définitions . . . . .	17
1.4.3 Méthodes de conception . . . . .	18
<b>1.5 Commande et dynamique</b> . . . . .	<b>18</b>
1.5.1 Robot sur-contraint . . . . .	19
1.5.2 Robot sous-contraint . . . . .	20
<b>1.6 Rigidité et Vibrations</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>1.7 Commande pour le rejet de vibrations</b> . . . . .	<b>22</b>

---

Ce chapitre dresse un état de l'avancement des recherches scientifiques sur les mécanismes parallèles à câbles.

En premier lieu sont définies les notions de mécanisme parallèle et de robot parallèle à câbles, ainsi que la notion de robot suspendu ou pleinement contraint.

Ensuite les différentes applications dans lesquelles se sont illustrés des mécanismes parallèles à câbles sont décrites.

Après quoi la modélisation géométrique et mécanique des câbles et des RPCs est abordée, en faisant le point sur le problème géométrico-statique, une difficulté théorique spécifique aux RPCs.

Puis la notion d'espace de travail dans la robotique à câbles est discutée. Elle permet de guider leur conception.

Par la suite, le modèle dynamique et les possibilités de commande des RPCs sont passés en revue.

La flexibilité des câbles conduisant à des vibrations de l'effecteur de ces robots, l'estimation de leur rigidité et caractéristiques de vibrations fait l'objet d'une dernière section.

## 1.1 Définitions

### 1.1.1 Mécanisme parallèle

Un RPC désigne un mécanisme parallèle dont des éléments de structure sont matérialisés par des câbles. Un mécanisme parallèle est un mécanisme dont le graphe cinématique contient au moins une boucle, à l'opposé d'un mécanisme série pour lequel il n'existe qu'une succession de liaisons mécaniques faisant le lien entre deux de ses éléments. Dans un mécanisme parallèle une classe cinématique du mécanisme au moins est reliée par plusieurs chemins à une autre. Dans le cas d'un robot, l'une de ces classes est nommée *base* et l'autre *effecteur*. Un robot parallèle comprend au moins deux *jambes*, qui sont des mécanismes séries liés à la base et à l'effecteur.

Depuis quelques dizaines d'années, les mécanismes parallèles ont une place de choix au sein de la robotique. Leurs propriétés permettent notamment d'effectuer des tâches nécessitant un rapport charge utile-poids élevé, ou encore des dynamiques très importantes [MERLET, 2012b].

Il faut noter que parmi les robots parallèles les plus efficaces, plusieurs sont constitués de segments sollicités en traction et en compression uniquement. L'exemple le plus célèbre est très certainement la plateforme de Gough-Stewart-Cappel [STEWART, 1965]. Il s'agit d'un mécanisme à six jambes montées sur des liaisons universelles (ou joints de Cardan) et terminées par des liaisons rotules. Utilisée dans de nombreuses applications, la plateforme est considérée comme l'archétype du mécanisme parallèle.

En mécanique comme en génie civil, il est bien connu que soumettre un matériau aux seules forces de traction et compression en constitue un usage optimal. Une telle conception mène à la création de composants particulièrement légers et aptes à soulever des charges bien plus pesantes que lesdits composants.

### 1.1.2 Robot parallèle à câbles

Étant données les observations précédentes, il n'y a qu'un pas de plus à faire pour envisager des mécanismes sollicités uniquement en traction, et concevoir un robot parallèle à câbles. Les câbles se définissent comme des solides dont l'une des dimensions



est très grande devant les deux autres, au point que la résistance du câble à une sollicitation autre que la traction est négligeable. En effet, soumis à un effort de compression, le câble va flamber (fléchir) sans opposer de résistance et retrouver sa forme rectiligne quand une force de traction s'exercera à nouveau sur lui. Comparés à des segments rigides, il s'avère que l'utilisation du matériau est encore optimisée, ce qui explique pourquoi leur utilisation remonte à l'antiquité dans le domaine de la construction.

Dans notre étude, la notion de *RPC* désigne ceux dont les jambes sont exclusivement des câbles. Sont inclus dans la théorie les *RPC* embarquant des actionneurs sur leur effecteur, ou des points d'attache de câbles mobiles.

Sont exclus du cadre de cette thèse les robots parallèles utilisant des câbles combinés à d'autres mécanismes pour lier base et effecteur. Parmi eux plusieurs font l'objet de travaux de recherche en robotique, mais les outils proposés dans l'étude de la robotique parallèle à câbles pure ne s'y appliquent pas nécessairement. Les tenségrités, par exemple, sont des systèmes mécaniques construits en associant des barres rigides sollicitées en compression à des câbles sollicités en traction. Il est possible de les actionner pour réaliser des robots. Il existe également des mécanismes à actionnement déporté utilisant des câbles comme vecteur de transmission d'efforts, notamment pour réaliser des mains robotiques.

Un *RPC* est ainsi un robot dont l'effecteur est lié à la base par des câbles uniquement, et actionné en faisant varier la longueur des câbles ou la position de leurs points d'attache.

### 1.1.3 Robots pleinement contraints et suspendus

Certains *RPCs* sont construits afin qu'il soit possible d'entraîner l'effecteur dans n'importe quelle direction à l'aide d'un câble. Ils sont dits *pleinement contraints*. D'autres robots sont construits en exploitant la pesanteur pour tendre les câbles, ceux-ci étant tous fixés au sol par un point plus haut que l'effecteur. Ils sont dits *suspendus*.

#### Robots pleinement contraints

Un robot pleinement contraint nécessite au moins un câble de plus que le nombre de degrés de liberté du robot. Une masse ponctuelle sur un plan nécessite par exemple pour être déplacée dans n'importe quelle direction et sens (soit deux degrés de liberté) un minimum de 3 câbles (Figure 1.1).

Le robot est pleinement contraint tant que l'effecteur est à l'intérieur du triangle formé par les extrémités de câbles liées au bâti. Si l'effecteur est à l'extérieur de ce triangle, les câbles peuvent le tirer vers l'intérieur, mais pas le pousser davantage vers l'extérieur, le robot n'est donc plus pleinement contraint.

#### Robots suspendus

Un robot suspendu utilise en quelque sorte la pesanteur comme un câble supplémentaire, dont la force s'exerce toujours dans la même direction, avec le même sens et la même intensité. Ce type de robot n'a pas besoin d'être redondant, il lui suffit en effet de  $n$  câbles pour commander  $n$  degrés de liberté en statique.

Un *RPC* suspendu plan dont l'effecteur est ponctuel nécessite seulement 2 câbles pour être actionné suivant les deux degrés de liberté en translation du plan (Fig. 1.2).

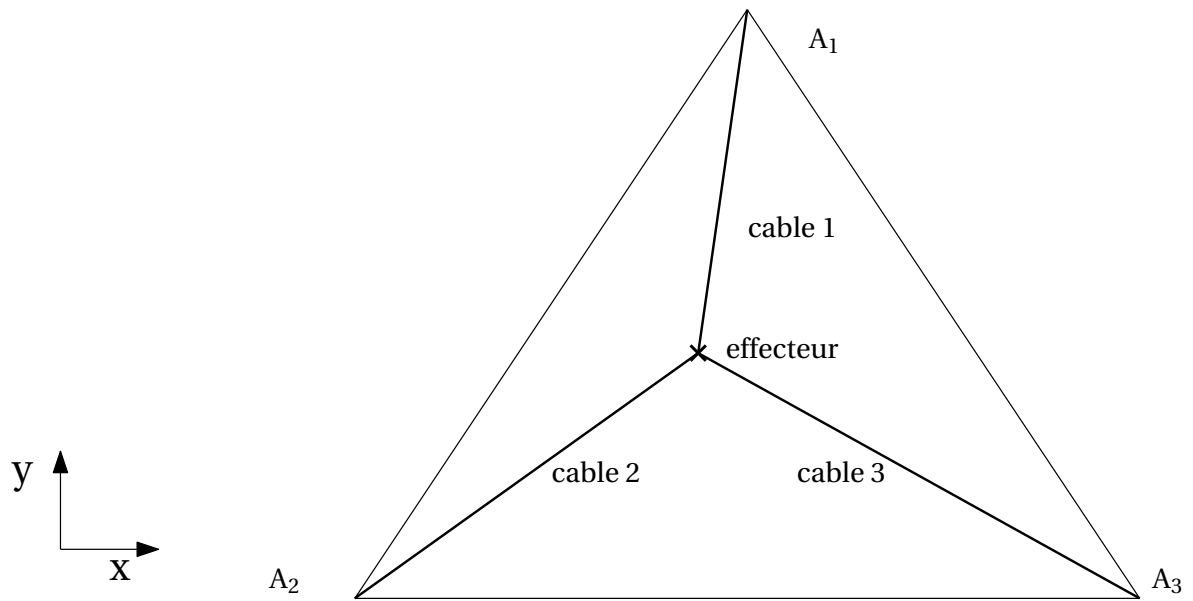


Figure 1.1 – Exemple de robot pleinement contraint à 3 câbles et 2 degrés de liberté

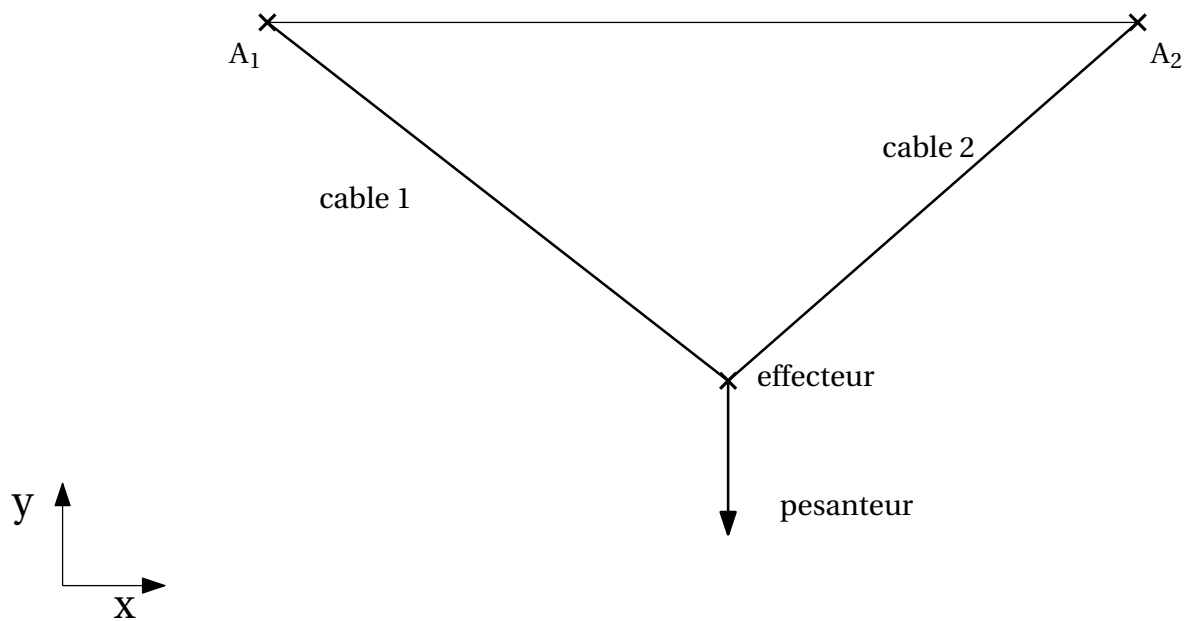


Figure 1.2 – Exemple de robot suspendu à 2 câbles et 2 degrés de liberté

## 1.2 Applications existantes des RPC

Les RPC présentent des qualités à la fois très intéressantes et très spécifiques pour un certain nombre d'applications. Il n'est ainsi pas étonnant de trouver le concept utilisé à de nombreuses reprises au cours de l'histoire, même bien avant que la communauté scientifique ne se soit emparée du sujet et n'ait développé d'outils théoriques pour comprendre les phénomènes en jeu et chercher à les contrôler.

De multiples mécanismes ou structures exploitent depuis l'antiquité l'enroulement de câbles pour déplacer des charges dans le domaine de la construction, cependant il faut attendre la Skycam [CONE, 1985] pour voir apparaître un système qui peut être qualifié de robot parallèle à câbles. Une caméra suspendue à 4 câbles est déplacée au-dessus d'un stade pour filmer les événements qui se déroulent en dessous (Fig. 1.3). L'application est idéale pour le robot parallèle à câbles : la caméra doit se déplacer dans un grand espace de travail, et le système doit être discret pour ne pas déranger les spectateurs. Le calcul de la pose n'est pas nécessaire car le robot est piloté manuellement.



Figure 1.3 – Skycam

Le robot permet uniquement des mouvements de translation, et la caméra est commandée en rotation grâce à un robot série pan-tilt embarqué. De plus, ses mouvements sont stabilisés passivement à l'aide de gyroscopes.

Le NIST Robocrane a été proposé ensuite pour la construction, comme une alternative à la grue conventionnelle [ALBUS et collab., 1993; DAGALAKIS et collab., 1989]. Il s'agit d'un robot suspendu à 6 câbles et 6 degrés de liberté (Fig. 1.4). L'objectif est de contrôler tous les mouvements de l'effecteur pour éviter le balancement des objets suspendus à une grue classique, qui est en fait un RPC suspendu à un câble sous-actionné.

Parmi les applications plus récentes figurent différents projets de radio-télescopes géants dans lequel un robot parallèle à câbles se charge de positionner un élément récepteur au-dessus d'une grande parabole. Ces robots n'ont pas besoin d'atteindre des dynamiques importantes, le choix du robot à câbles est motivé ici par le besoin d'un espace de travail immense.

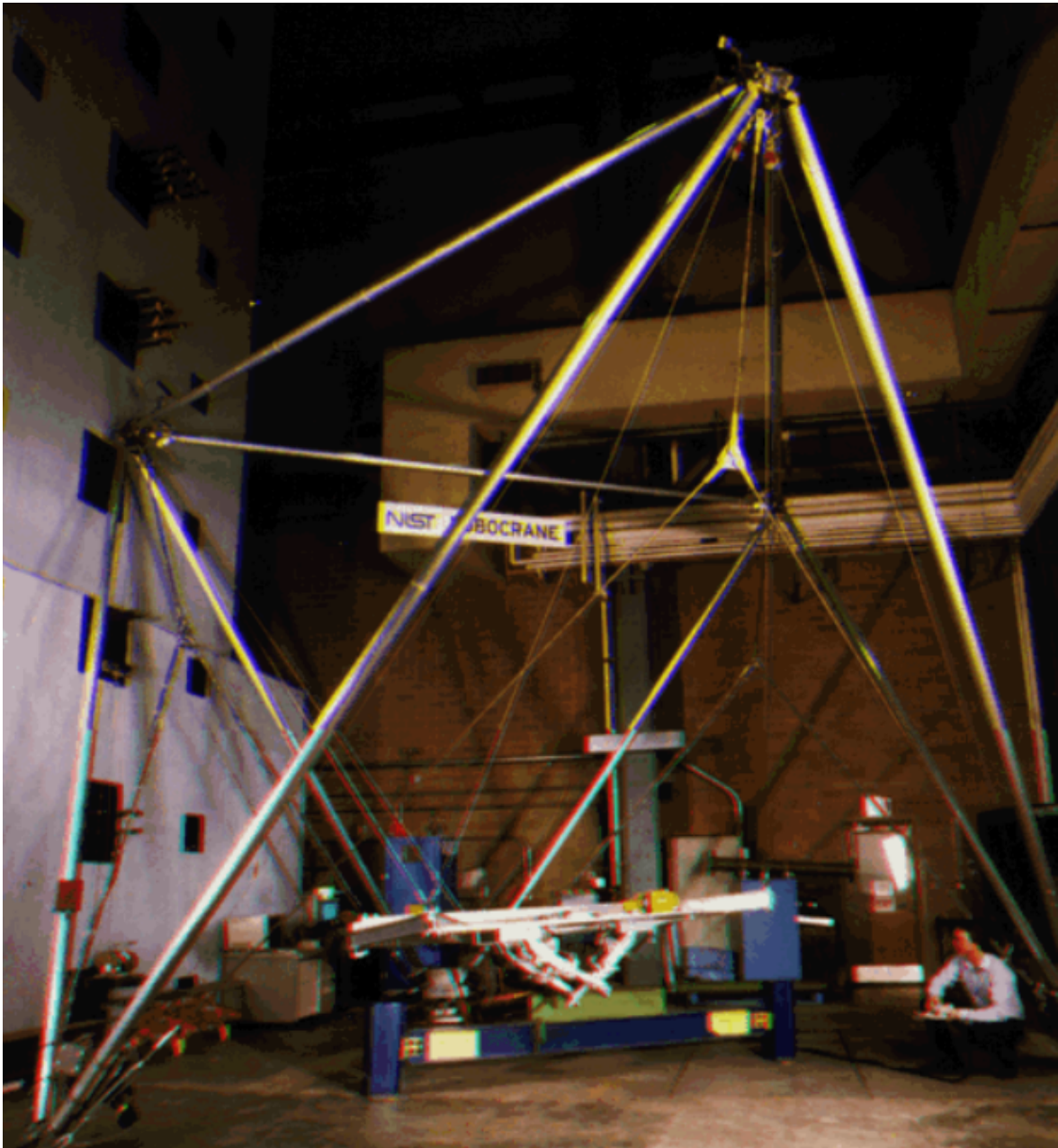


Figure 1.4 – Prototype du robot suspendu NIST Robocrane

Un prototype de 500 mètres de rayon nommé FAST (Fig. 1.5) est en cours de construction en Chine [NAN, 2006; TANG et YAO, 2011].



Figure 1.5 – radio-télescope FAST en Chine

Au Canada, un ballon à l'hélium est attaché à l'effecteur afin de réaliser un robot suspendu inversé pour construire le télescope LAR (Fig. 1.6). Le ballon permet de tendre les 6 câbles attachés à l'effecteur et enroulés au niveau du sol [CARLSON et collab., 2000; DEWDNEY et collab., 2002; NAHON et collab., 2002]. Un prototype à l'échelle 1/3 du robot de taille finale de 200 mètres a été réalisé et testé [LAMBERT et collab., 2007].

Les RPC ont également intéressé scientifiques et ingénieurs dans le domaine haptique. L'objectif est de faire interagir un utilisateur avec un système robotique qui lui donne l'illusion des contacts avec un environnement virtuel ou distant. Une grande bande passante (typiquement 1 kHz) est nécessaire pour reproduire fidèlement la sensation du toucher. Le robot doit également être léger et présenter peu de frottements, avec un espace de travail qui peut être relativement grand pour certaines applications.

Le robot INCA 6D commercialisé par la société Haption est un RPC à 8 câbles et 6 degrés de liberté conçu pour des applications de réalité virtuelle avec retour haptique [PERRET et DOMINJON, 2009]. Un exemplaire de ce robot est utilisé dans notre laboratoire (Fig. 1.7), à la fois pour des expériences de réalité virtuelle et pour la validation de lois de commande développées dans notre équipe. Six caméras infrarouges permettent de déterminer à tout instant la pose de l'effecteur.

Le grand potentiel dynamique des RPC en fait également d'excellents candidats pour l'industrie, notamment dans la robotique de manipulation.

Une équipe de recherche allemande de l'institut Fraunhofer a conçu et réalisé plusieurs prototypes de RPC pleinement contraints avec l'objectif de démontrer l'efficacité de ces robots pour des tâches de manipulation [POTT et collab., 2010, 2013]. La réalisation mécatronique de ces robots IPAnema (Fig. 1.8) est ainsi particulièrement soignée.

En France, plusieurs équipes de recherche s'intéressent aux RPC pour des applications industrielles. Nous pouvons notamment citer le projet CoGiRo (Fig. 1.9) du LIRMM à Montpellier [DALLEJ et collab., 2012; GOUTTEFARDE et collab., 2015a; LAMAURY et GOUTTEFARDE, 2013; NGUYEN et collab., 2014]. Le CoGiRo combine un grand espace de tra-

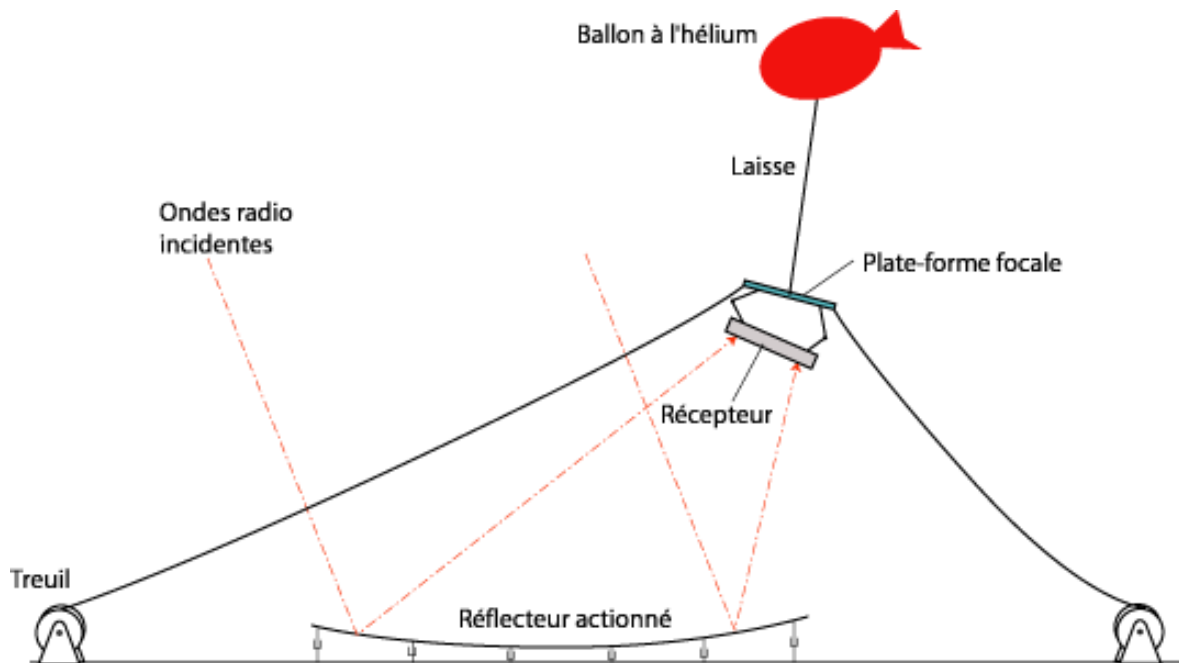


Figure 1.6 – Schéma de principe du télescope LAR incluant un robot parallèle à câbles suspendu à un ballon



Figure 1.7 – Robot INCA-6D de Haption avec son ordinateur de commande

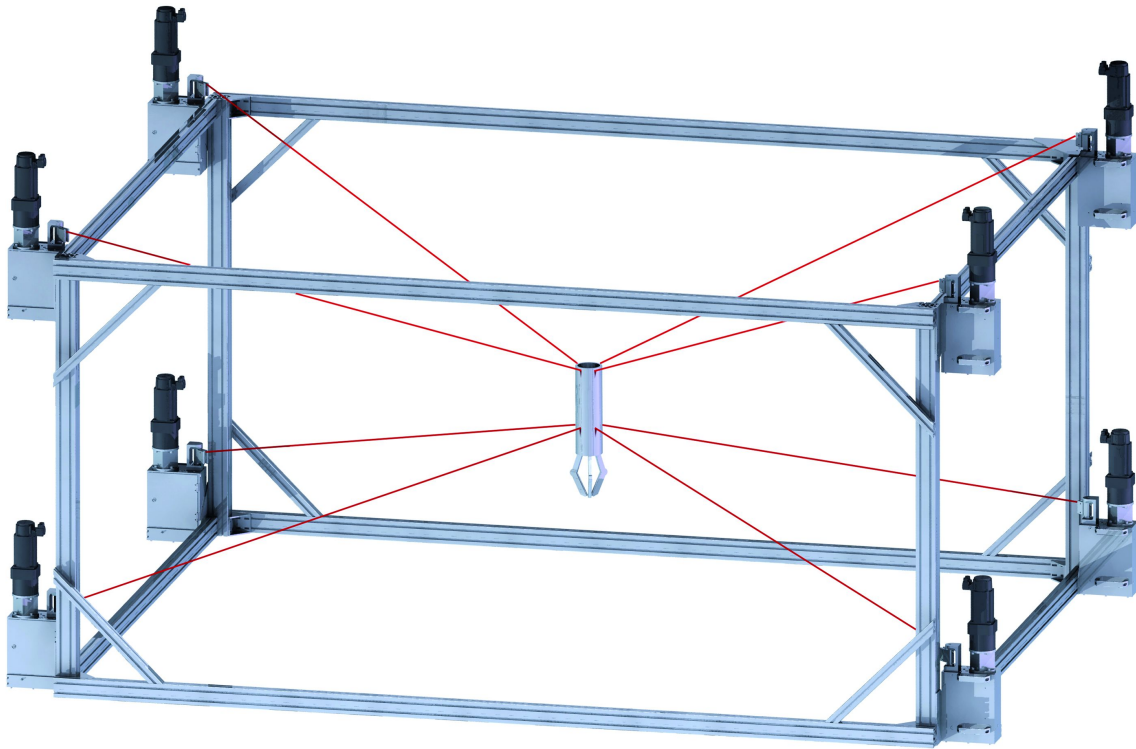


Figure 1.8 – Prototype d'un robot de la série IPAnema conçu pour la manipulation rapide

vail de plus de 10 mètres de côté avec la capacité de soulever des charges de 500kg et des dynamiques élevées. Un système de mesure extéroceptif de la pose de l'effecteur a été implémenté car l'affaissement des câbles complique l'estimation de la pose à l'aide des longueurs de câbles.



Figure 1.9 – Robot suspendu CoGiRo à 8 câbles et 6 degrés de liberté au LIRMM à Montpellier

## 1.3 Modélisation géométrique et mécanique

### 1.3.1 Modélisation et notations

L'architecture d'un RPC classique consiste en une plateforme rigide à laquelle  $m$  câbles sont attachés. Chaque câble est, en son autre extrémité, reliée à une poulie attachée à un repère fixe qui permet de dérouler et d'enrouler le câble. Contrôler la longueur de câble déroulée permet de contrôler la position de la plateforme.

La figure 1.10 montre un exemple d'une telle architecture. La base fixe est associée à un repère fixe  $\mathcal{R}_0$ , tandis qu'un repère mobile  $\mathcal{R}_p$  est associé à la plateforme modélisée par un solide  $\mathcal{S}_p$ . Le point  $A_i$  est le point de sortie du  $i$ -ème câble sur la poulie fixée à la base. Le point  $B_i$  est le point d'attache du  $i$ -ème câble à la plateforme mobile.

Dans la grande majorité des travaux sur les RPC, ce câble est supposé tendu entre les points  $A_i$  et  $B_i$ , et considéré comme un segment géométrique  $[A_i B_i]$  de longueur  $l_{2i}$ . Les extrémités du câble  $A_i$  et  $B_i$  sont généralement modélisées par des liaisons rotules, le câble peut ainsi s'orienter dans n'importe quelle direction. Les vecteurs notés  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  désignent respectivement les vecteurs position de  $A_i$  et de  $B_i$  dans le repère fixe. Notant  $\mathbf{p}$  la position de la plateforme mobile, celle-ci est donnée par le vecteur qui relie la base au point d'étude du robot  $P$  sur la plateforme, exprimé dans le repère fixe. Le vecteur unitaire le long du câble  $i$  est noté  $\mathbf{u}_i$  et peut-être calculé en utilisant la fermeture géométrique suivante :

$$\mathbf{u}_i = \frac{-\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i + \mathbf{p}}{l_{2i}} \quad (1.1)$$

Le modèle géométrique inverse énoncé ci-dessus a été établi dans les premiers travaux concernant les robots à câbles incluant [ALBUS et collab., 1993; MORIZONO et collab., 1997] ou encore [MAEDA et collab., 1999].

Il faut noter que l'analyse ci-dessus est uniquement géométrique et que rien n'est dit



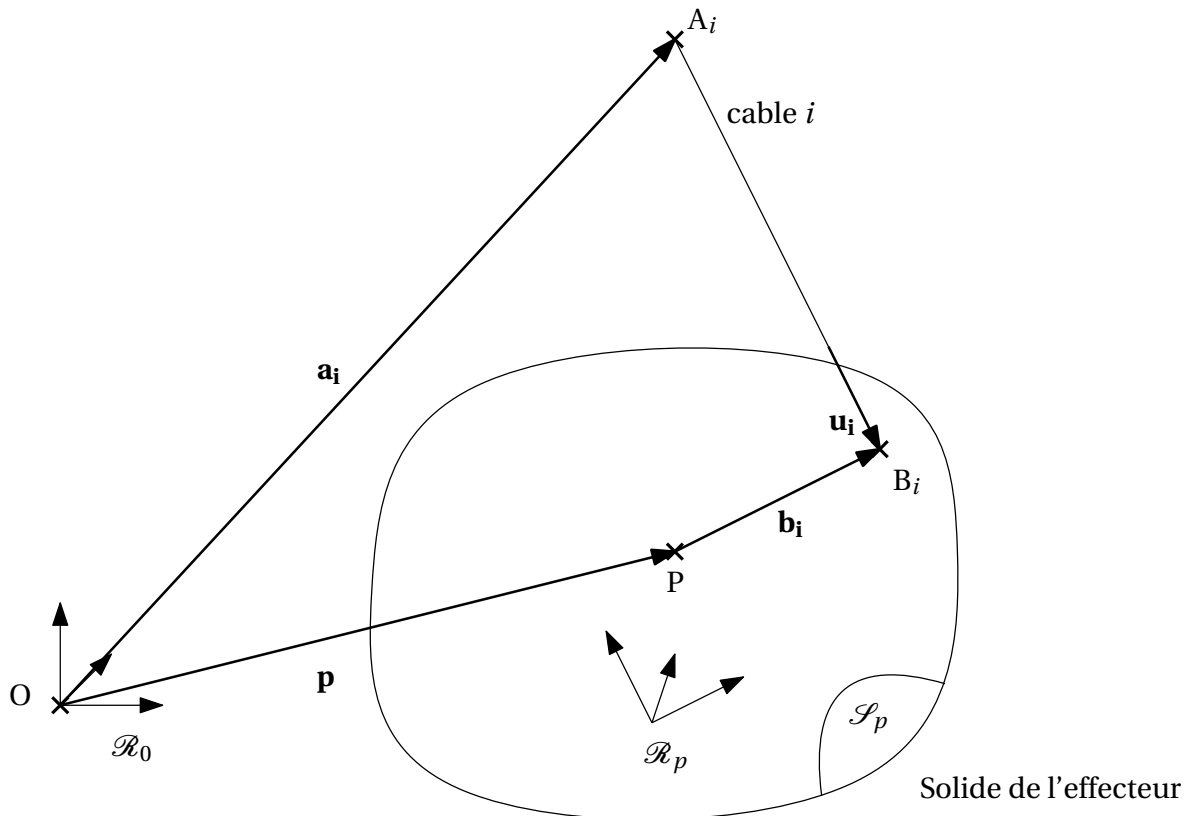


Figure 1.10 – Notations usuelles pour la modélisation mécanique d’un robot parallèle à câbles, un seul câble étant représenté.

concernant la capacité du mécanisme à maintenir les câbles sous tension afin que le modèle reste valide. Ces considérations sont liées aux problèmes de la statique et de la commande des RPC, et sont abordées dans la suite du chapitre.

### 1.3.2 Comportement des câbles

Ce modèle géométrique est valable tant que chaque câble est considéré comme rectiligne. En pratique, un câble de masse non nulle soumis à une tension finie s’affaisse sous son propre poids. Dans des applications utilisant des câbles très épais, ou des distances très importantes, le modèle de câble rectiligne ne tient plus, et il faut considérer l’affaissement du câble dans le modèle géométrique du robot [RIEHL et collab., 2009].

L’affaissement augmente proportionnellement par rapport au poids linéique du câble. En revanche, son amplitude maximale augmente non-linéairement en fonction de la longueur du câble.

A l’inverse, le phénomène décroît proportionnellement à la tension imposée au câble, ce qui implique notamment qu’une tension nulle crée un affaissement infini. La tension n’est cependant jamais totalement nulle dans un câble attaché en 2 points, puisque celui-ci est, a minima, soumis à l’effort engendré par son propre poids.

Cette considération a cependant poussé certains auteurs à imaginer une notion de tension minimale supérieure à zéro pour les RPCs [BOUCHARD, 2008].

Si l’affaissement est relativement faible, il est possible de modéliser le câble par une parabole [RIEHL, 2011].

Le tableau 1.1 présente les quatre modèles utilisés pour la modélisation des câbles, suivant que leur élasticité et leur poids soient ou non considérés.

- 11 Un câble sans poids et inélastique est modélisé par un segment géométrique.
- 21 Un câble sans poids et élastique est modélisé par un ressort, généralement linéaire.
- 12 Un câble pesant inélastique peut se modéliser par une parabole si l'affaissement est faible.
- 22 Le câble pesant élastique utilise le modèle le plus générique de caténaire élastique proposé dans [IRVINE, 1981].

TABLEAU 1.1 – Modèles de câbles

Hypothèses	Câble sans poids	Câble pesant
Câble inélastique	Rectiligne de longueur fixe	Affaissement pur
Câble élastique	Rectiligne élastique	Caténaire élastique

### 1.3.3 Statique du robot à câbles

Dans cette section la statique du **RPC** est étudiée, c'est à dire les efforts en jeu sur l'effecteur d'un **RPC** au repos, donc en l'absence d'accélération.

La question de la répartition des forces entre les câbles est primordiale dans l'étude de ce type de robots, car une tension positive (contrainte de traction) doit être maintenue dans les câbles en permanence. Quand la tension est appliquée, le  $i$ -ème câble exerce au point  $B_i$  une force  $\tau_i \mathbf{u}_i$  sur la plateforme mobile, où  $\tau_i$  désigne l'amplitude de la tension dans le câble, notée aussi  $t_i$ . Les câbles ne pouvant être sollicités en compression,  $\tau_i$  est toujours positive. On supposera ainsi dans toutes les équations de la thèse que les câbles restent sous tension. Cette force génère un moment  $\mathbf{b}_i \times \tau_i \mathbf{u}_i$  au point d'intérêt P de la plateforme mobile. Le torseur des efforts appliqué par le  $i$ -ème câble en P vaut  $\tau_i \mathbf{j}_i$  avec  $\mathbf{j}_i$  défini tel que :

$$\mathbf{j}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{b}_i \times \mathbf{u}_i \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

En notant  $\psi'$  le torseur des efforts extérieurs appliqués sur la plateforme en P, la relation liant les tensions  $\tau_i$  dans les câbles et  $\psi'$  peut être écrite sous forme matricielle :

$$-\mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} + \psi' = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

La matrice jacobienne inverse transposée  $\mathbf{J}^T$  est définie comme :

$$\mathbf{J}^T = ( \mathbf{j}_1 \quad \dots \quad \mathbf{j}_i \quad \dots \quad \mathbf{j}_m ) \quad (1.4)$$

Le vecteur des tensions de câbles  $\boldsymbol{\tau}$  est construit de la même manière :

$$\boldsymbol{\tau} = ( \tau_1 \quad \dots \quad \tau_i \quad \dots \quad \tau_m )^T \quad (1.5)$$

La matrice jacobienne  $\mathbf{J}^T$  est de dimensions  $6 \times m$  et dépend de la position de la nacelle.

L'équation 1.3 est essentielle pour l'étude de la cinématique, de la statique ainsi que de la dynamique des robots à câbles. En effet, la plupart des résultats analytiques proposés dans la littérature sont basés sur cette dernière et les propriétés qui en découlent. Dans le cadre d'une étude statique,  $\psi'$  représente le torseur d'efforts induit par la gravité qui

équilibre les efforts induits par les câbles. En dynamique les forces inertielles s'ajoutent à la gravité. Dans le domaine haptique, les forces extérieures appliquées au mécanisme par l'utilisateur sont incluses dans  $\psi'$ . Des perturbations extérieures telles que le vent lors d'une utilisation en extérieur peuvent également être considérées dans ce torseur.

À partir du modèle statique présenté en (1.3) il est possible de déterminer les efforts appliqués à la nacelle par les câbles, et à l'inverse de déterminer des jeux de tensions dans les câbles  $\tau$  équilibrant la nacelle.

### 1.3.4 Problème géométrico-statique

Les équations (1.1) et (1.3) forment le problème géométrico-statique du robot parallèle à câbles.

Contrairement au cas du robot à architecture série, déterminer la position de l'effecteur d'un RPC connaissant les longueurs de tous les câbles  $\rho_i$  et les géométries de l'effecteur  $B_i$  et du bâti  $A_i$  est un problème complexe dont la solution théorique générale n'a pas encore été découverte. Le cas particulier de la commande où l'objectif est de suivre le robot durant un déplacement connaissant sa pose précédente est en revanche plus simple, et peut être traité efficacement en temps réel à l'aide d'une méthode de Newton [MERLET, 2004b].

Pour des câbles considérés rigides et rectilignes, il a été démontré qu'au plus six câbles sont sous tension à un instant donné pour un RPC qui peut se déplacer suivant les six degrés de liberté [MERLET, 2012a]. Dans ce cas, la gestion de la distribution des tensions dans les câbles n'est pas possible pour un RPC suspendu

Un RPC élastique peut avoir tous ses câbles sous tension simultanément, mais le calcul des tensions des câbles à partir de la pose du robot est très sensible aux incertitudes sur l'élasticité des câbles. Même avec un RPC élastique, il est tout à fait possible qu'un ou plusieurs câbles soient détendus dans certaines situations.

La littérature contient de nombreux articles concernant le calcul des poses potentielles de l'effecteur d'un RPC suspendu en connaissant la géométrie du robot et la longueur des câbles. Le cas général d'un solide suspendu à 3 câbles est traité dans [CARRICATO et MERLET, 2011]. Le problème se ramène alors au calcul des racines d'un polynôme de degré 156. Pour un robot suspendu à 4 câbles, il s'agit de résoudre un polynôme de degré 216 [CARRICATO et ABBASNEJAD, 2013]. D'autres auteurs se sont intéressés uniquement à la pose qui présente l'énergie potentielle la plus faible [COLLARD et CARDOU, 2012]. Le problème est ainsi résolu par une méthode d'optimisation globale, la méthode mise en œuvre fonctionnant pour un nombre arbitraire de câbles, 1000 dans leur exemple. Le RPC ne se dirige cependant pas forcément vers le minimum global d'énergie potentielle, il peut s'arrêter en un minimum local. Si la pose est stable, le robot aboutit effectivement à ce minimum global [CARRICATO et MERLET, 2011].

## 1.4 Espaces de travail

### 1.4.1 Problématique

La notion d'espace de travail est primordiale pour guider la conception d'un robot, qu'il soit série ou parallèle. La question posée est la suivante : le robot candidat a-t-il la possibilité physique d'atteindre une pose donnée et d'y appliquer un torseur d'effort donné ? Répondre positivement à cette question revient à valider un point du cahier des charges des tâches à accomplir pour le futur robot.

Pour un robot donné, son espace de travail comprend l'ensemble des poses qu'il peut atteindre pour réaliser un ensemble de tâches.

Dans le cas d'un robot série ou parallèle rigide, la question délicate se posant est la suivante : quelles poses un robot avec des paramètres géométriques donnés peut-il atteindre ? En effet, modifier la longueur d'un segment rigide représente un travail de conception important, et influence de nombreux autres paramètres, comme ceux de la cinématique par exemple.

A l'inverse, il est aisé de modifier les paramètres géométriques d'un RPC. Ajouter de la longueur aux câbles ne modifie pas la cinématique et n'impose pas de lourd travail d'intégration mécanique.

Le problème des efforts qu'il est possible de générer au niveau de la plateforme est par contre beaucoup plus intéressant sur un RPC. En effet, les câbles étant uniquement capables de produire des efforts en traction, il est facile de se retrouver dans une situation où produire des efforts dans une certaine direction est impossible à l'aide des câbles. Dans le cas d'un robot suspendu, les câbles n'ont pas la possibilité de pousser la plateforme vers le bas, ainsi l'effort maximal que la plateforme peut fournir dans cette direction est égal à son poids.

### 1.4.2 Définitions

Ainsi, plusieurs définitions d'espaces de travail ont été proposées pour le RPC, prenant toujours en compte la question des efforts que peut générer la plateforme. Jean-Pierre Merlet a défini trois contraintes à satisfaire pour qu'une pose fasse partie de l'espace de travail [MERLET, 2004a].

- La première est la contrainte géométrique de longueur des câbles. Il propose une résolution par intervalles [MERLET, 1999].
- La deuxième concerne les interférences entre câbles et plateforme. Cette notion a été notamment étudiée dans la thèse de Samuel Bouchard [BOUCHARD, 2008] et dans les travaux de Jean-Pierre Merlet [MERLET, 2004a]. Une implémentation rapide de ces principes pour un RPC d'orientation fixe se trouve dans [PERREAULT et collab., 2010]. Les interférences entre câbles peuvent au contraire être incluses dans l'espace de travail et prises en compte dans le modèle comme des perturbations. Elle peuvent alors être calculées et la commande du robot peut les rejeter [OTIS et collab., 2009].
- La dernière contrainte est l'équilibre statique de la nacelle.

À ce stade, plusieurs définitions sont possibles, conduisant à différentes propriétés pour les ensembles qui en découlent. L'Espace des Poses Polyvalentes (EPP), ou *wrench closure workspace* regroupe l'ensemble des poses pour lesquelles les câbles sont capables d'exercer n'importe quel torseur d'effort sur la plateforme, sachant que toutes les tensions des câbles doivent être positives [GOUTTEFARDE et GOSSELIN, 2006]. Mathématiquement, l'ensemble peut se définir ainsi :

$$\text{EPP} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^6 \mid \forall \psi' \in \mathbb{R}^6, \exists \tau \in \mathbb{R}^{m+}, -\mathbf{J}^T(\mathbf{p})\tau = \psi'\} \quad (1.6)$$

Cet ensemble dépend uniquement de la géométrie du robot, aucune hypothèse sur des efforts minimaux ou maximaux n'est nécessaire.

Calculer cet EPP s'est révélé complexe dans le cas général. Quand la dimension du noyau de la jacobienne inverse  $\mathbf{J}$  (1.4) est égale à 1, des méthodes de calcul algébriques

peuvent être utilisées [GOUTTEFARDE et GOSSELIN, 2005]. Pour un robot plan, il est également possible d'obtenir des résultats intéressants même avec un noyau de dimension supérieure [GOUTTEFARDE et GOSSELIN, 2006]. Le théorème de Stiemke (permettant de vérifier la consistance d'un système d'inéquations) a été utilisé pour trouver les frontières de l'EPP dans un cas plus général dans [STUMP et KUMAR, 2005]. Des résolutions numériques ont été proposées, notamment avec les outils de l'analyse par intervalle dans [MERLET, 2013], ainsi que des méthodes graphiques pour déterminer visuellement l'EPP à l'aide d'un tracé de coniques [AZIZIAN et collab., 2012].

D'autres définitions de l'espace de travail peuvent montrer un intérêt pratique plus important pour la conception d'un RPC. Quand la tâche est connue à l'avance, il peut se révéler bien plus pertinent de déterminer dans quel espace le robot est à même de la réaliser, plutôt que d'en rester à une considération purement géométrique. C'est même indispensable pour un robot suspendu, qui a un EPP nul, car il est incapable de produire des torseurs d'efforts dirigés vers le bas d'une amplitude supérieure au poids du robot. Pour reprendre les notations françaises de la thèse de Salih Abdelaziz [ABDELAZIZ, 2012], nous parlerons d'Espace des Torseurs Générables (ETG), ou *wrench feasible workspace*. Cet ensemble regroupe l'ensemble des poses pour lesquelles tous les torseurs d'un ensemble donné peuvent être générés à l'aide de tensions admissibles dans les câbles. La notion de tension admissible représente simplement un intervalle de tension, entre un minimum et un maximum. Le minimum permet d'assurer que le câble est sous tension et quasi-rectiligne, et le maximum qu'il ne se détériore pas sous l'effort. Dans [BOSSCHER et EBERT-UPHOFF, 2004], une méthode analytique est proposée pour déterminer les frontières de l'ETG pour des tensions minimales nulles, étendue ensuite dans la thèse de Bouchard [BOUCHARD, 2008] pour des tensions minimales quelconques. L'analyse par intervalle a également été utilisée plus récemment pour déterminer cet ETG dans [GOUTTEFARDE et collab., 2011].

La notion d'espace de travail dynamique a également été proposée dans [BARRETTE et GOSSELIN, 2005], ce qui permet de déterminer de nouvelles poses accessibles transitoirement au robot en s'appuyant sur son inertie.

### 1.4.3 Méthodes de conception

La grande majorité des travaux de recherche consacrés aux espaces de travail particuliers des RPC présentent une analyse *a posteriori* des espaces de travail et des tâches réalisables d'un robot ou d'une classe de robots donnés. En effet, presque tous les prototypes connus de RPC ont été conçus sur la base de l'intuition et de l'expérience. Il existe néanmoins dans la littérature un début de théorie sur la synthèse de RPCs aptes à réaliser une tâche ou une trajectoire définie, notamment pour des robots plans dans [AZIZIAN et CARDOU, 2013], à présenter des caractéristiques d'espaces de travail particulières [GOUTTEFARDE et collab., 2015a], ainsi que pour la réalisation d'une interface de locomotion d'architecture parallèle à câbles respectant certaines contraintes mécaniques dans [PERREAULT et GOSSELIN, 2008].

## 1.5 Commande et Dynamique des RPCs

En plus de présenter un espace de travail potentiellement immense, le RPC est un excellent candidat pour des tâches très rapides, grâce à la faible masse des pièces en mouvement.

Dans ce cas, la commande du robot ne peut pas se contenter d'exploiter la géométrie du robot et la pesanteur. La modélisation dynamique du robot, qui décrit les effets dus aux inerties dans les lois de Newton, doit être prise en compte dans le modèle utilisé pour sa commande.

Si le poids des câbles est négligé et que l'effecteur est rigide, le modèle dynamique du RPC est simplement celui de Newton-Euler pour un solide libre de se déplacer dans l'espace, les efforts de traction des câbles agissant comme des forces extérieures (voir 2.2).

La difficulté est ici de connaître ces tensions.

### 1.5.1 Robot sur-contraint $n > m$

Dans le cas où le nombre de câbles  $n$  excède le nombre de degrés de liberté du robot  $m$ , le système est sur-contraint, ce qui conduit à plusieurs solutions quant aux différentes distributions de tensions possibles des câbles.

Des optimisations peuvent être conduites dans le but, pour une trajectoire donnée, d'avoir la meilleure répartition des tensions dans les câbles possible [GOUTTEFARDE et collab., 2015b]. Il s'agit de maintenir la tension dans chaque câble entre deux bornes, un minimum pour qu'il soit tendu et un maximum pour ne pas le détruire, tout en limitant si possible la somme des tensions pour minimiser l'énergie de commande, ou au contraire chercher à imposer des tensions plus importantes pour augmenter la rigidité de l'effecteur.

La programmation linéaire [BORGSTROM et collab., 2009; FANG et collab., 2004] et la programmation quadratique [BEHZADIPOUR et KHAJEPOUR, 2004; BRUCKMANN et collab., 2006] ont été proposées pour résoudre ce problème. La programmation linéaire est une procédure simple et systématique, mais qui ne garantit pas une solution continue, ce qui peut causer l'instabilité de la commande. La programmation quadratique garantit la continuité, au prix d'un temps de calcul variable et potentiellement important.

Avec un grand nombre de câbles, le temps de calcul peut devenir rédhibitoire. Dans [HASSAN et KHAJEPOUR, 2007], l'auteur utilise l'algorithme de projection alternée de Dykstra pour trouver la norme minimale du vecteur des tensions. Dans [MIKELSONS et collab., 2008] et [POTT, 2014], un algorithme plus rapide de calcul de tension des câbles basé sur les barycentres de Mikelson est introduit pour des robots présentant deux câbles de plus que de degrés de liberté.

L'actionnement redondant rend le contrôle d'un RPC plus complexe. En effet, il faut observer les tensions pour gérer leur distribution, ce qui nécessite l'ajout de capteurs. Or l'intégration de capteurs d'effort est délicate, et les mesures fournies sont généralement bruitées et contiennent un biais.

Une méthode alternative consiste à s'appuyer sur la compliance des câbles, des fixations ou de l'actionnement pour obtenir une distribution des tensions adéquate [DUCHAINE et collab., 2007].

Plusieurs stratégies de commande exploitant le modèle dynamique ont été proposées dans la littérature. Dans [ZI et collab., 2008], un contrôleur flou (fuzzy) est proposé, tandis que dans [YOU et collab., 2011] une approche itérative de type backstepping permet de synthétiser un correcteur pour contrôler un RPC à trois degrés de liberté. La stabilité d'un correcteur non-linéaire de type « sliding mode control » pour un RPC de grande dimension est démontrée à l'aide de la théorie de Lyapunov dans [ALIKHANI et VALI, 2011]. Dans [LAROUCHE et collab., 2013], une commande robuste H infini est proposée pour limiter les effets inappropriés de la flexibilité des câbles.

### 1.5.2 Robot sous-contraint $n \leq m$

Dans le cas où le nombre de câbles  $n$  est inférieur au égal au nombre de degrés de liberté du robot  $m$ , le système est sous-contraint. Une seule solution est alors possible pour le vecteur des tensions des câbles.

Les contraintes de tensions sont formulées comme un jeu d'inégalités et un algorithme de planification de trajectoire qui respecte ces contraintes est proposé dans [OH et AGRAWAL, 2005].

Une technique pour synthétiser des trajectoires dynamiques garantissant que les câbles sont maintenus sous tension est exposée dans [GOSSELIN, 2013; GOSSELIN et collab., 2012].

Certains travaux sur les robots suspendus exploitent la dynamique du système pour actionner davantage de degrés de liberté qu'il n'y a de câbles [CUNNINGHAM et ASADA, 2009; GOSSELIN et collab., 2010; LEFRANCOIS et GOSSELIN, 2010; ZANOTTO et collab., 2011]. Les efforts dynamiques ou inertiels (le terme construit à partir des masses et accélérations des lois de Newton, homogène à un effort) sont utilisés comme un actionnement supplémentaire, ce qui permet à un pendule dont la longueur varie grâce à l'enroulement du câble d'atteindre n'importe quelle position du plan, mais sans pouvoir s'y arrêter.

Grâce à la dynamique, le RPC peut s'éloigner des points d'attache des câbles en maintenant une tension positive en permanence. Les expériences [GOSSELIN, 2013; GOSSELIN et collab., 2012] montrent ainsi un robot à deux ou trois degrés de liberté effectuant un mouvement circulaire à une fréquence donnée au-delà de son espace de travail statique.

Certains articles s'intéressent à la statique [KOZAK et collab., 2006] et aux dynamiques des RPC munis des câbles pesants [ARSENAULT, 2013; ZI et collab., 2008]. Le modèle dynamique complet d'un RPC incluant la masse des câbles, mais également une résistance à la torsion et au fléchissement est donné dans [NAHON et collab., 2002]. Pour l'instant, ces calculs sont trop lourds pour une implémentation en temps réel sur un contrôleur de robot, et trouvent surtout leur intérêt pour guider la conception.

## 1.6 Rigidité et Vibrations

Les RPC utilisant des câbles au lieu de jambes rigides articulées, la masse des pièces mécaniques en mouvement durant le fonctionnement du robot est très réduite par rapport aux autres types de robot. Cette particularité permet de construire des robots de charge utile très élevée par rapport à leur poids, et avec un très grand espace de travail (plusieurs dizaines de mètres). Ce volume dépend essentiellement de la longueur totale des câbles, ce qui permet au RPC de présenter des espaces de travail de forme et de taille très variées.

Cette possibilité ouvre de nombreuses perspectives applicatives, mais un certain nombre de difficultés apparaissent quand une longueur importante de câble entre la poulie et le point d'attache est employée.

Avec des câbles fins, la rigidité de l'effecteur du robot est inférieure de plusieurs ordres de grandeur à celle d'un robot à segments rigides de taille comparable. Avec des câbles de plus gros diamètre, l'affaissement des câbles sous leur poids propre cesse d'être négligeable.

Cette très faible rigidité entraîne des fréquences naturelles de vibrations très basses de l'effecteur du robot, de l'ordre de quelques Hertz. Pour un robot à segments rigides, les

fréquences naturelles de la structure sont de l'ordre de quelques dizaines à une centaine de Hertz.

Ces basses fréquences sont associées à des amplitudes de vibrations importantes (plusieurs centimètres dans nos applications) et un temps de stabilisation très long (plusieurs secondes sur nos robots). Elles ont cependant l'avantage de se situer dans la bande passante de la plupart des moteurs pouvant actionner des poulies, ce qui permet d'envisager un amortissement actif de ces vibrations. En effet, à plus haute fréquence, les actionneurs les plus courants se révèlent incapables de suivre une consigne s'opposant au mouvement de vibrations. Ainsi, une approche active ne peut pas donner de résultats, à moins d'ajouter des actionneurs dédiés de grande bande passante.

Deux approches ont été étudiées dans la littérature pour résoudre le problème de vibration des RPCs.

La première consiste à augmenter la rigidité de l'effecteur de ces robots afin d'augmenter leurs fréquences naturelles de vibrations, et ainsi réduire leur amplitude et leur temps de stabilisation.

Elle a été initialement proposée en 1995 dans l'un des premiers articles scientifiques sur les RPCs [KAWAMURA et collab., 1995]. Il s'agit, pour un RPC redondant, d'augmenter les tensions des câbles sans modifier la position de la nacelle, et ainsi d'augmenter la rigidité de l'effecteur. Des travaux ultérieurs ont montré que cette proposition pouvait améliorer significativement la rigidité de l'effecteur dans certaines configurations particulières [BEHZADIPOUR et KHAJEPOUR, 2005]. Cependant, cet effet est relativement faible en général, et requiert une consommation permanente d'énergie pour maintenir la rigidité en exerçant des forces antagonistes sur tous les câbles. De plus, cette approche est limitée aux robots redondants. En outre, les fréquences naturelles s'expriment en fonction de la racine carrée de la rigidité, ce qui implique qu'une augmentation de 100% de rigidité n'entraîne que 40% d'augmentation de la fréquence naturelle. Enfin, la résistance mécanique des câbles impose un maximum pour les tensions.

La seconde consiste à amortir activement ces vibrations [WEBER et collab., 2014, 2015; YANAI et collab., 2002].

La détermination des caractéristiques vibratoires telles que les modes propres, fréquences naturelles, est très utile dans une démarche d'amortissement actif de vibrations de l'effecteur d'un robot à câbles. Ces données peuvent s'obtenir à l'aide des paramètres de rigidité et de masse de l'effecteur.

La littérature propose différentes méthodes pour estimer la rigidité de l'effecteur d'un RPC [BEHZADIPOUR et KHAJEPOUR, 2005; DIAO et MA, 2009; YUAN et collab., 2014].

Dans [DIAO et MA, 2009], cette rigidité est calculée à partir de la géométrie du robot via la jacobienne  $J$  introduite en (1.4) et le coefficient de raideur des câbles, sans tenir compte de l'effet de la tension des câbles. Ce modèle est convenable pour un robot redondant proche du centre de son espace de travail, mais dans certaines configurations, il conduit à une rigidité très sous-évaluée, comme le montre l'article de [BEHZADIPOUR et KHAJEPOUR, 2005] qui considère les rapports entre la rigidité du modèle de [DIAO et MA, 2009] et la rigidité due aux efforts antagonistes dans les câbles.

Les fréquences naturelles et modes propres de vibrations de l'effecteur d'un RPC sont notamment calculés à partir de la rigidité de l'effecteur dans les études [DIAO et MA, 2009; WEBER et collab., 2015; YUAN et collab., 2014, 2015]. Les modes propres sont toujours orthogonaux deux à deux. Ainsi, les vibrations de l'effecteur soumis à une impulsion tracent toujours des sinusoides à la fréquence naturelle associée quand elles sont projetées le long d'un mode propre.



D'autre part, les frottements statiques dans les actionneurs et la chaîne de transmission mécanique et entre celle-ci et l'enroulement des câbles peuvent également être une source de vibrations de l'effecteur d'un RPC. Il est possible d'améliorer le suivi de trajectoire d'un RPC à l'aide d'un algorithme de compensation de ces frottements [KRAUS et collab., 2015].

## 1.7 Commande pour le rejet de vibrations

La commande dans l'espace modal a été utilisée dans des domaines variés.

Dans [GOULD et MURRAY-LASSO, 1966], une théorie de la commande modale est proposée pour traiter des systèmes particuliers avec des correcteurs SISO. Pour ces systèmes, la consigne de l'asservissement est non seulement une fonction du temps, mais dépend également d'une deuxième variable de position. L'exemple proposé dans l'article propose un asservissement en température d'une tige de métal dont la consigne varie en fonction du temps, mais également de la position le long de la tige, ce qui permet d'appliquer un traitement thermique différent à un bout de la tige et à un autre, de manière découplée.

En général, la commande modale est utilisée pour l'amortissement actif de vibrations de structures.

Différents types d'algorithmes de commande dans l'espace modal sont proposées pour des systèmes découplés, tels que le Direct Velocity Feedback, le Positive Position Feedback ou le Integral Force Feedback (IFF), décrits plus en détail dans le Chapitre 7 du livre [PREUMONT, 2011]. L'influence de la dynamique des actionneurs de bande passante limitée est mentionnée et brièvement analysée section 7.7. Le chapitre 15 étudie un exemple d'amortissement actif d'une structure en commandant la tension (IFF) des tendons d'amarrage.

La commande linéaire quadratique (Linear Quadratic Regulator ou LQR) appliquée au problème de la commande dans l'espace modal est appelée Independent Modal Space Control (IMSC) dans [MEIROVITCH et collab., 1977]. Dans les applications de l'IMSC, les matrices de masse et de rigidité du système dynamique sont diagonalisées en passant dans l'espace modal, afin qu'une rétroaction en position et vitesse dans cet espace permette d'amortir les vibrations. Ce travail est étendu à des systèmes dynamiques présentant une matrice d'effets Coriolis non négligeable grâce à une technique de découplage du modèle dynamique [MEIROVITCH et collab., 1977]. Les gains des retours en position et vitesse sont choisis par optimisation de l'énergie de la commande et de l'énergie mécanique du mode de vibrations dans [SINGH et collab., 2003]. Le chapitre 11 du livre [PREUMONT, 2011] présente les techniques d'ISMC, de commande optimale et autres techniques de commande avancées pour l'amortissement actif de vibrations.

Cependant, la commande modale a pour l'instant été à notre connaissance peu exploitée dans le domaine de la robotique.

L'ISMC a été employée sur un robot parallèle comprenant un segment flexible dans [WANG et collab., 2009].

Le modèle dynamique d'un robot parallèle flexible est linéarisé le long d'une trajectoire et les techniques d'analyse modale sont exploitées pour calculer une consigne ne sollicitant pas les modes oscillants du système selon la technique de l'*input shaping* dans [KOZAK et collab., 2004]. Dans ce cas, les vibrations induites par des perturbations ne sont cependant pas amorties.

Une autre approche utilisée en robotique pour commander des systèmes qui présentent d'importantes vibrations exploite la *Singular Perturbation Theory*. Le modèle dynamique du système est partitionné en deux, une partie rapide représentant le comportement vibratoire, et une partie lente représentant la trajectoire nominale du robot. Cette méthode a en premier lieu été utilisée sur des robots flexibles à architecture série [SICILIANO et KHATIB, 2008; SPONG et collab., 1985]. Plus récemment, cette approche a également été proposée pour simuler des RPC avec un modèle de câble sans masse inélastique et élastique dans [KHOSRAVI et TAGHIRAD, 2014]. Il est montré qu'en simulation, tenir compte dans le modèle de l'élasticité des câbles améliore grandement la stabilité de la commande proposée. La réponse du robot pour une commande calculée avec des câbles rigides est comparée à celle calculée pour des câbles élastiques. Une démonstration de la stabilité globale du système utilisant la théorie de Lyapunov est également proposée dans cet article.

# Chapitre 2

## Modélisation

« Une théorie qui n'est réfutable par aucun événement qui se puisse concevoir est dépourvue de caractère scientifique. Pour les théories, l'irréfutabilité n'est pas (comme on l'imagine souvent) vertu mais défaut. »

---

Karl Popper

### Sommaire

---

<b>2.1 Introduction</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.2 Loi de mouvement d'un robot parallèle à câbles avec roues à inertie</b> . . .	<b>25</b>
2.2.1 Notations . . . . .	26
2.2.2 Notions de mécanique utilisées . . . . .	27
2.2.3 Cas de l'effecteur sans roues à inertie . . . . .	28
2.2.4 Cas d'un robot à câbles muni d'une seule roue à inertie . . . . .	29
2.2.5 Cas d'un robot à câbles muni de plusieurs roues à inertie . . . . .	34
2.2.6 Modélisation du robot parallèle à câbles . . . . .	35
<b>2.3 Modélisation des câbles</b> . . . . .	<b>38</b>
2.3.1 Hypothèses . . . . .	38
2.3.2 Problème de la portion de câble enroulée . . . . .	39
2.3.3 Modèle élastique linéaire . . . . .	39
<b>2.4 Analyse des vibrations</b> . . . . .	<b>40</b>
2.4.1 Hypothèses . . . . .	41
2.4.2 Linéarisation du modèle dynamique . . . . .	41
2.4.3 Analyse Modale . . . . .	45
<b>2.5 Amortissement actif de vibrations</b> . . . . .	<b>47</b>
2.5.1 Fonction de transfert dans l'espace modal . . . . .	47
2.5.2 Fonction de transfert en boucle ouverte du système complet . . . . .	48

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre décrit les modèles mathématiques exploités dans cette thèse, ainsi que les hypothèses pour lesquelles ils sont considérés comme valides. L'objectif est de fournir une description théorique des vibrations observées lors de l'utilisation des RPC et de la manière de réaliser un amortissement actif de celles-ci.

Dans un premier temps, les outils de la mécanique classique sont exploités pour obtenir le modèle dynamique ou la loi de mouvement de l'effecteur d'un RPC sur lequel peuvent être embarquées une ou plusieurs roues à inertie. Le type des câbles et le fait que les poulies soient embarquées ou non n'ont pas besoin d'être précisés ici.

Dans un second temps, la modélisation des câbles est discutée. Ceux-ci sont supposés très légers par rapport à l'effecteur, ce qui permet le choix d'un modèle élastique.

Par la suite, les vibrations mécaniques sont décrites par les techniques de l'analyse modale à l'aide du modèle dynamique linéarisé et du modèle choisi pour les câbles.

Enfin, un schéma de commande pour l'amortissement actif de vibrations est proposé. La commande peut être appliquée sur les poulies et éventuellement sur des roues à inertie supplémentaires embarquées sur l'effecteur. La modélisation des vibrations est utilisée pour exprimer le comportement mécanique du RPC en termes de fonctions de transfert découplées dans le formalisme de l'automatique.

Dans ce chapitre et dans le reste du manuscrit, les grandeurs scalaires sont représentées en minuscules normales, les vecteurs en minuscules grasses et les matrices en majuscules grasses. Les vecteurs exprimant une force ou un moment exercés sur un solide (comme  $\mathbf{F}(\mathbf{r}/\mathbf{p})$ ) en majuscules grasses font exception à cette règle

## 2.2 Loi de mouvement d'un robot parallèle à câbles avec roues à inertie

Nous proposons une approche très peu exploitée pour l'instant en robotique parallèle à câbles en embarquant des actionneurs sur l'effecteur du robot. Seul un brevet de 1996 a exploité cette idée jusque là [THOMPSON et CAMPBELL, 1996]. Dans cette optique, il est aisé au niveau de l'intégration mécanique d'ajouter en supplément aux moteurs d'enroulement des câbles d'autres actionneurs sur l'effecteur. Nous avons ainsi testé l'idée d'embarquer des roues à inertie produisant des couples sur la plateforme, afin de rejeter des vibrations parasites.

Une roue à inertie est un ensemble mécanique en rotation autour d'un axe par rapport à un système sur lequel on cherche à produire des couples. Contrairement à un système gyroscopique qui produit des couples sur un axe orthogonal à son axe de rotation grâce à sa vitesse de rotation, la roue à inertie produit des couples sur son axe de rotation via le principe de réaction de Newton. Le couple exercé sur le système par une roue à inertie est directement l'opposé du couple moteur appliqué sur cette roue, aux frottements près.

Des poulies motorisées embarquées sur la plateforme d'un RPC constituent ainsi également des roues à inerties. Si l'effet de réaction produit par les poulies n'est pas négligeable, il est possible d'en tenir compte dans le modèle en considérant une roue à inertie supplémentaire pour chaque poulie motorisée.

Cet ajout de pièces mobiles et actionnées sur l'effecteur d'un RPC a pour effet de rendre son modèle mécanique plus complexe. Dans cette partie, les modèles mécaniques de l'effecteur d'un RPC, sans roue à inertie embarquée, avec une roue embarquée, et avec un nombre quelconque de roues embarquées, sont présentés.

### 2.2.1 Notations

Le schéma de l'effecteur d'un tel robot et les notations mécaniques utilisées dans la suite apparaissent sur la figure 2.1.

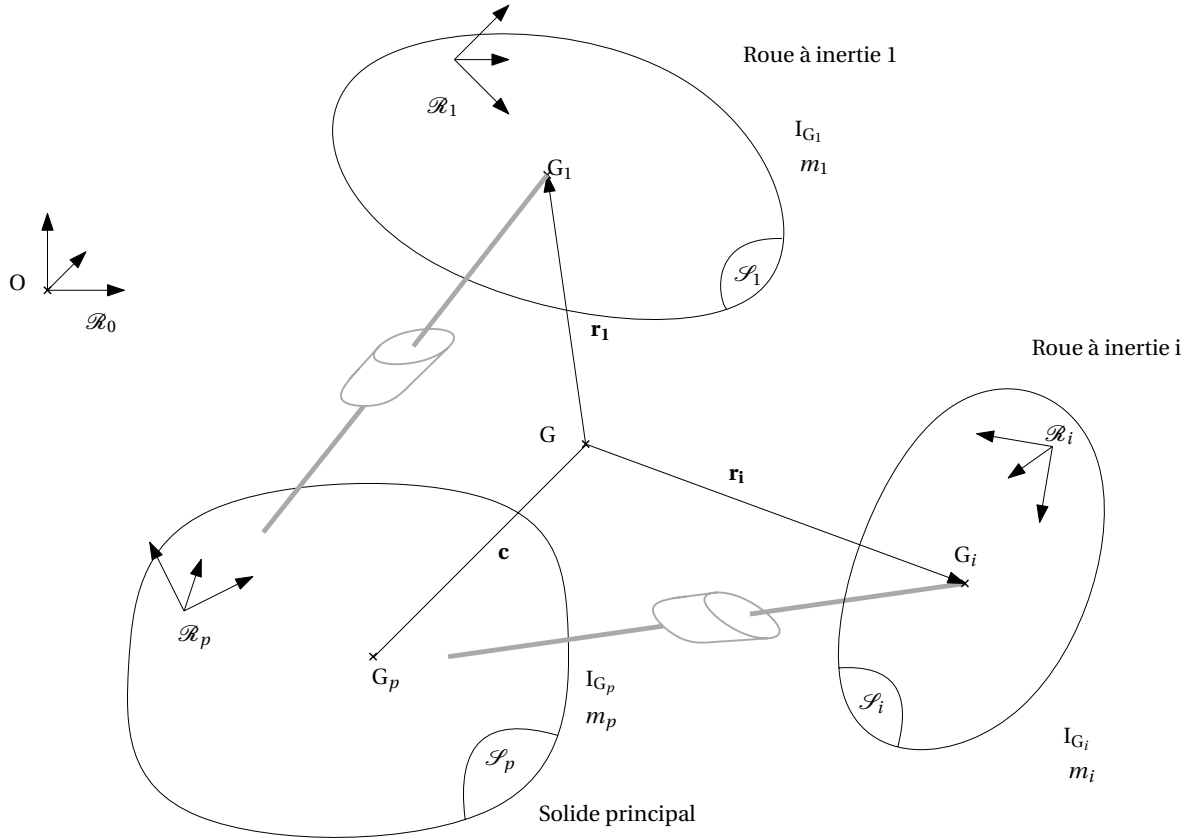


Figure 2.1 – Schéma d'un RPC à plusieurs roues à inertie

Un repère galiléen  $\mathcal{R}_0$  de centre  $O$  est attaché au monde.

L'effecteur du robot est représenté par un solide principal  $\mathcal{S}_p$  de centre de gravité  $G_p$  et de masse  $m_p$ , ainsi que de  $n$  roues à inertie notées  $\mathcal{S}_i$ ,  $i$  entier compris entre 1 et  $n$ , liée chacune au solide  $\mathcal{S}_p$  uniquement.

Le centre de gravité de l'ensemble des solides constituant l'effecteur est noté  $G$ . La position de  $G$  par rapport à  $O$  est repérée par le vecteur  $\mathbf{p}$ .

Le repère  $\mathcal{R}_p$  est attaché au solide  $\mathcal{S}_p$  au point  $G_p$ . Les câbles sont tous liés par une extrémité à  $\mathcal{R}_0$  et par l'autre à  $\mathcal{R}_p$ . Leur action sur l'effecteur est modélisée ici comme un effort extérieur des câbles sur le solide  $\mathcal{S}_p$ .

Le vecteur vitesse de rotation du repère  $\mathcal{R}_p$  par rapport au monde  $\omega(p/0)$  est noté  $\mathbf{w}_p$ .

Aucune restriction n'est imposée sur le mouvement du repère  $\mathcal{R}_p$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  a priori. La pesanteur et les forces de traction des câbles constituent les forces extérieures considérées agissant sur l'ensemble de l'effecteur. Le vecteur de l'accélération de la pesanteur est noté  $\mathbf{g}$ .

Le solide  $\mathcal{S}_i$  est mécaniquement lié à  $\mathcal{S}_p$  par une liaison de type pivot, autorisant le seul mouvement de rotation de la roue autour d'un axe de rotation appartenant à  $\mathcal{S}_p$ . La roue à inertie  $i$  possède un centre de gravité  $G_i$  et une masse  $m_i$ .

## 2.2.2 Notions de mécanique utilisées

La loi de mouvement d'un solide est obtenue en combinant les équations fournies par le **Théorème de la Résultante Dynamique (TRD)** et le **Théorème du Moment Dynamique (TMD)**. Ces deux théorèmes représentent une formulation des lois de mécanique de Newton appliquées aux solides rigides dans laquelle les termes mathématiques sont exprimés comme des vecteurs ou des torseurs.

La résultante du torseur dynamique correspond au mouvement d'un solide rigide en réaction aux forces appliquées sur celui-ci. Le moment du torseur dynamique en un point d'un solide correspond au mouvement de ce point du solide en réaction aux moments et couples appliqués sur ce solide.

Pour déterminer la résultante et le moment dynamique en un point A d'un solide, il est nécessaire de connaître les vitesses, accélérations, vecteur vitesse de rotation, masse et tenseur d'inertie, ainsi que la position du point A par rapport au centre de gravité du solide.

Le vecteur vitesse du point A dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , noté  $\mathbf{v}(A/0)$ , est obtenu par dérivation par rapport au temps du vecteur position  $\overrightarrow{OA}$  de ce point dans ce même repère.

La notation  $\frac{{}^0d}{dt}\mathbf{v}$  indique la dérivation d'un vecteur  $\mathbf{v}$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ . Si A est fixe dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , alors la dérivée  $\frac{{}^0d}{dt}\mathbf{v}$  est nulle. La **formule de Bour** permet de modifier le repère de dérivation d'un vecteur :

$$\frac{{}^0d}{dt}\mathbf{v} = \frac{{}^1d}{dt}\mathbf{v} + \omega(1/0) \times \mathbf{v} \quad (2.1)$$

Le symbole  $\times$  représente le produit vectoriel.

Cette notion de repère de dérivation est importante car les lois de Newton sont valides uniquement dans un repère galiléen. Ainsi nous chercherons à exprimer tous les termes calculés par la suite dans le repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

Le vecteur accélération noté  $\boldsymbol{\gamma}(A/0)$  est lui-même obtenu par dérivation du vecteur vitesse par rapport au temps. La résultante dynamique d'un solide est égale au produit de sa masse et de l'accélération de son centre d'inertie.

Le vecteur vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}(i/j)$  d'un repère  $\mathcal{R}_i$  par rapport à un repère  $\mathcal{R}_j$  est défini par un vecteur colinéaire à l'axe instantané de rotation dont la norme est égale à la vitesse de rotation entre ces deux repères. Le vecteur vitesse de rotation et le vecteur vitesse sont respectivement la résultante et le moment du torseur cinématique.

Le moment cinétique  $\boldsymbol{\sigma}_A(i/0)$  au centre d'inertie d'un solide  $\mathcal{S}_i$  s'obtient en multipliant le tenseur d'inertie de ce solide au vecteur vitesse de rotation du solide par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ . Ce terme est analogue pour les rotations à la notion de quantité de mouvement pour une masse en translation. La quantité de mouvement, produit de la masse et de la vitesse du centre de gravité, et le moment cinétique correspondent à la résultante et moment du torseur cinétique.

Le moment dynamique  $\boldsymbol{\delta}_A(i/0)$  au centre d'inertie du solide considéré s'obtient par dérivation temporelle du moment cinétique. La résultante et le moment dynamique sont les éléments de réduction du torseur dynamique.

Les moments cinétiques et dynamiques sont calculés de préférence au centre d'inertie du solide considéré, faute de quoi leur expression mathématique contient des termes supplémentaires dont le calcul comme l'interprétation sont malaisés.

Les torseurs présentent tous une propriété très intéressante dans la mécanique des solides : l'**équi-projectivité**. Connaissant la résultante  $\mathbf{r}$  et le moment  $\mathbf{m}_A$  en un point A,

le moment en un autre point B du même solide s'obtient par :

$$\mathbf{m}_B = \mathbf{m}_A + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{r} \quad (2.2)$$

Le tenseur d'inertie  $\bar{\mathbf{I}}_A(i)$  caractérise la répartition géométrique de la masse d'un solide  $\mathcal{S}_i$  autour d'un point A. Il s'exprime comme une matrice carrée définie positive de 3 lignes et colonnes. Il joue pour les rotations le rôle de la masse du solide pour les translations.

### 2.2.3 Cas de l'effecteur sans roues à inertie

Le cas de l'effecteur d'un RPC composé d'un seul solide rigide est traité ici. Le centre d'inertie de ce solide  $G_p$  correspond ainsi à celui de l'effecteur dans son ensemble G.

La vitesse du centre d'inertie de l'effecteur dans le repère monde est donnée par :

$$\mathbf{v}(G_p/0) = \frac{{}^0d}{dt}\mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}} \quad (2.3)$$

De même l'accélération du point  $G_p$  dans le repère monde est :

$$\gamma(G_p/0) = \frac{{}^0d}{dt}\dot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{p}} \quad (2.4)$$

Notant  $\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur,  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{n}$  la force et le moment en  $G_p$  exercés par les câbles sur l'effecteur du robot, le TRD nous donne une première équation vectorielle :

$$\begin{aligned} m_p \gamma(G_p/0) &= \Sigma F(\text{extérieures}/p) \\ m_p \ddot{\mathbf{p}} &= m_p \mathbf{g} + \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le moment cinétique de l'effecteur exprimé en son centre de gravité s'exprime par :

$$\sigma_{G_p}(p/0) = \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) \mathbf{w}_p \quad (2.6)$$

Le moment dynamique s'obtient par dérivation du moment cinétique si exprimé au centre de gravité du solide, d'où :

$$\delta_{G_p}(p/0) = \frac{{}^0d}{dt} \sigma_{G_p}(p/0) \quad (2.7)$$

La dérivation temporelle du tenseur d'inertie est très fastidieuse dans un repère où le solide est en mouvement. Aussi, pour simplifier le calcul, la dérivation est réalisée dans le repère lié à l'effecteur  $\mathcal{R}_p$  grâce à la relation (2.1) :

$$\frac{{}^0d}{dt} \sigma_{G_p}(p/0) = \frac{{}^p d}{dt} \sigma_{G_p}(p/0) + \omega(p/0) \times \sigma_{G_p}(p/0) = \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) \dot{\mathbf{w}}_p + \mathbf{w}_p \times \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) \mathbf{w}_p \quad (2.8)$$

Le TMD appliqué au point  $G_p$  et au solide  $\mathcal{S}_p$  nous donne la seconde équation vectorielle :

$$\begin{aligned} \delta_{G_p}(p/0) &= \Sigma M_{G_p}(\text{extérieures}/p) \\ \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) \dot{\mathbf{w}}_p + \mathbf{w}_p \times \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) \mathbf{w}_p &= \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.9)$$

En regroupant les équations (2.5) et (2.9) sous forme matricielle, on trouve la formule classique de Newton-Euler :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_p \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_p \times \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) \mathbf{w}_p \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$\mathbf{w}_p^x$  représente la matrice antisymétrique comprenant les coordonnées  $(w_x w_y w_z)$  du vecteur  $\mathbf{w}_p$  disposées de la manière suivante :

$$\mathbf{w}_p^x = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Le produit matriciel entre  $\mathbf{w}_p^x$  et un vecteur quelconque est égal au produit vectoriel entre  $\mathbf{w}_p$  et ce même vecteur.

La notation  $\mathbf{0}$  désigne un vecteur nul ou bien une matrice nulle de dimension adéquate pour que les expressions matricielles soient cohérentes. De même, la notation  $\mathbf{I}$  représente une matrice identité de dimension adéquate.

## 2.2.4 Cas d'un robot à câbles muni d'une seule roue à inertie

L'unique roue à inertie considérée dans un premier temps est représentée par un solide  $\mathcal{S}_r$  de masse  $m_r$  et de centre d'inertie  $G_r$  auquel est attaché un repère  $\mathcal{R}_r$ , en rotation par rapport au solide  $\mathcal{S}_p$  autour d'un axe fixe dans  $\mathcal{R}_p$ . La roue à inertie est ici supposée liée à l'effecteur en son centre d'inertie  $G_r$ , ce qui est normalement vérifié en pratique lors de la conception mécanique d'une roue à inertie (l'objectif d'un tel système est en effet de produire des couples uniquement sur son axe de rotation et un comportement asymétrique de la roue à inertie génère des efforts non désirés sur le reste du système mécanique). Le vecteur vitesse de rotation  $\omega(r/p)$  du solide  $\mathcal{S}_r$  par rapport au solide  $\mathcal{S}_p$  est noté  $\mathbf{w}_r$ . Le vecteur  $\overrightarrow{GG_p}$  est noté  $\mathbf{c}$  et le vecteur  $\overrightarrow{GG_r}$  est noté  $\mathbf{r}$ .

La figure 2.2 illustre les notations utilisées dans cette section.

### Torseur dynamique du solide $\mathcal{S}_p$

Calculons dans un premier temps la résultante et le moment dynamique en  $G$  du solide  $\mathcal{S}_p$ , sachant que  $G$ , centre de gravité de l'effecteur, est maintenant distinct de  $G_p$ , centre d'inertie de  $\mathcal{S}_p$ . Ainsi le vecteur  $\overrightarrow{OG_p}$  est égal à  $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GG_p} = \mathbf{p} + \mathbf{c}$ .

La vitesse du centre d'inertie du solide principal  $\mathcal{S}_p$  de l'effecteur par rapport au repère de base  $\mathcal{R}_0$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(G_p/0) &= \frac{{}^0 d}{dt} \overrightarrow{OG_p} = \frac{{}^0 d}{dt} (\mathbf{p} + \mathbf{c}) \\ &= \dot{\mathbf{p}} + \frac{{}^0 d}{dt} \mathbf{c} \\ &= \dot{\mathbf{p}} + \frac{{}^p d}{dt} \mathbf{c} + \mathbf{w}_p \times \mathbf{c} \\ &= \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{w}_p \times \mathbf{c} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le vecteur  $\mathbf{c}$  étant lié au repère  $\mathcal{R}_p$ , qui est mobile par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ , la formule de Bour est utilisée pour remplacer le terme  $\frac{{}^0 d}{dt} \mathbf{c}$  par  $\frac{{}^p d}{dt} \mathbf{c} + \mathbf{w}_p \times \mathbf{c}$ . Le premier terme de la substitution  $\frac{{}^p d}{dt} \mathbf{c}$  est nul, car  $\mathbf{c}$  est fixe dans le repère  $\mathcal{R}_p$ , et le second  $\mathbf{w}_p \times \mathbf{c}$  utilise uniquement des éléments connus.

L'accélération du point  $G_p$  dans le repère de base s'obtient de la même manière à par-



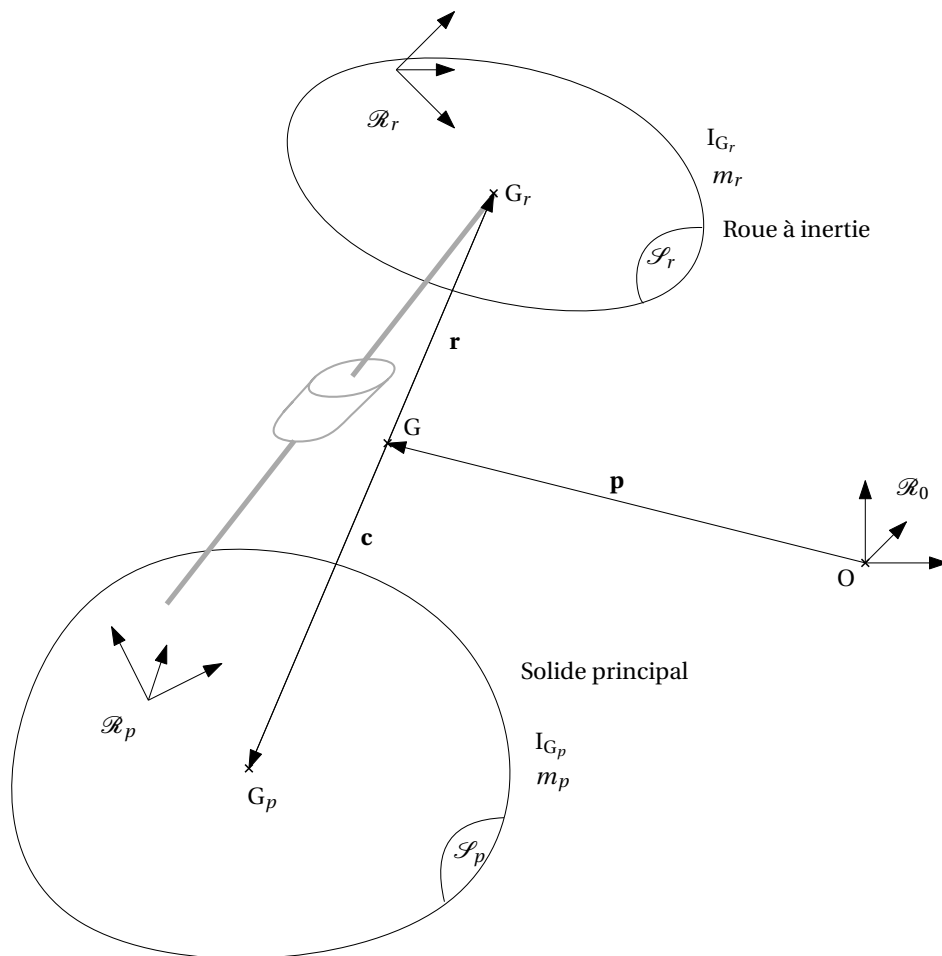


Figure 2.2 – Notations pour le calcul de la loi de mouvement d'un RPC avec une roue à inertie

tir de la vitesse (2.12) :

$$\begin{aligned}
 \gamma(G_p/0) &= \frac{{}^0d}{dt} \mathbf{v}(G_p/0) = \frac{{}^0d}{dt} (\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{w}_p \times \mathbf{c}) \\
 &= \ddot{\mathbf{p}} + \frac{{}^0d}{dt} (\mathbf{w}_p) \times \mathbf{c} + \mathbf{w}_p \times \frac{{}^0d}{dt} (\mathbf{c}) \\
 &= \ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{w}}_p \times \mathbf{c} + \mathbf{w}_p \times (\mathbf{w}_p \times \mathbf{c})
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

La dérivation se comporte en effet avec le produit vectoriel comme avec un produit de scalaires, vérifiant la relation :  $\frac{{}^0d}{dt} (\mathbf{w}_p \times \mathbf{c}) = \frac{{}^0d}{dt} (\mathbf{w}_p) \times \mathbf{c} + \mathbf{w}_p \times \frac{{}^0d}{dt} (\mathbf{c})$ .

Le calcul des moments cinétique et dynamique n'est pas différent du cas précédent :

$$\sigma_{\mathbf{G}_p}(p/0) = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\mathbf{G}_p}(p) \mathbf{w}_p \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{\mathbf{G}_p}(p/0) &= \frac{{}^0d}{dt} \sigma_{\mathbf{G}_p}(p/0) \\
 &= \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\mathbf{G}_p}(p) \dot{\mathbf{w}}_p + \mathbf{w}_p \times \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\mathbf{G}_p}(p) \mathbf{w}_p
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nous cherchons par contre à appliquer le TMD au point G, qui est le centre de gravité de l'effecteur comprenant la roue à inertie. Pour cela, le moment dynamique en G doit être calculé. La propriété d'équi-projectivité des torseurs implique que le torseur dynamique respecte la relation suivante entre sa résultante et son moment en deux points du solide  $\mathcal{S}_p$  :

$$\delta_{\mathbf{G}}(p/0) = \delta_{\mathbf{G}_p}(p/0) + \mathbf{c} \times m_p \gamma(G_p/0) \tag{2.16}$$

### Bilan des efforts sur $\mathcal{S}_p$

Nous nous intéressons tout particulièrement à l'atténuation de vibrations de l'effecteur d'un RPC. Ces vibrations peuvent être causées aussi bien par les dynamiques du robot que par des perturbations extérieures à considérer.

Une liaison de type pivot existe en outre entre la roue à inertie et le solide  $\mathcal{S}_p$ , ce qui conduit à des efforts de liaison entre eux deux.

Les efforts agissant sur  $\mathcal{S}_p$  sont donc les suivants :

- la gravité  $m_p \mathbf{g}$  en  $G_p$ ,
- la force et le moment,  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{n}$ , exercés en G par les câbles,
- la force et le moment exercés par la perturbation extérieure  $\Psi$  et  $\mathbf{M}_\Psi$  et
- la force et le moment exercés par la roue à inertie sur  $\mathcal{S}_p$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{r}/\mathbf{p})$  et  $\mathbf{M}_G(\mathbf{r}/\mathbf{p})$ .

### Application des théorèmes généraux à $\mathcal{S}_p$

En utilisant (2.13), le TRD s'écrit :

$$m_p \mathbf{g} + \mathbf{f} + \Psi + \mathbf{F}(\mathbf{r}/\mathbf{p}) = m_p (\ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{w}}_p \times \mathbf{c} + \mathbf{w}_p \times (\mathbf{w}_p \times \mathbf{c})) \tag{2.17}$$

De même, les équations (2.15) et (2.16) nous permettent d'écrire le TMD :

$$\mathbf{c} \times m_p \mathbf{g} + \mathbf{n} + \mathbf{M}_\Psi + \mathbf{M}_G(\mathbf{r}/\mathbf{p}) = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\mathbf{G}_p}(p) \dot{\mathbf{w}}_p + \mathbf{w}_p \times \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\mathbf{G}_p}(p) \mathbf{w}_p + \mathbf{c} \times m_p (\ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{w}}_p \times \mathbf{c} + \mathbf{w}_p \times (\mathbf{w}_p \times \mathbf{c})) \tag{2.18}$$

En regroupant les équations (2.17) et (2.18) et en les mettant sous forme matricielle, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{g} \\ m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{r}/\mathbf{p}) \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{r}/\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_p \mathbf{I} & -m_p \mathbf{c}^\times \\ \mathbf{c}^\times m_p & \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{c} \\ \mathbf{w}_p^\times (\bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times) \mathbf{w}_p \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Le produit vectoriel respectant l'identité de Jacobi, on peut montrer que  $\mathbf{c}^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{c} = -\mathbf{w}_p^\times \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times \mathbf{w}_p$ .

### Torseur dynamique du solide $\mathcal{S}_r$

Afin d'obtenir la loi de mouvement pour l'ensemble de l'effecteur, nous isolons maintenant le solide  $\mathcal{S}_r$ .

Les éléments de réduction du torseur dynamique de la roue à inertie  $\mathcal{S}_r$  sont calculés dans un premier temps.

La vitesse du centre d'inertie de la roue à inertie dans le repère de base  $\mathcal{R}_0$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(G_r/0) &= \frac{{}^0 d}{dt} \overrightarrow{OG_r} = \frac{{}^0 d}{dt} (\mathbf{p} + \mathbf{r}) \\ &= \dot{\mathbf{p}} + \frac{{}^p d}{dt} \mathbf{r} + \mathbf{w}_p \times \mathbf{r} \\ &= \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{w}_p \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le vecteur  $\mathbf{r}$  est lié au repère  $\mathcal{R}_p$  de même que  $\mathbf{c}$  dans le cas précédent, la forme obtenue à l'équation (2.20) est donc analogue.

L'accélération du point  $G_r$  dans le repère de base s'obtient par dérivation de la vitesse  $\mathbf{v}(G_r/0)$  :

$$\begin{aligned} \gamma(G_r/0) &= \frac{{}^0 d}{dt} \mathbf{v}(G_r/0) \\ &= \frac{{}^0 d}{dt} (\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{w}_p \times \mathbf{r}) \\ &= \ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{w}}_p \times \mathbf{r} + \mathbf{w}_p \times (\mathbf{w}_p \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les moments cinétique et dynamique de la roue à inertie en  $G_r$  comprennent la vitesse de rotation de la roue à inertie par rapport au repère monde  $\omega(r/0)$ , notée  $\mathbf{w}_t$ . Avec  $\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_p + \mathbf{w}_r$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{G_r}(r/0) &= \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_r) \\ &= \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \mathbf{w}_t \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \delta_{G_r}(r/0) &= \frac{{}^0 d}{dt} \sigma_{G_r}(r/0) \\ &= \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \dot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{w}_t \times \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \mathbf{w}_t \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le moment dynamique est transporté en G grâce à la relation d'équi-projectivité des torseurs :

$$\begin{aligned} \delta_G(r/0) &= \delta_{G_r}(r/0) + \mathbf{r} \times m_r \gamma(G_r/0) \\ &= \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \dot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{w}_t \times \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \mathbf{w}_t + \mathbf{r} \times m_r (\ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{w}}_p \times \mathbf{r} + \mathbf{w}_p \times (\mathbf{w}_p \times \mathbf{r})) \end{aligned} \quad (2.24)$$

**Bilan des efforts sur  $\mathcal{S}_r$** 

La roue à inertie est liée uniquement au solide  $\mathcal{S}_p$ , aucun câble n'y est attaché, aucun effort de perturbation n'est considéré, et elle possède une masse  $m_r$ . Les efforts agissant sur  $\mathcal{S}_r$  sont ainsi :

- la gravité  $m_r \mathbf{g}$  en  $G_r$ ,
- la force et le moment exercés par le solide principal  $\mathcal{S}_p$  sur  $\mathcal{S}_r$  en  $G$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{p}/\mathbf{r})$  et  $\mathbf{M}_G(\mathbf{p}/\mathbf{r})$ .

**Application des théorèmes dynamiques à  $\mathcal{S}_r$** 

En utilisant (2.21), le TRD s'écrit :

$$m_r \mathbf{g} + \mathbf{F}(\mathbf{p}/\mathbf{r}) = m_r (\ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{w}}_p \times \mathbf{r} + \mathbf{w}_p \times (\mathbf{w}_p \times \mathbf{r})) \quad (2.25)$$

L'équation (2.24) nous permettent d'écrire le TMD de  $\mathcal{S}_r$  en  $G$  :

$$\mathbf{r} \times m_r \mathbf{g} + \mathbf{M}_G(\mathbf{p}/\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \dot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{w}_t \times \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \mathbf{w}_t + \mathbf{r} \times m_r (\ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{w}}_p \times \mathbf{r} + \mathbf{w}_p \times (\mathbf{w}_p \times \mathbf{r})) \quad (2.26)$$

En mettant (2.25) et (2.26) sous forme matricielle, l'équation suivante est obtenue avec  $\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_p + \mathbf{w}_r$  :

$$\begin{pmatrix} m_r \mathbf{g} \\ \mathbf{r} \times m_r \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{p}/\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{p}/\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_r \mathbf{I} & -m_r \mathbf{r}^\times \\ m_r \mathbf{r}^\times & \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) - m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{r}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_r \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r} \\ m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_t^\times \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \mathbf{w}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \dot{\mathbf{w}}_r \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

**Loi de mouvement de l'effecteur complet**

En sommant les équations (2.19) et (2.27), l'égalité suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_r \mathbf{g} \\ m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{g} \\ m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{p}/\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{p}/\mathbf{r}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{r}/\mathbf{p}) \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{r}/\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_p \mathbf{I} & -m_p \mathbf{c}^\times \\ m_p \mathbf{c}^\times & \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{c} \\ \mathbf{w}_p^\times (\bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times) \mathbf{w}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_r \mathbf{I} & -m_r \mathbf{r}^\times \\ m_r \mathbf{r}^\times & \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) - m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{r}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_r \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r} \\ m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_t^\times \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \mathbf{w}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \dot{\mathbf{w}}_r \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Le moment  $\mathbf{M}_G(\mathbf{p}/\mathbf{r})$  étant l'action réciproque du moment  $\mathbf{M}_G(\mathbf{r}/\mathbf{p})$ , ils sont donc opposés l'un à l'autre, de même que les forces  $\mathbf{F}(\mathbf{p}/\mathbf{r})$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{r}/\mathbf{p})$ . Ce qui nous laisse l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_r \mathbf{g} \\ m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{g} \\ m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_p \mathbf{I} & -m_p \mathbf{c}^\times \\ m_p \mathbf{c}^\times & \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{c} \\ \mathbf{w}_p^\times (\bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times) \mathbf{w}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_r \mathbf{I} & -m_r \mathbf{r}^\times \\ m_r \mathbf{r}^\times & \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) - m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{r}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_r \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r} \\ m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_t^\times \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \mathbf{w}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \dot{\mathbf{w}}_r \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Le point G est le barycentre des points  $G_p$  et  $G_r$  affectés des masses  $m_p$  et  $m_r$ , ce qui implique l'égalité :  $m_p \mathbf{c} + m_r \mathbf{r} = \mathbf{0}$ . La masse étant une grandeur scalaire, elle commute dans les termes de (2.29) avec n'importe quel vecteur ou matrice. La loi de mouvement se simplifie ainsi pour donner l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_r \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} m_p \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_p^\times (\bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times) \mathbf{w}_p \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} m_r \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) - m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{r}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_t^\times \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \mathbf{w}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \dot{\mathbf{w}}_r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

En nommant  $m_t = m_p + m_r$ , la masse totale de l'effecteur et  $\bar{\mathbf{I}}_G(\Sigma) = \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times + \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) - m_r \mathbf{r}^\times \mathbf{r}^\times$  l'inertie totale de l'effecteur en G, l'écriture de la loi de mouvement peut être allégée pour donner :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_t \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_t \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_G(\Sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_p^\times (\bar{\mathbf{I}}_G(\Sigma) - \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r)) \mathbf{w}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_t^\times \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \mathbf{w}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{I}}_{G_r}(r) \dot{\mathbf{w}}_r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

## 2.2.5 Cas d'un robot à câbles muni de plusieurs roues à inertie

L'extension du calcul à plusieurs roues à inertie est décrite dans cette section.

Les notations de la figure 2.1 sont cette fois-ci utilisées, les roues à inerties sont ainsi représentées par des nombres et indicées par la lettre  $i$  dans les équations.

Le point G est maintenant le barycentre de  $G_p$  et de tous les  $G_i$  affecté des masses  $m_p$  et des  $m_i$ , ce qui nous donne l'équation  $m_p \mathbf{c} + \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ .

La seule différence dans les forces s'exerçant sur le solide  $\mathcal{S}_p$  par rapport au cas précédent réside dans les efforts exercés par les roues à inertie. L'équation (2.19) est ainsi reprise ici en y ajoutant les effets des roues supplémentaires :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{g} \\ m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{F}(i/p) \\ \mathbf{M}_G(i/p) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} m_p \mathbf{I} & -m_p \mathbf{c}^\times \\ \mathbf{c}^\times m_p & \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{c} \\ \mathbf{w}_p^\times (\bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times) \mathbf{w}_p \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

La loi de mouvement d'une roue présentée en (2.27) peut être reprise telle quelle. Ce qui nous donne pour la somme des équations des roues :

$$\begin{aligned} \sum_i \begin{pmatrix} m_i \mathbf{g} \\ \mathbf{r}_i^\times m_i \mathbf{g} \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{F}(p/i) \\ \mathbf{M}_G(p/i) \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} m_i \mathbf{I} & -m_i \mathbf{r}_i^\times \\ m_i \mathbf{r}_i^\times & \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i) - m_i \mathbf{r}_i^\times \mathbf{r}_i^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \\ \sum_i \begin{pmatrix} m_i \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r}_i \\ m_i \mathbf{r}_i^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r}_i \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i)^\times \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i) (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i) \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

La somme de l'équation (2.32) et de l'équation (2.33) de chaque roue nous donne un résultat similaire à (2.28) :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} m_i \mathbf{g} \\ m_i \mathbf{r}_i^\times \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{g} \\ m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{p}/\mathbf{i}) \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{p}/\mathbf{i}) \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{i}/\mathbf{p}) \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{i}/\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} m_p \mathbf{I} & -m_p \mathbf{c}^\times \\ m_p \mathbf{c}^\times & \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{c} \\ \mathbf{w}_p^\times (\bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times) \mathbf{w}_p \end{pmatrix} + \\
 \sum_i \begin{pmatrix} m_i & -m_i \mathbf{r}_i^\times \\ m_i \mathbf{r}_i^\times & \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i) - m_i \mathbf{r}_i^\times \mathbf{r}_i^\times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} m_i \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r}_i \\ m_i \mathbf{r}_i^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{w}_p^\times \mathbf{r}_i \end{pmatrix} + \\
 \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i)^\times \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i) (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i) \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Les efforts réciproques entre une roue et le solide  $\mathcal{S}_p$  s'annulant mutuellement, et le point G étant le barycentre de tous les solides de l'effecteur, les simplifications proposées à la section précédentes sont également possibles ici.

La masse totale de l'effecteur  $m_t$  est maintenant égale à  $m_p + \sum_i m_i$ , et l'inertie totale en G,  $\bar{\mathbf{I}}_G(\Sigma) = \bar{\mathbf{I}}_{G_p}(p) - m_p \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times + \sum_i \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i) - \sum_i m_i \mathbf{r}_i^\times \mathbf{r}_i^\times$ .

La forme finale de la loi de mouvement d'un RPC muni de plusieurs roues à inertie est ainsi :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_t \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_t \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_G(\Sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_p^\times (\bar{\mathbf{I}}_G(\Sigma) - \sum_i \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i)) \mathbf{w}_p \end{pmatrix} + \\
 \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i)^\times \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i) (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i) \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

## 2.2.6 Modélisation du robot parallèle à câbles

Les notations utilisées pour la modélisation des RPCs sont présentées sur la Figure 2.3.

Les points  $A_i$  appartiennent au repère fixe et constituent les points d'attache ou de sortie de poulie des câbles sur le cadre. Les points  $B_i$  appartiennent au repère du robot et constituent les points d'attache ou de sortie de poulie des câbles sur l'effecteur.

Le vecteur  $\mathbf{u}_i$  est le vecteur unitaire définissant la direction du câble au niveau de l'effecteur (la direction du câble varie en effet sur sa longueur en cas d'affaissement) dans le sens du repère fixe vers le repère mobile du robot.

Le vecteur  $\mathbf{b}_i$  est le vecteur partant du centre de gravité de l'effecteur G et pointant vers le point  $B_i$ .

Soit  $\mathbf{R}_{0p}$  la matrice de rotation du repère de base  $\mathcal{R}_0$  vers le repère mobile de l'effecteur  $\mathcal{R}_p$ . La matrice  $\mathbf{I}_g$  représentant le tenseur d'inertie de l'effecteur  $\bar{\mathbf{I}}_G(\Sigma)$  dans le repère fixe est liée à la matrice  $\mathbf{I}_p$  le représentant dans le repère mobile de l'effecteur par la relation suivante :

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{R}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{R}_{0p}^T \tag{2.36}$$

Notons  $\mathbf{I}_c$  la matrice représentant le tenseur d'inertie  $\bar{\mathbf{I}}_G(\Sigma) - \sum_i \bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i)$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , et  $\mathbf{I}_i$  la matrice représentant le tenseur d'inertie  $\bar{\mathbf{I}}_{G_i}(i)$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

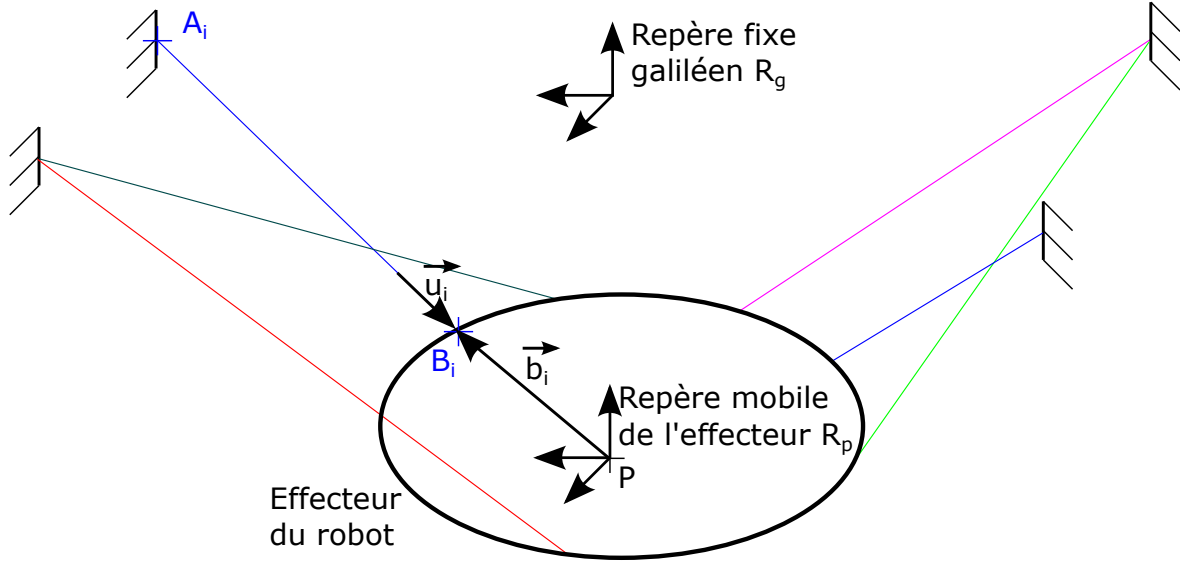


Figure 2.3 – Notations utilisées pour la modélisation des RPCs

La loi de mouvement présentée en (2.35) est ainsi réécrite comme :

$$\begin{pmatrix} m_t \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_p^\times \mathbf{I}_c \mathbf{w}_p \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i)^\times \mathbf{I}_i (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_t \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Notons  $\mathbf{J}$  le Jacobien inverse d'un RPC. Le Jacobien est la matrice faisant le lien entre les vitesses articulaires et opérationnelles d'un robot. Les vitesses articulaires sont ici les  $\dot{\mathbf{l}}_1 = [\dots \dot{l}_{1_i} \dots]^\top$ , c'est à dire les dérivées temporelles des distances  $A_i B_i$  entre les points de sortie et de fixation au bâti des câbles.  $\mathbf{J}$  respecte ainsi la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{l}}_1 = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{w}_p \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

La transposée du Jacobien inverse  $\mathbf{J}^\top$  fait en outre le lien entre les tensions des câbles  $\tau$  et les efforts  $\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}$  appliqués par les câbles sur l'effecteur :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^\top \tau \quad (2.39)$$

L'équation (2.39) permet d'écrire la loi de mouvement en fonction de  $\mathbf{J}$  :

$$\begin{pmatrix} m_t \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_p^\times \mathbf{I}_c \mathbf{w}_p \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i)^\times \mathbf{I}_i (\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^\top \tau + \begin{pmatrix} m_t \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

La pose d'un robot désigne un vecteur combinant la position et l'orientation de son effecteur par rapport à un repère de base  $\mathcal{R}_0$ . Notons  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \theta \end{pmatrix}$  la pose du RPC étudié,

dont l'orientation peut être décrite par les angles d'Euler par exemple. La dérivée temporelle de la représentation de l'orientation d'un solide  $\dot{\theta}$  et son vecteur vitesse de rotation  $\mathbf{w}_p$  dans le même repère ne sont pas égaux. Ils sont reliés entre eux par une matrice jacobienne dépendante de la représentation choisie et de l'orientation courante du solide que nous appellerons  $\mathbf{S}(\theta)$ , telle que :

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{S}(\theta)\dot{\theta} \quad (2.41)$$

Dans le cas particulier où l'orientation du repère mobile est identique à celle du repère fixe (rotation nulle), la matrice  $\mathbf{S}$  est l'identité, et il est possible de l'omettre. Ce cas particulièrement commode pour les développements théoriques est fréquemment utilisé dans la littérature scientifique. La dérivée temporelle du vecteur vitesse de rotation  $\mathbf{w}_p$  peut s'exprimer en fonction de l'orientation du robot de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{w}}_p = \dot{\mathbf{S}}(\theta)\dot{\theta} + \mathbf{S}(\theta)\ddot{\theta} \quad (2.42)$$

En utilisant les égalités (2.41) et (2.42), la loi de mouvement (2.40) est reformulée comme :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} m_t \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{s}}\dot{\theta} + \mathbf{S}\ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{S}\dot{\theta}) \times \mathbf{I}_c \mathbf{S}\dot{\theta} \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{S}\dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \times \mathbf{I}_i (\mathbf{S}\dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix} = \\ & - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix} - \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} + \begin{pmatrix} m_t \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Il est possible d'organiser l'équation (2.43) en fonction de  $\ddot{\mathbf{x}}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} m_t \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_g \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_g \dot{\mathbf{S}}\dot{\theta} + (\mathbf{S}\dot{\theta}) \times \mathbf{I}_c \mathbf{S}\dot{\theta} \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{S}\dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \times \mathbf{I}_i (\mathbf{S}\dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix} = \\ & - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix} - \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} + \begin{pmatrix} m_t \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Soit  $\mathbf{S}'$  la matrice de transformation entre la dérivée temporelle de la pose  $\dot{\mathbf{x}}$  et le torseur cinématique de l'effecteur  $\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{w}_p \end{pmatrix}$  telle que  $\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{w}_p \end{pmatrix} = \mathbf{S}'\dot{\mathbf{x}}$ .  $\mathbf{S}'$  est ainsi de la forme suivante :

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Soit  $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}\mathbf{S}'$  la matrice liant les vitesses opérationnelles  $\dot{\mathbf{x}}$  et les vitesses articulaires  $\dot{\mathbf{i}}_1$  par la relation :

$$\dot{\mathbf{i}}_1 = \tilde{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{x}} \quad (2.46)$$

Si la définition de  $\tilde{\mathbf{J}}$  est transposée, nous obtenons :

$$\tilde{\mathbf{J}}^T = (\mathbf{J}\mathbf{S}')^T = \mathbf{S}'^T \mathbf{J}^T \quad (2.47)$$

L'équation (2.44) est multipliée à gauche par  $\mathbf{S}'^T$ , ce qui nous donne, en utilisant (2.47) :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} m_t \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \mathbf{I}_g \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T (\mathbf{I}_g \dot{\mathbf{S}}\dot{\theta} + (\mathbf{S}\dot{\theta}) \times \mathbf{I}_c \mathbf{S}\dot{\theta}) \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T (\mathbf{S}\dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \times \mathbf{I}_i (\mathbf{S}\dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix} = \\ & - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix} - \tilde{\mathbf{J}}^T \boldsymbol{\tau} + \begin{pmatrix} m_t \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{S}'^T \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{M}_\Psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$



La loi de mouvement (2.48) peut ainsi s'exprimer en fonction de la pose, des tensions des câbles, des vitesses de rotation des roues à inertie :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) = -\tilde{\mathbf{J}}^T \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\psi}' - \mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \dot{\mathbf{w}}_1, \dots, \dot{\mathbf{w}}_n) \quad (2.49)$$

Avec :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} m_t \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \mathbf{I}_g \mathbf{S} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \mathbf{I}_g \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \dot{\theta})^\times (\mathbf{I}_c \mathbf{S}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\psi}' = (\mathbf{S}')^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \mathbf{M}_\psi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -m_t \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \dot{\mathbf{w}}_1, \dots, \dot{\mathbf{w}}_n) = \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \dot{\theta} + \mathbf{w}_i)^\times \mathbf{I}_i (\mathbf{S} \dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix} + \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix}$$

## 2.3 Modélisation des câbles

### 2.3.1 Hypothèses

Les RPC concernés par notre travail et par les développements théoriques présentés par la suite présentent une caractéristique commune : le rapport entre le poids de leur effecteur et celui de leurs câbles est très important (typiquement supérieur à 1000). Dans le deuxième chapitre de sa thèse, Bouchard propose des outils précis pour déterminer si les effets de l'affaissement sont effectivement négligeables [BOUCHARD, 2008].

Cette caractéristique nous permet d'utiliser un modèle mécanique de câble purement élastique, dans lequel l'affaissement (sagging en anglais) des câbles est négligé. En l'absence de cette hypothèse, les mécaniciens retiennent le modèle de la caténaire élastique décrite par Irvine dans [IRVINE, 1981].

Le facteur discriminant est ici le poids et non la masse, ce qui permet d'envisager l'utilisation de tels robots dans des conditions de pesanteur différentes. Dans le cadre d'une application spatiale par exemple, la force de pesanteur n'est pas présente, ainsi les poids de l'effecteur et des câbles sont nuls. Par conséquent, l'affaissement, qui est exprimé en fonction du poids, est négligeable. Il en va de même lorsque le rapport entre le poids de l'effecteur et celui des câbles est considéré comme important.

Pour respecter notre hypothèse de départ, utiliser des câbles de faible diamètre semble judicieux. Qui plus est, il existe pour chaque type de câble un rayon d'enroulement minimal qui le préserve d'une déformation permanente. Rayon qu'il faut impérativement respecter au risque de sortir des hypothèses de validité du modèle élastique. En dehors de ce cadre, le choix du modèle devrait tenir compte de la déformation plastique, bien plus complexe, moins connue et très dépendante du matériau utilisé pour les câbles. Une règle empirique impose un diamètre de câble inférieur au dixième du rayon de la poulie. Nos câbles ayant un diamètre faible, cela nous permet d'utiliser de petites poulies, ce qui garantit une compacité optimisée de l'effecteur qui les embarque. Le seul inconvénient de nos câbles fins réside dans leur résistance mécanique diminuée comparé à des câbles plus gros.

La masse des câbles étant négligée dans notre étude, les éventuelles vibrations transverses des câbles ne seront pas considérées (voir à ce sujet [DIAO et MA, 2009]).

### 2.3.2 Problème de la portion de câble enroulée

La modélisation de la partie enroulée du câble est rarement traitée en robotique parallèle à câbles. Si l'état de tension de la partie aérienne d'un câble est le même sur toute sa longueur tant que le câble est rectiligne, ce n'est pas le cas de la partie enroulée.

Le frottement statique entre le câble et la poulie autorise un élément de câble à être à l'équilibre alors qu'il subit un effort différent de la part des deux éléments de câble adjacents. Ce phénomène occasionne une variation de l'état de tension du câble tout du long de sa partie enroulée, tension qui dépend de l'effort appliqué à la partie aérienne du câble au moment où l'élément de câble concerné s'est immobilisé sur la poulie. Il existe ainsi un effet de « mémoire de tension » dans la partie enroulée d'un câble [SNOW, 1993].

En outre, la portion de câble enroulée proche du point de sortie est affectée par un phénomène de glissement du câble sur la poulie. Le profil de tension de cette portion suit une courbe exponentielle, paramétrée par le coefficient de frottement dynamique câble/poulie, entre la tension de l'élément de câble non-glissant le plus proche et la partie aérienne du câble.

L'hypothèse la plus couramment employée pour modéliser ce phénomène, et que nous respecterons également dans ce manuscrit, suppose que la portion enroulée du câble l'est toujours à une tension nulle, ce qui implique que le mouvement de la poulie modifie directement la longueur à vide  $l_2$ .

### 2.3.3 Modèle élastique linéaire

Cette section présente le modèle mécanique adopté pour décrire le comportement d'un câble tendu entre la poulie d'une part et le point d'attache d'autre part. Il faut noter que l'un de ces deux points se situe sur l'effecteur auquel est adjoint un repère mobile, et que l'autre est lié à un repère fixe.

Le modèle linéaire élastique est mathématiquement le moins complexe. Il ne prend pas en compte l'affaissement, mais modélise l'allongement sous charge. Il considère un facteur scalaire de proportionnalité entre la tension auquel il est soumis et son allongement.

L'allongement  $\epsilon$  correspond à la différence en mètres entre la longueur à vide, c'est à dire lorsque la tension est nulle, et la longueur en charge. La longueur à vide par la suite sera notée  $l_2$  et la longueur en charge du câble notée  $l_1$  :  $\epsilon = l_1 - l_2$ . La tension en Newtons à laquelle est soumis le câble est notée  $\tau$ .

Un câble de longueur connue présente une raideur  $k_c$ . Quand le câble considéré est mécaniquement homogène sur la longueur considérée (même matériau et diamètre constant),  $k_c$  peut s'écrire comme le rapport d'une raideur spécifique  $k_s$  en Newtons et de sa longueur à vide  $l_2$  :

$$\tau = \epsilon k_c = \epsilon \frac{k_s}{l_2} \quad (2.50)$$

Ceci implique notamment que dérouler une longueur donnée de câble, ce qui revient à accroître  $l_2$ , a pour effet de rendre ce câble moins rigide.

La raideur spécifique  $k_s$  d'un câble homogène dépend du matériau duquel il est composé, de son procédé de mise en forme et de l'éventuel agencement de plusieurs filaments dans le cas d'un câble tressé.

Considérons par exemple un fil de pêche de 0,2 mm de diamètre présentant une raideur spécifique  $k_s$  de 140 N qui soutient une masse de 1 kg. Sur terre, il est soumis par la pesanteur à une tension  $\tau$  d'environ 10 N.

Si la longueur du fil avant d'y attacher la charge  $l_2$  est de 1 m, sa raideur  $k_c$  est de  $\frac{140}{1} = 140 \text{Nm}^{-1}$ . Pour une longueur à vide  $l_2$  de 10 m, sa raideur  $k_c$  n'est plus que de  $14 \text{Nm}^{-1}$ , et pour une longueur à vide de 0,1 m,  $k_c$  atteint  $1400 \text{Nm}^{-1}$ .

L'allongement du fil pour une tension de 10 N pour les 3 longueurs proposées est respectivement de  $\frac{10}{140} = 0,071 \text{m}$ , de  $\frac{10}{14} = 0,71 \text{m}$  et de  $\frac{10}{1400} = 0,0071 \text{m}$ .

Ainsi, pour un RPC de grandes dimensions, la raideur des câbles, et par suite du robot, peut se révéler très faible comparée à celle d'un robot aux dimensions moindres. À l'inverse, un câble dont la partie aérienne est très courte va présenter une raideur très forte, ce cas survient quand le robot approche des limites de son espace de travail.

Dans un câble homogène mono-filament (à un seul brin), la raideur spécifique du câble peut se déterminer à partir du modèle de Young  $e$  en  $\text{Nm}^{-2}$  du matériau et de l'aire de la section du câble  $s$  en  $\text{m}^2$  :

$$k_c = \frac{k_s}{l_2} = \frac{es}{l_2} \quad (2.51)$$

Le modèle linéaire de l'élasticité des câbles est soumis à des hypothèses fortes. Le choix du type de câbles détermine les approximations auxquelles le modèle est sujet. D'autre part, il est impératif de rester dans les limites d'élasticité du matériau considéré. Idéalement ce modèle correspond à celui d'un câble mono-filament, en métal, contraint dans son domaine élastique.

Le travail présenté dans [RIEHL et collab., 2010] montre clairement que les câbles polymères ou tressés présentent souvent des non-linéarités importantes. Néanmoins, il est toujours possible de linéariser cette caractéristique. Dans ce cas, le modèle linéaire est précis si la tension des câbles est maintenue entre des bornes données [RIEHL, 2011]. Cette condition sur les tensions peut être validée par différents algorithmes de gestion des tensions, comme proposés dans [LAMAURY et GOUTTEFARDE, 2012; OH et AGRAWAL, 2005].

## 2.4 Analyse des vibrations

Le comportement élastique des câbles d'un RPC est à l'origine de vibrations de son effecteur. En effet, la longueur d'un câble élastique varie en fonction de la tension auquel il est soumis. De même sa tension varie si un allongement lui est imposé.

Le terme  $-\mathbf{J}^T \tau$  de la loi de mouvement (2.49) correspond à l'influence des tensions des câbles sur la dynamique de l'effecteur. Afin que le robot réalise une tâche, un jeu de tensions est imposé aux câbles par la commande. Le robot ayant une masse non nulle, il accumule de l'énergie cinétique durant ses déplacements. Lorsque la tâche impose l'arrêt du robot, son énergie cinétique le pousse à continuer sa course, et est convertie dans les câbles en énergie potentielle élastique. Les câbles s'allongeant, le robot parcourt encore une certaine distance, jusqu'à un point où toute l'énergie cinétique a été convertie en énergie potentielle. Ensuite, le robot est entraîné dans le sens opposé, l'énergie potentielle élastique des câbles étant reconvertie en énergie cinétique. En l'absence de frottements internes et externes, ce mouvement de va et vient est périodique en fonction du

temps et ne faiblit jamais. En présence de frottements, à chaque cycle l'amplitude du mouvement se réduit, mais la fréquence d'oscillation est conservée.

Plus la raideur des câbles est faible, plus les fréquences de vibrations sont basses et plus l'amplitude de ces vibrations est grande.

### 2.4.1 Hypothèses

Hormis les câbles, différents composants d'un RPC peuvent présenter un comportement flexible. Les axes de sortie des actionneurs, le système de transmission d'efforts aux poulies, les poulies elles-mêmes et la structure mécanique de l'effecteur possèdent une certaine raideur. Certains travaux récents s'attachent à tenir compte de ces effets dans la commande du robot afin de minimiser les vibrations [KRAUS et collab., 2015].

Néanmoins, seul l'effet des raideurs des câbles est considéré dans cette thèse. En utilisant des câbles fins, l'élasticité (ou compliance) des câbles est en effet supérieure de plusieurs ordres de grandeur par rapport à celles des autres éléments du robot. La compliance équivalente à deux éléments compliantés placés en série se détermine en sommant leurs compliances. Les éléments les moins compliantés, donc les plus raides, du RPC sont ainsi approximés comme rigides dans le cadre de l'utilisation de câbles fins très compliantés.

Nos câbles étant par ailleurs supposés de masse négligeable, aucune vibration transverse des câbles n'est considérée. Ce type de vibration, qui produit le son de la guitare notamment, implique en effet que chaque élément de câble possède une inertie afin d'alimenter un mouvement oscillant de cet élément par rapport au reste du câble. Dans le cadre de l'utilisation de câbles bien plus lourds qui présentent une raideur axiale bien plus importante, l'effet de ces vibrations transverses sur un RPC peut toutefois être notable [DIAO et MA, 2009].

### 2.4.2 Linéarisation du modèle dynamique

Pour modéliser les vibrations d'un RPC causées par l'élasticité des câbles, l'analyse modale est utilisée. Cette technique exploite un modèle dynamique linéaire par rapport à la pose pour en tirer des caractéristiques vibratoires. Nous procédons ainsi à une linéarisation du modèle dynamique présenté en (2.49).

#### Modèle dynamique en fonction des longueurs de câble

Le modèle linéaire élastique des câbles permet d'exprimer (2.49) en fonction des positions des moteurs au lieu des tensions de câbles à l'aide de l'équation (2.50). Les tensions des câbles peuvent être calculées à partir des distances entre les points de sortie des câbles sur les poulies et leurs points d'attache  $\mathbf{l}_1$ , et avec les longueurs à vide  $\mathbf{l}_2$ . Ces dernières sont fonction de la quantité de câble enroulée sur les poulies.

En notant le rayon de poulie  $R_p$ , les positions angulaires absolues de ces poulies  $\theta_m$  et  $\mathbf{l}_0$  les longueurs à vide que mesureraient les câbles pour une position angulaire nulle, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{l}_2 = R_p \theta_m + \mathbf{l}_0 \quad (2.52)$$

L'équation (2.52) est un modèle de comportement de l'enroulement des câbles. Cet enroulement est supposé être fait à tension nulle et le rayon de la poulie est supposé constant, ainsi  $\mathbf{l}_2$  est une fonction affine de l'angle de poulie  $\theta_m$ . En toute rigueur, le rayon d'enroulement peut varier avec les couches successives de câble qui se superposent, et la

tension du câble qui s'enroule est strictement positive et varie au cours du temps. Néanmoins, l'allongement en charge d'un câble n'excède généralement pas quelques pour cent, aussi ce modèle est classique dans la littérature.

Soit  $\mathbf{K}(\mathbf{l}_2) = \text{diag}(k_{c_i})$  la matrice diagonale dépendant des longueurs à vide qui contient les raideurs de tous les câbles. L'égalité (2.53) permet de convertir les tensions en longueurs.

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}(\mathbf{l}_2)(\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) \quad (2.53)$$

L'équation dynamique du RPC, avec roues à inertie et avec des câbles de modèle linéaire élastique, exprimée en fonction des longueurs de câbles devient :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{J}}^T \mathbf{K}(\mathbf{l}_2)(\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\psi}' - \mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \dot{\mathbf{w}}_1, \dots, \dot{\mathbf{w}}_n) \quad (2.54)$$

Les distances entre extrémités des câbles  $\mathbf{l}_1$  sont entièrement déterminables à partir du modèle géométrique inverse du robot,  $\mathbf{l}_1$  est donc uniquement fonction de la pose  $\mathbf{x}$ .

Deux approches sont ainsi possibles pour la commande d'un RPC, la première en modulant les tensions des câbles, donc le couple exercé sur les poulies, la seconde en modulant la quantité de câble enroulé, donc la position angulaire des poulies.

### Simplification du modèle des roues à inertie

L'effet des roues à inertie sur la dynamique du RPC s'exprime à travers le terme  $\mathbf{u}_r$  de l'équation (2.54). Cet effet s'exprime comme deux sommes sur le nombre de roues à inerties considérées :

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \dot{\mathbf{w}}_1, \dots, \dot{\mathbf{w}}_n) = \sum_i \left( \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{S}\dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \times \mathbf{I}_i(\mathbf{S}\dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \end{matrix} \right) + \sum_i \left( \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{matrix} \right)$$

La première somme contient des termes de couplage entre les vitesses de rotation de chaque roue et la vitesse de rotation du solide principal de l'effecteur. La seconde contient les couples moteurs exercés sur les roues à inertie.

Deux hypothèses sont introduites à ce stade :

- La matrice d'inertie est diagonale dans la direction de rotation de chaque roue, c'est à dire que la roue à inertie est équilibrée ou sans balourd.
- Le produit des vitesses de rotation du robot et des roues à inertie  $\dot{\theta} \mathbf{w}_i$  est faible devant l'accélération des roues à inerties  $\dot{\mathbf{w}}_i$ , ce qui implique que les effets gyroscopiques sont négligés.

Une roue à inertie est connectée à son support par une liaison pivot, elle présente donc un axe de rotation fixe. Si cette direction est un axe principal d'inertie de la roue, alors le tenseur d'inertie de celle-ci est représenté par une matrice diagonale dans une base dont l'axe de rotation de la roue est l'un des vecteurs. Pour ne pas valider cette hypothèse, la roue à inertie doit présenter un déséquilibre, ce qui sera de toute manière évité dans la conception d'un système. Pour une roue donnée, la première hypothèse assure que :

$$\left( \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{w}_i) \times \mathbf{I}_i \mathbf{w}_i \end{matrix} \right) = 0$$

La deuxième hypothèse implique que :

$$\left( \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{S}\dot{\theta}) \times \mathbf{I}_i \mathbf{w}_i \end{matrix} \right) \ll \left( \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{matrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T (\mathbf{w}_i)^\times \mathbf{I}_i \mathbf{S} \dot{\theta} \end{pmatrix} \ll \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix}$$

et à plus forte raison que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T (\mathbf{S} \dot{\theta})^\times \mathbf{I}_i \mathbf{S} \dot{\theta} \end{pmatrix} \ll \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix}$$

Dans le cas où la deuxième hypothèse ne peut être vérifiée, une compensation des effets de couplage peut être introduite dans la commande des roues à inertie, pour peu qu'il y ait au moins 3 roues non coaxiales. Dans ce cas, le terme  $\sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T (\mathbf{S} \dot{\theta} + \mathbf{w}_i)^\times \mathbf{I}_i (\mathbf{S} \dot{\theta} + \mathbf{w}_i) \end{pmatrix}$  est simplement rejeté par une modification de la commande  $\sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix}$ .

Finalement, les effets des roues à inertie dans le modèle dynamique sont approchés uniquement par le terme de commande :

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{w}}_1, \dots, \dot{\mathbf{w}}_n) = \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}_i \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

L'axe des roues à inertie étant fixe dans le repère de l'effecteur du robot, l'accélération en rotation d'une roue à inertie  $i$  par rapport à sa base peut être notée par un scalaire  $\phi_i$ . En introduisant  $\dot{\mathbf{w}}'_i$  tel que  $\dot{\mathbf{w}}'_i \phi_i = \dot{\mathbf{w}}_i$ , et  $\phi$  le vecteur contenant tous les scalaires  $\phi_i$ , on peut écrire :

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \phi) = \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix} \phi_i \quad (2.56)$$

### Linéarisation du modèle dynamique

L'analyse modale des vibrations s'appuie sur un système différentiel linéaire homogène du second ordre. L'équation dynamique (2.54) n'est ni linéaire ni homogène. Les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{C}$  et le vecteur  $\mathbf{u}_r$  sont en effet entre autres dépendantes de la pose  $\mathbf{x}$  et donc non constantes.

Pour obtenir une équation homogène, il nous suffit de choisir un point d'équilibre mécanique du système comme état initial et d'opérer un changement de variable pour évoluer autour de cet équilibre.

L'équation dynamique est linéarisée pour respecter les conditions d'application de l'analyse modale. Les résultats obtenus seront ainsi pertinents dans un domaine autour du point d'équilibre.

Le modèle dynamique est réarrangé pour prendre la forme d'une fonction de ses différents paramètres :

$$f(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{l}_2, \psi', \phi) \triangleq \mathbf{M}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} - \bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K}(\mathbf{l}_2) (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1(\mathbf{x})) - \psi' + \mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \phi) = \mathbf{0} \quad (2.57)$$

Une décomposition en série de Taylor de cette fonction au premier ordre est réalisée

le long d'une trajectoire de référence  $(\ddot{\mathbf{x}}_0(t), \dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{l}_{20}(t), \psi'_0(t), \phi_0(t))$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 & f(\ddot{\mathbf{x}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_0 + \Delta\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{l}_{20} + \Delta\mathbf{l}_2, \psi'_0 + \Delta\psi', \phi_0 + \Delta\phi) \\
 = & \underbrace{f(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)}_{=0} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\dot{\mathbf{x}} + \\
 & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{l}_2} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\mathbf{l}_2 + \\
 & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \phi} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\phi + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \psi'}}_{=-\mathbf{I}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\psi' = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Le premier terme est nul d'après (2.57), et le dernier est aisé à déterminer car la variable  $\psi'$ , représentant un effort externe sur le RPC, est indépendante des autres.

Le modèle linéarisé de l'équation dynamique d'un RPC avec roues à inertie est déterminé en annexe A.1 à partir de l'équation (2.58), et le résultat est repris ici :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}(\mathbf{x}_0) \Delta\ddot{\mathbf{x}} + \left( \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 \right) \Delta\dot{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 + \right. \\
 & \left. \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\tau}_0 + \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \mathbf{K}(\mathbf{l}_{20}) \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \phi)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right) \Delta\mathbf{x} \\
 = & \Delta\psi' + \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \mathbf{K}(\mathbf{l}_{20}) \text{diag}^{-1}(\mathbf{l}_{20}) \text{diag}(\mathbf{l}_1(\mathbf{x}_0)) \Delta\mathbf{l}_2 - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{l}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix} \Delta\phi_i
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

avec  $\boldsymbol{\tau}_0 = -\mathbf{K}(\mathbf{l}_{20})(\mathbf{l}_{20} - \mathbf{l}_1(\mathbf{x}_0))$ , comme défini en (2.53).

### Modèle linéarisé en fonction des tensions

De manière analogue, la fonction  $f$  peut être définie avec comme variable les tensions des câbles au lieu de leurs longueurs à vide :

$$f(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}, \psi', \phi) \triangleq \mathbf{M}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau} - \psi' + \mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \phi) = \mathbf{0} \tag{2.60}$$

Dans ce cas, la trajectoire de référence est fonction des tensions, et la forme suivante est obtenue au premier ordre de la décomposition en série :

$$\begin{aligned}
 & f(\ddot{\mathbf{x}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_0 + \Delta\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}_0 + \Delta\boldsymbol{\tau}, \psi'_0 + \Delta\psi', \phi_0 + \Delta\phi) \\
 = & \underbrace{f(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\tau}_0, \psi'_0, \phi_0)}_{=0} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\tau}_0, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\tau}_0, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\dot{\mathbf{x}} + \\
 & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\tau}_0, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\tau}_0, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\boldsymbol{\tau} + \\
 & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \phi} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\tau}_0, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\phi + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \psi'}}_{=-\mathbf{I}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\tau}_0, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\psi' = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Le résultat après calcul est le même que pour (2.59) au terme en fonction des variations de tensions près :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}(\mathbf{x}_0) \Delta\ddot{\mathbf{x}} + \left( \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 \right) \Delta\dot{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 + \right. \\
 & \left. \frac{\partial \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\tau}_0 + \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \mathbf{K}(\mathbf{l}_{20}) \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \phi)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right) \Delta\mathbf{x} \\
 = & \Delta\psi' - \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \Delta\boldsymbol{\tau} - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{l}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix} \Delta\phi_i
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

### hypothèses supplémentaires

La trajectoire de référence  $(\ddot{\mathbf{x}}_0(t), \dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{l}_{20}(t), \psi'_0(t))$  est restreinte à un mouvement nominal de translation de l'effecteur, c'est à dire que  $(\ddot{\theta}_0(t), \dot{\theta}_0(t), \psi'_0(t), \phi_0(t)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

Dans le cas des **RPC**, l'espace de travail du robot permet généralement de très grandes amplitudes de translations (presque tout l'espace délimité par les câbles) et de faibles amplitudes de rotations (dépasser un quart de tour se révèle très délicat pour éviter les intersections de câbles). Ces robots sont ainsi en général utilisés pour leur capacité à générer des translations uniquement, la capacité à orienter l'effecteur permet surtout de rejeter des perturbations et pour initialiser la pose du robot. De plus, dans notre approche, les actionneurs sont embarqués sur la plateforme, aussi une option réaliste de poursuite du travail consiste à embarquer un robot série pour réaliser les rotations nécessaires, ce qui dispense le **RPC** de produire des trajectoires comprenant des rotations.

Cette hypothèse n'empêche pas le mouvement hors équilibre  $(\Delta\ddot{\mathbf{x}}, \Delta\dot{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{x})$  de contenir translations et rotations autour de la trajectoire de référence en translation  $(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0)$ .

Dans ce cas, l'équation linéarisée du modèle dynamique présentée en (2.59) adopte une expression beaucoup plus simple :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)\Delta\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20})\Delta\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20})\Delta\mathbf{l}_2 - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{l}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix} \Delta\phi_i + \Delta\psi' \quad (2.63)$$

, avec

$$\mathbf{K}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}) = \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\tau}_0 + \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \mathbf{K}(\mathbf{l}_{20}) \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_0) \quad (2.64)$$

et

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}) = \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \mathbf{K}(\mathbf{l}_{20}) \text{diag}^{-1}(\mathbf{l}_{20}) \text{diag}(\mathbf{l}_1(\mathbf{x}_0)) \quad (2.65)$$

La matrice  $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}$  représente la raideur du robot dans l'espace opérationnel, c'est à dire le rapport entre une variation infinitésimale des efforts appliqués sur l'effecteur et le déplacement infinitésimal de l'effecteur correspondant. Cette matrice est nécessairement symétrique en l'absence de couple externe appliqué sur l'effecteur [AZADI et collab., 2009]. Nous sommes dans ce cas puisque que nous avons fixé  $\psi'_0 = 0$ . De plus,  $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}$  est définie positive dans la très grande majorité des cas. Les conditions rares invalidant cette propriété sont décrites dans [BEHZADIPOUR et KHAJEPOUR, 2005].

### 2.4.3 Analyse Modale

L'analyse modale est une technique d'étude des phénomènes vibratoires qui propose de décrire ceux-ci à l'aide des concepts de modes de vibrations et de fréquences propres associées à ces modes. Les modes sont des vecteurs orthogonaux deux à deux qui engendrent une base de l'espace opérationnel.

La réponse libre d'un solide à une excitation, c'est à dire les mouvements et efforts générés après l'application d'une impulsion d'effort ou un lâcher depuis une position hors équilibre, produit des sinusoides d'effort, de vitesse et de position quand elles sont projetées sur un mode, à la fréquence propre associée.

Le modèle linéarisé (2.63) est exploité pour déterminer les caractéristiques de réponse vibratoires du **RPC**. Soit  $\boldsymbol{\eta}$  le vecteur des coordonnées modales. Ces coordonnées sont associées aux coordonnées de pose hors équilibre  $\Delta\mathbf{x}$  par une matrice de passage dite matrice modale  $\mathbf{E}$  suivant la formule (2.66).

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{E}\boldsymbol{\eta} \quad (2.66)$$



La technique de l'analyse modale s'appuie sur une matrice modale  $\mathbf{E}$  vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^T \mathbf{M} \mathbf{E} = \mathbf{I} \\ \mathbf{E}^T \mathbf{K}_x \mathbf{E} = \Lambda \end{cases} \quad (2.67)$$

Dans (2.67),  $\mathbf{I}$  est la matrice identité de même dimension que  $\mathbf{E}$  et  $\Lambda$  est une matrice diagonale de dimension identique dont les composantes diagonales sont les valeurs propres du système étudié.

Pour déterminer  $\mathbf{E}$ , une décomposition en valeurs et vecteurs propres à partir du modèle dynamique linéarisé ( $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_x$ ) est effectuée. Les valeurs propres  $\Lambda$  et la matrice  $\mathbf{V}$  regroupant les vecteurs colonnes propres  $\mathbf{v}$  du système linéaire vérifient la relation suivante :

$$\mathbf{K}_x \mathbf{V} = \mathbf{M} \mathbf{V} \Lambda \quad (2.68)$$

Les matrices  $\mathbf{K}_x$  et  $\mathbf{M}$  étant symétriques, les matrices  $\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}^T \mathbf{K}_x \mathbf{V}$  sont diagonales [PREUMONT, 2011].

Une infinité de vecteurs propres sont possibles, mais pour respecter les conditions énoncées en (2.67), les vecteurs propres trouvés à l'aide de n'importe quel algorithme sont normalisés.

Soit  $a = \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}$  et  $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{a}}$ , avec  $\mathbf{E}$  construit en concaténant tous les vecteurs  $\mathbf{e}$ . Alors le calcul (2.69) nous montre que la première condition de (2.67) est remplie.

$$\mathbf{e}^T \mathbf{M} \mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}^T}{\sqrt{a}} \mathbf{M} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} = \frac{a}{a} = 1 \quad (2.69)$$

La deuxième condition de (2.67) est validée car  $\mathbf{E}$  est une solution du problème de recherche de vecteurs propres (2.68), d'où en substituant  $\mathbf{E}$  à  $\mathbf{V}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x \mathbf{E} &= \mathbf{M} \mathbf{E} \Lambda \\ \Rightarrow \mathbf{E}^T \mathbf{K}_x \mathbf{E} &= \mathbf{E}^T \mathbf{M} \mathbf{E} \Lambda \\ \Rightarrow \mathbf{E}^T \mathbf{K}_x \mathbf{E} &= \mathbf{I} \Lambda \end{aligned} \quad (2.70)$$

Le modèle dynamique linéarisé pour une trajectoire de référence en translation (2.63) peut alors s'écrire en fonction des coordonnées modales grâce à la définition (2.66) :

$$\mathbf{M} \mathbf{E} \ddot{\eta} + \mathbf{K}_x \mathbf{E} \eta = \mathbf{T} \Delta \mathbf{l}_2 - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix} \Delta \phi_i + \Delta \psi' \quad (2.71)$$

En multipliant toute l'équation à gauche par la transposée de la matrice modale  $\mathbf{E}^T$ , la forme suivante apparait :

$$\mathbf{I} \ddot{\eta} + \Lambda \eta = \mathbf{E}^T \left( \mathbf{T} \Delta \mathbf{l}_2 - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix} \Delta \phi_i + \Delta \psi' \right) \quad (2.72)$$

L'équation (2.72) ne contient aucun couplage entre les coordonnées modales  $\eta$ , les deux matrices  $\mathbf{I}$  et  $\Lambda$  étant diagonales. Elle peut donc être séparée en autant d'équations scalaires indépendantes qu'il n'y a de modes (ou de coordonnées opérationnelles).

La matrice modale  $\mathbf{E}$  contient les modes de vibrations du système et la matrice  $\Lambda$  contient les fréquences naturelles au carré du système. Les conditions sur la matrice modale nous garantissent l'orthogonalité des modes, ce qui implique que la réponse du robot à une perturbation ou à une position initiale hors équilibre se traduit dans l'espace modal par une sinusoïde indépendante dans la direction de chaque mode.

## 2.5 Amortissement actif de vibrations

Dans cette section sont présentés les éléments permettant de traiter le problème des vibrations des RPC avec les outils de l'automatique.

Le modèle de commande présenté ici exploite uniquement les moteurs des poulies asservies en position, qu'elles soient ou non embarquées sur l'effecteur, et non d'éventuelles roues à inertie pour l'amortissement actif de vibrations. Pour réaliser le même type de commande en utilisant des roues à inertie à la place des poulies pour l'amortissement actif des vibrations, il suffit de remplacer systématiquement les entrées en longueurs à vide  $\Delta \mathbf{l}_2$  par des entrées en accélérations de roue à inertie  $\Delta \phi_i$  et la matrice  $\mathbf{T}$  par  $-\sum_i \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix}$ .

Néanmoins les roues à inerties utilisées seules ne peuvent que compenser des modes en rotation. Ce moyen d'actionnement est donc plus limité que l'utilisation des poulies.

### 2.5.1 Fonction de transfert dans l'espace modal

Du point de vue de l'automatique, l'équation (2.72) est un système à plusieurs entrées et sorties. Ses entrées comprennent les longueurs à vide des câbles  $\mathbf{l}_2$ , les vitesses de rotation des roues à inertie et la perturbation externe. Ses sorties sont les coordonnées, vitesses ou accélérations modales. Grâce à l'analyse modale, il est possible de décomposer (2.72) en systèmes mono-variables indépendants, ce qui nous permet de modéliser le processus par une matrice diagonale de fonctions de transfert.

La perturbation externe est supposée nulle ( $\Delta \psi' = 0$ ) ainsi que l'action des roues à inertie ( $\Delta \phi_i = 0$ ). En notant force modale  $\gamma$  le terme  $\mathbf{E}^T \mathbf{T} \Delta \mathbf{l}_2$  et en appliquant la transformée de Laplace au modèle dynamique (2.72), l'expression suivante est obtenue :

$$s^2 \mathbf{I}_{6 \times 6} {}^L \eta + \Lambda {}^L \eta = {}^L \gamma \quad (2.73)$$

Dans (2.73),  ${}^L \{ \cdot \}$  représente la transformée de Laplace de la variable indiquée et  $s$  est la variable de Laplace.

Soit  ${}^L \Delta \mathbf{l}_2 = G_w(s) \mathbf{U}$  avec  $G_w(s)$  la fonction de transfert commune à tous les actionneurs des poulies et  $\mathbf{U}$  la transformée de Laplace du vecteur de commande envoyé à ces actionneurs. Nous faisons ici l'hypothèse que les actionneurs des poulies sont tous identiques, ce qui est souvent le cas pour les robots parallèles à câbles.

Si l'on choisit comme sortie du processus les vitesses modales, l'équation (2.73) devient donc :

$${}^L \dot{\eta} s^{-1} = (s^2 \mathbf{I}_{6 \times 6} + \Lambda)^{-1} \underbrace{{}^L \gamma}_{G_w(s) \mathbf{E}^T \mathbf{T} \mathbf{U}} \quad (2.74)$$

L'objectif d'un algorithme de commande d'amortissement de vibrations consiste à réguler les vitesses opérationnelles  $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  aussi vite que possible. Dans un tel algorithme, la performance ne dépend que de la réjection de perturbation, la référence étant toujours fixée à zéro. Les vitesses modales sont choisies pour être les sorties du processus à cause de leur lien avec les vitesses opérationnelles par la relation  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{E} \dot{\eta}$ . Si  $\dot{\eta}$  converge vers zéro grâce à la commande,  $\dot{\mathbf{x}}$  convergera en même temps vers  $\dot{\mathbf{x}}_0$ .

Soit  $\mathbf{U}_m = \mathbf{E}^T \mathbf{T} \mathbf{U}$  le vecteur de commande dans l'espace modal et  $\mathbf{Y}_m = {}^L \dot{\eta}$  le vecteur des vitesses modales dans le domaine de Laplace. La matrice diagonale des fonctions de transfert  $\mathbf{G}_m(s)$  peut alors être explicitée :

$$\mathbf{Y}_m(\mathbf{s}) = s G_w(s) (s^2 \mathbf{I}_{6 \times 6} + \Lambda)^{-1} \mathbf{U}_m(\mathbf{s}) \triangleq \mathbf{G}_m \mathbf{U}_m(\mathbf{s}) \quad (2.75)$$

$$\mathbf{G}_m(s) = sG_w(s) (s^2 \mathbf{I}_{6 \times 6} + \Lambda)^{-1} \quad (2.76)$$

La matrice  $\mathbf{G}_m(s)$  décrit les dynamiques dans l'espace modal d'un RPC entre les signaux de commande des moteurs et les vitesses modales de l'effecteur.

Les fonctions de transfert (2.76) sont du second ordre non amorties. Ceci n'est pas étonnant puisqu'aucun frottement n'a été considéré dans le modèle. La réponse de telles fonctions à une impulsion ou à des conditions initiales non nulles est une sinusoïde non amortie, c'est à dire le résultat escompté.

## 2.5.2 Fonction de transfert en boucle ouverte du système complet

Réaliser un amortissement actif de vibrations sur un RPC nécessite un moyen d'agir sur ces vibrations et un moyen de les mesurer.

La structure présentée à la figure 2.4 est proposée pour réaliser l'amortissement actif de vibrations dans l'espace modal.

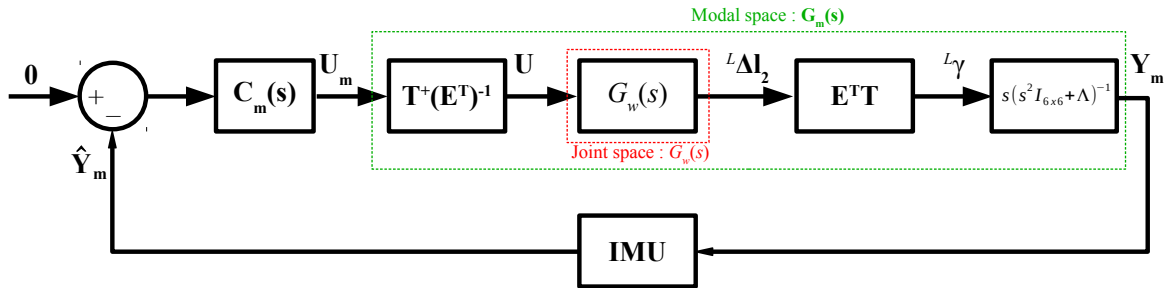


Figure 2.4 – Schéma bloc pour la réjection de vibrations

Le correcteur  $\mathbf{C}_m$  agit dans l'espace modal, il s'agit donc d'une matrice diagonale de fonctions de transfert. À l'aide de la matrice  $\mathbf{T}^+$ , pseudo-inverse à droite de la matrice  $\mathbf{T}$ , la commande modale  $\mathbf{U}_m$  est convertie en commande moteur  $\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}^+ (\mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{U}_m \quad (2.77)$$

Soit  $\hat{\mathbf{Y}}_m$  une estimation de la sortie  $\mathbf{Y}_m$  mesurée à l'aide d'une centrale inertielle (IMU). Une centrale inertielle comprend une mesure d'accélération et de vitesse de rotation sur les trois axes du solide auquel elle est fixée. En intégrant les accélérations par rapport au temps et en filtrant la composante continue de celles-ci pour éviter la dérive de l'intégrale, les variations des vitesses de translation par rapport à la vitesse moyenne sont obtenues.

Cette IMU permet ainsi d'obtenir, après application de la matrice de rotation entre le repère du robot  $\mathcal{R}_p$  et le repère de base  $\mathcal{R}_0$ , le vecteur  $\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix}$ , lié à la dérivée temporelle de la pose  $\Delta \hat{\mathbf{x}}$  par la relation suivante tirée de la définition (2.45) :

$$\Delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}'^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

La définition des coordonnées modales (2.66) permet d'extraire la relation entre les mesures de la centrale inertielle et l'estimation des vitesses modales :

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{S}'^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{w}}_p \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Dans le domaine de Laplace, la sortie du système en boucle ouverte est ainsi  $\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{m}} = \mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\eta}}$ .

La fonction de transfert en boucle ouverte dans son ensemble en supposant que l'estimation de la sortie est égale à la sortie  $\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{m}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{m}}$  peut se déduire à partir du schéma bloc :

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{m}} = \mathbf{E}^T \mathbf{T} \mathbf{T}^+ (\mathbf{E}^T)^{-1} s \mathbf{G}_w(s) (s^2 \mathbf{I}_{6 \times 6} + \Lambda)^{-1} \mathbf{U}_{\mathbf{m}} = s \mathbf{G}_w(s) (s^2 \mathbf{I}_{6 \times 6} + \Lambda)^{-1} \mathbf{U}_{\mathbf{m}} = \mathbf{G}_{\mathbf{m}} \mathbf{U}_{\mathbf{m}} \quad (2.80)$$

L'équation précédente (2.80) exploite la commutation du produit matriciel de  $\mathbf{T}^+ (\mathbf{E}^T)^{-1}$  et  $\mathbf{G}_w(s)$ . Il est nécessaire pour cela que la matrice  $\mathbf{G}_w$  des fonctions de transfert des moteurs en boucle fermée soit diagonale avec des coefficients diagonaux tous égaux. Ainsi les fonctions de transfert en boucle fermée de tous les moteurs doivent être identiques. Or, en toute rigueur, ces fonctions de transfert sont affectées par la charge associée aux moteurs, ici les tensions exercées par les câbles. Ainsi, même des moteurs physiquement identiques et avec le même asservissement peuvent répondre différemment à la même sollicitation. Cependant, nous considérons ici que la bande passante du moteur asservi en position est suffisamment grande pour que le modèle du moteur soit découplé de la charge, et donc que ce modèle reste valide quelle que soit la charge.

La modélisation présentée ici se veut générique pour un RPC dont les câbles peuvent être décrits par le modèle linéaire élastique. Dans les chapitres suivants, des exemples d'implémentation de l'amortissement actif de vibrations sont proposés pour deux robots réalisés au sein de notre laboratoire.

# Chapitre 3

## Plateforme expérimentale

*« La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi ! »*

---

Albert Einstein

### Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b>	<b>51</b>
<b>3.2 Ressources utilisées</b>	<b>51</b>
3.2.1 Mécatronique embarquée	51
3.2.2 Logiciel	53
<b>3.3 Commande des moteurs embarqués</b>	<b>55</b>
3.3.1 Moteurs utilisés	55
3.3.2 Identification des moteurs	56
3.3.3 Asservissement en position	57
3.3.4 Limitation du courant dans l'asservissement	58
3.3.5 Anti-saturation	58
<b>3.4 Mesure des vitesses opérationnelles</b>	<b>59</b>
<b>3.5 Mesure de la pose</b>	<b>60</b>
<b>3.6 Caractérisation des câbles utilisés</b>	<b>60</b>
<b>3.7 Simulation du robot complet</b>	<b>62</b>
3.7.1 Simulation mécanique	62
3.7.2 Simulation des capteurs	63
3.7.3 Simulation des actionneurs	64
3.7.4 Calcul de la commande de rejet de vibrations	65

---

## 3.1 Introduction

Les dispositifs expérimentaux mis en place pour valider les développements théoriques effectués précédemment sont décrits dans ce chapitre.

Un simulateur physique qui se veut aussi réaliste que possible et plusieurs robots parallèles à câbles ont en effet été conçus et implémentés lors de la thèse. Pour cela, il a été nécessaire de modéliser et de réaliser plusieurs éléments servant de briques de base pour assembler les simulateurs et robots.

La section suivante décrit les différentes ressources logicielles et matérielles utilisées pour nos dispositifs expérimentaux. La deuxième section s'intéresse à la modélisation et à la commande en position des moteurs Lego Mindstorms embarqués sur les robots. La mesure des vitesses opérationnelles et son conditionnement sont ensuite présentés. Puis la question de la mesure extéroceptive de la pose de l'effecteur du robot est abordée. Après quoi sont exposées la caractérisation et la modélisation des câbles choisis pour les dispositifs expérimentaux utilisés. Enfin, les différentes briques logicielles présentées dans le chapitre sont assemblées pour la réalisation d'un simulateur physique de RPC dans la dernière section.

Les deux chapitres suivants présentent chacun l'un des robots construits et les campagnes d'expériences menées avec eux.

## 3.2 Ressources utilisées

Pour construire un RPC à partir de zéro, des briques aussi bien matérielles que logicielles sont nécessaires.

La plateforme expérimentale proposée ici comprend une structure reconfigurable en Lego Mindstorms, des actionneurs, capteurs, de la connectique et une électronique de commande intégrés à l'effecteur du robot. Des câbles viennent compléter le matériel nécessaire.

Le logiciel comprend des outils de simulation basés sur Matlab/Simulink, ainsi que l'ensemble des outils permettant d'exporter le contrôleur du robot conçu sous Matlab/Simulink sur un ordinateur Raspberry Pi embarqué sur l'effecteur.

### 3.2.1 Mécatronique embarquée

L'effecteur intégrant tous les éléments mécatroniques du robot est construit à l'aide de pièces Lego Mindstorms.

Les pièces Lego présentent de multiples possibilités d'assemblage entre elles. Contrairement aux briques classiques prévues pour l'empilement vertical, les pièces Lego Mindstorms sont essentiellement constituées de barres à trous et d'entretoises pour les relier, rendant ce jeu de pièces plus approprié pour la réalisation de structures mécaniques (Fig. 3.1).

La structure de nos robots inclue en dehors des pièces Lego des vis et écrous métalliques fixés sur des barres à l'aide de colliers plastiques afin de lester les roues à inertie et de la colle chaude pour simplifier l'assemblage des moteurs. Les pièces collées permettent en effet de réduire la complexité du montage dans l'espace très contraint des points de sortie des câbles.

Le choix des Lego Mindstorms pour réaliser des prototypes de recherche peut sembler étrange. Ils présentent pourtant des qualités très intéressantes dans ce cadre, notamment :



Figure 3.1 – Pièces de la collection Lego Mindstorms (arstechnica.com)

- La structure des robots est extrêmement compacte, résultats de l'utilisation des Lego pour simplifier la construction de robots au maximum, et extrêmement légère grâce à une utilisation systématique de matériaux plastiques, hormis pour l'électronique.
- La conception et la fabrication de la structure de l'effecteur du [RPC](#) est rapide et intuitive.
- Les pièces Lego Mindstorms se trouvent chez de nombreux revendeurs pour un prix abordable, ce qui rend nos prototypes aisément reproductibles.
- Les imperfections mécaniques des moteurs et des structures Lego Mindstorms représentent un défi intéressant. En effet, les phénomènes de frottement sec, de jeu dans les liaisons, de faible rigidité, ainsi que la piètre résolution et le bruit de mesure des capteurs représentent une amplification de phénomènes existant pour n'importe quel composant industriel utilisé dans la construction de robots. Une expérience obtenant de bons résultats sur un robot en Lego Mindstorms obtiendra à plus forte raison de bons résultats sur un robot semblable, mais réalisé avec des composants destinés à la robotique industrielle.
- Le jeu mécanique dans les poulies est compensé par la gravité dans le cas d'un robot suspendu, et par la distribution des tensions pour un robot pleinement contraint.

En plus de la structure, l'effecteur des prototypes réalisés comprend des capteurs, des actionneurs, des sources d'énergie, de la connectique et du matériel informatique.

Les briques de contrôle Lego NXT et EV3 sont des composants très compacts et très complets, qui possèdent un micro-contrôleur, une batterie, et de multiples périphériques permettant d'interfacer des capteurs et moteurs Lego Mindstorms, ainsi qu'un port USB. Ces briques embarquent des hacheurs 4 quadrants et une logique permettant de piloter 3 à 4 moteurs Lego Mindstorms à la fois. Ces briques sont en outre programmables, et il est également possible d'en modifier le firmware.

Les actionneurs sont tous des moteurs Lego Mindstorms connectés à des briques de contrôle Lego NXT ou EV3. Un bouton poussoir Lego est également présent sur chaque prototype pour servir d'arrêt d'urgence, et est également relié à une brique de contrôle.

Les autres capteurs, à savoir les centrales inertielles, une caméra et un dispositif de localisation 3D NDI Polaris, sont connectés à un ordinateur embarqué de type Raspberry Pi modèle B. Le Raspberry Pi est également connecté à un hub USB. Sur ce hub sont connectés un dongle WiFi (pour la communication par TCP/IP avec un ordinateur externe pilotant le robot via le mode externe de Simulink), ainsi qu'une à 4 briques de contrôle Lego NXT ou EV3.

L'énergie est fournie par les batteries de 7.2V intégrées aux briques de contrôle Lego NXT et Lego EV3, ainsi que par une batterie externe de 5V capable de délivrer 2A pour alimenter le Raspberry Pi et ses périphériques. Sur le CoMiRo, le Raspberry Pi et ses périphériques sont alimentés par la batterie d'une brique de contrôle Lego EV3 à l'aide de son port USB. Une alimentation externe de laboratoire de 9V capable de délivrer 6A a également été utilisée pour alimenter le robot MiCaRo présenté dans [WEBER et collab., 2015].

Pour chaque moteur destiné à l'enroulement d'un câble, deux poulies sont assemblées de part et d'autre de l'arbre de sortie. Un câble est enroulé sur chacune d'entre elles. Deux câbles parallèles sont donc enroulés par chaque moteur. Ainsi, la charge appliquée par les câbles est symétrique sur l'axe du moteur, ce qui limite le mouvement radial susceptible d'amplifier les frottements. Dans le modèle du robot, cette paire de câbles est approximée par un câble unique de même direction que les câbles de la paire. La raideur du câble modélisant une paire est égale au double de celle d'un câble de la paire. Les raideurs mécaniques montées en parallèles sont en effet équivalentes à une raideur dont la valeur correspond à leur somme.

### 3.2.2 Logiciel

Pour la simulation, seul un ordinateur sur lequel est installé Matlab/Simulink avec la toolbox simMechanics est nécessaire.

L'ensemble des logiciels nécessaires au fonctionnement de nos RPCs s'appuie sur l'articulation entre trois types de composants : un ordinateur externe, un Raspberry Pi embarqué, et une ou plusieurs briques Lego embarquées.

Le projet RPIt<sup>1</sup> (pour « Raspberry PI Simulink Coder target ») développé durant la thèse par Jacques Gangloff permet un prototypage rapide d'un contrôleur de robot sous Matlab/Simulink destiné à s'exécuter sur un système Linux basé sur Debian embarqué (Fig 3.2). Le contrôleur peut ensuite être piloté directement sous Simulink via le mode externe depuis un ordinateur distant communiquant par TCP/IP avec le système embarqué. Un système d'exploitation dénommé Raspbian basé sur Debian est justement disponible pour tous les modèles de Raspberry Pi.

RPIt supporte les périphériques suivants :

- la brique Lego EV3 avec son firmware original,
- la brique Lego EV3 avec le firmware EV3.14,
- la brique Lego NXT avec un firmware modifié (NXTOSEK),

---

<sup>1</sup>[http://icube-avr.unistra.fr/fr/index.php/Raspberry\\_Pi\\_Simulink\\_Coder\\_target\\_\(RPIt\)](http://icube-avr.unistra.fr/fr/index.php/Raspberry_Pi_Simulink_Coder_target_(RPIt))



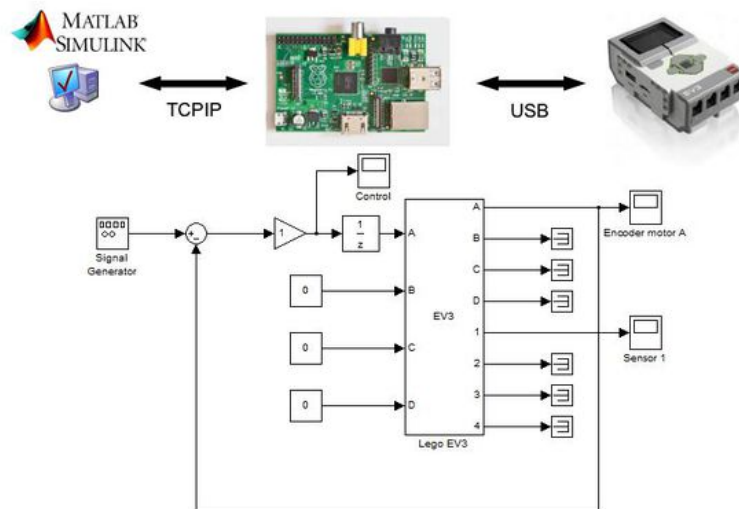


Figure 3.2 – Principe général de RPIt

- la centrale inertielle Pololu MinIMU-9 v2 Gyromètre, Accéléromètre et Magnétomètre (composants L3GD20 et LSM303DLHC),
- la centrale inertielle Drotek IMU 9DOF - MPU9150 Invensense PCB,
- la centrale inertielle Sparkfun 9 Degrees of Freedom - MPU-9150 Breakout,
- le système de localisation 3D Polaris de NDI.

Chaque périphérique est représenté par un bloc dans la bibliothèque Simulink « RPI Blockset ». Ces blocs intègrent le code nécessaire à la gestion du périphérique représenté.

Un bloc indiquant la charge du CPU du Raspberry Pi est également présent dans cette bibliothèque, ainsi qu'un bloc indiquant le temps depuis le lancement du programme sur le système embarqué.

La connexion entre le Raspberry Pi et la centrale inertielle utilise un bus i2c cadencé à une fréquence de 400 kHz. La connexion entre le Raspberry Pi et les briques Lego est en USB, et celle entre le Raspberry Pi et le système Polaris est une liaison série cadencé à 115200 bits par seconde.

Avec un firmware modifié EV3.14<sup>2</sup> pour la brique Lego EV3 et NXTosek pour la brique de contrôle Lego NXT, il est possible d'utiliser ces briques comme des périphériques d'un Raspberry Pi exécutant un firmware spécifique à RPIt. En effet, ces modifications du firmware original permettent grâce à un protocole de communication optimisé d'envoyer des commandes aux moteurs et de récupérer les données des capteurs en seulement une milliseconde par brique. La brique Lego EV3 peut également être utilisée avec son firmware d'origine, mais un cycle de communication avec envoi de commande moteurs et réception des mesures prend alors environ 5 ms.

RPIt convertit un diagramme Simulink décrit sous forme de schéma bloc en code C exécuté en temps-réel mou (gigue de l'ordre de 200µs) sur un Raspberry Pi embarqué. La conversion du diagramme en code C utilise la toolbox « Simulink Coder ». Ce code est ensuite téléchargé grâce à la connexion TCP/IP sur le Raspberry Pi cible pour être automatiquement compilé sur celui-ci. Aucune compilation croisée n'est donc nécessaire.

<sup>2</sup><http://icube-avr.unistra.fr/en/index.php/EV3.14>

Une fois le programme compilé et lancé, une communication s'établit automatiquement entre l'interface de Simulink et le programme distant tournant sur le système embarqué. Cette communication permet de changer les paramètres des blocs Simulink à la volée et d'afficher sur des oscilloscopes et autres indicateurs les données acquises en temps réel. RPi utilise un mécanisme classique de UNIX pour la création de routines périodiques. Il s'agit de temps réel mou, par opposition à l'utilisation d'un véritable système d'exploitation temps réel. Sur un Raspberry Pi, nous avons mesuré un retard de 200 microsecondes dans le pire des cas, ce qui est très faible. Sur un PC avec un processeur d'architecture x86, ce retard est encore plus faible.

La période d'échantillonnage retenue sur le CaWiRo est de 0,01s et sur le CoMiRo de 0.007s. La puissance de calcul sur le Raspberry Pi ne nous permettant pas d'augmenter la fréquence d'échantillonnage au-delà de cette valeur.

Il est à noter que la simulation utilise le même diagramme Simulink que celui qui sert à synthétiser les contrôleurs de nos prototypes, à la différence que les blocs de la toolbox *RPI blockset* sont remplacés en simulation par des blocs Simulink standards simulant leur comportement. Ainsi, le bloc EV3 est remplacé en simulation par les modèles physiques des moteurs associés à cette brique EV3.

### 3.3 Commande des moteurs embarqués

Pour la réalisation des prototypes de [RPCs](#) envisagés, un actionnement est nécessaire pour les roues à inerties et l'enroulement des câbles. Nos robots embarquant tous les systèmes mécatroniques nécessaires, ces actionneurs se doivent d'être aussi légers et compacts que possible. Ainsi, les moteurs à courant continu de la gamme Lego Mindstorms ont été utilisés exclusivement sur nos [RPCs](#).

Les saturations, les frottements secs, le pas de quantification de la mesure et les limitations de l'électronique de puissance embarquée dans la brique posent plusieurs problèmes. Ceux-ci sont présentés dans cette section, et une solution est proposée pour les gérer afin de réaliser efficacement la fonction d'enroulement des câbles et d'actionnement des roues à inertie pour les prototypes de [RPCs](#) construits.

#### 3.3.1 Moteurs utilisés

Tout comme les briques et les capteurs proposés par Lego, plusieurs générations de moteurs Lego existent. Ces différents moteurs peuvent être connectés à la même brique pour réaliser un montage.

Les moteurs de la gamme Lego EV3 sont le « EV3 medium » et le « EV3 large ». Dans la gamme Lego NXT, il n'y a qu'un seul type de moteur, le NXT. Ces trois moteurs embarquent dans leur carter en plastique un codeur incrémental optique ainsi qu'un réducteur. Le « EV3 large » est presque une copie conforme du moteur NXT, conservant le moteur et le codeur incrémental de son prédécesseur. La forme du carter est légèrement différente, ainsi que le réducteur constitué d'un étage supplémentaire. Le « EV3 medium » possède un couple moindre et une vitesse de rotation un peu supérieure au modèle « large », et est plus compact grâce à un réducteur constitué de deux trains épicycloïdaux.

Malgré une large utilisation de ces moteurs par le grand public, peu de documents décrivent en détail leurs caractéristiques électriques et mécaniques. Parmi eux, on trouve

plusieurs articles clairs et détaillés avec photos sur le site philohome<sup>3 4</sup>, ainsi qu'un projet d'étudiant de l'université Lille 1<sup>5</sup> sur la caractérisation du moteur NXT.

Tous ces moteurs sont équipés d'une thermistance Raychem RXE065 ou Bourns MF-R065 connectée en série à leur alimentation afin de les protéger de la surchauffe. Celle-ci possède une résistance électrique qui varie rapidement en fonction de sa température. Ainsi si un courant important traverse le moteur, ce composant chauffe par effet Joule suivant la loi  $W = RI^2$ , ce qui augmente fortement sa résistance, et fait par conséquent baisser le courant dans le circuit. Un courant supérieur à 1A ne doit pas être appliqué trop longtemps sur un moteur pour éviter de déclencher cette protection, qui met ensuite plusieurs minutes à refroidir pour revenir à sa configuration initiale, temps pendant lequel le moteur a donc beaucoup moins de couple.

En pratique, les thermistances ont un faible risque de s'échauffer car les hacheurs 4 quadrants intégrés dans les briques NXT ou EV3 sont également équipés d'une protection contre les sur-intensités. La puce qui contrôle les hacheurs dispose en effet d'un mode qui les désactive en cas de surchauffe jusqu'à ce que la température revienne à une valeur acceptable. Un courant de 1A ou plus traversant ces hacheurs produit ainsi un comportement caractéristique de cette protection : le courant est fourni pendant un court laps de temps, puis la protection se déclenche, provoquant une coupure de l'alimentation du moteur pendant quelques secondes avant que le moteur soit à nouveau alimenté. Ces moteurs pilotant l'enroulement de câbles ou entraînant les roues à inertie, ce comportement est responsable de vibrations parasites et empêche d'appliquer correctement la commande calculée. Il faut ainsi éviter les courants qui risquent de le déclencher.

Le logiciel présent dans les briques NXT et EV3 permet de moduler la tension d'induit des moteurs entre -100% et 100% de la tension fournie par l'alimentation, à savoir 7.2V (batterie NiMh) ou 9V (pile alcaline).

La mesure de position des moteurs est réalisée par une roue codeuse reliée à l'arbre de sortie du moteur avant le réducteur. La roue codeuse présente 12 fentes, avec un rapport de réduction de 10 : 32 avec la sortie du moteur. Comme le réducteur présente un rapport global de 48 : 1, la roue codeuse réalise  $\frac{48 \cdot 10}{32} = 15$  tours pour un tour de l'arbre de sortie du réducteur. Ainsi, en détectant les fronts montants et descendants sur chaque fente, on obtient une résolution de  $15 * 12 * 2 = 360$  impulsions par tour de l'arbre de sortie, soit 1 deg. Le codeur étant muni de deux capteurs optiques en quadrature, il est possible de doubler cette résolution, pour atteindre 0.5 deg. Le firmware standard des briques NXT et EV3 ne réalise pas le décodage complet à cause du temps de calcul nécessaire. Pour le prototype CoMiRo, nous utilisons un firmware modifié nommé EV3.14<sup>6</sup> développé dans l'équipe pour exploiter l'encodage en quadrature, et ainsi disposer d'une résolution de 0.5 deg.

### 3.3.2 Identification des moteurs

Pour les 3 types de moteur, nous avons choisi d'identifier le transfert entre la tension et la vitesse de sortie de réducteur à l'aide d'un premier ordre. La constante de temps électrique du moteur est considérée comme très rapide devant sa constante de temps mécanique, ce qui constitue une hypothèse classique pour un moteur à courant continu.

<sup>3</sup><http://www.philohome.com/nxtmotor/nxtmotor.htm>

<sup>4</sup><http://www.philohome.com/motors/motorcomp.htm>

<sup>5</sup>[http://www-lagis.univ-lille1.fr/~bonnet/Projet\\_Lego/moteur\\_M1ASE.pdf](http://www-lagis.univ-lille1.fr/~bonnet/Projet_Lego/moteur_M1ASE.pdf)

<sup>6</sup><http://icube-avr.unistra.fr/en/index.php/EV3.14>

Une alimentation de laboratoire est connectée au moteur, et la vitesse de la sortie est calculée à partir des mesures du codeur incrémental embarqué.

Nous obtenons ainsi pour une alimentation de 7.2V, les fonctions de transfert présentées dans le tableau 3.1.

TABLEAU 3.1 – Fonctions de transfert entre tension en % et vitesse en  $\text{rads}^{-1}$  identifiées des moteurs Lego

Moteur « NXT »	$\frac{0.157}{0.0667s+1}$
Moteur « EV3 Large »	$\frac{0.157}{0.0667s+1}$
Moteur « EV3 Medium »	$\frac{0.242}{0.0667s+1}$

Les moteurs « NXT » et « EV3 Large » sont limités à une vitesse d'environ 130 tours par minute alimentés en 7.2V, alors que le « EV3 Medium » est limité à environ 200 tours par minute.

### 3.3.3 Asservissement en position

Chaque moteur destiné à enrouler un câble est asservi individuellement en position grâce à la mesure fournie par son codeur. Le moteur asservi en boucle fermée constitue ainsi une brique élémentaire qui peut s'intégrer dans le contrôleur du robot. Ces asservissements de position permettent de linéariser le comportement en boucle ouverte des actionneurs Lego (très éloigné d'un comportement linéaire à cause des frottements secs, saturations, et jeux). Les moteurs reliés aux roues à inertie sont par contre utilisés en boucle ouverte, l'asservissement en position n'étant pas pertinent dans ce cas, puisque ce sont les accélérations qui comptent.

Un correcteur numérique de type RST a été choisi pour la boucle de position. Ce type de correcteur comprend trois polynômes en  $z^{-1}$  (inverse de la variable de la transformée en Z) nommés R, S et T qui sont placés dans la boucle fermée au niveau de la mesure, de l'erreur et de la consigne. La synthèse est algébrique, il s'agit de résoudre deux équations diophantiennes pour déterminer les coefficients de ces polynômes qui assurent le comportement voulu pour le système bouclé, tout en pouvant respecter des contraintes supplémentaires. Il est ainsi possible d'imposer la présence d'intégrateurs dans la chaîne directe afin de rejeter des perturbations et un filtre sur la mesure.

Le modèle continu de nos moteurs (Tab. 3.1) est discrétisé à une fréquence d'échantillonnage  $T_s$  en tenant compte du bloqueur d'ordre zéro. Un modèle discret en  $z^{-1}$  comprenant un zéro réel négatif, un pôle stable réel positif, un gain et un retard d'une période modélisant le temps de calcul de la commande est obtenu pour chaque moteur.

Le pas de quantification sur la mesure de position dû à la résolution du codeur incrémental est responsable d'un bruit de quantification. Un filtrage de ce bruit de sortie sous la forme d'un filtre passe-bas d'ordre 2, d'amortissement 0,7 et de pulsation naturelle  $12\text{rads}^{-1}$  est intégré à la synthèse RST.

Un intégrateur est également imposé dans le polynôme S du correcteur, faute de quoi une erreur statique en position serait observée du fait du frottement sec dans le train d'engrenage du moteur.

Le modèle choisi pour la boucle fermée est un second ordre d'amortissement 0.7 et de pulsation naturelle  $40\text{rads}^{-1}$  pour une rapidité optimale de la réponse.

Aucun suivi de consigne particulier n'est imposé, ainsi le modèle choisi pour le moteur asservi en position comporte les 2 pôles complexes conjugués ainsi que le zéro à partie

réelle négative provenant de la conversion en temps discret de la fonction de transfert continue du moteur.

Le polynôme  $R$  obtenu est ainsi d'ordre 2, tandis que les polynômes  $S$  et  $T$  sont d'ordre 3. Pour une période d'échantillonnage de  $T_e = 0.007s$ , les polynômes suivants sont ainsi obtenus pour un moteur « NXT » :

$$\begin{aligned} R &= 80.91 - 149.3z^{-1} + 68.83z^{-2} \\ S &= 1 - 2.517z^{-1} + 2.128z^{-2} - 0.6115z^{-3} \\ T &= 535.5 - 1484z^{-1} + 1372z^{-2} - 423.2z^{-3} \end{aligned} \quad (3.1)$$

### 3.3.4 Limitation du courant dans l'asservissement

Le problème du cycle de sécurité des hacheurs doit être géré par le programme d'asservissement des moteurs.

Aucune mesure du courant d'induit n'étant disponible, une valeur de courant estimée  $i$  est utilisée pour essayer de maintenir le courant consommé par chaque moteur à moins d'un ampère.

La tension appliquée aux bornes du moteur  $u$  est égale à la somme de la chute de tension due au passage du courant plus la force contre électromotrice qui dépend de la vitesse du moteur  $\Omega$  et de sa constante de couple  $K$  :

$$u = Ri + K\Omega \quad (3.2)$$

Nous avons relevé expérimentalement une résistance  $R = 9\Omega$  et une constante de couple  $K = 0.5036$ . La vitesse peut se déduire à tout instant à partir de la mesure de position. Aussi une valeur de tension de consigne maximum envoyée au moteur  $u_{max}$  pour limiter le courant à 1A est :

$$u_{max} = Ri_{max} + K\Omega = 9 \times 1 + 0.5036 \frac{p(k) - p(k-1)}{T_e} \quad (3.3)$$

Dans l'équation (3.3),  $p(k)$  représente la position du moteur à l'instant  $k$ , et  $T_e$  le temps d'échantillonnage.

De même, la tension minimale  $u_{min}$  qui peut être appliquée est de :

$$u_{min} = -Ri_{max} + K\Omega = -9 \times 1 + 0.5036 \frac{p(k) - p(k-1)}{T_e} \quad (3.4)$$

En outre, la tension appliquée sur le moteur ne peut pas être plus grande que celle délivrée par l'alimentation  $v_{cc}$ . La commande est donc majorée par le minimum de  $v_{cc}$  et  $u_{max}$ , et minorée par le maximum de  $-v_{cc}$  et  $u_{min}$ .

### 3.3.5 Anti-saturation

La saturation de la commande représente un phénomène non-linéaire responsable d'un comportement très ennuyeux pour un correcteur comprenant un intégrateur. En effet, le système se révélant physiquement incapable de suivre la consigne qui lui est imposée, une erreur de même signe se maintient pendant un temps relativement long, ce qui implique que le terme intégral du correcteur devient très grand. Une fois la consigne atteinte, il faut trop de temps au terme intégral pour revenir à une valeur raisonnable permettant au système de se maintenir dans son état final. Il en résulte un dépassement

très important, qui peut même entraîner l'instabilité de la commande, avec des dépassements de sens opposés de plus en plus grands.

Dans le cas d'un correcteur de type PID classique, plusieurs techniques existent pour limiter cet effet, comme une limite fixée au terme intégral ou le retrait de la valeur de commande excédant la saturation à la valeur du terme intégral.

Pour un correcteur RST, il est possible d'adopter cette logique de limitation de l'intégration, même si le terme intégral n'est pas explicite dans les polynômes du correcteur.

En plus de l'historique de la consigne, de la commande saturée et de la mesure, un historique du dépassement de la saturation de la commande calculée  $aw(k)$  (pour anti-saturation, ou *anti-windup* en anglais) est enregistré. Pour calculer ce terme  $aw(k)$ , la valeur de la commande calculée à l'instant courant est soustraite à la commande réellement applicable si une saturation est franchie, et cette différence est divisée par le coefficient d'ordre 0 du polynôme T. Si la commande ne dépasse pas ses saturations,  $aw(k)$  vaut à 0, car la commande calculée peut être appliquée au système.

Après le calcul de la commande à l'instant courant, mais avant la saturation, le produit des  $aw(k-i)$  par les coefficients d'ordre  $i$  de T sont ajoutés à la commande courante, pour  $i$  variant de 1 à l'ordre de T.

Le script Matlab d'asservissement d'un moteur est disponible en annexe [B.1](#).

### 3.4 Mesure des vitesses opérationnelles

Les vitesses de translation et de rotation de l'effecteur sont mesurées au moyen d'une centrale inertielle.

Les 3 modèles compatibles avec RPi se connectent en i2c au Raspberry Pi embarqué sur l'effecteur.

Les données sont acquises par la centrale inertielle à une fréquence de plusieurs centaines de Hertz et disponibles dans une mémoire locale au composant.

Ces composants fournissent des mesures d'accélération sur trois axes et de vitesses instantanées de rotation sur trois axes. Un magnétomètre est également intégré, mais non utilisé, car le robot embarque plusieurs éléments en fer et du courant électrique circule un peu partout sur l'effecteur, ce qui le perturbe énormément.

Des filtres passe-bas numériques embarqués dans les centrales inertielles peuvent être configurés via la communication i2c. Ils ont été fixés à une fréquence de coupure de 10 Hz pour les accéléromètres et pour les gyromètres. En effet, la bande passante pour les vibrations de nos prototypes ne dépasse pas les 5 Hz, et les mesures brutes sont très bruitées. La documentation technique des centrales inertielles ne donnant pas d'indication sur les caractéristiques du filtrage numérique appliqué, nous considérons pour le calcul de la fonction de transfert en boucle ouverte du RPC qu'il s'agit d'un passe-bas du premier ordre dont la fréquence de coupure est 10 Hz.

Les accélérations sont intégrées pour obtenir une estimation de la vitesse de translation de l'effecteur sur les 3 axes.

Une matrice de rotation  $R_{IMU}$  permet de faire la conversion entre le repère utilisé par la centrale inertielle pour ses mesures et le repère de l'effecteur.

Les mesures des accéléromètres sont entachées d'un biais à cause de l'accélération de la pesanteur terrestre et les offsets de l'électronique de conditionnement. Un filtre passe-haut du premier ordre de fonction de transfert  $\frac{z-1}{z-0.99}$  est donc appliqué après l'intégration pour supprimer la composante continue de l'accélération.

Après application de  $R_{IMU}$  sur les accélérations intégrées et les vitesses instantanées de rotation, nous obtenons une estimation de  $\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{w}_p \end{pmatrix}$ .

### 3.5 Mesure de la pose

L'estimation de la pose d'un RPC n'est pas un problème évident. En effet, le modèle géométrique direct pour ce type de robot possède plusieurs solutions analytiques délicates à calculer. De plus, la faible rigidité des RPCs conduit à des erreurs d'estimation de la pose si celle-ci est calculée à partir de la quantité de câble enroulée sur les poulies via le modèle géométrique direct.

Un moyen de mesure de pose extéroceptif est donc particulièrement pertinent avec un RPC. Un dispositif de localisation 3D NDI Polaris est donc connecté au robot CoMiRo pour servir de vérité de terrain. Il s'agit d'un système de vision stéréo avec deux caméras infrarouges qui détectent des marqueurs passifs ou actifs sur une mire fixée à l'objet d'intérêt. Si une seule mire à 4 marqueurs passifs est utilisée à la fois, le système est capable de fonctionner à 60 Hz. L'acquisition se fait à cette fréquence et la communication par liaison série avec le Raspberry Pi est asynchrone.

Aucune mesure de pose n'est présente sur le CaWiRo ou le MiCaRo. Cette information n'est en effet par nécessaire pour la commande de réjection de perturbation, il suffit d'une estimation grossière pour déterminer les caractéristiques vibratoires qui varient faiblement en fonction de la pose.

Le déplacement de l'effecteur est également réalisé en boucle ouverte, ce qui permet de s'affranchir de la présence du Polaris après une phase d'apprentissage de la trajectoire désirée pour réaliser une tâche répétitive à l'aide de nos prototypes.

En outre, si la mesure instantanée de la pose  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$  du RPC est intéressante comme vérité de terrain, elle l'est moins que la pose nominale  $\mathbf{x}_0$  pour l'asservissement. En effet, le calcul des matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}_x$  ne dépend que de  $\mathbf{x}_0$ . Or, les  $\mathbf{x}_0$  sont uniquement fonction des positions des moteurs et de  $\psi'_0$ . À l'effet de la perturbation constante près,  $\mathbf{x}_0$  est égal à la trajectoire apprise pendant la calibration.

### 3.6 Caractérisation des câbles utilisés

Des câbles Shimano Blue Wing<sup>TM</sup>, de 0,2 mm de diamètre nominal et 3.2 kg de résistance mécanique nominale ont été utilisés sur tous nos prototypes.

Il s'agit au départ d'un câble conçu pour la pêche, aussi les spécifications techniques ne mentionnent pas la raideur du matériau, seulement sa résistance maximale en traction ainsi que son invisibilité sous l'eau. La raideur spécifique des câbles est cependant une donnée essentielle pour la simulation ainsi que pour le calcul de la commande dans l'espace modal, puisque cette grandeur intervient dans le calcul de la matrice de raideur du robot.

Des essais de traction ont donc été réalisés sur la bobine de câble Shimano Blue Wing<sup>TM</sup> ainsi que sur un autre câble polymère en polyamide de même diamètre à l'aide d'une machine Z330E Zwick/Roell tensile testing machine (Fig. 3.3 et 3.4).

Les résultats expérimentaux mettent en lumière plusieurs phénomènes non-linéaires.

Premièrement, la caractéristique allongement/tension exercée sur le câble n'est pas exactement une droite. Les courbes passent en effet par deux points d'inflexion, l'un à moins de 5 et l'autre à plus de 15 Newtons.

Ensuite, la vitesse à laquelle la tension est appliquée sur le câble modifie son comportement, en vertu de la visco-élasticité des polymères. Plus la tension est appliquée rapidement, plus le câble est rigide.

Enfin, un essai sans rupture du câble sur plusieurs cycles montre que le comportement du câble neuf est différent de celui du câble qui a déjà travaillé. Après plusieurs cycles, le câble semble plus raide qu'au départ. L'expérience s'étant déroulée sur près de cinq minutes et le câble étant très fin, cet effet n'est probablement pas lié à la température (qui a tendance à s'accroître dans un matériau soumis à un essai mécanique), mais plutôt à une modification de la structure du matériau. Le test sur plusieurs cycles illustre également un comportement différent du câble quand la force est appliquée et relâchée. Cet effet correspond à l'amortissement du câble, qui a naturellement tendance à atténuer les vibrations.

Les données du fabricant sont inexactes. Le diamètre mesuré est de  $0.22\text{mm}$  au lieu des  $0.2\text{mm}$  annoncés, la résistance mécanique est plus proche de  $22\text{N}$  que de  $32\text{N}$ . Il existe de plus une certaine confusion sur le type de plastique, le nylon et le PVDF étant utilisés pour la pêche. Le nylon est plus raide et plus résistant, mais le PVDF présente un plus grand allongement à la rupture et un indice de réfraction lumineux proche de l'eau ce qui le rend intéressant pour la pêche. Les caractéristiques mesurées pour notre câble indiquent qu'il est probablement fabriqué en PVDF.

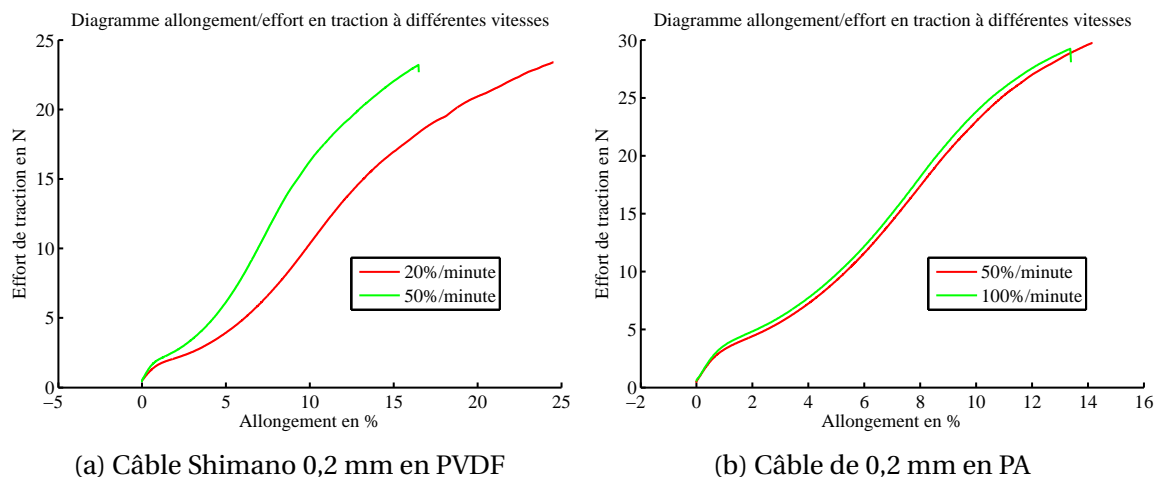


Figure 3.3 – Essais de traction sur des câbles polymères à vitesse constante

Bien que des modèles complexes capables de tenir compte des particularités des câbles polymères existent, nous avons choisi un modèle linéaire élastique pour modéliser le comportement des câbles. Aucun capteur présent sur nos robots n'est en effet capable de déterminer les tensions des câbles et autres paramètres supplémentaires nécessaires pour exploiter des modèles de câbles plus complexes. De plus, nos conditions expérimentales ne permettent pas de travailler avec une température ou une humidité constante afin d'assurer la constance dans le temps des coefficients de ces modèles. Enfin, les tensions varient en pratique relativement peu pendant les vibrations, les câbles travaillent ainsi dans une zone quasiment linéaire.

La raideur spécifique sélectionnée pour nos applications est de  $140\text{N}$  pour un câble, donc pour une paire de câble connectée à un moteur, cela équivaut à  $k_s = 280\text{N}$ .



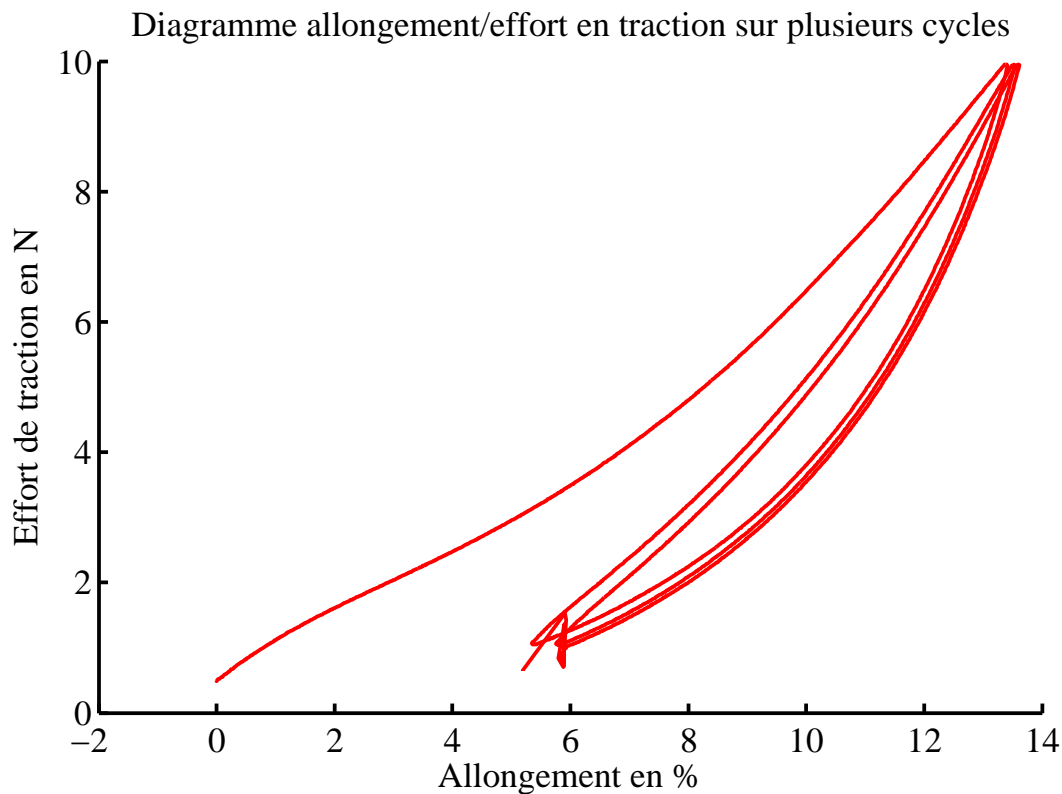


Figure 3.4 – Essai de traction sans rupture sur le câble Shimano avec plusieurs cycles

### 3.7 Simulation du RPC complet

Un simulateur se voulant le plus ressemblant possible aux prototypes réels a été développé sous Simulink. Il permet de valider la modélisation des phénomènes physiques agissant sur le RPC. Une fois que la simulation est jugée pertinente, il est possible de vérifier l'adéquation des caractéristiques vibratoires prévues par la théorie grâce à la simulation, et de tester les lois de commande développées avant de les valider sur un prototype pour limiter les risques de casse en cas d'erreur.

#### 3.7.1 Simulation mécanique

La toolbox SimMechanics est utilisée pour modéliser le comportement mécanique de l'effecteur (Fig. 3.5). Il s'agit d'une simulation à temps continu, qui ne certifie pas rigoureusement que le RPC reste dans la même configuration. La simulation de la commande à temps discret d'un RPC garantissant la détection des changements de configurations du robot présente en effet des difficultés de calcul numérique [MERLET, 2014].

Un seul solide nommé *NXT* figurant l'effecteur est présent sur le diagramme. Une force de perturbation et les efforts de chacun des câbles s'appliquent sur lui. Il est lié par une liaison à 6 degrés de liberté (*Bushing*) à un repère galiléen nommé *Ground*. La pose de l'effecteur ainsi que les accélérations linéaires et les vitesses de rotation sont mesurées au niveau de la liaison.

Les conditions initiales permettent de définir la position initiale de l'effecteur dans le repère fixe, et le bloc *Machine Environment* permet de définir des paramètres généraux de la simulation, tel que le vecteur de l'accélération de la pesanteur et le moteur de calcul.

Les câbles sont modélisés comme un ressort et un amortisseur montés en parallèle (Fig. 3.6). La raideur du ressort dépend de la longueur à vide  $l_2$  (*cable length*) et de

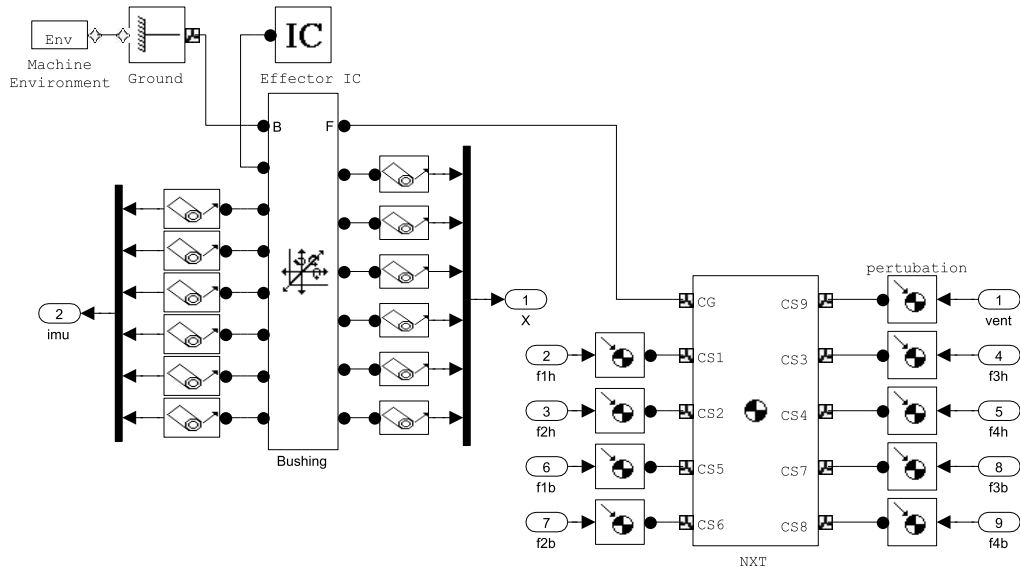


Figure 3.5 – Diagramme Simulink de la modélisation mécanique de l’effecteur

la raideur spécifique  $k_s$  ( $K_{sc}$ ) du câble. L’amortissement s’applique normalement à la dérivée de l’allongement du câble, mais un pôle a été ajouté dans la fonction de transfert utilisée par le simulateur pour éviter les instabilités du calcul numérique (en forçant la causalité stricte de la dérivation). Un bloc intégrateur d’entrée nulle permet ici de soustraire à un signal sa valeur à l’instant  $t = 0s$ . Il s’agit d’une astuce classique sous Simulink, puisqu’aucun bloc ne propose cette fonction directement.

La différence entre la distance des extrémités du câble  $l_1$  (*Distance*) et la longueur à vide  $l_2$  correspondant à l’allongement du câble sous charge, le produit de cette valeur avec la somme de la raideur et de l’amortissement donne la tension du câble.

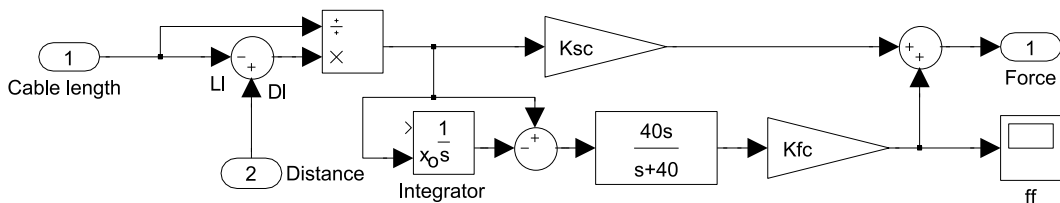


Figure 3.6 – Diagramme Simulink de la modélisation mécanique d’un câble

### 3.7.2 Simulation des capteurs

La simulation de l’IMU utilise les données sortant du système SimMechanics, ainsi que d’un bruit blanc *noise* (Fig. 3.7). Le bruit est ajouté aux mesures exactes fournies par Simulink, puis le filtre passe-bas intégré dans la centrale inertielle est ajouté. Les accélérations sont ensuite intégrées, et un filtre passe-haut est appliqué sur le résultat pour supprimer la composante continue. La matrice de rotation  $R_{IMU}$  n’est pas utilisée dans la

simulation. En effet, une application de cette matrice pour simuler la position du capteur, puis une application de son inverse pour récupérer les vitesses dans le repère de l'effecteur fournit le même résultat que de se passer de ces applications.

Finalement, la sortie présente les mêmes caractéristiques que les signaux sortant de la centrale inertielle réelle.

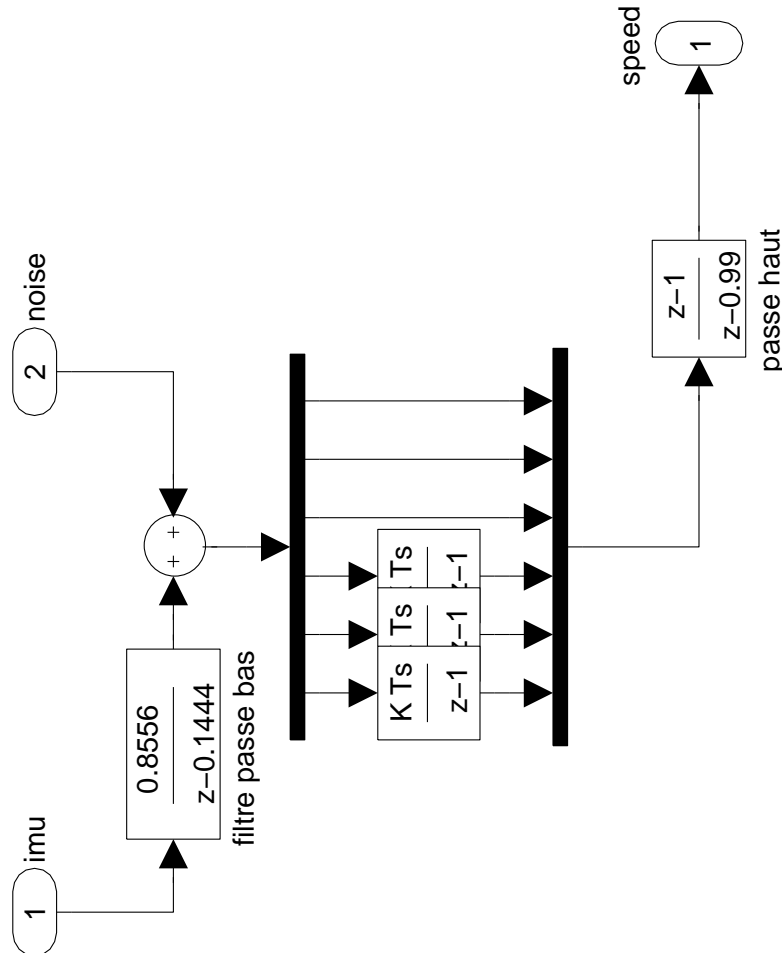


Figure 3.7 – Diagramme Simulink de la modélisation d'une centrale inertielle

### 3.7.3 Simulation des actionneurs

La boucle fermée de chaque moteur relié à un enrouleur est simulée pour une consigne de position en degrés  $theta\_ref$  et une sortie en position  $theta$  en radians (Fig. 3.8).

Le bloc *EV3 RST* contient le script Matlab fourni en annexe B.1 pour l'implémentation du correcteur RST en position, ainsi que des conversions entre radians et degrés.

La commande calculée convertie en analogique par un bloqueur d'ordre zéro, et mise à l'échelle avant d'entrer dans la fonction de transfert continue du moteur entre l'entrée en % de tension et la position de sortie en radians.

Cette position est utilisée pour calculer les tensions des câbles dans la suite du diagramme.

Pour simuler l'effet du codeur incrémental, un bloc de quantification est introduit sur la mesure. Celui-ci est réglé à 0,5 deg pour un système EV3.14 ou à 1 deg pour un système NXT ou EV3.



# Chapitre 4

## CaWiRo : Robot plan équipé de deux roues à inertie

*« On ne vit pas dans l'absolu. Nul homme n'est coulé d'une seule pièce. Même un robot connaît la panne. Sans contradictions il n'y a pas de vie. »*

---

Blaise Cendrars

### Sommaire

---

<b>4.1 Introduction</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>4.2 Plateforme CaWiRo</b> . . . . .	<b>67</b>
4.2.1 Description . . . . .	67
<b>4.3 Caractéristiques vibratoires</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>4.4 Commande</b> . . . . .	<b>73</b>
4.4.1 Identification . . . . .	73
4.4.2 réglage des correcteurs . . . . .	74
<b>4.5 Stabilisation</b> . . . . .	<b>76</b>
4.5.1 Simulation . . . . .	76
4.5.2 Expériences . . . . .	76
<b>4.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>80</b>

---

## 4.1 Introduction

Plusieurs prototypes de RPC ont été conçus et fabriqués à l'aide des éléments présentés au chapitre précédent durant la thèse. Deux d'entre eux sont abordés dans ce manuscrit : le CaWiRo dans ce chapitre et le CoMiRo dans le suivant.

Le CaWiRo correspond au premier effecteur embarquant l'ensemble des éléments mécatroniques d'un robot et à la première plateforme d'essai pour l'outil RPIt. Il s'agit d'un RPC se déplaçant dans le plan et muni de deux roues à inertie.

L'objectif visé lors de sa conception est de fournir une démonstration de la faisabilité de :

- l'effecteur intégrant les éléments mécatroniques,
- l'amortissement actif de vibrations dans le plan sur un RPC,
- l'utilisation de roues à inertie embarquées pour l'amortissement des rotations.

Ce prototype permet également de valider expérimentalement les caractéristiques des vibrations prévues par la théorie.

La première section de ce chapitre décrit le dispositif expérimental. Ensuite, une section compare les caractéristiques vibratoires prévues par la théorie avec celles mesurées sur la simulation et le robot. Puis la synthèse de la commande utilisée sur le robot est décrite. Enfin, les résultats d'expériences de compensation active de vibrations dans l'espace cartésien sont présentés et discutés pour le robot et la simulation.

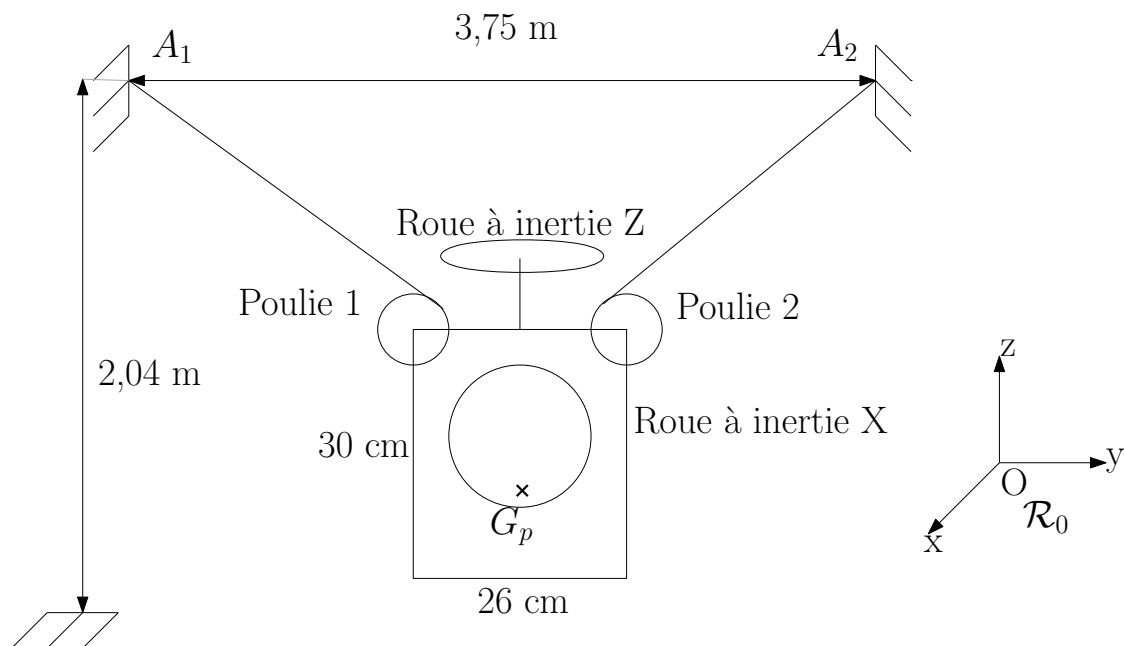


Figure 4.1 – Schéma du CaWiRo muni de deux roues à inertie

## 4.2 Plateforme CaWiRo

### 4.2.1 Description

Le CaWiRo, robot à câbles contraint dans le plan et muni de roues à inertie, se compose d'un effecteur intégré (Fig. 4.1), de 2 paires de câbles de type Shimano Blue Wing<sup>TM</sup> de

0,2 mm de diamètre nominal et de 2 points d'attache de câbles dans une salle. Un petit dispositif de roue libre réalisé en Lego Mindstorms non représenté permet d'équilibrer la tension entre les deux câbles d'une paire, et se situe à quelques centimètres de la fixation du câble au mur (Fig.4.2).



Figure 4.2 – Dispositif de roue libre du CaWiRo

L'effecteur embarque tout l'équipement nécessaire au fonctionnement du robot (Fig. 4.3) :

- un Raspberry Pi model B avec hotspot WiFi,
- une centrale inertielle à six degrés de liberté (Min IMU-9V2 de Pololu Robotics & Electronics),
- une brique Lego EV3 équipée de sa batterie Lego,
- 4 moteurs Lego Mindstorms : 2 « NXT » et 2 « EV3 Large »,
- une batterie de 5V et 2A pour l'alimentation de l'ordinateur embarqué Raspberry Pi.

La brique EV3 utilise le firmware original Lego, le firmware modifié EV3.14 ayant en effet été développé postérieurement au CaWiRo. Il est toutefois possible d'utiliser la brique EV3 comme une simple interface entre un Raspberry Pi et les actionneurs Lego avec le firmware original, grâce à des byte-codes envoyés en USB. La communication aller-retour entre la brique EV3 et le Raspberry Pi prend cependant près de 5 ms. Le contrôleur du robot tournant sur le Raspberry Pi consommant 2 à 3 ms supplémentaires, un temps d'échantillonnage de 10 ms (ou 100 Hz) est choisi.

Les roues à inertie sont réalisées à partir de tiges plastiques dans un plan perpendiculaires à l'axe d'un moteur sur lesquelles sont fixées des masselottes (ici des vis en acier et quelques écrous). Les deux roues ont une masse d'environ 80g chacune.

La masse totale  $m_p$  de l'effecteur est seulement de 1,405kg. Il n'est pas évident de déterminer la matrice d'inertie d'un tel solide. Pour l'estimer, l'effecteur du robot a été approximé à un parallélépipède homogène de masse  $m_p$  de  $h = 30cm$  de haut (axe Z),  $l = 24cm$  de large (axe Y) et  $p = 6cm$  de profondeur (axe X). Le centre d'inertie  $G_p$  est considéré situé au centre géométrique du parallélépipède. La base (X, Y, Z) est considérée comme la base principale d'inertie de l'effecteur, ce qui permet de déterminer les trois

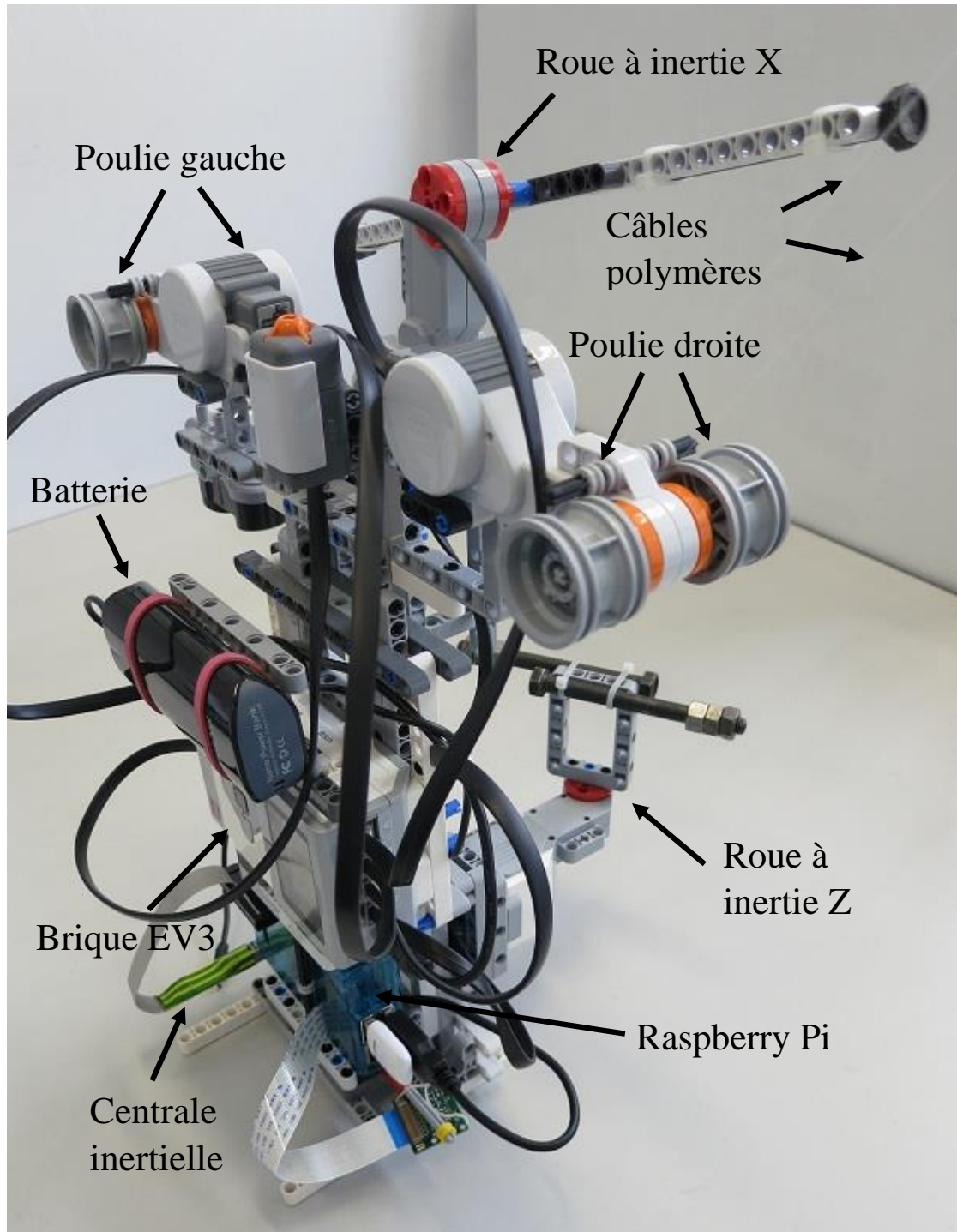


Figure 4.3 – Photo légendée de l'effecteur du CaWiRo



moments principaux d'inertie  $I_x, I_y, I_z$  suivant les axes de la base par :

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{m_p}{12}(l^2 + h^2) = 0.0173\text{kgm}^{-2} \\ I_y &= \frac{m_p}{12}(p^2 + h^2) = 0.011\text{kgm}^{-2} \\ I_z &= \frac{m_p}{12}(l^2 + p^2) = 0.0072\text{kgm}^{-2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Les poulies sont situées sur les deux arêtes supérieures du parallélépipède, comme illustré sur le schéma 4.1. Ce qui donne les coordonnées suivantes pour les vecteurs  $\mathbf{b}_1$ , points de sortie des câbles, dans le repère du robot  $\mathcal{R}_p$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.13 \\ 0.15 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.13 \\ 0.15 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le point d'attache de gauche  $A_1$  est placé en  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1,87 \\ 2,04 \end{pmatrix}$  et le point d'attache de droite

$A_2$  est placé en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1,87 \\ 2,04 \end{pmatrix}$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

Toutes les expériences et simulations sont réalisées sur ce robot avec le centre de gravité  $G_p$  de son l'effecteur en position d'origine  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Le repère du robot  $\mathcal{R}_p$  est alors aligné au repère de la base  $\mathcal{R}_0$ . Le robot est amené à sa position initiale en boucle ouverte par un opérateur. Les expériences de stabilisation sont ensuite réalisées sans mouvement nominal de l'effecteur, mais autour d'une position d'équilibre.

La roue à inertie sur l'axe Z a été ajoutée après l'observation de mouvements hors plan de l'effecteur quand celui-ci est sollicité dans le plan.

### 4.3 Caractéristiques vibratoires

L'analyse modale fournit un outil pour déterminer les fréquences et modes naturels de vibrations d'un RPC. Avant de se servir de cette information pour synthétiser la commande d'amortissement actif de vibrations du CaWiRo, il faut valider par l'expérience le calcul de ces caractéristiques vibratoires.

La matrice de masse du robot en configuration nominale (axes du repère du robot alignés avec les axes du repère de base) se construit à l'aide de la masse et de la matrice d'inertie de l'effecteur :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1,405 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,405 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,405 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0173 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.011 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0072 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

L'effecteur se trouvant dans une position initiale symétrique par rapport à ses points d'attache, ses modes de vibrations théoriques sont simples. En effet, la position considérée du centre de gravité du CaWiRo est à la même distance sur l'axe Y des points  $A_1$  et  $A_2$ , ainsi que des points de sortie des câbles sur les poulies  $B_1$  et  $B_2$ . Dans cette configuration, les tensions des deux câbles assurant l'équilibre de l'effecteur sont égales et valent :

$$\tau = \frac{m_t g}{2u_Z} \quad (4.4)$$

Dans l'équation (4.4),  $u_Z$  correspond à la composante sur l'axe Z des vecteurs  $\mathbf{u}_i$  et  $m_t g$  au poids total de l'effecteur.

La matrice diagonale des raideurs des câbles  $\mathbf{K}(\mathbf{l}_{20})$  est obtenue à l'aide de la formule (2.51) :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{K_s}{l_2^1} & 0 \\ 0 & \frac{K_s}{l_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112,78 & 0 \\ 0 & 112,78 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

La notation  $l_2^1$  désigne la valeur de  $\mathbf{l}_2$  pour le câble 1.

La matrice jacobienne inverse transposée  $\mathbf{J}^T$  pour un RPC à deux câbles a la forme suivante, en utilisant les notations classiques de la figure 2.3 :

$$\mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{b}_1 \times \mathbf{u}_1 & \mathbf{b}_2 \times \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,6773 & 0,6773 \\ 0,7357 & 0,7357 \\ 0,006 & -0,006 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

La raideur  $\mathbf{K}_x$  dans l'espace opérationnel du CaWiRo est calculée à l'aide de l'équation (2.64).

Le second terme, correspondant à l'élasticité due aux raideurs des câbles, vaut ainsi :

$$\tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0)\mathbf{K}(\mathbf{l}_{20})\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 103,4752 & 0 & -0,9099 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 122,0847 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9099 & 0 & 0,0080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Il existe ainsi une raideur suivant les translations sur Y et Z et la rotation autour de X, correspondant au plan dans lequel se déplace le CaWiRo. Si seul cet effet était pris en compte, le robot pourrait librement se déplacer le long de X et tourner autour de Y et Z. Or une vibration en rotation autour de Z est observée sur le CaWiRo, ce qui montre qu'une raideur en rotation autour de Z existe.

Si seuls des mouvements plans du robot sont considérés, il existe 3 modes de vibrations :

- la translation sur Z,
- la translation sur Y couplée à une rotation sur X,
- la rotation sur X couplée à une translation sur Y.

Le couplage entre les axes X et Y provient du fait qu'une rotation de l'effecteur sur X provoque l'allongement d'un câble et le rétrécissement de l'autre, ce qui provoque un mouvement de translation sur Y. Au contraire, un mouvement sur Y depuis la position initiale provoque un déséquilibre de l'effecteur, qui tourne autour de l'axe X pour atteindre une nouvelle position d'équilibre.

La raideur  $\mathbf{K}_x$  totale tenant également compte de la variation de la jacobienne possède par contre des composantes dans les six directions de l'espace :

$$\mathbf{K}_x = \begin{pmatrix} 7,29 & 0 & 0 & 0 & 1,09 & 0 \\ 0 & 107,42 & 0 & -1,97 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 125,43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,97 & 0 & 4,01 & 0 & 0 \\ 1,09 & 0 & 0 & 0 & 2,23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,77 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

La matrice  $\mathbf{K}_x$  est de plein rang et définie positive. Tout mouvement du robot provoque ainsi une force de rappel qui s'y oppose.

Six modes et fréquences de vibrations peuvent être calculés par décomposition modale. Le tableau 4.1 donne les valeurs de ces caractéristiques pour le CaWiRo en position nominale. Les modes principalement en rotation sont associés à des fréquences naturelles plus élevées que les modes principalement en translation. La translation et la rotation sur Z sont des modes propres grâce à la symétrie autour de l'axe Z de la configuration nominale du CaWiRo. Il est intéressant de noter que les sollicitations dans le plan sont censées provoquer des vibrations également dans le plan.

TABEAU 4.1 – Modes et fréquences naturels du CaWiRo

Fréquences naturelles (rad s <sup>-1</sup> )	tran. X	tran. Y	tran. Z	rot. X	rot. Y	rot. Z
16,16	0	0,48	0	-0,88	0	0
15,73	0	0	0	0	0	1,00
15,06	-0,44	0	0	0	-0,90	0
9,45	0	0	1,00	0	0	0
8,20	0	-0,88	0	-0,48	0	0
2,08	0,90	0	0	0	-0,44	0

Les modes et fréquences naturels relevés sur le simulateur sont très proches de ceux obtenus par le calcul.

Les fréquences de vibrations observées sur le prototype présentent par contre des différences non négligeables avec celles calculées (cf. tableau 4.2). Les fréquences peuvent en effet se déterminer en mesurant les périodes des sinusoides composant la mesure de vitesse de l'effecteur.

TABEAU 4.2 – Comparaison des fréquences naturelles (rad s<sup>-1</sup>) entre théorie et prototype

	tran. Y	tran. Z	rot. X	rot. Z
Calcul	8,20	9,45	16,16	15,73
CaWiRo	10,67	13,91	15,30	16,02

Pour les rotations, ces valeurs sont relativement proches, et les différences peuvent s'expliquer par l'incertitude sur l'estimation de la matrice d'inertie de l'effecteur qui intervient dans le calcul.

Par contre, les erreurs sont plus grandes pour les translations, et ne peuvent s'expliquer par la mesure de la masse de l'effecteur. Celle-ci a été pesée avec une balance précise au gramme près, ce qui laisse une faible incertitude. Deux facteurs semblent candidats pour provoquer une telle différence : le modèle des câbles et le mauvais équilibre de l'effecteur.

La question des câbles a déjà été discutée dans le chapitre précédent et le modèle retenu présente de grandes approximations.

Le second facteur envisagé est lié à la position du centre de gravité de l'effecteur. Celui-ci a été supposé placé au centre géométrique du parallépipède rectangle modélisant l'effecteur dans son ensemble, mais cette hypothèse n'a pas été validée. Nous avons cherché à équilibrer au mieux le CaWiRo lors de la construction. Cependant, nous avons constaté qu'une fois suspendu, l'effecteur a tendance à s'incliner légèrement autour de l'axe Y, et présente donc un probable défaut d'équilibrage. Ce défaut crée un couplage entre les modes de vibrations dans et hors du plan. Le robot ayant été démonté, il n'est plus possible de vérifier cette intuition.

Les modes sont moins évidents à déduire des mesures effectués sur le système réel que les fréquences. Il est possible d'observer visuellement sur le robot que les couplages entre les axes X et Y présentés dans le tableau apparaissent effectivement sur le prototype et que la translation sur Z est bien découplée. Quantifier précisément ces couplages est difficile sur des mesures contenant du bruit et des couplages supplémentaires non modélisés.

Un couplage est notamment observé entre la rotation autour de Z et celle autour de X, raison pour laquelle la roue à inertie autour de Z qui correspond à une mobilité hors plan du robot a été ajoutée.

## 4.4 Commande

Cette section décrit la synthèse de la commande du CaWiRo pour l'amortissement actif de vibrations dans l'espace cartésien. Celle-ci s'appuie sur une identification du comportement du robot dans l'espace cartésien, puis sur une stratégie de commande similaire [SISO](#) pour chacune des directions de l'espace.

Les deux roues à inertie sont utilisées pour amortir les vibrations en rotation sur les axes X et Z, et les deux poulies pour amortir les vibrations en translation sur les axes Y et Z.

### 4.4.1 Identification

L'accélération d'un moteur à courant continu est fonction de son courant et inversement proportionnelle à l'inertie de sa charge. Les moteurs utilisés ne fournissent pas de mesures de courant ou de couple. Il n'est donc pas possible d'utiliser directement la théorie développée dans la section [2.5](#) pour la commande des roues à inertie. En outre, comme indiqué dans la section précédente, l'erreur dans l'estimation des fréquences de vibrations n'est pas négligeable pour le CaWiRo.

La stratégie pour ce prototype consiste donc à identifier le système muni de ses roues à inertie entre les entrées de tension moteur des roues inertielles et les sorties de vitesse de rotation sur X et Z mesurées par la centrale inertielle, ainsi qu'entre les entrées de consigne de position cartésiennes et les sorties de mesure d'accélération sur Y et Z, également données par la centrale inertielle. Les entrées permettant de provoquer des accélérations sur Y et Z exploitent la jacobienne du robot pour calculer des consignes de position des poulies provoquant un déplacement uniquement sur Y ou uniquement sur Z.

Cette identification fournit le modèle multi-entrées multi-sorties du système échantillonné dans l'espace cartésien à la fréquence de la commande numérique, linéarisé autour du point d'équilibre considéré. Des échelons ont été appliqués sur chacune des entrées, et les sorties ont été mesurées à la fréquence de 100 Hz. Une identification paramétrique de type boîte noire a ensuite été réalisée pour estimer les fonctions de transfert en boucle ouverte sur les 4 axes considérés. La structure choisie pour le modèle comprend un dérivateur pur et un second ordre sous-amorti :

$$\frac{A(z-1)}{z^2 + Bz + C}$$

L'outil « process model » de la boîte à outils Matlab *ident* a ainsi permis d'obtenir les fonctions de transfert suivantes pour les 2 translations et les 2 rotations :

$$\begin{aligned} G_{tY} &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}_Y}{\theta_Y} = 10^{-4} \frac{-2.482(z-1)}{z^2 - 1.976z + 0.988}, 31\% \text{ fit}, \\ G_{tZ} &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}_Z}{\theta_Z} = 10^{-4} \frac{-5.567(z-1)}{z^2 - 1.973z + 0.992}, 37\% \text{ fit}, \\ G_{rZ} &= \frac{\mathbf{w}_{pY}}{\mathbf{U}_Z} = \frac{-0.0641(z-1)}{z^2 - 1.956z + 0.981}, 49\% \text{ fit}, \\ G_{rX} &= \frac{\mathbf{w}_{pY}}{\mathbf{U}_X} = \frac{-0.0303(z-1)}{z^2 - 1.968z + 0.991}, 67\% \text{ fit}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

La précision de l'identification est mesurée grâce à un pourcentage de « fit » entre les données mesurées et la réponse simulée du modèle identifié. Les fréquences naturelles et amortissements associés des pôles complexes conjugués de ces fonctions sont présentés dans le tableau 4.3.

TABLEAU 4.3 – Fréquences naturelles ( $\text{rads}^{-1}$ ) et amortissements (sans unité) des fonctions de transfert identifiées

	tran. Y	tran. Z	rot. X	rot. Z
fréquence naturelle	10,68	13,91	15,30	16,02
amortissement	0,0587	0,0299	0,03	0,06

#### 4.4.2 réglage des correcteurs

Les vibrations du robot sont un phénomène transitoire. L'objectif de la stratégie de commande proposée consiste à atteindre plus rapidement le régime permanent afin de réduire le temps nécessaire au robot pour réaliser une tâche. En effet, les mouvements du robot ou des perturbations sont susceptibles de provoquer des vibrations de l'effecteur d'après le modèle dynamique (2.49). Les correcteurs doivent également être en mesure de rejeter le bruit de mesure relativement fort en provenance de la centrale inertielle.

Ces correcteurs sont synthétisés dans le lieu des racines par placement de pôles et présentent chacun une paire de pôles complexes conjugués plus amortis et de même fréquence naturelle que ceux du système identifié ainsi qu'un zéro réel positif, comme illustré sur la figure 4.4 pour la rotation autour de l'axe X. Les deux paires de pôles de la boucle fermée sont placés de sorte à ce que les 4 pôles soient égaux deux à deux. De cette manière, le système en boucle fermée est plus rapide à se stabiliser qu'en boucle ouverte, car les pôles sont approchés de zéro, et l'amortissement est plus important car les pôles sont au plus loin du cercle unité dans le lieu des racines.

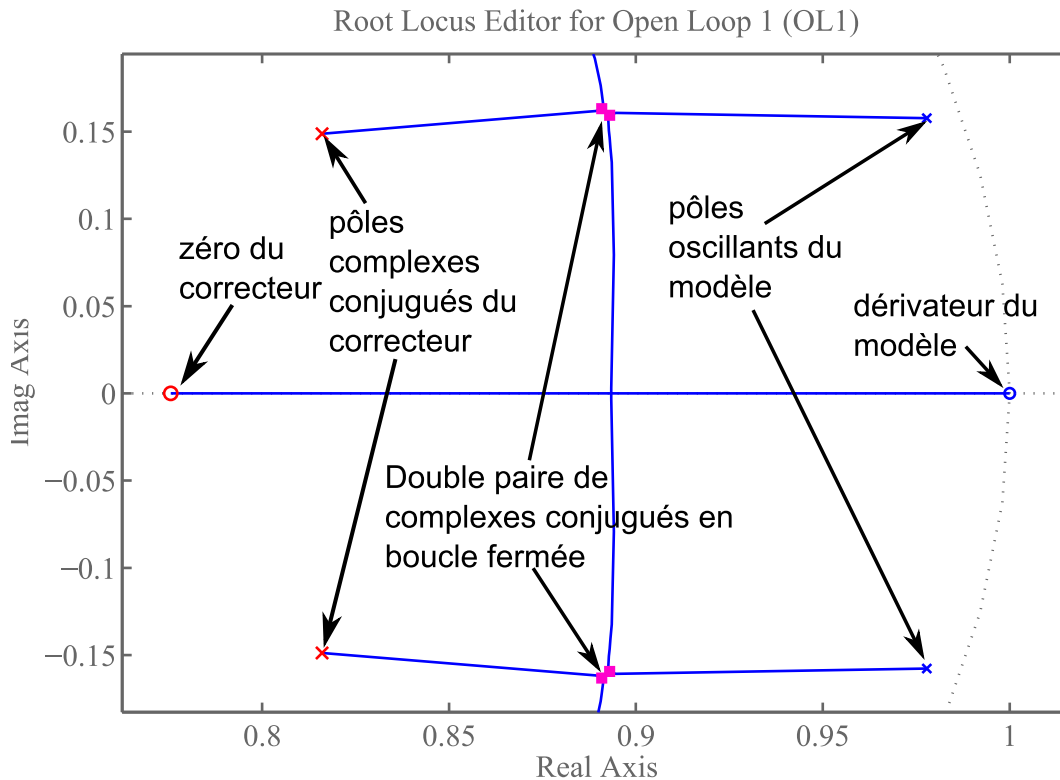


Figure 4.4 – Réglage d'un correcteur discret pour un mode à l'aide du lieu des racines

La paire de pôles des correcteurs permet également de filtrer passe-bas les mesures, ce qui diminue l'effet des bruits de mesures importants de la centrale inertielle sur le comportement en boucle fermée.

Compenser directement les pôles de la boucle ouverte est une mauvaise idée pour l'amortissement actif de vibrations, car cela rend le correcteur inopérant pour rejeter des perturbations qui mettent en vibrations le système. En effet, cela introduit des zéros à la fréquence naturelle de vibration du robot, ce qui implique que le signal de commande à cette fréquence est très atténué, donc il n'excite pas les modes vibratoires mais ne peut plus rejeter les vibrations induites par une perturbation.

Cette stratégie de réglage permet d'obtenir les correcteurs discrets de 0,01 s de temps d'échantillonnage suivants, respectivement, pour chacune des fonctions de transfert identifiées :

$$\begin{aligned}
 C_{rY} &= \frac{-16.27z + 14.45}{z^2 - 1.837z + 0.855}, \\
 C_{lZ} &= \frac{-19.17z + 16.45}{z^2 - 1.748z + 0.781}, \\
 C_{rZ} &= \frac{-0.312z + 0.242}{z^2 - 1.632z + 0.688}, \\
 C_{rX} &= \frac{-0.295z + 0.239}{z^2 - 1.750z + 0.793}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

La commande appliquée sur le CaWiRo s'appuie sur une identification du comportement de l'effecteur dans l'espace cartésien et non dans l'espace modal. Cependant, chaque direction de l'espace est liée à un seul mode de vibration principal, et également à un mode secondaire pour lequel sa contribution est moindre pour la translation sur Y et la rotation autour de X. Cette approche équivaut à négliger les couplages en-

tre les différentes directions de l'espace cartésien, ou à considérer l'espace modal comme aligné sur l'espace cartésien. L'erreur commise à cause de cette approximation entraîne l'apparition d'un phénomène de battement dans les expériences réalisées. Comme chaque correcteur est capable de rejeter une partie de l'énergie de vibrations du système, et que toutes les boucles fermées sont stables, les réponses temporelles convergent effectivement, mais plus lentement que si la commande était appliquée effectivement dans l'espace modal.

## 4.5 Stabilisation

### 4.5.1 Simulation

L'efficacité de la stratégie de commande proposée pour la stabilisation active d'un RPC en présence de bruit de mesure est présentée en simulation.

Pour cela, la fonction de transfert identifiée pour la rotation autour de Z,  $G_{rZ}$ , est considérée comme un mode de vibration du système, de fréquence 16 rad/s et d'amortissement 0,06. Cette simulation sur un seul mode permet donc de mettre en évidence l'efficacité de la commande par placement de pôles dans l'espace modal. Les expériences suivantes sont par contre réalisées dans l'espace cartésien, et des phénomènes de battements liés aux couplages entre plusieurs modes sur un axe de l'espace cartésien apparaissent.

La sortie de la boucle fermée de ce système soumis à une perturbation d'entrée échelon d'amplitude arbitraire 100 est comparée à la réponse du système sans amortissement à la figure 4.5.

Le temps de réponse est significativement amélioré, passant de plus de deux secondes à environ une demie. La sortie du système bouclé est soumise à une oscillation résiduelle faible à cause du bruit de mesure. L'amplitude du dépassement maximum est également réduite d'environ 20%. L'objectif de la stratégie de commande choisie vise en effet davantage une amélioration du temps de réponse qu'une limitation de l'amplitude du mouvement. De plus, la commande des moteurs présente une saturation plutôt basse, ce qui implique une limitation de l'amplitude du signal de commande. Il est ainsi difficile avec les actionneurs utilisés de parvenir à une atténuation importante du premier maximum de la réponse vibratoire.

### 4.5.2 Expériences

Toutes les expériences ont été réalisées avec l'effecteur en position nominale.

Des sollicitations répétables sont générées en envoyant un petit échelon de consigne aux moteurs actionnant les poulies pour mimer l'effet d'une perturbation d'entrée. Les moteurs sont ainsi poussés à saturation dans un sens pour démarrer, puis dans l'autre pour stopper les poulies, en une fraction de seconde.

Les sollicitations verticales (axe Z) sont réalisées de manière à ce que les poulies enroulent simultanément, provoquant un mouvement vertical de l'effecteur du robot. Les sollicitations horizontales (axe Y) sont réalisées de manière à ce qu'une poulie enroule tandis que l'autre poulie déroule du câble. La jacobienne du robot en position nominale présente en effet, grâce à la symétrie des câbles, une forme particulièrement simple : les translations sur les axes Z et Y correspondent respectivement à une somme et une différence des variations de longueur des câbles.

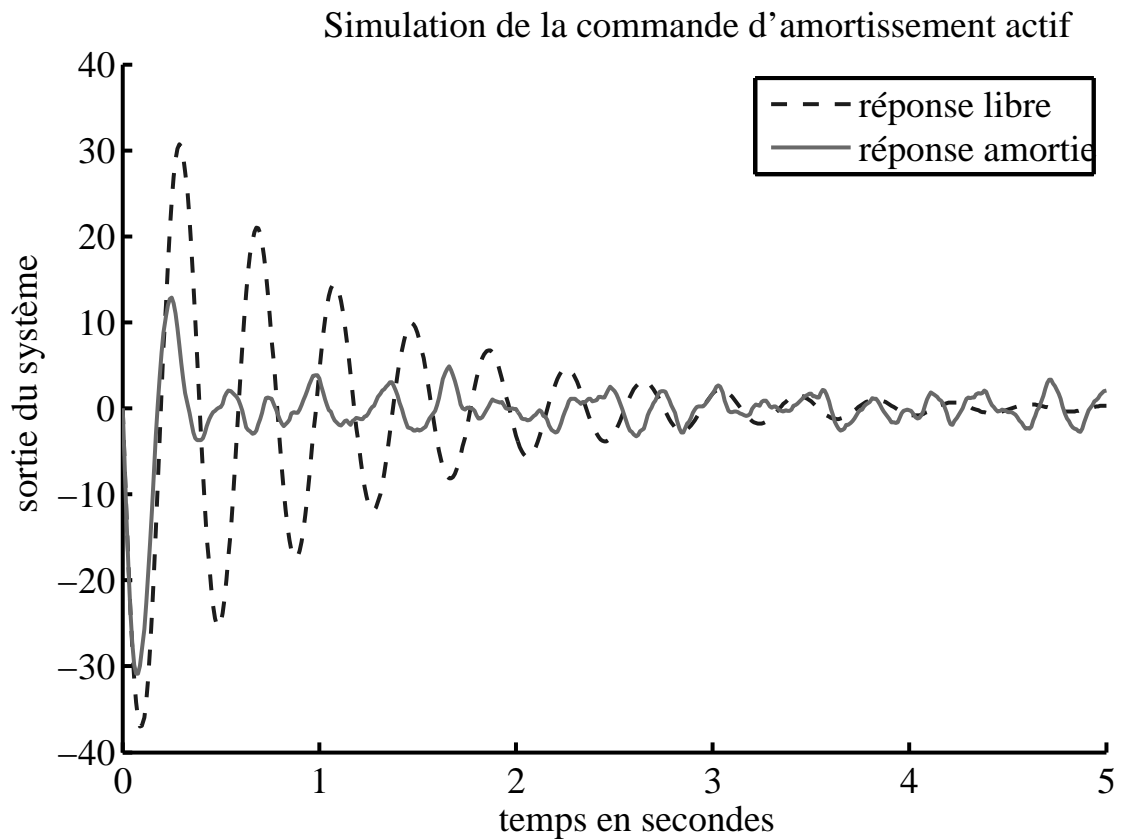


Figure 4.5 – Amortissement actif en simulation pour un degré de liberté, en présence d'un bruit de mesure de densité spectrale de puissance constante de valeur 1

Dans la vidéo disponible sur Youtube <sup>1</sup>, des sollicitations sont également réalisées en créant manuellement un effort externe sur l'effecteur.

Le tableau 4.4 présente le maximum des valeurs absolues des vibrations sur les 4 axes, avec et sans amortissement actif de vibrations, et le pourcentage d'atténuation obtenu.

Le tableau 4.5 présente les valeurs efficaces (racine carrée de la moyenne du carré des échantillons) des vibrations sur les 4 axes, avec et sans amortissement actif de vibrations, et le pourcentage d'atténuation obtenu.

Les unités des tableaux sont les  $\text{rads}^{-1}$  pour les rotations et les  $\text{ms}^{-2}$  pour les translations.

TABEAU 4.4 – Comparaison des amplitudes maximales de vibrations sur le CaWiRo

Sollicitation	Mesure	Réponse libre	Réponse amortie	Atténuation
horizontale	vit. angulaire sur X	112.2	53.73	52.1%
horizontale	vit. angulaire sur Z	137.2	41.81	69.5%
verticale	accélération sur Z	7.517	5.52	26.6%
horizontale	accélération sur Y	5.951	4.66	21.7%

Les expériences suivantes ont été réalisées sur le CaWiRo :

- 1 sollicitation verticale, amortissement actif en translation sur l'axe Z uniquement (Fig. 4.6),

<sup>1</sup><https://www.youtube.com/watch?v=AaSbnY40qw>



TABEAU 4.5 – Comparaison des valeurs efficaces des vibrations sur le CaWiRo

Sollicitation	Mesure	Réponse libre	Réponse amortie	Atténuation
horizontale	vit. angulaire sur X	17.67	7.968	54.9%
horizontale	vit. angulaire sur Z	22.39	5.071	77.4%
verticale	accélération sur Z	0.845	0.465	45.0%
horizontale	accélération sur Y	0.926	0.410	55.8%

- 2 sollicitation horizontale, amortissement actif en translation sur l'axe Y uniquement (Fig. 4.7),
- 3 sollicitation horizontale, amortissement actif en rotation sur les axes X et Z à l'aide des roues à inertie uniquement (Fig. 4.8, Fig. 4.9).

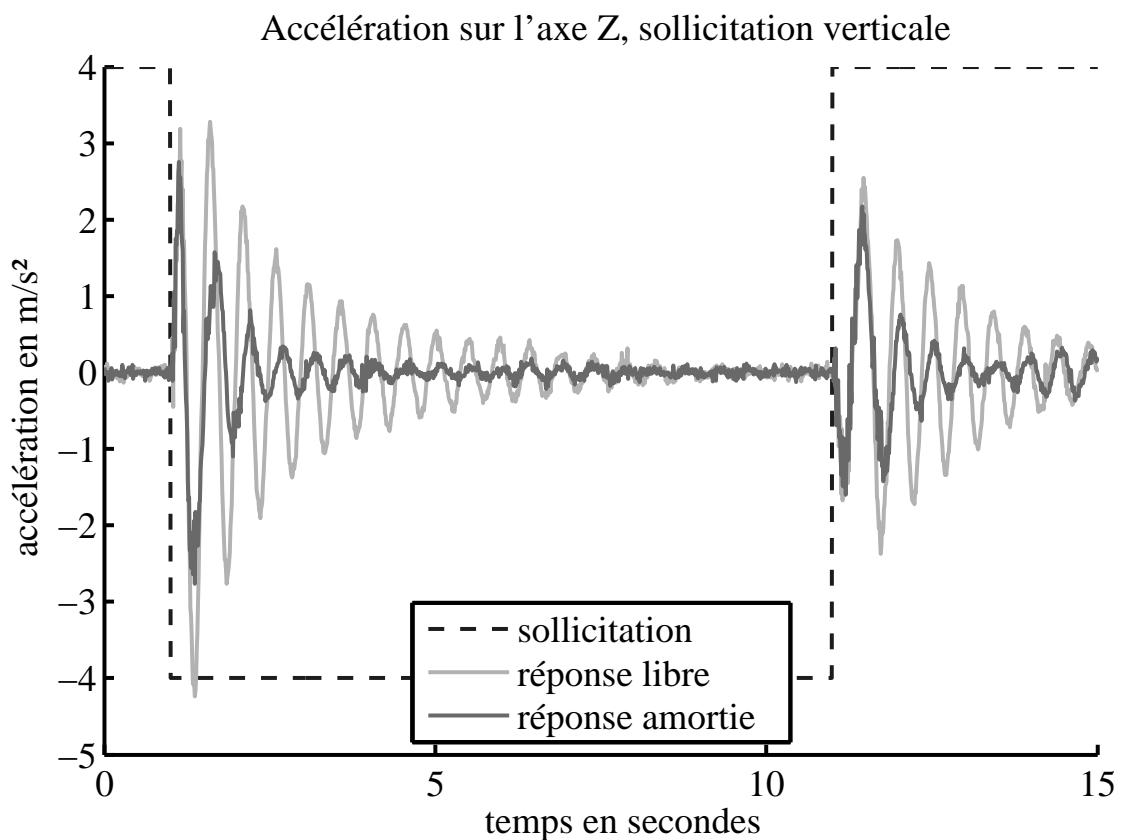


Figure 4.6 – Amortissement actif en translation autour de Z

L'expérience de la figure 4.6 montre un mode de vibration bien découplé des autres, avec une réponse libre purement sinusoïdale en translation sur l'axe Z. Le temps de réponse passe d'environ 5 secondes à environ 1 s, ce qui donne un résultat comparable à la simulation.

L'expérience de la figure 4.7 illustre la superposition de sinusoïdes sur un axe qui n'est pas un mode propre du système. Un phénomène de battement est nettement visible sur la réponse libre. Néanmoins, la commande d'amortissement de vibrations est efficace, même si appliquée sur l'axe Y, et non sur le mode de vibration qui est un couplage entre une translation sur Y et une rotation sur X.

De même, l'expérience de la figure 4.8 montre bien qu'il est possible d'amortir l'énergie de vibration d'un mode couplé entre translation et rotation en agissant uniquement sur

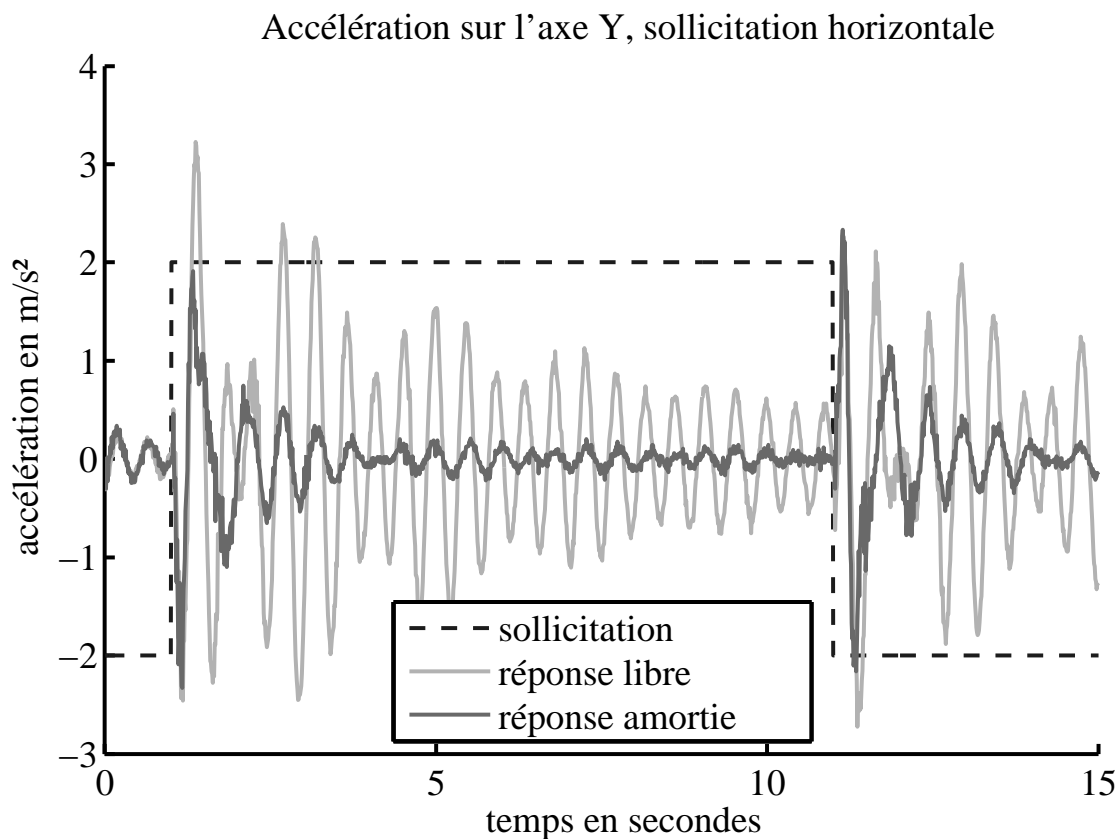


Figure 4.7 – Amortissement actif en translation autour de Y

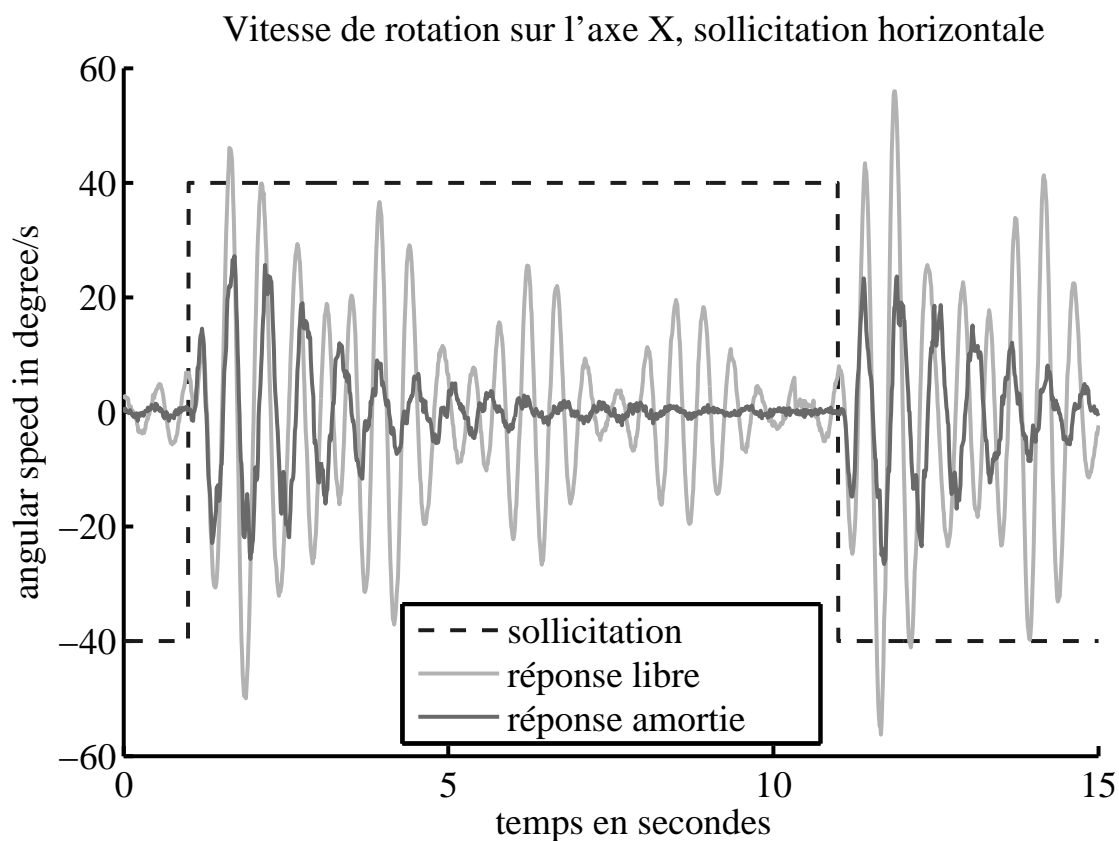


Figure 4.8 – Amortissement actif en rotation autour de X

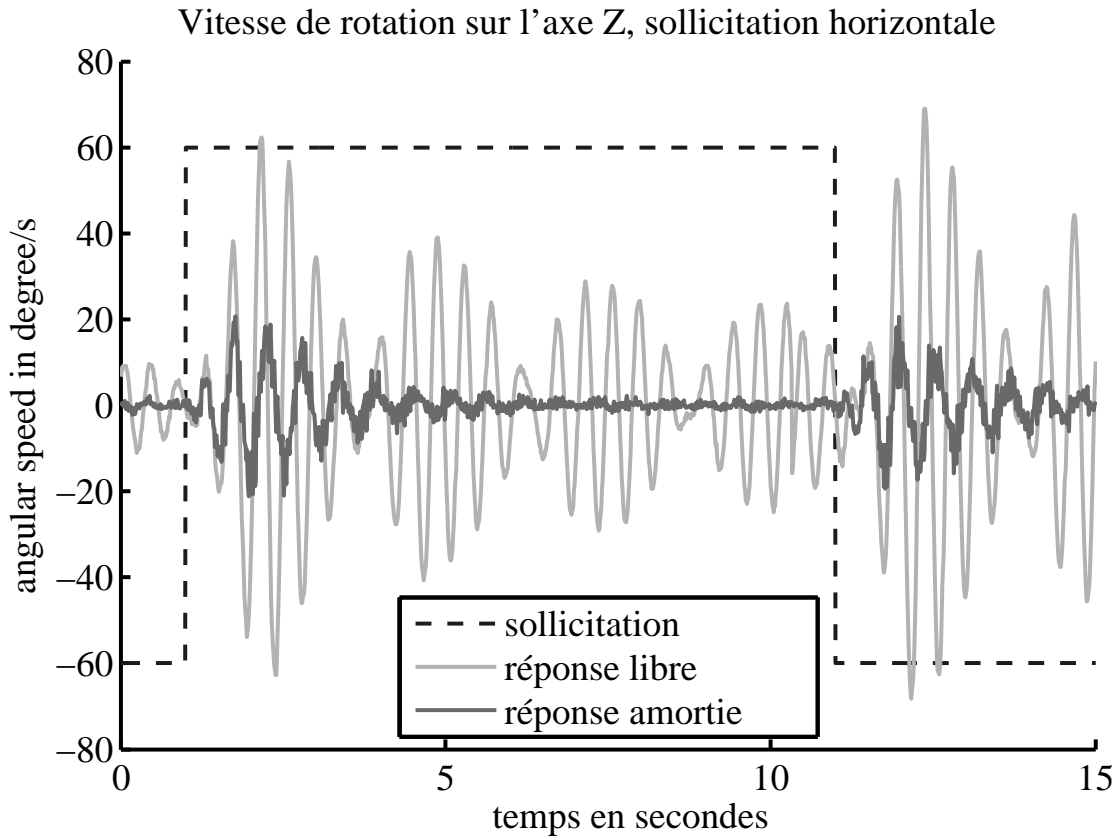


Figure 4.9 – Amortissement actif en rotation autour de Z

un axe de rotation via une roue à inertie. Le temps de réponse du système bouclé est plus lent, de l'ordre de 4 secondes, mais correspond à une grande amélioration par rapport à la réponse libre, qui prend près de 10 secondes à se stabiliser. La figure 4.9 illustre les défauts de modélisation du CaWiRo, probablement à l'origine des erreurs dans l'estimation des fréquences de vibrations du robot. La réponse libre suggère en effet que la rotation autour de l'axe Z, le mouvement hors plan principalement observé sur le robot, est une conséquence des mouvements sur les autres axes. En effet, le maximum de la réponse intervient plus tard par rapport à la sollicitation que pour les 3 autres courbes. L'amortissement actif est particulièrement efficace dans ce cas. Nous faisons ainsi l'hypothèse que l'effecteur une fois stabilisé en rotation autour de Z se comporte comme s'il n'avait effectivement que des mouvements plans.

## 4.6 Conclusion

Ce premier prototype et sa simulation ont permis de valider certaines idées et d'en remettre d'autres en question en vue de la réalisation des prototypes suivants.

Ainsi, le principe de l'effecteur intégré est validé. L'approche « hardware in the loop » adoptée présente en effet une grande flexibilité et permet le développement et le test rapide de lois de commande. La possibilité d'ajouter des capteurs et des actionneurs supplémentaires est également très intéressante.

Les roues à inertie embarquées permettent un amortissement efficace des vibrations de l'effecteur, bien qu'elles ne puissent pas appliquer de couple constant.

L'amortissement de vibrations à l'aide des poulies se révèle également efficace. Les fréquences de vibrations en rotation étant également dans la bande passante des moteurs

pilotant les poulies, il est possible d'amortir également les rotations à l'aide de poulies pour un RPC présentant davantage de degrés de liberté.

Par contre, contraindre le robot dans le plan s'est révélé problématique. Les phénomènes de vibrations mis en jeu pour un solide suspendu à des câbles semblent intrinsèquement spatiaux. Malgré une géométrie limitée au plan, le robot présente une raideur dans les six directions de l'espace, et six modes de vibrations indépendants.

Les prototypes suivants sont ainsi conçus pour se déplacer dans l'espace et produire des rotations à l'aide d'une disposition adéquate des poulies.

Dans ce chapitre, le robot est commandé dans l'espace cartésien autour d'une position unique d'équilibre. Pour cela, une identification paramétrique a été utilisée pour estimer le modèle dynamique linéarisé entre les entrées de commande et les mesures. Cette approche permet de valider un concept sur une situation particulièrement simple et découplée, mais ne peut être généralisée à un robot dont la nacelle est amenée à se déplacer dans l'espace opérationnel. C'est ce problème, l'obtention d'une commande générique, qui est traité dans le chapitre suivant.

# Chapitre 5

## CoMiRo : Robot à 8 câbles et 6 degrés de liberté

*« La différence entre l'être humain et le robot n'est peut-être pas aussi significative que celle qui oppose l'intelligence et la bêtise. »*

---

Isaac Asimov

### Sommaire

---

<b>5.1 Introduction</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>5.2 Plateforme CoMiRo</b> . . . . .	<b>83</b>
5.2.1 Description . . . . .	83
5.2.2 Contrôleur . . . . .	88
5.2.3 Gestion du mouvement . . . . .	92
<b>5.3 Caractéristiques vibratoires</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>5.4 Expériences de stabilisation</b> . . . . .	<b>94</b>
5.4.1 Stabilisation avec correcteurs fixes . . . . .	95
5.4.2 Stabilisation avec adaptation des gains . . . . .	95
5.4.3 Stabilisation en mouvement avec adaptation des gains . . . . .	99

---

## 5.1 Introduction

Le présent chapitre décrit le prototype de RPC développé le plus récemment : le CoMiRo. Ce RPC suspendu par huit câbles est capable de se déplacer suivant les six degrés de liberté de l'espace, et est commandé à l'aide de huit enrouleurs actionnés embarqués. Aucun actionneur supplémentaire n'est embarqué.

Le CoMiRo s'inspire de la géométrie et du nom du robot CoGiRo du LIRMM-Tecnalia (Fig. 1.9) [GOUTTEFARDE et collab., 2015a]. La géométrie de ce dernier a été optimisée pour maximiser la taille de l'espace de travail tout en minimisant les collisions des câbles entre eux et avec la nacelle. L'astucieux arrangement des points de fixation des câbles sur la nacelle permet également de rejeter la plupart des singularités en bordure de l'espace de travail.

Les expériences menées sur le CoMiRo ont pour but de valider la théorie développée notamment sur :

- la détermination des caractéristiques vibratoires d'un RPC suspendu redondant,
- l'amortissement actif de vibrations dans l'espace modal sur un RPC à six degrés de liberté,
- le séquençement adaptatif des gains des correcteurs qui gèrent cet amortissement actif.

Sur ce robot, les expériences d'amortissement actif de vibrations sont évaluées pour différentes poses dans son espace de travail, ainsi que pour un déplacement à vitesse constante.

Les caractéristiques vibratoires du robot dépendent de sa pose. En effet, la linéarisation de l'équation (2.49) se fait autour d'un point d'équilibre. Les caractéristiques de ce point d'équilibre varient quand le robot se déplace, ce qui fait par suite varier les caractéristiques vibratoires du robot.

Les gains des correcteurs d'amortissement actif sont donc recalculés en ligne en fonction du point d'équilibre courant du robot.

Dans un premier temps, le CoMiRo est décrit en détail, ainsi que son contrôleur et la stratégie de déplacement utilisée. Puis les caractéristiques vibratoires théoriques et expérimentales sont confrontées pour ce robot. Finalement, des expériences de stabilisation montrent l'efficacité de la commande proposée et de la stratégie de d'adaptation des gains des correcteurs.

## 5.2 Plateforme CoMiRo

### 5.2.1 Description

#### Présentation

Le robot CoMiRo est composé d'un effecteur intégré, de huit paires de câbles de type Shimano Blue Wing<sup>TM</sup> de 0,2 mm de diamètre nominal et de huit points d'attache de câbles accrochés aux murs d'une salle (Fig. 5.1).

Les fixations des câbles dans la salle se font simplement grâce à une série de nœuds réalisés autour de vis fixées dans le mur. Chaque paire de câbles est relié à une même fixation au mur, et à un même axe de sortie de moteur via deux poulies de rayon 1,0 cm (réalisées en prototypage rapide) situées de part et d'autre de cet axe. Une autre paire

de poulies connectées de part et d'autre d'un axe en roue libre sur l'effecteur permettent d'égaliser mécaniquement la tension entre les deux câbles d'une paire (Fig. 5.2) et de figer les points de sortie des câbles  $B_i$  aux positions voulues.

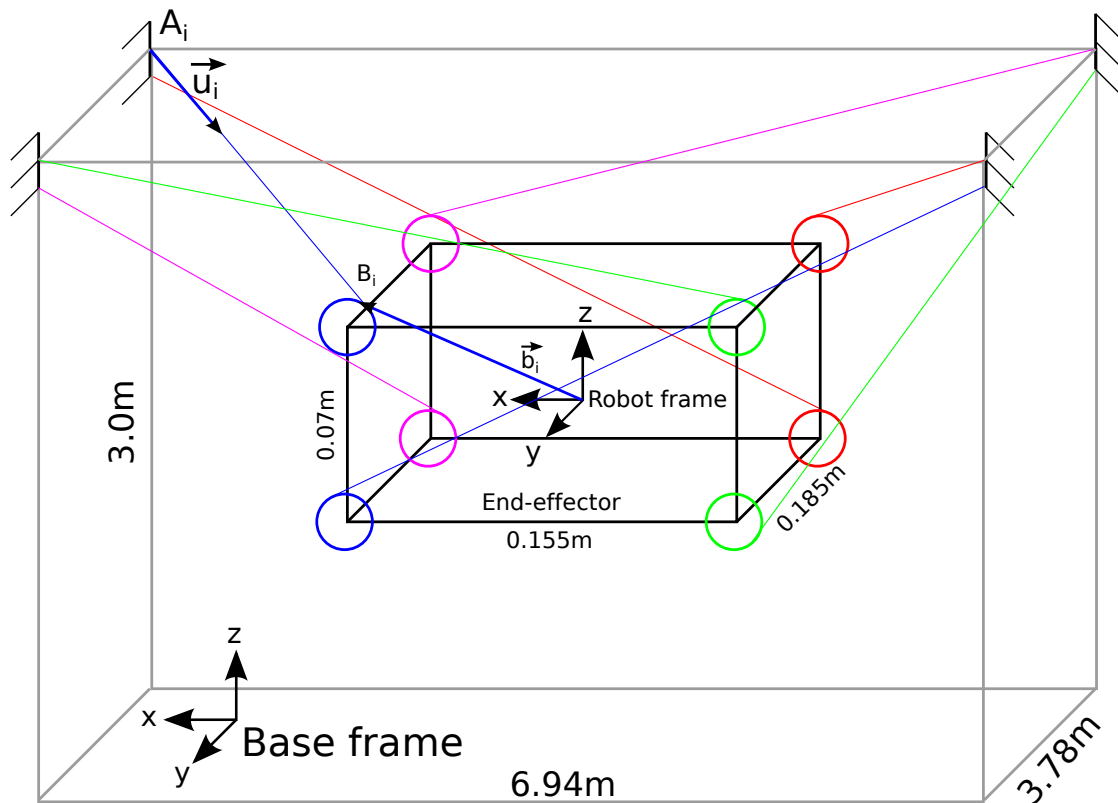


Figure 5.1 – Schéma du CoMiRo avec ses dimensions et repères

La figure 5.1 présente les dimensions et les repères utilisés pour le CoMiRo. Ce robot s'inspire des travaux du LIRMM de Montpellier sur le robot CoGiRo de grande dimension et de grande charge utile [GOUTTEFARDE et collab., 2015a]. Ce RPC suspendu à huit câbles et six degrés de liberté possède en effet une structure optimisée pour maximiser l'équilibre de l'effecteur. L'objectif recherché était d'obtenir ainsi un robot avec un très grand **espace des torseurs générables** et capable de réaliser des tâches impliquant des rotations de l'effecteur de grande amplitude.

Le résultat de cette optimisation pour huit câbles et des fixations de câbles positionnées dans un parallélépipède rectangle est étonnamment élégant. L'effecteur se présente également sous la forme d'un parallélépipède rectangle dont les sommets coïncident avec les extrémités des câbles.

### Projet MiCaRo

Le CoMiRo a été construit à la suite d'un premier prototype de RPC suspendu à huit câbles et six degrés de liberté, le MiCaRo (Fig. 5.3). Le MiCaRo embarque trois briques NXT avec un système d'exploitation temps réel *NXTosek*<sup>1</sup> reliés à un Raspberry Pi pour le pilotage des moteurs. Il présente l'inconvénient d'avoir une singularité sur la rotation autour de l'axe vertical quand il est au centre de son espace de travail, ce qui a tendance

<sup>1</sup>Projet libre d'OS temps réel pour Lego NXT <http://lejos-osek.sourceforge.net/>, adapté dans l'équipe pour réaliser des contrôleurs de robot [http://icube-avr.unistra.fr/fr/index.php/NXT\\_CESAR](http://icube-avr.unistra.fr/fr/index.php/NXT_CESAR)

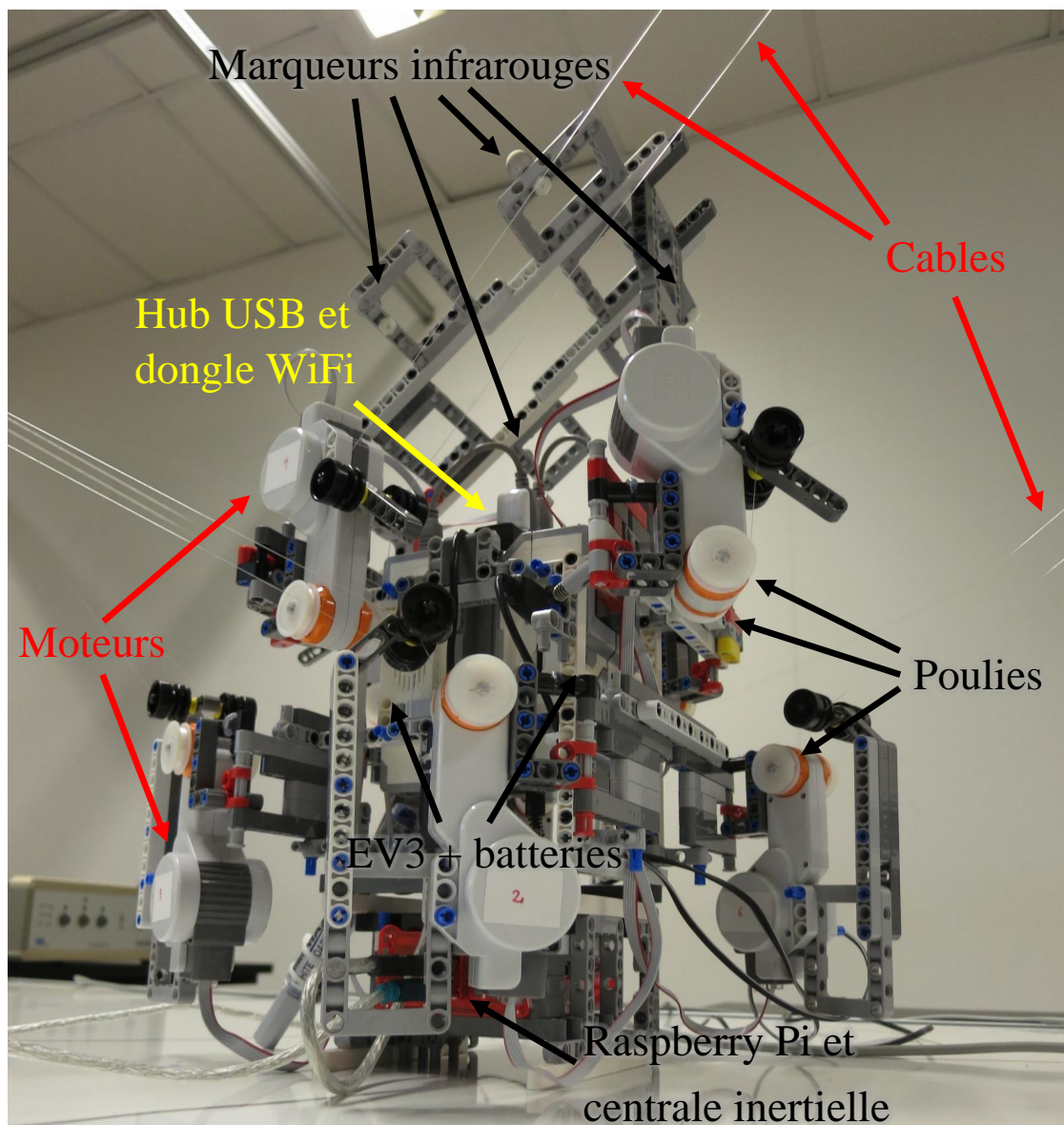


Figure 5.2 – Photo légendée du CoMiRo



à déstabiliser la commande d'amortissement actif de vibrations. En effet, près de la singularité, les moteurs doivent générer une vitesse de rotation très élevée pour produire le jeu de tensions voulu par la commande. Sur ce robot, la commande d'amortissement actif de vibrations calculée est ainsi désactivée sur cet axe. Si ce n'était pas le cas, la commande calculée serait écrêtée positivement et négativement à la tension maximale des batteries conduisant à une forme proche d'un signal créneau. Cette courbe fortement non linéaire et riche en harmoniques pourrait alors exciter les autres modes oscillants du robot. C'est pourquoi les expériences sur le robot MiCaRo ont été réalisées en désactivant la mobilité autour de l'axe vertical pour l'article [WEBER et collab., 2015]. Le CoMiRo ne présente pas ce type de problème, car son espace de travail ne comporte pas de singularités.

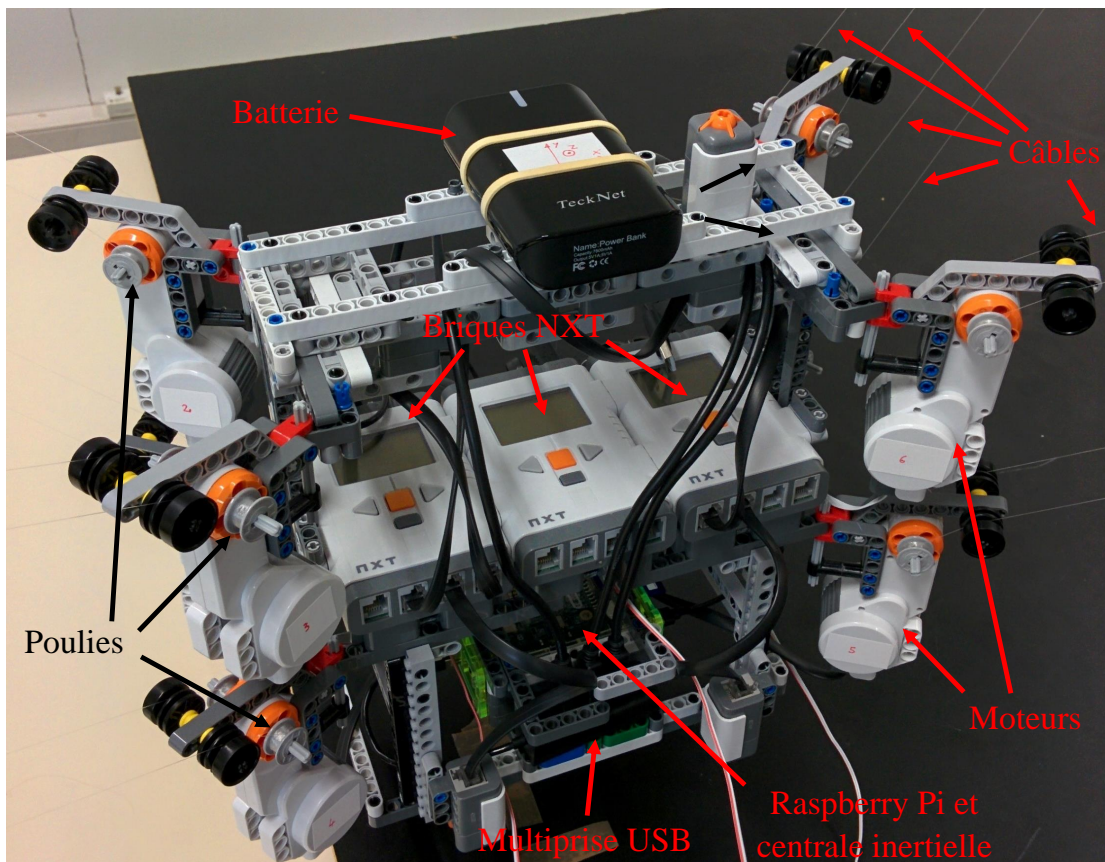


Figure 5.3 – Photo légendée du MiCaRo

### Caractéristiques géométriques et mécaniques

La différence géométrique entre le robot CoMiRo et le robot MiCaRo (dont les câbles sont reliés entre un point de fixation et la poulie la plus proche sur l'effecteur) se situe dans la disposition des câbles. Comparé au MiCaRo, sur le CoGiRo et le CoMiRo, les 4 câbles du haut de l'effecteur sont reliés aux 4 points de fixation les plus hauts de la salle, mais avec une rotation de  $+\frac{\pi}{2}$  rad des points  $B_i$ . Les 4 câbles du bas de l'effecteur relient les 4 points de fixation les plus bas de la salle avec une rotation de  $-\frac{\pi}{2}$  rad des points  $B_i$  (illustration à la figure 5.1). Ainsi, deux points  $B_i$  l'un au-dessus de l'autre sur l'effecteur sont reliés à des points  $A_i$  opposés dans la salle. Cette manière de procéder confère à ces robots un grand **espace des torseurs générables** sans singularité interne. La raideur dans l'espace

opérationnel du CoMiRo varie également plus faiblement et plus régulièrement que celle du MiCaRo en fonction de la pose du robot.

Les points de fixation du CoMiRo dans la salle forment un parallélépipède rectangle aligné sur les axes du repère de base, dont les côtés mesurent 6,94 m sur l'axe X, 3,78 m sur l'axe Y et 0,10 m sur l'axe Z (Fig. 5.1).

Les points de sortie des câbles sur l'effecteur forment un second parallélépipède rectangle aligné sur les axes du repère du robot, dont les côtés mesurent 0,155 m sur l'axe X, 0,185 m sur l'axe Y et 0,07 m sur l'axe Z.

La masse totale de l'effecteur  $m_t$  est de 2,0 kg. Sa matrice d'inertie exprimée dans le repère du robot  $\mathbf{I}_r$  est estimée de la même manière que pour le CaWiRo, en considérant une répartition homogène de la masse dans un parallélépipède de 0,155 × 0,185 × 0,130 m :

$$\mathbf{I}_r = \begin{pmatrix} 0.0138 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0121 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0049 \end{pmatrix} \text{kg.m}^2 \quad (5.1)$$

### Matériel et logiciel

L'effecteur du CoMiRo embarque les actionneurs, les capteurs, l'ordinateur et les batteries nécessaires à son fonctionnement. Ces appareils comprennent :

- un Raspberry Pi modèle B fonctionnant en hotspot WiFi,
- une centrale inertielle à six degrés de liberté comprenant trois accéléromètres et trois gyromètres (Drotek IMU 9DOF - MPU9150 Invensense PCB),
- 2 briques Lego EV3 et leurs batteries, dont l'une alimente le Raspberry Pi via une liaison USB,
- 8 moteurs « NXT ».

Les briques EV3 utilisent le firmware modifié EV3.14 développé dans l'équipe. Il permet de réduire le délai de communication entre le Raspberry Pi et chaque brique à environ 1 ms au lieu de 5 ms avec le firmware Lego. Un temps d'échantillonnage plus court que pour le CaWiRo de 7 ms est choisi pour le contrôleur, afin d'avoir un temps suffisant pour le calcul de la commande et la mise à jour des correcteurs.

La résolution des codeurs intégrés aux moteurs est améliorée de 1 deg à 0,5 deg par ce firmware qui exploite l'encodage en quadrature contrairement au firmware original.

Connaissant cette résolution, le rayon des poulies  $R_p$  de 1 cm, la raideur spécifique  $k_s = 280$  N d'une paire de câbles, il est possible de calculer la sensibilité entre un mouvement élémentaire d'un moteur et le changement de tension du câble associé à ce moteur.

Pour un câble de longueur à vide  $l_2 = 5$  m, le plus petit mouvement mesurable d'un moteur génère ainsi une différence de tension dans le câble d'environ 5 mN :

$$R_p \frac{0.5\pi k_s}{180} \frac{1}{5} \approx 0.005\text{N} \quad (5.2)$$

Un système de localisation 3D NDI Polaris fournit une vérité de terrain de la pose du CoMiRo. En effet, l'estimation de la pose courante du robot à l'aide des capteurs embarqués pose problème. D'une part, le modèle géométrique direct d'un RPC est difficile à obtenir, comme cela avait été évoqué dans la section 1.3.4. En outre, ce modèle ne

tient pas compte des déformations des câbles, ce qui conduit à une imprécision importante dans notre cas où des câbles élastiques sont employés. Une autre possibilité consiste à intégrer les données de la centrale inertielle pour déduire l'évolution de la pose du robot depuis sa pose initiale, mais l'erreur d'estimation de la pose va être croissante dans le temps à cause de l'intégration des biais dans les mesures de vitesse et d'accélération.

Une mire asymétrique constituée de 4 marqueurs infrarouges passifs est montée sur l'effecteur du CoMiRo afin de permettre au système Polaris de déterminer la pose  $\mathbf{x}$  du robot par rapport à un repère fixe.

Cette mesure extéroceptive précise de la pose du CoMiRo n'est cependant pas nécessaire pour l'amortissement de vibrations ou pour rejouer une trajectoire connue. L'amortissement actif de vibrations exploite une estimation de la pose d'équilibre du robot pour calculer ses caractéristiques vibratoires et en déduire les réglages des correcteurs. Une incertitude sur la pose du robot conduit à une incertitude sur les modes et fréquences propres. Si cette incertitude est raisonnable, l'amortissement actif reste performant s'il est robuste. La question de la preuve de stabilité de la commande d'amortissement actif et de l'évaluation de sa robustesse est en cours d'étude.

### 5.2.2 Contrôleur

Le contrôleur est programmé sous forme d'un diagramme Simulink utilisant des blocs de la boîte à outils proposée par RPIt.

Un bloc permettant d'inclure du code Matlab est utilisé dans ce contrôleur pour réaliser l'asservissement de l'amortissement actif de vibrations. Le code Matlab de ce bloc (proposé en annexe B.2) permet à partir des mesures de vitesses opérationnelles, des positions moteurs et d'une estimation de la pose du robot de calculer les commandes à envoyer aux moteurs pour l'amortissement de vibrations à chaque instant. Ce calcul comprend plusieurs étapes, répétées à chaque instant d'échantillonnage :

1. calcul des matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}_x$  du modèle dynamique linéarisé du robot,
2. calcul des modes propres et des fréquences naturelles au point d'équilibre courant,
3. synthèse des correcteurs d'amortissement actif de vibrations dans l'espace modal,
4. calcul de la valeur courante des commandes moteurs.

#### Suivi des modes

Le calcul des modes et fréquences propres du CoMiRo à partir des matrices de masse et de raideur consiste en une simple recherche de valeurs propres et vecteurs propres.

Cependant, un problème se pose lorsque les modes propres sont recalculés à chaque échantillon, et qu'une commande numérique utilisant un historique sur plusieurs échantillons est appliquée sur différents modes.

En effet, les algorithmes permettant d'extraire les vecteurs propres renvoient ceux-ci dans un ordre indéfini. Autrement dit, rien ne prouve que pour un même système, le premier mode retourné par ces algorithmes correspond systématiquement à une rotation autour de l'axe Z par exemple. La condition d'orthogonalité des modes n'impose en effet aucune contrainte sur l'ordre d'apparition des modes dans la matrice  $\mathbf{E}$ .

Il arrive donc que cet ordre des modes dans la matrice modale  $\mathbf{E}$  change d'un échantillon à l'autre, même pour des modifications très légères des matrices de masse ou de raideur. Or la commande modale d'amortissement actif de vibrations est projetée à l'aide

de la matrice  $\mathbf{E}$  dans l'espace articulaire pour fournir les commandes des moteurs. Les correcteurs étant ajustés à chaque échantillon, si des permutations ont lieu dans  $\mathbf{E}$  entre deux échantillons, la commande correspondant à un mode est calculée avec l'historique de la commande correspondant à un autre mode.

Dans ce cas, le système peut réagir de manière totalement imprévisible.

Un algorithme de suivi des modes est implémenté pour éviter ce cas. Une approche simpliste consisterait à trier les modes par fréquence naturelle associée croissante, mais ce procédé n'est pas très robuste, car plusieurs modes différents peuvent avoir une fréquence naturelle proche, avec des croisements possibles.

En tenant compte des propriétés d'orthogonalité sur  $\mathbf{M}$  de la matrice modale  $\mathbf{E}$ , un algorithme beaucoup plus robuste de test croisé d'orthogonalité (Cross-Orthogonality Check ou CORC [GIBSON, 1992]) est implémenté.

Cette méthode utilise le produit de la matrice modale de l'échantillon précédent  $\mathbf{E}(k-1)$ , de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  et de la matrice modale à l'échantillon courant  $\mathbf{E}(k)$  pour obtenir une matrice de permutation des modes  $\mathbf{E}'$ :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}(k)^T \mathbf{M} \mathbf{E}(k-1) \quad (5.3)$$

La propriété d'orthogonalité sur  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{E}$  impose que la matrice  $\mathbf{E}'$  contienne 6 valeurs proches de 1 et toutes les autres valeurs proches de 0 si les modes n'ont presque pas changé entre les deux échantillons.

En arrondissant toutes les valeurs de  $\mathbf{E}'$  à l'entier le plus proche, s'il y a exactement un 1 par ligne et par colonne et des 0 ailleurs, cette matrice est une matrice de permutation qui peut réarranger les modes de la même manière qu'à l'échantillon précédent :

$$\mathbf{E}_{ord}(k) = \mathbf{E}(k) \mathbf{E}' \quad (5.4)$$

La matrice des modes à l'échantillon courant ordonnée de la même manière qu'à l'échantillon précédent  $\mathbf{E}_{ord}(k)$  est ainsi obtenue.

Cette méthode est particulièrement robuste car une modification très importante des modes propres entre deux échantillons est nécessaire pour qu'une confusion soit possible.

### Réglage des correcteurs

Une fois le calcul des modes et fréquences propres pour la position courante effectuée, ce code Matlab calcule les gains des correcteurs agissant dans l'espace modal, avant de calculer la commande moteur à l'instant courant.

Les vibrations étant découplées entre les différents modes, les algorithmes de commande pour les systèmes SISO peuvent être exploités.

Une approche par placement de pôles est proposée pour chacun des correcteurs SISO de la matrice diagonale  $\mathbf{C}_m$ . D'autres approches pour la commande de systèmes linéaires SISO sont évidemment possibles, mais pour la plupart souffrent de temps de calcul ou de complexité de la synthèse beaucoup plus importants que le placement de pôles, et l'implémentation que nous proposons présente des limitations sur ce plan.

Les fonctions de transfert  $\mathbf{G}_m$  ont une structure fixe à deux pôles et un zéro plus ceux de la fonction de transfert des actionneurs  $G_w$ , mais à paramètres variants au cours du temps. En effet, les pôles complexes conjugués de  $\mathbf{G}_m$  ((2.76)) sont fonction de la matrice  $\Lambda$  des fréquences naturelles du système, qui dépend du point d'équilibre choisi. Quand le robot se déplace, ce point d'équilibre doit être actualisé pour que le modèle reste valide, ce qui impose une actualisation de  $\Lambda$  et donc des pôles de  $\mathbf{G}_m$  au cours du temps.

La structure du correcteur peut donc être fixe au cours du temps, mais les paramètres de réglage doivent changer pour s'adapter aux modifications de  $\mathbf{G}_m$ .

Une méthode classique dans le cadre du placement de pôles consiste à compenser les pôles et zéros stables du système avec des zéros et pôles du correcteur. La fonction de transfert  $\mathbf{G}$  traduit le comportement dynamique des actionneurs contrôlant les poulies. La plupart des actionneurs utilisés en robotique, comme les moteurs à courant continu et brushless, sont généralement modélisés par une fonction de transfert du second ordre légèrement sous-amortis (coefficient d'amortissement de 0,707) quand ils sont asservis en position. En compensant avec deux zéros complexes conjugués la paire de pôles de  $\mathbf{G}_w$  et en rajoutant deux pôles pour assurer la causalité au correcteur, l'influence des dynamiques des actionneurs sur la boucle ouverte peut être négligée. Les pôles ajoutées pour la causalité sont choisis très rapides par rapport aux autres dynamiques mises en jeu pour que leur influence soit négligeable.

Si les effets des dynamiques des actionneurs peuvent être compensés, ce n'est pas le cas en ce qui concerne la paire de pôle non amortis liés à l'élasticité des câbles. En effet, en compensant cette paire de pôles dans le correcteur par une paire de zéros, le gain du correcteur à la fréquence naturelle de vibration serait nul. Dans ce cas, le correcteur n'exciterait pas le mode vibratoire, mais aucun rejet de perturbation ne pourrait être obtenu à cette fréquence. Or c'est précisément aux fréquences propres que le rejet de perturbation nous intéresse le plus, car ce sont les fréquences des vibrations que nous cherchons à amortir.

Les pôles et zéros agissant sur l'amortissement de vibrations du correcteur sont ainsi placés suivant le schéma de la figure 5.4. Deux pôles complexes conjugués et un zéro de même partie réelle négative  $a$  sont utilisés. La partie imaginaire des pôles complexes conjugués est choisie égale à la partie imaginaire des pôles complexes conjugués du mode de vibration, c'est à dire la fréquence naturelle  $\sqrt{\Lambda_i}$ . Le gain du correcteur  $K_c$  est calculé pour obtenir dans la boucle fermée deux paires égales de pôles complexes conjugués :

$$K_c = 2(\sqrt{\Lambda(a^2 + \Lambda)} - \Lambda) \quad (5.5)$$

La partie réelle de ces deux paires de pôles est strictement négative, ce qui assure la stabilité de la boucle fermée et un effet d'amortissement.

La position des deux paires de pôles complexes conjugués en boucle fermée est donnée par la formule suivante :

$$\frac{a}{2} \pm i \sqrt{\sqrt{\Lambda(a^2 + \Lambda)} - \frac{a^2}{4}} \text{ avec } \sqrt{\Lambda(a^2 + \Lambda)} > \frac{a^2}{4} \quad (5.6)$$

Tant que les pôles et le zéro du correcteur ont une partie réelle  $a$  strictement négative, il en va de même pour celle des paires de pôles de la boucle fermée  $\frac{a}{2}$ , ce qui implique que le système est stable.

Le domaine de validité de l'expression (5.6) est ainsi :

$$a \in \left[ -2\Lambda\sqrt{2 + \sqrt{5}}, 0 \right] \quad (5.7)$$

Un correcteur est ainsi réglé pour chaque mode avec comme objectif la stabilisation de l'effecteur la plus rapide possible et la meilleure immunité au bruit de mesure possible.

Ce correcteur a l'avantage de filtrer efficacement le bruit de mesure et est robuste à de petites erreurs de modélisation, c'est à dire sur l'estimation des fréquences naturelles. Le zéro en zéro, ou dérivateur pur, provenant de  $\mathbf{G}_m$  est toujours présent dans la fonction

de transfert en boucle fermée. La valeur finale de la réponse de la boucle fermée est ainsi toujours zéro, quelle que soit la consigne appliquée. Comme celle-ci est toujours nulle, aucune erreur statique n'est présente.

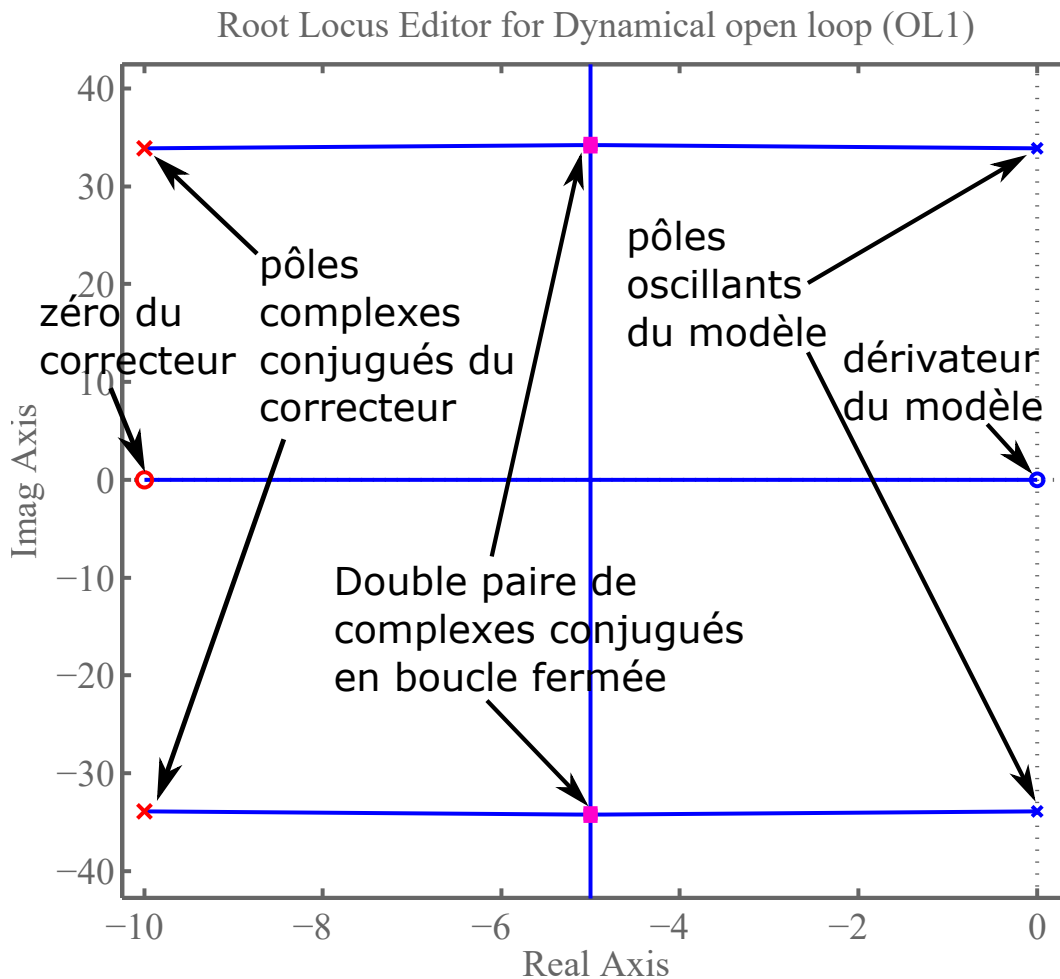


Figure 5.4 – Réglage d'un correcteur continu pour un mode à l'aide du lieu des racines

Le seul paramètre de réglage du système est la partie réelle négative  $a$  des pôles et zéro. Quand  $a$  diminue (augmente en valeur absolue), l'amortissement des vibrations est plus rapide au prix d'une amplitude de commande plus grande, et quand  $a$  s'approche de zéro, l'amortissement est plus lent, et le signal de commande est plus réduit. Un compromis doit être recherché pour éviter la saturation du signal de commande ou des actionneurs et permettre la réponse la plus rapide possible.

Une stratégie de séquençement de gain ou gain scheduling peut être mise en œuvre pour adapter le correcteur en fonction de l'évolution de  $\Lambda$  dans la fonction de transfert  $\mathbf{G}_m$ . La position des pôles, du zéro et le gain du correcteur  $K_c$  ne sont fonctions que du paramètre  $\Lambda$  ainsi que du paramètre de réglage  $a$ . Pour assurer la stabilité du système dans le cadre d'une stratégie de gain scheduling, la variation des paramètres doit se faire lentement par rapport aux dynamiques de la boucle fermée [RUGH et SHAMMA, 2000]. La stabilité du système pour des paramètres constants implique en effet celle du système avec des paramètres qui varient assez lentement grâce aux développements théoriques classiques présentés dans [DESOER, 1969].

Les moteurs utilisés pour produire une variation de longueur des câbles  $\Delta l_2$  sont asservis en position grâce à un correcteur numérique de type RST (voir section 3.3.3). La

synthèse de la commande modale étant réalisée en continu, la boucle fermée numérique des moteurs en position est reconvertie en analogique pour la synthèse. La fonction de transfert équivalente en continu du transfert  $G_w(s)$  entre la commande moteur  $U$  et la variation de longueur  $\Delta l_2$  vaut :

$$G_w(s) = \frac{14.21}{s^2 + 53.3s + 1421} \quad (5.8)$$

Les deux pôles complexes conjugués de cette fonction de transfert  $G_w(s)$  sont compensés par deux zéros dans les correcteurs dans l'espace modal  $\mathbf{C}_m$ .

Ces correcteurs intègrent également un zéro pour compenser le pôle du filtre passe-bas réglé à 10 Hz intégré à la centrale inertielle afin de compenser le déphasage introduit par celui-ci.

Pour la synthèse des correcteurs dans l'espace modal  $\mathbf{C}_m$ , un zéro réel et deux pôles complexes conjugués sont utilisés suivant le schéma 5.4 pour obtenir un amortissement actif de vibrations performant.

Cela nous donne un total de 4 zéros et 2 pôles pour ces correcteurs. Deux pôles très rapides (placés en 0 en numérique, c'est à dire des retards purs) sont donc ajoutés aux  $\mathbf{C}_m$  pour assurer leur causalité sans altérer leur dynamique. Ces correcteurs transposés en numérique en utilisant la transformation bilinéaire avec un temps d'échantillonnage de 7 ms sont implémentés dans le code Matlab réalisant l'amortissement actif de vibrations.

### 5.2.3 Gestion du mouvement

La trajectoire désirée pour le robot  $\mathbf{x}_0^*(t)$  est définie durant une phase d'apprentissage préliminaire. Cette trajectoire est décomposée en déplacements élémentaires :

$$\{\mathbf{x}_0^*(t_0), \mathbf{x}_0^*(t_1), \dots, \mathbf{x}_0^*(t_f)\}$$

La pose de l'effecteur du **RPC** est amenée par un opérateur en chaque  $\mathbf{x}_0^*(t_i)$  à l'aide de l'interface de contrôle. Cette pose est mesurée à l'aide d'un système de localisation 3D, ici le système Polaris. La pose  $\mathbf{x}_0^*(t_i)$  et les positions articulaires  $\mathbf{l}_{20}^*(t_i)$  correspondantes obtenues grâce aux codeurs sont enregistrées pour être rejouées par la suite.

Pour que le **RPC** puisse rejouer précisément la même trajectoire, le robot doit être initialement situé en  $\mathbf{x}_0^*(t_0)$ . Pour cela, on peut définir la consigne de position articulaire à  $\mathbf{l}_{20}^*(t_0)$  et vérifier à l'aide du Polaris que la nacelle est bien en  $\mathbf{x}_0^*(t_0)$ .

Les déplacements élémentaires doivent être suffisamment proches pour assurer qu'une trajectoire dans l'espace articulaire interpolée entre ces points :

$$\{\mathbf{l}_{20}^*(t_0), \mathbf{l}_{20}^*(t_1), \dots, \mathbf{l}_{20}^*(t_f)\} \quad (5.9)$$

produise le même déplacement du robot dans l'espace opérationnel que celui qui a été appris. Le modèle géométrique direct d'un **RPC** a en effet plusieurs solutions. Dans le cas général, il est ainsi possible que le robot emprunte une bifurcation dans ce modèle entre deux configurations, ce qui l'amènerait à une pose inconnue et non désirée. Dans le cas particulier du CoMiRo, aucun cas de bifurcation n'a été rencontré en pratique lors des nombreuses expériences réalisées. Il n'a toutefois pas été démontré qu'elles n'existent pas à l'intérieur de son espace de travail. Si la tâche est répétitive ( $\mathbf{x}_0^*(t_f) = \mathbf{x}_0^*(t_0)$ ), le robot réalisant une première fois le mouvement souhaité validé par le dispositif de localisation 3D, et les points d'apprentissage étant choisis suffisamment proches, nous supposons que le **RPC** reste dans la configuration de l'apprentissage et ne va pas emprunter une bifurcation différente de son modèle géométrique directe sur cette trajectoire.

Après la phase d'apprentissage, le système de localisation n'est plus nécessaire. Le robot est en effet capable de répéter en boucle la trajectoire articulaire apprise (5.9).

### 5.3 Caractéristiques vibratoires

Comme pour le CaWiRo, les caractéristiques de vibrations calculées et expérimentales du CoMiRo sont comparées.

La pose considérée pour cette comparaison se situe sur l'axe de symétrie vertical du robot, à un peu moins d'un mètre du sol, avec le repère du robot aligné sur le repère de base :

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,95 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Pour cette orientation de l'effecteur, la matrice de masse du système  $\mathbf{M}$  prend la valeur suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0138 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0049 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Le vecteur des tensions des câbles à l'équilibre  $\boldsymbol{\tau}_0$  est nécessaire au calcul de la raideur du robot dans l'espace opérationnel  $\mathbf{K}_x$  d'après la formule (2.64). Ce vecteur de tension peut se calculer à l'aide de l'équation (2.53) en considérant les valeurs des paramètres à l'équilibre :  $\boldsymbol{\tau}_0 = -\mathbf{K}(\mathbf{l}_{20}) (\mathbf{l}_{20} - \mathbf{l}_1(\mathbf{x}_0))$ .

Les valeurs de  $\mathbf{l}_{20}$  et de  $\mathbf{x}_0$  correspondantes sont mesurées grâce aux codeurs des moteurs et au système Polaris pendant une phase d'apprentissage de la trajectoire imposée au robot. Ainsi,  $\boldsymbol{\tau}_0$  peut être estimée durant les déplacements du robot avec une incertitude liée à la répétabilité de la trajectoire nominale.

Une étape de calibration est nécessaire pour connaître  $\mathbf{l}_2$  à l'initialisation du robot. En effet, les codeurs incrémentaux intégrés aux moteurs « NXT » ne fournissent qu'une mesure relative de position, la mesure de position étant arbitrairement fixée à 0 au démarrage de la brique EV3.

La calibration se base sur la procédure suivante :

1. L'effecteur est placé manuellement à un emplacement connu de l'espace de travail du robot (ici (5.10)).
2. Les câbles sont déroulés jusqu'à ce qu'ils commencent à s'affaisser visiblement.
3. Chaque câble est successivement enroulé jusqu'à l'instant précis où il reprend une forme rectiligne, ce qui correspond pour nos câbles très légers à une tension positive quasi-nulle.
4. Dans cette configuration, les longueurs à vide et sous tension sont considérées égales  $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2$ .

Ainsi, puisque la position de départ du robot est connue,  $\mathbf{l}_1(\mathbf{x}_0)$  peut être calculé à partir du modèle géométrique inverse sans difficulté, et  $\mathbf{l}_{20}$  peut être initialisé à la même valeur.



La raideur  $\mathbf{K}_x$  dans l'espace opérationnel du CoMiRo est calculée à l'aide de l'équation (2.64) comme pour le CaWiRo :

$$\mathbf{K}_x = \begin{pmatrix} 316.3 & 0 & 0 & -0.24 & 11.18 & 0 \\ 0 & 101.2 & 0 & -4.10 & 0.24 & 0 \\ 0 & 0 & 110.0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.24 & -4.10 & 0 & 1.81 & -0.32 & 0 \\ 11.18 & 0.24 & 0 & -0.32 & 2.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.57 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

La connaissance des matrices  $\mathbf{K}_x$  et  $\mathbf{M}$  permet de réaliser la décomposition modale. Les fréquences naturelles et les modes propres obtenus pour la position nominale du CoMiRo sont données dans le tableau 5.1.

TABLEAU 5.1 – Modes et fréquences naturels du CoMiRo

Fréquences naturelles (rad s <sup>-1</sup> )	tran. X	tran. Y	tran. Z	rot. X	rot. Y	rot. Z
33.87	0	0	0	0	0	14,35
15.55	0,45	0,02	0	-1,57	6,77	0
11.82	-0,25	0,18	0	-7,66	0,66	0
9.42	-0,48	-0,11	0	2,36	6,02	0
7.41	0	0	-0,71	0	0	0
6.58	0,03	-0,68	0	-2,43	-0,58	0

En simulation comme sur le prototype, les valeurs calculées pour les modes propres permettent un bon découplage des vibrations mesurées. La relation  $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\eta}}$  issue de la définition des coordonnées modales (2.66) peut en effet être inversée pour obtenir les vitesses modales  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  associées à des mesures de vitesses opérationnelles  $\Delta\dot{\mathbf{x}}$ . En utilisant la matrice modale  $\mathbf{E}$  calculée, chacune des vitesses modales  $\dot{\eta}_i$  a bien une trajectoire sinusoïdale. La décomposition modale réalisée est donc pertinente, ce qui valide les valeurs calculées pour  $\mathbf{E}$ .

Les fréquences naturelles théoriques peuvent également être comparées à celles obtenues en simulation et sur le prototype. Il suffit pour cela de mesurer les périodes de chacune des vitesses modales  $\dot{\eta}_i$ . Les résultats observés présentent des différences relativement faibles, de moins d'un dixième entre les fréquences attendues et mesurées sur les six modes.

## 5.4 Expériences de stabilisation

Des sollicitations modales périodiques sont superposées aux commandes modales  $\mathbf{U}_m$  pour exciter un ou plusieurs modes de vibration du robot. Ces sollicitations agissent comme des perturbations d'entrée pour la boucle d'amortissement actif de vibrations dans l'espace modal. Elles prennent la forme de deux créneaux de 0,175 s successifs de sens opposés afin que le robot subisse une accélération importante mais se stabilisé à sa position initiale.

D'autres expériences ont été réalisées en sollicitant l'effecteur à la main, mais celles-ci ne sont ni répétables ni quantifiables, et ne sont donc pas présentées dans ce manuscrit. Le résultat qualitatif de ces expériences est présenté dans la vidéo <sup>2</sup>.

<sup>2</sup><https://www.youtube.com/watch?v=tb0vdrJk3Nk>

### 5.4.1 Stabilisation avec correcteurs fixes

Dans un premier temps, l'efficacité de l'amortissement actif de vibrations du CoMiRo en position nominale est testée.

La figure 5.5 présente une expérience d'amortissement actif projetée sur l'un des modes de vibrations, quand une sollicitation modale est appliquée sur celui-ci.

Le mode numéro 2 présenté sur la figure correspond à un couplage entre quatre directions, avec des valeurs significatives en translation sur  $x$  et en rotation autour de  $y$ .

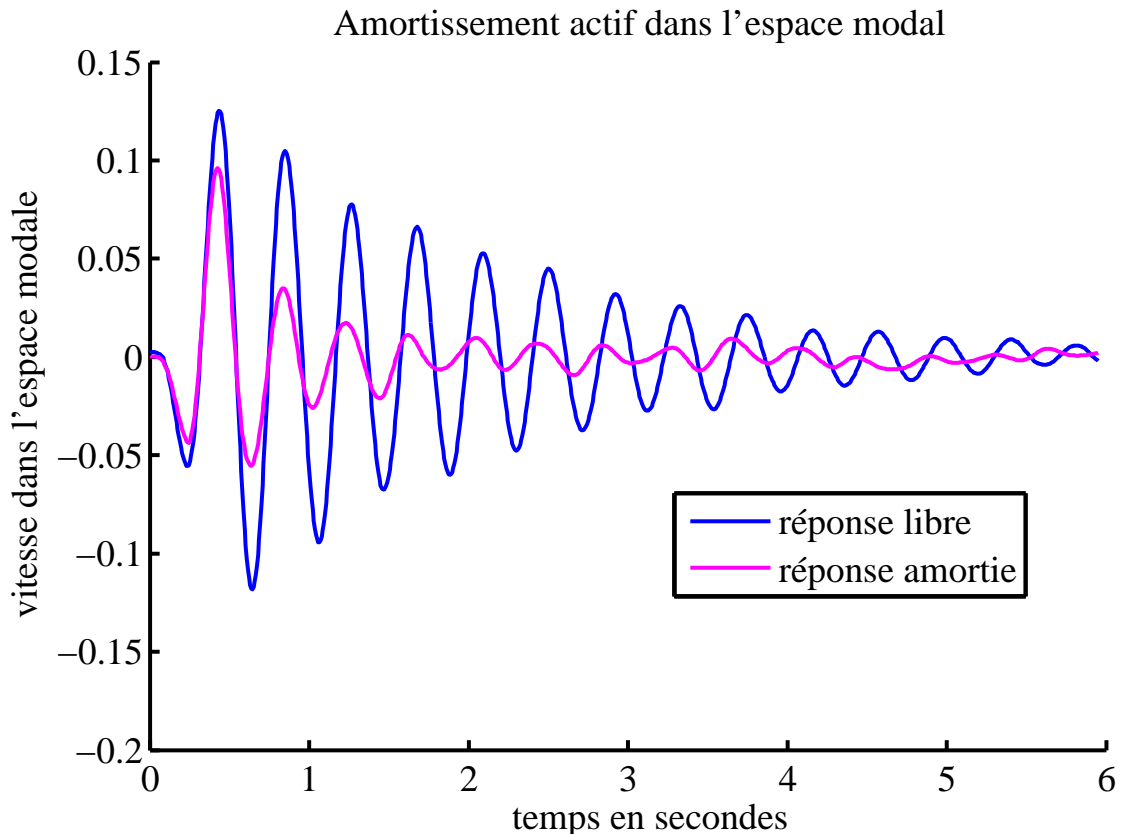


Figure 5.5 – Amortissement actif du mode 2 en réponse à une sollicitation du mode 2

Le temps nécessaire à l'effecteur pour se stabiliser avec la commande d'amortissement actif de vibrations est près de trois fois plus faible que le temps de stabilisation sans amortissement actif.

L'amplitude maximale des vibrations est également légèrement réduite, mais ce n'est pas l'objectif du réglage que nous proposons.

La figure 5.6 montre que les résultats de simulation sont très proches de ceux obtenus sur le CoMiRo dans les mêmes conditions. La sollicitation est cependant réalisée différemment. Il est en effet possible sur la simulation de calculer une position de lâcher répétable différente de la position courante d'équilibre du robot et correspondant à un déplacement le long d'un mode de vibrations. Une réponse parfaitement symétrique peut ainsi être obtenue en simulation.

### 5.4.2 Stabilisation avec adaptation des gains

Le réglage des correcteurs d'amortissement actif est performant quand le robot présente des fréquences et modes de vibrations proches de ceux calculés.

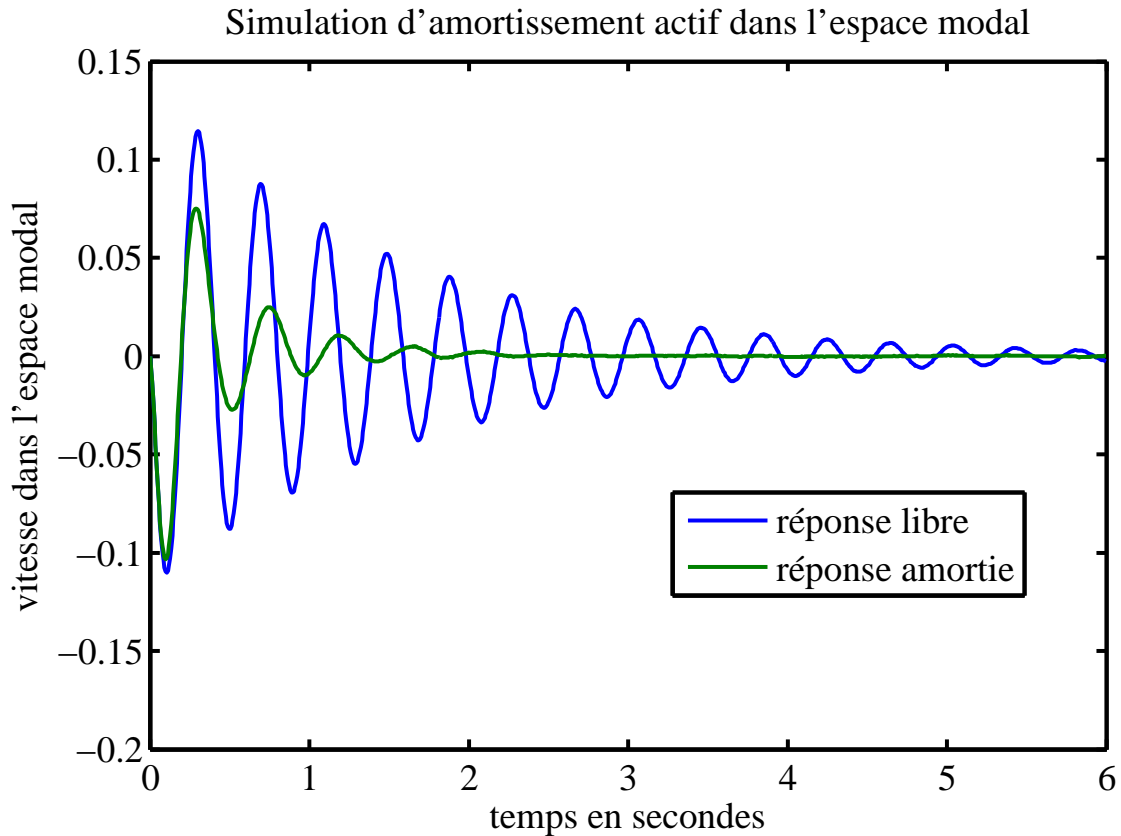


Figure 5.6 – Amortissement actif du mode 2 en réponse à une sollicitation du mode 2 en simulation

Mais ces modes et fréquences varient en fonction de la pose de l'effecteur, aussi les performances se dégradent quand le robot s'éloigne de la pose utilisée pour le calcul des modes et fréquences qui a servi lors du réglage des correcteurs.

Une stratégie d'adaptation des gains des correcteurs en ligne est donc implémentée sur le CoMiRo pour que les correcteurs soient en permanence réglés en tenant compte des modes et fréquences courants. De la sorte, l'amortissement actif de vibrations reste stable et performant dans tout l'espace de travail du robot.

La figure 5.7 présente une comparaison entre les réponses libres et avec un amortissement actif dont les correcteurs sont calculés en fonction des fréquences et modes correspondant à la pose nominale et à la pose réelle du CoMiRo. Pour réaliser cette expérience, le robot est déplacé de sa position nominale vers une position (2) de coordonnées :

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1,95 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Les mesures de vitesses opérationnelles sont projetées dans l'espace modal à l'aide la matrice  $\mathbf{E}$  calculée pour la position (2).

Il apparait nettement sur la figure que les modes 1 et 3 sollicités sont effectivement amortis efficacement, que les correcteurs soient recalculés en fonction de la nouvelle position ou non. En revanche, les modes 2 et 4 illustrent la dégradation des performances des correcteurs si les modes et fréquences ne sont pas recalculés. Des modes non sollicités

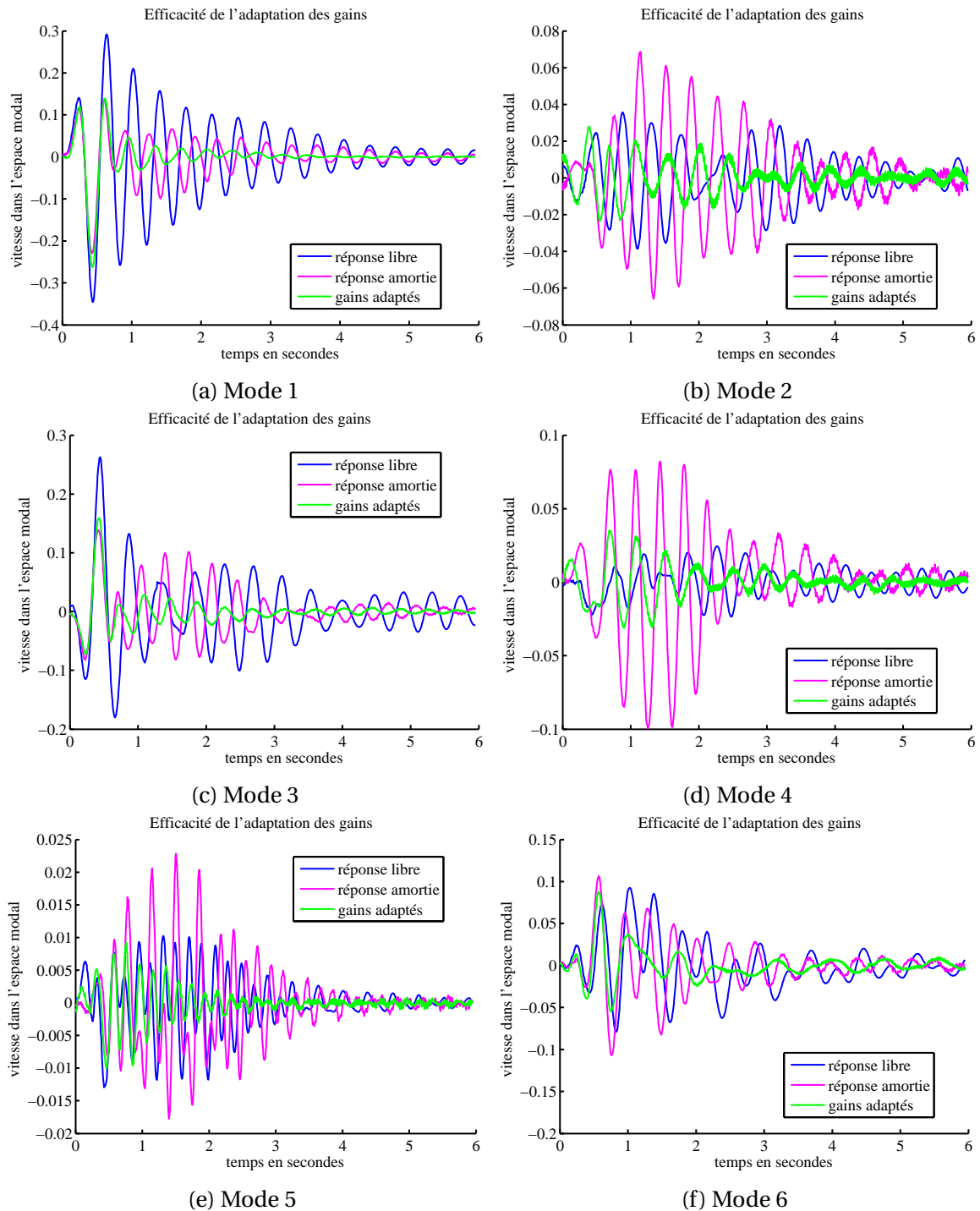


Figure 5.7 – Essai d’amortissement actif dans l’espace modal pour une sollicitation simultanée des modes 1 et 3 du CoMiRo en position (2)

TABEAU 5.2 – Valeurs efficaces des vitesses modales en  $10^{-2} \text{ms}^{-1}$

Modes	1	2	3	4	5	6	somme
Réponse libre	9,31	1,47	6,10	0,98	0,40	2,99	21,25
Correcteurs fixes	4,66	2,40	3,79	3,25	0,59	2,86	17,55
Correcteurs recalculés	4,25	0,83	2,57	1,04	0,24	1,70	10,63

ités présentent en effet une réponse amplifiée au lieu d'être amoindrie quand les modes et fréquences sont mal estimés.

La méthode avec des gains adaptés à la pose du robot permet par contre d'obtenir pour tous les modes (y compris les 2 et 4 non sollicités) une réponse plus satisfaisante que la boucle ouverte, et un temps de réponse bien meilleur pour les modes sollicités.

Le tableau 5.2 présente les valeurs efficaces des vitesses modales pour la même sollicitation des modes 1 et 3 du CoMiRo en pose (2), en comparant la réponse libre, la réponse avec des correcteurs calculés pour une pose nominale et la réponse avec des correcteurs calculés pour la pose (2).

En simulation, il est même possible de rendre le système instable sans adaptation des gains pour le même type de sollicitation quand le robot est proche des bords de son espace de travail :

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1,5 \\ 1,95 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

La figure 5.8 présente la réponse de tous les modes en simulation pour des correcteurs dont les gains sont adaptés à la position réelle du robot. La sollicitation est réalisée sur les modes 2 et 3, qui correspondent approximativement en direction et en fréquence pour cette position aux modes 1 et 3 de l'expérience précédente. L'amortissement actif fonctionne correctement, les deux modes sollicités sont efficacement amortis, et le bruit de mesure est responsable d'une très légère perturbation des autres modes.

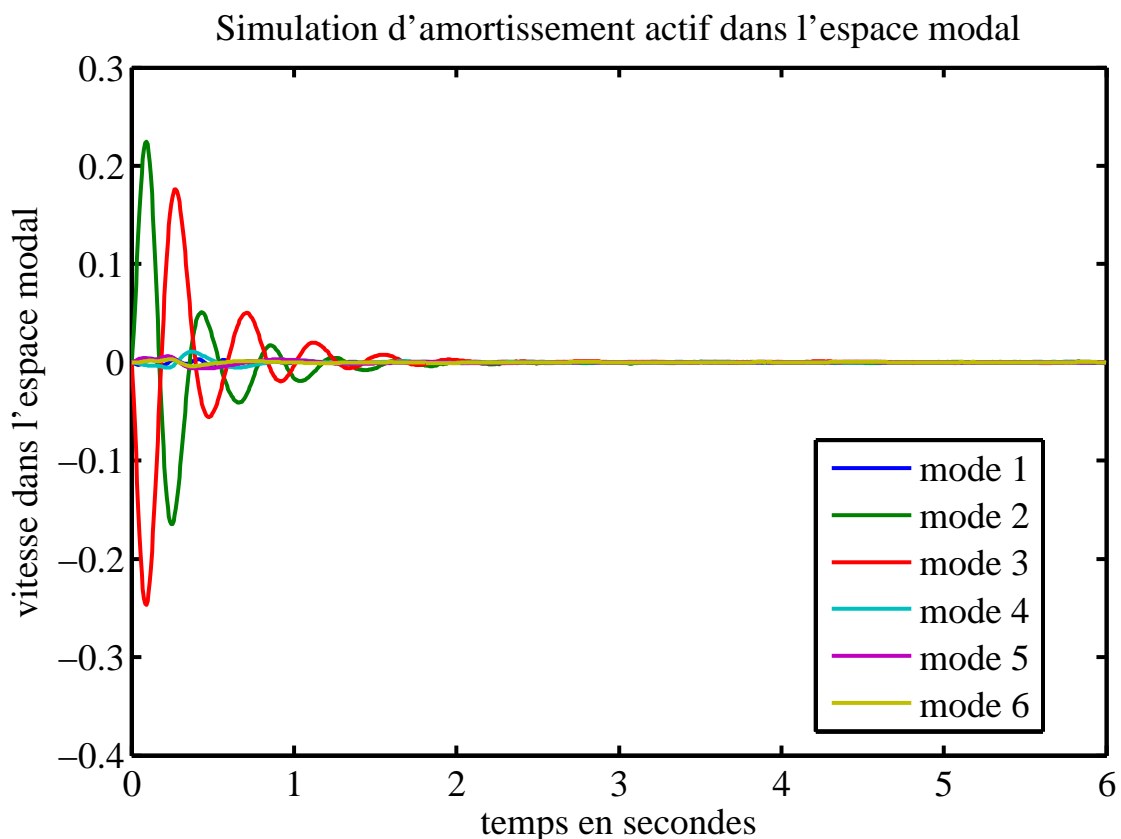


Figure 5.8 – Réponses amorties des vitesses modales du CoMiRo en simulation avec gains adaptés

La figure 5.9 présente la réponse de tous les modes pour la même sollicitation en simulation, mais avec des correcteurs calculés pour le robot en position nominale. Cette réponse est projetée dans le même espace modal correspondant à la position réelle du robot pour être comparable avec le cas des gains adaptés à la position courante du robot. Dans ce cas particulier, le système devient instable à cause des trop grandes erreurs de fréquences naturelles et de modes impliqués dans la commande.

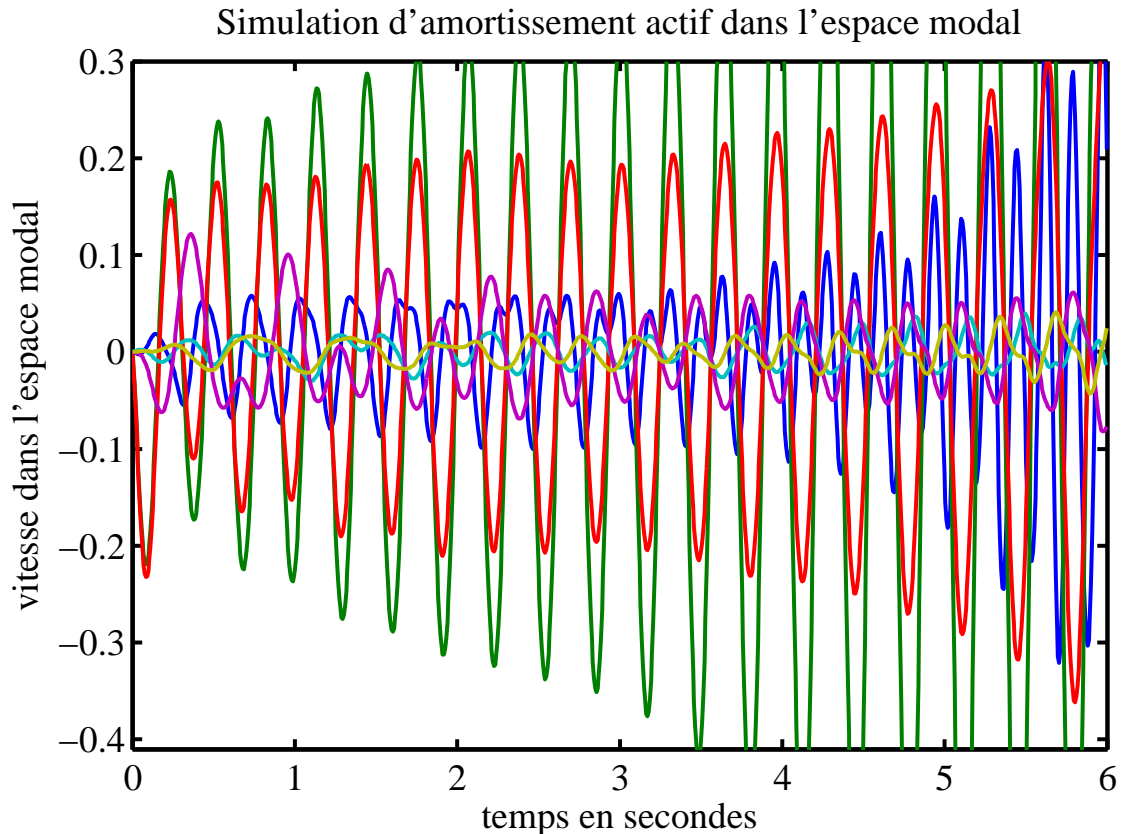


Figure 5.9 – Réponses amorties des vitesses modales du CoMiRo en simulation avec correcteurs fixes

### 5.4.3 Stabilisation en mouvement avec adaptation des gains

Un dernier point intéressant reste à valider, il s'agit de l'efficacité de l'amortissement actif de vibrations quand le robot réalise une trajectoire en translation pure.

En effet, la linéarisation du modèle dynamique a été réalisée autour d'un point d'équilibre à orientation constante. Il est cependant possible que les vitesses et accélérations soient non nulles, ce qui permet de réaliser un amortissement actif durant un déplacement en translation du CoMiRo, sans que le comportement en petits déplacements autour de l'équilibre soit modifié. Le modèle est simplement mis à jour à chaque instant en fonction de l'état courant  $\{\mathbf{x}_0^*(t), \mathbf{l}_{20}^*(t)\}$ . Les variations du modèle doivent être suffisamment lentes par rapport aux dynamiques des vibrations pour assurer la stabilité de la commande avec re-calcul des gains des correcteurs [RUGH et SHAMMA \[2000\]](#).

Ce déplacement suit la méthode présentée en 5.2.3. Les positions intermédiaires entre les positions préalablement apprises sont interpolées.

Le mouvement est réalisé le long de l'axe X à une vitesse constante de  $60 \text{ mm s}^{-1}$  et une sollicitation est appliquée simultanément sur les six modes pendant le déplacement.

Les figures 5.10 et 5.11 montrent les réponses libres et avec amortissement actif dont les gains sont recalculés à chaque instant pour cette expérience.

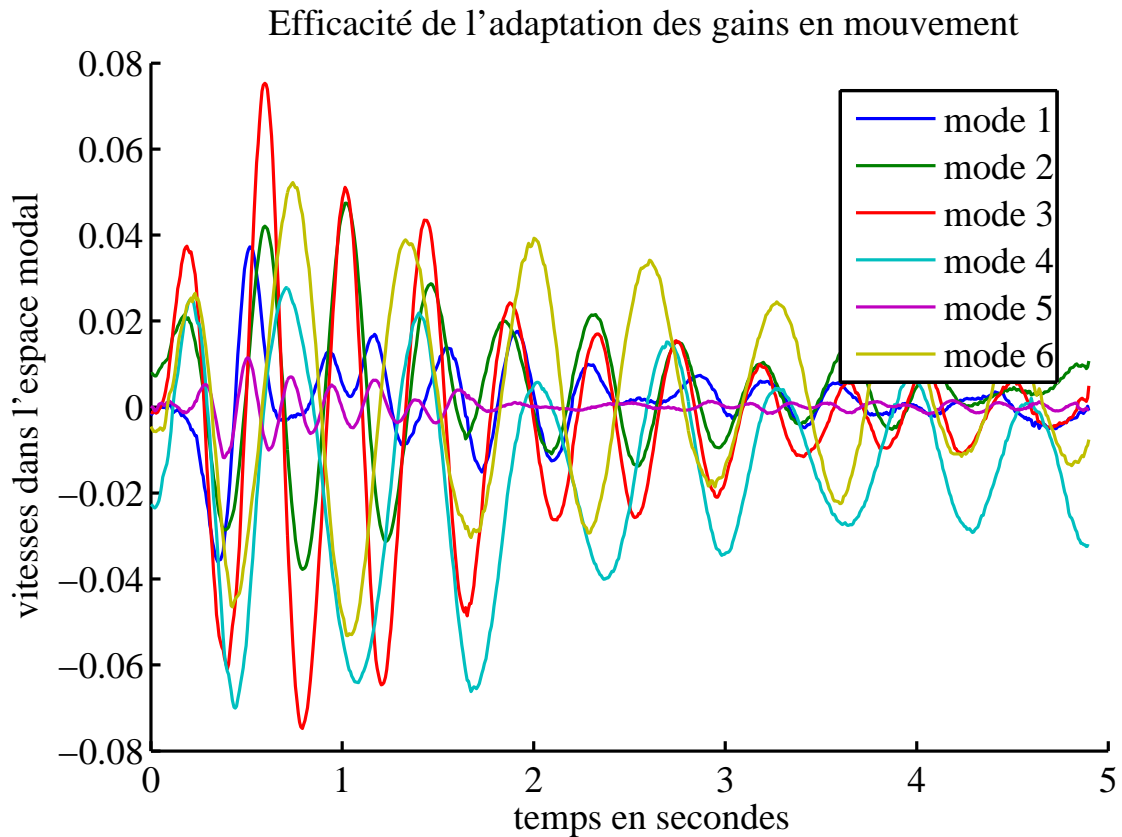


Figure 5.10 – Réponses libres des vitesses modales du CoMiRo en mouvement avec sollicitation de tous les modes

L'efficacité de l'amortissement actif de vibrations pour le robot en mouvement est donc similaire à celle observée pour le robot à l'arrêt. Il faut environ deux secondes au CoMiRo pour se stabiliser quand l'amortissement actif est en marche, contre plus de cinq secondes pour la réponse libre.

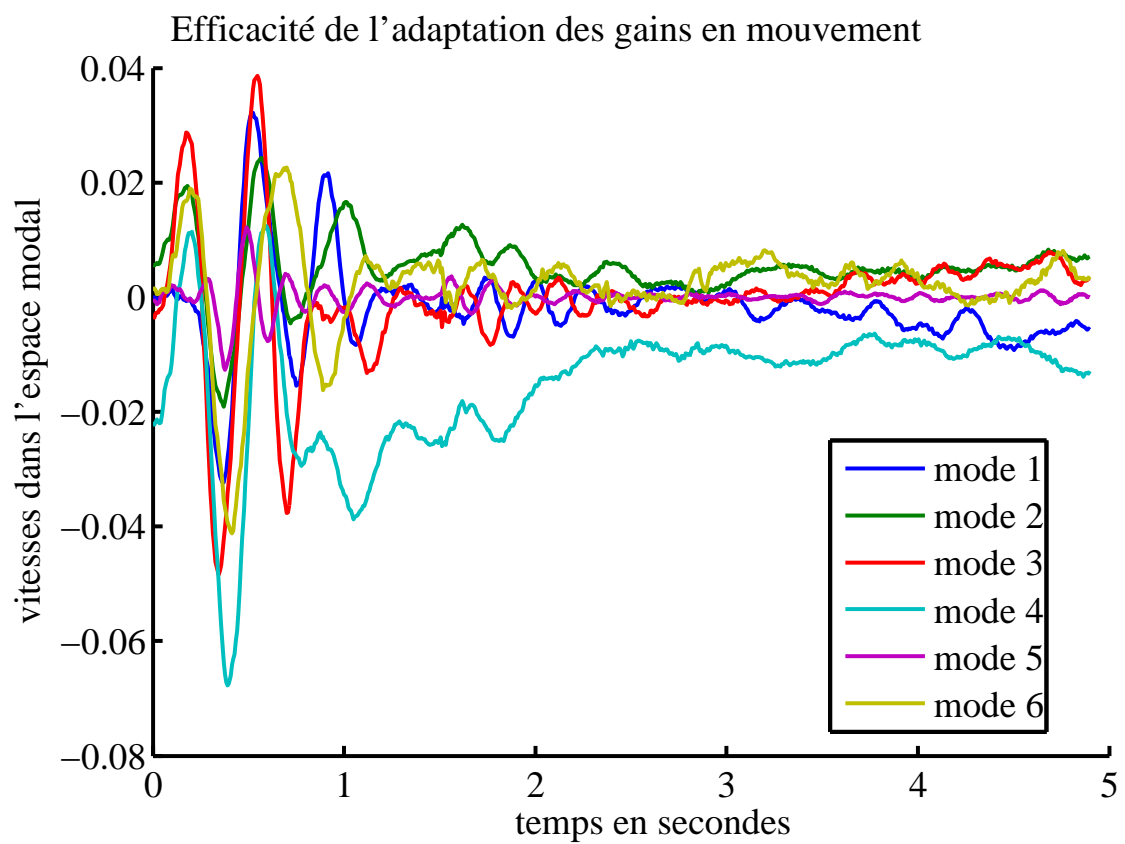


Figure 5.11 – Réponse activement amorties des vitesses modales du CoMiRo en mouvement avec sollicitation de tous les modes



# Chapitre 6

## Conclusion

Ainsi, nos travaux sur la commande de [RPCs](#) flexibles en vue de l'amortissement actif des vibrations de leurs effecteurs ont été présentés. Pour conclure ce document, une synthèse des points importants de la démarche est proposée, suivie de la présentation de perspectives envisageables pour la suite de ces travaux.

### 6.1 Synthèse

Les [RPCs](#), robots parallèles dont la base et l'effecteur sont reliés uniquement par des câbles, présentent des particularités très intéressantes grâce à leur architecture d'une légèreté optimale. Ils sont en effet plus légers, plus sûrs, moins consommateurs d'énergie, moins chers, capables de mouvements plus rapides et dans un espace plus grands que les robots parallèles rigides ou les robots série.

Ils sont cependant beaucoup plus flexibles, ce qui nuit à leur répétabilité et rend leur commande plus délicate. Les câbles doivent également être maintenus sous tension, faute de quoi le modèle géométrique du [RPC](#) change, et le comportement du robot n'est plus le même que celui prévu pour le commander.

Dans ce travail de thèse nous avons cherché à réaliser des [RPCs](#) suspendus équipés de câbles très fins, donc très flexibles, afin d'étudier les vibrations de ces robots, et de proposer une commande qui tienne compte de ce phénomène. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur les compétences de l'équipe AVR en matière d'automatique, de vision et de robotique. En effet, une mesure de pose de l'effecteur de ces robots permet de s'affranchir du problème de positionnement posé par la flexibilité des câbles, tandis qu'une modélisation mécanique pertinente et une commande adaptée permettent de gérer le problème des vibrations.

Grâce à la grande flexibilité des câbles utilisés sur nos robots, les fréquences de vibrations observées sont suffisamment basses pour entrer dans la bande passante des moteurs d'enroulement des câbles. Une démarche d'amortissement actif de vibrations à l'aide de ces moteurs ou d'actionneurs embarqués supplémentaires peut donc être proposée sur nos robots.

Cette thèse traite ainsi de la problématique de l'amortissement actif de vibrations de l'effecteur d'un robot parallèle à câbles flexibles.

Aucun objectif quantitatif n'est fixé dans ce but, et aucune application directe n'est visée. Le domaine de la robotique parallèle à câbles est récent, et la participation de notre équipe à celui-ci l'est encore davantage. Notre démarche est exploratoire, nous cherchons à montrer que l'amortissement actif de vibrations est possible d'une part, et l'intérêt d'embarquer des actionneurs sur l'effecteur de ces robots d'autre part.

L'étude de l'état de l'art en robotique parallèle à câbles montre que les aspects géométriques et mécaniques des RPCs ont été étudiés en détail. Plusieurs classifications existent pour caractériser des robots suspendus ou pleinement contraints, sous-contraints ou redondants. La détermination de la pose de l'effecteur connaissant les longueurs des câbles demeure un problème épineux, de même que la planification de trajectoires. Des travaux destinés à guider la conception des RPCs ont également été publiés, décrivant notamment leurs espaces de travail et leur capacité à réaliser des tâches particulières. Les travaux sur la commande de ces robots incluent divers algorithmes pour gérer la répartition des efforts dans les câbles et une des approches variées pour piloter la position de leurs effecteurs, en tenant compte ou non des déformations des câbles. Les phénomènes vibratoires des RPCs ont déjà reçu un peu d'attention, et quelques publications scientifiques proposent des méthodes pour les estimer, les mesurer et tenir compte de leur influence.

La modélisation des RPCs flexibles et de leurs vibrations a été traitée. Les outils de la mécanique générale sont exploités pour déterminer le modèle dynamique de l'effecteur d'un RPC qui embarque des roues à inertie destinées à un amortissement actif des vibrations. Les différents modèles utilisés pour le comportement des câbles sont présentés. Le modèle élastique linéaire est retenu dans le cas de câbles fins et flexibles. À partir du modèle de l'effecteur et des câbles, le modèle dynamique complet du RPC flexible muni de roues à inertie est exprimé. Celui-ci est linéarisé autour d'un point d'équilibre, en supposant que les trajectoires nominales du robots sont des translations, et en négligeant certains termes. Le modèle dynamique linéaire obtenu permet de déterminer grâce aux outils de l'analyse modale les fréquences naturelles et modes propres de vibrations du robot. Grâce à ces données, il est alors possible de projeter des vibrations quelconques de l'effecteur selon six modes indépendants pour obtenir six sinusoïdes amorties. Ces vibrations découplées et de forme simples peuvent être rejetées directement dans l'espace modal grâce à la transformation décrite. Une commande monovariable par mode de vibration peut ainsi être synthétisée pour l'amortissement actif de vibrations, que ce soit à l'aide des enrouleurs de câbles ou des roues à inertie embarquées.

Pour valider les concepts théoriques développés, plusieurs prototypes sont développés, qui s'appuient sur une plateforme expérimentale commune. Nos RPCs sont construits à l'aide de Lego Mindstorms pour leur structure et embarquent des capteurs et actionneurs Lego NXT et Lego EV3, ce qui permet une compacité et une légèreté optimales. Ils embarquent également un ordinateur Raspberry Pi permettant de contrôler le robot, et divers autres périphériques. Les contrôleurs sont programmés sous Matlab/Simulink et déployés sur les prototypes à l'aide de l'outil RPIt développé durant la thèse. Les moteurs embarqués pilotant des enrouleurs de câbles sont asservis en position grâce à des correcteurs numériques de type RST, munis d'une limitation du courant et d'un système d'anti-saturation. Cette commande avancée est rendue nécessaire par les nombreuses non-linéarités des moteurs Lego utilisés. Une centrale inertielle reliée au Raspberry Pi permet de mesurer les vitesses opérationnelles nécessaires à la commande d'amortissement de vibrations. Un dispositif de localisation 3D NDI Polaris est également interfacé avec le robot CoMiRo pour servir de vérité de terrain. Un simulateur physique réaliste exploitant Simulink et SimMechanics a également été réalisé afin de valider nos calculs et de tester les algorithmes de commande avant leur implémentation sur nos prototypes.

Le robot plan à deux degrés de liberté muni de deux câbles et de deux roues à inertie CaWiRo est présenté ensuite. Ce premier prototype est utilisé pour valider le principe de l'amortissement actif de vibrations à l'aide des enrouleurs et des roues à inertie, ainsi

que les caractéristiques de vibrations. La commande s'appuie sur une identification axe par axe du comportement du robot dans l'espace cartésien quand une tension est appliquée sur chaque roue à inertie ou qu'une consigne de position est donnée. Quatre correcteurs monovariables sont synthétisés par placement de pôles, suivant la même démarche : deux pôles complexes conjugués plus amortis que ceux du système identifié et un zéro réel sont introduits pour assurer une réponse en boucle fermée plus rapide, tout en filtrant le bruit de mesure introduit par la centrale inertielle. Des expériences de stabilisation réalisées en simulation et sur le robot démontrent l'efficacité de l'amortissement actif réalisé, en réduisant le temps de réponse d'un facteur trois environ, malgré des moteurs non idéaux et un bruit de mesure important. Des mouvements hors plan non désirés sont toutefois observés et expliqués.

Les robots MiCaRo et CoMiRo ont été réalisés plus tard. Ils présentent chacun huit câbles et six degrés de liberté. Le MiCaRo souffre d'une singularité concernant la rotation autour de l'axe vertical au centre de son espace de travail. Le CoMiRo se base par contre sur l'architecture optimisée du robot CoGiRo du LIRMM, et ne présente pas ce défaut. Ce robot nous permet de valider un amortissement actif de vibrations valable lorsque le robot suit une trajectoire en translation, et avec une adaptation des gains des correcteurs à la position courante du robot. Pour cela, il a été nécessaire d'implémenter un algorithme de suivi des modes de vibrations et de déterminer une stratégie automatique d'ajustement des gains en fonction des modes et fréquences de vibrations. Les fréquences et modes de vibrations prévus par la théorie sont proches des valeurs mesurées en simulation et sur le prototype. Les simulations et expériences réalisées montrent que :

- la commande monovariante dans l'espace modal est très efficace pour l'amortissement actif de vibrations, avec un temps de réponse amélioré d'un facteur trois à quatre,
- l'adaptation des gains apporte une amélioration significative de la réponse du robot à une sollicitation, notamment quand le robot s'éloigne de sa position nominale, généralement du centre de son espace de travail,
- l'amortissement de vibrations à gains adaptés est également efficace quand le robot suit une trajectoire, avec des performances comparables aux autres cas.

Plusieurs contributions scientifiques et techniques ont été réalisées :

- l'effecteur intégré, embarquant capteurs, actionneurs et contrôleur du robot,
- l'amortissement actif de vibrations des [RPCs](#) flexibles,
- l'utilisation de roues à inertie à cette fin sur les [RPCs](#),
- la commande dans l'espace modal des [RPCs](#),
- la stratégie d'adaptation des gains durant le mouvement sur un [RPC](#) flexible.

Ces contributions ont fait l'objet pour l'instant de deux présentations en conférences de robotique. Nos premiers résultats sur le robot CaWiRo ont été présentés à la conférence IROS en 2014 [[WEBER et collab., 2014](#)]. La commande dans l'espace modal sur le MiCaRo a ensuite été présentée en 2015 à la conférence ICRA [[WEBER et collab., 2015](#)].

Un article de revue traitant l'essentiel des développements de la thèse appliqués sur le robot CoMiRo est actuellement en cours de relecture.

## 6.2 Perspectives

Plusieurs pistes peuvent être poursuivies afin de développer davantage certaines problématiques rencontrées lors de la thèse, ou pour développer ce travail afin répondre à des problèmes concrets.

D'autres modèles plus complexes de câbles peuvent être envisagés pour mieux tenir compte de la réalité de leur comportement. Les effets de types frottements peuvent également être pris en compte dans le modèle dynamique.

### 6.2.1 Effecteur intégré

Un projet de l'Agence Nationale de la Recherche nommé « DexterWide » a démarré fin 2015 et prend la suite de nos travaux et de ceux du LIRMM concernant la robotique parallèle à câbles. Il porte principalement sur l'intégration de manipulateurs série sur des **RPCs** afin d'en accroître la dextérité. Les **RPCs** sont en effet plus habiles pour réaliser des translations que des rotations, défaut qui peut être efficacement compensé par un robot série embarqué. Une thèse se déroulant entre le laboratoire ICube et le LIRMM dans le cadre de ce projet a pour objectif d'étendre le présent travail pour gérer l'ajout d'autres actionneurs sur l'effecteur, et de proposer la modélisation et la commande associées.

Dans ce cadre, plusieurs possibilités intéressantes d'actionnements embarqués sur l'effecteur d'un **RPC** peuvent être envisagées.

- Un bras robotique embarqué permettrait de réaliser des tâches de précision autour d'une position donnée. Le **RPC** se comporte ainsi comme un dispositif de positionnement à grande échelle pour le robot série qui travaille à une échelle plus petite. Les vibrations dues à la tâche du robot série doivent alors être activement compensées sur le **RPC** pour une bonne précision de la tâche.
- Des gyroscopes embarqués sont une alternative possible aux roues à inertie. Un bloc comprenant des gyroscopes sur les trois axes monté sur l'effecteur du **RPC** présenterait l'avantage de pouvoir générer des efforts en rotation quelconques afin de le stabiliser, sans avoir à recourir aux enrouleurs. Ainsi, même un **RPC** conçu pour réaliser uniquement des translations serait capable de se stabiliser pendant la réalisation d'une tâche impliquant des couples ou des moments sur l'effecteur.
- Les roues à inertie et gyroscopes s'inspirent des travaux réalisés dans le domaine spatial, qui présente des similitudes mécaniques avec la robotique parallèle à câbles. Il est ainsi envisageable pour des robots opérant dans atmosphère d'embarquer des jets d'air sur l'effecteur, mimant l'effet des moteurs à poudre des satellites. Les jets d'air ont la capacité de produire à la fois une force et un couple constant. Une disposition adéquate de plusieurs jets sur l'effecteur permet ainsi de produire un torseur d'efforts constant. De plus, le temps d'établissement du jet d'air dépend de la rapidité de commutation de valves électromagnétiques. Il est donc très court. Ainsi, tous types de perturbations affectant la nacelle du **RPC** pourraient être activement amorties, y compris les plus rapides.

### 6.2.2 Applications

Le travail réalisé durant cette thèse ne visait pas d'application immédiate, mais les résultats très encourageants obtenus permettent d'en envisager dans des domaines variés.

Le projet « DexterWide » vise notamment des applications dans le démantèlement nucléaire et la maintenance des barrages.

Le domaine du bâtiment et de la construction peut également être un bon candidat pour des **RPCs** munis d'actionneurs supplémentaires et activement amortis. Des projets sont déjà en cours concernant notamment :

- la pose de panneaux pour la construction de centrales solaires,
- l'installation d'éoliennes offshore,
- la construction de bâtiments par impression de béton,
- le lavage de façades d'immeuble.

La peinture de façades par des **RPCs** suspendus plans pourrait être une application très intéressante dans ce domaine. Un stage mené dans l'équipe s'est déjà intéressé à la réalisation de dessins par un **RPC** suspendu, mais la gestion du contact de l'outil de dessin et de la surface ajoute à la complexité du problème. Une peinture à la bombe permettrait de s'affranchir d'efforts de contact inconnus entre le robot et la surface à peindre.

L'industrie montre un intérêt croissant pour la technologie des **RPCs**, notamment pour la fabrication d'avions et de bateaux. Ces tâches requièrent en effet de grands espaces de travail lors des phases finales d'assemblage ou de peinture. Pour l'instant, des échafaudages conséquents ou des systèmes de levages peu pratiques et peu sûrs sont utilisés.

Ces robots pourraient également être pertinents dans des opérations de secours. Un **RPC** dont l'effecteur embarque tout l'actionnement présente en effet l'avantage de pouvoir s'installer très rapidement dans un nouvel environnement. Seuls quelques points d'appui solides pour ancrer les câbles sont nécessaires. Une procédure d'auto-calibration permettrait au robot de déterminer son modèle, puis celui-ci serait rapidement capable d'exécuter les tâches voulues sur le lieu d'un sinistre.

L'agriculture, notamment biologique et écologique sous serre, pourrait également profiter de **RPCs**. Il serait possible grâce à ces robots d'appliquer des soins à certains plants spécifiques sans avoir à asperger l'ensemble de la plantation. Le robot pourrait également réaliser des tâches mécaniques, comme couper des tiges ou arracher des herbes, sans nécessité de ménager un accès au sol pour un opérateur.

# Bibliographie

- ABDELAZIZ, S. 2012, *Développement d'un système robotique pour la radiologie interventionnelle sous IRM*, phdthesis, Université de Strasbourg. [18](#)
- ALBUS, J., R. BOSTELMAN et N. DAGALAKIS. 1993, «The NIST robocrane», *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, n° 5, p. 709–724, ISSN 1097-4563. [8](#), [13](#)
- ALIKHANI, A. et M. VALI. 2011, «Modeling and robust control of a new large scale suspended cable-driven robot under input constraint», dans *2011 8th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI)*, p. 238–243. [19](#)
- ARSENAULT, M. 2013, «Stiffness Analysis of a Planar 2-DoF Cable-Suspended Mechanism While Considering Cable Mass», dans *Cable-Driven Parallel Robots*, édité par T. Bruckmann et A. Pott, n° 12 dans *Mechanisms and Machine Science*, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-31987-7 978-3-642-31988-4, p. 405–421. [20](#)
- AZADI, M., S. BEHZADIPOUR et G. FAULKNER. 2009, «Antagonistic variable stiffness elements», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, n° 9, p. 1746–1758, ISSN 0094-114X. [45](#)
- AZIZIAN, K. et P. CARDOU. 2013, «The Constant-Orientation Dimensional Synthesis of Planar Cable-Driven Parallel Mechanisms Through Convex Relaxations», dans *Cable-Driven Parallel Robots*, édité par T. Bruckmann et A. Pott, n° 12 dans *Mechanisms and Machine Science*, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-31987-7 978-3-642-31988-4, p. 215–230. [18](#)
- AZIZIAN, K., P. CARDOU et B. MOORE. 2012, «Classifying the Boundaries of the Wrench-Closure Workspace of Planar Parallel Cable-Driven Mechanisms by Visual Inspection», *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 4, n° 2, p. 024 503–024 503, ISSN 1942-4302. [18](#)
- BARRETTE, G. et C. M. GOSSELIN. 2005, «Determination of the Dynamic Workspace of Cable-Driven Planar Parallel Mechanisms», *Journal of Mechanical Design*, vol. 127, n° 2, p. 242–248, ISSN 1050-0472. [18](#)
- BEHZADIPOUR, S. et A. KHAJEPOUR. 2004, «Design of reduced DOF parallel cable-based robots», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 39, n° 10, p. 1051–1065, ISSN 0094-114X. [19](#)
- BEHZADIPOUR, S. et A. KHAJEPOUR. 2005, «Stiffness of Cable-based Parallel Manipulators With Application to Stability Analysis», *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, n° 1, p. 303–310, ISSN 1050-0472. [21](#), [45](#)

- BORGSTROM, P., N. BORGSTROM, M. STEALEY, B. JORDAN, G. SUKHATME, M. BATALIN et W. KAISER. 2009, «Design and Implementation of NIMS3d, a 3-D Cabled Robot for Actuated Sensing Applications», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 25, n° 2, p. 325–339, ISSN 1552-3098. [19](#)
- BOSSCHER, P. et I. EBERT-UPHOFF. 2004, «Wrench-based analysis of cable-driven robots», dans *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04*, vol. 5, p. 4950–4955 Vol.5. [18](#)
- BOUCHARD, S. 2008, *Géométrie des robots parallèles entraînés par des câbles*, phdthesis, Université Laval. [14](#), [17](#), [18](#), [38](#)
- BRUCKMANN, T., A. POTT et M. HILLER. 2006, «Calculating force distributions for redundantly actuated tendon-based Stewart platforms», dans *Advances in Robot Kinematics*, édité par J. Lennarčič et B. Roth, Springer Netherlands, ISBN 978-1-4020-4940-8 978-1-4020-4941-5, p. 403–412. [19](#)
- CARLSON, B., L. BAUWENS, L. BELOSTOTSKI, E. CANNON, Y.-Y. CHANG, X. DENG, P. E. DEWDNEY, J. T. FITZSIMMONS, D. J. HALLIDAY, K. KUERSCHNER, G. LACHAPPELLE, D. LO, P. MOUSAVI, M. NAHON, L. SHAFAI, S. F. STIEMER, R. TAYLOR et B. VEIDT. 2000, «The large adaptive reflector: a 200-m diameter wideband centimeter- to meter-wave radio telescope», p. 33–44. [10](#)
- CARRICATO, M. et G. ABBASNEJAD. 2013, «Direct Geometrico-Static Analysis of Under-Constrained Cable-Driven Parallel Robots with 4 Cables», dans *Cable-Driven Parallel Robots*, édité par T. Bruckmann et A. Pott, n° 12 dans *Mechanisms and Machine Science*, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-31987-7 978-3-642-31988-4, p. 269–285. [16](#)
- CARRICATO, M. et J.-P. MERLET. 2011, «Direct geometrico-static problem of under-constrained cable-driven parallel robots with three cables», dans *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 3011–3017. [16](#)
- COLLARD, J.-F. et P. CARDOU. 2012, «Computing the lowest equilibrium pose of a cable-suspended rigid body», *Optimization and Engineering*, vol. 14, n° 3, p. 457–476, ISSN 1389-4420, 1573-2924. [16](#)
- CONE, L. 1985, «Byte Magazine Volume 10 Number 10 - Simulating ...», *Byte Magazine*, vol. 10, n° 10, p. 122–132. [8](#)
- CUNNINGHAM, D. et H. ASADA. 2009, «The Winch-Bot: A cable-suspended, under-actuated robot utilizing parametric self-excitation», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2009. ICRA '09*, p. 1844–1850. [20](#)
- DAGALAKIS, N. G., J. S. ALBUS, B.-L. WANG, J. UNGER et J. D. LEE. 1989, «Stiffness Study of a Parallel Link Robot Crane for Shipbuilding Applications», *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 111, n° 3, p. 183–193, ISSN 0892-7219. [8](#)
- DALLEJ, T., M. GOUTTEFARDE, N. ANDREFF, R. DAHMOUCHE et P. MARTINET. 2012, «Vision-based modeling and control of large-dimension cable-driven parallel robots», dans *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, p. 1581–1586. [10](#)

- DESOER, C. 1969, «Slowly varying system  $\dot{x} = A(t)x$ », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 14, n° 6, p. 780–781, ISSN 0018-9286. [91](#)
- DEWDNEY, P., M. NAHON et B. VEIDT. 2002, «The Large Adaptive Reflector: A Giant Radio Telescope with an Aero Twist», *Canadian Aeronautics and Space Journal*, vol. 48, n° 4, p. 239–250. [10](#)
- DIAO, X. et O. MA. 2009, «Vibration analysis of cable-driven parallel manipulators», *Multibody System Dynamics*, vol. 21, n° 4, p. 347–360, ISSN 1384-5640, 1573-272X. [21](#), [39](#), [41](#)
- DUCHAINE, V., S. BOUCHARD et C. GOSSELIN. 2007, «Computationally Efficient Predictive Robot Control», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 12, n° 5, p. 570–578, ISSN 1083-4435. [19](#)
- FANG, S., D. FRANITZA, M. TORLO, F. BEKES et M. HILLER. 2004, «Motion control of a tendon-based parallel manipulator using optimal tension distribution», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 9, n° 3, p. 561–568, ISSN 1083-4435. [19](#)
- GIBSON, W. C. 1992, «ASTROS-ID: Software for System Identification Using Mathematical Programming», cahier de recherche, Wright Laboratory. [89](#)
- GOSSELIN, C. 2013, «Global Planning of Dynamically Feasible Trajectories for Three-DOF Spatial Cable-Suspended Parallel Robots», dans *Cable-Driven Parallel Robots*, édité par T. Bruckmann et A. Pott, n° 12 dans *Mechanisms and Machine Science*, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-31987-7 978-3-642-31988-4, p. 3–22. [20](#)
- GOSSELIN, C., S. LEFRANÇOIS et N. ZOSO. 2010, «Underactuated Cable-Driven Robots: Machine, Control and Suspended Bodies», dans *Brain, Body and Machine*, édité par J. Angeles, B. Boulet, J. J. Clark, J. Kövecses et K. Siddiqi, n° 83 dans *Advances in Intelligent and Soft Computing*, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-16258-9 978-3-642-16259-6, p. 311–323. [20](#)
- GOSSELIN, C., P. REN et S. FOUCAULT. 2012, «Dynamic trajectory planning of a two-DOF cable-suspended parallel robot», dans *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 1476–1481. [20](#)
- GOULD, L. et M. MURRAY-LASSO. 1966, «On the modal control of distributed systems with distributed feedback», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, n° 4, p. 729–737, ISSN 0018-9286. [22](#)
- GOUTTEFARDE, M., J.-F. COLLARD, N. RIEHL et C. BARADAT. 2015a, «Geometry Selection of a Redundantly Actuated Cable-Suspended Parallel Robot», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, n° 2, p. 501–510, ISSN 1552-3098. [10](#), [18](#), [83](#), [84](#)
- GOUTTEFARDE, M., D. DANAY et J.-P. MERLET. 2011, «Interval-Analysis-Based Determination of the Wrench-Feasible Workspace of Parallel Cable-Driven Robots», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 27, n° 1, p. 1–13, ISSN 1552-3098. [18](#)
- GOUTTEFARDE, M. et C. GOSSELIN. 2005, «Wrench-Closure Workspace of Six-DOF Parallel Mechanisms Driven by 7 Cables», *Transactions of the CSME*, vol. 29, p. 541–552. [18](#)



- GOUTTEFARDE, M. et C. GOSSELIN. 2006, «Analysis of the wrench-closure workspace of planar parallel cable-driven mechanisms», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, n° 3, p. 434–445, ISSN 1552-3098. [17](#), [18](#)
- GOUTTEFARDE, M., J. LAMAURY, C. REICHERT et T. BRUCKMANN. 2015b, «A versatile tension distribution algorithm for n-dof parallel robots driven by n+2 cables», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, n° 6, p. 1444–1457. [19](#)
- HASSAN, M. et A. KHAJEPOUR. 2007, «Minimization of Bounded Cable Tensions in Cable-Based Parallel Manipulators», , p. 991–999. [19](#)
- IRVINE, H. M. 1981, *Cable Structures*, MIT Press, Cambridge. [15](#), [38](#)
- KAWAMURA, S., W. CHOE, S. TANAKA et S. PANDIAN. 1995, «Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire drive system», dans , *1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995. Proceedings*, vol. 1, p. 215 –220 vol.1. [21](#)
- KHOSRAVI, M. et H. TAGHIRAD. 2014, «Dynamic Modeling and Control of Parallel Robots With Elastic Cables: Singular Perturbation Approach», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 30, n° 3, p. 694–704, ISSN 1552-3098. [23](#)
- KOZAK, K., I. EBERT-UPHOFF et W. SINGHOSE. 2004, «Locally Linearized Dynamic Analysis of Parallel Manipulators and Application of Input Shaping to Reduce Vibrations», *Journal of Mechanical Design*, vol. 126, n° 1, p. 156–168, ISSN 1050-0472. [22](#)
- KOZAK, K., Q. ZHOU et J. WANG. 2006, «Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, n° 3, p. 425–433, ISSN 1552-3098. [20](#)
- KRAUS, W., M. KESSLER et A. POTT. 2015, «Pulley friction compensation for winch-integrated cable force measurement and verification on a cable-driven parallel robot», dans *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 1627–1632. [22](#), [41](#)
- LAMAURY, J. et M. GOUTTEFARDE. 2012, «A Tension Distribution Method with Improved Computational Efficiency», dans *Cable-Driven Parallel Robots*, Springer, p. 71–85. [40](#)
- LAMAURY, J. et M. GOUTTEFARDE. 2013, «Control of a large redundantly actuated cable-suspended parallel robot», dans *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 4659–4664. [10](#)
- LAMBERT, C., M. NAHON et D. CHALMERS. 2007, «Implementation of an Aerostat Positioning System With Cable Control», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 12, n° 1, p. 32–40, ISSN 1083-4435. [10](#)
- LAROCHE, E., R. CHELLAL, L. CUVILLON et J. GANGLOFF. 2013, «A Preliminary Study for  $H_\infty$  Control of Parallel Cable-Driven Manipulators», dans *Cable-Driven Parallel Robots*, édité par T. Bruckmann et A. Pott, n° 12 dans *Mechanisms and Machine Science*, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-31987-7 978-3-642-31988-4, p. 353–369. [19](#)
- LEFRANCOIS, S. et C. GOSSELIN. 2010, «Point-to-point motion control of a pendulum-like 3-dof underactuated cable-driven robot», dans *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 5187–5193. [20](#)

- MAEDA, K., S. TADOKORO, T. TAKAMORI, M. HILLER et R. VERHOEVEN. 1999, «On design of a redundant wire-driven parallel robot WARP manipulator», dans *1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1999. Proceedings*, vol. 2, p. 895–900 vol.2. [13](#)
- MEIROVITCH, L., H. F. VAN LANDINGHAM et H. ÖZ. 1977, «Control of spinning flexible spacecraft by modal synthesis», *Acta Astronautica*, vol. 4, n° 9, p. 985–1010, ISSN 0094-5765. [22](#)
- MERLET, J. 2012a, «The kinematics of the redundant N-1 wire driven parallel robot», dans *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 2313–2318. [16](#)
- MERLET, J.-P. 1999, «Determination of 6d Workspaces of Gough-Type Parallel Manipulator and Comparison between Different Geometries», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18, n° 9, p. 902–916, ISSN 0278-3649, 1741-3176. [17](#)
- MERLET, J.-P. 2004a, «Analysis of the Influence of Wires Interference on the Workspace of Wire Robots», dans *On Advances in Robot Kinematics*, édité par J. Lenarčič et C. Galletti, Springer Netherlands, ISBN 978-90-481-6622-0 978-1-4020-2249-4, p. 211–218. [17](#)
- MERLET, J.-P. 2004b, «Solving the Forward Kinematics of a Gough-Type Parallel Manipulator with Interval Analysis», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 23, n° 3, p. 221–235, ISSN 0278-3649, 1741-3176. [16](#)
- MERLET, J. P. 2012b, *Parallel Robots*, Springer Science & Business Media, ISBN 978-94-010-9587-7. [5](#)
- MERLET, J.-P. 2013, «Wire-driven Parallel Robot: Open Issues», dans *Romansy 19 – Robot Design, Dynamics and Control*, édité par V. Padois, P. Bidaud et O. Khatib, n° 544 dans CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer Vienna, ISBN 978-3-7091-1378-3 978-3-7091-1379-0, p. 3–10. [18](#)
- MERLET, J.-P. 2014, «The Influence of Discrete-Time Control on the Kinematico-Static Behavior of Cable-Driven Parallel Robot with Elastic Cables», dans *Advances in Robot Kinematics*, édité par J. Lenarčič et O. Khatib, Springer International Publishing, ISBN 978-3-319-06697-4 978-3-319-06698-1, p. 113–121. DOI: 10.1007/978-3-319-06698-1\_13. [62](#)
- MIKELSONS, L., T. BRUCKMANN, M. HILLER et D. SCHRAMM. 2008, «A real-time capable force calculation algorithm for redundant tendon-based parallel manipulators», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2008. ICRA 2008*, p. 3869–3874. [19](#)
- MORIZONO, T., K. KURAHASHI et S. KAWAMURA. 1997, «Realization of a virtual sports training system with parallel wire mechanism», dans *1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1997. Proceedings*, vol. 4, p. 3025–3030 vol.4. [13](#)
- NAHON, M., G. GILARDI et C. LAMBERT. 2002, «Dynamics/Control of a Radio Telescope Receiver Supported by a Tethered Aerostat», *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 25, n° 6, p. 1107–1115, ISSN 0731-5090. [10](#), [20](#)
- NAN, R. 2006, «Five hundred meter aperture spherical radio telescope (FAST)», *Science in China Series G*, vol. 49, n° 2, p. 129–148, ISSN 1672-1799, 1862-2844. [10](#)

- NGUYEN, D. Q., M. GOUTTEFARDE, O. COMPANY et F. PIERROT. 2014, «On the analysis of large-dimension reconfigurable suspended cable-driven parallel robots», dans *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 5728–5735. [10](#)
- OH, S.-R. et S. AGRAWAL. 2005, «Cable suspended planar robots with redundant cables: controllers with positive tensions», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 21, n° 3, p. 457–465, ISSN 1552-3098. [20](#), [40](#)
- OTIS, M., S. PERREAULT, T. L. NGUYEN-DANG, P. LAMBERT, M. GOUTTEFARDE, D. LAURENDEAU et C. GOSSELIN. 2009, «Determination and Management of Cable Interferences Between Two 6-DOF Foot Platforms in a Cable-Driven Locomotion Interface», *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, vol. 39, n° 3, p. 528–544, ISSN 1083-4427. [17](#)
- PERREAULT, S., P. CARDOU, C. M. GOSSELIN et M. J.-D. OTIS. 2010, «Geometric Determination of the Interference-Free Constant-Orientation Workspace of Parallel Cable-Driven Mechanisms», *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 2, n° 3, p. 031 016–031 016, ISSN 1942-4302. [17](#)
- PERREAULT, S. et C. M. GOSSELIN. 2008, «Cable-Driven Parallel Mechanisms: Application to a Locomotion Interface», *Journal of Mechanical Design*, vol. 130, n° 10, p. 102 301–102 301, ISSN 1050-0472. [18](#)
- PERRET, J. et L. DOMINJON. 2009, «The INCA 6d: a Commercial Stringed Haptic System Suitable for Industrial Applications», . [10](#)
- POTT, A. 2014, «An Improved Force Distribution Algorithm for Over-Constrained Cable-Driven Parallel Robots», dans *Computational Kinematics*, édité par F. Thomas et A. P. Gracia, n° 15 dans *Mechanisms and Machine Science*, Springer Netherlands, ISBN 978-94-007-7213-7 978-94-007-7214-4, p. 139–146. [19](#)
- POTT, A., C. MEYER et A. VERL. 2010, «Large-scale assembly of solar power plants with parallel cable robots», dans *Robotics (ISR), 2010 41st International Symposium on and 2010 6th German Conference on Robotics (ROBOTIK)*, p. 1–6. [10](#)
- POTT, A., H. MÜTHERICH, W. KRAUS, V. SCHMIDT, P. MIERMEISTER et A. VERL. 2013, «IPAnema: A family of Cable-Driven Parallel Robots for Industrial Applications», dans *Cable-Driven Parallel Robots*, édité par T. Bruckmann et A. Pott, n° 12 dans *Mechanisms and Machine Science*, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-31987-7 978-3-642-31988-4, p. 119–134. [10](#)
- PREUMONT, A. 2011, «Vibration Control of Active Structures», dans *Vibration Control of Active Structures, Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 179, édité par G. M. L. Gladwell, Springer Netherlands, Dordrecht, ISBN 978-94-007-2032-9 978-94-007-2033-6. [22](#), [46](#)
- RIEHL, N. 2011, *Modélisation et design de robots parallèles à câbles de grande dimension*, Montpellier 2. [14](#), [40](#)
- RIEHL, N., M. GOUTTEFARDE, C. BARADAT et F. PIERROT. 2010, «On the determination of cable characteristics for large dimension cable-driven parallel mechanisms», dans *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 4709–4714. [40](#)

- RIEHL, N., M. GOUTTEFARDE, S. KRUT, C. BARADAT et F. PIERROT. 2009, «Effects of non-negligible cable mass on the static behavior of large workspace cable-driven parallel mechanisms», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2009. ICRA '09*, p. 2193–2198. [14](#)
- RUGH, W. J. et J. S. SHAMMA. 2000, «Research on gain scheduling», *Automatica*, vol. 36, n° 10, p. 1401–1425, ISSN 0005-1098. [91](#), [99](#)
- SICILIANO, B. et O. KHATIB, éd.. 2008, *Springer Handbook of Robotics*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, ISBN 978-3-540-23957-4 978-3-540-30301-5. [23](#)
- SINGH, S. P., H. SINGH PRUTHI et V. P. AGARWAL. 2003, «Efficient modal control strategies for active control of vibrations», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 262, n° 3, p. 563–575, ISSN 0022-460X. [22](#)
- SNOW, E. R. 1993, *The load/deflection behavior of pretensioned cable/pulley transmission mechanisms*, Massachusetts Institute of Technology and Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, MA. [39](#)
- SPONG, M., K. KHORASANI et P. KOKOTOVIC. 1985, «A Slow Manifold Approach to Feedback Control of Nonlinear Flexible Systems», dans *American Control Conference, 1985*, p. 1386–1391. [23](#)
- STEWART, D. 1965, «A Platform with Six Degrees of Freedom», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 180, n° 1, p. 371–386, ISSN 0020-3483,. [5](#)
- STUMP, E. et V. KUMAR. 2005, «Workspaces of Cable-Actuated Parallel Manipulators», *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, n° 1, p. 159–167, ISSN 1050-0472. [18](#)
- TANG, X. et R. YAO. 2011, «Dimensional Design on the Six-Cable Driven Parallel Manipulator of FAST», *Journal of Mechanical Design*, vol. 133, n° 11, p. 111 012–111 012, ISSN 1050-0472. [10](#)
- THOMPSON, C. et P. CAMPBELL. 1996, «Tendon suspended platform robot», US Patent 5,585,707. [25](#)
- WANG, X., J. MILLS et S. GUO. 2009, «Experimental Identification and Active Control of Configuration Dependent Linkage Vibration in a Planar Parallel Robot», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, n° 4, p. 960–969, ISSN 1063-6536. [22](#)
- WEBER, X., L. CUVILLON et J. GANGLOFF. 2014, «Active vibration canceling of a cable-driven parallel robot using reaction wheels», dans *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2014)*, p. 1724–1729. [3](#), [21](#), [104](#)
- WEBER, X., L. CUVILLON et J. GANGLOFF. 2015, «Active vibration canceling of a cable-driven parallel robot in modal space», dans *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 1599–1604. [3](#), [21](#), [53](#), [86](#), [104](#)
- YANAI, N., M. YAMAMOTO et A. MOHRI. 2002, «Anti-sway control for wire-suspended mechanism based on dynamics compensation», dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02*, vol. 4, p. 4287–4292 vol.4. [21](#)
- YOU, X., W. CHEN, S. YU et X. WU. 2011, «Dynamic control of a 3-DOF cable-driven robot based on backstepping technique», dans *2011 6th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, p. 1302–1307. [19](#)

- YUAN, H., E. COURTEILLE et D. DEBLAISE. 2014, «Elastodynamic analysis of cable-driven parallel manipulators considering dynamic stiffness of sagging cables», dans *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 4055–4060. [21](#)
- YUAN, H., E. COURTEILLE et D. DEBLAISE. 2015, «Static and dynamic stiffness analyses of cable-driven parallel robots with non-negligible cable mass and elasticity», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 85, p. 64–81, ISSN 0094-114X. [21](#)
- ZANOTTO, D., G. ROSATI et S. K. AGRAWAL. 2011, «Modeling and Control of a 3-DOF pendulum-like manipulator», dans *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 3964–3969. [20](#)
- ZI, B., B. Y. DUAN, J. L. DU et H. BAO. 2008, «Dynamic modeling and active control of a cable-suspended parallel robot», *Mechatronics*, vol. 18, n° 1, p. 1–12, ISSN 0957-4158. [19](#), [20](#)

# Annexes A

## Démonstrations

### A.1 Linéarisation du modèle dynamique : détails du calcul

Cette section présente le calcul de linéarisation de la loi de mouvement d'un RPC associé à  $n$  roues à inertie.

Le développement limité à l'ordre un du modèle dynamique du robot, présenté en (2.57), est de la forme suivante (reprise de 2.58) :

$$\begin{aligned}
 & f(\ddot{\mathbf{x}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_0 + \Delta\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{l}_{20} + \Delta\mathbf{l}_2, \psi'_0 + \Delta\psi', \phi_0 + \Delta\phi) \\
 &= \underbrace{f(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)}_{=0} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\dot{\mathbf{x}} + \\
 & \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{l}_2} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\mathbf{l}_2 + \\
 & \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \phi} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\phi + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \psi'} \Big|_{(\ddot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_{20}, \psi'_0, \phi_0)} \Delta\psi'}_{=-1} = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Les dérivées partielles présentes dans les termes de A.1 revêtent les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} = \mathbf{M}(\mathbf{x}) \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K}(\mathbf{l}_2) (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \underbrace{\mathbf{K}(\mathbf{l}_2) (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1(\mathbf{x}))}_{-\tau} - \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K} \left( -\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \mathbf{x}} \right) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \tau + \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K} \tilde{\mathbf{J}}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{l}_2} &= -\frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K}(\mathbf{l}_2) (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1)}{\partial \mathbf{l}_2} \\
 &= -\tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \underbrace{\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{l}_2}}_{\mathbf{K} \mathbf{L}_2^{-1}} (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) - \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K} \left( \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \mathbf{l}_2} \right) \\
 &= -\tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{l}_2} (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) - \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K} \left( \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \mathbf{l}_2} \right) \\
 &= -\tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) (-\mathbf{K}(\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1) \mathbf{L}_2^{-1}) - \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K} \\
 &= -\tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) (-\mathbf{K} \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_2^{-1} + \mathbf{K} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^{-1} + \mathbf{K}) \\
 &= -\tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^{-1}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Soit  $\mathbf{K}_s = \text{diag}(\mathbf{k}_s)$  et  $\mathbf{L}_2 = \text{diag}(\mathbf{l}_2)$ , la dérivée partielle  $\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{l}_2)}{\partial \mathbf{l}_2}$  peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{l}_2)}{\partial \mathbf{l}_2} (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) &= \frac{\partial \mathbf{L}_2^{-1}}{\partial \mathbf{l}_2} \mathbf{K}_s (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) \\
 &= -\mathbf{L}_2^{-1} \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \mathbf{l}_2} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{K}_s (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) \\
 &= -\mathbf{L}_2^{-1} \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \mathbf{l}_2} \mathbf{K}(\mathbf{l}_2) (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) \\
 &= -\mathbf{K}(\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1) \mathbf{L}_2^{-1}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

puisque pour un scalaire  $u$  et une matrice  $\mathbf{A}$ , on a :  $\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial u} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} \mathbf{A}^{-1}$ .

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \phi} = \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

L'équation (2.58) est ainsi équivalente à :

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{M}(\mathbf{x}_0) \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \left( \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 \right) \Delta \dot{\mathbf{x}} + \\
 &\left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\mathbf{x}}_0 + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}^T}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\tau}_0 + \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \mathbf{K}(\mathbf{l}_{20}) \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{w}}_{i0}} \right) \Delta \mathbf{x} \\
 &= \Delta \psi' + \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \mathbf{K}(\mathbf{l}_{20}) \text{diag}^{-1}(\mathbf{l}_{20}) \text{diag}(\mathbf{l}_1(\mathbf{x}_0)) \Delta \mathbf{l}_2 - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix} \Delta \phi_i
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Si le problème est formulé en fonction des tensions et non des longueurs à vide, tout est identique sauf le terme dépendant des longueurs, remplacé par un terme dépendant des tensions :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \tilde{\mathbf{J}}^T \tag{A.9}$$

Le résultat du calcul de (2.61) est ainsi :

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{M}(\mathbf{x}_0) \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \left( \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 \right) \Delta \dot{\mathbf{x}} + \\
 &\left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \ddot{\mathbf{x}}_0 + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{J}}^T}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\tau}_0 + \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \mathbf{K}(\mathbf{l}_{20}) \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{w}}_{i0}} \right) \Delta \mathbf{x} \\
 &= \Delta \psi' - \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}_0) \Delta \boldsymbol{\tau} - \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{w}}'_i \end{pmatrix} \Delta \phi_i
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

# Annexes B

## Code Matlab

### B.1 Code d'asservissement RST d'un moteur en position

```
function y = fcn(ref,meas,Te)
%#eml

% Variable initialization
persistent R S T;
if isempty( R )
R = [8.090508199999999e+001 -1.493405168000000e+002
6.882751328000000e+001 0 0 0];
S = [1.000000000000000e+000 -2.516585525000000e+000
2.128035699000000e+000 -6.114501739000000e-001 0 0];
T = [5.354835603000000e+002 -1.483953090000000e+003
1.372011944000000e+003 -4.231503372000000e+002 0 0];
end

persistent cons mes com aw speed
if isempty( cons )
cons = zeros(1,6);
mes = zeros(1,6);
com = zeros(1,6);
aw = zeros(1,6);
end

% History management
for i = 6:-1:2
cons(i) = cons(i-1);
mes(i) = mes(i-1);
com(i) = com(i-1);
aw(i) = aw(i-1);
end

cons(1) = ref;
mes(1) = meas;

com(1) = 0;
speed = (mes(1) - mes(2))/Te;

% Control signal computation
```



```

for i = 1:6
    com(1) = com(1) + T(i) * cons(i) - R(i) * mes(i);
end

for i = 2:6
    com(1) = com(1) - S(i) * com(i) + T(i) * aw(i);
end

% Current observer
i_sat = 1; %0.65A nominal thermistance, 1.25A max hacheur

% Tension en pour cents de 6V
% pour un courant de i_sat dans le moteur
com_max = (9*i_sat + speed*0.5036)*100/6.0;
com_min = (-9*i_sat + speed*0.5036)*100/6.0;
cmax = min([com_max 100]);
cmin = max([com_min -100]);

% Saturation
if com(1) > cmax
    aw(1) = (cmax-com(1))/T(1);
    com(1) = cmax;
elseif com(1) < cmin
    aw(1) = (cmin-com(1))/T(1);
    com(1) = cmin;
else
    aw(1) = 0;
end

y = com(1);

end

```

## B.2 Code du calcul de la commande moteurs d'amortissement actif de vibrations

```

function [y, tE, ntE, F, umod, vitmod] = fcn(imu, pos, Re, modeon)
%#eml

%static vars
persistent TableZ Az Ay Ax Ex Ey Ez Eb Ts;
persistent me p0 Ax0 Ay0 Az0 g Jex Jey Jez Ksc Rp;
persistent a1h a2h a3h a4h a1b a2b a3b a4b;
persistent b1h b2h b3h b4h b1b b2b b3b b4b;
persistent speed Kz nC dC mes com E;

% first iteration
if isempty(Ts)
    Ts = 0.007;

    % rad/s, position of controller poles and zeros
    speed = -10;

    Kz = zeros(6,1);
    nC = zeros(6,5);
    dC = zeros(6,5);

```

```

mes = zeros(6,5);
com = zeros(6,5);

% Base frame geometry
Az = 3.00;
Ay = 3.78;
Ax = 6.94;
TableZ = 0.80;

Ex = 0.155;
Ey = 0.185;
Ez = 0.07;%height from center to top cable outputs
Eb = 0.15; %height from ground to center
Ed = 0.00; %height delta

% Vectors of cable attachments
a3h=[0;0;Az];
a1h=[Ax;0;Az];
a4h=[0;Ay;Az];
a2h=[Ax;Ay;Az];

a2b=[0;0;Az-Ez];
a4b=[Ax;0;Az-Ez];
a1b=[0;Ay;Az-Ez];
a3b=[Ax;Ay;Az-Ez];

b1h=[-Ex/2;-Ey/2;Ez];
b2h=[Ex/2;-Ey/2;Ez];
b3h=[-Ex/2;Ey/2;Ez];
b4h=[Ex/2;Ey/2;Ez];

b1b=[-Ex/2;-Ey/2;0-Ed];
b2b=[Ex/2;-Ey/2;0-Ed];
b3b=[-Ex/2;Ey/2;0-Ed];
b4b=[Ex/2;Ey/2;0-Ed];

% Gravity (m/s/s)
g = 9.81;

% Mass of the effector (kg)
me = 2.0;

%% Inertia of the effector (kgm^2)
Jex = me/12*(Ey^2+(Ez+Eb)^2);
Jey = me/12*(Ex^2+(Ez+Eb)^2);
Jez = me/12*(Ex^2+Ey^2)/2;

%% Cable Characteristics

% Young's modulus of the cable (Pa)
Ec = 3.6877e9;

% Diameter of the cable (m)
Dc = 0.22e-3;

% Force = Ksc * Strain
Ksc = pi*(Dc/2)^2*Ec *2;

```

```
% Radius of the pulley
Rp = 5.5*10^-3;

%% position of effector center in base frame
X0 = Ax/2;
Y0 = Ay/2;
Z0 = TableZ+Eb;
Ax0 = 0;
Ay0 = 0;
Az0 = 0;

p0=[X0;Y0;Z0];

E=[ 0.4540   -0.2497   -0.4805    0.0258    0.0000    0.0000;
    0.0211    0.1768   -0.1083   -0.6757    0.0000    0.0000;
   -0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.7071;
   -1.5709   -7.6581    2.3647   -2.4312   -0.0000   -0.0000;
    6.7683    0.6560    6.0221   -0.5823    0.0000   -0.0000;
   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000   10.1491    0.0000];

end

% Robot pose

% Definition of the inputs
X = pos(1);
Y = pos(2);
Z = pos(3);

% CoG position
p=[X;Y;Z]+p0;

%inverse geometrical model
q1h=a1h-p-Re*b1h;
q2h=a2h-p-Re*b2h;
q3h=a3h-p-Re*b3h;
q4h=a4h-p-Re*b4h;

q1b=a1b-p-Re*b1b;
q2b=a2b-p-Re*b2b;
q3b=a3b-p-Re*b3b;
q4b=a4b-p-Re*b4b;

%% Intermediary values for dynamical model computation

%direction vectors
q1=q3h;b1=b3h;
q2=q3b; b2=b3b;
q3=q1b; b3=b1b;
q4=q1h;b4=b1h;
q5=q2h;b5=b2h;
q6=q2b; b6=b2b;
q7=q4b; b7=b4b;
q8=q4h;b8=b4h;
```

```

u1=q1/norm(q1);
u2=q2/norm(q2);
u3=q3/norm(q3);
u4=q4/norm(q4);
u5=q5/norm(q5);
u6=q6/norm(q6);
u7=q7/norm(q7);
u8=q8/norm(q8);

%cross-prod vectors
u1x = skm(u1);
u2x = skm(u2);
u3x = skm(u3);
u4x = skm(u4);
u5x = skm(u5);
u6x = skm(u6);
u7x = skm(u7);
u8x = skm(u8);

b1x = skm(Re*b1);
b2x = skm(Re*b2);
b3x = skm(Re*b3);
b4x = skm(Re*b4);
b5x = skm(Re*b5);
b6x = skm(Re*b6);
b7x = skm(Re*b7);
b8x = skm(Re*b8);

% Jacobian
J=[u1, u2, u3, u4, u5, u6, u7, u8;
    b1x*u1, b2x*u2, b3x*u3, b4x*u4, b5x*u5, b6x*u6, b7x*u7, b8x*u8]';

% cables length
l = diag([norm(q1),norm(q2),norm(q3),norm(q4),
          norm(q5),norm(q6),norm(q7),norm(q8)]);

% mass matrix
M=[(me*eye(3)), zeros(3,3);
    zeros(3,3), Re'*diag([Jex,Jey,Jez])*Re];

% intermediary matrices
A1 = eye(3)-u1*u1';
A2 = eye(3)-u2*u2';
A3 = eye(3)-u3*u3';
A4 = eye(3)-u4*u4';
A5 = eye(3)-u5*u5';
A6 = eye(3)-u6*u6';
A7 = eye(3)-u7*u7';
A8 = eye(3)-u8*u8';

%% stiffness computation

% cables stiffness
k1=Ksc/norm(q1);

```

```
k2=Ksc/norm(q2);
k3=Ksc/norm(q3);
k4=Ksc/norm(q4);
k5=Ksc/norm(q5);
k6=Ksc/norm(q6);
k7=Ksc/norm(q7);
k8=Ksc/norm(q8);

% cables stiffness matrix
Kc=diag([k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]);

Ke=J'*Kc*J;

% tensions
f = pinv(J')*[0;0;me*g;0;0;0];

Ks1 = f(1)/norm(q1)*[A1, A1*b1x'; b1x*A1, b1x*A1*b1x'];
Ks2 = f(2)/norm(q2)*[A2, A2*b2x'; b2x*A2, b2x*A2*b2x'];
Ks3 = f(3)/norm(q3)*[A3, A3*b3x'; b3x*A3, b3x*A3*b3x'];
Ks4 = f(4)/norm(q4)*[A4, A4*b4x'; b4x*A4, b4x*A4*b4x'];
Ks5 = f(5)/norm(q5)*[A5, A5*b5x'; b5x*A5, b5x*A5*b5x'];
Ks6 = f(6)/norm(q6)*[A6, A6*b6x'; b6x*A6, b6x*A6*b6x'];
Ks7 = f(7)/norm(q7)*[A7, A7*b7x'; b7x*A7, b7x*A7*b7x'];
Ks8 = f(8)/norm(q8)*[A8, A8*b8x'; b8x*A8, b8x*A8*b8x'];
Ks = Ks1 + Ks2 + Ks3 + Ks4 + Ks5 + Ks6 + Ks7 + Ks8;

Kf1 = -f(1) * [zeros(3,3), zeros(3,3); zeros(3,3), u1x*b1x];
Kf2 = -f(2) * [zeros(3,3), zeros(3,3); zeros(3,3), u2x*b2x];
Kf3 = -f(3) * [zeros(3,3), zeros(3,3); zeros(3,3), u3x*b3x];
Kf4 = -f(4) * [zeros(3,3), zeros(3,3); zeros(3,3), u4x*b4x];
Kf5 = -f(5) * [zeros(3,3), zeros(3,3); zeros(3,3), u5x*b5x];
Kf6 = -f(6) * [zeros(3,3), zeros(3,3); zeros(3,3), u6x*b6x];
Kf7 = -f(7) * [zeros(3,3), zeros(3,3); zeros(3,3), u7x*b7x];
Kf8 = -f(8) * [zeros(3,3), zeros(3,3); zeros(3,3), u8x*b8x];
Kf = Kf1 + Kf2 + Kf3 + Kf4 + Kf5 + Kf6 + Kf7 + Kf8;

% stiffness matrix
K=Ke+Ks+Kf;

%% Modal analysis

% modal matrix history
Eprec = E;
% eigenvalues
[V,D]=eig(K,M);
V = real(V);

% frequencies
F = sqrt(diag(real(D)));
% normalisation
E = V ./ (ones(6,1)*sqrt(diag(V'*M*V)'));

% modal matrix without tracking
```

```

Ent = E;

% modes tracking
mod_var = E'*M*Eprec;
E = E*round(mod_var);
F = abs(F'*round(mod_var))';

%% controller design
for i=1:6
    % Enabled modes
    if modeon(i)

        % Parameters
        r = speed;
        f = F(i);

        % Gain computing
        kc = 2*f*(sqrt(r^2+f^2)-1);

        % Continuous to discrete
        zz = exp(Ts*r);
        rc = exp(Ts*speed);
        Zm = exp(Ts*-6*2*pi);
        Zimu = exp(Ts*-10*2*pi);
        Pf = 0;

        Kz(i) = sin(F(i)*Ts)/F(i) * kc;
        Km = 1/(1-Zm)^2;
        Kz = Km* Kz;

        % Compensators polynoms determination
        nC(i,:) = Kz(i)*conv(conv(conv([1 -zz],[1 -Zm]),[1 -Zm]),[1 -Zimu]);
        dC(i,:) = conv([1 -2*rc*cos(F(i)*Ts) rc^2],conv([1 -Pf],[1 -Pf]));

        % Disabled modes
    else
        nC(i,:) = [0 0 0 0 0];
        dC(i,:) = [1 0 0 0 0];
    end
end

%% History management
for i = 5:-1:2
    mes(:,i) = mes(:,i-1);
    com(:,i) = com(:,i-1);
end

mes(:,1) = real(E\imu);
com(:,1) = 0;

% Control signal computation
com(:,1) = com(:,1) - nC(:,1) .* mes(:,1);
com(:,1) = com(:,1) - nC(:,2) .* mes(:,2);
com(:,1) = com(:,1) - nC(:,3) .* mes(:,3);
com(:,1) = com(:,1) - nC(:,4) .* mes(:,4);

```

```
com(:,1) = com(:,1) - nC(:,5) .* mes(:,5);

com(:,1) = com(:,1) - dC(:,2) .* com(:,2);
com(:,1) = com(:,1) - dC(:,3) .* com(:,3);
com(:,1) = com(:,1) - dC(:,4) .* com(:,4);
com(:,1) = com(:,1) - dC(:,5) .* com(:,5);

%% outputs
umod = com(:,1);
vitmod = mes(:,1);
ntE = real(Ent);
tE = real(E);

tref = real(-1/(Ksc*Rp)*pinv(J')*(E'\umod) *(180/pi));

% sign for motor winding direction
y = [-tref(1); tref(2); tref(3); -tref(4);
      -tref(5); tref(6); tref(7); -tref(8)];

% for simulation
%y = [tref(4); tref(5); tref(1); tref(8);
      tref(3); tref(6); tref(2); tref(7)];
```

# Annexes C

## Liste des acronymes

- EPP** Espace des Poses Polyvalentes, ou *wrench closure workspace*, ensemble des poses d'un robot à câbles pour lesquelles n'importe quel torseur d'effort peut être généré sur la plateforme par les câbles avec une tension positive. 17, 18
- ETG** Espace des Torseurs Générables, ou *wrench feasible workspace*, ensemble des poses d'un robot à câbles pour lesquelles un jeu de torseurs d'efforts donnés peut être généré sur la plateformes par les câbles avec une tension admissible. 18, 84, 86
- IMU** centrale inertielle, Inertial Measurement Unit en anglais. 48, 63
- RPC** Robot parallèle à câbles ou *Cable-Driven Parallel Robot*. 1–3, 5, 6, 8, 10, 13–23, 25, 26, 28, 30, 31, 35, 36, 38, 40–42, 44, 45, 47–49, 51–53, 55, 59, 60, 62, 65, 67, 70, 71, 76, 81, 83, 84, 87, 92, 102–106, II
- SISO** Système à une seule entrée et une seule sortie ou *Single-Input Single-Output*. 22, 73, 89
- TMD** Le moment dynamique du solide  $S_i$  exprimé en A est égal à la somme des moments exercés sur ce solide en A :  $\delta_A(i/0) = \Sigma M_A(\text{extérieur}/i)$ . 27, 28, 31, 33
- TRD** La résultante dynamique du solide  $S_i$  est égale à la somme des forces exercées sur ce solide :  $m_i \gamma(A/0) = \Sigma F(\text{extérieur}/i)$ . 27, 28, 31, 33



# Annexes D

## Glossaire

**équi-projectivité des torseurs** Connaissant la résultante  $\mathbf{r}$  et le moment  $\mathbf{m}_A$  en un point A d'un torseur, le moment en un autre point B du même solide s'obtient par :  $\mathbf{m}_B = \mathbf{m}_A + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{r}$ . [27](#), [31](#), [32](#)

**formule de Bour** Formule permettant d'obtenir la dérivation d'un vecteur par rapport à un repère en fonction de sa dérivée dans un autre repère, connaissant la vitesse de rotation entre ces deux repères. [27](#)

# Annexes E

## Liste des symboles

$\frac{{}^0d}{dt}\mathbf{v}$  Dérivée du vecteur  $\mathbf{v}$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ . 27

$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_A(i)$  Tenseur d'inertie du solide  $\mathbf{S}_i$  en A. 28

$\omega(i/j)$  Vecteur vitesse instantanée de rotation du solide  $\mathbf{S}_i$  dans le repère  $\mathcal{R}_j$ . 27

$\sigma_A(i/0)$  Moment cinétique du solide  $\mathbf{S}_i$  au point A, exprimé dans le repère  $\mathcal{R}_j$ . 27

$\delta_A(i/0)$  Moment dynamique du solide  $\mathbf{S}_i$  au point A, exprimé dans le repère  $\mathcal{R}_j$ . 27, XII

$\mathbf{v}(A/0)$  Vitesse du point A dans le repère  $\mathcal{R}_0$ . 27

$\gamma(A/0)$  Accélération du point A dans le repère  $\mathcal{R}_0$ . 27, XII

# COMMANDE modale de robots parallèles à câbles flexibles

## résumé en français

Les Robots Parallèles à Câbles sont des robots possédant un effecteur relié à une base uniquement à l'aide de câbles, dont il est possible de modifier la longueur. Ils sont ainsi légers, capables de grandes dynamiques et peuvent présenter un énorme espace de travail.

Mais ils sont sujets à des vibrations de grande amplitude et basse fréquence à cause de leur rigidité très faible.

Cette thèse propose une approche originale d'amortissement actif pour atténuer efficacement ces vibrations.

Le modèle dynamique du robot à câbles embarquant des roues à inertie est calculé, linéarisé autour d'un point d'équilibre et projeté dans l'espace modal dans lequel les vibrations sont découplées. Une commande par placement de pôles adaptée à la fréquence naturelle de vibrations est appliquée pour chaque mode.

Les résultats sur une simulation et deux prototypes sont présentés pour valider cette approche.

Mots-clés : commande, robot à câbles, robot parallèle, espace modal, vibrations

## résumé en anglais

### Modal control of flexible cable-driven parallel robots

Cable-driven parallel robots use cables only to connect a fixed base to a mobile end-effector. Robot motion is obtained by winding the cables around pulleys to alter their length. Thus, cable-driven parallel robots are lightweight, can achieve very high dynamics and exhibit a very large workspace.

Therefore, they are subject to high magnitude and low frequency vibrations, because of their very low end-effector stiffness. This thesis proposes a novel approach for effective active damping of those vibrations.

The dynamical model of a cable-driven parallel robot embedding reaction wheels is derived, linearized around an equilibrium point and projected onto modal space, in which vibrations are decoupled.

For each vibration mode, a control algorithm designed by poles placement adapted to the associated vibration natural frequency is applied for active vibration damping.

Experiments conducted on a realistic simulation and two prototypes are presented to validate this approach.

Keywords : control, cable-driven parallel robot, modal space, vibrations