

# Calcul de probabilités d'événements rares liés aux maxima en horizon fini de processus stochastiques

Jun Shao

### ▶ To cite this version:

Jun Shao. Calcul de probabilités d'événements rares liés aux maxima en horizon fini de processus stochastiques. Autre. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2016. Français. NNT: 2016CLF22771. tel-01544589

## HAL Id: tel-01544589 https://theses.hal.science/tel-01544589

Submitted on 21 Jun2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés. N<sup>o</sup> d'ordre : D.U. 2771 EDSPIC : 780

## **Université BLAISE PASCAL - Clermont II**

École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

# Thèse

présentée par

# Jun SHAO

Master Recherche Probabilités et Mathématiques Financières Université Paris VI, Ecole Polytechnique

pour obtenir le grade de

## Docteur d'Université

Spécialité : Matériaux, Structures, Fiabilité

# Calcul de probabilités d'événements rares liés aux maxima en horizon fini de processus stochastiques

Soutenue le 12 décembre 2016

F. Poirion	Rapporteur
A. Mebarki	Rapporteur
P. Bernard	Examinateur
F. Bernardin	Examinateur
M. Fogli	Directeur de thèse
D. Clair	Co-Encadrant

Institut Pascal SIGMA-Clermont-Ferrand et Université Blaise Pascal  $N^{o}$  d'ordre : D.U. 2771 EDSPIC : 780

### Université BLAISE PASCAL - Clermont II

École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

# Thèse

présentée par

## Jun SHAO

Master Recherche Probabilités et Mathématiques Financières Université Paris VI Ecole Polytechnique

pour obtenir le grade de

Docteur d'Université

Spécialité : Matériaux, Structures, Fiabilité

## Calcul de probabilités d'événements rares liés aux maxima en horizon fini de processus stochastiques

F. Poirion	Rapporteur
A. Mebarki	Rapporteur
P. Bernard	Examinateur
F. Bernardin	Examinateur
M. Fogli	Directeur de thèse
D. Clair	Co-Encadrant

Institut Pascal SIGMA-Clermont-Ferrand et Université Blaise Pascal

# Table des matières

R	emer	ciements	1
R	ésum	ıé	3
Pı	réam	bule	4
1	$\mathbf{Pos}$	ition du problème	6
	1.1	Résultats basés sur la formulation de Rice	7
	1.2	Quelques éléments de la théorie des valeurs extrêmes	10
2	$\mathbf{Les}$	processus tests	15
	2.1	Processus gaussiens stationnaires	16
	2.2	Processus gaussiens non stationnaires	18
	2.3	Processus non gaussiens stationnaires	20
	2.4	Processus non gaussiens non stationnaires	25
3	La	méthode proposée	38
	3.1	Version 1 de la méthode	38
	3.2	Version 2 de la méthode $\ldots$	40
	3.3	Lien entre les approximations fournies par les versions 1 et 2 $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	42
	3.4	Calcul des coefficients des polynômes d'approximation $\bar{\eta}_{T,I}$ et $\bar{\delta}^{u_{\min}}_{T,J}$ des versions 1 et 2	43
	3.5	Version 3 de la méthode	46
4	Tes	ts numériques	53
	4.1	Exemples traités, résultats présentés	53
	4.2	Test numériques des versions 1 et 2	58
	4.3	Test numériques de la version 3	104
	4.4	Synthèse des résultats obtenus par les trois versions de la méthode	120
C	onclu	ision	122
Bi	ibliog	graphie	124
A	NNE	XES	126
$\mathbf{A}$	$\mathbf{Alg}$	orithmes de simulation des processus tests	127

B Communication présentée à la Conférence Internationale EURODYN 2014

# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur Le Professeur Michel Fogli, pour la confiance qu'il m'a accordée en me confiant ce travail. Par ses conseils et ses connaissances éclairés, sa grande disponibilité et ses encouragements constants, il a grandement contribué au succès de ma thèse et je le remercie très vivement.

J'adresse toute ma gratitude à mon encadrant, Monsieur David Clair, Maître de Conférences, pour sa grande implication dans sa mission d'encadrement. Pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée sur les aspects informatiques et numériques de mon travail, pour ses grandes qualités humaines, d'écoute et de compréhension et pour les précieux conseils qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer, je lui suis profondément reconnaissant.

J'exprime mes chaleureux remerciement à Monsieur Pierre Bernard, Professeur Emérite, pour son soutien constant tout au long de la préparation de ce travail. J'ai beaucoup appris à son contact, notamment sur la théorie des valeurs extrêmes, et bénéficié de sa grande expérience pour la préparation de mon exposé à la conférence internationale Eurodyn de Porto.

Mes remerciements vont aussi vers Monsieur Frédéric Bernardin, Ingénieur de Recherche au CE-REMA, qui a activement participé à l'encadrement de la thèse et dont les conseils avisés m'ont été d'une aide précieuse pour l'accomplissement et la finalisation de mon travail.

Je remercie très vivement Monsieur Fabrice Poirion, Maître de Recherche HDR à l'ONERA, et Monsieur Ahmed Mébarki, Professeur à l'Université Paris Est-Marne la Vallée, de m'avoir fait l'honneur de rapporter mon travail de thèse.

Comment pourrais-je oublier dans mes remerciements ma famille fran莽aise d'accueil, Guy et Viviane Giraud? Ils m'ont chaleureusement accueilli dans leur foyer et considéré dès le départ comme leur propre fils, me permettant ainsi d'atténuer ma nostalgie de mon pays natal, la Chine, et de mon cocon familial. Je ne les remercierai jamais assez.

Je n'oublierai pas non plus les participants au projet MODNAT, projet ANR d'où sont issus le sujet de ma thèse et le financement de celle-ci. Nous nous sommes rencontrés régulièrement durant les 39 mois de la durée du projet et j'ai beaucoup appris à leur contact sur la modélisation stochastique des phénomènes naturels et les échanges scientifiques interdisciplinaires.

Je tiens également à remercier mes anciens professeurs du Master Probabilités et Finance de l'Université Pierre et Marie Curie, qui m'ont donné goût à la Théorie des Probabilités et au Calcul Stochastique, avec une pensée émue pour le Professeur Marc Yor, aujourd'hui décédé, à qui je dois, grâce à une recommandation enthousiaste de sa part, d'avoir été retenu sur ce sujet de thèse.

Je remercie, bien entendu, tous mes collègues de l'Institut Pascal pour leur soutien moral tout au long de ces années de thèse, sans oublier notre secrétaire, Jacqueline Madebene, qui a toujours été là pour m'aider dans mes démarches administratives.

Enfin, je ne saurai clore ces remerciements sans en adresser de très chaleureux à mes parents qui résident en Chine. Malgré mon éloignement depuis de trop nombreuses années, leur intelligence et leur amour me portent et me guident tous les jours et leur soutien moral est total. Je suis fier aujourd'hui, à travers l'obtention de ma thèse, de leur rendre un peu du bonheur qu'ils m'ont procuré en me permettant de poursuivre des études universitaires de haut niveau.

# Résumé

Initiée dans le cadre d'un projet ANR (le projet MODNAT) ciblé sur la modélisation stochastique de phénomènes naturels et la quantification probabiliste de leurs effets dynamiques sur des systèmes mécaniques et structuraux, cette thèse a pour objet le **calcul de probabilités d'événements rares liés aux maxima en horizon fini de processus stochastiques**, avec prise en compte des quatre contraintes imposées suivantes : (1) l'ensemble des processus considérés doit contenir les quatre grandes catégories de processus rencontrés en dynamique aléatoire, à savoir les **gaussiens stationnaires**, les **gaussiens non stationnaires**, les **non gaussiens non stationnaires**; (2) ces processus doivent pouvoir être, soit décrits par leurs lois, soit fonctions de processus décrits par leurs lois, soit solutions d'équations d'inclusions différentielles stochastiques; (3) les événements en question sont des dépassements de seuils très élevés par les maxima en horizon fini des processus considérés et ces événements sont de très faible occurrence, donc de très faible probabilité (de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-8}$ ), du fait de la valeur élevée des seuils ; et enfin (4) le recours à une approche Monte-Carlo pour effectuer ce type de calcul doit être banni, car trop chronophage compte tenu des contraintes précédentes.

Pour résoudre un tel problème, dont le domaine d'intérêt s'étend bien au delà de la mécanique probabiliste et de la fiabilité structurale (on le rencontre notamment dans tous les secteurs scientifiques en connexion avec la statistique des valeurs extrêmes, comme par exemple les mathématiques financières ou les sciences économiques) une méthode innovante est proposée, dont l'idée maîtresse est née de l'analyse des résultats d'une étude statistique de grande ampleur menée dans le cadre du projet MODNAT. Cette étude, qui porte sur l'analyse du comportement des valeurs extrêmes des éléments d'un vaste ensemble de processus, a en effet mis en évidence **deux fonctions germes** dépendant explicitement de la probabilité cible (la première en dépendant directement, la seconde indirectement via une probabilité conditionnelle auxiliaire elle-même fonction de la probabilité cible) et possédant des propriétés de régularité remarquables et récurrentes pour tous les processus de la base de données, et c'est sur l'exploitation conjointe de ces propriétés et d'un principe d'**approximation bas niveauextrapolation haut niveau** que s'appuie la construction de la méthode. Deux versions de celle-ci en sont d'abord proposées, se distinguant par le choix de la fonction germe et dans chacune desquelles cette fonction est approximée par un polynôme. Une troisième version est également développée, basée sur le formalisme de la deuxième version mais utilisant pour la fonction germe une approximation de type "fonction de survie de **Pareto**".

Les nombreux résultats numériques présentés attestent de la remarquable efficacité des deux premières versions. Ils montrent également que celles-ci sont de précision comparable. La troisième version, légèrement moins performante que les deux premières, présente quant à elle l'intérêt d'établir un lien direct avec la théorie des valeurs extrêmes. Dans chacune de ses trois versions, la méthode proposée constitue à l'évidence un progrès par rapport aux méthodes actuelles dédiées à ce type de problème. De par sa structure, elle offre en outre l'avantage de rester opérationnelle en contexte industriel.

# Préambule

Nous proposons dans cette thèse une méthode numérique innovante et performante pour le calcul de la probabilité de franchissement d'un seuil élevé par le maximum en horizon fini d'un processus aléatoire scalaire, non nécessairement gaussien ni stationnaire.

L'idée de l'approche proposée prend sa source dans une étude menée dans le cadre du projet MODNAT sur une gamme étendue et variée de processus stochastiques et qui consistait, pour chaque processus de la gamme, à analyser comment la probabilité que son maximum excède un seuil u donné évolue en fonction de u. Cette étude, entièrement effectuée en contexte Monte-Carlo, a ainsi permis de mettre en exergue deux fonctions de u liées explicitement à cette probabilité et possédant des propriétés récurrentes remarquable qui, judicieusement exploitées, ont conduit à l'élaboration d'approximations de qualité de la probabilité cible, valables aussi bien pour les faibles valeurs de u que pour les grandes valeurs et donc d'un grand intérêt pratique, en particulier, pour l'estimation des faibles valeurs de la probabilité cible, objectif visé de ce travail.

Le premier chapitre est consacré à un exposé détaillé du problème, suivi d'un bref rappel de l'expression analytique de sa solution exacte et d'une analyse critique de cette dernière montrant, *in fine*, l'impossibilité de l'utiliser en pratique.

Dans le second chapitre est décrit un sous-ensemble significatif de l'ensemble des processus ayant servi de base à l'élaboration de la méthode proposée. Ce sous-ensemble couvre quatre grandes classes de processus : les gaussiens stationnaires, les gaussiens non stationnaires, les non gaussiens stationnaires et les non gaussiens non stationnaires. Il contient une grande partie des processus-tests figurant dans le rapport MODNAT  $T_0+18$  du partenaire 4 (IP), complétée par les valeurs absolues de ces processus ainsi que par quatre processus (un par classe) pour lesquels l'expression exacte de la probabilité cible peut être calculée.

Le troisième chapitre est consacré à l'exposé de la méthode proposée pour le calcul de la probabilité cible dans le cas d'un processus quelconque. Comme mentionné plus haut, la méthode est basée sur l'exploitation des propriétés remarquables de deux fonctions dépendant explicitement de la probabilité cible et se perpétuant d'un processus à l'autre de la base de données décrite dans le second chapitre. La première fonction dépend directement de la probabilité cible, la seconde en dépend indirectement par l'intermédiaire d'une probabilité conditionnelle auxiliaire dépendant elle-même de la probabilité cible. Deux versions de cette méthode sont proposées. La première est basée sur une approximation polynomiale de la première fonction à l'aide d'une technique de type approximation bas niveau - extrapolation haut niveau (*i.e.* la fonction est approximée par un polynôme sur une zone de faibles seuils, puis l'approximation obtenue est prolongée par extrapolation vers les zones de seuils élevés), technique justifiée par les propriétés récurrentes remarquables susmentionnées de cette fonction, observées sur

tous les processus de la base de données et supposées universelles compte tenu du nombre et de la variété des processus figurant dans cette base. L'approximation correspondante de la probabilité cible s'obtient ensuite en inversant la relation explicite liant la fonction en question à cette probabilité et en remplaçant cette fonction par son approximation dans la relation inversée obtenue. La seconde version opère quant à elle sur la deuxième fonction mise en évidence lors de l'étude des extrema des processus de la base de données, et qui possède elle aussi des propriétés permettant, par le biais de la même technique d'approximation bas niveau - extrapolation haut niveau et en utilisant toujours une approximation polynomiale en zone de faibles seuils, d'en construire une approximation de qualité pour chaque processus, valable aussi bien pour de faibles seuils que pour des seuils élevés. Comme cette second fonction est liée explicitement à une probabilité conditionnelle auxiliaire, elle-même liée explicitement à la probabilité cible, une seconde approximation de cette dernière (elle aussi valable pour une gamme très étendue de seuils, et notamment des seuils élevés) peut alors être obtenue via une double inversion fonctionnelle et le remplacement de la seconde fonction par son approximation. Ce chapitre se termine par la présentation d'une troisième version de la méthode, consistant en une modification de la seconde au niveau de l'approximation en zone de faibles seuils de la probabilité conditionnelle auxiliaire intervenant dans l'expression de la probabilité cible. Dans cette nouvelle version, en effet, par référence à la théorie des valeurs extrêmes, cette probabilité conditionnelle est approximée par la fonction de survie d'une loi de Pareto généralisée, et il s'agit alors d'identifier les paramètres de cette fonction en zone de faibles seuils puis de prolonger l'approximation obtenue vers les seuils élevés.

Enfin, dans un quatrième chapitre sont présentées des applications numériques destinées à illustrer les possibilités des trois versions proposées. Les processus utilisés à cette fin sont ceux décrits dans le second chapitre et on peut constater, à la lueur des résultats obtenus, que les deux premières versions sont remarquablement efficaces et comparables en précision, tandis que la troisième version est légèrement moins performante que les deux premières, tout en restant très compétitive par rapport aux méthodes existantes. De plus, elle présente l'intérêt, par rapport aux deux autres versions, d'établir un lien direct avec la théorie des valeur extrêmes, ce qui n'est pas le cas de ces dernières.

## Chapitre 1

# Position du problème

Soient  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité,  $\mathcal{T}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (avec éventuellement  $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ ) et  $\nu = (\nu(t), t \in \mathcal{T})$  un processus défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , indexé sur  $\mathcal{T}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et du second ordre, c'est-à-dire tel que,  $\forall t \in \mathcal{T}, \nu(t) \in L^2(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R})$ . Ce processus n'est supposé, *a priori*, ni gaussien, ni stationnaire. Cependant, dans le cas stationnaire  $\mathcal{T}$  sera l'ensemble  $\mathbb{R}$  tout entier alors que dans le cas non stationnaire ce sera un intervalle fermé borné  $\overline{T}$  de  $\mathbb{R}$ , de la forme :

$$\bar{T} = [0, T]$$
 ,  $0 < T < +\infty$  (1.1)

On aura ainsi :

$$\nu = (\nu(t), t \in \mathbb{R}) \tag{1.2}$$

dans le cas stationnaire, et :

$$\nu = (\nu(t), t \in \bar{T}) \tag{1.3}$$

dans le cas non stationnaire.

Soit  $M_T$  la v.a. réelle définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  telle que :

$$M_T = \sup_{t \in \bar{T}} \nu(t) \tag{1.4}$$

où  $\overline{T} = [0,T]$  est l'intervalle d'indexation du processus  $\nu$  dans le cas non stationnaire et un sousensemble fixé de l'ensemble d'indexation  $\mathbb{R}$  de ce processus dans le cas stationnaire.

On s'intéresse alors au calcul numérique de la probabilité :

$$P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u) \tag{1.5}$$

où u est un réel positif fixé (appelé *niveau*, ou *seuil*) supposé "grand", c'est-à-dire tel que la probabilité  $P_T(u)$  soit très petite, par exemple de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-6}$ .

Notons que le premier grand travail autour de cette thématique peut être attribué à Rice ([32], [33]) et date du milieu des années 1940. Beaucoup d'autres travaux l'ont suivi depuis. On peut citer notamment ceux de Slepian ([36], [37]), Cramer([10], [11]), Leadbetter([22], [23]), Belyaev ([5], [6]), Landau [21], Miroshin ([27], [28]), De long [13], Lutes [24], Aldous [1], Berman ([7], [8]), Vanmarcke ([38], [39]), Piterbarg ([30], [31]), Diebolt ([14], [15]), Michaelov [26], De Haan [12], Kratz ([19], [20]),

Mercadier ([25]), Salvatori([34]), Naess [29], Azaïs ([2], [3], [4]), Cérou [9], Droesbeke [16], Grigoriu  $[18], \cdots$  D'où une abondante littérature sur un sujet en pleine expansion.

La quasi-totalité de ces travaux proposent des approximations de  $P_T(u)$  ou de grandeurs statistiques liées à la loi de la v.a.  $M_T$ . Malheureusement, ces approximations ne sont valables, voire même calculables, que sous des hypothèses très restrictives, notamment la gaussianité et la stationnarité du processus  $\nu$ .

Les résultats les plus généraux concernant ce problème sont basés sur la formulation de Rice de  $P_T(u)$ , qui exprime cette probabilité sous la forme d'une série (dite de Rice) mettant en jeu les moments factoriels d'une certaine variable aléatoire entière liée au franchissement du niveau u par le processus  $\nu$ . Ces résultats ont été revisités récemment, et pour certains établis (notamment pour les champs aléatoires), par Azaïs et Wschebor ([2], [3], [4]). Nous en donnons un bref aperçu ci-dessous en nous limitant au cas des processus, le seul qui nous intéresse ici. Puis, nous présenterons un bref rappel de la théorie des valeurs extrêmes, à laquelle il sera fait référence au chapitre 3 (§3.5) lors de la présentation de la troisième version de la méthode proposée.

### 1.1 Résultats basés sur la formulation de Rice

Le point de départ est que, sous quelques hypothèses (dont une très technique et difficile à vérifier dans la pratique, hormis dans quelques cas particuliers), une formule exacte peut être obtenue pour le calcul de  $P_T(u)$  (cf. [2], Théorème 5.1). Elle s'écrit :

$$P_T(u) = \mathbb{P}(\nu(0) > u) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m(u, T)}{m!}$$
(1.6)

expression dans laquelle  $\gamma_m(u,T)$  est le moment factoriel d'ordre m de la v.a. entière :

$$S_u(T) = U_u(T) \mathbb{1}_{\{\nu(0) \le u\}}$$
(1.7)

où  $U_u(T)$  est le nombre (aléatoire) de franchissements en croissant du niveau u par le processus  $\nu$  sur  $\overline{T} = [0, T]$ . On a donc :

$$U_u(T) := \sharp \left\{ t \in \bar{T} : \nu(t) = u \ , \ \dot{\nu}(t) > 0 \right\}$$
(1.8)

$$\gamma_m(u,T) = \mathbb{E}\left[S_u(T)(S_u(T) - 1)\cdots(S_u(T) - m + 1)\right]$$
(1.9)

Les hypothèses du Théorème 5.1 de [2] sont les suivantes :

- 1. Les trajectoires du processus  $\nu$  sont presque-sûrement de classe  $C^{\infty}$ ;
- 2. La v.a.  $\nu(T/2)$  admet une densité de probabilité et celle-ci est bornée sur  $\mathbb{R}$  par une constante D;
- 3. Il existe une suite  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de réels positifs ou nuls telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} 2^k \left[ \mathbb{P}\left( \left\| X^{(2k-1)} \right\|_{\infty} \right) + \frac{Dc_k}{2^{2k-1}(2k-1)!} \right] = 0,$$
(1.10)

où  $\|\cdot\|_{\infty}$  désigne la norme infinie et  $f^{(i)}$  la  $i^{\text{ème}}$  dérivée de la fonction f pour tout entier i et toute fonction réelle f de variable réelle et de classe  $C^{\infty}$ .

C'est dans l'hypothèse technique (1.10) que la régularité  $C^{\infty}$  des trajectoires du processus  $\nu$  intervient. Elle nécessite par ailleurs de disposer de majorations limites sur les dérivées à tous ordres des trajectoires, ce qui rend l'emploi du résultat de [2] très délicat dans le cas général. En effet, lorsque  $\nu$  est la valeur absolue d'un autre processus, situation fréquemment rencontrée en pratique, la régularité des trajectoires n'a plus lieu. Dans ce cas, toutefois, il est suggéré dans ([2], §5.4), et à condition que  $\nu$  soit au moins à trajectoires continues, de remplacer ce processus par un processus approximant  $\nu^{\epsilon}$  à trajectoires  $C^{\infty}$ , construit par convolution de  $\nu$  avec un noyau unité approprié, puis de travailler avec  $\nu^{\epsilon}$ .

Pratiquement, les trajectoires du processus  $\nu$ , supposées presque-sûrement continues, sont généralement régularisées *via* le noyau gaussien :

$$\forall \epsilon > 0, \, \forall t \in \mathbb{R}, \, \phi_{\epsilon}(t) = \frac{1}{2\pi\epsilon} e^{-t^2/2\epsilon^2}, \tag{1.11}$$

afin de définir, pour tout  $\epsilon > 0$  un processus  $\nu^{\epsilon}$  dont les trajectoires sont construites par convolution comme suit :

$$\nu^{\epsilon}(t,a) = (\phi_{\epsilon} \star \nu(\cdot,a))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\epsilon}(t-s)\nu(s,a)ds, \text{ pour } \mathbb{P} - \text{presque tout } a \in \mathcal{A}.$$
(1.12)

Sous les hypothèses que pour tout  $\epsilon$  assez petit,  $\nu^{\epsilon}(T/2)$  a une densité de probabilité bornée par une constante  $D_1$ , que  $\mathbb{E}(\sup_t |\nu_t|) < \infty$  et que la loi de probabilité de  $M_T$  n'a pas d'atome, alors ([2], Théorème 5.11) :

$$P_T(u) = \mathbb{P}(\nu(0) > u) + \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m^{\epsilon}(u, T)}{m!},$$
(1.13)

où  $\gamma_m^{\epsilon}(u,T)$  est défini comme en (1.7)-(1.9) avec  $\nu^{\epsilon}$  en lieu et place de  $\nu$ . Par ce même théorème, on peut remplacer le dernier terme de (1.13) par une somme finie de  $m_0$  termes évaluée pour un certain  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon < e^{-2}$ ). Une majoration de l'erreur est fournie dans [2] mais elle est, là encore, très difficile à calculer.

Cependant, l'intérêt de la formule (1.6) est que la série qu'elle contient (appelée série de Rice) est alternée et permet donc de construire des encadrements de la probabilité cible  $P_T(u)$ . On peut ainsi écrire :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \ P_T^{2N}(u) \le P_T(u) \le P_T^{2N-1}(u)$$
 (1.14)

et en particulier :

$$P_T^2(u) \le P_T(u) \le P_T^1(u)$$
(1.15)

avec :

$$P_T^{2N}(u) = \mathbb{P}(\nu(0) > u) + \sum_{m=1}^{2N} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m(u,T)}{m!}$$

$$P_T^{2N-1}(u) = \mathbb{P}(\nu(0) > u) + \sum_{m=1}^{2N-1} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m(u,T)}{m!}$$

$$\begin{cases} P_T^2(u) = \mathbb{P}(\nu(0) > u) + \gamma_1(u,T) - \frac{\gamma_2(u,T)}{2} \\ P_T^1(u) = \mathbb{P}(\nu(0) > u) + \gamma_1(u,T) \end{cases}$$

$$(1.16)$$

Un autre intérêt de la formule (1.6), toujours attribuable au caractère alterné de la série de Rice y figurant, est qu'elle permet d'obtenir des approximations de  $P_T(u)$  avec contrôle des erreurs. Par exemple, en tronquant à l'ordre N la somme infinie de (1.6), on obtient l'approximation suivante de  $P_T(u)$ :

$$P_T^N(u) = \mathbb{P}(\nu(0) > u) + \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m(u, T)}{m!}$$
(1.18)

et l'erreur d'approximation  $\Delta_T^N(u) = |P_T(u) - P_T^N(u)|$  résultant de cette troncature vérifie :

$$\Delta_T^N(u) \le \frac{\gamma_{N+1}}{(N+1)!} \tag{1.19}$$

On a donc bien un contrôle de l'erreur. De plus, la série de Rice étant une série rapidement convergente (si, bien entendu, les hypothèses requises pour assurer sa convergence sont satisfaites), il n'est pas nécessaire de tronquer cette série à un ordre N très élevé pour obtenir une bonne approximation  $P_T^N(u)$  de  $P_T(u)$ , et ceci même pour les grandes valeurs de u, donc les faibles valeurs de la probabilité cible  $P_T(u)$ . L'expérience montre, en effet, que le choix N = 4 conduit à de très bonnes approximations de  $P_T(u)$  (cf. [35] et annexe A).

Ajoutons que d'autres bornes que celles de l'encadrement (1.14) peuvent être obtenues pour  $P_T(u)$ en relaxant l'hypothèse de  $C^{\infty}$ -différentiabilité des trajectoires de  $\nu$ . Par exemple, il est montré dans ([2], [3], [4], [20], [25]) que si la densité de probabilité  $p_{\nu(t)}$  de la v.a.  $\nu(t)$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  pour tout t dans  $\overline{T} = [0, T]$  et si les trajectoires du processus  $\nu$  sont de classe  $C^{q+1}$ , alors on a les résultats suivants :

$$\begin{cases} \cdot \operatorname{si} \ 2M + 1 < q/2, \ P_T(u) \le \mathbb{P}(\nu(0) > u) + \sum_{m=1}^{2M+1} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m(u,T)}{m!} \\ \cdot \operatorname{si} \ 2M < q/2, \ P_T(u) \ge \mathbb{P}(\nu(0) > u) + \sum_{m=1}^{2M} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m(u,T)}{m!} \end{cases}$$
(1.20)

Cependant, bien qu'attractive dans sa forme, et malgré les intérêts mentionnés ci-dessus qu'elle revêt, la formule (1.6) est peu intéressante pour les applications pratiques. En effet, son emploi est subordonné à la connaissance des moments factoriels  $\gamma_m(u, T)$  et, en dehors de quelques cas particuliers de peu d'intérêt en pratique, concernant pour la plupart le contexte gaussien stationnaire ([2], [3], [4], [19], [20], [25],), le calcul de ces moments est impossible par voie analytique et numériquement très coûteux, même pour de faibles valeurs de m. Pour s'en persuader, il suffit de rappeler que le moment  $\gamma_m(u, T)$  a pour expression,  $\forall m \geq 1$ :

$$\gamma_m(u,T) = \int_{\bar{T}} dt_1 \cdots dt_m \int_{-\infty}^u dx \int_{(\mathbb{R}_+)^m} \dot{x}_1 \cdots \dot{x}_m$$
$$p_{\nu(0),\nu(t_1),\cdots,\nu(t_m),\dot{\nu}(t_1),\cdots,\dot{\nu}(t_m)}(x,u,\cdots,u,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_m) d\dot{x}_1 \cdots d\dot{x}_m$$
(1.21)

où  $p_{\nu(0),\nu(t_1),\cdots,\nu(t_m),\dot{\nu}(t_1),\cdots,\dot{\nu}(t_m)}$  est la densité de probabilité du (2m+1)-uple  $(\nu(0),\nu(t_1),\cdots,\nu(t_m),\dot{\nu}(t_1),\cdots,\dot{\nu}(t_m))$ . On voit alors clairement que l'effort numérique à déployer pour calculer ce moment va très rapidement devenir prohibitif pour les valeurs de m supérieures à 2.

Bien entendu, on pourrait penser à estimer ces moments en appliquant une procédure de Monte-Carlo à (1.9), stratégie qui requiert la simulation d'un grand nombre de trajectoires du processus  $\nu$ . Malheureusement, l'expérience montre que lorsque u est grand, hypothèse de départ ici, il faut un nombre considérable de trajectoires simulées pour obtenir des estimations correctes des  $\gamma_m(u, T)$ , notamment dès que m > 2. Il est alors plus naturel, et surtout plus judicieux, dans ce cas de revenir à la formulation initiale (1.4)-(1.5) du problème et d'utiliser ces trajectoires simulées pour estimer directement la probabilité cible  $P_T(u)$  à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo.

Cependant, le recours à une méthode de Monte-Carlo classique pour ce type de problème n'est pas idéal car numériquement très coûteux du fait de la contrainte de grandeur sur u impliquant une très faible valeur de la probabilité  $P_T(u)$  (de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-6}$ ). C'est malgré tout une stratégie qui fonctionne dans tous les cas (i.e. quelles que soient les hypothèses sur  $\nu$ ) et à laquelle on peut donc toujours recourir pour peu que l'on choisisse bien la méthode de Monte-Carlo à utiliser et que l'on accepte les coûts numériques inhérents à son emploi.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons développé une méthode numérique pour le calcul de cette probabilité, qui présente l'avantage sur les méthodes de Monte-Carlo actuelles, mêmes les plus performantes (subset simulation, importance sampling, directional simulation,  $\cdots$ ), d'être beaucoup moins chronophage, plus facile à mettre en œuvre et au moins aussi précise. Cette méthode innovante, de type "approximation bas niveau - extrapolation haut niveau", est présentée sous trois versions différentes, utilisant toutes une procédure de Monte-Carlo, mais uniquement dans une première étape et pour calculer des probabilités auxiliaires beaucoup plus grandes que la probabilité cible (de l'ordre de 100 à 10000 fois plus grande que cette dernière), les autres étapes consistant en des approximations et interpolations fonctionnelles.

La méthode trouve son origine dans une étude intensive réalisée dans le cadre du projet MOD-NAT et qui visait à analyser l'évolution de la probabilité  $P_T(u)$  en fonction de u, pour une gamme étendue et variée de processus stochastiques. Dans cette étude, en effet, nous avons été amenés à tracer, pour tous les processus de la gamme (et via des estimations Monte-Carlo lorsque les calculs exacts étaient impossibles, c'est-à-dire dans la grande majorité des cas), les graphes des applications  $u \to \eta_T(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1 - P_T(u))\right]$  :  $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$  et  $y \to \delta_T^{u\min}(y) = -\text{Ln}\left[P_T(y; u_{min})\right]$  :  $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ , avec  $P_T(y; u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y + u_{\min}|M_T > u_{\min}) = P_T(y + u_{\min})/P_T(u_{\min})$  et  $u_{\min}$  le quantile tel que  $P_T(u_{\min}) \approx 10^{-2}$ , et c'est de l'observation de ces graphes qu'est née l'idée de la méthode. Dans le prochain chapitre est présenté un sous-ensemble significatif du vaste ensemble de processus mis en jeu dans l'étude en question, chaque processus de ce sous-ensemble étant accompagné dans cette présentation des graphes des applications  $\eta_T$  et  $\delta_T^{u\min}$  qui lui sont associées. Notons que dans tout ce qui suit, le vocable base de données désignera ce sous-ensemble et ses éléments seront appelés processus tests. Mais avant cela, nous rappelons brièvement ci-dessous quelques éléments de la théorie des valeurs extrêmes, auxquels nous nous réfèrerons au chapitre 3 (§3.5) lors de l'exposé de la troisième version de la méthode proposée.

### 1.2 Quelques éléments de la théorie des valeurs extrêmes

La théorie classique des valeurs extrêmes concerne les maxima de suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), avec des extensions au cas des processus stationnaires possédant des propriétés de mélange permettant de se rattacher au cas de l'indépendance.

Dans le contexte de notre travail, dédié à des phénomènes naturels (vent, houle, séisme) et à la réponse de structures soumises à ces excitations, le point de départ a été un ensemble d'observations

supposées mesurées, mais résultant en fait de simulations numériques d'un grand nombre de processus aléatoires de natures très variées présents dans divers problèmes de dynamique stochastique et décrits dans le chapitre 2.

Dans cette thèse, la théorie des valeurs extrêmes (TVE) a essentiellement été utilisée dans une étape de la troisième version de la méthode proposée. D'où le bref rappel que nous en faisons ici.

#### 1.2.1 TVE pour suites de variables aléatoires i.i.d

#### 1.2.1.1 Loi des valeurs extrêmes généralisées

Dans de nombreux cas, le maximum convenablement renormalisé d'une suite i.i.d de variables aléatoires converge en loi, lorsque l'indice de terme tend vers l'infini, vers une limite non dégénérée membre d'une famille précise de lois appelées lois des valeurs extrêmes.

Exemple 1 : Soit  $(X_n)_n$  une suite i.i.d de loi  $U[0,\theta]$ , et  $M_n = \max(X_i, i \le n)$ ; alors, lorsque  $n \to \infty$ , la suite  $(b_n^{-1}(M_n - a_n))_n$  converge en loi vers une loi de Weibull dont la fonction de répartition est  $F(x) = e^x$  pour  $x \le 0$  et F(x) = 1 pour x > 0, avec  $b_n = \frac{\theta}{n}$ ,  $a_n = \theta$ .

Exemple 2 : Soit  $(X_n)_n$  une suite i.i.d de loi exponentielle  $\epsilon(\lambda)$ , et  $M_n = \max(X_i, i \leq n)$ ; alors, lorsque  $n \to \infty$ , la suite  $(b_n^{-1}(M_n - a_n))_n$  converge en loi vers une loi de Gumbel dont la fonction de répartition est  $F(x) = e^{-e^{-x}}$ , avec  $b_n = \frac{1}{\lambda}$  et  $a_n = \frac{\log n}{\lambda}$ .

Exemple 3 : Soit  $(X_n)_n$  une suite i.i.d de loi de Cauchy C(0,1), et  $M_n = \max(X_i, i \le n)$ ; alors lorsque  $n \to \infty$ , la suite  $(b_n^{-1}(M_n - a_n))_n$  converge en loi vers une loi de Fréchet dont la fonction de répartition est  $F(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ , avec  $b_n = \frac{n}{\pi}$  et  $a_n = 0$ .

Si X et Y sont deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectives G et G', et s'il existe deux constantes a et b telles que la loi de Y soit égale à la loi de aX + b, on dit que X et Y sont de même type.

On peut alors énoncer le résultat fondamental suivant de la TVE

#### Théorème de Fisher-Tippett

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires i.i.d., et  $M_n = \max(X_i, i \leq n)$ . Alors, s'il existe une suite  $(a_n, b_n)_n$ , avec  $a_n > 0$ ,  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in (N)$ , et une fonction de répartition non dégénérée H telle que la suite  $(b_n^{-1}(M_n - a_n))_n$  converge en loi, lorsque  $n \to \infty$ , vers une v.a. de fonction de répartition H, alors H est de l'un des trois types suivants :

(I) Fréchet : 
$$H(x) = \Phi_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 , x \le -\frac{1}{\xi} \\ \exp(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) , x > -\frac{1}{\xi} \end{cases}$$
 (1.22)

(II) Weibull: 
$$H(x) = \Psi_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) , & x \le -\frac{1}{\xi} \\ 1 , & x > -\frac{1}{\xi} \end{cases}$$
 (1.23)

(III) Gumbel: 
$$H(x) = \exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}$$
 (1.24)

L'ensemble des lois possibles est donc un ensemble paramétrique, appelé ensemble des lois de valeurs extrêmes généralisées, (LVEG), dépendant de trois paramètres :  $\xi$ ,  $\mu$  et  $\sigma > 0$  (appelés respectivement indice des valeurs extrêmes, paramètre de position et paramètre de dispersion), de fonction

de répartition :

$$H(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}) , & si \ \xi \neq 0 \ , & où \ 1+\xi x > 0 \\ \exp(-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}) \ , & si \ \xi = 0 \end{cases}$$
(1.25)

Lorsqu'elle existe, la limite pour la loi du maximum renormalisé est nécessairement dans cette famille.

Étant donné une famille aléatoire i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$  de fonction de répartition G, notant  $M_n = \max(X_i; i = 1, \dots, n)$ , on dit que G est max-stable s'il existe des constantes de normalisation  $\alpha_n > 0$  et  $\beta_n \in \mathbb{R}$  telles que :

$$\mathbb{P}\left(\alpha_n^{-1}(M_n - \beta_n) \le x\right) = G^n(\alpha_n x + \beta_n) = G(x)$$

Cette propriété de max-stabilité est donc caractéristique des lois de valeurs extrêmes, et l'ensemble des lois de valeurs extrêmes coïncide avec l'ensemble des lois max-stables.

#### 1.2.1.2 Domaine d'attraction

Le domaine d'attraction associé à une des lois des valeurs extrêmes (Fréchet, Gumbel, Weibull) est l'ensemble des lois dont le maximum renormalisé converge vers cette loi. Voici quelques exemples : La loi uniforme et la loi Beta sont dans le domaine d'attraction de la loi de Weibull.

Les lois normale, log-normale, de Weibull, Gamma et exponentielle sont dans le domaine d'attraction de la loi de Gumbel.

Les lois de Cauchy, de Student et de Pareto sont dans la domaine d'attraction de la loi de Fréchet.

#### 1.2.1.3 Identification de la classe par la queue

Etant donnée la loi d'une suite de variables aléatoires i.i.d, il faut identifier dans quelle catégorie se situe la valeur extrême associée. Un critère pour bien distinguer la classe des valeurs extrêmes repose sur l'analyse de la queue de distribution. Nous en donnons ici une présentation simplifiée.

Dans la suite, F désignant 1 - F est appelée fonction de survie.

Fonctions à variation lente : Soit L(x) une fonction réelle. On dit que L(x) est une fonction à variation lente si et seulement si  $\forall t > 0$ ,  $\lim_{x \to \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$ .

• Domaine d'attraction de la loi de Fréchet ( $\xi > 0$ ).

C'est l'exemple des lois "à queue lourde", i.e. telles que  $\bar{F}(x) \to 0$  comme une puissance de x lorsque  $x \to \infty$ , ou encore telles que  $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) = \infty$ ,  $\forall \lambda > 0$ .

On peut représenter une telle loi sous la forme  $\overline{F}(x) = x^{-\frac{1}{\xi}}L(x)$  où L est à variation lente.

Exemple : loi de Cauchy, de Student , de Pareto.

• Domaine d'attraction de la loi de Gumbel ( $\xi = 0$ ).

C'est l'ensemble des lois à "queues légères", i.e.  $\bar{F}(x) \to 0$  à vitesse exponentielle lorsque  $x \to \infty$ .

Exemple : loi normale, de Weibull, Gamma, exponentielle.

• Domaine d'attraction de la loi de Weibull ( $\xi < 0$ ).

C'est l'ensemble des lois à "queue finie", i.e.,  $\overline{F}(x) = 0$  pour  $x > x_F$  appelé point terminal.

F appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull si et seulement si  $F(x_F - \frac{1}{x})$  appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet.

Exemple : loi uniforme, loi Bêta.

#### Critère de von Mises

Soit F la fonction de répartition d'une loi de densité f.

1. Si on a  $\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{F(x)} = \alpha > 0$ , alors F appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet de paramètre  $\alpha$ .

2. On suppose la densité f strictement positive sur un intervalle  $(z, x_F)$ , avec  $x_F < \infty$ . Si on a  $\lim_{x\to x_F^-} \frac{(x_F-x)f(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0$ , alors F appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull de paramètre  $\alpha$ .

#### 1.2.1.4 Etude des excès

#### Fonction de survie d'un excès

L'excès de la variable X au dessus du seuil u (queue conditionnelle) est donnée pour y > 0 par :

$$\bar{F}_{u}(y) = \mathbb{P}(X - u > y | X > u) = \frac{\mathbb{P}(X > u + y, X > u)}{\mathbb{P}(X > u)} = \frac{F(u + y)}{\bar{F}(u)}$$
(1.26)

Lorsque le seuil est grand, on peut approcher cette quantité par la fonction de survie d'une loi de Pareto généralisée (LPG) donnée par :

$$\bar{G}_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} \left(1 + \xi\frac{y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} , & si \ \xi \neq 0\\ exp(-\frac{y}{\sigma}) , & si \ \xi = 0 \end{cases}$$
(1.27)

où $\xi$  est un paramètre de forme et  $\sigma > 0$  un paramètre d'échelle.

Observons que pour  $\xi = -1$ , on obtient la loi uniforme sur  $[0, \sigma]$ .

### Théorème de Pickands

Soit une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F. Alors F appartient au domaine d'attraction de la LVEG  $H_{\xi}$  si et seulement si il existe une fonction mesurable positive  $\sigma(u)$  telle que :

$$\lim_{u \to x_F} \sup_{y \in [0, x_F - u]} |\bar{F}_u(y) - \bar{G}_{\xi, \sigma(u)}(y)| = 0$$
(1.28)

Autrement dit, il y a équivalence entre la convergence en loi du maximum vers une LVEG et la convergence en loi d'un excès vers une LPG.

On notera que le paramètre  $\xi$  est le même pour la loi des valeurs extrêmes généralisée et la loi de Pareto généralisée.

**Remarque :** L'utilisation pratique de ces résultats nécessite de disposer d'estimateurs pour les paramètres des lois LVEG et LPG. Le lecteur intéressé pourra en trouver dans les références [12], [16] et [34].

#### 1.2.2 TVE pour suites stationnaires de variables aléatoires

Les résultats concernant le cas des suites stationnaires sont établis sous des hypothèses qui expriment toutes une forme de dépendance faible asymptotique des termes suffisamment éloignés de la suite. Ces hypothèses, très techniques, sont invérifiables dans la pratique. Elles sont connues dans la littérature sous le nom d'hypothèses D, D', D'',  $\Delta$ ,  $\Delta'$ . On pourra consulter les références : [17], [22]. En fait, on peut partir de la remarque suivante : le maximum d'une famille de variables aléatoires est invariant par permutation des termes de la famille. Donc s'il y a une indépendance à longue distance, les résultats seront les mêmes que pour les suites i.i.d.. Lorsque la dépendance est un peu plus forte, les dépassements de niveaux élevés apparaissent en groupes nommés clusters. Plus il y a de dépendance, plus ces clusters sont longs. Un paramètre utilisé pour quantifier ce phénomène est l'indice extrémal de la suite, généralement noté  $\theta$ .

#### 1.2.2.1 L'indice extrémal

Soit  $(X_n)_n$  une suite strictement stationnaire de variables aléatoires réelles. Nous considérons les notations suivantes :

$$\begin{split} M_n &= \max \left\{ X_1, X_2, \dots, X_n \right\} \\ (\hat{X}_i)_i &= \text{suite i.i.d. de même loi marginale que } X_i \text{ (appelée suite i.i.d. associée)} \\ \hat{M}_n &= \max \left\{ \hat{X}_i, i \leq n \right\} \\ F &= \text{fonction de répartition marginale} \\ F_n &= \text{fonction de répartition de } M_n \end{split}$$

Sous quelques hypothèses que l'on trouvera dans la littérature, l'indice extrémal  $\theta$  (qui n'existe pas toujours) est l'inverse de la longueur moyenne asymptotique en niveau des clusters. Il est compris entre 0 et 1. Il vaut 1 dans le cas i.i.d.. On a alors le résultat suivant : lorsque le paramètre extremal  $\theta$  existe, alors la suite des maxima est dans le domaine d'attraction maximal (DAM) de  $H_{\theta}$  si la suite i.i.d. associée est dans le DAM de H, où H est une fonction de répartition de valeurs extrêmes.

Comme  $H_{\theta}$  est une loi max-stable comme H, l'utilisation d'une loi de valeurs extrêmes comme modèle pour une suite stationnaire sera justifiée dans une situation plus générale que le cas i.i.d.. Dans un contexte de fiabilité, on observera qu'utiliser la suite i.i.d. associée joue dans le sens de la sécurité, puisque  $H_{\theta} \ge H$ . Tout le problème sera alors d'identifier les paramètres de la loi et on dispose pour cela de méthodes éprouvées ([12], [16], [34]).

## Chapitre 2

## Les processus tests

Ce chapitre décrit les processus de la base de données évoquée à la fin du paragraphe 1.1 du chapitre précédent. Rappelons : (1) que cette base de données est un sous-ensemble représentatif de l'ensemble des processus impliqués dans l'étude ayant conduit à l'élaboration de la méthode proposée (étude réalisée dans le cadre du projet ANR MODNAT [http ://sites.onera.fr/modnat]), (2) que cette étude était à l'origine destinée à comprendre comment se comportait la fonction  $u \to P_T(u)$  pour chaque processus de cet ensemble, (3) que cette analyse a été menée à travers celle des graphes des applications  $u \to \eta_T(u) = -\text{Ln} \left[-\text{Ln}(1 - P_T(u))\right] : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$  et  $y \to \delta_T^{u_{\min}}(y) = -\text{Ln} \left[P_T(y; u_{\min})\right] : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$  (avec  $u_{\min}$  tel que  $P_T(u_{\min}) \approx 10^{-2}$  et  $P_T(y; u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y + u_{\min}|M_T > u_{\min}) = P_T(y + u_{\min})/P_T(u_{\min})$ ) et (4) que c'est de l'examen de ces graphes qu'est née l'idée de la méthode.

D'où l'importance de ce chapitre (et sa localisation dans le texte) pour bien comprendre le raisonnement sur lequel nous nous fonderons dans le chapitre 3 pour élaborer les trois versions de la méthode proposée.

Les processus tests présentés se répartissent en quatre grandes classes : les gaussiens stationnaires, les gaussiens non stationnaires, les non gaussiens stationnaires et les non gaussiens non stationnaires. Ce large panel contient une grande partie des processus tests figurant dans le rapport  $T_0+18$  du projet MODNAT [http://sites.onera.fr/modnat], à laquelle ont été ajoutés les valeurs absolues de ces processus ainsi que quatre processus (un par classe) pour lesquels l'expression exacte de la probabilité cible  $P_T(u)$  peut être calculée pour tout u. Pour ces quatre processus, nous avons conservé leurs notations originelles  $\eta_T$ ,  $\delta_T^{u_{\min}}$  aux deux applications précédentes, avec :

$$\eta_T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : u \to \eta_T(u) = -\mathrm{Ln}\left[-\mathrm{Ln}(1 - P_T(u))\right]$$
(2.1)

$$\delta_T^{u_{\min}} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : y \to \delta_T^{u_{\min}}(y) = -\operatorname{Ln}\left[P_T(y; u_{\min})\right] = -\operatorname{Ln}\left[\frac{P_T(y + u_{\min})}{P_T(u_{\min})}\right]$$
(2.2)

Pour tous les autres processus (pour lesquels il n'est donc pas possible de calculer l'expression exacte de  $P_T(u)$  et qui requièrent de ce fait l'emploi d'une procédure de Monte-Carlo pour l'évaluation de cette probabilité pour chaque valeur fixée de u), nous avons noté  $\tilde{\eta}_T$ ,  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  ces deux applications, avec :

$$\tilde{\eta}_T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : u \to \tilde{\eta}_T(u) = -\mathrm{Ln}\left[-\mathrm{Ln}(1 - \tilde{P}_T(u))\right]$$
(2.3)

$$\tilde{\delta}_T^{u_{\min}} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : y \to \tilde{\delta}_T^{u_{\min}}(y) = -\mathrm{Ln}\left[\tilde{P}_T(y; u_{\min})\right] = -\mathrm{Ln}\left[\frac{P_T(y + u_{\min})}{\tilde{P}_T(u_{\min})}\right]$$
(2.4)

où  $\tilde{P}_T(u)$ ,  $\tilde{P}_T(y+u_{\min})$ ,  $\tilde{P}_T(u_{\min})$  et  $\tilde{P}_T(y; u_{\min})$  sont des estimées Monte-Carlo de  $P_T(u)$ ,  $P_T(y+u_{\min})$ ,  $P_T(u_{\min})$  et  $P_T(y; u_{\min})$ , respectivement.

Dans cette présentation, la description mathématique de chaque processus est accompagnée des graphes des applications qui s'y rattachent (soit  $\eta_T$  et  $\delta_T^{u_{\min}}$ , soit  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$ ), tous les processus sont du second ordre, scalaires (*i.e.* à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) et supposés définis sur le même espace de probabilité  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et, afin de ne pas multiplier les notations, ils sont tous notés  $\nu$ , avec  $\nu = (\nu(t), t \in \mathbb{R})$  dans le cas stationnaire et  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \overline{T} = [0, T], 0 < T < +\infty$ , dans le cas non stationnaire. De plus, le symbôle  $\doteqdot$ , qui apparaît souvent dans leur définition, désigne le changement de notation (*i.e.* le symbôle de substitution). Ainsi, l'écriture  $\nu(t) \rightleftharpoons X(t), \forall t \in \overline{T}$ , signifie que,  $\forall t \in \overline{T}$ , la v.a. X(t) sera désormais notée  $\nu(t)$  et donc que le processus  $X = (X(t), t \in \overline{T})$  sera désormais noté  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T})$ . Enfin, 23 processus tests sont présentés ici, répartis comme suit : 2 processus gaussiens stationnaires, 2 processus gaussiens non stationnaires, 5 processus non gaussiens stationnaires et 14 processus non gaussiens non stationnaires, avec, dans chaque classe, un processus permettant de calculer les expressions exactes des applications  $u \to P_T(u), u \to \eta_T(u)$  et  $y \to \delta_T^{u_{\min}}(y)$ .

### 2.1 Processus gaussiens stationnaires

Deux processus de ce type sont considérés ici, référencés P1 et P2.

#### 2.1.1 Processus gaussien stationnaire P1

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \mathbb{R})$  ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

(P1) 
$$\nu(t) = G_1 cos(\omega t) + G_2 sin(\omega t)$$
 (2.5)

où  $\omega$  est un réel > 0 et  $(G_1, G_2)$  un couple de v.a. gaussiennes standards scalaires indépendantes.

Un tel processus est gaussien, stationnaire, centré et sa fonction de covariance  $C_{\nu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \tau \to C_{\nu}(\tau) = \mathbb{E} \left[ C_{\nu}(t) C_{\nu}(t+\tau) \right]$  s'écrit,  $\forall \tau \in \mathbb{R}$ :

$$C_{\nu}(\tau) = \cos(\omega\tau) \tag{2.6}$$

On montre, en outre, que, pour tout  $T \ge \frac{2\pi}{\omega}$ , la v.a.  $M_T = \sup_{t \in \overline{T}} \nu(t), \overline{T} = [0, T]$ , suit une loi de Rayleigh indépendante de  $\omega$  et T, de fonction de répartition :

$$F_{M_T}(u) = \mathbb{P}(M_T \le u) = (1 - e^{-\frac{u^2}{2}}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \ , \ \forall u \in \mathbb{R}$$
(2.7)

Par suite, la probabilité  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$  s'écrit,  $\forall u \ge 0$ :

$$P_T(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{2.8}$$

On connait ainsi pour ce processus les expressions exactes des applications  $\eta_T$  et  $\delta_T^{u_{\min}}$  définies par (2.1) et (2.2) :

$$\eta_T(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1-e^{-\frac{u^2}{2}})\right] , \quad \forall u \ge 0$$
 (2.9)

$$\delta_T^{u_{\min}}(y) = \frac{(y + u_{\min})^2 - (u_{\min})^2}{2} = \frac{y(y + 2u_{\min})}{2} , \quad \forall y \ge 0$$
(2.10)

Les graphes de ces deux applications sont représentés sur les figures P1-1 et P1-2 pour  $\omega = 1$ ,  $u_{\min} = 3.0349$ ,  $T = 2\pi$ , valeurs qui seront également utilisées dans les applications numériques du chapitre 4.





**FIGURE P1-1-** Graphe de l'application  $\eta_T$  pour  $\omega = 1, T = 2\pi$ .

**FIGURE P1-2-** Graphe de l'application  $\delta_T^{u_{min}}$  pour  $\omega = 1, u_{\min} = 3.0349, T = 2\pi.$ 

#### 2.1.2 Processus gaussien stationnaire P2

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \mathbb{R})$  ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$(P2) \quad \nu(t) \doteqdot X(t) \tag{2.11}$$

où  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  est un processus gaussien, stationnaire, centré, de densité spectrale  $S_X : \omega \to \mathbb{R}_+ : \omega \to S_X(\omega)$ , fonction de covariance  $C_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \tau \to C_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t+\tau)X(t)]$  et variance  $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2(t)]$  données par :

$$S_X(\omega) = \frac{B_g + A_g \omega^2}{\delta_g^2 \left[ (\omega^2 - \omega_g^2)^2 + (2\omega_g \xi_g)^2 \omega^2 \right]} \quad , \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$(2.12)$$

$$C_X(\tau) = \left[\cos(\Omega_g \tau) + \beta_g \sin(\Omega_g |\tau|)\right] e^{-\omega_g \xi_g |\tau|} , \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$
(2.13)

$$\sigma_X^2 = C_X(0) = 1 \tag{2.14}$$

avec :

$$\delta_g^2 = \frac{\pi (B_g + A_g \omega_g^2)}{2\omega_g \xi_g^3} \quad , \quad \beta_g = \frac{\xi_g}{\sqrt{1 - \xi_g^2}} \left[ \frac{B_g - A_g \omega_g^2}{B_g + A_g \omega_g^2} \right] \quad , \quad \Omega_g = \omega_g \sqrt{1 - \xi_g^2} \tag{2.15}$$

$$A_g = (2\omega_g \xi_g^2)^2 , \quad B_g = \omega_g^4$$
 (2.16)

où  $\omega_g$  et  $\xi_g$  sont des réels strictement positifs fixés aux valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre 4.

$$\omega_g = 15.70$$
 ,  $\xi_g = 0.60$  (2.17)

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P2-1 et P2-2, pour  $u_{\min} = 4.87$ , T = 100 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^9$ .



**FIGURE P2-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 100 et  $L = 10^9$ .



**FIGURE P2-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 4.87, T = 100$  et  $L = 10^9$ .

### 2.2 Processus gaussiens non stationnaires

Deux processus de ce type sont considérés ici, référencés P3 et P4.

### 2.2.1 Processus gaussien non stationnaire P3

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \bar{T}), \bar{T} = [0, T], 0 < T < +\infty$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \bar{T}$ :

$$(P3) \quad \nu(t) \doteq W(t) \tag{2.18}$$

où  $W = (W(t), t \in \mathbb{R}_+)$  est le processus de Wiener standard scalaire.

Un tel processus est gaussien, non stationnaire, centré, indexé sur  $\overline{T}$  et sa fonction de covariance  $C_{\nu}: \overline{T} \times \overline{T} \to \mathbb{R}: (t, t') \to C_{\nu}(t, t') = \mathbb{E} \left[\nu(t)\nu(t')\right]$  s'écrit,  $\forall (t, t') \in \overline{T} \times \overline{T}:$ 

$$C_{\nu}(t,t') = t \wedge t' \tag{2.19}$$

On montre, en outre, que la v.a.  $M_T = \sup_{t \in \overline{T}} \nu(t)$  a pour fonction de répartition :

$$F_{M_T}(u) = \mathbb{P}(M_T \le u) = \mathbb{P}(|\nu(T)| \le u) = \left(2\Phi(\frac{u}{\sqrt{T}}) - 1\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \quad , \quad \forall u \in \mathbb{R}$$
(2.20)

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi gaussienne standard scalaire.

Par suite, la probabilité  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$  s'écrit,  $\forall u \ge 0$ :

$$P_T(u) = 2\left(1 - \Phi(\frac{u}{\sqrt{T}})\right) \tag{2.21}$$

On connait ainsi pour ce processus les expressions exactes des applications  $\eta_T$  et  $\delta_T^{u_{\min}}$  définies par (2.1) et (2.2):

$$\eta_T(u) = -\operatorname{Ln}\left[-\operatorname{Ln}\left(2\Phi(\frac{u}{\sqrt{T}}) - 1\right)\right] \quad , \quad \forall u \ge 0$$
(2.22)

$$\delta_T^{u_{\min}}(y) = -\operatorname{Ln}\left[\frac{1 - \Phi(\frac{y + u_{\min}}{\sqrt{T}})}{1 - \Phi(\frac{u_{\min}}{\sqrt{T}})}\right] \quad , \quad \forall y \ge 0$$
(2.23)

Les graphes de ces deux applications sont représentés sur les figures P3-1 et P3-2 pour  $u_{\min} = 5.76$  et T = 5, valeurs qui seront également utilisées dans les applications numériques du chapitre 4.



**FIGURE P3-1-** Graphe de l'application  $\eta_T$  pour T = 5.

**FIGURE P3-2-** Graphe de l'application  $\delta_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 5.76$  et T = 5.

#### 2.2.2 Processus gaussien non stationnaire P4

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \bar{T}), \, \bar{T} = [0, T], \, 0 < T < +\infty$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \bar{T}$ :

$$(P4) \quad \nu(t) \doteqdot Y(t) \tag{2.24}$$

où  $Y = (Y(t), t \in \overline{T})$  est le processus gaussien, non stationnaire, centré, tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$Y(t) = f(t)X(t) \tag{2.25}$$

avec  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  le processus gaussien, stationnaire, centré, défini au paragraphe 2.1.2 (*i.e.* le processus référencé P2) et f la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que,  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$f(t) = \alpha t (T - t) e^{-\beta t} \mathbb{1}_{\bar{T}}(t)$$
(2.26)

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles strictement positives.

Le processus Y dépend ainsi de cinq paramètres :  $\omega_g$ ,  $\xi_g$  (paramètres de X),  $\alpha$ ,  $\beta$  (paramètres de f) et T (longueur du support  $\overline{T}$  de f), auxquels ont été assignées les valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre 4.

$$\begin{cases} \omega_g = 15.7 , \xi_g = 0.60 \\ \alpha = 4.5 \times 10^{-5} , \beta = \frac{1}{6} , T = 50 \end{cases}$$
(2.27)

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P4-1 et P4-2, pour  $u_{\min} = 0.0181$ , T = 50 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^9$ .





**FIGURE P4-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 50 et  $L = 10^9$ .

FIGURE P4-2- Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0181, T = 50$  et  $L = 10^9$ .

### 2.3 Processus non gaussiens stationnaires

Cinq processus de ce type sont considérés ici, référencés P5 à P9.

#### 2.3.1 Processus non gaussien stationnaire P5

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \mathbb{R})$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$(P5) \quad \nu(t) = A\cos(\omega t - 2\pi U) \tag{2.28}$$

où  $\omega$  est un réel >0 et (U, A) un couple de v.a. scalaires indépendantes, avec U uniforme sur [0, 1] et A distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , donc de fonction de répartition :

$$F_A(a) = (1 - e^{-\lambda a}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(a) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(2.29)$$

Un tel processus est non gaussien, stationnaire au sens large, centré et sa fonction de covariance  $C_{\nu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \tau \to C_{\nu}(\tau) = \mathbb{E} \left[ \nu(t)\nu(t+\tau) \right]$  s'écrit,  $\forall \tau \in \mathbb{R} :$ 

$$C_{\nu}(\tau) = \frac{1}{\lambda^2} \cos(\omega\tau) \tag{2.30}$$

On montre, en outre, que, pour tout  $T \geq \frac{2\pi}{\omega}$ , la v.a.  $M_T = \sup_{t \in \bar{T}} \nu(t)$ ,  $\bar{T} = [0, T]$ , a même loi que A, donc a pour fonction de répartition (indépendante de  $\omega$  et T) :

$$F_{M_T}(u) = (1 - e^{-\lambda u}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \quad , \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$(2.31)$$

Par suite, la probabilité  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$  s'écrit,  $\forall u \ge 0$ :

$$P_T(u) = e^{-\lambda u} \tag{2.32}$$

On connait ainsi pour ce processus les expressions exactes des applications  $\eta_T$  et  $\delta_T^{u_{\min}}$  définies par (2.1) et (2.2):

$$\eta_T(u) = -\operatorname{Ln}\left[-\operatorname{Ln}(1 - e^{-\lambda u})\right] \quad , \quad \forall u \ge 0 \tag{2.33}$$

$$\delta_T^{u_{\min}}(y) = \lambda y \quad , \quad \forall y \ge 0 \tag{2.34}$$

Les graphes de ces deux applications sont représentés sur les figures P5-1 et P5-2, pour  $u_{\min} = 3.0701$ ,  $\lambda = 1.5$ ,  $\omega = 1$  et T = 2, valeurs qui seront également utilisées dans les applications numériques du chapitre 4.



**FIGURE P5-1-** Graphe de l'application  $\eta_T$  pour  $\lambda = 1.5$ ,  $\omega = 1$  et T = 2.



**FIGURE P5-2-** Graphe de l'application  $\delta_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 3.0701, \lambda = 1.5, \omega = 1$  et T = 2.

#### 2.3.2 Processus non gaussien stationnaire P6

C'est le processus  $\nu = (\nu(t), t \in \mathbb{R})$  tel que,  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$(P6) \quad \nu(t) \doteqdot |X(t)| \tag{2.35}$$

où  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  est le processus gaussien, stationnaire, centré du paragraphe 2.1.2 (processus référencé P2).

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P6-1 et P6-2, pour  $u_{\min} = 5.01$ , T = 100 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .



**FIGURE P6-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 100 et  $L = 10^8$ .



**FIGURE P6-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 5.01, T = 100$  et  $L = 10^8$ .

#### 2.3.3 Processus non gaussien stationnaire P7

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \mathbb{R})$  ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$(P7) \quad \nu(t) \doteqdot Z(t) \tag{2.36}$$

où  $Z = (Z(t), t \in \mathbb{R})$  est un processus lognormal stationnaire défini,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , par :

$$Z(t) = \alpha e^{\beta X(t)} \tag{2.37}$$

où  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  est un processus gaussien, stationnaire, centré, de densité spectrale  $S_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : \omega \to S_X(\omega)$ , fonction de covariance  $C_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \tau \to C_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t+\tau)X(t)]$  et variance  $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2(t)] = \mathbb{E}[X^2(0)]$  données par :

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \left[ \frac{1}{4(\omega - \lambda)^2 + \sigma^4} + \frac{1}{4(\omega + \lambda)^2 + \sigma^4} \right] \quad , \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$
(2.38)

$$C_X(\tau) = \cos(\lambda\tau)e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\tau|} , \ \forall \tau \in \mathbb{R}$$
(2.39)

$$\sigma_X^2 = C_X(0) = 1 \tag{2.40}$$

et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$  sont des constantes réelles strictement positives.

Les moyenne  $m_Z = \mathbb{E}[Z(t)]$ , variance  $\sigma_Z^2 = \mathbb{E}[(Z(t) - m_Z)^2]$  et fonction de covariance  $C_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \tau \to C_Z(\tau) = \mathbb{E}[(Z(t+\tau) - m_Z)(Z(t) - m_Z)]$  du processus Z sont données par :

$$m_Z = \alpha e^{\frac{\beta^2}{2}} \tag{2.41}$$

$$\sigma_Z^2 = \alpha^2 e^{\beta^2} (e^{\beta^2} - 1) \tag{2.42}$$

$$C_Z(\tau) = \alpha^2 e^{\beta^2} (e^{\beta^2 C_X(\tau)} - 1) \quad , \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$
(2.43)

où  $C_X$  est la fonction de covariance de X, donnée par (2.39).

Un tel processus dépend ainsi de quatre paramètres :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , et  $\sigma$ , auxquels ont été assignées les valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre 4 :

$$\alpha = 0.01 \ , \ \beta = 0.2 \ , \ \lambda = 3.0 \ , \ \sigma = 0.5$$
 (2.44)

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P7-1 et P7-2, pour  $u_{\min} = 0.0276$ , T = 8000 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .



(*h*) multiple 0 0 0.001 0.002 0.003 0.004 0.005 0.006 0.007 0.008 0.009 0.01 *y* 

**FIGURE P7-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 8000 et  $L = 10^8$ .

FIGURE P7-2- Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0276, T = 8000$  et  $L = 10^8$ .

#### 2.3.4 Processus non gaussien stationnaire P8

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \mathbb{R})$  ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$(P8) \quad \nu(t) \doteqdot Z(t) \tag{2.45}$$

où  $Z = (Z(t), t \in \mathbb{R})$  est le processus non gaussien, stationnaire au sens large, centré, solution stationnaire de l'équation différentielle aléatoire non linéaire du second ordre (équation de Duffing stochastique) :

$$\ddot{Z}(t) + 2\omega_D \xi_D \dot{Z}(t) + \omega_D^2 Z(t) + \mu Z^3(t) = \gamma_D B(t) , \ t \in \mathbb{R}$$
(2.46)

10

8

avec  $\omega_D$ ,  $\xi_D$  et  $\mu$  des constantes réelles strictement positives ( $0 < \xi_D < 1$ ),  $\gamma_D$  une constante réelle non nulle et  $B = (B(t), t \in \mathbb{R})$  un bruit blanc gaussien standard scalaire.

La loi invariante de cette équation (*i.e.* la loi du couple  $(Z(t), \dot{Z}(t))$  pour tout t dans  $\mathbb{R}$ , où  $(Z, \dot{Z})$ est la diffusion stationnaire solution de (2.46)) admet une densité  $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ : (q_1, q_2) \to \rho(q_1, q_2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$ , qui s'écrit,  $\forall (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\rho(q_1, q_2) = \rho_Z(q_1)\rho_{\dot{Z}}(q_2) \tag{2.47}$$

où  $\rho_Z$  et  $\rho_{\dot{Z}}$  sont les densités des loi marginales d'ordre un des composantes Z et  $\dot{Z}$  de la diffusion stationnaire solution  $(Z, \dot{Z})$ , densités ayant pour expressions :

$$\rho_Z(q_1) = K \exp\left(-\frac{\omega_D^2 q_1^2 + \frac{\mu}{2} q_1^4}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad \forall q_1 \in \mathbb{R}$$

$$(2.48)$$

$$\rho_{\dot{Z}}(q_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{q_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad \forall q_2 \in \mathbb{R}$$
(2.49)

avec :

$$\sigma = \frac{\gamma_D}{2\sqrt{\omega_D\xi_D}} \quad , \quad K = \frac{1}{\sqrt{\pi} \left(\frac{2\sigma^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}} \mathcal{U}\left(0, \frac{\omega_D^2}{\sigma\sqrt{2\mu}}\right) \exp\left(\frac{\omega_D^4}{8\mu\sigma^2}\right)} \tag{2.50}$$

où  $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$  est la fonction spéciale "cylindrique parabolique" à arguments réels, définie, pour  $a > -\frac{1}{2}$  et x > 0, par :

$$\mathcal{U}(a,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+a)} \int_0^{+\infty} t^{a-\frac{1}{2}} e^{-xt - \frac{t^2}{2}} dt$$
(2.51)

avec  $\Gamma$  la fonction spéciale telle que,  $\forall z \in \{u \in \mathbb{C} : \mathcal{R}é(u) > 0\}$ :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$
(2.52)

qui admet un prolongement analytique méromorphe sur  $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ , appelé "fonction gamma".

De (2.48) et (2.49) on déduit aisément que la solution stationnaire Z de (2.46) et sa dérivée (en moyenne quadratique)  $\dot{Z}$  sont centrées et que leurs variances respectives  $\sigma_Z^2$  et  $\sigma_{\dot{Z}}^2$  sont données par :

$$\sigma_Z^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\mu}} \frac{\mathcal{U}\left(1, \frac{\omega_D^2}{\sigma\sqrt{2\mu}}\right)}{\mathcal{U}\left(0, \frac{\omega_D^2}{\sigma\sqrt{2\mu}}\right)}$$
(2.53)

$$\sigma_{\dot{Z}}^2 = \sigma^2 \tag{2.54}$$

avec  $\sigma$  donné par (2.50). De plus, (2.47) montre que, pour tout t dans  $\mathbb{R}$ , les v.a. Z(t) et  $\dot{Z}(t)$  sont indépendantes et que  $\dot{Z}(t)$  est gaussienne, centrée et de variance  $\sigma^2$ .

Le processus Z dépend ainsi de quatre paramètres :  $\omega_D$ ,  $\xi_D$ ,  $\mu$  et  $\gamma_D$ , auxquels ont été assignées les valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre 4 :

$$\omega_D = 200\pi$$
 ,  $\xi_D = 0.025$  ,  $\mu = 14 \times 10^9$  ,  $\gamma_D = 12$  (2.55)

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P8-1 et P8-2, pour  $u_{\min} = 0.0085$ , T = 5 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^9$ .



FIGURE P8-1- Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 5 et  $L = 10^9$ .



**FIGURE P8-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0085, T = 5$  et  $L = 10^9$ .

#### 2.3.5 Processus non gaussien stationnaire P9

C'est le processus  $\nu = (\nu(t), t \in \mathbb{R})$  tel que,  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$(P9) \quad \nu(t) \doteqdot |Z(t)| \tag{2.56}$$

où  $Z = (Z(t), t \in \mathbb{R})$  est le processus non gaussien, stationnaire au sens large, centré du paragraphe 2.3.4 précédent.

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P9-1 et P9-2, pour  $u_{\min} = 0.0086$ , T = 5 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .





**FIGURE P9-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 5 et  $L = 10^8$ .

**FIGURE P9-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0086, T = 5$  et  $L = 10^8$ .

### 2.4 Processus non gaussiens non stationnaires

Quatorze processus de ce type sont considérés ici, référencés P10 à P23.

#### 2.4.1 Processus non gaussien non stationnaire P10

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \overline{T} = [0, T], 0 < T < +\infty$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

(P10) 
$$\nu(t) = Kt^2 e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}$$
 (2.57)

où  $\sigma$  est un réel strictement positif borné par T ( $0 < \sigma \leq T$ ) et K une v.a. scalaire définie sur ( $\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}$ ) et distribuée suivant une loi du Khi-2 à 4 degrés de liberté, de fonction de répartition :

$$F_K(v) = \left[1 - (1 - \frac{v}{2})e^{-\frac{v}{2}}\right] \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(v) \ , \ \forall v \in \mathbb{R}$$
(2.58)

Un tel processus n'est ni gaussien, ni stationnaire et ses moyenne  $m_{\nu} : \bar{T} \to \mathbb{R}_+ : t \to m_{\nu}(t) = \mathbb{E} \left[\nu(t)\right]$  et fonction de covariance  $C_{\nu} : \bar{T} \times \bar{T} \to \mathbb{R}_+ : (t, t') \to C_{\nu}(t, t') = \mathbb{E} \left[(\nu(t) - m_{\nu}(t))(\nu(t') - m_{\nu}(t'))\right]$ s'écrivent,  $\forall (t, t') \in \bar{T} \times \bar{T}$ :

$$m_{\nu}(t) = 4t^2 e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} \tag{2.59}$$

$$C_{\nu}(t,t') = 8(tt')^2 e^{-\frac{t^2 + t'^2}{\sigma^2}}$$
(2.60)

On montre, en outre, que la v.a.  $M_T = \sup_{t \in \bar{T}} \nu(t)$  a même loi que la v.a.  $\sigma^2 e^{-1} K$ , donc a pour fonction de répartition :

$$F_{M_T}(u) = \left[1 - (1 + \frac{e}{2\sigma^2}u)e^{-\frac{e}{2\sigma^2}u}\right] \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \ , \ \forall u \in \mathbb{R}$$
(2.61)

où  $e = \exp(1)$ .

Par suite, la probabilité  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$  s'écrit,  $\forall u \ge 0$ :

$$P_T(u) = (1 + \frac{e}{2\sigma^2}u)e^{-\frac{e}{2\sigma^2}u}$$
(2.62)

On connait ainsi pour ce processus les expressions exactes des applications  $\eta_T$  et  $\delta_T^{u_{\min}}$  définies par (2.1) et (2.2):

$$\eta_T(u) = -\operatorname{Ln}\left[-\operatorname{Ln}\left(1 - \left(1 + \frac{e}{2\sigma^2}u\right)e^{-\frac{e}{2\sigma^2}u}\right)\right] \quad , \quad \forall u \ge 0$$
(2.63)

$$\delta_T^{u_{\min}}(y) = \frac{e}{2\sigma^2}y - \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{e}{2\sigma^2 + eu_{\min}}y\right) \quad , \quad \forall y \ge 0$$
(2.64)

Les graphes de ces deux applications sont représentés sur les figures P10-1 et P10-2 pour  $u_{\min} = 6.6442$ ,  $\sigma = \sqrt{\frac{e}{2}}$ ,  $T = 2\pi$ , valeurs qui seront également utilisées dans les applications numériques du chapitre 4.



FIGURE P10-1- Graphe de l'application  $\eta_T$  pour $\sigma = \sqrt{\frac{e}{2}}, T = 2\pi$ .



**FIGURE P10-2-** Graphe de l'application  $\delta_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 6.6442, \ \sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \ T = 2\pi.$ 

#### 2.4.2 Processus non gaussien non stationnaire P11

C'est le processus  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \ \overline{T} = [0,T], \ 0 < T < +\infty$ , tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P11) \quad \nu(t) \doteq |Y(t)| \tag{2.65}$$

où  $Y = (Y(t), t \in \overline{T})$  est le processus gaussien, non stationnaire, centré du paragraphe 2.2.2 (processus référencé P4).

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P11-1 et P11-2, pour  $u_{\min} = 0.0231$ , T = 50 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .





**FIGURE P11-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 50 et  $L = 10^8$ .

**FIGURE P11-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0231, T = 50$  et  $L = 10^8$ .

#### 2.4.3 Processus non gaussien non stationnaire P12

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \ \overline{T} = [0, T], \ 0 < T < +\infty$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P12) \quad \nu(t) \doteq U(t) \tag{2.66}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré, solution de l'équation différentielle aléatoire non linéaire du second ordre :

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + 2\omega_D \xi_D \dot{U}(t) + \omega_D^2 U(t) + \mu U^3(t) = g(t)X(t) , \ t \in ]0,T] \\ U(0) = 0 \ p.s. , \ \dot{U}(0) = 0 \ p.s. \end{cases}$$
(2.67)

où  $\omega_D$ ,  $\xi_D$  et  $\mu$  sont des constants réelles strictement positives  $(0 < \xi_D < 1)$ ,  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  est le processus gaussien, stationnaire, centré, défini au paragraphe 2.1.2 (*i.e.* le processus référencé P2) et g est une application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ , telle que,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ :

$$g(t) = \eta_1 t^2 e^{-\eta_2 t} \tag{2.68}$$

avec  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  des constantes réelles strictement positives.

Le processus U dépend ainsi de huit paramètres :  $\omega_D$ ,  $\xi_D$ ,  $\mu$  (paramètres propres de (2.67)),  $\omega_g$ ,  $\xi_g$  (paramètres de X),  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ (paramètres de g) et T(temps total d'observation de la dynamique décrite par (2.67)) auxquels ont été affectées les valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre 4:

$$\begin{cases}
\omega_g = 15.70 , \xi_g = 0.60 \\
\eta_1 = 1.00 , \eta_2 = 0.10 \\
\omega_D = 200\pi , \xi_D = 0.025 , \mu = 14 \times 10^9 , T = 5
\end{cases}$$
(2.69)

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P12-1 et P12-2, pour  $u_{\min} = 0.0230$ , T = 5 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .





**FIGURE P12-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 5 et  $L = 10^8$ .

FIGURE P12-2- Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0230, T = 5$  et  $L = 10^8$ .

#### 2.4.4 Processus non gaussien non stationnaire P13

C'est le processus  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \overline{T} = [0, T], 0 < T < +\infty$ , tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P13) \quad \nu(t) \doteq |U(t)| \tag{2.70}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré du paragraphe 2.4.3 précédent.

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P13-1 et P13-2, pour  $u_{\min} = 0.0234$ , T = 5 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .



**FIGURE P13-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 5 et  $L = 10^8$ .



**FIGURE P13-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0234, T = 5$  et  $L = 10^8$ .

#### 2.4.5 Processus non gaussien non stationnaire P14

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \ \overline{T} = [0, T], \ 0 < T < +\infty$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P14) \quad \nu(t) \doteq U(t) \tag{2.71}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré, solution de l'équation différentielle aléatoire non linéaire du second ordre :

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + 2\omega_0\xi_0\dot{U}(t) + \omega_0^2U(t) + H(U(t)) = f(t)Z(t) , \ t \in ]0,T] \\ U(0) = 0 \ p.s. , \ \dot{U}(0) = 0 \ p.s. \end{cases}$$
(2.72)

avec  $\omega_0$  et  $\xi_0$  des constantes réelles strictement positives ( $0 < \xi_0 < 1$ ), f et H des applications de  $\mathbb{R}$ dans  $\mathbb{R}_+$  pour la première et  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  pour la seconde, telles que,  $\forall t, u \in \mathbb{R}$ :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0\\ \alpha(\frac{t}{t_1})^2 & \text{si } 0 \leq t \leq t_1\\ \alpha & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \ , \ H(u) = \begin{cases} \omega_1^2(u+e) & \text{si } u < -e\\ 0 & \text{si } |u| \leq e\\ \omega_1^2(u-e) & \text{si } u > e \end{cases}$$
(2.73)

et  $Z = (Z(t), t \in \mathbb{R})$  un processus du second ordre, non gaussien, stationnaire au sens large, centré, admettant la représentation :

$$Z(t) = \epsilon sin(\lambda t + \rho W(t) + 2\pi\Theta) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(2.74)$$

et dont la densité spectrale  $S_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : \omega \to S_Z(\omega)$ , la fonction de covariance  $C_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \tau \to C_Z(\tau) = \mathbb{E}\left[Z(t+\tau)Z(t)\right]$  et la variance  $\sigma_Z^2 = \mathbb{E}\left[Z^2(t)\right]$  s'écrivent :

$$S_Z(\omega) = \frac{\epsilon^2 \rho^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{4(\omega - \lambda)^2 + \rho^4} + \frac{1}{4(\omega + \lambda)^2 + \rho^4} \right] \quad , \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$
(2.75)

$$C_Z(\tau) = \frac{\epsilon^2}{2} \cos(\lambda \tau) e^{-\frac{\rho^2}{2}|\tau|} , \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$
(2.76)

$$\sigma_Z^2 = C_Z(0) = \frac{\epsilon^2}{2} \tag{2.77}$$

où dans (2.74),  $W = (W(t), t \in \mathbb{R})$  est le processus de Wiener standard scalaire étendu à  $\mathbb{R}$ ,  $\Theta$  est une v.a. uniforme sur [0, 1] indépendante de W,  $\epsilon$ ,  $\lambda$  et  $\rho$  sont des constantes réelles strictement positives, et dans (2.73),  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $\omega_1$  et e sont des constantes réelles telles que :

$$\alpha > 0 \ , \ \beta > 0 \ , \ 0 \le t_1 \le t_2 \ , \ \omega_1 = \sqrt{\omega_c^2 - \omega_0^2} \ , \ e = \eta \sigma_0$$
 (2.78)

avec :

$$\sigma_0 = \frac{\gamma_0}{2\omega_0\sqrt{\omega_0\xi_0}} \tag{2.79}$$

où  $\omega_c$ ,  $\eta$  et  $\gamma_0$  sont des constantes réelles vérifiant :

$$\omega_c \ge \omega_0 \quad , \quad \eta \ge 0 \quad , \quad \gamma_0 > 0 \tag{2.80}$$

Le processus U dépend ainsi de treize paramètres :  $\epsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  (paramètres de Z),  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  (paramètres de f),  $\omega_0$ ,  $\omega_c$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta$ ,  $\gamma_0$  (paramètres propres de (2.72)) et T (paramètre commun à f et à (2.72)), auxquels ont été assignées les valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre 4 :

$$\begin{cases} \epsilon = 10 , \ \lambda = 50\pi , \ \rho = 4\sqrt{5\pi} \\ \alpha = 10 , \ \beta = 0.4 , \ t_1 = 7 , \ t_2 = 12 , \ T = 20 \\ \omega_0 = 20\pi , \ \omega_c = 100\pi , \ \xi_0 = 0.01 , \ \eta = 0.5 , \ \gamma_0 = 1.0 \end{cases}$$
(2.81)

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P14-1 et P14-2, pour  $u_{\min} = 0.0432$ , T = 20 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .





**FIGURE P14-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 20 et  $L = 10^8$ .

FIGURE P14-2- Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0432, T = 20$  et  $L = 10^8$ .

#### 2.4.6 Processus non gaussien non stationnaire P15

C'est le processus  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \overline{T} = [0, T], 0 < T < +\infty$ , tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P15) \quad \nu(t) \doteq |U(t)| \tag{2.82}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré du paragraphe 2.4.5 précédent.

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P15-1 et P15-2, pour  $u_{\min} = 0.0434$ , T = 20 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .



**FIGURE P15-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 20 et  $L = 10^8$ .



**FIGURE P15-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0434, T = 20$  et  $L = 10^8$ .

#### 2.4.7 Processus non gaussien non stationnaire P16

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \overline{T} = [0, T], 0 < T < +\infty$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P16) \quad \nu(t) \doteq U(t) \tag{2.83}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré, solution de l'équation différentielle aléatoire multivoque du second ordre :

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + 2\omega_0\xi_0\dot{U}(t) + \omega_0^2U(t) + \gamma\sigma\left(\dot{U}(t)\right) \ni f(t)Z(t) , \ t \in [0,T] \\ U(0) = 0 \ p.s. , \ \dot{U}(0) = 0 \ p.s. \end{cases}$$
(2.84)

dans laquelle  $\omega_0$ ,  $\xi_0$  et  $\gamma$  sont des constantes réelles strictement positives  $(0 < \xi_0 < 1), Z = (Z(t), t \in \mathbb{R})$ et  $f = (f(t), t \in \mathbb{R})$  sont le même processus et la même application que dans le second membre de l'équation différentielle (2.72) (avec Z défini par (2.74) et f par (2.73)) et  $\sigma$  est l'opérateur multivoque "signe", tel que,  $\forall \dot{u} \in \mathbb{R}$ :

$$\sigma(\dot{u}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \dot{u} < 0\\ [-1,1] & \text{si } \dot{u} = 0\\ 1 & \text{si } \dot{u} > 0 \end{cases}$$
(2.85)

Un tel processus dépend donc de onze paramètres :  $\epsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  (paramètres de Z),  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  (paramètres de f),  $\omega_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\gamma$  (paramètres propres de (2.84)) et T (paramètre commun à f et à (2.84)), auxquels ont été affectées les valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre 4 :

$$\begin{cases} \epsilon = 10 \ , \ \lambda = 50\pi \ , \ \rho = 4\sqrt{5\pi} \\ \alpha = 10 \ , \ \beta = 0.4 \ , \ t_1 = 8 \ , \ t_2 = 20 \ , \ T = 30 \\ \omega_0 = 100\pi \ , \ \xi_0 = 0.01 \ , \ \gamma = 0.49 \end{cases}$$
(2.86)

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P16-1 et P16-2, pour  $u_{\min} = 0.0174$ , T = 30 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .



**FIGURE P16-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 30 et  $L = 10^8$ 



**FIGURE P16-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0174, T = 30$  et  $L = 10^8$ .
### 2.4.8 Processus non gaussien non stationnaire P17

C'est le processus  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \overline{T} = [0, T], 0 < T < +\infty$ , tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P17) \quad \nu(t) \doteq |U(t)| \tag{2.87}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré du paragraphe 2.4.7 précédent.

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P17-1 et P17-2, pour  $u_{\min} = 0.0177$ , T = 30 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .





**FIGURE P17-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 30 et  $L = 10^8$ .

FIGURE P17-2- Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0177, T = 30$  et  $L = 10^8$ .

#### 2.4.9 Processus non gaussien non stationnaire P18

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \overline{T} = [0, T], 0 < T < +\infty$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P18) \quad \nu(t) \doteq U(t) \tag{2.88}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré, solution de l'équation différentielle aléatoire multivoque du second ordre :

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + 2\omega_0\xi_0\dot{U}(t) + \omega_0^2U(t) + \gamma\sigma(\dot{U}(t)) \ni g(t)X(t) , t \in ]0,T] \\ U(0) = 0 \ p.s. , \dot{U}(0) = 0 \ p.s. \end{cases}$$
(2.89)

dans laquelle  $\omega_0$ ,  $\xi_0$  et  $\gamma$  sont des constantes réelles strictement positives ( $0 < \xi_0 < 1$ ),  $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$  est le processus gaussien, stationnaire, centré, considéré au paragraphe 2.1.2 (processus référencé P2),  $g = (g(t), t \in \mathbb{R}_+)$  est l'application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par (2.68) et  $\sigma$  est l'opérateur "signe" défini par (2.85).

Un tel processus dépend ainsi de huit paramètres :  $\omega_g$ ,  $\xi_g$  (paramètres de X),  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  (paramètres de g),  $\omega_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\gamma$  (paramètres propres de (2.89)) et T (temps total d'observation de la dynamique décrite par (2.89)), auxquels ont été assignées les valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre

4:

$$\begin{cases}
\omega_g = 15.70 , \xi_g = 0.60 \\
\eta_1 = 100 , \eta_2 = 0.30 \\
\omega_0 = 100\pi , \xi_0 = 0.01 , \gamma = 0.49 , T = 30
\end{cases}$$
(2.90)

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P18-1 et P18-2, pour  $u_{\min} = 0.0425$ , T = 30 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^9$ .



**FIGURE P18-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 30 et  $L = 10^9$ .

**FIGURE P18-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0425, T = 30$  et  $L = 10^9$ .

### 2.4.10 Processus non gaussien non stationnaire P19

C'est le processus  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \overline{T} = [0, T], 0 < T < +\infty$ , tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P19) \quad \nu(t) \doteqdot |U(t)| \tag{2.91}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré du paragraphe 2.4.9 précédent.

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P19-1 et P19-2, pour  $u_{\min} = 0.0426$ , T = 30 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^9$ .





**FIGURE P19-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 30 et  $L = 10^9$ .

**FIGURE P19-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $\omega =, u_{\min} = 0.0426, T = 30$  et  $L = 10^9$ .

#### 2.4.11 Processus non gaussien non stationnaire P20

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \ \overline{T} = [0, T], \ 0 < T < +\infty$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P20) \quad \nu(t) \doteq U(t) \tag{2.92}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est la première composante du processus vectoriel non gaussien, non stationnaire, centré  $(U, V)^{\mathcal{T}} = ((U(t), V(t))^{\mathcal{T}}, t \in \overline{T})$  solution du système différentiel aléatoire non linéaire du second ordre :

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + 2\omega_0\xi_0\dot{U}(t) + \omega_0^2U(t) + \omega_1^2V(t) = f(t)Z(t) , t \in ]0,T] \\ \dot{V}(t) = \dot{U}(t) \left( a - [b \cdot \text{signe}(V(t)\dot{U}(t)) + c]|V(t)|^n \right) , t \in ]0,T] \\ U(0) = 0 \ p.s. , \dot{U}(0) = 0 \ p.s. , V(0) = 0 \ p.s. \end{cases}$$
(2.93)

avec  $f = (f(t), t \in \mathbb{R})$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$  donnée par (2.73),  $Z = (Z(t), t \in \mathbb{R})$  le processus non gaussien, stationnaire au sens large, centré, défini par (2.74),  $\omega_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\omega_1$ , a et b des constantes réelles strictement positives ( $0 < \xi_0 < 1$ ), c une constante réelle astreinte à la condition  $c \in [-b, b]$  et n un entier fini  $\geq 1$ .

Un tel processus dépend donc de quinze paramètres :  $\epsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  (paramètres de Z),  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  (paramètres de f),  $\omega_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\omega_1$ , a, b, c, n (paramètres propres de (2.93)) et T (paramètre commun à f et à (2.93)), auxquels ont été attribuées les valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre 4 :

$$\begin{cases} \epsilon = 10 , \lambda = 50\pi , \rho = 4\sqrt{5\pi} \\ \alpha = 20 , \beta = 0.4 , t_1 = 7 , t_2 = 12 , T = 20 \\ \omega_0 = 50\pi , \xi_0 = 0.01 , \omega_1 = 100\pi \\ a = 1.0 , b = 0.5 , c = -0.5 , n = 1 \end{cases}$$

$$(2.94)$$

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P20-1 et P20-2, pour  $u_{\min} = 0.0388$ , T = 20 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .





**FIGURE P20-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 20 et  $L = 10^8$ .

**FIGURE P20-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0388, T = 20$  et  $L = 10^8$ .

## 2.4.12 Processus non gaussien non stationnaire P21

C'est le processus  $\nu = (\nu(t), t \in \bar{T}), \ \bar{T} = [0, T], \ 0 < T < +\infty$ , tel que,  $\forall t \in \bar{T}$ :

$$(P21) \quad \nu(t) \doteq |U(t)| \tag{2.95}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré du paragraphe 2.4.11 précédent.

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P21-1 et P21-2, pour  $u_{\min} = 0.0393$ , T = 20 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^8$ .



**FIGURE P21-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 20 et  $L = 10^8$ .



**FIGURE P21-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0393, T = 20$  et  $L = 10^8$ .

## 2.4.13 Processus non gaussien non stationnaire P22

Soit  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \ \overline{T} = [0, T], \ 0 < T < +\infty$ , ce processus. Il est tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P22) \quad \nu(t) \doteq U(t) \tag{2.96}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est la première composante du processus vectoriel non gaussien, non stationnaire, centré  $(U, V)^{\mathcal{T}} = ((U(t), V(t))^{\mathcal{T}}, t \in \overline{T})$  solution du système différentiel aléatoire multivoque du second

ordre:

$$\ddot{U}(t) + 2\omega_0\xi_0\dot{U}(t) + \omega_0^2U(t) + \omega_1^2V(t) \ni f(t)Z(t) , t \in ]0,T] \dot{V}(t) \in \dot{U}(t) - \sigma^{\sim}(\omega_1^2V(t)) , t \in ]0,T] U(0) = 0 \ p.s. , \dot{U}(0) = 0 \ p.s. , V(0) = 0 \ p.s.$$

$$(2.97)$$

où  $f = (f(t), t \in T)$  et  $Z = (Z(t), t \in \mathbb{R})$  sont (comme dans les paragraphes 2.4.5, 2.4.7 et 2.4.11) l'application déterministe et le processus non gaussien, stationnaire au sens large, centré, définis par (2.73) et (2.74), respectivement,  $\omega_0$ ,  $\xi_0$  et  $\omega_1$  sont des constantes réelles strictement positives ( $0 < \xi_0 <$ 1) et  $\sigma^{\sim}$  est l'opérateur multivoque inverse de l'opérateur "signe"  $\sigma$ , tel que,  $\forall s \in \mathbb{R}$ :

$$\sigma^{\sim}(s) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } s < -1 \\ ]-\infty, 0] & \text{si } s = -1 \\ \{0\} & \text{si } |s| < 1 \\ [0, +\infty[ & \text{si } s = 1 \\ \emptyset & \text{si } s > 1 \end{cases}$$
(2.98)

Un tel processus dépend donc de onze paramètres :  $\epsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  (paramètres de Z),  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  (paramètres de f),  $\omega_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\omega_1$  (paramètres propres de (2.97)) et T (paramètre commun à f et à (2.97)), auxquels ont été assignées les valeurs suivantes dans les applications numériques du chapitre 4 :

$$\begin{cases} \epsilon = 10 , \lambda = 50\pi , \rho = 4\sqrt{5\pi} \\ \alpha = 2.0 , \beta = 0.4 , t_1 = 7 , t_2 = 12 , T = 20 \\ \omega_0 = 20\pi , \xi_0 = 0.01 , \omega_1 = 100\pi \end{cases}$$
(2.99)

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P22-1 et P22-2, pour  $u_{\min} = 0.0435$ , T = 20 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^9$ .





**FIGURE P22-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 20 et  $L = 10^9$ .

**FIGURE P22-2-** Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0435, T = 20$  et  $L = 10^9$ .

## 2.4.14 Processus non gaussien non stationnaire P23

C'est le processus  $\nu = (\nu(t), t \in \overline{T}), \ \overline{T} = [0,T], \ 0 < T < +\infty$ , tel que,  $\forall t \in \overline{T}$ :

$$(P23) \quad \nu(t) \doteq |U(t)| \tag{2.100}$$

où  $U = (U(t), t \in \overline{T})$  est le processus non gaussien, non stationnaire, centré du paragraphe 2.4.13 précédent.

Les graphes des applications  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  associées à ce processus et définies par (2.3) et (2.4) sont représentés sur les figures P23-1 et P23-2, pour  $u_{\min} = 0.0442$ , T = 20 et un nombre de trajectoires simulées  $L = 10^9$ .



**FIGURE P23-1-** Graphe de l'application  $\tilde{\eta}_T$  pour T = 20 et  $L = 10^9$ .



FIGURE P23-2- Graphe de l'application  $\tilde{\delta}_T^{u_{min}}$  pour  $u_{\min} = 0.0442, T = 20$  et  $L = 10^9$ .

# Chapitre 3

# La méthode proposée

Rappelons (*cf.* Chapitre 1) que le problème consiste à évaluer la probabilité  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$ , où  $M_T$  est une v.a. scalaire définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  telle que  $M_T = \sup_{t \in \overline{T}} \nu(t)$ , u est un réel positif fixé de valeur telle que la probabilité  $P_T(u)$  soit très petite (de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-6}$ - $10^{-7}$ ) et  $\nu$  est un processus aléatoire du second ordre quelconque (*i.e.* non nécessairement gaussien, ni stationnaire) défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Bien entendu, ce processus est supposé *a priori* ne pas permettre le calcul exact de la probabilité  $P_T(u)$ , sinon la méthode proposée perdrait beaucoup de son intérêt, bien qu'encore utilisable et efficace dans ce cas.

Pour résoudre ce problème, nous proposons une procédure numérique innovante prenant sa source dans l'observation du comportement des applications  $u \to \eta_T(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1 - P_T(u))\right] : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et  $y \to \delta_T^{u_{\min}}(y) = -\text{Ln}\left[P_T(y; u_{\min})\right] = -\text{Ln}\left[P_T(y + u_{\min})/P_T(u_{\min})\right]$  associées à chaque élement du vaste ensemble de processus évoqué dans les chapitres 1 et 2 et dont un sous-ensemble représentatif est présenté dans le chapitre 2 (le vaste ensemble en question contenant une large classe de modèles stochastiques utilisés en dynamique aléatoire). En effet, un examen des graphes de ces deux applications - lesquelles, rappelons-le (*cf.* chap. 2), gardent logiquement leurs notations originelles  $\eta_T$  et  $\delta_T^{u_{\min}}$  lorsque les probabilités  $P_T(u), u \ge 0$ , sont connues par leurs expressions exactes (*cf.* formules (2.1) et (2.2)) et sont renommées  $\tilde{\eta}_T$  et  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}$  lorsque ces probabilités ne sont accessibles que par voie numérique, via un calcul Monte-Carlo (*cf.* formules (2.3) et (2.4)) - montre que le comportement de chacune d'elles possède une spécificité remarquable se perpétuant d'un processus à l'autre du vaste ensemble considéré, et c'est de l'observation de cette spécificité récurrente qu'est née l'idée de la méthode proposée.

Trois versions de cette méthode sont proposées. La première exploite la spécificité de  $\eta_T$ , la deuxième celle de  $\delta_T^{u_{\min}}$  et la troisième, variante de la précédente, combine le principe de cette dernière et un résultat de la théorie des valeurs extrêmes.

## 3.1 Version 1 de la méthode

La donnée de base est le vaste ensemble de processus évoqué dans les chapitres précédents (dont un sous-ensemble représentatif est présenté dans le chapitre 2), et nous nous intéressons ici à l'application  $u \to \eta_T(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1-P_T(u))\right] : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$  associée à chacun de ses éléments.

Les graphes P1-1 à P23-1 du chapitre 2 montrent clairement que cette application possède la spécificité suivante, commune à tous les processus considérés : elle est continue, strictement croissante

et, au-delà d'un certain seuil  $u_0$  - variable d'un processus à l'autre mais toujours petit (*i.e.* tel que  $P_T(u_0) \ge 10^{-1}$ ) - sa croissance est régulière et son graphe possède une courbure faiblement variable, peu accentuée et de signe constant (positif en l'occurrence).

Nous basant sur cette spécificité récurrente et **lui supposant un caractère universel** (*i.e.* généralisable à tous les processus), nous avons développé la procédure de calcul suivante, déclinable en quatre étapes.

(1) On se donne deux seuils  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$  vérifiant  $u_0 \leq u_{\min} \leq u_{\max}$  et tels que les probabilités  $P_T(u), u \in I$ , avec  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$ , soient relativement grandes (*i.e.* comprises entre  $10^{-3}$  et  $10^{-1}$ ), donc calculables avec précision et à moindre coût à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo. Soient  $\tilde{P}_T(u), u \in I$ , les estimées Monte-Carlo obtenues de ces probabilités, qui sont donc connues à ce stade.

(2) On introduit l'application  $u \to \tilde{\eta}_{T,I}(u) : I \to \mathbb{R}_+$ , telle que  $\forall u \in I :$ 

$$\tilde{\eta}_{T,I}(u) = -\mathrm{Ln}\left[-\mathrm{Ln}(1-\tilde{P}_T(u))\right]$$
(3.1)

Donc, cette application est entièrement connue et possède, par hypothèse, la spécificité universelle susmentionnée.

(3) Compte tenu de cette spécificité, on procède alors comme suit :

(a) On approxime  $\tilde{\eta}_{T,I}$  par un polynôme du second degré  $\bar{\eta}_{T,I}$  tel que,  $\forall u \in I$ :

$$\bar{\eta}_{T,I}(u) = a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I}$$
(3.2)

où les coefficients  $a_{T,I}$ ,  $b_{T,I}$  et  $c_{T,I}$  sont calculés à l'aide d'une technique de type moindres carrés (*cf.* §3.4.1 ci-après).

(b) On suppose l'approximation (3.2) encore valable au-delà de  $u_{\text{max}}$ , c'est-à-dire extrapolable à l'intervalle  $I^e = ]u_{\text{max}}, +\infty[$  (appelé *intervalle d'extrapolation* dans toute la suite), donc valable pour tout  $u \ge u_{\text{min}}$ , et on note  $\bar{\eta}_T$  l'approximation prolongée obtenue via cette extrapolation, telle que,  $\forall u \ge u_{\text{min}}$ :

$$\bar{\eta}_T(u) = a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I} \tag{3.3}$$

(4) Soit  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  la probabilité vérifiant,  $\forall u \ge u_{\min}$ , l'égalité :

$$\bar{\eta}_T(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1-\bar{P}_T^{(1)}(u))\right]$$
(3.4)

C'est l'approximation cherchée de la probabilité cible  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$  et elle s'écrit, d'après (3.3) et (3.4) :

$$\bar{P}_T^{(1)}(u) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[-(a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I})\right]\right\} , \quad \forall u \ge u_{\min}$$
(3.5)

Cette procédure de calcul comporte ainsi deux étapes calculatoires majeures :

**EC1)** Le calcul, en un nombre fini de points  $u_j$  de  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$ , de l'estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(u), u \in I$ , de la probabilité cible  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u), u \in I$ , calcul nécessaire à l'évaluation en ces points de l'application  $\tilde{\eta}_{T,I} = (\tilde{\eta}_{T,I}(u), u \in I)$ . Or,  $\forall u_j \in I$ , la probabilité  $P_T(u_j)$  est grande par hypothèse (comprise entre  $10^{-3}$  et  $10^{-1}$ ). Par conséquent, son estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(u_j)$  peut être

obtenue avec précision, et en un temps réduit, avec n'importe quelle méthode de Monte-Carlo. De plus, du fait de la spécificité susmentionnée de l'application  $u \to \eta_T(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1-P_T(u))\right]$ , il n'est pas nécessaire d'évaluer l'application  $u \to \tilde{\eta}_{T,I}(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1-\tilde{P}_T(u))\right]$  en un nombre très important de points  $u_j$  de I pour la décrire correctement. Il en résulte que cette étape n'est pas chronophage.

**EC2)** Le calcul des coefficients  $a_{T,I}$ ,  $b_{T,I}$ ,  $c_{T,I}$  de l'approximation polynomiale  $\bar{\eta}_{T,I}$  (donnée par (3.2)) de l'estimée Monte-Carlo  $\tilde{\eta}_{T,I}$  (donnée par (3.1)) de  $\eta_T$  sur I. Ce calcul est effectué à l'aide d'une méthode des moindres carrés pondérés (*cf.* §3.4.1 ci-après) et conduit à la résolution d'un système linéaire de très faible taille (*i.e.* de taille 3) dont la construction est aisée et la résolution numérique très peu coûteuse en temps calcul. Là donc encore, cette étape n'est pas chronophage et par conséquent cette version elle-même de la méthode ne l'est pas.

On notera que l'approximation fournie par cette version coïncide, pour u grand, avec celle que l'on obtiendrait en supposant poissonien le nombre de franchissements en croissant de u par le processus  $\nu$  ([1], [34]), ou en admettant que la v.a.  $M_T = sup_{t\in\bar{T}}\nu(t)$  suit une loi de Gumbel [12].

## 3.2 Version 2 de la méthode

La donnée de base est toujours le vaste ensemble de processus évoqué dans les chapitres précédents (dont un sous-ensemble représentatif est présenté dans le chapitre 2), mais nous nous intéressons cette fois à l'application  $y \to \delta_T^{u_{\min}}(y) = -\text{Ln}\left[P_T(y; u_{\min})\right] : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$  associée à chacun de ses éléments, où  $P_T(y; u_{\min})$  est la probabilité conditionnelle définie,  $\forall y \in \mathbb{R}_+$ , par :

$$P_T(y; u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y + u_{\min} | M_T > u_{\min}) = \frac{\mathbb{P}(M_T > y + u_{\min})}{\mathbb{P}(M_T > u_{\min})} = \frac{P_T(y + u_{\min})}{P_T(u_{\min})}$$
(3.6)

Les graphes P1-2 à P23-2 du chapitre 2 montrent que cette application possède la spécificité suivante, commune à tous les processus considérés : elle est continue, strictement croissante, à croissance régulière et son graphe possède une courbure faiblement variable, peu accentuée et de signe constant (positif en l'occurrence).

Nous basant sur cette spécificité récurrente et **lui supposant** - comme pour l'application  $u \rightarrow \eta_T(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1 - P_T(u))\right]$  de la version 1 - **un caractère universel**, nous avons alors développé la seconde procédure de calcul suivante, déclinable en cinq étapes.

(1) On considère l'intervalle  $J = [0, u_{\text{max}} - u_{\text{min}}]$ , où  $u_{\text{min}}$  et  $u_{\text{max}}$  sont les bornes de l'intervalle I de la première version, et sur cet intervalle on estime les probabilités  $P_T(y; u_{\text{min}}), y \in J$ , à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo. Soient  $\tilde{P}_T(y; u_{\text{min}}), y \in J$ , les estimées Monte-Carlo obtenues de ces probabilités, telles que,  $\forall y \in J$ :

$$\tilde{P}_T(y; u_{\min}) = \frac{\dot{P}_T(y + u_{\min})}{\tilde{P}_T(u_{\min})}$$
(3.7)

et qui sont donc connues à ce stade, où  $\tilde{P}_T(y + u_{\min})$  et  $\tilde{P}_T(u_{\min})$  sont les estimées Monte-Carlo des probabilités  $P_T(y + u_{\min})$  et  $P_T(u_{\min})$ , respectivement.

(2) On introduit l'application  $y \to \tilde{\delta}^{u_{\min}}_{T,J}(y) : J \to \mathbb{R}_+$ , telle que,  $\forall y \in J :$ 

$$\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y) = -\mathrm{Ln}[\tilde{P}_T(y; u_{\min})] = -\mathrm{Ln}\left[\frac{\tilde{P}_T(y + u_{\min})}{\tilde{P}_T(u_{\min})}\right]$$
(3.8)

Donc, cette application est entièrement connue et possède, par hypothèse, la spécificité universelle susmentionnée.

(3) Compte tenu de cette spécificité, on procède alors comme suit :

(a) On approxime  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$  par un polynôme du second degré  $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$  telle que,  $\forall y \in J$ :

$$\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y) = a_{T,J}^{u_{\min}}y^2 + b_{T,J}^{u_{\min}}y$$
(3.9)

où les coefficients  $a_{T,J}^{u_{\min}}$  et  $b_{T,J}^{u_{\min}}$  sont calculés à l'aide d'une méthode de type moindres carrés (*cf.* §3.4.2 ci-après).

(b) On suppose l'approximation (3.9) encore valable au-delà de  $u_{\text{max}} - u_{\text{min}}$ , c'est-à-dire extrapolable à l'intervalle  $J^e = ]u_{\text{max}} - u_{\text{min}}, +\infty[$  (appelé *intervalle d'extrapolation* dans toute la suite), donc, *in fine*, valable pour tout  $y \ge 0$ , et on note  $\overline{\delta}_T^{u_{\text{min}}}$  l'approximation prolongée obtenue via cette extrapolation, telle que,  $\forall y \ge 0$ :

$$\bar{\delta}_T^{u_{\min}}(y) = a_{T,J}^{u_{\min}} y^2 + b_{T,J}^{u_{\min}} y \tag{3.10}$$

(4) Soit  $P_T(y; u_{\min})$  la probabilité conditionnelle vérifiant,  $\forall y \ge 0$ , l'égalité :

$$\bar{\delta}_T^{u_{\min}}(y) = -\mathrm{Ln}[\bar{P}_T(y; u_{\min})] \tag{3.11}$$

C'est, pour tout  $y \ge 0$ , l'approximation de  $\tilde{P}_T(y; u_{\min})$ , et donc de  $P_T(y; u_{\min})$ , correspondant à l'approximation  $\bar{\delta}_T^{u_{\min}}(y)$  de  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}(y)$ , et donc de  $\delta_T^{u_{\min}}(y)$ , et elle s'écrit, compte tenu de (3.10) et (3.11) :

$$\bar{P}_T(y; u_{\min}) = \exp\left\{-(a_{T,J}^{u_{\min}} y^2 + b_{T,J}^{\min} y)\right\} , \quad \forall y \ge 0$$
(3.12)

(5) D'après (3.6), la probabilité cible  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$  peut alors être approximée, pour tout  $u \ge u_{\min}$ , par :

$$\bar{P}_T^{(2)}(u) = \bar{P}_T(u - u_{\min}; u_{\min})\tilde{P}_T(u_{\min})$$
(3.13)

où  $\tilde{P}_T(u_{\min})$  est une estimée Monte-Carlo de  $P_T(u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > u_{\min})$  (estimée qui s'obtient avec une grande précision et en un temps de calcul réduit du fait de sa grande valeur, de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-1}$  par hypothèse).

 $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  est l'approximation cherchée de  $P_T(u)$  et elle se réécrit, compte tenu de (3.12) et (3.13) :

$$\bar{P}_{T}^{(2)}(u) = \exp\left\{-\left[a_{T,J}^{u_{\min}}(u-u_{\min})^{2} + b_{T,J}^{u_{\min}}(u-u_{\min})\right]\right\}\tilde{P}_{T}(u_{\min}) , \quad \forall u \ge u_{\min}$$
(3.14)

Notons que le fait que l'approximation (3.10) de  $\delta_T^{u_{\min}}$  ne comporte pas de terme constant vient de ce que pour y = 0 la probabilité conditionnelle (3.6) doit être égale à 1 et donc aussi son approximation (3.12).

Observons par ailleurs que cette procédure de calcul comporte, comme dans la version 1, deux étapes calculatoires majeures :

**EC1**) Le calcul, en un nombre fini de points  $y_j$  de  $J = [0, u_{\text{max}} - u_{\text{min}}]$ , de l'estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(y; u_{\text{min}}), y \in J$ , de la probabilité conditionnelle cible  $P_T(y; u_{\text{min}}), y \in J$ , calcul nécessaire à l'évaluation en ces points de l'application  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}} = (\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y), y \in J)$ . Or, pour tout  $y_j \in J$ , la probabilité conditionnelle  $P_T(y_j; u_{\min})$  s'écrit, d'après (3.6) :

$$P_T(y_j; u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y_j + u_{\min} | M_T > u_{\min}) = \frac{\mathbb{P}(M_T > y_j + u_{\min})}{\mathbb{P}(M_T > u_{\min})} = \frac{P_T(y_j + u_{\min})}{P_T(u_{\min})}$$
(3.15)

Comme, par hypothèse, les probabilités  $P_T(y_j + u_{\min}), y_j \in J$ , sont grandes (comprise entre  $10^{-3}$  et  $10^{-1}$ ), donc calculables avec précision et en un temps réduit à l'aide d'une procédure Monte-Carlo, il en résulte que les probabilités conditionnelles  $P_T(y_j; u_{\min}), y_j \in J$ , peuvent également être calculées avec précision et en un temps réduit en contexte Monte-Carlo. De plus, du fait de la spécificité récurrente susmentionnée de l'application  $y \to \delta_T^{u_{\min}}(y)$ , il n'est pas nécessaire d'évaluer l'application  $y \to \delta_{T,J}(y) = -\text{Ln}\left[\tilde{P}_T(y; u_{\min})\right]$  en un nombre très important de points  $y_j$  de J pour la décrire correctement. Par conséquent, cette étape n'est pas chronophage.

**EC2**) Le calcul des coefficients  $a_{T,J}^{u_{\min}}$  et  $b_{T,J}^{u_{\min}}$  de l'approximation polynomiale  $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$  (donnée par (3.9)) de l'estimée Monte-Carlo  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$  (donnée par (3.8)) de  $\delta_T^{u_{\min}}$  sur J. Ce calcul est effectué à l'aide d'une méthode des moindre carrés pondérés (*cf.* §3.4.2 ci-après) et conduit à la résolution d'un système linéaire de très faible taille (*i.e.* de taille 2) dont la solution se calcule manuellement et s'évalue donc quasi-instantanément par voie informatique. Là donc encore, cette étape n'est pas chronophage et par conséquent cette seconde version de la méthode ne l'est pas non plus.

Notons enfin que cette version fournit, comme la précédente, une approximation de la probabilité  $\mathbb{P}(M_T > u)$  qui coïncide, pour u grand, avec celle que l'on obtiendrait en supposant poissonien le nombre de franchissements en croissant de u par le processus  $\nu$  ([1], [34]) ou en admettant que la v.a.  $M_T = \sup_{t \in \bar{T}} \nu(t)$  suit une loi de Gumbel [12].

## 3.3 Lien entre les approximations fournies par les versions 1 et 2

Rappelons que les approximations de la probabilité cible  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$  fournies par ces deux versions s'écrivent :

a) pour la version 1 (*cf.* formule (3.5)),

$$\bar{P}_T^{(1)}(u) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[-(a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I})\right]\right\} , \quad \forall u \ge u_{\min}$$

b) et pour la version 2 (*cf.* formule (3.14)),

$$\bar{P}_T^{(2)}(u) = \exp\left\{-\left[a_{T,J}^{u_{\min}}(u-u_{\min})^2 + b_{T,J}^{u_{\min}}(u-u_{\min})\right]\right\}\tilde{P}_T(u_{\min}) , \ \forall u \ge u_{\min}$$

Considérons  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  et souvenons-nous que cette probabilité est faible, voire très faible (*i.e.* de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-6} - 10^{-7}$ ). Par conséquent, l'exponentielle exp  $\{-\exp\left[-(a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I})\right]\}$  est très proche de 1 et donc l'exponentielle exp  $\left[-(a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I})\right]$  très proche de 0. On peut alors approximer la première exponentielle de  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  par  $1 - \exp\left[-(a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I})\right]$  et par suite  $\bar{P}_T^{(1)}$  par exp  $\left[-(a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I})\right]$ . D'où :

$$\bar{P}_T^{(1)}(u) \approx \exp\left[-(a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I})\right] \quad , \quad \forall u \ge u_{\min}$$

Par ailleurs,  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  peut se réécrire :

$$\bar{P}_{T}^{(2)}(u) = \exp\left\{-a_{T,J}^{u_{\min}}u^{2} + (2u_{\min}a_{T,J}^{u_{\min}} - b_{T,J}^{u_{\min}})u - u_{\min}^{2}a_{T,J}^{u_{\min}} + u_{\min}b_{T,J}^{u_{\min}} + \operatorname{Ln}\left[\tilde{P}_{T}(u_{\min})\right]\right\}, \ \forall u \ge u_{\min}u^{2}$$

En comparant les deux relations précédentes, on voit ainsi que, pour u grand et aux approximations admises près ,  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  sont liées par les relations :

$$a_{T,I} = a_{T,J}^{u_{\min}} \tag{3.16}$$

$$b_{T,I} = b_{T,J}^{u_{\min}} - 2u_{\min}a_{T,J}^{u_{\min}}$$
(3.17)

$$c_{T,I} = u_{\min}^2 a_{T,J}^{u_{\min}} - u_{\min} b_{T,J}^{u_{\min}} - \operatorname{Ln}\left[\tilde{P}_T(u_{\min})\right]$$
(3.18)

Ces relations établissent le lien entre les versions 1 et 2 de la méthode proposée.

## 3.4 Calcul des coefficients des polynômes d'approximation $\bar{\eta}_{T,I}$ et $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$ des versions 1 et 2

Pour calculer les coefficients des polynômes d'approximation  $\bar{\eta}_{T,I}(u)$  et  $\delta^{u_{\min}}_{T,J}(y)$ , nous avons utilisé la méthode des moindres carrés pondérés, que nous détaillons ci-dessous pour chacun de ces deux polynômes.

## **3.4.1** Calcul des coefficients de $\bar{\eta}_{T,I}(u)$

Rappelons que l'application  $\bar{\eta}_{T,I} = (\bar{\eta}_{T,I}(u), u \in I), I = [u_{\min}, u_{\max}]$ , est une approximation polynomiale, de la forme  $\bar{\eta}_{T,I}(u) = a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I}$ , de l'application  $\tilde{\eta}_{T,I} = (\tilde{\eta}_{T,I}(u), u \in I)$ , où  $\tilde{\eta}_{T,I}(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1 - \tilde{P}_T(u))\right], \forall u \in I$ , avec  $\tilde{P}_T(u)$  une estimée Monte-Carlo de la probabilité  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$ , pour  $u \in I$ , et  $M_T = \sup_{t \in \bar{T}} \nu(t), \bar{T} = [0, T]$ .

Pour calculer les coefficients  $a_{T,I}$ ,  $b_{T,I}$  et  $c_{T,I}$  de cette approximation à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés, nous procédons comme suit.

(1) Soit  $u_{\min} = u_0 < u_1 < \cdots < u_{N-1} < u_N = u_{\max}$  une *N*-partition régulière de l'intervalle d'approximation  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$ , de pas  $\Delta$  (constant) et de noeud générique  $u_j$  tels que :

$$\Delta = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{N} \tag{3.19}$$

$$u_j = u_{\min} + j\Delta \ , \ j \in \{0, 1, \cdots, N\}$$
 (3.20)

(2) Pour tout j dans  $\{0, 1, \dots, N\}$ , on calcule une estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(u_j)$  de la probablité  $P_T(u_j)$ , puis la valeur correspondante  $\tilde{\eta}_{T,I}(u_j) = -\operatorname{Ln}\left[-\operatorname{Ln}(1-\tilde{P}_T(u_j))\right]$  en  $u_j$  de l'application  $I \ni u \to \tilde{\eta}_{T,I}(u) = -\operatorname{Ln}\left[-\operatorname{Ln}(1-\tilde{P}_T(u))\right]$ .

(3) On pose :

$$J_N = \{0, 1, \cdots, N\}$$
(3.21)

$$p_j = \tilde{P}_T(u_j) = \tilde{P}_T(j\Delta + u_{\min}) \quad , \quad j \in J_N$$
(3.22)

$$\sigma_j^2 = \frac{p_j(1-p_j)}{L} \ , \ j \in J_N$$
 (3.23)

$$s_j^2 = L\sigma_j^2 = p_j(1-p_j) , \ j \in J_N$$
 (3.24)

$$g_j = \tilde{\eta}_{T,I}(u_j) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1 - \tilde{P}_T(u_j))\right] = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1 - p_j)\right] , \quad j \in J_N$$
(3.25)

$$g_j^{pol} = au_j^2 + bu_j + c \ , \ j \in J_N$$
 (3.26)

$$D_N^2(a, b, c) = \sum_{j \in J_N} \left( \frac{g_j - g_j^{pol}}{\sigma_j} \right)^2 = \sum_{j \in J_N} \left( \frac{g_j - au_j^2 - bu_j - c}{\sigma_j} \right)^2$$
(3.27)

où :

• L est le nombre de trajectoires simulées du processus  $\nu$  sur  $\overline{T} = [0, T]$ , utilisées pour obtenir l'estimée Monte-Carlo  $p_j = \tilde{P}_T(u_j)$  de la probabilité  $P_T(u_j) = \mathbb{P}(M_T > u_j)$ , ce nombre étant ici supposé identique pour tous les  $u_j$ , c'est-à-dire indépendant de j.

•  $\sigma_j^2$  est la variance d'estimation relative à l'estimée Monte-Carlo  $p_j = \tilde{P}_T(u_j)$  de la probabilité  $P_T(u_j) = \mathbb{P}(M_T > u_j).$ 

(4) Il s'agit alors de chercher le triplet  $(a_{T,I}, b_{T,I}, c_{T,I})$  qui minimise la fonction  $(a, b, c) \rightarrow D_N^2(a, b, c)$ , objectif qui nous conduit à la résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} \partial_a D_N^2(a, b, c) = 0\\ \partial_b D_N^2(a, b, c) = 0\\ \partial_c D_N^2(a, b, c) = 0 \end{cases}$$
(3.28)

qui se réécrit, tous calculs faits et en tenant compte de (3.24):

$$A\Theta = B \tag{3.29}$$

avec  $A\in\mathbb{R}^{3\times3},\,B\in\mathbb{R}^{3\times1}$  et  $\Theta\in\mathbb{R}^{3\times1}$  les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \\ A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} , \quad \Theta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$
(3.30)

où :

$$\begin{pmatrix}
A_{11} = \sum_{j \in J_N} \frac{u_j^4}{s_j^2}, & A_{22} = \sum_{j \in J_N} \frac{u_j^2}{s_j^2}, & A_{33} = \sum_{j \in J_N} \frac{1}{s_j^2} \\
A_{12} = A_{21} = \sum_{j \in J_N} \frac{u_j^3}{s_j^2}, & A_{13} = A_{31} = A_{22}, & A_{23} = A_{32} = \sum_{j \in J_N} \frac{u_j}{s_j^2}
\end{cases}$$
(3.31)

$$B_1 = \sum_{j \in J_N} \frac{g_j u_j^2}{s_j^2} , \quad B_2 = \sum_{j \in J_N} \frac{g_j u_j}{s_j^2} , \quad B_3 = \sum_{j \in J_N} \frac{g_j}{s_j^2}$$
(3.32)

L'unique solution  $\Theta_{T,I} = (a_{T,I}, b_{T,I}, c_{T,I})^T$  de ce système cramérien fournit le triplet de coefficients cherché.

## **3.4.2** Calcul des coefficients de $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y)$

Rappelons que  $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}} = (\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y), y \in J), J = [0, u_{\max} - u_{\min}]$ , est une approximation polynomiale, de la forme  $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y) = a_{T,J}^{u_{\min}}y^2 + b_{T,J}^{u_{\min}}y$ , de l'application  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}} = (\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y), y \in J)$ , où  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y) = -\text{Ln}\left[\tilde{P}_T(y;u_{\min})\right] = -\text{Ln}\left[\tilde{P}_T(y+u_{\min})/\tilde{P}_T(u_{\min})\right], \forall y \in J$ , avec  $\tilde{P}_T(y+u_{\min})$  et  $\tilde{P}_T(u_{\min})$  des estimées Monte-Carlo des probabilités  $P_T(y+u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y+u_{\min})$  et  $P_T(u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > u_{\min})$ , respectivement, et  $M_T = \sup_{t \in \bar{T}} \nu(t), \bar{T} = [0, T]$ . Pour calculer les coefficients  $a_{T,J}^{u_{\min}}$  et  $b_{T,J}^{u_{\min}}$  de cette approximation à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés, nous procédons comme suit.

(1) Soit  $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{N-1} < y_N = u_{\text{max}} - u_{\text{min}}$  une *N*-partition régulière de l'intervalle d'approximation  $J = [0, u_{\text{max}-u_{\text{min}}}]$ , de pas  $\Delta$  (constant) et de noeud générique  $y_j$ , tels que :

$$\Delta = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{N} \tag{3.33}$$

$$y_j = j\Delta$$
,  $j \in \{0, 1, \cdots, N\}$  (3.34)

(2) On calcule une estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(u_{\min})$  de la probabilité  $P_T(u_{\min})$ , puis, pour tout j dans  $\{0, 1, \dots, N\}$ , une estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(y_j + u_{\min})$  de la probabilité  $P_T(y_j + u_{\min})$ , et enfin, pour tout j dans  $\{0, 1, \dots, N\}$ , la valeur  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y_j) = -\text{Ln}\left[\tilde{P}_T(y_j + u_{\min})/\tilde{P}_T(u_{\min})\right]$  en  $y_j$  de l'application  $J \ni y \to \tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y) = -\text{Ln}\left[\tilde{P}_T(y + u_{\min})/\tilde{P}_T(u_{\min})\right]$ .

(3) On pose :

$$J_N = \{0, 1, \cdots, N\} \tag{3.35}$$

$$p_j = \tilde{P}_T(y_j + u_{\min}) = \tilde{P}_T(j\Delta + u_{\min}) \quad , \quad j \in J_N$$
(3.36)

$$p_0 = \tilde{P}_T(u_{\min}) \tag{3.37}$$

$$\mu_j^2 = \frac{p_j(1-p_j)}{Lp_0^2} \quad , \quad j \in J_N \tag{3.38}$$

$$s_j^2 = L p_0^2 \mu_j^2 = p_j (1 - p_j) , \ j \in J_N$$
 (3.39)

$$h_{j} = \tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y_{j}) = -\operatorname{Ln}\left[\tilde{P}_{T}(y_{j}; u_{\min})\right]$$
$$= -\operatorname{Ln}\left[\frac{\tilde{P}_{T}(y_{j} + u_{\min})}{\tilde{P}_{T}(u_{\min})}\right] = -\operatorname{Ln}\left[\frac{p_{j}}{p_{0}}\right] , \quad j \in J_{N}$$
(3.40)

$$h_j^{pol} = ay_j^2 + by_j \quad , \quad j \in J_N \tag{3.41}$$

$$Q_N^2(a,b) = \sum_{j \in J_N} \left( \frac{h_j - h_j^{pol}}{\mu_j} \right)^2 = \sum_{j \in J_N} \left( \frac{h_j - ay_j^2 - by_j}{\mu_j} \right)^2$$
(3.42)

où :

• L est le nombre de trajectoires simulées du processus  $\nu$  sur  $\overline{T} = [0, T]$ , utilisées pour obtenir l'estimée Monte-Carlo  $p_j = \tilde{P}_T(y_j + u_{\min})$  de la probabilité  $P_T(y_j + u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y_j + u_{\min})$ , ce nombre étant ici supposé identique pour tous les  $y_j$ , c'est-à-dire indépendant de j.

•  $\mu_j^2$  est la variance d'estimation relative à l'estimée Monte-Carlo  $q_j = p_j/p_0$  du rapport  $P_T(y_j + u_{\min})/P_T(u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y_j + u_{\min})/\mathbb{P}(M_T > u_{\min})$ , où, pour le calcul de cette variance, nous avons supposé, compte tenu de la valeur élevée de la probabilité  $P_T(u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > u_{\min})$ , et donc de son estimée Monte-Carlo  $p_0$  (de l'ordre de  $10^{-2}$  par construction), que cette estimée pouvait être considérée comme non entâchée d'incertitude et donc être supposée égale à la valeur exacte de la probabilité  $P_T(u_{\min})$ . D'où l'expression (3.38) de  $\mu_j^2$ .

(4) Il s'agit alors de chercher le couple  $(a_{T,J}^{u_{\min}}, b_{T,J}^{u_{\min}})$  qui minimise la fonction  $(a, b) \to Q_N^2(a, b)$ , objectif qui nous conduit à la résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} \partial_a Q_N^2(a,b) = 0\\ \partial_b Q_N^2(a,b) = 0 \end{cases}$$
(3.43)

qui se réécrit tous calculs faits, en tenant compte de (3.39):

$$A\Theta = B \tag{3.44}$$

avec  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  et  $\Theta \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} , \quad \Theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$
(3.45)

où :

$$A_{11} = \sum_{j \in J_N} \frac{y_j^4}{s_j^2} , \quad A_{12} = A_{21} = \sum_{j \in J_N} \frac{y_j^3}{s_j^2} , \quad A_{22} = \sum_{j \in J_N} \frac{y_j^2}{s_j^2}$$
(3.46)

$$B_1 = \sum_{j \in J_N} \frac{h_j y_j^2}{s_j^2} \quad , \quad B_2 = \sum_{j \in J_N} \frac{h_j y_j}{s_j^2} \tag{3.47}$$

L'unique solution  $\Theta_{J,T}^{u_{\min}} = (a_{T,J}^{u_{\min}}, b_{T,J}^{u_{\min}})^T$  de ce système cramérien fournit le couple de coefficients cherché. On obtient, tous calculs faits :

$$a_{T,J}^{u_{\min}} = \frac{A_{22}B_1 - A_{12}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \qquad b_{T,J}^{u_{\min}} = \frac{A_{11}B_2 - A_{21}B_1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$$
(3.48)

## 3.5 Version 3 de la méthode

## 3.5.1 Développement de la méthode

La troisième version que nous proposons ici est une variante de la deuxième, qui se distingue de cette dernière au niveau de son étape d'approximation en zone de faibles seuils. Dans cette nouvelle version, en effet, l'estimée Monte-Carlo sur  $J = [0, u_{\text{max}} - u_{\text{min}}]$  de la probabilité conditionnelle  $P_T(y; u_{\text{min}}) =$  $\mathbb{P}(M_T > y + u_{\text{min}}|M_T > u_{\text{min}}), y \in \mathbb{R}_+$ , n'y est plus approximée par  $\bar{P}_T(y; u_{\text{min}}) = \exp(-\bar{\delta}^{u_{\text{min}}}_{T,J}(y)),$  $y \in J$ , avec  $\bar{\delta}^{u_{\text{min}}}_{T,J}(y)$  donné par (3.9), mais par la restriction à J de la fonction de survie d'une loi de Pareto généralisée à identifier. D'où les étapes de cette troisième version :

(1) On estime sur  $J = [0, u_{\text{max}} - u_{\text{min}}]$ , par un calcul Monte-Carlo, les probabilités conditionnelles  $P_T(y; u_{\min}), y \in J$ , avec,  $\forall y \in J$ ,  $P_T(y; u_{\min}) = P_T(y + u_{\min})/P_T(u_{\min})$ . Soient  $\tilde{P}_T(y; u_{\min}), y \in J$ , les estimées Monte-Carlo obtenues de ces probabilités, telles que,  $\forall y \in J$ ,  $\tilde{P}_T(y; u_{\min}) = \tilde{P}_T(y + u_{\min})/\tilde{P}_T(u_{\min})$ , avec  $\tilde{P}_T(u), u \in I$ , les estimées Monte-Carlo sur  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$  de la probabilité  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u)$ .

(2) On introduit l'application  $y \to \tilde{\delta}^{u_{\min}}_{T,J}(y) : J \to \mathbb{R}_+$ , telle que,  $\forall y \in J :$ 

$$\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y) = -\mathrm{Ln}[\tilde{P}_T(y; u_{\min})] = -\mathrm{Ln}\left[\frac{\tilde{P}_T(y + u_{\min})}{\tilde{P}_T(u_{\min})}\right]$$
(3.49)

Cette application possède la spécificité récurrente mentionnée au paragraphe 3.2, à laquelle est toujours prêté ici un caractère universel.

(3) De la relation (3.49) ci-dessus, on tire,  $\forall y \in J$ :

$$\tilde{P}_T(y; u_{\min}) = \exp(-\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y))$$
(3.50)

Partant de là, on procède comme suit.

(a) On suppose que l'application  $J \ni y \to \tilde{P}_T(y; u_{\min})$  peut être approximée par la restriction à J de la fonction de survie d'une loi de Pareto généralisée. Soit  $y \to \mathcal{P}_J(y; \gamma, \sigma)$  une telle restriction. Elle s'écrit,  $\forall y \in J$ :

$$\mathcal{P}_J(y;\gamma,\sigma) = \exp(-\delta_J^{\mathcal{P}}(y;\gamma,\sigma)) \tag{3.51}$$

avec  $J \ni y \to \delta^{\mathcal{P}}_J(y;\gamma,\sigma)$  l'application définie par :

$$\delta_{J}^{\mathcal{P}}(y;\gamma,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \mathrm{Ln}(1+\frac{\gamma}{\sigma}y) , & \forall y \in J , \text{ si } \gamma > 0\\ \frac{1}{\gamma} \mathrm{Ln}(1+\frac{\gamma}{\sigma}y) , & \forall y \in J \cap \left[0,-\frac{\sigma}{\gamma}\right] , \text{ si } \gamma < 0\\ \frac{y}{\sigma} , & \forall y \in J , \text{ si } \gamma = 0 \end{cases}$$
(3.52)

 $\gamma$  et  $\sigma$  étant deux paramètres vérifiant :  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^*_+$ . Or, dans notre cas (*i.e.* pour tous les processus tests considérés), l'expérience numérique montre que, d'une part  $\gamma \leq 0$  et, d'autre part,  $u_{\max} - u_{\min} < -\frac{\sigma}{\gamma}$ , donc  $J \subset [0, -\frac{\sigma}{\gamma}]$ . On a donc ici :

$$\delta_{J}^{\mathcal{P}}(y;\gamma,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \mathrm{Ln}(1+\frac{\gamma}{\sigma}y) , & \forall y \in J , \text{ si } \gamma \neq 0 \\ \frac{y}{\sigma} , & \forall y \in J , \text{ si } \gamma = 0 \end{cases}$$
(3.53)

avec  $\gamma \leq 0$  et  $\sigma > 0$ .

D'après (3.50) et (3.51), postuler la proximité des applications  $J \ni y \to \tilde{P}_T(y; u_{\min})$  et  $J \ni y \to \mathcal{P}_J(y; \gamma, \sigma)$  revient à postuler celle des applications  $J \ni y \to \tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y)$  et  $J \ni y \to \delta_J^{\mathcal{P}}(y; \gamma, \sigma)$ . Supposer que la probabilité  $\tilde{P}_T(y, u_{\min})$  peut être approximée sur J par une probabilité de la forme (3.51) revient ainsi à supposer que l'application  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$  peut être approximée par une application  $\delta_J^{\mathcal{P}}$  de la forme (3.53).

La construction de cette approximation conduit à chercher, parmi tous les couples  $(\gamma, \sigma)$  de  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^*_+$ , celui (ou ceux) qui minimise(nt) l'écart, en un sens à préciser, entre les applications  $\delta^{u_{\min}}_{T,J}(\cdot)$  et  $\delta^{\mathcal{P}}_{J}(\cdot; \gamma, \sigma)$ . Comme dans les deux premières versions, nous avons opté pour un critère de proximité au sens  $L^2$  et résolu le problème associé en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés (*cf.* §3.5.2 ci-après).

Soit  $(\gamma_{T,J}^{u_{\min}}, \sigma_{T,J}^{u_{\min}})$  le couple solution, dont nous supposons ici l'existence et l'unicité, (hypothèse vérifiée pour tous les processus de la base de données), et posons :

$$\bar{\bar{\delta}}_{T,J}^{u_{\min}}(y) = \delta_J^{\mathcal{P}}(y; \gamma_{T,J}^{u_{\min}}, \sigma_{T,J}^{u_{\min}}), \,\forall y \in J$$
(3.54)

soit, d'après (3.53):

$$\bar{\bar{\delta}}_{T,J}^{u_{\min}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}} \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}}y\right) &, \forall y \in J \\ \frac{y}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}} &, \forall y \in J \\ y \in J &, \text{ si } \gamma_{T,J}^{u_{\min}} = 0 \end{cases}$$
(3.55)

avec  $\gamma_{T,J}^{u_{\min}} \leq 0$  et  $\sigma_{T,J}^{u_{\min}} > 0$ .

L'application  $J \ni y \to \bar{\delta}^{u_{\min}}_{T,J}(y)$  définie par (3.55) est une approximation de l'application  $J \ni y \to \tilde{\delta}^{u_{\min}}_{T,J}(y)$  définie par (3.49).

(b) On suppose l'approximation (3.55) encore valable au-delà de  $u_{\text{max}} - u_{\text{min}}$ , c'est-à-dire sur l'intervalle  $J^e = ]u_{\text{max}} - u_{\text{min}}, +\infty[$ , si  $\gamma_{T,J}^{u_{\text{min}}} = 0$ , et au-delà de  $u_{\text{max}} - u_{\text{min}}$  et jusqu'à  $-\sigma_{T,J}^{u_{\text{min}}}/\gamma_{T,J}^{u_{\text{min}}}$ , c'est-à-dire sur l'intervalle  $J^e_* = \left] u_{\max} - u_{\min}, -\sigma^{u_{\min}}_{T,J} / \gamma^{u_{\min}}_{T,J} \right]$ , si  $\gamma^{u_{\min}}_{T,J} < 0$ , et on note  $\overline{\bar{\delta}}^{u_{\min}}_T$  l'approximation prolongée obtenue via cette extrapolation, donc telle que :

$$\bar{\bar{\delta}}_{T}^{u_{\min}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}} \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}}y\right) &, \forall y \in J_{1} &, \text{ si } \gamma_{T,J}^{u_{\min}} \neq 0\\ \frac{y}{\sigma_{T,J}} &, \forall y \in J_{2} &, \text{ si } \gamma_{T,J}^{u_{\min}} = 0 \end{cases}$$
(3.56)

avec :

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0, -\frac{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}}{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}} \end{bmatrix} \quad , \quad J_2 = \mathbb{R}_+$$

$$(3.57)$$

(4) Soit  $\overline{P}_T(y; u_{\min})$  la probabilité conditionnelle vérifiant,  $\forall y \in J_1$  si  $\gamma_{T,J}^{u_{\min}} \neq 0$  et  $\forall y \in J_2$  si  $\gamma_{T,J}^{u_{\min}} = 0$ , l'égalité :

$$\bar{\bar{\delta}}_{T}^{u_{\min}}(y) = -\mathrm{Ln}\left[\bar{\bar{P}}_{T}(y;u_{\min})\right]$$
(3.58)

C'est, pour tout  $y \in J_1$  si  $\gamma_{T,J}^{u_{\min}} \neq 0$  et pour tout  $y \in J_2$  si  $\gamma_{T,J}^{u_{\min}} = 0$ , l'approximation de  $\tilde{P}_T(y; u_{\min})$ , donc de  $P_T(y; u_{\min})$ , correspondant à l'approximation de  $\tilde{\delta}_T^{u_{\min}}(y)$ , donc de  $\delta_T^{u_{\min}}(y)$ , et elle s'écrit, compte tenu de (3.56) et (3.58) :

$$\bar{\bar{P}}_{T}(y; u_{\min}) = \begin{cases} \left(1 + \frac{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}} y\right)^{-\frac{1}{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}}} , \quad \forall y \in J_{1} , \text{ si } \gamma_{T,J}^{u_{\min}} \neq 0\\ \exp\left(-\frac{y}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}}\right) , \quad \forall y \in J_{2} , \text{ si } \gamma_{T,J}^{u_{\min}} = 0 \end{cases}$$
(3.59)

(5) De (3.6) on tire,  $\forall y \in \mathbb{R}_+$ :

$$P_T(y + u_{\min}) = P_T(y; u_{\min}) P_T(u_{\min})$$
(3.60)

relation que l'on peut réécrire,  $\forall u \ge u_{\min}$  :

$$P_T(u) = P_T(u - u_{\min}; u_{\min}) P_T(u_{\min})$$
(3.61)

où nous rappelons que,  $\forall y \in \mathbb{R}_+$ :

$$P_T(y; u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y + u_{\min} | M_T > u_{\min})$$
(3.62)

La troisième approximation cherchée de  $P_T(u)$ , notée  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$ , s'obtient alors en remplaçant dans (3.61) la probabilité conditionnelle  $P_T(u - u_{\min}; u_{\min})$  par son approximation  $\bar{\bar{P}}_T(u - u_{\min}; u_{\min})$  et la probabilité  $P_T(u_{\min})$  par une estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(u_{\min})$ . D'où :

$$\bar{P}_T^{(3)}(u) = \bar{\bar{P}}_T(u - u_{\min}; u_{\min})\tilde{P}_T(u_{\min})$$
(3.63)

soit, d'après (3.59):

$$\bar{P}_{T}^{(3)}(u) = \begin{cases} \tilde{P}_{T}(u_{\min}) \left( 1 + \frac{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}} (u - u_{\min}) \right)^{-\frac{1}{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}}}, \forall u \in I_{1}, \text{ si } \gamma_{T,J}^{u_{\min}} \neq 0\\ \tilde{P}_{T}(u_{\min}) \exp\left( -\frac{u - u_{\min}}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}} \right), \forall u \in I_{2}, \text{ si } \gamma_{T,J}^{u_{\min}} = 0 \end{cases}$$
(3.64)

avec :

$$I_{1} = \left[ u_{\min}, u_{\min} - \frac{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}}{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}} \right] \quad , \quad I_{2} = [u_{\min}, +\infty[$$
(3.65)

et où nous rappelons que :

$$\gamma_{T,J}^{u_{\min}} \le 0 \ , \ \sigma_{T,J}^{u_{\min}} > 0$$
(3.66)

Observons que cette procédure de calcul comporte, comme dans les deux précédentes versions, deux étapes calculatoires majeures :

**EC1)** Le calcul, en un nombre fini de points  $y_j$  de  $J = [0, u_{\max} - u_{\min}]$ , de l'estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(y; u_{\min}), y \in J$ , de la probabilité conditionnelle cible  $P_T(y; u_{\min}), y \in J$ , calcul nécessaire à l'évaluation en ces points de l'application  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}} = (\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y), y \in J)$ . Or, pour tout  $y_j \in J$ , la probabilité conditionnelle  $P_T(y_j; u_{\min})$  s'écrit, d'après (3.6) :

$$P_T(y_j; u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y_j + u_{\min} | M_T > u_{\min}) = \frac{\mathbb{P}(M_T > y_j + u_{\min})}{\mathbb{P}(M_T > u_{\min})} = \frac{P_T(y_j + u_{\min})}{P_T(u_{\min})}$$
(3.67)

Comme, par hypothèse, les probabilités  $P_T(y_j + u_{\min}), y_j \in J$ , sont grandes (comprise entre  $10^{-3}$  et  $10^{-1}$ ), donc calculables avec précision et en un temps réduit à l'aide d'une procédure Monte-Carlo, il en résulte que les probabilités conditionnelles  $P_T(y_j; u_{\min}), y_j \in J$ , peuvent également être calculées avec précision et en un temps réduit en contexte Monte-Carlo. De plus, du fait de la spécificité récurrente susmentionnée de l'application  $y \to \delta_T^{u_{\min}}(y)$ , il n'est pas nécessaire d'évaluer l'application  $y \to \tilde{\delta}_{T,J}(y) = -\text{Ln}\left[\tilde{P}_T(y; u_{\min})\right]$  en un nombre très important de points  $y_j$  de J pour la décrire correctement. Par conséquent, cette étape n'est pas chronophage.

**EC2**) Le calcul des coefficients  $\gamma_{T,J}^{u_{\min}}$  et  $\sigma_{T,J}^{u_{\min}}$  de l'approximation polynomiale  $\overline{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$  (donnée par (3.55)) de l'estimée Monte-Carlo  $\widetilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$  de  $\delta_T^{u_{\min}}$  sur J. Ce calcul est effectué à l'aide d'une méthode des moindre carrés pondérés (*cf.* §3.6 ci-après) et conduit à la résolution d'un système non linéaire de très faible taille (*i.e.* de taille 1 ou 2) dont la solution se calcule aisément, et en un temps très réduit, par voie numérique. A l'instar de la précédente, cette étape n'est donc pas chronophage et, par conséquent, la troisième version, tout comme les deux premières, ne l'est pas non plus.

Notons, pour terminer, que cette troisième version, comme les deux précédentes, fournit une approximation de la probabilité  $\mathbb{P}(M_T > u)$  qui coïncide, pour u grand, avec celle que l'on obtiendrait en supposant poissonien le nombre de franchissements en croissant de u par le processus  $\nu$  ([1], [34]) ou en admettant que la v.a.  $M_T = \sup_{t \in \overline{T}} \nu(t)$  suit une loi de Gumbel [12].

## 3.5.2 Calcul des coefficients de l'approximation $\overline{\bar{\delta}}^{u_{\min}}_{T,J}$ de $\widetilde{\delta}^{u_{\min}}_{T,J}$

Pour calculer les coefficients  $\gamma_{T,J}^{u_{\min}}$  et  $\sigma_{T,J}^{u_{\min}}$  de cette approximation, d'expression donnée par (3.55), nous avons utilisé, comme dans les deux précédentes versions, la méthode des moindres carrés pondérés dont la mise en oeuvre pratique pour ce problème se résume aux 5 étapes suivantes :

(1) Soit  $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{N-1} < y_N = u_{\max} - u_{\min}$  une *N*-partition régulière de l'intervalle d'approximation  $J = [0, u_{\max-u_{\min}}]$ , de pas  $\Delta$  (constant) et de noeud générique  $y_j$ , tels que :

$$\Delta = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{N} \tag{3.68}$$

$$y_j = j\Delta \quad , \quad \forall j \in \{0, 1, \cdots, N\}$$

$$(3.69)$$

(2) On calcule une estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(u_{\min})$  de la probabilité  $P_T(u_{\min})$ , puis, pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ , une estimée Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(y_j + u_{\min})$  de la probabilité  $P_T(y_j + u_{\min})$ , et enfin, pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ , la valeur  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y_j) = -\text{Ln}\left[\tilde{P}_T(y_j + u_{\min})/\tilde{P}_T(u_{\min})\right]$  en  $y_j$  de l'application  $J \ni y \to \tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y) = -\text{Ln}\left[\tilde{P}_T(y + u_{\min})/\tilde{P}_T(u_{\min})\right]$ .

(3) On introduit les notations suivantes :

$$J_N = \{0, 1, \cdots, N\}$$
(3.70)

$$p_j = \tilde{P}_T(y_j + u_{\min}) = \tilde{P}_T(j\Delta + u_{\min}) \quad , \quad \forall j \in J_N$$
(3.71)

$$p_0 = \tilde{P}_T(u_{\min}) \tag{3.72}$$

$$\mu_j^2 = \frac{p_j(1-p_j)}{Lp_0^2} \quad , \quad \forall j \in J_N \tag{3.73}$$

$$s_j^2 = L p_0^2 \mu_j^2 = p_j (1 - p_j) , \ \forall j \in J_N$$
 (3.74)

$$h_{j} = \tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y_{j}) = -\operatorname{Ln}\left[\tilde{P}_{T}(y_{j}; u_{\min})\right]$$
$$= -\operatorname{Ln}\left[\frac{\tilde{P}_{T}(y_{j} + u_{\min})}{\tilde{P}_{T}(u_{\min})}\right] = -\operatorname{Ln}\left[\frac{p_{j}}{p_{0}}\right] , \quad \forall j \in J_{N}$$
(3.75)

$$h_{j}^{\mathcal{P}} = \delta_{J}^{\mathcal{P}}(y_{j}; \gamma, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \operatorname{Ln}(1 + \frac{\gamma}{\sigma}y_{j}) & \text{si } \gamma \neq 0\\ \frac{y_{j}}{\sigma} & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$
(3.76)

$$R_N^2(\gamma,\sigma) = \sum_{j=0}^N \left(\frac{h_j - h_j^{\mathcal{P}}}{\mu_j}\right)^2 = \begin{cases} \sum_{j=0}^N \left(\frac{h_j - \frac{1}{\gamma} \operatorname{Ln}(1 + \frac{\gamma}{\sigma}y_j)}{\mu_j}\right)^2 & \text{si } \gamma \neq 0\\ \sum_{j=0}^N \left(\frac{h_j - \frac{y_j}{\sigma}}{\mu_j}\right)^2 & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$
(3.77)

où :

• L est le nombre de trajectoires simulées du processus  $\nu$  sur  $\overline{T} = [0, T]$ , utilisées pour obtenir l'estimée Monte-Carlo  $p_j = \tilde{P}_T(y_j + u_{\min})$  de la probabilité  $P_T(y_j + u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y_j + u_{\min})$ , ce nombre étant ici supposé identique pour tous les  $y_j$ , c'est-à-dire indépendant de j.

•  $\mu_j^2$  est la variance d'estimation relative à l'estimée Monte-Carlo  $q_j = p_j/p_0$  du rapport  $P_T(y_j + u_{\min})/P_T(u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y_j + u_{\min})/\mathbb{P}(M_T > u_{\min})$ , où, pour le calcul de cette variance, nous avons supposé, compte tenu de la valeur élevée de la probabilité  $P_T(u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > u_{\min})$ , et donc de son estimée Monte-Carlo  $p_0$  (de l'ordre de  $10^{-2}$  par construction), que cette estimée pouvait être considérée comme non entâchée d'incertitude et donc être supposée égale à la valeur exacte de la probabilité  $P_T(u_{\min})$ . D'où l'expression (3.73) de  $\mu_j^2$ .

(4) Il s'agit alors de chercher le couple  $(\gamma_{T,J}^{u_{\min}}, \sigma_{T,J}^{u_{\min}})$  qui minimise la fonction  $(\gamma, \sigma) \to R_N^2(\gamma, \sigma)$ , objectif qui nous conduit à la résolution du système non linéaire :

$$\begin{cases} \partial_{\gamma} R_N^2(\gamma, \sigma) = 0\\ \partial_{\sigma} R_N^2(\gamma, \sigma) = 0 \end{cases}$$
(3.78)

qui se réécrit tous calculs faits, en tenant compte de (3.74) et (3.77):

(a) si  $\gamma \neq 0$ :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{s_j^2} \left[ h_j - \frac{1}{\gamma} \operatorname{Ln}(1 + \frac{\gamma}{\sigma} y_j) \right] \left[ \operatorname{Ln}(1 + \frac{\gamma}{\sigma} y_j) - \frac{\frac{\gamma}{\sigma} y_j}{1 + \frac{\gamma}{\sigma} y_j} \right] = 0\\ \sum_{j=0}^{N} \frac{y_j}{s_j^2} \frac{h_j - \frac{1}{\gamma} \operatorname{Ln}(1 + \frac{\gamma}{\sigma} y_j)}{1 + \frac{\gamma}{\sigma} y_j} = 0 \end{cases}$$
(3.79)

(b) si  $\gamma = 0$ :

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{y_j}{s_j^2} \left( h_j - \frac{y_j}{\sigma} \right) = 0 \tag{3.80}$$

L'équation (3.80) doit être résolue sous la contrainte  $\sigma > 0$ . Sa solution exacte s'obtient trivialement et s'écrit :

$$\sigma_{T,J}^{u_{\min}} = \frac{\sum_{j=0}^{N} \frac{y_j^2}{s_j^2}}{\sum_{j=0}^{N} \frac{y_j h_j}{s_j^2}}$$
(3.81)

Le système (3.79) doit quant à lui être résolu sous la double contrainte  $\sigma > 0$ ,  $\gamma < 0$ . Comme pour tout système non linéaire, le point clé de sa résolution réside dans le choix d'une condition initiale  $(\gamma_0, \sigma_0)$ . Pour déterminer une telle condition, nous avons utilisé la stratégie suivante.

Observons tout d'abord que la dérivée à l'origine de l'application  $y \to \delta_J^{\mathcal{P}}(y; \gamma, \sigma)$  définie par (3.53) a pour valeur  $\frac{1}{\sigma}$ . Or, comme cette application est destinée à être une approximation de l'application cible  $y \to \tilde{\delta}_{T,J}(y)$  donnée par (3.8) (dont le graphe pour chacun des 23 processus tests considérés ici est représenté sur les figures P1-2 à P23-2 du chapitre 2), on peut écrire logiquement :

$$\frac{1}{\sigma} \approx \frac{\mathrm{d}\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}}{\mathrm{d}y}(0) \tag{3.82}$$

Soit  $D_k \tilde{\delta}^{u_{\min}}_{T,J}(0)$  le « taux d'acroissement fini à droite, à k pas » en 0 de  $\tilde{\delta}^{u_{\min}}_{T,J}$ , tel que :

$$D_k \tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(0) = \frac{\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(k\Delta) - \tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(0)}{k\Delta} = \frac{\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(k\Delta)}{k\Delta}$$
(3.83)

avec k un entier  $\geq 1$  petit à choisir (par exemple compris entre 1 et 5) et  $\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(k\Delta)$  donné par :

$$\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(k\Delta) = -\mathrm{Ln}\left[\tilde{P}_T(k\Delta; u_{\min})\right] = -\mathrm{Ln}\left[\frac{\tilde{P}_T(k\Delta + u_{\min})}{\tilde{P}_T(u_{\min})}\right]$$
(3.84)

La valeur initiale  $\sigma_0$  de  $\sigma$  se tire alors de l'égalité :

$$\frac{1}{\sigma_0} = D_k \tilde{\delta}^{u_{\min}}_{T,J}(0) \tag{3.85}$$

Connaissant  $\sigma_0$ , considérons maintenant un point  $y_0$  de  $J = [0, u_{\text{max}} - u_{\text{min}}]$  suffisamment éloigné de l'origine et écrivons que les applications  $y \to \tilde{\delta}_{T,J}(y)$  et  $y \to \delta_J^{\mathcal{P}}(y;\gamma,\sigma_0)$  coïncident en ce point, autrement dit écrivons l'égalité :

$$\delta_J^{\mathcal{P}}(y_0;\gamma,\sigma_0) = \tilde{\delta}_{T,J}(y_0) \tag{3.86}$$

avec, d'après (3.49) et (3.53) :

$$\tilde{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}(y_0) = -\operatorname{Ln}\left[\frac{\tilde{P}_T(y_0 + u_{\min})}{\tilde{P}_T(u_{\min})}\right] \quad , \quad \delta_J^{\mathcal{P}}(y_0;\gamma,\sigma_0) = \frac{1}{\gamma}\operatorname{Ln}\left(1 + \frac{y_0}{\sigma_0}\gamma\right) \tag{3.87}$$

Posant:

$$f(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{y_0}{\sigma_0}\gamma\right) + \operatorname{Ln}\left[\frac{\tilde{P}_T(y_0 + u_{\min})}{\tilde{P}_T(u_{\min})}\right],\tag{3.88}$$

la valeur  $\gamma_0$  cherchée de  $\gamma$  s'obtient alors en résolvant l'équation non linéaire :

$$f(\gamma) = 0 \tag{3.89}$$

sous la contrainte :

$$\gamma < 0 \tag{3.90}$$

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre ce problème contraint. Nous avons utilisé l'algorithme de Newton-Raphson qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$
(3.91)

avec :

$$f(x_k) = \frac{1}{x_k} \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{y_0}{\sigma_0} x_k\right) + \operatorname{Ln}\left[\frac{\tilde{P}_T(y_0 + u_{\min})}{\tilde{P}_T(u_{\min})}\right]$$
(3.92)

$$f'(x_k) = \frac{1}{x_k} \left[ \frac{y_0}{\sigma_0 + y_0 x_k} - \frac{1}{x_k} \ln\left(1 + \frac{y_0}{\sigma_0} x_k\right) \right]$$
(3.93)

et où pour la valeur initiale de  $x_0$  il faut choisir, compte tenu de la contrainte (3.90), un nombre réel strictement négatif.

Une fois le couple  $(\gamma_0, \sigma_0)$  connu, le couple cherché  $(\gamma_{T,J}^{u_{\min}}, \sigma_{T,J}^{u_{\min}})$  s'obtient alors en résolvant le système non linéaire (3.79) sous la double contrainte  $\sigma < 0, \gamma > 0$  et en prenant pour condition initiale  $(\gamma_0, \sigma_0)$ .

# Chapitre 4

# Tests numériques

## 4.1 Exemples traités, résultats présentés

Les trois versions de la méthode exposées dans la chapitre 3 sont appliquées dans ce chapitre aux processus tests présentés dans le chapitre 2, les deux premières versions à la totalité des 23 processus, la troisième à 8 d'entre eux seulement : les processus gaussiens stationnaires référencés P1 et P2, les processus gaussiens non stationnaires référencés P3 et P4, les processus non gaussiens stationnaires référencés P5 et P8, et les processus non gaussiens non stationnaires référencés P10 et P22 (cette troisième version n'ayant pu être appliquée aux 15 autres processus par manque de temps).

Rappelons que pour 4 de ces processus (les processus référencés P1, P3, P5 et P10), les grandeurs  $P_T(u) = \mathbb{P}(M_T > u), u \ge 0, P_T(y; u_{\min}) = \mathbb{P}(M_T > y + u_{\min}|y > u_{\min}) = P_T(y + u_{\min})/P_T(u_{\min}), y \ge 0, \eta_T(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1 - P_T(u))\right], u \ge 0, \text{ et } \delta_T^{u_{\min}}(y) = -\text{Ln}\left[P_T(y; u_{\min})\right], y \ge 0, \text{ sont connues explicitement, alors que pour les 19 autres processus elles ne sont connues que numériquement à travers leurs estimées Monte-Carlo <math>\tilde{P}_T(u), u \ge 0, \tilde{P}_T(y; u_{\min}) = \tilde{P}_T(y + u_{\min})/\tilde{P}_T(u_{\min}), y \ge 0, \tilde{\eta}_T(u) = -\text{Ln}\left[-\text{Ln}(1 - \tilde{P}_T(u))\right], u \ge 0, \text{ et } \delta_T^{u_{\min}}(y) = -\text{Ln}\left[\tilde{P}_T(y; u_{\min})\right], y \ge 0, \text{ respectivement. Or, comme chacune d'elles est destinée à jouer le rôle de cible dans ces applications (cible à laquelle sera comparée la grandeur approchée correspondante fournie par chaque version), afin de gagner en clarté nous ne distinguerons pas, au niveau de la notation, celles qui sont exactes de celles issues d'une estimation Monte-Carlo et les désignerons désormais par <math>P_T^c(u), P_T^c(y; u_{\min}), \eta_T^c(u)$  et  $\delta_T^{u_{\min,c}}(y)$ , respectivement, avec, pour tout u et tout y dans  $\mathbb{R}_+$  :

$$P_T^c(u) = \begin{cases} P_T(u) \text{ pour les processus } P1, P3, P5 \text{ et } P10\\ \tilde{P}_T(u) \text{ pour tous les autres processus} \end{cases}$$
(4.1)

$$P_T^c(y; u_{\min}) = \begin{cases} P_T(y; u_{\min}) = \frac{P_T(y + u_{\min})}{P_T(u_{\min})} \text{ pour les processus } P1, P3, P5 \text{ et } P10\\ \tilde{P}_T(y; u_{\min}) = \frac{\tilde{P}_T(y + u_{\min})}{\tilde{P}_T(u_{\min})} \text{ pour tous les autres processus} \end{cases}$$
(4.2)

$$\eta_T^c(u) = \begin{cases} \eta_T(u) = -\operatorname{Ln}\left[-\operatorname{Ln}(1 - P_T(u))\right] \text{ pour les processus } P1, P3, P5 \text{ et } P10\\ \tilde{\eta}_T(u) = -\operatorname{Ln}\left[-\operatorname{Ln}(1 - \tilde{P}_T(u))\right] \text{ pour tous les autres processus} \end{cases}$$
(4.3)

$$\delta_T^{u_{\min},c}(y) = \begin{cases} \delta_T^{\min}(u) = -\operatorname{Ln}\left[P_T(y;u_{\min})\right] \text{ pour les processus } P1, P3, P5 \text{ et } P10\\ \tilde{\delta}_T^{\min}(u) = -\operatorname{Ln}\left[\tilde{P}_T(y;u_{\min})\right] \text{ pour tous les autres processus} \end{cases}$$
(4.4)

où les triplets  $(P_T(u), \eta_T(u), \delta_T^{u_{\min}}(y))$  relatifs aux processus P1, P3, P5 et P10 sont donnés par les relations ((2.8), (2.9), (2.10)), ((2.21), (2.22), (2.23)), ((2.32), (2.33), (2.34)) et ((2.62), (2.63), (2.64)), respectivement.

Rappelons par ailleurs que pour le calcul des estimées Monte-Carlo  $\tilde{P}_T(u), u \ge 0$ , et  $\tilde{P}_T(y; u_{\min}), y \ge 0$ ,  $L = 10^8$  réalisations (*i.e.* trajectoires) simulées sur  $\bar{T} = [0, T]$  du processus  $\nu$ , et donc  $L = 10^8$  réalisations de la variable aléatoire  $M_T = \sup_{t \in \bar{T}} \nu(t)$ , ont été utilisées dans chaque cas, à l'exception des exemples mettant en jeu les processus référencés P2, P4, P8, P18, P19, P22 et P23, pour lesquels  $L = 10^9$  réalisations simulées de ces grandeurs ont été utilisées.

Pour chacun des 23 processus tests traités par les deux premières versions de la méthode, les résultats suivants sont présentés :

(1) Comparaison, à travers leurs graphes respectifs, pour  $u \ge u_{\min}$ , de la fonction polynomiale  $u \to \bar{\eta}_T(u)$  définie par (3.3) à la fonction cible  $u \to \eta_T^c(u)$ . Le graphe de  $\eta_T^c$  est représenté en pointillés noirs, celui de  $\bar{\eta}_T$  en trait continu bicolore vert-rouge. La branche verte est relative à l'intervalle d'approximation  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$  (i.e. l'intervalle sur lequel la cible  $\eta_T^c$  a été approximée par l'application polynomiale  $\bar{\eta}_{T,I}$  définie par (3.2)) et représente la partie approximée de  $\bar{\eta}_T$  (c'est le graphe de l'application  $\bar{\eta}_{T,I}$ ). La branche rouge, relative à l'intervalle  $I^e = ]u_{\max}, +\infty[$ , représente sa partie extrapolée.

(2) Comparaison, à travers leurs graphes respectifs, pour  $y \ge 0$ , de la fonction polynomiale  $y \to \bar{\delta}_T^{u_{\min,c}}(y)$  définie par (3.10) à la fonction cible  $y \to \bar{\delta}_T^{u_{\min,c}}(y)$ . Le graphe de  $\bar{\delta}_T^{u_{\min,c}}$  est représenté en pointillés noirs, celui de  $\bar{\delta}_T^{u_{\min}}$  en trait continu bicolore vert-rouge. La branche verte est relative à l'intervalle d'approximation  $J = [0, u_{\max} - u_{\min}]$  (i.e. l'intervalle sur lequel la cible  $\bar{\delta}_T^{u_{\min,c}}$  a été approximée par l'application polynomiale  $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$  définie par (3.9)) et représente la partie approximée de  $\bar{\delta}_T^{u_{\min}}$  (c'est le graphe de l'application  $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$ ); la branche rouge, relative à l'intervalle  $J^e = ]u_{\max} - u_{\min}, +\infty[$ , représente sa partie extrapolée.

(3) Comparaison, à travers leurs graphes respectifs, pour  $y \ge 0$ , de la probabilité conditionnelle approchée  $y \to \bar{P}_T(y; u_{\min})$  définie par (3.12) à la probabilité conditionnelle cible  $y \to P_T^c(y; u_{\min})$ . Le graphe de  $P_T^c(\cdot; u_{\min})$  est représenté en pointillés noirs, celui de  $\bar{P}_T(\cdot; u_{\min})$  en trait continu bicolore vert-rouge, la branche verte étant relative à l'intervalle d'approximation  $J = [0, u_{\max} - u_{\min}]$ , la rouge à l'intervalle d'extrapolation  $J^e = ]u_{\max} - u_{\min}, +\infty[$ .

(4) Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$ , de l'erreur relative :

$$\Delta P_T(y; u_{\min}) = \frac{|P_T(y; u_{\min}) - P_T^c(y; u_{\min})|}{P_T^c(y; u_{\min})}$$
(4.5)

associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  de cette probabilité cible. Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T(y; u_{\min})$ en fonction de  $P_T^c(y; u_{\min})$  est représenté en trait bicolore vert-rouge, la branche verte étant relative à l'intervalle d'interpolation  $J = [0, u_{\max} - u_{\min}]$ , la rouge à l'intervalle d'extrapolation  $J^e =$  $]u_{\max} - u_{\min}, +\infty[$ . (5) Comparaison, à travers leurs graphes respectifs, pour  $u \ge u_{\min}$ , de la probabilité  $u \to \bar{P}_T^{(1)}(u)$ fournie par la version 1 de la méthode (formule (3.5)), à la probabilité cible  $u \to P_T^c(u)$ . Le graphe de  $P_T^c$  est représenté en pointillés noirs, celui de  $\bar{P}_T^{(1)}$  en trait continu bicolore vert-rouge, la branche verte étant relative à l'intervalle d'approximation  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$ , la rouge à l'intervalle d'extrapolation  $I^e = ]u_{\max}, +\infty[$ .

(6) Comparaison, à travers leurs graphes respectifs, pour  $u \ge u_{\min}$ , de la probabilité  $u \to \bar{P}_T^{(2)}(u)$ fournie par la version 2 de la méthode (formule (3.14)), à la probabilité cible  $u \to P_T^c(u)$ . Le graphe de  $P_T^c$  est représenté en pointillés noirs, celui de  $\bar{P}_T^{(2)}$  en trait continu bicolore vert-rouge, la branche verte étant relative à l'intervalle d'approximation  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$ , la rouge à l'intervalle d'extrapolation  $I^e = ]u_{\max}, +\infty[$ .

(7) Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives :

$$\Delta P_T^{(1)}(u) = \frac{|\bar{P}_T^{(1)}(u) - P_T^c(u)|}{P_T^c(u)} , \quad \Delta P_T^{(2)}(u) = \frac{|\bar{P}_T^{(2)}(u) - P_T^c(u)|}{P_T^c(u)}$$
(4.6)

associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (version 2) de cette probabilité cible. Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge, la branche verte étant relative à l'intervalle d'approximation  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$ , la rouge à l'intervalle d'extrapolation  $I^e = ]u_{\max}, +\infty[$ .

Pour les 8 processus tests ayant pu être traités par la troisième version de la méthode dans le temps alloué à la thèse (*i.e.* les processus référencés P1, P2, P3, P4, P5, P8, P10 et P22), les résultats présentés sont similaires à ceux relatifs à la seconde version, à savoir :

(1) Comparaison, à travers leurs graphes respectifs, de la fonction approximante  $y \to \bar{\delta}_T^{u_{\min,c}}(y)$ définie par (3.56) à la fonction cible  $y \to \delta_T^{u_{\min,c}}(y)$ . Le graphe de  $\delta_T^{u_{\min,c}}$  est représenté en pointillés noirs, celui de  $\bar{\delta}_T^{u_{\min}}$  en trait continu bicolore vert-rouge. La branche verte est relative à l'intervalle d'approximation  $J = [0, u_{\max} - u_{\min}]$  (i.e. l'intervalle sur lequel la cible  $\delta_T^{u_{\min,c}}$  a été approximée par l'application  $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$  définie par (3.55)) et représente la partie approximée de  $\bar{\delta}_T^{u_{\min}}$  (c'est le graphe de l'application  $\bar{\delta}_{T,J}^{u_{\min}}$ ); la branche rouge, relative à l'intervalle  $J^e = ]u_{\max} - u_{\min}, +\infty[$ , représente sa partie extrapolée.

(2) Comparaison, à travers leurs graphes respectifs, de la probabilité conditionnelle approchée  $y \to \bar{P}_T(y; u_{\min})$  définie par (3.59) à la probabilité conditionnelle cible  $y \to P_T^c(y; u_{\min})$ . Le graphe de  $P_T^c(\cdot; u_{\min})$  est représenté en pointillés noirs, celui de  $\bar{P}_T(\cdot; u_{\min})$  en trait continu bicolore vert-rouge, la branche verte étant relative à l'intervalle d'approximation  $J = [0, u_{\max} - u_{\min}]$ , la rouge à l'intervalle d'extrapolation  $J^e = ]u_{\max} - u_{\min}, +\infty[$ .

(3) Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$ , de l'erreur relative :

$$\Delta P_T(y; u_{\min}) = \frac{|\bar{P}_T(y; u_{\min}) - P_T^c(y; u_{\min})|}{P_T^c(y; u_{\min})}$$
(4.7)

associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  de cette probabilité cible. Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T(y; u_{\min})$ en fonction de  $P_T^c(y; u_{\min})$  est représenté en trait bicolore vert-rouge, la branche verte étant relative à l'intervalle d'interpolation  $J = [0, u_{\max} - u_{\min}]$ , la rouge à l'intervalle d'extrapolation  $J^e =$  $]u_{\max} - u_{\min}, +\infty[$ . (4) Comparaison, à travers leurs graphes respectifs, pour  $u \ge u_{\min}$ , de la probabilité  $u \to \bar{P}_T^{(3)}(u)$ fournie par la version 3 de la méthode (formule (3.64)), à la probabilité cible  $u \to P_T^c(u)$ . Le graphe de  $P_T^c$  est représenté en pointillés noirs, celui de  $\bar{P}_T^{(3)}$  en trait continu bicolore vert-rouge, la branche verte étant relative à l'intervalle d'approximation  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$ , la rouge à l'intervalle d'extrapolation  $I^e = ]u_{\max}, +\infty[$ .

(5) Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , de l'erreur relative :

$$\Delta P_T^{(3)}(u) = \frac{|\bar{P}_T^{(3)}(u) - P_T^c(u)|}{P_T^c(u)}$$
(4.8)

associées à l'approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  de cette probabilité cible. Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(3)}(u)$  en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu bicolore vert-rouge, la branche verte étant relative à l'intervalle d'approximation  $I = [u_{\min}, u_{\max}]$ , la rouge à l'intervalle d'extrapolation  $I^e = ]u_{\max}, +\infty[$ .

Les données numériques concernant les processus tests sont précisées dans le chapitre 2. Tous les algorithmes de simulation utilisés dans ces applications sont rappelés en annexe et détaillés dans le rapport  $T_0 + 18$  du projet MODNAT [http://sites.onera.fr/modnat]. Pour sept processus (les processus référencés P2, P4, P8, P18, P19, P22 et P23),  $L = 10^9$  réalisations simulées ont été utilisées pour estimer les probabilités cibles de comparaison. Pour les autres processus, c'est-à-dire les seize restants diminués des processus P1, P3, P5 et P10 (qui ne requièrent pas d'être simulés car permettant un calcul exact de ces probabilités), nous nous sommes limités à  $L = 10^8$  réalisations simulées afin de ne pas augmenter exagérément les temps de calcul (car ces simulations sont, pour la plupart, très chronophages!). Pour les processus P1, P3, P5 et P10, les expressions exactes des probabilités cibles  $P_T^c(u) = P_T(u)$ ,  $P_T^c(y; u_{\min}) = P_T(y; u_{\min})$  et des applications cibles associées  $\eta_T^c(u) = \eta_T(u)$ ,  $\delta_T^{u_{\min,c}}(y) = \delta_T^{u_{\min}}(y)$  (cf. formules (4.1)-(4.4)) sont données dans le chapitre 2 (paragraphes 2.1.1, 2.2.1, 2.3.1 et 2.4.1, respectivement). Nous les rappelons ci-dessous.

a) Processus P1

$$P_{T}^{c}(u) = P_{T}(u) = e^{-\frac{u^{2}}{2}} \quad (T \ge \frac{2\pi}{\omega})$$

$$P_{T}^{c}(y; u_{\min}) = P_{T}(y; u_{\min}) = e^{-(\frac{y^{2}}{2} + u_{\min}y)}$$

$$\eta_{T}^{c}(u) = \eta_{T}(u) = -\operatorname{Ln}\left[-\operatorname{Ln}(1 - e^{-\frac{u^{2}}{2}})\right]$$

$$\delta_{T}^{u_{\min}, c}(y) = \delta_{T}^{u_{\min}}(y) = \frac{y^{2}}{2} + u_{\min}y$$
(4.9)

b) Processus P3

$$P_{T}^{c}(u) = P_{T}(u) = 2\left(1 - \Phi(\frac{u}{\sqrt{T}})\right)$$

$$P_{T}^{c}(y; u_{\min}) = P_{T}(y; u_{\min}) = \frac{1 - \Phi(\frac{y + u_{\min}}{\sqrt{T}})}{1 - \Phi(\frac{u_{\min}}{\sqrt{T}})}$$

$$\eta_{T}^{c}(u) = \eta_{T}(u) = -\operatorname{Ln}\left[-\operatorname{Ln}\left(2\Phi(\frac{u}{\sqrt{T}}) - 1\right)\right]$$

$$\delta_{T}^{u_{\min}, c}(y) = \delta_{T}^{u_{\min}}(y) = -\operatorname{Ln}\left[\frac{1 - \Phi(\frac{y + u_{\min}}{\sqrt{T}})}{1 - \Phi(\frac{u_{\min}}{\sqrt{T}})}\right]$$
(4.10)

c) Processus P5

$$P_T^c(u) = P_T(u) = e^{-\lambda u} \quad (T \ge \frac{2\pi}{\omega})$$

$$P_T^c(y; u_{\min}) = P_T(y; u_{\min}) = e^{-\lambda y}$$

$$\eta_T^c(u) = \eta_T(u) = -\text{Ln}[-\text{Ln}(1 - e^{-\lambda y})]$$

$$\delta_T^{u_{\min}, c}(y) = \delta_T^{u_{\min}}(y) = \lambda y$$
(4.11)

d) Processus P10

$$P_{T}^{c}(u) = P_{T}(u) = (1 + \frac{e}{2\sigma^{2}}u)e^{-\frac{e}{2\sigma^{2}}u}$$

$$P_{T}^{c}(y; u_{\min}) = P_{T}(y; u_{\min}) = (1 + \frac{ey}{2\sigma^{2} + eu_{\min}})e^{-\frac{e}{2\sigma^{2}}y}$$

$$\eta_{T}^{c}(u) = \eta_{T}(u) = -\text{Ln}[-\text{Ln}(1 - (1 + \frac{e}{2\sigma^{2}}u)e^{-\frac{e}{2\sigma^{2}}u})]$$

$$\delta_{T}^{u_{\min},c}(y) = \delta_{T}^{u_{\min}}(y) = \frac{e}{2\sigma^{2}}y - \text{Ln}(1 + \frac{ey}{2\sigma^{2} + eu_{\min}})$$
(4.12)

## 4.2 Test numériques des versions 1 et 2

## 4.2.1 Résultats relatifs au processus P1

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P1-G1 à P1-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres  $\omega$ , T,  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$ :

$$\omega = 1, T = 2\pi, u_{\min} = 3.0349, u_{\max} = 3.7169$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 1.



**FIGURE P1-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P1-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P1-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P1-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P1-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P1-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	0.4908
$b_{T,I}$	0.0686
$c_{T,I}$	-0.1279
$a_{T,J}^{u_{min}}$	0.4998
$b_{T,J}^{u_{min}}$	3.0350

**Tableau 1-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P1-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$  associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

### 4.2.2 Résultats relatifs au processus P2

Les divers résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P2-G1 à P2-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 100, u_{\min} = 4.87, u_{\max} = 5.33, L = 10^9$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 2.



**FIGURE P2-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P2-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P2-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P2-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P2-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P2-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	0.5736
$b_{T,I}$	-0.8301
$c_{T,I}$	-4.9524
$a_{T,J}^{u_{min}}$	0.5884
$b_{T,J}^{u_{min}}$	4.7414

**Tableau 2-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P2-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$  associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

### 4.2.3 Résultats relatifs au processus P3

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P3-G1 à P3-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$ :

$$T = 5, u_{\min} = 5.76, u_{\max} = 7.36$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 3.



**FIGURE P3-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P3-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P3-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P3-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P3-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P3-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	0.0910
$b_{T,I}$	0.2492
$c_{T,I}$	0.1451
$a_{T,J}^{u_{min}}$	0.0926
$b_{T,J}^{u_{min}}$	1.2929

**Tableau 3-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P3-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$  associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

### 4.2.4 Résultats relatifs au processus P4

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P4-G1 à P4-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 50, u_{\min} = 0.0181, u_{\max} = 0.0203, L = 10^{9}$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 4.



**FIGURE P4-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P4-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P4-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P4-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P4-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P4-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$2.7291\times 10^4$
$b_{T,I}$	-38.9479
$c_{T,I}$	-3.5918
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$2.7046\times 10^4$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$9.4601\times 10^2$

**Tableau 4-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P4-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$  associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

### 4.2.5 Résultats relatifs au processus P5

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P5-G1 à P5-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres  $\omega$ ,  $\lambda$ , T,  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$ :

$$\omega = 1, \lambda = 1.5, T = 2, u_{\min} = 3.0701, u_{\max} = 4.6052$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 5.



**FIGURE P5-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P5-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P5-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P5-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P5-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P5-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	-0.0020
$b_{T,I}$	1.5178
$c_{T,I}$	-0.0409
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$-0.2122 \times 10^{-5}$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	1.5000

**Tableau 5-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P5-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$  associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.
#### 4.2.6 Résultats relatifs au processus P6

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P6-G1 à P6-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 100, u_{\min} = 5.01, u_{\max} = 5.46, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 6.



**FIGURE P6-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P6-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P6-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min,c}}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P6-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P6-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P6-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	0.4023
$b_{T,I}$	0.9240
$c_{T,I}$	-10.1445
$a_{T,J}^{u_{min}}$	0.4809
$b_{T,J}^{u_{min}}$	4.9056

**Tableau 6-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P6-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$  associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.7 Résultats relatifs au processus P7

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P7-G1 à P7-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 8000, u_{\min} = 0.0276, u_{\max} = 0.0300, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 7.



**FIGURE P7-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P7-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P7-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min,c}}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P7-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P7-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P7-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	-226.6560
$b_{T,I}$	927.8743
$c_{T,I}$	-20.7832
$a_{T,J}^{u_{min}}$	1.6978
$b_{T,J}^{u_{min}}$	912.8483

**Tableau 7-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P7-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$  associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.8 Résultats relatifs au processus P8

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P8-G1 à P8-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 5, u_{\min} = 0.0085, u_{\max} = 0.0092, L = 10^9$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 8.



**FIGURE P8-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P8-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P8-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P8-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P8-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P8-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$3.2743\times10^5$
$b_{T,I}$	$-2.4153\times10^3$
$c_{T,I}$	1.4124
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$3.4723\times10^5$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$3.1417\times 10^3$

**Tableau 8-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P8-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$  associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

#### 4.2.9 Résultats relatifs au processus P9

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P9-G1 à P9-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 5, u_{\min} = 0.0086, u_{\max} = 0.0096, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 9.



**FIGURE P9-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P9-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P9-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P9-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P9-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P9-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$3.1863\times 10^5$
$b_{T,I}$	$-2.2792\times10^{3}$
$c_{T,I}$	0.6417
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$3.3783\times10^5$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$3.1785\times10^3$

**Tableau 9-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P9-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$  associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.10 Résultats relatifs au processus P10

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P10-G1 à P10-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres  $\sigma$ , T, u<sub>min</sub> et  $u_{max}$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{e}{2}}, T = 2\pi, u_{\min} = 6.6442, u_{\max} = 9.1795$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 10.



**FIGURE P10-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P10-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P10-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P10-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P10-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P10-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$5.6598 \times 10^{-3}$
$b_{T,I}$	0.7994
$c_{T,I}$	-0.9563
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$6.5611 \times 10^{-3}$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	0.8706

**Tableau 10-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P10-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.11 Résultats relatifs au processus P11

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P11-G1 à P11-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 50, u_{\min} = 0.0231, u_{\max} = 0.0242, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 11.



**FIGURE P11-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P11-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P11-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P11-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P11-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P11-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$1.7836\times 10^5$
$b_{T,I}$	$6.4878\times 10^3$
$c_{T,I}$	$5.9467\times 10^1$
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$1.7437\times 10^5$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$1.7551\times 10^3$

**Tableau 11-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P11-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.12 Résultats relatifs au processus P12

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P12-G1 à P12-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 5, u_{\min} = 0.0230, u_{\max} = 0.0242, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 12.



**FIGURE P12-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P12-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P12-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P12-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P12-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P12-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$1.7692\times 10^5$
$b_{T,I}$	$-6.4194\times10^4$
$c_{T,I}$	58.6560
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$1.7484\times10^{5}$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$1.7190\times 10^3$

**Tableau 12-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P12-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.13 Résultats relatifs au processus P13

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P13-G1 à P13-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 5, u_{\min} = 0.0234, u_{\max} = 0.0245, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 13.



**FIGURE P13-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P13-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P13-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P13-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P13-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P13-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$1.7522\times 10^5$
$b_{T,I}$	$-6.3397\times10^{3}$
$c_{T,I}$	$5.7023\times10^{1}$
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$1.7536\times 10^5$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$1.8578\times 10^2$

**Tableau 13-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P13-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.14 Résultats relatifs au processus P14

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P14-G1 à P14-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 20, u_{\min} = 0.0432, u_{\max} = 0.0483, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 14.



**FIGURE P14-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P14-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P14-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P14-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P14-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P14-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$7.6087 \times 10^3$
$b_{T,I}$	$-2.4567\times10^2$
$c_{T,I}$	1.0584
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$7.6891 \times 10^3$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$4.1059\times 10^2$

**Tableau 14-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P14-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.15 Résultats relatifs au processus P15

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P15-G1 à P15-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 20, u_{\min} = 0.0434, u_{\max} = 0.0485, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 15.



**FIGURE P15-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P15-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P15-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P15-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P15-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P15-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$7.8059\times10^3$
$b_{T,I}$	$-2.6784\times10^2$
$c_{T,I}$	1.5188
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$7.8549 \times 10^3$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$4.0906\times 10^2$

**Tableau 15-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P15-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.16 Résultats relatifs au processus P16

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P16-G1 à P16-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 30, u_{\min} = 0.0174, u_{\max} = 0.0192, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 16.



**FIGURE P16-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P16-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P16-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P16-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P16-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P16-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$4.6920\times 10^4$
$b_{T,I}$	$-4.6968\times10^2$
$c_{T,I}$	-1.4785
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$4.7941 \times 10^4$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$1.1624\times 10^3$

**Tableau 16-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P16-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.17 Résultats relatifs au processus P17

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P17-G1 à P17-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 30, u_{\min} = 0.0177, u_{\max} = 0.0195, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 17.



**FIGURE P17-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P17-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P17-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P17-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P17-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P17-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$4.5957 \times 10^{4}$
$b_{T,I}$	$-4.5083\times10^2$
$c_{T,I}$	-1.8045
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$4.7037\times10^4$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$1.1719\times 10^3$

**Tableau 17-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P17-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.18 Résultats relatifs au processus P18

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P18-G1 à P18-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 30, u_{\min} = 0.0425, u_{\max} = 0.0476, L = 10^9$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 18.



**FIGURE P18-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P18-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P18-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P18-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P18-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P18-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$5.2752\times10^3$
$b_{T,I}$	-26.6595
$c_{T,I}$	-3.8003
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$5.5216 \times 10^3$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$4.1979\times 10^2$

**Tableau 18-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P18-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.19 Résultats relatifs au processus P19

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P19-G1 à P19-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 30, u_{\min} = 0.0426, u_{\max} = 0.0476, L = 10^9$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 19.



**FIGURE P19-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P19-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P19-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P19-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P19-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P19-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$5.2535 \times 10^3$
$b_{T,I}$	-24.7118
$c_{T,I}$	-3.8439
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$5.4913 \times 10^3$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$4.2027\times 10^2$

**Tableau 19-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P19-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.20 Résultats relatifs au processus P20

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P20-G1 à P20-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 20, u_{\min} = 0.0388, u_{\max} = 0.0428, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 20.



**FIGURE P20-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P20-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P20-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min,c}}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P20-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P20-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P20-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$1.3099\times 10^4$
$b_{T,I}$	$-5.0036\times10^2$
$c_{T,I}$	4.2984
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$1.3272\times 10^4$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$5.1449\times 10^2$

**Tableau 20-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P20-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.21 Résultats relatifs au processus P21

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P21-G1 à P21-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 20, u_{\min} = 0.0393, u_{\max} = 0.0433, L = 10^8$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 21.



**FIGURE P21-G1-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P21-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P21-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P21-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P21-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P21-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$1.3279\times 10^4$
$b_{T,I}$	$-5.2453\times10^2$
$c_{T,I}$	4.7120
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$1.3452\times10^4$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$5.1758\times 10^2$

**Tableau 21-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P21-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.22 Résultats relatifs au processus P22

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P22-G1 à P22-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 20, u_{\min} = 0.0435, u_{\max} = 0.0517, L = 10^9$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 22.



**FIGURE P22-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P22-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P22-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min,c}}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P22-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P22-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P22-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$2.4624\times 10^3$
$b_{T,I}$	40.4749
$c_{T,I}$	-1.8248
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$2.4726\times 10^3$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	$2.5422\times 10^2$

**Tableau 22-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P22-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.

# 4.2.23 Résultats relatifs au processus P23

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P23-G1 à P23-G7. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 20, u_{\min} = 0.0442, u_{\max} = 0.0526, L = 10^{9}$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (formule (3.5)) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  (formule (3.14)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.12)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés par la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 23.



**FIGURE P23-G1-** Graphes, pour  $u \geq u_{min}$ , de la fonction cible  $\eta_T^c$  (pointillés noirs) et de son approximée-extrapolée polynomiale  $\bar{\eta}_T$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P23-G3-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P23-G2-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min,c}}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée polynomiale  $\bar{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P23-G4-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P23-G5-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  fournie par la version 1 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P23-G6-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$  fournie par la version 2 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).

Coefficients	Valeurs
$a_{T,I}$	$2.5016\times 10^3$
$b_{T,I}$	33.0699
$c_{T,I}$	-1.7485
$a_{T,J}^{u_{min}}$	$2.3608\mathrm{e}{\times}10^3$
$b_{T,J}^{u_{min}}$	255.2795

**Tableau 23-** Valeurs des coefficients des approximations (3.5), (3.12) et (3.14) des probabilités cibles  $P_T^c(u)$  et  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P23-G7-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , des erreurs relatives  $\Delta P_T^{(1)}(u)$  et  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ associées aux approximations  $\bar{P}_T^{(1)}(u)$  (version 1) et  $\bar{P}_T^{(2)}(u)$ (version 1) de  $P_T^c(u)$ . Le graphe de l'évolution de  $\Delta P_T^{(1)}(u)$ (resp.  $\Delta P_T^{(2)}(u)$ ) en fonction de  $P_T^c(u)$  est représenté en trait continu (resp. discontinu) bicolore vert-rouge.
#### 4.3 Test numériques de la version 3

#### 4.3.1 Résultats relatifs au processus P1

Les divers résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P1-C1 à P1-C5. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres  $\omega$ , T,  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$ :

$$\omega = 1, T = 2\pi, u_{\min} = 3.0349, u_{\max} = 3.7169$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  (formule (3.64)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.59)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 24.



**FIGURE P1-C1-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée  $\overline{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P1-C2-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P1-C3-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P1-C4-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  fournie par la version 3 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P1-C5-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T^{(3)}(u)$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  de  $P_T^c(u)$ .

Coefficients	Valeurs
$\gamma_{T,J}^{u_{\min}}$	-0.0856
$\sigma_{T,J}^{u_{\min}}$	0.3258

**Tableau 24-** Valeurs des coefficients des approximations  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  et  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  des probabilités cibles  $P_T^c(y; u_{min})$  et  $P_T^c(u)$ .

#### 4.3.2 Résultats relatifs au processus P2

Les divers résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P2-C1 à P2-C5. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 100, u_{\min} = 4.87, u_{\max} = 5.33, L = 10^9$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  (formule (3.64)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.59)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 25.



**FIGURE P2-C1-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min,c}}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée  $\bar{\bar{\delta}}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P2-C2-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P2-C3-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\overline{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P2-C4-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  fournie par la version 3 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P2-C5-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T^{(3)}(u)$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  de  $P_T^c(u)$ .

Coefficients	Valeurs
$\gamma^{u_{\min}}_{T,J}$	-0.0430
$\sigma^{u_{\min}}_{T,J}$	0.2095

**Tableau 25-** Valeurs des coefficients des approximations  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  et  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  des probabilités cibles  $P_T^c(y; u_{min})$  et  $P_T^c(u)$ .

#### 4.3.3 Résultats relatifs au processus P3

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P3-C1 à P3-C5. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$ :

$$T = 5, u_{\min} = 5.76, u_{\max} = 7.36$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  (formule (3.64)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.59)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 26.



**FIGURE P3-C1-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée  $\overline{\bar{\delta}}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P3-C2-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P3-C3-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P3-C4-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  fournie par la version 3 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P3-C5-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T^{(3)}(u)$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  de  $P_T^c(u)$ .

Coefficients	Valeurs
$\gamma^{u_{\min}}_{T,J}$	-0.0911
$\sigma^{u_{\min}}_{T,J}$	0.7687

**Tableau 26-** Valeurs des coefficients des approximations  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  et  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  des probabilités cibles  $P_T^c(y; u_{min})$  et  $P_T^c(u)$ .

#### 4.3.4 Résultats relatifs au processus P4

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P4-C1 à P4-C5. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 50, u_{\min} = 0.0181, u_{\max} = 0.0203, L = 10^9$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  (formule (3.64)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.59)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 27.



**FIGURE P4-C1-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée  $\overline{\bar{\delta}}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P4-C2-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\overline{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P4-C3-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P4-C4-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  fournie par la version 3 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P4-C5-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T^{(3)}(u)$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  de  $P_T^c(u)$ .

Coefficients	Valeurs
$\gamma_{T,J}^{u_{\min}}$	-0.0541
$\sigma_{T,J}^{u_{\min}}$	0.0011

**Tableau 27-** Valeurs des coefficients des approximations  $\bar{P}_T(y; u_{min})$  et  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  des probabilités cibles  $P_T^c(y; u_{min})$  et  $P_T^c(u)$ .

#### 4.3.5 Résultats relatifs au processus P5

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P5-C1 à P5-C5. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres  $\omega$ ,  $\lambda$ , T,  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$ :

$$\omega = 1, \lambda = 1.5, T = 2, u_{\min} = 3.0701, u_{\max} = 4.6052$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  (formule (3.64)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.59)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 28.



**FIGURE P5-C1-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée  $\overline{\bar{\delta}}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P5-C2-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P5-C3-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P5-C4-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  fournie par la version 3 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P5-C5-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T^{(3)}(u)$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  de  $P_T^c(u)$ .

Coefficients	Valeurs
$\gamma_{T,J}^{u_{\min}}$	1.8861e-5
$\sigma_{T,J}^{u_{\min}}$	0.6666

**Tableau 28-** Valeurs des coefficients des approximations  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  et  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  des probabilités cibles  $P_T^c(y; u_{min})$  et  $P_T^c(u)$ .

#### 4.3.6 Résultats relatifs au processus P8

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P8-C1 à P8-C5. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 5, u_{\min} = 0.0085, u_{\max} = 0.0092, L = 10^9$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  (formule (3.64)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.59)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 29.



**FIGURE P8-C1-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée  $\overline{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P8-C2-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\overline{P}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P8-C3-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\overline{P}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P8-C4-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  fournie par la version 3 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P8-C5-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T^{(3)}(u)$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  de  $P_T^c(u)$ .

Coefficients	Valeurs
$\gamma_{T,J}^{u_{\min}}$	-0.0572
$\sigma_{T,J}^{u_{\min}}$	3.1568e-4

**Tableau 29-** Valeurs des coefficients des approximations  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  et  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  des probabilités cibles  $P_T^c(y; u_{min})$  et  $P_T^c(u)$ .

#### 4.3.7 Résultats relatifs au processus P10

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P10-C1 à P10-C5. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres  $\sigma$ , T, u<sub>min</sub> et  $u_{max}$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{e}{2}}, T = 2\pi, u_{\min} = 6.6442, u_{\max} = 9.1795$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  (formule (3.64)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{P}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.59)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 30.



**FIGURE P10-C1-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée  $\overline{\bar{\delta}}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P10-C2-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P10-C3-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P10-C4-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  fournie par la version 3 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P10-C5-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T^{(3)}(u)$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  de  $P_T^c(u)$ .

Coefficients	Valeurs
$\gamma^{u_{\min}}_{T,J}$	-0.0167
$\sigma^{u_{\min}}_{T,J}$	1.1484

**Tableau 30-** Valeurs des coefficients des approximations  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  et  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  des probabilités cibles  $P_T^c(y; u_{min})$  et  $P_T^c(u)$ .

#### 4.3.8 Résultats relatifs au processus P22

Les résultats obtenus pour ce processus sont synthétisés graphiquement sur les figures P22-C1 à P22-C5. Ils sont relatifs aux valeurs suivantes des paramètres T,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  et L (nombre de trajectoires simulées) :

$$T = 20, u_{\min} = 0.0435, u_{\max} = 0.0517, L = 10^9$$

Les coefficients intervenant dans les approximations  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  (formule (3.64)) de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , et dans celle :  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{\min})$  (formule (3.59)) de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{\min})$  ont été calculés à l'aide de la méthode des moindres carrés pondérés. Leurs valeurs sont données dans le tableau 31.



**FIGURE P22-C1-** Graphes de la fonction cible  $\delta_T^{u_{min},c}$  (pointillés noirs) et de son approximéeextrapolée  $\overline{\delta}_T^{u_{min}}$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P22-C2-** Graphes de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P22-C3-** Evolution, en fonction de la probabilité conditionnelle cible  $P_T^c(y; u_{min})$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T(y; u_{min})$  associée à l'approximation  $\overline{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  de  $P_T^c(y; u_{min})$ .



**FIGURE P22-C4-** Graphes, pour  $u \ge u_{min}$ , de la probabilité cible  $P_T^c(u)$  (pointillés noirs) et de son approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  fournie par la version 3 de la méthode (trait continu bicolore vert-rouge).



**FIGURE P22-C5-** Evolution, en fonction de la probabilité cible  $P_T^c(u)$ , de l'erreur relative  $\Delta P_T^{(3)}(u)$  associée à l'approximation  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  de  $P_T^c(u)$ .

Coefficients	Valeurs
$\gamma^{u_{\min}}_{T,J}$	-0.0430
$\sigma^{u_{\min}}_{T,J}$	0.0038

**Tableau 31-** Valeurs des coefficients des approximations  $\bar{\bar{P}}_T(y; u_{min})$  et  $\bar{P}_T^{(3)}(u)$  des probabilités cibles  $P_T^c(y; u_{min})$  et  $P_T^c(u)$ .

### 4.4 Synthèse des résultats obtenus par les trois versions de la méthode

Rappelons que l'objectif de ce travail de thèse était de développer une méthodologie permettant d'estimer avec une bonne précision des probabilités de dépassement faibles (*i.e.* de l'ordre de  $10^{-6}$ ).

Les trois versions de la méthode proposée répondent à cet objectif. Cependant, un examen détaillé des résultats obtenus avec les 23 processus étudiés fait apparaître quelques différences dans les performances de ces versions.

Sous l'hypothèse " $u_{min}$  suffisamment grand", nous avons montré au paragraphe 3.3 que les versions 1 et 2 de la méthode sont liées via des relations linéaires entre les coefficients des polynômes intervenant dans leurs expressions. Il était donc naturel de s'attendre, dans le cadre de cette hypothèse, à ce que les deux versions fournissent des résultats très proches. C'est ce que nous pouvons observer sur la quasitotalité des exemples traités, les petits écarts constatés relevant principalement de raisons calculatoires (résolution numérique de problèmes différents). Dans le cas particulier du processus P5, la version 2 de la méthode est beaucoup plus précise que la version 1. Ceci s'explique facilement en comparant, pour ce processus, l'expression théorique de  $\delta_T^{umin}$  (y) =  $\lambda y$ , qui correspond exactement à l'expression de l'approximation de la version 2 :  $\bar{\delta}_T^{umin}(y) = a_{T,J}^{umin} y^2 + b_{T,J}^{umin} y$ , avec  $a_{T,J}^{umin} = 0$  et  $b_{T,J}^{umin} = \lambda$ , alors que l'expression théorique de  $\eta_T$  :  $\eta_T(u) = -\text{Ln} \left[-\text{Ln}(1 - e^{-\lambda u})\right]$ , ne coïncide pas dans ce cas avec celle de l'approximation de la version 1 :  $\bar{\eta}_T(u) = a_{T,I}u^2 + b_{T,I}u + c_{T,I}$ .

On peut par ailleurs observer que la version 3 de la méthode est moins précise que les deux précédentes. Ceci tient tout simplement au fait que, de par son expression, elle ne permet pas d'approximer correctement la courbure du graphe de la fonction cible  $\bar{\delta}_T^{u_{\min,c}}$  en zone de seuils élevés. Ceci est vérifié numériquement pour la quasi-totalité des processus testés à l'exception du processus P5, cas particulier pour lequel l'expression théorique de  $\delta_T^{u_{\min}}: \delta_T^{u_{\min}}(y) = \lambda y$ , correspond exactement à l'expression de la version  $3: \bar{\delta}_T^{u_{\min}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}} \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{\gamma_{T,J}^{u_{\min}}}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}}y\right) &, \forall y \ge 0 \\ \frac{y}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}}, \forall y \ge 0 \\ \frac{y}{\sigma_{T,J}^{u_{\min}}}, \forall y \ge 0 \end{cases}$ , si  $\gamma_{T,J}^{u_{\min}} = 0$ 

 $\gamma_{T,J}^{u_{\min}} = 0$ ,  $\sigma_{T,J}^{u_{\min}} = \frac{1}{\lambda}$ . Ajoutons que le calcul des paramêtres de cette version requiert la résolution d'un système non linéaire, ce qui la complexifie quelque peu.

Ainsi, à une exception près, la troisième version est moins performante que les deux premières. Cependant, des applications numériques non présentées dans ce travail montrent qu'elle est malgré tout très compétitive par rapport aux méthodes existantes, notamment celles basées sur la théorie des valeurs extrêmes.

Notons que les valeurs des erreurs obtenues avec les différentes versions sont à nuancer en fonction du nombre de simulations Monte-Carlo choisi pour le calcul des probabilités cibles de comparaison. En effet, logiquement, plus le nombre de simulations est élevé, meilleure est l'estimation Monte-Carlo de la probabilité cible. Or, les résultats montrent que le précision de l'approximation proposée est d'autant meilleure que la cible est bien estimée, et ceci pour chacune des trois versions. Il importe donc de garder à l'esprit en examinant les résultats obtenus que, paradoxalement, une grande partie de l'erreur d'approximation est imputable à la qualité de l'estimation Monte-Carlo de la probabilité cible. Ainsi, comme on peut l'observer sur tous les résultats présentés, pour les cas tests où la probabilité cible a été calculée avec  $10^9$  simulations, l'erreur d'approximation est beaucoup plus faible que pour ceux où seules  $10^8$  simulations ont été utilisées.

Enfin, concernant l'estimation Monte-Carlo des probabilités cibles de comparaison, on peut observer qu'elles ne sont pas accompagnées, comme il se devrait en contexte Monte-Carlo, de leurs intervalles de confiance. Cette lacune, attribuable au seul manque de temps, sera comblée dans la version finale du document.

## Conclusion

Rappelons que l'objectif de cette thèse était le développement d'une méthode d'approximation pour le calcul des probabilités du type :  $P_T(u) = \mathbb{P}(\sup_{t \in \bar{T}} \nu(t) > u)$ , avec  $\bar{T} = [0, T]$ ,  $0 < T < +\infty$ ,  $\nu$  un processus scalaire *a priori* quelconque (notamment non gaussien, non stationnaire) et *u* un réel "grand", c'est-à-dire tel que  $P_T(u) \leq 10^{-4}$ .

Nous sommes partis pour cela d'une étude initiale réalisée dans le cadre du projet MODNAT (étude détaillée dans le rapport  $T_0 + 18$  du partenaire Institut Pascal de ce projet) et qui consistait, entre autres, à étudier en contexte Monte-Carlo le comportement de la probabilité  $P_T(u)$  en fonction de u pour une gamme étendue et variée de processus stochastiques.

Une analyse approfondie des résultats de cette étude nous a alors permis de mettre en évidence deux fonctions liées explicitement (l'une directement, l'autre indirectement) à la probabilité cible et possédant chacune une propriété récurrente remarquable qui, judicieusement exploitée dans une procédure numérique basée sur une technique d'approximation bas niveau - extrapolation haut niveau, nous a permis d'élaborer une méthode de calcul performante de  $P_T(u)$ , déclinée en trois versions dans ce rapport.

Testée à travers de nombreuses applications numériques mettant en jeu des processus de tous types (gaussiens stationnaires, gaussiens non stationnaires, non gaussiens stationnaires, non gaussiens non stationnaires), cette méthode s'est révélée particulièrement performante dans ses deux premières versions. Elle présente en outre un triple intérêt pratique : (1) elle est facile à mettre en oeuvre, (2) elle n'est pas chronophage et (3) son domaine de validité n'est pas limité qu'aux grandes valeurs de u, puisque les approximations de  $P_T(u)$  qu'elle fournit dans chacune de ses versions (y compris la troisième) sont valables dès que  $u \ge u_{\min}$ , où  $u_{\min}$  est une valeur plancher de u pour laquelle  $P_T(u) \approx$  $10^{-2}$ . De plus, comme le montrent les tests numériques effectuées, les approximations auxquelles elle conduit restent de très bonne qualité jusqu'à des probabilités de l'ordre de  $10^{-6}$ - $10^{-7}$ , voire moins, c'est-à-dire jusqu'à des seuils de franchissement élevés.

C'est par conséquent une méthode à large champ d'applications qui pourrait, par exemple, être d'une grande utilité pour la quantification des probabilités de défaillance en analyse fiabiliste des systèmes dynamiques.

Elle permet également, dans ses versions 2 et 3, d'obtenir de très bonnes approximations des probabilités conditionnelles du type  $\mathbb{P}(\sup_{t\in\bar{T}}\nu(t) > u + y | \sup_{t\in\bar{T}}\nu(t) > u), y \ge 0$ , et pourrait donc, de ce fait, être aussi utilisée comme outil de prédiction de déclanchements d'alertes. Elle pourrait ainsi jouer un rôle d'intérêt dans le domaine de l'analyse des risques. En outre, considérée dans sa version 2, elle permettrait, compte tenu du caractère peu chronophage de cette dernière, de réajuster en temps réel les niveaux de déclanchement.

Les applications présentées montrent clairement que les deux premières versions sont remarquablement efficaces et dans la quasi-totalité des cas (*i.e.* tous sauf un) plus performantes que la troisième. Celle-ci présente toutefois sur ces dernières l'intérêt d'établir un lien direct avec la théorie des valeurs extrêmes.

Ces applications ont mobilisé, dans leur étape de quantification Monte-Carlo des probabilités cibles de comparaison, des temps de calcul extrêmement importants (de l'ordre de quelques semaines à plusieurs mois) qui n'ont malheureusement pas permis, sur la durée impartie à la thèse, de traiter des exemples concrets directement tirés de problèmes réels de modélisation de phénomènes naturels (vent, houle, séismes,...). La suite logique de cette thèse serait d'envisager un tel travail. Il serait en outre judicieux, chose qui n'a pu être faite pour la même raison, de tester la robustesse de la méthode (notamment dans ses versions "performantes" 1 et 2) en menant une étude paramétrique systématique portant, entre autres, sur la longueur T de l'intervalle d'observation  $\overline{T} = [0, T]$  et, dans le cas stationnaire, sur la largeur de bande du processus, paramètres très importants du comportement extrême des processus. Enfin, il serait intéressant, et ce travail est en cours de lancement, de confronter cette méthode aux méthodes existantes dans le cadre d'un benchmark afin de juger objectivement de sa qualité.

## Bibliographie

- [1] Aldous D. Probability approximations via the Poisson clumping heuristic. Springer-Verlag, 1989.
- [2] Azaïs J-M., Wschebor M. Level sets and extrema of random processes and fields. John Wiley, 2009.
- [3] Azaïs J-M., Wschebor M. The distribution of the maximum of a Gaussian process : Rice method revisited. Coll. Progress in Probability, pp. 321-348, 2002.
- [4] Azaïs J-M., Wschebor M. Une formule pour calculer la distribution du maximum d'un processus stochastique. C.R. Acad. Sci, Paris, t.324, série I, pp. 225-230, 1997.
- [5] Belyaev Y.K. On the number of exits across the boundary of a region by a vector stochastic process. Theory of Probability and its Applications, (13), pp. 320-324, 1968.
- [6] Belyaev Y.K. On the number of crossings of a level by a Gaussian random process. Theory of Probability and its Applications, (12), pp. 392-404, 1967.
- [7] Berman S.M. Sojourns and extremes of Gaussian processes. Probability Series, Wadsworth Brooks-Cole, 1992.
- [8] Berman S.M. Escursions above high levels for stationary Gaussian processes. Pacific Journal of Mathematics, (36), pp. 63-79, 1971.
- Cérou F., Del Moral P., Furon T., Guyader A. Sequential Monte Carlo for rare event estimation. Statistics and Computing, (22), 3, pp. 795-808, 2012.
- [10] Cramer H., Leadbetter M.R. Stationary and related stochastic processes : sample fonction properties and their applications. John Wiley, 1967.
- [11] Cramer H. Mathematical methods of statistics. Princeton University Press. 1946.
- [12] De Haan L., Ferreira A. Extreme value theory : an introduction. Springer, 2000.
- [13] De Long D.M. Crossing probabilities for a square root boundary by a Bessel process. Communications in Statistics - Theory and Methods, (10), 21, pp. 2197-2213, 1981
- [14] Diebolt J., Posse C. On the density of the maximum of smooth Gaussian processes. The Annals of Probability, (24), pp.1104-1129, 1996.
- [15] Diebolt J. Sur la loi du maximum de certains processus stochastiques. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 24, No 3-4, pp.31-67, 1979.

- [16] Droesbeke J.-J., Maumy-Bertrand M., Saporta G., Thomas-Agnan C. Approches statistiques du risque. Technip, 2014.
- [17] Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer. Collection Stochastic Modelling and Applied Probability, 33. 2003.
- [18] Grigoriu M., Samorodnitsky G. Reliability of dynamic systems in random environment by extreme value theory. Probabilistic Engineering Mechanics, (38), pp. 54-69, 2014.
- [19] Kratz M. Level crossings and other level functionals of stationary Gaussian processes. Probability Surveys, Vol.3, pp. 230-288, 2006.
- [20] Kratz M. Some contributions in probability and statistics of extremes. Rapport d'HDR, Université Panthéon-Sorbonne, Paris I, 15 nov. 2005.
- [21] Landau H.J., Shepp L.A. On the supremum of a Gaussian process. The Indian Journal of Statistics, Series A, (32), 4, pp. 369-378, 1970.
- [22] Leadbetter M.R., Lindgren G., Rootzen H. Extremes and related properties of random sequences and processes. Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [23] Leadbetter M.R. On crossings of levels and curves by a wide class of stochastic processes. The Annals of Mathematical Statistics, (37), pp. 260-267, 1966.
- [24] Lutes L.D., Chen Y.T., Tzuang S.H. First-passage approximation for simple oscillators. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, (106), pp. 1111-1124, 1980.
- [25] Mercadier C. Numerical bounds for the distribution of the maximum of one- and two- parameter processes. Advance in Applied Probability, (38), 1, pp. 149-170, 2006.
- [26] Michaelov G., Sarkani S., Lutes L.D. Fractile levels for non-stationary extreme response of linear structures. Structural Safety, (18), pp. 11-31, 1996.
- [27] Miroshin R.N. The use of Rice series. Theory of Probability and its Applications, (28), pp. 714-726, 1983.
- [28] Miroshin R.N. Rice series in the theory of random functions. Vestnik Leningrad University of Mathematics, (1), pp. 143-155, 1974.
- [29] Naess A., Gaidai O. Monte Carlo Method for estimating the extreme response of dynamical systems. Journal of Engineering Mechanics, (134), 8, pp. 628-636, 2008.
- [30] Piterbarg V.I. Asymptotic method in the theory of Gaussian processes and fields. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [31] Piterbarg V.I. Comparison of distribution functions of maxima of Gaussian processes. Theory of Probability and its Applications, (26), pp. 687-705, 1981.
- [32] Rice S.O. Mathematical analysis of random noise. The Bell System Tech. J., (24), pp. 46-156, 1945.

- [33] Rice S.O. Mathematical analysis of random noise. The Bell System Tech. J., (23), pp. 282-332, 1944.
- [34] Salvadori G., De Michele C., Kottegoda N.T., Rosso R. *Extreme in nature : an approach using copulas.* Springer, 2007.
- [35] Shao J., Clair D., Fogli M., Bernardin F. Approximate formulas for estimating rare events probabilities in non-Gaussian non-stationary stochastic dynamics. EURODYN'2014, Porto (Portugal), 30 june 2 july, 2014.
- [36] Slepian D. The one-sided barrier problem for Gaussian noise. The Bell System Tech. J., (7), pp. 463-501, 1962.
- [37] Slepian D. First passage time for a particular Gaussian process. The Annals of Mathematical Statistics, (32), 2, pp. 610-612, 1961.
- [38] Vanmarcke E.H. Random fields : Analysis and synthesis. The MIT Press, Massachusetts, 1983.
- [39] Vanmarcke E.H. Structural response to earthquakes. Seismic Rick and Engineering Decisions, Amsterdam, pp. 287-337, Elsevier, 1976.

## Annexe A

# Algorithmes de simulation des processus tests

#### A1 Notations

Nous nous contentons dans cette annexe de donner la version "programmable" de l'algorithme de simulation de chaque processus test utilisé dans la thèse, sans entrer dans le détail de sa construction, ni en exhiber les propriétés. Le lecteur intéressé par ces différents aspects est invité à consulter le rapport MODNAT  $T_0+18$  disponible sur le site [http://sites.onera.fr/mondat].

Pour les processus non stationnaires, la simulation est effectuée sur tout leur intervalle d'indexation  $\overline{T} = [0,T], 0 < T < +\infty$ ; pour les processus stationnaires, donc indexés sur  $\mathbb{R}$ , elle est restreinte à un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ , encore noté  $\overline{T}$  et toujours de la forme  $\overline{T} = [0,T], 0 < T < +\infty$ . Donc, dans tous les cas (*i.e.* pour tous les processus), le domaine de simulation est un intervalle de la forme  $\overline{T} = [0,T]$ , avec T un entier fini strictement positif fixé.

Rappelons que les processus considérés, tous notés  $\nu$ , sont au nombre de 23, référencés P1 à P23 (*cf.* chap. 2). Les algorithmes de simulation présentés ici ne concernent toutefois que 14 d'entre eux : les processus référencés P1, P2, P3, P4, P5, P7, P8, P10, P12, P14, P16, P18, P20 et P22. Les 9 autres processus (*i.e.* ceux référencés P6, P9, P11, P13, P15, P17, P19, P21 et P23) sont en effet les valeurs absolues de 9 des 14 précédents et leurs algorithmes de simulation se déduisent trivialement de ceux de ces derniers.

Rappelons par ailleurs que simuler l'un quelconque,  $\nu$ , de ces processus sur son intervalle de simulation  $\overline{T} = [0, T]$ , c'est en construire un nombre fini L (à choisir) de réalisations indépendantes restreintes à  $\bar{T}$ , c'est-à-dire une *L*-famille d'applications  $\left\{t \to \nu_{\bar{T}}(t, a_l) : \bar{T} \to \mathbb{R}; a_l \in \mathcal{A}\right\}_{l=1}^{L}$ où,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}, \bar{T} \ni t \to \nu_{\bar{T}}(t, a_l)$  est une  $a_l$ -réalisation restreinte à  $\bar{T}$  de  $\nu$ . Pratiquement, l'algorithme de simulation fournit chaque trajectoire  $\nu_{\bar{T}}(\cdot, a_l) = (\nu_{\bar{T}}(t, a_l), t \in \bar{T})$  sous forme d'une famille finie de réels  $\{\nu_N(t_m, a_l), m \in I_{N+1}\}$  constituée des valeurs d'une approximation de  $\nu_{\bar{T}}(\cdot, a_l)$  (issue du choix d'une approximation appropriée, voire d'une représentation exacte, de  $\nu$ ) aux noeuds  $t_m, m \in I_{N+1}$ , d'une N-partition (à choisir) de T,  $I_{N+1}$  désignant dans cette notation une famille finie ordonnée d'entiers positifs correspondant à l'ensemble des indices affectant les N+1 noeuds de la partition. Par exemple, pour certains algorithmes  $I_{N+1} = \{0, 1, \dots, N\}$  et pour d'autres  $I_{N+1} = \{1, 2, \dots, N+1\}$ , avec dans le premier cas  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  et dans le second  $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{N+1} = T$ . Pour tous les algorithmes de simulation présentés ci-dessous, la N-partition de  $\overline{T}$  a été choisie régulière, donc de pas constant  $\Delta t = T/N$ . Par conséquent,  $t_m = m\Delta t$ ,  $\forall m \in I_{N+1}$  dans le premier cas et  $t_m = (m-1)\Delta t$ ,  $\forall m \in I_{N+1}$ , dans le second. De plus, pour des raisons techniques liées à leur construction, trois de ces algorithmes (ceux relatifs aux processus référencés P2, P4 et P7) ne fournissent pas les valeurs des trajectoires simulées au noeud terminal de la partition choisie de T. Enfin, par souci de concision, tous les algorithmes ont été écrits en utilisant la notation suivante :  $\nu_{N,l}^m = \nu_N(t_m, a_l), \forall m \in I_{N+1},$  $\forall a_l \in \mathcal{A}, \forall l \in \{1, \dots, L\}$ . Avec une telle notation, chaque  $a_l$ -réalisation (*i.e.*  $a_l$ -trajectoire) simulée de  $\nu$  sur  $\overline{T}$  est ainsi décrite par la famille finie de réels  $\{\nu_{N,l}^m, m \in I_{N+1}\}$ .

#### A2 Simulation du processus référencé P1

L'algorithme de simulation utilisé pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\nu_{N,l}^{m} = g_{1,m}^{(l)} \cos(\omega t_m) + g_{2,m}^{(l)} \sin(\omega t_m) \quad , \quad 0 \le m \le N$$
(A.1)

où  $\nu_{N,l}^m = \nu_N(t_m, a_l), a_l \in \mathcal{A}, t_m = m\Delta t, \forall m \in \{0, \cdots, N\}, \Delta t = T/N \text{ et } \left\{g_m^{(l)} = (g_{1,m}^{(l)}, g_{2,m}^{(l)}), 0 \leq m \leq N\right\}$  est une (N+1)-famille de réalisations indépendantes d'une v.a. gaussienne standard bidimensionnelle  $G^{(l)} = (G_1^{(l)}, G_2^{(l)}), \text{ les v.a. } \left\{G^{(l)} = (G_1^{(l)}, G_2^{(l)}), 1 \leq l \leq L\right\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a. gaussienne standard bidimensionnelle  $G = (G_1, G_2).$ 

#### A3 Simulation du processus référencé P2

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus est basé sur la représentation spectrale des processus stationnaires du second ordre. Il s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\begin{cases} q_{l}^{k} = \sqrt{S(\omega_{k})} \sqrt{-Ln(u_{1,k}^{(l)})} e^{i2\pi u_{2,k}} , & 1 \le k \le N \\ p_{N,l}^{m} = \sum_{k=1}^{N} q_{l}^{k} e^{\frac{i2\pi(m-1)(k-1)}{N}} , & 1 \le m \le N \\ \nu_{N,l}^{m} = \sqrt{2\Delta\omega} \mathcal{R}\acute{e} \left\{ p_{N,l}^{m} e^{-\frac{i\pi(m-1)(N-1)}{N}} \right\} , & 1 \le m \le N \end{cases}$$
(A.2)

 $\operatorname{avec}$  :

$$\begin{cases}
\nu_{N,l}^{m} = \nu_{N}(t_{m}, a_{l}) , a_{l} \in \mathcal{A} \\
t_{m} = (m-1)\Delta t , 1 \leq m \leq N+1 \\
\Delta t = \frac{T}{N} \\
\omega_{k} = -\Omega_{c} + (k - \frac{1}{2})\Delta \omega , 1 \leq k \leq N \\
\Delta \omega = \frac{2\Omega_{c}}{N}
\end{cases}$$
(A.3)
$$\begin{cases}
S(\omega) = \frac{B_{g} + A_{g}\omega^{2}}{\delta_{g}^{2}[(\omega^{2} - \omega_{g}^{2})^{2} + (2\omega_{g}\xi_{g})^{2}\omega^{2}]}, \omega \in \mathbb{R} \\
A_{g}, B_{g} \text{ et } \delta_{g} \text{ donnés par (2.15) et (2.16)}
\end{cases}$$

où dans (A.2),  $\left\{u_k^{(l)} = (u_{1,k}^{(l)}, u_{2,k}^{(l)}), 1 \le k \le N\right\}$  est une N-famille de réalisations indépendantes d'une v.a.  $U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)})$  uniforme sur le carré unitaire  $[0, 1]^2$ , les v.a.  $\left\{U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)}), 1 \le l \le L\right\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a.  $U = (U_1, U_2)$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ .

Dans (A.3),  $\Omega_c$  est la pulsation de coupure associée à la densité spectrale (A.4), calculée de telle sorte que la quasi-totalité de l'énergie spectrale soit portée par le compact  $[-\Omega_c, \Omega_c]$ . Pratiquement, elle s'obtient en résolvant l'équation :

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} S(\omega) d\omega - \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} S(\omega) d\omega}{\int_{\mathbb{R}} S(\omega) d\omega} = \epsilon$$
(A.5)

où  $\epsilon$  est un réel positif adimensionnel petit à choisir, par exemple  $\epsilon = 0.01$  ou  $\epsilon = 0.005$ . Comme ici l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} S(\omega) d\omega$  (qui n'est autre que la variance de  $\nu$ ) vaut 1, (A.5) se réécrit :

$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} S(\omega) d\omega = 1 - \epsilon \tag{A.6}$$

équation qui se résout aisément par voie numérique.

Notons que pour le calcul de la famille  $\{p_{N,l}^m, 1 \le m \le N\}$  à partir de la famille  $\{q_l^k, 1 \le k \le N\}$  (cf. 2<sup>ème</sup> équation de (A.2)), il est possible, compte tenu de la forme particulière de l'expression reliant ces deux familles, d'utiliser un algorithme de Transformée de Fourier Rapide (TFR) et d'accroître ainsi les performances (en rapidité et précision) de l'algorithme de simulation. Une telle possibilité, quasiment toujours exploitée par les utilisateurs, est d'ailleurs un élément important du succès de cet algorithme. Notons que dans le cas où un algorithme de TFR est utilisé, il est préférable (mais non obligatoire) de prendre pour N une puissance entière de 2.

#### A4 Simulation du processus référencé P3

L'algorithme de simulation utilisé pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\begin{cases} \nu_{N,l}^{0} = 0 \\ \nu_{N,l}^{m} = \nu_{N,l}^{m-1} + \sqrt{\Delta t} g_{m}^{(l)} , \ 1 \le m \le N \end{cases}$$
(A.7)

où  $\nu_{N,l}^m = \nu_N(t_m, a_l), a_l \in \mathcal{A}, t_m = m\Delta t, \forall m \in \{0, \dots, N\}, \Delta t = T/N \text{ et } \{g_m^{(l)}, 1 \leq m \leq N\}$ est une N-famille de réalisations indépendantes d'une v.a. gaussienne standard scalaire  $G^{(l)}$ , les v.a.  $\{G^{(l)}, 1 \leq m \leq L\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a. gaussienne standard scalaire G.

#### A5 Simulation du processus référencé P4

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus se déduit directement de celui employé pour simuler le processus référencé P2 (*cf.* §A3). Il s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\begin{cases} q_{l}^{k} = \sqrt{S(\omega_{k})} \sqrt{-Ln(u_{1,k}^{(l)})} e^{i2\pi u_{2,k}^{(l)}} , & 1 \le k \le N \\ p_{N,l}^{m} = \sum_{k=1}^{N} q_{l}^{k} e^{\frac{i2\pi(m-1)(k-1)}{N}} , & 1 \le m \le N \\ \nu_{N,l}^{m} = f(t_{m}) \sqrt{2\Delta\omega} \mathcal{R} \acute{e} \left\{ p_{N,l}^{m} e^{-\frac{i\pi(m-1)(N-1)}{N}} \right\} , & 1 \le m \le N \end{cases}$$
(A.8)

avec :

$$f(t) = \alpha t(T-t)e^{-\beta t} \mathbb{1}_{\bar{T}}(t) \ , \ t \in \mathbb{R}$$
(A.11)

où dans (A.8),  $\left\{u_k^{(l)} = (u_{1,k}^{(l)}, u_{2,k}^{(l)}), 1 \le k \le N\right\}$  est une *N*-famille de réalisations indépendantes d'une v.a.  $U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)})$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ , les v.a.  $\left\{U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)}), 1 \le l \le L\right\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a.  $U = (U_1, U_2)$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ . On peut en outre voir

dans (A.8) que la famille  $\{p_{N,l}^m, 1 \le m \le N\}$ , compte tenu de son expression en fonction de la famille  $\{q_l^k, 1 \le k \le N\}$ , peut être calculée en utilisant un algorithme de TFR (et dans ce cas, il est préférable de prendre pour N une puissance entière de 2). Enfin, dans (A.9)  $\Omega_c$  est la pulsation de coupure associée à la densité spectrale (A.10). Comme cette densité coïncide avec celle (A.4) du paragraphe A3, en procédant comme dans ce dernier on en déduit que  $\Omega_c$  est solution de l'équation :

$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} S(\omega) d\omega = 1 - \epsilon \tag{A.12}$$

où  $\epsilon$  est un réel positif adimensionnel petit à choisir (par exemple  $\epsilon = 0.01$  ou  $\epsilon = 0.005$ ), cette équation se résolvant aisément par voie numérique.

#### A6 Simulation du processus référencé P5

L'algorithme de simulation utilisé pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \ldots, L\}$ :

$$\nu_{N,l}^{m} = -\frac{1}{\lambda} Ln(u_{1,m}^{(l)}) \cos(\omega t_m - 2\pi u_{2,m}^{(l)}) , \quad 0 \le m \le N$$
(A.13)

où  $\nu_{N,l}^m = \nu_N(t_m, a_l), a_l \in \mathcal{A}, t_m = m\Delta t, \forall m \in \{0, \cdots, N\}, \Delta t = T/N \text{ et } \{u_m^{(l)} = (u_{1,m}^{(l)}, u_{2,m}^{(l)}), 0 \leq m \leq N\}$  est une (N+1)-famille de réalisations indépendantes d'une v.a.  $U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)})$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ , les v.a.  $\{U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)}), 1 \leq l \leq L\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a.  $U = (U_1, U_2)$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ .

#### A7 Simulation du processus référencé P7

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\begin{cases} q_{l}^{k} = \sqrt{S(\omega_{k})} \sqrt{-Ln(u_{1,k}^{(l)})} e^{i2\pi u_{2,k}^{(l)}} , & 1 \le k \le N \\ p_{N,l}^{m} = \Sigma_{k=1}^{N} q_{l}^{k} e^{\frac{i2\pi(m-1)(k-1)}{N}} , & 1 \le m \le N \\ \nu_{N,l}^{m} = \alpha \exp\left(\beta \sqrt{2\Delta\omega} \mathcal{R}\acute{e}\left\{p_{N,l}^{m} e^{-\frac{i\pi(m-1)(N-1)}{N}}\right\}\right) , & 1 \le m \le N \end{cases}$$
(A.14)

avec :

$$\begin{cases} \nu_{N,l}^{m} = \nu_{N}(t_{m}, a_{l}) , a_{l} \in \mathcal{A} \\ t_{m} = (m-1)\Delta t , 1 \leq m \leq N+1 \\ \Delta t = \frac{T}{N} \\ \omega_{k} = -\Omega_{c} + (k - \frac{1}{2})\Delta\omega , 1 \leq k \leq N \\ \Delta \omega = \frac{2\Omega_{c}}{N} \end{cases}$$
(A.15)  
$$S(\omega) = \frac{\sigma^{2}}{\pi} \left[ \frac{1}{4(\omega - \lambda)^{2} + \sigma^{4}} + \frac{1}{4(\omega + \lambda)^{2} + \sigma^{4}} \right] , \omega \in \mathbb{R}$$
(A.16)

où dans (A.14),  $\left\{u_{k}^{(l)} = (u_{1,k}^{(l)}, u_{2,k}^{(l)}), 1 \le k \le N\right\}$  est une *N*-famille de réalisations indépendantes d'une v.a.  $U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)})$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ , les v.a.  $\left\{U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)}), 1 \le l \le L\right\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a.  $U = (U_1, U_2)$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ . On peut en outre voir dans (A.14) que la famille  $\left\{p_{N,l}^m, 1 \le m \le N\right\}$ , compte tenu de son expression en fonction de la

famille  $\{q_l^k, 1 \le k \le N\}$ , peut être calculée en utilisant un algorithme de TFR (et dans ce cas, il est préférable de prendre pour N une puissance entière de 2). Enfin, dans (A.15)  $\Omega_c$  est la pulsation de coupure associée à la densité spectrale (A.16) et est solution de l'équation :

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} S(\omega) d\omega - \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} S(\omega) d\omega}{\int_{\mathbb{R}} S(\omega) d\omega} = \epsilon$$
(A.17)

où  $\epsilon$  est un réel positif adimensionnel petit à choisir, par exemple  $\epsilon = 0.01$  ou  $\epsilon = 0.005$ . Or, comme (du fait de l'expression (A.16) de  $S(\omega)$ ) l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} S(\omega) d\omega$  vaut 1, (A.16) peut se réécrire :

$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} S(\omega) d\omega = 1 - \epsilon \tag{A.18}$$

équation qui se résout aisément par voie numérique.

#### A8 Simulation du processus référencé P8

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\begin{cases} q_{N,l}^{0} = q_{0,l} \\ q_{N,l}^{m} = q_{N,l}^{m-1} + \Delta t b(q_{N,l}^{m-1}) + \sqrt{\Delta t} \Sigma g_{m-1}^{(l)} , & 1 \le m \le N \\ \nu_{N,l}^{m} = C q_{N,l}^{m} , & 0 \le m \le N \end{cases}$$
(A.19)

où nous avons posé :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} , \ q_{N,l}^m = \begin{bmatrix} q_{1,N,l} \\ q_{2,N,l}^m \end{bmatrix} , \ q_{0,l} = \begin{bmatrix} q_{1,0,l} \\ q_{2,0,l} \end{bmatrix}$$
(A.20)

$$b(q) = \begin{bmatrix} q_2 \\ -\omega_D^2 q_1 - \mu q_1^3 - 2\omega_D \xi_D q_2 \end{bmatrix} , \ \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_D \end{bmatrix} , \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
(A.21)

avec  $\nu_{N,l}^m = \nu_N(t_m, a_l)$ ,  $a_l \in \mathcal{A}$ ,  $t_m = m\Delta t$ ,  $\forall m \in \{0, \dots, N\}$ ,  $\Delta t = T/N$  et où dans (A.19),  $\{g_m^{(l)}, 0 \leq m \leq N-1\}$  est une N-famille de réalisations indépendantes d'une v.a.  $G^{(l)}$  gaussienne standard scalaire, les v.a.  $\{G^{(l)}, 1 \leq l \leq L\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a. gaussienne standard scalaire G. Pour le choix de la valeur initiale, la pratique courante consiste, pour chaque l (*i.e.* pour chaque  $a_l$ -réalisation), à lancer l'algorithme avec la valeur initiale  $q_{0,l} = [0, 0]^T$ , à laisser défiler ce dernier jusqu'à atteinte du régime stationnaire, à un instant  $t_{0s}^{(l)}$ , et enfin à ne commencer à enregistrer la trajectoire simulée qu'à partir de cet instant. Bien entendu, la difficulté réside ici dans la détermination de  $t_{0s}^{(l)}$ , qui ne peut se faire que via une expérimentation numérique préalable.

#### A9 Simulation du processus référencé P10

L'algorithme de simulation utilisé pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\nu_{N,l}^{m} = t_{m}^{2} e^{-\frac{t_{m}^{2}}{\sigma}} \sum_{j=1}^{4} \left( g_{j,m}^{(l)} \right)^{2} , \quad 0 \le m \le N$$
(A.22)

où  $\nu_{N,l}^m = \nu_N(t_m, a_l), a_l \in \mathcal{A}, t_m = m\Delta t, \forall m \in \{0, \ldots, N\}, \Delta t = T/N \text{ et } \left\{g_m^{(l)} = (g_{1,m}^{(l)}, g_{2,m}^{(l)}, g_{3,m}^{(l)}, g_{4,m}^{(l)}), 0 \leq m \leq N\right\}$  est une (N + 1)-famille de réalisations indépendantes d'une v.a. gaussienne standard quadridimensionnelle  $G^{(l)} = (G_1^{(l)}, G_2^{(l)}, G_3^{(l)}, G_4^{(l)})$ , les v.a.  $\left\{G^{(l)} = (G_1^{(l)}, G_2^{(l)}, G_3^{(l)}, G_4^{(l)}), 1 \leq l \leq L\right\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a. gaussienne standard  $G = (G_1, G_2, G_3, G_4)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$ .

#### A10 Simulation du processus référencé P12

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \ldots, L\}$ :

$$\begin{cases}
q_l^k = \sqrt{S(\omega_k)} \sqrt{-Ln(u_{1,k}^{(l)})} e^{i2\pi u_{2,k}^{(l)}} , & 1 \le k \le N \\
p_{N,l}^m = \Sigma_{k=1}^N q_l^k e^{\frac{i2\pi(m-1)(k-1)}{N}} , & 1 \le m \le N \\
r_{N,l}^m = g(t_m) \sqrt{2\Delta\omega} \mathcal{R}\acute{e} \left\{ p_{N,l}^m e^{-\frac{i\pi(m-1)(N-1)}{N}} \right\} , & 1 \le m \le N \\
\nu_{N,l}^0 = 0 \\
\nu_{N,l}^1 = 0 \\
\nu_{N,l}^{m+1} = -a_1 \nu_{N,l}^{m-1} - a_2 \nu_{N,l}^m - a_3 \left[ \mu \left( \nu_{N,l}^m \right)^3 - r_{N,l}^m \right] , & 1 \le m \le N
\end{cases} \tag{A.23}$$

avec :

$$\begin{cases}
\nu_{N,l}^{m} = \nu_{N}(t_{m}, a_{l}) , \quad a_{l} \in \mathcal{A} \\
t_{m} = (m-1)\Delta t , \quad 1 \leq m \leq N+1 \\
\Delta t = \frac{T}{N} \\
\omega_{k} = -\Omega_{c} + (k - \frac{1}{2})\Delta \omega , \quad 1 \leq k \leq N \\
\Delta \omega = \frac{2\Omega_{c}}{N}
\end{cases}$$
(A.24)
$$\begin{cases}
S(\omega) = \frac{B_{g} + A_{g}\omega^{2}}{\delta_{g}^{2}[(\omega^{2} - \omega_{g}^{2})^{2} + (2\omega_{g}\xi_{g})^{2}\omega^{2}]}, \quad \omega \in \mathbb{R} \\
A_{g}, B_{g} \text{ et } \delta_{g} \text{ donnés par (2.15) et (2.16)}
\end{cases}$$

$$g(t) = \eta_1 t^2 e^{-\eta_2 t} , \ t \in \mathbb{R}_+$$
 (A.26)

$$a_{1} = \frac{1 - \omega_{D}\xi_{D}\Delta t}{1 + \omega_{D}\xi_{D}\Delta t} , \quad a_{2} = \frac{\omega_{D}^{2}(\Delta t)^{2} - 2}{1 + \omega_{D}\xi_{D}\Delta t} , \quad a_{3} = \frac{(\Delta t)^{2}}{1 + \omega_{D}\xi_{D}\Delta t}$$
(A.27)

où dans (A.23),  $\left\{u_k^{(l)} = (u_{1,k}^{(l)}, u_{2,k}^{(l)}), 1 \le k \le N\right\}$  est une *N*-famille de réalisations indépendantes d'une v.a.  $U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)})$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ , les v.a.  $\left\{U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)}), 1 \le l \le L\right\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a.  $U = (U_1, U_2)$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ . On peut en outre voir dans (A.23) que la famille  $\left\{p_{N,l}^m, 1 \le m \le N\right\}$ , compte tenu de son expression en fonction de la famille  $\left\{q_l^k, 1 \le k \le N\right\}$ , peut être calculée en utilisant un algorithme de TFR (et dans ce cas il est préférable de prendre pour *N* une puissance entière de 2). Enfin, dans (A.24)  $\Omega_c$  est la pulsation de coupure associée à la densité spectrale (A.25). Comme cette densité coïncide avec celle (A.4) du paragraphe A3, en procédant comme dans ce dernier on en déduit que  $\Omega_c$  est solution de l'équation :

$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} S(\omega) d\omega = 1 - \epsilon \tag{A.28}$$

où  $\epsilon$  est un réel positif adimensionnel petit à choisir (par exemple  $\epsilon = 0.01$  ou  $\epsilon = 0.005$ ), cette équation se résolvant aisément par voie numérique.

#### A11 Simulation du processus référencé P14

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\begin{cases}
w_{N,l}^{1} = 0 \\
w_{N,l}^{m} = w_{N,l}^{m-1} + \sqrt{\Delta t} g_{m}^{(l)} , 2 \leq m \leq N \\
z_{N,l}^{m} = \epsilon sin \left(\lambda t_{m} + \rho w_{N,l}^{m} + 2\pi \theta^{(l)}\right) , 1 \leq m \leq N \\
\nu_{N,l}^{0} = 0 \\
\nu_{N,l}^{1} = 0 \\
\nu_{N,l}^{m+1} = -a_{1} \nu_{N,l}^{m-1} - a_{2} \nu_{N,l}^{m} - a_{3} \left[H(\nu_{N,l}^{m}) - f(t_{m}) z_{N,l}^{m}\right] , 1 \leq m \leq N
\end{cases}$$
(A.29)

avec :

$$\begin{cases}
\nu_{N,l}^{m} = \nu_{N}(t_{m}, a_{l}) , a_{l} \in \mathcal{A} \\
t_{m} = (m-1)\Delta t , 1 \leq m \leq N+1 \\
\Delta t = \frac{T}{N}
\end{cases}$$
(A.30)

$$a_{1} = \frac{1 - \omega_{0}\xi_{0}\Delta t}{1 + \omega_{0}\xi_{0}\Delta t} , \quad a_{2} = \frac{\omega_{0}^{2}(\Delta t)^{2} - 2}{1 + \omega_{0}\xi_{0}\Delta t} , \quad a_{3} = \frac{(\Delta t)^{2}}{1 + \omega_{0}\xi_{0}\Delta t}$$
(A.31)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0\\ \alpha \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq t_1\\ \alpha & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \alpha \frac{T-t}{T-t_2}e^{-\beta(t-t_2)} & \text{si } t_2 \leq t \leq T\\ 0 & \text{si } t \geq T \end{cases}, \quad H(u) = \begin{cases} \omega_1^2(u+e) & \text{si } u < -e\\ 0 & \text{si } |u| \leq e\\ \omega_1^2(u-e) & \text{si } u > e \end{cases}$$
(A.32)

où dans (A.29),  $\{g_m^{(l)}, 2 \le m \le N\}$  est une (N-1)-famille de réalisations indépendantes d'une v.a. gaussienne standard scalaire  $G^{(l)}$  et  $\theta^{(l)}$  une réalisation d'une v.a.  $\Theta^{(l)}$  uniforme sur [0, 1] et indépendante de  $G^{(l)}$ , les couples  $\{(G^{(l)}, \Theta^{(l)}), 1 \le l \le L\}$  étant des copies indépendantes d'un couple  $(G, \Theta)$  formé d'une v.a. G gaussienne standard scalaire et d'une v.a.  $\Theta$  indépendante de G et uniforme sur [0, 1].

#### A12 Simulation du processus référencé P16

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \cdots, L\}$ :

$$\begin{cases} w_{N,l}^{1} = 0 \\ w_{N,l}^{m} = w_{N,l}^{m-1} + \sqrt{\Delta t} g_{m}^{(l)} , \ 2 \le m \le N \\ z_{N,l}^{m} = \epsilon sin \left( \lambda t_{m} + \rho w_{N,l}^{m} + 2\pi \theta^{(l)} \right) , \ 1 \le m \le N \\ \nu_{N,l}^{1} = 0 \\ \nu_{N,l}^{2} \in \left[ -\frac{\gamma}{d_{1}}, \frac{\gamma}{d_{1}} \right] \\ r_{N,l}^{m} = f(t_{m}) z_{N,l}^{m} - d_{1} \nu_{N,l}^{m-1} + d_{2} \nu_{N,l}^{m} , \ 2 \le m \le N \\ \nu_{N,l}^{m+1} = \nu_{N,l}^{m-1} + 2\Delta t \max \left\{ \min(0, \frac{r_{N,l}^{m} + \gamma}{d_{3}}), \frac{r_{N,l}^{m} - \gamma}{d_{3}} \right\} , \ 2 \le m \le N \end{cases}$$
(A.33)

avec :

$$\begin{cases}
\nu_{N,l}^m = \nu_N(t_m, a_l) , \quad a_l \in \mathcal{A} \\
t_m = (m-1)\Delta t , \quad 1 \le m \le N+1 \\
\Delta t = \frac{T}{N}
\end{cases}$$
(A.34)

$$d_1 = \frac{2}{(\Delta t)^2}$$
,  $d_2 = \frac{2}{(\Delta t)^2} - \omega_0^2$ ,  $d_3 = \frac{2}{\Delta t} + 2\omega_0\xi_0$  (A.35)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0\\ \alpha \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 & \text{si } 0 \le t \le t_1\\ \alpha & \text{si } t_1 \le t \le t_2\\ \alpha \frac{T-t}{T-t_2} e^{-\beta(t-t_2)} & \text{si } t_2 \le t \le T\\ 0 & \text{si } t \ge T \end{cases}$$
(A.36)

où dans (A.33),  $\left\{g_m^{(l)}, 2 \le m \le N\right\}$  est une (N-1)-famille de réalisations indépendantes d'une v.a. gaussienne standard  $G^{(l)}$  et  $\theta^{(l)}$  une réalisation d'une v.a.  $\Theta^{(l)}$  uniforme sur [0, 1] et indépendante de  $G^{(l)}$ , les couples  $\left\{(G^{(l)}, \Theta^{(l)}), 1 \le l \le L\right\}$  étant des copies indépendantes d'un couple  $(G, \Theta)$  formé d'une v.a. G gaussienne standard scalaire et d'une v.a.  $\Theta$  indépendante de G et uniforme sur [0, 1].

#### A13 Simulation du processus référencé P18

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\begin{cases} q_{l}^{k} = \sqrt{S(\omega_{k})} \sqrt{-Ln(u_{1,k}^{(l)})} e^{i2\pi u_{2,k}} , & 1 \leq k \leq N \\ p_{N,l}^{m} = \sum_{k=1}^{N} q_{l}^{k} e^{\frac{i2\pi(m-1)(k-1)}{N}} , & 1 \leq m \leq N \\ x_{N,l}^{m} = \sqrt{2\Delta\omega} \mathcal{R} \acute{e} \left\{ p_{N,l}^{m} e^{-\frac{i\pi(m-1)(N-1)}{N}} \right\} , & 1 \leq m \leq N \\ \nu_{N,l}^{1} = 0 & (A.37) \\ \nu_{N,l}^{2} \in \left[ -\frac{\gamma}{d_{1}}, \frac{\gamma}{d_{1}} \right] \\ r_{N,l}^{m} = g(t_{m}) x_{N,l}^{m} - d_{1} \nu_{N,l}^{m-1} + d_{2} \nu_{N,l}^{m} , & 2 \leq m \leq N \\ \nu_{N,l}^{m+1} = \nu_{N,l}^{m-1} + 2\Delta t \max \left\{ \min(0, \frac{r_{N,l}^{m} + \gamma}{d_{3}}), \frac{r_{N,l}^{m} - \gamma}{d_{3}} \right\} , & 2 \leq m \leq N \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases}
\nu_{N,l}^{m} = \nu_{N}(t_{m}, a_{l}) , a_{l} \in \mathcal{A} \\
t_{m} = (m-1)\Delta t , 1 \leq m \leq N+1 \\
\Delta t = \frac{T}{N} \\
\omega_{k} = -\Omega_{c} + (k - \frac{1}{2})\Delta \omega , 1 \leq k \leq N \\
\Delta \omega = \frac{2\Omega_{c}}{N}
\end{cases}$$
(A.38)

$$d_1 = \frac{2}{(\Delta t)^2}$$
,  $d_2 = \frac{2}{(\Delta t)^2} - \omega_0^2$ ,  $d_3 = \frac{2}{\Delta t} + 2\omega_0\xi_0$  (A.39)

$$g(t) = \eta_1 t^2 e^{-\eta_2 t}$$
,  $t \in \mathbb{R}_+$  (A.40)

$$\begin{cases} S(\omega) = \frac{B_g + A_g \omega^2}{\delta_g^2 [(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + (2\omega_g \xi_g)^2 \omega^2]} , & \omega \in \mathbb{R} \\ A_g, B_g \text{ et } \delta_g \text{ donnés par (2.15) et (2.16)} \end{cases}$$
(A.41)

où dans (B.37),  $\left\{u_k^{(l)} = (u_{1,k}^{(l)}, u_{2,k}^{(l)}), 1 \le k \le N\right\}$  est une *N*-famille de réalisations indépendantes d'une v.a.  $U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)})$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ , les v.a.  $\left\{U^{(l)} = (U_1^{(l)}, U_2^{(l)}), 1 \le l \le L\right\}$  étant des copies indépendantes d'une v.a.  $U = (U_1, U_2)$  uniforme sur  $[0, 1]^2$ . On peut en outre voir dans (B.37) que la famille  $\left\{p_{N,l}^m, 1 \le m \le N\right\}$ , compte tenu de son expression en fonction de la famille  $\left\{q_l^k, 1 \le k \le N\right\}$ , peut être calculée en utilisant un algorithme de TFR ( et dans ce cas il est préférable de prendre pour *N* une puissance entière de 2). Enfin, dans (A.38)  $\Omega_c$  est la pulsation de coupure associée à la densité spectrale (A.41). Comme cette densité coïncide avec celle (A.4) du paragraphe A3, en procédant comme dans ce dernier on en déduit que  $\Omega_c$  est solution de l'équation :

$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} S(\omega) d\omega = 1 - \epsilon \tag{A.42}$$

où  $\epsilon$  est un réel positif adimensionnel petit à choisir (par exemple  $\epsilon = 0.01$  ou  $\epsilon = 0.005$ ), cette équation se résolvant aisément par voie numérique.

#### A14 Simulation du processus référencé P20

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\begin{cases} w_{N,l}^{1} = 0 \\ w_{N,l}^{m} = w_{N,l}^{m-1} + \sqrt{\Delta t} g_{m}^{(l)} , \ 2 \le m \le N \\ z_{N,l}^{m} = \epsilon \sin(\lambda t_{m} + \rho w_{N,l}^{m} + 2\pi \theta^{(l)}) , \ 1 \le m \le N \\ \nu_{N,l}^{0} = 0 \\ v_{N,l}^{0} = 0 \\ v_{N,l}^{1} = 0 \\ v_{N,l}^{1} = 0 \\ \nu_{N,l}^{m} = -a_{1} \nu_{N,l}^{m-1} - a_{2} \nu_{N,l}^{m} - a_{3} \left[ \omega_{1}^{2} v_{N,l}^{m} - f(t_{m}) z_{N,l}^{m} \right] , \ 1 \le m \le N \\ v_{N,l}^{m} = v_{N,l}^{m-1} + (\nu_{N,l}^{m+1} - \nu_{N,l}^{m-1}) K(v_{N,l}^{m}, \frac{\nu_{N,l}^{m+1} - \nu_{N,l}^{m-1}}{2\Delta t}) , \ 1 \le m \le N \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases}
\nu_{N,l}^{m} = \nu_{N}(t_{m}, a_{l}) , \quad a_{l} \in \mathcal{A} \\
t_{m} = (m-1)\Delta t , \quad 1 \leq m \leq N+1 \\
\Delta t = \frac{T}{N}
\end{cases}$$
(A.44)

$$a_{1} = \frac{1 - \omega_{0}\xi_{0}\Delta t}{1 + \omega_{0}\xi_{0}\Delta t} , \quad a_{2} = \frac{\omega_{0}^{2}(\Delta t)^{2} - 2}{1 + \omega_{0}\xi_{0}\Delta t} , \quad a_{3} = \frac{(\Delta t)^{2}}{1 + \omega_{0}\xi_{0}\Delta t}$$
(A.45)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0\\ \alpha \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq t_1\\ \alpha & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2\\ \alpha \frac{T-t}{T-t_2} e^{-\beta(t-t_2)} & \text{si } t_2 \leq t \leq T\\ 0 & \text{si } t \geq T \end{cases}$$
(A.46)

où dans (A.43),  $\{g_m^{(l)}, 2 \le m \le N\}$  est une (N-1)-famille de réalisations indépendantes d'une v.a. gaussienne standard scalaire  $G^{(l)}$  et  $\theta^{(l)}$  une réalisation d'une v.a.  $\Theta^{(l)}$  uniforme sur [0, 1] et indépendante de  $G^{(l)}$ , les couples  $\{(G^{(l)}, \Theta^{(l)}), 1 \le l \le L\}$  étant des copies indépendantes d'un couple  $(G, \Theta)$  formé d'une v.a. G gaussienne standard scalaire et d'une v.a.  $\Theta$  indépendante de G et uniforme sur [0, 1].

#### A15 Simulation du processus référencé P22

L'algorithme de simulation mis en oeuvre pour ce processus s'écrit,  $\forall l \in \{1, \dots, L\}$ :

$$\begin{split} w_{N,l}^{1} &= 0 \\ w_{N,l}^{m} &= w_{N,l}^{m-1} + \sqrt{\Delta t} g_{m}^{(l)} \ , \ 2 \leq m \leq N \\ z_{N,l}^{m} &= \epsilon \sin(\lambda t_{m} + \rho w_{N,l}^{m} + 2\pi \theta^{(l)}) \ , \ 1 \leq m \leq N \\ \nu_{N,l}^{1} &= 0 \\ \dot{\nu}_{N,l}^{1} &= 0 \\ v_{N,l}^{m+1} &= \nu_{N,l}^{m} + \Delta t \dot{\nu}_{N,l}^{m} \ , \ 1 \leq m \leq N \\ \dot{\nu}_{N,l}^{m+1} &= \dot{\nu}_{N,l}^{m} - \Delta t \left( \omega_{0}^{2} \nu_{N,l}^{m} + 2\omega_{0} \xi_{0} \dot{\nu}_{N,l}^{m} + \omega_{1}^{2} v_{N,l}^{m} - f(t_{m}) z_{N,l}^{m} \right) \ , \ 1 \leq m \leq N \\ v_{N,l}^{m+1} &= \max \left\{ \min(\frac{1}{\omega_{1}^{2}}, v_{N,l}^{m} + \dot{\nu}_{N,l}^{m} \Delta t), -\frac{1}{\omega_{1}^{2}} \right\} \ , \ 1 \leq m \leq N \end{split}$$

avec :

$$\begin{cases}
\nu_{N,l}^{m} = \nu_{N}(t_{m}, a_{l}) , \quad a_{l} \in \mathcal{A} \\
t_{m} = (m-1)\Delta t , \quad 1 \leq m \leq N+1 \\
\Delta t = \frac{T}{N}
\end{cases}$$
(A.49)

où dans (A.48),  $\{g_m^{(l)}, 2 \le m \le N\}$  est une (N-1)-famille de réalisations indépendantes d'une v.a. gaussienne standard scalaire  $G^{(l)}$  et  $\theta^{(l)}$  une réalisation d'une v.a.  $\Theta^{(l)}$  uniforme sur [0, 1] et indépendante de  $G^{(l)}$ , les couples  $\{(G^{(l)}, \Theta^{(l)}), 1 \le l \le L\}$  étant des copies indépendantes d'un couple  $(G, \Theta)$  formé d'une v.a. G gaussienne standard scalaire et d'une v.a.  $\Theta$  indépendante de G et uniforme sur [0, 1].

## Annexe B

## Communication présentée à la Conférence Internationale EURODYN 2014 Porto, 30 june - 2 juillet 2014

#### Approximate formulas for estimating rare event probabilities in non-Gaussian stochastic dynamics

Jun Shao<sup>1</sup>, David Clair<sup>1</sup>, Michel Fogli<sup>1</sup>, Frédéric Bernardin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut Pascal, UMR CNRS/UBP 6602, Campus des Cézeaux, 63171, Aubière CEDEX, France <sup>2</sup>CEREMA, Direction territoriale Centre-Est, Département Laboratoire de Clermont-Ferrand, 63017, Clermont-Ferrand CEDEX, France

email : jun.shao@ifma.fr, david.clair@ifma.fr, michel.fogli@polytech.univ-bpclermont.fr, frederic.bernardin@cerema.fr

ABSTRACT : In their book "Level sets and extrema of random processes and fields", J.M. Azaïs and M. Wschebor give results allowing to construct, under some conditions, approximations and bounds for the distribution tails of extrema of general random processes. The authors of this paper have recently conducted a study to numerically analyze these approximations and bounds in case where the random processes are the responses of stochastic oscillators. They present here some results of this analyse, which show the accuracy and the relevance of such approximations. This validation work is the first step of a broaded study being carried by the authors, aiming to implement efficient numerical tools for the practical use of these different approximations.

KEY WORDS : Extrema of processes; stochastic oscillator response; Rice series; Monte Carlo simulation.

#### 1 INTRODUCTION

The probabilistic analysis of the extrema of stochastic processes is a classic topic which is of great interest in many scientific fields and which has been the source of much research work for more than seventy years. Many of these studies are concerned with the problem of computing the distribution function  $F_{M_T}(u) = \mathbb{P}(M_T \leq u), u \in \mathbb{R}$ , of a scalar random variable  $M_T$  defined as  $M_T = \sup_{t \in J} X(t)$ , where  $X = (X(t), t \in I)$  is a given  $\mathbb{R}$ -valued stochastic process indexed on an interval I of  $\mathbb{R}$  (i.e.  $t \in I$ ) and  $J \subset I$  is a subinterval of I of the form J = [0, T], with  $0 < T < +\infty$ . Other works focus on the related problem of calculating the probability  $\mathbb{P}(M_T > u) = 1 - \mathbb{P}(M_T \leq u)$  for a large enough value of u, that is to say on the calculation of the tail of the distribution function of  $M_T$ .

Exact solutions to these problems by means of closed formulas have been found for a very restricted number of stochastic processes [1], among which Brownian motion or the Wiener process  $W = (W(t), t \ge 0)$ , the Brownian bridge  $B = (B(t), 0 \le t \le 1), B(t) := W(t) - tW(1)$ , Brownian motion with linear drift ([2],[3]), and the processes  $Y = (Y(t), 0 \le t \le 1), Y(t) := B(t) - \int_0^1 B(s) ds$  [4] and  $Z = (Z(t), 0 \le t \le T), Z(t) := \int_0^t W(s) ds + yt$  ([[5],[6],[7]). Explicit formulas for the exact solutions to these problems also exist for some stationary Gaussian processes having a particular covariance function ([8]-[17]). The methods for finding these formulas are ad hoc and therefore non-transposable to more general processes, even in the Gaussian case. In the latter case, many results are available, all based on the pioneering works of S.O.Rice ([19],[20],[21]) and M.R.Leadbetter ([22]-[25]). They consist of either inequalities for  $\mathbb{P}(M_T > u)$ , with a large enough u, or asymptotic approximations of  $\mathbb{P}(M_T > u)$  for u tending to infinity and fixed T. In each case, the main difference between these results comes from the assumptions adopted for the Gaussian process X (stationarity, regularity of its trajectories,  $\cdots$ ). Also in the Gaussian case, asymptotic approximations of  $\mathbb{P}(M_T > u)$  can be found in the literature for T tending to infinity and fixed u.
In the general case and under some conditions, that is to say if process X is neither stationary nor Gaussian and satisfies some assumptions to be specified, an exact formula can be found for the probability  $\mathbb{P}(M_T > u)$ . It expresses this probability as the sum of a Rice series defined in terms of factorial moments of the random number of upcrossings of level u by process X on the interval J = [0, T]. The fact that this formula is exact is obviously attractive. However, its use in practical applications is not easy because on the one hand the assumptions under which it is valid (and which relate to process X) are often difficult to verify and, on the other hand, the factorial moments that compose it (and which are given by the Rice formulas) cannot be analytically calculated and are difficult, indeed impossible, to estimate numerically from the Rice formulas. An interesting feature of the Rice series is its enveloping property resulting from the fact that it is an alternating series. Hence, replacing the total sum of this series by a partial sum gives upper and lower bounds for the probability  $\mathbb{P}(M_T > u)$ . The truncation error can thus be bounded by the absolute value of the first neglected term. So, if all the factorial moments of the partial sum can be calculated, this enables the target probability to be estimated with some efficiency.

J.M.Azaïs and M.Wschebor's book [1] brings together all the recent results focused on the calculation of the tails of distribution functions of the extrema of random processes and fields in Gaussian and non-Gaussian contexts. Recently the authors of the present paper have experimented some of these results numerically through examples derived from the reliability analysis of random dynamic systems. The purpose of this paper is to present some results of this work. The problem which was considered to perform this study is exposed in the next section.

### 2 PROBLEM STATEMENT

Note first that in what follows it is supposed that all the random quantities considered (random variables, stochastic processes) are defined on the same probability space  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Let I be an interval of  $\mathbb{R}$  (with possibly  $I = \mathbb{R}$ ),  $J \subset I$  a compact subinterval of I of the form  $J = [0,T], 0 < T < +\infty, X = (X(t), t \in I)$  a second-order  $\mathbb{R}$ -valued stochastic process defined on  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  and indexed on I (i.e.  $t \in I$ ), and  $M_T^*$  the second-order  $(\mathbb{R}_+)$ -valued random variable based on  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , such that :

$$M_T^* = \sup_{t \in J} |X(t)| \tag{B.1}$$

We seek to estimate the probability :

$$Q_T(u) = \mathbb{P}(M_T^* > u) , \ u \in \mathbb{R}_+$$
(B.2)

under the two following constraints :

(c1): this probability is very small  $(Q_T(u) \sim 10^{-4})$ , and therefore u has a high value,

(c2): process X is either Gaussian non-stationary or non-Gaussian non-stationary (see examples below) and represents the displacement response of a single-degree-of-freedom (s.d.o.f.) stochastic oscillator whose dynamics are described by a second-order random differential equation or by a second-order differential inclusion.

Note that this is a typical structural reliability type problem. Indeed, process X can be seen as the dynamic response of a mechanical structure subjected to a random dynamic excitation, the level u as

a given safety threshold, the event  $\{M_T^* > u\}$  as the associated failure criterion and the probability  $Q_T(u)$  as the probability of failure of the structure.

To solve this problem, we refer to some results taken from J.M.Azaïs and M.Wschebor's book [1] and the works of C.Cierco [26]. These results are based on the use of Rice series and allow the construction of the exact solution, as well as approximations and bounds of this solution. Unfortunately, the expressions obtained are very complicated and their numerical evaluation requires the use of a Monte Carlo procedure. The aim of this paper is to highlight the accuracy of the approximate solutions developed, without considering the difficulties of the numerical calculation of these solutions. This latter problem is currently being intensively studied by the authors and is not discussed in this article.

### 3 PROBLEM SOLVING

Let us first assume that the process  $X = (X(t), t \in I)$  is q.m. differentiable with  $C^1$ -trajectories, and denote by  $\sharp\{\cdot\}$  the cardinal of the set  $\{\cdot\}$ . Then we can define the random variables :

$$U_u(T) := \sharp \{ t \in J = [0, T] : X(t) = u , \dot{X}(t) > 0 \}$$
(B.3)

$$D_u(T) := \sharp \{ t \in J = [0, T] : X(t) = u , \dot{X}(t) < 0 \}$$
(B.4)

which represent respectively the number of upcrossings and downcrossings of level u by process X on the time interval J = [0, T].

Consider then the positive integer  $V_m(K)$  such that,  $\forall m, K \in \mathbb{N}^*, K \ge m \ge 1$ :

$$V_m(K) = K(K-1)\cdots(K-m+1)$$
 (B.5)

and denote by  $\mathbb{E}[\cdot]$  the mathematical expectation operator. Finally, let us introduce the three following events :

$$E = \{M_T^* > u\} \in \mathcal{F} \tag{B.6}$$

$$E_1 = \{ |X(0)| > u \} \in \mathcal{F}$$
 (B.7)

$$E_2 = \{ |X(0)| \le u , \ U_u(T) + D_{-u}(T) \ge 1 \} \in \mathcal{F}$$
(B.8)

with  $u \ge 0$ .

It is clear that  $E_1 \cup E_2 = E$  and  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Hence, due to the  $\sigma$ -additivity property of the probability measure  $\mathbb{P}$ , we can write :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) \tag{B.9}$$

Let us suppose now that X has  $C^{\infty}$ -trajectories and that the probability density function  $p_{X(T/2)}$  of the random variable  $X(\frac{T}{2})$  is bounded. Then, under an additional technical hypothesis [1], assumed to be satisfied here,  $\mathbb{P}(E_2)$  is given by :

$$\mathbb{P}(E_2) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m^*(u)}{m!}$$
(B.10)

where  $\forall m \geq 1$ :

$$\gamma_m^*(u) = \mathbb{E}[V_m(S_u)] \tag{B.11}$$

is the m-order factorial moment of the integer-valued random variable :

$$S_u = (U_u(T) + D_{-u}(T))\mathbb{1}_{\{|X(0)| \le u\}}$$
(B.12)

which represents the sum of the upcrossings of level u and downcrossings of level -u by process X on J = [0, T], given that  $|X(0)| \le u$ .

 $\mathbb{P}(E_2)$  appears thus as the sum of a Rice Series ([19],[20,[25],[27]) and, from Eqs.(1),(2),(6)-(10), we can write *in fine* :

$$Q_T(u) = \mathbb{P}(M_T^* > u) = \mathbb{P}(|X(0)| > u) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m^*(u)}{m!}$$
(B.13)

The first interest of formula (13) is that it provides the exact expression of the target probability  $Q_T(u)$ . Its second interest is related to the nature of the Rice series, which is an alternating series and therefore enables the double inequality to be expressed :

$$\forall N \ge 1 , \ Q_T^{2N}(u) \le Q_T(u) \le Q_T^{2N-1}(u)$$
 (B.14)

with, in particular :

$$Q_T^2(u) \le Q_T(u) \le Q_T^1(u) \tag{B.15}$$

where :

$$Q_T^{2N}(u) = \mathbb{P}(|X(0)| > u) + \sum_{m=1}^{2N} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m^*(u)}{m!}$$
(B.16)

$$Q_T^{2N-1}(u) = \mathbb{P}(|X(0)| > u) + \sum_{m=1}^{2N-1} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m^*(u)}{m!}$$
(B.17)

$$Q_T^2(u) = \mathbb{P}(|X(0)| > u) + \gamma_1^*(u) - \frac{\gamma_2^*(u)}{2}$$
(B.18)

$$Q_T^1(u) = \mathbb{P}(|X(0)| > u) + \gamma_1^*(u)$$
(B.19)

We can thus construct lower and upper bounds for  $Q_T(u)$ .

We can also, from Eq.(13), construct approximations of  $Q_T(u)$  with control of the approximation error. Indeed, let  $Q_T^N(u)$  be the probability obtained by truncating at order  $N \ge 1$  the sum in Eq.(13), that is :

$$Q_T^N(u) = \mathbb{P}(|X(0)| > u) + \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m^*(u)}{m!}$$
(B.20)

This probability is a N-approximation of  $Q_T(u)$  and, again due to the alternating nature of the Rice series, it is easy to show that the approximation error  $\Delta_T^N(u) = |Q_T(u) - Q_T^N(u)|$  satisfies the inequality :

$$\Delta_T^N(u) \le \overline{\Delta}_T^N(u) \tag{B.21}$$

where :

$$\overline{\Delta}_T^N(u) = \frac{\gamma_{N+1}^*}{(N+1)!} \tag{B.22}$$

The possibility to control the approximation error is the third great interest of formula (13).

Let us note that other upper and lower bounds can be obtained for  $Q_T(u)$  by relaxing the  $C^{\infty}$ differentiability hypothesis on the trajectories of X. For example, it can be shown [1] that if the

probability density function  $x \to p_{X(t)}(x)$  of the random variable X(t) is bounded for  $t \in J = [0, T]$ and  $x \in \mathbb{R}$ , and if the trajectories of X are of class  $C^{p+1}$ , then :

(a) if 
$$2M + 1 < p/2$$
,  
 $Q_T(u) \le P(|X(0)| > u) + \sum_{m=1}^{2M+1} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m^*(u)}{m!}$ 
(B.23)

(b) if 2M < p/2,

$$Q_T(u) \ge P(|X(0)| > u) + \sum_{m=1}^{2M} (-1)^{m+1} \frac{\gamma_m^*(u)}{m!}$$
(B.24)

Note also that in the case where the trajectories of X are not of class  $C^{\infty}$ , but are at least continuous, it is possible to construct an approximate process with  $C^{\infty}$ -trajectories and to work with this process. Such an approximation is obtained by the convolution of X with a suitable deterministic kernel [1].

Computing the bounds (16)-(19), (23), (24) or the approximation (20) comes down to assessing the factorial moments  $\gamma_m^*(u)$  given by Eq.(11), and there are two strategies for this : (1) resort to a Monte Carlo procedure or (2) use the Rice formulas. The first consists of simulating a large number of trajectories of X and estimating the moments  $\gamma_m^*(u)$  from the simulated trajectories by using an adequate statistical estimator. Obviously this option is time-consuming, but it is numerically feasible. In the second strategy, each  $\gamma_m^*(u)$  ( $m = 1, 2, \cdots$ ) is expressed as a (2m + 1)-dimensional integral whose integrand contains the probability density function of the (2m + 1)-dimensional random variable  $(X(0), X(t_1), \cdots, X(t_m), \dot{X}(t_1), \cdots, \dot{X}(t_m))$  ([1],[17],[26]). This density must therefore be known to calculate the integral. Unfortunately it is accessible only for Gaussian processes and some functionals of Gaussian processes. Moreover, even in these cases, the calculation of the integral is difficult and requires the use of a numerical procedure. Note that it is possible to obtain explicit expressions for the coefficients  $\gamma_m^*(u)$  only for a restricted class of Gaussian processes and for small values of m ([1],[16]-[26]).

Given the nature of the processes considered in this paper (see condition c2 in section 2), only the first strategy was used. Therefore, the factorial moments  $(\gamma_m^*(u), m = 1, 2, \cdots)$  were estimated via the Monte Carlo procedure mentioned above. In the next section, the evolution of the approximation (20), the bounds (16)-(19) and the approximation error (22) as N increases are illustrated numerically and graphically through four examples.

#### 4 NUMERICAL APPLICATIONS

The numerical results presented in this section concern the following four examples.

#### • Example 1

The process  $X = (X(t), t \in I)$  is indexed on  $I = \mathbb{R}_+$  and is the non-stationary displacement response of a s.d.o.f. stochastic oscillator whose dynamics is described by the following second-order linear random differential equation :

$$\ddot{X}(t) + F_1(X(t), \dot{X}(t)) = f(t)G(t) , \ t > 0$$

$$X(0) = 0 \ a.s. , \ \dot{X}(0) = 0 \ a.s.$$
(B.25)

where :

$$F_1(X(t), \dot{X}(t)) = \omega_0^2 X(t) + 2\omega_0 \xi_0 \dot{X}(t)$$
(B.26)

$$\omega_0 = 20\pi rad \cdot s^{-1} \ , \ \xi_0 = 0.025 \tag{B.27}$$

$$f(t) = \eta t^2 e^{-\alpha t} , \ t \in \mathbb{R}_+$$
(B.28)

$$\alpha = 0.1$$
 ,  $\eta = 1$  (B.29)

and  $G = (G(t), t \in \mathbb{R})$  is a  $\mathbb{R}$ -valued zero-mean stationary Gaussian process based on  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , indexed on  $\mathbb{R}$ , with power spectral density  $S_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : \omega \to S_G(\omega)$  given by :

$$S_G(\omega) = \frac{B_g + A_g \omega^2}{\delta_g^2 [(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + (2\omega_g \xi_g)^2 \omega^2]}, \ \omega \in \mathbb{R}$$
(B.30)

where :

$$A_g = (2\omega_g \xi_g)^2 S_0, \ B_g = \omega_g^4 S_0, \ \delta_g = \frac{\pi \left( B_g + A_g \omega_g^2 \right)}{2\xi_g \omega_g^3}$$
(B.31)

$$\omega_g = 15.7 rad \cdot s^{-1} , \ \xi_g = 0.6 , \ S_0 = 0.08 m^2 \cdot s^{-1}$$
 (B.32)

### • Example 2

The process  $X = (X(t), t \in I)$  is indexed on  $I = \mathbb{R}_+$  and is the non-stationary displacement response of a s.d.o.f. stochastic oscillator whose dynamics is described by the following second-order nonlinear random differential equation :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) + F_2(X(t), \dot{X}(t)) = f(t)G(t) , \ t > 0\\ X(0) = 0 \ a.s. , \ \dot{X}(0) = 0 \ a.s. \end{cases}$$
(B.33)

where :

$$F_2(X(t), \dot{X}(t)) = \omega_0^2 X(t) + \mu X^3(t) + 2\omega_0 \xi_0 \dot{X}(t)$$
(B.34)

$$\mu = 344000m^{-2}s^{-2} \tag{B.35}$$

and  $\omega_0, \xi_0, f = (f(t), t \in \mathbb{R}_+)$  and  $G = (G(t), t \in \mathbb{R})$  as in the previous example.

## • Example 3

The process  $X = (X(t), t \in I)$  is indexed on  $I = \mathbb{R}_+$  and is the non-stationary displacement response of a s.d.o.f. stochastic oscillator whose dynamics is described by the following second-order nonlinear random differential equation :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) + F_3(X(t), \dot{X}(t)) = f(t)G(t) , t > 0 \\ X(0) = 0 a.s. , \dot{X}(0) = 0 a.s. \end{cases}$$
(B.36)

where :

$$F_3(X(t), \dot{X}(t)) = \omega_0^2 X(t) + H(X(t)) + 2\omega_0 \xi_0 \dot{X}(t)$$
(B.37)

 $f = (f(t), t \in \mathbb{R}_+)$  and  $G = (G(t), t \in \mathbb{R})$  as in Example 1 and,  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$H(x) = \begin{cases} \omega_1^2(x+e) & \text{if } x < -e \\ 0 & \text{if } |x| \le e \\ \omega_1^2(x-e) & \text{if } x > e \end{cases}$$
(B.38)

with :

$$\omega_1^2 = \omega_c^2 - \omega_0^2 \, , \ e = \sigma_0 \eta \tag{B.39}$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\omega_0\sqrt{\omega_0\xi_0}}\tag{B.40}$$

$$\omega_0 = 20\pi rad \cdot s^{-1}, \, \omega_c = 100\pi rad \cdot s^{-1} \tag{B.41}$$

$$\xi_0 = 0.01 , \ \eta = 0.05 \tag{B.42}$$

### • Example 4

The process  $X = (X(t), t \in I)$  is indexed on  $I = \mathbb{R}_+$  and is the non-stationary displacement response of a s.d.o.f. stochastic oscillator whose dynamics is described by the following second-order random differential inclusion :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) + F_4(X(t), \dot{X}(t)) \ni f(t)G(t) , t > 0\\ X(0) = 0 \ a.s. , \dot{X}(0) = 0 \ a.s. \end{cases}$$
(B.43)

where :

$$F_4(X(t), \dot{X}(t)) = \omega_0^2 X(t) + 2\omega_0 \xi_0 \dot{X}(t) + \lambda \sigma(\dot{X}(t))$$
(B.44)

 $f = (f(t), t \in \mathbb{R}_+)$  and  $G = (G(t), t \in \mathbb{R})$  as in Example 1, and  $\sigma$  is the multivalued operator "sign" such that,  $\forall \dot{x} \in \mathbb{R}$ :

$$\sigma(\dot{x}) = \begin{cases} -1 & if \ \dot{x} < 0\\ [-1,1] & if \ \dot{x} = 0\\ 1 & if \ \dot{x} > 0 \end{cases}$$
(B.45)

with :

 $\omega_0 = 20\pi rad \cdot s^{-1}, \ \xi_0 = 0.01, \ \lambda = 0.49m \cdot s^{-2}$  (B.46)

The length T of the study interval J = [0, T] is T = 100s for the first three examples and T = 10s for the fourth example.

The oscillator in Example 1 is a linear oscillator, that of Example 2 a Duffing oscillator, that of Example 3 an oscillator with elastic stops and that of Example 4 an oscillator with Coulomb friction. Note that in Example 1, X is a zero-mean non-stationary Gaussian process, while in Examples 2, 3 and 4 it is a zero-mean non-stationary non-Gaussian process. Note also that in Examples 1 and 2 this process has  $C^{\infty}$ -trajectories, which is not the case in examples 3 and 4, to the authors' knowledge. To process these last two examples we smoothed the trajectories by using the convolution technique (with Gaussian kernel) mentioned above.

Recall that : (a) we are interested in the probability  $Q_T(u) = \mathbb{P}(M_T^* > u) = \mathbb{P}(\sup_{t \in J} |X(t)| > u)$  for large u, (b) the exact expression of  $Q_T(u)$  is given by Eq.(13), and (c) the N-approximation  $Q_T^N(u)$  and lower and upper bounds of  $Q_T(u)$  are given by Eq.(20) and Eqs.(16)-(19) respectively.

For each of the above examples, the following results are presented hereafter :

A- graph of the function  $N \to Q_T^N(u_0)$  for a sufficiently large value  $u_0$  of u, (Figs. 1, 3, 5, 7); B- graph of the function  $u \to Q_T^N(u)$  for four values of N and  $u \ge u_0$ , where  $u_0$  is a given value (sufficiently large) of u (Figs.2, 4, 6, 8);

C- table giving the bound  $\overline{\Delta}_T^N(u)$  of the error approximation  $\Delta_T^N(u)$  (see Eqs.(21) and (22)) for some values of u and N (Tables 1, 3, 5, 7);

D- table giving the lower and upper bounds  $Q_T^{2N}(u)$  and  $Q_T^{2N-1}(u)$  of  $Q_T(u)$  (see Eqs.(14), (16) and (17)) for some values of u and N (Tables 2, 4, 6, 8).

Let us note that in points A and B above, the different values of  $Q_T^N(u)$  are compared to the exact solution  $Q_T(u)$  whose values, called "exact values" in the following, were estimated via a direct Monte Carlo procedure consisting of simulating very many trajectories of the process X and in estimating the probability  $Q_T(u) = \mathbb{P}(\sup_{t \in J} |X(t)| > u)$  from the simulated trajectories by using a suitable estimator of this probability. The Monte Carlo simulation of X was performed by discretizing the differential equation governing it using a central differencing scheme and by simulating the stationary Gaussian process G using an algorithm based on the spectral representation of G. For the three first considered examples, the following simulation parameters were used :

- Number of time increments :  $n = 2^{19}$ ,
- · Time increment :  $\Delta t = \frac{T}{n} \approx 1.9 \cdot 10^{-4} s$ ,
- · Number of simulated trajectories :  $L = 2 \cdot 10^6$ .

For the fourth example the time increment was taken equal to  $\Delta t = \frac{T}{n} \approx 1.9 \cdot 10^{-5} s.$ 



Figure 1. Example 1 : Graph of the function  $N \to Q_T^N(u_0)$  for the fixed value  $u_0 = 0.142$ m of u, and comparison with the exact value  $Q_T(u_0)$ .



Figure 2. Example 1 : Graph of the function  $u \to Q_T^N(u)$  for four values of N for  $u \ge 0.140$ m, and comparison with the exact solution.

Table 1. Example 1 : Bound  $\overline{\Delta}_T^N(u)$  of the error approximation  $\Delta_T^N(u)$  (Eqs. (21),(22)) for some values of u (m) and N.

	N=1	N=2	N=3
u=0.141	2.33E-04	8.00 E-05	2.90E-05
u=0.142	1.84E-04	$5.80 \text{E}{-}05$	1.75 E-05
u=0.143	1.51E-04	4.70E-05	1.45E-05
u=0.144	1.16E-04	2.75E-05	5.00E-06

Table 2. Example 1 : Lower and upper bounds  $Q_T^{2N}(u)$  and  $Q_T^{2N-1}(u)$  of  $Q_T(u)$  (Eqs. (14),(16),(17)) for some values of u (m) and N.

	u=0.140		u=0.144	
	$Q_T^{2N}(u)$	$Q_T^{2N-1}(u)$	$Q_T^{2N}(u)$	$Q_T^{2N-1}(u)$
N=1	1.818E-03	2.050E-03	1.139E-03	1.255E-03
N=2	1.869E-03	1.898E-03	1.161E-03	1.166E-03
N=3	1.875E-03	1.876E-03	1.162 E-03	1.162E-03
N=4	1.875E-03	1.875E-03	1.162E-03	1.162E-03
2.65F 2.60F 2.55F 2.50F 2.45F	E-03 E-03 E-03 E-03 E-03 E-03	-	approximate value $\cdot$ exact value $Q_T(z)$	s $Q_T^N(u_0)$ $u_0)$
2.401	E-03	<b>t</b>	Å	<b>۸</b>
2.35H	E-03	3 4	5	6 7

Figure 3. Example 2 : Graph of the function  $N \to Q_T^N(u_0)$  for the fixed value  $u_0 = 0.1005$ m of u, and comparison with the exact value  $Q_T(u_0)$ .



Figure 4. Example 2 : Graph of the function  $u \to Q_T^N(u)$  for four values of N for  $u \ge 0.1005$ m, and comparison with the exact solution.

Table 3. Example 2 : Bound  $\overline{\Delta}_T^N(u)$  of the error approximation  $\Delta_T^N(u)$  (Eqs. (21),(22)) for some values of u (m) and N.

	N=1	N=2	N=3
u=0.1010	1.81E-04	3.40E-05	6.00E-06
u=0.1015	1.39E-04	2.30E-05	3.00E-06
u=0.1020	1.17E-04	2.15 E-05	3.00E-06
u=0.1025	9.60E-05	1.70E-05	2.00E-06

Table 4. Example 2 : Lower and upper bounds  $Q_T^{2N}(u)$  and  $Q_T^{2N-1}(u)$  of  $Q_T(u)$  (Eqs. (14),(16),(17)) for some values of u (m) and N.

	u=0.1010		u=0.1025	
	$Q_T^{2N}(u)$	$Q_T^{2N-1}(u)$	$Q_T^{2N}(u)$	$Q_T^{2N-1}(u)$
N=1	2.013E-03	2.194E-03	1.182E-03	1.278E-03
N=2	2.041E-03	2.047E-03	1.197E-03	1.199E-03
N=3	2.042 E-03	2.042E-03	1.197E-03	1.197E-03
N=4	2.042E-03	2.042E-03	1.197E-03	1.197E-03
5.E-0	4		• approximate valu • exact value $Q_T$	ues $Q_T^N(u_0)$ $(u_0)$
4.E-0	4 -			
3.E-0	4 -	- · ·	•	•
2 E 0	4			N
2.11-0	1 2	3 4	5	6 7

Figure 5. Example 3 : Graph of the function  $N \to Q_T^N(u_0)$  for the fixed value  $u_0 = 0.214$ m of u, and comparison with the exact value  $Q_T(u_0)$ .



Figure 6. Example 3 : Graph of the function  $u \to Q_T^N(u)$  for four values of N for  $u \ge 0.216$ m, and comparison with the exact solution.

Table 5. Example 3 : Bound  $\overline{\Delta}_T^N(u)$  of the error approximation  $\Delta_T^N(u)$  (Eqs. (21),(22)) for some values of u (m) and N.

	N=1	N=2	N=3
u=0.217	1.67E-04	1.11E-04	5.35 E-05
u=0.220	9.35E-05	5.15 E-05	2.00E-05
u=0.223	4.85E-05	1.95 E-05	5.00E-06
u=0.226	2.30E-05	8.50E-06	3.00E-06

Table 6. Example 3 : Lower and upper bounds  $Q_T^{2N}(u)$  and  $Q_T^{2N-1}(u)$  of  $Q_T(u)$  (Eqs. (14),(16),(17)) for some values of u (m) and N.

	u=0.217		u=0.226	
	$Q_T^{2N}(u)$	$Q_T^{2N-1}(u)$	$Q_T^{2N}(u)$	$Q_T^{2N-1}(u)$
N=1	1.640E-04	3.305E-04	7.000E-05	9.300E-05
N=2	2.210E-04	2.745 E-04	7.550E-05	7.850E-05
N=3	2.345E-04	2.365 E-04	7.600E-05	7.600E-05
N=4	2.345E-04	2.345 E-04	7.600E-05	7.600E-05
6.E-04	•		▲ approximate va	llues $Q_T^N(u_0)$
5.E-04			-exact value $Q_{\uparrow}$	$T(u_0)$
4.E-04	••	_ <b>.</b>	<b>.</b>	A
3.E-04	-			
2.E-04	<u> </u>		1	N
	1 2	3 4	5	6 7

Figure 7. Example 4 : Graph of the function  $N \to Q_T^N(u_0)$  for the fixed value  $u_0 = 0.0128$ m of u, and comparison with the exact value  $Q_T(u_0)$ .



Figure 8. Example 4 : Graph of the function  $u \to Q_T^N(u)$  for four values of N for  $u \ge 0.0128$ m, and comparison with the exact solution.

Table 7. Example 4 : Bound  $\overline{\Delta}_T^N(u)$  of the error approximation  $\Delta_T^N(u)$  (Eqs. (21),(22)) for some values of u (m) and N.

	N=1	N=2	N=3		
u=0.0128	3.42E-04	2.44E-04	1.44E-04		
u=0.0130	1.62E-04	1.15E-04	6.60E-05		
u=0.0132	7.20E-05	4.70E-05	2.20E-05		
u=0.0134	2.80E-05	1.60E-05	6.00E-06		

Table 8. Example 4 : Lower and upper bounds  $Q_T^{2N}(u)$  and  $Q_T^{2N-1}(u)$  of  $Q_T(u)$  (Eqs. (14),(16),(17)) for some values of u (m) and N.

	u=0.0128		u=0.0134	
	$Q_T^{2N}(u)$	$Q_T^{2N-1}(u)$	$Q_T^{2N}(u)$	$Q_T^{2N-1}(u)$
N=1	2.25E-04	5.67 E-04	2.60E-05	5.40E-05
N=2	3.25E-04	4.69E-04	3.60E-05	4.20E-05
N=3	3.70E-04	3.86E-04	3.70E-05	3.70E-05
N=4	3.72E-04	3.72E-04	3.70E-05	3.70E-05

As shown in all the figures and tables presented above, for each of the considered examples (i.e. for each considered response process) the N-approximation  $Q_T^N(u)$  of  $Q_T(u)$ , for a sufficiently large u, is accurate for reasonable values of N ( $N \ge 4$ ). The alternating character of the Rice series constituting  $Q_T^N(u)$  is clearly apparent in these results. We can also see that in each case, this approximation quickly converges towards the target  $Q_T(u)$ . It is therefore an efficient and relevant solution for approximating the distribution tails of extrema of general random processes (i.e. not necessary Gaussian or stationary). Other examples, not presented here due to lack of space, lead to the same conclusion.

#### 5 CONCLUSION

In this paper we presented some numerical applications of a method based on the Rice series enabling

the construction of approximate formulas for distribution tails of general random process extrema. These applications show that such a method is relevant but comes up against a difficulty : the numerical computation of factorial moments. In the presented applications, these moments were calculated using a Monte-Carlo method requiring the simulation of many trajectories of the considered process. However, this procedure is very time-consuming and is difficult to apply in practice. That is why a study is currently being carried out by the authors, aiming to implement efficient numerical tools for the practical application of the presented method.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The financial support from national French ANR project MODNAT is gratefully acknowledged.

## REFERENCES

- J. M. Azaïs and M. Wschebor, Level sets and extrema of random processes and fields, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jerey (USA), 2009.
- S. Malmquist, On certain confidence contours for distribution functions, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 25, N<sup>o</sup>3, 1954.
- L. A. Shepp, The joint density of the maximum and its location for a Wiener process with drift, Journal of Applied Probability, Vol. 16, N<sup>o</sup>2, pp. 423-427, 1979.
- D. A. Darling, On the supremum of certain Gaussian processes, The Annals of Probability, Vol. 11, N<sup>o</sup>3, pp. 803-806, 1983.
- H. P. McKean, A winding problem for a resonator driven by a white noise, Journal of Mathematics of Kyoto University, Vol. 2, N<sup>o</sup>2, pp. 227-235, 1962.
- M. Goldman, On the first passage of the integrated Wiener process, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, N<sup>o</sup>6, pp. 2150-2155, 1971.
- A. Lachal, Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Section B, Vol. 27, N°3, pp. 385-405, 1991.
- D. M. Delong, Crossing probabilities for a square-root boundary by a Bessel process, Communication in Statistics, A-Theory and Methods, Vol. 10, N°21, pp. 2197-2213, 1981.
- D. Slepian, First passage time for a particular Gaussian process, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 32, N<sup>o</sup>2, pp. 610-612, 1961.
- L. A. Shepp, First passage time for a particular Gaussian process, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, N<sup>o</sup>3, pp. 946-951, 1971.
- L. A. Shepp and D. Slepian, First passage time for a particular stationary periodic Gaussian process, Journal of Applied Probability, Vol. 13, N<sup>o</sup>1, pp. 27-38, 1976.
- N. Cressie, The asymptotic distribution of the scan statistic under uniformity, The Annals of Probability, Vol. 8, N<sup>o</sup>4, pp. 828-840, 1980.

- S. M. Berman, Asymptotic independence of the numbers of high and low level crossings of stationary Gaussian processes, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, N<sup>o</sup>3, pp. 927-945, 1971.
- S. M. Berman, Excursions above high levels for stationary Gaussian processes, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 36, N<sup>o</sup>1, pp. 63-79, 1971.
- E. M. Cabaña, A Gaussian process with parabolic covariance, Journal of Applied Probability, Vol. 28, N<sup>o</sup>2, pp. 898-902, 1991.
- C. Delmas, On likelihood ratio test in Gaussian mixture models, Sankhya : The Indian Journal of Statistics, Vol. 65, N<sup>o</sup>3, pp. 513-531, 2003.
- C. Delmas, Projection on spherical cones, maximum of Gaussian fields and Rice's method, Statistics & Probability Letters, Vol. 64, N<sup>o</sup>3, pp. 263-270, 2003.
- S. O. Rice, The distribution of the maxima of a random curve, American Journal of Mathematics, Vol. 61, N<sup>o</sup>2, pp. 409-416, 1939.
- S. O. Rice, Mathematical analysis of random noise, Bell System Technical Journal, Vol. 23, N°3, pp. 282-332, 1944.
- S. O. Rice, Mathematical analysis of random noise, Bell System Technical Journal, Vol. 24, Nº1, pp. 46-156, 1945.
- S. O. Rice, Distribution of the duration of fades in ratio transmission : Gaussian noise model, Bell System Technical Journal, Vol. 37, N<sup>o</sup>3, pp. 581-635, 1958.
- M. R. Leadbetter, On crossings of levels and curves by a wide class of stochastic processes, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 37, N<sup>o</sup>1, pp. 260-267, 1966.
- M. R. Leadbetter, A note on the moments of the number of axis-crossings by a stochastic process, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 73, N<sup>o</sup>1, pp. 129-132, 1967.
- 24. M. R. Leadbetter, G. Lindgren, and H. Rootzen *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer-Verlag, New-York, 1983.
- H. Cramer and M. R. Leadbetter, Stationary and related stochastic processes, John Wiley & Sons, New-York, 1967.
- 26. C. Cierco, Problèmes statistiques liés à la détection et à la localisation d'un gène à effet quantitatif, Phd dissertation, University of Toulouse, France, 1996.
- R. N. Miroshin, *The use of Rice Series*, Theory of probability & its Applications, Vol. 28, N<sup>o</sup>4, pp. 714-726, 1984.

# Résumé

Initiée dans le cadre d'un projet ANR (le projet MODNAT) ciblé sur la modélisation stochastique de phénomènes naturels et la quantification probabiliste de leurs effets dynamiques sur des systèmes mécaniques et structuraux, cette thèse a pour objet le calcul de probabilités d'événements rares liés aux maxima en horizon fini de processus stochastiques, avec prise en compte des quatre contraintes imposées suivantes : (1) l'ensemble des processus considérés doit contenir les quatre grandes catégories de processus rencontrés en dynamique aléatoire, à savoir les gaussiens stationnaires, les gaussiens non stationnaires, les non gaussiens stationnaires et les non gaussiens non stationnaires; (2) ces processus doivent pouvoir être, soit décrits par leurs lois, soit fonctions de processus défentelles stochastiques, soit même solutions d'inclusions différentielles stochastiques; (3) les événements en question sont des dépassements de seuils très élevés par les maxima en horizon fini des processus considérés doit de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-8}$ ), du fait de la valeur élevée des seuils; et enfin (4) le recours à une approche Monte-Carlo pour effectuer ce type de calcul doit être banni, car trop chronophage compte tenu des contraintes précédentes.

Pour résoudre un tel problème, dont le domaine d'intérêt s'étend bien au delà de la mécanique probabiliste et de la fiabilité structurale (on le rencontre notamment dans tous les secteurs scientifiques en connexion avec la statistique des valeurs extrêmes, comme par exemple les mathématiques financières ou les sciences économiques) une méthode innovante est proposée, dont l'idée maîtresse est née de l'analyse des résultats d'une étude statistique de grande ampleur menée dans le cadre du projet MODNAT. Cette étude, qui porte sur l'analyse du comportement des valeurs extrêmes des éléments d'un vaste ensemble de processus, a en effet mis en évidence **deux fonctions germes** dépendant explicitement de la probabilité cible (la première en dépendant directement, la seconde indirectement via une probabilité conditionnelle auxiliaire elle-même fonction de la probabilité cible) et possédant des propriétés de régularité remarquables et récurrentes pour tous les processus de la base de données, et c'est sur l'exploitation conjointe de ces propriétés et d'un principe d'**approximation bas niveau-extrapolation haut niveau** que s'appuie la construction de la méthode. Deux versions de celle-ci en sont d'abord proposées, se distinguant par le choix de la fonction germe et dans chacune desquelles cette fonction est approximée par un polynôme. Une troisième version est également développée, basée sur le formalisme de la deuxième version mais utilisant pour la fonction germe une approximation de type "fonction de survie de Pareto".

Les nombreux résultats numériques présentés attestent de la remarquable efficacité des deux premières versions. Ils montrent également que celles-ci sont de précision comparable. La troisième version, légèrement moins performante que les deux premières, présente quant à elle l'intérêt d'établir un lien direct avec la théorie des valeurs extrêmes. Dans chacune de ses trois versions, la méthode proposée constitue à l'évidence un progrès par rapport aux méthodes actuelles dédiées à ce type de problème. De par sa structure, elle offre en outre l'avantage de rester opérationnelle en contexte industriel.

#### Mots clés :

Maxima de processus stochastiques, événements rares, théorie des valeurs extrêmes, "approximation bas niveau-extrapolation haut niveau".

# Abstract

Initiated within the framework of an ANR project (the MODNAT project) targeted on the stochastic modeling of natural hazards and the probabilistic quantification of their dynamic effects on mechanical and structural systems, this thesis aims at the **calculation of probabilities of rare events related to the maxima of stochastic processes over a finite time interval**, taking into account the following four constraints : (1) the set of considered processes must contain the four main categories of processes encountered in random dynamics, namely **stationary Gaussian**, **non-stationary Gaussian**, **stationary non-Gaussian** and **non-stationary non-Gaussian** ones; (2) these processes can be either **described by their distributions**, or **functions of processes described by their distributions**, or **solutions of stochastic differential equations**, or **solutions of stochastic differential inclusions**; (3) the events in question are crossings of **high thresholds by the maxima of the considered processes over finite time intervals** and these events are of very weak occurrence, hence of very small probability, due to the high size of thresholds; and finally (4) the **use of a Monte Carlo approach** to perform this type of calculation **must be proscribed** because it is too time-consuming given the above constraints.

To solve such a problem, whose field of interest extends well beyond probabilistic mechanics and structural reliability (it is found in all scientific domains in connection with the extreme values theory, such as financial mathematics or economical sciences), an innovative method is proposed, whose main idea emerged from the analysis of the results of a large-scale statistical study carried out within the MODNAT project. This study, which focuses on analyzing the behavior of the extreme values of elements of a large set of processes, has indeed revealed two **germ functions** explicitly related to the target probability (ite first directly related, the second indirectly via a conditional auxiliary probability which itself depend on the target probability) which possess remarkable and recurring regularity properties for all the processes of the database, and the method is based on the joint exploitation of these properties and a "low level approximation-high level extrapolation" principle. Two versions of this method are first proposed, which are distinguished by the choice of the germ function and in each of which the latter is approximated by a polynomial. A third version has also been developed. It is based on the formalism of the second version but which uses as germ function an approximation of "Pareto survival function" type.

The numerous presented numerical results attest to the remarkable effectiveness of the first two versions. They also show that they are of comparable precision. The third version, slightly less efficient than the first two, presents the interest of establishing a direct link with the extreme values theory. In each of its three versions, the proposed method is clearly an improvement compared to current methods dedicated to this type of problem. Thanks to its structure, it also offers the advantage of remaining operational in industrial context.

#### Keywords :

Maxima of stochastic processes, rare events, extreme values theory, low "level approximation-high level extrapolation".