



HAL
open science

Nouvelles solutions et classification du superpotentiel et du potentiel de Kähler compatibles avec une brisure de la supersymétrie à basse énergie induite par la gravitation

Damien Tant

► **To cite this version:**

Damien Tant. Nouvelles solutions et classification du superpotentiel et du potentiel de Kähler compatibles avec une brisure de la supersymétrie à basse énergie induite par la gravitation. Physique [physics]. Université de Strasbourg, 2016. Français. NNT : 2016STRAE040 . tel-01546150

HAL Id: tel-01546150

<https://theses.hal.science/tel-01546150>

Submitted on 23 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale de Physique et Chimie-Physique

Institut Pluridisciplinaire Hubert Curien - UMR CNRS 7178

Département de Recherche Subatomique

THÈSE présentée par :

Damien TANT

soutenue le : **1er Décembre 2016**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : Physique théorique

Nouvelles solutions et classification du superpotentiel et du potentiel de Kähler compatibles avec une brisure de la supersymétrie à basse énergie induite par la gravitation

THÈSE dirigée par :

M. Rausch de Trautenberg Michel

Professeur, Université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

M. Dudas Emilian

Directeur de recherche, École Polytechnique

M. Orloff Jean

Professeur, Clermont Université, Université Blaise Pascal

AUTRES MEMBRES DU JURY :

M. Conte Eric

Maitre de Conférence, Université de Haute Alsace,

M. Moulaka Gilbert

Chargé de recherche, Université de Montpellier

Remerciements

La thèse est une réalisation personnelle mais son accomplissement est également le fruit de nombreux soutiens, directs et indirects. Je profite des lignes suivantes pour remercier les personnes qui ont contribué à ce travail doctoral.

Je commence en remerciant l'Université de Strasbourg, l'école doctorale de physique et chimie-physique, et l'Institut Pluridisciplinaire Hubert Curien (IPHC) pour leur apport logistique. Mes remerciements vont à Christelle Roy et au Comité de Suivi des Thèses - Kamila Sieja, Pierre Van Hove et Quentin Raffy - pour leur implication dans les moments difficiles ; leur engagement m'a permis de mener à terme l'écriture du manuscrit et de préparer sereinement la soutenance. Merci également à Hervé Molière, et plus généralement au Groupe Théorie, pour leur appui concernant la communication scientifique.

Je continue en remerciant les rapporteurs et les membres du Jury pour leur disponibilité et pour leur temps consacré à la lecture de la thèse.

Je poursuis en remerciant les amis, éloignés ou proches, pour leur aide et pour leur soutien moral. Merci à Adam Alloul qui m'a lancé durant les premiers mois de thèse ; à Irene Dedes et à Mateo Valdes-Dupuy pour leur aide dans le travail ; à Dorian Boumedjaoud et à Michaël Buttignol pour leur relecture rigoureuse du manuscrit et de leur gentillesse.

Je prolonge les remerciements aux personnes avec lesquelles j'ai activement travaillé durant ces trois années. À Gilbert, pour votre disponibilité, votre gentillesse, votre ferveur en physique, et pour vos conseils, toujours pertinents. À Michel, avec qui travailler durant ces années a été un plaisir ; ta rigueur est une richesse, tout autant que ta compréhension en mathématiques et en physique.

Et je finis logiquement en remerciant ma famille ; leur soutien moral a été essentiel. Merci à mon oncle et ma tante, Jean-Luc et Monique Germain, pour leur engagement durant la soutenance de thèse. À mon grand frère, Romain, pour le soutien qu'il m'a toujours apporté, notamment en proposant une relecture du manuscrit, et pour sa grande gentillesse. Merci à mes parents, Claude et Fabrice ; leurs sacrifices et leur amour ont permis, à mon frère et à moi-même, de réaliser nos rêves. Enfin, merci à toute ma famille, je vous en serai éternellement reconnaissant et je tiens à vous déclarer tout mon Amour.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Éléments de supersymétrie globale	3
2.1	Superalgèbre de Poincaré et représentations	3
2.1.1	Le théorème de Coleman et Mandula	3
2.1.2	Le théorème de Haag, Lopuszanski et Sohnius	4
2.2	Superespace et superchamp	6
2.2.1	Superspace	7
2.2.2	Le superchamp et ses représentations	8
2.3	Le lagrangien supersymétrique	10
2.3.1	Le lagrangien de matière	10
2.3.2	Le lagrangien de jauge	12
2.3.3	Le lagrangien d'interaction	13
2.3.4	Le lagrangien final	13
3	Un nouveau calculateur	17
3.1	Le modèle standard supersymétrique minimal (MSSM)	18
3.1.1	Du contenu en champs à l'expression du lagrangien	19
3.1.2	Des termes de brisure douce à la brisure électrofaible	21
3.1.3	L'incrémentement du MSSM dans FeynRules	22
3.2	Estimation de $\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle$	22
3.2.1	Le calcul numérique des amplitudes de transition	24
3.2.2	Le calcul numérique de la moyenne thermique de la section efficace effective $\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle$	28
3.3	Un nouveau générateur : Dark Matter Interface	29
3.3.1	La partie « dynamique »	29
3.3.2	La partie « fixe »	30
3.3.3	Exécution et estimation de la densité relique de matière noire	30
4	Éléments de supergravité	33
4.1	La courbure du superspace	33
4.1.1	Le formalisme du vierbein et de la connexion de spin	33
4.1.2	Généralisation au superspace	34
4.2	Le multiplet de la supergravité	36
4.2.1	Les identités de Bianchi	36
4.2.2	Fixation de la jauge	37
4.3	Les superchamps pour un superspace courbe	38
4.3.1	Le superchamp chiral	38
4.3.2	Le superchamp vectoriel	39
4.4	Le lagrangien de la supergravité	40
4.4.1	La densité chirale	40
4.4.2	Le lagrangien de la supergravité	41
4.4.3	Brisure de la supergravité	43

5	Classification de K et de W	47
5.1	Une formulation du potentiel scalaire V_F	48
5.1.1	L'approche de Soni et Weldon	48
5.1.2	Vers de nouvelles solutions	49
5.2	Prérequis	55
5.2.1	Les prémices de la démonstration	56
5.2.2	Cas particulier et généralisation de la démonstration	56
5.2.3	Cas particulier et généralisation de la proposition	61
5.3	Le cas canonique du potentiel de Kähler	62
5.3.1	Reformulation du potentiel scalaire	62
5.3.2	Analyse des différents ordres	63
5.4	Le cas non-canonique du potentiel de Kähler	69
5.4.1	Analyse de l'hypothèse \mathcal{H}_0	70
5.4.2	Analyse de l'hypothèse \mathcal{H}_1	74
5.4.3	Analyse de l'hypothèse \mathcal{H}_2	76
6	Vers une étude à basse énergie du nouveau secteur S	81
6.1	Potentiel de Kähler canonique	82
6.1.1	Calcul du potentiel scalaire	82
6.1.2	Brisure de la supergravité et analyse	83
6.2	Potentiel de Kähler non-canonique	85
6.2.1	Calcul du potentiel scalaire	85
6.2.2	Brisure de la supergravité	88
6.2.3	Analyse du secteur ϕ	91
6.2.4	Application au modèle standard supersymétrique minimal	93
7	Conclusion et Perspectives	97
A	Conventions	99
B	Quelques Intégrales	101
C	Inversion de la métrique de Kähler	103
C.1	Inversion de la métrique de Kähler : hypothèse \mathcal{H}_0	104
C.2	Inversion de la métrique de Kähler : hypothèse \mathcal{H}_1	105
C.3	Inversion de la métrique de Kähler : hypothèse \mathcal{H}_2	106

Chapitre 1

Introduction

La détection du fond diffus cosmologique, en 1964 par Arno Allan Penzias et Robert Woodrow Wilson, amorçait une avancée majeure dans la compréhension de notre Univers, et plus particulièrement de sa naissance. De nos jours, l'opacité des premiers instants est un frein pour l'étude de l'Univers, mais le cadre de la physique des particules permet de surmonter ce problème et de poursuivre le voyage.

Dans la compréhension de l'Univers, deux voies complémentaires d'études sont finalement suivies. La première repose sur l'étude de l'Univers au niveau local ou dans son immensité - avec l'étude du fond diffus cosmologique notamment -, et conduit à estimer les constantes fondamentales ou les paramètres libres de l'Univers (courbure de l'espace-temps par exemple). La seconde se situe au niveau terrestre, et plus particulièrement dans les collisionneurs de particules ; elle mène à une compréhension du monde subatomique. De ces deux axes de recherche, deux modèles majeurs ressortent : le modèle standard de la cosmologie, dont le modèle plus courant est appelé le modèle Λ CDM, et le modèle standard de la physique des particules.

Malgré les grandes réussites de ces deux modèles, des problèmes fondamentaux persistent. L'expansion accélérée de l'Univers ou la rotation des galaxies sont parmi les problèmes majeurs de la cosmologie moderne. Pour ce qui est de la physique des particules, la gravitation au niveau subatomique (liée à l'incompatibilité entre la mécanique quantique et la relativité générale) ou le problème de hiérarchie des particules scalaires posent également problème. Néanmoins, ces deux axes de recherche étant en symbiose, des problèmes rencontrés en cosmologie trouvent une solution naturelle grâce à la physique des particules, et inversement. Cependant, un grand nombre de phénomènes physiques restent encore incompris. Dans le présent travail, l'axe de la physique des particules a été choisi, mais des problèmes de la cosmologie moderne sont par ailleurs évoqués.

Le modèle standard de la physique des particules est une grande réussite théorique et expérimentale. La détection du boson de Higgs par le grand collisionneur d'hadrons (LHC) de Genève, le 4 juillet 2012, venait confirmer sa robustesse. Dans notre voyage vers la naissance de l'Univers, la mise en évidence du boson de Higgs constitue une étape importante et permet une meilleure compréhension du changement d'état qui s'est produit moins d'une seconde après le Big Bang. Malgré l'opacité de l'Univers, entre le mécanisme de Higgs et le découplage de la lumière avec le bain primordial, cette mesure est un événement majeur pour la naissance de notre Univers. De grandes inconnues - leptogénèse, baryogénèse, etc - perdurent entre ces deux dates majeures, mais les études menées dans les collisionneurs et corrélées avec l'analyse du fond diffus cosmologique permettent, malgré notre aveuglement, de tenter de les comprendre.

Néanmoins, la détection du boson de Higgs apporte son lot de problèmes et confirme que le modèle standard est une théorie incomplète. Une théorie plus fondamentale, à plus haute énergie et plus proche du temps zéro est nécessaire.

Le problème de hiérarchie des particules scalaires n'est pas l'unique source menant à supposer l'existence d'une nouvelle théorie. Parmi toutes les particules qui composent le modèle standard, ces dernières représentent seulement une toute petite portion connue de l'Univers, appelé visible d'après leur affinité avec la lumière. L'immense majorité de l'Univers est « invisible » et inconnue. Deux obstacles à notre compréhension émergent : la matière noire, associée à la formation des amas de galaxies mais aussi à leur rotation, et l'énergie noire, introduite pour tenter de comprendre l'accélération de l'expansion de l'Univers.

Dans la construction du modèle standard, l'étude des symétries a joué un rôle prépondérant. Il est par

conséquent naturel d'introduire une nouvelle symétrie, de manière à étendre le modèle standard.

La supersymétrie introduit une symétrie entre les particules fermioniques et les particules bosoniques. De ce fait, pour chaque particule fermionique du modèle standard, un superpartenaire bosonique lui est associé. Réciproquement, un superpartenaire fermionique est associé aux bosons du modèle standard.

L'ajout d'une nouvelle symétrie à plus haute énergie - remontant, par la même occasion, l'ordre chronologique de l'évolution de l'Univers en allant vers sa naissance - implique nécessairement que cette dernière soit brisée à basse énergie. Une brisure dynamique de la supersymétrie n'étant pas phénoménologiquement viable, cette dernière doit être brisée explicitement via l'introduction de termes de brisure douce, dont les origines proviennent d'une énergie plus importante.

Les chapitres 2 et 3 présentent une étude de la supersymétrie globale. Le chapitre 2 introduit la supersymétrie, où des éléments essentiels à la compréhension et à la construction d'un lagrangien supersymétrique, pour un groupe de jauge arbitraire, sont présentés. Le chapitre 3 correspond à une analyse phénoménologique pour un modèle supersymétrique particulier - le modèle standard supersymétrique minimal - dans le cadre de la matière noire. Dans ce même chapitre, nous présentons également le développement d'un nouveau générateur informatique, permettant d'estimer la densité relique de manière noire d'un grand nombre de modèles allant au-delà du modèle standard.

Les termes de brisure douce, utilisés dans le cadre d'une supersymétrie globale, ont été incorporés de manière manuelle pour l'analyse, ce qui nous éloigne d'une compréhension de la Nature. Une manière naturelle d'obtenir ces termes de brisure douce consiste à monter en énergie et à introduire une nouvelle symétrie. De manière analogue aux groupes de jauge du modèle standard, où les bosons vecteurs sont introduits pour restaurer l'invariance de la symétrie sous une transformation locale, la gravité émerge de manière naturelle pour respecter l'invariance par rapport au paramètre de la transformation locale. Ce dernier, dans le cadre de la supersymétrie, étant un paramètre fermionique, le champ de jauge est par conséquent un fermion, appelé gravitino. Le gravitino est également accompagné de son superpartenaire, le graviton, et conduit à la gravitation. La supersymétrie locale est ainsi une théorie de la gravitation, appelée supergravité.

Néanmoins, l'introduction d'une nouvelle symétrie à haute énergie nécessite sa brisure à basse énergie. L'extension supersymétrique du mécanisme de Higgs est incluse et le champ de jauge associé à la brisure de la supergravité, le gravitino, devient massif. Parmi les multiples scénarii qui communiquent les conséquences de ces brisures aux champs de matière, notre étude est focalisée sur la brisure de la supersymétrie induite par la gravitation. Cette analyse nécessite de définir deux fonctions fondamentales, le potentiel de Kähler et le superpotentiel.

La supergravité incorpore de manière naturelle la gravitation mais c'est une théorie non-renormalisable. Et notre voyage vers le temps zéro de la naissance de l'Univers se limite à l'échelle de Planck, où la gravitation est comparable aux interactions du modèle standard (ou de ses extensions). Mais les processus physiques qui ont été produits pour une telle échelle d'énergie doivent conduire à des prédictions observables dans les expériences à basse énergie, menées dans les accélérateurs de particules, ou à une meilleure compréhension de l'Univers invisible. De plus, des modèles de supergravité incorporent des mécanismes naturels, permettant d'obtenir une faible valeur de la constante cosmologique.

Le chapitre 4 est une introduction à une théorie de la supergravité $N = 1$ permettant d'obtenir la contribution du potentiel scalaire, utilisée dans la brisure de la supergravité et étudiée dans les chapitres 5 et 6. Dans le chapitre 5, nous réalisons une analyse complémentaire [1] de celle apportée par Soni et Weldon [2] en 1983.

De manière à permettre une analyse à basse énergie de la brisure de la supersymétrie induite par la gravitation, Soni et Weldon ont classifié les expressions analytiques du potentiel de Kähler et du superpotentiel, mais cette étude est incomplète. Nous avons obtenu de nouvelles solutions - présentées dans la section 5.1 - menant éventuellement à de nouvelles conséquences phénoménologiques à basse énergie. Le chapitre 6 permet d'approfondir une de ces solutions et de mettre en lumière quelques caractéristiques à basse énergie.

Pour les différents chapitres, les conventions choisies sont évoquées à l'annexe A. Des détails techniques sont également donnés dans les annexes B et C.

Chapitre 2

Éléments de supersymétrie globale

À la sortie des années 1960, le modèle standard de la physique des particules est une grande réussite théorique. En se basant sur des principes de symétrie, l'ensemble de l'Univers visible pour de faibles énergies est parfaitement décrit. Au coeur de ce modèle, deux types de particules bien distinctes, les bosons et les fermions, aux propriétés bien différentes, sont considérés. Une manière naturelle d'étendre le modèle standard fût de supposer l'existence d'une symétrie entre les bosons et les fermions. Pour chaque fermion, un superpartenaire bosonique est associé et réciproquement.

Dans ce premier chapitre, les préceptes de base de la supersymétrie sont évoqués. Une analyse plus approfondie peut être effectuée à partir des ouvrages de références [3, 4, 5], tandis que les articles [6, 7] permettent d'y apporter un bon complément. La première partie est consacrée au développement de la superalgèbre de Poincaré, menant à la notion de superspace et de superchamps en deuxième partie. Finalement, la construction du lagrangien supersymétrique est effectuée dans la dernière partie.

2.1 Superalgèbre de Poincaré et représentations

L'avènement de la théorie quantique des champs¹, regroupant la mécanique quantique et la physique relativiste, fût crucial pour notre compréhension de l'infiniment petit.

L'introduction de la matrice S permet l'étude et la description de processus pour lesquels des particules entrantes et des particules sortantes interagissent (l'étude et le calcul de processus à quatre corps sont le coeur du chapitre 3). La non-trivialité de la matrice S restreint drastiquement les symétries envisageables de l'espace-temps.

Dans un premier temps, le théorème de Coleman et Mandula est présenté, dans la sous-section 2.1.1, où les symétries de l'espace-temps sont basées sur le groupe de Poincaré. Enfin, le théorème de Haag, Lopuszanski et Sohnius est proposé dans la sous-section 2.1.2, menant à l'introduction de la superalgèbre de Poincaré.

2.1.1 Le théorème de Coleman et Mandula

L'article de Coleman et Mandula [13] a servi de socle pour la construction du modèle standard, puisqu'il introduit le théorème suivant : il est impossible d'unifier les symétries de l'espace-temps avec les symétries internes, sinon de la manière la plus triviale, par leur produit direct. Pour arriver à cette conclusion, Coleman et Mandula ont contraint les symétries de l'espace-temps en supposant, qu'elles se composent uniquement de générateurs bosoniques, et que le spectre contient des particules massives.

D'après le théorème de la spin-statistique [14], les opérateurs bosoniques suivent une algèbre commutative. En définissant une série de boson ϕ^a et une série de fermion ψ^i , leur variation sous l'influence d'un opérateur bosonique B_A s'écrit

$$\delta_A \phi^a = [\phi^a, B_A] = (B_A^1)^a_b \phi^b \quad \text{et} \quad \delta_A \psi^i = [\psi^i, B_A] = (B_A^2)^i_j \psi^j, \quad (2.1)$$

avec B_A^1 et B_A^2 les représentations de la symétrie correspondante, agissant respectivement sur ϕ et ψ [15].

1. Voir les références [8, 9, 10, 11, 12].

Les charges bosoniques B_A associées à cette symétrie engendrent une algèbre de Lie

$$[B_A, B_B] = i f_{AB}^C B_C, \quad (2.2)$$

avec f_{AB}^C les constantes de structure, et satisfont l'identité de Jacobi

$$[[B_A, B_B], B_C] + [[B_C, B_A], B_B] + [[B_B, B_C], B_A] = 0. \quad (2.3)$$

Pour un espace-temps de courbure nulle, et composé de particules massives, ses symétries sont décrites par le groupe de Poincaré $ISO(1, 3)$. Les opérateurs de l'algèbre de Poincaré sont définis à partir des transformations de Lorentz $M^{\mu\nu}$ et des translations P^μ , et satisfont les relations de commutation

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -i(\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} + \eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma}), \\ [M^{\mu\nu}, P^\rho] &= -i(\eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu), \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

ainsi que l'identité de Jacobi (2.3). En introduisant l'opérateur de Pauli-Lubanski

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}, \quad (2.5)$$

avec $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ le tenseur de Levi-Civita antisymétrique et normalisé à $\epsilon_{0123} = 1$, les deux opérateurs de Casimir de l'algèbre de Poincaré sont

$$C_1 = P^\mu P_\mu \quad \text{et} \quad C_2 = W^\mu W_\mu, \quad (2.6)$$

et permettent de classifier les représentations irréductibles, en introduisant naturellement le spin et la masse.

Les symétries internes sont engendrées par un groupe de Lie compact G_{int} , dont les générateurs de l'algèbre T^a satisfont

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}_c T^c, \quad (2.7)$$

avec f^{ab}_c les constantes de structure. L'identité de Jacobi donnée à l'équation (2.3) est aussi satisfaite par les générateurs T^a .

D'après le théorème de Coleman et Mandula, l'unification des symétries de l'espace-temps et des symétries internes s'effectue de la manière la plus triviale, par leur produit direct $ISO(1, 3) \times G_{int}$. De ce fait, les relations de commutation entre leurs générateurs sont triviales

$$[T^a, P^\mu] = [T^a, M^{\mu\nu}] = 0. \quad (2.8)$$

Cette dernière propriété se répercute pour les opérateurs de Casimir du groupe de Poincaré

$$[T^a, P^2] = [T^a, W^2] = 0. \quad (2.9)$$

Ainsi, les composantes d'un multiplet, associées aux symétries internes, ont la même masse et le même spin.

2.1.2 Le théorème de Haag, Lopuszanski et Sohnius

Le théorème de Haag, Lopuszanski et Sohnius [16] généralise celui présenté dans la section 2.1.1, par l'utilisation d'opérateurs fermioniques comme générateur des symétries de l'espace-temps, en complément des opérateurs bosoniques B_A introduits précédemment.

À la différence des opérateurs bosoniques, les opérateurs fermioniques changent le type de la particule sur laquelle ils agissent : ces derniers transforment des bosons en fermions et des fermions en bosons. De plus, par le théorème de spin-statistique [14], les opérateurs fermioniques anticommulent entre eux et commutent avec des opérateurs bosoniques. En définissant l'opérateur fermionique F_I , associé à cette symétrie, la variation d'une série de boson ϕ^a et d'une série de fermion ψ^a s'écrit

$$\delta_I \phi^a = [\phi^a, F_I] = (F_I^1)^a_i \psi^i \quad \text{et} \quad \delta_I \psi^i = \{\psi^i, F_I\} = (F_I^2)^i_a \phi^a, \quad (2.10)$$

avec F_I^1 et F_I^2 les représentations de la symétrie agissant respectivement sur les ϕ et les ψ [15]. Finalement, l'algèbre entre les charges B_A et F_I est donnée par la relation d'anticommutation

$$\{F_I, F_J\} = R_{IJ}{}^A B_A, \quad (2.11)$$

et de commutation

$$[F_I, B_A] = S_{IA}{}^J F_J, \quad (2.12)$$

où $R_{IJ}{}^A$ et $S_{IA}{}^J$ représentent les différentes constantes de structure. De nouvelles identités de Jacobi sont alors imposées

$$\begin{aligned} \{\{F_I, F_J\}, F_K\} + \{\{F_K, F_I\}, F_J\} + \{\{F_J, F_K\}, F_I\} &= 0, \\ \{\{F_I, F_J\}, B_A\} + \{[B_A, F_I], F_J\} - \{[F_J, B_A], F_I\} &= 0, \\ [[F_I, B_A], B_B] + [[B_B, F_I], B_A] + [[B_A, B_B], F_A] &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les différentes relations de commutation, données aux équations (2.2) et (2.12), d'anticommutation (2.11), et les identités de Jacobi, établies aux équations (2.3) et (2.13), définissent une algèbre de Lie \mathbb{Z}_2 -graduée \mathfrak{g} , appelée aussi superalgèbre de Lie. Cette superalgèbre résulte de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Le sous-espace vectoriel \mathfrak{g}_0 décrit l'espace des opérateurs bosoniques

$$\mathfrak{g}_0 = \text{vect} \{P^\mu, M^{\mu\nu}, \mu \in \{0, \dots, 3\}, \nu \in \{0, \dots, 3\}\}, \quad (2.14)$$

que nous présentons dans la section 2.1.1. Le second sous-espace vectoriel \mathfrak{g}_1 représente l'espace des opérateurs fermioniques

$$\mathfrak{g}_1 = \text{vect} \{Q_\alpha^I, \alpha \in \{1, 2\}, I \in \{1, \dots, N\}\} \oplus \text{vect} \{\bar{Q}_I^{\dot{\alpha}}, \dot{\alpha} \in \{\dot{1}, \dot{2}\}, I \in \{1, \dots, N\}\}, \quad (2.15)$$

où Q_α^I et $\bar{Q}_I^{\dot{\alpha}}$ sont respectivement un spineur de Weyl gaucher et un spineur de Weyl droitier (la convention indicelle $(\alpha, \dot{\alpha})$ des spineurs reprend celle de Van der Waerden, détaillée dans la référence [6]). Néanmoins, le conjugué hermitien d'un opérateur fermionique étant lui-même un opérateur fermionique, il est possible de se placer dans une base, de manière à obtenir $(Q_\alpha^I)^\dagger = \bar{Q}_{I\dot{\alpha}}$, propre aux fermions de Majorana. Concernant l'indice $I \in \{1, \dots, N\}$, il correspond au nombre d'opérateurs fermioniques différents, satisfaisant les transformations (2.10). D'après ces dernières, l'indice I est par conséquent limité à $N = 4$ pour les théories de jauge supersymétriques et à $N = 8$ pour les théories de supergravité².

La superalgèbre de Poincaré étend l'algèbre de Poincaré par l'introduction des opérateurs fermioniques Q_α et $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$. Elle est régie, à partir des relations de commutation (2.2) et (2.12), et d'anticommutation (2.11), par

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu, \\ [Q_\alpha, M^{\mu\nu}] &= (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \quad [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, M^{\mu\nu}] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}, \\ [Q_\alpha, P_\mu] &= [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec les matrices $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i)$ et $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$ où σ^0 représente la matrice identité en dimension deux, tandis que σ^i correspond aux matrices de Pauli pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Les deux dernières matrices σ^μ et $\bar{\sigma}^\mu$, agissant sur des spineurs, suivent la convention indicelle $\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}$ et $\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}$ [6]. Les matrices $\sigma^{\mu\nu}$ ($\bar{\sigma}^{\mu\nu}$) définissent les transformations de Lorentz pour la représentation de Weyl gauchère (droitière) et s'écrivent à partir des matrices σ^μ et $\bar{\sigma}^\mu$ par

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta \quad \text{et} \quad (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \quad (2.17)$$

D'après les équations (2.16), la relation de commutation entre les opérateurs Q_α et $M^{\mu\nu}$ est non-triviale. Le second opérateur de Casimir (2.6) de l'algèbre de Poincaré, défini à partir de l'opérateur de Pauli-Lubanski

2. Pour la suite de cette étude et dans les chapitres suivants, seul le cas $N = 1$ est considéré.

(2.5), ne peut plus être considéré comme tel. Il est alors nécessaire de déterminer le nouvel opérateur de Casimir, associé à la superalgèbre de Poincaré. À partir de l'opérateur de Pauli-Lubanski (2.5), on définit

$$\tilde{W}_{\mu\nu} = \left(W_\mu - \frac{1}{4} \bar{Q} \bar{\sigma}_\mu Q \right) P_\nu - \left(W_\nu - \frac{1}{4} \bar{Q} \bar{\sigma}_\nu Q \right) P_\mu, \quad (2.18)$$

permettant d'introduire

$$\tilde{C}_2 = \tilde{W}^{\mu\nu} \tilde{W}_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

le second opérateur de Casimir de la superalgèbre de Poincaré. La définition des deux opérateurs de Casimir mène à la construction de représentations irréductibles, appelées supermultiplets, où l'ensemble de ses composantes ont une même masse, un superspin identique, et sont reliées par la transformation supersymétrique analogue à l'équation (2.10).

L'introduction de l'opérateur $(-)^F$ pour dénombrer les opérateurs fermioniques, dont la valeur propre vaut -1 pour un opérateur fermionique et $+1$ pour un opérateur bosonique, met en évidence une autre propriété fondamentale résultant de l'algèbre (2.16) : le nombre de degrés de liberté, entre la partie bosonique et fermionique d'un même supermultiplet, est identique.

En utilisant cette dernière propriété et en supposant un supermultiplet non-massif, deux représentations différentes peuvent être considérées. La première caractérise des multiplets de matière et relie les scalaires avec leur superpartenaire fermionique et inversement. La deuxième représentation forme un supermultiplet vectoriel, composé d'un boson vecteur et de son superpartenaire fermionique.

Enfin, la conclusion de Haag, Lopuszanski et Sohnius [16] est identique à celle de Coleman et Mandula [13] : l'unification entre les symétries internes et les symétries de l'espace-temps s'effectue uniquement de la manière la plus triviale³

$$[Q_\alpha, T^a] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, T^a] = 0. \quad (2.20)$$

Les relations de commutation avec les opérateurs de Casimir (2.6) - uniquement C_1 - et (2.19) sont alors données

$$[C_1, T^a] = [\tilde{C}_2, T^a] = 0, \quad (2.21)$$

et conduisent à des représentations irréductibles différenciées par la masse, le superspin et la charge de la symétrie interne.

2.2 Superespace et superchamp

La section 2.1.2 a mis en évidence une possible symétrie reliant les bosons et les fermions. Cette symétrie est étendue à l'espace-temps et conduit à la construction d'un nouvel espace, dépendant des coordonnées bosoniques usuelles x^μ et fermioniques $(\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$. La variable x^μ étant réelle, les coordonnées θ_α et $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ doivent aussi être « réelles ». Par conséquent, elles satisfont la condition $(\theta_\alpha)^\dagger = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ propre aux fermions de Majorana. Finalement, leur propriété d'anticommuation est assimilée à des variables de Grassmann qui, en définissant θ une variable de Grassmann, est régie par la relation d'anticommuation

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (2.22)$$

Une fonction arbitraire f , dépendant alors d'une variable de Grassmann θ , peut être décomposée après expansion de Taylor

$$f(\theta) = f_0 + f_1 \theta, \quad (2.23)$$

puisque $\theta^2 = 0$.

L'introduction d'un superchamp pour ce nouvel espace permet d'écrire de manière naturelle les transformations supersymétriques. Sa décomposition en champs se déduit facilement après avoir effectué une expansion de Taylor par rapport aux coordonnées fermioniques.

3. D'autres reenvisageableslations de commutations entre les deux opérateurs Q_α et T^a (et donc entre $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ et T^a) sont possibles. Mais pour cette étude, la relation de commutation est supposée triviale.

2.2.1 Superespace

Cette première partie présente les notions essentielles pour la compréhension du superespace introduit par A. Salam et J. Strathdee [17], et pour le développement des superchamps.

Pour un espace-temps sans courbure, propre à un espace de Minkowski, la variété est paramétrisée à partir de l'élément

$$G(x) = \exp(ix \cdot P), \quad (2.24)$$

et complétée par la loi de multiplication $G(x)G(y) = G(x + y)$. Ainsi, un champ ϕ est développé sur cette variété par

$$\phi(x) = \exp(ix \cdot P) \phi(0) \exp(-ix \cdot P), \quad (2.25)$$

à partir d'une position initiale $x^\mu = 0$.

Cette paramétrisation se généralise au cas du superespace par l'élément (convention prise à la référence [4])

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp[ix \cdot P + i\theta \cdot Q + i\bar{Q} \cdot \bar{\theta}], \quad (2.26)$$

et elle est complétée par la loi de multiplication $G(x_1, \theta_1, \bar{\theta}_1)G(x_2, \theta_2, \bar{\theta}_2) = G(x_3, \theta_3, \bar{\theta}_3)$ avec

$$\begin{aligned} x_3^\mu &= x_1^\mu + x_2^\mu + i(\theta_1 \sigma^\mu \bar{\theta}_2 - \theta_2 \sigma^\mu \bar{\theta}_1), \\ \theta_3 &= \theta_1 + \theta_2, \\ \bar{\theta}_3 &= \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

De manière analogue à un espace de Minkowski, un superchamp $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ est défini à partir de l'élément G depuis une position initiale

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = G(x, \theta, \bar{\theta})\Phi(0, 0, 0)G^{-1}(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (2.28)$$

qui s'écrit sous forme différentielle en utilisant la relation de Baker-Campbell-Hausdorff⁴ (seule l'influence des opérateurs fermioniques, caractérisée par le paramètre ϵ , a été conservée)

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \Phi &= i[\Phi, \epsilon \cdot Q + \bar{Q} \cdot \bar{\epsilon}], \\ &= i(\epsilon \cdot Q + \bar{Q} \cdot \bar{\epsilon}) \Phi, \end{aligned} \quad (2.29)$$

où les supercharges

$$\mathcal{Q}_\alpha = -i(\partial_\alpha + i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu) \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}} = i(\partial_{\dot{\alpha}} + i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu), \quad (2.30)$$

ont été introduites et suivent l'algèbre de la supersymétrie (2.16)

$$\{\mathcal{Q}_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu. \quad (2.31)$$

Si Φ est un superchamp, alors l'application de la dérivée par rapport aux coordonnées bosoniques $\partial_\mu \Phi$ est aussi un superchamp par les relations de commutation triviales entre la dérivée ∂_μ et les paramètres de transformation (2.29). Cependant, les dérivées par rapport aux coordonnées fermioniques ∂_α et $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$ ne possèdent pas de relation de commutation triviale [6]

$$\{\partial_\alpha, \theta^\beta\} = \delta_\alpha^\beta, \quad \text{et} \quad \{\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \quad (2.32)$$

Par conséquent, $\partial_\alpha \Phi$ et $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \Phi$ ne sont pas des superchamps (2.29). Pour restaurer l'invariance, il est nécessaire d'introduire les dérivées covariantes, appelées aussi superdérivées,

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i(\sigma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu \quad \text{et} \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = \partial_{\dot{\alpha}} - i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad (2.33)$$

4. Les ordres supérieurs étant nuls, la relation de Baker-Campbell-Hausdorff est limitée à $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$.

qui satisfont l'algèbre de la supersymétrie (2.16)

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu, \quad (2.34)$$

et anticommulent avec les supercharges

$$\{\mathcal{Q}_\alpha, D_\beta\} = \{\mathcal{Q}_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = \{\bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha\} = \{\bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (2.35)$$

Par l'instauration des superdérivées, son application sur un superchamp $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi$ reste un superchamp (2.29).

2.2.2 Le superchamp et ses représentations

Un superchamp vivant dans le superespace dépend des coordonnées bosoniques et fermioniques. Ainsi, en supposant un superchamp arbitraire $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$, pour lequel les quatre coordonnées fermioniques suivent l'algèbre de Grassmann (2.23), son expansion de Taylor par rapport à θ^α , avec $\alpha \in \{1, 2\}$, et à $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$, avec $\dot{\alpha} \in \{\dot{1}, \dot{2}\}$, est donnée par

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= z(x) + \theta \cdot \xi(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\zeta}(x) + \theta \cdot \theta f(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} g(x) \\ &\quad + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot w(x) + \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\rho}(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta d(x), \end{aligned} \quad (2.36)$$

où les champs scalaires complexes $z(x), f(x), g(x)$ et $d(x)$, les spineurs de Weyl gauchers $\xi(x)$ et $w(x)$, les spineurs de Weyl droitiers $\bar{\zeta}(x)$ et $\bar{\rho}(x)$ et le champ vectoriel complexe $A_\mu(x)$ ont été introduits. La notation « \cdot » illustre et simplifie la sommation sur les indices spinoriels (α et $\dot{\alpha}$), avec notamment l'utilisation de l'identité $\theta^\alpha \theta^\beta = -\frac{1}{2} \theta \cdot \theta \epsilon^{\alpha\beta}$ [6], où le tenseur antisymétrique $\epsilon^{\alpha\beta}$ est utilisé pour monter ou pour abaisser les indices spinoriels. Il est défini par $\epsilon_{12} = \epsilon^{21} = 1$.

Un dénombrement du nombre de degrés de liberté, entre les composantes fermioniques (16) et les composantes bosoniques (16) du superchamp, montre leur égalité. La décomposition en champs est en adéquation avec l'égalité démontrée dans la section 2.1.2 (provenant de l'opérateur $(-)^F$ défini lors de la construction des multiplets de la superalgèbre de Poincaré). Les transformations supersymétriques des composantes d'un superchamp, définies à l'équation (2.36),

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \delta_\epsilon z(x) + \theta \cdot \delta_\epsilon \xi(x) + \bar{\theta} \cdot \delta_\epsilon \bar{\zeta}(z) + \theta \cdot \theta \delta_\epsilon f(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \delta_\epsilon g(x) \\ &\quad + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \delta_\epsilon A_\mu(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \delta_\epsilon w(x) + \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \delta_\epsilon \bar{\rho}(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta \delta_\epsilon d(x), \end{aligned} \quad (2.37)$$

sont déterminées à partir de la transformation d'un superchamp, donnée à l'équation (2.29),

$$\delta_\epsilon \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv i (\epsilon \cdot \mathcal{Q} + \bar{\mathcal{Q}} \cdot \bar{\epsilon}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (2.38)$$

et des supercharges, définies à l'équation (2.30). En égalisant les relations (2.37) et (2.38), et en identifiant un à un les facteurs des différents ordres en θ^α et en $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$, les transformations supersymétriques des différents champs s'expriment pour la partie scalaire par

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon z &= \epsilon \cdot \xi + \bar{\epsilon} \cdot \bar{\zeta}, \\ \delta_\epsilon f &= \frac{i}{2} \partial_\mu \xi \sigma^\mu \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} \cdot \bar{\rho}, \\ \delta_\epsilon g &= -\frac{i}{2} \epsilon \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\zeta} + \epsilon \cdot w, \\ \delta_\epsilon d &= \frac{i}{2} \partial_\mu w \sigma^\mu \bar{\epsilon} - \frac{i}{2} \epsilon \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\rho}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Pour la partie propre aux fermions de Weyl, les transformations sont

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \xi &= 2f\epsilon + \sigma^\mu \bar{\epsilon} (A_\mu - i\partial_\mu z), \\ \delta_\epsilon \bar{\zeta} &= 2g\bar{\epsilon} - \sigma^\mu \epsilon (A_\mu + i\partial_\mu z), \\ \delta_\epsilon w &= -i\sigma^\mu \bar{\epsilon} \partial_\mu g + \frac{i}{2} \epsilon \partial_\mu A^\mu - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \epsilon F_{\mu\nu} + 2\epsilon d, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\delta_\epsilon \bar{\rho} = -i\bar{\sigma}^\mu \epsilon \partial_\mu f - \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \partial_\mu A^\mu + \frac{i}{2} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\epsilon} F_{\mu\nu} + 2\bar{\epsilon} s.$$

Enfin, pour la partie vectorielle nous avons

$$\delta_\epsilon A_\mu = -\frac{i}{2} \epsilon \cdot \partial_\mu \xi - i\epsilon \sigma_{\nu\mu} \partial^\nu \xi + \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \cdot \partial_\mu \bar{\zeta} - i\bar{\epsilon} \bar{\sigma}_{\nu\mu} \partial^\nu \bar{\zeta} - \bar{\epsilon} \bar{\sigma}_{\mu\nu} w - \bar{\rho} \bar{\sigma}_\mu \epsilon, \quad (2.41)$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

L'expression du superchamp, établie à l'équation (2.36), est hautement réductible. L'application de différentes contraintes permet de supprimer un certain nombre de degrés de liberté, de manière à obtenir des représentations irréductibles.

Les deux premières contraintes proviennent de l'utilisation des superdérivées D_α et $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$, définies à l'équation (2.33). La première superdérivée mène à la représentation chirale d'un superchamp via la relation

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0. \quad (2.42)$$

La seconde caractérise la représentation antichirale d'un superchamp, contraint par $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$. Ces deux représentations sont, par conséquent, conjuguées hermitiennes l'une de l'autre. Pour faciliter la décomposition du superchamp chirale, le changement de variable $y^\mu = x^\mu - i\theta \sigma^\mu \bar{\theta}$, satisfaisant $\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu = 0$, conduit au développement en composantes du superchamp chirale

$$\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta \cdot \psi(y) - \theta \cdot \theta F(y), \quad (2.43)$$

avec $\phi(y)$ un champ scalaire complexe, $\psi(y)$ un spineur de Weyl gauche et $F(y)$ un champ scalaire complexe, appelé aussi champ auxiliaire. Ce dernier champ $F(y)$ permet de restaurer l'égalité du nombre de degrés de liberté entre les parties bosoniques et fermioniques du multiplet, lorsque les fermions de Weyl sont hors couche de masse⁵. Les transformations supersymétriques du superchamp chirale sont déduites à partir de celles du superchamp général (2.39) et (2.40), en tenant compte de la différence de normalisation entre les superchamps (2.36) et (2.43),

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \phi &= \sqrt{2}\epsilon \cdot \psi, \\ \delta_\epsilon \psi &= -\sqrt{2}\epsilon F - i\sqrt{2}\sigma^\mu \bar{\epsilon} \partial_\mu \phi, \\ \delta_\epsilon F &= -i\sqrt{2}\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

où le champ auxiliaire F , correspondant à la composante $\theta \cdot \theta$ du superchamp chirale Φ , se transforme comme une dérivée totale. Cette caractéristique est utilisée dans la section 2.3 pour la construction d'une action invariante sous ces transformations.

La troisième représentation irréductible correspond à la représentation vectorielle d'un superchamp, qui est contraint par la condition

$$V = V^\dagger. \quad (2.45)$$

D'après l'équation (2.2.2), l'expansion en série de Taylor du superchamp ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + i\theta \cdot \chi(x) - i\bar{\theta} \cdot \bar{\chi}(x) \\ &+ \frac{i}{2} \theta \cdot \theta (M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} (M(x) - iN(x)) + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} v_\mu \\ &+ i\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \left(\bar{\lambda} - \frac{i}{2} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi(x) \right) - i\bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \left(\lambda - \frac{i}{2} \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi}(x) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \left(D(x) + \frac{1}{2} \square C(x) \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

5. Sur couche de masse, le nombre de degrés de liberté entre le champ scalaire complexe ϕ et le fermion de Weyl ψ est identique (2 degrés de liberté pour les deux champs). Hors couche de masse, le nombre de degrés de liberté pour la partie fermionique change (4 degrés de liberté), alors que celui de la partie bosonique reste inchangé. Le champ auxiliaire propose alors 2 degrés de liberté supplémentaires pour la partie bosonique hors couche de masse. Il est finalement supprimé sur couche de masse au travers de son équation de mouvement.

avec les champs scalaires réels $C(x)$, $M(x)$ et $N(x)$, les fermions de Majorana $\chi(x)$ et $\lambda(x)$, le champ vectoriel réel $v_\mu(x)$ et le champ auxiliaire réel $D(x)$. De manière analogue aux représentations chirales, le champ auxiliaire permet de satisfaire l'égalité du nombre de degrés de liberté entre les deux types de particule hors et sur couche de masse. Il est supprimé sur couche de masse à partir de son équation de mouvement. En outre, un choix de jauge, défini par Wess et Zumino [18], permet de supprimer des degrés de liberté non-physiques présent dans l'expansion (2.46) et d'écrire le superchamp vectoriel

$$V_{W.Z.} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu + i\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}\theta\cdot\lambda + \frac{1}{2}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}D, \quad (2.47)$$

dont les transformations supersymétriques sont données par

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon v_\mu &= i(\epsilon\sigma_\mu\bar{\lambda} - \lambda\sigma_\mu\bar{\epsilon}), \\ \delta_\epsilon\lambda &= \sigma^{\mu\nu}\epsilon F_{\mu\nu} + i\epsilon D, \\ \delta_\epsilon D &= \partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\epsilon} + \epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$. Il est important de noter qu'une transformation supersymétrique (2.38) ne préserve pas la jauge de Wess-Zumino.

De manière analogue au superchamp chiral, le champ auxiliaire D de la représentation vectorielle se transforme comme une dérivée totale. Cette caractéristique est, par conséquent, utilisée dans la section 2.3 pour construire une action invariante par rapport aux transformations supersymétriques.

2.3 Le lagrangien supersymétrique

La section 2.1.1 conduit au développement de la superalgèbre de Poincaré, utilisée dans section 2.2.1, pour la construction d'un superspace et pour la définition des superchamps. Cette dernière partie concerne la construction du lagrangien supersymétrique à partir de ces notions.

Les représentations irréductibles d'un superchamp (chirales, antichirales et vectorielles) ont mis en évidence deux types de terme majeur pour la construction d'une théorie supersymétrique invariante, le terme F et le terme D , i.e. respectivement les composantes $\theta\cdot\theta$ et $\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}$ d'un superchamp. Les différentes combinaisons de ces représentations permettent d'écrire le lagrangien supersymétrique de manière compacte, et d'en déduire rapidement son expression sous forme de composante.

Dans cette section, nous considérons un groupe de jauge non-abélien G^6 et nous supposons le superchamp chiral Φ dans la représentation unitaire \mathfrak{R} spécifié par les générateurs T_a , et satisfaisant

$$[T_a, T_b] = if_{ab}{}^c T_c, \quad \text{et} \quad \text{Tr}(T_a T_b) = \tau_{\mathcal{R}}\delta_{ab}, \quad (2.49)$$

avec $f_{ab}{}^c$ les constantes de structure et $\tau_{\mathcal{R}}$ l'indice de Dynkin.

2.3.1 Le lagrangien de matière

La partie cinétique des superchamps de matière résulte de la multiplication entre un superchamp chiral Φ et un superchamp antichiral Φ^\dagger . La généralisation à n superchamps chiraux est définie par

$$\Phi_{i^*}^\dagger \delta^{i^*}{}_i \Phi^i, \quad (2.50)$$

où la notation indiciaire $i \in \{1, \dots, n\}$ et $i^* \in \{1^*, \dots, n^*\}$ est utilisée pour distinguer respectivement les superchamps chiraux et les superchamps antichiraux.

La transformation de jauge d'un superchamp chiral Φ , avec $\Lambda = \Lambda^a T_a$ un superchamp chiral, est définie par

$$\Phi^i \rightarrow [e^{2ig\Lambda}]^i{}_j \Phi^j, \quad \text{et} \quad \Phi_{i^*}^\dagger \rightarrow \Phi_{i^*}^\dagger [e^{-2ig\Lambda^\dagger}]^{i^*}{}_{j^*}, \quad (2.51)$$

6. Pour obtenir le cas abélien, il suffit de mettre les constantes de structure $f_{ab}{}^c$, associées au groupe de jauge, à zéro et de remplacer l'opérateur T^a par la charge $U(1)$ correspondante.

où g est la constante de couplage associée au groupe de jauge. Le superchamp chiral Λ étant différent de l'antichiral Λ^\dagger , le terme cinétique (2.50) n'est pas invariant sous les transformations de jauge, définies ci-dessus. Pour restaurer l'invariance, l'utilisation d'un superchamp vectoriel⁷ $V = V^a T_a$ dans la représentation adjointe de G (pour les composantes, la même notation $v_\mu = v_\mu^a T_a$, $D = D^a T_a$ et $\lambda = \lambda^a T_a$ est utilisée) et dont la transformation de jauge⁸ s'écrit

$$e^{-2gV} \rightarrow e^{2ig\Lambda^\dagger} e^{-2gV} e^{-2ig\Lambda}, \quad (2.52)$$

permet d'obtenir la composition entre les superchamps chiraux et vectoriels

$$\left(\Phi^\dagger e^{-2gV} \right)_{i^*} \delta^{i^*} \Phi^i, \quad (2.53)$$

qui est invariante sous les transformations de jauge (2.51) et (2.52).

En utilisant le même procédé que dans la section 2.2.2, l'expansion de Taylor par rapport aux coordonnées fermioniques $(\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ mène au lagrangien supersymétrique en fonction des composantes des superchamps. Cependant, la composition entre les superchamps, donnée à l'équation (2.53) étant réelle, seule la composante $\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}$ (après expansion et propre au terme D) est invariante sous les transformations supersymétriques (2.37). La notation⁹ $[\mathcal{L}]_{\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}}$ est alors utilisée dans l'expression du lagrangien

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = \left[\left(\Phi^\dagger e^{-2gV} \right)_{i^*} \delta^{i^*} \Phi^i \right]_{\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}}, \quad (2.54)$$

dans le but de signifier que seul le terme D est pris en compte. En reprenant l'expression du superchamp vectoriel (2.47) et celle du superchamp chiral (2.43), où un développement perturbatif par rapport au paramètre y^μ mène à

$$\Phi^i(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi^i(x) - \sqrt{2}\theta \cdot \psi^i(x) - \theta \cdot \theta F^i(x) - i\theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \phi^i(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta \cdot \theta \psi^i(x) \sigma^\mu \bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \partial_\mu \partial^\mu \phi^i(x), \quad (2.55)$$

le lagrangien (2.54) s'exprime, sous forme de composantes, par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{cin}} = & \delta^{i^*} D_\mu \phi_{i^*}^\dagger D^\mu \phi^i - \frac{i}{2} \delta^{i^*} [D_\mu \bar{\psi}_{i^*} \bar{\sigma}^\mu \psi^i - \bar{\psi}_{i^*} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi^i] \\ & + i\sqrt{2}g \delta^{i^*} (\bar{\lambda}^a \cdot \bar{\psi}_{i^*} (T_a \phi)^i - (\phi^\dagger T_a)_{i^*} \psi^i \cdot \lambda^a) - gD^a (\phi^\dagger T_a \phi) + \delta^{i^*} F_{i^*}^\dagger F^i, \end{aligned} \quad (2.56)$$

où les dérivées covariantes ont été introduites

$$\begin{aligned} D_\mu \phi^i &= \partial_\mu \phi^i - ig(v_\mu \phi)^i, & D_\mu \psi^i &= \partial_\mu \psi^i - ig(v_\mu \psi)^i, \\ D_\mu \phi_{i^*}^\dagger &= \partial_\mu \phi_{i^*}^\dagger + ig(\phi^\dagger v_\mu)_{i^*}, & D_\mu \bar{\psi}_{i^*} &= \partial_\mu \bar{\psi}_{i^*} + ig(\bar{\psi} v_\mu)_{i^*}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Le lagrangien cinétique, donné sous forme de superchamp à l'équation (2.54), a été formulé pour une théorie supersymétrique renormalisable. Si la condition de renormalisabilité est relaxée, le terme cinétique du secteur de matière peut être généralisé.

L'introduction d'une fonction fondamentale réelle, le potentiel de Kähler $K(\Phi, \Phi^\dagger)$, généralise les théories des modèles σ non-linéaires, rencontrées en théorie quantique des champs, dans le cadre de la supersymétrie. Les superchamps chiraux Φ et Φ^\dagger paramétrisent alors une variété rémanienne complexe, appelée variété kählérienne, dont la métrique est définie par¹⁰

$$K^{i^*}{}_i = \frac{\partial^2 K(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi^i \partial \phi_{i^*}^\dagger}. \quad (2.58)$$

7. Le champ vectoriel est toujours supposé dans la jauge de Wess-Zumino.

8. L'exponentielle du superchamp réel V est possible car ce dernier est sans dimension dans la jauge de Wess-Zumino (2.47). De plus, Le développement en série de Taylor de l'exponentielle est limité au deuxième ordre.

9. De manière plus formelle, la notation correspond à une intégration sur les coordonnées fermioniques pour obtenir un lagrangien final, dépendant uniquement de l'espace-temps. Pour plus de détails, se référer à la page 115 de la référence [4].

10. Pour une analyse mathématique des variétés kählériennes, les références [3], [19] et [20] sont une bonne introduction. Une analyse plus approfondie des variétés complexes est réalisée à la référence [21].

L'expression du lagrangien, en termes de superchamps et de composantes, est donnée par

$$\mathcal{L}_{\text{cin}}^{NR} = \frac{1}{2} \left[K(\Phi, \Phi^\dagger e^{-2gV}) + K(e^{-2gV} \Phi, \Phi^\dagger) \right] \Big|_{\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{cin}}^{NR} = K^{i^*}{}_i D_\mu \phi_{i^*}^\dagger D^\mu \phi^i + \dots, \quad (2.59)$$

où uniquement le premier terme - en comparaison avec l'équation (2.56) -, provenant de l'expansion en composante, a été retranscrit. Le cas renormalisable est, par conséquent, un cas particulier du plus général pour une métrique kählerienne plate¹¹

$$K^{i^*}{}_i = \delta^{i^*}{}_i. \quad (2.60)$$

2.3.2 Le lagrangien de jauge

Au niveau du secteur de jauge, l'analogie supersymétrique du tenseur $F_{\mu\nu}$ est défini à partir des super-dérivées D_α et $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ (2.33) par

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \cdot \bar{D} e^{2gV} D_\alpha e^{-2gV}. \quad (2.61)$$

L'application de la superdérivée $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$, à l'équation ci-dessus, implique $\bar{D}_{\dot{\alpha}} W_\alpha = 0$. Le superchamp W_α est par conséquent chiral. Son conjugué hermitien est également défini (analogie de l'équation (2.61), avec $D_\alpha \bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0$). La transformation de jauge du superchamp W_α résulte de celle introduite précédemment (2.52), et mène, après calcul, à la transformation

$$W_\alpha \rightarrow e^{-2ig\Lambda} W_\alpha e^{2ig\Lambda^\dagger}. \quad (2.62)$$

Par construction, le terme cinétique du secteur de jauge

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = \left[\frac{1}{16g^2} \delta_{ab} W^{\alpha a} W_\alpha^b \right] \Big|_{\theta \cdot \theta} + \left[\frac{1}{16g^2} \delta_{ab} \bar{W}_{\dot{\alpha}}^a \bar{W}^{\dot{\alpha} b} \right] \Big|_{\bar{\theta} \cdot \bar{\theta}}, \quad (2.63)$$

est alors invariant sous les transformations de jauge (2.62). Au niveau de l'expression (2.63), la multiplication d'un superchamp chiral avec un autre superchamp chiral étant elle-même chirale, la notation $[\mathcal{L}]|_{\theta \cdot \theta}$, analogue à celle utilisée précédemment $[\mathcal{L}]|_{\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}}$, est aussi introduite. Seule la composante $\theta \cdot \theta$, propre au terme F , est utilisée pour la définition du lagrangien de l'équation (2.63).

Le superchamp chiral W_α s'écrit en terme de composantes

$$W_\alpha = -2g \left(i\lambda_\alpha + \left[\frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta)_\alpha F_{\mu\nu} + \theta_\alpha D \right] - \theta \cdot \theta (\sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda})_\alpha \right), \quad (2.64)$$

où le tenseur $F_{\mu\nu}$ et les dérivées covariantes ont été respectivement introduits

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu - ig[v_\mu, v_\nu], \quad D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda - ig[v_\mu, \lambda] \quad \text{et} \quad D_\mu \bar{\lambda} = \partial_\mu \bar{\lambda} - ig[v_\mu, \bar{\lambda}]. \quad (2.65)$$

La partie cinétique du secteur de jauge s'écrit, d'après les équations (2.63) et (2.64), par

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{i}{2} [\lambda^a \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}_a - D_\mu \lambda^a \sigma^\mu \bar{\lambda}_a] + \frac{1}{2} D_a D^a. \quad (2.66)$$

Pour le secteur de jauge, le lagrangien non-renormalisable est obtenu à partir d'une nouvelle fonction chirale $h_{ab}(\Phi)$, appelée fonction cinétique de jauge, avec a et b les indices dans la représentation adjointe du groupe de jauge G . Son expansion, par rapport aux coordonnées fermioniques, est donnée par

$$h_{ab}(\Phi) = h_{ab}(\phi) + \sqrt{2}\theta \cdot \psi^i \frac{\partial h_{ab}(\phi)}{\partial \phi^i} - \theta \cdot \theta \left[F^i \frac{\partial h_{ab}(\phi)}{\partial \phi^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{ab}(\phi)}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \psi^i \cdot \psi^j \right], \quad (2.67)$$

11. Dans le cas général, nous parlons de potentiel de Kähler canonique, si la métrique est plate, et de potentiel de Kähler non-canonique dans le cas contraire.

et le lagrangien a pour expression

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}}^{NR} = \left[\frac{h_{ab}(\Phi)}{16g^2} W^{\alpha a} W_{\alpha}^b \right]_{|\theta, \theta} + \left[\frac{\bar{h}_{ab}(\Phi^\dagger)}{16g^2} \bar{W}_{\dot{\alpha}}^a \bar{W}^{\dot{\alpha} b} \right]_{|\bar{\theta}, \bar{\theta}}. \quad (2.68)$$

Le cas renormalisable de l'équation (2.63) est, par conséquent, un cas particulier de l'équation (2.68) où la fonction cinétique de jauge est simplement le symbole de Kronecker $h_{ab}(\phi) = \delta_{ab}$.

2.3.3 Le lagrangien d'interaction

Après avoir établi la partie cinétique des superchamps de matière et de jauge dans les deux précédentes sections, cette dernière section s'intéresse à l'interaction entre les superchamps de matière.

La multiplication de plusieurs superchamps chiraux étant un superchamp chirale, propriété déjà utilisée pour établir l'équation (2.63), il est possible de définir une fonction holomorphe, le superpotentiel¹², de la manière suivante

$$W(\Phi) = \alpha_i \Phi^i + \frac{1}{2!} m_{ij} \Phi^i \Phi^j + \frac{1}{3!} \lambda_{ijk} \Phi^i \Phi^j \Phi^k, \quad (2.69)$$

qui est, par conséquent, une fonction chirale. L'expansion de Taylor du superpotentiel mène à son expression en termes de composantes

$$W(\Phi) = W(\phi) + \sqrt{2}\theta \cdot \psi^i \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi^i} - \theta \cdot \theta \left[F^i \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \psi^i \cdot \psi^j \right]. \quad (2.70)$$

Par conséquent, le lagrangien d'interaction s'écrit simplement sous forme de superchamps

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = [W(\Phi)]_{|\theta, \theta} + [\bar{W}(\Phi^\dagger)]_{|\bar{\theta}, \bar{\theta}}, \quad (2.71)$$

qui donne après expansion

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -F^i \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \psi^i \cdot \psi^j - F_{i^*}^\dagger \frac{\partial \bar{W}(\phi^\dagger)}{\partial \phi_{i^*}^\dagger} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}(\phi^\dagger)}{\partial \phi_{i^*}^\dagger \partial \phi_{j^*}^\dagger} \bar{\psi}_{i^*} \cdot \bar{\psi}_{j^*}. \quad (2.72)$$

La définition du superpotentiel à l'équation (2.69) a été établie dans le cadre d'une théorie de la supersymétrie renormalisable. Dans le cas contraire, le développement polynomial n'est plus limité au troisième ordre, permettant des couplages à n -champs

$$\mathcal{L}^{NR} = [W^{NR}(\Phi)]_{|\theta, \theta} + [\bar{W}^{NR}(\Phi^\dagger)]_{|\bar{\theta}, \bar{\theta}}, \quad (2.73)$$

avec W^{NR} un superpotentiel arbitraire.

2.3.4 Le lagrangien final

Le lagrangien supersymétrique résulte de la sommation entre la partie cinétique des superchamps de matière (2.54), de la partie cinétique du secteur de jauge (2.63) et d'une dernière partie propre à l'interaction (2.71). Dans le cas renormalisable, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{cin}} + \mathcal{L}_{\text{jauge}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= \left[\left(\Phi^\dagger e^{-2gV} \right)_{i^*} \delta^{i^*} \Phi^i \right]_{|\theta, \theta \bar{\theta}, \bar{\theta}} + \left[\frac{1}{16g^2} \delta_{ab} W^{\alpha a} W_{\alpha}^b + W(\Phi) \right]_{|\theta, \theta} + \left[\frac{1}{16g^2} \delta_{ab} \bar{W}_{\dot{\alpha}}^a \bar{W}^{\dot{\alpha} b} + \bar{W}(\Phi^\dagger) \right]_{|\bar{\theta}, \bar{\theta}}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Pour ce qui est des composantes, l'expression du lagrangien provient de la sommation des parties cinétiques (2.56), (2.66) et de la partie d'interaction (2.72)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \delta^{i^*} D_\mu \phi_{i^*}^\dagger D^\mu \phi^i + \frac{i}{2} \left[\lambda^a \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}_a - D_\mu \lambda^a \sigma^\mu \bar{\lambda}_a - \delta^{i^*} (D_\mu \bar{\psi}_{i^*} \bar{\sigma}^\mu \psi^i - \bar{\psi}_{i^*} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi^i) \right]$$

12. Une analyse dimensionnelle implique une dimension de masse cubique pour le superpotentiel. L'expression (2.69) est choisie de manière à obtenir une théorie renormalisable.

$$\begin{aligned}
& +i\sqrt{2}g\delta^{i*}{}_i \left(\bar{\lambda}^a \cdot \bar{\psi}_{i*}(T_a\phi)^i - (\phi^\dagger T_a)_{i*}\psi^i \cdot \lambda^a \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi^i \partial\phi^j} \psi^i \cdot \psi^j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}(\phi^\dagger)}{\partial\phi_{i*}^\dagger \partial\phi_{j*}^\dagger} \bar{\psi}_{i*} \cdot \bar{\psi}_{j*} \quad (2.75) \\
& + \frac{1}{2} D^a D_a - gD^a (\phi^\dagger T_a \phi) + \delta^{i*}{}_i F_{i*}^\dagger F^i - F^i \frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi^i} - F_{i*}^\dagger \frac{\partial \bar{W}(\phi^\dagger)}{\partial\phi_{i*}^\dagger}.
\end{aligned}$$

Les champs auxiliaires ne se propageant pas, ils sont éliminés du lagrangien supersymétrique via leur équation de mouvement menant à l'expression du potentiel scalaire supersymétrique

$$\begin{aligned}
V(\phi, \phi^\dagger) &= V_F(\phi, \phi^\dagger) + V_D(\phi, \phi^\dagger), \\
&= \delta^{i*}{}_i F_{i*}^\dagger F^i + \frac{1}{2} D^a D_a = \delta^{i*}{}_i \frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi^i} \frac{\partial \bar{W}(\phi^\dagger)}{\partial\phi_{i*}^\dagger} + \frac{1}{2} g^2 (\phi^\dagger T_a \phi) (\phi^\dagger T_a \phi), \quad (2.76)
\end{aligned}$$

où les termes V_F et V_D proviennent respectivement de l'élimination des champs auxiliaires F et D . Le lagrangien final a pour expression

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \delta^{i*}{}_i D_\mu \phi_{i*}^\dagger D^\mu \phi^i + \frac{i}{2} \left[\lambda^a \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}_a - D_\mu \lambda^a \sigma^\mu \bar{\lambda}_a - \delta^{i*}{}_i (D_\mu \bar{\psi}_{i*} \bar{\sigma}^\mu \psi^i - \bar{\psi}_{i*} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi^i) \right] \\
&+ i\sqrt{2}g\delta^{i*}{}_i \left(\bar{\lambda}^a \cdot \bar{\psi}_{i*}(T_a\phi)^i - (\phi^\dagger T_a)_{i*}\psi^i \cdot \lambda^a \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi^i \partial\phi^j} \psi^i \cdot \psi^j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}(\phi^\dagger)}{\partial\phi_{i*}^\dagger \partial\phi_{j*}^\dagger} \bar{\psi}_{i*} \cdot \bar{\psi}_{j*} \quad (2.77) \\
&- V(\phi, \phi^\dagger).
\end{aligned}$$

Dans le cadre d'une théorie supersymétrique non-renormalisable, et notamment en supergravité (réalisée lors du chapitre 4), le lagrangien général est exprimé uniquement à partir des trois fonctions fondamentales (accompagnées du contenu en champ) : le potentiel de Kähler K pour le secteur de la matière (2.68), de la fonction cinétique de jauge h_{ab} pour le secteur de jauge (2.59) et du superpotentiel W pour les interactions (2.73). Son expression finale est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{NR} &= \mathcal{L}_{\text{cin}}^{NR} + \mathcal{L}_{\text{jauge}}^{NR} + \mathcal{L}_{\text{int}}^{NR} \\
&= \frac{1}{2} \left[K(\Phi, \Phi^\dagger e^{-2gV}) + K(e^{-2gV} \Phi, \Phi^\dagger) \right] \Big|_{\theta, \theta \bar{\theta}, \bar{\theta}} \\
&+ \left[\frac{h_{ab}(\Phi)}{16g^2} W^{\alpha a} W_\alpha^b + W^{NR}(\Phi) \right] \Big|_{\theta, \theta} + \left[\frac{\bar{h}_{ab}(\Phi^\dagger)}{16g^2} \bar{W}^{\dot{a} a} \bar{W}_{\dot{a} b} + \bar{W}^{NR}(\Phi^\dagger) \right] \Big|_{\bar{\theta}, \bar{\theta}}. \quad (2.78)
\end{aligned}$$

Le développement en composantes s'effectue de manière identique au cas renormalisable. De ce fait, nous donnons uniquement la partie propre au potentiel scalaire car ce dernier est utilisé dans la section 4.4.2. Son expression est donnée par

$$V^{NR}(\phi, \phi^\dagger) = V_F^{NR}(\phi, \phi^\dagger) + V_D^{NR}(\phi, \phi^\dagger), \quad (2.79)$$

résultant de l'élimination des champs auxiliaires F et D

$$\begin{aligned}
V_F^{NR}(\phi, \phi^\dagger) &= \mathcal{D}_i W^{NR} (K^{-1})^i{}_{j*} \mathcal{D}^{j*} \bar{W}^{NR}, \\
V_D^{NR}(\phi, \phi^\dagger) &= \frac{g^2}{8} h^{Rab} \left(K_i (T_a \phi)^i + (\phi^\dagger T_a)_{i*} K^{i*} \right) \left(K_j (T_b \phi^\dagger)^j + (\phi^\dagger T_b)_{j*} K^{j*} \right), \quad (2.80)
\end{aligned}$$

où les notations

$$\mathcal{D}_i W^{NR} = \frac{\partial W^{NR}}{\partial\phi^i} \quad \text{et} \quad K_i = \frac{\partial K}{\partial\phi^i}, \quad (2.81)$$

ont été introduites, et la fonction cinétique de jauge ayant été décomposée en une partie réelle h_{ab}^R et une partie imaginaire h_{ab}^I (h^{Rab} étant la fonction inverse).

L'existence d'une nouvelle symétrie entre les particules bosoniques et fermioniques a permis de définir la superalgèbre de Poincaré et de construire ses représentations irréductibles (2.21) correspondantes. Les composantes d'un même supermultiplet ont par conséquent la même masse. Cependant, cette conséquence phénoménologique n'a jamais été observée dans la Nature. La supersymétrie doit être nécessairement brisée. L'expression du potentiel scalaire supersymétrique (2.76) se décompose en deux parties distinctes. Une première partie, appelée terme F , résultant du champ auxiliaire du même nom. De manière analogue, la seconde partie provient des champs auxiliaires D . La brisure spontanée de la symétrie intervient, lorsque l'un de ces deux champs auxiliaires développe une valeur moyenne dans le vide, menant à deux mécanismes de brisure. Si la brisure provient du champ auxiliaire F , nous parlons de mécanisme de O'Raifeartaigh [22], alors que dans le second cas, où le champ D acquiert la valeur moyenne dans le vide, nous parlons de mécanisme de Fayet-Iliopoulos [23]. La charge conservée étant fermionique, la particule provenant de cette brisure correspond à un fermion de Goldstone, appelé Goldstino [24]. Toutefois, la physique à basse énergie issue de la brisure spontanée de symétrie n'est pas viable phénoménologiquement. Une seconde manière de briser la supersymétrie consiste à introduire des termes de brisure douce [25] dans l'expression du potentiel scalaire. Ils peuvent être incorporés de manière explicite, ce qui permet d'effectuer des analyses phénoménologiques (comme celle détaillée dans la section 3.1.2), ou être générés de manière dynamique (voir la section 4.4.3).

Chapitre 3

Un nouveau générateur d'étude phénoménologique dans le cadre de la matière noire

Le modèle standard de la physique des particules est, à ce jour, la théorie la mieux vérifiée expérimentalement. La détection du boson de Higgs, par les expériences ATLAS [26] et CMS [27], a confirmé la robustesse de ce modèle.

Néanmoins, des considérations théoriques - notamment le problème de hiérarchie - ou expérimentales - « introduction d'une matière inconnue » pour obtenir une cohérence entre les mesures expérimentales et l'approche théorique, concernant la dispersion des vitesses pour les galaxies et les amas de galaxies [28]¹ - laissent supposer l'existence d'une théorie plus fondamentale, à plus haute énergie. La supersymétrie est l'une des théories envisageables.

Alors que la divergence de la masse des particules scalaires est contrôlée de manière naturelle, par construction même de la supersymétrie², la compréhension du problème de la matière noire nécessite une approche phénoménologique.

Durant ses premiers instants, l'Univers n'est qu'un bain primordial d'un ensemble de particules régit par des processus d'annihilation ou de création (un exemple arbitraire est illustré ici)

$$\chi + \bar{\chi} \rightleftharpoons \phi + \bar{\phi}, \quad (3.1)$$

où l'entité χ s'annihile avec $\bar{\chi}$ pour donner les entités ϕ et $\bar{\phi}$, ou inversement. Mais devant l'expansion de l'Univers et la diminution de sa température, la probabilité d'interaction entre les différentes entités diminue. Lorsque l'équilibre de cette réaction est rompu, les particules χ et $\bar{\chi}$ se découplent de l'Univers primordial (illustré ici par ϕ et $\bar{\phi}$) et leur densité comobile, si les particules sont stables, se fige pour perdurer dans l'Univers. Nous parlons de la densité relique de la particule χ .

Le cadre de l'approche corpusculaire de la matière noire suggère qu'une particule massive, stable et n'interagissant pas avec la lumière, s'est découplée du bain primordial avec une certaine densité de matière, et dont l'expérience pourrait mesurer la valeur.

Parmi les particules du modèle standard, seul le neutrino possède les propriétés physiques pour satisfaire un tel rôle. Cependant, sa faible masse (une limite cosmologique haute sur les états de masse des neutrinos ν_j , avec $j \in \{1, 2, 3\}$, donne $\sum_j m_{\nu_j} \lesssim (0,3 - 1,3)$ eV à 95 % de CL [31]) suggère que son découplage

1. Deux interprétations de réponse peuvent être apportées pour comprendre la distribution de vitesse des amas de galaxie ou plus localement, des galaxies spirales. Une première interprétation suggère une modification de la dynamique newtonienne (appelée théorie MOND [29]). Bien que satisfaisantes pour des petites échelles, des différences avec l'expérience persistent à plus grande échelle [30]. La deuxième approche suppose l'existence d'une matière massive mais non perceptible avec des télescopes optiques, pouvant être composée d'entités astrophysiques - trou noir, étoile à neutron, naine brune, planète, etc -, ou corpusculaire. Dans le cadre de la physique des particules, le problème de la matière noire consiste à définir une nouvelle particule massive, stable à l'échelle de l'Univers et n'interagissant pas avec la lumière.

2. Le regroupement des particules, scalaire et fermionique, dans même un superchamp chirale, permet de protéger, via la symétrie chirale, leur masse à plus haute énergie.

avec le plasma primordial s'est effectué lorsqu'il était encore relativiste³, l'excluant, par conséquent, comme un possible candidat. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire une nouvelle particule pour réaliser l'approche corpusculaire.

Le modèle d'Univers couramment étudié, appelé modèle Λ CDM, repose sur un Univers de Friedman-Lemaitre, composé initialement d'une phase dominée par la radiation, puis par la matière, pour être actuellement dans un Univers en expansion accélérée, sous l'influence de l'énergie noire Λ ⁴. Les dernières données de la collaboration Planck [31, 33] suggèrent les paramètres de densités d'énergies suivants (à 68 % de CL)

$$\begin{aligned} \text{Densité de matière :} & \quad \Omega_m h^2 = 0,1423 \pm 0,0029, \\ \text{Densité de radiation :} & \quad \Omega_r h^2 = 2,47 \times 10^{-5}, \\ \text{Densité d'énergie noire :} & \quad \Omega_\Lambda = 0,686 \pm 0,020, \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec h le paramètre d'Hubble estimé à partir de la constante d'Hubble $H_0 = 67,8 \pm 0,9 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ par $h = \frac{H_0}{100}$, et une courbure de l'espace-temps proche de zéro. Nous distinguons dans l'Univers deux types de matière : la matière baryonique $\Omega_b h^2$ et la matière non-baryonique $\Omega_{dm} h^2$. Leur paramètre de densité dans l'Univers est différent

$$\Omega_m h^2 = 0,1423 \pm 0,0029 \rightarrow \begin{cases} \Omega_b h^2 = 0,02225 \pm 0,00023 \\ \Omega_{dm} h^2 = 0,1194 \pm 0,0022 \end{cases} \text{ à 68\% de CL,} \tag{3.3}$$

où nous constatons une densité de matière non-baryonique plus conséquente.

La matière non-baryonique, dans le cadre du modèle Λ CDM, correspond à de la matière noire froide (CDM), propre à un découplage non-relativiste. Et les données expérimentales laissent supposer une place importante de cette matière dans l'Univers. Comprendre la particule (ou les particules) responsable(s) d'une telle densité de matière est un enjeu majeur de la physique moderne.

Dans cette optique, nous avons décidé de développer un nouveau calculateur⁵, pour déterminer la densité relique de matière noire de l'Univers de n'importe quel modèle supersymétrique, lorsque la matière noire se découple de manière non-relativiste avec le plasma primordial. Le modèle de référence pour notre étude est le modèle standard supersymétrique minimal, présenté brièvement dans la section 3.1. En se basant sur ce modèle, nous présentons le procédé pour calculer une densité relique menant à la dernière section, la présentation du nouveau calculateur.

3.1 Le modèle standard supersymétrique minimal (MSSM)

Le modèle standard de la physique des particules est une théorie de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ [34, 35, 36], complétée d'une brisure spontanée de symétrie dans le secteur électrofaible [37, 38, 39] et dont les conséquences sont transmises aux champs de matière par les couplages de Yukawa (par exemple, la masse des particules). Son extension supersymétrique nécessite de tenir compte de ces caractéristiques, mais aussi d'inclure une brisure explicite de la supersymétrie. (La section 2.3.4 a été conclue par l'incapacité d'obtenir un modèle phénoménologiquement viable, après brisure dynamique de la supersymétrie.)

Dans cette première section, nous détaillons le contenu de l'extension supersymétrique minimale du modèle standard, menant à la construction du lagrangien en se basant sur les sections 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3. La supersymétrie devant être brisée explicitement, les termes propices à cette brisure sont donnés dans la

3. Trois distinctions de matière noire sont proposées, selon leur découplage avec le plasma primordial [32]. Lorsqu'une particule découple en étant relativiste, nous parlons de particule de matière noire chaude (pour l'acronyme HDM = Hot Dark matter). Dans le cas opposé, lorsque la particule se découple avec une vitesse non-relativiste, nous utilisons le terme de matière noire froide (CDM = Cold Dark Matter). La dernière possibilité est appelée matière noire tiède (WDM = Warm Dark Matter) et correspond à un découplage non-relativiste de la particule, mais cette dernière est instable. Néanmoins, la différence entre ces classifications est majeure, notamment dans la formation des grandes structures de l'Univers (Super-Amas de galaxie). Leur formation, résultant de la croissance des perturbations du fond diffus cosmologique, est possible uniquement si la particule de matière noire s'est découplée avec l'univers primordial, avec une vitesse non-relativiste, excluant ainsi les HDM.

4. Dans le cadre du modèle Λ CDM, l'énergie noire correspond à l'énergie du vide, paramétrée par la constante cosmologique Λ .

5. Estimer la densité relique de matière noire consiste à calculer un nombre important de processus. L'utilisation de l'informatique dans le cadre d'étude phénoménologique est devenue nécessaire.

section 3.1.2, ainsi que les idées principales pour obtenir le spectre de masse, après brisure électrofaible. Enfin, nous présentons dans la section 3.1.3 une interface numérique, `FeynRules`, permettant d'extraire les règles de Feynman de modèles arbitraires, que nous appliquons par la suite dans le cadre de l'extension minimale du modèle standard en supersymétrie.

3.1.1 Du contenu en champs à l'expression du lagrangien

Le chapitre 2 a été conclu par l'expression d'un lagrangien supersymétrique pour une théorie de jauge G (avec un contenu en champs dans une représentation arbitraire \mathfrak{R}). À partir de ces connaissances, nous allons en déduire, de manière concise, l'expression du lagrangien pour le modèle standard supersymétrique minimal.

Le modèle standard étant composé de particules, bosonique et fermionique, une première approche intuitive consisterait à rechercher une supersymétrie entre sa partie fermionique et bosonique. Cependant, les symétries internes empêchent une telle approche. Il est par conséquent nécessaire d'augmenter le contenu en champs.

En supposant le groupe de jauge du modèle standard $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, les bosons de jauge v_i sont accompagnés de fermions de Majorana \tilde{v}_i , de champs auxiliaires D_{v_i} et sont regroupés dans un superchamp vectoriel V_i - avec $i \in \{1, 2, 3\}$ - (les différents superchamps vectoriels V_1 , V_2 et V_3 respectivement associés au groupe $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ et $SU(3)_C$ sont donnés dans la table 3.1)

$$V_i = (v_i, \tilde{v}_i, D_{v_i}), \quad (3.4)$$

avec $V_i = V_i^a (T_a)_i$ et $(T_a)_i$ les générateurs du groupe de jauge considéré.

Les différents superchamps chiraux W_α , propres aux différents V_1 , V_2 et V_3 sont déterminés à partir de l'expression (2.61). Le lagrangien dans le secteur de jauge est composé par la contribution de ces trois superchamps chiraux.

Superchamps	Boson de jauge	Jaugino	Représentation
V_1	B	\tilde{B}	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$
V_2	W	\tilde{W}	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
V_3	g	\tilde{g}	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$

TABLE 3.1 – Superchamps vectoriels associés aux trois groupes de jauge du modèle, avec $V_i = V_i^a (T_a)_i$ dans le cadre d'un groupe non-abélien et $(T_a)_i$ représentant les générateurs du groupe de jauge considéré.

Une fois le groupe de jauge fixé, la partie fermionique $\tilde{\phi}$ composant le modèle standard est accompagnée de leur superpartenaire scalaire ϕ , appelée sfermion, et du champ auxiliaire associé D_ϕ . Ils sont réunis dans un superchamp chiral Φ

$$\Phi = (\phi, \tilde{\phi}, D_\phi). \quad (3.5)$$

Les superchamps chiraux, associés aux particules de matière $\tilde{\phi}$ du modèle standard, sont donnés dans la table 3.2. La construction du terme cinétique pour le superchamp de matière dans une représentation arbitraire \mathfrak{R} , avec g la constante de couplage, a été donnée à l'équation (2.53). Son application dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal s'écrit simplement (par exemple, le superchamp chiral Q^I)

$$\mathcal{L}_{\text{cin}, Q^I} = \left[(Q^I)^\dagger e^{-2\frac{1}{6}g_1 V_1} e^{-2g_2 V_2} e^{-2g_3 V_3} Q^I \right] \Big|_{\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}}. \quad (3.6)$$

La subtilité majeure pour la construction d'un modèle supersymétrique se trouve dans le secteur du Higgs. En effet, pour éviter des anomalies chirales provenant des superpartenaires fermioniques, des fermions de

Superchamps	Fermion	sFermion	Représentation
Q^I	$q_L^I = \begin{pmatrix} u_L^I \\ d_L^I \end{pmatrix}$	$\tilde{q}_L^I = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L^I \\ \tilde{d}_L^I \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6)$
U^I	$(u_R^I)^c$	$(\tilde{u}_R^I)^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)$
D^I	$(d_R^I)^c$	$(\tilde{d}_R^I)^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, 1/3)$
L^I	$\ell_L^I = \begin{pmatrix} \nu_L^I \\ e_L^I \end{pmatrix}$	$\tilde{\ell}_L^I = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L^I \\ \tilde{e}_L^I \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$
E^I	$(e_R^I)^c$	$(\tilde{e}_R^I)^\dagger$	$(\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}, 1)$

TABLE 3.2 – Superchamps chiraux : le secteur des quarks est constitué par les superchamps gauchers Q^I , U^I et D^I et le secteur leptonique est défini à partir des superchamps gauchers L^I et E^I , avec $I \in \{1, 2, 3\}$, correspondant aux trois familles.

Weyl appelés higgsino, il est nécessaire d'introduire un second champ de Higgs. Les deux champs de Higgs sont donnés dans la table 3.3.

Superchamps	Higgs	Higgsino	Représentation
H_d	$h_d = \begin{pmatrix} h_d^0 \\ h_d^- \end{pmatrix}$	$\tilde{h}_d = \begin{pmatrix} \tilde{h}_d^0 \\ \tilde{h}_d^- \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$
H_u	$h_u = \begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_u^0 \end{pmatrix}$	$\tilde{h}_u = \begin{pmatrix} \tilde{h}_u^+ \\ \tilde{h}_u^0 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2)$

TABLE 3.3 – Superchamps de Higgs. La notation H_d (avec d pour *down*) et H_u (avec u pour *up*) caractérise les interactions de Yukawa dans l'expression du superpotentiel (3.7). Ce dernier étant une fonction holomorphe, l'introduction d'un second champ de Higgs est ainsi justifiée, de manière à obtenir un couplage de Yukawa avec les deux anti-quarks gauchers.

La dernière contribution dans la construction du lagrangien supersymétrique provient du superpotentiel, défini à l'équation (2.71). Ce dernier consiste en une généralisation des couplages de Yukawa, dont l'expression est donnée par

$$W = -y_{IJ}^e L^I \cdot H_d E^J - y_{IJ}^d Q^I \cdot H_d D^J + y_{IJ}^u Q^I \cdot H_u U^J + \mu H_d \cdot H_u, \quad (3.7)$$

où nous retrouvons les matrices de Yukawa y^e , y^d et y^u , et un nouveau couplage bilinéaire entre les deux champs de Higgs⁶. Nous avons aussi introduit la notation $L^I \cdot H_d = \epsilon_{ij} L^{Ii} H_d^j$ pour la multiplication de $SU(2)_L$, avec le tenseur antisymétrique $\epsilon_{12} = 1$.

Cependant, la forme du superpotentiel, donnée par l'expression (3.7), n'est pas la plus générale puisqu'une symétrie discrète, la parité R , a été considérée. L'opérateur de la parité R est donné par

$$P_R = (-1)^{3B+L+2s}, \quad (3.8)$$

avec B , L et S respectivement le nombre baryonique, le nombre leptonique et le spin de la particule. Cette symétrie discrète impose d'avoir un minimum de deux particules supersymétriques dans un processus donné.

6. Le paramètre μ conduit à un problème de naturalité [40] car aucun mécanisme ne protège sa valeur à haute énergie. Ainsi, il est nécessaire d'introduire un ajustement fin de la théorie, de manière à rendre la valeur du paramètre μ proche de l'échelle électrofaible.

Par conséquent, lors de la désintégration d'une particule supersymétrique lourde, il est nécessaire d'avoir en fin de processus une autre particule supersymétrique plus légère. La particule supersymétrique la plus légère est nécessairement stable.

Dans la prochaine section, nous nous intéressons plus particulièrement à la brisure de la symétrie électrofaible. Dans un premier temps, nous détaillons la brisure explicite de la supersymétrie due aux termes de brisure douce, pour introduire la brisure électrofaible dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal.

3.1.2 Des termes de brisure douce à la brisure électrofaible

Avant de s'intéresser à la brisure de la symétrie électrofaible dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal, il est nécessaire de briser explicitement la supersymétrie (les mécanismes dynamiques ne permettant pas une phénoménologie viable à basse énergie (Cf. fin de la section 2.3)).

La brisure de la supersymétrie s'effectue par l'ajout de termes au niveau du potentiel scalaire. De manière à éviter de retrouver le problème de hiérarchie, Girardello et *al.*[25] ont classifié les fameux termes de brisure douce possibles, de sorte à briser la supersymétrie et ainsi empêcher les divergences quadratiques de la masse des particules scalaires. Dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal, ces termes de brisure douce sont donnés par

$$\begin{aligned}
V_{\text{doux}} = & \frac{1}{2} [M_1 \tilde{B} \cdot \tilde{B} + M_2 \tilde{W}^a \cdot \tilde{W}_a + M_3 \tilde{g}^a \cdot \tilde{g}_a + \text{h.c.}] - m_{h_u}^2 h_u^\dagger h_u - m_{h_d}^2 h_d^\dagger h_d \\
& - (m_{\tilde{\ell}}^2)^i_j \tilde{\ell}_L^i \tilde{\ell}_L^j - (m_{\tilde{e}}^2)^i_j \tilde{e}_{Ri} \tilde{e}_{Rj}^\dagger - (m_{\tilde{q}}^2)^i_j \tilde{q}_L^i \tilde{q}_L^j - (m_{\tilde{u}}^2)^i_j \tilde{u}_{Ri} \tilde{u}_{Rj}^\dagger - (m_{\tilde{d}}^2)^i_j \tilde{d}_{Ri} \tilde{d}_{Rj}^\dagger \\
& - \left[(T^u)_{ij} \tilde{u}_R^i \tilde{q}_L^j \cdot h_u - (T^d)_{ij} \tilde{d}_R^i \tilde{q}_L^j \cdot h_d - (T^e)_{ij} \tilde{e}_R^i \tilde{\ell}_L^j \cdot h_u + b h_u \cdot h_d + \text{h.c.} \right],
\end{aligned} \tag{3.9}$$

avec M_1 , M_2 et M_3 respectivement la masse du bino, des winos et des gluinos, m_{h_u} et m_{h_d} la masse des bosons de Higgs, $m_{\tilde{\ell}}$ et $m_{\tilde{e}}$ des matrices 3×3 dans l'état de saveur pour les sleptons, $m_{\tilde{q}}$, $m_{\tilde{u}}$ et $m_{\tilde{d}}$ des matrices 3×3 dans l'état de saveur pour les squarks, b un couplage bilinéaire pour les champs de Higgs et les matrices 3×3 , T^e , T^d et T^u , pour des couplages trilineaires entre les sfermions et les champs de Higgs.

Détailler l'ensemble de l'analyse concernant la brisure spontanée de la symétrie électrofaible dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal sortirait du cadre de ce chapitre. Les références [6, 41, 42, 43, 44] sont très bien détaillées pour cette analyse. Dans un souci d'extraire un candidat de matière noire pour estimer par la suite sa densité relique, nous donnons uniquement les étapes essentielles et les conséquences importantes dues à la brisure. Cette approche nous permet de nous familiariser avec les notations pour les appliquer dans les prochaines sections 3.2 et 3.3.

À la différence du modèle standard, composé seulement d'un doublet de Higgs, son extension supersymétrique est constituée de deux doublets de Higgs (Cf. la table 3.3) modifiant alors légèrement le calcul. La brisure spontanée de symétrie du secteur électrofaible $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{e.m}}$ survient lorsque les deux champs de Higgs neutres développent une valeur moyenne dans le vide, $\langle H_u^0 \rangle = v_u/\sqrt{2}$ et $\langle H_d^0 \rangle = v_d/\sqrt{2}$, non-nulle.

Parmi les huit degrés de liberté des deux doublets de Higgs, donnés à la table 3.3, trois vont engendrer les modes longitudinaux des bosons vecteurs massifs W^\pm et Z^0 , tandis que les cinq degrés de liberté restant vont se mélanger pour donner les cinq états propres de masse des champs de Higgs h^0 , H^0 , A^0 et H^\pm .

Concernant les particules de saveur, la diagonalisation des matrices de Yukawa permet le passage de l'état de jauge à l'état de masse menant aux états physiques (de manière identique au modèle standard).

Enfin, restent les fermions provenant du secteur de jauge - les jauginos - et du secteur du Higgs - les higgsinos. La diagonalisation de la matrice de masse des particules chargées dans l'état de jauge conduit dans l'état de masse aux charginos, notés χ^\pm . De manière équivalente, la diagonalisation de la matrice de masse des particules neutres implique les neutralinos, notée χ^0 .

Enfin, la symétrie discrète R , introduite à l'équation (3.8), assure que, parmi la nouvelle zoologie de particules, la plus légère soit stable. La première particule de la famille des neutralinos, noté χ_1^0 , et vérifiant par convention $m_{\chi_1^0} < m_{\chi_2^0} < m_{\chi_3^0} < m_{\chi_4^0}$, correspond à cette particule stable. De charge électrique nulle, elle est, par conséquent, un très bon candidat pour représenter une particule de matière noire.

3.1.3 L'incrémentation du MSSM dans FeynRules

L'étude réalisée dans le chapitre 2, appliquée à un modèle particulier 3.1.1 et 3.1.2, a montré la durée en temps de calcul nécessaire pour effectuer une étude phénoménologique à partir d'une théorie. L'utilisation de l'informatique est devenue cruciale pour ces études.

FeynRules [45, 46] est un programme MATHEMATICA⁷, composé d'un ensemble de fonctions prédéfinies, qui extrait, de manière semi-automatique, l'ensemble des règles de Feynman provenant du lagrangien du modèle. L'approche du superspace, utilisée dans la section 2.2 pour la construction d'un lagrangien supersymétrique, est aussi incluse, permettant l'étude de modèles supersymétriques. Sa généralisation et sa rapidité pour extraire les règles de Feynman nous servent, par conséquent, de socle informatique dans l'objectif de développer une nouvelle interface pour le calcul de la densité relique de matière noire.

Le fonctionnement de FeynRules, appliqué ici au modèle standard supersymétrique minimal, consiste à définir dans un fichier modèle (par exemple `mon_modele.fr`) les groupes de jauge, le contenu en champs, les paramètres libres et le lagrangien, sous forme compacte, du modèle. Les outils composant FeynRules vont alors extraire les différents vertex entre les champs.

Dans le cas du modèle standard supersymétrique minimal, l'établissement du fichier modèle a été préalablement réalisé [47]. Par conséquent, ce dernier est utilisé pour mener au développement d'un nouveau calculateur de densité relique de matière noire. L'exécution du fichier et l'extraction des règles de Feynman associées s'effectuent en utilisant certaines commandes. Pour charger le programme FeynRules et ses fonctions

```
$FeynRulesPath = SetDirectory[<emplacement du dossier où FeynRules est enregistré>]
<<FeynRules'.
```

Pour charger le contenu en champs, les paramètres libres et le lagrangien compact du modèle

```
SetDirectory[<emplacement du fichier modèle nom_modele.fr>]
LoadModel[<nom_modele.fr>].
```

Et enfin, pour extraire les règles de Feynman provenant de l'expression du lagrangien compact `Lag`⁸

```
reglesVertex = FeynmanRules[Lag].
```

La caractéristique de FeynRules, à calculer les règles de Feynman pour un grand nombre de modèles, est un atout majeur dans la conception d'un nouveau calculateur de densité relique et dans la réalisation d'étude phénoménologique résultante. Sa symbiose avec SuperIso Relic - programme pour calculer la densité relique d'une particule - permet alors d'analyser la consistance d'un modèle allant au-delà du modèle standard, par rapport à la densité relique de matière qu'il propose. La prochaine section est consacrée au calcul de cette densité - en suivant l'approche de SuperIso Relic - pour ensuite, coupler ces deux programmes.

3.2 Estimation de la moyenne thermique de la section efficace effective

$$\langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle$$

Le programme SuperIso Relic [48] est l'extension relique de SuperIso [49] - outil informatique pour l'analyse de la physique des saveurs dans le cadre du modèle standard et de certaines de ses extensions - pour déterminer la densité relique de matière noire dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal ou du *next minimal supersymmetric standard model* (NMSSM)⁹. En se basant sur SuperIso Relic, nous développons un nouveau calculateur pour estimer la densité relique de matière noire de n'importe quel

7. MATHEMATICA est un logiciel de calcul formel développé par Wolfram Research ®.

8. La fonction `FeynmanRules` est accompagnée de l'option `FlavorExpand`, ayant par défaut une valeur `False`, pour différencier un champ générique par rapport à ses saveurs (par exemple, le champ leptonique chargé est caractérisé par le champ générique ℓ , tandis que ses saveurs sont données par e, μ et τ). Pour notre étude, il est demandé de ne pas changer la valeur du paramètre `FlavorExpand` à ce stade, puisque l'expansion est effectuée ultérieurement.

9. Le *next minimal supersymmetric standard model* est une extension du modèle standard supersymétrique minimal par le rajout d'un singlet de jauge, i.e. par rapport au groupe de jauge du modèle standard, dans le contenu en champs, de manière à répondre au problème μ défini plutôt.

modèle supersymétrique en utilisant les caractéristiques de `FeynRules`, de manière à extraire les règles de Feynman.

L'analyse effectuée dans les articles [50, 51] mène à une écriture plus compacte de l'équation de Boltzmann permettant une simplification de l'analyse numérique et surtout une écriture commune entre les processus d'annihilation et de coannihilation. Seules les formules dont nous faisons l'analyse sont données par la suite, les démonstrations se trouvant à l'article [51].

De notre exemple trivial en début de ce chapitre (3.1), nous avons décrit de manière qualitative le découplage d'une particule arbitraire χ avec le bain primordial. Nous allons donc, dans un premier temps, retranscrire l'équation de Boltzmann pour suivre l'évolution de la densité de matière noire.

L'augmentation en champ, dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal, propose un ensemble de particules non-stables et au moins une particule stable, où cette dernière serait une bonne candidate pour les études de matière noire. Par conséquent, l'évolution de la densité relique de matière repose sur l'annihilation et la coannihilation de deux particules supersymétriques en deux particules du modèle standard, et dont l'équation de Boltzmann est donnée par (avec $n = \sum_{i=1}^N n_i$ où N est le nombre de particules supersymétriques)¹⁰

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma_{\text{eff}v} \rangle (n^2 - n_{\text{eq}}^2). \quad (3.10)$$

Le premier terme du membre de droite illustre la dilution de la densité due à l'expansion de l'Univers, défini par le taux d'expansion H - constante de Hubble - provenant de l'équation de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \rho_{\text{rad}}, \quad (3.11)$$

pour un Univers dominé par la radiation avec G_N , la constante universelle de la gravitation de Newton et ρ_{rad} la densité de radiation. Le second terme représente les processus d'annihilation et de coannihilation des particules supersymétriques, et enfin, le dernier terme résulte de la création des particules supersymétriques provenant du contenu en champs en équilibre thermique avec le bain primordial.

La moyenne thermique de la section efficace effective $\langle \sigma_{\text{eff}v} \rangle$ est la quantité centrale à calculer avant de pouvoir intégrer l'équation différentielle (3.10). Son expression est donnée [51] par

$$\langle \sigma_{\text{eff}v} \rangle = \int_0^\infty dp_{\text{eff}} p_{\text{eff}}^2 W_{\text{eff}}(\sqrt{E_{\text{cm}}}) K_1 \left(\frac{\sqrt{E_{\text{cm}}}}{T} \right) m_{PSL}^4 T \left[\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{g_{PSL}} \frac{m_i^2}{m_{PSL}^2} K_2 \left(\frac{m_i}{T} \right) \right]^2, \quad (3.12)$$

avec l'impulsion effective

$$p_{\text{eff}}(\sqrt{E_{\text{cm}}}) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{E_{\text{cm}}})^2 - 4m_{PSL}^2}. \quad (3.13)$$

W_{eff} représente le taux d'annihilation et de coannihilation effectif, m_{psl} et g_{psl} sont respectivement la masse et le nombre de degrés de liberté de la particule supersymétrique la plus légère (PSL), m_i et g_i étant la masse et le nombre de degrés de liberté de la particule supersymétrique i , et K_1 et K_2 , respectivement les fonctions de Bessel modifiées du second genre d'ordre 1 et 2.

De son côté, le calcul du taux effectif de W_{eff} est donné par

$$\frac{dW_{\text{eff}}}{d \cos \theta} = \sum_{i,j,k,l} 8\pi^2 g_{PSL}^2 p_{\text{eff}} S_{kl} \sqrt{E_{\text{cm}}} \sum_{\text{hélicité}} \left| \sum_{\text{diagrammes}} \mathcal{M}(i+j \rightarrow k+l) \right|^2, \quad (3.14)$$

avec \mathcal{M} l'amplitude de transition pour le processus $i+j \rightarrow k+l$, θ l'angle entre la particule i et la particule k , p_{ij} étant l'impulsion dans le centre de masse du couple i et j définie par

$$p_{ij} = \frac{\sqrt{E_{\text{cm}} - (m_i + m_j)^2} \sqrt{E_{\text{cm}} - (m_i - m_j)^2}}{2\sqrt{E_{\text{cm}}}}, \quad (3.15)$$

10. L'approximation non-relativiste sur la vitesse des particules implique qu'il n'est pas nécessaire de faire la distinction entre une statistique de Fermi-Dirac et celle de Bose-Einstein, lors du calcul de la distribution de densité des particules.

S_{kl} un facteur de symétrie avec pour valeur 2 pour des particules identiques dans l'état final et 1 pour des particules non-identiques dans l'état final, et E_{cm} l'énergie dans le centre de masse.

3.2.1 Le calcul numérique des amplitudes de transition

L'estimation de la densité relique d'une particule nécessite de prendre en compte l'ensemble de ses annihilations et coannihilations. Les processus à quatre corps $2 \rightarrow 2$ n'étant pas déterminés dans `FeynRules` ou `SuperIso Relic`, son incrémentation est alors nécessaire. Dans un souci de généralisation - estimer la densité relique de matière noire de n'importe quel modèle supersymétrique - cette incrémentation s'est alors effectuée au niveau de `FeynRules`, via l'écriture d'une nouvelle fonction, `Amplitude`.

Un processus à quatre corps $2 \rightarrow 2$ est caractérisé par la dynamique des particules entre celles à l'état initial et celles résultant de l'interaction dans l'état final. Les principales topologies pour des interactions à l'arbre sont résumées à la figure 3.1 et s'appuient sur l'introduction des variables de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

La fonction `Amplitude`¹¹ est définie par

`Amplitude[\mathcal{L} , options]`

où elle reçoit en entrée le lagrangien du modèle d'étude et différentes options dont les caractéristiques sont définies dans la table 3.4¹². Les différentes combinaisons entre les options `Pinit` et `Pfinal` mènent à utiliser

- `Amplitude[\mathcal{L} ,Pinit->{p1,p2},Pfinal->{p3,p4}]` pour calculer un digramme précis,
- `Amplitude[\mathcal{L} ,Pinit->{p1},Pfinal->{p3}]` pour évaluer un ensemble de diagrammes,
- `Amplitude[\mathcal{L}]` pour obtenir la totalité des processus du modèle.

La construction des amplitudes est basée sur les topologies, données par la figure 3.1, et s'expriment en fonction des particules, des vertex et des propagateurs. La conservation des nombres quantiques est évidemment imposée.

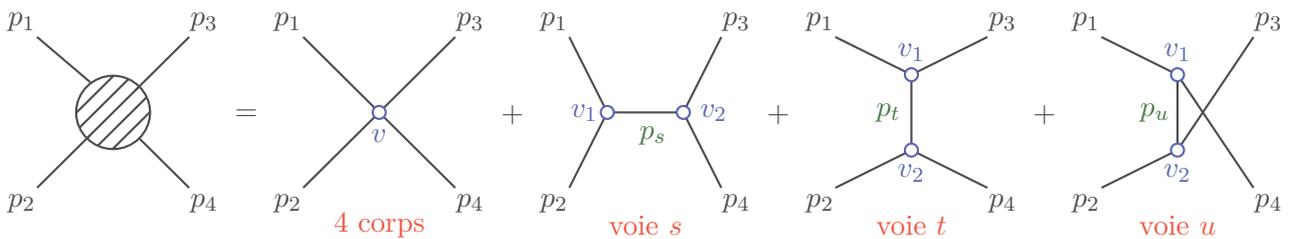


FIGURE 3.1 – Représentation des différentes topologies à l'arbre pour un processus $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$. Les deux particules incidentes sont caractérisées par les variables p_1 et p_2 , tandis que celles sortantes sont définies par p_3 et p_4 . Parmi les quatre topologies, la première résulte d'une interaction à **4 corps**, tandis que les trois autres se font sous l'échange d'un propagateur p_s, p_t ou p_u selon la dynamique. L'estimation des différents vertex v, v_1 ou v_2 , associée à la dynamique des particules, permet de calculer l'amplitude invariante $\mathcal{M}(p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4)$ [11].

11. Par souci de légèreté au niveau de l'interface, la variable `FRVerbose` a été incrémentée au niveau du programme `ToolBox.m` de `FeynRules` pour éviter d'afficher des informations non souhaitées. Sa valeur par défaut est `False`, tandis que sa valeur opposée affiche ces informations.

12. L'acronyme « adms » signifiant « au-delà de modèle standard ».

TABLE 3.4 – Fonctionnement des différentes options de Amplitude

Options	Défaut	Valeur	Fonctionnement
Pinit	{}	$\{p_1, p_2\}$	Les deux particules incidentes sont données et sont les seules à être considérées pour le calcul de l'amplitude invariante.
		$\{p_1\}$	Une seule particule incidente est donnée. L'ensemble des combinaisons $\{p_1, p_i\}$, avec p_i une particule arbitraire, permis par le modèle est alors généré puis calculé.
		{}	Aucune particule incidente n'est donnée. L'ensemble des combinaisons $\{p_i, p_j\}$, avec p_i et p_j des particules arbitraires, permis par le modèle, est alors généré puis calculé.
Pfinal	{}	$\{p_3, p_4\}$	Les deux particules sortantes sont données et sont les seules à être considérées pour le calcul de l'amplitude invariante.
		$\{p_3\}$	Une seule particule sortante est donnée. L'ensemble des combinaisons $\{p_3, p_i\}$, avec p_i une particule arbitraire, permis par le modèle est alors généré puis calculé.
		{}	Aucune particule sortante n'est donnée. L'ensemble des combinaisons $\{p_i, p_j\}$, avec p_i et p_j des particules arbitraires, permis par le modèle, est alors généré puis calculé.
DMInterface	False	False	Aucune sélection n'est opérée sur les particules entrantes et sortantes.
		True	Une sélection est effectuée entre les particules incidentes et sortantes pour calculer uniquement les processus $p_{adms} + p_{adms} \rightarrow p_{ms} + p_{ms}$.

Le traitement des processus étant identique, nous nous intéressons uniquement à un diagramme $2 \rightarrow 2$ particulier

$$|\mathcal{M}(\chi^0 + \chi^0 \rightarrow d + \bar{d})|^2 = \text{Amplitude}[\mathcal{L}_{mssm}, \text{Pinit} \rightarrow \{\text{neu}, \text{neu}\}, \text{Pfinal} \rightarrow \{d, \text{dbar}\}], \quad (3.17)$$

dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal. Dans un souci d'optimisation, en termes de mémoire et de temps de calcul, deux fonctionnalités maîtresses ont été incrémentées : la symétrie de croisement et l'expansion indicielle par rapport à la saveur des particules.

Au niveau de la symétrie de croisement, un ensemble de règles simples entre les impulsions des particules permet de déduire, à partir d'une topologie maîtresse, les autres diagrammes, composés des mêmes particules ayant la même dynamique. En se basant sur notre exemple (3.17), alors considéré comme diagramme maître, les diagrammes correspondant $\chi^0 + \chi^0 \rightarrow \bar{d} + d$ ou $\chi^0 + \bar{d} \rightarrow \chi^0 + \bar{d}$ sont déterminés par l'application des règles $\{p_3 \leftrightarrow p_4\}$ pour le premier et des règles $\{p_3 \rightarrow -p_2, p_2 \rightarrow -p_3\}$ pour le second.

La deuxième fonctionnalité s'opère au niveau de la saveur d'une particule. Toujours en se basant sur notre diagramme de référence (3.17), l'ajout des indices de saveur s'écrit $\mathcal{M}(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell)$ avec $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $k, \ell \in \{1, 2, 3\}$. Le choix d'un indice arbitraire pour le calcul d'un diagramme permet de calculer un seul diagramme et d'en déduire l'ensemble des sous-diagrammes - 144 pour notre exemple - lorsque la distinction sur la saveur est effectuée¹³.

13. Les règles des symétries de croisement s'appliquent à la 4-impulsion des particules, et sont, par conséquent, dissociées de l'expansion indicielle.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_s &= \{s, \mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow A_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell), \mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow G_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell), \\
&\quad \mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow h_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell), \mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow H_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell) \\
&\quad \mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow Z \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell)\} \\
\mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow h_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell) &= \text{Amp}[\mathbf{v1}, \text{DefProp}[\mathbf{s}, \mathbf{h0}], \mathbf{v2}] \\
\mathbf{v1} &= \text{Vrxt}[\chi^0[p_1], \text{Abbr}\$1[i, j] + \text{Abbr}\$2[i, j]\gamma^5, \chi^0[p_2]] \\
\mathbf{v2} &= \text{Vrxt}[d[p_3], \delta^{c_3}{}_{c_4} \text{Abbr}\$3[k, l] + \delta^{c_3}{}_{c_4} \text{Abbr}\$4[k, l]\gamma^5, \bar{d}[p_4]] \\
\text{DefProp}[\mathbf{S}, \mathbf{h0}] &= i \text{Den}[\mathbf{S}, \mathbf{h0}]
\end{aligned}$$

Concernant la voie s du diagramme de référence, nous constatons que différents propagateurs sont échangés, ce qui mène à calculer un certain nombre de diagramme. Nous illustrons l'expression analytique pour un diagramme particulier - échange de h_0 -, où les trois entités fondamentales pour le calcul sont renseignées : les deux vertex et le propagateur. Les vertex sont déterminés à partir de fonctions initialement présentes dans `FeynRules`. Une première tâche de la fonction `Amplitude` consiste à alléger l'écriture des vertex, où des abréviations sont introduites, tout en faisant ressortir la saveur des particules, et où les différentes matrices de Dirac sont mises en évidence.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_t &= \mathcal{M}_t(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow \tilde{d} \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell) \\
\mathcal{M}_t(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow \tilde{d} \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell) &= \text{Amp}[\mathbf{v1}, \text{DefProp}[\mathbf{t}, \mathbf{sd}], \mathbf{v2}] \\
\mathbf{v1} &= \text{Vrxt}[\chi^0[p_1], \delta^{c_3}{}_{c_{50}} \text{Abbr}\$5[i, k, n_{50}] + \delta^{c_3}{}_{c_{50}} \text{Abbr}\$6[i, k, n_{50}]\gamma^5, d[p_3]] \\
\mathbf{v2} &= \text{Vrxt}[\chi^0[p_2], \delta^{c_{51}}{}_{c_4} \text{Abbr}\$7[j, \ell, n_{51}] + \delta^{c_{51}}{}_{c_4} \text{Abbr}\$8[j, \ell, n_{51}]\gamma^5, \bar{d}[p_4]] \\
\text{DefProp}[\mathbf{T}, \mathbf{sd}] &= i \delta^{c_{50}}{}_{c_{51}} \delta^{n_{50}n_{51}} \text{Den}[\mathbf{T}, \mathbf{sd}]
\end{aligned}$$

À la différence de l'exemple présenté dans la voie s , l'expression analytique ci-dessus renseigne sur l'écriture du propagateur, où les indices de saveur et de couleur sont mis en évidence pour faciliter les contractions indicielles durant le calcul.

Processus de croisement	ListeRulesSC	Explication
$(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow \bar{d}_k + d_\ell)$	{ { p3->p dum1, p4->p dum2 }, { p dum1->p4, p dum2->p3 } }	Deux listes différentes sont générées. La première permet de modifier les impulsions - du diagramme de référence - par des variables arbitraires, tandis que la seconde remplace les variables par les impulsions du diagrammes de croisement.
$(\chi_i^0 + \bar{d}_j \rightarrow \chi_k^0 + \bar{d}_\ell)$	{ { p2->p dum1, p3->p dum2 }, { p dum1->-p3, p dum2->-p2 } }	Le fonctionnement est équivalent à l'exemple ci-dessus. Le signe de différence provient de l'échange entre les particules incidentes et les particules sortantes.
⋮	⋮	⋮

TABLE 3.5 – Deux exemples détaillés concernant la forme des amplitudes de transition \mathcal{M} dans `FeynRules` avant le calcul de $|\mathcal{M}|^2$. Les autres expressions analytiques des amplitudes de transition sont obtenues de manière équivalente.

Une liste est par conséquent générée

$$\mathcal{M}(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell) = \{\mathcal{M}_s, \mathcal{M}_t, \mathcal{M}_u, \text{ListeRulesSC}\}, \quad (3.18)$$

contenant les informations nécessaires - vertex, particules, propagateurs, et règles pour la symétrie de croisement - pour calculer l'amplitude invariante de notre diagramme de référence. Les différentes contributions, dépendant du canal d'interaction $\{s, t, u\}$ du diagramme de référence, sont données et expliquées dans la table 3.5.

Le calcul analytique des amplitudes de transition est réalisé de manière habituelle [11] et repose sur le traitement de la couleur des particules, du calcul des traces de Dirac et de la contraction des indices de Lorentz. De manière à optimiser le calcul, des listes de règles¹⁴ sont générées automatiquement et sont utilisées lorsqu'un calcul équivalent intervient.

À la sortie du calcul, une liste est générée

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathcal{M}(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell)|^2, \quad \sum_s |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + \sum_{a,b=s,t,u} \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^\dagger, \\ |\mathcal{M}(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow \bar{d}_\ell + d_k)|^2, \quad \sum_s |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + \sum_{a,b=s,t,u} \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^\dagger, \\ |\mathcal{M}(\chi_i^0 + \bar{d}_k \rightarrow \chi_j^0 + \bar{d}_\ell)|^2, \quad |\mathcal{M}_s|^2 + \sum_t |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + \sum_{a,b=s,t,u} \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^\dagger, \quad \dots \end{array} \right\}, \quad (3.19)$$

contenant l'ensemble des amplitudes de transition provenant de la symétrie de croisement, et dont les différentes expressions analytiques sont données dans la table 3.6.

$$\begin{aligned} \sum_s |\mathcal{M}_s|^2 &= |\mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow A_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell)|^2 + |\mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow G_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell)|^2 \\ &+ |\mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow h_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell)|^2 + |\mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow H_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell)|^2 \\ &+ |\mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow Z \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell)|^2 \end{aligned}$$

$$|\mathcal{M}_s(\chi_i^0 + \chi_j^0 \rightarrow h_0 \rightarrow d_k + \bar{d}_\ell)|^2 = \text{FlavAbbr}\$1[i, j, k, l] \text{Power}[\text{Den}[s, h_0], 2]$$

$$\text{FlavAbbr}\$1[i, j, k, l] = \text{FctImp}[p_1, p_2, p_3, p_4] \text{Abbr}\$1[i, j] \text{Abbr}\$3[k, \ell] \text{HC}[\text{Abbr}\$1[i, j] \text{Abbr}\$3[k, \ell]] + \dots$$

TABLE 3.6 – Expression analytique d'une amplitude de transition, pour un propagateur particulier, à la sortie de la fonction **Amplitude** (l'expansion indicielle n'a pas été effectuée). Des abréviations sont introduites, où les indices de saveur sont mis en évidence. Ces dernières s'expriment à partir des abréviations utilisées pour l'expression des vertex. Enfin, la fonction **FctAmp** s'exprime en fonction des impulsions du processus, de sorte à retranscrire l'expression analytique en fonction des variables de Mandelstan, d'après (3.16), et de la masse des particules.

Mais, dans un souci d'optimisation de la mémoire vive de l'ordinateur, l'expansion indicielle sur la saveur des particules n'est pas effectuée à ce stade. Deux approches sont alors proposées à l'utilisateur. La première, **ComputeAmplitude**, qui reçoit en entrée la liste générée par **Amplitude**, va réaliser l'expansion et ainsi générer en sortie une liste contenant l'ensemble des expressions analytiques.

La seconde approche repose sur la fonction **WriteComputeAmplitude** et reçoit en entrée la liste générée par **Amplitude**. Elle va aussi effectuer l'expansion indicielle, mais de manière à limiter la consommation de la mémoire vive de l'ordinateur, la fonction écrit dans des fichiers textes - en langage C++ - l'expression analytique des amplitudes invariantes, au fur et à mesure de l'expansion. Cette dernière approche est celle

14. Par exemple, afin d'éviter de calculer plusieurs fois la valeur de la trace $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\delta]$, une liste générique est générée comprenant l'expression analytique de la trace et sa valeur après calcul. Par conséquent, si une trace similaire doit être de nouveau calculée, il suffit d'appliquer la règle, évitant ainsi d'estimer de nouveau sa valeur.

utilisée pour le calcul de la densité relique 3.3.

La validation de ce nouveau calculateur d'amplitudes invariantes a été faite, en comparant des expressions analytiques obtenues avec deux programmes MATHEMATICA complémentaires, `FeynArts`[52] et `FormCalc`[53]. Alors que le modèle standard donne des résultats identiques, des différences persistent pour certains processus pour le modèle standard supersymétrique minimal (des signes opposés au niveau des interférences). Par conséquent, nous poursuivons le développement de cette nouvelle fonctionnalité de `FeynRules`.

3.2.2 Le calcul numérique de la moyenne thermique de la section efficace effective $\langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle$

L'incrémentement de la fonction `Amplitude` dans `FeynRules` permet de calculer l'ensemble des processus d'un modèle, tandis que l'utilisation de l'option `DMInterface` sélectionne uniquement ceux nécessaires au calcul de W_{eff} . Pour rappel, le taux effectif d'annihilation est donné par la formule

$$dW_{\text{eff}} / d \cos \theta = \sum_{i,j,k,l} p_{ij} p_{kl} 8\pi^2 g_{PSL}^2 p_{\text{eff}} S_{kl} \sqrt{E_{\text{cm}}} \sum_{\text{hélicité}} \left| \sum_{\text{diagrammes}} \mathcal{M}(i+j \rightarrow k+l) \right|^2, \quad (3.20)$$

avec θ l'angle entre la particule i et la particule k , et l'utilisation de la fonction

`Amplitude[$\mathcal{L}_{\text{mssm}}$, DMInterface -> True]`

dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal, permet de calculer l'ensemble des amplitudes invariantes $|\mathcal{M}(i+j \rightarrow k+l)|^2$.

À partir des informations données à l'équation (3.15), il est désormais possible d'intégrer de manière numérique l'équation (3.20) et d'exprimer le taux effectif d'annihilation en fonction de l'énergie dans le centre de masse $\sqrt{E_{\text{cm}}}$. La méthode d'intégration numérique utilisée est celle de Monte-Carlo. Elle repose sur l'algorithme de Vegas [54], mis à disposition par le consortium *GNU Scientific library* [55]. Pour la suite, les intégrales sont calculées de manière numérique à partir de l'algorithme de Vegas.

De manière à accélérer le calcul de W_{eff} en fonction de l'énergie dans le centre de masse, deux énergies seuils sur ce dernier sont supposées. La première limite

$$m_i + m_j < 3m_{\text{PSL}}, \quad (3.21)$$

impose une masse maximale aux particules incidentes, car les processus de coannihilation sont négligeables lorsque $(\sqrt{E_{\text{cm}}})_{\text{coann}} = 3m_{\text{PSL}}$ [50]. La seconde limite définit l'énergie maximale pour le calcul du taux effectif d'annihilation W_{eff} . Elle est donnée par

$$(\sqrt{E_{\text{cm}}})_{\text{max}} = 2m_{\text{PSL}} - T_{fo} \log(B_\epsilon), \quad (3.22)$$

avec B_ϵ le facteur de Boltzmann, fixé à 10^{-6} [56], et T_{fo} la température limite supérieure typique du *freeze-out*, donnée à 25 GeV.

Le calcul numérique du taux effectif d'annihilation étant achevé, nous pouvons maintenant calculer la moyenne thermique de la section efficace effective $\langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle$, qui est nécessaire pour la résolution de l'équation de Boltzmann. Son expression analytique est donnée par

$$\langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle = \frac{\int_0^\infty dp_{\text{eff}} p_{\text{eff}}^2 W_{\text{eff}}(\sqrt{E_{\text{cm}}}) K_1\left(\frac{\sqrt{E_{\text{cm}}}}{T}\right)}{m_{\text{PSL}}^4 T \left[\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{g_{\text{PSL}}} \frac{m_i^2}{m_{\text{PSL}}^2} K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) \right]^2}, \quad (3.23)$$

et nécessite, par conséquent, deux types de calcul numérique majeur. Le premier concerne l'intégration par rapport à l'impulsion effective. Nous reprenons, par conséquent, l'approche numérique présentée précédemment. Concernant le second, il correspond au calcul des fonctions de Bessel modifiées de premier et de second ordre. De manière analogue aux intégrales, ce calcul numérique est réalisé à partir de bibliothèques disponibles, les bibliothèques *Boost* en C++ [57].

Le calcul numérique de $\langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle$ est allégé en remplaçant la borne supérieure de l'intégration concernant la quantité de mouvement effective, initialement à l'infini, par $(\sqrt{E_{\text{cm}}})_{\text{max}}$ où nous avons utilisé les propriétés des fonctions de Bessel modifiées de premier ordre K_1 .

Au cours de cette section, nous avons, dans un premier temps, présenté une nouvelle fonction de `FeynRules`, permettant le calcul des amplitudes de transitions de tous les processus impliquant deux particules supersymétriques en entrée et deux particules du modèle standard en sortie. Dans un second temps, des méthodes numériques reposant sur l'approche suivie par `SuperIso Relic` pour le calcul de la moyenne thermique de la section efficace effective $\langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle$ ont été présentées. Dans la prochaine section, ces différentes caractéristiques sont réunies dans un même programme, `WriteDMCalculator`, directement implémenté dans `FeynRules` et accompagné des outils numériques, menant au calcul de la densité relique de matière noire, à partir de l'équation de Boltzmann (3.10).

3.3 Un nouveau générateur : Dark Matter Interface

Le nouveau générateur, appelé **Dark Matter Interface**, est une composition d'un ensemble d'outils informatiques, permettant d'effectuer l'ensemble des calculs (processus, intégration, désintégration, etc), et conduisant à évaluer la densité relique de matière noire pour un modèle donné. Ces divers outils se divisent en deux grandes parties, une dynamique et une fixe, dont nous présentons le fonctionnement dans les deux prochaines sections.

3.3.1 La partie « dynamique »

La partie dynamique de la nouvelle interface repose sur le programme `FeynRules`, puisque'elle correspond à l'introduction d'une nouvelle fonctionnalité, définie par

`WriteDMCalculator[\mathcal{L} , options]`.

`WriteDMCalculator` reçoit en entrée la définition du lagrangien - correspondant au modèle d'étude -, tandis que différentes options sont également proposées et répertoriées dans la table 3.7.

La fonction s'appuie sur l'ensemble des fonctionnalités de `FeynRules` pour générer un ensemble de fichiers en C++, qui sont par la suite compilés. Ces fichiers sont composés de la valeur numérique des paramètres du modèle, de l'expression analytique de désintégration des particules et de l'expression analytique des processus à $2 \rightarrow 2$ corps (en se basant sur la fonction présentée dans la section 3.2.1).

La partie dynamique est finalement propre à chaque modèle. Elle doit être, par conséquent, générée avant le calcul des différentes intégrales, effectué via la partie fixe de **Dark Matter Interface**.

3.3.2 La partie « fixe »

La partie fixe de **Dark Matter Interface** est un ensemble de fichiers C++, initialement présent dans l'interface. Cette partie concerne le calcul des intégrales présentées dans la section 3.2.2, accompagné de la dernière intégrale propre à la résolution de l'équation de Boltzmann

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle (n^2 - n_{\text{eq}}^2). \quad (3.24)$$

$\langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle$ représente la moyenne thermique du taux d'annihilation effectif de particules supersymétriques en particules du modèle standard et H le taux d'expansion de l'Univers

$$H^2(T) = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{rad}}(T) \quad \text{avec} \quad \rho_{\text{rad}}(T) = g_{\text{eff}}(T) \frac{\pi^2}{30} T^2, \quad (3.25)$$

avec g_{eff} le nombre de degrés de liberté effectif de radiation. Concernant la résolution de l'équation de Boltzmann, il est plus pratique d'introduire le ratio $Y(T)$ entre la densité de particules $n(T)$ et la densité d'entropie de rayonnement

$$Y(T) = \frac{n(T)}{s(T)} \quad \text{avec} \quad s(T) = h_{\text{eff}}(T) \frac{2\pi^2}{45} T^3, \quad (3.26)$$

TABLE 3.7 – Fonctionnement des différentes options de WriteDMCalculator

Options	Défaut	Fonctionnement
Output	Default	Nom réservé au dossier contenant les fichiers générés par le programme. Par défaut, le dossier a pour nom : <i>NomModèle_DMC</i> .
AddDecays	True	Modifie la définition des propagateurs lors du calcul des processus de diffusion.
InputDecays	MR\$Null	Si les expressions analytiques des processus de désintégration ont déjà été établies, cette option permet de recevoir leur expression évitant ainsi de les recalculer.
InputAbbrDecays	MR\$Null	Options permettant de recevoir les abréviations contenues dans les expressions analytiques des désintégrations.
InputAmps	MR\$Null	Si les expressions analytiques des processus de diffusion ont déjà été établies, cette option permet de recevoir leur expression évitant ainsi de les recalculer.
InputAbbrAmps	MR\$Null	Options permettant de recevoir les abréviations contenues dans les expressions analytiques des désintégrations.

puisqu'elle conduit à la réécriture de l'équation de Boltzmann suivante

$$\frac{dY}{dx} = -\sqrt{\frac{\pi}{45G}} \frac{\sqrt{g_*} m_{PSL}}{x^2} \langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle (Y^2 - Y_{\text{eq}}^2), \quad (3.27)$$

avec $x = \frac{m_{PSL}}{T}$ et

$$\sqrt{g_*} = \frac{h_{\text{eff}}}{\sqrt{g_{\text{eff}}}} \left(1 + \frac{T}{3h_{\text{eff}}} \frac{dh_{\text{eff}}}{dT} \right). \quad (3.28)$$

Les valeurs numériques des paramètres g_{eff} , h_{eff} et $\sqrt{g_*}$ dépendent du bain primordial, et par conséquent, de la température de l'Univers et du contenu en champs. De manière à limiter le temps de calcul, nous utilisons les valeurs numériques, de ces paramètres, fournies par la littérature [50] (pour le contenu en champs du modèle standard). Néanmoins, nous pouvons nous poser la question de l'influence du bain primordial sur l'estimation de la densité relique. Par conséquent, il peut être intéressant de calculer les valeurs numériques des paramètres g_{eff} , h_{eff} et $\sqrt{g_*}$ de n'importe quels modèles.

Finalement, l'intégration de l'équation différentielle (3.3.3) est effectuée de la naissance de l'Univers, i.e. pour un $x = 0$ avec une température $T \rightarrow \infty$, à nos jours $x_0 = \frac{m_{PSL}}{T_0}$, où T_0 est la température des photons du fond diffus cosmologique aujourd'hui.

3.3.3 Exécution et estimation de la densité relique de matière noire

À partir des sections 3.3.1 et 3.3.2, l'exécution de la nouvelle interface s'effectue en deux étapes. La première consiste à utiliser la nouvelle fonctionnalité de `FeynRules`, de manière à générer l'ensemble des paramètres et des expressions analytiques. La seconde étape exécute finalement l'ensemble des fichiers `C++` au travers d'un fichier `MakeFile`¹⁵.

L'intégration de l'équation conduit à obtenir la valeur du paramètre $Y_0 \equiv (T_0)$ et d'en déduire l'estimation

15. Le compilateur utilisé étant `g++`.

de la densité relique de matière, pour la particule de masse m_{PSL} , définie par

$$\Omega_{\text{PSL}} = \frac{m_{\text{PSL}} s_0 Y_0}{\rho_{\text{crit}}^0}, \quad (3.29)$$

où m_{PSL} est la masse de la particule supersymétrique stable, $s_0 \equiv s(T_0)$ est la densité d'entropie aujourd'hui et $\rho_{\text{crit}}^0 \equiv \rho_{\text{crit}}(T_0)$ la densité critique de l'Univers, définie par la constante d'Hubble

$$H(T_0) = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{crit}}^0. \quad (3.30)$$

La matière noire tient un rôle important dans le fonctionnement de l'Univers : de son découplage avec le bain primordial à la rotation des galaxies. Comprendre la particule sous-jacente est, par conséquent, une étape essentielle.

Une manière indirecte d'entrevoir la particule de matière noire consiste à déterminer de manière théorique sa densité relique et de la confronter avec la valeur expérimentale. De nombreux outils numériques [58] et [56] estiment la densité relique de matière noire pour un modèle donné. Afin de pouvoir confirmer l'écriture de notre générateur, il est nécessaire de comparer nos résultats avec `SuperIso Relic`[48] et avec ceux de la littérature [58] et [56].

L'étude phénoménologique, réalisée dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal, a été conduite suite à l'introduction de termes de brisure douce (3.9), fondamentale à la brisure explicite de la supersymétrie. Le chapitre 4 présente l'extension locale de la supersymétrie, la supergravité, et incorpore un mécanisme naturel permettant de générer ces termes de brisure douce.

Enfin, les différentes études menées dans les chapitres 5 et 6 conduisent à de nouvelles solutions dans les mécanismes de brisure de la supersymétrie induite par la gravitation, avec de possibles conséquences phénoménologiques sur l'étude de la matière noire. La symbiose entre le développement de nouvelles solutions et le développement d'un nouveau générateur pour l'estimation de la matière noire est un atout important.

Chapitre 4

Éléments de supergravité

Dans le chapitre 2, nous avons établi la transformation du superchamp Φ , donnée par l'équation,

$$\delta_\epsilon \Phi = i (\epsilon \cdot \mathcal{Q} + \bar{\mathcal{Q}} \cdot \bar{\epsilon}) \Phi, \quad (4.1)$$

avec ϵ le paramètre de transformation et \mathcal{Q} la supercharge associée. Cependant, le paramètre ϵ a été supposé global - indépendant de l'espace-temps - lors de l'écriture de la transformation (4.1). L'extension locale de cette transformation $\epsilon(x)$ conduit à la supersymétrie locale, dite supergravité. Le champ de jauge introduit pour restaurer l'invariance de la théorie correspond au gravitino (particule fermionique), accompagné de son partenaire supersymétrique, le graviton.

L'interprétation géométrique de la gravitation, proposée par Einstein [59] et résultant de la modification de la courbure de l'espace-temps sous l'influence de la matière, apparaît naturellement au travers de l'équation (4.1) (le paramètre des translations devient local, d'où l'invariance par difféomorphisme).

Cependant, la supergravité n'est pas une quantification de la gravitation. En effet, c'est une théorie non-renormalisable. Néanmoins, elle peut être interprétée comme une théorie effective d'une théorie plus fondamentale. Son échelle d'énergie naturelle correspond à l'échelle d'énergie où la gravitation n'est plus négligeable par rapport aux autres interactions fondamentales. Cette dernière est donnée par la masse de Planck,

$$\text{définie par } M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}}.$$

Pour ce troisième chapitre, nous présentons dans un premier temps le formalisme du vierbein et de la connexion de spin en relativité générale, qui est ensuite étendu au formalisme du superespace. Nous en déduisons alors le multiplet de la supergravité résultant d'un choix de jauge et d'un choix de contraintes. Ensuite, nous exprimons les superchamps chiraux et vectoriels dans le nouveau superespace courbe, ainsi que leurs dérivées successives, menant à l'écriture du lagrangien de la supergravité pour $N = 1$. Nous terminons ce chapitre par une étude de la brisure spontanée de la supergravité et plus particulièrement, lorsqu'elle implique une brisure de la supersymétrie induite par gravitation.

La formulation de la supergravité, présentée dans ce troisième chapitre, est celle définie et suivie par Wess et Zumino [60], tandis que les éléments de calcul sont essentiellement extraits du livre de Wess et Bagger[3].

4.1 La courbure du superespace

Le formalisme traditionnel de la relativité générale, reposant sur le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et sur les symboles de Christoffel, ne s'applique pas pour la description des spineurs.

Un formalisme alternatif permet une formulation de la relativité générale, incluant naturellement les spineurs et leur transformation associée. En prenant appui sur l'introduction du vierbein à la place du tenseur métrique et de la connexion de spin à la place des symboles de Christoffel, nous présentons ce nouveau formalisme. Il est ensuite étendu dans le cadre du superespace.

4.1.1 Le formalisme du vierbein et de la connexion de spin

Le principe d'équivalence généralisé stipule que, pour n'importe quel point de notre espace-temps, il est possible de trouver un référentiel où la gravitation s'annule et pour lequel le principe de la relativité restreinte s'applique.

Pour distinguer le référentiel tangent de celui courbé, les coordonnées et les indices de Lorentz du référentiel courbé sont caractérisés par la typographie «-», tandis que les coordonnées et les indices de Lorentz du référentiel tangent sont écrits de la manière traditionnelle. Autrement dit, dans le référentiel \mathcal{R} où la gravitation n'est pas annulée, un événement est repéré par sa quadriposition $\tilde{x}^{\tilde{\mu}}$, alors qu'un événement dans le référentiel \mathcal{R}_0 , où la gravitation s'annule, est référencé par sa quadriposition x^μ . D'après le principe d'équivalence généralisé, nous pouvons, d'une part, écrire x^μ comme une fonction de $\tilde{x}^{\tilde{\mu}}$ - $x^\mu(\tilde{x}^{\tilde{\mu}})$ - avec x^μ un difféomorphisme. D'autre part, nous avons l'invariance de Lorentz dans l'espace tangent $x'^\mu = x^\nu \Lambda_\nu^\mu(x)$, avec Λ_μ^ν le paramètre de transformation dépendant de la quadriposition x .

Si nous considérons des tenseurs, ceux-ci peuvent être mesurés dans les référentiels \mathcal{R} ou \mathcal{R}_0 . En particulier, pour des vecteurs covariants représentés respectivement dans l'espace courbe $V_{\tilde{\mu}}$ et l'espace tangent V_μ , le changement de coordonnées permettant de passer d'une base à l'autre s'écrit

$$V_{\tilde{\mu}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}} V_\mu = e_{\tilde{\mu}}^\mu V_\mu, \quad (4.2)$$

où la variable dynamique $e_{\tilde{\mu}}^\mu$, appelée vierbein, a été introduite. La transformation étant un difféomorphisme, la transformation inverse $e_\mu^{\tilde{\mu}}$ est définie et conduit pour le covecteur W_μ

$$W_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}}{\partial x^\mu} W_{\tilde{\mu}} = e_\mu^{\tilde{\mu}} W_{\tilde{\mu}}, \quad (4.3)$$

accompagnée des égalités

$$e_{\tilde{\mu}}^\mu e_\mu^{\tilde{\nu}} = \delta_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\nu}} \quad \text{et} \quad e_\mu^{\tilde{\mu}} e_{\tilde{\mu}}^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (4.4)$$

Le changement de coordonnées du repère courbe au repère tangent $\tilde{x} \rightarrow x$, s'écrivant sous forme différentielle

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\nu}}} d\tilde{x}^{\tilde{\nu}}, \quad (4.5)$$

la modification de l'élément de volume

$$d^4x = e d^4\tilde{x}, \quad (4.6)$$

est alors matérialisée par le jacobien $e = \det(e_{\tilde{\mu}}^\mu)$.

Pour définir la dérivée covariante, il est nécessaire d'introduire une connexion, appelée connexion de spin, permettant d'écrire pour un vecteur covariant V_μ et un vecteur contravariant W^μ

$$\mathcal{D}_{\tilde{\mu}} V_\mu = \partial_{\tilde{\mu}} V_\mu - w_{\tilde{\mu}\mu}^\nu V_\nu \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\tilde{\mu}} W^\mu = \partial_{\tilde{\mu}} W^\mu + W^\nu w_{\tilde{\mu}\nu}^\mu. \quad (4.7)$$

Les dérivées covariantes de l'espace tangent sont déduites à partir du vierbein (4.2), $\mathcal{D}_\mu = e_\mu^{\tilde{\mu}} \mathcal{D}_{\tilde{\mu}}$, et mènent à la relation de commutation

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] V^\sigma = T_{\mu\nu}^\rho \mathcal{D}_\rho V^\sigma + R_{\mu\nu\rho}^\sigma V^\rho, \quad (4.8)$$

où les tenseurs de courbure $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$ et de torsion $T_{\mu\nu}^\rho$, définis à partir du vierbein, de la connexion de spin et de leur dérivée, ont été introduits. Les dérivées covariantes satisfont l'identité de Jacobi, avec comme conséquence que les tenseurs de courbure et de torsion satisfassent les identités de Bianchi.

4.1.2 Généralisation au superespace

Au cours du chapitre 2, la définition du superespace - et des superchamps résultants - a permis d'obtenir de manière naturelle les transformations supersymétriques des superchamps - et de ses composantes - menant à l'expression du lagrangien (2.74).

De manière analogue à la section précédente, nous définissons deux superespaces bien distincts : un premier où la gravitation s'annule et un second où cette dernière est présente. L'espace tangent est alors défini par les coordonnées $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ muni des transformations de Lorentz¹

$$z'^M = z^N \Lambda_N^M(z), \quad (4.9)$$

1. La convention est identique à la section 4.1.1 où la différentiation entre l'espace tangent et courbe se fait à partir des variables tildes.

avec le paramètre de transformation $\Lambda_M^N(z)$. Une représentation irréductible de ces transformations amène à considérer seulement une matrice diagonale²

$$\Lambda_M^N(z) = \text{diag} \left[\Lambda_{\mu}^{\nu}(z), \Lambda_{\alpha}^{\beta}(z), \Lambda_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}(z) \right], \quad (4.10)$$

pour empêcher tout mélange entre les représentations vectorielles et spinorielles (gauche et droite). Le groupe de structure est alors celui de Lorentz ; il permet d'obtenir la supersymétrie globale dans l'espace-tangent (détaillé dans le chapitre 2).

Le second repère que nous considérons est un repère où la gravitation n'a pas été annulée et dans lequel nous avons invariance par reparamétrisation. D'autre part, si nous introduisons les coordonnées du repère $\tilde{z}^{\tilde{M}} = (\tilde{x}^{\tilde{\mu}}, \tilde{\theta}^{\tilde{\alpha}}, \tilde{\theta}_{\tilde{\alpha}})$, les transformations générales associées sont données par

$$\tilde{z}'^{\tilde{M}} = \tilde{z}^{\tilde{M}} + \xi^{\tilde{M}}(z), \quad (4.11)$$

où $\xi^{\tilde{M}}$ est un superchamp dépendant des coordonnées et servant de paramètre de transformation.

Les variables dynamiques, introduites dans la section 4.1.1, sont également définies. Le supervierbein $E_{\tilde{M}}^M(z) = \partial z^M / \partial \tilde{z}^{\tilde{M}}$, ainsi que son inverse $E_M^{\tilde{M}} = \partial \tilde{z}^{\tilde{M}} / \partial z^M$ satisfaisant (4.4), permettent d'effectuer les changements de référentiel. De manière analogue, la superconnexion $\Omega_{\tilde{M}\tilde{M}}^N(z)$, qui définit la dérivée covariante, est introduite par son action sur les superchamps V_M et W^M

$$\mathcal{D}_{\tilde{M}} V_M = \partial_{\tilde{M}} V_M - \Omega_{\tilde{M}\tilde{M}}^N V_N \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\tilde{M}} W^M = \partial_{\tilde{M}} W^M + (-1)^{\tilde{m}n} W^N \Omega_{\tilde{M}N}^M, \quad (4.12)$$

où le facteur $(-1)^{\tilde{m}n}$ ³ tient compte de la nature bosonique ou fermionique des opérateurs et des superchamps. Il est défini de la manière suivante : si \tilde{M} est une grandeur vectorielle, la valeur de \tilde{m} est alors $\tilde{m} = 0$. Dans le cas contraire, i.e. si \tilde{M} est une grandeur fermionique, la valeur de \tilde{m} est $\tilde{m} = 1$. Le raisonnement est analogue pour le deuxième index N .

L'algèbre de commutation et d'anticommutation, engendrée par les dérivées covariantes $\mathcal{D}_M = E_M^{\tilde{M}} \mathcal{D}_{\tilde{M}}$, implique la relation

$$[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N]_{mn} V_P = (\mathcal{D}_M \mathcal{D}_N - (-)^{mn} \mathcal{D}_N \mathcal{D}_M) V_P = R_{MNP}^Q V_Q + (-)^{q(m+n)} T_{MN}^Q \mathcal{D}_Q V_P, \quad (4.13)$$

provenant de la graduation de la règle de Leibnitz, et conduit à la définition des tenseurs de courbure R_{MNP}^Q et de torsion T_{MN}^Q . Leur expression se trouve dans la référence [62] et s'exprime en fonction des variables dynamiques $E_{\tilde{M}}^M$ et $\Omega_{\tilde{M}\tilde{M}}^N$.

Le passage d'un référentiel à un autre implique un changement de l'élément de volume. Dans la précédente section, ce changement s'est opéré par l'utilisation du Jacobien $e = \det(e_{\tilde{\mu}}^{\mu})$ (composé uniquement de coordonnées bosoniques). L'extension en termes de superespace nécessite de tenir compte des coordonnées fermioniques et de leur algèbre anticommutante. Cette généralisation implique de définir le superdéterminant⁴ $E = \text{sdet}(E_{\tilde{M}}^M)$ de manière à écrire

$$d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} = E d^4\tilde{x} d^2\tilde{\theta} d^2\tilde{\bar{\theta}}. \quad (4.14)$$

L'algèbre des dérivées covariantes, définie à l'équation (4.13), conduit aux identités de Bianchi - données à la référence [62] - entre les superchamps de courbure et de torsion. Néanmoins, nous avons constaté durant notre étude de la supersymétrie globale 2.2 que le formalisme des superchamps (2.36) implique un nombre important de degrés de liberté (expansion de Taylor par rapport aux coordonnées fermioniques).

2. Les premières approches de la supergravité [61] ont d'abord supposé le groupe orthosymplectique $OSP(1|4)$ pour l'espace tangent. Cependant, sa réalisation ne permettait pas d'étendre le principe d'équivalence généralisé pour une théorie de la supergravité. Comme nous le voyons dans la suite, la réduction des identités de Bianchi est un exercice non trivial lorsque le groupe de structure de l'espace tangent est $SO(1|3)$. Il se complique pour le groupe orthosymplectique $OSP(1|4)$.

3. L'algèbre de la supersymétrie implique la graduation de la règle de Leibnitz

$$\partial_{\tilde{M}}(V^M U_M) = (\partial_{\tilde{M}} V^M) U_M + (-1)^{\tilde{m}m} V^M (\partial_{\tilde{M}} U_M) = \mathcal{D}_{\tilde{M}}(V^M U_M),$$

pour tenir compte du type de coordonnées et de leurs dérivées associées.

4. Le superdéterminant est la généralisation du déterminant $e = \det(e_{\tilde{\mu}}^{\mu})$, en tenant compte des propriétés anticommutantes de l'algèbre des variables de Grassmann.

Des contraintes sont ensuite imposées, menant aux représentations irréductibles des superchamps chiraux (2.42) et vectoriels (2.45).

Lors la prochaine section, des contraintes sont imposées, réduisant le nombre de degrés de liberté des superchamps de courbure et de torsion, et un choix de jauge est effectué conduisant au multiplet de la supergravité.

4.2 Le multiplet de la supergravité

La réduction des identités de Bianchi, résultant d'un choix de contraintes, va mener à définir trois nouveaux superchamps : deux chiraux, \mathcal{R} et $W_{(\alpha\beta\gamma)}$ ⁵, et un vectoriel G_μ . Dans un second temps, un choix de jauge est effectué sur les variables dynamiques, le supervierbein et la superconnexion de spin, conduisant au multiplet de la gravité.

4.2.1 Les identités de Bianchi

Les dérivées covariantes (4.12) engendrent l'algèbre de Lie graduée (4.13) et de ce fait satisfont les identités de Jacobi correspondantes (2.3) et (2.13). De ces dernières, il est possible de déterminer un ensemble de 13 identités de Bianchi [62] reliant les tenseurs de courbure $R_{MNP}{}^Q$ et de torsion $T_{MN}{}^P$. À la différence de la relativité générale, il est possible en supergravité, d'après le théorème de Dragon [63], d'exprimer les composantes du tenseur de courbure en fonction de celles du tenseur de torsion.

De ce fait, Wess et Zumino [62] ont imposé, avec la notation $\alpha = (\alpha, \dot{\alpha})$, les contraintes suivantes uniquement sur les composantes du tenseur de torsion

$$\begin{aligned} T_{\alpha\dot{\beta}}{}^\mu &= T_{\dot{\beta}\alpha}{}^\mu = -2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}, \\ T_{\alpha\dot{\beta}}{}^\gamma &= 0, & T_{\alpha\dot{\beta}}{}^\mu &= T_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^\mu = 0, \\ T_{\mu\nu}{}^\rho &= 0, & T_{\alpha\mu}{}^\nu &= T_{\mu\alpha}{}^\nu = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

de manière à réduire au maximum le nombre de degrés de liberté. La raison du choix de ces contraintes, détaillée dans la référence [64], consiste à obtenir la supersymétrie globale dans la limite plate de l'algèbre (4.12).

En effet, ces contraintes permettent, premièrement, d'étendre la représentation du superchamp chiral Φ pour un superspace courbe⁶ $\mathcal{D}_\alpha\Phi = 0$, de manière à obtenir celle de la supersymétrie globale $\bar{\mathcal{D}}_\alpha\Phi = 0$, donnée à l'équation (2.42) dans la limite plate. Par conséquent, si nous écrivons, d'après l'équation (4.12),

$$\left\{ \bar{\mathcal{D}}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_\beta \right\} \Phi = 0 = T_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^M \mathcal{D}_M \Phi = T_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^\mu \mathcal{D}_\mu \Phi + T_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^\alpha \mathcal{D}_\alpha \Phi, \quad (4.16)$$

la première égalité est satisfaite à partir de la définition des superchamps chiraux, tandis que la seconde l'est d'après les contraintes données aux équations (4.15).

Deuxièmement, si nous écrivons la relation d'anti-commutation entre les dérivées covariantes \mathcal{D}_α et $\bar{\mathcal{D}}_\alpha$, définie à l'équation (4.12),

$$\left\{ \mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_\alpha \right\} = T_{\alpha\dot{\alpha}}{}^M \mathcal{D}_M = T_{\alpha\dot{\alpha}}{}^\mu \mathcal{D}_\mu + T_{\alpha\dot{\alpha}}{}^\beta \mathcal{D}_\beta + T_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}, \quad (4.17)$$

Le supervierbein peut être décomposé en une matrice par bloc 2×2 (les indices de Weyl pointés et non-pointés ont été ici réunis dans une seule variable $\underline{\alpha} = (\alpha, \dot{\alpha})$)

$$E_{\tilde{M}}{}^M = \begin{pmatrix} A_{\tilde{\mu}}{}^\mu & B_{\tilde{\mu}}{}^\alpha \\ C_{\tilde{\alpha}}{}^\mu & D_{\tilde{\alpha}}{}^\alpha \end{pmatrix},$$

où les blocs $A_{\tilde{\mu}}{}^\mu$, $B_{\tilde{\mu}}{}^\alpha$ (et $C_{\tilde{\alpha}}{}^\mu$) et $D_{\tilde{\alpha}}{}^\alpha$ contiennent respectivement, soit uniquement des indices bosoniques, soit un mélange des deux types ou alors, seulement des indices fermioniques. Le superdéterminant est donné par

$$E = \text{sdet} \left(E_{\tilde{M}}{}^M \right) = \det \left(A_{\tilde{\mu}}{}^\mu - B_{\tilde{\mu}}{}^\alpha (D^{-1})_{\tilde{\alpha}}{}^{\dot{\alpha}} C_{\tilde{\alpha}}{}^\mu \right) \det^{-1} \left(D_{\tilde{\beta}}{}^\beta \right).$$

5. La notation $W_{(\alpha\beta\gamma)}$ est utilisée pour signifier les propriétés symétriques du superchamp sous la permutation des indices α , β et γ .

6. L'étude des superchamps chiraux et vectoriels dans un superspace courbe est effectuée durant la prochaine section.

elle doit conduire à la relation d'anti-commutation obtenue en supersymétrie globale (2.34)

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu, \quad (4.18)$$

dans la limite plate, avec $T_{\alpha\dot{\alpha}}{}^\mu = -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}$ et $T_{\alpha\dot{\alpha}}{}^\beta = T_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = 0$. De façon analogue, il est possible d'interpréter le reste des contraintes (4.15).

L'ensemble des contraintes (4.15) permet d'étendre le principe d'équivalence généralisé en supergravité, d'éliminer les états de spin supérieur à 2 lors de l'expansion de Taylor [65, 66], et de réduire le nombre de degrés de liberté. Pour ce dernier, la réduction des identités de Bianchi, effectuée et détaillée dans les références [3] et [62] à partir des contraintes (4.15), conduit à exprimer les composantes des tenseurs de torsion et de courbure en fonction de trois superchamps : \mathcal{R} , G_μ et $W_{(\alpha\beta\gamma)}$. Ces derniers sont définis - de même que leur conjugué hermitien - à partir des relations

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\mathcal{R} = 0, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}W_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \quad (4.19)$$

où les superchamps \mathcal{R} et $W_{(\alpha\beta\gamma)}$ sont, par conséquent, chiraux, tandis que le superchamp

$$(G_\mu)^\dagger = G_\mu, \quad (4.20)$$

est vectoriel. Finalement, ces superchamps sont reliés par les équations⁷

$$\mathcal{D}^\alpha G_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\mathcal{R}^\dagger \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^\alpha W_{(\alpha\beta\gamma)} + \frac{i}{2} \left(\mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}} G_{\gamma}{}^{\dot{\beta}} + \mathcal{D}_{\gamma\dot{\beta}} G_{\beta}{}^{\dot{\beta}} \right) = 0. \quad (4.22)$$

La réduction des identités de Bianchi a conduit à extraire trois superchamps reliés par les identités (4.22). Les transformations en supergravité, composées des transformations de Lorentz (4.9) et des transformations générales (4.11), vont être appliquées dans la prochaine section aux variables dynamiques - le supervierbein et la superconnexion de spin - et à ces superchamps. La liberté dans ces transformations va permettre d'effectuer un choix de jauge et de minimiser le nombre de degrés de liberté. De façon équivalente, ils vont nous permettre d'éliminer les degrés de liberté non-physiques.

4.2.2 Fixation de la jauge

Au cours de la construction du formalisme du superespace en supergravité, nous avons distingué deux superespaces particuliers. Un premier, propre au superespace tangent, comprenant les transformations de Lorentz (4.9), et un second, courbé contenant les transformations générales (4.11), exprimé à partir du paramètre ξ . La variation des variables dynamiques $E_M{}^{\tilde{M}}$ et $\Omega_{\tilde{M}M}{}^N$, rencontrées dans la première section, se transforme par rapport aux transformations de Lorentz $\Lambda_M{}^N(z)$ pour les indices non-tildés et par rapport au paramètre $\xi^{\tilde{M}}(z)$ pour les indices tildés.

Les deux paramètres de transformation - $\Lambda_M{}^N(z)$ et $\xi^{\tilde{M}}(z)$ - étant des superchamps, leur expansion de Taylor par rapport aux coordonnées fermioniques engendrent un grand nombre de degrés de liberté et, par conséquent, un choix de jauge peut être effectué pour supprimer les degrés de liberté non-physiques. De plus, les ordres les plus hauts de l'expansion de Taylor [3] s'exprimant à partir de ses composantes les plus basses, notées $X|_{\tilde{\theta}=\bar{\theta}=0} = X|$, le choix de jauge s'applique alors uniquement pour les composantes les plus basses du supervierbein et de la superconnexion de spin.

Dans le cas du supervierbein - ainsi que son inverse - le choix de jauge est donné par

$$E_{\tilde{M}}{}^M(z)| = \begin{pmatrix} e_{\tilde{\mu}}{}^\mu(x) & \frac{1}{2}\psi_{\tilde{\mu}}{}^\alpha(x) & \frac{1}{2}\bar{\psi}_{\tilde{\mu}\dot{\alpha}}(x) \\ 0 & \delta_{\tilde{\alpha}}{}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\tilde{\dot{\alpha}}}{}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_M{}^{\tilde{M}}(z)| = \begin{pmatrix} e_{\mu}{}^{\tilde{\mu}}(x) & -\frac{1}{2}\bar{\psi}_{\mu}{}^{\tilde{\alpha}}(x) & -\frac{1}{2}\psi_{\mu\tilde{\dot{\alpha}}}(x) \\ 0 & \delta_{\alpha}{}^{\tilde{\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\tilde{\dot{\alpha}}} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

7. Pour la réduction des identités de Bianchi, il est plus facile de transformer les indices vectoriels en indices spinoriels des deux représentations fondamentales de Weyl

$$G_{\alpha\dot{\alpha}} = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}G_\mu, \quad G^\mu = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}G_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (4.21)$$

où les matrices σ^μ et $\bar{\sigma}^\mu$ suivent les relations $\text{Tr}[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu] = -2\eta^{\mu\nu}$ et $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$.

où une particule de spin 2, le graviton $e_{\tilde{\mu}}^{\mu}$ satisfaisant (4.4), et une particule de spin 3/2, le gravitino $(\psi_{\mu}^{\alpha}, \bar{\psi}_{\mu\dot{\alpha}})$ [67] satisfaisant

$$\psi_{\mu}^{\alpha} = e_{\mu}^{\tilde{\mu}} \psi_{\tilde{\mu}}^{\alpha} \delta_{\tilde{\alpha}}^{\alpha} \quad \text{et} \quad \bar{\psi}_{\mu\dot{\alpha}} = e_{\mu}^{\tilde{\mu}} \bar{\psi}_{\tilde{\mu}\dot{\alpha}} \delta_{\tilde{\alpha}}^{\dot{\alpha}}, \quad (4.24)$$

ont été introduites. Dans le cas de la superconnexion de spin, le choix de jauge est donné par

$$\Omega_{\tilde{\mu}M}^N(z)| = w_{\tilde{\mu}M}^N(x), \quad \Omega_{\tilde{\alpha}M}^N(z)| = \Omega_{\tilde{\alpha}M}^N(z)| = 0. \quad (4.25)$$

Une fois le choix de jauge ci-dessus effectué, les transformations des superchamps \mathcal{R} et G_{μ} sont données par

$$\delta\mathcal{R} = -\xi^{\tilde{M}} \mathcal{D}_{\tilde{M}} \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \delta G^{\mu} = -\xi^{\tilde{M}} \mathcal{D}_{\tilde{M}} \mathcal{R} + G^{\nu} L_{\nu}^{\mu}, \quad (4.26)$$

avec le paramètre de transformation infinitésimal de Lorentz $\Lambda_{\mu}^{\nu}(z) = \delta_{\mu}^{\nu} + L_{\mu}^{\nu}(z)$. Cependant, les composantes les plus basses de ces deux superchamps ne peuvent pas être éliminées. Par conséquent, deux nouveaux champs physiques doivent être introduits

$$\mathcal{R}(z)| = -\frac{1}{6} M(x), \quad \text{et} \quad G_{\mu}(z)| = -\frac{1}{3} b_{\mu}(x), \quad (4.27)$$

correspondant à deux champs auxiliaires, un champ complexe pour le premier et un champ vectoriel réel pour le second⁸.

Les champs physiques $e_{\mu}^{\tilde{\mu}}$, $\psi_{\tilde{\mu}}^{\alpha}$, $\bar{\psi}_{\tilde{\mu}\dot{\alpha}}$, M et b_{μ} définissent le supermultiplet de la supergravité. Les superchamps de courbure et de torsion, ainsi que les superchamps résultant de la réduction des identités de Bianchi s'expriment en fonction de ces champs physiques. Ce calcul s'effectue en utilisant les identités reliant les superchamps \mathcal{R} , G_{μ} et $\Psi_{(\alpha\beta\gamma)}$, en respectant les contraintes du tenseur de torsion (4.15) et en appliquant de manière successive les dérivées covariantes au travers de l'algèbre (4.13). Une fois la jauge fixée, il existe une invariance résiduelle préservant le choix de contraintes (4.15), appelée transformation de supergravité; elle est donnée à la page 145 de la référence [3].

Dans la prochaine section, nous introduisons les superchamps chiraux et vectoriels dans un superspace courbe et nous détaillons de manière concise comment les ordres supérieurs des expansions de Taylor des superchamps sont déduits à partir de l'algèbre (4.13).

4.3 Les superchamps pour un superspace courbe

Lors de notre analyse de la supersymétrie globale (2.2.2), deux représentations fondamentales de superchamps ont été mises en évidence : la représentation chirale et la représentation vectorielle. Cette section est consacrée à leur introduction en supergravité [68].

4.3.1 Le superchamp chiral

L'expression d'un superchamp chiral Φ , dépendant des coordonnées $\tilde{z}^{\tilde{M}} = (\tilde{x}^{\tilde{\mu}}, \tilde{\theta}^{\tilde{\alpha}}, \tilde{\theta}_{\tilde{\alpha}})$, est définie par la relation

$$\mathcal{D}_{\tilde{\alpha}} \Phi = 0, \quad (4.28)$$

qui correspond à l'extension courbe de la relation utilisée en supersymétrie globale $D_{\tilde{\alpha}} \Phi = 0$, étudiée dans le chapitre 2. Cependant, une expansion du superchamp par rapport aux coordonnées fermioniques $\theta^{\tilde{\alpha}}$ et $\theta_{\tilde{\alpha}}$ peut vite devenir un travail long et compliqué, du fait des mélanges des indices généraux et plats. Une approche allégeant le calcul consiste à utiliser la méthode des « composantes par projection » et à considérer uniquement les composantes indépendantes de $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\theta}$, noté $X|_{\tilde{\theta}=\tilde{\theta}=0} = X|$ ⁹. Les composantes, d'après (2.43), sont calculées à partir des dérivées covariantes

$$\phi = \Phi|, \quad \chi_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_{\alpha} \Phi| \quad \text{et} \quad F = -\frac{1}{4} \mathcal{D} \cdot \mathcal{D} \Phi|. \quad (4.29)$$

8. Ce choix de jauge concernant les champs auxiliaires correspond à la *old minimal supergravity*. L'introduction du champ auxiliaire fermionique augmente le nombre de degrés de liberté et correspond à la *new minimal supergravity*.

9. Le terme « projection » est trompeur. En effet, les opérateurs ne satisfont pas les propriétés des projecteurs. Néanmoins, nous utilisons le terme de projection, conformément à la littérature [5].

Il est possible de calculer les dérivées covariantes du superchamp chiral successivement à partir de l'algèbre (4.13) et du choix de jauge effectué durant la précédente section. Ainsi, nous pouvons, par exemple, en déduire

$$\mathcal{D}_\mu \phi| = e_\mu^{\bar{\mu}} \left(\partial_{\bar{\mu}} \phi - \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_{\bar{\mu}} \cdot \chi \right), \quad (4.30)$$

venant du choix de jauge (4.23) et de la définition du superchamp chiral à l'ordre le plus bas (4.29). De manière équivalente, le calcul des autres dérivées covariantes, par exemple $\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\mu$, s'appuie notamment sur la relation de commutation (4.13).

Par un raisonnement analogue, la transformation d'un superchamp chiral Φ sous les transformations de supergravité, (4.9) et (4.11), s'écrit

$$\delta \Phi = -\xi^M \mathcal{D}_M \Phi, \quad (4.31)$$

donnant en termes de composantes

$$\delta \phi = -\xi^M \mathcal{D}_M \phi|, \quad \delta \chi_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \xi^M \mathcal{D}_M \mathcal{D}_\alpha \Phi| \quad \text{et} \quad \delta F = \frac{1}{4} \xi^M \mathcal{D}_M \mathcal{D} \cdot \mathcal{D} \Phi|. \quad (4.32)$$

Le calcul de variation des composantes du superchamp chiral se fait par l'application successive des dérivées covariantes sur Φ . Cependant, l'algèbre de ces dernières $[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N]_{mn} \Phi = T_{MN}{}^P \mathcal{D}_P \Phi$ implique que des termes d'ordre supérieur influencent ceux d'ordre plus bas. Par exemple, le calcul de la variation du champ auxiliaire δF nécessite le calcul de l'application de quatre dérivées covariantes sur le superchamp chiral $\overline{\mathcal{D}} \cdot \overline{\mathcal{D}} \mathcal{D} \cdot \mathcal{D} \Phi$.

Le calcul étant détaillé dans la référence [3], nous nous attardons seulement sur les deux conséquences majeures qui ont leur importance pour le calcul du lagrangien pour une théorie de la supergravité.

La première provient d'une différence majeure avec la supersymétrie globale concernant la transformation du champ auxiliaire F . Dans la section 2.2.2, le champ F se transforme comme une dérivée totale, permettant d'écrire le lagrangien de la supersymétrie à partir du terme F , de manière à rendre la théorie invariante sous les transformations (2.38). Cette caractéristique ne se retrouve pas en supergravité. Une reformulation du lagrangien en supergravité est nécessaire. Elle est réalisée dans la prochaine section 4.3.2.

La seconde remarque importante provient de la propriété suivante

$$\overline{\mathcal{D}}_\alpha \left[(\overline{\mathcal{D}} \cdot \overline{\mathcal{D}} - 8\mathcal{R}) \Phi^\dagger \right] = 0, \quad (4.33)$$

établie durant le calcul des transformations (4.32). À partir d'un superchamp antichiral Φ^\dagger , l'application du projecteur $(\overline{\mathcal{D}} \cdot \overline{\mathcal{D}} - 8\mathcal{R})$ a rendu la grandeur $(\overline{\mathcal{D}} \cdot \overline{\mathcal{D}} - 8\mathcal{R}) \Phi^\dagger$ chirale. Ce nouveau projecteur est alors la généralisation du projecteur $\overline{\mathcal{D}} \cdot \overline{\mathcal{D}}$, rencontré dans la section 2.2.2¹⁰. Par conséquent, il est utilisé pour calculer le superchamp chiral W_α dans un superespace courbe et pour une écriture élégante de l'action en supergravité.

4.3.2 Le superchamp vectoriel

Pour un superchamp vectoriel dans un superespace courbe, la condition est identique

$$V = V^\dagger, \quad (4.34)$$

à celle rencontrée dans le premier chapitre (2.45). De manière analogue au superchamp chiral Φ , les composantes du superchamp V sont déduites à partir du procédé des « composantes par projection ». Enfin, le choix de jauge de Wess-Zumino, réalisé en supersymétrie globale 2.2.2, reste vrai en supergravité et permet de garder uniquement les champs physiques v_μ , λ_α , $\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}$ et D .

L'étude des superchamps chiraux, dans la section 4.3.1, a mis en évidence le projecteur $(\overline{\mathcal{D}} \cdot \overline{\mathcal{D}} - 8\mathcal{R})$ permettant de rendre chiral un superchamp arbitraire¹¹. Ce dernier est utilisé pour définir le superchamp chiral W_α sur un superespace courbe.

En considérant un groupe de jauge non-abélien et une représentation unitaire \mathfrak{R} , spécifiée par le générateur

10. Malgré l'emploi du terme « projecteur », les grandeurs décrites ne satisfont pas les propriétés des projecteurs.

11. Seulement si le superchamp ne possède pas des indices de Lorentz. Dans le cas contraire, l'expression du projecteur diffère à cause de l'algèbre (4.13).

hermitien T^a , le superchamp chiral W_α est défini à partir du superchamp vectoriel $V = V^a T_a$ (V étant considéré dans la jauge de Wess-Zumino) et s'écrit

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} (\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} - 8\mathcal{R}) (e^{2gV} \mathcal{D}_\alpha e^{-2gV}) = 2g (\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} - 8\mathcal{R}) [\mathcal{D}_\alpha V + g[V, \mathcal{D}_\alpha V]], \quad (4.35)$$

où la seconde égalité résulte du développement en série de Taylor des exponentielles. L'algèbre non-abélienne du groupe de jauge est caractérisée par la relation de commutation du second terme. Le cas abélien est obtenu en mettant les constantes de structure à zéro et en considérant les générateurs comme la charge du groupe $U(1)$. Nous définissons alors¹²

$$v_{\alpha\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2} [\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}] V, \quad \lambda_\alpha = iW_\alpha, \quad \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = -i\overline{W^{\dot{\alpha}}} \quad \text{et} \quad D = -\frac{1}{2} \mathcal{D}^\alpha W_\alpha = -\frac{1}{2} \overline{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}} \overline{W^{\dot{\alpha}}}. \quad (4.36)$$

De manière analogue au superchamp chiral Φ , le calcul des transformations du superchamp vectoriel V se fait par application successive des dérivées covariantes et conduit à une conclusion similaire : le champ auxiliaire D ne se transforme plus comme une dérivée totale.

Au niveau des transformations de jauge de W_α par rapport au superchamp chiral Λ , le cas d'un superspace courbe est identique aux résultats établis dans le cas de la supersymétrie globale (2.62).

L'incrémentation des superchamps chiraux et vectoriels en supergravité a mis en évidence deux conclusions majeures. Le calcul sur les composantes du superchamp chiral a permis d'introduire le projecteur $(\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} - 8\mathcal{R})$ qui est utilisé lors de la prochaine section.

Quant à l'étude des transformations en supergravité des superchamps Φ et V , elle a montré une différence majeure avec une supersymétrie plate. La variation des termes F et des termes D ne permet plus la construction d'un lagrangien invariant de façon aussi simple qu'en supersymétrie globale.

4.4 Le lagrangien de la supergravité

Lors section 4.1, nous introduisons le formalisme permettant de définir un superspace courbe. Les contraintes données à l'équation (4.15) permettent d'étendre la définition des superchamps chiraux 4.3.1 et des superchamps vectoriels 4.3.2 dans un superspace courbe. La réduction des identités de Bianchi, couplée à un choix de jauge, conduit à définir le multiplet de la supergravité 4.2.2, composé du graviton $e_{\tilde{\mu}}^\mu$, du gravitino $(\psi_{\tilde{\mu}}^\alpha, \overline{\psi}_{\tilde{\mu}\dot{\alpha}})$ et des champs auxiliaires (M, b_μ) .

Cette dernière section est consacrée à la construction du lagrangien en supergravité ; des remarques importantes pour les prochains chapitres, lors de la réduction sous forme de composantes, sont également évoquées. Enfin, nous concluons par le mécanisme de brisure de la supergravité de manière à obtenir une théorie phénoménologiquement viable à basse énergie.

4.4.1 La densité chirale

Un superchamp chiral Φ , vivant dans un superspace courbe, dépend des coordonnées générales $\tilde{z}^{\tilde{M}} = (\tilde{x}^{\tilde{\mu}}, \theta^{\dot{\alpha}}, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}})$. Cependant, sa condition de « chiralité » est imposée au superspace tangent par la dérivée covariante $\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}$. Par conséquent, l'analyse des composantes de ce dernier implique un long calcul mélangeant les indices tildés et non-tildés.

L'introduction de variables hybrides, Θ^α et $\overline{\Theta}_{\dot{\alpha}}$, où les coordonnées générales sont maintenant renommées $\tilde{z}^{\tilde{M}} = (\tilde{x}^{\tilde{\mu}}, \Theta^\alpha, \overline{\Theta}_{\dot{\alpha}})$, permet d'éviter la complexité du calcul (expansion des coordonnées fermioniques pour le superspace courbe), et d'utiliser directement la contrainte du superspace tangent $\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0$. L'expansion du superchamp chiral s'écrit, dans ce nouveau jeu de variables, simplement

$$\Phi(x, \Theta) = \phi(x) + \sqrt{2} \Theta^\alpha \chi_\alpha(x) + \Theta^\alpha \Theta_\alpha F(x). \quad (4.37)$$

Cette écriture est analogue à celle obtenue pour un superchamp chiral en supersymétrie globale (2.43). La transformation du superchamp est aussi redéfinie

$$\delta \Phi = -\eta^{\tilde{M}}(x, \Theta) \partial_{\tilde{M}} \Phi, \quad (4.38)$$

12. L'indice vectoriel du champ v_μ est paramétrisé dans les représentations spinorielles de Weyl par l'application de la matrice $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}$ (Cf.(4.21)).

où l'opérateur différentiel $\partial_{\tilde{M}}$ agit maintenant sur les variables x et Θ , et η devient le nouveau paramètre de transformation (4.11). Néanmoins, il est nécessaire d'imposer des conditions sur le paramètre de transformation η pour obtenir une cohérence entre les transformations (4.31) et (4.38) du superchamp chiral Φ . Des conditions doivent alors être imposées après l'expansion du nouveau paramètre par rapport aux variables hybrides, de sorte à obtenir la même expansion que les transformations générales (4.11), liées au paramètre $\xi^{\tilde{M}}$.

Lors de la section précédente, nous constatons que les champs auxiliaires F et D ne se transforment plus comme une dérivée totale, empêchant de construire un lagrangien invariant dans le formalisme d'un superspace courbe. En définissant le concept de densité chirale Δ , dont la transformation s'écrit

$$\delta\Delta(x, \Theta) = -\partial_{\tilde{M}} \left[\eta^{\tilde{M}} \Delta(-1)^{\tilde{m}} \right], \quad (4.39)$$

la transformation du superchamp chiral Φ (voir (4.38)), couplée avec la densité chirale, devient

$$\delta(\Delta\Phi) = -\partial_{\tilde{M}} \left[\eta^{\tilde{M}} \Delta\Phi(-1)^{\tilde{m}} \right]; \quad (4.40)$$

la construction d'une action invariante est désormais possible. Si nous introduisons la fonction arbitraire $g(\Phi)$ dépendant du superchamp chiral Φ et dont l'action est donnée par

$$S = \int d^4x d^2\Theta \Delta g(\Phi), \quad (4.41)$$

la variation de l'action S devient nulle

$$\delta S = \delta \left[\int d^4x d^2\Theta \Delta g(\Phi) \right] = 0. \quad (4.42)$$

Un cas particulier pour une densité chirale est appelé la capacité $\mathcal{E}(x, \Theta)$. Elle joue le rôle de l'élément de volume E , rencontré lors de la section 4.1.2, et dont les composantes, après expansion par rapport à Θ (4.37), s'expriment en fonction du vierbein $e = \det(e_{\mu}^{\mu})$, du gravitino ψ_{μ}^{α} et du champ auxiliaire M .

L'introduction des variables hybrides Θ^{α} et $\bar{\Theta}_{\dot{\alpha}}$ allège le calcul lors de l'expansion du superchamp chiral dans un superspace courbe, tandis que la capacité \mathcal{E} permet de construire des lagrangiens, composés de superchamp chiral et de superchamp antichiral, invariants sous les transformations de la supergravité.

4.4.2 Le lagrangien de la supergravité

Dans la section 2.3, nous construisons, dans le formalisme des superchamps, le lagrangien non-renormalisable le plus général de la supersymétrie globale. Trois fonctions fondamentales ont été définies : le potentiel de Kähler K , le superpotentiel W et la fonction cinétique de jauge h .

Le formalisme de la supergravité étant l'extension de la supersymétrie globale dans un superspace courbe, il est donc naturel d'imposer le lagrangien de la supersymétrie, donné à l'équation (2.78), comme limite plate¹³ du lagrangien de supergravité $N = 1$, que nous allons maintenant définir.

Les contraintes sur les composantes du superchamp de torsion (4.15) ont permis d'étendre les superchamps chiraux dans un superspace courbe. Le superpotentiel W et la fonction cinétique de jauge h , étant des fonctions chirales, leur expansion de Taylor, par rapport aux variables hybrides, est simplement l'analogue de l'équation (2.70) pour le superpotentiel

$$W(\Phi) = W(\phi) + \sqrt{2}\Theta \cdot \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi^i} \chi^i \right) + \Theta \cdot \Theta \left[\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi^i} F^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \chi^i \cdot \chi^j \right], \quad (4.43)$$

et de l'équation (2.67) pour la fonction cinétique de jauge

$$h_{ab}(\Phi) = h_{ab}(\phi) + \sqrt{2}\Theta \cdot \left(\frac{\partial h_{ab}(\phi)}{\partial \phi^i} \chi^i \right) + \Theta \cdot \Theta \left[\frac{\partial h_{ab}(\phi)}{\partial \phi^i} F^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{ab}(\phi)}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \chi^i \cdot \chi^j \right], \quad (4.44)$$

13. La limite plate correspond à la limite $M_p \rightarrow \infty$ (ou pour la masse de Planck réduite $m_p \rightarrow \infty$). Cette dernière consiste à rendre négligeable les interactions gravitationnelles par rapport aux autres interactions fondamentales de manière à conduire à la supersymétrie globale.

avec a et b les indices appartenant à la représentation adjointe du groupe de jauge G . Leur lagrangien respectif est finalement donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}} &= \int d^2\Theta \mathcal{E} W(\Phi) + \int d^2\bar{\Theta} \bar{\mathcal{E}} W(\Phi^\dagger), \\ \mathcal{L}_{\text{cin,jauge}} &= \frac{1}{16g^2} \int d^2\Theta \mathcal{E} h_{ab}(\Phi) W^{a\alpha} W_\alpha^b + \frac{1}{16g^2} \int d^2\bar{\Theta} \bar{\mathcal{E}} \bar{h}_{ab}(\Phi^\dagger) W_{\dot{\alpha}}^a W^{b\dot{\alpha}},\end{aligned}\tag{4.45}$$

avec \mathcal{E} , la capacité introduite dans l'équation (4.39), de manière à rendre l'action invariante sous les transformations de supergravité, g la constante de couplage du groupe de jauge considéré et W^α le superchamp chiral, calculé à partir de l'équation (4.35).

La différence majeure, par rapport à la supersymétrie globale, provient du couplage entre la matière et la gravitation au niveau du potentiel de Kähler. En effet, l'article de Zumino [19] a permis d'introduire le potentiel de Kähler pour la supersymétrie globale et de généraliser le secteur de la matière. Mais en présence de la gravitation, l'unique possibilité d'assurer un couplage entre la gravitation et la matière au travers de K consiste, d'après l'article de Bagger et Witten [69], à prendre l'exponentielle du potentiel de Kähler donnant

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mat,grav}} &= m_p^2 \int d^2\Theta \mathcal{E} \left[\frac{3}{8} (\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} - 8\mathcal{R}) e^{-\frac{1}{3m_p^2} K(\Phi, \Phi^\dagger e^{-2gV})} \right] \\ &\quad + m_p^2 \int d^2\bar{\Theta} \bar{\mathcal{E}} \left[\frac{3}{8} (\bar{\mathcal{D}} \cdot \bar{\mathcal{D}} - 8\bar{\mathcal{R}}^\dagger) e^{-\frac{1}{3m_p^2} K(\Phi, \Phi^\dagger e^{-2gV})} \right],\end{aligned}\tag{4.46}$$

avec m_p la masse de Planck réduite, définie par $m_p = \frac{M_{\text{Planck}}}{\sqrt{8\pi}} = 2.4 \times 10^{18} \text{GeV}$, et le « projecteur chiral » provenant de l'équation (4.33). La limite plate du lagrangien¹⁴ ci-dessus conduit au découplage entre le secteur de la gravitation et de la matière, dont la limite conduit pour ce dernier à l'expression (2.59).

Le lagrangien de la supergravité $N = 1$, d'après les équations (4.45) et (4.46), est donné par

$$\mathcal{L} = m_p^2 \int d^2\Theta \mathcal{E} \left[\frac{3}{8} (\bar{\mathcal{D}} \cdot \bar{\mathcal{D}} - 8\mathcal{R}) e^{-\frac{1}{3m_p^2} K(\Phi, \Phi^\dagger e^{-2gV})} + \frac{1}{m_p^2} W(\Phi) + \frac{1}{m_p^2} \frac{1}{16g^2} h_{ab}(\Phi) W^{a\alpha} W_\alpha^b \right] + \text{h.c.}.\tag{4.47}$$

L'intégration sur les variables hybrides, menant à l'écriture du lagrangien en termes de champs physiques, sort du cadre de ce chapitre, et seules les conséquences majeures pour la suite sont mises en évidence.

La plus grosse surprise résultant du couplage entre la matière et la gravitation au travers du lagrangien (4.46) provient de l'intégration. En effet, l'intégration par rapport aux variables hybrides ne conduit pas à une action d'Einstein-Hilbert dans le secteur de la gravitation, mais à une action de Brans-Dicke [70]¹⁵, dont le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} = \frac{1}{2} m_p^2 e e^{-\frac{\kappa^2}{3} K} R,\tag{4.48}$$

où nous retrouvons le potentiel de Kähler $K(\phi, \phi^\dagger)$, avec R le scalaire de Ricci, exprimé en fonction du graviton $e_{\mu}^{\tilde{\mu}}$, de la connexion de spin w , et du jacobien $e = \det(e_{\mu}^{\tilde{\mu}})$. Néanmoins, il a été constaté [69] qu'une transformation de Weyl - une dilatation de la métrique - permet d'absorber le champ de Brans-Dicke conduisant au lagrangien d'Einstein-Hilbert. Dans le cas de la supergravité, la transformation de super-Weyl est l'analogue de cette transformation de Weyl. Elle correspond à une dilatation du graviton, accompagné d'une redéfinition du gravitino. Il s'ensuit une redéfinition de l'ensemble des autres champs physiques.

Finalement, le développement en composantes, dont l'expression finale du lagrangien se trouve dans la dernière annexe de la référence [3], conduit au lagrangien de la gravitation, du lagrangien de super-Yang-

14. L'expansion de Taylor de l'exponentielle

$$e^{-\frac{1}{3m_p^2} K(\Phi, \Phi^\dagger e^{-2gV})} = 1 - \frac{1}{3m_p^2} K(\Phi, \Phi^\dagger e^{-2gV}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_p^4}\right),$$

lorsque $m_p \rightarrow \infty$ permet comme simple approximation de retrouver premièrement, le secteur purement de la supergravité et deuxièmement, celui de la matière avec le potentiel de Kähler.

15. Les théories de Brans-Dicke ont été introduites, à partir d'un champ scalaire, pour rendre la constante de Newton G dépendante de l'espace-temps.

Mills, à l'interaction entre la gravitation et la matière, et à une pléthore de couplages à quatre fermions. Néanmoins, deux termes en particulier attirent notre attention pour les prochains chapitres.

Le premier correspond au couplage entre deux scalaires et deux fermions, donné par l'expression

$$\mathcal{L}_{\text{sca-fer}} = -\frac{1}{2} e e^{2\frac{K}{m_p^2}} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j W \chi^i \chi^j, \quad (4.49)$$

avec

$$\mathcal{D}_i W = \frac{\partial W}{\partial \phi^i} + \frac{1}{m_p^2} W \frac{\partial K}{\partial \phi^i} \equiv \partial_i W + \frac{1}{m_p^2} W \partial_i K, \quad (4.50)$$

et

$$\mathcal{D}_i \mathcal{D}_j W = \partial_i \partial_j W + \frac{1}{m_p^2} W \partial_i \partial_j K + \frac{1}{m_p^2} \partial_i K \mathcal{D}_j W + \frac{1}{m_p^2} \partial_j K \mathcal{D}_i W - \frac{1}{m_p^2} W \partial_i K \partial_j K - \Gamma_i^k{}_j \mathcal{D}_k W. \quad (4.51)$$

Le potentiel de Kähler définit une variété kählérienne¹⁶, dont la métrique est donnée par (Cf.(2.58)),

$$K^{i*}{}_i = \frac{\partial^2 K(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi^i \partial \phi_{i*}^\dagger}, \quad (4.52)$$

tandis que le symbole de Christoffel est défini par

$$\frac{\partial^3 K}{\partial \phi^i \partial \phi^j \partial \phi_{k*}^\dagger} = \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^\ell \partial \phi_{k*}^\dagger} \Gamma_i{}^\ell{}_j, \quad (4.53)$$

et dont la dérivée covariante est donnée par (4.50). Le lagrangien (4.49) est étudié dans la section 6.1.2 du chapitre 6.

Le deuxième terme provient de l'élimination de l'ensemble des champs auxiliaires conduisant à l'expression du potentiel scalaire

$$V = V_F + V_D, \quad (4.54)$$

avec leur expression analytique

$$V_F = e^{\frac{K}{m_p^2}} \left(\mathcal{D}_i W (K^{-1})^{i j*} \mathcal{D}^{j*} \bar{W} - 3 \frac{|W|^2}{m_p^2} \right), \quad (4.55)$$

$$V_D = \frac{g^2}{8} h^{Rab} \left(K_i (T_a \phi)^i + (\phi^\dagger T_a)_{i*} K^{i*} \right) \left(K_j (T_b \phi)^j + (\phi^\dagger T_b)_{j*} K^{j*} \right), \quad (4.56)$$

où la fonction cinétique de jauge a été décomposée en une partie réelle h_{ab}^R et une partie imaginaire h_{ab}^I , et h^{Rab} étant la fonction inverse. La limite plate du potentiel scalaire (4.54), caractérisée par la limite formelle $m_p \rightarrow \infty$, conduit au potentiel scalaire non-renormalisable (2.76) obtenu dans le cadre de la supersymétrie globale.

4.4.3 Brisure de la supergravité

À la fin du chapitre 2, de brèves remarques ont été apportées sur les problèmes de consistance rencontrés entre une brisure dynamique de la supersymétrie et ses conséquences phénoménologiques ([22] et [23]). Ces brisures apparaissent lorsque l'un des deux champs auxiliaires - F et D - acquiert une valeur moyenne non-nulle dans le vide et conduit à un fermion de goldstone dans le spectre de masse.

L'utilisation des termes de brisure douce [25] permet de briser explicitement la supersymétrie. Le chapitre 3 est consacré aux conséquences phénoménologiques de ces paramètres de brisure douce, dans le cadre particulier de la matière noire pour le modèle standard supersymétrique minimal.

Cette section s'intéresse à l'étude de la brisure dynamique de la supergravité, menant à générer les fameux termes de brisure douce nécessaires à une brisure de la supersymétrie.

Dans le cadre de la supergravité, le mécanisme de brisure est l'extension supersymétrique du mécanisme de Higgs du modèle standard, appelé mécanisme de super-Higgs [71, 72]. Il repose sur l'introduction d'un

16. Lire les références [3] et [21] sur les variétés kählériennes.

nouveau superchamp chiral $\Phi_\zeta = (\zeta, \psi_\zeta, F_\zeta)$, invariant sous le groupe de jauge du modèle standard ou de ses extensions. Appelé « caché », il interagit uniquement de manière gravitationnelle avec le secteur observable $\Phi_\phi = (\phi, \psi_\phi, F_\phi)$, i.e. le contenu en champ du modèle standard ou de ses extensions.

Ce nouveau secteur développe une valeur moyenne dans le vide, non-nulle, qui va briser spontanément la supergravité, et le paramètre d'ordre de la brisure, i.e. le gravitino, acquiert une masse. En effet, de manière analogue au mécanisme de Higgs, dans le cadre du modèle standard, un fermion de goldstone est généré pour être « absorbé » par le gravitino impliquant sa polarisation 1/2. Sa masse est définie à partir du potentiel de Kähler et du superpotentiel par

$$m_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{m_p^2} \langle W e^{2m_p^2 K} \rangle. \quad (4.57)$$

Les conséquences de cette brisure sont communiquées au secteur observable par différents scénarii, au travers des termes de brisure douce. Parmi ces scénarii¹⁷, nous nous sommes particulièrement intéressés, dans le chapitre suivant, à celui provenant des interactions gravitationnelles. Nous présentons, par conséquent, ses principales caractéristiques.

Pour commencer, nous regroupons de manière générale les composantes scalaires des différents superchamps chiraux, dans un même champ noté $Z^{\mathcal{I}} \equiv (\zeta^i, \phi^a)$, avec $\mathcal{I} \in \{1, \dots, I + A\}$, et les indices i et a indexant respectivement les I champs scalaires du secteur caché et les A champs scalaires du secteur observable. Le potentiel scalaire associé à ce scénario est donné par le terme F de l'équation (4.55) que nous réécrivons suivant la notation choisie

$$V_F(Z, Z^\dagger) = e^{\frac{K}{m_p^2}} \left(\mathcal{D}_{\mathcal{I}} W (K^{-1})^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} \mathcal{D}^{\mathcal{I}^*} \overline{W} - 3 \frac{|W|^2}{m_p^2} \right). \quad (4.58)$$

Ce dernier s'exprime à partir des deux fonctions fondamentales : le potentiel de Kähler K et le superpotentiel W . Une étude détaillée de ce deux fonctions est effectuée dans le prochain chapitre.

Enfin, nous finissons cette dernière section en présentant une classe de modèle particulier concernant ce scénario de communication, les modèles *no-scale* [73, 74, 75]. Ces modèles ont été développés pour proposer une solution naturelle à l'un des problèmes majeurs de la physique moderne, la valeur de la constante cosmologique. Dans le cadre de la brisure de la supergravité, présentée précédemment, un ajustement fin de la théorie est nécessaire pour minimiser l'impact du secteur caché sur la valeur de la constante cosmologique. Dans le cadre des modèles *no-scale*, la constante cosmologique est identiquement nulle.

En définissant le potentiel de Kähler généralisé

$$G(Z, Z^\dagger) = K(Z, Z^\dagger) + m_p^2 \ln \left| \frac{W(Z)}{m_p^3} \right|^2, \quad (4.59)$$

reliant les deux fonctions fondamentales K et W , le potentiel scalaire s'écrit simplement

$$V_F(Z, Z^\dagger) = m_p^2 e^{\frac{G}{m_p^2}} \left[\frac{\partial G}{\partial Z^{\mathcal{I}}} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial Z^{\mathcal{I}} \partial Z^{\mathcal{I}^*}} \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial Z^{\mathcal{I}^*}} - 3m_p^2 \right] \equiv m_p^2 e^{\frac{G}{m_p^2}} \left(G_{\mathcal{I}} (G^{-1})^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} G^{\mathcal{I}^*} - 3m_p^2 \right). \quad (4.60)$$

Une condition géométrique, définie par

$$\partial_{\mathcal{I}} G (G^{-1})^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} \partial^{\mathcal{I}^*} G = 3m_p^2, \quad (4.61)$$

assure que le potentiel scalaire soit nul à l'arbre quelle que soit la valeur des champs qui le compose. Ainsi, quand le champ scalaire du secteur caché acquiert une valeur moyenne dans le vide, la supergravité est brisée au travers du potentiel scalaire (4.60). Et la condition *no-scale* (4.61) assure que la constante cosmologique, pour n'importe quelle échelle de brisure, soit nulle. Enfin, le paramètre d'ordre de la brisure est défini par sa masse

$$m_{\frac{3}{2}} = m_p \langle e^{\frac{1}{2} \frac{G}{m_p^2}} \rangle. \quad (4.62)$$

17. Les autres scénarii majoritaires communiquent les conséquences de la brisure au secteur observable, via des interactions de jauge ou par des anomalies.

Dans ce chapitre, l'extension locale de la supersymétrie conduit à développer le formalisme du super-espace, lorsque ce dernier est courbe. De cette analyse, un jeu de contraintes a été défini pour minimiser au maximum les degrés de liberté induits par les identités de Bianchi. Accompagné d'un choix de jauge, le multiplet de la supergravité - composé du graviton, du gravitino et des champs auxiliaires - a été introduit. De plus, les contraintes introduites ont permis d'étendre les superchamps chiraux et vectoriels dans le cadre d'un superespace courbe. Enfin, nous finissons par la construction du lagrangien pour une théorie de la supergravité $N = 1$.

La supergravité est une théorie non-renormalisable de la gravitation. C'est une théorie effective d'une théorie plus fondamentale. Néanmoins, les conséquences sur la brisure explicite de la supersymétrie mènent à des études phénoménologiques à basse énergie. L'étude de ces conséquences est essentielle, elle est au centre des deux prochains chapitres.

Chapitre 5

Classification du potentiel de Kähler K et du superpotentiel W

L'extension locale de la supersymétrie incorpore naturellement la gravitation dans la théorie. Le chapitre 4 a été l'occasion de présenter quelques éléments de la supergravité. Ce dernier s'est conclu par le traitement de la brisure spontanée de la supergravité, dont les conséquences sont transmises au secteur observable au travers des interactions gravitationnelles. Deux fonctions essentielles à ce mécanisme de brisure et à son scénario de communication ont été introduites : le potentiel de Kähler K et le superpotentiel W .

L'interaction gravitationnelle, générant des divergences, rend la théorie de la supergravité non-renormalisable. Néanmoins, elle peut être considérée comme une théorie effective d'une théorie plus fondamentale. Une analyse des termes de brisure douce, menant à une brisure explicite de la supersymétrie, est possible. Cependant, il est nécessaire de s'assurer que les divergences se situant à l'échelle de la masse de Planck m_p ne se répercutent pas à une physique à basse énergie - secteur électrofaible, échelle de brisure de la supersymétrie, etc -, via ces termes de brisure douce.

En 1983, Soni et Weldon [2] ont classifié l'ensemble des expressions analytiques des deux fonctions fondamentales K et W , de manière à conduire à une phénoménologie à basse énergie. En collaboration avec Gilbert Moultaqa¹ et Michel Rausch de Traubenberg², une analyse complémentaire à celle de Soni et Weldon a été menée [1]. Nous avons, dans un premier temps, confirmé la classification opérée par Soni et Weldon. Mais dans un second temps, de nouvelles solutions ont été établies, menant à une nouvelle phénoménologie pour une physique à basse énergie.

Pour cette analyse, nous prenons appui sur un ensemble de superchamps chiraux, dont la composante scalaire est notée $Z^{\mathcal{I}}$, avec $\mathcal{I} \in \{1, \dots, I + A\}$. La contribution F du potentiel scalaire pour une théorie de la supergravité $N = 1$ est, d'après l'équation (4.55), donnée par

$$V_F(Z, Z^\dagger) = e^{\frac{K}{m_p^2}} \left(\mathcal{D}_{\mathcal{I}} W (K^{-1})^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} \mathcal{D}^{\mathcal{I}^*} \overline{W} - 3 \frac{|W|^2}{m_p^2} \right), \quad (5.1)$$

avec la métrique de la variété kählerienne

$$K^{\mathcal{I}^* \mathcal{I}} = \frac{\partial^2 K}{\partial Z^{\mathcal{I}} \partial Z_{\mathcal{I}^*}^\dagger}, \quad (5.2)$$

définie à partir du potentiel de Kähler et de sa dérivée covariante associée

$$\mathcal{D}_{\mathcal{I}} W = \frac{\partial W}{\partial Z^{\mathcal{I}}} + \frac{1}{m_p^2} W \frac{\partial W}{\partial Z^{\mathcal{I}}} \equiv \partial_{\mathcal{I}} W + \frac{1}{m_p^2} W \partial_{\mathcal{I}} K. \quad (5.3)$$

La partie scalaire du secteur observable est notée ϕ^a , avec $a \in \{1, \dots, A\}$, tandis que celle du secteur caché est notée ζ^i , avec $i \in \{1, \dots, I\}$.

Le chapitre 5 est construit de la manière suivante. La section 5.1 présente l'approche de Soni et Weldon, suivie de la nouvelle classification que nous avons établi. La section 5.2 est une ouverture à la section 5.3,

1. gilbert.moultaqa@umontpellier.fr
2. michel.rausch@iphc.cnrs.fr

puisqu'elle introduit des prérequis nécessaires à l'analyse du potentiel scalaire (5.1) pour un potentiel de Kähler canonique. Enfin, la dernière section est consacrée à l'analyse du potentiel scalaire (5.1) lorsque le potentiel de Kähler est non-canonique.

5.1 Une formulation du potentiel scalaire V_F

Pour cette première section, nous commençons par développer l'approche de Soni et Weldon, basée sur l'article [2], où nous présentons les contraintes imposées au potentiel scalaire et les hypothèses effectuées sur le potentiel de Kähler et le superpotentiel. Dans un second temps, nous proposons les nouvelles solutions émergeant de notre analyse, basées sur des contraintes et des hypothèses similaires.

5.1.1 L'approche de Soni et Weldon

Durant les brèves présentations de la supersymétrie - non-renormalisable - et de la supergravité, deux fonctions fondamentales ont été essentielles : le potentiel de Kähler K et le superpotentiel W . Connaissant la forme analytique de K et W , nous pouvons calculer le potentiel scalaire (5.1) et s'assurer que celui-ci conduit à une physique à basse énergie lorsque la brisure de la supersymétrie est induite par la gravitation. De manière à classifier leur expression, Soni et Weldon [2] ont apporté des hypothèses et des contraintes, menant à une solution, que nous allons maintenant présenter.

La brisure spontanée de la supergravité se produit lorsque le secteur caché développe une valeur moyenne dans le vide. Ce dernier se découple du secteur observable, après lui avoir communiqué les conséquences de la brisure, au travers des interactions gravitationnelles. Le secteur caché est alors « gelé » aux échelles d'énergie de la masse de Planck m_p , tandis que le secteur observable acquiert une valeur moyenne dans le vide nulle ou de l'ordre d'une échelle d'énergie intermédiaire (électrofaible, brisure de la supersymétrie, grande unification [76]). La limite formelle $m_p \rightarrow \infty$ conduit à séparer ces deux secteurs.

Pour faire leur étude, Soni et Weldon ont introduit un champ adimensionné z^i , avec $i \in \{1, \dots, I\}$, pour le secteur caché, défini par

$$\zeta^i = m_p z^i, \quad (5.4)$$

où le champ z^i acquiert une valeur moyenne dans le vide de l'ordre de 1, $\langle z^i \rangle \sim \mathcal{O}(1)$. Cette hypothèse est accompagnée des suppositions sur les expressions fondamentales K et W

$$\begin{cases} K(Z, Z^\dagger) = \sum_{n=0}^N m_p^n K_n(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger), \\ W(Z) = \sum_{n=0}^M m_p^n W_n(z, \phi), \end{cases} \quad (5.5)$$

où ces dernières sont développées de manière polynomiale en la masse de Planck m_p . Le potentiel de Kähler et le superpotentiel ayant respectivement une dimension en masse de degré deux et trois, i.e. $[K] = M^2$ et $[W] = M^3$, les dimensions en masses des sous-fonctions K_n et W_n doivent alors compenser le développement polynomial en m_p , de manière à laisser invariant $[K]$ et $[W]$. Ces variations proviennent du secteur observable ϕ ou de la présence d'échelles d'énergie intermédiaires dans la définition de K_n et de W_n .

Enfin, une contrainte est apportée sur l'analyse. La limite formelle $m_p \rightarrow \infty$ découplant les deux secteurs, un couplage entre la masse de Planck m_p de puissances positives avec le secteur observable est formellement interdit. Dans le cas opposé, des puissances négatives en la masse de Planck mène à des termes négligeables par rapport à l'ordre m_p^0 .

À partir des hypothèses appliquées au secteur caché, du développement polynomial supposé des fonctions K et W et de la contrainte imposée, Soni et Weldon ont déduit la classification de la fonction K et W donnée par

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p^2 W_2(z) + m_p W_1(z) + W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.6)$$

où les différentes fonctions sont arbitraires par rapport aux deux secteurs. Dans leur analyse, Soni et Weldon

ont d'abord supposé un potentiel de Kähler canonique pour le généraliser à un cas non-canonique, i.e. une expression plus générale impliquant une variété kählerienne non-plate. Dans les deux situations, ils ont obtenu la même expression analytique pour le superpotentiel, en déclarant que la généralisation était évidente.

Une analyse complémentaire a été effectuée [1] et de nouvelles solutions ont été déterminées. Une brève présentation de ces solutions est proposée dans la prochaine sous-section ; leur obtention étant démontrée dans les prochaines sections.

5.1.2 Vers de nouvelles solutions

Pour notre étude, les contraintes et hypothèses proposées par Soni et Weldon ont été conservées. Nous voyons au cours de cette analyse, que les solutions obtenues à l'équation (5.6) satisfont, certes les conditions requises par Soni et Weldon, mais n'incluent pas toutes les expressions permises. De nouvelles solutions ont été obtenues, menant à une nouvelle phénoménologie à basse énergie.

Une présentation de nos résultats est donnée dans cette section. Deux cas sont à distinguer selon l'expression du potentiel de Kähler : le cas canonique et le cas non-canonique.

Une analyse complète du cas canonique est réalisée à la section 5.3, menant à une classification complète des deux fonctions fondamentales K et W . Le cas non-canonique est traité à la section 5.4. Dans ce dernier cas, une classification générale n'a pas pu être établie, mais de nouvelles solutions ont été déterminées suite à des hypothèses *ad-hoc*.

Le cas canonique

La première approche est liée au choix du potentiel de Kähler suivant ³

$$K(Z, Z^\dagger) = Z_{\mathcal{I}}^\dagger Z^{\mathcal{I}} = m_p^2 z_i^\dagger z^i + \phi_a^\dagger \phi^a, \quad (5.7)$$

avec $Z^{\mathcal{I}} = (\zeta^i, \phi^a)$ où $\mathcal{I} \in \{1, \dots, I + A\}$, et en utilisant le champ scalaire adimensionné (5.4). La forme du potentiel de Kähler conduit à une variété kählerienne dont la métrique, définie par (5.2), est plate

$$K^{\mathcal{I} \mathcal{J}} = \delta^{\mathcal{I} \mathcal{J}}, \quad (5.8)$$

et dont l'inverse est simplement donnée par

$$(K^{-1})^{\mathcal{I} \mathcal{J}} = \delta^{\mathcal{I} \mathcal{J}}. \quad (5.9)$$

Cette dernière étant une matrice diagonale, le calcul explicite du potentiel scalaire (5.1) résulte de la multiplication des dérivées covariantes entre secteur (sans mélange). Les dérivées covariantes sont calculées d'après la définition (5.3), à partir du potentiel de Kähler (5.7) et de la forme polynomial du superpotentiel (5.5). Nous en déduisons celle du secteur observable

$$\mathcal{D}_a W = \partial_a W + \frac{1}{m_p^2} W \partial_a K = \sum_{n=0}^M \left[m_p^n \partial_a W_n + m_p^{n-2} \phi_a^\dagger W_n \right], \quad (5.10)$$

et celle du secteur caché

$$\mathcal{D}_i W = \frac{1}{m_p} \partial_i W + \frac{1}{m_p^3} W \partial_i K = \sum_{n=0}^M m_p^{n-1} \left[\partial_i W_n + z_i^\dagger W_n \right] \equiv \sum_{n=0}^M m_p^{n-1} \mathcal{D}_i W_n, \quad (5.11)$$

où nous avons introduit la notation

$$\mathcal{D}_i W \equiv \frac{\partial W}{\partial z^i} + z_i^\dagger W, \quad (5.12)$$

3. De manière équivalente à l'introduction du potentiel de Kähler, effectuée au chapitre 2, nous prenons la notation $K(Z, Z^\dagger) = Z_{\mathcal{I}^*}^\dagger \delta^{\mathcal{I}^* \mathcal{I}} Z^{\mathcal{I}}$ pour distinguer les indices chiraux \mathcal{I} , des indices anti-chiraux \mathcal{I}^* . Par simplification, dans le cas canonique, nous définissons $Z_{\mathcal{I}}^\dagger = Z_{\mathcal{I}^*}^\dagger \delta^{\mathcal{I}^* \mathcal{I}}$. Une telle notation n'est pas possible dans le cas non-canonique puisque $Z_{\mathcal{I}^*}^\dagger K^{\mathcal{I}^* \mathcal{I}}$ n'est pas chirale.

pour alléger le calcul. Son conjugué hermitien est également défini

$$\mathcal{D}^i W \equiv \frac{\partial W}{\partial z_i^\dagger} + z^i W. \quad (5.13)$$

En utilisant alors les différentes expressions (5.10), (5.11), (5.9) et (5.5), le potentiel scalaire V_F (5.1) s'exprime de la manière suivante

$$\begin{aligned} V_F = \exp \left(\frac{Z_{\mathcal{I}}^\dagger Z^{\mathcal{I}}}{m_p^2} \right) \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^M \left\{ m_p^{m+n} \frac{\partial W_m}{\partial \phi^a} \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial \phi_a^\dagger} \right. \\ \left. + m_p^{m+n-2} \left(\mathcal{D}_i W_m \overline{\mathcal{D}^i W}_n + \phi^a \frac{\partial W_m}{\partial \phi^a} \overline{W}_n + \phi_a^\dagger W_m \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial \phi_a^\dagger} - 3 W_m \overline{W}_n \right) \right. \\ \left. + m_p^{m+n-4} \phi_a^\dagger \phi^a W_m \overline{W}_n \right\}, \quad (5.14) \end{aligned}$$

où nous avons réuni les termes par rapport à leur puissance en la masse de Planck m_p .

Cette écriture est particulièrement intéressante car elle met en évidence les termes considérés par Soni et Weldon dans leur analyse. En effet, ils se sont uniquement intéressés aux ordres m_p^{m+n-2} et m_p^{m+n-4} car un couplage avec ϕ et ϕ^\dagger , pour le premier, et $\phi\phi^\dagger$, pour le second, est directement présent.

L'expression du superpotentiel (5.6) est alors suffisante pour satisfaire la contrainte requise. Néanmoins, elle n'est pas nécessairement unique. L'application d'une dérivée par rapport à ϕ (ou ϕ^\dagger) permet de s'assurer si cette dernière est nulle (pour des puissances de Planck positives).

Une analyse, ordre par ordre, conduit à étudier une tour d'équation différentielle où chaque ordre, pour une masse de Planck de puissance positive, doit être indépendant du secteur observable.

Cette analyse a conduit à classifier les expressions du superpotentiel W propices à une physique compatible, avec une physique à basse énergie, lorsque le potentiel de Kähler est canonique (cette analyse est reconduite dans le cas non-canonique). Nous résumons dans un premier temps les solutions obtenues en fonction de la valeur de M .

- Si $M = 0$, nous obtenons une unique solution

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 z_i^\dagger z^i + \phi_a^\dagger \phi^a \\ W(Z) &= W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.15)$$

correspondant à celle de Soni et Weldon (5.6), avec $W_2(z) = 0$, $W_1(z) = 0$ et W_0 une fonction arbitraire par rapport aux deux secteurs.

- Si $M = 1$, l'étude du potentiel scalaire (5.14) donne la solution générale suivante

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 z_i^\dagger z^i + S_p^\dagger S^p + \tilde{\phi}_a^\dagger \tilde{\phi}^{\tilde{a}} \\ W(Z) &= m_p W_1(z, S) + W_0(z, S, \tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

où les deux fonctions qui composent le superpotentiel sont données dans le système (5.17). Cette solution résulte de la résolution d'une équation différentielle donnée par l'équation (5.86). Sa résolution a nécessité de différencier le secteur observable ϕ^a , avec $a \in \{1, \dots, A\}$, en deux sous-secteurs S^p , avec $p \in \{1, \dots, A_p\}$, et $\tilde{\phi}^{\tilde{a}}$, avec $\tilde{a} \in \{1, \dots, A_{\tilde{a}}\}$, et relié par $A = A_p + A_{\tilde{a}}$.

Le sous-secteur $\tilde{\phi}$ correspond au secteur observable traditionnel, i.e. le contenu en champ du modèle standard ou de ses extensions, alors que le sous-secteur S correspond à un nouveau secteur. Concernant le nouveau secteur S , il possède des propriétés similaires aux deux secteurs. Du secteur observable, il satisfait la condition de Soni et Weldon, où les couplages avec la masse de Planck m_p sont interdits à basse énergie, et résulte d'une

valeur moyenne dans le vide très inférieure à m_p . Du secteur caché, il possède un couplage explicite avec la masse de Planck, au travers de la fonction W_1 du superpotentiel (5.17). Ces deux propriétés conduisent, par conséquent, à une nouvelle phénoménologie à basse énergie. Ces conséquences sont particulièrement étudiées dans le prochain chapitre.

Les deux fonctions qui composent le superpotentiel W sont données - pour éviter des confusions avec les indices, les sommes présentes ont été retranscrites - par

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1(z, S) = W_{1,0}(z) + \sum_{\hat{p} \geq 1} \sum_{s \geq 1}^{n_{\hat{p}}} W_{1,\hat{p}}(z) \mu_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},s]}, \\ W_0(z, S, \tilde{\phi}) = \sum_{p \geq 1}^{A_p} W_{0,p}(z) S^p + \Xi(\dots, \mathcal{U}_{[\hat{p},s]}(z, S), \dots, \tilde{\phi}, z), \end{array} \right. \quad (5.17)$$

où les fonctions $W_{1,0}$, $W_{1,\hat{p}}$, $W_{0,p}$ et Ξ sont arbitraires. Les conditions d'holomorphic, imposées durant la résolution de l'équation différentielle (5.84), conduisent à dissocier l'ensemble des S en $\hat{p} \in \{1, \dots, \hat{P}\}$ sous-ensembles, reliés par la contrainte

$$A_p = \sum_{\hat{p} \geq 1}^{P} n_{\hat{p}}, \quad (5.18)$$

où $n_{\hat{p}}$ correspond au nombre d'éléments du sous-ensemble \hat{p} . La variable $\mathcal{U}_{[\hat{p},s]}$, du \hat{p} -ième sous-ensemble avec $s \in \{1, \dots, n_{\hat{p}}\}$, est définie par

$$\mathcal{U}_{[\hat{p},s]} = \xi_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},s]} - \zeta_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},1]}, \quad (5.19)$$

où les différentes fonctions holomorphes sont reliées par

$$\mu_{[\hat{p},s]} \xi_{[\hat{p},s]} = \mu_{[\hat{p},1]} \zeta_{[\hat{p},s]}, \quad (5.20)$$

et normalisées à $\xi_{[\hat{p},1]} = \zeta_{[\hat{p},1]}$. L'ensemble S est alors défini par

$$S = (S_{[1,1]}, \dots, S_{[1,n_1]}, S_{[2,1]}, \dots, S_{[\hat{P},n_{\hat{P}}]}). \quad (5.21)$$

La notation $X_{[\hat{p},s]}$ est utilisée pour référencer l'appartenance au \hat{p} -ième sous-ensemble dont l'élément est donné par s et permet d'éviter un mélange avec la convention indicelle d'Einstein, puisque la sommation est implicitement écrite dans l'expression analytique des fonctions W_1 et W_0 . Des détails complémentaires concernant ces différentes fonctions sont apportés au cours de l'analyse 5.3.2 ou dans l'annexe B de l'article [1].

Finalement, la solution de Soni et Weldon, donnée dans l'équation (5.6) et pour $W_2(z) = 0$, est une solution particulière de la solution (5.16) lorsque le secteur S disparaît. En effet, quand le secteur S n'est pas présent, le potentiel de Kähler et le superpotentiel sont donnés, d'après (5.17), par

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1(z, S) = W_{1,0}(z) \equiv W_1^{SW}(z), \\ W_0(z, S, \tilde{\phi}) = \Xi(z, \tilde{\phi}) \equiv W_0^{SW}(z, \phi), \end{array} \right. \quad (5.22)$$

avec $W_2^{SW}(z) = 0$ ⁴.

• Si $M = 2$, le développement polynomial de W défini dans l'équation (5.5) implique que l'unique solution est celle proposée par Soni et Weldon à l'équation (5.6)

$$\boxed{\begin{array}{l} K(Z, Z^\dagger) = m_p^2 z_i^\dagger z^i + \phi_a^\dagger \phi^a \\ W(Z) = m_p^2 W_2(z) + m_p W_1(z) + W_0(z, \phi) \end{array}} \quad (5.23)$$

avec W_2 , W_1 et W_0 des fonctions arbitraires.

4. Nous avons écrit W_1^{SW} pour signifier que les fonctions arbitraires correspondent à celles définies par Soni et Weldon.

- Si $M > 2$, l'étude du potentiel scalaire (5.14) conduit à une contradiction avec le critère imposé par Soni et Weldon, et supprime donc l'ordre maximal. Par conséquent, aucune solution n'est possible, ce qui limite le développement polynomial du superpotentiel à $M \leq 2$.

Dans le cas du potentiel de Kähler canonique, l'ensemble des expressions du superpotentiel (5.5) a été classifié. L'analyse du potentiel scalaire (5.14) a conduit à établir une solution générale (5.16) comprenant dans un cas limite la solution de Soni et Weldon.

Son expression est obtenue dans la section 5.3 et ses conséquences phénoménologiques à basse énergie sont discutées dans prochain chapitre.

Le cas non-canonique

Dans leur article [2], Soni et Weldon affirment que la généralisation des solutions obtenues dans le cas canonique du potentiel de Kähler est évidente lorsque ce dernier devient général. Nous allons découvrir par la suite, que cette affirmation reste vraie pour un choix particulier de la fonction K , même si elle n'est pas si évidente.

Par ailleurs, Soni et Weldon ont limité la dépendance du secteur observable à l'ordre m_p^0 du potentiel de Kähler. Comme nous le constatons au cours de l'analyse à la section 5.4, l'ordre maximal de dépendance du secteur observable, dans l'expression analytique de la fonction K , autre que m_p^0 , joue un rôle important sur l'expression finale du potentiel scalaire.

La supposition concernant le développement polynomial du potentiel de Kähler (5.5) rend l'analyse du potentiel scalaire (5.1) plus compliquée. L'inversion de la métrique de Kähler n'est pas évidente et la présence de l'exponentielle conduit à des divergences. Par conséquent, une limitation sur l'ordre maximal du potentiel de Kähler a été choisie avec $N = 2$. De plus, des hypothèses sur l'ordre maximal de dépendance, par rapport au secteur observable du potentiel de Kähler, ont été effectuées. Trois différentes analyses ont été réalisées en fonction des expressions du potentiel de Kähler suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 \quad K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ \mathcal{H}_1 \quad K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ \mathcal{H}_2 \quad K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \end{aligned}$$

Pour chacune de ces hypothèses, une étude similaire au cas canonique a été menée, en fonction de l'ordre du développement polynomial M du superpotentiel à la masse de Planck. À la différence du cas canonique, certaines contraintes n'ont pas pu être résolues, et uniquement des cas particuliers ont été obtenus. Par conséquent, une classification plus générale des deux fonctions fondamentales K et W est encore envisageable. Nous présentons ensuite les différentes solutions, qui ont été obtenues, en débutant par la première expression analytique du potentiel de Kähler.

► Le choix du potentiel de Kähler donné par \mathcal{H}_0 conduit à une généralisation de l'analyse du cas canonique pour une métrique kählerienne non-plate. Par conséquent, les solutions obtenues dans le cas canonique sont identiques pour ce choix de la fonction K . Néanmoins, des hypothèses ont été effectuées et d'autres solutions sont possibles.

- Si $M = 0$, l'unique solution est donnée par Soni et Weldon (5.16)

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= W_0(z, \phi) \end{aligned} \tag{5.24}$$

avec K_2 , K_1 , K_0 et W_0 des fonctions arbitraires.

- Si $M = 1$, la solution générale présentée dans le cas canonique se retrouve pour la fonction \mathcal{H}_0 .

Néanmoins, son expression analytique repose sur des expressions particulières concernant la fonction K_0 . Une solution plus générale est encore possible et nécessite la résolution des contraintes (5.132) et (5.134). Cette solution est donnée, où le secteur observable est de nouveau séparé en deux sous-secteurs $\phi^a \equiv (S^p, \tilde{\phi}^{\tilde{a}})$ avec $a \in \{1, \dots, A_p + A_{\tilde{a}}\}$, par

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, S, S^\dagger) + \tilde{K}_0(z, z^\dagger, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}^\dagger) \\ W(Z) &= m_p W_1(z, S) + W_0(z, S, \tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

où les fonctions W_1 et W_0 sont données au système (5.22). Concernant le potentiel de Kähler, les fonctions K_2 , K_1 et \tilde{K}_0 sont arbitraires, tandis que K_0 est donnée par

$$K_0(z, z^\dagger, S, S^\dagger) = k_{0,0}(z, z^\dagger) + k_{0,1}(z, z^\dagger, S) + [k_{0,1}(z, z^\dagger, S)]^\dagger + S_{p^*}^\dagger \delta^{p^*}_p S^p. \quad (5.26)$$

Cette solution repose sur une hypothèse concernant l'expression analytique de K_0 , donnée ci-dessus, de manière à obtenir la solution similaire au cas canonique pour la limite plate de la variété kählerienne, définie par

$$K_2(z, z^\dagger) = z_{i^*}^\dagger \delta^{i^*}_i z^i, \quad K_1(z, z^\dagger) = 0, \quad K_0(z, z^\dagger, S, S^\dagger) = S_{p^*}^\dagger \delta^{p^*}_p S^p \quad \text{et} \quad \tilde{K}_0(z, z^\dagger, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}^\dagger) = \tilde{\phi}_{\tilde{a}^*}^\dagger \delta^{\tilde{a}^*}_{\tilde{a}} \tilde{\phi}^{\tilde{a}}. \quad (5.27)$$

La solution proposée par Soni et Weldon (5.23), avec $W_2(z) = 0$, est finalement un cas particulier de la solution présentée ci-dessus, lorsque le secteur S disparaît.

Le choix de la fonction K_0 s'est fait de manière à obtenir une équation différentielle similaire au cas canonique, dont la résolution est connue. Par conséquent, cette solution est une solution particulière d'une solution plus générale, dont la résolution de l'équation différentielle correspondante reste à faire.

- Si $M = 2$, les contraintes, provenant du potentiel scalaire associé au choix \mathcal{K}_0 , n'ont pas été résolues. Des solutions restent alors possibles. Néanmoins, une solution évidente émerge : la solution de Soni et Weldon qui est donnée par

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p^2 W_2(z) + m_p W_1(z) + W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.28)$$

avec K_2 , K_1 , K_0 , W_2 , W_1 et W_0 des fonctions arbitraires.

- Si $M > 2$, des problèmes similaires aux ordres précédents ont été rencontrés. La résolution des contraintes obtenues est compliquée et de nouvelles solutions sont envisageables.

Le choix du potentiel de Kähler \mathcal{K}_0 généralise les solutions rencontrées dans la limite plate de la variété kählerienne. Néanmoins, d'autres solutions sont possibles et nécessitent la résolution de contraintes difficiles. À la différence de Soni et Weldon, où ils avaient uniquement supposé la dépendance du secteur observable à l'ordre m_p^0 du potentiel de Kähler, nous allons maintenant voir que l'ordre maximal de dépendance - m_p puis m_p^2 - influence l'écriture finale du potentiel scalaire (5.1), ce qui mène à de nouvelles solutions.

► En considérant maintenant le potentiel de Kähler \mathcal{K}_1 , une analyse similaire a été menée. De nouvelles solutions ont été déterminées mais des contraintes irrésolues laissent la possibilité d'en obtenir d'autres. Ces solutions sont classées en fonction de l'ordre maximal M en la masse de Planck supposé pour le superpotentiel (5.5).

- Si $M = 0$, aucune contrainte ne provient de l'expression du potentiel scalaire et une nouvelle solution est obtenue

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec K_2 , K_1 , K_0 et W_0 des fonctions arbitraires.

Cette solution a la particularité d'avoir pour ordre maximal m_p^{-1} dans l'écriture finale du potentiel scalaire. En effet, les solutions précédentes étaient d'ordre supérieur (au minimum en m_p^0), et ceux ayant une masse de Planck positive dépendaient uniquement du secteur caché. De manière à obtenir une valeur de la constante cosmologique⁵ petite, l'ordre m_p^{-1} apparaît naturellement pour cette solution et limite, par conséquent, au maximum un ajustement fin de la théorie. Un tel ordre maximal est intéressant lorsque la limite formelle est considérée.

- Si $M = 1$, l'étude du potentiel scalaire associé implique une seule contrainte, dont une solution est donnée par

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p W_1(z, \phi) + W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.30)$$

où les fonctions K_2 , K_0 et W_0 sont arbitraires, tandis que les deux autres sont données par

$$\begin{cases} K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) = k_{1,0}(z, z^\dagger) + k_{1,1}(z, z^\dagger, \phi) + [k_{1,1}(z, z^\dagger, \phi)]^\dagger + \frac{1}{2} \phi^a \phi_{a^*}^\dagger k_{1,a}{}^{a^*}(z, z^\dagger), \\ W_1(z, \phi) = W_{1,0}(z) + \phi^a W_{1,a}(z), \end{cases} \quad (5.31)$$

avec les différentes sous-fonctions, ci-dessus, arbitraires.

Cette nouvelle solution est une solution particulière et résulte d'un choix effectué sur les expressions analytiques des fonctions K_1 et W_1 . Une solution plus générale est encore envisageable et nécessite la résolution de la contrainte donnée dans l'équation (5.151).

- Si $M > 2$, la résolution des contraintes n'a pas pu être établie. De nouvelles solutions restent alors possibles.

L'augmentation de l'ordre maximal de dépendance du secteur observable, passage de l'ordre m_p^0 à m_p , dans l'expression analytique du potentiel de Kähler a offert plus de liberté concernant la résolution des contraintes. De nouvelles solutions ont été établies. Ces conséquences se retrouvent pour l'étude concernant la dernière écriture étudiée du potentiel de Kähler, celle donnée par \mathcal{K}_2 .

► En faisant le choix du potentiel de Kähler \mathcal{K}_2 , des conclusions similaires à l'analyse \mathcal{K}_1 sont déduites : de nouvelles solutions sont permises mais des contraintes irrésolues laissent entrevoir d'autres solutions.

- Si $M = 0$, aucune contrainte n'est déduite du potentiel scalaire. La combinaison entre les deux fonctions fondamentales est donnée par

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.32)$$

avec K_2 , K_1 , K_0 et W_0 des fonctions arbitraires.

De manière analogue à une remarque effectuée à l'ordre $M = 0$ pour le choix du potentiel de Kähler \mathcal{K}_1 , l'ordre maximal du potentiel scalaire est maintenant donné par m_p^{-2} , minimisant, par conséquent, l'ajustement fin de la théorie sur la valeur de la constante cosmologique Λ .

- Si $M = 1$, l'ordre maximal du potentiel scalaire est en m_p^0 et ne nécessite, par conséquent, aucune

5. L'estimation de la densité du vide est mesurée, selon la collaboration Planck [33], pour le modèle Λ CDM à $\Omega_\Lambda = 0,686 \pm 0,020$. Or, la petitesse de cette valeur est un problème majeur pour la physique moderne car cela nécessite un ajustement fin de la théorie (si un mécanisme naturel ne le permet pas). Des modèles proposent des mécanismes pour l'obtenir de manière naturelle, et notamment les modèles *no-scale* [72], présentés à la section 4.4.

contrainte. Les fonctions K et W sont données par

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p W_1(z, \phi) + W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec K_2 , K_1 , K_0 , W_1 et W_0 des fonctions arbitraires.

Pour cette solution, une relation particulière supprime de manière naturelle l'ordre m_p^0 . Le plus haut degré devient alors m_p^{-1} pour l'expression du potentiel scalaire. En effet, en définissant la fonction \mathcal{G}_1 de la manière suivante

$$\mathcal{G}_1 = K_2 + \ln \left| \frac{W_1}{m_p^2} \right|^2, \quad (5.34)$$

l'ordre m_p^0 satisfait la condition *no-scale*

$$\partial_{\mathcal{I}} \mathcal{G}_1 (\mathcal{G}_1^{-1})^{\mathcal{I}} \partial_{\mathcal{I}^*} \mathcal{G}_1 = 3, \quad (5.35)$$

et devient, de manière naturelle, identiquement nul. Le premier terme non-nul dans le potentiel scalaire est maintenant d'ordre m_p^{-1} .

• Si $M = 2$, le développement du potentiel scalaire conduit à deux ordres dangereux, m_p^2 et m_p , nécessitant la résolution de contraintes. Une solution particulière de ces deux contraintes est obtenue en supposant $K_1 = 0$ et $W_1 = 0$ - l'ordre m_p devient identiquement nul - et en définissant la relation suivante

$$\mathcal{G}_2 = K_2 + \ln \left| \frac{W_2}{m_p} \right|^2, \quad (5.36)$$

entre les deux fonctions K_2 et W_2 . L'ordre m_p^2 satisfait la condition *no-scale*

$$\partial_{\mathcal{I}} \mathcal{G}_2 (\mathcal{G}_2^{-1})^{\mathcal{I}} \partial_{\mathcal{I}^*} \mathcal{G}_2 = 3, \quad (5.37)$$

et devient identiquement nul. Finalement, une nouvelle solution est obtenue

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p^2 W_2(z, \phi) + W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.38)$$

avec les fonctions arbitraires W_0 , K_0 , W_2 et K_2 et les deux dernières sont reliées par l'équation (5.36). Cette nouvelle solution résulte d'un choix particulier pour satisfaire les contraintes provenant des ordres m_p^2 et m_p .

Quand le degré du polynôme du superpotentiel est égal à $M = 2$, une solution particulière a été établie. Cependant, une solution générale reste possible mais nécessite la résolution des deux contraintes provenant des ordres m_p^2 et m_p .

- Si $M > 2$, les contraintes obtenues n'ont pas été résolues et aucune nouvelle solution n'a été établie.

Après avoir fait une brève présentation des différentes solutions, nous allons, dans la suite de ce chapitre, démontrer la manière dont elles sont obtenues. La prochaine section 5.2 est alors consacrée à la démonstration d'une proposition fondamentale pour cette étude. Les corollaires découlant de cette proposition sont aussi brièvement présentés. Finalement, la section 5.3 conduit à la nouvelle solution (5.16), lorsque le potentiel de Kähler est canonique, tandis que la section 5.4 établit celles présentées ci-dessus, pour le cas non-canonique.

5.2 Prérequis

Dans le cas du potentiel de Kähler canonique, nous avons établi l'expression du potentiel scalaire (5.14) permettant une analyse, ordre par ordre, en fonction de la masse de Planck m_p . Cette analyse nécessite

d'établir au préalable quelques propriétés mathématiques, dont la démonstration, repose essentiellement sur des propriétés d'holomorphic du superpotentiel. La première est donnée par la proposition :

Proposition 1 Soit P , Q et R trois fonctions holomorphes arbitraires satisfaisant l'identité suivante

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q}{\partial z^i} + z_i^\dagger Q \right) \left(\frac{\partial P}{\partial z_i^\dagger} + z^i P \right) = \alpha Q P + Q R \quad (5.39)$$

avec n champs complexes indexés par i et α un nombre complexe arbitraire. Si P n'est pas identiquement nulle, alors

$$Q = 0, \quad \forall z^i,$$

exceptée pour le cas particulier $n = 1$, $\alpha = 1$ avec R non-nulle.

La démonstration de la proposition 1, et les corollaires correspondants, est, par conséquent, le sujet de la prochaine section.

5.2.1 Les prémices de la démonstration

Pour démontrer cette proposition, un raisonnement par l'absurde a été effectué : la fonction holomorphe Q est supposée différente de zéro pour, après analyse, obtenir une contradiction. À partir de cette hypothèse, il est désormais possible de diviser l'équation (5.39) par rapport aux fonctions Q et \bar{P} , pour obtenir l'équation suivante

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial z^i} + z_i^\dagger \right) \left(\frac{\partial \ln \bar{P}}{\partial z_i^\dagger} + z^i \right) = \alpha + \left(\frac{R}{Q} \right) \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right). \quad (5.40)$$

En appliquant de manière séparée les dérivées $\frac{\partial^2}{\partial z^j \partial z_k^\dagger}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^j \partial z^k}$ et $\frac{\partial^2}{\partial z_j^\dagger \partial z_k^\dagger}$ à l'équation (5.39), nous obtenons respectivement les égalités

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial z^j \partial z^i} \frac{\partial^2 \ln \bar{P}}{\partial z_i^\dagger \partial z_k^\dagger} + \delta_j^k = \frac{\partial}{\partial z^j} \left(\frac{R}{Q} \right) \frac{\partial}{\partial z_k^\dagger} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right), \quad (5.41)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 \ln Q}{\partial z^j \partial z^k \partial z^i} \left(\frac{\partial \ln \bar{P}}{\partial z_i^\dagger} + z^i \right) + 2 \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial z^j \partial z^k} = \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial z^k} \left(\frac{R}{Q} \right), \quad (5.42)$$

et

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 \ln \bar{P}}{\partial z_j^\dagger \partial z_k^\dagger \partial z_i^\dagger} \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial z^i} + z_i^\dagger \right) + 2 \frac{\partial^2 \ln \bar{P}}{\partial z_j^\dagger \partial z_k^\dagger} = \left(\frac{R}{Q} \right) \frac{\partial^2}{\partial z_j^\dagger \partial z_k^\dagger} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right). \quad (5.43)$$

Dans la suite de notre démonstration, nous simplifions l'analyse pour un seul champ complexe, noté z . Les éléments de généralisation sont donnés après chaque étape clé. Les étapes et les notations sont prises de manière à faciliter cette généralisation (voir les encadrés prévues à cet effet). Cette approche permet de mettre en évidence le cas particulier de la proposition, tandis que la démonstration générale se trouve en annexe de l'article [1].

5.2.2 Cas particulier et généralisation de la démonstration

Dans le cas d'un champ complexe, l'équation (5.40) se réécrit

$$\left(\frac{d \ln Q}{dz} + z^\dagger \right) \left(\frac{d \ln \bar{P}}{dz^\dagger} + z \right) = \alpha + \left(\frac{R}{Q} \right) \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right). \quad (5.44)$$

L'application de la dérivée $\frac{d^2}{dz dz^\dagger}$ à l'équation (5.44) conduit à l'analogie de l'équation (5.41) que nous retranscrivons de la manière suivante

$$\left(i \frac{d^2 \ln Q}{dz^2} \right) \left(i \frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right) = 1 - \frac{d}{dz} \left(\frac{R}{Q} \right) \frac{d}{dz^\dagger} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right). \quad (5.45)$$

De cette dernière équation, deux cas particuliers doivent être alors distingués

$$i) \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix} \frac{d}{dz^\dagger} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \neq 1 \quad \text{et} \quad ii) \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix} \frac{d}{dz^\dagger} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = 1. \quad (5.46)$$

Généralisation à n champs complexes : la difficulté dans la généralisation à plusieurs champs provient de la présence de la sommation pour le membre de gauche de l'équation (5.41). L'astuce est alors de retranscrire l'équation sous forme d'une équation matricielle. Ainsi, le membre de gauche correspond à un produit matriciel, défini à partir des matrices \mathbf{Q} et \mathbf{P}^* dont les éléments de matrice sont donnés par

$$\mathbf{Q}^{ij} \equiv i \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial z^i \partial z^j} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{ij}^* \equiv i \frac{\partial^2 \ln \bar{P}}{\partial z_i^\dagger \partial z_j^\dagger}.$$

L'application du déterminant à l'équation (5.41) - après avoir fait passer la matrice identité dans le membre de droite - conduit à l'égalité

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{QP}^*) &= \det \left(\mathbf{1} - \nabla_z (R/Q) \otimes [\nabla_z (Q/P)]^\dagger \right) \\ &= 1 - \text{Tr} \left(\nabla_z (R/Q) \otimes [\nabla_z (Q/P)]^\dagger \right), \end{aligned} \quad (\text{G.5.45})$$

menant à la généralisation des deux particuliers

$$\begin{aligned} i) \quad &\text{Tr} \left(\nabla_z (R/Q) \otimes [\nabla_z (Q/P)]^\dagger \right) \neq 1, \\ ii) \quad &\text{Tr} \left(\nabla_z (R/Q) \otimes [\nabla_z (Q/P)]^\dagger \right) = 1, \end{aligned} \quad (\text{G.5.46})$$

distingués par la valeur de la trace.

- Cas $i)$

Le premier cas est défini par l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix} \frac{d}{dz^\dagger} \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{P} \end{pmatrix} \neq 1. \quad (5.47)$$

Cette dernière assure que le terme de droite de l'équation (5.45) est différent de zéro, tout comme celui de gauche. L'équation (5.45) peut alors se réécrire

$$\left(i \frac{d^2 \ln Q}{dz^2} \right) = \left(i \frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right)^{-1} - \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix} \left[\frac{d}{dz^\dagger} \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{P} \end{pmatrix} \left(i \frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right)^{-1} \right] \quad (5.48)$$

où, sans perte de généralité, nous avons divisé par rapport à $\left(i \frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right)$. Nous utilisons les crochets pour différentier les fonctions holomorphes de celles anti-holomorphes. L'application de la dérivée par rapport à z à l'équation ci-dessus conduit à

$$\left(\frac{d^3 \ln Q}{dz^3} \right) = i \frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix} \left[\frac{d}{dz^\dagger} \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{P} \end{pmatrix} \left(\frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right)^{-1} \right], \quad (5.49)$$

puisque, par holomorphie, nous avons

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{d}{dz^\dagger} \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{P} \end{pmatrix} \left(\frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right)^{-1} \right] = 0. \quad (5.50)$$

En supposant que la dérivée seconde du rapport de R sur Q par rapport à z soit nulle, i.e. $\frac{d^2 R/Q}{dz^2} = 0$, l'équation (5.49) implique nécessairement la corrélation suivante

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{R}{Q} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3 \ln Q}{dz^3} = 0. \quad (5.51)$$

Cependant, lorsque les relations ci-dessus sont injectées dans l'équation (5.42), elles mènent à une contradiction avec la condition i)

$$\frac{d^3 \ln Q}{dz^3} \left(\frac{d \ln \bar{P}}{dz^\dagger} + z \right) + 2 \frac{d^2 \ln Q}{dz^2} = \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right) \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{R}{Q} \right) \Rightarrow \frac{d^2 \ln Q}{dz^2} = 0 \Rightarrow \text{!}, \quad (5.52)$$

puisque la dérivée seconde de $\ln Q$ est nécessairement non-nulle (le membre de gauche de l'équation (5.45) est nécessairement différent de zéro si la condition i) est satisfaite). Les deux termes holomorphes de l'équation (5.49) sont alors différents de zéro.

En appliquant maintenant à l'équation (5.49) une dérivée par rapport à z^\dagger , nous en déduisons

$$\frac{d}{dz^\dagger} \left(\frac{d^3 \ln Q}{dz^3} \right) = 0 = i \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{R}{Q} \right) \frac{d}{dz^\dagger} \left(\left[\frac{d}{dz^\dagger} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right) \left(\frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right)^{-1} \right] \right), \quad (5.53)$$

qui implique

$$\frac{d}{dz^\dagger} \left[\frac{d}{dz^\dagger} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right) \left(\frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right)^{-1} \right] = \frac{d}{dz} \left[\frac{d}{dz^\dagger} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right) \left(\frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right)^{-1} \right] = 0, \quad (5.54)$$

la deuxième égalité étant évidente par holomorphie. Par conséquent, le terme entre crochet est indépendant de z et de z^\dagger . En partant de cette conclusion, l'application d'une dérivée à l'équation (5.48) par rapport à z^\dagger conduit à déduire

$$\frac{d}{dz^\dagger} (5.48) \Rightarrow \frac{d}{dz^\dagger} \left(\left(\frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} \right)^{-1} \right) = 0. \quad (5.55)$$

L'inverse de $\frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}}$ ne dépend pas de z et z^\dagger . Ces conséquences sont injectées dans l'équation (5.54) et impliquent alors

$$\frac{d^2}{dz^{\dagger 2}} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^3 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 3}} = 0. \quad (5.56)$$

Généralisation à n champs complexes : la généralisation de l'inégalité i) est donnée par

$$\text{Tr} \left(\nabla_z (R/Q) \otimes [\nabla_z (Q/P)]^\dagger \right) \neq 1. \quad (\text{G.5.47})$$

Le raisonnement est identique à celui effectué à un champ. L'équation (G.5.45) conduit à $\det(\mathbf{QP}^*) \neq 0$ impliquant que les deux matrices sont inversibles. L'application d'une dérivée arbitraire par rapport à z^i donne

$$\frac{\partial^3 \ln Q}{\partial z^i \partial z^j \partial z^k} = i \frac{\partial^2 (R/Q)}{\partial z^i \partial z^j} \left[\frac{\partial (\bar{Q}/\bar{P})}{\partial z_\ell^\dagger} \left(\frac{\partial^2 \ln \bar{P}}{\partial z_\ell^\dagger \partial z_k^\dagger} \right)^{-1} \right] \quad \forall i, j, k, \ell = 1, \dots, n, \text{ et } \forall z^i, z^j, z^k, z^\ell, \quad (\text{G.5.49})$$

retranscrit sous forme de composantes. L'analyse découlant de cette équation est identique à celle effectuée après l'équation (5.49).

Les conclusions de l'équation (5.56) sont injectées dans l'équation (5.43)

$$\frac{d^3 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 3}} \left(\frac{d \ln Q}{dz} + z^\dagger \right) + 2 \frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} = \left(\frac{R}{Q} \right) \frac{d^2}{dz^{\dagger 2}} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} \right) \Rightarrow \frac{d^2 \ln \bar{P}}{dz^{\dagger 2}} = 0 \Rightarrow \text{!}, \quad (5.57)$$

et conduisent à une contradiction avec la condition i), puisque nous avons supposé que la dérivée seconde de $\ln P$ était différente de zéro.

Si la condition i) est respectée, l'analyse qui en découle mène à des contradictions avec les équations (5.41), (5.42) et (5.43). Par conséquent, la fonction holomorphe Q est nécessairement nulle.

- Cas ii)

Pour le deuxième cas, nous avons

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{R}{Q} \right) \frac{d}{dz^\dagger} \left(\frac{\overline{Q}}{\overline{P}} \right) = 1. \quad (5.58)$$

L'application de manière distincte d'une dérivée par rapport à z puis à z^\dagger à l'équation ci-dessus conduit à

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} (5.58) \Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{R}{Q} \right) \frac{d}{dz^\dagger} \left(\frac{\overline{Q}}{\overline{P}} \right) = 0 \\ \frac{d}{dz^\dagger} (5.58) \Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{R}{Q} \right) \frac{d^2}{dz^{\dagger 2}} \left(\frac{\overline{Q}}{\overline{P}} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dz} \left(\frac{R}{Q} \right) = a_1, \\ \frac{d}{dz^\dagger} \left(\frac{\overline{Q}}{\overline{P}} \right) = b_1, \end{cases} \quad (5.59)$$

où les termes $\frac{dR/Q}{dz}$ et $\frac{d\overline{Q}/\overline{P}}{dz^\dagger}$ sont égaux à des constantes complexes arbitraires, respectivement a_1 et b_1 , et reliés par la contrainte $a_1 b_1 = 1$. L'intégration, respectivement par rapport à z et à z^\dagger des deux équations, implique

$$\frac{R}{Q}[z] = a_0 + a_1 z \quad \text{et} \quad \frac{\overline{Q}}{\overline{P}}[z^\dagger] = b_0 + b_1 z^\dagger, \quad (5.60)$$

avec a_0 et b_0 des constantes d'intégration complexes.

D'après l'équation (5.45), la condition implique nécessairement

$$\frac{d^2 \ln Q}{dz^2} \frac{d^2 \ln \overline{P}}{dz^{\dagger 2}} = 0, \quad (5.61)$$

où au moins l'une des deux dérivées doit être nulle. Sans perte de généralité, nous supposons $\frac{d^2 \ln \overline{P}}{dz^{\dagger 2}} = 0$. À partir de ce dernier résultat, et en utilisant la définition de $\overline{Q}/\overline{P}$ faite à l'équation (5.60), nous en déduisons l'expression analytique de la deuxième et de la troisième dérivée de $\ln \overline{Q}$ par rapport à z^\dagger , données par

$$\frac{d^2}{dz^{\dagger 2}} \ln \left(\frac{\overline{Q}}{\overline{P}} \right) \Rightarrow \frac{d^2 \ln \overline{Q}}{dz^{\dagger 2}} = -\frac{b_1^2}{(b_0 + b_1 z^\dagger)^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^3}{dz^{\dagger 3}} \ln \left(\frac{\overline{Q}}{\overline{P}} \right) \Rightarrow \frac{d^3 \ln \overline{Q}}{dz^{\dagger 3}} = \frac{2b_1^3}{(b_0 + b_1 z^\dagger)^3}. \quad (5.62)$$

En injectant ces deux expressions dans l'équation (5.42), et d'après la définition (5.60), nous déterminons la première dérivée de $\ln \overline{P}$ par rapport à z^\dagger

$$\frac{d^3 \ln Q}{dz^3} \left(\frac{d \ln \overline{P}}{dz^\dagger} + z \right) + 2 \frac{d^2 \ln Q}{dz^2} = \left(\frac{\overline{Q}}{\overline{P}} \right) \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{R}{Q} \right) \Rightarrow \frac{d \ln \overline{P}}{dz^\dagger} = \frac{b_0^\dagger}{b_1^\dagger}. \quad (5.63)$$

De cette dernière relation, et en utilisant la relation entre Q et P donnée par (5.60), nous déduisons l'expression de $\frac{d \ln Q}{dz}$

$$\frac{d}{dz^\dagger} [\ln (5.60)] \Rightarrow \frac{d \ln Q}{dz} = \frac{b_1^\dagger}{b_1^\dagger z + b_0^\dagger} + \frac{b_0}{b_1}. \quad (5.64)$$

À partir de l'équation (5.44), où nous injectons les différentes relations (5.60), (5.63) et (5.64), nous obtenons l'égalité suivante

$$\left(\frac{b_1^\dagger}{b_1^\dagger z + b_0^\dagger} + \frac{b_0}{b_1} + z^\dagger \right) \left(\frac{b_0^\dagger}{b_1^\dagger} + z \right) = \alpha + (a_1 z + a_0) (b_1 z^\dagger + b_0), \quad (5.65)$$

qui conduit au système (après avoir regroupé en puissance de z et de z^\dagger) suivant

$$\begin{cases} 1 + \frac{b_0 b_0^\dagger}{b_1 b_1^\dagger} = \alpha + a_0 b_0, \\ a_1 b_1 = 1, \\ \frac{b_0^\dagger}{b_1^\dagger} = b_1 a_0, \end{cases} \quad (5.66)$$

où l'unique solution est donnée par $a_1 = (b_1)^{-1}$, $a_0 = b_0^\dagger |b_1|^{-2}$ et $\alpha = 1$.

Si la condition *ii*) est satisfaite, la fonction holomorphe Q est différente de zéro si, et seulement si, les constantes d'intégration provenant des fonctions R/Q et Q/P et la constante complexe α sont données par les conditions ci-dessus pour un seul champ z .

Généralisation à n champs complexes : la généralisation à plusieurs champs de l'équation (5.58) est donnée par

$$\text{Tr} \left(\nabla_z (R/Q) \otimes [\nabla_z (Q/P)]^\dagger \right) = 1. \quad (\text{G.5.58})$$

La résolution de l'égalité précédente est moins évidente que celle effectuée à un champ et nécessite le lemme suivant

Lemme 1 *Soit Q et P deux fonctions holomorphes arbitraires non-nulles dépendant de n champs complexes z^i et reliées par l'équation (5.39), alors*

$$\frac{\partial}{\partial z^j} \left(\frac{Q}{P} \right) \neq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Preuve Pour la démonstration du lemme 1, nous allons faire un raisonnement par l'absurde en supposant un z^k particulier pour lequel nous avons

$$\frac{\partial}{\partial z^k} \left(\frac{Q}{P} \right) = 0.$$

L'intégration de l'équation ci-dessus conduit à exprimer la fonction Q à partir de la fonction P

$$Q(z^1, \dots, z^k, \dots, z^n) = f(z^1, \dots, z^{k-1}, z^{k+1}, \dots, z^n) P(z^1, \dots, z^k, \dots, z^n),$$

où une fonction arbitraire f non-nulle et indépendante de z^k a été introduite. En injectant cette dernière expression dans l'équation (5.41), et en prenant le cas particulier $k = j$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ln P}{\partial z^j \partial z^i} \frac{\partial^2 \ln \overline{P}}{\partial z_i^\dagger \partial z_j^\dagger} + 1 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial^2 \ln P}{\partial z^j \partial z^i} \right|^2 + 1 = 0,$$

dont la seconde égalité ne peut pas être satisfaite, quelle que soit la valeur de la fonction P . ■

L'utilisation du lemme 1 assure, pour satisfaire l'égalité (G.5.58), qu'il existe au moins un champ de référence - dénoté z^1 - satisfaisant $\frac{\partial}{\partial z^1} (R/Q) \neq 0$ et permettant ainsi d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial z_1^\dagger} \left(\frac{\overline{Q}}{\overline{P}} \right) = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z^1} (R/Q)} - \frac{\sum_{i>1}^n \frac{\partial}{\partial z^i} \left(\frac{R}{Q} \right) \frac{\partial}{\partial z_i^\dagger} \left(\frac{\overline{Q}}{\overline{P}} \right)}{\frac{\partial}{\partial z^1} (R/Q)}.$$

Généralisation à n champs complexes : (suite) la résolution de cette équation différentielle, qui est effectuée en annexe [B.1-B.2][77], conduit à l'expression de Q/P

$$\frac{Q}{P} = \frac{z_1^\dagger}{\partial_{z^1} \left(\frac{R}{Q} \right)} + \mathcal{H} \left[\xi_1 z_2^\dagger - \xi_2 z_1^\dagger, \dots, \xi_1 z_j^\dagger - \xi_j z_1^\dagger, \dots, \xi_1 z_n^\dagger - \xi_n z_1^\dagger; z \right], \quad (\text{G.5.60})$$

où \mathcal{H} est une fonction arbitraire satisfaisant

$$\xi_j \frac{\partial}{\partial z^1} \left(\frac{R}{Q} \right) = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z^j} \left(\frac{R}{Q} \right).$$

De manière analogue, l'équation (5.39) de la proposition 1 peut être intégrée - une équation différentielle similaire (B.4) est calculée en annexe (B.5) [77] -

$$\begin{aligned} \ln P &= \int_{(z_1^\dagger)_{\text{in}}}^{z_1^\dagger} \frac{d\tau^\dagger}{\tau^\dagger + \partial_{z^1} \ln Q} \left\{ \alpha + \frac{R}{Q} [z] \frac{Q}{P} [\tau^\dagger, \dots, u_i, \dots, u_n] \right\} - (z_1^\dagger - (z_1^\dagger)_{\text{in}}) \sum_{i \geq 1}^n r_i z^i \\ &+ C[r_2, \dots, r_i(\tau^\dagger), \dots, r_n(\tau^\dagger); z], \end{aligned}$$

où nous avons défini

$$u_i(\tau^\dagger) \equiv (\tau^\dagger + \partial_{z^1} \ln Q) r_i - \partial_{z^i} \ln Q \quad \text{et} \quad r_i \equiv \frac{\partial_{z^i} \ln Q + z_i^\dagger}{\partial_{z^1} \ln Q + z_1^\dagger},$$

avec C une fonction arbitraire et $(z_1^\dagger)_{\text{in}}$ une condition initiale arbitraire liée à l'intégration par rapport à z^1 . Le calcul des expressions analytiques des termes Q/P et $\ln P$ est basé sur la résolution des équations différentielles, données en annexe B. Ces dernières sont de nouveau utilisées dans la section 5.3.

Finalement, des conditions d'holomorphicité sont imposées sur les expressions de $\overline{Q/P}$ et $\ln \overline{P}$, menant à une contradiction (mise à part lorsque la limite à un champ est prise). Par conséquent, pour la suite de la démonstration, nous référons à l'annexe A de l'article [1].

Le résultat précédent termine la démonstration à un champ de la proposition 1, où la fonction holomorphe Q est égale à zéro, mis à part pour le cas particulier à un champ, avec $\alpha = 1$. Différentes étapes concernant la généralisation à plusieurs champs ont été renseignées au cours de cette démonstration. Les conclusions établies au cours de notre démonstration restent identiques. Nous renvoyons à l'annexe A de l'article [1] pour plus de détails.

5.2.3 Cas particulier et généralisation de la proposition

De la proposition 1, deux corollaires utilisés par la suite sont établis.

Corollaire 1 Soit P et R deux fonctions holomorphes arbitraires satisfaisant l'identité suivante

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z^i} + z_i^\dagger P \right|^2 = \alpha |P|^2 + \overline{P} R, \quad (5.67)$$

avec i indexant les n champs complexes et α un nombre complexe arbitraire. Alors, l'unique solution est

$$P = 0, \quad \forall z^i. \quad (5.68)$$

Preuve L'équation (5.67) est un cas particulier de la proposition 1 avec $Q = P$. Il s'ensuit alors que $P = 0$. En effet, dans le cas contraire, le lemme 1 ne peut pas être établi si nous supposons $Q = P$ (c'est un cas particulier du lemme 1 avec $f(z^1, \dots, z^{k-1}, z^{k+1}, \dots, z^n) = 1$).

Corollaire 2 Soit P_p , Q_{rq} et R_{rpq} trois ensembles de fonctions holomorphes arbitraires multivariées, satisfaisant l'identité fonctionnelle suivante

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_{rq}}{\partial z^i} + z_i^\dagger Q_{rq} \right) \left(\frac{\partial P_p}{\partial z_i^\dagger} + z^i P_p \right) = \alpha Q_{rq} P_p + \sum_{t=1}^k Q_{rt} R_{tpq}, \quad (5.69)$$

avec i indexant les n champs complexes, $r, p, q, t = 1, \dots, k$ et α un nombre arbitraire complexe. Si P_p n'est pas identiquement nul pour au moins une valeur de p , alors

$$Q_{rq} = 0, \quad \forall z^i, r, q, \quad (5.70)$$

mis à part pour le cas particulier $n = 1$, $\alpha = 1$ avec R non-nul.

Preuve C'est une généralisation de la proposition 1. La démonstration est équivalente à celle de la proposition avec une difficulté supplémentaire provenant de la sommation pour le membre de droite. Nous avons à traiter des équations matricielles composées de matrices qui ne sont pas carrées. Nous renvoyons alors à l'annexe A de l'article [1] pour la démonstration.

La proposition 1 et les corollaires 1 et 2 ont été démontrés dans cette section. Ces derniers sont utilisés lors de notre étude du potentiel scalaire (5.14), menant à la classification du superpotentiel et du potentiel de Kähler canonique.

5.3 Le cas canonique du potentiel de Kähler

Dans les précédentes sections, nous avons premièrement présenté l'approche de Soni et Weldon, où ces derniers ont supposé un développement polynomial des deux fonctions fondamentales K et W . Alors que l'analyse concernant un potentiel de Kähler général est effectuée dans la section 5.4, l'hypothèse canonique de la fonction K a mené à écrire le potentiel scalaire (5.14) de manière polynomiale, en fonction du degré du polynôme de W .

Cette section est consacrée à l'analyse, ordre par ordre, du potentiel scalaire de manière à satisfaire la contrainte de Soni et Weldon, i.e. empêcher tout couplage entre la masse de Planck et le secteur observable. Les différentes propriétés établies dans la section 5.2 sont par ailleurs utilisées.

5.3.1 Reformulation du potentiel scalaire

L'écriture polynomiale du potentiel scalaire (5.14) résultait de l'hypothèse polynomiale en la masse de Planck m_p concernant l'expression du superpotentiel W , avec M son degré. Ce dernier est donné par trois types de termes : m_p^{m+n} , m_p^{m+n-2} et m_p^{m+n-4} . Une redéfinition de l'indice m

$$m \rightarrow c - n + s, \quad (5.71)$$

permet une réécriture du potentiel scalaire de la manière suivante

$$V_F = \exp \left(\frac{Z_{\mathcal{I}}^\dagger Z^{\mathcal{I}}}{m_p^2} \right) \sum_{c=0}^{2M} m_p^c V_{M,c}[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger] + \mathcal{O}(m_p^{-1}), \quad (5.72)$$

où nous avons défini

$$\begin{aligned} V_{M,c}[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger] = & \sum_{n_-^{(0)} \leq n \leq n_+^{(0)}} \frac{\partial W_n}{\partial \phi^a} \frac{\partial \overline{W}_{c-n}}{\partial \phi_a^\dagger} + \\ & \sum_{n_-^{(2)} \leq n \leq n_+^{(2)}} \left[\mathcal{D}_i W_n \overline{\mathcal{D}}^i \overline{W}_{c-n+2} + \phi^a \frac{\partial W_n}{\partial \phi^a} \overline{W}_{c-n+2} + \phi_a^\dagger \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial \phi_a^\dagger} \overline{W}_{c-n+2} - 3W_n \overline{W}_{c-n+2} \right] + \\ & \sum_{n_-^{(4)} \leq n \leq n_+^{(4)}} W_n \overline{W}_{c-n+4} \phi_a^\dagger \phi^a, \end{aligned} \quad (5.73)$$

avec

$$n_-^{(s)} = \max[0, c - M + s] \quad \text{et} \quad n_+^{(s)} = \min[M, c + s]. \quad (5.74)$$

L'indice s caractérise les trois types de termes présents dans l'équation (5.14) avec $s \in \{0, 2, 4\}$. Nous appellerons s -somme, la somme correspondant à la valeur de l'indice s . La contrainte sur les bornes des s -sommés $n_-^{(s)} \leq n_+^{(s)}$ conduit à l'inégalité suivante

$$c \leq 2M - s. \quad (5.75)$$

Par conséquent, une s -somme contribue à l'ordre m_p^c si, et seulement si, l'inégalité (5.75) est satisfaite. Ainsi, l'écriture du potentiel scalaire (5.72) conduit à une analyse, ordre par ordre, en fonction de l'indice c . Dans un souci de satisfaire la condition de Soni et Weldon, nous imposons que $V_{M,c}[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger]$, pour $c > 0$, ne dépende pas du secteur observable. Cette contrainte se résume ainsi par

$$\frac{\partial}{\partial \phi^a} V_{M,c}[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger] = \frac{\partial}{\partial \phi_a^\dagger} V_{M,c}[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger] = 0, \quad \forall \phi^a, a \in \{1, \dots, A\}, c \geq 1 \text{ et } M \geq 0, \quad (5.76)$$

que nous écrivons de manière simplifiée

$$V_{M,c}[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger] \sim_\phi 0 \quad \forall \phi^a, a \in \{1, \dots, A\}, M \geq 0 \text{ et } c \geq 1, \quad (5.77)$$

au travers de la notation $E \sim_\phi 0$, pour signifier que la grandeur E est indépendante de ϕ et ϕ^\dagger .

5.3.2 Analyse des différents ordres

Pour effectuer cette analyse, qui est basée sur le degré du superpotentiel en m_p , nous commençons par l'ordre maximal du potentiel scalaire et vérifions si la condition (5.76) est satisfaite pour passer à l'ordre suivant. Dans le cas contraire, nous obtenons une contradiction limitant l'ordre du superpotentiel, et par conséquent, son expression analytique. Ainsi, nous diminuons progressivement les ordres c menant à de nouvelles solutions.

En commençant par l'ordre le plus bas, $M = 0$, l'écriture (5.72) n'implique aucune contrainte. Nous obtenons la solution de Soni et Weldon (5.15)

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 z_i^\dagger z^i + \phi_a^\dagger \phi^a \\ W(Z) &= W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.78)$$

avec $W_0(z, \phi)$ une fonction arbitraire. Pour la suite, nous supposons $M > 0$.

- $c = 2M$:

Les contributions à cet ordre proviennent uniquement de la 0-somme, dont l'expression est donnée par

$$\sum_a \left| \frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \right|^2 \sim_\phi 0. \quad (5.79)$$

La sommation s'applique uniquement sur des termes positifs, indépendamment de la valeur de l'indice a . Nous en déduisons alors la contrainte

$$\left| \frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \right|^2 \sim_\phi 0, \quad \forall \phi^a, a \in \{1, \dots, A\}. \quad (5.80)$$

La résolution de cette équation donne - la convention d'Einstein sur l'indice a étant supposée -

$$W_M(z, \phi) = W_{M,0}(z) + \phi^a W_{M,a}(z), \quad (5.81)$$

avec $W_{M,0}$ et $W_{M,a}$ des fonctions holomorphes arbitraires.

- $c = 2M - 1$:

De manière analogue, la contribution pour le second ordre provient uniquement de la 0-somme et implique d'après l'équation (5.73)

$$\frac{\partial \overline{W}_M}{\partial \phi_a^\dagger} \frac{\partial W_{M-1}}{\partial \phi^a} + \frac{\partial \overline{W}_{M-1}}{\partial \phi_a^\dagger} \frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \sim_\phi 0. \quad (5.82)$$

En injectant l'expression de W_M , définie à l'équation (5.81), nous en déduisons l'équation suivante

$$\overline{W}_M^a \frac{\partial W_{M-1}}{\partial \phi^a} + \text{h.c.} \sim_\phi 0, \quad (5.83)$$

que nous réécrivons de la manière suivante, en utilisant des propriétés d'holomorphic,

$$\overline{W}_M^a \frac{\partial W_{M-1}}{\partial \phi^a} = f(z, z^\dagger), \quad (5.84)$$

avec f une fonction arbitraire.

Une équation différentielle similaire a été précédemment rencontrée, pour l'équation (G.5.60), et dont la résolution a conduit à obtenir une expression analytique pour le rapport de \overline{Q} sur \overline{P} . Sa résolution était basée sur un champ de référence z^1 , accompagnée de la condition $\frac{\partial R/Q}{\partial z^1} \neq 0$. De manière analogue, et sans perte de généralité, nous faisons l'hypothèse que le secteur observable ϕ^a avec $a \in \{1, \dots, A\}$ se sépare en deux sous-ensembles distincts. Nous noterons le premier ensemble S^p avec $p \in \{1, \dots, A_p\}$ satisfaisant la condition $W_{M,p} \neq 0$. Le second ensemble est noté $\tilde{\phi}^{\tilde{a}}$, avec $\tilde{a} \in \{1, \dots, A_{\tilde{a}}\}$, satisfaisant la condition $W_{M,\tilde{a}} = 0$. Autrement dit, nous avons séparé le secteur observable en deux sous-secteurs observables $\phi^a \equiv (S^p, \tilde{\phi}^{\tilde{a}})$ avec $a \in \{1, \dots, A_p + A_{\tilde{a}}\}$.

À partir de ces hypothèses, l'expression analytique de W_M , d'après (5.81), s'écrit maintenant - convention d'Einstein -

$$W_M(z, S, \tilde{\phi}) = W_{M,0}(z) + S^p W_{M,p}(z), \quad (5.85)$$

tandis que l'équation différentielle de l'équation (5.84) devient

$$\overline{W}_M^p \frac{\partial W_{M-1}}{\partial S^p} = f(z, z^\dagger). \quad (5.86)$$

La condition $W_{M,p} \neq 0$ permet, d'après l'annexe B, de résoudre l'équation différentielle ci-dessus, en prenant S^1 comme champ de référence. Néanmoins, des conditions d'holomorphic doivent être imposées sur la solution générale. Pour une étude approfondie et détaillée de ces conditions, nous référons à l'annexe B de l'article [1].

La résolution de l'équation (5.86) conduit aux écritures des fonctions W_M et W_{M-1} suivantes

$$W_M(z, S, \tilde{\phi}) = W_{M,0}(z) + \sum_{\hat{p} \geq 1} \sum_{s \geq 1}^{n_{\hat{p}}} W_{M,\hat{p}}(z) \mu_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},s]}, \quad (5.87)$$

$$W_{M-1}(z, S, \tilde{\phi}) = \sum_{p \geq 1}^{A_p} W_{M-1,p}(z) S^p + \Xi(\dots, \mathcal{U}_{[\hat{p},s]}(z, S), \dots; \tilde{\phi}; z), \quad (5.88)$$

avec $W_{M-1,p}$, $W_{M,0}$, $W_{M,\hat{p}}$ et Ξ des fonctions arbitraires, où la variable $\mathcal{U}_{[\hat{p},s]}(z, S)$ est définie pour le \hat{p} -ième sous-secteur

$$\mathcal{U}_{[\hat{p},s]}(z, S) = \xi_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},s]} - \zeta_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},1]}, \quad (5.89)$$

à partir des fonctions arbitraires holomorphes

$$\mu_{[\hat{p},s]} \xi_{[\hat{p},s]} = \mu_{[\hat{p},1]} \zeta_{[\hat{p},s]}, \quad (5.90)$$

normalisées à $\xi_{[\hat{p},1]} = \zeta_{[\hat{p},1]}$.

Les conditions d'holomorphic sur la fonction Ξ ont conduit à dissocier l'ensemble S^p en $\hat{p} \in \{1, \dots, \hat{P}\}$ sous-ensembles, avec $n_{\hat{p}}$ le nombre de champs S composant le sous-ensemble \hat{p} . Nous avons alors la relation

$$A_p = \sum_{\hat{p} \geq 1}^{P} n_{\hat{p}}, \quad (5.91)$$

entre les bornes de ces ensembles. L'indice s est lui introduit pour différencier les champs $S^{[\hat{p}, s]}$ composant le sous ensemble \hat{p} avec $s \in \{1, \dots, n_{\hat{p}}\}$.

Des conditions d'holomorphic sur la fonction Ξ ont conduit à dissocier le nouveau secteur S^p en plusieurs sous-secteurs, différenciés par l'indice $\hat{p} \in \{1, \dots, \hat{P}\}$. Les éléments d'un sous-ensemble \hat{p} sont distingués à partir de l'indice $s \in \{1, \dots, n_{\hat{p}}\}$. L'ensemble S s'exprime alors, d'après la notation $S^{[\hat{p}, s]}$,

$$S = (S_{[\hat{1}, 1]}, \dots, S_{[\hat{1}, n_{\hat{1}}]}, S_{[\hat{2}, 1]}, \dots, S_{[\hat{P}, n_{\hat{P}}]}). \quad (5.92)$$

Les champs S sont par conséquent distingués en fonction du sous-secteur \hat{p} et de l'élément s de ce sous-secteur. Une dernière précision est apportée sur le premier terme de $W_{M-1}(z, S, \tilde{\phi})$ car, sans perte de généralité, nous pouvons simplifier la notation

$$\sum_{p \geq 1}^{A_p} W_{M-1, p}(z) S^p \equiv \sum_{\hat{p} \geq 1}^{P} \sum_{s \geq 1}^{n_{\hat{p}}} W_{M-1, [\hat{p}, s]}(z) S^{[\hat{p}, s]}. \quad (5.93)$$

En limitant l'ordre polynomial à $M = 1$, nous en déduisons alors une nouvelle solution

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 z_i^\dagger z^i + S_p^\dagger S^p + \tilde{\phi}_a^\dagger \tilde{\phi}^{\tilde{a}} \\ W(Z) &= m_p W_1(z, S, \tilde{\phi}) + W_0(z, S, \tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (5.94)$$

où les fonctions $W_1(z, S, \tilde{\phi})$ et $W_0(z, S, \tilde{\phi})$ sont respectivement données par les équations (5.87) et (5.88) avec $M = 1$.

L'analyse précédente a été réalisée en supposant l'existence d'un nouveau secteur S , défini par la contrainte $W_{M, p} \neq 0, \forall p \in \{1, \dots, A_p\}$, provenant de l'équation différentielle (5.86). Mais dans le cas contraire, i.e. $W_{M, p} = 0, \forall p \in \{1, \dots, A_p\}$, l'équation (5.85) devient simplement

$$W_M(z, S, \tilde{\phi}) = W_{M, 0}(z), \quad (5.95)$$

et les contraintes (5.79) et (5.82) sont trivialement satisfaites. Ainsi, lorsque le secteur S disparaît, nous obtenons la solution de Soni et Weldon pour $M = 1$ et avec $W_2(z) = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 z_i^\dagger z^i + \tilde{\phi}_a^\dagger \tilde{\phi}^{\tilde{a}} \\ W(Z) &= m_p W_1(z) + W_0(z, \tilde{\phi}) \end{aligned}} \quad (5.96)$$

où les fonctions W_1 et $W_0(z, \tilde{\phi})$ sont arbitraires.

L'étude des ordres $c = 2M$ et $c = 2M - 1$ a conduit à retrouver et à confirmer la solution de Soni et Weldon. Néanmoins, une nouvelle solution plus générale a été aussi établie. Cette dernière s'appuie sur l'introduction d'un nouveau secteur S qui partage des propriétés du secteur observable usuel et du secteur caché. Du secteur observable, sa valeur moyenne dans le vide est nécessairement très inférieure à l'échelle de la masse de Planck. Du secteur caché, il possède un couplage direct avec m_p dans l'expression analytique du superpotentiel au travers de la fonction W_1 . Ces conséquences sont étudiées à la section 6.2 du chapitre 6.

Nous supposons maintenant $M \geq 2$. La contrainte suivante est obtenue par

- $c = 2M - 2$:

Les contributions du potentiel scalaire (5.73) proviennent de la 0-somme et de la 2-somme et conduisent à la contrainte

$$\left\{ \frac{\partial W_{M-2}}{\partial \phi^a} \frac{\partial \overline{W}_M}{\partial \phi_a^\dagger} + \text{h.c.} \right\} + \frac{\partial W_{M-1}}{\partial \phi^a} \frac{\partial \overline{W}_{M-1}}{\partial \phi_a^\dagger} + \mathcal{D}_i W_M \overline{\mathcal{D}}^i \overline{W}_M + \left\{ \phi^a \frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \overline{W}_M + \text{h.c.} \right\} - 3W_M \overline{W}_M \sim_\phi 0. \quad (5.97)$$

Le second terme de cette équation attire particulièrement notre attention. En effet, d'après les expressions de W_M et de W_{M-1} , données dans les équations (5.87) et (5.88), il est possible de contraindre la fonction arbitraire Ξ . En utilisant plusieurs dérivées successives par rapport aux champs observables S et $\tilde{\phi}$, nous en déduisons

$$\left| \frac{\partial^2 \Xi}{\partial S^p \partial \tilde{\phi}^{\tilde{a}}} \right|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^3 \Xi}{\partial S^p \partial S^q \partial S^r} \right|^2 = 0, \quad (5.98)$$

qui mènent à l'expression de la fonction Ξ ⁶ - avec une sommation sur les indices -

$$\Xi = W_{M-1,0}(z) + \tilde{\phi}^{\tilde{a}} \widetilde{W}_{M-1,\tilde{a}}(z) + S^p W_{M-1,p}^{(S)}(z) + \frac{1}{2} S^p S^q W_{M-1,pq}(z). \quad (5.99)$$

Nous réinjectons la définition ci-dessus dans l'expression analytique du superpotentiel W_{M-1} donnée dans l'équation (5.88)

$$W_{M-1}(z, S, \tilde{\phi}) = W_{M-1,0}(z) + S^p \mathcal{W}_{M-1,p}(z) + \tilde{\phi}^{\tilde{a}} \widetilde{W}_{M-1,\tilde{a}}(z) + \frac{1}{2} S^p S^q W_{M-1,pq}(z), \quad (5.100)$$

où nous avons introduit

$$\mathcal{W}_{M-1,p}(z) = W_{M-1,p}(z) + W_{M-1,p}^{(S)}(z), \quad (5.101)$$

pour alléger la notation. Finalement, en injectant l'expression analytique des superpotentiels (5.87) et (5.100) dans la contrainte (5.97), cette dernière se réécrit de la manière suivante (avec une sommation sur les indices)

$$A_p{}^q(z, z^\dagger) S^p S_q^\dagger + \left[B_q(z, z^\dagger) S^q + \overline{W}_M{}^p \frac{\partial}{\partial S^p} W_{M-2}(z, S, \tilde{\phi}) + \text{h.c.} \right] \sim_\phi 0, \quad (5.102)$$

où nous avons introduit les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} A_p{}^q(z, z^\dagger) &= \sum_r W_{M-1,pr} \overline{W}_{M-1}{}^{r^q} + \mathcal{D}_i W_{M,p} \overline{\mathcal{D}}^i \overline{W}_M{}^q - W_{M,p} \overline{W}_M{}^q, \\ B_q(z, z^\dagger) &= \sum_r W_{M-1,qr} \overline{W}_{M-1}{}^r + \mathcal{D}_i W_{M,q} \overline{\mathcal{D}}^i \overline{W}_M{}^0 - 2W_{M,q} \overline{W}_M{}^0. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Une application successive des dérivées par rapport à S et à S^\dagger à l'équation (5.102) conduit nécessairement à imposer

$$A_p{}^q(z, z^\dagger) = 0, \quad \forall p, q \in \{1, \dots, A_p\}. \quad (5.104)$$

Cette dernière condition conduit à une équation différentielle pour W_{M-2} - avec une sommation sur les indices - d'après l'équation (5.102)

$$B_q(z, z^\dagger) S^q + \overline{W}_M{}^p \frac{\partial}{\partial S^p} W_{M-2}(z, S, \tilde{\phi}) = g(z, z^\dagger), \quad (5.105)$$

où g est une fonction quelconque de z et de z^\dagger . Sa résolution est effectuée en annexe B de l'article [1] et conduit à l'expression

$$W_{M-2}(z, S, \tilde{\phi}) = \left(\frac{g(z, z^\dagger)}{W_M{}^1} - \sum_{q \geq 2} B_q(z, z^\dagger) S^q \right) S^1 + \left(\sum_{\xi_1 \geq 2}^{\xi_q} B_q(z, z^\dagger) - B_1(z, z^\dagger) \right) \frac{(S^1)^2}{2} \quad (5.106)$$

6. Même si l'expression analytique semble linéaire ou quadratique par rapport au secteur observable, la fonction Ξ doit tout de même satisfaire l'équation différentielle (5.86).

$$+ \Gamma(\dots, \mathcal{U}_{[p]}(z, z^\dagger, S), \dots; \tilde{\phi}; z),$$

avec Γ une fonction holomorphe arbitraire et $\mathcal{U}_{[p]}$ donnée par

$$\mathcal{U}_{[p]}(z, z^\dagger, S) = \xi_{[p,1]}(z)S^p - \zeta_{[p,1]}(z, z^\dagger)S^1. \quad (5.107)$$

Une remarque est apportée quant à l'expression générale de W_{M-2} : elle dépend de z et de z^\dagger . Des contraintes d'holomorphicité doivent être imposées. Cependant, comme nous allons le voir par la suite, ces dernières ne sont pas imposées pour la classification du superpotentiel. En effet, quand $M \geq 2$, l'ordre suivant conduit à des contraintes plus simples à résoudre.

- $c = 2M - 3$:

À cet ordre, les contributions de la 0-somme et de la 2-somme du potentiel scalaire (5.73) conduisent à la condition suivante

$$\left[\frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \frac{\partial \overline{W}_{M-3}}{\partial \phi_a^\dagger} + \frac{\partial W_{M-1}}{\partial \phi^a} \frac{\partial \overline{W}_{M-2}}{\partial \phi_a^\dagger} + \mathcal{D}_i W_M \overline{\mathcal{D}^i W}_{M-1} + \phi^a \frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \overline{W}_{M-1} \right. \\ \left. + \phi^a \frac{\partial W_{M-1}}{\partial \phi^a} \overline{W}_M - 3W_M \overline{W}_{M-1} \right] + \text{h.c.} \sim_\phi 0. \quad (5.108)$$

Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que le premier terme $\frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \frac{\partial \overline{W}_{M-3}}{\partial \phi_a^\dagger}$, ainsi que son conjugué hermitien, n'interviennent pas dans la résolution de la contrainte ci-dessus. En effet, si l'ordre du superpotentiel est limité à $M = 2$, la fonction W_{M-3} n'est tout simplement pas présente. Dans le cas contraire, si $M > 2$, nous constatons que l'ordre $c = 2M - 4$ conduit nécessairement à obtenir la fonction W_M indépendante par rapport au secteur observable. Par conséquent, dans les deux situations, ce terme n'influence pas l'analyse de la contrainte (5.108).

En agissant avec l'opérateur $\frac{\partial^3}{\partial S^p \partial S^q \partial S^r}$ sur la contrainte (5.108), nous déduisons l'équation

$$\overline{W}_{M-1}{}^{qp} \frac{\partial^3 W_{M-2}}{\partial S^p \partial S^r \partial S^t} + \mathcal{D}_i W_{M-1,rt} \overline{\mathcal{D}^i W}_M{}^q = 0, \quad \forall q, r, t \in \{1, \dots, A_p\}, \quad (5.109)$$

qui prend la forme du corollaire 2 avec $\alpha \equiv 0$, $W_{M-1,rq} \equiv Q_{rq}$, $W_{M,p} \equiv P_p$ et $\frac{\partial^3 W_{M-2}}{\partial S^p \partial S^q \partial S^r} \equiv R_{pqr}$.

D'après le corollaire 2, s'il existe au moins un p pour lequel $W_{M,p} \neq 0$, alors $\overline{W}_{M-1,rq}$ est nécessairement nulle pour tout indice r et q . En reportant cette conséquence sur la condition (5.104) provenant de l'ordre précédent, celle-ci devient alors

$$\mathcal{D}_i W_{M,p} \overline{\mathcal{D}^i W}_M{}^q = W_{M,p} \overline{W}_M{}^q, \quad \forall p, q \in \{1, \dots, A_p\}. \quad (5.110)$$

Cette dernière équation correspond au corollaire 1, en prenant des indices identiques $p = q$, menant à la conclusion $W_{M,p} = 0$. Avec ce dernier résultat, l'ensemble du secteur S disparaît des fonctions W_M , W_{M-1} et W_{M-2} , et seuls les deux secteurs habituels persistent. En partant de cette conclusion, et en appliquant

l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\phi}^{\tilde{a}} \partial \tilde{\phi}_b^\dagger}$ sur la contrainte (5.108), nous arrivons à l'équation

$$\overline{\widetilde{W}}_{M-1}{}^{\tilde{a}} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \tilde{\phi}^{\tilde{a}} \partial \tilde{\phi}_b^\dagger} + \mathcal{D}_i \widetilde{W}_{M-1,\tilde{b}} \overline{\mathcal{D}^i W}_M{}^0 = 2\widetilde{W}_{M-1,\tilde{b}} \overline{W}_M{}^0, \quad (5.111)$$

qui prend la forme analytique de la proposition 1. Comme $W_{M,0}$ est nécessairement différent de zéro, nous en déduisons que $\widetilde{W}_{M-1,\tilde{a}}$ est nulle.

Par conséquent, quand $M = 2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 z_i^\dagger z^i + \tilde{\phi}_a^\dagger \tilde{\phi}^{\tilde{a}} \\ W(Z) &= m_p^2 W_2(z) + m_p W_1(z) + W_0(z, \tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (5.112)$$

qui correspond à la solution de Soni et Weldon. Lorsque le développement polynomial du superpotentiel (5.5) est limité à $M = 2$, seule la solution de Soni et Weldon conduit à une solution compatible avec une physique à basse énergie. Cependant, les conclusions déterminées à cet ordre ont été obtenues car les contributions du terme $\frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \frac{\partial \bar{W}_{M-3}}{\partial \phi_a^\dagger}$ n'ont pas été considérées. Pour la suite de l'analyse, il est nécessaire de reprendre en compte ce terme. Néanmoins, nous constatons que les conclusions restent finalement inchangées. Nous supposons maintenant que $M \geq 3$.

- $c = 2M - 4$

À cet ordre, les différentes contributions proviennent de la 0-somme, de la 2-somme et de la 4-somme et s'écrivent

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[\frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \frac{\partial \bar{W}_{M-4}}{\partial \phi_a^\dagger} + \frac{\partial W_{M-1}}{\partial \phi^a} \frac{\partial \bar{W}_{M-3}}{\partial \phi_a^\dagger} + \mathcal{D}_i W_M \bar{\mathcal{D}}^i \bar{W}_{M-2} + \phi^a \frac{\partial W_M}{\partial \phi^a} \bar{W}_{M-2} + \phi^a \frac{\partial W_{M-1}}{\partial \phi^a} \bar{W}_{M-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \phi^a \frac{\partial W_{M-2}}{\partial \phi^a} \bar{W}_M - 3W_M \bar{W}_{M-2} \right] + \text{h.c.} \right\} \\ &+ \frac{\partial W_{M-2}}{\partial \phi^a} \frac{\partial \bar{W}_{M-2}}{\partial \phi_a^\dagger} + \mathcal{D}_i W_{M-1} \bar{\mathcal{D}}^i \bar{W}_{M-1} - 3W_{M-1} \bar{W}_{M-1} + W_M \bar{W}_M \phi^a \phi_a^\dagger \sim_\phi 0. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Les conclusions établies à l'ordre précédent ne sont plus valables et une nouvelle analyse doit être faite.

En appliquant l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\phi}^b \partial \tilde{\phi}_b^\dagger}$ sur la contrainte (5.113) nous obtenons

$$\left| \frac{\partial^2 W_{M-2}}{\partial \phi^a \partial \tilde{\phi}^b} \right|^2 + |\mathcal{D}_i \bar{W}_{M-1, a}|^2 - 2|\bar{W}_{M-1, a}|^2 + |W_M|^2 = 0, \quad (5.114)$$

puisque seules les fonctions W_{M-1} et W_{M-2} dépendent du secteur $\tilde{\phi}$ d'après les équations (5.100) et (5.106).

En appliquant maintenant l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial S^p \partial S_p^\dagger}$ sur l'équation (5.114) nous avons

$$\left| \frac{\partial^3 W_{M-2}}{\partial S^p \partial \phi^a \partial \tilde{\phi}^b} \right|^2 + |W_{M, p}|^2 = 0, \quad (5.115)$$

qui implique nécessairement la condition $W_{M, p} = 0$ pour tout indice $p \in \{1, \dots, A_p\}$. Par conséquent, le secteur S disparaît dans l'ensemble des fonctions W_M , W_{M-1} et W_{M-2} . Or, comme nous l'avons vu à l'ordre⁷ précédent avec l'équation (5.111), si le secteur S devient nul, le secteur $\tilde{\phi}$ présent dans la fonction W_{M-1} devient lui aussi nul ($\bar{W}_{M-1, \tilde{a}} = 0$ pour tout $\tilde{a} \in \{1, \dots, A_{\tilde{a}}\}$). En répercutant ces conclusions dans l'équation (5.114),

$$\left| \frac{\partial^2 W_{M-2}}{\partial \phi^a \partial \tilde{\phi}^b} \right|^2 + |W_{M, 0}|^2 = 0, \quad (5.116)$$

nous en déduisons que $W_{M, 0} = 0$ lorsque $M \geq 3$.

L'analyse de cet ordre conduit à une conclusion importante : le développement polynomial du superpotentiel

7. Les conclusions établies à l'ordre précédent sont de nouveau permises lorsque $W_{M, p} = 0$ car cette contrainte revient à ne pas considérer la fonction W_{M-3} pour $c = 2M - 3$, soit l'équivalent de l'étude pour $M = 2$.

est limité à $M \leq 2$, comme établi par Soni et Weldon[2] durant leur analyse.

Une classification complète du superpotentiel et du potentiel de Kähler, lorsque ce dernier est canonique, a été effectuée. De nouvelles solutions, différentes de celles proposées par Soni et Weldon [2], ont été déterminées menant à une nouvelle phénoménologie à basse énergie.

La section 6.1 du prochain chapitre s'intéresse plus particulièrement aux éventuelles conséquences phénoménologiques provenant du nouveau secteur observable S quand ce dernier acquiert une valeur moyenne dans le vide.

Pour le passage au cas non-canonique, Soni et Weldon [2] déclarent que l'analyse est évidente et implique les mêmes solutions. Nous montrons par la suite que cette affirmation reste vraie pour un choix particulier du potentiel de Kähler, même si elle n'est pas évidente. Des hypothèses plus générales concernant l'hypothèse de la fonction K , rendent l'analyse plus difficile. Néanmoins, de nouvelles solutions ont été déduites et sont présentées dans la prochaine section.

5.4 Le cas non-canonique du potentiel de Kähler

L'analyse précédente a été effectuée suite à un choix particulier du potentiel de Kähler, i.e. le cas canonique défini par l'équation (5.7). Nous allons dans cette section poursuivre la classification des deux fonctions fondamentales W et K , mais en supposant maintenant un potentiel de Kähler général (5.6), i.e. le cas non-canonique.

Pour commencer, nous rappelons l'expression du terme F du potentiel scalaire

$$V_F(Z, Z^\dagger) = e^{\frac{K}{m_p^2}} \left(\mathcal{D}_{\mathcal{I}} W (K^{-1})^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} \mathcal{D}^{\mathcal{I}^*} \overline{W} - 3 \frac{|W|^2}{m_p^2} \right), \quad (5.117)$$

ainsi que de la métrique de Kähler et de la dérivée covariante

$$K^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{I}} = \frac{\partial^2 K}{\partial Z^{\mathcal{I}} \partial Z^{\dagger}_{\mathcal{I}^*}} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\mathcal{I}} W = \partial_{\mathcal{I}} W + \frac{1}{m_p^2} W \partial_{\mathcal{I}} K. \quad (5.118)$$

De plus, nous reprenons l'hypothèse de Soni et Weldon concernant le développement polynomial des deux fonctions K et W , donnés respectivement par

$$K(Z, Z^\dagger) = \sum_{n=0}^N m_p^n K_n(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \quad \text{et} \quad W(Z) = \sum_{n=0}^M m_p^n W_n(z, \phi). \quad (5.119)$$

La complexité du calcul pour l'analyse non-canonique provient de la supposition effectuée sur l'expression analytique du potentiel de Kähler, donnée ci-dessus. En injectant directement ces hypothèses dans l'équation (5.117), le potentiel scalaire a pour expression

$$V_F(Z, Z^\dagger) = \exp \left(\sum_{n_1=0}^N m_p^{n_1-2} K_{n_1} \right) \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=0}^M m_p^{m_1+m_2} \left\{ -3 \frac{W_{m_1} \overline{W}_{m_2}}{m_p^2} + \right. \quad (5.120)$$

$$\left. \left[\partial_{\mathcal{I}} W_{m_1} + \sum_{n_3=0}^N m_p^{n_3-2} W_{m_1} \partial_{\mathcal{I}} K_{n_3} \right] \left[\sum_{n_2=0}^N m_p^{n_2} \frac{\partial^2 K_{n_2}}{\partial Z^{\mathcal{I}} \partial Z^{\dagger}_{\mathcal{I}^*}} \right]^{-1} \left[\partial^{\mathcal{I}^*} \overline{W}_{m_2} + \sum_{n_4=0}^N m_p^{n_4-2} \overline{W}_{m_2} \partial^{\mathcal{I}^*} K_{n_4} \right] \right\}.$$

Les difficultés d'une telle expression émergent principalement du facteur exponentiel et de l'inversion de la métrique lorsque la limite formelle $m_p \rightarrow \infty$ est appliquée. En effet, les deux termes majeurs génèrent des termes opposés en la masse de Planck. Alors que le facteur exponentiel implique des termes en $m_p^{n_1}$ dans l'expression finale du potentiel scalaire, l'inverse de la métrique de Kähler, *a contrario*, donne des termes en $m_p^{-n_2}$. Par conséquent, une compensation entre ces deux termes est envisageable ce qui permet une phénoménologie à basse énergie. Néanmoins, une équation générale, similaire au cas canonique (5.14), reste à déterminer pour accomplir cette analyse.

Une hypothèse peut tout de même être appliquée sur le degré du polynôme de K . En effet, de manière

à limiter les divergences de l'exponentielle lorsque $m_p \rightarrow \infty$, nous supposons que l'ordre maximal de la fonction K est égal ou inférieur à 2⁸.

D'après l'équation (5.119) et la limite imposée sur le degré du polynôme de K , les deux fonctions K et W sont finalement données par

$$K(Z, Z^\dagger) = \sum_{n=0}^{N=2} m_p^n K_n(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \quad \text{et} \quad W(Z) = \sum_{n=0}^M m_p^n W_n(z, \phi). \quad (5.121)$$

En outre, la dépendance des différentes fonctions K_n par rapport aux deux secteurs - caché et observable - influence l'inversion de la métrique kählerienne (Cf. l'annexe C). L'approche de Soni et Weldon interdisant des couplages dangereux entre la masse de Planck m_p et le secteur observable, nous avons uniquement fait varier l'ordre maximal de dépendance du secteur observable dans l'expression analytique de K . Trois différentes situations ont été étudiées

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 \quad K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ \mathcal{K}_1 \quad K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ \mathcal{K}_2 \quad K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \end{aligned}$$

avec \mathcal{K}_α où l'indice $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ indique l'ordre maximal de dépendance par rapport à ϕ . Le calcul de l'inversion des trois différentes métriques étant un calcul fastidieux, nous nous référons à l'annexe C où les sections C.1, C.2 et C.3 correspondent respectivement au calcul de la métrique inverse du cas \mathcal{K}_0 , \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 .

L'étude des trois différentes hypothèses est effectuée au cours des différentes sous-sections. L'analyse étant similaire, les détails sont donnés pour l'étude du potentiel de Kähler \mathcal{K}_0 . Pour les deux autres cas \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 , uniquement les résultats importants sont écrits.

5.4.1 Analyse de l'hypothèse \mathcal{K}_0

En supposant le potentiel de Kähler de la forme \mathcal{K}_0 et le superpotentiel (5.119), les dérivées covariantes des deux secteurs sont données, d'après (5.118), par

$$\mathcal{D}_a W = \sum_{n=0}^M [m_p^n \partial_a W_n + m_p^{n-2} W_n \partial_a K_0], \quad (5.122)$$

pour le secteur observable et par

$$\mathcal{D}_i W = \sum_{n=0}^M [m_p^{n-1} (\partial_i W_n + W_n \partial_i K_2) + m_p^{n-2} W_n \partial_i K_1 + m_p^{n-3} W_n \partial_i K_0], \quad (5.123)$$

pour le secteur caché (en utilisant la relation (5.4) pour le champ adimensionné). Concernant l'inversion de la métrique, nous nous référons à la section C.1 pour le calcul et nous donnons uniquement son expression finale

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} &= (\mathcal{K}_0^0)^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^0)^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^0)^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} + \dots, \\ &= \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_0^0)^{i i^*} & 0 \\ 0 & (\mathcal{K}_0^0)^{a a^*} \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_1^0)^{i i^*} & (\mathcal{K}_1^0)^{i a^*} \\ (\mathcal{K}_1^0)^{a i^*} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p^2} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_2^0)^{i i^*} & (\mathcal{K}_2^0)^{i a^*} \\ (\mathcal{K}_2^0)^{a i^*} & (\mathcal{K}_2^0)^{a a^*} \end{pmatrix} + \dots, \end{aligned} \quad (5.124)$$

8. D'après l'équation (5.120), cette limitation implique une expansion de Taylor de l'exponentielle lorsque la limite formelle $m_p \rightarrow \infty$ est appliquée (pour $N \leq 2$). En effet, le facteur exponentiel de l'équation (5.120) devient

$$\exp\left(K_2 + \frac{K_1}{m_p} + \frac{K_2}{m_p^2}\right) = \exp(K_2) \left(1 + \frac{K_1}{m_p} + \frac{K_0}{m_p^2} + \frac{1}{2} \frac{K_1^2}{m_p^2} + \dots\right),$$

quand $m_p \rightarrow \infty$. Cependant, comme notre analyse est effectuée ordre par ordre en m_p , seul l'ordre m_p^0 de l'expansion de Taylor de l'exponentielle est prépondérant. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de réaliser cette expansion.

où nous avons introduit la notation \mathcal{K}_β^α . L'indice supérieur $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ fait référence au choix du potentiel de Kähler, de manière équivalente à \mathcal{K}_α , tandis que l'indice inférieur $\beta \in \{0, 1, 2, \dots\}$ indique l'ordre du développement perturbatif résultant de l'inversion (0 étant l'ordre maximal m_p^0). La multiplication des dérivées covariantes et de la métrique inverse conduit au potentiel scalaire, noté V_F^0 ,

$$\begin{aligned} V_F^0 &= e^{m_p^2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^M \left\{ m_p^{n+m} \left[\partial_a W_n (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} W_m \right] \right. \\ &\quad + m_p^{n+m-2} \left[(\partial_i W_n + W_n \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^0)^i_{i^*} \left(\partial^{i^*} W_m + W_m \partial^{i^*} K_2 \right) + \partial_a W_n (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} W_m \right. \\ &\quad \left. \left. \left\{ \partial_a W_n (\mathcal{K}_2^0)^a_{a^*} W_m \partial^{a^*} K_0 + \partial_a W_n (\mathcal{K}_1^0)^a_{i^*} \left(\partial^{i^*} W_m + W_m \partial^{i^*} K_2 \right) + \text{h.c.} \right\} - 3W_n W_m \right] \right. \\ &\quad \left. + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (5.125)$$

où uniquement les deux ordres maximaux nécessaires pour la suite de notre analyse, ont été donnés. Par un raisonnement analogue à l'analyse du cas canonique, la redéfinition de l'indice

$$m \rightarrow c - n + s, \quad (5.126)$$

conduit à une réécriture du potentiel scalaire

$$V_F^0 = e^{m_p^2} \sum_{c=0}^{2M} m_p^c V_{M,c}^0[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger], \quad (5.127)$$

où nous avons défini

$$\begin{aligned} V_{M,c}^0[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger] &= \sum_{n_-^{(0)} \leq n \leq n_+^{(0)}} \partial_a W_n (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} W_{c-n} \\ &\quad + \sum_{n_-^{(2)} \leq n \leq n_+^{(2)}} \left[(\partial_i W_n + W_n \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^0)^i_{i^*} \left(\partial^{i^*} W_{c-n+2} + W_{c-n+2} \partial^{i^*} K_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \partial_a W_n (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} W_{c-n+2} \partial^{a^*} K_0 + \text{h.c.} \right\} + \partial_a W_n (\mathcal{K}_2^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} W_{c-n+2} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \partial_a W_n (\mathcal{K}_1^0)^a_{i^*} \left(\partial^{i^*} W_{c-n+2} + W_{c-n+2} \partial^{i^*} K_2 \right) + \text{h.c.} \right\} - 3W_n W_{c-n+2} \right] + \mathcal{V}_{s>2}^0 \end{aligned} \quad (5.128)$$

composé des différentes s -sommations, avec $s \in \{0, 2, 3, 4, \dots\}$. Le terme $\mathcal{V}_{s>2}^0$ est introduit pour alléger l'écriture ci-dessus. Il comporte l'ensemble des s -sommations, pour $s > 2$, provenant de la multiplication entre la métrique inverse (5.124) et les dérivées covariantes.

L'expression (5.128) est une généralisation de l'équation (5.73) obtenue dans le cas canonique. Le choix des différentes sous-fonctions du potentiel de Kähler

$$K_2(z, z^\dagger) = z_i^\dagger \delta^{i^*} z^i, \quad K_1(z, z^\dagger) = 0 \quad \text{et} \quad K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) = \phi_a^\dagger \delta^{a^*} \phi^a, \quad (5.129)$$

correspond à la limite plate de la variété kählérienne et conduit à l'expression (5.73). L'analyse ordre par ordre du potentiel scalaire (5.127) doit par conséquent mener aux solutions obtenues dans le cas canonique, si la limite plate est appliquée. Enfin, une différence majeure avec l'analyse précédente provient des s -sommations impaires (mise à part $s = 1$ ici). Cette différence résulte de l'ordre m_p , au travers de la fonction K_1 dans la définition du potentiel de Kähler (les s -sommations impaires disparaissant lorsque $K_1(z, z^\dagger) = 0$).

Finalement, nous effectuons une analyse ordre par ordre du potentiel scalaire de manière à satisfaire la condition

$$V_{M,c}^0[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger] \sim_\phi 0, \quad (5.130)$$

pour $c > 0$.

Analyse ordre par ordre

En première hypothèse, nous supposons que $M = 0$. D'après l'équation (5.127), cet ordre ne conduit à aucune contrainte. Par conséquent, nous retrouvons la solution de Soni et Weldon (avec $W_2(z) = 0$ et $W_1(z) = 0$)

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= W_0(z, \phi) \end{aligned} \tag{5.131}$$

où $W_0(z, \phi)$ est une fonction holomorphe arbitraire. Pour la suite, nous supposons $M > 0$.

- $c = 2M$:

Les contributions à cet ordre proviennent uniquement de la 0-somme, et s'expriment - la convention d'Einstein est supposée - par

$$\partial_a W_M (K_0^{-1})^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_M \sim_\phi 0, \tag{5.132}$$

où nous avons remplacé l'élément de matrice $(K_0^0)^a_{a^*}$ par, d'après l'équation (C.14), son expression analytique. Cette première contrainte est une généralisation de celle obtenue dans le cas canonique (5.79) et la présence de la fonction K_0 complique par conséquent l'analyse.

Cette contrainte - et celles qui vont suivre - peut être résolue comme une équation différentielle et conduit à une analyse similaire au cas canonique. Mais une telle approche rend l'analyse plus difficile et, en premier lieu, seules des solutions polynomiales, par rapport au secteur observable, ont été considérées. Par conséquent, la contrainte (5.132) est satisfaite si nous supposons que les fonctions W_M et K_0 sont données par

$$\begin{cases} W_M(z, \phi) &= W_{M,0}(z) + \phi^a W_{M,a}(z), \\ K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) &= k_{0,0}(z, z^\dagger) + k_{0,1}(z, z^\dagger, \phi) + [k_{0,1}(z, z^\dagger, \phi)]^\dagger + \frac{1}{2} \phi^a \phi_{a^*}^\dagger k_{0,a^*}^a(z, z^\dagger), \end{cases} \tag{5.133}$$

avec les différentes sous-fonctions de W_M et de K_0 , des fonctions arbitraires par rapport au secteur caché.

- $c = 2M - 1$

Les contributions sont données uniquement par la 0-somme et ont pour expression

$$\partial_a W_M (K_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{M-1} + \partial_a W_{M-1} (K_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_M \sim_\phi 0. \tag{5.134}$$

En injectant l'expression du superpotentiel W_M et du potentiel de Kähler K_0 , données à l'équation (5.133), et en utilisant des propriétés d'holomorphic, nous en déduisons l'équation différentielle

$$\partial_a W_{M-1} (k_0^{-1})^a_{a^*} \overline{W}_M^{a^*} = f(z, z^\dagger), \tag{5.135}$$

avec f une fonction arbitraire. Cette dernière équation est une généralisation de l'équation différentielle (5.84) obtenue dans le cas canonique avec $(k_0^{-1})^a_{a^*} = \delta^a_{a^*}$. Sa résolution est alors similaire⁹.

Le secteur observable est séparé en deux sous-secteurs¹⁰ $\phi^a \equiv (S^p, \tilde{\phi}^{\tilde{a}})$ avec $a \in \{1, \dots, A_p + A_{\tilde{a}}\}$, $p \in \{1, \dots, A_p\}$ et $\tilde{a} \in \{1, \dots, A_{\tilde{a}}\}$. Les secteurs S et $\tilde{\phi}$ sont respectivement définis par les conditions $W_{M,p} \neq 0$ et $W_{M,\tilde{a}} = 0$. À partir de cette séparation dans le secteur observable, le système (5.133) est maintenant

9. Par simplification, la résolution de l'équation différentielle a été faite en appliquant l'hypothèse $(k_0^{-1})^a_{a^*} = \delta^a_{a^*}$. L'influence de la fonction k_0 modifiant les conditions d'holomorphic.

10. L'inversion de la métrique de Kähler se faisant par bloc, la séparation du secteur observable en deux sous-secteurs n'apportent aucunes complications.

donné par¹¹

$$\begin{cases} W_M(z, S, \tilde{\phi}) = W_{M,0}(z) + S^p W_{M,p}(z), \\ K_0(z, z^\dagger, S, S^\dagger, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}^\dagger) = k_{0,0}(z, z^\dagger) + k_{0,1}(z, z^\dagger, S) + [k_{0,1}(z, z^\dagger, S)]^\dagger + S_{p^*}^\dagger \delta^{p^*}_p S^p + \tilde{K}_0(z, z^\dagger, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}^\dagger), \end{cases} \quad (5.136)$$

où la fonction \tilde{K}_0 est arbitraire. L'équation différentielle (5.135) devient

$$\partial_p W_{M-1} \delta^{p^*}_p \overline{W}_M^{p^*} = f(z, z^\dagger), \quad (5.137)$$

et sa résolution implique les expressions analytiques de W_M (5.87) et W_{M-1} (5.88) rencontrées dans le cas canonique

$$\begin{cases} W_M(z, S, \tilde{\phi}) = W_{M,0}(z) + \sum_{\hat{p} \geq 1} \sum_{s \geq 1}^{n_{\hat{p}}} W_{M,\hat{p}}(z) \mu_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},s]}, \\ W_{M-1}(z, S, \tilde{\phi}) = \sum_{p \geq 1}^{A_p} W_{M-1,p}(z) S^p + \Xi(\dots, \mathcal{U}_{[\hat{p},s]}(z, S), \dots; \tilde{\phi}; z), \end{cases} \quad (5.138)$$

avec $W_{M-1,p}$, $W_{M,0}$, $W_{M,\hat{p}}$ et Ξ des fonctions arbitraires. L'analyse effectuée dans le cas canonique et les solutions établies restent équivalentes. Les conditions d'holomorphic imposées durant la résolution de l'équation différentielle conduisent à introduire $\hat{p} \in \{1, \dots, \hat{P}\}$ sous-ensembles dans le secteur S . Les différentes fonctions holomorphes sont définies

$$\mathcal{U}_{[\hat{p},s]}(z, S) = \xi_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},s]} - \zeta_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},1]}, \quad (5.139)$$

avec $s \in \{1, \dots, n_{\hat{p}}\}$ et

$$\mu_{[\hat{p},s]} \xi_{[\hat{p},s]} = \mu_{[\hat{p},1]} \zeta_{[\hat{p},s]}, \quad (5.140)$$

où ces dernières sont normalisées à $\xi_{[\hat{p},1]} = \zeta_{[\hat{p},1]}$. Enfin, une dernière relation est donnée entre les bornes des différents ensembles

$$A_p = \sum_{\hat{p} \geq 1}^{P} n_{\hat{p}}. \quad (5.141)$$

Finalement, en limitant le développement polynomial à $M = 1$, nous retrouvons la généralisation au cas non-canonique de la solution rencontrée à la section précédente 5.3. Cette analyse conduit alors à une nouvelle solution donnée par

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, S, S^\dagger) + \tilde{K}_0(z, z^\dagger, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}^\dagger) \\ W(Z) &= m_p W_1(z, S) + W_0(z, S, \tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (5.142)$$

avec les fonctions du superpotentiel définies à l'équation (5.138) pour $M = 1$, les fonctions du potentiel Kähler arbitraires par rapport au secteur caché et au secteur observable et la dépendance par rapport au secteur S donnée par l'équation

$$K_0(z, z^\dagger, S, S^\dagger) = k_{0,0}(z, z^\dagger) + k_{0,1}(z, z^\dagger, S) + [k_{0,1}(z, z^\dagger, S)]^\dagger + S_{p^*}^\dagger \delta^{p^*}_p S^p. \quad (5.143)$$

De manière analogue à la section 5.3, la solution de Soni et Weldon est finalement un cas particulier de la solution générale lorsque le secteur S disparaît.

Une première étude de l'influence du nouveau secteur S sur la phénoménologie à basse énergie a été opérée uniquement pour un potentiel canonique (Cf. section 6.1). Une seconde s'est intéressée aux termes de brisure douce pour un potentiel de Kähler non-canonique 6.2. Pour la suite, nous supposons $M > 1$.

- $c = 2M - 2$

11. L'expression donnée pour $K_0(z, z^\dagger, S, S^\dagger, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}^\dagger)$ n'est pas la plus générale (au terme bilinéaire). Mais de manière à obtenir une analyse équivalente au cas canonique, et imposer les mêmes contraintes d'holomorphic, le terme bilinéaire en S et S^\dagger est simplifié, au travers du symbole de Kronecker.

D'après l'équation (5.127), les contributions à cet ordre proviennent de la 0-somme et de la 2-somme. Son expression est donnée par

$$\begin{aligned} & \partial_a W_M (\mathcal{K}_2^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_M + \partial_a W_{M-1} (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{M-1} + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^0)^i_{i^*} \left(\partial^{i^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{i^*} K_2 \right) \\ & + \left[\partial_a W_M (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{M-2} + \partial_a W_M (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \overline{W}_M \partial^{a^*} K_0 + \partial_a W_M (\mathcal{K}_1^0)^a_{i^*} \left(\partial^{i^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{i^*} K_2 \right) + \text{h.c.} \right] \\ & - 3W_M \overline{W}_M \sim_\phi 0. \end{aligned} \quad (5.144)$$

L'analyse de la contrainte ci-dessus diffère de celle présentée dans le cas canonique, par la présence des différents éléments de matrice inverse. Par conséquent, sa résolution n'a pas pu être établie et de nouvelles solutions restent alors envisageables.

Cependant, une solution particulière satisfait trivialement la contrainte (5.144). En prenant la solution de Soni et Weldon

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p^2 W_2(z) + m_p W_1(z) + W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.145)$$

nous constatons que la contrainte est trivialement satisfaite.

- $c = 2M - 3$:

Concernant l'ordre suivant, les contributions proviennent aussi de la 0-somme et de la 2-somme, et s'écrivent

$$\begin{aligned} & \left[\partial_a W_M (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{M-3} + \partial_a W_{M-1} (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{M-2} + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^0)^i_{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_{M-1} + \overline{W}_{M-1} \partial^{i^*} K_2) \right. \\ & + \partial_a W_M (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \overline{W}_{M-1} \partial^{a^*} K_0 + W_M \partial_a K_0 (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{M-1} + \partial_a W_M (\mathcal{K}_1^0)^a_{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_{M-1} + \overline{W}_{M-1} \partial^{i^*} K_2) \\ & \left. + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_1^0)^i_{i^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{M-1} - 3W_M \overline{W}_{M-1} + \text{h.c.} \right] \sim_\phi 0. \end{aligned} \quad (5.146)$$

De nouveau, la solution de Soni et Weldon (5.145) satisfait la contrainte ci-dessus. Ainsi, en limitant l'ordre à $M = 2$, la solution de Soni et Weldon est vérifiée.

La résolution des contraintes (5.144) et (5.146) doit être encore effectuée de manière à obtenir d'éventuelles solutions.

En supposant le superpotentiel \mathcal{K}_0 , nous avons généralisé l'approche faite à la section 5.3. En limitant l'ordre du développement polynomial du superpotentiel $M \leq 1$, une classification des deux fonctions fondamentales a été réalisée et généralise celle du cas canonique. Cependant, des hypothèses simplificatrices, sur la dépendance de la fonction K_0 par rapport au secteur S , ont été faites. Une résolution des contraintes, présentées ci-dessus, peut conduire à de possibles solutions.

5.4.2 Analyse de l'hypothèse \mathcal{K}_1

Dans le cas du deuxième potentiel de Kähler donné par \mathcal{K}_1 , l'augmentation de l'ordre maximal de dépendance du secteur observable - K_1 dépend maintenant de z et de ϕ - modifie l'expression de la dérivée covariante par rapport au secteur observable

$$\mathcal{D}_a W = \sum_{n=0}^M \left[m_p^n \partial_a W_n + m_p^{n-1} W_n \partial_a K_1 + m_p^{n-2} W_n \partial_a K_0 \right], \quad (5.147)$$

et le calcul d'inversion de la métrique de Kähler

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} &= (\mathcal{K}_0^1)^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^1)^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^1)^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_0^1)^i_{i^*} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_1^1)^i_{i^*} & (\mathcal{K}_1^1)^i_{a^*} \\ (\mathcal{K}_1^1)^a_{i^*} & (\mathcal{K}_1^1)^a_{a^*} \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p^2} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_2^1)^i_{i^*} & (\mathcal{K}_2^1)^i_{a^*} \\ (\mathcal{K}_2^1)^a_{i^*} & (\mathcal{K}_2^1)^a_{a^*} \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (5.148)$$

Une comparaison avec la métrique inverse du cas \mathcal{K}_0 , donnée à l'équation (5.124), montre l'influence du secteur observable sur la définition du potentiel de Kähler. L'ordre de dépendance ayant progressé d'un ordre m_p , nous constatons que l'ordre maximal dans le secteur purement observable de la métrique inverse a diminué d'un facteur m_p . Cette conséquence se répercute sur le calcul du potentiel scalaire et ouvre la voie à de nouvelles solutions.

À partir des dérivées covariantes (5.123) et (5.147) et de la métrique inverse donnée ci-dessus, nous calculons le potentiel scalaire V_F^1 , où nous retranscrivons seulement les termes provenant des s -sommations (pour $s = 1$ et $s = 2$), de manière analogue à l'analyse concernant \mathcal{K}_0 de l'équation (5.127),

$$\begin{aligned}
V_{M,c}^1[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger] = & \sum_{n_-^{(1)} \leq n \leq n_+^{(1)}} [\partial_a W_n(\mathcal{K}_1^1)^a{}_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{c-n+1}] + \\
& \sum_{n_-^{(2)} \leq n \leq n_+^{(2)}} \left[\partial_a W_n(\mathcal{K}_2^1)^a{}_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{c-n+2} + \{ \partial_a W_n(\mathcal{K}_1^1)^a{}_{a^*} \overline{W}_{c-n+2} \partial^{a^*} K_1 + \text{h.c.} \} \right. \\
& + (\partial_i W_n + W_n \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^1)^{i^*} (\partial_i \overline{W}_{c-n+2} + \overline{W}_{c-n+2} \partial^{i^*} K_2) \\
& \left. + \{ \partial_a W_n(\mathcal{K}_1^1)^a{}_{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_{c-n+2} + \overline{W}_{c-n+2} \partial^{i^*} K_2) + \text{h.c.} \} - 3W_n \overline{W}_{c-n+2} \right] + \mathcal{V}_{s>2}^1,
\end{aligned} \tag{5.149}$$

avec $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$. La notation $\mathcal{V}_{s>2}^1$ est de nouveau utilisée pour signifier la présence des autres s -sommations pour $s > 2$. Les conséquences présentées précédemment se retrouvent sur l'expression finale du potentiel scalaire. L'ordre maximal n'est plus dominé par la 0-somme mais par une 1-somme modifiant l'analyse des contraintes.

Analyse ordre par ordre

L'ordre le plus bas du superpotentiel est donné par $M = 0$. L'implication de ce choix sur le potentiel scalaire (5.149) n'apporte aucun terme dangereux ; l'ordre maximal provenant de la 1-somme est donnée par m_p^{-1} . Les différentes fonctions composant W et K sont arbitraires et correspondent à une nouvelle solution

$$\begin{aligned}
K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\
W(Z) &= W_0(z, \phi)
\end{aligned} \tag{5.150}$$

Pour la suite, nous considérerons $M > 1$. La 0-somme n'étant pas présente, l'ordre $c = 2M$ n'intervient pas et nous passons directement à l'ordre suivant.

- $c = 2M - 1$

Seule la 1-somme du potentiel scalaire (5.149) contribue à cet ordre et la contrainte est donnée par

$$\partial_a W_M (K_1^{-1})^a{}_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_M \sim_\phi 0, \tag{5.151}$$

où nous avons injecté l'expression de l'élément de matrice $(\mathcal{K}_1^1)^a{}_{a^*}$, déterminée à l'équation (C.19). L'analyse effectuée au cours de la précédente situation - \mathcal{K}_0 - est ici identique. Une solution triviale, donnée par,

$$\begin{cases} W_M(z, \phi) = W_{M,0}(z) + \phi^a W_{M,a}(z), \\ K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) = k_{1,0}(z, z^\dagger) + k_{1,1}(z, z^\dagger, \phi) + [k_{1,1}(z, z^\dagger, \phi)]^\dagger + \frac{1}{2} \phi^a \phi_{a^*}^\dagger k_{1,a}{}^{a^*}(z, z^\dagger), \end{cases} \tag{5.152}$$

permet de satisfaire la précédente contrainte. En limitant alors l'ordre maximal à $M = 1$, aucune nouvelle

contrainte n'intervient. Une nouvelle solution est déduite et donnée par

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p W_1(z, \phi) + W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.153)$$

où les fonctions K_1 et W_1 sont définies par (5.152), tandis que les autres fonctions sont arbitraires. L'analyse de la contrainte (5.151) est ouverte pour déduire d'éventuelles solutions. Nous supposons maintenant $M > 1$.

- $c = 2M - 2$

Pour cet ordre, les contributions proviennent de la 1-somme et de la 2-somme. La contrainte a pour expression

$$\begin{aligned} &\partial_a W_M (\mathcal{K}_2^1)^{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_M + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^1)^{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{i^*} K_2) - 3W_M \overline{W}_M \\ &\left[\partial_a W_M (\mathcal{K}_1^1)^{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_{M-1} + \partial_a W_M (\mathcal{K}_1^1)^{a^*} \overline{W}_M \partial^{a^*} K_1 + \partial_a W_M (\mathcal{K}_1^1)^{a^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{i^*} K_2) + \text{h.c.} \right] \sim_\phi 0 \end{aligned} \quad (5.154)$$

que nous réécrivons de la manière suivante¹²

$$\begin{aligned} &W_{M,a} (\mathcal{K}_2^1)^{a^*} \overline{W}_M^{a^*} + \left\{ W_{M,a} (k_1^{-1})^a \partial^{a^*} \overline{W}_{M-1} + W_{M,a} (\mathcal{K}_1^1)^{a^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_M^0 + \overline{W}_M^0 \partial^{i^*} K_2) + \text{h.c.} \right\} + \\ &\left\{ \frac{1}{2} \phi^b W_{M,a} (k_1^{-1})^a k_{1,b}^{a^*} \overline{W}_M^0 + \phi^a [(\partial_i W_{M,a} + W_{M,a} \partial_i K_2) (K_2^{-1})^{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_M^0 + \overline{W}_M^0 \partial^{i^*} K_2) - 3W_{M,a} \overline{W}_M^0 \right. \\ &\quad \left. + (\partial_i W_{M,a} + W_{M,a} \partial_i K_2) (\mathcal{K}_1^1)^{i^*} \overline{W}_M^{a^*}] + \text{h.c.} \right\} + \\ &\frac{1}{2} \phi^b \phi_{b^*}^\dagger [W_{M,a} (k_1^{-1})^a k_{1,b}^{a^*} \overline{W}_M^{b^*} + \text{h.c.}] + \{ W_{M,0} \partial_a k_{1,1} (k_1^{-1})^a \overline{W}_M^{a^*} + \phi^b W_{M,b} \partial_a k_{1,1} (k_1^{-1})^a \overline{W}_M^{a^*} + \text{h.c.} \} + \\ &\phi^a \phi_{a^*}^\dagger [(\partial_i W_{M,a} + W_{M,a} \partial_i K_2) (K_2^{-1})^{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_M^{a^*} + \overline{W}_M^{a^*} \partial^{i^*} K_2) - 3W_{M,a} \overline{W}_M^{a^*}] \sim_\phi 0 \end{aligned} \quad (5.155)$$

après avoir injecté les expressions analytiques de (5.152). Nous sommes de nouveau confrontés au problème rencontré précédemment. Cette dernière contrainte n'a pas été résolue - ainsi que celle résultant de l'ordre $c = 2M - 3$ - et des nouvelles solutions restent encore envisageables.

La principale différence entre les potentiels de Kähler \mathcal{K}_0 et \mathcal{K}_1 provient de l'ordre de dépendance maximal par rapport au secteur observable, respectivement l'ordre m_p^0 et l'ordre m_p^1 . Cette différence se répercute sur l'expression finale du potentiel de Kähler où l'ordre maximal, par rapport à la masse de Planck m_p , a été diminué d'une unité. De ce fait, le nombre de contraintes à satisfaire a lui aussi diminué, ce qui permet une plus grande liberté concernant l'expression analytique du superpotentiel W et du potentiel de Kähler K . Comme nous allons maintenant le constater, ces conclusions restent inchangées pour la prochaine analyse.

5.4.3 Analyse de l'hypothèse \mathcal{K}_2

En faisant le choix du troisième potentiel de Kähler, la dérivée covariante par rapport au secteur observable est donnée par

$$\mathcal{D}_a W = \sum_{n=1}^M [m_p^n (\partial_a W_n + W_n \partial_a K_2) + m_p^{n-1} W_n \partial_a K_1 + m_p^{n-2} W_n \partial_a K_0], \quad (5.156)$$

alors que celle du secteur caché reste inchangée (5.123). L'inversion de la métrique dans le cas \mathcal{K}_2 est réalisée en annexe C et donnée par l'équation (C.23). Nous retranscrivons uniquement sa forme compacte

$$(K^{-1})^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} = (\mathcal{K}_0^2)^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^2)^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^2)^{\mathcal{I} \mathcal{I}^*} + \dots \quad (5.157)$$

12. Nous avons injecté seulement une partie des éléments de matrice inverse. Les autres n'étant pas triviaux, se trouvant en annexe (C.19) et n'étant pas nécessaires pour notre analyse.

$$= \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_0^2)^{i^*} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_1^2)^{i^*} & (\mathcal{K}_1^2)^{i^* a^*} \\ (\mathcal{K}_1^2)^{a^* i^*} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p^2} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_2^2)^{i^*} & (\mathcal{K}_2^2)^{i^* a^*} \\ (\mathcal{K}_2^2)^{a^* i^*} & (\mathcal{K}_2^2)^{a^* a^*} \end{pmatrix} + \dots,$$

où nous constatons que le bloc propre au secteur observable commence à l'ordre m_p^{-2} . Au cours des deux précédentes analyses, l'ordre maximal a toujours été dominé uniquement par le secteur observable. Nous retrouvons alors les conclusions préalablement établies : l'augmentation de l'ordre maximal de dépendance du potentiel de Kähler par rapport au secteur observable fait diminuer l'ordre maximal en m_p du potentiel scalaire. Nous vérifions cette constatation en calculant le potentiel scalaire V_F^2 à partir des dérivées covariantes (5.156) et (5.123), et de la métrique inverse (5.157), et en reprenant la notation (5.127),

$$\begin{aligned} V_{M,c}^2[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger] &= \sum_{n_-^{(2)} \leq n \leq n_+^{(2)}} \left[(\partial_a W_n + W_n \partial_a K_2) (\mathcal{K}_2^2)^{a^*} (\partial^{a^*} \overline{W}_{c-n+2} + \overline{W}_{c-n+2} \partial^{a^*} K_2) \right. \\ &\quad + \{ (\partial_a W_n + W_n \partial_a K_2) (\mathcal{K}_1^2)^{a^* i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_{c-n+2} + \overline{W}_{c-n+2} \partial^{i^*} K_2) + \text{h.c.} \} \\ &\quad \left. + (\partial_i W_n + W_n \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^2)^{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_{c-n+2} + \overline{W}_{c-n+2} \partial^{i^*} K_2) - 3W_n \overline{W}_{c-n+2} \right] \\ &+ \sum_{n_-^{(3)} \leq n \leq n_+^{(3)}} \left[(\partial_a W_n + W_n \partial_a K_2) (\mathcal{K}_3^2)^{a^*} (\partial^{a^*} \overline{W}_{c-n+3} + \overline{W}_{c-n+3} \partial^{a^*} K_2) \right. \\ &\quad + \{ (\partial_a W_n + W_n \partial_a K_2) (\mathcal{K}_2^2)^{a^* i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_{c-n+3} + \overline{W}_{c-n+3} \partial^{i^*} K_2) + \text{h.c.} \} \\ &\quad + (\partial_i W_n + W_n \partial_i K_2) (\mathcal{K}_1^2)^{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_{c-n+3} + \overline{W}_{c-n+3} \partial^{i^*} K_2) \\ &\quad + \{ (\partial_i W_n + W_n \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^2)^{i^*} \overline{W}_{c-n+3} \partial^{i^*} K_1 + \text{h.c.} \} \\ &\quad + \{ (\partial_a W_n + W_n \partial_a K_2) (\mathcal{K}_2^2)^{a^*} \overline{W}_{c-n+3} \partial^{a^*} K_1 + \text{h.c.} \} \\ &\quad + \{ (\partial_i W_n + W_n \partial_i K_2) (\mathcal{K}_1^2)^{i^*} \overline{W}_{c-n+3} \partial^{a^*} K_1 + \text{h.c.} \} \\ &\quad \left. + \{ (\partial_a W_n + W_n \partial_a K_2) (\mathcal{K}_1^2)^{a^* i^*} \overline{W}_{c-n+3} \partial^{i^*} K_1 + \text{h.c.} \} \right] + \mathcal{V}_{s>4}^2 \end{aligned} \tag{5.158}$$

et les différentes s -sommations sont données pour $s \in \{2, 3, 4, \dots\}$. De manière analogue, les s -sommations pour $s > 4$ sont présentes dans le terme $\mathcal{V}_{s>4}^2$, mais non écrites, car non nécessaires. Nous effectuons maintenant une analyse ordre par ordre de $V_{M,c}^2[z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger]$ pour en extraire éventuellement de nouvelles solutions.

Analyse ordre par ordre

L'ordre maximal du potentiel scalaire commençant par une 2-somme, le développement polynomial du superpotentiel n'engendre aucune contrainte si $M \leq 1$. Par conséquent, en supposant $M = 0$, l'ordre maximal du potentiel scalaire est par m_p^{-2} et une nouvelle solution est déduite

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= W_0(z, \phi) \end{aligned} \tag{5.159}$$

avec K_2, K_1, K_0 et W_0 des fonctions arbitraires. De manière analogue, lorsque $M = 1$, le potentiel scalaire est dominé par l'ordre m_p^0 et une nouvelle solution est donnée par

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p W_1(z, \phi) + W_0(z, \phi) \end{aligned} \tag{5.160}$$

où les fonctions K_2 , K_1 , K_0 , W_1 et W_0 sont arbitraires. Par la suite, nous supposons $M > 1$.

- $c = 2M - 2$

La première contrainte concernant le potentiel scalaire V_F^2 arrive lorsque M est strictement supérieur à 1. D'après l'équation (5.158), elle est donnée par¹³

$$e^{K_2} \left((\partial_a W_M + W_M \partial_a K_2) (\mathcal{K}_2^2)^a_{a^*} (\partial^{a^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{a^*} K_2) + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^2)^i_{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{i^*} K_2) + \left\{ (\partial_a W_M + W_M \partial_a K_2) (\mathcal{K}_1^2)^a_{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{i^*} K_2) + \text{h.c.} \right\} - 3W_M \overline{W}_M \right) \sim_\phi 0. \quad (5.161)$$

La résolution de cette contrainte est difficile et aucune solution générale n'a été obtenue. Néanmoins, en imposant que l'équation (5.161) soit nulle, cette dernière peut être réécrite de la manière suivante - sous forme matricielle -

$$\begin{pmatrix} (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) & (\partial_a W_M + W_M \partial_a K_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_0^2)^i_{i^*} & (\mathcal{K}_1^2)^i_{a^*} \\ (\mathcal{K}_1^2)^a_{i^*} & (\mathcal{K}_2^2)^a_{a^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial^{i^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{i^*} K_2) \\ (\partial^{a^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{a^*} K_2) \end{pmatrix} = 3W_M \overline{W}_M, \quad (5.162)$$

où nous remarquons une condition présentée au chapitre précédent. En effet, en définissant une fonction arbitraire

$$\mathcal{G}_M = K_2 + \ln |m_p^{M-3} W_M|^2, \quad (5.163)$$

la contrainte précédente peut se réécrire de la manière suivante

$$\partial_{\mathcal{I}} \mathcal{G}_M (\mathcal{G}_M^{-1})^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} \partial^{\mathcal{I}^*} \mathcal{G}_M = 3, \quad (5.164)$$

où la métrique inverse est donnée par

$$(\mathcal{G}_M^{-1})^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} = \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_0^2)^i_{i^*} & (\mathcal{K}_1^2)^i_{a^*} \\ (\mathcal{K}_1^2)^a_{i^*} & (\mathcal{K}_2^2)^a_{a^*} \end{pmatrix}. \quad (5.165)$$

Par conséquent, si les fonctions arbitraires K_2 et W_M sont reliées par la relation (5.163), la contrainte (5.161) est satisfaite car elle est identiquement nulle.

- $c = 2M - 3$

Les contributions à l'ordre suivant proviennent de la 2-somme et de la 3-somme et sont données par

$$\begin{aligned} & \left[(\partial_a W_M + W_M \partial_a K_2) (\mathcal{K}_2^2)^a_{a^*} (\partial^{a^*} \overline{W}_{M-1} + \overline{W}_{M-1} \partial^{a^*} K_2) + (\partial_a W_M + W_M \partial_a K_2) (\mathcal{K}_2^2)^a_{a^*} \overline{W}_M \partial^{a^*} K_1 \right. \\ & + (\partial_a W_M + W_M \partial_a K_2) (\mathcal{K}_1^2)^a_{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_{M-1} + \overline{W}_{M-1} \partial^{i^*} K_2) + (\partial_a W_M + W_M \partial_a K_2) (\mathcal{K}_1^2)^a_{i^*} \overline{W}_M \partial^{i^*} K_1 \\ & + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^2)^i_{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_{M-1} + \overline{W}_{M-1} \partial^{i^*} K_2) + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_0^2)^i_{i^*} \overline{W}_M \partial^{i^*} K_1 \\ & \left. + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_1^2)^i_{a^*} (\partial^{a^*} \overline{W}_{M-1} + \overline{W}_{M-1} \partial^{a^*} K_2) + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_1^2)^i_{a^*} \overline{W}_M \partial^{a^*} K_1 + \text{h.c.} \right] \\ & + (\partial_a W_M + W_M \partial_a K_2) (\mathcal{K}_3^2)^a_{a^*} (\partial^{a^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{a^*} K_2) + (\partial_i W_M + W_M \partial_i K_2) (\mathcal{K}_1^2)^i_{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{i^*} K_2) \\ & + \left\{ (\partial_a W_M + W_M \partial_a K_2) (\mathcal{K}_2^2)^a_{i^*} (\partial^{i^*} \overline{W}_M + \overline{W}_M \partial^{i^*} K_2) + \text{h.c.} \right\} \sim_\phi 0. \end{aligned} \quad (5.166)$$

La résolution d'une telle contrainte n'est pas évidente, même si une solution générale pour l'expression analytique des différentes fonctions est possible. Cependant, une solution particulière se dégage. En imposant $K_1 = 0$ ¹⁴ et $W_1 = 0$, la contrainte (5.166) est identiquement nulle. En limitant l'ordre du développement

13. À la différence des deux premières hypothèses, le facteur exponentiel a une influence sur la contrainte à résoudre puisque la fonction K_2 dépend du secteur observable.

14. Un tel choix n'influence pas l'inversion de la métrique. En effet, en se référant à l'annexe C.3, nous constatons que l'inversion se fait par rapport à K_2 , laissant un libre choix pour K_1 et K_0 .

polynomial à $M = 2$, nous en déduisons une nouvelle solution

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p^2 W_2(z, \phi) + W_0(z, \phi) \end{aligned} \quad (5.167)$$

où les fonctions W_0 , K_0 , W_2 et K_2 sont arbitraires et où les deux dernières sont reliées par la condition (5.163)

$$\mathcal{G}_2 = K_2 + \ln \left| \frac{W_2}{m_p} \right|^2. \quad (5.168)$$

Pour la suite, nous supposons $M > 2$.

- $c = 2M - 4$:

Pour les ordres supérieurs, les contraintes étaient beaucoup plus marquées que lors des raisonnements précédents. Leur étude doit être effectuée pour établir de nouvelles solutions.

Les conclusions établies à la fin de la sous-section 5.4.2 ont été retrouvées durant l'analyse du cas \mathcal{H}_2 . L'augmentation de l'ordre maximal de dépendance du secteur observable, dans l'expression analytique du potentiel de Kähler, conduit à diminuer l'ordre maximal en m_p^2 du potentiel scalaire. Le nombre de contraintes est ainsi diminué, et de nouvelles solutions ont été obtenues.

Dans leur article [2], Soni et Weldon ont classifié les expressions du potentiel de Kähler K et du superpotentiel W menant à une physique compatible à basse énergie, suite à une brisure de la supersymétrie induite par la gravitation. Une nouvelle analyse complémentaire [1] a, dans un premier temps, confirmé les résultats établis par Soni et Weldon. Cependant, dans un second temps, de nouvelles solutions ont été mises en évidence ouvrant une nouvelle phénoménologie à basse énergie.

Une présentation de ces nouvelles solutions a été effectuée au cours de ce chapitre 5. Ces dernières sont résumées à la section 5.1.2 et la section 5.3 prouve que de telles solutions sont possibles pour le cas canonique. De manière équivalente, la section 5.4 a démontré les solutions présentées à la section 5.1.2 pour le cas non-canonique.

Dans le cas du potentiel de Kähler canonique, une classification complète des nouvelles solutions [1] a été effectuée et repose sur la proposition démontrée au cours de la section 5.2. Concernant le cas non-canonique, de nouvelles solutions ont été obtenues mais une classification complète reste encore à faire.

Au cours du prochain chapitre, les conséquences phénoménologiques de deux solutions particulières seront étudiées. Premièrement, nous nous intéressons aux conséquences du nouveau secteur S pour une physique à basse énergie. En premier lieu, la solution canonique (5.16) est considérée pour cette étude 6.1. Dans un second temps, une étude de la nouvelle solution (5.25) dans le cas non-canonique est effectuée, où on s'intéresse plus particulièrement aux termes de brisure douce de sorte à obtenir des modèles supersymétriques à basse énergie, comme le modèle standard supersymétrique minimal, présenté en section 6.2.

Chapitre 6

Vers une étude à basse énergie du nouveau secteur S

Les études à basse énergie de la supersymétrie, lorsque sa brisure est induite par la gravitation, ont été réalisées à partir de la classification de Soni et Weldon concernant les expressions analytiques du potentiel de Kähler et du superpotentiel [2]. Dans le chapitre 5, nous réalisons une étude complémentaire [1] à celle de Soni et Weldon, menant à une nouvelle classification des deux fonctions fondamentales K et W . De nouvelles solutions ont été obtenues, conduisant potentiellement à une nouvelle phénoménologie à basse énergie.

Dans ce chapitre, nous étudions la solution ¹

$$\begin{aligned} K(Z, Z^\dagger) &= m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0^S(z, z^\dagger, S, S^\dagger) + K_0^\phi(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) \\ W(Z) &= m_p W_1(z, S) + W_0(z, S, \phi) \end{aligned} \quad (6.1)$$

où les fonctions du potentiel de Kähler sont données par ²

$$K_0^S(z, z^\dagger, S, S^\dagger) = k_{0,0}(z, z^\dagger) + S^p k_{0,p}(z, z^\dagger) + S_{p^*}^\dagger \bar{k}_0^{p^*}(z, z^\dagger) + S_{p^*}^\dagger \delta^{p^*}_p S^p, \quad (6.2)$$

pour celle dépendant du secteur S , tandis que les autres fonctions sont arbitraires, et par

$$\left\{ \begin{aligned} W_1(z, S) &= W_{1,0}(z) + \sum_{\hat{p} \geq 1} \sum_{s \geq 1}^{n_{\hat{p}}} W_{1,\hat{p}}(z) \mu_{[\hat{p},s]} S^{[\hat{p},s]}, \\ W_0(z, S, \phi) &= \sum_{p \geq 1}^{A_p} W_{0,p}(z) S^p + \Xi(\cdots, \mathcal{U}_{[\hat{p},s]}(z, S), \cdots, \phi, z), \end{aligned} \right. \quad (6.3)$$

pour le superpotentiel.

Cette solution générale provient, comme nous l'avons vu, de la résolution de l'équation différentielle, donnée en (5.137). Néanmoins, nous considérons une solution particulière pour notre analyse. En effet, lorsque la fonction arbitraire Ξ dépend uniquement du secteur caché et du secteur observable ϕ , le superpotentiel est simplement donné par ³

$$\begin{aligned} W(z, S, \phi) &= m_p [W_{1,0}(z) + S^p W_{1,p}(z)] + S^p W_{0,p}(z) + W_{0,0}(z, \phi) \\ &\equiv m_p \hat{W}_1 + \hat{W}_0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

1. Nous reprenons la notation ϕ pour le secteur observable contenant les champs du modèle standard ou ceux de ses extensions. Concernant le nouveau secteur, nous continuons à l'appeler S .

2. Pour cette étude, nous prenons la solution simplifiée $k_{0,1}(z, z^\dagger, S) = S^p k_{0,p}(z, z^\dagger)$.

3. La notation choisie pour l'écriture des différentes fonctions du superpotentiel est la suivante : soit une fonction générique $W_{\ell,\wp}$, l'indice ℓ correspond à l'ordre en la masse de Planck, avec $\ell \in \{0, 1\}$, et l'indice \wp caractérise la sommation avec le secteur S si $\wp = p$ et l'absence de sommation si $\wp = 0$. Concernant le conjugué hermitien de la fonction générique, il est donné par $\overline{W_{\ell,\wp}^*}$, où seul l'indice illustrant la sommation au secteur S est monté.

où nous regroupons dans les fonctions \hat{W}_i , avec $i \in \{0, 1\}$, les différents termes du superpotentiel à un ordre en m_p donné. La distinction est effectuée uniquement lorsqu'elle est nécessaire, i.e. quand une dérivée, par rapport à un des deux secteurs, est appliquée, ou durant l'étude du potentiel scalaire après brisure de la supergravité.

L'analyse de la solution, donnée par l'équation (6.1), est effectuée dans deux cas particuliers⁴. La section 6.1 est réalisée dans la limite plate du potentiel de Kähler, de manière à étudier les conséquences à basse énergie lorsque le nouveau secteur S développe une valeur moyenne dans le vide. La section 6.2 est consacrée à l'étude du potentiel scalaire, après brisure de la supergravité, lorsque la fonction K est non-canonique. Pour cette analyse, nous considérons le contenu du modèle standard supersymétrique minimal, défini dans le chapitre 3, pour le secteur observable ϕ . Néanmoins, les conséquences établies restent vraies pour toutes extensions du secteur observable.

Dans ce chapitre, nous présentons les premières conséquences phénoménologiques à basse énergie de cette nouvelle solution. Une analyse plus approfondie est nécessaire.

6.1 Potentiel de Kähler canonique

Dans cette section, nous analysons les conséquences à basse énergie dans le cadre d'une hypothèse simplificatrice - une fonction K canonique - quand le nouveau secteur S acquiert une valeur moyenne dans le vide. Le potentiel de Kähler K , défini à partir de l'équation (6.1), est ainsi donné par⁵

$$K(z, z^\dagger, S, S^\dagger, \phi, \phi^\dagger) = m_p^2 z_i^\dagger z^i + S_p^\dagger S^p + \phi_a^\dagger \phi^a. \quad (6.5)$$

Cette section est décomposée en deux différentes parties. Dans un premier temps, nous calculons explicitement le potentiel scalaire pour, dans un second temps, étudier le cas où le champ S développe une valeur moyenne dans le vide (après brisure de la supergravité).

6.1.1 Calcul du potentiel scalaire

Dans le cadre du potentiel de Kähler canonique, les principales étapes menant au potentiel scalaire consistent à calculer les différentes dérivées covariantes.

La dérivée covariante du secteur caché est donnée par

$$\mathcal{D}_i W = \frac{1}{m_p} \left[\partial_i W + z_i^\dagger W \right] = \rho_{[\hat{1}]i} \hat{W}_1 + \frac{1}{m_p} \rho_{[\hat{0}]i} \hat{W}_0, \quad (6.6)$$

où nous avons introduit les notations⁶

$$\rho_{[\hat{1}]i} \equiv \partial_i \left[K + \ln \hat{W}_1 \right] \quad \text{et} \quad \rho_{[\hat{0}]i} \equiv \partial_i \left[K + \ln \hat{W}_0 \right], \quad (6.7)$$

pour alléger le calcul.

Le calcul de la dérivée covariante du secteur S implique

$$\mathcal{D}_p W = \partial_p W + \frac{1}{m_p^2} S_p^\dagger W = m_p W_{1,p} + W_{0,p} + \frac{1}{m_p} S_p^\dagger \hat{W}_1 + \frac{1}{m_p^2} S_p^\dagger \hat{W}_0. \quad (6.8)$$

Une conséquence à basse énergie émerge de ce calcul : l'interaction entre le secteur S et le secteur ϕ est en m_p^{-2} . Par conséquent, en multipliant la dérivée covariante $\mathcal{D}_p W$ par son conjugué hermitien, cette interaction est à l'ordre en m_p^{-1} pour l'expression du potentiel scalaire. Le couplage entre les deux secteurs observables

4. Pour distinguer les trois secteurs, nous supposons un jeu d'indice par secteur. Les indices i, j, k, \dots sont propres au secteur caché, les indices p, q, r, \dots pour le secteur S et les indices a, b, c, \dots pour le secteur ϕ . De plus, nous supposons qu'une partie des champs composant un secteur - par exemple le S - développe une valeur moyenne dans le vide non-nulle (et nulle pour la seconde partie). Mais de manière globale, nous parlons de valeur moyenne sans préciser sa valeur puisque, à ce stade, nous ne nous intéressons pas au mécanisme de brisure de symétrie proprement dit.

5. Le potentiel de Kähler étant canonique, nous reprenons une notation introduite dans le chapitre 5, avec $z_i^\dagger = z_{i^*}^\dagger \delta^{i^*}_i$.

6. Les indices entre crochets, pour l'ensemble du chapitre, sont muets et réfèrent la fonction du superpotentiel du même ordre. La généralisation est évidente pour les notations $\rho_{[1,0]i}$ (pour la fonction $W_{1,0}$) et $\rho_{[1,p]i}$ (pour la fonction $W_{1,p}$) décomposées à partir de la fonction $\rho_{[\hat{1}]i}$ (pour la fonction \hat{W}_1).

est alors supprimé quand la limite $m_p \rightarrow \infty$ est appliquée.

Cette conséquence se retrouve également lorsque nous calculons la dérivée covariante du secteur ϕ

$$\mathcal{D}_a W = \partial_a W + \frac{1}{m_p^2} \phi_a^\dagger W = \partial_a W_0 + \frac{1}{m_p} \phi_a^\dagger \hat{W}_1 + \frac{1}{m_p^2} \phi_a^\dagger \hat{W}_0, \quad (6.9)$$

où le couplage entre les deux secteurs observables est de nouveau en m_p^{-1} , et par conséquent, au même ordre en la masse de Planck dans le potentiel scalaire.

À partir de ces différentes dérivées covariantes, le potentiel scalaire est donné par

$$V_F(z, S, \phi) = \exp \left(z_i^\dagger z^i + \frac{S_p^\dagger S^p + \phi_a^\dagger \phi^a}{m_p^2} \right) \left[m_p^2 V_2(z) + m_p V_1(z) + V_0(z, S, \phi) + \frac{1}{m_p} V_{-1}(z, S, \phi) \right. \\ \left. + \frac{1}{m_p^2} V_{-2}(z, S, \phi) + \frac{1}{m_p^3} V_{-3}(z, S, \phi) + \frac{1}{m_p^4} V_{-4}(z, S, \phi) \right], \quad (6.10)$$

où l'expression analytique est regroupée en fonction de la puissance en la masse de Planck associée. Les différents ordres du potentiel scalaire sont ainsi donnés par

$$V_2(z) = W_{1,p} W_1^p, \quad (6.11)$$

$$V_1(z) = W_{0,p} W_1^p + W_{1,p} W_0^p, \quad (6.12)$$

$$V_0(z, S, \phi) = \frac{\partial W_0}{\partial \phi^a} \frac{\partial W_0}{\partial \phi_a^\dagger} + \left(\rho_{[\hat{1}]i} \rho_{[\hat{1}]}^{i\dagger} - 3 \right) \hat{W}_1 \hat{W}_1 + W_{0,p} W_0^p + S^p W_{1,p} \hat{W}_1 + \hat{W}_1 W_1^p S_p^\dagger, \quad (6.13)$$

$$V_{-1}(z, S, \phi) = \left\{ \left(\rho_{[\hat{0}]i} \rho_{[\hat{1}]}^{i\dagger} - 3 \right) \hat{W}_0 \hat{W}_1 + (\phi^a \partial_a W_0) \hat{W}_1 + S_p^\dagger \left[\hat{W}_0 W_1^p + \hat{W}_1 W_0^p \right] + \text{h.c.} \right\}, \quad (6.14)$$

$$V_{-2}(z, S, \phi) = \left(\rho_{[\hat{0}]i} \rho_{[\hat{0}]}^{i\dagger} - 3 \right) \hat{W}_0 \hat{W}_0 + (S^p S_p^\dagger + \phi_a^\dagger \phi^a) \hat{W}_1 \hat{W}_1 + \left\{ \hat{W}_0 \left[S_p^\dagger W_0^p + \phi_a^\dagger \partial^a W_0 \right] + \text{h.c.} \right\}, \quad (6.15)$$

$$V_{-3}(z, S, \phi) = (S^p S_p^\dagger + \phi_a^\dagger \phi^a) \left[\hat{W}_0 \hat{W}_1 + \hat{W}_1 \hat{W}_0 \right], \quad (6.16)$$

$$V_{-4}(z, S, \phi) = (S^p S_p^\dagger + \phi_a^\dagger \phi^a) \hat{W}_0 \hat{W}_0. \quad (6.17)$$

Nous retrouvons certains des résultats établis dans le chapitre 5 ou lors du calcul des dérivées covariantes. D'une part, les puissances positives en la masse de Planck apparaissent uniquement dans le secteur caché, nécessitant un ajustement fin de la théorie pour obtenir une constante cosmologique très faible. D'autre part, les couplages entre les deux secteurs observables ϕ et S sont en m_p^{-1} ; ils sont, par conséquent, négligeables dans la limite $m_p \rightarrow \infty$.

En l'absence du nouveau secteur S , une brisure explicite de la supersymétrie induite par la gravitation - accompagnée de la brisure du secteur électrofaible - nécessite au moins deux échelles d'énergie. La première est l'échelle de la masse de Planck, puisque la supergravité y est brisée dans le secteur caché. La seconde est l'échelle électrofaible présente dans le secteur observable impliquant le mécanisme de Higgs, comme nous le rencontrons à la section 3.1.2 du chapitre 3⁷.

L'introduction d'un nouveau secteur S implique, pour ce dernier, la possibilité d'acquérir une valeur moyenne dans le vide pour des échelles d'énergie différentes des deux autres secteurs (mais nécessairement très inférieures à celle de la masse de Planck). Dans la prochaine section, une étude détaillée du champ S est réalisée, avec quelques conséquences à basse énergie, lorsque ce dernier développe une valeur moyenne dans le vide.

6.1.2 Brisure de la supergravité et analyse

La supergravité est brisée spontanément lorsque le secteur caché développe une valeur moyenne dans le vide à l'échelle de la masse de Planck. Le gravitino, le paramètre d'ordre de cette transition de phase, acquiert une masse donnée par

$$m_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{m_p^2} \left\langle W e^{\frac{1}{2} K_2} \right\rangle. \quad (6.18)$$

7. D'autres échelles intermédiaires peuvent être présentes dans les fonctions du superpotentiel (échelle de Grande Unification, échelle de brisure de la supersymétrie, etc).

Ce dernier contrôle la brisure de la supersymétrie dans le secteur observable via la génération des termes de brisure douce. L'analyse à basse énergie du secteur observable ϕ (en termes de développement d'une valeur moyenne dans le vide et/ou de brisure de symétrie) étant équivalente à celle dans le cas des solutions de Soni et Weldon, nous étudions dans cette section uniquement le nouveau secteur S .

Nous allons contraindre l'échelle d'énergie du secteur S lorsqu'il développe une valeur moyenne dans le vide. De par la forme du superpotentiel (6.4), la masse du gravitino est

$$m_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{m_p} \left\langle \hat{W}_1 e^{\frac{1}{2}K_2} \right\rangle = \frac{1}{m_p} \left\langle (W_{1,0} + S^p W_{1,p}) e^{\frac{1}{2}K_2} \right\rangle. \quad (6.19)$$

Enfin, nous supposons, pour notre étude, un seul champ par secteur ; z pour le secteur caché, ϕ et S , pour les champs des deux sous-secteurs observables. Un ensemble de trois contraintes naturelles émerge⁸. La première provient de la petitesse de la valeur cosmologique,

$$V_F|_{z=\langle z \rangle, S=\langle S \rangle} = 0, \quad (6.20)$$

où nous imposons sa valeur nulle à l'arbre. Les deux autres consistent à imposer un extrema du potentiel. Nous obtenons donc

$$\frac{\partial V_F}{\partial S_p^\dagger} \Big|_{z=\langle z \rangle, S=\langle S \rangle} = \frac{\partial V_F}{\partial S^p} \Big|_{z=\langle z \rangle, S=\langle S \rangle} = 0, \quad (6.21)$$

et

$$\frac{\partial V_F}{\partial z_i^\dagger} \Big|_{z=\langle z \rangle, S=\langle S \rangle} = \frac{\partial V_F}{\partial z^i} \Big|_{z=\langle z \rangle, S=\langle S \rangle} = 0. \quad (6.22)$$

De ces conditions, nous avons établi cinq équations maîtresses (trois si nous supprimons les conditions sur les conjugués hermitiens) à satisfaire concernant la valeur moyenne du secteur S . L'échelle d'énergie du secteur S étant libre, nous introduisons celles des deux autres secteurs

$$\begin{aligned} W_{1,0} &= M_1^2 w_{1,0}, & W_{1,p} &= M_2 w_{1,p}, \\ W_{0,p} &= M_3^2 w_{0,p}, & W_{0,0}(z, \phi) &= M_4^3 w_0(z, \phi), \\ \phi &= M_4 \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$M_i \ll m_p$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Pour une première étude, nous prenons l'hypothèse simplificatrice suivante $M_1 = M_2 = M_3 = \xi^{-1} M_4 \equiv M = \epsilon m_p$, avec $\epsilon \ll 1$ et le paramètre ξ pour illustrer les fluctuations concernant l'échelle d'énergie du secteur observable.

À partir des conditions provenant de l'annulation de la constante cosmologique (6.20), des extremums du potentiel scalaire (6.21) et (6.22) et des échelles d'énergie, données ci-dessus, nous en déduisons la masse du champ S

$$\begin{aligned} m_S^2 = \frac{M^4}{m_p^2} \frac{1}{\langle |z^\dagger w_1(z) + \partial_z w_1(z)|^2 \rangle} &\left\langle 3|w_1(z)|^4 + \left(|z^\dagger w_1(z) + \partial_a w_1(z)|^2 - 3|w_1(z)|^2 \right)^2 \right. \\ &\left. + \xi^4 \left(|z^\dagger w_1(z) + \partial_a w_1(z)|^2 - 4|w_1(z)|^2 \right) |\partial_\phi w_0(z, \phi)|^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (6.24)$$

et celle du secteur caché

$$m_z^2 = \epsilon^2 m_p^2 e^{\langle z z^\dagger \rangle} \langle |w_{1,p}(z)|^2 + |z^\dagger w_{1,p} + \partial_z w_{1,p}(z)|^2 \rangle. \quad (6.25)$$

Les valeurs moyennes dans le vide des différentes fonctions du secteur caché étant de l'ordre $\mathcal{O}(1)$, les deux masses sont, par conséquent, de l'ordre $m_s \sim \epsilon^2 m_p$ pour le champ S et de $m_z \sim \epsilon m_p$ pour le champ caché. Le facteur ϵ étant très inférieur à 1, il s'ensuit que la masse du champ S est nettement inférieure à celle du champ caché.

8. Pour simplifier l'exercice, nous n'avons pas pris en compte l'analogie des équations (6.21) et (6.22) pour le secteur observable.

Pour conclure, il est à noter que le terme linéaire en S dans le superpotentiel (6.4) peut conduire à des problèmes de divergence liés aux tadpoles [78]. Cependant, il est mentionné dans la référence [78], qu'une symétrie discrète ou continue permet de contrôler les divergences du tadpole.

Une étude du couplage dans le secteur fermionique $\chi^i \chi^j \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j W$, donné à la fin du chapitre 4, a également été faite [1]. Mais par supersymétrie, les propriétés des particules scalaires s'étendent aux particules fermioniques. Les termes dangereux ne sont, par conséquent, pas présents.

Finalement, le champ S étant un singlet par rapport au groupe de jauge du modèle standard ou de ses extensions, nous pouvons nous poser la question de la pertinence de nos solutions pour des modèles comme le *next* modèle standard supersymétrique minimal [79, 80, 78]. Une telle possibilité est envisagée dans notre article [1], précédée de l'analyse présentée ci-dessus.

6.2 Potentiel de Kähler non-canonique

Dans l'analyse du potentiel scalaire pour une fonction K canonique, effectuée dans la section 6.1.2, nous nous sommes principalement intéressés aux conséquences à basse énergie lorsque le champ S acquiert une valeur moyenne dans le vide.

Dans cette section, nous considérons un potentiel de Kähler non-canonique, défini par l'équation (6.1),

$$K(z, z^\dagger, S, S^\dagger, \phi, \phi^\dagger) = m_p^2 K_2(z, z^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger) + K_0^S(z, z^\dagger, S, S^\dagger) + K_0^\phi(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger), \quad (6.26)$$

avec

$$K_0^S(z, z^\dagger, S, S^\dagger) = k_{0,0}(z, z^\dagger) + S^p k_{0,p}(z, z^\dagger) + S_{p^*}^\dagger \bar{k}_0^{p^*}(z, z^\dagger) + S_{p^*}^\dagger \delta^{p^*}{}_p S^p, \quad (6.27)$$

tandis que les autres fonctions sont arbitraires. Enfin, nous supposons que la valeur moyenne dans le vide du secteur S est nulle.

6.2.1 Calcul du potentiel scalaire

Le calcul du potentiel scalaire étant long et fastidieux, nous donnons uniquement les éléments principaux. En effet, pour un potentiel de Kähler non-canonique, les principales difficultés proviennent de l'inversion de la métrique de Kähler. Une telle inversion a déjà été rencontrée dans le chapitre 5 et les calculs sont détaillés dans l'annexe C. Concernant le potentiel de Kähler (6.26), sa définition est analogue à l'hypothèse \mathcal{K}_0 du chapitre 5, avec une subtilité au niveau du secteur observable puisqu'il est séparé en deux sous-secteurs. Cependant, les deux secteurs observables étant découplés à l'ordre m_p^0 du potentiel de Kähler (6.26), il est évident que l'inversion de la métrique kählerienne est équivalente à l'équation (C.15). Son expression est alors donnée par

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} &= (\mathcal{K}_0^0)^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^0)^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^0)^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_0^0)^{i i^*} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathcal{K}_0^0)^{a a^*} & 0 \\ 0 & 0 & \delta^p{}_{p^*} \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_1^0)^{i i^*} & (\mathcal{K}_1^0)^{i a^*} & (\mathcal{K}_1^0)^{i p^*} \\ (\mathcal{K}_1^0)^{a i^*} & 0 & 0 \\ (\mathcal{K}_1^0)^{p i^*} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p^2} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_2^0)^{i i^*} & (\mathcal{K}_2^0)^{i a^*} & (\mathcal{K}_2^0)^{i p^*} \\ (\mathcal{K}_2^0)^{a i^*} & (\mathcal{K}_2^0)^{a a^*} & (\mathcal{K}_2^0)^{a p^*} \\ (\mathcal{K}_2^0)^{p i^*} & (\mathcal{K}_2^0)^{p a^*} & (\mathcal{K}_2^0)^{p p^*} \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (6.28)$$

Au niveau du calcul des dérivées covariantes, l'hypothèse non-canonique de la fonction K influence uniquement celle du secteur caché (ce secteur étant présent à chaque ordre en la masse de Planck, tandis que les deux secteurs observables sont limités à l'ordre m_p^0). En reprenant les mêmes notations que dans le cas canonique, la dérivée covariante du secteur caché est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i W &= \left[(\partial_i W_{1,0} + W_{1,0} \partial_i K_2) + S^p (\partial_i W_{1,p} + W_{1,p} \partial_i K_2) \right] \\ &+ \frac{1}{m_p} \left[(\partial_i W_{0,0} + W_{0,0} \partial_i K_2) + S^p (\partial_i W_{0,p} + W_{0,p} \partial_i K_2) + (W_{1,0} + S^p W_{1,p}) \partial_i K_1 \right] \\ &+ \frac{1}{m_p^2} \left[(W_{1,0} + S^p W_{1,p}) \partial_i (K_0^S + K_0^\phi) + (W_0 + S^p W_{0,p}) \partial_i K_1 \right] + \frac{1}{m_p^3} \left[(W_{0,0} + S^p W_{0,p}) \partial_i (K_0^S + K_0^\phi) \right] \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\equiv \rho_{[\hat{1}]i} \hat{W}_1 + \frac{1}{m_p} [\rho_{[\hat{0}]i} \hat{W}_0 + \hat{W}_1 \partial_i K_1] + \frac{1}{m_p^2} [\hat{W}_1 \partial_i (K_0^S + K_0^\phi) + \hat{W}_0 \partial_i K_1] + \frac{1}{m_p^3} \hat{W}_0 \partial_i (K_0^S + K_0^\phi),$$

celle du secteur S par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_p W &= m_p W_{1,p} + W_{0,p} + \frac{1}{m_p} (W_{1,0} + S^q W_{1,q}) \partial_p K_0^S + \frac{1}{m_p^2} (W_{0,0} + S^q W_{0,q}) \partial_p K_0^S \\ &\equiv m_p W_{1,p} + W_{0,p} + \frac{1}{m_p} \hat{W}_1 \partial_p K_0^S + \frac{1}{m_p^2} \hat{W}_0 \partial_p K_0^S, \end{aligned} \quad (6.30)$$

et enfin celle du secteur ϕ par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a W &= \partial_a W_{0,0} + \frac{1}{m_p} (W_{1,0} + S^p W_{1,p}) \partial_a K_0^\phi + \frac{1}{m_p^2} (W_{0,0} + S^p W_{0,p}) \partial_a K_0^\phi \\ &\equiv \partial_a W_{0,0} + \frac{1}{m_p} \hat{W}_1 \partial_a K_0^\phi + \frac{1}{m_p^2} \hat{W}_0 \partial_a K_0^\phi. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Nous retrouvons une conséquence équivalente à celle obtenue dans la section 6.1.1 : les termes d'interaction entre les deux secteurs observables apparaissent à l'ordre m_p^{-1} , dans l'expression analytique de la dérivée covariante, et par conséquent, dans celle du potentiel scalaire⁹.

À partir de ces dérivées covariantes, et de l'expression analytique de la métrique inverse de Kähler (6.28), le potentiel scalaire est donné par

$$V_F(z, S, \phi) = e^{\frac{K}{m_p^2}} \left[m_p^2 V_2(z) + m_p V_1(z) + V_0(z, S, \phi) + \frac{1}{m_p} V_{-1}(z, S, \phi) + \frac{1}{m_p^2} V_{-2}(z, S, \phi) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{m_p^3} \right) \right]. \quad (6.32)$$

En se basant sur notre analyse du cas canonique - l'expression du superpotentiel étant inchangée -, la masse du gravitino après brisure de la supergravité est donnée par

$$m_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{m_p} \langle \hat{W}_1 e^{\frac{1}{2} K_2} \rangle = \frac{1}{m_p} \langle W_{1,0} e^{\frac{1}{2} K_2} \rangle. \quad (6.33)$$

Le fait que la masse du gravitino soit en m_p^{-1} complique l'analyse après brisure de la supergravité. En effet, des termes en m_p^{-1} (ou m_p^{-2}) peuvent conduire à des termes en m_p^0 , i.e. des termes en $m_{\frac{3}{2}}$ (ou $m_{\frac{3}{2}}^2$). Pour simplifier la discussion, nous parlons de « termes protégés » par la masse du gravitino quand ces termes ne sont pas négligeables à basse énergie, après avoir appliqué la limite $m_p \rightarrow \infty$. Par conséquent, nous avons limité le développement du potentiel scalaire à l'ordre m_p^{-2} puisque les ordres inférieurs ne sont pas protégés par la masse du gravitino et sont négligeables lorsque la limite formelle $m_p \rightarrow \infty$ est appliquée.

Enfin, les ordres en m_p^2 et en m_p ne font intervenir que le secteur caché. Un ajustement fin de la théorie est nécessaire pour rendre compte de la petitesse de la constante cosmologique. Les trois ordres supérieurs du potentiel scalaire sont donnés par

$$V_2(z) = W_{1,p} \delta^p_{p^*} \overline{W}_1^{p^*}, \quad (6.34)$$

$$V_1(z) = W_{0,p} \delta^p_{p^*} \overline{W}_1^{p^*} + W_{1,p} \delta^p_{p^*} \overline{W}_0^{p^*}, \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} V_0(z, S, \phi) &= \partial_a W_0 (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_0 + \left(\rho_{[\hat{1}]i} (\mathcal{K}_0^0)^i_{i^*} \rho_{[\hat{1}]}^{i^* \dagger} - 3 \right) \hat{W}_1 \overline{\hat{W}}_1 + W_{0,p} \delta^p_{p^*} \overline{W}_0^{p^*} \\ &\quad + \left\{ W_{1,p} \left[\delta^p_{p^*} (\partial^{p^*} K_0^S) + (\mathcal{K}_1^0)^p_{i^*} \rho_{[\hat{1}]}^{i^* \dagger} \right] \overline{\hat{W}}_1 + \text{h.c.} \right\} + W_{1,p} (\mathcal{K}_2^0)^p_{p^*} \overline{W}_1^{p^*}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Dans l'écriture ci-dessus, l'expression analytique de V_0 est donnée en fonction des éléments de la métrique inverse \mathcal{K}_α^0 (en reprenant la notation du chapitre 5 avec $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots\}$). En injectant leur expression, une écriture plus compacte, propice à l'analyse, est possible. Nous détaillons, par la suite, le calcul menant à cette écriture en prenant un terme de référence, le calcul étant équivalent pour les autres termes.

9. Cette conséquence résulte du choix de notre solution. Elle ne s'étend pas forcément aux autres solutions obtenues dans le chapitre 5.

Le quatrième terme de l'équation (6.36) est donné par

$$W_{1,p} \left[\delta_{p^*}^p (\partial^{p^*} K_0^S) + (\mathcal{K}_1^0)^p {}_{i^*} \rho_{[1,0]}^{i^* \dagger} \right] \overline{W}_1^0, \quad (6.37)$$

où nous avons décomposé \overline{W}_1 et considéré uniquement le terme \overline{W}_1^0 . En injectant les éléments de matrices, définis dans l'équation (C.12), nous en déduisons l'expression suivante

$$W_{1,p} \left[\delta_{p^*}^p (\partial^{p^*} K_0^S) - \delta_{p^*}^p (K_0^S)^{p^*} {}_i (K_2^{-1})^i {}_{i^*} \rho_{[1,0]}^{i^* \dagger} \right] \overline{W}_1^0. \quad (6.38)$$

En introduisant la fonction générique suivante

$$\tilde{\rho}_{[\ell,\wp]}^i = (K_2^{-1})^i {}_{i^*} \rho_{[\ell,\wp]}^{i^* \dagger}, \quad \text{avec } \ell \in \{0, 1\} \text{ et } \wp \in \{0, p\}, \quad (6.39)$$

définie à partir de $(K_2^{-1})^i {}_{i^*}$ et de la fonction ρ de l'équation (6.7)¹⁰, le terme de référence s'écrit

$$W_{1,p} \left[\delta_{p^*}^p (\partial^{p^*} K_0^S) - \delta_{p^*}^p \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \partial_i (\partial^{p^*} K_0^S) \right] \overline{W}_1^0, \quad (6.40)$$

que nous simplifions en regroupant les mêmes termes

$$W_{1,p} \left[\delta_{p^*}^p \left(1 - \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \partial_i \right) \right] (\partial^{p^*} K_0^S) \overline{W}_1^0. \quad (6.41)$$

Enfin, nous définissons la fonction générique suivante

$$(\tilde{R}_{[N]})^M {}_{M^*} = (R)^M {}_{M^*} \left(1 - \tilde{\rho}_{[1,N]}^i \overleftarrow{\partial}_i \right), \quad \text{avec } M \in \{i, a, p\} \text{ et } N \in \{0, p\}, \quad (6.42)$$

avec $(R)^M {}_{M^*} \in \{(K_2^{-1})^i {}_{i^*}, \delta_{p^*}^p, ([K_0^\phi]^{-1})^a {}_{a^*}\}$ correspondant à l'élément de matrice de plus haut degré après inversion, ainsi que son conjugué hermitien

$$([\tilde{R}_{[N]}]^\dagger)^M {}_{M^*} = \left(1 - \overleftarrow{\partial}^{i^*} \tilde{\rho}_{[1,N]i^*}^\dagger \right) \delta^M {}_{M^*}, \quad \text{avec } M \in \{i, a, p\} \text{ et } N \in \{0, p\}, \quad (6.43)$$

où l'opérateur différentiel $\overleftarrow{\partial}$ correspond à une action à gauche, i.e. $f \overleftarrow{\partial} g = (\partial f)g$. À partir de ces définitions, le terme de référence s'écrit

$$W_{1,p} \tilde{R}_{p^*}^p (\partial^{p^*} K_0^S) \overline{W}_1^0. \quad (6.44)$$

Par ce procédé, les informations essentielles sont contenues dans cette expression. L'information concernant l'inversion de la métrique est donnée par la fonction \tilde{R} introduite, tandis que nous faisons ressortir la dépendance du terme de référence, par rapport au secteur S , au travers de $(\partial^{p^*} K_0^S)$.

En utilisant ces différentes fonctions, l'expression V_0 est réécrite de la manière suivante

$$\begin{aligned} V_0(z, S, \phi) &= \partial_a W_0 ([K_0^\phi]^{-1})^a {}_{a^*} \partial^{a^*} \overline{W}_0 + \left(\tilde{\rho}_{[1]i^*}^\dagger (K_2)^{i^*} {}_{i^*} \tilde{\rho}_{[1]}^i - 3 \right) \hat{W}_1 \overline{W}_1 + W_{0,p} \delta_{p^*}^p \overline{W}_0^{p^*} \\ &+ \left\{ W_{1,p} (\tilde{R}_{[0]})^p {}_{p^*} (\partial^{p^*} K_0^S) \overline{W}_1^0 + W_{1,p} (\tilde{R}_{[q]})^p {}_{p^*} (\partial^{p^*} K_0^S) S_q^\dagger \overline{W}_1^{q^*} + \text{h.c.} \right\} + W_{1,p} (\mathcal{K}_2^0)^p {}_{p^*} \overline{W}_1^{p^*}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

En ce qui concerne les ordres en m_p^{-1} et m_p^{-2} , nous nous sommes uniquement intéressés aux termes non-négligeables dans la limite $m_p \rightarrow \infty$, i.e. protégés par la masse du gravitino. À partir de la définition de la masse du gravitino (6.33), ces termes sont, au minimum, proportionnels à $\overline{W}_{1,0}$ ou \overline{W}_1^0 pour m_p^{-1} et nécessairement proportionnels à $W_{1,0} \overline{W}_1^0$ pour m_p^{-2} . Les termes non-négligeables pour les différents ordres du potentiel scalaire (6.32) sont donnés par

$$V_{-1}(z, S, \phi) = \left\{ \left(\tilde{\rho}_{[0]i^*}^\dagger (K_2)^{i^*} {}_{i^*} \tilde{\rho}_{[1,0]}^i - 3 \right) \hat{W}_0 \overline{W}_1^0 + \partial_a W_0 \tilde{R}^a {}_{a^*} (\partial^{a^*} K_0^\phi) \overline{W}_1^0 + W_{0,p} \tilde{R}_{p^*}^p (\partial^{p^*} K_0^S) \overline{W}_1^0 \right. \quad (6.46)$$

10. La nouvelle fonction $\tilde{\rho}$ reprend les mêmes caractéristiques de la fonction ρ concernant les indices entre crochets. Le conjugué hermitien $\tilde{\rho}_{[\ell,\wp]}^{i^* \dagger}$ est également défini.

$$\begin{aligned}
V_{-2}(z, S, \phi) = & W_{1,0}W_1^0 \left[(\partial_i K_1) \tilde{S}^i_{i^*} (\partial^{i^*} K_1) + (\partial_a K_0^\phi) \tilde{S}^a_{a^*} (\partial^{a^*} K_0^\phi) \right. \\
& \left. - W_{1,p} \delta^p_{p^*} (K_0^S)^{p^*} \tilde{R}^i_{i^*} \partial^{i^*} K_1 W_1^0 + S^p W_{1,p} W_1^0 \tilde{Y}_{[p]} K_1 + \text{h.c.} \right] + W_{1,0} W_1^0 \tilde{Y}_{[0]} K_1 + \dots, \\
& + (\partial_p K_0^S) \tilde{S}^p_{p^*} (\partial^{p^*} K_0^S) + \tilde{Y}_{[0]} (K_0^\phi + K_0^S) \Big] + \dots,
\end{aligned} \tag{6.47}$$

où nous avons défini les fonctions génériques

$$\tilde{Y}_{[M]} = \tilde{\rho}^\dagger_{[1,M]i^*} \partial^{i^*} + \tilde{\rho}^{i^\dagger}_{[1,M]} \partial_i - \tilde{\rho}^\dagger_{[1,M]i^*} \tilde{\rho}^{i^\dagger}_{[1,M]} \partial_i \partial^{i^*}, \quad \text{avec } M \in \{0, p\}, \tag{6.48}$$

et

$$\tilde{S}^M_{M^*} = \left(1 - \overleftarrow{\partial}^{i^*} \tilde{\rho}^\dagger_{[1,0]i^*} \right) (S)^M_{M^*} \left(1 - \tilde{\rho}^i_{[1,0]} \overrightarrow{\partial}_i \right), \tag{6.49}$$

avec $(S)^M_{M^*} \in \{(K_2^{-1})^i_{i^*}, \delta^p_{p^*}, ([K_0^\phi]^{-1})^a_{a^*}\}$ l'analogue de $(R)^M_{M^*}$ pour la fonction \tilde{R} de l'équation (6.42).

Dans la prochaine partie de cette section, nous effectuons une analyse du potentiel scalaire après brisure de la supergravité en supposant le contenu en champs du modèle standard supersymétrique minimal pour le secteur ϕ , détaillé dans le chapitre 3, et menant aux termes de brisure douce, donnés à l'équation (3.9).

6.2.2 Brisure de la supergravité

La brisure de la supergravité se produit quand un des champs du secteur caché développe une valeur moyenne dans le vide à l'échelle de la masse de Planck. Les échelles d'énergie du secteur observable - ϕ et S - étant nettement inférieures devant m_p , nous supposons que les valeurs moyennes dans le vide des champs ϕ et des champs S sont nulles en comparaison de celles du secteur caché.

Dans le cadre de la brisure dynamique de la supergravité, le paramètre d'ordre de la transition de phase correspond à la masse du gravitino définie par

$$m_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{m_p} \langle e^{\frac{1}{2}K_2} \rangle W_{1,0}|_{z=\langle z \rangle}. \tag{6.50}$$

À la différence des modèles qui supposent pour le superpotentiel un ordre maximal en m_p^2 ¹¹, le choix du superpotentiel, donné par l'équation (6.4), implique une masse du gravitino très petite, puisque en m_p^{-1} . En tenant compte de cette définition, une partie des termes à l'ordre m_p^{-1} et m_p^{-2} est protégée à basse énergie lorsque la limite formelle est appliquée. Cependant, ce n'est pas l'unique conséquence. La masse du gravitino protège aussi des termes provenant de certains développements perturbatifs - venant de la limite formelle $m_p \rightarrow \infty$ du potentiel scalaire (6.32) - que nous présentons.

En partant du potentiel de Kähler, défini en (6.26), la limite formelle $m_p \rightarrow \infty$ implique un développement perturbatif de l'exponentielle donné par

$$\exp \left(K_2 + \frac{1}{m_p} K_1 + \frac{1}{m_p^2} (K_0^S + K_0^\phi) \right) = e^{K_2} \left[1 + \frac{1}{m_p} K_1 + \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{1}{2} (K_1)^2 + K_0^S + K_0^\phi \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{m_p^3} \right) \right]. \tag{6.51}$$

Mais en considération de la masse du gravitino qui protège les ordres m_p^{-1} et m_p^{-2} (au travers de la fonction $W_{1,0}$), un ensemble de nouveaux termes est induit

$$V^{\text{exp}} = \left[m_p K_1 + \left(\frac{1}{2} (K_1)^2 + K_0^S + K_0^\phi \right) \right] V_2(z) + K_1 V_1(z) + \frac{1}{m_p} K_1 \left[\tilde{V}_0(z, S, \phi) + \tilde{V}_{-1}(z, S, \phi) \right] \tag{6.52}$$

11. En supposant un superpotentiel du même type que celui proposé par Soni et Weldon

$$W(z, \phi) = m_p^2 W_2(z) + m_p W_1(z) + W_0(z, \phi),$$

la masse du gravitino est, d'après l'équation (4.57) et pour un même potentiel de Kähler, donnée par

$$m_{\frac{3}{2}} = \langle W_2 e^{\frac{1}{2}K_2} \rangle.$$

Cette définition implique qu'après une brisure de la supergravité, seuls les termes en m_p^0 ne sont pas négligeables, dans la limite où la masse de Planck tend vers ∞ .

$$+ \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{1}{2} (K_1)^2 + K_0^S + K_0^\phi \right) \tilde{V}_0(z, S, \phi),$$

où nous appelons \tilde{V}_0 les termes présents dans la fonction V_0 qui contiennent un terme soit en $W_{1,0}$, soit en W_1^0 , et \tilde{V}_0 (et \tilde{V}_{-1}) les termes présents dans la fonction V_0 (et V_{-1}) qui sont nécessairement proportionnels à $W_{1,0}W_1^0$.

Un second type de développement perturbatif de certains termes, provenant de la substitution $\langle z \rangle \rightarrow z + \langle z \rangle$, engendre de nouveaux termes non-négligeables par la masse de Planck. Ces termes interviennent à l'ordre $m_{\frac{3}{2}}$ et impliquent des interactions entre le secteur S et le secteur caché. Nous illustrons ce développement pour un terme particulier ; le raisonnement étant identique pour l'ensemble des expressions. En s'intéressant de nouveau à notre terme de référence ¹²

$$W_{1,0}(z)[(\partial_p K_0^S)(\tilde{R}_{[0]})^p{}_{p^*} \overline{W}_1^{p^*}](z, z^\dagger), \quad (6.53)$$

le développement perturbatif du secteur caché s'écrit (nous écrivons uniquement les deux ordres prédominants)

$$\begin{aligned} & \left[W_{1,0}(\langle z \rangle) + (z^i - \langle z^i \rangle) \langle W_{1,0} \rangle (\partial_i \ln W_{1,0}) \Big|_{z=\langle z \rangle} \right] \left[[\partial_p K_0^S (\tilde{R}_{[0]})^p{}_{p^*} \overline{W}_1^{p^*}](\langle z \rangle, \langle z^\dagger \rangle) + \right. \\ & \left. (z^i - \langle z^i \rangle) \partial_i \left([\partial_p K_0^S (\tilde{R}_{[0]})^p{}_{p^*} \overline{W}_1^{p^*}] \Big|_{z=\langle z \rangle} \right) + (z_i^\dagger - \langle z_i^\dagger \rangle) \partial^{i^*} \left([\partial_p K_0^S (\tilde{R}_{[0]})^p{}_{p^*} \overline{W}_1^{p^*}] \Big|_{z^\dagger=\langle z^\dagger \rangle} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Le calcul de l'expression ci-dessus génère trois contributions différentes, que nous regroupons de la manière suivante

$$(V_z^{\text{DL}}) + (V_S^{\text{DL}}) \Big|_{z=\langle z \rangle} + (V_{z-S}^{\text{DL}}). \quad (6.55)$$

La première contribution correspond à une partie du potentiel scalaire qui dépend uniquement du secteur caché, tandis que la seconde, contribue à une partie du potentiel scalaire dépendant uniquement du champ S (l'ensemble du secteur caché ayant acquis une valeur moyenne dans le vide). Enfin, la dernière contribution résulte d'une interaction entre le secteur caché z et le secteur S donnée par l'expression

$$(V_{z-S}^{\text{DL}}) = z^i \left[W_{1,0} \left(\partial_i (\ln W_{1,0}) [(\partial_p K_0^S)(\tilde{R}_{[0]})^p{}_{p^*} \overline{W}_1^{p^*}] + \partial_i \left([(\partial_p K_0^S)(\tilde{R}_{[0]})^p{}_{p^*} \overline{W}_1^{p^*}] \right) \right) \Big|_{z=\langle z \rangle} + \text{h.c.} \right] \quad (6.56)$$

De par la définition de la masse du gravitino, ce terme devient non-négligeable à basse énergie. En effet, la redéfinition du champ $\zeta^i = m_p z^i$, couplée à la fonction $W_{1,0}$, conduit à une interaction entre le secteur caché et le secteur S - présent dans le terme $\partial_p K_0^S$ - de l'ordre de la masse du gravitino.

Pour alléger l'expression finale du potentiel scalaire, nous introduisons différentes notations concernant les fonctions dépendants uniquement du secteur caché (en supposant maintenant que ce dernier a développé une valeur moyenne dans le vide). Pour les fonctions du superpotentiel, de manière analogue à la définition de la masse du gravitino, nous absorbons le facteur de l'exponentielle dans les redéfinitions suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{0,0} &= \langle e^{\frac{1}{2}K_2} \rangle W_{0,0} \Big|_{z=\langle z \rangle}, & \mathcal{W}_{1,0} &= \langle e^{\frac{1}{2}K_2} \rangle W_{1,0} \Big|_{z=\langle z \rangle}, \\ \mathcal{W}_{0,p} &= \langle e^{\frac{1}{2}K_2} \rangle W_{0,p} \Big|_{z=\langle z \rangle}, & \mathcal{W}_{1,p} &= \langle e^{\frac{1}{2}K_2} \rangle W_{1,p} \Big|_{z=\langle z \rangle}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Pour éviter toute ambiguïté entre la partie cachée d'une fonction du potentiel de Kähler et les éléments de matrice provenant de l'inversion de la métrique, nous introduisons la notation chapeauté $\hat{\mathcal{K}}$ pour l'ensemble des fonctions du potentiel de Kähler. Ainsi, les différentes fonctions sont notées

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_0^\phi &= K_0^\phi \Big|_{z=\langle z \rangle}, & \hat{\mathcal{K}}_0^S &= K_0^S \Big|_{z=\langle z \rangle}, \\ \hat{\mathcal{K}}_1 &= K_1 \Big|_{z=\langle z \rangle}, & \hat{\mathcal{K}}_2 &= K_2 \Big|_{z=\langle z \rangle}, \end{aligned} \quad (6.58)$$

12. La masse du gravitino étant définie à partir de la fonction $W_{1,0}$ et du fait que nous considérons uniquement le secteur caché, le terme de référence est supposé par $W_{1,0}(z)F(z, z^\dagger)$ avec F une fonction générique.

lorsque les champs du secteur caché ont développé une valeur moyenne dans le vide. Nous reprenons cette notation pour la fonction génératrice $\tilde{\rho}$ et nous introduisons de manière globale la seconde notation

$$\hat{\rho} = \tilde{\rho}|_{z=\langle z \rangle} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \tilde{F}|_{z=\langle z \rangle}, \quad (6.59)$$

pour n'importe quelle fonction dépendant de la valeur moyenne dans le vide du secteur caché, après brisure de la supergravité.

Après brisure dynamique de la supergravité, le potentiel scalaire se décompose en quatre contributions différentes (le raisonnement est identique à celui rencontré précédemment), selon

$$\mathcal{V}_F = \mathcal{V}_z + \mathcal{V}_S + \mathcal{V}_{z-S} + \mathcal{V}_\phi. \quad (6.60)$$

La première contribution \mathcal{V}_z comporte uniquement la partie du potentiel scalaire dépendant du secteur caché et de la valeur moyenne dans le vide de ce dernier. Sans donner son expression analytique, car elle n'est pas nécessaire pour la suite, nous devinons, d'après l'écriture initiale du potentiel scalaire (6.32), les différents ordres qui la composent. Allant de l'ordre maximal m_p^2 à l'ordre minimal $m_{\frac{3}{2}}^2$, un ajustement fin de la théorie est nécessaire de manière à être en accord avec la valeur expérimentale de la constante cosmologique.

Le deuxième terme \mathcal{V}_S du potentiel scalaire, après brisure de la supergravité, dépend uniquement du secteur S et des valeurs moyennes du secteur caché. Il est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_S = & S^p \mathcal{W}_{1,p} \left(\hat{\rho}_{[1,p]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} i \hat{\rho}_{[1,p]}^i - 3 \right) \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} S_{p^*}^\dagger + \hat{\mathcal{K}}_0^S \mathcal{W}_{1,p} \delta_{p^*}^p \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} + \mathcal{W}_{1,p} (\hat{\mathcal{K}}_2^0)^p \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} \\ & + \left\{ \mathcal{W}_{1,0} \left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} i \hat{\rho}_{[1,p]}^i - 3 \right) \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} S_{p^*}^\dagger + \mathcal{W}_{1,0} (\partial_p \hat{\mathcal{K}}_0^S) (\mathcal{R}_{[0]})^p \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} + S^q \mathcal{W}_{1,q} (\partial_p \hat{\mathcal{K}}_0^S) (\mathcal{R}_{[q]})^p \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} + \text{h.c.} \right\} \\ & + \left\{ m_{\frac{3}{2}} S_{p^*}^\dagger \left[\left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} i \hat{\rho}_{[0,p]}^i - 3 \right) \overline{\mathcal{W}}_0^{p^*} + \hat{\mathcal{K}}_1 \left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} i \hat{\rho}_{[1,p]}^i - 3 \right) \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} + \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} \mathcal{Y}_{[p^*]} \hat{\mathcal{K}}_1 \right] + \text{h.c.} \right\} \\ & + \left\{ m_{\frac{3}{2}} \left[\hat{\mathcal{K}}_1 (\partial_p \hat{\mathcal{K}}_0^S) (\mathcal{R}_{[0]})^p \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} - (\partial_i \hat{\mathcal{K}}_1) (\mathcal{R}_{[0]})^i (\hat{\mathcal{K}}_0^S)^{i^*} \delta_{p^*}^p \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} \right] + \text{h.c.} \right\} \\ & + m_{\frac{3}{2}}^2 \left[(\partial_p \hat{\mathcal{K}}_0^S) S_{p^*}^\dagger (\partial^{p^*} \hat{\mathcal{K}}_0^S) + \left(\left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} i \hat{\rho}_{[1,0]}^i - 3 \right) + \mathcal{Y}_{[0]} \right) \hat{\mathcal{K}}_0^S \right], \end{aligned} \quad (6.61)$$

et, du à la définition de la fonction K_0^S , donnée dans l'équation (6.27), il est composé uniquement de termes de masse ou de termes linéaires pour la partie scalaire du nouveau secteur S . Les conséquences à basse énergie sont équivalentes à celles présentées en fin de section.

La troisième contribution \mathcal{V}_{z-S} provient du développement perturbatif présenté avant brisure de la supergravité. Elle est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{z-S} = & m_{\frac{3}{2}} \zeta^i S_{p^*}^\dagger \left[\overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} \partial_i (\ln \mathcal{W}_{1,0}) \left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} i \hat{\rho}_{[1,p]}^i - 3 \right) + \partial_i \left(\overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} \left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} i \hat{\rho}_{[1,p]}^i - 3 \right) \right) \right] \\ & + m_{\frac{3}{2}} \zeta^i \left[(\partial_i \ln \mathcal{W}_{1,0}) (\partial_p \hat{\mathcal{K}}_0^S) (\mathcal{R}_{[0]})^p \overline{\mathcal{W}}_0^{p^*} + \partial_i \left((\partial_p \hat{\mathcal{K}}_0^S) (\mathcal{R}_{[0]})^p \overline{\mathcal{W}}_0^{p^*} \right) \right] + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (6.62)$$

où des couplages bilinéaires entre ζ et S se distinguent et sont à considérer lors de la diagonalisation de la matrice de masse.

L'analyse physique du secteur S , étant équivalente de celle présentée dans la section 6.1.2, nous nous intéressons uniquement au secteur observable ϕ et aux différents termes de brisure douce qui las composent.

La dernière contribution \mathcal{V}_ϕ du potentiel scalaire, après brisure de la supergravité, dépend uniquement du secteur ϕ . Elle est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\phi = & \partial_a \mathcal{W}_{0,0} ((\hat{\mathcal{K}}_0^\phi)^{-1})^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{\mathcal{W}}_{0,0} + \mathcal{W}_{1,p} \delta_{p^*}^p \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} \hat{\mathcal{K}}_0^\phi \\ & + \left\{ m_{\frac{3}{2}} \left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} i \hat{\rho}_{[0,0]}^i - 3 \right) \overline{\mathcal{W}}_{0,0} + m_{\frac{3}{2}} \partial_a \hat{\mathcal{K}}_0^\phi (\mathcal{R}_{[0]})^a_{a^*} \partial^{a^*} \overline{\mathcal{W}}_0 + \text{h.c.} \right\} \\ & + m_{\frac{3}{2}}^2 \left[\partial_a \hat{\mathcal{K}}_0^\phi S^a_{b^*} \partial^{b^*} \mathcal{K}_0^\phi + \mathcal{Y}_{[0]} \hat{\mathcal{K}}_0^\phi + \left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} i \hat{\rho}_{[1,0]}^i - 3 \right) \hat{\mathcal{K}}_0^\phi \right], \end{aligned} \quad (6.63)$$

et son expression est le coeur de la prochaine partie.

Dans cette section, la brisure de la supergravité a généré un ensemble de quatre contributions majeures. Parmi ces différentes contributions, la dernière présentée est composée uniquement du secteur observable ϕ . Dans la prochaine section, nous étudions les conséquences d'une telle expression analytique à basse énergie, appliquée dans un cadre particulier.

6.2.3 Analyse du secteur ϕ

Dans le chapitre 3, la définition du superpotentiel pour le modèle standard supersymétrique minimal a conduit à un problème de naturalité concernant le paramètre μ car aucun mécanisme ne permet de préserver son échelle d'énergie proche de celle du secteur électrofaible¹³. Dans le cadre du cas canonique de la section 6.1.2, l'introduction d'un singlet de jauge [79, 80] - par rapport au groupe de jauge du modèle standard - conduit naturellement l'échelle d'énergie du paramètre μ à l'échelle d'énergie électrofaible.

Dans le cadre de la supergravité, l'utilisation de fonctions non-renormalisables dans la définition du superpotentiel [81] ou du potentiel de Kähler [82] permet d'introduire un mécanisme naturel pour préserver également l'échelle d'énergie du paramètre μ . Dans le cadre de l'analyse de notre nouvelle solution (6.3), nous avons choisi l'approche de Giudice et Masiero [82], en reprenant les mêmes suppositions concernant l'expression analytique des fonctions. Ainsi, nous spécifions les fonctions associées aux secteurs observables

$$\begin{cases} K_0^\phi(z, z^\dagger, \phi, \phi^\dagger) &= \phi_{a^*}^\dagger \Lambda^{a^*}{}_a(z, z^\dagger) \phi^a + \sum_m g_m(z, z^\dagger) (k_m(\phi) + k_m(\phi^\dagger)), \\ W_{0,0}(z, \phi) &= \sum_n c_n(z) w_n(\phi), \end{cases} \quad (6.64)$$

où les fonctions k_m et w_n sont respectivement bilinéaire et trinéaire en ϕ de manière à obtenir une supersymétrie renormalisable. Avant de débiter, nous allons de nouveau introduire des fonctions génériques inspirées de celles utilisées par Giudice et Masiero [82]. À partir des fonctions introduites dans la section 6.2.2 et des expressions analytiques des fonctions K_0^ϕ et $W_{0,0}(z, \phi)$, ces fonctions sont définies par

$$\mathcal{S}^{a^*}{}_a = \left\langle \Lambda^{a^*}{}_a + \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \left((\partial_i \Lambda^{a^*}{}_b) (\Lambda^{-1})^b{}_{b^*} (\partial^{i^*} \Lambda^{b^*}{}_a) - (\partial_i \partial^{i^*} \Lambda^{a^*}{}_a) \right) \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger \right\rangle, \quad (6.65)$$

$$\mathcal{R}^a{}_b = \delta^a{}_b - \left\langle (\Lambda^{-1})^a{}_{a^*} \tilde{\rho}_{[1,0]}^i (\partial_i \Lambda^{a^*}{}_b) \right\rangle, \quad (6.66)$$

$$A_n = \left\langle \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \partial_i (\ln c_n + K_2) \right\rangle, \quad (6.67)$$

$$\mu_m = m_{\frac{3}{2}} \left\langle \left(1 - \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger \partial^{i^*} \right) g_m(z, z^\dagger) \right\rangle, \quad (6.68)$$

$$B_m = \left\langle \frac{\left(2 + \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \partial_i - \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger \partial^{i^*} - \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger \partial_i \partial^{i^*} \right) g_m(z, z^\dagger)}{\left(1 - \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger \partial^{i^*} \right) g_m(z, z^\dagger)} \right\rangle, \quad (6.69)$$

où $\langle \rangle$ indique que les champs z ont développé leur valeur moyenne dans le vide. Enfin, nous en déduisons

$$\mathcal{W}_n(\phi) = \langle e^{\frac{1}{2}K_2} c_n(z) \rangle w_n(\phi) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}(\phi) = \sum_n \mathcal{W}_n(\phi) + \sum_m \mu_m k_m(\phi), \quad (6.70)$$

provenant de la composition des fonctions arbitraires définies à l'équation (6.64).

À partir de ces fonctions, la contribution du potentiel scalaire (6.63) dans le secteur ϕ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\phi &= \partial_a \mathcal{W} \langle (\Lambda^{-1})^a{}_{a^*} \rangle \partial^{a^*} \overline{\mathcal{W}} + m_{\frac{3}{2}}^2 \phi_{a^*}^\dagger \mathcal{S}^{a^*}{}_a \phi^a \\ &+ \left\{ m_{\frac{3}{2}}^\dagger \left[\partial_a \mathcal{W} \mathcal{R}^a{}_b \phi^b + \sum_n (A_n - 3) \mathcal{W}_n + \sum_m (B_m - 2) \mu_m k_m \right] + \text{h.c.} \right\} \end{aligned} \quad (6.71)$$

13. Le problème survient pour n'importe quel terme bilinéaire dans l'expression du superpotentiel.

$$+ \left[\phi_{a^*}^\dagger \langle \Lambda^{a^*} \rangle \phi^a + \sum_m \langle g_m \rangle \left(k_m(\phi) + k_m(\phi^\dagger) \right) \right] \left[\mathcal{W}_{1,p} \delta^p_{p^*} \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} + m_{\frac{3}{2}}^2 \left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} \hat{\rho}_{[1,0]}^i - 3 \right) \right].$$

Cette expression comporte le potentiel scalaire de la supersymétrie globale - premier terme - et les termes de brisure douce usuels, à savoir, une masse pour les particules scalaires, un couplage trilinéaire - A_n - et un couplage bilinéaire - B_n . De plus, l'ensemble de ces termes de brisure est relié à la masse du gravitino (conséquence de la brisure de la supergravité), définie dans l'équation (6.50). Enfin, le terme bilinéaire est proportionnel à la fonction définie pour le potentiel de Kähler k_m et à la fonction introduite dans l'équation (6.68). Ce dernier est directement proportionnel à la masse du gravitino et aux échelles d'énergie intermédiaires se trouvant dans la fonction g_m . Ainsi, l'échelle de masse du paramètre μ est préservée par celle du gravitino et celle présente dans la fonction arbitraire.

Pour alléger l'écriture du potentiel scalaire (6.71), nous introduisons les notations

$$X_S^{\text{exp}} = \mathcal{W}_{1,p} \delta^p_{p^*} \overline{\mathcal{W}}_1^{p^*} \quad \text{et} \quad X_z^{\text{exp}} = \left(\hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger (\hat{\mathcal{K}}_2)^{i^*} \hat{\rho}_{[1,0]}^i - 3 \right), \quad (6.72)$$

résultant du développement perturbatif de l'exponentielle, et nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\phi = & \partial_a \mathcal{W} \langle (\Lambda^{-1})^a_{a^*} \rangle \partial^{a^*} \overline{\mathcal{W}} + \phi_{a^*}^\dagger \left[m_{\frac{3}{2}}^2 (\mathcal{S}^{a^*}_a + \widetilde{\mathcal{F}}^{a^*}_a) + \langle \Lambda^{a^*}_a \rangle X_S^{\text{exp}} \right] \phi^a \\ & + \left\{ m_{\frac{3}{2}}^\dagger \left[\partial_a \mathcal{W} \mathcal{R}^a_b \phi^b + \sum_n (A_n - 3) \mathcal{W}_n + \sum_m \left[(B_m - 2) \mu_m + m_{\frac{3}{2}} \langle g_m \rangle X_z^{\text{exp}} \right] k_m \right] + \langle g_m \rangle X_S^{\text{exp}} k_m + \text{h.c.} \right\}, \end{aligned} \quad (6.73)$$

avec

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{a^*}_a = \langle \Lambda^{a^*}_a \rangle X_z^{\text{exp}}. \quad (6.74)$$

Mais, en comparaison de l'expression (6.69), nous définissons la variable \widetilde{B}_m donnée par

$$\widetilde{B}_m = \frac{X_z^{\text{exp}} \langle g_m(z, z^\dagger) \rangle}{\langle (1 - \hat{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger \partial^{i^*}) g_m(z, z^\dagger) \rangle}, \quad (6.75)$$

menant à l'écriture finale du potentiel scalaire

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\phi = & \partial_a \mathcal{W} \langle (\Lambda^{-1})^a_{a^*} \rangle \partial^{a^*} \overline{\mathcal{W}} + \phi_{a^*}^\dagger \left[m_{\frac{3}{2}}^2 (\mathcal{S}^{a^*}_a + \widetilde{\mathcal{F}}^{a^*}_a) + \langle \Lambda^{a^*}_a \rangle X_S^{\text{exp}} \right] \phi^a \\ & + \left\{ m_{\frac{3}{2}}^\dagger \left[\partial_a \mathcal{W} \mathcal{R}^a_b \phi^b + \sum_n (A_n - 3) \mathcal{W}_n + \sum_m (B_m + \widetilde{B}_m - 2) \mu_m k_m \right] + \langle g_m \rangle X_S^{\text{exp}} k_m + \text{h.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (6.76)$$

En combinant les hypothèses concernant la forme du superpotentiel W (6.4), du potentiel de Kähler K (6.26) et du secteur observable ϕ (6.64), nous en déduisons l'expression du potentiel scalaire dans le secteur observable, après brisure de la supergravité, ci-dessus. Ce dernier est composé du potentiel scalaire de la supersymétrie globale (premier terme) et des termes de brisure douce (masse, bilinéaire, trilinéaire).

Une différence majeure dans l'écriture des termes de brisure douce apparaît. Alors que ces derniers sont généralement contrôlés par la masse du gravitino [42], le développement perturbatif de l'exponentielle conduit à une contribution, pour la masse des scalaires et pour le terme bilinéaire, qui n'est pas paramétrée par la masse du gravitino. Devant la faible masse du gravitino, la contribution X_S^{exp} permettrait ainsi d'avoir une échelle d'énergie plus importante des termes de masses et des termes bilinéaires.

Cependant, de manière à obtenir une faible valeur de la constante cosmologique, il est nécessaire d'imposer un potentiel scalaire nul à l'arbre (lorsque les champs du secteur caché ont développé leur valeur moyenne dans le vide). D'après l'équation (6.32), une telle condition implique, par conséquent, $\langle V_i \rangle = 0$ pour chaque ordre en la masse de Planck, avec i l'ordre correspondant. D'après les équations (6.34) et (6.72), nous en déduisons la conséquence

$$\langle V_2(z) \rangle = \langle W_{1,p} \delta^p_{p^*} \overline{W}_1^{p^*} \rangle = X_S^{\text{exp}} = 0. \quad (6.77)$$

Les contributions non-paramétrées par la masse du gravitino sont finalement nulles, et le potentiel scalaire

a finalement pour expression

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\phi = & \partial_a \mathcal{W} \langle (\Lambda^{-1})^a_{a^*} \rangle \partial^{a^*} \mathcal{W} + m_{\frac{2}{3}}^2 (\mathcal{S}^{a^*}_a + \widetilde{\mathcal{F}}^{a^*}_a) \phi_{a^*}^\dagger \phi^a \\ & + \left\{ m_{\frac{3}{2}}^\dagger \left[\partial_a \mathcal{W} \mathcal{R}^a_b \phi^b + \sum_n (A_n - 3) \mathcal{W}_n + \sum_m (B_m + \widetilde{B}_m - 2) \mu_m k_m \right] + \text{h.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Enfin, dans le papier de Giudice et Masiero [82], la condition

$$\langle \Lambda^{a^*}_a \rangle = \delta^{a^*}_a \quad (6.79)$$

a été supposée de manière à obtenir des termes cinétiques - pour les scalaires et les fermions - correctement normalisés. Mais une telle hypothèse n'est pas nécessaire car une redéfinition des champs est toujours possible. Pour la suite, nous supposons alors simplement la condition

$$\Lambda^{a^*}_a(z, z^\dagger) \equiv \Lambda_A(z, z^\dagger) \delta^{a^*}_a. \quad (6.80)$$

Les expansions en série de Taylor de l'exponentielle et d'une partie des fonctions du secteur caché ont engendré des nouvelles contributions pour les termes de brisure douce. Il est, par conséquent, intéressant d'étudier leurs conséquences dans un modèle supersymétrique particulier.

6.2.4 Application au modèle standard supersymétrique minimal

L'expression du potentiel scalaire (6.78) est donnée indépendamment du contenu en champs du secteur observable. Nous allons, pour finir cette section, spécifier le contenu en champs en considérant celui du modèle standard supersymétrique minimal, introduit dans le chapitre 3 pour le groupe de jauge $G = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Le secteur de la matière contient trois différentes générations f ¹⁴ de superchamps chiraux, avec $f \in \{1, 2, 3\}$, qui sont données, d'après la table 3.2, par

$$\begin{aligned} Q_L^f &= \left(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6} \right), & U_L^f &= \left(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3} \right), & D_L^f &= \left(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3} \right), \\ L_L^f &= \left(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2} \right), & E_L^f &= \left(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1 \right), & N_L^f &= \left(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0 \right). \end{aligned} \quad (6.81)$$

Pour cette analyse, nous décidons de tenir compte des neutrinos, via le superchamp N_L^f défini par

$$N_L^f = \left((\tilde{\nu}_R^f)^\dagger, (\nu_R^f)^c, F_\nu^f \right). \quad (6.82)$$

De sorte à alléger l'écriture du potentiel de Kähler K_0^ϕ , nous définissons le superchamp générique Φ_f^a , avec $f \in \{1, 2, 3\}$ et $a \in \{1, \dots, 6\}$ ¹⁵, comprenant ainsi les trois générations et les six superchamps du secteur de la matière. Concernant le secteur du Higgs, celui-ci est donné, d'après la table 3.3, par

$$H_d = \left(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad H_u = \left(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2} \right). \quad (6.83)$$

Nous introduisons un superchamp générique Φ_h^α , avec $\alpha \in \{u, d\}$ pour le secteur du Higgs. Il s'ensuit l'écriture d'un superchamp général $\Phi^A = (\Phi_f^a, \Phi_h^\alpha)$ regroupant ces deux secteurs. D'après les définitions concernant le contenu en champs et l'expression générale du potentiel de Kähler (6.64) - accompagnée de la condition (6.80) -, nous écrivons dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal, le potentiel de Kähler

14. Pour éviter tout mélange de notation avec le chapitre 3, les familles sont différenciées via l'indice f (en comparaison de l'indice I dans le chapitre 3).

15. L'indice a est utilisé pour différencier les six superchamps chiraux du secteur de la matière, avec $a = 1$ pour le superchamp Q_L^f .

suivant

$$K_0^\phi(z, z^\dagger, \Phi, \Phi^\dagger) = \sum_f \Lambda_f(z, z^\dagger) \Phi_{f\alpha}^\dagger \Phi_f^\alpha + \Lambda_h(z, z^\dagger) \Phi_{h\alpha}^\dagger \Phi_h^\alpha + g_h(z, z^\dagger) \left(H_d \cdot H_u + H_d^\dagger \cdot H_u^\dagger \right), \quad (6.84)$$

avec Λ_f une fonction arbitraire par génération f , Λ_h pour le secteur du Higgs et g_h une fonction arbitraire. Nous prenons la notation $H_d \cdot H_u = \epsilon_{ij} H_d^i H_u^j$ pour la multiplication de $SU(2)_L$. Concernant l'expression du superpotentiel (6.64), elle est donnée par

$$W_{0,0}(z, \Phi) = c_3^f(z) w_3^f(\Phi) + c_2^f(z) w_2^f(\Phi) \quad (6.85)$$

où la partie trilineaire correspond aux interactions de Yukawa tandis que la partie bilinéaire définit un terme de masse pour les neutrinos. Ces différentes parties sont données par

$$\begin{cases} w_3^f(\Phi) &= -y_f^e L_l^f \cdot H_d E_L^f - y_f^d Q_L^f \cdot H_d D_L^f + y_f^n L_L^f \cdot H_u N_L^f + y_f^u Q_L^f \cdot H_u U_L^f, \\ w_2^f(\Phi) &= N_L^f N_L^f. \end{cases} \quad (6.86)$$

À la différence du superpotentiel donné dans le chapitre 3, nous négligeons les termes de mélange présents dans les interactions de Yukawa (matrice CKM et matrice PMNS par exemple). Cette conséquence résulte de la condition (6.80) (via le symbole de Kronecker) puisque cette dernière limite le mélange entre les champs, scalaire et fermionique, après leur redéfinition.

En tenant compte de la définition du potentiel de Kähler (6.84), de celle du superpotentiel (6.85), de l'expression du potentiel scalaire (6.78) et des fonctions [6.65-6.69], nous en déduisons la forme du potentiel scalaire et des termes de brisure douce

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\phi &= \partial_a \mathcal{W}_0 \partial^a \overline{\mathcal{W}}_0 + \sum_f (m_{\frac{3}{2}}^2 S_f + m_S^2) \phi_{fi}^\dagger \phi_f^i + (m_{\frac{3}{2}}^2 S_h + m_S^2) (h_u^\dagger h_u + h_d^\dagger h_d) + \sum_f \left[m_{\frac{3}{2}}^\dagger b_f \tilde{\nu}_R^{f\dagger} \tilde{\nu}_R^{f\dagger} + \text{h.c.} \right] \\ &+ \sum_f \left[m_{\frac{3}{2}}^\dagger a_f \left(-\hat{y}_f^e \tilde{\ell}_L^f \cdot h_d \tilde{e}_R^{f\dagger} - \hat{y}_f^d \tilde{q}_L^f \cdot h_d \tilde{d}_R^{f\dagger} + \hat{y}_f^n \tilde{\ell}_L^f \cdot h_u \tilde{\nu}_R^{f\dagger} + \hat{y}_f^u \tilde{q}_L^f \cdot h_u \tilde{u}_R^{f\dagger} \right) + \text{h.c.} \right] \\ &+ \left[\left(m_{\frac{3}{2}}^\dagger b \mu + \tilde{b} \right) h_d \cdot h_u + \text{h.c.} \right] + \left[m_{\frac{3}{2}} \left(\hat{f}_1 \tilde{B} \cdot \tilde{B} + \hat{f}_2 \tilde{W}^a \cdot \tilde{W}_a + \hat{f}_3 \tilde{g}^a \cdot \tilde{g}_a \right) + \text{h.c.} \right], \end{aligned} \quad (6.87)$$

pour une théorie effective du modèle standard supersymétrique minimal, où nous avons introduit le superpotentiel

$$\mathcal{W}_0 = \sum_f \left(-\hat{y}_f^e L_l^f \cdot H_d E_L^f - \hat{y}_f^d Q_L^f \cdot H_d D_L^f + \hat{y}_f^n L_L^f \cdot H_u N_L^f + \hat{y}_f^u Q_L^f \cdot H_u U_L^f + m_{N_f} N_f N_f \right) + \mu H_d \cdot H_u, \quad (6.88)$$

où les paramètres libres du modèle et les termes de brisure douce sont par la suite présentés.

Nous commençons par exprimer la redéfinition des champs du modèle à partir de la fonction générique $\Lambda_A = (\Lambda_f, \Lambda_h)$, introduite dans le potentiel de Kähler (6.84),

$$\phi^A \rightarrow \frac{\phi^A}{\langle \sqrt{\Lambda_A(z, z^\dagger)} \rangle} \quad \text{et} \quad \chi^A \rightarrow \frac{\chi^A}{\langle \sqrt{\Lambda_A(z, z^\dagger)} \rangle}, \quad (6.89)$$

pour les différentes générations et le secteur du Higgs. Cette redéfinition se répercute sur la définition des différents paramètres libres du modèle. Nous présentons ces différents paramètres en donnant leur expression analytique.

Les paramètres de Yukawa sont donnés par la redéfinition - avec un indice ℓ générique pour les différents couplages de Yukawa - suivante

$$\hat{y}_f^\ell = \left\langle \frac{e^{\frac{1}{2} K_2(z, z^\dagger)} c_3^f(z)}{\Lambda_f(z, z^\dagger) \sqrt{\Lambda_h(z, z^\dagger)}} \right\rangle y_f^\ell. \quad (6.90)$$

Une première conséquence majeure émerge de la redéfinition (6.89) : la valeur moyenne dans le vide des fonctions Λ_f et Λ_h permet d'expliquer les hiérarchies entre les masses des différentes familles.

La masse de Majorana des neutrinos s'écrit

$$m_{N_f} = \left\langle \begin{array}{c} e^{2K_2(z, z^\dagger)} c_2^f(z) \\ \Lambda_f(z, z^\dagger) \end{array} \right\rangle. \quad (6.91)$$

De nouveau, nous retrouvons une conséquence intéressante de la redéfinition des champs scalaires et fermioniques. En effet, les échelles d'énergie composant les fonctions du secteur caché, après que ces dernières ont développé leur valeur moyenne dans le vide, conduisent à des masses de neutrinos élevés (selon si leur échelle d'énergie est faible ou importante), favorisant les modèles de balançoire (ou *see-saw*).

La masse des particules scalaires du modèle est donnée par

$$m_A^2 = m_{\frac{3}{2}}^2 S_A, \quad (6.92)$$

et provient de la composition d'une partie propre à chaque génération

$$S_A = \left\langle 1 + \left(\tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^{\dagger} (K_2)^{i^*} \tilde{\rho}_{[1,0]}^i - 3 \right) + \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \left(\begin{array}{c} \partial_i \Lambda_A(z, z^\dagger) \partial^{i^*} \Lambda_A(z, z^\dagger) \\ \Lambda_A^2(z, z^\dagger) \end{array} - \begin{array}{c} \partial_i \partial^{i^*} \Lambda_A(z, z^\dagger) \\ \Lambda_A(z, z^\dagger) \end{array} \right) \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^{\dagger} \right\rangle, \quad (6.93)$$

avec $A \in \{f, h\}$.

En ce qui concerne la masse des fermions de Majorana du secteur de jauge (en reprenant la définition de la table 3.1), celle-ci est aussi paramétrisée par la masse du gravitino et par la valeur moyenne dans le vide de la fonction cinétique de jauge (appelée ici f ¹⁶),

$$M_{\frac{1}{2}i} = m_{\frac{3}{2}} \langle f_i \rangle = m_{\frac{3}{2}} \hat{f}_i, \quad (6.94)$$

Nous définissons un terme trilinéaire

$$a_f = (R_h + 2R_f + A_f - 3), \quad (6.95)$$

provenant de la fonction (6.66), qui s'écrit après redéfinition

$$R_A = \left\langle 1 - \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \frac{\partial_i \Lambda_A(z, z^\dagger)}{\Lambda_A(z, z^\dagger)} \right\rangle, \quad \text{avec } A \in \{f, h\} \quad (6.96)$$

et de la fonction (6.67) pour les différentes générations

$$A_f = \left\langle \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \partial_i \left(K_2(z, z^\dagger) + \ln c_3^f(z) \right) \right\rangle. \quad (6.97)$$

Un terme bilinéaire est également défini pour chaque famille de neutrinos

$$b_f = (2R_f + A_f - 3), \quad (6.98)$$

à partir des fonctions (6.96) et (6.97). Enfin, le terme de brisure douce pour le secteur du Higgs est donné par

$$b = (2R_h + B_h + \tilde{B}_h - 2), \quad (6.99)$$

et provient de la définition (6.96), de l'écriture de la fonction (6.69),

$$B_h = \left\langle \frac{\left(2 + \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \partial_i - \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^{\dagger} \partial^{i^*} - \tilde{\rho}_{[1,0]}^i \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^{\dagger} \partial_i \partial^{i^*} \right) g_h(z, z^\dagger)}{\left(1 - \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^{\dagger} \partial^{i^*} \right) g_h(z, z^\dagger)} \right\rangle, \quad (6.100)$$

16. Dans les précédents chapitres, nous appelons la fonction cinétique de jauge h . Mais pour éviter toute ambiguïté avec les champs de Higgs, nous l'appelons f .

et de la fonction (6.75)

$$\tilde{B}_h = \left\langle \frac{\left(\tilde{\rho}_{[1,0]i^*} (K_2)^{i^*} \tilde{\rho}_{[1,0]}^i - 3 \right) g_h(z, z^\dagger)}{\left(1 - \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger \partial^{i^*} \right) g_h(z, z^\dagger)} \right\rangle, \quad (6.101)$$

pour le choix des fonctions de Kähler et du superpotentiel. Ce dernier est couplé avec le terme μ qui est donné par

$$\mu = m_{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{g_h(z, z^\dagger)}{\Lambda_h(z, z^\dagger)} - \tilde{\rho}_{[1,0]i^*}^\dagger \frac{\partial^{i^*} g_h(z, z^\dagger)}{\Lambda_h(z, z^\dagger)} \right\rangle. \quad (6.102)$$

Dans cette analyse, un choix arbitraire a été effectué concernant les fonctions du secteur caché Λ_A et g_h , provenant du potentiel de Kähler. Un tel choix a conduit à obtenir une non-universalité pour la valeur des différents termes de brisure douce, i.e. une valeur par famille et pour le Higgs.

Un choix différent concernant les fonctions Λ_A , par exemple si nous supposons $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_h$, conduit à égaliser l'ensemble des termes de brisure douce - notamment A_f et R_A - pour l'ensemble des champs de matière et des champs de Higgs. Une telle configuration donne le modèle standard supersymétrique minimal contraint, appelé aussi CMSSM [83]. D'autres configurations sont possibles concernant les fonctions Λ_A , conduisant à d'autres extensions du MSSM (le pMSSM par exemple [84]).

Dans ce dernier chapitre, nous avons effectué une analyse à basse énergie de la solution particulière (6.4). Dans un premier temps, nous avons supposé un potentiel de Kähler canonique pour étudier la possibilité d'une nouvelle échelle fondamentale correspondant au nouveau secteur S . En nous basant sur l'analyse effectuée dans l'article [1], nous sommes arrivés à un ensemble de conséquences à basse énergie, en estimant la masse du nouveau champ S . Une application naturelle de ce nouveau secteur S est donnée par l'extension du modèle standard supersymétrique minimal, contenant un singlet de jauge par rapport au groupe de jauge du modèle standard.

Pour l'analyse non-canonique de la nouvelle solution, nous étudions les termes de brisure douce lorsqu'ils sont induits par la gravitation. Une conséquence importante provient des termes de masse et des termes bilinéaires puisque ces derniers ne sont pas seulement paramétrés par la masse du gravitino, mais aussi par l'échelle d'énergie présente dans le secteur caché interagissant avec le secteur S . Cependant, la contrainte concernant la valeur de la constante cosmologique conduit à rendre nulles ces contributions. En s'appuyant sur l'analyse de Giudice et Masiero [82], la brisure de la supergravité induit un paramètre μ dans le secteur du Higgs qui est contrôlé par l'échelle d'énergie du secteur caché.

Pour ces différentes analyses, nous avons interprété le champ S comme un nouveau secteur. Cependant, d'autres interprétations sont possibles. Ce dernier interagissant uniquement avec les deux autres secteurs de manière gravitationnelle, la partie fermionique du secteur S rend possible un nouveau candidat dans le cadre d'une étude de la matière noire, effectuée dans le chapitre 3.

Chapitre 7

Conclusion et Perspectives

La détection du boson de Higgs par les expériences associées au grand collisionneur de particules (LHC) a permis de répondre à certaines questions mais a créé de nouvelles zones d'ombre. Une nouvelle théorie à plus haute énergie est nécessaire. La route vers cette théorie passe par une analyse des problèmes soulevés par le modèle standard qui restent encore aujourd'hui sans réponse.

Dans les différents chapitres présentés, nous avons, de manière ponctuelle, fait resurgir certains des problèmes majeurs du modèle standard, et de la physique moderne en général. Les théories supersymétriques, et plus particulièrement la supergravité, incorporent des mécanismes naturels pour tenter de comprendre une partie de ces problèmes.

Pendant plus de trente ans, les études phénoménologiques concernant la brisure de la supersymétrie induite par la gravitation ont été basées sur les résultats établis par Soni et Weldon. Nous avons, dans cette étude, montré que leur classification était incomplète.

Deux cas sont à distinguer concernant la forme du potentiel de Kähler : le cas canonique et le cas non-canonique. Lorsque le potentiel de Kähler prend une forme canonique, une analyse complète a été conduite. Quand le potentiel de Kähler est non-canonique, l'étude devient plus difficile, et seul un ensemble de nouvelles solutions a été obtenu. Une étude générale est donc à réaliser.

Malgré tout, l'analyse d'une solution particulière a mis en évidence des premières conséquences à basse énergie, ouvrant la voie à de possibles applications phénoménologiques.

La valeur expérimentale de la constante cosmologique est un problème majeur de la physique moderne, et déterminer un mécanisme naturel, qui explique sa petitesse, constitue une étape essentielle dans la compréhension de notre Univers. Parmi les nouvelles solutions obtenues, pour un potentiel de Kähler non-canonique, deux solutions attirent notre attention et offrent des voies naturelles pour mieux comprendre le problème de la constante cosmologique :

$$K(Z, Z^\dagger) = m_p^2 K_2(z, z^\dagger, S, S^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, S, S^\dagger, \phi, \phi^\dagger)$$

$$W(Z) = m_p^2 W_2(z, S) + W_0(z, S, \phi)$$

$$K(Z, Z^\dagger) = m_p^2 K_2(z, z^\dagger, S, S^\dagger) + m_p K_1(z, z^\dagger, S, S^\dagger, \phi, \phi^\dagger) + K_0(z, z^\dagger, S, S^\dagger, \phi, \phi^\dagger)$$

$$W(Z) = m_p W_1(z, S) + W_0(z, S, \phi)$$

Notre préférence pour ces deux solutions résulte de la symbiose entre l'introduction d'un nouveau secteur et un mécanisme permettant d'obtenir une faible valeur de la constante cosmologique au travers des conditions *no-scale*. La considération du nouveau secteur S permet, via la condition *no-scale*, d'annuler les termes dominants du potentiel scalaire, tout en laissant le secteur observable ϕ sans contrainte et en offrant par conséquent plus de liberté pour les extensions du modèle standard.

Un des points forts de certaines des nouvelles solutions est l'introduction de ce nouveau secteur S qui partage certaines des caractéristiques du secteur caché et du secteur observable. L'utilisation de la composante fermionique d'un nouveau superchamp chiral S suggère une application pour les modèles de neutrinos stériles,

tandis qu'il est possible d'envisager l'implication de la composante scalaire pour les théories inflationnaires. Sans oublier le problème de la matière noire où l'estimation de sa densité relique, pour ces nouveaux modèles, est possible grâce à l'utilisation du nouveau calculateur, développé dans le chapitre 3.

Ces nouvelles solutions enrichissent la phénoménologie à basse énergie et ouvrent la voie à plusieurs applications en physique des particules.

Annexe A

Conventions

Dans les différents chapitres, de nombreuses conventions ont été utilisées et sont, par conséquent, regroupées dans cette annexe.

Concernant les conventions indicielles - et plus particulièrement pour les chapitres 2 et 4 -, les indices dans un espace-plat sont écrits de manière usuelle, i.e. l'alphabet grec M, N, P, \dots , tandis que les indices dans un espace courbe sont tildés, i.e. $\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{P}, \dots$. Au niveau des spécifications indicielles concernant les différentes représentations de l'algèbre de Lorentz, les indices vectoriels sont notés μ, ν, σ, \dots , et les indices spinoriels sont notés $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ pour la représentation gauchère de Weyl, et $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dots$ pour la représentation droitère de Weyl.

Dans les chapitres 5 et 6, l'analyse de nouvelles solutions - suite à une brisure de la supergravité - a nécessité de différencier les superchamps chiraux en deux secteurs : le secteur caché et le secteur observable. Concernant le secteur caché, les indices sont donnés par i, j, k, \dots , tandis que les indices du secteur observable sont donnés par a, b, c, \dots . Pour des solutions particulières, le secteur observable est séparé en deux sous-secteurs. Les champs usuels sont indexés par $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$, tandis que les indices du nouveau secteur sont donnés par p, q, r, \dots .

Enfin, les conventions choisies, entre l'étude de la supersymétrie et l'étude de la supergravité, étant différentes, nous pointons, par conséquent, les principaux éléments de différence.

Convention choisie en supersymétrie

Dans le cadre de la supersymétrie, étudiée dans les chapitres 2 et 3, nous avons pris la convention de la référence [6].

Le tenseur de Minkowski est donné par

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (\text{A.1})$$

Les matrices $\sigma^\mu \equiv (\sigma^0, \sigma^i)$ sont données par

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

On introduit également la matrice $\bar{\sigma}^\mu$, définie par $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$. Enfin, le tenseur antisymétrique de Levi-Civita est donné par $\epsilon_{0123} = 1$.

Les métriques dans l'espace des spineurs $\epsilon_{\alpha\beta}$ et $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ sont définies par

$$\epsilon_{12} = 1, \quad \epsilon^{12} = -1 \quad \text{et} \quad \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1, \quad \epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = -1. \quad (\text{A.3})$$

Les variables conjugués dans l'espace spinoriel sont

$$\left\{ \partial_\alpha, \theta^\beta \right\} = \delta_\alpha^\beta \quad \text{et} \quad \left\{ \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \right\} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \quad (\text{A.4})$$

Convention choisie en supergravité

Dans le cadre de la supergravité, étudiée dans les chapitres 4, 5 et 6, nous avons pris la convention de la référence [3].

Le tenseur de Minkowski est donné par

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (\text{A.5})$$

Les matrices $\sigma^\mu \equiv (\sigma^0, \sigma^i)$ sont données par

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

On introduit également la matrice $\bar{\sigma}^\mu$, définie par $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$. Enfin, le tenseur antisymétrique de Levi-Civita est donné par $\epsilon_{0123} = -1$.

Les métriques dans l'espace des spineurs $\epsilon_{\alpha\beta}$ et ϵ_{ij} sont définies par

$$\epsilon_{21} = 1, \quad \epsilon^{21} = -1 \quad \text{et} \quad \epsilon_{ji} = 1, \quad \epsilon^{ji} = -1. \quad (\text{A.7})$$

Les variables conjugués dans l'espace spinoriel sont

$$\left\{ \partial_\alpha, \theta^\beta \right\} = \delta_\alpha^\beta \quad \text{et} \quad \left\{ \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \right\} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}. \quad (\text{A.8})$$

Convention de sommation en supersymétrie et en supergravité

La convention de sommation pour les indices spinoriels, pour l'étude de la supersymétrie et de la supergravité, reprend celle de Van der Waerden [6], définie par

$$\lambda \cdot \chi = \lambda^\alpha \chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \chi^\beta \quad \text{et} \quad \bar{\lambda} \cdot \bar{\chi} = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.9})$$

Annexe B

Quelques Intégrales

Dans le chapitre 5, une analyse détaillée concernant la contribution F du potentiel scalaire, dans le cas du potentiel de Kähler canonique, a été réalisée. Cette étude est basée sur la proposition 1, dont la démonstration pour n champs complexes nécessite de résoudre l'équation différentielle aux dérivées partielles (G.5.58). Si nous écrivons l'équation différentielle

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = B(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\text{B.1})$$

où $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction arbitraire multivariée, et où l'ensemble des a_i est indépendant des variables x_i . Si au moins un des a_i est non-nul, que nous choisissons sans perte de généralité égal à a_1 , et servant par conséquent de variable de référence, alors la solution générale de l'équation différentielle ci-dessus est donnée, d'après [77], par

$$f(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{a_1} \int_{x_0}^{x_1} dx B(x, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_n) + \mathcal{F}(u_2, \dots, u_i, \dots, u_n), \quad (\text{B.2})$$

avec \mathcal{F} une fonction arbitraire des $n - 1$ variables u_i , x_0 une constante arbitraire d'intégration, et où nous avons défini les variables

$$\tilde{x}_i = x_i - \frac{\xi_i}{\xi_1} (x_1 - x) \quad \text{et} \quad u_i = \xi_1 x_i - \xi_i x_1, \quad (\text{B.3})$$

tandis que les a_i sont reliées à celle de référence, a_1 , par $\xi_1 a_i = \xi_i a_1$,

La démonstration de la proposition 1 pour n champs complexes nécessite de résoudre une seconde équation différentielle linéaire de premier ordre, correspondant à l'expression de la proposition (5.39), que nous écrivons de manière générale

$$\sum_{i=1}^n (a_i x_i + b_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = B(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\text{B.4})$$

avec $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction multivariée, et les variables a_i des constantes non-nulles. La résolution de l'équation ci-dessus est analogue à l'équation différentielle (B.1), et d'après [77], a pour solution générale

$$f(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{a_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x + c_1} B(x, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_n) + \mathcal{F}(u_2, \dots, u_i, \dots, u_n), \quad (\text{B.5})$$

où nous avons introduit les variables

$$\tilde{x}_i = \left(\frac{x + c_1}{x_1 + c_1} \right)^{a_i/a_1} (x_i + c_i) - c_i \quad \text{et} \quad u_i = \frac{x_i + c_i}{(x_1 + c_1)^{a_i/a_1}}, \quad (\text{B.6})$$

et défini $c_i \equiv \frac{b_i}{c_i}$.

Annexe C

Inversion de la métrique de Kähler

L'inversion de la métrique de Kähler, nécessaire pour déterminer la contribution F du potentiel scalaire de la supergravité, est un calcul long et fastidieux. Ce travail étant effectué à plusieurs reprises dans les chapitres 5 et 6, nous proposons dans cette annexe d'expliquer la démarche utilisée permettant de déterminer les éléments de la métrique inverse.

Nous prenons un superchamp chiral $Z^{\mathcal{I}}$ général, regroupant les I superchamps chiraux du secteur caché et les A superchamps chiraux du secteur observable. Leurs composantes scalaires sont respectivement notées z^i , avec $i \in \{1, \dots, I\}$, et ϕ^a , avec $a \in \{1, \dots, A\}$. Enfin, en supposant un potentiel de Kähler K , le tenseur métrique de la variété kählerienne est défini par

$$K^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{I}} = \frac{\partial^2 K}{\partial Z^{\mathcal{I}} \partial Z^{\dagger}_{\mathcal{I}^*}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_p^2} \frac{\partial^2 K}{\partial z^i \partial z^{\dagger}_{i^*}} & \frac{1}{m_p} \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^a \partial z^{\dagger}_{i^*}} \\ \frac{1}{m_p} \frac{\partial^2 K}{\partial z^i \partial \phi^{\dagger}_{a^*}} & \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^a \partial \phi^{\dagger}_{a^*}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K)^{i^*}_i & (K)^{i^*}_a \\ (K)^{a^*}_i & (K)^{a^*}_a \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

où nous distinguons quatre différents blocs regroupés par rapport aux différentes dérivées. À partir de cette métrique, son inverse est donnée par

$$(K^{-1})^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} = \begin{pmatrix} (K^{-1})^{i^*}_i & (K^{-1})^{i^*}_a \\ (K^{-1})^{a^*}_i & (K^{-1})^{a^*}_a \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Pour calculer la métrique de Kähler inverse, nous utilisons le complément de Schur qui permet d'inverser une matrice par bloc. Ainsi, en introduisant une matrice M générale

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

et si D et le complément de Schur $(A - BD^{-1}C)^{-1}$ sont inversibles [85], la matrice M est par conséquent inversible et elle est donnée par

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1} BD^{-1} \\ -D^{-1}C (A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C (A - BD^{-1}C)^{-1} BD^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

En utilisant le complément de Schur, nous inversons les différents potentiels de Kähler introduits dans le chapitre 5 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 & \quad K(Z, Z^{\dagger}) = m_p^2 K_2(z, z^{\dagger}) + m_p K_1(z, z^{\dagger}) + K_0(z, z^{\dagger}, \phi, \phi^{\dagger}) \\ \mathcal{H}_1 & \quad K(Z, Z^{\dagger}) = m_p^2 K_2(z, z^{\dagger}) + m_p K_1(z, z^{\dagger}, \phi, \phi^{\dagger}) + K_0(z, z^{\dagger}, \phi, \phi^{\dagger}) \\ \mathcal{H}_2 & \quad K(Z, Z^{\dagger}) = m_p^2 K_2(z, z^{\dagger}, \phi, \phi^{\dagger}) + m_p K_1(z, z^{\dagger}, \phi, \phi^{\dagger}) + K_0(z, z^{\dagger}, \phi, \phi^{\dagger}) \end{aligned}$$

Le calcul étant identique pour les trois potentiels de Kähler, il est détaillé pour le choix \mathcal{H}_0 , tandis que seuls les éléments majeurs sont donnés pour le calcul de \mathcal{H}_1 et le calcul de \mathcal{H}_2 .

C.1 Inversion de la métrique de Kähler : hypothèse \mathcal{H}_0

Concernant le potentiel de Kähler \mathcal{H}_0 , le tenseur métrique est donné par

$$K^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} (K_2)^{i^*}_i + \frac{1}{m_p}(K_1)^{i^*}_i + \frac{1}{m_p^2}(K_0)^{i^*}_i & \frac{1}{m_p}(K_0)^{i^*}_a \\ \frac{1}{m_p}(K_0)^{a^*}_i & (K_0)^{a^*}_a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (A)^{i^*}_i & (B)^{i^*}_a \\ (C)^{a^*}_i & (D)^{a^*}_a \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Dans la suite du calcul, pour distinguer les différents blocs de la matrice ci-dessus, nous appelons le bloc A , le bloc purement caché, les blocs B et C , les blocs de mélange et le bloc D , le bloc purement observable¹. La même appellation est utilisée pour les éléments de matrice inverse.

La fonction K_0 étant générale, nous supposons qu'elle est, au minimum, nécessairement bilinéaire en ϕ et ϕ^\dagger , de manière à définir son inverse

$$(D^{-1})^{a^*}_a = \left[\frac{\partial^2 K_0}{\partial \phi^a \partial \phi_{a^*}^\dagger} \right]^{-1}. \quad (\text{C.6})$$

En utilisant la définition (C.4), nous calculons l'élément de la métrique inverse du bloc purement caché, donné par

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{i^*}_{i^*} &= \left((A)^{i^*}_i - (B)^{i^*}_a (D^{-1})^{a^*}_a (C)^{a^*}_i \right)^{-1} \\ &= \left[(K_2)^{i^*}_i + \frac{1}{m_p}(K_1)^{i^*}_i + \frac{1}{m_p^2} \left((K_0)^{i^*}_i - (K_0)^{i^*}_a (K_0^{-1})^{a^*}_a (K_0)^{a^*}_i \right) \right]^{-1} \\ &\equiv \left[(K_2)^{i^*}_i + \frac{1}{m_p}(K_1)^{i^*}_i + \frac{1}{m_p^2} (\tilde{K}_0)^{i^*}_i \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Nous introduisons l'élément $(\tilde{K}_\alpha)^{i^*}_{i^*}$, avec $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ comme élément de référence pour l'inversion de la métrique, i.e. le complément de Schur associé à l'inversion des matrices. Le calcul de l'élément de matrice ci-dessus est réalisé de manière perturbative en prenant la limite $m_p \rightarrow \infty$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{i^*}_{i^*} &= (K_2^{-1})^{i^*}_{i^*} - \frac{1}{m_p} (K_2^{-1})^{i^*}_{j^*} (K_1)^{j^*}_j (K_2^{-1})^{j^*}_{i^*} \\ &\quad + \frac{1}{m_p^2} (K_2^{-1})^{i^*}_{j^*} \left[(K_1)^{j^*}_k (K_2^{-1})^k_{k^*} (K_1)^{k^*}_j - (\tilde{K}_0)^{j^*}_j \right] (K_2^{-1})^{j^*}_{i^*} + \dots \\ &\equiv (\mathcal{K}_0^0)^{i^*}_{i^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^0)^{i^*}_{i^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^0)^{i^*}_{i^*} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

où nous définissons la fonction générique \mathcal{K}_β^α , avec $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ indexant l'ordre de dépendance par rapport à ϕ dans l'expression analytique du potentiel de Kähler et avec $\beta \in \{0, 1, 2, \dots\}$ l'ordre du développement perturbatif en m_p . En partant de l'élément ci-dessus, nous en déduisons l'expression des autres blocs. Le bloc de la métrique inverse mélangeant le secteur observable et le secteur caché est défini par

$$(K^{-1})^{i^*}_{a^*} = - \left((A)^{i^*}_i - (B)^{i^*}_b (D^{-1})^{b^*}_b (C)^{b^*}_i \right)^{-1} (B)^{i^*}_a (D^{-1})^{a^*}_a. \quad (\text{C.9})$$

En combinant ainsi l'expression ci-dessus et la définition de l'élément de matrice propre au secteur purement caché (C.8), nous en déduisons

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{i^*}_{a^*} &= -(K^{-1})^{i^*}_{i^*} (B)^{i^*}_a (D^{-1})^{a^*}_a \\ &= -\frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_0^0)^{i^*}_{i^*} (K_0)^{i^*}_a (K_0^{-1})^{a^*}_a - \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_1^0)^{i^*}_{i^*} (K_0)^{i^*}_a (K_0^{-1})^{a^*}_a - \frac{1}{m_p^3} (\mathcal{K}_2^0)^{i^*}_{i^*} (K_0)^{i^*}_a (K_0^{-1})^{a^*}_a - \dots \\ &\equiv \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^0)^{i^*}_{a^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^0)^{i^*}_{a^*} + \frac{1}{m_p^3} (\mathcal{K}_3^0)^{i^*}_{a^*} + \dots. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

1. Le « nom » des blocs résulte des dérivés qui sont appliquées.

La métrique de Kähler, ainsi que son inverse, étant réelles, nous en déduisons le second bloc mélangeant les deux secteurs par conjugué hermitien. Un calcul direct permet de vérifier le résultat. À partir de la définition

$$(K^{-1})^a_{i^*} = -(D^{-1})^a_{a^*} (C)^{a^*}_i \left((A)^{i^*}_i - (B)^{i^*}_b (D^{-1})^b_{b^*} (C)^{b^*}_i \right)^{-1}, \quad (\text{C.11})$$

et de l'élément de matrice (C.8), nous calculons le second bloc de mélange

$$\begin{aligned} (K^{-1})^a_{i^*} &= -(D^{-1})^a_{a^*} (C)^{a^*}_i (K^{-1})^{i^*}_{i^*} \\ &= -\frac{1}{m_p} (K_0^{-1})^a_{a^*} (K_0)^{a^*}_i (\mathcal{K}_0^0)^{i^*}_{i^*} - \frac{1}{m_p^2} (K_0^{-1})^a_{a^*} (K_0)^{a^*}_i (\mathcal{K}_1^0)^{i^*}_{i^*} - \frac{1}{m_p^3} (K_0^{-1})^a_{a^*} (K_0)^{a^*}_i (\mathcal{K}_2^0)^{i^*}_{i^*} - \dots \\ &\equiv \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^0)^a_{i^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^0)^a_{i^*} + \frac{1}{m_p^3} (\mathcal{K}_3^0)^a_{i^*} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

qui correspond au conjugué hermitien de l'équation (C.10). Enfin, nous finissons par calculer l'élément de matrice inverse du bloc purement observable. D'après (C.4), il est donné par

$$(K^{-1})^a_{a^*} = (D^{-1})^a_{a^*} + (D^{-1})^a_{b^*} (C)^{b^*}_i \left((A)^{i^*}_i - (B)^{i^*}_c (D^{-1})^c_{c^*} (C)^{c^*}_i \right)^{-1} (B)^{i^*}_b (D^{-1})^b_{a^*}, \quad (\text{C.13})$$

qui conduit à l'expression

$$\begin{aligned} (K^{-1})^a_{a^*} &= (D^{-1})^a_{a^*} + (D^{-1})^a_{b^*} (C)^{b^*}_i (K^{-1})^{i^*}_{i^*} (B)^{i^*}_b (D^{-1})^b_{a^*} \\ &= (K_0^{-1})^a_{a^*} + \frac{1}{m_p^2} (K_0^{-1})^a_{b^*} (K_0)^{b^*}_i (\mathcal{K}_0^0)^{i^*}_{i^*} (K_0)^{i^*}_b (K_0^{-1})^b_{a^*} \\ &\quad + \frac{1}{m_p^3} (K_0^{-1})^a_{b^*} (K_0)^{b^*}_i (\mathcal{K}_1^0)^{i^*}_{i^*} (K_0)^{i^*}_b (K_0^{-1})^b_{a^*} + \dots \\ &\equiv (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^0)^a_{a^*} + \frac{1}{m_p^3} (\mathcal{K}_3^0)^a_{a^*} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

après avoir injecté (C.8). Finalement, l'inverse de la métrique de Kähler (C.5) a pour forme

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} &= (\mathcal{K}_0^0)^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^0)^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^0)^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}^*} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_0^0)^{i^*}_{i^*} & 0 \\ 0 & (\mathcal{K}_0^0)^a_{a^*} \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_1^0)^{i^*}_{i^*} & (\mathcal{K}_1^0)^{i^*}_{a^*} \\ (\mathcal{K}_1^0)^a_{i^*} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p^2} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_2^0)^{i^*}_{i^*} & (\mathcal{K}_2^0)^{i^*}_{a^*} \\ (\mathcal{K}_2^0)^a_{i^*} & (\mathcal{K}_2^0)^a_{a^*} \end{pmatrix} + \dots. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

C.2 Inversion de la métrique de Kähler : hypothèse \mathcal{K}_1

D'après la définition (C.1), la métrique du potentiel de Kähler \mathcal{K}_1 est donnée par

$$K^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} (K_2)^{i^*}_i + \frac{1}{m_p} (K_1)^{i^*}_i + \frac{1}{m_p^2} (K_0)^{i^*}_i & (K_1)^{i^*}_a + \frac{1}{m_p} (K_0)^{i^*}_a \\ (K_1)^{a^*}_i + \frac{1}{m_p} (K_0)^{a^*}_i & m_p (K_1)^{a^*}_a + (K_0)^{a^*}_a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (A)^{i^*}_i & (B)^{i^*}_a \\ (C)^{a^*}_i & (D)^{a^*}_a \end{pmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

où nous constatons que les blocs, qui dépendent du secteur observable, ont augmenté d'une unité en la masse de Planck, s . Cette conséquence se répercute sur l'inversion de l'élément $(D)^{a^*}_a$ qui est maintenant calculé perturbativement

$$(D^{-1})^a_{a^*} = \frac{1}{m_p} \left[(K_1)^{a^*}_a + \frac{1}{m_p} (K_0)^{a^*}_a \right]^{-1} = \frac{1}{m_p} (K_1^{-1})^a_{a^*} - \frac{1}{m_p^2} (K_1^{-1})^a_{b^*} (K_0)^{b^*}_b (K_1^{-1})^b_{a^*} + \dots, \quad (\text{C.17})$$

où nous avons supposé que la fonction K_1 est nécessairement bilinéaire en ϕ et ϕ^\dagger . L'inversion du bloc purement caché est donnée par

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{i^*} &= \left[(K_2)^{i^*} + \frac{1}{m_p} \left((K_1)^{i^*} - (K_1)^{i^*} (K_1^{-1})^a (K_1)^{a^*} \right) + \dots \right]^{-1} \equiv \left[(K_2)^{i^*} + \frac{1}{m_p} (\tilde{K}_1)^{i^*} + \dots \right]^{-1} \\ &= (K_2^{-1})^{i^*} - \frac{1}{m_p} (K_2^{-1})^{i^*} (\tilde{K}_1)^{j^*} (K_2^{-1})^j + \dots \\ &\equiv (\mathcal{K}_0^1)^{i^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^1)^{i^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^1)^{i^*} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

où nous avons défini \tilde{K}_1 , l'élément de matrice de référence pour l'inversion. À la différence de l'équation (C.8) - où l'élément de référence est \tilde{K}_0 -, nous constatons que l'ordre de dépendance de la fonction \tilde{K}_α a augmenté d'une unité en la masse de Planck. Cela résulte de l'ordre de dépendance en ϕ dans la définition du potentiel de Kähler qui se répercute sur l'ensemble des blocs qui dépendent du secteur observable.

Finalement, le calcul des autres éléments de matrice étant identique à la précédente analyse, nous donnons uniquement le résultat final

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} &= (\mathcal{K}_0^1)^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^1)^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^1)^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_0^1)^{i^*} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_1^1)^{i^*} & (\mathcal{K}_1^1)^{i^* a^*} \\ (\mathcal{K}_1^1)^{a^*} & (\mathcal{K}_1^1)^{a^* a^*} \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p^2} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_2^1)^{i^*} & (\mathcal{K}_2^1)^{i^* a^*} \\ (\mathcal{K}_2^1)^{a^*} & (\mathcal{K}_2^1)^{a^* a^*} \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

En comparant la métrique inverse ci-dessus avec l'équation (C.15), nous retrouvons une conséquence mentionnée dans le chapitre 5 et nécessaire à l'analyse de nouvelles solutions : l'ordre en la masse de Planck dans le secteur purement observable a diminué d'une unité.

Finalement, les conséquences établies durant l'inversion de la métrique (C.16) se retrouvent dans l'analyse de la dernière hypothèse.

C.3 Inversion de la métrique de Kähler : hypothèse \mathcal{H}_2

En utilisant la définition (C.1), le tenseur métrique concernant l'hypothèse \mathcal{H}_2 est

$$K^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} = \begin{pmatrix} (K_2)^{i^*} + \frac{1}{m_p} (K_1)^{i^*} + \frac{1}{m_p^2} (K_0)^{i^*} & m_p (K_2)^{i^* a^*} + (K_1)^{i^* a^*} + \frac{1}{m_p} (K_0)^{i^* a^*} \\ m_p (K_2)^{a^*} + (K_1)^{a^*} + \frac{1}{m_p} (K_0)^{a^*} & m_p^2 (K_2)^{a^* a^*} + m_p (K_1)^{a^* a^*} + (K_0)^{a^* a^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A)^{i^*} & (B)^{i^* a^*} \\ (C)^{a^*} & (D)^{a^* a^*} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.20})$$

De manière analogue aux hypothèses précédentes, nous supposons que la fonction K_2 est bilinéaire en ϕ et ϕ^\dagger de manière à définir son inverse

$$\begin{aligned} (D^{-1})^{a^*} &= \frac{1}{m_p^2} \left[(K_2)^{a^*} + \frac{1}{m_p} (K_1)^{a^*} + \frac{1}{m_p^2} (K_0)^{a^*} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{m_p^2} (K_2^{-1})^{a^*} - \frac{1}{m_p^3} (K_2^{-1})^{a^* b^*} (K_1)^{b^*} (K_2^{-1})^b + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

et d'en déduire perturbativement, par rapport à la masse de Planck lorsque $m_p \rightarrow \infty$, son expression. D'après l'équation ci-dessus, nous calculons l'inverse du bloc du secteur purement caché

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{i^*} &= \left[\left((K_2)^{i^*} - (K_2)^{i^*} (K_2^{-1})^a (K_2)^{a^*} \right) + \frac{1}{m_p} (A_1)^{i^*} + \dots \right]^{-1} \equiv \left[(\tilde{K}_2)^{i^*} + \frac{1}{m_p} (A_1)^{i^*} + \dots \right]^{-1} \\ &= (\tilde{K}_2^{-1})^{i^*} - \frac{1}{m_p} (\tilde{K}_2^{-1})^{i^* j^*} (A_1)^{j^*} (\tilde{K}_2^{-1})^j + \dots \\ &\equiv (\mathcal{K}_0^2)^{i^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^2)^{i^*} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

où nous utilisons la définition \tilde{K}_2 comme élément de matrice de référence. En comparant avec l'hypothèse \mathcal{K}_1 , nous constatons que l'ordre en la masse de Planck de l'élément de matrice de référence a progressé d'une unité. Cette conséquence se répercute finalement sur l'ensemble des autres blocs lors du calcul de la métrique inverse. Enfin, le calcul des ordres inférieurs étant de plus en plus important, nous « cachons » leur expression dans des variables A_β , avec $\beta \in \{1, 2, \dots\}$, de manière à pouvoir calculer plus facilement les autres éléments.

Finalement, l'expression finale de la métrique inverse est donnée par

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} &= (\mathcal{K}_0^2)^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p} (\mathcal{K}_1^2)^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} + \frac{1}{m_p^2} (\mathcal{K}_2^2)^{\mathcal{I}\mathcal{I}^*} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_0^2)^{i_{i^*}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_1^2)^{i_{i^*}} & (\mathcal{K}_1^2)^{i_{a^*}} \\ (\mathcal{K}_1^2)^{a_{i^*}} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_p^2} \begin{pmatrix} (\mathcal{K}_2^2)^{i_{i^*}} & (\mathcal{K}_2^2)^{i_{a^*}} \\ (\mathcal{K}_2^2)^{a_{i^*}} & (\mathcal{K}_2^2)^{a_{a^*}} \end{pmatrix} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

où nous retrouvons une conséquence similaire à l'hypothèse \mathcal{K}_1 ; l'ordre en la masse de Planck pour le bloc purement observable a diminué d'une unité.

Bibliographie

- [1] G. Moulataka, M. Rausch de Traubenberg, and D. Tant, “Low Energy Supergravity Revisited (I),” [arXiv:1611.10327 \[hep-th\]](#).
- [2] S. K. Soni and H. A. Weldon, “Analysis of the Supersymmetry Breaking Induced by N=1 Supergravity Theories,” *Phys. Lett.* **B126** (1983) 215–219.
- [3] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*. Princeton series in physics. Princeton University Press, Princeton, N.J, 2nd ed., rev. and expanded ed., 1992.
- [4] M. F. Sohnius, “Introducing Supersymmetry,” *Phys. Rept.* **128** (1985) 39–204.
- [5] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel, “Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry,” *Front. Phys.* **58** (1983) 1–548, [arXiv:hep-th/0108200 \[hep-th\]](#).
- [6] B. Fuks and M. Rausch de Traubenberg, *Supersymétrie : exercices avec solutions*. Ellipses, Paris, 2011. OCLC : 801470039.
- [7] F. Quevedo, S. Krippendorff, and O. Schlotterer, “Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions,” [arXiv:1011.1491 \[hep-th\]](#).
- [8] C. Itzykson, *Quantum field theory*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill International Book Co, New York, 1980.
- [9] P. Ramond, *Field theory : a modern primer*. No. 74 in Frontiers in physics. Westview Press, Boulder, Colo, 2nd ed., rev. print ed., 1990.
- [10] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 1995.
- [11] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.
- [12] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*. No. 113 in International series of monographs on physics. Clarendon Press ; Oxford University Press, Oxford : New York, 4th ed ed., 2002.
- [13] S. R. Coleman and J. Mandula, “All Possible Symmetries of the S Matrix,” *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251–1256.
- [14] W. Pauli, “The Connection Between Spin and Statistics,” *Phys. Rev.* **58** (1940) 716–722.
- [15] E. Noether, “Invariant Variation Problems,” *Gott. Nachr.* **1918** (1918) 235–257, [arXiv:physics/0503066 \[physics\]](#). [Transp. Theory Statist. Phys.1,186(1971)].
- [16] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, “All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix,” *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.
- [17] A. Salam and J. A. Strathdee, “Supergauge Transformations,” *Nucl. Phys.* **B76** (1974) 477–482.
- [18] J. Wess, “Supersymmetry,” *Acta Phys. Austriaca Suppl.* **15** (1976) 475–498.
- [19] B. Zumino, “Supersymmetry and Kähler Manifolds,” *Phys. Lett.* **B87** (1979) 203.

- [20] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*. New York, 2012.
- [21] M. Nakahara, *Geometry, topology, and physics*. Graduate student series in physics. Institute of Physics Publishing, Bristol ; Philadelphia, 2nd ed ed., 2003.
- [22] L. O’Raifeartaigh, “Spontaneous Symmetry Breaking for Chiral Scalar Superfields,” *Nucl. Phys.* **B96** (1975) 331–352.
- [23] P. Fayet and J. Iliopoulos, “Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors,” *Phys. Lett.* **B51** (1974) 461–464.
- [24] A. Salam and J. A. Strathdee, “On Goldstone Fermions,” *Phys. Lett.* **B49** (1974) 465–467.
- [25] L. Girardello and M. T. Grisaru, “Soft Breaking of Supersymmetry,” *Nucl. Phys.* **B194** (1982) 65.
- [26] **ATLAS** Collaboration, G. Aad *et al.*, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys. Lett.* **B716** (2012) 1–29, [arXiv:1207.7214 \[hep-ex\]](#).
- [27] **CMS** Collaboration, S. Chatrchyan *et al.*, “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC,” *Phys. Lett.* **B716** (2012) 30–61, [arXiv:1207.7235 \[hep-ex\]](#).
- [28] F. Zwicky, “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln,” *Helv. Phys. Acta* **6** (1933) 110–127.
- [29] M. Milgrom, “A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis,” *Astrophys. J.* **270** (1983) 365–370.
- [30] G. B. Gelmini, “TASI 2014 Lectures : The Hunt for Dark Matter,” 2015. [arXiv:1502.01320 \[hep-ph\]](#).
- [31] **Particle Data Group** Collaboration, J. Beringer *et al.*, “Review of Particle Physics (RPP),” *Phys. Rev.* **D86** (2012) 010001.
- [32] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The early universe*. No. v. 69 in Frontiers in physics. Westview Press, Boulder, Colo, paperback ed ed., 1994.
- [33] **Planck** Collaboration, P. A. R. Ade *et al.*, “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.* **594** (2016) A13, [arXiv:1502.01589 \[astro-ph.CO\]](#).
- [34] S. L. Glashow, “Partial Symmetries of Weak Interactions,” *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579–588.
- [35] A. Salam and J. C. Ward, “Electromagnetic and weak interactions,” *Phys. Lett.* **13** (1964) 168–171.
- [36] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264–1266.
- [37] F. Englert and R. Brout, “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321–323.
- [38] P. W. Higgs, “Broken symmetries, massless particles and gauge fields,” *Phys. Lett.* **12** (1964) 132–133.
- [39] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, “Global Conservation Laws and Massless Particles,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 585–587.
- [40] J. E. Kim and H. P. Nilles, “The mu Problem and the Strong CP Problem,” *Phys. Lett.* **B138** (1984) 150–154.
- [41] S. P. Martin, “A Supersymmetry primer,” [arXiv:hep-ph/9709356 \[hep-ph\]](#). [Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.18,1(1998)].
- [42] H. P. Nilles, “Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics,” *Phys. Rept.* **110** (1984) 1–162.
- [43] M. E. Peskin, “Supersymmetry in Elementary Particle Physics,” [arXiv:0801.1928 \[hep-ph\]](#).

- [44] B. Fuks, *Supersymmetry - When Theory Inspires Experimental Searches*. 2014. [arXiv:1401.6277 \[hep-ph\]](#).
- [45] N. D. Christensen and C. Duhr, “FeynRules - Feynman rules made easy,” *Comput. Phys. Commun.* **180** (2009) 1614–1641, [arXiv:0806.4194 \[hep-ph\]](#).
- [46] A. Alloul, N. D. Christensen, C. Degrande, C. Duhr, and B. Fuks, “FeynRules 2.0 - A complete toolbox for tree-level phenomenology,” *Comput. Phys. Commun.* **185** (2014) 2250–2300, [arXiv:1310.1921 \[hep-ph\]](#).
- [47] C. Duhr and B. Fuks, “A superspace module for the FeynRules package,” *Comput. Phys. Commun.* **182** (2011) 2404–2426, [arXiv:1102.4191 \[hep-ph\]](#).
- [48] A. Arbey and F. Mahmoudi, “SuperIso Relic v3.0 : A program for calculating relic density and flavour physics observables : Extension to NMSSM,” *Comput. Phys. Commun.* **182** (2011) 1582–1583.
- [49] F. Mahmoudi, “SuperIso v2.3 : A Program for calculating flavor physics observables in Supersymmetry,” *Comput. Phys. Commun.* **180** (2009) 1579–1613, [arXiv:0808.3144 \[hep-ph\]](#).
- [50] P. Gondolo and G. Gelmini, “Cosmic abundances of stable particles : Improved analysis,” *Nucl. Phys.* **B360** (1991) 145–179.
- [51] J. Edsjo and P. Gondolo, “Neutralino relic density including coannihilations,” *Phys. Rev.* **D56** (1997) 1879–1894, [arXiv:hep-ph/9704361 \[hep-ph\]](#).
- [52] T. Hahn, “Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3,” *Comput. Phys. Commun.* **140** (2001) 418–431, [arXiv:hep-ph/0012260 \[hep-ph\]](#).
- [53] T. Hahn and M. Perez-Victoria, “Automatized one loop calculations in four-dimensions and D-dimensions,” *Comput. Phys. Commun.* **118** (1999) 153–165, [arXiv:hep-ph/9807565 \[hep-ph\]](#).
- [54] T. Ohl, “Vegas revisited : Adaptive Monte Carlo integration beyond factorization,” *Comput. Phys. Commun.* **120** (1999) 13–19, [arXiv:hep-ph/9806432 \[hep-ph\]](#).
- [55] G. P. Contributors, “GSL - GNU scientific library - GNU project - free software foundation (FSF),” 2010. <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [56] G. Belanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov, “MicrOMEGAs : A Program for calculating the relic density in the MSSM,” *Comput. Phys. Commun.* **149** (2002) 103–120, [arXiv:hep-ph/0112278 \[hep-ph\]](#).
- [57] B. Schling, *The Boost C++ Libraries*. XML Press, 2011.
- [58] P. Gondolo, J. Edsjo, P. Ullio, L. Bergstrom, M. Schelke, and E. A. Baltz, “DarkSUSY : Computing supersymmetric dark matter properties numerically,” *JCAP* **0407** (2004) 008, [arXiv:astro-ph/0406204 \[astro-ph\]](#).
- [59] A. Einstein, “On the General Theory of Relativity,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1915** (1915) 778–786. [Addendum : *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915,799(1915)].
- [60] J. Wess and B. Zumino, “Superfield Lagrangian for Supergravity,” *Phys. Lett.* **B74** (1978) 51–53.
- [61] R. L. Arnowitt, P. Nath, and B. Zumino, “Superfield Densities and Action Principle in Curved Superspace,” *Phys. Lett.* **B56** (1975) 81–84.
- [62] R. Grimm, J. Wess, and B. Zumino, “A Complete Solution of the Bianchi Identities in Superspace,” *Nucl. Phys.* **B152** (1979) 255–265.
- [63] N. Dragon, “Torsion and Curvature in Extended Supergravity,” *Z. Phys.* **C2** (1979) 29–32.

- [64] P. C. West, *Introduction to supersymmetry and supergravity*. World Scientific, Singapore; Philadelphia, 1986.
- [65] S. J. Gates, Jr., K. S. Stelle, and P. C. West, “Algebraic Origins of Superspace Constraints in Supergravity,” *Nucl. Phys.* **B169** (1980) 347–364.
- [66] S. J. Gates, Jr. and W. Siegel, “Understanding Constraints in Superspace Formulations of Supergravity,” *Nucl. Phys.* **B163** (1980) 519–545.
- [67] W. Rarita and J. Schwinger, “On a theory of particles with half integral spin,” *Phys. Rev.* **60** (1941) 61.
- [68] J. Wess and B. Zumino, “The Component Formalism Follows From the Superspace Formulation of Supergravity,” *Phys. Lett.* **B79** (1978) 394–398.
- [69] E. Witten and J. Bagger, “Quantization of Newton’s Constant in Certain Supergravity Theories,” *Phys. Lett.* **B115** (1982) 202–206.
- [70] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935.
- [71] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, S. Ferrara, L. Girardello, and P. van Nieuwenhuizen, “Spontaneous Symmetry Breaking and Higgs Effect in Supergravity Without Cosmological Constant,” *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 105.
- [72] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas, and D. V. Nanopoulos, “Naturally Vanishing Cosmological Constant in N=1 Supergravity,” *Phys. Lett.* **B133** (1983) 61.
- [73] J. R. Ellis, A. B. Lahanas, D. V. Nanopoulos, and K. Tamvakis, “No-Scale Supersymmetric Standard Model,” *Phys. Lett.* **B134** (1984) 429.
- [74] J. R. Ellis, C. Kounnas, and D. V. Nanopoulos, “No Scale Supersymmetric Guts,” *Nucl. Phys.* **B247** (1984) 373–395.
- [75] A. B. Lahanas and D. V. Nanopoulos, “The Road to No Scale Supergravity,” *Phys. Rept.* **145** (1987) 1.
- [76] H. Georgi and S. L. Glashow, “Unity of All Elementary Particle Forces,” *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 438–441.
- [77] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics, Vol. 2*. Wiley classics library. Interscience Publishers, New York, 1989.
- [78] U. Ellwanger, C. Hugonie, and A. M. Teixeira, “The Next-to-Minimal Supersymmetric Standard Model,” *Phys. Rept.* **496** (2010) 1–77, [arXiv:0910.1785](https://arxiv.org/abs/0910.1785) [hep-ph].
- [79] P. Fayet and S. Ferrara, “Supersymmetry,” *Phys. Rept.* **32** (1977) 249–334.
- [80] U. Ellwanger, M. Rausch de Traubenberg, and C. A. Savoy, “Phenomenology of supersymmetric models with a singlet,” *Nucl. Phys.* **B492** (1997) 21–50, [arXiv:hep-ph/9611251](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9611251) [hep-ph].
- [81] J. A. Casas and C. Munoz, “A Natural solution to the mu problem,” *Phys. Lett.* **B306** (1993) 288–294, [arXiv:hep-ph/9302227](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9302227) [hep-ph].
- [82] G. F. Giudice and A. Masiero, “A Natural Solution to the mu Problem in Supergravity Theories,” *Phys. Lett.* **B206** (1988) 480–484.
- [83] G. L. Kane, C. F. Kolda, L. Roszkowski, and J. D. Wells, “Study of constrained minimal supersymmetry,” *Phys. Rev.* **D49** (1994) 6173–6210, [arXiv:hep-ph/9312272](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9312272) [hep-ph].
- [84] C. F. Berger, J. S. Gainer, J. L. Hewett, and T. G. Rizzo, “Supersymmetry Without Prejudice,” *JHEP* **02** (2009) 023, [arXiv:0812.0980](https://arxiv.org/abs/0812.0980) [hep-ph].

- [85] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge [Cambridgeshire]; New York, 1985.

Résumé

L'introduction d'une symétrie entre les bosons et les fermions, appelée supersymétrie, étend de manière naturelle le modèle standard de la physique des particules. Néanmoins, une telle symétrie n'a jamais été observée dans la nature : elle doit être nécessairement brisée. L'étude de la brisure de la supersymétrie induite par la gravitation est le coeur du travail effectué dans cette thèse.

En 1983, Soni et Weldon ont classifié les formes analytiques des deux fonctions fondamentales - le potentiel de Kähler et le superpotentiel - de manière à conduire à une supersymétrie brisée à basse énergie. Depuis, les analyses phénoménologiques sont basées sur cette classification.

Le principal résultat du présent manuscrit est de démontrer l'incomplétude de leur classification. Pour un potentiel de Kähler dit canonique, une classification complète est réalisée tandis qu'un début de classification est proposé pour le cas non-canonique. Dans les deux cas, de nouvelles solutions sont établies menant à de possibles nouvelles conséquences phénoménologiques à basse énergie.

L'apport de candidats pour le problème de la matière noire fait partie des contributions majeures des modèles supersymétriques. En parallèle du travail de classification, le développement d'un nouveau calculateur, permettant d'estimer la densité relique de matière noire dans l'Univers, est également proposé.

Abstract

Supersymmetry extends naturally the Standard Model through the introduction of a new symmetry between bosons and fermions. However, such symmetry has never been observed in nature : Supersymmetry must be broken. Gravity-mediated supersymmetry breaking is the main subject of this doctoral thesis.

In 1983, Soni and Weldon classified the analytical forms of the two fundamental functions - the Kähler potential and the superpotential - leading to a consistent low energy broken Supersymmetry. Up to nowadays, this classification has been used for phenomenological model building.

The main result of the current thesis demonstrates the incompleteness of their classification. A complete classification is presented for a given canonical Kähler potential while a first sight of the classification is proposed for the non-canonical case. From these assumptions, new solutions are obtained leading to new possibilities for model building at low energy.

The proposition of new dark matter candidates is one of the several contributions coming from supersymmetric models. In addition of the new classification, the development of a new generator, allowing to estimate the relic density of dark matter particles, is also proposed.