



**HAL**  
open science

# Contrôle et transmission de l'information dans les systèmes de spins

Lucile Aubourg

► **To cite this version:**

Lucile Aubourg. Contrôle et transmission de l'information dans les systèmes de spins. Physique [physics]. Université de Bourgogne Franche-Comté, 2017. Français. NNT: . tel-01546287v1

**HAL Id: tel-01546287**

**<https://theses.hal.science/tel-01546287v1>**

Submitted on 23 Jun 2017 (v1), last revised 9 May 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Thèse de doctorat

## Spécialité physique

### Contrôle et transmission de l'information dans les systèmes de spins

Lucile Aubourg

Date de la soutenance : 2 mars 2017

Membres du jury :

Rapporteurs :	Arne Keller (université Paris-sud) Dominique Spehner (université Grenoble Alpes)
Examineurs :	Perola Milman (université Paris Diderot, CNRS) Hans-Rudolf Jauslin (université de Bourgogne)
Directeurs de thèse :	Pierre Joubert (université de Franche-Comté) David Viennot (université de Franche-Comté)



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>I Dynamique interne et contrôle dans une chaîne de spins</b>	<b>17</b>
<b>1 Phénomènes internes à une chaîne de spins</b>	<b>21</b>
1.0.1 Matrice densité . . . . .	21
1.1 Modèles de chaînes de spins . . . . .	22
1.2 Évolution des chaînes de spins avec le paramètre d'interaction . . . . .	25
1.2.1 Évolution de la population . . . . .	25
1.2.2 Évolution de la cohérence . . . . .	26
1.3 Analyse du comportement des chaînes de spins . . . . .	29
1.3.1 Le modèle d'Heisenberg : un couplage isotrope . . . . .	29
1.3.2 Le modèle Ising-Z : une interaction conservant l'ordre dans la chaîne . . . . .	33
1.3.3 Modèle Ising-X : un couplage induisant un grand désordre . . . . .	34
<b>2 Théorème adiabatique des matrices densités</b>	<b>39</b>
2.1 Dynamique adiabatique et matrices densités . . . . .	39
2.1.1 Les théorèmes adiabatiques usuels . . . . .	39
2.1.2 Transport adiabatique . . . . .	40
2.2 Théorèmes adiabatiques forts et faibles . . . . .	41
2.2.1 Temps caractéristiques . . . . .	41
2.2.2 Les théorèmes adiabatiques . . . . .	44
2.3 Transport adiabatique de la matrice densité . . . . .	48
2.3.1 Régime adiabatique fort . . . . .	48
2.3.2 Ordre zéro du régime adiabatique faible . . . . .	49
2.3.3 Régime adiabatique faible du premier ordre . . . . .	53
2.3.4 Régime adiabatique faible du second ordre . . . . .	57
2.3.5 Le cas du bain thermique . . . . .	60
2.3.6 Croisements de valeurs propres dans le régime adiabatique faible . . . . .	61
2.4 Exemples . . . . .	62
2.4.1 Contrôle de qubits atomiques . . . . .	62
2.4.2 Contrôle d'un spin au milieu d'une chaîne . . . . .	67
<b>II Transmission du désordre de l'environnement vers le système</b>	<b>79</b>
<b>3 Dynamique de spins frappés</b>	<b>83</b>
3.1 Système de spins frappés . . . . .	83
3.2 Cyclicité des quasi-énergies . . . . .	85
3.2.1 L'anholonomie de Cheon . . . . .	85
3.2.2 Le spin . . . . .	86

<b>4</b>	<b>Effets du désordre de l'environnement</b>	<b>89</b>
4.1	Modélisation de l'environnement classique . . . . .	89
4.2	Le désordre dans un système de spins . . . . .	91
4.2.1	Effets du désordre sur la dynamique des spins . . . . .	91
4.2.2	Analyses des comportements des effets du couplage avec la distribution d'Husimi	106
4.3	Possibilités de conservation de l'ordre dans les systèmes de spins . . . . .	108
4.3.1	Frappe dans la direction d'un vecteur propre . . . . .	108
4.3.2	Petite fréquence de Rabi du spin . . . . .	113
4.4	Discussion à propos de la taille de la chaîne . . . . .	115
<b>III</b>	<b>Bruit chaotique agissant sur un système quantique</b>	<b>125</b>
<b>5</b>	<b>Chaos classique et chaos quantique</b>	<b>129</b>
5.1	Chaos classique . . . . .	129
5.1.1	Définitions d'un système dynamique classique . . . . .	129
5.1.2	Topologie des systèmes dynamiques conservatifs . . . . .	131
5.1.3	Chaos . . . . .	132
5.1.4	Les exposants de Lyapunov . . . . .	133
5.1.5	Exemple : Le chat d'Arnold . . . . .	133
5.2	Chaos quantique . . . . .	138
5.2.1	Discussion sur la notion de chaos quantique . . . . .	138
5.2.2	Critères du chaos quantique . . . . .	139
5.2.3	Chaînes de spins chaotiques . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Ensembles de spins soumis à des frappes chaotiques</b>	<b>147</b>
6.1	Décohérence avec une dynamique suivant le Chat d'Arnold . . . . .	147
6.2	Analyse des exposants de Lyapunov et horizon de prédictibilité . . . . .	150
6.3	Notions d'entropie . . . . .	151
6.3.1	Entropie de Shannon . . . . .	151
6.3.2	L'entropie métrique . . . . .	152
6.4	Evolutions de l'entropie . . . . .	153
<b>7</b>	<b>Conservation de l'horizon de cohérence dans les structures de spins</b>	<b>155</b>
7.1	Conservation par changement du système dynamique . . . . .	155
7.1.1	Chaîne de spins . . . . .	155
7.1.2	Glace de spins . . . . .	166
7.2	Conservation par changement de l'environnement chaotique . . . . .	173
7.2.1	Standard map . . . . .	173
7.2.2	Environnement chaotique dissipatif . . . . .	176
<b>8</b>	<b>Contrôle de systèmes quantiques soumis à un bruit chaotique</b>	<b>183</b>
8.1	Un modèle approprié pour réaliser du contrôle . . . . .	183
8.1.1	Dynamique de l'information le long d'une chaîne de spins . . . . .	183
8.1.2	Analyse de la transmission d'information le long d'une chaîne de spins . . . . .	189
8.1.3	Contrôle de l'information transmise . . . . .	196
8.1.4	Réalisation d'une opération et d'une porte <i>not</i> . . . . .	202
8.2	Contrôle du monopôle d'une glace de spins . . . . .	206
<b>IV</b>	<b>Théorie de Koopman et horizon de cohérence</b>	<b>213</b>
<b>9</b>	<b>L'opérateur de Koopman</b>	<b>217</b>
9.1	Définitions fondamentales . . . . .	217

9.2	Analyses spectrales de l'opérateur de Koopman . . . . .	219
9.3	Propriétés ergodiques . . . . .	222
9.4	Résumé sur le spectre de Koopman . . . . .	224
<b>10</b>	<b>Système quantique asservi</b>	<b>225</b>
10.1	L'équation de Schrödinger-Koopman . . . . .	225
10.2	Le spectre de quasi-énergies . . . . .	227
10.2.1	L'équation des quasi-énergies . . . . .	227
10.2.2	Développement local des états de quasi-énergies . . . . .	231
10.2.3	Développement global des états de quasi-énergies . . . . .	233
10.3	Dynamique de Schrödinger-Koopman . . . . .	234
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>241</b>
<b>A</b>	<b>Opérateur d'évolution d'un système de spins frappés</b>	<b>243</b>
<b>B</b>	<b>Démonstration de la présence d'anholonomie</b>	<b>247</b>
<b>C</b>	<b>Définitions et propriétés des entropies</b>	<b>251</b>
C.1	Entropie métrique . . . . .	251
C.2	Entropie topologique . . . . .	256
<b>D</b>	<b>Partition de l'exponentielle ordonnée en temps</b>	<b>259</b>



# Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mes deux directeurs de thèse M. Pierre Joubert et M. David Viennot pour leur soutien, leur aide, leur écoute et leur encadrement lors de ces trois années de thèse.

Je remercie également les personnes qui ont été là pour discuter de mon travail, faire des commentaires lors de sessions posters ou lors de conférences et en particulier M. Hans-Rudolf Jauslin, M. Arne Keller, M. Vincent Pouthier, M. José Lages, M. Dominique Sugny et M. Stéphane Guérin.

Un grand merci aussi à tous les membres de l'observatoire pour leur accueil et leur aide lors des phases compliquées de ma thèse. Je remercie aussi la directrice de l'observatoire Mme. Céline Reylé, les membres du service informatique Mme. Françoise Gazelle, M. Sekou Diakité et M. Kevin van Keulen et les secrétaires de l'observatoire Mme Martine Pidancier et Mme Fabienne Locatelli.

Je remercie finalement M. Arne Keller, M. Dominique Spehner, Mme Perola Milman et M. Hans-Rudolf Jauslin d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse.



# Publications

Voici la liste des publications réalisées :

1. D. Viennot and L. Aubourg, *Decoherence, relaxation, and chaos in a kicked-spin ensemble*, Physical Review E, **87** 062903 (2013)  
associée aux chapitres 4 et 6
2. Lucile Aubourg and David Viennot, *Analyses of the transmission of the disorder from a disturbed environment to a spin chain*, Quantum Information Processing, **14** 1117-1150 (2015)  
associée au chapitre 4
3. David Viennot and Lucile Aubourg, *Adiabatic theorem for bipartite quantum systems in weak coupling limit*, Journal of Physics A, **48** 025301 (2015)  
associée au chapitre 2
4. David Viennot and Lucile Aubourg, *Quantum chimera states*, Physics Letters A, **380** 5-6 (2015)  
associée au chapitre 5
5. Lucile Aubourg and David Viennot, *Information transmission in a chaotically kicked spin chain*, Journal of Physics B, **49** 115501 (2016)  
associée au chapitre 8



# Notations

$\sim$	équivalent à
$\ \cdot\ $	norme
$\cap$	intersection
$\cup$	union
$\otimes$	produit tensoriel
$\odot$	$A \odot B = \sum_{i=1}^{\dim A} A_i \otimes B_i$ avec $\dim A = \dim B$
$\langle \cdot   \cdot \rangle$	produit scalaire dans un espace de Hilbert
$\langle\langle \cdot   \cdot \rangle\rangle$	produit interne de $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$
$\emptyset$	ensemble vide
$\mathfrak{A}d$	action adjointe ( $\mathfrak{A}d(U)\rho = U\rho U^\dagger$ )
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	ensemble des opérateurs bornés de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$
$C^k(A, B)$	ensemble des fonctions $k$ -fois différentiables de $A$ à valeurs dans $B$
$\mathbb{C}$	corps des complexes
dist	distance
dim	dimension
$\dim_{Hausd.}$	dimension de Hausdorff
$\text{Dom}H$	domaine de l'opérateur $H$
$F^\mathfrak{T}$	transposée de l'opérateur $F$
$H$	opérateur Hamiltonien
$H_K$	Hamiltonien de Koopman
$i$ avec $i^2 = -1$	nombre complexe
$I^{\otimes N}$	produit tensoriel de $N$ matrices identités d'ordre 2
$Im$	partie imaginaire
$\inf_\alpha f$	borne inférieure sur $\alpha$ de la fonction $f$
$\mathcal{K} = L^2(\Gamma, d\mu) \otimes \mathcal{H}$	espace de Hilbert étendu
$L^1(X, \mu)$	$\{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ tel que } \int_X  f(x) d\mu(x) < +\infty\}$
$L^2(X, dx)$	ensemble des fonctions de carré sommable de $X$ pour la mesure de Lebesgue
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	ensemble des opérateurs de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$
$\limsup_\alpha f$	limite supremum sur $\alpha$ de $f$
$\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{G})$	ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes sur le corps $\mathbb{G}$
$\max G$	maximum de $G$
$\min G$	minimum de $G$
$\mathcal{O}(x^n)$	reste d'ordre $x^n$ lorsque $x$ est au voisinage de 0
$Re$	partie réelle
$\text{Sp}(H)$	spectre de $H$
$\sup_\alpha f$	borne supérieure sur $\alpha$ de la fonction $f$
$\overleftarrow{\mathbb{T}e}$ et $\overrightarrow{\mathbb{T}e}$	exponentielles ordonnées en temps (de gauche à droite ou de droite à gauche)
$\mathcal{T}^t$	opérateur de Koopman
$\text{tr}_{\mathcal{E}}$	trace (partielle) sur $\mathcal{E}$
$U(t, 0)$	opérateur d'évolution
$U_K$	opérateur d'évolution de Koopman
$\mathcal{U}(\mathcal{H})$	ensemble des opérateurs unitaires de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$
$\mathcal{V}(0)$	voisinage de 0
$w_0$	fréquence de frappe

$\alpha \vee \beta$	joint des ensembles $\alpha$ et $\beta$ $\{A \cap B / A \in \alpha, B \in \beta, A \cap B \neq \emptyset\}$
$\alpha \preceq \beta$	la partition $\alpha$ est moins fine que la partition $\beta$
$\lambda_n^{(i)}$	force de la $i$ -ième frappe agissant sur le $n$ -ième spin
$\tau_n^{(i)}$	retard de la $i$ -ième frappe agissant sur le $n$ -ième spin
$\varphi_n^{(i)}$	retard angulaire de la $i$ -ième frappe agissant sur le $n$ -ième spin
$\sigma_x, \sigma_y$ et $\sigma_z$	matrices de Pauli
$\partial$	dérivée partielle
$f : A \rightarrow B$	l'application $f$ part de l'ensemble $A$ et arrive dans l'ensemble $B$
$f : x \mapsto y \Leftrightarrow y = f(x)$	l'application $f$ associe à l'élément $x$ l'élément $y$

# Introduction

Le contrôle quantique est un aspect émergent de la recherche qui touche un grand nombre de domaines. Nous pouvons citer par exemple les ordinateurs quantiques. Dans ces derniers les bits qui n'ont que deux états 0 ou 1 sont remplacés par des qubits pouvant avoir une infinité d'états grâce au principe fondamental de la physique quantique : la superposition d'états. Celle-ci stipule que si une particule quantique est caractérisée par deux niveaux d'énergie par exemple  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ , alors elle peut être dans un état  $a|0\rangle + b|1\rangle$  avec  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Dans les ordinateurs quantiques, le contrôle peut apparaître pour réaliser des portes logiques quantiques. Certaines de ces portes sont équivalentes à celles que nous connaissons en classique, en particulier la porte *not* qui permet d'inverser l'état d'entrée. Par exemple si nous reprenons un qubit, et si à l'entrée de la porte il est dans l'état  $a|0\rangle + b|1\rangle$ , en sortie il sera dans l'état  $b|0\rangle + a|1\rangle$ . Mais, le contrôle ne touche pas que les ordinateurs quantiques, nous le retrouvons aussi dans la spintronique (nous utilisons la propriété quantique du spin de l'électron pour stocker de l'information), la qnantronique (nous remplaçons les dispositifs électroniques par des atomes), l'information quantique, les nanosciences etc. Il existe plusieurs types de contrôles : le contrôle statique dans lequel nous imposons un jeu de paramètres à l'environnement (comme un champ laser) sur lequel nous n'agissons plus, le contrôle dynamique dans lequel nous faisons évoluer les paramètres de contrôle au cours du temps pour aller vers l'état cible ; les contrôles quantiques cohérents et incohérents qui comme leurs noms l'indiquent, font intervenir soit que des états purs, soit des distributions d'états quantiques ; le contrôle actif consistant à essayer expérimentalement le contrôle avec certains paramètres, et à ajuster ensuite ceux-ci en fonction du résultat jusqu'à obtenir le contrôle souhaité, et le contrôle passif qui consiste à étudier ab initio le système, et à le comprendre théoriquement afin de réaliser tout de suite le meilleur contrôle possible. Pour arriver à contrôler le système, nous avons besoin de mieux comprendre comment l'information quantique se transmet dans les systèmes quantiques (dynamique de l'information dans les systèmes) et comment elle se dégrade (décohérence, relaxation, etc).

Les systèmes quantiques sont souvent sujets au problème de décohérence [93]. Il existe plusieurs processus de décohérence dont l'un des plus importants est l'intrication. Pour comprendre ce phénomène, considérons un atome isolé. Un physicien réalise une analyse théorique de cet atome. L'étude expérimentale associée ne donnera pas le même résultat car l'environnement (d'autres atomes formant un gaz par exemple) va interagir avec cet atome, ce qui entraîne une "corrélation" entre l'état du système et celui de l'environnement. C'est ce que nous appelons l'intrication. La décohérence correspond à l'augmentation de cette dernière. Elle pourrait se traduire par une mauvaise rotation du qubit lors de la formation d'une porte *not*. Le qubit partant de l'état  $|0\rangle$  n'arriverait pas à l'état  $|1\rangle$ . Les autres processus de décohérence pouvant intervenir sont la dissipation (ce n'est pas à proprement parler un phénomène de décohérence (c'est plutôt une relaxation qui existe aussi du point de vue classique)) qui est aujourd'hui très bien comprise d'un point de vu adiabatique, ou la distorsion des paramètres de contrôle par l'environnement. Lorsque la décohérence est maximale, le système pris initialement dans un état quantique (une superposition d'états) devient classique. Il présente alors une certaine probabilité statistique d'être dans un état propre (classique) donné. Ceci induit une mauvaise prédiction des résultats lors d'un contrôle. Les aspects quantiques des phénomènes ne peuvent plus être exploités. La décohérence peut survenir par exemple lorsqu'un qubit est couplé avec des qubits voisins ou par du bruit environnemental (le bain thermique, les bains de phonons dans les solides). Le bruit environnemental peut agir directement sur le système quantique (équation de Lindblad [19], systèmes ouverts [3, 36]). Ce dernier point a déjà été très souvent étudié, et n'est pas l'objectif de ce travail de

thèse. Mais dans l'optique du contrôle, comme nous l'avons dit, le bruit environnemental peut avoir un autre effet : distordre le signal de contrôle. Ceci est peu étudié et est l'une des études principales de ce travail. Nous pouvons noter que dans la plupart des cas le bruit agit à la fois sur le contrôle et sur le système. Cependant pour mettre en exergue les effets de la perturbation du contrôle, nous négligerons les divers effets environnementaux directs sur le système. Nous voulons comprendre les effets de la distorsion sur l'intrication, la décohérence et la contrôlabilité du système. Est-ce que le bruit est gênant pour la transmission de l'information ?

Un des buts de ce travail est de réduire la décohérence et d'analyser la transmission d'information à l'intérieur même d'un système quantique et entre un environnement et son système quantique. Pour ce faire nous travaillerons principalement sur des spins (cette notion sera abordée pour la première fois dans le chapitre 1). Les spins ayant deux états, nous pouvons facilement parler d'information en faisant l'analogie avec un qubit. L'état  $|1\rangle$  ou up représentera l'information 1 et l'état  $|0\rangle$  ou down, l'information 0. Pour ce faire, nous regarderons tout d'abord une approche adiabatique. Elle décrit le fait que le système initialement sur un état de quasi-énergies (cette notion sera abordée au chapitre 3) reste sur cet état au cours du contrôle et n'en change pas (l'état évoluant au cours du temps). Le suivi d'une quasi-énergie n'est possible que si la quasi-énergie associée est isolée. Il ne doit pas exister de croisement de quasi-énergies. Si ce dernier cas n'est pas vérifié, pour conserver le contexte adiabatique, nous devons considérer un groupe d'états de quasi-énergies dont l'ensemble des quasi-énergies associées est adiabatiquement isolé des autres. Il est alors possible de connaître la forme finale de l'état qui n'est qu'une déformation de l'état initial. Pour bénéficier du contexte adiabatique, il faut réaliser une lente modulation des paramètres de contrôle. Dans un premier temps nous essaierons de déterminer les relations adiabatiques existant dans un système quantique bipartite (système constitué de deux parties) au travers d'un couplage perturbatif. Le bruit perturbant le système ne vient pas de l'extérieur mais est interne au système en faisant varier les conditions initiales (bruit interne, désordre initial des spins).

Toujours dans l'optique de réaliser de la transmission d'information nous complexifierons le système en lui rajoutant un environnement. Le contrôle peut alors être distordu par ce que nous appellerons un environnement classique modifiant les paramètres de contrôle du champ magnétique. Nous étudierons plusieurs types de bruits académiques en passant d'un bruit peu désordonné, un bruit stationnaire (bruit dans la distribution spatiale des conditions initiales sans bruit temporel), au bruit le plus désordonné possible, du bruit blanc (distorsion microcanonique). Ces bruits ne possèdent pas de propriétés particulières. Mais quand le système classique a des propriétés particulières (par exemple un bruit chaotique présentant des exposants de Lyapunov, étant déterministe et peut être ergodique, ou présentant un attracteur étrange), nous pouvons nous demander si et comment le système classique transmet ses propriétés au système quantique (y a-t-il une signature des propriétés classiques dans le système quantique ?). Nous nous intéressons donc à la transmission de l'information dans le système de qubits mais aussi au bruit de l'environnement et comment il vient perturber le système.

Dans ce rapport nous nous intéressons certes à l'aspect pratique (arriver à faire du contrôle quantique), mais aussi aux aspects les plus fondamentaux (transmission de l'information du classique vers le quantique, théorie de l'information quantique, transport de l'information dans un système). Nous ne cherchons pas à optimiser les solutions de contrôle, nous voulons comprendre le phénomène d'un point de vu fondamental. Pour ce faire, nous utiliserons des simulations numériques à l'aide de Mathematica. Nous avons écrit un code de simulation numérique qui ait le moins d'approximations possible. De plus, nous étudions des systèmes non-autonomes donc dépendant du temps, ce qui limite la capacité à simuler un très grand système. Ces deux aspects réduisent la taille de notre système qui est de 1024 spins sans couplage et seulement de 12 spins maximum lorsqu'ils sont couplés. Néanmoins, nous avons vérifié que les résultats étaient invariants d'échelle. Au cours des expériences numériques, nous faisons varier les entrées dans tout l'espace des paramètres pour étudier toutes les propriétés du système pouvant intervenir, afin de dégager des lois empiriques du comportement du système. Nous avons donc besoin d'une réponse rapide du programme de simulation. Ensuite, nous nous intéressons à donner un cadre plus formel (théorème adiabatique pour analyser la dynamique du comportement, approche de Koopman pour lier le classique et le quantique et éléments de la théorie de l'information (entropies métrique et topologique)).

Pour étudier la transmission de l'information dans les systèmes de spins, nous essaierons d'abord de déterminer un théorème adiabatique des matrices densités quand le système bipartite est faiblement couplé et en l'absence d'environnement. Nous complexifierons ensuite notre système en rajoutant du bruit extérieur qui peut être stationnaire, de dérive linéaire, Markovien ou blanc. Dans un troisième temps, nous modifierons ce bruit académique en considérant un bruit possédant des propriétés particulières plus "structurées" (bruits chaotiques). Ce bruit présente la particularité d'être "ordonné" au début (comme le bruit stationnaire) et de devenir après un laps de temps appelé horizon de prédictibilité, très "désordonné" (comme le bruit blanc). Finalement nous essaierons de formaliser mathématiquement la transmission de l'information au travers de la théorie de Koopman.



Première partie

Dynamique interne et contrôle dans  
une chaîne de spins



# Introduction

Un système quantique bipartite est constitué de deux sous-systèmes que nous notons  $\mathcal{S}$  (pour le système) et  $\mathcal{E}$  (pour l'environnement) et décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ . Nous sommes seulement intéressés par le comportement de la composante  $\mathcal{S}$  avec l'oubli d'informations sur la composante  $\mathcal{E}$ . Si  $\psi \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$  est l'état du système quantique bipartite, le sous-système  $\mathcal{S}$  est décrit par la matrice densité  $\rho = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\psi\rangle\langle\psi|$  (où  $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$  dénote le produit interne de  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ ) où la trace partielle  $\text{tr}_{\mathcal{E}}$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$  supprime l'information concernant  $\mathcal{E}$ .  $\rho$  prend en compte l'intrication de  $\mathcal{S}$  avec  $\mathcal{E}$ . En effet la matrice densité contient plusieurs informations. Les éléments diagonaux représentent la population des états et les éléments non diagonaux la cohérence. Si le système et l'environnement sont très fortement intriqués, les éléments non-diagonaux de la matrice densité du système tendent à être proche de 0 (bien sûr ceci dépend de la base mais avec un système fortement intriqué, les éléments non-diagonaux sont proches de 0 dans toutes les bases) et les éléments diagonaux représentent la probabilité que le système soit dans un certain état. C'est dans ce dernier cas que nous parlons d'intrication. Un problème intéressant dans la dynamique d'un système quantique bipartite est le contrôle de la composante  $\mathcal{S}$ . Le contrôle quantique a potentiellement plusieurs applications en nanoscience et dans les ordinateurs quantiques. Un problème du contrôle quantique consiste à trouver comment agir sur  $\mathcal{S}$  (par champ laser, champ magnétique, etc) de manière à ce que  $\mathcal{S}$  évolue d'un état initial  $\rho_0$  vers un état cible prédéterminé  $\rho_{\text{cible}}$ . La présence de  $\mathcal{E}$  peut considérablement modifier le problème de contrôle par rapport au contrôle d'un état pur de  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  avec  $\mathcal{S}$  seul. De plus, le contrôle peut affecter  $\mathcal{E}$  directement ou indirectement par le couplage entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$ . La compréhension de la dynamique de  $\mathcal{S}$  avec  $\mathcal{E}$  est cruciale.

Une telle situation arrive en théorie de l'information quantique où  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$  sont deux qubits d'un ordinateur quantique ou deux ensembles de qubits. Dans ce cas, le contrôle consiste à réaliser des portes logiques ou un algorithme quantique sur  $\mathcal{S}$  en présence d'autres qubits  $\mathcal{E}$  de l'ordinateur quantique. Cependant, les dynamiques de systèmes quantiques bipartites surviennent aussi dans le contrôle de systèmes quantiques ouverts où  $\mathcal{S}$  est un petit sous-système et  $\mathcal{E}$  est un grand environnement responsable des effets de décohérence sur  $\mathcal{S}$ .

Une approche adiabatique peut être utilisée [64] pour décrire le contrôle quantique, car la variation des paramètres de contrôle est souvent lente. L'hypothèse adiabatique consiste à prendre des paramètres de contrôle évoluant lentement par rapport aux temps caractéristiques du système. Dans ce cas, l'état du système reste sur l'état propre instantané ou le groupe d'états propres instantanés qui se déforment avec le temps. Le seul changement d'états possible est lorsqu'un croisement de valeurs propres se produit. Des schémas de contrôles quantiques basés sur l'approximation adiabatique ont été proposés pour différents systèmes fermés [108, 61, 83, 40]. Pour des systèmes quantiques ouverts, des approches adiabatiques basées sur des Hamiltoniens non hermitiens ont été étudiées [35, 85, 86]. Des travaux s'intéressant aux aspects bipartites de la dynamique quantique ont été réalisés par Sjöqvist et al du point de vu des phases géométriques non adiabatiques [91, 95, 25]. Récemment des phases géométriques à valeurs opérateurs ont été proposées comme généralisations des phases géométriques de Sjöqvist, dans le contexte d'évolutions cycliques non adiabatiques [2] et d'évolutions adiabatiques [100, 102]. Néanmoins une étude rigoureuse du régime adiabatique du système quantique bipartite exhibant des phases géométriques à valeurs opérateurs n'a jamais été réalisée.

Un des buts de ce chapitre est de voir comment le couplage peut perturber le système. En effet, nous savons qu'une particule quantique n'est jamais isolée et que le couplage avec les autres particules pourrait entraîner des phénomènes de relaxation de la population et de décohérence. Autrement dit, une question importante est de savoir comment le couplage transmet l'information à l'intérieur du

système bipartite.

Dans une première partie, nous regarderons les effets du couplage. Pour ceci, nous analyserons le comportement de chaînes de spins couplés par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg, d'Ising-Z ou d'Ising-X. Ensuite nous complexifierons le système en rajoutant du contrôle sur les spins. Le second but de cette partie est de montrer que, sous certaines conditions concernant l'évolution du système quantique bipartite, l'évolution de la matrice densité satisfait une formule de transport adiabatique exhibant des phases géométriques à valeurs opérateurs. Nous présenterons quelques rappels sur les théorèmes adiabatiques usuels. Nous établirons ensuite des théorèmes adiabatiques par rapport à une discussion concernant différentes échelles de temps apparaissant dans la dynamique du système quantique bipartite. En particulier, nous considérerons deux régimes adiabatiques. Ces résultats nous permettront d'établir des formules de transport adiabatique de la matrice densité. Ces formules exhibent (pour le régime adiabatique faible) des phases géométriques à valeurs opérateurs similaires à celles introduites dans des études précédentes [91, 95, 25, 2, 100, 102]. Le générateur de phase dynamique à valeurs opérateurs peut apparaître comme un Hamiltonien effectif de  $\mathcal{S}$  habillé par  $\mathcal{E}$ . Dans ce second chapitre, nous considérons le cas d'un faible couplage entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$ . En effet, pour souligner le comportement individuel de la composante  $\mathcal{S}$  à l'intérieur du système bipartite du point de vue de l'approximation adiabatique, il est nécessaire d'explicitier la relation entre les vecteurs propres du système bipartite et les vecteurs propres de sa composante  $\mathcal{S}$ . Ceci requiert une analyse perturbative. Finalement, nous présenterons deux exemples : un qubit réalisé comme un atome à deux niveaux dans un champ laser (décrit dans l'approximation de l'onde tournante) en interaction perturbative avec un autre atome, et un spin contrôlé par un champ magnétique au milieu d'une chaîne caractérisée par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg.

# Chapitre 1

## Phénomènes internes à une chaîne de spins

Nous allons étudier les phénomènes pouvant intervenir avec le couplage au travers d'un exemple : les chaînes de spins. Il existe un grand nombre de couplages possibles mais nous nous intéresserons seulement à trois cas : le couplage d'Heisenberg, d'Ising-Z et d'Ising-X. Cette analyse des effets du couplage nous permettra aussi de déterminer le rôle de ces interactions. De telles chaînes de spins ont par exemple été étudiées dans [96, 42, 104]. Pour pouvoir les étudier, nous avons besoin de définir la notion de matrice densité.

### 1.0.1 Matrice densité

La matrice densité est une description introduisant un mélange statistique d'états quantiques ([19]). Supposons que nous voulions réaliser une statistique sur un système  $S$  possédant les états propres  $\{\psi_n\}_n$  et que nous possédions  $n$  copies identiques (relativement à l'information disponible) de  $S$  avec  $n \gg 1$ . Si nous prenons une copie au hasard, il y a une probabilité  $P_n$  (liée à la méconnaissance sur le système, nous ne disposons pas de toute l'information sur  $S$ ) pour que celle-ci soit dans l'état  $\psi_n$ . Afin d'introduire la matrice densité, nous modélisons dans "un tableau" le fait que le système soit dans l'état  $\psi_n$  avec une probabilité  $P_n$  :

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & P_n \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\dim \mathcal{H}} P_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \rho$$

où la matrice densité  $\rho$  est prise ici dans sa base diagonale. Si nous prenons une autre base, nous pourrions trouver cette dernière matrice pleine. Les propriétés concernant  $\rho$  sont les suivantes :

- $\sum_{n=1}^{\dim \mathcal{H}} P_n = 1 \Leftrightarrow \text{tr} \rho = 1$  (avec  $\text{tr}$  la trace sur l'espace du système)
- $\rho = \rho^\dagger$  (la matrice densité est auto-adjointe)
- la probabilité pour qu'une copie soit dans l'état  $\phi$  est  $\text{tr}(\rho|\phi\rangle\langle\phi|) = \langle\phi|\rho|\phi\rangle$
- $\rho \geq 0 \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{H} \quad \langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0$

Considérons un univers constitué d'un environnement  $\mathcal{E}$ , d'un système  $S$  et décrit par l'espace des états  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$ . Si nous obtenons une incertitude sur le système, qui se caractérise par l'apparition de probabilités, c'est parce que nous avons un manque d'informations sur l'environnement, nous ne connaissons pas son état. Afin de déterminer des informations sur le système, nous introduisons la matrice densité  $\rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} |\psi\rangle\langle\psi|$ , avec  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$  un état de l'univers. Celle-ci revient alors à moyennner sur tous les états possibles de l'environnement. Nous retrouvons bien un état du système

après la trace car si  $\{|\alpha\rangle\}$  est une base des états du système,  $\{|n\rangle\}$  est une base de ceux de l'environnement et  $\psi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ , tel que  $\psi = \sum_{n,\alpha} \psi_{n\alpha} |\alpha\rangle \otimes |n\rangle \equiv |\psi\rangle$ ,  $\phi = \sum_{n,\alpha} \phi_{n,\alpha} |\alpha\rangle \otimes |n\rangle \equiv |\phi\rangle$   
 $\Rightarrow |\phi\rangle\langle\psi| = \sum_{n,\alpha} \sum_{m,\beta} \phi_{n,\alpha} \overline{\psi_{m,\beta}} |\alpha\rangle\langle\beta| \otimes |n\rangle\langle m|$ , la trace nous donne :

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathcal{H}_E} |\phi\rangle\langle\psi| &= \sum_n \langle n | \phi \rangle \langle \psi | n \rangle \\ &= \sum_n \sum_{\alpha,\beta} \phi_{n,\alpha} \overline{\psi_{n,\beta}} |\alpha\rangle\langle\beta| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Les matrices densités permettent aussi de stipuler si l'état de l'univers est factorisé ou intriqué. En effet, dans le cas où l'état de l'univers est sous forme factorisée, la matrice densité donnera un état pur :  $\rho = |\chi\rangle\langle\chi|$  avec  $\chi \in \mathcal{H}_S$ . Cependant, dans l'autre cas, si l'état de l'univers est sous forme intriquée, la matrice densité donnera un état mixte avec une certaine probabilité attachée aux états présents dans la mixture.

## 1.1 Modèles de chaînes de spins

Nous considérons une chaîne de  $N$  spins couplés par une interaction de plus proches voisins. Un champ magnétique constant et uniforme est appliqué sur les spins entraînant une levée de dégénérescence par effet Zeeman. L'hamiltonien d'un tel système s'écrit

$$H = \sum_{n=1}^N H_{0,n} + \sum_{n=1}^{N-1} H_{I,n} \quad (1.2)$$

avec  $H_{0,n} = I^{\otimes(n-1)} \otimes \frac{\hbar w_1}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes I^{\otimes(N-n)}$  l'hamiltonien quantique du  $n$ -ième spin avec seulement l'effet Zeeman et  $H_{I,n}$  l'hamiltonien d'interaction de plus proches voisins qui peut être pour le  $n$ -ième couple de spins consécutifs, un des opérateurs suivants

1. Interaction d'Heisenberg

$$H_{I_n} = -JI^{\otimes(n-1)} \otimes (S_x \otimes S_x + S_y \otimes S_y + S_z \otimes S_z) \otimes I^{\otimes(N-n-1)} \quad (1.3)$$

2. Interaction Ising-Z

$$H_{I_n} = -JI^{\otimes(n-1)} \otimes S_z \otimes S_z \otimes I^{\otimes(N-n-1)} \quad (1.4)$$

3. Interaction Ising-X

$$H_{I_n} = -JI^{\otimes(n-1)} \otimes S_x \otimes S_x \otimes I^{\otimes(N-n-1)} \quad (1.5)$$

avec  $J$  le paramètre d'interaction,  $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ ,  $\{\sigma_i\}_{i=x,y,z}$  les matrices de Pauli et  $I^{\otimes n}$  le produit tensoriel de  $n$  matrices identités d'ordre 2.

L'opérateur d'évolution de  $t = \frac{2\pi i}{w_0}$  à  $t = \frac{2(i+1)\pi}{w_0}$  s'écrit

$$U^{(i)} = e^{-i \frac{H}{\hbar w_0} 2\pi} \quad (1.6)$$

où  $w_0$  est la fréquence de l'échantillonnage temporel (i.e.  $\frac{2\pi}{w_0}$  est le pas de discrétisation temporel).

Soit  $|\psi^{(i)}\rangle \in \mathbb{C}^{2^N}$  l'état de la chaîne au temps  $t = iT$  ( $|\psi^{(i)}\rangle$  représente l'évolution discrétisée de la chaîne et  $T = \frac{2\pi}{w_0}$ ). Par définition de l'opérateur d'évolution nous avons

$$|\psi^{(i+1)}\rangle = U^{(i)} |\psi^{(i)}\rangle \quad (1.7)$$

La matrice densité de la chaîne est

$$\rho^{(i)} = |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}| \quad (1.8)$$

et la matrice densité du  $n$ -ième spin est

$$\rho_n^{(i)} = \text{tr}_{i=1,\dots,n-1,n+1,\dots,N}(\rho^{(i)}) \quad (1.9)$$

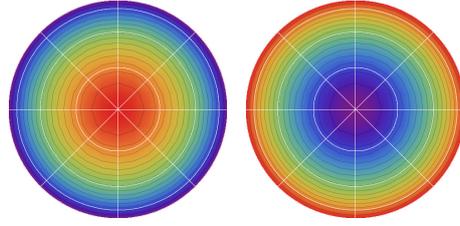


FIGURE 1.1 – Représentation schématique de la distribution d'Husimi. La couleur rouge représente le maximum de probabilité et la couleur bleu la plus petite probabilité. Le pôle nord est situé au centre et le pôle sud est le cercle limite. Nous avons représenté les états propres des spins, pour la première sphère le spin est dans l'état  $|\uparrow\rangle$  et pour la seconde  $|\downarrow\rangle$ .

$\text{tr}_{i=1,\dots,n-1,n+1,\dots,N}$  est la trace partielle sur l'espace de Hilbert des spins sauf le  $n$ -ième. La matrice densité encode deux informations fondamentales. La première concerne les éléments diagonaux. Ils représentent la probabilité d'occupation des états  $|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$  du  $n$ -ième spin et sont appelés la population ( $\langle\uparrow|\rho_n^{(i)}|\uparrow\rangle$ ) et ( $\langle\downarrow|\rho_n^{(i)}|\downarrow\rangle$ ). La seconde information est associée aux termes non diagonaux. Ils sont une mesure de la cohérence quantique<sup>1</sup> du  $n$ -ième spin et sont appelés la cohérence ( $|\langle\uparrow|\rho_n^{(i)}|\downarrow\rangle|$ ).

A partir de  $\rho_n^{(i)}$ , nous obtenons la matrice densité du spin moyen de la chaîne au temps  $i$

$$\rho_{tot}^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \rho_n^{(i)} \quad (1.10)$$

La population et la cohérence d'un spin moyen de la chaîne et d'un spin de la chaîne vont nous permettre de voir et d'analyser les phénomènes apparaissant au travers du couplage.

Afin d'étudier l'évolution des spins de la chaîne, nous allons utiliser une analyse semi-classique au travers de la distribution d'Husimi. Elle est définie par

$$H(\theta, \varphi) = |\langle\theta, \varphi|\psi\rangle|^2 \quad (1.11)$$

avec  $|\theta, \varphi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|\downarrow\rangle$  l'état cohérent d'un spin [70]. La distribution d'Husimi est une distribution de quasi-probabilité représentant la distribution d'un état quantique sur l'espace de phase classique du système. Notre système est constitué de spins. L'équivalent classique du spin est un moment dipolaire magnétique et donc un vecteur.  $(\theta, \varphi)$  représente l'orientation de ce vecteur. L'état  $|\theta, \varphi\rangle$  est l'état quantique le plus proche de l'état classique de vecteur orienté dans la direction  $(\theta, \varphi)$ . Ainsi  $H(\theta, \varphi)$  est la probabilité pour que  $\psi$  ressemble à l'état classique  $(\theta, \varphi)$ . Nous représenterons la distribution d'Husimi sous forme d'une sphère (la sphère de Bloch). Cette sphère de l'espace des phases sera représentée par une projection azimutale (le pôle nord au centre et le pôle sud comme étant le cercle limite). Pour un état pur, nous avons représenté les sphères d'Husimi sur le graphique 1.1 ainsi que pour des états propres superposés figure 1.2. Le processus d'intrication est aussi montré par la distribution d'Husimi. Elle devient uniforme pour un état d'intrication maximale comme le montre les sphères du graphique 1.3.

L'analyse des chaînes de spins avec la distribution d'Husimi sera très importante dans la suite car elle permettra de faire une analyse semi-classique des spins. Nous pourrons "les voir bouger" sur les représentations graphiques comme des "boules classiques" (tout en ne perdant pas le phénomène purement quantique de l'intrication grâce au verdissement comme le montre la figure 1.3). L'analyse de la distribution d'Husimi sera le support des interprétations (semi-classiques) que nous ferons de la dynamique des chaînes de spins.

1. par cohérence quantique, nous entendons le poids des propriétés purement quantiques (superposition d'états, intrication, effets non-locaux)

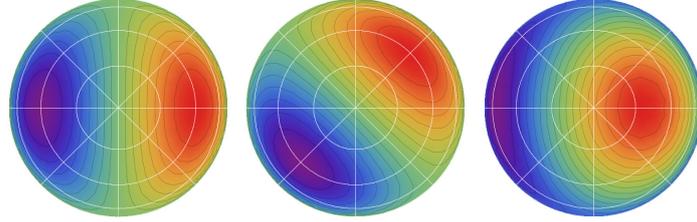


FIGURE 1.2 – Représentation schématique de la distribution d’Husimi. La couleur rouge représente le maximum de probabilité et la couleur bleu la plus petite probabilité. Le pôle nord est situé au centre et le pôle sud est le cercle limite. Nous avons représenté des états purs superposés des spins, pour la première sphère, le spin est dans l’état  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ , pour la seconde  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}|\downarrow\rangle)$  et pour la troisième  $\frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

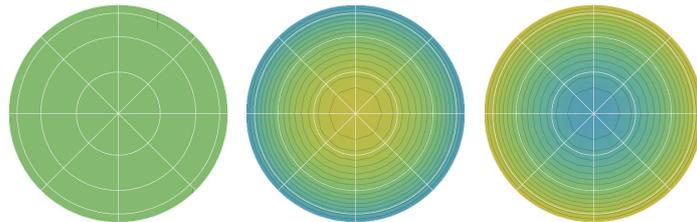


FIGURE 1.3 – Représentation schématique de la distribution d’Husimi. La couleur rouge représente le maximum de probabilité et la couleur bleu la plus petite probabilité. Le pôle nord est situé au centre et le pôle sud est le cercle limite. Nous avons représenté des états mixtes des spins, caractérisés par des matrices densités différentes dont les éléments non-diagonaux sont nuls. Les matrices densités associées aux distributions d’Husimi sont respectivement  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

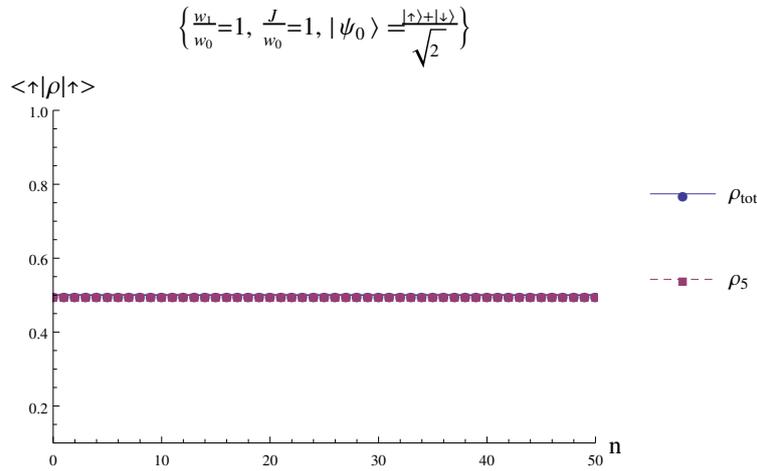


FIGURE 1.4 – Evolution de la population du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ) et d'un spin ( $\rho_5$ ) d'une chaîne de 9 spins couplés par une interaction d'Heisenberg de plus proches voisins. L'évolution est la même pour une chaîne couplée par une interaction d'Ising-Z.  $w_0$  est la fréquence d'échantillonnage temporel,  $w_1$  la fréquence d'oscillation de Rabi et  $J$  l'intensité de l'interaction entre deux spins.  $n$  est le  $n$ -ième instant de la discrétisation temporelle de pas  $\frac{2\pi}{w_0}$ . L'état initial de la chaîne de spins est  $|\psi^{(0)}\rangle = |\psi_0\rangle^{\otimes 9}$ .

## 1.2 Évolution des chaînes de spins avec le paramètre d'interaction

Nous voulons connaître les différents effets du couplage sur les spins d'une chaîne. Pour ceci, nous allons analyser la population et la cohérence d'un spin et du spin moyen de la chaîne.

### 1.2.1 Évolution de la population

Le graphique 1.4 montre l'évolution de la population du spin moyen et d'un spin d'une chaîne couplée par une interaction d'Heisenberg ou d'Ising-Z de plus proches voisins. Quand les spins sont initialement dans le même état, les couplages n'induisent aucun effet sur la population au contraire du couplage Ising-X. En effet, comme nous le voyons sur le graphique 1.5 plus la force du couplage augmente, plus la population du spin moyen et d'un spin de la chaîne oscille en se rapprochant de l'équiprobabilité.

Si les spins sont initialement dans des états différents avec l'état d'un spin  $|\psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  où  $a$  est tiré uniformément dans  $[0, 1]$  et  $b$  qui vérifie  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  (les états sont choisis aléatoirement, permettant ainsi de produire du désordre à l'intérieur de la chaîne), plusieurs phénomènes apparaissent en fonction du couplage comme le montre la figure 1.6. Pour le couplage d'Heisenberg, la population d'un spin oscille plus ou moins rapidement en se rapprochant de la population moyenne. Le couplage Ising-Z ne produit aucun effet sur la population (voir à la section 1.3.2 pour plus d'explications). Finalement le couplage Ising-X induit une relaxation complète de la population vers l'équiprobabilité avec le couplage augmentant (mais avec de grandes oscillations).

Pour résumer, les différents effets possibles du couplage sur la population sont

- aucune modification (ce que nous observons pour le couplage Ising-Z et le couplage Heisenberg quand les spins sont initialement dans le même état)
- variation de la vitesse d'oscillation (pour le couplage d'Heisenberg quand les spins sont initialement dans des états différents)
- relaxation de la population qui se rapproche ou peut atteindre l'équiprobabilité (présent pour le couplage Ising-X)

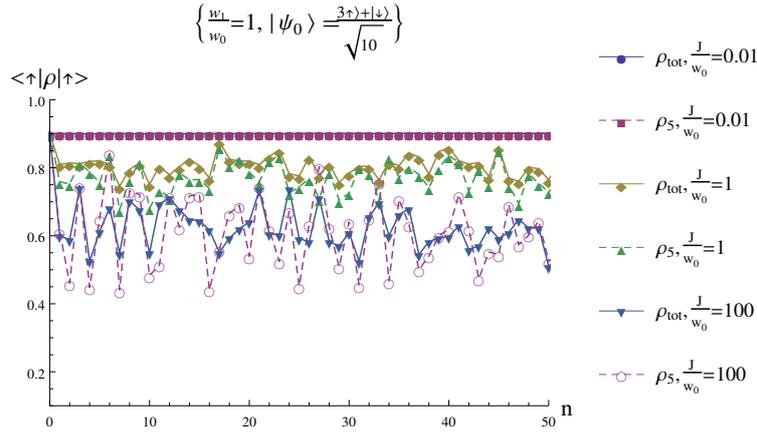


FIGURE 1.5 – Evolution de la population du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ) et d’un spin ( $\rho_5$ ) d’une chaîne de 9 spins couplés par une interaction d’Ising-X en fonction du paramètre d’interaction.  $w_0$  est la fréquence d’échantillonnage temporel,  $w_1$  la fréquence d’oscillation de Rabi et  $J$  l’intensité de l’interaction entre deux spins.  $n$  est le  $n$ -ième instant de la discrétisation temporelle de pas  $\frac{2\pi}{w_0}$ . L’état initial de la chaîne de spins est  $|\psi^{(0)}\rangle = |\psi_0\rangle^{\otimes 9}$ .

### 1.2.2 Évolution de la cohérence

Les phénomènes observés pour la cohérence sont similaires à ceux observés pour la population en ce qui concerne le couplage d’Heisenberg et d’Ising-X. En effet, si les spins sont initialement dans le même état la cohérence du spin moyen et celle d’un spin d’une chaîne couplée par une interaction d’Heisenberg ne changent pas comme en atteste la figure 1.7. Au contraire si la chaîne est couplée par une interaction d’Ising-X, figure 1.8, de la décohérence apparaît (mais accompagnée de fortes oscillations des cohérences). Celle-ci est d’autant plus importante que le couplage est grand et atteint presque la distribution microcanonique. Le couplage d’Ising-Z induit des oscillations de la cohérence non présentes dans la population (figure 1.9). Nous voyons aussi sur ce dernier graphique que pour un rapport  $\frac{J}{w_0}$  très faible, il n’y a pas d’oscillation de la population moyenne ni de la population d’un spin. En effet, le couplage est très faible et est au voisinage de 0, les spins se comportent presque comme s’il n’y avait pas de couplage. Ils ne se perturbent donc pas entre plus proches voisins.

Si les spins sont initialement dans des états différents (la variation de la distribution initiale des états des spins entraînant du désordre dans la chaîne de spins) avec  $\psi_0 = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  où  $a$  est tiré uniformément dans  $[0, 1]$  et  $b$  qui vérifie  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , l’évolution de la cohérence dépend du couplage considéré comme le montre la figure 1.10. Un spin d’une chaîne couplée par une interaction d’Heisenberg peut avoir une modification de sa cohérence qui peut augmenter ou diminuer. Dans tous les cas elle se rapproche de la cohérence du spin moyen. Cette modification se comprend facilement. Nous avons vu que la population d’un spin couplé par une interaction d’Heisenberg se rapproche de la population du spin moyen. Cette dernière population peut être plus proche d’une équipartition des états que la population d’un spin individuel (comme ce que nous avons sur le premier graphique de la figure 1.6). Dans ce cas la cohérence augmente. Si la population du spin moyen est plus loin d’une équipartition que la population du spin considéré, le phénomène inverse apparaît.

Les spins couplés par une interaction d’Ising-Z présentent une oscillation de la cohérence. Finalement le couplage d’Ising-X induit une décohérence qui apparaît très rapidement avec l’augmentation du couplage. La chute de la cohérence est rapide et totale.

Nous voyons que le premier et le troisième graphique de la figure 1.10 présentent des courbes fluctuant très faiblement quand le couplage est très faible. Il n’y a presque pas d’oscillation de population du spin moyen de la chaîne et d’un spin de la chaîne. Les spins se comportent presque comme si il n’y avait pas de couplage ce qui réduit énormément la perturbation des spins entre plus proches voisins.

Pour résumer, les différents phénomènes apparaissant sur la cohérence sont :

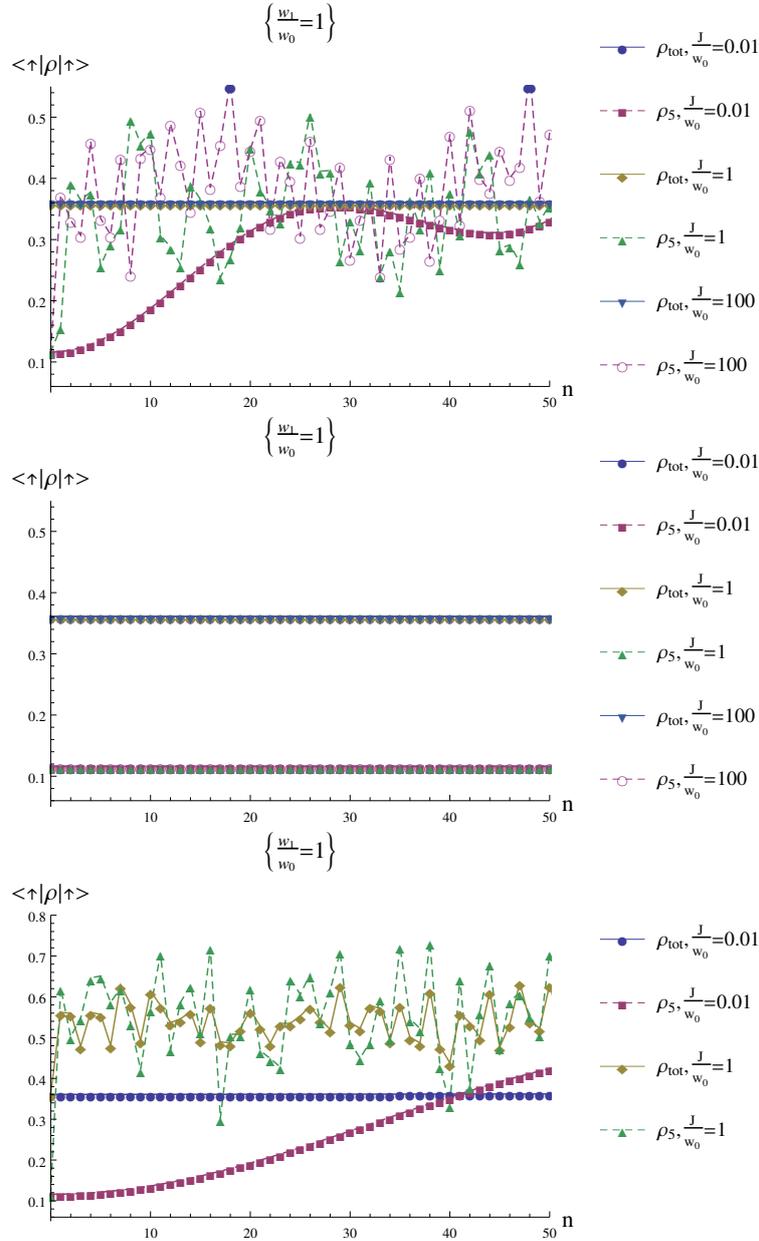


FIGURE 1.6 – Evolution de la population du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ) et d'un spin ( $\rho_5$ ) d'une chaîne de 9 spins. Les spins sont respectivement couplés par une interaction d'Heisenberg, d'Ising-Z et d'Ising-X. Les états initiaux des spins sont aléatoirement choisis de manière à obtenir  $\psi_0 = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  où  $a$  est tiré uniformément dans  $[0, 1]$  et  $b$  qui vérifie  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .  $w_0$  est la fréquence d'échantillonnage temporel,  $w_1$  la fréquence d'oscillation de Rabi et  $J$  l'intensité de l'interaction entre deux spins.  $n$  est le  $n$ -ième instant de la discrétisation temporelle de pas  $\frac{2\pi}{w_0}$ .

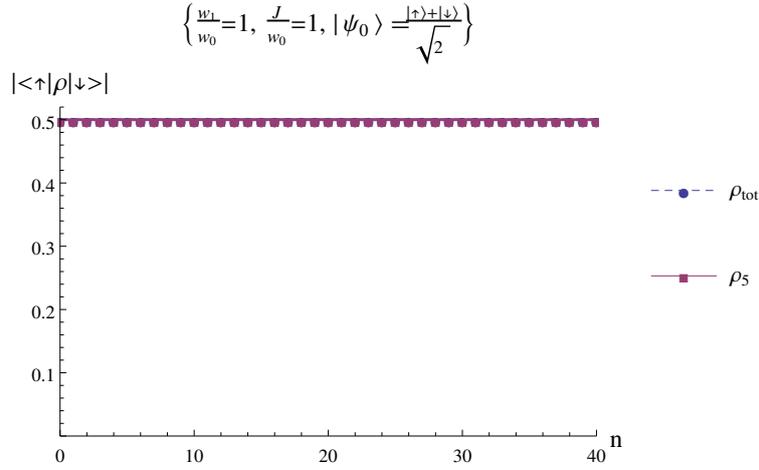


FIGURE 1.7 – Evolution de la cohérence du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ) et d'un spin ( $\rho_5$ ) d'une chaîne de 9 spins couplés par une interaction d'Heisenberg.  $w_0$  est la fréquence d'échantillonnage temporel,  $w_1$  la fréquence d'oscillation de Rabi et  $J$  l'intensité de l'interaction entre deux spins.  $n$  est le  $n$ -ième instant de la discrétisation temporelle de pas  $\frac{2\pi}{w_0}$ . L'état initial de la chaîne de spins est  $|\psi^{(0)}\rangle = |\psi_0\rangle^{\otimes 9}$ .

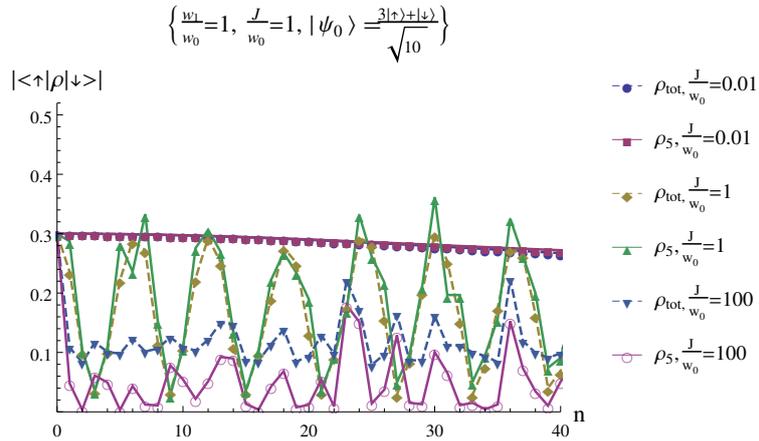


FIGURE 1.8 – Evolution de la cohérence du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ) et d'un spin ( $\rho_5$ ) d'une chaîne de 9 spins couplés par une interaction d'Ising-X en fonction du paramètre d'interaction.  $w_0$  est la fréquence d'échantillonnage temporel,  $w_1$  la fréquence d'oscillation de Rabi et  $J$  l'intensité de l'interaction entre deux spins.  $n$  est le  $n$ -ième instant de la discrétisation temporelle de pas  $\frac{2\pi}{w_0}$ . Les courbes  $\rho_{tot}, \frac{J}{w_0} = 0.01$  et  $\rho_5, \frac{J}{w_0} = 0.01$  sont confondues. L'état initial de la chaîne de spins est  $|\psi^{(0)}\rangle = |\psi_0\rangle^{\otimes 9}$ .

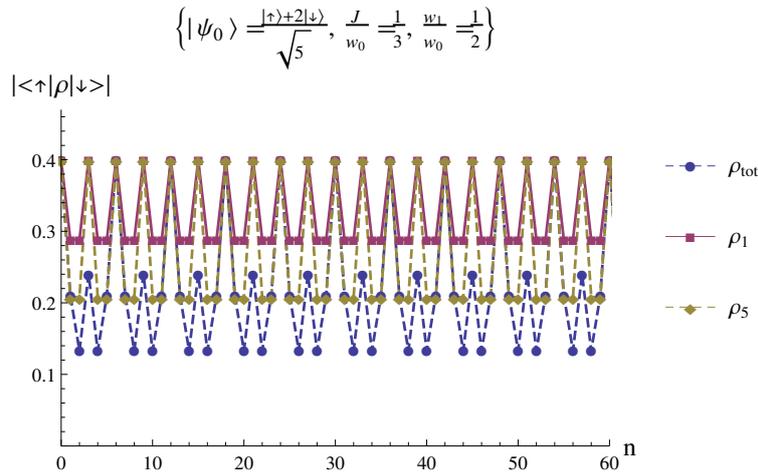


FIGURE 1.9 – Evolution de la cohérence du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ) et de deux spins ( $\rho_1$  et  $\rho_5$ ) d'une chaîne de 10 spins couplés par une interaction d'Ising-Z.  $w_0$  est la fréquence d'échantillonnage temporel,  $w_1$  la fréquence d'oscillation de Rabi et  $J$  l'intensité de l'interaction entre deux spins.  $n$  est le  $n$ -ième instant de la discrétisation temporelle de pas  $\frac{2\pi}{w_0}$ . L'état initial de la chaîne de spins est  $|\psi^{(0)}\rangle = |\psi_0\rangle^{\otimes 10}$ .

- aucun effet (pour le couplage d'Heisenberg quand tous les spins sont initialement dans le même état)
- oscillation périodique (pour le couplage Ising-Z)
- augmentation ou diminution de la cohérence (pour le couplage d'Heisenberg quand tous les spins sont initialement dans des états différents)
- chute de la cohérence se rapprochant et pouvant atteindre 0 (avec de fortes oscillations) (ce que nous observons pour le couplage Ising-X)

Ces phénomènes sont directement liés aux couplages.

## 1.3 Analyse du comportement des chaînes de spins

Nous venons de voir les différents effets sur la population et sur la cohérence du couplage. Afin de bien comprendre ces phénomènes, regardons comment agissent les couplages.

### 1.3.1 Le modèle d'Heisenberg : un couplage isotrope

Le couplage d'Heisenberg est un couplage isotrope. Il tend à aligner tous les spins dans une même direction. Si les spins sont initialement dans la même direction comme pour le graphique du haut de la figure 1.11, ils restent dans le même état et présentent une précession autour de la direction  $z$  induite par le champ Zeeman. Au contraire, si les spins sont dans des états différents, l'interaction va forcer les spins à être dans un même état, l'état moyen de la chaîne de spins et pour obtenir cet état les spins vont s'intriquer entre eux (second graphique de la figure 1.11).

Nous pouvons aussi comprendre le phénomène d'intrication comme le fait que les spins (dans une interprétation semi-classique) se gênent entre eux au niveau de la projection de leur précession. Si les spins sont tous dans la même direction initiale, ils vont tous se mettre en précession de la même manière autour de l'axe  $z$ . Il n'y a donc pas de gêne qui apparaît. Au contraire, si les spins sont dans des états différents, ils vont avoir des mouvements de précession différents. Ils vont se gêner non suivant  $z$  mais suivant  $x$  ou  $y$  où les projections des précessions vont pouvoir se "croiser". C'est cette gêne (semi-classique) qui induit de l'intrication (au niveau quantique).

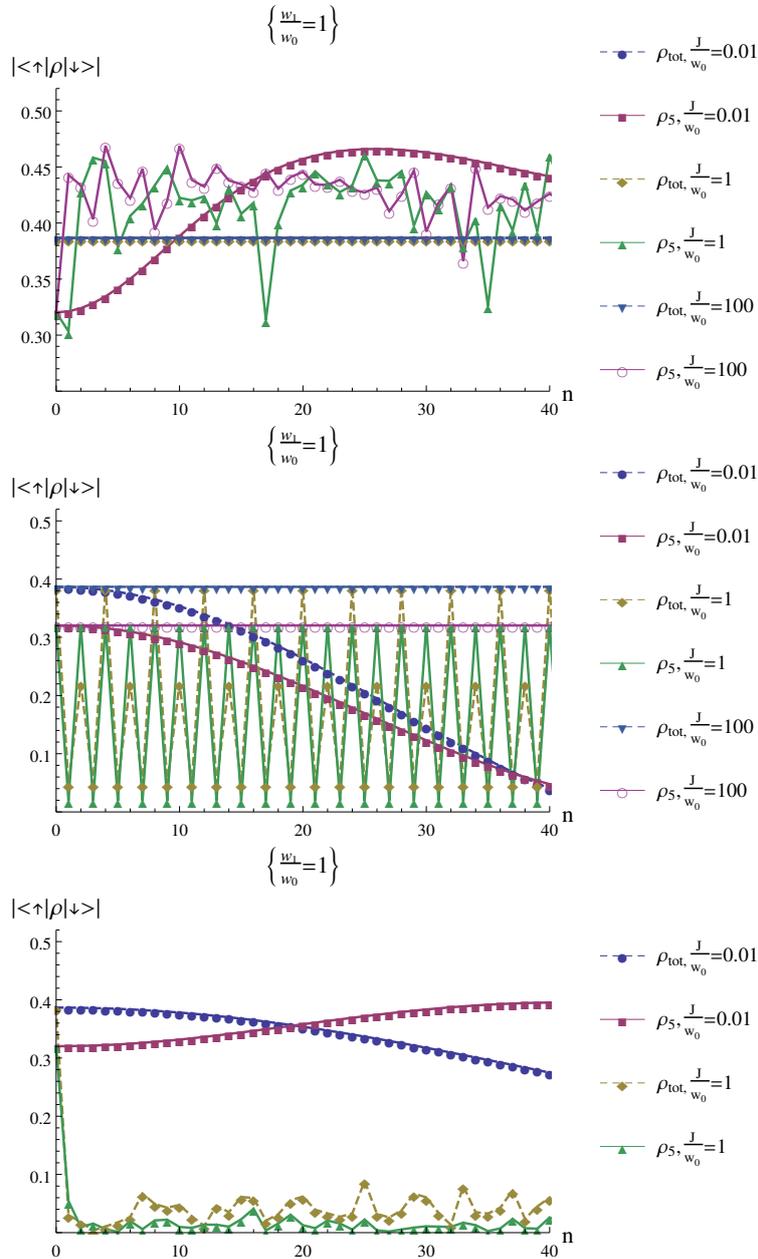


FIGURE 1.10 – Evolution de la population du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ) et d'un spin ( $\rho_5$ ) d'une chaîne de 9 spins. Les spins sont respectivement couplés par une interaction d'Heisenberg, d'Ising-Z et d'Ising-X. Les états initiaux des spins sont aléatoirement choisis de manière à obtenir  $\psi_0 = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  où  $a$  est tiré uniformément dans  $[0, 1]$  et  $b$  qui vérifie  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

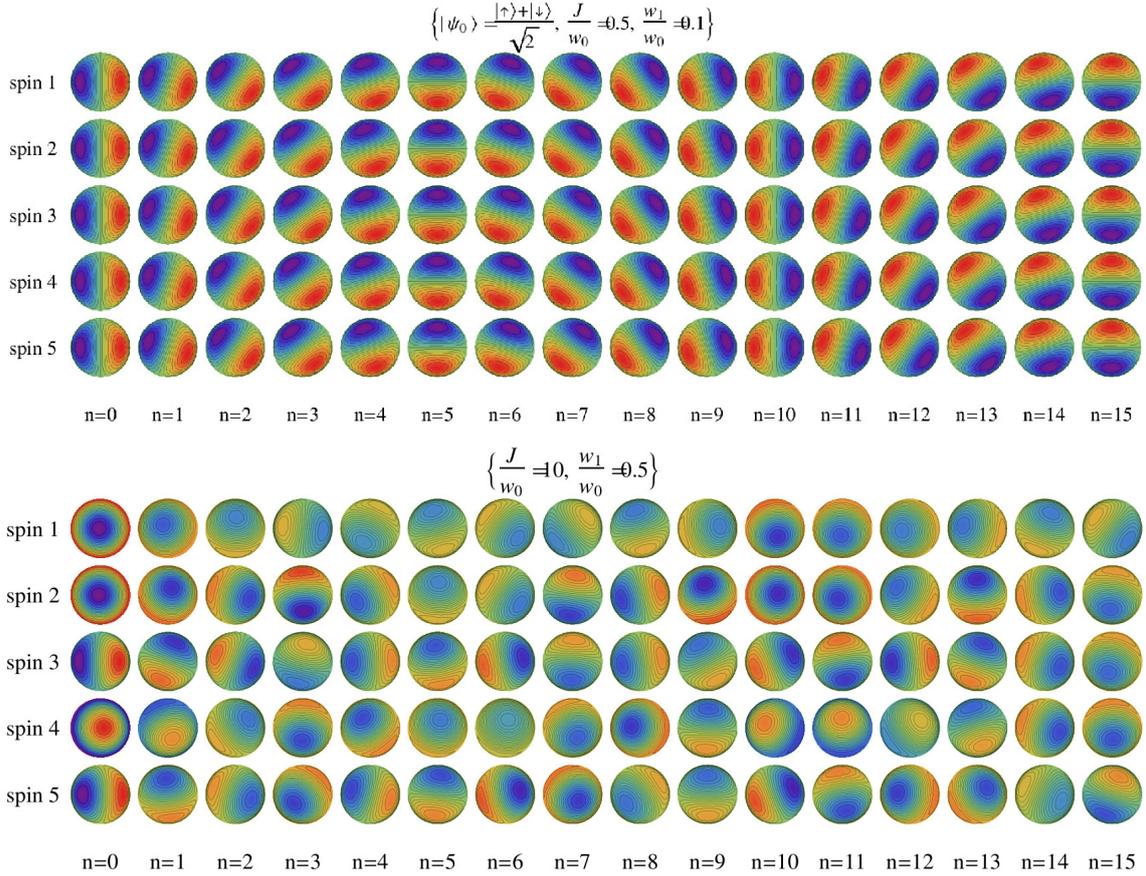


FIGURE 1.11 – Evolution de la distribution d’Husimi d’une chaîne de 5 spins couplés par une interaction d’Heisenberg de plus proches voisins. Pour la première figure, tous les spins sont initialement dans le même état alors que pour la seconde, l’état de chaque spin est aléatoirement choisi pour obtenir  $\psi_0 = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  où  $a$  est tiré uniformément dans  $[0, 1]$  et  $b$  qui vérifie  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . La plus grande probabilité est représentée en rouge et la plus petite en bleu. Le processus d’intrication est aussi montré par la distribution d’Husimi. Dans ce cas, les sphères tendent à devenir uniformément vertes.

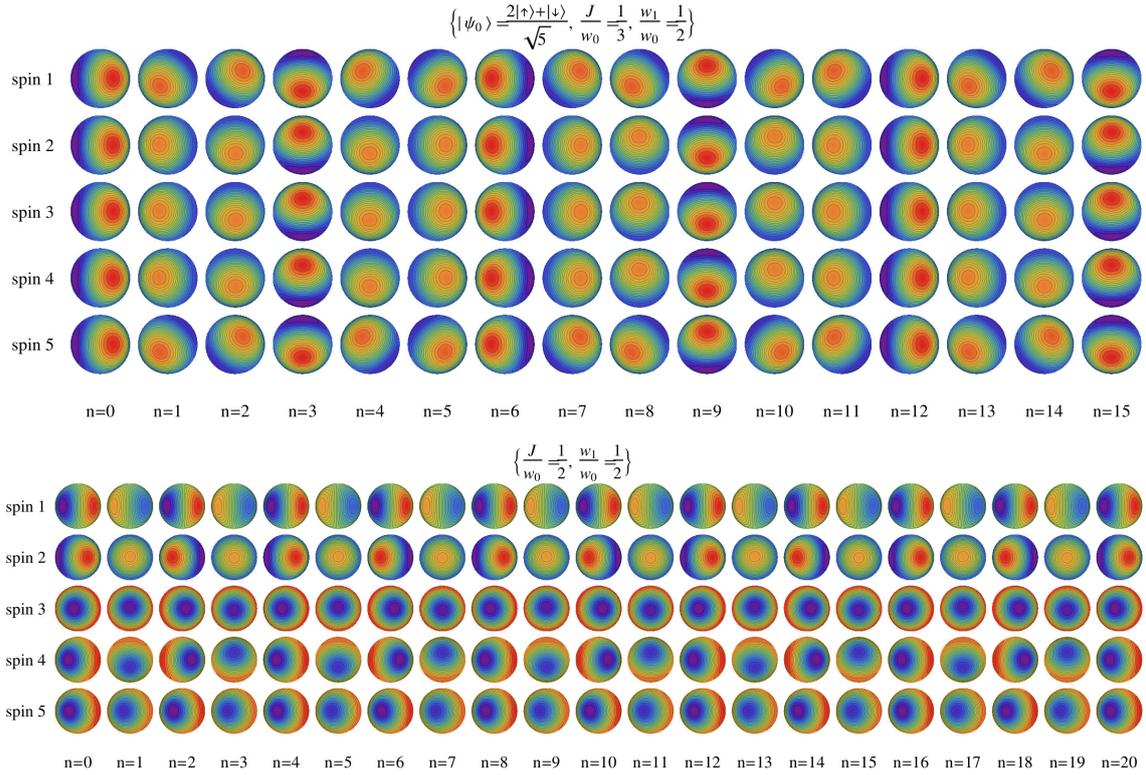


FIGURE 1.12 – Evolution de la distribution d’Husimi d’une chaîne de 5 spins couplés par une interaction d’Ising- $Z$  de plus proches voisins. Pour le premier graphique, tous les spins sont initialement dans le même état alors que pour le second, l’état de chaque spin est aléatoirement choisi pour obtenir  $\psi_0 = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  où  $a$  est tiré uniformément dans  $[0, 1]$  et  $b$  qui vérifie  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . La plus grande probabilité est représentée en rouge et la plus petite en bleu. Le processus d’intrication est aussi montré par la distribution d’Husimi. Dans ce cas, les sphères tendent à devenir uniformément vertes.

### 1.3.2 Le modèle Ising-Z : une interaction conservant l'ordre dans la chaîne

L'évolution libre des spins soumis à un couplage d'Ising-Z ne présente jamais d'intrication comme le montre la figure 1.12. Que les spins soient initialement dans la même direction ou dans des états différents, ils ont un mouvement de précession avec une intrication périodique (les sphères deviennent faiblement vertes). Cette intrication est un phénomène purement quantique qui ne trouve pas d'explication semi-classique et est associée aux oscillations de la cohérence (figure 1.9) (qui ne sont que des oscillations de Rabi).

Nous pouvons comprendre ceci mathématiquement par le fait que le couplage Ising-Z est un couplage diagonal dans la base  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ . Considérons deux spins couplés par une interaction d'Ising-Z. Toutes les matrices sont définies dans la base  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ . Dans ce cas, l'opérateur d'évolution devient pour deux spins

$$U^{(i)} = e^{-i\frac{H}{\hbar w_0} 2\pi} \quad (1.12)$$

avec

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar w_1}{2} \end{pmatrix} \otimes I + I \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar w_1}{2} \end{pmatrix} - JS_z \otimes S_z \quad (1.13)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar w_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar w_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar w_1 \end{pmatrix} - J\frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$= \begin{pmatrix} -J\frac{\hbar^2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar w_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar w_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J\frac{\hbar^2}{4} + \hbar w_1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

$$\Leftrightarrow U^{(i)} = e^{-i\frac{H}{\hbar w_0} 2\pi} \quad (1.16)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\hbar J}{4w_0} 2\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\left(\frac{\hbar J}{4w_0} + \frac{w_1}{2w_0}\right) 2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\left(\frac{\hbar J}{4w_0} + \frac{w_1}{2w_0}\right) 2\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\left(\frac{\hbar J}{4w_0} - \frac{w_1}{w_0}\right) 2\pi} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Soit  $|\psi^{(0)}\rangle$  la fonction d'onde initiale complète telle que

$$|\psi^{(0)}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

avec  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ ,  $|\psi_1\rangle$  l'état du premier spin et  $|\psi_2\rangle$  l'état du second spin. L'évolution de la fonction d'onde est donnée par

$$|\psi^{(i)}\rangle = U^{(i)} |\psi^{(i-1)}\rangle \quad (1.19)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha e^{i\frac{\hbar J}{4w_0} 2\pi} \\ \beta e^{-i\left(\frac{\hbar J}{4w_0} + \frac{w_1}{2w_0}\right) 2\pi} \\ \gamma e^{-i\left(\frac{\hbar J}{4w_0} + \frac{w_1}{2w_0}\right) 2\pi} \\ \delta e^{i\left(\frac{\hbar J}{4w_0} - \frac{w_1}{w_0}\right) 2\pi} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Pour obtenir la cohérence et la population du premier spin, nous devons calculer la matrice densité et la trace partielle sur le second spin. La matrice densité est définie par

$$\rho^{(i)} = |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}| \quad (1.21)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha e^{i\frac{\hbar J}{4w_0}2\pi} \\ \beta e^{-i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} + \frac{w_1}{w_0}\right)\pi} \\ \gamma e^{-i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} + \frac{w_1}{w_0}\right)\pi} \\ \delta e^{i\left(\frac{\hbar J}{4w_0} - \frac{w_1}{w_0}\right)2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* e^{-i\frac{\hbar J}{4w_0}2\pi} & \beta^* e^{i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} + \frac{w_1}{w_0}\right)\pi} & \gamma^* e^{i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} + \frac{w_1}{w_0}\right)\pi} & \delta^* e^{-i\left(\frac{\hbar J}{4w_0} - \frac{w_1}{w_0}\right)2\pi} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* & \alpha\beta^* e^{i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} + \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} & \alpha\gamma^* e^{i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} + \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} & \alpha\delta^* e^{i\frac{w_1}{w_0}2\pi} \\ \beta\alpha^* e^{-i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} + \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} & \beta\beta^* & \beta\gamma^* & \beta\delta^* e^{-i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} - \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} \\ \gamma\alpha^* e^{-i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} + \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} & \gamma\beta^* & \gamma\gamma^* & \gamma\delta^* e^{-i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} - \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} \\ \delta\alpha^* e^{-i\frac{w_1}{w_0}2\pi} & \delta\beta^* e^{i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} - \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} & \delta\gamma^* e^{i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} - \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} & \delta\delta^* \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

La cohérence du premier spin est

$$\rho_1^{coh,(i)} = \left| \langle \uparrow\uparrow | \rho^{(i)} | \downarrow\uparrow \rangle + \langle \uparrow\downarrow | \rho^{(i)} | \downarrow\downarrow \rangle \right| \quad (1.24)$$

$$= \left| \gamma\alpha^* e^{-i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} + \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} + \delta\beta^* e^{i\left(\frac{\hbar J}{2w_0} - \frac{w_1}{2w_0}\right)2\pi} \right| \quad (1.25)$$

Dans la cohérence, seule l'argument de la fonction exponentielle varie. Cette fonction est  $2\pi$  périodique, ce qui explique les intrications périodiques. La population up du premier spin est donnée par

$$\rho_1^{pop,(i)} = \langle \uparrow\uparrow | \rho^{(i)} | \uparrow\uparrow \rangle + \langle \uparrow\downarrow | \rho^{(i)} | \uparrow\downarrow \rangle \quad (1.26)$$

$$= \alpha\alpha^* + \beta\beta^* \quad (1.27)$$

La population n'est pas modifiée avec le temps. L'extension à un plus grand nombre de spins donne le même résultat.

Contrairement au couplage d'Heisenberg, les spins ne s'intriquent pas de manière permanente lorsqu'ils sont dans des états différents. Les spins couplés par une interaction d'Ising-Z sont soumis à deux champs : le champ Zeeman et leur propre champ. Ces deux champs sont dirigés suivant la direction  $z$  et entraînent une précession autour de cet axe. Ainsi, comme les spins tournent autour du même axe, ils ne se gênent pas suivant  $z$  au cours de leur précession (ils ne sont pas couplés suivant  $x$  et  $y$ ; il n'y a pas d'effets de la projection de leur précession suivant ces directions). La projection de leur précession suivant  $z$  ne se rencontrent pas. Ils n'ont alors aucune raison de s'intriquer.

### 1.3.3 Modèle Ising-X : un couplage induisant un grand désordre

Dans le cas d'une chaîne de spins couplés par une interaction d'Ising-X, nous voyons, graphique 1.13, que peu importe l'état initial des spins, ceux-ci s'intriquent très fortement.

Dans ce modèle, un spin ressent deux champs magnétiques. Le premier est le champ magnétique Zeeman lequel est dans la direction  $z$ . Le second est donné par le terme  $-JS_{x_1}\langle S_{x_2} \rangle$  et peut être interprété comme un champ dans la direction  $x$  induit par les spins voisins. Ces deux composantes génèrent un champ total, lequel donne la direction de précession des spins. Mais ce champ total est constamment modifié. Pour comprendre ceci, considérons l'exemple suivant et la figure 1.14. Au temps  $t = 0$ , les spins sont dans la direction  $x$ . Donc le champ total est à  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  ( $\gamma$  est l'angle entre la

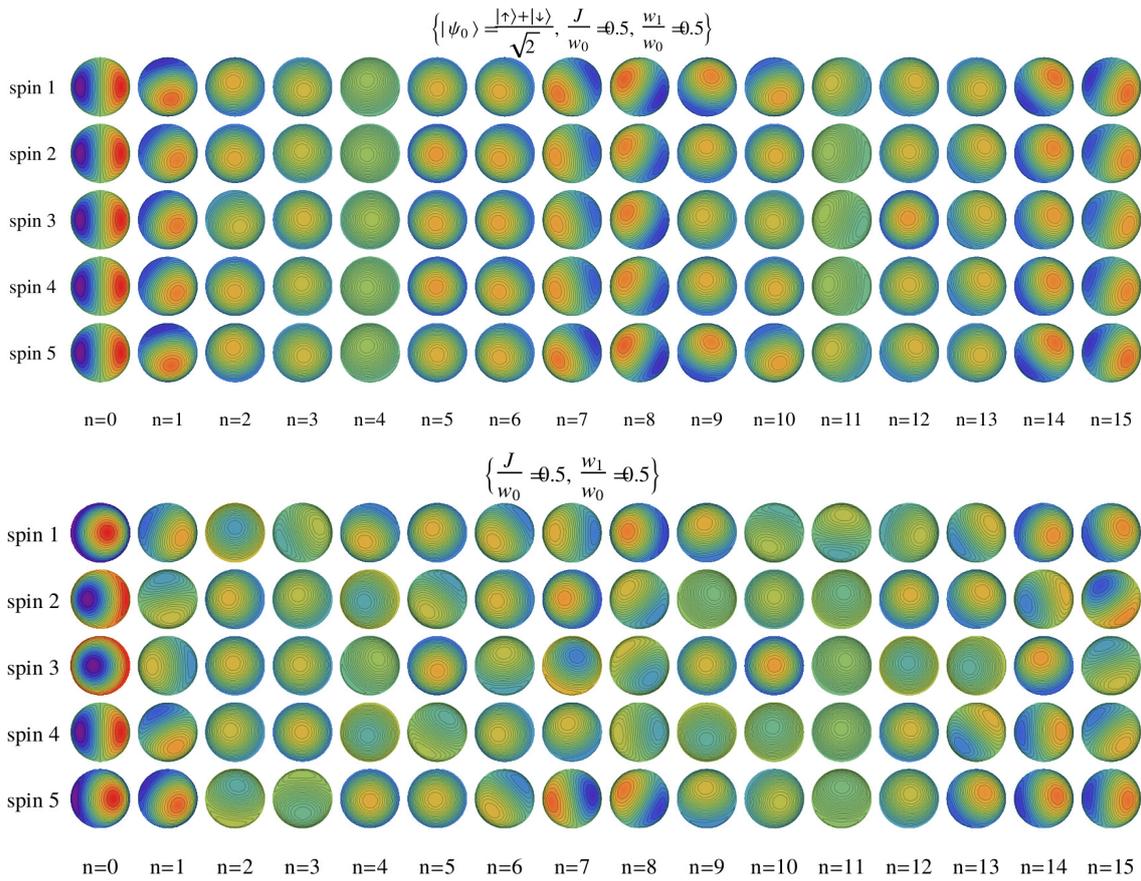


FIGURE 1.13 – Evolution de la distribution d’Husimi d’une chaîne de spins couplés par une interaction d’Ising-X. Pour le premier graphique, tous les spins sont dans la même direction initiale alors que pour le second, l’état de chaque spin est aléatoirement choisi pour obtenir  $\psi_0 = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  où  $a$  est tiré uniformément dans  $[0, 1]$  et  $b$  qui vérifie  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . La plus grande probabilité est représentée en rouge et la plus petite en bleu. Le processus d’intrication est aussi montré par la distribution d’Husimi. Dans ce cas, les sphères vont vers la couleur verte uniforme.

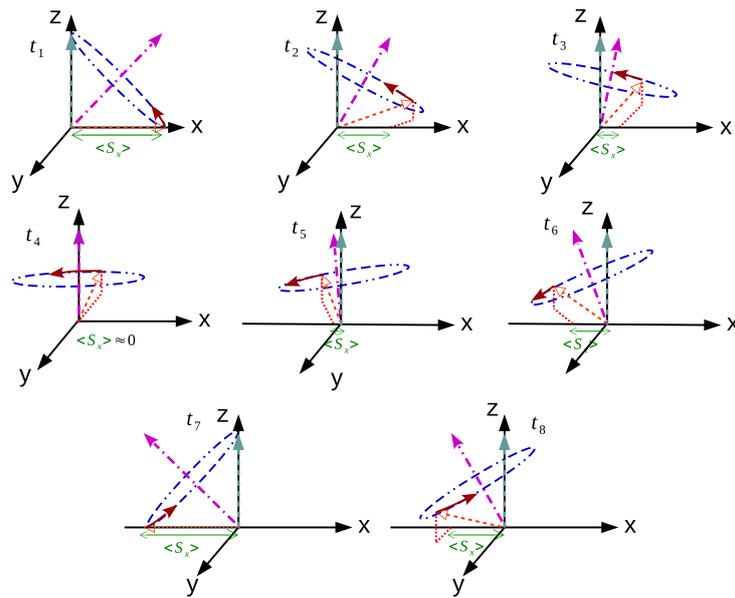


FIGURE 1.14 – Représentation schématique de l'évolution d'un spin de la chaîne induite par le champ total (flèche magenta en pointillés-tirets). Le champ magnétique total est composé par le champ magnétique Zeeman (flèche cyan) et le champ dans la direction  $x$  (vert) induit par les spins voisins. Ce dernier champ est caractérisé par la projection dans la direction  $x$  de la moyenne de l'opérateur de spin  $S$  de ses voisins (appelé  $\langle S_x \rangle$ ). Le cercle bleu en pointillés-tirets correspond à la représentation de la précession par rapport à la position du spin. Le spin considéré suit le cercle de précession dans la direction indiquée par la flèche rouge pleine. Nous supposons que tous les spins sont initialement dans la direction  $x$  et que le champ magnétique Zeeman a la même intensité que le champ local.

direction  $x$  et le champ total dans le plan  $(x, z)$ ; pour l'exemple, le champ magnétique Zeeman a la même intensité que le champ local). Les spins commencent leur précession autour de ce nouvel axe. Le rayon du cercle de précession est la distance entre la position des spins et la direction du champ total. Comme les spins bougent, le champ total de chaque spin bouge aussi (induit par les spins voisins, mais ici, comme tous les spins sont dans la même direction initiale, le champ total est le même pour chaque spin et leur déplacement est le même) et ils vont vers la direction  $z$  avec une décroissance de  $\langle S_x \rangle$  (voir  $t_2$  et  $t_3$ ). Quand la direction du champ total est suivant l'axe  $z$ , les spins tournent autour de cet axe et  $\langle S_x \rangle$  devient nul ( $t_4$ ). Les spins suivent leur précession autour de l'axe  $z$  et rapidement  $\langle S_x \rangle$  devient différent de zéro ( $t_5$ ). Le champ total est différent de l'axe  $z$  et va constamment vers l'axe  $x$  dans la direction  $-x$  ( $t_6$ ). Quand ils arrivent à l'axe  $x$ , les spins vont dans la direction opposé (après une demi-précession autour de l'axe  $x$ ) vers l'axe  $z$  ( $t_7$ ), et ainsi de suite. Quand un spin modifie la direction de précession de ses voisins, ceci induit une intrication entre eux. Ceci peut être vu sur la figure 1.13. Dans ce graphique, nous voyons clairement que les spins commencent leur mouvement de  $x$  dans la direction  $-x$ . Durant ce mouvement, les couleurs bleu et rouge se fadent (les sphères deviennent vertes) et montrent une intrication des spins.

Quand les spins sont dans des directions initiales différentes, ceci induit du désordre dans la chaîne. Tous les spins vont avoir un champ moyen total et des directions de précessions différentes pour chaque spin. La projection des précessions suivant l'axe  $x$ , (l'axe du couplage) se "rencontrent". Les précessions se gênent donc, et induisent de l'intrication entre deux spins voisins.



## Chapitre 2

# Théorème adiabatique des matrices densités

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la dynamique interne de chaînes de spins et les effets possibles du couplage sur la population et la cohérence. Afin de complexifier le modèle nous allons considérer un système quantique bipartite [110, 103] avec une faible interaction entre le système et l'environnement afin de réaliser du contrôle sur le système (un atome et une chaîne de spins).

### 2.1 Dynamique adiabatique et matrices densités

Dans cette section, nous donnons les prérequis nécessaires pour développer le théorème adiabatique des matrices densités.

#### 2.1.1 Les théorèmes adiabatiques usuels

Un des premiers théorèmes adiabatiques en mécanique quantique fut introduit par T. Kato en 1950 dans [47]. Nous pouvons citer aussi [14], [6] et [94].

Dans une hypothèse adiabatique, les paramètres de contrôle évoluent très lentement par rapport aux temps caractéristiques du système. Dans ce cas, l'état du système reste sur l'état propre instantané ou le groupe d'états propres instantanés qui se déforment avec le temps et qui sont continûment connectés à l'état de départ. Ainsi le seul changement possible d'état dans une hypothèse adiabatique est lorsqu'un croisement de valeurs propres se produit.

**Théorème 1.** *Théorème adiabatique standard*

Soit  $s \mapsto H(s)$  une famille d'hamiltoniens auto-adjoints. On note  $s = \frac{t}{T}$  le temps réduit sur l'intervalle  $[0, T]$ . On suppose que  $\{H(s)\}_{s \in [0,1]}$  ont un domaine commun dense<sup>1</sup> dans  $\mathcal{H}$ , et que l'équation

$$i\hbar \frac{d}{ds} U_T(s) = TH(s)U_T(s) \quad (2.1)$$

admet une solution  $s \mapsto U_T(s) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  fortement continue<sup>2</sup>. On suppose de plus que le spectre de  $H(s)$  est purement discret (i.e.  $Sp(H(s)) = \{\epsilon_j(s)\}_{j=1,\dots,N}$ ) (le cas  $N = +\infty$  n'est pas exclu). On suppose que

- les valeurs propres instantanées de  $H(s)$  sont des fonctions continues de  $s$ , et restent distinctes (isolées) les unes des autres pendant la période d'évolution  $0 \leq s \leq 1$
- $P_j(s) \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathcal{B}(\mathcal{H}))$  ( $P_j(s)$  étant le projecteur orthogonal sur  $Sp_j(s)$  et  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  l'ensemble des opérateurs bornés de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ )

---

1. c'est à dire que la fermeture du domaine est la totalité de l'espace de Hilbert. La fermeture étant définie comme l'ensemble des vecteurs du domaine et les limites de toutes les suites de vecteurs convergentes du domaine (une suite du domaine peut converger à l'extérieur de celui-ci, sur son bord). Une suite est convergente si elle est de Cauchy c'est à dire si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $n_\epsilon$  tel que quelque soit  $p > 0$ , quelque soit  $n > n_\epsilon$ ,  $\|\psi_{n+p} - \psi_n\| < \epsilon$

2. topologie forte :  $A_n \xrightarrow{s} A$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(A_n - A)\psi\| = 0, \forall \psi \in \text{Dom} A_n$

Alors  $\forall j$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} U_T(s)P_j(0) = P_j(s) \lim_{T \rightarrow +\infty} U_T(s) \quad (2.2)$$

*Démonstration.* voir [64] □

Cependant ce théorème ne permet pas le croisement d'énergies et n'est associé qu'à une seule valeur propre. Pour palier à ces problèmes, nous devons nous référer au théorème adiabatique de Nenciu [69]

**Théorème 2.** *Théorème adiabatique de Nenciu*

Soit  $s \mapsto H(s)$  une famille d'hamiltoniens auto-adjoints. On note  $s = \frac{t}{T}$  le temps réduit sur l'intervalle  $[0, T]$ . On suppose que  $\{H(s)\}_{s \in [0, 1]}$  ont un domaine commun dense dans  $\mathcal{H}$ , et que l'équation

$$i\hbar \frac{d}{ds} U_T(s) = TH(s)U_T(s) \quad (2.3)$$

admet une solution  $s \mapsto U_T(s) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  fortement continue. On suppose que

— il existe des fonctions réelles sur  $[0, 1]$ , notées  $a_j(s), b_j(s)$   $j = 1, \dots, N - 1 < +\infty$ , telles que

$$\begin{aligned} a_j(s) &< b_j(s) \leq a_{j+1}(s), \quad \forall j, \forall s \\ \min_j \inf_s (b_j(s) - a_j(s)) &\geq d > 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Sp(H(s)) &= \bigcup_{j=1}^N Sp_j(s) \\ Sp_1(s) &\subset ]-\infty, a_1(s)] \\ Sp_j(s) &\subset [b_{j-1}(s), a_j(s)], \quad \forall j = 2, \dots, N - 1 \\ Sp_N(s) &\subset [b_{N-1}(s), +\infty[ \end{aligned}$$

—  $P_j(s) \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathcal{B}(\mathcal{H}))$

—  $R(s, z) = (H(s) - z)^{-1}$  est différentiable par rapport à  $s$  et  $\forall \delta > 0, \exists K_\delta \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\left\| \frac{dR}{ds} \right\| \leq \frac{K_\delta}{\text{dist}(z, Sp(H(s)))} \quad (2.4)$$

$\forall z$  tel que  $\text{dist}(z, Sp(H(s))) > \delta$

Alors  $\forall j = 2, \dots, N - 1$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} U_T(s)P_j(0) = P_j(s) \lim_{T \rightarrow +\infty} U_T(s) \quad (2.5)$$

*Démonstration.* voir [69] □

D'autres théorèmes adiabatiques existent. Nous pouvons citer par exemple le théorème adiabatique s'appliquant aux cas présentant des croisements [14] et un nombre infini de croisements [44], le théorème adiabatique sans gap [6] et un théorème adiabatique pour la mécanique quantique statistique [67]. Dans ce dernier cas, il n'y a pas d'environnement perturbant les probabilités statistiques contrairement à ce que nous ferons dans la section suivante. Le théorème adiabatique pour la mécanique quantique statistique est défini pour une matrice densité dont l'évolution est régit par l'équation de Liouville ( $i\hbar \dot{\rho} = [H, \rho]$ ). Ce n'est pas ce cas que nous considérerons ici.

### 2.1.2 Transport adiabatique

La proposition suivante nous permet de connaître l'évolution de la fonction d'onde lorsque celle-ci est soumise à une dynamique adiabatique.

**Proposition 1.** Soit  $H(t)$  un hamiltonien auto-adjoint. Soit  $E_n(t)$  une valeur propre non-dégénérée de  $H(t)$  et  $|n, t\rangle$  le vecteur propre associé (toutes ces fonctions étant  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$ ).

$$U(t, 0)|n, 0\rangle\langle n, 0| \simeq |n, t\rangle\langle n, t|U(t, 0) \quad (2.6)$$

où  $U(t, 0)$  est une solution de l'équation de Schrödinger associée à  $t \mapsto H(t)$ . On suppose qu'à  $t = 0$  la fonction d'onde du système est telle que  $\psi_0 = |n, 0\rangle$ , alors on a pour tout  $t$

$$\psi(t) \simeq e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{-\int_0^s \langle n, t' | \partial_{t'} | n, t' \rangle dt'} |n, t\rangle \quad (2.7)$$

Le terme  $e^{-\int_0^s \langle n, t' | \partial_{t'} | n, t' \rangle dt'}$  porte le nom de phase de Berry-Simon (ou phase géométrique adiabatique abélienne).

L'approximation " $\simeq$ " dans les équations 2.6 et 2.7 signifie qu'il y a un reste en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right)$ .

*Démonstration.* voir [9] □

La fonction d'onde fait apparaître deux phases. Une phase dite dynamique  $e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t E_n(t') dt'}$  et une phase dite géométrique  $e^{-\int_0^s \langle n, t' | \partial_{t'} | n, t' \rangle dt'}$ . Nous pouvons interpréter la phase dynamique comme le souvenir du temps écoulé. Pour la phase géométrique aidons-nous de la propriété suivante :

**Propriété 1.** La phase de Berry ne dépend que du chemin parcouru  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{M}$  (espace des paramètres de contrôle) et pas de la durée  $T$  de ce parcours.

*Démonstration.* voir [9] □

Nous voyons que la phase géométrique s'interprète comme le souvenir du chemin parcouru.

Le cas d'une unique valeur propre dégénérée a été étudié par Wilczek et Zee dans [105]. Cependant, ce que nous venons de voir ne s'applique que lorsque les formules de transport adiabatique sont associées à une seule valeur propre. Dans un cas plus général, il nous faut une formule de transport adiabatique associée à un théorème adiabatique caractérisé par plusieurs valeurs propres comme celui de Nenciu. Cependant, dans ce cas les phases géométriques non-abéliennes ne commutent pas avec les phases dynamiques [87, 97].

La phase géométrique n'est pas inhérente à la théorie adiabatique. En effet, les phases géométriques existent aussi pour une dynamique abélienne non adiabatique [1] et sont dites de Aharonov-Anandan. Les phases géométriques non-adiabatiques et non-abéliennes sont dites de Bohm-Mostafazadeh [11].

## 2.2 Théorèmes adiabatiques forts et faibles

Dans ce qui suit, nous allons considérer un système bipartite, donc un système constitué de deux sous-systèmes que nous notons  $\mathcal{S}$  pour le système et  $\mathcal{E}$  pour l'environnement. L'environnement sera pris petit dans toute la suite de ce chapitre afin d'éviter tout effet de résonance pouvant survenir entre le système et l'environnement.

### 2.2.1 Temps caractéristiques

Soit le système quantique bipartite d'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$  gouverné par l'Hamiltonien dépendant du temps

$$H(t) = H_{\mathcal{S}}(t) \otimes I_{\mathcal{E}} + I_{\mathcal{S}} \otimes H_{\mathcal{E}}(t) + \epsilon V(t) \quad (2.8)$$

où  $H_{\mathcal{S}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$  est l'Hamiltonien auto-adjoint de la composante  $\mathcal{S}$ ,  $H_{\mathcal{E}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})$  est l'Hamiltonien auto-adjoint de la composante  $\mathcal{E}$ ,  $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}})$  est l'opérateur de couplage entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$ , et  $\epsilon \in \mathcal{V}(0)$  est un paramètre de perturbation avec  $\mathcal{V}(0)$  désignant un voisinage de 0. Soient  $\{\mu_b\}_b$  et  $\{\nu_\beta\}_\beta$  les spectres purement ponctuels de  $H_{\mathcal{S}}$  et  $H_{\mathcal{E}}$ . Pour simplifier le problème, nous supposons que toutes

les valeurs propres ne sont pas globalement dégénérées, c'est à dire que ces valeurs propres sont non-dégénérées pour tout  $t > 0$  sauf (éventuellement) pour un nombre fini de moments isolés  $t_*$ . À ces valeurs propres, nous associons respectivement les vecteurs propres normalisés  $\{\zeta_b\}_b$  et  $\{\xi_\beta\}_\beta$ .

$$H_S \zeta_b(t) = \mu_b(t) \zeta_b(t) \quad \zeta_b \in \mathcal{H}_S, \mu_b \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

$$H_E(t) \xi_\beta(t) = \nu_\beta(t) \xi_\beta(t) \quad \xi_\beta \in \mathcal{H}_E, \nu_\beta \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

où les valeurs propres sont au moins  $\mathcal{C}^0$  et les vecteurs propres  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$ . Soit  $\{\lambda_{b\beta}\}_{b,\beta}$  le spectre purement ponctuel perturbé de  $H$  et  $\{\phi_{b\beta}\}_{b,\beta}$  les vecteurs propres associés.

$$H(t) \phi_{b\beta}(t) = \lambda_{b\beta}(t) \phi_{b\beta}(t) \quad \phi_{b\beta} \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E, \lambda_{b\beta} \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_{b\beta}(t) = \zeta_b(t) \otimes \xi_\beta(t) \quad (2.12)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{b\beta}(t) = \mu_b(t) + \nu_\beta(t) \quad (2.13)$$

(avec la limite de l'état quantique définie avec la topologie de la norme<sup>3</sup> associée à  $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$ ). En utilisant la méthode des perturbations de Rayleigh-Schrödinger au premier ordre d'approximation, nous avons

$$\lambda_{b\beta} = \mu_b + \nu_\beta + \epsilon V_{b\beta, b\beta} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.14)$$

$$\phi_{b\beta} = \zeta_b \otimes \xi_\beta + \epsilon \sum_{(c\gamma) \neq (b\beta)} \frac{V_{c\gamma, b\beta}}{\mu_b - \mu_c + \nu_\beta - \nu_\gamma} \zeta_c \otimes \xi_\gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.15)$$

où  $V_{c\gamma, b\beta} = \langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\gamma | V | \zeta_b \otimes \xi_\beta \rangle\rangle$ . Nous considérons l'équation de Schrödinger associée à la dynamique du système bipartite

$$i\hbar \frac{d\Psi(t)}{dt} = H(t)\Psi(t) \quad (2.16)$$

avec la condition initiale  $\Psi(0) = \phi_{a\alpha}(0)$ .

Du point de vu du contrôle de  $\mathcal{S}$ , plusieurs temps apparaissent

- $T$ , la durée totale de l'évolution (la durée du contrôle)
- $\tau_S$ , le temps propre quantique caractérisant la transition de  $\mathcal{S}$  de  $\zeta_a$  vers un autre vecteur propre (la période des oscillations de Rabi de la première transition impliquant  $\zeta_a$ , telle que  $\tau_S = \sup_{t \in [0, T]} \max_{b \neq a} \frac{\hbar}{|\mu_b - \mu_a|}$ )
- $\theta^\epsilon$ , le temps caractérisant la perturbation de  $\mathcal{S}$  par  $\epsilon$
- $\tau_E$ , le temps de transition  $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$  par oscillations de Rabi ( $\tau_E = \sup_{t \in [0, T]} \max_{\beta \neq \alpha} \frac{\hbar}{|\nu_\beta - \nu_\alpha|}$ )

Si nous voulons que l'évolution soit adiabatique, il faut que les facteurs non-adiabatiques soient négligeables

$$(b, \beta) \neq (a, \alpha) \quad \langle\langle \phi_{a\alpha} | \dot{\phi}_{b\beta} \rangle\rangle = \frac{\langle\langle \phi_{a\alpha} | \dot{H} \phi_{b\beta} \rangle\rangle}{\lambda_{b\beta} - \lambda_{a\alpha}} \quad (2.17)$$

où le point désigne une dérivée par rapport à  $t$  et le prime une dérivée par rapport au temps réduit  $s = \frac{t}{T}$ .  $\langle\langle \phi_{a\alpha} | \dot{\phi}_{b\beta} \rangle\rangle$  désigne la propension du système à passer de l'état  $(b\beta)$  à l'état  $(a\alpha)$ .

$$(b, \beta) \neq (a, \alpha) \quad \langle\langle \phi_{a\alpha} | \dot{\phi}_{b\beta} \rangle\rangle = \frac{\hbar}{T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{a\alpha})} \langle\langle \phi_{a\alpha} | \frac{H'}{\hbar} | \phi_{b\beta} \rangle\rangle \quad (2.18)$$

Comme  $\langle\langle \phi_{a\alpha} | \frac{H'}{\hbar} | \phi_{b\beta} \rangle\rangle$  est borné, il faut que  $\frac{\hbar}{T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{a\alpha})}$  soit négligeable

$$\frac{\hbar}{T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{a\alpha})} = \frac{\hbar}{T(\mu_b - \mu_a + \nu_\beta - \nu_\alpha + \epsilon(V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha}) + \mathcal{O}(\epsilon^2))} \quad (2.19)$$

$$= \frac{\hbar}{T(\mu_b - \mu_a + \nu_\beta - \nu_\alpha)} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon(V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha})}{(\mu_b - \mu_a + \nu_\beta - \nu_\alpha)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)} \quad (2.20)$$

$$= \frac{\hbar}{T(\mu_b - \mu_a + \nu_\beta - \nu_\alpha)} \left( 1 - \frac{\epsilon(V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha})}{(\mu_b - \mu_a + \nu_\beta - \nu_\alpha)} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.21)$$

3.  $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \psi$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$

Si  $\forall b \neq a$ ,  $\inf_{t \in [0, T]} |\mu_b - \mu_a| = \mathcal{O}(1)$  (ceci signifie que  $\tau_S \ll \theta^\epsilon$ ,  $\mathcal{O}(1)$  signifie une condition de gap très grande par rapport à  $\epsilon$ ), alors

$$\frac{\hbar}{T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{a\alpha})} = \frac{\hbar}{T(\mu_b - \mu_a) \left(1 + \frac{\nu_\beta - \nu_\alpha}{\mu_b - \mu_a}\right)} - \frac{\hbar \epsilon (V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha})}{T(\mu_b - \mu_a)^2 \left(1 + \frac{\nu_\beta - \nu_\alpha}{\mu_b - \mu_a}\right)^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.22)$$

On pose  $\Delta = \inf_{t \in [0, T]} \min_{\beta \neq \alpha} \max_{b \neq a} \left|1 + \frac{\nu_\beta - \nu_\alpha}{\mu_b - \mu_a}\right|$ . Pour avoir une dynamique adiabatique il ne doit pas y avoir de résonance entre une transition du système et une transition de l'environnement donc  $\Delta = \mathcal{O}(1)$ . Nous avons alors

$$\left| \frac{\hbar}{T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{a\alpha})} \right| \leq \frac{\tau_S}{T\Delta} + \frac{\tau_S^2}{T\theta^\epsilon \Delta^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.23)$$

avec  $\tau_S = \sup_{t \in [0, T]} \max_{b \neq a} \frac{\hbar}{|\mu_b - \mu_a|}$  et  $\theta^\epsilon = \inf_{t \in [0, T]} \min_{(b\beta) \neq (a\alpha)} \frac{\hbar}{\epsilon |V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha}|}$ . Si  $T$  est choisi tel que  $\tau_S \ll T$ , alors  $\forall (b\beta) \neq (a\alpha)$ , l'équation 2.18 montre que  $\|\langle \phi_{a\alpha} | \dot{\phi}_{b\beta} \rangle\| \ll 1$ . Les couplages non adiabatiques sont donc négligeables, nous pouvons penser que le système reste projeté seulement sur l'état initial  $\phi_{a\alpha}(t)$  durant toute la dynamique. Ceci correspond au régime adiabatique très fort qui est associé à une évolution adiabatique de tout le système bipartite.

Maintenant si  $\inf_{t \in [0, T]} \min_{b \neq a} |\mu_b - \mu_a| = \mathcal{O}(\epsilon)$  (ceci signifie que  $\tau_S \sim \theta^\epsilon$ , il y a quasi-croisement des énergies), plusieurs cas apparaissent

— Si  $\alpha \neq \beta$  et  $\inf_{t \in [0, T]} |\nu_\beta - \nu_\alpha| = \mathcal{O}(1)$  l'équation 2.19 devient

$$\frac{\hbar}{T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{a\alpha})} = \frac{\hbar}{T(\nu_\beta - \nu_\alpha + \epsilon(\tilde{\mu}_b - \tilde{\mu}_a + V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha}))} \quad (2.24)$$

$$= \frac{\hbar}{T(\nu_\beta - \nu_\alpha)} - \frac{\hbar \epsilon (\tilde{\mu}_b - \tilde{\mu}_a + V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha})}{T(\nu_\beta - \nu_\alpha)^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.25)$$

où nous avons posé  $\tilde{\mu}_b = \frac{\mu_b}{\epsilon}$  ( $\inf_{t \in [0, T]} \min_{b \neq a} |\tilde{\mu}_b - \tilde{\mu}_a| = \mathcal{O}(1)$ ).

— Si  $\alpha = \beta$  ou si il existe  $t_*$  tel que  $\nu_\beta(t_*) = \nu_\alpha(t_*)$ , comme nous avons  $\lambda_{b\beta} = \epsilon(\tilde{\mu}_b + V_{b\beta, b\beta})$  alors

$$\frac{\hbar}{T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{a\alpha})} = \frac{\hbar}{T\epsilon(\tilde{\mu}_b - \tilde{\mu}_a + V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha})} \quad (2.26)$$

pour tout  $t$  si  $\alpha = \beta$  ou seulement à  $t = t_*$ .

Deux régimes apparaissent alors, le régime adiabatique faible ( $T\epsilon \sim 1 \Leftrightarrow T \sim \theta^\epsilon$ ) et le régime adiabatique fort ( $T\epsilon \gg 1 \Leftrightarrow T \gg \theta^\epsilon$ ) tous deux caractérisés par

$$\left| \frac{\hbar}{T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{a\alpha})} \right| \leq \begin{cases} \frac{\tau_\mathcal{E}}{T} + \frac{\tau_\mathcal{E}^2}{T\theta^\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^2) & \text{pour } \alpha \neq \beta \text{ et si } \inf_{t \in [0, T]} |\nu_\beta - \nu_\alpha| = \mathcal{O}(1) \\ \frac{\tau_\mathcal{E}}{T} & \text{pour } \alpha = \beta \text{ ou si } \exists t_* \text{ tel que } \nu_\beta(t_*) = \nu_\alpha(t_*) \end{cases} \quad (2.27)$$

avec  $\tau_\mathcal{E} = \sup_t \max_{\beta \neq \alpha} \frac{\hbar}{|\nu_\beta - \nu_\alpha|}$ ,  $\theta^\epsilon = \inf_{t \in [0, T]} \min_{(b\beta) \neq (a\alpha)} \frac{\hbar}{\epsilon(\tilde{\mu}_b - \tilde{\mu}_a + V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha})}$  et

$\tau_\mathcal{S}^\epsilon = \sup_{t \in [0, T]} \max_{\beta} \frac{\hbar}{\epsilon(\tilde{\mu}_b - \tilde{\mu}_a + V_{b\beta, b\beta} - V_{a\alpha, a\alpha})}$  (le temps de transition  $\mu_a \leftrightarrow \mu_b$  induite par l'action de l'environnement sur le système).

Si  $T$  est choisi tel que  $\theta^\epsilon \sim \tau_\mathcal{S}^\epsilon \ll T$ , alors  $\forall (b\beta) \neq (a\alpha)$ ,  $\|\langle \phi_{a\alpha} | \dot{\phi}_{b\beta} \rangle\| \ll 1$ . Dans le régime adiabatique fort, comme dans le régime adiabatique très fort, le système reste projeté seulement sur  $\phi_{a\alpha}(t)$  durant toute la dynamique. Au contraire, si  $T$  et  $\epsilon$  sont choisis tel que  $\theta^\epsilon \sim \tau_\mathcal{S}^\epsilon \sim T$ , alors  $\forall \beta \neq \alpha$ ,  $\|\langle \phi_{a\alpha} | \dot{\phi}_{b\beta} \rangle\| \ll 1$  si nous supposons que  $\tau_\mathcal{E} \ll T$ , mais  $\|\langle \phi_{a\alpha} | \dot{\phi}_{b\alpha} \rangle\| \ll 1$ . Pour le régime adiabatique faible, l'environnement reste projeté sur l'espace engendré par le vecteur propre  $\xi_\alpha$ , mais les transitions entre l'état propre  $\zeta_a$  et le vecteur propre  $\zeta_b$  sont possibles à cause des transitions non adiabatiques induites par  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{S}$ .

Pour résumé, il y a trois régimes adiabatiques

- $\tau_S \ll \theta^\epsilon$  et  $\tau_S \ll T$ , le régime adiabatique très fort
- $\tau_S \sim \theta^\epsilon$  et  $\theta^\epsilon \ll T$ , le régime adiabatique fort
- $\tau_S$  et  $\theta^\epsilon \sim T$ , l'évolution de  $\mathcal{E}$  étant supposée adiabatique ( $\tau_\mathcal{E} \ll T$ ), le régime adiabatique faible.

Dans le régime adiabatique fort et le régime adiabatique très fort,  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$  évoluent adiabatiquement par rapport au contrôle (et  $\mathcal{S}$  évolue adiabatiquement par rapport à  $\mathcal{E}$  dans le régime adiabatique très fort). Dans le régime adiabatique faible, seul  $\mathcal{E}$  évolue adiabatiquement par rapport au contrôle, alors que l'évolution de  $\mathcal{S}$  peut être plus riche. Nous pouvons noter que le régime adiabatique faible est le plus intéressant du point de vu du contrôle quantique. En effet, en général, les problèmes de contrôle quantique sont caractérisés par la condition  $H(T) = H(0)$  comme nous commençons et nous finissons avec le contrôle éteint. Ceci induit que  $\phi_{a\alpha}(T) = \phi_{a\alpha}(0)$  et dans le régime fort et très fort nous avons  $\rho(T) = \rho(0)$ . Au contraire, grâce aux transitions possibles dans le régime adiabatique faible, nous pouvons avoir  $\rho(T) = U\rho(0)U^\dagger$  avec  $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_S)$  (où  $\mathcal{U}(\mathcal{H}_S)$  est l'ensemble des opérateurs unitaires de  $\mathcal{H}_S$ ). La réponse au problème de contrôle consiste alors à trouver la modulation du contrôle au cours du temps telle que  $U$  transforme  $\rho(0)$  en  $\rho_{cible}$  (ou au moins telle que  $\|U\rho(0)U^\dagger - \rho_{cible}\|$  soit minimal). L'hypothèse nécessitant que l'évolution de  $\mathcal{E}$  doit être adiabatique est naturelle dans ce contexte, puisqu'il correspond à la nécessité que les transitions dans  $\mathcal{E}$  ne perturbent pas le contrôle adiabatique en générant de la décohérence.

## 2.2.2 Les théorèmes adiabatiques

**Théorème 3.** *Théorème adiabatique fort pour les systèmes quantiques bipartites*

Soit  $[0, 1] \ni s \mapsto H(s) = H_S(s) \otimes I_\mathcal{E} + I_S \otimes H_\mathcal{E}(s) + \epsilon V(s)$  une famille d'Hamiltoniens auto-adjoints d'un système quantique bipartite tel que  $\forall T > 0$ ,  $i\hbar\Psi'(s) = TH(s)\Psi(s)$  ait des solutions continues dans la topologie de la norme, et tel que  $V$  soit borné<sup>4</sup>. Soient  $\{\mu_b\}_b$  et  $\{\nu_\beta\}_\beta$  les spectres purement ponctuels de  $H_S$  et  $H_\mathcal{E}$  et  $\{\zeta_b\}_b$  et  $\{\xi_\beta\}_\beta$  les vecteurs propres normalisés associés. Soit  $\{\phi_{b\beta}\}_{b,\beta}$  les vecteurs propres normalisés de  $H$  continuellement liés à  $\{\zeta_b \otimes \xi_\beta\}_{b,\beta}$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  (dans la topologie de la norme). Nous considérons le cas où  $\Psi(0) = \phi_{a\alpha}(0)$ . Par soucis de simplicité, nous supposons que chaque valeur propre est non-dégénérée et que  $H_S$  et  $H_\mathcal{E}$  n'ont pas de spectre continu. Nous supposons les conditions suivantes

- (i)  $\forall b, \beta, s \mapsto \mu_b(s)$  et  $s \mapsto \nu_\beta(s)$  sont  $\mathcal{C}^1$ ;  $s \mapsto \zeta_b(s)$  et  $s \mapsto \xi_\beta(s)$  sont  $\mathcal{C}^2$  dans la topologie de la norme.
- (ii) aucune résonance entre les transitions de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$  impliquant  $\zeta_a \otimes \xi_\alpha$  n'arrive, i.e.  $\forall s \in [0, 1]$ ,  $\forall (b\beta) \neq (a\alpha)$ ,  $\mu_b(s) + \nu_\beta(s) + \epsilon V_{b\beta}(s) \neq \mu_a(s) + \nu_\alpha(s) + \epsilon V_{a\alpha}(s)$ .
- (iii) les énergies perturbées de  $\mathcal{S}$  satisfont à une condition de gap d'ordre  $\epsilon$  avec  $\mu_a$  :

$$\inf_{s \in [0, 1]} \min_{(b\beta) \neq (a\alpha)} |\mu_b(s) + \epsilon V_{b\beta}(s) - \mu_a(s) - \epsilon V_{a\alpha}(s)| = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.28)$$

Alors nous avons

$$\forall s \in [0, 1], \quad P_{a\alpha}(s)\Psi(s) = \Psi(s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right) \quad (2.29)$$

avec  $P_{a\alpha}(s) = |\phi_{a\alpha}(s)\rangle\langle\phi_{a\alpha}(s)|$  le projecteur orthogonal sur  $\phi_{a\alpha}$ .

Nous remarquons que nous pouvons aussi écrire  $P_{a\alpha}(s)\Psi(s) = \Psi(s) + \mathcal{O}\left(\frac{\theta^\epsilon}{T}\right)$ . Pour le théorème adiabatique fort,  $\theta^\epsilon \ll T$ , donc  $\epsilon$  est grand. La condition (iii) du théorème adiabatique fort implique une grande condition de gap pour les énergies perturbées du système. Dans ce cas, il ne peut pas y avoir de croisement dans les énergies du système.

*Démonstration.*  $\forall s \in [0, 1]$ ,  $(\phi_{d\delta}(s))_{d,\delta}$  est une base complète de  $\mathcal{H}_S(s) \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}(s)$ , donc

$$\Psi(s) = \sum_{d,\delta} c_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi_{d\delta}(s) \quad (2.30)$$

4. Un opérateur  $H$  est borné si  $\|H\| = \sup_\psi \frac{\|H\psi\|}{\|\psi\|} < \infty$

avec  $c_{d\delta} \in \mathbb{C}$ .

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi \quad (2.31)$$

$$\Rightarrow \frac{i\hbar}{T} \frac{d\Psi}{ds} = H\Psi \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{d,\delta} \frac{i\hbar}{T} \left( c'_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi_{d\delta}(s) - i\hbar^{-1}T \lambda_{d\delta}(s) c_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi_{d\delta}(s) \right. \\ \left. + c_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi'_{d\delta}(s) \right) = \sum_{d,\delta} H c_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi_{d\delta}(s) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{d,\delta} \left( \frac{i\hbar}{T} c'_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi_{d\delta}(s) + \lambda_{d\delta}(s) c_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi_{d\delta}(s) \right. \\ \left. + \frac{i\hbar}{T} c_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi'_{d\delta}(s) \right) = \sum_{d,\delta} \lambda_{d\delta}(s) c_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi_{d\delta}(s) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow \sum_{d,\delta} c'_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi_{d\delta}(s) = - \sum_{d,\delta} c_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(\sigma) d\sigma} \phi'_{d\delta}(s) \quad (2.35)$$

En projetant sur  $e^{i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{b\beta}(\sigma) d\sigma} \langle\langle \phi_{b\beta}(s) |$ , nous obtenons

$$\sum_{d,\delta} c'_{d\delta}(s) e^{i\hbar^{-1}T \int_0^s (\lambda_{b\beta}(\sigma) - \lambda_{d\delta}(\sigma)) d\sigma} \delta_{bd} \delta_{\delta\beta} = - \sum_{d,\delta} c_{d\delta}(s) e^{i\hbar^{-1}T \int_0^s (\lambda_{b\beta}(\sigma) - \lambda_{d\delta}(\sigma)) d\sigma} \langle\langle \phi_{b\beta}(s) | \phi'_{d\delta}(s) \rangle\rangle \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow c'_{b\beta}(s) = - \sum_{d,\delta} c_{d\delta}(s) e^{i\hbar^{-1}T \int_0^s (\lambda_{b\beta}(\sigma) - \lambda_{d\delta}(\sigma)) d\sigma} \langle\langle \phi_{b\beta}(s) | \phi'_{d\delta}(s) \rangle\rangle \quad (2.37)$$

En intégrant cette dernière équation par rapport à  $s$ , nous trouvons

$$c_{b\beta}(s) = c_{b\beta}(0) - \sum_{d,\delta} \int_0^s c_{d\delta}(\sigma) e^{i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma (\lambda_{b\beta}(\zeta) - \lambda_{d\delta}(\zeta)) d\zeta} \langle\langle \phi_{b\beta}(\sigma) | \phi'_{d\delta}(\sigma) \rangle\rangle d\sigma \quad (2.38)$$

$$= c_{b\beta}(0) - \sum_{d,\delta} \int_0^s \frac{c_{d\delta}(\sigma)}{i\hbar^{-1}T (\lambda_{b\beta} - \lambda_{d\delta})} \frac{d}{d\sigma} \left( e^{i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma (\lambda_{b\beta}(\zeta) - \lambda_{d\delta}(\zeta)) d\zeta} \langle\langle \phi_{b\beta}(\sigma) | \phi'_{d\delta}(\sigma) \rangle\rangle \right) d\sigma \quad (2.39)$$

Par intégration par partie nous avons

$$\begin{aligned} c_{b\beta}(s) = c_{b\beta}(0) - \int_0^s c_{b\beta}(\sigma) \langle\langle \phi_{b\beta}(\sigma) | \phi'_{b\beta}(\sigma) \rangle\rangle d\sigma \\ - \sum_{(d\delta) \neq (b\beta)} \left( \left[ \frac{c_{d\delta}(\sigma) \langle\langle \phi_{b\beta}(\sigma) | \phi'_{d\delta}(\sigma) \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T (\lambda_{b\beta}(\sigma) - \lambda_{d\delta}(\sigma))} e^{i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma (\lambda_{b\beta}(\zeta) - \lambda_{d\delta}(\zeta)) d\zeta} \right]_0^s \right. \\ \left. + \int_0^s \frac{e^{i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma (\lambda_{b\beta}(\zeta) - \lambda_{d\delta}(\zeta)) d\zeta}}{i\hbar^{-1}T} \left( \frac{c_{d\delta}(\sigma) \langle\langle \phi_{b\beta}(\sigma) | \phi'_{d\delta}(\sigma) \rangle\rangle}{\lambda_{b\beta}(\sigma) - \lambda_{d\delta}(\sigma)} \right)' d\sigma \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Au premier ordre de perturbation nous avons pour  $(d\delta) \neq (a\alpha)$

$$\lambda_{a\alpha} - \lambda_{d\delta} = \mu_a - \mu_d + \nu_\alpha - \nu_\delta + \epsilon(V_{a\alpha, a\alpha} - V_{d\delta, d\delta}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.41)$$

A cause du gap et des conditions de non résonance, au moins  $|\lambda_{a\alpha} - \lambda_{d\delta}| \geq \mathcal{O}(\epsilon)$  même si  $\alpha = \delta$  ou si  $\exists s_*$  tel que  $\nu_\delta(s_*) = \nu_\alpha(s_*)$ . Toutes les autres quantités de l'équation 2.40 sont bornées. En effet, les vecteurs propres étant  $\mathcal{C}^2$ ,  $\phi'_{d\delta}$  et  $\phi'_{b\beta}$  sont bornés sur  $[0, 1]$  ( $\sup_{s \in [0,1]} \|\phi'_{d\delta}\| < +\infty$  et  $\sup_{s \in [0,1]} \|\phi'_{b\beta}\| < +\infty$ ). Les valeurs propres étant  $\mathcal{C}^1$ ,  $\lambda'_{d\delta}$  est définie et est bornée sur  $[0, 1]$  ( $\sup_{s \in [0,1]} |\lambda'_{d\delta}| < +\infty$ ), de plus

$c_{d\delta} < 1$  est  $\mathcal{C}^1$  (car  $c_{d\delta} = e^{i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta} d\sigma} \langle\langle \phi_{d\delta} | \Psi \rangle\rangle$  avec  $\Psi$  qui est  $\mathcal{C}^1$  comme solution de l'équation de Schrödinger<sup>5</sup>). Il suit que

$$\left| \frac{c_{d\delta} \langle\langle \phi_{b\beta} | \phi'_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T} \right| \leq \frac{\sup_{s \in [0,1]} \|\phi'_{d\delta}\|}{\hbar^{-1}T} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.42)$$

où on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz ( $\langle\langle \phi_{b\beta} | \phi'_{d\delta} \rangle\rangle \leq \|\phi_{b\beta}\| \cdot \|\phi'_{d\delta}\|$  avec  $\|\phi_{b\beta}\| = 1$  puisque les états sont normalisés). Ceci implique que le troisième terme de l'équation 2.40 est en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right)$ .

Note : la démonstration que nous faisons ici est la démonstration la plus simple du théorème adiabatique qui ne fonctionne que si l'espace de Hilbert est de dimension finie. Dans le cas contraire et sous les hypothèses du théorème adiabatique (spectre purement ponctuel, vecteurs propres non dégénérés) il faut aussi appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur les sommes sur  $d$  et  $\delta$ .

Pour le quatrième terme de l'équation 2.40

$$\begin{aligned} \left( \frac{c_{d\delta} \langle\langle \phi_{b\beta} | \phi'_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{d\delta})} \right)' &= \frac{c'_{d\delta} \langle\langle \phi_{b\beta} | \phi'_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{d\delta})} + \frac{c_{d\delta} \langle\langle \phi'_{b\beta} | \phi'_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{d\delta})} \\ &\quad + \frac{c_{d\delta} \langle\langle \phi_{b\beta} | \phi''_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{d\delta})} - \frac{(\lambda'_{b\beta} - \lambda'_{d\delta}) c_{d\delta} \langle\langle \phi_{b\beta} | \phi'_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T(\lambda_{b\beta} - \lambda_{d\delta})^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

alors

$$\left| \frac{c'_{d\delta} \langle\langle \phi_{b\beta} | \phi'_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T} \right| \leq \frac{\sup_{s \in [0,1]} |c'_{d\delta}| \sup_{s \in [0,1]} \|\phi'_{d\delta}\|}{\hbar^{-1}T} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.44)$$

$$\left| \frac{c_{d\delta} \langle\langle \phi'_{b\beta} | \phi'_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T} \right| \leq \frac{\sup_{s \in [0,1]} \|\phi'_{b\beta}\| \sup_{s \in [0,1]} \|\phi'_{d\delta}\|}{\hbar^{-1}T} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.45)$$

$$\left| \frac{c_{d\delta} \langle\langle \phi_{b\beta} | \phi''_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T} \right| \leq \frac{\sup_{s \in [0,1]} \|\phi''_{d\delta}\|}{\hbar^{-1}T} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.46)$$

$$\left| \frac{(\lambda'_{b\beta} - \lambda'_{d\delta}) c_{d\delta} \langle\langle \phi_{b\beta} | \phi'_{d\delta} \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T} \right| \leq \frac{\sup_{s \in [0,1]} |\lambda'_{b\beta} - \lambda'_{d\delta}| \sup_{s \in [0,1]} \|\phi'_{d\delta}\|}{\hbar^{-1}T} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.47)$$

Ceci implique que le quatrième terme de l'équation 2.40 est en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right)$ . Pour  $(b\beta) = (a\alpha)$ , nous avons

$$c_{a\alpha}(s) = 1 - \int_0^s c_{a\alpha}(\sigma) \langle\langle \phi_{a\alpha}(\sigma) | \phi'_{a\alpha}(\sigma) \rangle\rangle d\sigma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right) \quad (2.48)$$

et  $\forall (b\beta) \neq (a\alpha)$  nous retournons à l'équation 2.38

$$c_{b\beta}(s) = - \sum_{(d\delta) \neq (a\alpha)} \int_0^s c_{d\delta}(\sigma) e^{i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma (\lambda_{b\beta}(\zeta) - \lambda_{d\delta}(\zeta)) d\zeta} \langle\langle \phi_{b\beta}(\sigma) | \phi'_{d\delta}(\sigma) \rangle\rangle d\sigma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right) \quad (2.49)$$

Nous avons la condition sur la somme  $(d\delta) \neq (a\alpha)$  car dans l'équation 2.40 tous les termes sauf les deux premiers sont négligeables. Notons que  $c_{a\alpha}(0) = 1$  et  $c_{b\beta}(0) = 0$ . L'expression 2.49 étant l'équation intégrale des séries de Dyson pour une condition initiale nulle, nous avons  $c_{b\beta}(s) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right)$ . Finalement, nous concluons que

$$\Psi(s) = c_{a\alpha}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{a\alpha}(\sigma) d\sigma} \phi_{a\alpha}(s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right) \quad (2.50)$$

avec  $c_{a\alpha}(s) = e^{-\int_0^s \langle\langle \phi_{a\alpha}(\sigma) | \phi'_{a\alpha}(\sigma) \rangle\rangle d\sigma}$  car l'équation 2.48 est l'équation intégrale d'une exponentielle avec une condition initiale égale à 1 (en effet, cette équation peut s'écrire  $\frac{dc_{a\alpha}(s)}{ds} = -\langle\langle \phi_{a\alpha}(s) | \phi'_{a\alpha}(s) \rangle\rangle c_{a\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right)$  avec  $c_{a\alpha}(0) = 1$ ; la solution d'une telle équation différentielle est bien une exponentielle).  $\square$

5. nous disons seulement que comme nous avons défini les  $\phi$  comme des fonctions  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  et les  $\lambda$  comme des fonctions  $\mathcal{C}^1$ , ils sont dérivables. Donc leurs dérivées ne présentent pas de divergences dans  $[0, 1]$  (sinon les fonctions ne seraient pas dérivables) et sont des fonctions bornées.

Comme le régime adiabatique très fort est obtenu avec un théorème adiabatique usuel appliqué sur le système quantique bipartite, il peut être considéré comme un cas particulier du précédent théorème où la condition de gap est plus forte et où le reste de l'approximation adiabatique est plus petit,  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right)$  au lieu de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right)$ .

La condition (iii) revient à dire que  $|\tau_S - \theta^\epsilon|$  est petit. Ceci induit que  $\tau_S \sim \theta^\epsilon$ . La condition  $T \gg \theta^\epsilon \Leftrightarrow T \gg \frac{1}{\epsilon}$  car  $\theta^\epsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ . En conséquence le reste  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right)$  doit être petit.

Le théorème 3 peut être vu comme un corollaire du théorème adiabatique usuel car leurs hypothèses sont très similaires. Néanmoins, le théorème 3 correspond à un théorème adiabatique avec une condition de gap laquelle est asymptotiquement faible (i.e.  $\mathcal{O}(\epsilon)$ ). Le reste de l'approximation adiabatique ( $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right)$ ) est alors plus grand que celui de l'approximation adiabatique usuelle ( $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right)$ ).

**Théorème 4.** *Théorème adiabatique faible pour les systèmes quantiques bipartites*

Soit  $[0, 1] \ni s \mapsto H(s) = H_S(s) \otimes I_E + I_S \otimes H_E(s) + \epsilon V(s)$  une famille d'Hamiltoniens auto-adjoints d'un système quantique bipartite tel que  $\forall T > 0, i\hbar\Psi'(s) = TH(s)\Psi(s)$  ait des solutions continues dans la topologie de la norme, et tel que  $V$  soit borné. Soient  $\{\mu_b\}_b$  et  $\{\nu_\beta\}_\beta$  les spectres purement ponctuels de  $H_S$  et  $H_E$  et  $\{\zeta_b\}_b$  et  $\{\xi_\beta\}_\beta$  les vecteurs propres normalisés associés. Soit  $\{\phi_{b\beta}\}_{b,\beta}$  les vecteurs propres normalisés de  $H$  continuellement liés à  $\{\zeta_b \otimes \xi_\beta\}_{b,\beta}$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  (dans la topologie de la norme). Nous considérons le cas où  $\Psi(0) = \phi_{\alpha\alpha}(0)$ . Par soucis de simplicité nous supposons que chaque valeur propre est non dégénérée et que  $H_S$  et  $H_E$  n'ont pas de spectre continu. Nous posons les conditions suivantes

- (i)  $\forall b, \beta, s \mapsto \mu_b(s)$  et  $s \mapsto \nu_\beta(s)$  sont  $\mathcal{C}^1$ ;  $s \mapsto \zeta_b(s)$  et  $s \mapsto \xi_\beta(s)$  sont  $\mathcal{C}^2$  dans la topologie de la norme.
- (ii) aucune quasi-résonance entre les transitions de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$  impliquant  $\xi_\alpha$  ne survient, i.e.  $\forall s \in [0, 1], \forall c, \forall (b\beta) \neq (c\alpha), |\mu_b(s) + \nu_\beta(s) - \mu_c(s) - \nu_\alpha(s)| = \mathcal{O}(1)$ .
- (iii) les énergies de  $\mathcal{E}$  satisfont une condition de gap d'ordre 0 avec  $\nu_\alpha$

$$\inf_{s \in [0, 1]} \min_{\beta \neq \alpha} |\nu_\beta(s) - \nu_\alpha(s)| = \mathcal{O}(1) \quad (2.51)$$

- (iv)  $[0, 1] \times \mathbb{C} \ni (s, z) \mapsto R(s, z) = (H(s) - z)^{-1}$  est fortement  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $s$  et pour tout  $\delta > 0, \exists K_\delta \in \mathbb{R}^+,$  tel que  $\|R(s, z)'\| \leq \frac{K_\delta}{\text{dist}(z, \{\lambda_{b\beta}(s)\}_{b,\beta})} \forall z$  satisfaisant  $\text{dist}(z, \{\lambda_{b\beta}(s)\}_{b,\beta}) > \delta$ .

Alors nous avons

$$\forall s \in [0, 1], \quad P_{\bullet\alpha}(s)\Psi(s) = \Psi(s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.52)$$

avec  $P_{\bullet\alpha}(s) = \sum_b |\phi_{b\alpha}(s)\rangle\langle\phi_{b\alpha}(s)|$

*Démonstration.* Soient  $\sigma_\alpha(s) = \{\lambda_{c\alpha}(s)\}_c$  et  $\sigma_\perp(s) = \{\lambda_{b\beta}(s)\}_{b,\beta \neq \alpha}$  une décomposition du spectre de  $H(s)$  en une part liée à  $\nu_\alpha$  et une autre, à son complémentaire. Au première ordre des perturbations nous avons

$$\lambda_{c\alpha} - \lambda_{b\beta} = \mu_c - \mu_b + \nu_\alpha - \nu_\beta + \epsilon(V_{c\alpha, c\alpha} - V_{b\beta, b\beta}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.53)$$

Avec la condition de gap et la condition de quasi-résonance nous avons

$$\inf_{s \in [0, 1]} \text{dist}(\sigma_\alpha(s), \sigma_\perp(s)) = \inf_{s \in [0, 1]} \min_{c, b} \min_{\beta \neq \alpha} |\lambda_{c\alpha} - \lambda_{b\beta}| = \mathcal{O}(1) \quad (2.54)$$

Nous sommes dans les conditions du théorème adiabatique de Nenciu (la condition (iv) est une nécessité du théorème) lequel assure que durant toute l'évolution, le système reste projeté sur le sous-espace spectral associé à la partie isolée du spectre  $\sigma_\alpha = \{\lambda_{c\alpha}\}_c$ . L'application du théorème de Nenciu prouve le théorème présent, lequel en est juste une version spéciale.  $\square$

Nous notons que la condition de non quasi-résonance (ii) peut être relâchée comme une condition de non résonance  $\mu_b(s) + \nu_\beta(s) \neq \mu_c(s) + \nu_\alpha(s)$  (permettant  $|\mu_b(s) + \nu_\beta(s) - \mu_c(s) - \nu_\alpha(s)| = \mathcal{O}(\epsilon)$ ). De plus la condition peut être supprimée si  $V_{c\alpha, c\alpha}(s_*) \neq V_{b\beta, b\beta}(s_*)$  pour  $s_*$  tel que  $\mu_b(s_*) + \nu_\beta(s_*) =$

$\mu_c(s_*) + \nu_\alpha(s_*)$ . Cependant avec ces conditions, le reste de l'approximation adiabatique est plus grand et est en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right)$ . Néanmoins, le plus grand intérêt de ce théorème est le régime adiabatique faible pour lequel  $\frac{1}{T\epsilon}$  n'est pas au voisinage de l'infini (où nous ne pouvons pas appliquer le théorème du régime adiabatique fort) et où la condition optionnelle suivante est satisfaite : les énergies de  $\mathcal{S}$  satisfont une condition de gap d'ordre  $\epsilon$  avec  $\mu_a$

$$\inf_{s \in [0,1]} \min_{b \neq a} |\mu_b(s) - \mu_a(s)| = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.55)$$

L'hypothèse (iii) nous dit que  $\min_{\alpha\beta} |\nu_\beta - \nu_\alpha| = \mathcal{O}(1) \Rightarrow \max_{\alpha\beta} \frac{1}{|\nu_\beta - \nu_\alpha|} = \mathcal{O}(1)$ , donc  $\tau_{\mathcal{E}} = \mathcal{O}(1) \Leftrightarrow \tau_{\mathcal{E}} \sim 1$ . Comme de plus  $T \in \mathcal{V}(\infty)$  (ce qui signifie simplement que  $T$  est très grand devant les autres temps du problème), nous avons  $T \gg \tau_{\mathcal{E}}$ . La dernière hypothèse (paragraphe ci-dessus) stipule que  $|\mu_b - \mu_a| = \mathcal{O}(\epsilon) \Rightarrow \max_{ab} \frac{1}{|\mu_b - \mu_a|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ , donc  $\tau_{\mathcal{S}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ . Ainsi  $\tau_{\mathcal{S}} \sim \frac{1}{\epsilon}$  et  $\tau_{\mathcal{S}} \sim \theta^\epsilon$ .

L'hypothèse (iii) implique que  $\mathcal{E}$  évolue adiabatiquement par rapport au contrôle. A la fin nous avons un environnement qui possède un gap en énergie très grand par rapport au gap en énergie du système.

## 2.3 Transport adiabatique de la matrice densité

La matrice densité de  $\mathcal{S}$  se définit comme

$$\rho(s) = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\Psi(s)\rangle\langle\Psi(s)| \quad (2.56)$$

### 2.3.1 Régime adiabatique fort

**Proposition 2.** *Formule de transport adiabatique fort de la matrice densité*

*Dans les conditions du théorème adiabatique fort (théorème 3), nous avons*

$$\forall s \in [0,1] \quad \rho(s) = \rho_{aa}(s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right) \quad (2.57)$$

avec  $\rho_{aa} = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\phi_{a\alpha}(s)\rangle\langle\phi_{a\alpha}(s)|$  la "matrice densité propre".

*Démonstration.* Par le théorème 3 nous avons

$$\Psi(s) = e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{a\alpha}(\sigma) d\sigma - \int_0^s \langle\langle \phi_{a\alpha}(\sigma) | \phi'_{a\alpha}(\sigma) \rangle\rangle d\sigma} \phi_{a\alpha}(s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right) \quad (2.58)$$

Comme  $\langle\langle \phi_{a\alpha}(s) | \phi_{a\alpha}(s) \rangle\rangle = 1$ ,

$$\langle\langle \phi'_{a\alpha}(s) | \phi_{a\alpha}(s) \rangle\rangle + \langle\langle \phi_{a\alpha}(s) | \phi'_{a\alpha}(s) \rangle\rangle = 0 \quad (2.59)$$

$$\Rightarrow \langle\langle \phi'_{a\alpha}(s) | \phi_{a\alpha}(s) \rangle\rangle = -\langle\langle \phi_{a\alpha}(s) | \phi'_{a\alpha}(s) \rangle\rangle \quad (2.60)$$

$$\Rightarrow \langle\langle \phi'_{a\alpha}(s) | \phi_{a\alpha}(s) \rangle\rangle = -\overline{\langle\langle \phi'_{a\alpha}(s) | \phi_{a\alpha}(s) \rangle\rangle} \quad (2.61)$$

et donc  $\langle\langle \phi_{a\alpha} | \phi'_{a\alpha} \rangle\rangle \in i\mathbb{R}$ . On en déduit que  $|\Psi(s)\rangle\langle\Psi(s)| = |\phi_{a\alpha}(s)\rangle\langle\phi_{a\alpha}(s)|$  et que  $\rho_s = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\phi_{a\alpha}(s)\rangle\langle\phi_{a\alpha}(s)| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T\epsilon}\right)$ .  $\square$

La fonction d'onde peut être approchée par la méthode perturbative de Wigner-Brillouin. Cette méthode stipule que

$$\phi_{a\alpha}(s) = \zeta_a \otimes \xi_\alpha + \epsilon \sum_{(c\gamma) \neq (a\alpha)} \frac{\langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\gamma | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle}{\mu_a - \mu_c + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon \langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle} \zeta_c \otimes \xi_\gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}
|\phi_{a\alpha}\rangle\langle\phi_{a\alpha}| &= \left( |\zeta_a\rangle \otimes |\xi_\alpha\rangle + \epsilon \sum_{(c\gamma) \neq (a\alpha)} \frac{\langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\gamma | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle}{\mu_a - \mu_c + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon \langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle} |\zeta_c\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle \right) \\
&\times \left( \langle\zeta_a| \otimes \langle\xi_\alpha| + \epsilon \sum_{(c\gamma) \neq (a\alpha)} \frac{\langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_c \otimes \xi_\gamma \rangle\rangle}{\mu_a - \mu_c + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon \langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle} \langle\zeta_c| \otimes \langle\xi_\gamma| \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\phi_{a\alpha}\rangle\langle\phi_{a\alpha}| &= |\zeta_a\rangle\langle\zeta_a| \otimes |\xi_\alpha\rangle\langle\xi_\alpha| + \epsilon \sum_{(c\gamma) \neq (a\alpha)} \frac{\langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\gamma | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle}{\mu_a - \mu_c + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon \langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle} |\zeta_c\rangle\langle\zeta_c| \otimes |\xi_\gamma\rangle\langle\xi_\gamma| \\
&+ \epsilon \sum_{(c\gamma) \neq (a\alpha)} \frac{\langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_c \otimes \xi_\gamma \rangle\rangle}{\mu_a - \mu_c + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon \langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle} |\zeta_a\rangle\langle\zeta_c| \otimes |\xi_\alpha\rangle\langle\xi_\gamma| + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.64)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\rho(s) &= |\zeta_a\rangle\langle\zeta_a| + \epsilon \sum_{(c\gamma) \neq (a\alpha)} \frac{\langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\gamma | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle}{\mu_a - \mu_c + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon \langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle} |\zeta_c\rangle\langle\zeta_c| \delta_{\alpha\gamma} \\
&+ \epsilon \sum_{(c\gamma) \neq (a\alpha)} \frac{\langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_c \otimes \xi_\gamma \rangle\rangle}{\mu_a - \mu_c + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon \langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle} |\zeta_a\rangle\langle\zeta_c| \delta_{\alpha\gamma} + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T\epsilon}, \epsilon^2\right)\right) \quad (2.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(s) &= |\zeta_a\rangle\langle\zeta_a| + \epsilon \sum_{c \neq a} \frac{\langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle}{\mu_a - \mu_c + \epsilon \langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle} |\zeta_c\rangle\langle\zeta_c| \\
&+ \epsilon \sum_{c \neq a} \frac{\langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_c \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle}{\mu_a - \mu_c + \epsilon \langle\langle \zeta_a \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_a \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle} |\zeta_a\rangle\langle\zeta_c| + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T\epsilon}, \epsilon^2\right)\right) \quad (2.66)
\end{aligned}$$

### 2.3.2 Ordre zéro du régime adiabatique faible

Soit  $\{\phi_{d\delta}\}_{d,\delta}$  une base complète de  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$

$$\Psi(s) = \sum_{d,\delta} c_{d\delta}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{d\delta}(s) ds} \phi_{d\delta}(s) \quad (2.67)$$

La démonstration effectuée dans le cas du théorème adiabatique fort (théorème 3) montre que

$$\begin{aligned}
c_{b\beta}(s) &= c_{b\beta}(0) - \int_0^s c_{b\beta}(\sigma) \langle\langle \phi_{b\beta}(\sigma) | \phi'_{b\beta}(\sigma) \rangle\rangle d\sigma \\
&- \sum_{(d\delta) \neq (b\beta)} \left( \left[ \frac{c_{d\delta}(\sigma) \langle\langle \phi_{b\beta}(\sigma) | \phi'_{d\delta}(\sigma) \rangle\rangle}{i\hbar^{-1}T(\lambda_{b\beta}(\sigma) - \lambda_{d\delta}(\sigma))} e^{i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma (\lambda_{b\beta}(\zeta) - \lambda_{d\delta}(\zeta)) d\zeta} \right] \right. \\
&\quad \left. + \int_0^s \frac{e^{i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma (\lambda_{b\beta}(\zeta) - \lambda_{d\delta}(\zeta)) d\zeta}}{i\hbar^{-1}T} \frac{d}{ds} \left( \frac{c_{d\delta}(\sigma) \langle\langle \phi_{b\beta}(\sigma) | \phi'_{d\delta}(\sigma) \rangle\rangle}{\lambda_{b\beta}(\sigma) - \lambda_{d\delta}(\sigma)} \right) d\sigma \right) \quad (2.68)
\end{aligned}$$

Comme  $\epsilon \ll 1$ ,  $\lambda_{a\alpha}(s) - \lambda_{d\delta}(s) = \mu_a - \mu_d + \nu_\alpha - \nu_\delta + \mathcal{O}(\epsilon)$ . L'approximation de  $|\lambda_{a\alpha} - \lambda_{d\delta}|$  dépend de ce que représente  $(d\delta)$

- pour  $(d\delta) \neq (a\alpha)$  l'absence de résonance (condition (ii) de théorème adiabatique faible, (théorème 4)) assure que  $|\lambda_{a\alpha} - \lambda_{d\delta}| = \mathcal{O}(1)$
- pour  $\delta \neq \alpha$  (cas particulier du cas précédent) la condition de gap (condition (iii) du théorème adiabatique faible (théorème 4)) assure que  $|\lambda_{a\alpha} - \lambda_{d\delta}| = \mathcal{O}(1)$
- pour  $\delta = \alpha$  on peut avoir  $s^* \in [0, 1]$  tel que  $\mu_a(s^*) = \mu_d(s^*) \Rightarrow |\lambda_{a\alpha}(s^*) - \lambda_{d\alpha}(s^*)| = \mathcal{O}(\epsilon) \Rightarrow T|\lambda_{a\alpha}(s^*) - \lambda_{d\alpha}(s^*)| = \mathcal{O}(T\epsilon)$ . Or  $T\epsilon$  n'est pas nécessairement au voisinage de l'infini.

Ainsi les termes en  $c_{b\beta}$  pour  $\beta \neq \alpha$  sont négligeables. Seuls les termes  $c_{b\alpha}$  pour  $b \neq a$  ne peuvent être négligés. Il vient de l'équation 2.38 que

$$c_{b\alpha}(s) = \delta_{ba} - \sum_d \int_0^s c_{d\alpha}(\sigma) e^{i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma (\lambda_{b\alpha}(\zeta) - \lambda_{d\alpha}(\zeta)) d\zeta} \langle \phi_{b\alpha}(\sigma) | \phi'_{d\alpha}(\sigma) \rangle d\sigma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.69)$$

Introduisons maintenant les exponentielles ordonnées en temps  $\mathbb{T}e_{\rightarrow}$  et  $\mathbb{T}e_{\leftarrow}$ . Celles-ci sont définies telles que

$$\left( \mathbb{T}e_{\rightarrow}^{-\int_0^s A(\sigma) d\sigma} \right)' = -\mathbb{T}e_{\rightarrow}^{-\int_0^s A(\sigma) d\sigma} A(s) \quad (2.70)$$

avec  $\mathbb{T}e_{\rightarrow}^{-\int_0^0 A(\sigma) d\sigma} = 1$ , et

$$\left( \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-\int_0^s A(\sigma) d\sigma} \right)' = -A(s) \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-\int_0^s A(\sigma) d\sigma} \quad (2.71)$$

avec  $\mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-\int_0^0 A(\sigma) d\sigma} = 1$ .

A l'aide de ces exponentielles ordonnées en temps, nous pouvons définir le théorème des représentations intermédiaires stipulant que

$$\mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma - \int_0^s A_\alpha d\sigma} = \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma} \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-\int_0^s d\sigma \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma \Lambda_\alpha d\sigma'} A_\alpha \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-i\hbar^{-1}T \int_0^\sigma \Lambda_\alpha d\sigma'}} \quad (2.72)$$

avec  $[\Lambda_\alpha]_{ab} = \lambda_{a\alpha} \delta_{ab}$  ( $[\cdot]_{ab}$  dénote l'élément de matrice à la  $a$ -ième ligne et à la  $b$ -ième colonne) et  $A_\alpha = \sum_{b,c} \langle \zeta_b(s) | \zeta'_c(s) \rangle \langle \zeta_b(s) | \zeta_c(s) \rangle \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ .

On pose  $[\tilde{K}_\alpha]_{ba}(s) = e^{i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{b\alpha} d\sigma} \langle \phi_{b\alpha} | \phi'_{a\alpha} \rangle e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{a\alpha} d\sigma}$  et en utilisant les équations 2.67 et 2.69,

$$\Psi(s) = \sum_b c_{b\alpha}(s) e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{b\alpha}(\sigma) d\sigma} \phi_{b\alpha}(s) \quad (2.73)$$

$$= \sum_b \left[ \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-\int_0^s \tilde{K}_\alpha} \right]_{ba} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \lambda_{b\alpha}(\sigma) d\sigma} \phi_{b\alpha}(s) \quad (2.74)$$

On pose  $[\Lambda_\alpha]_{ab}(s) = \lambda_{a\alpha}(s) \delta_{ab}$

$$\Rightarrow \Psi(s) = \sum_b \left[ \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma - \int_0^s \tilde{K}_\alpha} \right]_{ba} \phi_{b\alpha}(s) \quad (2.75)$$

$$= \sum_{bc} \left[ \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma} \right]_{bc} \left[ \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-\int_0^s \tilde{K}_\alpha} \right]_{ca} \phi_{b\alpha}(s) \quad (2.76)$$

Ce qui donne par le théorème des représentations intermédiaires

$$\Rightarrow \Psi(s) = \sum_b \left[ \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma - \int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{ba} \phi_{b\alpha} \quad (2.77)$$

avec  $[K_\alpha]_{ab} = \langle \phi_{a\alpha} | \phi'_{b\alpha} \rangle$ ,  $\Lambda_\alpha, K_\alpha \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  ( $n = \dim(\mathcal{H}_S)$ ). Comme  $|\zeta_b\rangle \langle \zeta_c | \phi_{a\alpha} \rangle = |\zeta_b\rangle \langle \zeta_c | \zeta_a \rangle \otimes |\xi_\alpha\rangle + \mathcal{O}(\epsilon) = \delta_{ca} \phi_{b\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon)$ ,

$$\Rightarrow \Psi(s) = \sum_{b,c} \left[ \mathbb{T}e_{\leftarrow}^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma - \int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{bc} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_c | \phi_{a\alpha}(s) + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T}, \epsilon\right)\right) \quad (2.78)$$

On définit l'action adjointe d'une transformation  $U$  sur une matrice densité  $\rho$  comme

$$\mathfrak{A}[U]\rho = U\rho U^\dagger \quad (2.79)$$

**Proposition 3.** *Formule du transport adiabatique faible de la matrice densité d'ordre 0*  
*Dans les conditions du théorème adiabatique faible nous avons  $\forall s \in [0, 1]$*

$$\rho(s) = \mathfrak{A} \mathfrak{D} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(0)}(\sigma) d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A^{(0)}(\sigma) d\sigma} \right] \rho_{a\alpha}(s) + \mathcal{O} \left( \max \left( \frac{1}{T}, \epsilon \right) \right) \quad (2.80)$$

avec le générateur de phase dynamique d'ordre zéro défini comme

$$E_\alpha^{(0)}(s) = \sum_b \lambda_{b\alpha}(s) |\zeta_b(s)\rangle \langle \zeta_b(s)| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \quad (2.81)$$

et le générateur de phase géométrique d'ordre zéro défini comme

$$A_\alpha^{(0)}(s) = \sum_{b,c} \langle \zeta_b(s) | \zeta'_c(s) \rangle |\zeta_b(s)\rangle \langle \zeta_c(s)| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \quad (2.82)$$

Nous trouvons des phases géométriques à valeurs opérateurs.

*Démonstration.* Afin de démontrer la proposition 3, nous allons d'abord démontrer le corollaire suivant.

**Corollaire 1.**

$$\sum_{bc} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma - \int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{bc} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_c| = e^{-\int_0^s \langle \xi_\alpha | \xi'_\alpha \rangle d\sigma} \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(0)} d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(0)} d\sigma} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.83)$$

avec  $[K_\alpha]_{ab} = \langle \phi_{a\alpha} | \phi'_{b\alpha} \rangle$ .

*Démonstration.* En utilisant le corollaire annexe D, nous obtenons

$$\sum_{b,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma - \int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{bc} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_c| = \sum_{b,c} \sum_f \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \right]_{bf} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_c| \quad (2.84)$$

$$= \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_d| \sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_f\rangle \langle \zeta_c| \quad (2.85)$$

avec  $X = i\hbar^{-1}T\Lambda_\alpha + K_\alpha - \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} K_\alpha \left( \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \right)^{-1}$

— Nous cherchons  $Y \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  tel que  $\mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(0)} d\sigma} = \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_d|$ .

$$\left( \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(0)} d\sigma} \right)' = -i\hbar^{-1}T E_\alpha^{(0)} \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(0)} d\sigma} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -i\hbar^{-1}T E_\alpha^{(0)} \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_d| &= \sum_{b,d} \left[ -Y \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_d| \\ &+ \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta'_b\rangle \langle \zeta_d| + \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta'_d| \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -i\hbar^{-1}T \sum_{b,d} \lambda_{b\alpha} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_d| &= \sum_{b,d} \left[ -Y \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_d| \\ &+ \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta'_b\rangle \langle \zeta_d| + \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta'_d| \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{b,d} \left[ -i\hbar^{-1} T \Lambda_\alpha \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_d| &= \sum_{b,d} \left[ -Y \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_d| \\ &+ \sum_{b,d,f} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} \langle \zeta_f | \zeta'_b \rangle |\zeta_f\rangle \langle \zeta_d| + \sum_{b,d,f} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} \langle \zeta'_d | \zeta_f \rangle |\zeta_b\rangle \langle \zeta_f| \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\Rightarrow -i\hbar^{-1} T \Lambda_\alpha \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} = -Y \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} + \overset{\circ}{K} \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} - \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \overset{\circ}{K} \quad (2.90)$$

car

$$\langle \zeta_d | \zeta_f \rangle = \delta_{df} \quad (2.91)$$

$$\Rightarrow \langle \zeta'_d | \zeta_f \rangle + \langle \zeta_d | \zeta'_f \rangle = 0 \quad (2.92)$$

$$\Rightarrow \langle \zeta'_d | \zeta_f \rangle = -\langle \zeta_d | \zeta'_f \rangle \quad (2.93)$$

avec  $[\overset{\circ}{K}]_{df} = \langle \zeta_d | \zeta'_f \rangle$ ,  $\overset{\circ}{K} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$

$$\Rightarrow Y = i\hbar^{-1} T \Lambda_\alpha + \overset{\circ}{K} - \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \overset{\circ}{K} \left( \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right)^{-1} \quad (2.94)$$

Mais

$$[K_\alpha]_{ab} = \langle \phi_{a\alpha} | \phi'_{b\alpha} \rangle \quad (2.95)$$

$$= \langle \zeta_a | \zeta'_b \rangle + \langle \xi_a | \xi'_\alpha \rangle \delta_{ab} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.96)$$

$$\Rightarrow K_\alpha = \overset{\circ}{K} + \eta_\alpha + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.97)$$

avec  $\eta_\alpha = \langle \xi_\alpha | \xi'_\alpha \rangle \in i\mathbb{R}$ , et

$$X = i\hbar^{-1} T \Lambda_\alpha + \overset{\circ}{K} - \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \overset{\circ}{K} \left( \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \right)^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.98)$$

$$\Rightarrow Y = X + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.99)$$

Donc

$$\sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_b\rangle \langle \zeta_d| = \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1} T \int_0^s E_\alpha^{(0)} d\sigma} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.100)$$

— Nous cherchons  $Z \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  tel que  $\mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(0)} d\sigma} = \sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_f\rangle \langle \zeta_c|$

$$\Rightarrow \left( \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(0)} d\sigma} \right)' = -\mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(0)} d\sigma} A_\alpha^{(0)} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_f\rangle \langle \zeta_c| A_\alpha^{(0)} &= \sum_{f,c} \left[ -Z \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_f\rangle \langle \zeta_c| \\ &+ \sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta'_f\rangle \langle \zeta_c| + \sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_f\rangle \langle \zeta'_c| \end{aligned} \quad (2.102)$$

Nous avons  $A_\alpha^{(0)} = \sum_{ba} \langle \zeta_b | \zeta'_a \rangle |\zeta_b\rangle \langle \zeta_a|$ . Donc

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\sum_{f,c,g} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} \left( \overset{\circ}{K}_{cg} \right) |\zeta_f\rangle \langle \zeta_g| &= \sum_{f,c} \left[ -Z \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_f\rangle \langle \zeta_c| \\ &+ \sum_{f,c,g} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} \overset{\circ}{K}_{gf} |\zeta_g\rangle \langle \zeta_c| - \sum_{f,c,g} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} \overset{\circ}{K}_{cg} |\zeta_f\rangle \langle \zeta_g| \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\Rightarrow -\mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \overset{\circ}{K} = -Z \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} + \overset{\circ}{K} \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} - \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \overset{\circ}{K} \quad (2.104)$$

$$\Rightarrow Z = \overset{\circ}{K} = K_\alpha - \eta_\alpha + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.105)$$

D'où

$$\sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_f\rangle \langle \zeta_c| = e^{-\int_0^s \langle \xi_\alpha | \xi'_\alpha \rangle d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(0)} d\sigma} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.106)$$

□

Revenons à la démonstration de la proposition 3. Nous avons donc

$$\Psi(s) = e^{-\int_0^s \langle \xi_\alpha | \xi'_\alpha \rangle d\sigma} \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(0)} d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(0)} d\sigma} \phi_{a\alpha}(s) + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T}, \epsilon\right)\right) \quad (2.107)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \rho(s) = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\Psi\rangle\langle\Psi| &= \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(0)} d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(0)} d\sigma} \rho_{a\alpha}(s) \\ &\quad \times \left( \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(0)} d\sigma} \right)^\dagger \left( \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(0)} d\sigma} \right)^\dagger \end{aligned} \quad (2.108)$$

□

À l'approximation d'ordre zéro, il ne reste donc plus aucun élément associé à  $\mathcal{E}$ , mis à part dans  $\lambda_{b\alpha}$ .  $\lambda_{b\alpha}$  est donc le seul souvenir de  $\mathcal{E}$ , et se trouve dans l'expression de la phase dynamique à valeurs opérateurs. Nous avons vu que  $T\epsilon$  n'était pas négligeable dans le cas du théorème adiabatique faible. Ainsi il n'est pas possible d'approcher  $\lambda_{b\alpha}$  par une approximation d'ordre zéro dans la phase dynamique.

### 2.3.3 Régime adiabatique faible du premier ordre

**Proposition 4.** *Formule de transport adiabatique faible de la matrice densité à l'ordre 1*

*Dans les conditions du théorème adiabatique faible (théorème 4), nous avons  $\forall s \in [0, 1]$*

$$\rho(s) = \mathfrak{A} \mathfrak{D} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(1)}(\sigma) d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(1)}(\sigma) d\sigma} \right] \rho_{a\alpha}(s) + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T}, \epsilon^2\right)\right) \quad (2.109)$$

avec le générateur de phase dynamique défini comme

$$E_\alpha^{(1)} = \sum_{b,c} \left( \lambda_{b\alpha}(s) \delta_{bc} - \frac{i\hbar}{T} \eta_{abc}^{(1)}(s) \right) |\zeta_{b\alpha}^{(1)}(s)\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}(s)| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \quad (2.110)$$

et le générateur de phase géométrique de premier ordre défini comme

$$A_\alpha^{(1)}(s) = \sum_{b,c} \langle \zeta_{b\alpha}^{(1)}(s) | \zeta_{c\alpha}^{(1)\prime}(s) \rangle |\zeta_{b\alpha}^{(1)}(s)\rangle \langle \zeta_{b\alpha}^{(1)}(s)| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \quad (2.111)$$

avec

$$\zeta_{b\alpha}^{(1)}(s) = \zeta_b(s) + \epsilon \sum_{d \neq b} \frac{V_{d\alpha, b\alpha}(s)}{\mu_b(s) - \mu_d(s) + \epsilon V_{b\alpha, b\alpha}(s)} \zeta_d(s) \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \eta_{abc}^{(1)}(s) &= \langle \xi_\alpha(s) | \xi'_\alpha(s) \rangle \delta_{bc} + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{V_{b\gamma, c\alpha}(s) \langle \xi_\alpha(s) | \xi'_\gamma(s) \rangle (1 - \delta_{bc})}{\mu_c(s) - \mu_b(s) + \nu_\alpha(s) - \nu_\gamma(s) + \epsilon V_{c\alpha, c\alpha}(s)} \\ &\quad + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{V_{b\alpha, c\gamma}(s) \langle \xi_\gamma(s) | \xi'_\alpha(s) \rangle (1 - \delta_{bc})}{\mu_b(s) - \mu_c(s) + \nu_\alpha(s) - \nu_\gamma(s) + \epsilon V_{b\alpha, b\alpha}(s)} \end{aligned} \quad (2.113)$$

*Démonstration.* Comme pour la formule à l'ordre zéro, nous avons

$$\Psi(s) = \sum_b \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-ih^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma - \int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{ba} \phi_{b\alpha}(s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.114)$$

$$= \sum_{bc} U_{abc} |\phi_{b\alpha}\rangle\langle\phi_{c\alpha}| \phi_{a\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.115)$$

Soit  $\zeta_{b\alpha}^{(1)} = \zeta_b + \epsilon \sum_{d \neq b} \mathcal{V}_{d\alpha, b\alpha} \zeta_d$  avec  $\mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} = \frac{\langle\langle \zeta_d \otimes \xi_\gamma | V | \zeta_b \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle}{\mu_b - \mu_d + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon \langle\langle \zeta_b \otimes \xi_\alpha | V | \zeta_b \otimes \xi_\alpha \rangle\rangle}$ . En utilisant un développement perturbatif du premier ordre basé sur la méthode de Wigner-Brillouin, nous avons

$$\phi_{b\alpha} = \zeta_b \otimes \xi_\alpha + \epsilon \sum_{(d, \gamma) \neq (b, \alpha)} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} \zeta_d \otimes \xi_\gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.116)$$

$$= \zeta_{b\alpha}^{(1)} \otimes \xi_\alpha + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \sum_{d \neq b} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} \zeta_d \otimes \xi_\gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.117)$$

$$|\phi_{b\alpha}\rangle\langle\phi_{c\alpha}| = \left( |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \otimes |\xi_\alpha\rangle + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq b} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} |\zeta_b\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle \right) \left( \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \otimes \langle\xi_\alpha| + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq c} \bar{\mathcal{V}}_{d\gamma, c\alpha} \langle\zeta_d| \otimes \langle\xi_\gamma| \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.118)$$

$$\Rightarrow |\phi_{b\alpha}\rangle\langle\phi_{c\alpha}| = |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \otimes |\xi_\alpha\rangle \langle\xi_\alpha| + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq b} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} |\zeta_d\rangle \langle\zeta_c| \otimes |\xi_\gamma\rangle \langle\xi_\alpha| + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq c} \bar{\mathcal{V}}_{d\gamma, c\alpha} |\zeta_b\rangle \langle\zeta_d| \otimes |\xi_\alpha\rangle \langle\xi_\gamma| + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.119)$$

$$|\phi_{b\alpha}\rangle\langle\phi_{c\alpha}| \phi_{a\alpha} = |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \zeta_{a\alpha}^{(1)} \otimes |\xi_\alpha\rangle + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq b} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} |\zeta_d\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle \delta_{ac} + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq c} \bar{\mathcal{V}}_{d\gamma, c\alpha} |\zeta_b\rangle \otimes |\xi_\alpha\rangle \delta_{ad} \delta_{\alpha\gamma} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.120)$$

$$\Rightarrow |\phi_{b\alpha}\rangle\langle\phi_{c\alpha}| \phi_{a\alpha} = |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \zeta_{a\alpha}^{(1)} \otimes |\xi_\alpha\rangle + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq b} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} |\zeta_d\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle \delta_{ac} \quad (2.121)$$

Or

$$|\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \phi_{a\alpha} = |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \zeta_{a\alpha}^{(1)} \otimes |\xi_\alpha\rangle + |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq a} \mathcal{V}_{d\gamma, a\alpha} |\zeta_d\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.122)$$

$$= |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \zeta_{a\alpha}^{(1)} \otimes |\xi_\alpha\rangle + |\zeta_b\rangle \langle\zeta_c| \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq a} \mathcal{V}_{d\gamma, a\alpha} |\zeta_d\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.123)$$

$$= |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \zeta_{a\alpha}^{(1)} \otimes |\xi_\alpha\rangle + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{V}_{c\gamma, a\alpha} |\zeta_b\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle (1 - \delta_{ac}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.124)$$

D'où

$$\Rightarrow |\phi_{b\alpha}\rangle\langle\phi_{c\alpha}| \phi_{a\alpha} = |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \phi_{a\alpha} - \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{V}_{c\gamma, a\alpha} |\zeta_b\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle (1 - \delta_{ac}) + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq b} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} |\zeta_d\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle \delta_{ac} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\phi_{b\alpha}\rangle\langle\phi_{c\alpha}| \phi_{a\alpha} &= |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \phi_{a\alpha} - \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq c} \mathcal{V}_{c\gamma, d\alpha} |\zeta_b\rangle\langle\zeta_d| \phi_{a\gamma} \\ &\quad + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha, d \neq b} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} |\zeta_d\rangle\langle\zeta_c| \phi_{a\gamma} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.126)$$

En utilisant l'équation 2.115, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= \sum_{b,c} U_{abc} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \phi_{a\alpha} - \epsilon \sum_{b,c} \sum_{d \neq c} \sum_{\gamma \neq \alpha} U_{abc} \mathcal{V}_{c\gamma, d\alpha} |\zeta_b\rangle\langle\zeta_d| \phi_{a\gamma} \\ &\quad + \epsilon \sum_{b,c} \sum_{d \neq b} \sum_{\gamma \neq \alpha} U_{abc} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} |\zeta_d\rangle\langle\zeta_c| \phi_{a\gamma} + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T}, \epsilon^2\right)\right) \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$\Rightarrow \Psi(s) = \mathcal{U}_\alpha \phi_{a\alpha} + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} [\mathcal{W}_{\gamma\alpha}, \mathcal{U}_\alpha] \phi_{a\gamma} + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T}, \epsilon^2\right)\right) \quad (2.128)$$

avec les opérateurs de  $\mathcal{H}_S$  :  $\mathcal{U}_\alpha = \sum_{b,c} U_{abc} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}|$  et  $\mathcal{W}_{\gamma\alpha} = \sum_d \sum_{b \neq d} \mathcal{V}_{d\gamma, b\alpha} |\zeta_{d\gamma}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{d\alpha}^{(1)}|$ .

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle\langle\Psi| &= \left( \mathcal{U}_\alpha |\phi_{a\alpha}\rangle + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} [\mathcal{W}_{\gamma\alpha}, \mathcal{U}_\alpha] |\phi_{a\gamma}\rangle \right) \\ &\quad \times \left( \langle\phi_{a\alpha}| \mathcal{U}_\alpha^\dagger + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \langle\phi_{a\gamma}| [\mathcal{U}_\alpha^\dagger, \mathcal{W}_{\gamma\alpha}^\dagger] \right) + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T}, \epsilon^2\right)\right) \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\Psi\rangle\langle\Psi| &= \mathcal{U}_\alpha |\phi_{a\alpha}\rangle\langle\phi_{a\alpha}| \mathcal{U}_\alpha^\dagger + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} [\mathcal{W}_{\gamma\alpha}, \mathcal{U}_\alpha] |\zeta_a\rangle\langle\zeta_a| \otimes |\xi_\gamma\rangle\langle\xi_\alpha| \mathcal{U}_\alpha^\dagger \\ &\quad + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{U}_\alpha |\zeta_a\rangle\langle\zeta_a| \otimes |\xi_\alpha\rangle\langle\xi_\gamma| [\mathcal{U}_\alpha^\dagger, \mathcal{W}_{\gamma\alpha}^\dagger] + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T}, \epsilon^2\right)\right) \end{aligned} \quad (2.130)$$

Ainsi

$$\rho(s) = \text{tr}_\mathcal{E} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathcal{U}_\alpha |\phi_{a\alpha}\rangle\langle\phi_{a\alpha}| \mathcal{U}_\alpha^\dagger + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T}, \epsilon^2\right)\right) \quad (2.131)$$

$$= \mathcal{U}_\alpha \rho_{a\alpha} \mathcal{U}_\alpha^\dagger + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T}, \epsilon^2\right)\right) \quad (2.132)$$

$$\mathcal{U}_\alpha = \sum_{b,c} \left[ \mathbb{T} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma - \int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{bc} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{c\alpha}^{(1)}| \quad (2.133)$$

Mais

$$[K_\alpha]_{bc} = \langle\phi_{b\alpha}| \phi'_{c\alpha}\rangle \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle\phi_{b\alpha}| \phi'_{c\alpha}\rangle &= \left( \langle\zeta_{b\alpha}^{(1)}| \otimes \langle\xi_\alpha| + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \sum_{d \neq b} \bar{\mathcal{V}}_{d\gamma, b\alpha} \langle\zeta_d| \otimes \langle\xi_\gamma| \right) \\ &\quad \times \left( |\zeta_{c\alpha}^{(1)'}\rangle \otimes |\xi_\alpha\rangle + |\zeta_{c\alpha}^{(1)}\rangle \otimes |\xi'_\alpha\rangle + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \sum_{d \neq c} \mathcal{V}'_{d\gamma, c\alpha} |\zeta_d\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \sum_{d \neq c} \mathcal{V}_{d\gamma, c\alpha} (|\zeta'_d\rangle \otimes |\xi_\gamma\rangle + |\zeta_d\rangle \otimes |\xi'_\gamma\rangle) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle\phi_{b\alpha}| \phi'_{c\alpha}\rangle &= \langle\zeta_{b\alpha}^{(1)}| \zeta_{c\alpha}^{(1)'}\rangle + \langle\xi_\alpha| \xi'_\alpha\rangle + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \sum_{d \neq b} \bar{\mathcal{V}}_{d\gamma, b\alpha} \langle\zeta_d| \zeta_c\rangle \otimes \langle\xi_\gamma| \xi'_\alpha\rangle \\ &\quad + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \sum_{d \neq c} \mathcal{V}_{d\gamma, c\alpha} \langle\zeta_b| \zeta_d\rangle \otimes \langle\xi_\alpha| \xi'_\gamma\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle\langle \phi_{b\alpha} | \phi'_{c\alpha} \rangle\rangle &= \langle \zeta_{b\alpha}^{(1)} | \zeta_{c\alpha}^{(1)'} \rangle + \langle \xi_\alpha | \xi'_\alpha \rangle + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{V}_{b\gamma, c\alpha} \langle \xi_\alpha | \xi'_\gamma \rangle (1 - \delta_{bc}) \\ &\quad + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \bar{\mathcal{V}}_{c\gamma, b\alpha} \langle \xi_\gamma | \xi'_\alpha \rangle (1 - \delta_{bc}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.137)$$

$$\Rightarrow \langle\langle \phi_{b\alpha} | \phi'_{c\alpha} \rangle\rangle = [\overset{\circ}{K}_\alpha]_{bc} + \eta_{\alpha bc}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.138)$$

$$[\overset{\circ}{K}_\alpha]_{bc} = \langle \zeta_{b\alpha}^{(1)} | \zeta_{c\alpha}^{(1)'} \rangle \quad (\overset{\circ}{K}_\alpha \in \mathcal{M}_{n \times n})$$

D'après le corollaire annexe D nous avons

$$\mathcal{U}_\alpha = \sum_{b,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s \Lambda_\alpha d\sigma - \int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{bc} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}| \quad (2.139)$$

$$= \sum_{b,d,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \right]_{bd} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s K_\alpha d\sigma} \right]_{dc} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}| + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.140)$$

$$= \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)}| \sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s \overset{\circ}{K}_\alpha d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}| + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.141)$$

$$\text{avec } X = i\hbar^{-1}T\Lambda_\alpha + \eta_\alpha^{(1)} + \overset{\circ}{K}_\alpha - \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \overset{\circ}{K}_\alpha \left( \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \right)^{-1}$$

$$\text{— Nous cherchons } Y \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \text{ tel que } \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(1)} d\sigma} = \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)}|$$

$$\left( \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(1)} d\sigma} \right)' = -i\hbar^{-1}T E_\alpha^{(1)} \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(1)} d\sigma} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{b,d} -i\hbar^{-1}T E_\alpha^{(1)} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)}| &= \sum_{b,d} \left[ -Y \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y ds} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)}| \\ &\quad + \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)'}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)}| + \sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)'}| \end{aligned} \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{b,d} \left[ \left( -i\hbar^{-1}T\Lambda_\alpha - \eta_\alpha^{(1)} \right) \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)}| &= \sum_{b,d} \left[ -Y \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)}| \\ &\quad + \sum_{b,d,f} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right]_{bd} \langle \zeta_{f\alpha}^{(1)} | \zeta_{b\alpha}^{(1)'} \rangle |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)}| + \sum_{b,d,f} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y ds} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{f\alpha}^{(1)} | \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)'} | \zeta_{f\alpha}^{(1)} \rangle \end{aligned} \quad (2.144)$$

$$\Rightarrow \left( -i\hbar^{-1}T\Lambda_\alpha - \eta_\alpha^{(1)} \right) \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} = -Y \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} + \overset{\circ}{K}_\alpha \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} - \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \overset{\circ}{K}_\alpha \quad (2.145)$$

Nous avons donc  $Y = i\hbar^{-1}T\Lambda_\alpha + \eta_\alpha^{(1)} + \overset{\circ}{K}_\alpha - \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \overset{\circ}{K}_\alpha \left( \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Y d\sigma} \right)^{-1}$  et par comparaison avec la définition de  $X$  nous avons  $Y = X$ . Donc

$$\sum_{b,d} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s X d\sigma} \right]_{bd} |\zeta_{b\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{d\alpha}^{(1)}| = \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(1)} d\sigma} \quad (2.146)$$

$$\text{— Nous cherchons } Z \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \text{ tel que } \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(1)} d\sigma} = \sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}|$$

$$\left( \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(1)} d\sigma} \right)' = -\mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(1)} d\sigma} A_\alpha^{(1)} \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow - \sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}| A_\alpha^{(1)} &= \sum_{f,c} \left[ -Z \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}| \\ &+ \sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_{f\alpha}^{(1)'}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}| + \sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)'}| \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{f,c,g} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} [\overset{\circ}{K}_\alpha]_{cg} |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{g\alpha}^{(1)}| &= \sum_{f,c} \left[ -Z \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}| \\ &+ \sum_{f,c,g} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} \langle \zeta_{g\alpha}^{(1)} | \zeta_{f\alpha}^{(1)'} \rangle |\zeta_{g\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}| + \sum_{f,c,g} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \right]_{fc} \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)'} | \zeta_{g\alpha}^{(1)} \rangle |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{g\alpha}^{(1)}| \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$\Rightarrow -\mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \overset{\circ}{K}_\alpha = -Z \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} + \overset{\circ}{K}_\alpha \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} - \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s Z d\sigma} \overset{\circ}{K}_\alpha \quad (2.150)$$

ceci implique que  $Z = \overset{\circ}{K}_\alpha$ . Alors

$$\sum_{f,c} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-\int_0^s \overset{\circ}{K}_\alpha d\sigma} \right]_{fc} |\zeta_{f\alpha}^{(1)}\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{(1)}| = \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(1)} d\sigma} \quad (2.151)$$

D'où

$$\mathcal{U}_\alpha = \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(1)} d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(1)} d\sigma} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.152)$$

En injectant cette expression dans l'équation 2.132, nous retrouvons le résultat attendu.  $\square$

Nous notons que nous avons utilisé la méthode de Wigner-Brillouin pour la théorie des perturbations car le régime adiabatique faible ne nécessite pas que  $\tau_S \ll T$  et permet le croisement des valeurs propres de  $\mathcal{S}$ . Cette méthode nous permet d'éviter des divergences dans la série perturbative induites par ces possibles croisements.

La partie non-diagonale de  $E_\alpha^{(1)}$  inclut un générateur de phase géométrique associé à  $\mathcal{E} : \eta_\alpha^{(1)}$ . Ceci vient du fait que  $E_\alpha^{(1)}$  joue le rôle d'un Hamiltonien effectif de  $\mathcal{S}$  habillé par  $\mathcal{E}$ .

### 2.3.4 Régime adiabatique faible du second ordre

Au second ordre des perturbations

$$\begin{aligned} \phi_{b\beta} &= \zeta_b \otimes \xi_\beta + \epsilon \sum_{(c\gamma) \neq (b\beta)} \frac{V_{c\gamma, b\beta}}{\mu_b - \mu_c + \nu_\beta - \nu_\gamma} \zeta_c \otimes \xi_\gamma \\ &+ \epsilon^2 \sum_{(d\delta) \neq (b\beta), (c\gamma) \neq (b\beta)} \frac{V_{d\delta, c\gamma} V_{c\gamma, b\beta} - V_{c\gamma, b\beta} V_{b\beta, d\delta}}{(\mu_b - \mu_d + \nu_\beta - \nu_\delta)(\mu_b - \mu_c + \nu_\beta - \nu_\gamma)} \zeta_d \otimes \xi_\delta + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (2.153)$$

Cette approximation n'est pas normalisée à l'ordre  $\epsilon^3$ . Par soucis de simplicité nous choisissons d'utiliser une base biorthonormale définie comme suit

$$\langle\langle \phi_{c\gamma}^* | \phi_{b\beta} \rangle\rangle = \delta_{cb} \delta_{\gamma\beta} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.154)$$

Une telle méthode permet de définir un générateur de phase géométrique correct [98, 102]. La base biorthonormale est caractérisée par

$$\langle\langle \phi_{b\beta}^* | = \langle\langle \phi_{b\beta} | - \epsilon^2 \sum_{(c\gamma)} X_{b\beta, c\gamma} \langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\gamma | \quad (2.155)$$

avec

$$\begin{aligned}
X_{b\beta, c\gamma} = & \sum_{(d\delta) \neq (c\gamma)} \frac{V_{b\beta, d\delta} V_{d\delta, c\gamma} - V_{d\delta, c\gamma} V_{c\gamma, c\gamma}}{(\mu_c - \mu_b + \nu_\gamma - \nu_\beta)(\mu_c - \mu_d + \nu_\gamma - \nu_\delta)} (1 - \delta_{bc} \delta_{\beta\gamma}) \\
& + \sum_{(d\delta) \neq (b\beta)} \frac{V_{d\delta, c\gamma} V_{b\beta, d\delta} - V_{b\beta, d\delta} V_{b\beta, b\beta}}{(\mu_b - \mu_c + \nu_\beta - \nu_\gamma)(\mu_b - \mu_d + \nu_\beta - \nu_\delta)} (1 - \delta_{bc} \delta_{\beta\gamma}) \\
& + \sum_{(d\delta) \neq (b\beta)} \frac{V_{d\delta, c\gamma} V_{b\beta, d\delta}}{(\mu_c - \mu_d + \nu_\gamma - \nu_\delta)(\mu_b - \mu_d + \nu_\beta - \nu_\delta)} (1 - \delta_{dc} \delta_{\delta\gamma}) \quad (2.156)
\end{aligned}$$

Vérifions en calculant  $\langle\langle \phi_{c\gamma}^* | \phi_{b\beta} \rangle\rangle$ .

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi_{c\gamma}^* | \phi_{b\beta} \rangle\rangle = & \langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\gamma | \zeta_b \otimes \xi_\beta \rangle\rangle + \langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\gamma | \epsilon \sum_{(x\xi) \neq (b\beta)} \frac{V_{x\xi, b\beta}}{\mu_b - \mu_x + \nu_\beta - \nu_\xi} | \zeta_x \otimes \xi_\xi \rangle\rangle \\
& + \langle\langle \zeta_c \otimes \xi_\gamma | \epsilon^2 \sum_{(d\delta) \neq (b\beta)} \sum_{(x\xi) \neq (b\beta)} \frac{V_{d\delta, x\xi} V_{x\xi, b\beta} - V_{x\xi, b\beta} V_{b\beta, b\beta}}{(\mu_b - \mu_d + \nu_\beta - \nu_\delta)(\mu_d - \mu_x + \nu_\beta - \nu_\xi)} | \zeta_d \otimes \xi_\delta \rangle\rangle \\
& + \epsilon \sum_{(x\xi) \neq (c\gamma)} \frac{\bar{V}_{x\xi, c\gamma}}{\mu_c - \mu_x + \nu_\gamma - \nu_\xi} \langle\langle \zeta_x \otimes \xi_\xi | \zeta_b \otimes \xi_\beta \rangle\rangle \\
& + \epsilon^2 \sum_{(x\xi) \neq (b\beta)} \sum_{(d\delta) \neq (c\gamma)} \frac{V_{x\xi, b\beta} \bar{V}_{d\delta, c\gamma}}{(\mu_b - \mu_x + \nu_\beta - \nu_\xi)(\mu_c - \mu_d + \nu_\gamma - \nu_\xi)} \langle\langle \zeta_d \otimes \xi_\delta | \zeta_x \otimes \xi_x \rangle\rangle \\
& + \epsilon^2 \sum_{(d\delta) \neq (c\gamma)} \sum_{(x\xi) \neq (c\gamma)} \frac{\bar{V}_{d\delta, x\xi} \bar{V}_{x\xi, c\gamma} - \bar{V}_{x\xi, c\gamma} \bar{V}_{c\gamma, c\gamma}}{(\mu_c - \mu_d + \nu_\gamma - \nu_\delta)(\mu_c - \mu_x + \nu_\gamma - \nu_\xi)} \langle\langle \zeta_d \otimes \xi_\delta | \zeta_b \otimes \xi_\beta \rangle\rangle \\
& - \epsilon^2 \sum_{d\delta} \sum_{(x\xi) \neq (d\delta)} \frac{V_{c\gamma, x\xi} V_{x\xi, d\delta} - V_{x\xi, d\delta} V_{d\delta, d\delta}}{(\mu_d - \mu_c + \nu_\delta - \nu_\gamma)(\mu_d - \mu_x + \nu_\delta - \nu_\xi)} (1 - \delta_{cd} \delta_{\gamma\delta}) \langle\langle \zeta_d \otimes \xi_\delta | \zeta_b \otimes \xi_\beta \rangle\rangle \\
& - \epsilon^2 \sum_{d\delta} \sum_{(x\xi) \neq (c\gamma)} \frac{V_{x\xi, d\delta} V_{c\gamma, x\xi} - V_{c\gamma, x\xi} V_{c\gamma, c\gamma}}{(\mu_c - \mu_d + \nu_\gamma - \nu_\delta)(\mu_c - \mu_x + \nu_\gamma - \nu_\xi)} (1 - \delta_{cd} \delta_{\gamma\delta}) \langle\langle \zeta_d \otimes \xi_\delta | \zeta_b \otimes \xi_\beta \rangle\rangle \\
& - \epsilon^2 \sum_{d\delta} \sum_{(x\xi) \neq (c\gamma)} \frac{V_{x\xi, d\delta} V_{c\gamma, x\xi}}{(\mu_d - \mu_x + \nu_\delta - \nu_\xi)(\mu_c - \mu_x + \nu_\gamma - \nu_\xi)} (1 - \delta_{xd} \delta_{\xi\delta}) \langle\langle \zeta_d \otimes \xi_\delta | \zeta_b \otimes \xi_\beta \rangle\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.157)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle\langle \phi_{c\gamma}^* | \phi_{b\beta} \rangle\rangle = & \delta_{cb} \delta_{\gamma\beta} + \epsilon^2 \sum_{(x\xi) \neq (b\beta)} \frac{V_{c\gamma, x\xi} V_{x\xi, b\beta} - V_{x\xi, b\beta} V_{b\beta, b\beta}}{(\mu_b - \mu_c + \nu_\beta - \nu_\gamma)(\mu_b - \mu_x + \nu_\beta - \nu_\xi)} (1 - \delta_{bc} \delta_{\gamma\beta}) \\
& + \epsilon^2 \sum_{(d\delta) \neq (c\gamma)} \frac{V_{d\delta, b\beta}}{\mu_b - \mu_d + \nu_\beta - \nu_\delta} \frac{\bar{V}_{d\delta, c\gamma}}{\mu_c - \mu_d + \nu_\gamma - \nu_\xi} (1 - \delta_{db} \delta_{\beta\delta}) \\
& + \epsilon^2 \sum_{(x\xi) \neq (c\gamma)} \frac{\bar{V}_{b\beta, x\xi} \bar{V}_{x\xi, c\gamma} - \bar{v}_{x\xi, c\gamma} \bar{V}_{c\gamma, c\gamma}}{(\mu_c - \mu_b + \nu_\gamma - \nu_\beta)(\mu_c - \mu_x + \nu_\gamma - \nu_\xi)} (1 - \delta_{bc} \delta_{\beta\gamma}) \\
& - \epsilon^2 \sum_{(x\xi) \neq (b\beta)} \frac{V_{c\gamma, x\xi} V_{x\xi, b\beta} - V_{x\xi, b\beta} V_{b\beta, b\beta}}{(\mu_b - \mu_c + \nu_\beta - \nu_\gamma)(\mu_b - \mu_x + \nu_\beta - \nu_\xi)} (1 - \delta_{cb} \delta_{\beta\gamma}) \\
& - \epsilon^2 \sum_{(x\xi) \neq (c\gamma)} \frac{V_{x\xi, b\beta} V_{c\gamma, x\xi} - V_{c\gamma, x\xi} V_{c\gamma, c\gamma}}{(\mu_c - \mu_b + \nu_\gamma - \nu_\beta)(\mu_c - \mu_x + \nu_\gamma - \nu_\xi)} (1 - \delta_{cb} \delta_{\gamma\beta}) \\
& - \epsilon^2 \sum_{(x\xi) \neq (c\gamma)} \frac{V_{x\xi, b\beta} V_{c\gamma, x\xi}}{(\mu_b - \mu_x + \nu_\beta - \nu_\xi)(\mu_c - \mu_x + \nu_\gamma - \nu_\xi)} (1 - \delta_{xb} \delta_{\xi\beta}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.158)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\Rightarrow \langle\langle \phi_{c\gamma}^* | \phi_{b\beta} \rangle\rangle = \delta_{cb} \delta_{\gamma\beta} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.159)$$

**Proposition 5.** *Formule de transport adiabatique faible de la matrice densité à l'ordre 2*  
*Dans les conditions du théorème adiabatique faible, nous avons  $\forall s \in [0, 1]$*

$$\rho(s) = \mathfrak{A} \mathfrak{D} [\mathcal{U}_\alpha(s)] \rho_{d\alpha}^{(2)}(s) + \epsilon^2 \sum_{\delta \neq \alpha} \mathfrak{A} \mathfrak{D} [\mathcal{W}_{\delta\alpha}(s) \mathcal{U}_\alpha(s)] |\zeta_\alpha(s)\rangle \langle \zeta_\alpha(s)| + \mathcal{O} \left( \max \left( \frac{1}{T}, \epsilon^3 \right) \right) \quad (2.160)$$

$$\mathcal{U}_\alpha(s) = \overleftarrow{\mathbb{T}} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_\alpha^{(2)}(\sigma) d\sigma} \overrightarrow{\mathbb{T}} e^{-\int_0^s A_\alpha^{(2)}(\sigma) d\sigma} \quad (2.161)$$

$$\mathcal{W}_{\delta\alpha}(s) = \sum_d \sum_{c \neq d} \frac{V_{d\delta, c\alpha}(s)}{\Delta_{c\alpha, d\delta}(s)} |\zeta_d(s)\rangle \langle \zeta_c(s)| \quad (2.162)$$

avec  $\Delta_{c\alpha, d\delta} = \mu_c - \mu_d + \nu_\alpha - \nu_\delta + \epsilon V_{c\alpha, c\alpha}$ . Le générateur de la phase dynamique du second ordre est

$$E_\alpha^{(2)}(s) = \sum_{b,c} \left( \lambda_{b\alpha}(s) \delta_{bc} - \frac{i\hbar}{T} \eta_{abc}^{(2)}(s) \right) |\zeta_{b\alpha}^{(2)}(s)\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{*(2)}(s)| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \quad (2.163)$$

et le générateur de la phase géométrique du second ordre est

$$A_\alpha^{(2)}(s) = \sum_{b,c} \left( \langle \zeta_{b\alpha}^{*(2)}(s) | \zeta_{c\alpha}^{(2)'}(s) \rangle + \epsilon^2 \sum_{d \neq c} \sum_{f \neq b} \sum_{\delta \neq \alpha} \frac{V_{d\delta, c\alpha}(s) V_{b\alpha, f\delta}(s)}{\Delta_{c\alpha, d\delta}(s) \Delta_{b\alpha, f\delta}(s)} \langle \zeta_f(s) | \zeta_d'(s) \rangle \right) |\zeta_{b\alpha}^{(2)}(s)\rangle \langle \zeta_{c\alpha}^{*(2)}(s)| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \quad (2.164)$$

avec

$$\zeta_{b\alpha}^{(2)} = \zeta_b + \epsilon \sum_{d \neq b} \frac{V_{d\alpha, b\alpha}}{\Delta_{b\alpha, d\alpha}} \zeta_d + \epsilon^2 \sum_{d \neq b} \sum_{e \neq b} \frac{V_{d\alpha, e\alpha} V_{e\alpha, b\alpha} - V_{e\alpha, b\alpha} V_{b\alpha, e\alpha}}{\Delta_{b\alpha, d\alpha} \Delta_{b\alpha, e\alpha}} \zeta_d \quad (2.165)$$

$$\begin{aligned} \langle \zeta_{c\alpha}^{*(2)} | = & \langle \zeta_c | + \epsilon \sum_{f \neq c} \frac{V_{c\alpha, f\alpha}}{\Delta_{c\alpha, f\alpha}} \langle \zeta_f | + \epsilon^2 \sum_{d \neq c} \sum_{e \neq c} \frac{V_{e\alpha, d\alpha} V_{c\alpha, e\alpha} - V_{c\alpha, e\alpha} V_{e\alpha, c\alpha}}{\Delta_{c\alpha, d\alpha} \Delta_{c\alpha, e\alpha}} \langle \zeta_d | \\ & - \epsilon^2 \sum_e \sum_{k \neq e} \frac{(V_{c\alpha, k\alpha} V_{k\alpha, e\alpha} - V_{k\alpha, e\alpha} V_{e\alpha, c\alpha}) (1 - \delta_{ce})}{\Delta_{e\alpha, c\alpha} \Delta_{e\alpha, k\alpha}} \langle \zeta_e | \\ & - \epsilon^2 \sum_e \sum_{k \neq c} \frac{(V_{k\alpha, e\alpha} V_{c\alpha, k\alpha} - V_{c\alpha, k\alpha} V_{e\alpha, c\alpha}) (1 - \delta_{ce})}{\Delta_{c\alpha, e\alpha} \Delta_{c\alpha, k\alpha}} \langle \zeta_e | \\ & - \epsilon^2 \sum_e \sum_{k \neq c} \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{V_{k\gamma, e\alpha} V_{c\alpha, k\gamma} (1 - \delta_{ke})}{\Delta_{e\alpha, k\gamma} \Delta_{c\alpha, k\gamma}} \langle \zeta_e | \end{aligned} \quad (2.166)$$

$$\begin{aligned}
\eta_{\alpha bc}^{(2)} = & \langle \xi_\alpha | \xi'_\alpha \rangle \delta_{bc} + \epsilon \sum_{\delta \neq \alpha} \frac{V_{b\delta, c\alpha} \langle \xi_\alpha | \xi'_\delta \rangle (1 - \delta_{bc})}{\Delta_{c\alpha, b\delta}} + \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{V_{b\alpha, c\gamma} \langle \xi_\gamma | \xi'_\alpha \rangle (1 - \delta_{bc})}{\Delta_{b\alpha, c\gamma}} \\
& + \epsilon^2 \sum_{d \neq c} \sum_{\delta \neq \alpha} \sum_{\gamma} \frac{V_{d\delta, c\alpha} V_{b\alpha, d\gamma} (1 - \delta_{db}) \langle \xi_\gamma | \xi'_\delta \rangle}{\Delta_{c\alpha, d\delta} \Delta_{b\alpha, d\gamma}} \\
& + \epsilon^2 \sum_{\delta \neq \alpha} \sum_{e \neq c} \sum_{\phi \neq \alpha} \frac{(V_{b\delta, e\phi} V_{e\phi, c\alpha} - V_{e\phi, c\alpha} V_{c\alpha, c\alpha}) (1 - \delta_{bc}) \langle \xi_\alpha | \xi'_\delta \rangle}{\Delta_{c\alpha, b\delta} \Delta_{c\alpha, e\phi}} \\
& + \epsilon^2 \sum_{\gamma \neq \alpha} \sum_{d \neq c} \frac{V_{b\alpha, d\gamma} V_{d\alpha, c\alpha} (1 - \delta_{db}) \langle \xi_\gamma | \xi'_\alpha \rangle}{\Delta_{b\alpha, d\gamma} \Delta_{d\alpha, c\alpha}} \\
& + \epsilon^2 \sum_{\delta \neq \alpha} \sum_{e \neq b} \sum_{\phi \neq \alpha} \frac{(V_{e\phi, c\delta} V_{b\alpha, e\phi} - V_{b\alpha, e\phi} V_{b\alpha, b\alpha}) (1 - \delta_{bc}) \langle \xi_\delta | \xi'_\alpha \rangle}{\Delta_{b\alpha, c\delta} \Delta_{b\alpha, e\phi}} \\
& - \epsilon^2 \sum_{\phi \neq \alpha} \sum_{k \neq c} \sum_{\gamma \neq \phi, \alpha} \frac{(V_{b\alpha, k\gamma} V_{k\gamma, c\phi} - V_{k\gamma, c\phi} V_{c\phi, c\phi}) (1 - \delta_{(b\alpha), (c\phi)}) \langle \xi_\phi | \xi'_\alpha \rangle}{\Delta_{c\phi, b\alpha} \Delta_{c\phi, k\gamma}} \\
& - \epsilon^2 \sum_{\phi \neq \alpha} \sum_{k \neq b} \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{(V_{k\gamma, c\phi} V_{b\alpha, k\gamma} - V_{b\alpha, k\gamma} V_{b\alpha, b\alpha}) (1 - \delta_{(b\alpha), (c\phi)}) \langle \xi_\phi | \xi'_\alpha \rangle}{\Delta_{b\alpha, c\phi} \Delta_{b\alpha, k\gamma}} \\
& - \epsilon^2 \sum_{\phi \neq \alpha} \sum_{k \neq b} \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{V_{k\gamma, c\phi} V_{b\alpha, k\gamma} (1 - \delta_{(k\gamma), (c\phi)}) \langle \xi_\phi | \xi'_\alpha \rangle}{\Delta_{c\phi, k\gamma} \Delta_{b\alpha, k\gamma}} \quad (2.167)
\end{aligned}$$

$\rho_{\alpha\alpha}^{(2)}$  est la matrice densité corrigée définie comme

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha\alpha}^{(2)} = & \rho_{\alpha\alpha} + \epsilon^2 \sum_c \sum_{d \neq c} \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{V_{c\alpha, d\gamma} V_{d\gamma, a\alpha} (1 - \delta_{ad})}{\Delta_{c\alpha, d\gamma} \Delta_{a\alpha, d\gamma}} |\zeta_c\rangle \langle \zeta_a| \\
& + \epsilon^2 \sum_f \sum_{d \neq c} \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{V_{d\gamma, f\alpha} V_{a\alpha, d\gamma} (1 - \delta_{ad})}{\Delta_{f\alpha, d\gamma} \Delta_{a\alpha, d\gamma}} |\zeta_a\rangle \langle \zeta_f| \\
& - \epsilon^2 \sum_{c, f} \sum_{\delta \neq \alpha} \frac{V_{a\alpha, f\delta} V_{c\delta, a\alpha} (1 - \delta_{ac}) (1 - \delta_{af})}{\Delta_{a\alpha, f\delta} \Delta_{a\alpha, c\delta}} |\zeta_c\rangle \langle \zeta_f| \quad (2.168)
\end{aligned}$$

La démonstration de cette proposition est similaire à ce qui a été fait pour les ordres précédents.

### 2.3.5 Le cas du bain thermique

Dans le cas où  $\mathcal{E}$  est un grand sous-système, il peut être intéressant de le considérer à  $s = 0$  comme étant un bain thermique, c'est à dire que  $\mathcal{E}$  est décrit par la matrice densité suivante

$$\rho_B = \frac{e^{-\underline{\beta} H_{\mathcal{E}}(0)}}{Z} = \sum_{\alpha} \frac{e^{-\underline{\beta} \nu_{\alpha}(0)}}{Z} |\xi_{\alpha}(0)\rangle \langle \xi_{\alpha}(0)| \quad (2.169)$$

avec  $\underline{\beta} = \frac{1}{k_B T}$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température du bain et  $Z = \text{tr}_{\mathcal{E}} e^{-\underline{\beta} H_{\mathcal{E}}(0)}$  la fonction de partition. Soit  $\rho_U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}})$  la matrice densité de la solution du système bipartite de l'équation de Liouville-von-Neumann

$$\frac{i\hbar}{T} \rho'_U(s) = [H_S(s) \otimes I_{\mathcal{E}} + I_S \otimes H_{\mathcal{E}}(s) + \epsilon V(s), \rho_U(s)] \quad (2.170)$$

$$\rho_U(0) = \sum_{\alpha} \frac{e^{-\underline{\beta} \nu_{\alpha}(0)}}{Z} |\phi_{a\alpha}(0)\rangle \langle \phi_{a\alpha}(0)| \quad (2.171)$$

Nous avons  $\text{tr}_{\mathcal{S}}\rho_{\mathcal{U}}(0) = \rho_B + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ , impliquant que  $\mathcal{E}$  est bien un bain thermique. La solution de l'équation de Liouville von-Neumann est

$$\rho_{\mathcal{U}}(s) = \sum_{\alpha} \frac{e^{-\beta\nu_{\alpha}(0)}}{Z} |\Psi_{(a\alpha)}(s)\rangle\langle\Psi_{(a\alpha)}(s)| \quad (2.172)$$

où  $\Psi_{(a\alpha)}$  est la solution de l'équation de Schrödinger  $\frac{i\hbar}{T}\Psi'_{(a\alpha)} = H\Psi_{(a\alpha)}$  avec la condition initiale  $\Psi_{(a\alpha)}(0) = \phi_{a\alpha}(0)$ . À la limite du régime adiabatique faible, nous avons

$$\rho(s) = \text{tr}_{\mathcal{E}}\rho_{\mathcal{U}}(s) \quad (2.173)$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{e^{-\beta\nu_{\alpha}(0)}}{Z} \mathfrak{A}\mathfrak{D} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_{\alpha}^{(1)}(\sigma)d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_{\alpha}^{(1)}(\sigma)d\sigma} \right] \rho_{a\alpha}(s) + \mathcal{O} \left( \max \left( \frac{1}{T}, \epsilon^2 \right) \right) \quad (2.174)$$

### 2.3.6 Croisements de valeurs propres dans le régime adiabatique faible

Une des conditions du théorème adiabatique faible est que les valeurs propres de  $\mathcal{E}$  ne se croisent pas. Cependant dans la réalité ceci n'est pas toujours le cas. Supposons donc que les conditions du régime adiabatique faible soient satisfaites sauf en  $s_*$  où  $\nu_{\alpha}(s_*) = \nu_{\beta}(s_*)$  (en supposant qu'aucun autre croisement ne survienne). La fonction d'onde initiale est

$$\Psi(0) = \phi_{a\alpha}(0) \quad (2.175)$$

Le transport adiabatique nous permet d'obtenir pour  $s \gg s_*$

$$\Psi(s) = \sqrt{1-p} U_{\alpha} \phi_{a\alpha}(s) + \sqrt{p} e^{i\varphi} U_{\beta} \phi_{a\beta}(s) \quad (2.176)$$

avec  $U_{\alpha} = \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_{\alpha}^{(1)}d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_{\alpha}^{(1)}d\sigma} \right]$ , à cause des transitions non-adiabatiques induites au voisinage de  $s_*$  par les croisements.  $p$  est la probabilité d'une transition non-adiabatique de  $\xi_{\alpha}$  vers  $\xi_{\beta}$  induite par le passage par le croisement et  $\varphi$  est la différence de phase accumulée pendant la transition non-adiabatique. La matrice densité devient pour  $s \gg s_*$

$$\rho(s) = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\Psi(s)\rangle\langle\Psi(s)| \quad (2.177)$$

$$\begin{aligned} \rho(s) = & (1-p) \mathfrak{A}\mathfrak{D} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_{\alpha}^{(1)}d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_{\alpha}^{(1)}d\sigma} \right] \rho_{a\alpha}(s) + p \mathfrak{A}\mathfrak{D} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_{\beta}^{(1)}d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_{\beta}^{(1)}d\sigma} \right] \rho_{a\beta}(s) \\ & + \sqrt{(1-p)p} e^{i\varphi} \mathfrak{A}\mathfrak{D}_{\alpha \leftrightarrow \beta} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_{\bullet}^{(1)}d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_{\bullet}^{(1)}d\sigma} \right] \tau_{\alpha\beta}(s) \\ & + \sqrt{(1-p)p} e^{-i\varphi} \mathfrak{A}\mathfrak{D}_{\beta \leftrightarrow \alpha} \left[ \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_{\bullet}^{(1)}d\sigma} \mathbb{T}_{\rightarrow} e^{-\int_0^s A_{\bullet}^{(1)}d\sigma} \right] \tau_{\alpha\beta}(s) \\ & + \mathcal{O} \left( \max \left( \frac{1}{T}, \epsilon^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.178)$$

où  $\mathfrak{A}\mathfrak{D}_{\alpha \leftrightarrow \beta}[U_{\bullet}] \tau = U_{\alpha} \tau U_{\beta}^{\dagger}$  et

$$\tau_{\alpha\beta} = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\phi_{a\alpha}\rangle\langle\phi_{a\beta}| \quad (2.179)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_{\alpha\beta} = & \epsilon \sum_{d \neq a} \frac{V_{b\beta, a\alpha}}{\mu_a - \mu_d + \nu_{\alpha} - \nu_{\beta} + \epsilon V_{a\alpha, a\alpha}} |\zeta_d\rangle\langle\zeta_a| \\ & + \epsilon \sum_{d \neq a} \frac{V_{a\beta, d\alpha}}{\mu_a - \mu_d + \nu_{\beta} - \nu_{\alpha} + \epsilon V_{a\beta, a\beta}} |\zeta_a\rangle\langle\zeta_d| + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.180)$$

Le croisement des énergies propres de  $\mathcal{E}$  induit un effet de décohérence dans la matrice densité de  $\mathcal{S}$  appelé décohérence cinétique car il est induit par la variation du système de contrôle par rapport au temps. En pratique, il peut être difficile de calculer  $p$  explicitement, mais si nous supposons que  $\forall s \in \mathcal{V}(s_*)$ ,  $\nu_{\beta}(s) - \nu_{\alpha}(s) = \mathfrak{N}(s - s_*)$  ( $\mathfrak{N}$  étant une constante) et que  $V_{a\alpha, b\beta}$  est indépendant de  $s$ ,

alors  $p$  peut être estimé par la formule de Landau-Zener [56, 109]  $p = e^{-2\pi \frac{T\epsilon^2 V_{a\alpha, a\beta}^2}{\hbar|\mathfrak{N}|}}$ .

## 2.4 Exemples

Dans cette section nous nous intéressons à deux exemples de systèmes quantiques bipartites : le contrôle d'un qubit interagissant avec un champ laser et d'un spin au milieu d'une chaîne de spins.

### 2.4.1 Contrôle de qubits atomiques

#### Le modèle

Considérons un atome à deux niveaux  $\mathcal{S}$  interagissant avec un champ laser. Cet atome est gouverné dans l'approximation de l'onde tournante à un photon par l'hamiltonien suivant

$$H_{\mathcal{S}}(s) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega(s)e^{i\varphi(s)} \\ \Omega(s)e^{-i\varphi(s)} & 2\Delta(s) \end{pmatrix} \quad (2.181)$$

avec  $\Omega(s)$  le produit entre l'intensité du champ électrique et le moment dipolaire de l'atome,  $\varphi$  le déphasage du champ laser et  $\Delta$  le detuning (le gap d'énergie entre les deux états des atomes moins l'énergie d'un photon du champ laser). Ce système peut représenter un atome soumis à un champ de contrôle pour former par exemple des portes logiques.

Un autre atome (qubit)  $\mathcal{E}$  est en contact avec le premier et est gouverné par l'Hamiltonien suivant

$$H_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar w_e \end{pmatrix} = \frac{\hbar w_e}{2} (I - \sigma_z) \quad (2.182)$$

( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) sont les matrices de Pauli. L'interaction entre les deux atomes est supposée être

$$\begin{aligned} \epsilon V &= \epsilon \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & 0 & V_3 \\ V_1 & V_0 & V_3 & 0 \\ 0 & V_3 & 2V_0 & V_2 \\ V_3 & 0 & V_2 & 2V_0 \end{pmatrix} \\ &= \epsilon \left( \frac{V_0}{2} I \otimes (I + \sigma_z) + V_0 I \otimes (I - \sigma_z) + \frac{V_1}{2} \sigma_x \otimes (I + \sigma_z) + \frac{V_2}{2} \sigma_x \otimes (I - \sigma_z) + V_3 \sigma_x \otimes \sigma_x \right) \end{aligned} \quad (2.183)$$

$$(2.184)$$

avec  $\epsilon$  un paramètre de perturbation. Les deux premières lignes et/ou colonnes sont associées aux deux états de  $\mathcal{S}$  et à l'état fondamental de  $\mathcal{E}$  et les deux dernières sont associées aux deux états de  $\mathcal{S}$  et à l'état excité de  $\mathcal{E}$ .

Nous introduisons un changement de variable des paramètres de contrôle  $r(s) = \sqrt{\Omega(s)^2 + \Delta(s)^2}$  et  $\theta(s) = \arctan \frac{\Omega(s)}{\Delta(s)}$ . Les valeurs propres et vecteurs propres des deux composantes du système bipartite sont

$$\mu_0(s) = \frac{\hbar}{2} r(s) (\cos \theta(s) - 1) \quad (2.185)$$

$$\mu_1(s) = \frac{\hbar}{2} r(s) (\cos \theta(s) + 1) \quad (2.186)$$

$$\zeta_0(s) = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta(s)}{2} \\ e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.187)$$

$$\zeta_1(s) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \\ \cos \frac{\theta(s)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.188)$$

avec

$$\nu_0 = 0 \quad (2.189)$$

$$\nu_1 = \hbar w_e \quad (2.190)$$

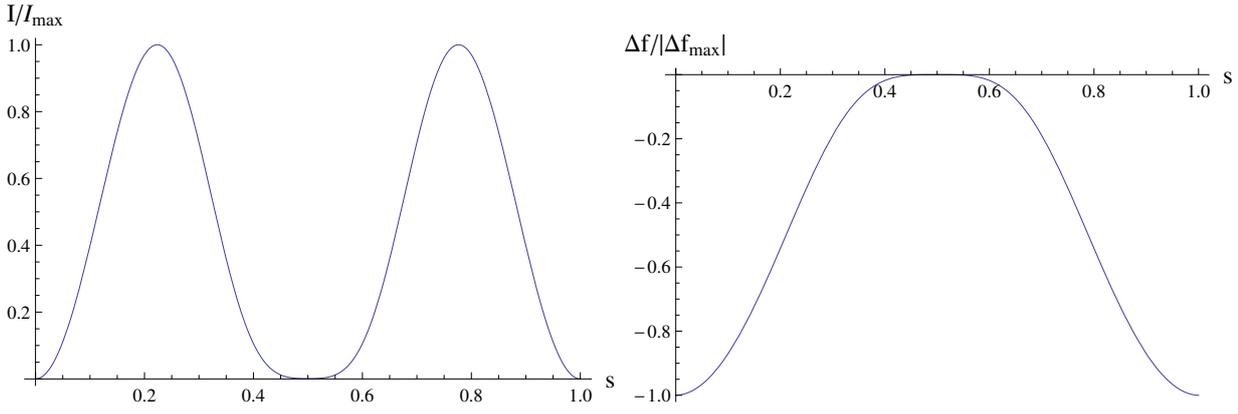


FIGURE 2.1 – Intensité de l'impulsion laser appliquée sur l'atome par rapport au temps réduit et différence de la fréquence du laser modulé avec la fréquence de la transition atomique par rapport au temps réduit.

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.191)$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.192)$$

Le contrôle est fixé par la variation des paramètres de contrôle suivante

$$r(s) = r_{\max} + (r_{\min} - r_{\max})e^{-25(s-0.5)^2} \quad (2.193)$$

$$\theta(s) = \theta_{\max} \sin(\pi s) \quad (2.194)$$

$$\varphi(s) = 2\pi s \quad (2.195)$$

Ces équations nous permettent d'obtenir la figure 2.1 représentant l'impulsion laser et la modulation de la fréquence du laser.

### Transport adiabatique

Déterminons tout d'abord les valeurs propres perturbées à l'ordre 1

$$\langle\langle \zeta_0 \otimes \xi_0 | V | \zeta_0 \otimes \xi_0 \rangle\rangle = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta(s)}{2} & e^{i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & 0 & V_3 \\ V_1 & V_0 & V_3 & 0 \\ 0 & V_3 & 2V_0 & V_2 \\ V_3 & 0 & V_2 & 2V_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta(s)}{2} \\ e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.196)$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta(s)}{2} & e^{i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta(s)}{2} V_0 + V_1 e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \\ -\cos \frac{\theta(s)}{2} V_1 + V_0 e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \\ e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} V_3 \\ -V_3 \cos \frac{\theta(s)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.197)$$

$$= \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} V_0 - V_1 e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \cos \frac{\theta(s)}{2} - e^{i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \cos \frac{\theta(s)}{2} V_1 + V_0 \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} \quad (2.198)$$

$$= V_0 - V_1 \sin \theta(s) \cos \varphi(s) \quad (2.199)$$

$$\Rightarrow \lambda_{00} = \frac{\hbar}{2} r (\cos \theta(s) - 1) + \epsilon \langle\langle \zeta_0 \otimes \xi_0 | V | \zeta_0 \otimes \xi_0 \rangle\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.200)$$

$$= \frac{\hbar}{2} r (\cos \theta(s) - 1) + \epsilon (V_0 - V_1 \sin \theta(s) \cos \varphi(s)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.201)$$

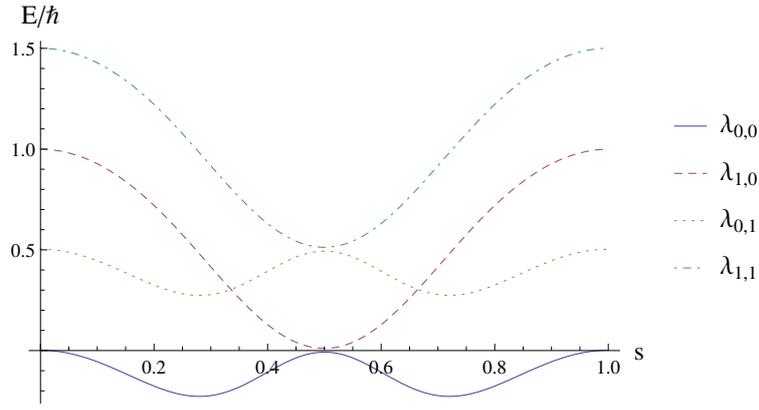


FIGURE 2.2 – Energies instantanées des deux atomes durant le contrôle par rapport au temps réduit (avec  $\hbar\omega_e = 0.5$  au,  $r_{\max} = 1$  au,  $r_{\min} = 0.02$  au,  $V_0 = 3$  au,  $V_1 = 1.5$  au,  $V_2 = 0.5$  au,  $V_3 = 2.5$  au,  $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$  et  $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$  (au : unité atomique))

En procédant de la même manière, nous trouvons

$$\lambda_{10} = \frac{\hbar}{2}r(\cos\theta(s) + 1) + \epsilon(V_0 + V_1 \sin\theta(s) \cos\varphi(s)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.202)$$

$$\lambda_{01} = \frac{\hbar}{2}r(\cos\theta(s) - 1) + \epsilon(2V_0 - V_2 \sin\theta(s) \cos\varphi(s)) + \hbar\omega_e + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.203)$$

$$\lambda_{11} = \frac{\hbar}{2}r(\cos\theta(s) + 1) + \epsilon(2V_0 + V_2 \sin\theta(s) \cos\varphi(s)) + \hbar\omega_e + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.204)$$

Ces énergies sont représentées sur le graphique 2.2

Calculons maintenant les vecteurs propres perturbés à l'ordre 1 (équation 2.112)

$$\zeta_{00}^{(1)} = \zeta_0 + \epsilon \frac{\langle\langle \zeta_1 \otimes \xi_0 | V | \zeta_0 \otimes \xi_0 \rangle\rangle}{\mu_0 - \mu_1 + \epsilon \langle\langle \zeta_0 \otimes \xi_0 | V | \zeta_0 \otimes \xi_0 \rangle\rangle} \zeta_1 \quad (2.205)$$

$$\langle\langle \zeta_1 \otimes \xi_0 | V | \zeta_0 \otimes \xi_0 \rangle\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} & \cos \frac{\theta(s)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & 0 & V_3 \\ V_1 & V_0 & V_3 & 0 \\ 0 & V_3 & 2V_0 & V_2 \\ V_3 & 0 & V_2 & 2V_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta(s)}{2} \\ e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.206)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} & \cos \frac{\theta(s)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -V_0 \cos \frac{\theta(s)}{2} + V_1 e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \\ -V_1 \cos \frac{\theta(s)}{2} + V_0 e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \\ V_3 e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \\ -V_3 \cos \frac{\theta(s)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.207)$$

$$\langle\langle \zeta_1 \otimes \xi_0 | V | \zeta_0 \otimes \xi_0 \rangle\rangle = -V_0 e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \cos \frac{\theta(s)}{2} + V_1 e^{-2i\varphi(s)} \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} - V_1 \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} + V_0 e^{-i\varphi(s)} \sin \frac{\theta(s)}{2} \cos \frac{\theta(s)}{2} \quad (2.208)$$

$$\langle\langle \zeta_1 \otimes \xi_0 | V | \zeta_0 \otimes \xi_0 \rangle\rangle = V_1 \left( e^{-2i\varphi(s)} \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} - \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} \right) \quad (2.209)$$

$$\Rightarrow \zeta_{00}^{(1)} = \zeta_0 + \epsilon \frac{V_1 \left( e^{-2i\varphi} \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} - \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} \right)}{-\hbar r + \epsilon (V_0 - V_1 \sin\theta(s) \cos\varphi(s))} \zeta_1 \quad (2.210)$$

De la même manière nous trouvons

$$\zeta_{10}^{(1)} = \zeta_1 + \epsilon \frac{V_1 \left( e^{2i\varphi(s)} \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} - \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} \right)}{\hbar r + \epsilon (V_0 + V_1 \sin \theta(s) \cos \varphi(s))} \zeta_0 \quad (2.211)$$

$$\zeta_{01}^{(1)} = \zeta_0 + \epsilon \frac{V_2 \left( e^{-2i\varphi(s)} \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} - \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} \right)}{-\hbar r + \epsilon (2V_0 - V_1 \sin \theta(s) \cos \varphi(s))} \zeta_1 \quad (2.212)$$

$$\zeta_{11}^{(1)} = \zeta_1 + \epsilon \frac{V_2 \left( e^{2i\varphi(s)} \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} - \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} \right)}{\hbar r + \epsilon (2V_0 + V_1 \sin \theta(s) \cos \varphi(s))} \zeta_0 \quad (2.213)$$

Nous supposons que les deux qubits sont initialement dans leur état fondamental  $\phi_{00}(0)$  et que le contrôle est initialement éteint  $\Omega(0) = 0$ . Le transport adiabatique de la matrice densité pour  $\mathcal{S}$  seul est

$$\rho_{ad-seul}(s) = |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| \quad (2.214)$$

Si la dynamique des deux qubits est fortement adiabatique, la formule de transport adiabatique de la matrice densité est (équation 2.57)

$$\rho_{ad-fort} = \rho_{00}(s) \quad (2.215)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_{ad-fort} &= |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| + \epsilon \frac{V_{10,00}}{\mu_0 - \mu_1 + \epsilon \langle\langle \zeta_0 \otimes \xi_0 | V | \zeta_0 \otimes \xi_0 \rangle\rangle} |\zeta_1(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| \\ &+ \epsilon \frac{V_{00,10}}{\mu_0 - \mu_1 + \epsilon \langle\langle \zeta_0 \otimes \xi_0 | V | \zeta_0 \otimes \xi_0 \rangle\rangle} |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_1(s)| + \mathcal{O} \left( \max \left( \frac{1}{T}, \epsilon^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.216)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_{ad-fort} &= |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| + \epsilon \frac{V_1}{-\hbar r(s) + \epsilon (V_0 - V_1 \cos \varphi(s) \sin \theta(s))} \\ &\times \left( \left( e^{-2i\varphi(s)} \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} - \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} \right) |\zeta_1(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| + \left( e^{2i\varphi(s)} \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} - \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} \right) |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_1(s)| \right) \end{aligned} \quad (2.217)$$

Si la dynamique est faiblement adiabatique la formule de transport adiabatique de la matrice densité donne (équation 2.109)

$$\rho_{ad-faible} = \mathfrak{QD} \left[ \overleftarrow{\mathbb{T}} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_0^{(1)}(\sigma) d\sigma} \overrightarrow{\mathbb{T}} e^{-\int_0^s A_0^{(1)}(\sigma) d\sigma} \right] \rho_{00}(s) \quad (2.218)$$

avec

$$E_0^{(1)} = \lambda_{00} |\zeta_{00}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{00}^{(1)}| + \lambda_{10} |\zeta_{10}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{10}^{(1)}| \quad (2.219)$$

$\eta^{(1)} = 0$  car les  $(\xi_\beta)$  sont indépendants de  $s$

$$A_0^{(1)} = \sum_{b,c=0} \langle\zeta_{b0}^{(1)} | \zeta_{c0}^{(1)'} \rangle |\zeta_{b0}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{c0}^{(1)}| \quad (2.220)$$

### Régime adiabatique fort

Nous voulons que les hypothèses du théorème adiabatique fort soient remplies. Pour ceci nous choisissons les paramètres tels que  $T = 20000$  au,  $\tau_S = \inf_{s \in [0,1]} \frac{\hbar}{|\mu_1(s) - \mu_0(s)|} = 2$  au et  $\theta^\epsilon = \frac{\hbar}{\epsilon \|V\|} = 21$  au (au : unité atomique). Nous sommes bien dans les conditions  $T \gg \theta^\epsilon \sim \tau_S$  et aucune résonance entre les transitions de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$  impliquant  $\phi_{00}$  n'est présente comme nous l'avons vu sur la figure 2.2.

La figure 2.3 montre l'évolution de la population de l'état 0  $\langle\zeta_0(s)|\rho(s)|\zeta_0(s)\rangle$  et de la cohérence  $|\langle\zeta_0(s)|\rho(s)|\zeta_1(s)\rangle|$  du qubit contrôlé. La figure suivante, 2.4, présente la comparaison des erreurs adiabatique seul, adiabatique fort et adiabatique faible avec la dynamique "exacte"<sup>6</sup>. La prédiction de la formule du transport adiabatique pour  $\mathcal{S}$  seul atteint une erreur de  $10^{-2}$  pour la population (ce qui est du même ordre de grandeur que  $\epsilon$ ) et d'environ  $2.5 \times 10^{-2}$  pour la cohérence. L'utilisation du théorème adiabatique fort nous donne une erreur de l'ordre de  $10^{-3}$  pour la cohérence et la population. Nous gagnons presque un ordre de grandeur. Cette erreur est la même que l'erreur théorique obtenue  $\frac{\theta^\epsilon}{T} = 10^{-3}$ .

6. pour calculer celle-ci numériquement, nous avons utilisé la méthode des opérateurs fractionnés.

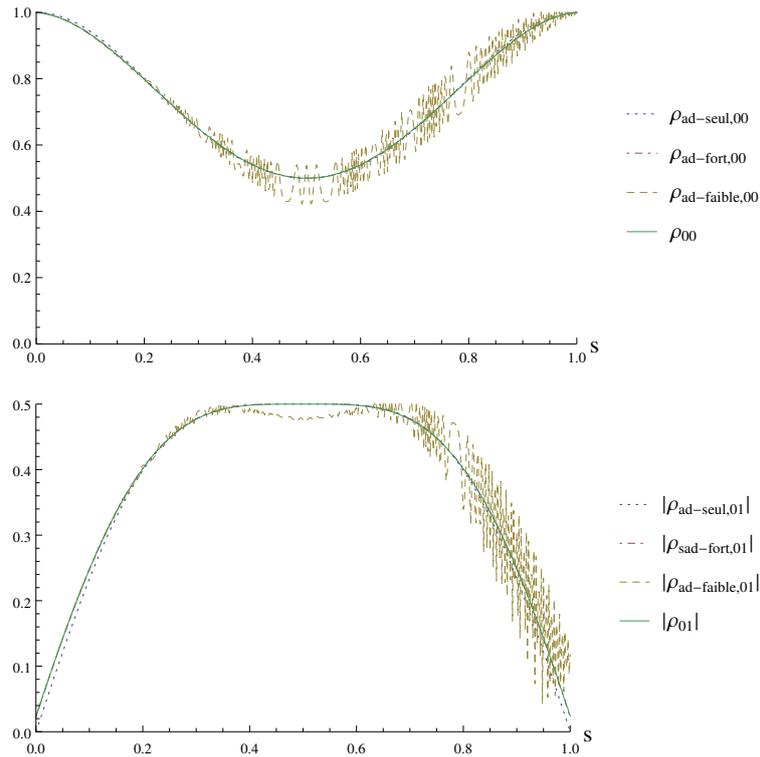


FIGURE 2.3 – Evolution de la population de l'état 0  $\rho_{\bullet,00} = \langle \zeta_0(s) | \rho_{\bullet}(s) | \zeta_0(s) \rangle$  et de la cohérence  $\rho_{\bullet,01} = |\langle \zeta_0(s) | \rho_{\bullet}(s) | \zeta_1(s) \rangle|$  du qubit contrôlé pour la dynamique exacte ( $\bullet = \emptyset$ ), la formule de transport adiabatique fort ( $\bullet = ad - fort$ ) et la formule de transport adiabatique faible ( $\bullet = ad - faible$ ). Toutes les conditions sont remplies pour être dans le régime adiabatique fort avec  $\hbar w_e = 1.5$  au,  $r_{\max} = 1$  au,  $r_{\min} = 0.5$  au,  $V_0 = 3$  au,  $V_1 = 1.5$  au,  $V_2 = 0.5$  au,  $V_3 = 2.5$  au,  $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$  et  $\epsilon = 1.6 \times 10^{-2}$  (au : unité atomique). Le cas adiabatique fort, le cas seul et le cas exact sont confondus sur le graphique.

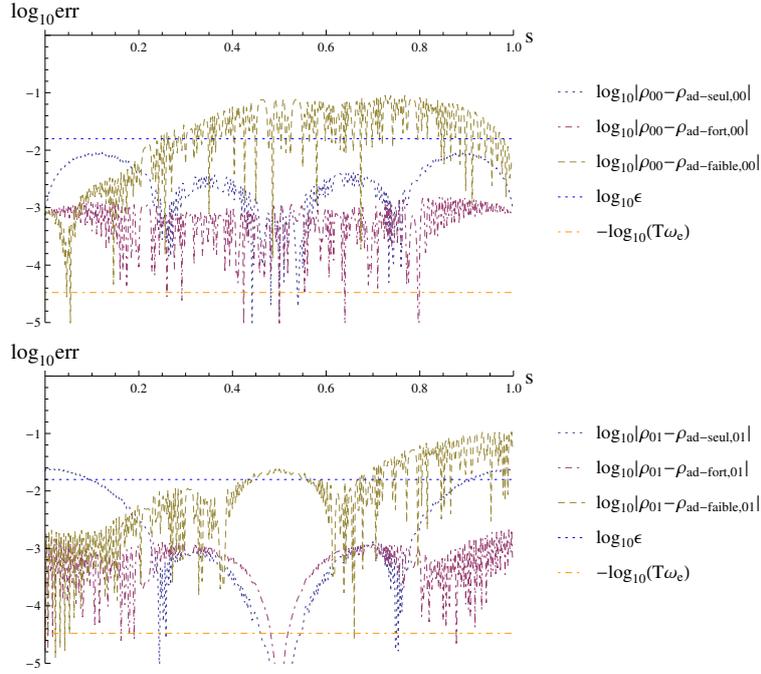


FIGURE 2.4 – Comparaison de l'évolution de l'erreur logarithmique des approximations adiabatiques seul, fort et faible avec la dynamique exacte de la population de l'état 0 du qubit et de la cohérence. Toutes les conditions sont remplies pour être dans le régime adiabatique fort avec  $\hbar\omega_e = 1.5$  au,  $r_{\max} = 1$  au,  $r_{\min} = 0.5$  au,  $V_0 = 3$  au,  $V_1 = 1.5$  au,  $V_2 = 0.5$  au,  $V_3 = 2.5$  au,  $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$  et  $\epsilon = 1.6 \times 10^{-2}$  (au : unité atomique).

### Régime adiabatique faible

Nous cherchons à nous placer dans les conditions du régime adiabatique faible. Pour ceci nous posons les paramètres tels que  $T = 200$  au,  $\tau_S = \inf_{s \in [0,1]} \frac{\hbar}{|\mu_1(s) - \mu_0(s)|} = 50$  au,  $\theta^\epsilon = \frac{\hbar}{\epsilon \|V\|} = 667$  au et  $\tau_\mathcal{E} = \frac{1}{w_e} = 2$  au (au : unité atomique). Nous sommes donc bien dans les conditions  $\theta^\epsilon \sim \tau_S \sim T$  et  $T \gg \tau_\mathcal{E}$  et il n'y a pas de quasi-résonance entre les transitions de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$ .

La figure 2.5 montre l'évolution de la population de l'état 0  $\langle \zeta_0(s) | \rho(s) | \zeta_0(s) \rangle$  et de la cohérence  $|\langle \zeta_0(s) | \rho(s) | \zeta_1(s) \rangle|$  du qubit contrôlé. La figure suivante, 2.6, présente la comparaison des erreurs adiabatique seul, adiabatique fort et adiabatique faible avec la dynamique exacte. Les erreurs de la prédiction de la formule du transport adiabatique pour  $\mathcal{S}$  seul sont très grandes pour la population et pour la cohérence et atteignent environ  $10^{-0.4}$ . Au contraire, la formule de transport adiabatique faible nous permet d'atteindre une erreur maximale de  $10^{-2.2}$  pour la population et la cohérence. La formule de transport adiabatique faible nous permet donc d'obtenir de biens meilleurs résultats avec une moyenne d'erreur de l'ordre de  $\frac{\tau_\mathcal{E}}{T} = 10^{-3}$ . Cette erreur est en accord avec la prédiction  $\max\left(\frac{\tau_\mathcal{E}}{T}, \epsilon^2\right)$

### 2.4.2 Contrôle d'un spin au milieu d'une chaîne

#### Le modèle

Le modèle est constitué d'une chaîne de spins contenant  $2N + 1$  spins couplés par une interaction d'Heisenberg de plus proches voisins. Un champ magnétique constant et uniforme est appliqué sur les spins de manière à lever la dégénérescence par effet Zeeman  $\vec{B}_{Zeeman} = -\frac{w_e}{2} \vec{e}_z$ . Un champ de contrôle dépendant du temps  $\vec{B}_{contrôle}$  est appliqué sur le spin central  $\mathcal{S}$  de manière à le contrôler. En notant

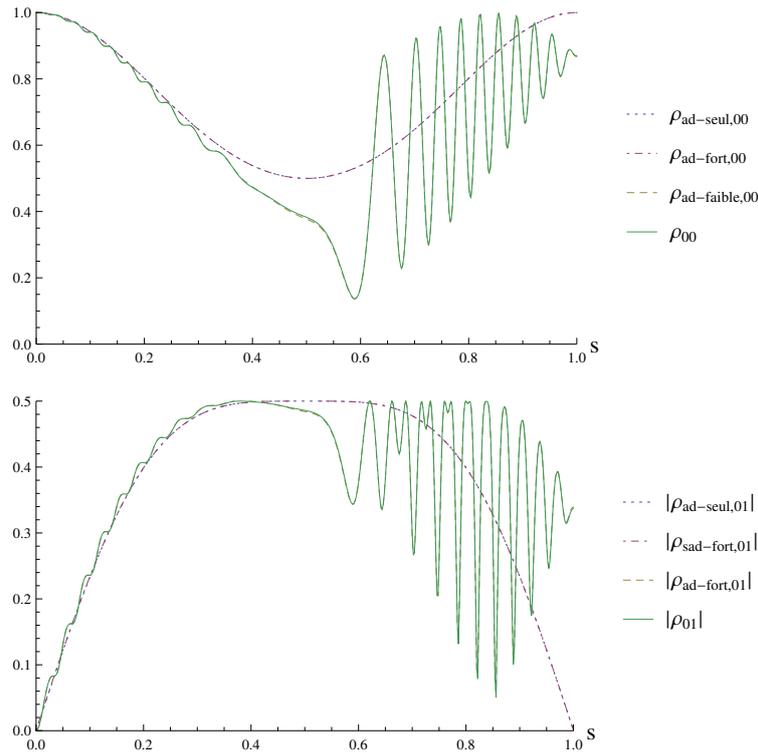


FIGURE 2.5 – Evolution de la population de l'état 0  $\rho_{\bullet,00} = \langle \zeta_0(s) | \rho_{\bullet}(s) | \zeta_0(s) \rangle$  et de la cohérence  $\rho_{\bullet,01} = |\langle \zeta_0(s) | \rho_{\bullet}(s) | \zeta_1(s) \rangle|$  du qubit contrôlé pour la dynamique exacte ( $\bullet = \emptyset$ ), la formule de transport adiabatique fort ( $\bullet = ad - fort$ ) et la formule de transport adiabatique faible ( $\bullet = ad - faible$ ). Toutes les conditions sont remplies pour être dans le régime adiabatique faible avec  $\hbar w_e = 0.5$  au,  $r_{\max} = 1$  au,  $r_{\min} = 0.5$  au,  $V_0 = 3$  au,  $V_1 = 1.5$  au,  $V_2 = 0.5$  au,  $V_3 = 2.5$  au,  $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$  et  $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$  (au : unité atomique). Le cas adiabatique fort et le cas seul ainsi que le cas adiabatique faible et exact sont confondus sur les graphiques.

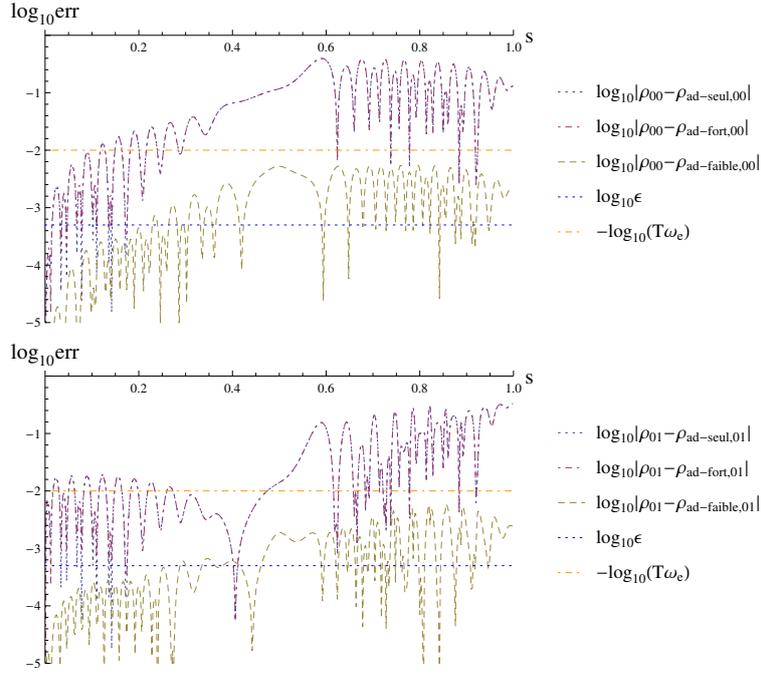


FIGURE 2.6 – Comparaison de l'évolution de l'erreur logarithmique des approximations adiabatiques seul, fort et faible avec la dynamique exacte de la population de l'état 0 du qubit et de la cohérence. Toutes les conditions sont remplies pour être dans le régime adiabatique faible avec  $\hbar\omega_e = 0.5$  au,  $r_{\max} = 1$  au,  $r_{\min} = 0.5$  au,  $V_0 = 3$  au,  $V_1 = 1.5$  au,  $V_2 = 0.5$  au,  $V_3 = 2.5$  au,  $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$  et  $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$  (au : unité atomique).

$\vec{B}(s) = \vec{B}_{\text{contrôle}}(s) + \vec{B}_{\text{Zeeman}}$ , l'Hamiltonien du spin contrôlé est

$$H_S(s) = \vec{B}(s) \cdot \vec{S} \quad (2.221)$$

$$= \frac{\hbar}{2} (B_x(s)\sigma_x + B_y(s)\sigma_y + B_z(s)\sigma_z) \quad (2.222)$$

avec  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  où  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  sont les matrices de Pauli. Le reste de la chaîne correspond à l'environnement  $\mathcal{E}$  et est décomposé en demi-chaînes telles que l'espace de Hilbert total soit  $\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \mathcal{H}_{\mathcal{E}_g} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}_d}$  avec  $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_{g/d}} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$  l'espace de Hilbert de la demi-chaîne à gauche et de la demi-chaîne à droite du spin contrôlé. L'environnement est gouverné par l'Hamiltonien

$$H_{\mathcal{E}} = H_C \otimes I^{\otimes N} + I^{\otimes N} \otimes H_C \quad (2.223)$$

avec

$$H_C = \sum_{n=1}^N I^{\otimes(n-1)} \otimes \vec{B}_{\text{Zeeman}} \cdot \vec{S} \otimes I^{\otimes(N-n)} - J \sum_{n=1}^{N-1} I^{\otimes(n-1)} \otimes \vec{S} \odot \vec{S} \otimes I^{\otimes(N-n-1)} \quad (2.224)$$

où  $I$  correspond à l'opérateur identité,  $J$  est la constante de couplage entre les spins et  $\vec{S} \odot \vec{S} = \sum_{i=x,y,z} S_i \otimes S_i$ . L'interaction entre le spin de contrôle et l'environnement est

$$V_{S-\mathcal{E}} = -J\vec{S} \odot \left( I^{\otimes(N-1)} \otimes \vec{S} \otimes I^{\otimes N} + I^{\otimes N} \otimes \vec{S} \otimes I^{\otimes(N-1)} \right) \quad (2.225)$$

où  $V_{S-\mathcal{E}} \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ . La constante de couplage est le paramètre de perturbation  $J \ll 1$ .

Le système est caractérisé par l'équation aux valeurs propres

$$H_S \zeta_a = \mu_a \zeta_a \quad \text{avec } a = 0, 1 \quad (2.226)$$

En calculant le déterminant de  $H_{\mathcal{S}}$ , et en posant  $B(s) = \|\vec{B}(s)\|$ ,  $\theta(s) = \arccos \frac{B_z(s)}{B(s)}$  et  $\varphi(s) = \arctan \frac{B_y(s)}{B_x(s)}$ , nous trouvons les valeurs propres et les vecteurs propres suivants

$$\mu_0(s) = -\frac{\hbar}{2}B(s) \quad (2.227)$$

$$\mu_1(s) = \frac{\hbar}{2}B(s) \quad (2.228)$$

$$\zeta_0(s) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta(s)}{2} \\ e^{i\varphi(s)} \cos \frac{\theta(s)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.229)$$

$$\zeta_1(s) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi(s)} \cos \frac{\theta(s)}{2} \\ \sin \frac{\theta(s)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.230)$$

Considérons que l'environnement ne contienne que 6 spins, soit trois à gauche et trois à droite. Nous notons  $\xi_{ijk} = |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle$  avec  $i, j, k = 0, 1$  et  $|i\rangle$  l'état propre d'un spin isolé. Les valeurs propres et vecteurs propres à l'ordre 1 sont

$$\nu_{(000)} = -3\frac{\hbar\omega_e}{4} - J\frac{\hbar^2}{2} + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.231)$$

$$\nu_{(100)-(001)} = -\frac{\hbar\omega_e}{4} + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.232)$$

$$\nu_{(001)+(010)+(100)} = -\frac{\hbar\omega_e}{4} - J\frac{\hbar^2}{2} + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.233)$$

$$\nu_{(001)-2(010)+(100)} = -\frac{\hbar\omega_e}{4} + J\hbar^2 + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.234)$$

$$\nu_{(110)-(011)} = \frac{\hbar\omega_e}{4} + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.235)$$

$$\nu_{(011)+(101)+(110)} = \frac{\hbar\omega_e}{4} - J\frac{\hbar^2}{2} + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.236)$$

$$\nu_{(011)-2(101)+(110)} = \frac{\hbar\omega_e}{4} + J\hbar^2 + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.237)$$

$$\nu_{(111)} = \frac{3\hbar\omega_e}{4} - J\frac{\hbar^2}{2} + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.238)$$

lesquels sont associés aux vecteurs propres

$$\xi_{a(ijk)+b(lmn)+c(opq)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (a\xi_{ijk} + b\xi_{lmn} + c\xi_{opq}) \quad (2.239)$$

Le contrôle est fixé par la variation suivante des paramètres de contrôle

$$B(s) = B_0 \left(1 - e^{-(s-0.5)^2/\Delta s^2}\right) + B_{\min} \quad (2.240)$$

$$\theta(s) = \pi(1 - \sin(\pi s)) \quad (2.241)$$

$$\varphi(s) = 2\pi s \quad (2.242)$$

### Transport adiabatique

Nous supposons que la chaîne est initialement dans l'état  $\phi_{0,a_g a_d}$  où  $a_g, a_d \in \{(000), (100) - (001), \dots, (011) - 2(101) + (110), (111)\}$  correspondant aux états gauches et droits de la chaîne. Le transport adiabatique de la matrice densité pour  $\mathcal{S}$  seul est

$$\rho_{ad-seul}(s) = |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| \quad (2.243)$$

$\alpha$	$n_\alpha$
(111)	-1
(110) - 2(101) + (011)	$-\frac{2}{3}$
(110) + (101) + (011)	$-\frac{1}{3}$
(110) - (011)	0
(100) - (001)	0
(100) + (010) + (001)	$\frac{1}{3}$
(100) - 2(010) + (001)	$\frac{2}{3}$
(000)	1

TABLE 2.1 – Valeurs du nombre  $n_\alpha$  caractérisant le couplage dans la demi chaîne dans l'état  $\xi_\alpha$ .

Si la dynamique de la chaîne est fortement adiabatique, nous devons connaître les coefficients de couplage

$$\langle\langle \zeta_a \otimes \xi_{\alpha_g \alpha_d} | V_{S-\varepsilon} | \zeta_b \otimes \xi_{\alpha_g \alpha_d} \rangle\rangle = -J \langle \zeta_a | \vec{S} | \zeta_b \rangle \cdot \langle \xi_{\alpha_g \alpha_d} | (\vec{S}^{g3} + \vec{S}^{d1}) | \xi_{\alpha_g \alpha_d} \rangle \quad (2.244)$$

$$= -J \langle \zeta_a | S_z | \zeta_b \rangle \left( \frac{\hbar}{2} (n_{\alpha_g} + n_{\alpha_d}) \right) \quad (2.245)$$

$$= -J \langle \zeta_a | S_z | \zeta_b \rangle \frac{\hbar}{2} n_{\alpha_g \alpha_d} \quad (2.246)$$

avec  $\vec{S}^{g3}$  le vecteur de spin agissant sur le troisième spin à gauche et  $\vec{S}^{d1}$  celui agissant sur le premier spin à droite. Montrons un exemple de calcul. Comme l'environnement ne contient que les termes  $\sigma_z$ , il en est de même pour le système par la présence du produit scalaire.

$$\langle \zeta_0 | S_z | \zeta_0 \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta(s)}{2} & e^{-i\varphi(s)} \cos \frac{\theta(s)}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta(s)}{2} \\ e^{i\varphi(s)} \cos \frac{\theta(s)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.247)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta(s)}{2} & e^{-i\varphi(s)} \cos \frac{\theta(s)}{2} \\ -e^{i\varphi(s)} \cos \frac{\theta(s)}{2} & \frac{\theta(s)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.248)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \sin^2 \frac{\theta(s)}{2} - \cos^2 \frac{\theta(s)}{2} \quad (2.249)$$

$$= -\frac{\hbar}{2} \cos \theta(s) \quad (2.250)$$

De la même manière nous obtenons

$$\langle \zeta_1 | S_z | \zeta_1 \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \theta(s) \quad (2.251)$$

$$\langle \zeta_1 | S_z | \zeta_0 \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin \theta(s) \quad (2.252)$$

Exemple de calcul des  $n_\alpha$  (équation 2.246)

$$\langle (100) + (010) + (001) | \frac{S_z^{g3}}{3} | (100) + (010) + (001) \rangle + \langle (100) + (010) + (001) | \frac{S_z^{d1}}{3} | (100) + (010) + (001) \rangle \quad (2.253)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{3} (\langle (100) + (010) + (001) | (100) + (010) - (001) \rangle + \langle (100) + (010) + (001) | - (100) + (010) + (001) \rangle) \quad (2.254)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \frac{2}{3} \quad (2.255)$$

De la même manière nous obtenons la table 2.1

A l'aide de ces données, le transport adiabatique de la matrice densité est (équation 2.57 et 2.66)

$$\rho_{ad-fort} = \rho_{0,\alpha_g\alpha_d}(s) \quad (2.256)$$

$$\begin{aligned} \rho_{ad-fort}(s) = & |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| + \frac{-J\langle\zeta_1(s)|S_z|\zeta_0(s)\rangle\frac{\hbar}{2}n_{\alpha_g\alpha_d}}{\mu_0 - \mu_1 - J\langle\zeta_0(s)|S_z|\zeta_0(s)\rangle\frac{\hbar}{2}n_{\alpha_g\alpha_d}} |\zeta_1(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| \\ & + \frac{-J\langle\zeta_0(s)|S_z|\zeta_1(s)\rangle\frac{\hbar}{2}n_{\alpha_g\alpha_d}}{\mu_0 - \mu_1 - J\langle\zeta_0(s)|S_z|\zeta_0(s)\rangle\frac{\hbar}{2}n_{\alpha_g\alpha_d}} |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_1(s)| + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T\epsilon}, \epsilon^2\right)\right) \end{aligned} \quad (2.257)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_{ad-fort}(s) = & |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| + \frac{J\hbar}{4}n_{\alpha_g\alpha_d} \frac{\sin\theta(s)}{-B(s) + \frac{J\hbar}{4}n_{\alpha_g\alpha_d}\cos\theta(s)} (|\zeta_1(s)\rangle\langle\zeta_0(s)| + |\zeta_0(s)\rangle\langle\zeta_1(s)|) \\ & + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{1}{T\epsilon}, \epsilon^2\right)\right) \end{aligned} \quad (2.258)$$

Si la dynamique est faiblement adiabatique, le transport adiabatique de la matrice densité est (équation 2.109)

$$\rho_{ad-faible} = \mathfrak{A} \mathfrak{D} \left[ \overleftarrow{\mathbb{T}} e^{-i\hbar^{-1}T \int_0^s E_{\alpha_g\alpha_d}^{(1)}(\sigma) d\sigma} \overrightarrow{\mathbb{T}} e^{-\int_0^s A_{\alpha_g\alpha_d}^{(1)}(\sigma) d\sigma} \right] \rho_{0,\alpha_g\alpha_d}(s) \quad (2.259)$$

avec

$$E_{\alpha_g\alpha_d}^{(1)} = \lambda_{0\alpha_g\alpha_d} |\zeta_{0\alpha_g\alpha_d}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{0\alpha_g\alpha_d}^{(1)}| + \lambda_{1\alpha_g\alpha_d} |\zeta_{1\alpha_g\alpha_d}^{(1)}\rangle\langle\zeta_{1\alpha_g\alpha_d}^{(1)}| \quad (2.260)$$

$\eta^{(1)} = 0$  car  $\xi_\beta$  est indépendant de  $s$ .

$$A_{\alpha_g\alpha_d}^{(1)} = \sum_{b,c=0}^1 \langle\zeta_{b\alpha_g\alpha_d}^{(1)}|\zeta_{c\alpha_g\alpha_d}^{(1)}\rangle \langle\zeta_{c\alpha_g\alpha_d}^{(1)}|\zeta_{b\alpha_g\alpha_d}^{(1)}\rangle \quad (2.261)$$

où

$$\lambda_{0\alpha_g\alpha_d} = -\frac{\hbar}{2}B + \nu_{\alpha_g} + \nu_{\alpha_d} + \frac{J\hbar^2}{4}n_{\alpha_g\alpha_d}\cos\theta + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.262)$$

$$\lambda_{1\alpha_g\alpha_d} = \frac{\hbar}{2}B + \nu_{\alpha_g} + \nu_{\alpha_d} - \frac{J\hbar^2}{4}n_{\alpha_g\alpha_d}\cos\theta + \mathcal{O}(J^2) \quad (2.263)$$

et

$$\zeta_{0\alpha_g\alpha_d}^{(1)} = \zeta_0 - J \frac{\left(-\frac{\hbar}{2}\frac{\sqrt{B^2-B_z^2}}{B}\right) \left(\frac{\hbar}{2}n_{\alpha_g\alpha_d}\right)}{-\hbar B - J\left(\frac{\hbar B_z}{2B}\right) \left(\frac{\hbar}{2}n_{\alpha_g\alpha_d}\right)} \zeta_1 \quad (2.264)$$

$$= \zeta_0 - \frac{J\hbar}{4}n_{\alpha_g\alpha_d} \frac{\sin\theta}{B - J\frac{\hbar}{4}n_{\alpha_g\alpha_d}\cos(\theta)} \zeta_1 \quad (2.265)$$

$$\zeta_{1\alpha_g\alpha_d}^{(1)} = \zeta_1 + \frac{J\hbar}{4}n_{\alpha_g\alpha_d} \frac{\sin\theta}{B - J\frac{\hbar}{4}n_{\alpha_g\alpha_d}\cos(\theta)} \zeta_0 \quad (2.266)$$

### Régime adiabatique fort

Nous voulons que les hypothèses du théorème adiabatique fort soient remplies. Pour ceci nous choisissons les paramètres tels que  $T = 5 \times 10^3$  au,  $\tau_S = \inf_{s \in [0,1]} \frac{\hbar}{|\mu_1(s) - \mu_0(s)|} = 1.5$  au et  $\theta^J = \frac{\hbar}{\epsilon \|\mathbb{V}_{S-\mathcal{E}}\|} = 2 \times 10^2$  au (au : unité atomique). Nous sommes bien dans les conditions  $T \gg \theta^J \gg \tau_S$ .

La figure 2.7 montre l'évolution de la population de l'état 0  $\langle\zeta_0(s)|\rho(s)|\zeta_0(s)\rangle$  et de la cohérence  $|\langle\zeta_0(s)|\rho(s)|\zeta_1(s)\rangle|$  du spin contrôlé. La figure suivante 2.8 présente la comparaison des erreurs adiabatique seul, adiabatique fort et adiabatique faible avec la dynamique exacte<sup>7</sup>. Sur la figure 2.7, les régimes adiabatiques ne sont pas distinguables comme toutes les courbes sont superposées. Nous avons donc l'impression que le régime adiabatique fort semble ne pas être présent pour ce système. Cependant lorsque nous regardons le graphique des erreurs 2.8, nous voyons que la formule du transport adiabatique fort induit, en général, des erreurs plus faibles.

7. pour réaliser le calcul exact, nous avons utilisé la méthode des opérateurs fractionnés.

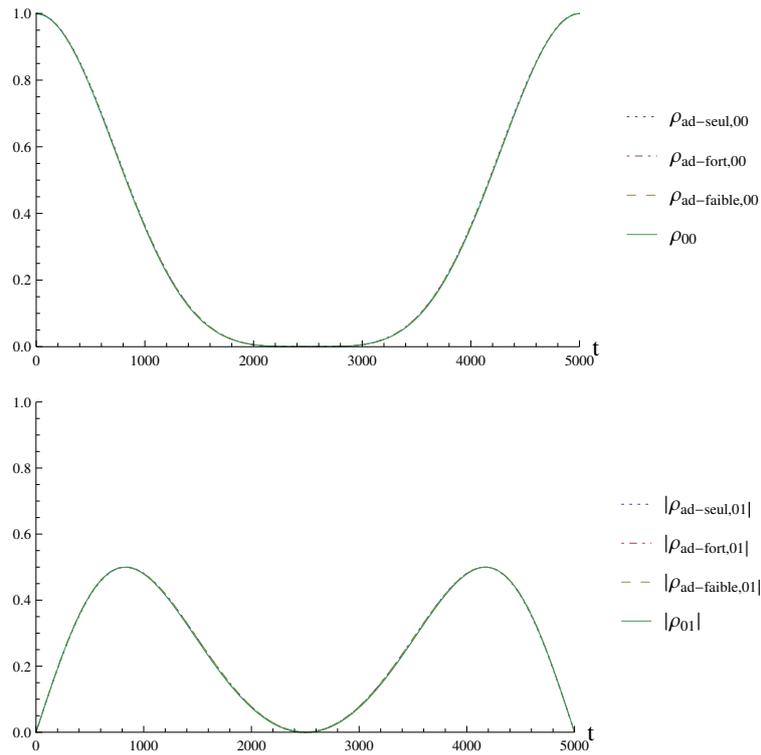


FIGURE 2.7 – Evolution de la population de l'état 0 du spin  $\rho_{\bullet,00} = \langle \zeta_0(s) | \rho_{\bullet}(s) | \zeta_0(s) \rangle$  et de la cohérence  $\rho_{\bullet,01} = |\langle \zeta_0(s) | \rho_{\bullet}(s) | \zeta_1(s) \rangle|$  du qubit contrôlé pour la dynamique exacte ( $\bullet = \emptyset$ ), la formule de transport adiabatique fort ( $\bullet = ad-fort$ ) et la formule de transport adiabatique faible ( $\bullet = ad-faible$ ). Toutes les conditions sont remplies pour être dans le régime adiabatique fort avec  $\hbar w_e = 2$  au,  $B_0 = 1$  au,  $B_{\min} = 0.67$  au et  $J = 2 \times 10^{-2}$  (au : unité atomique). Toutes les courbes sont confondues.

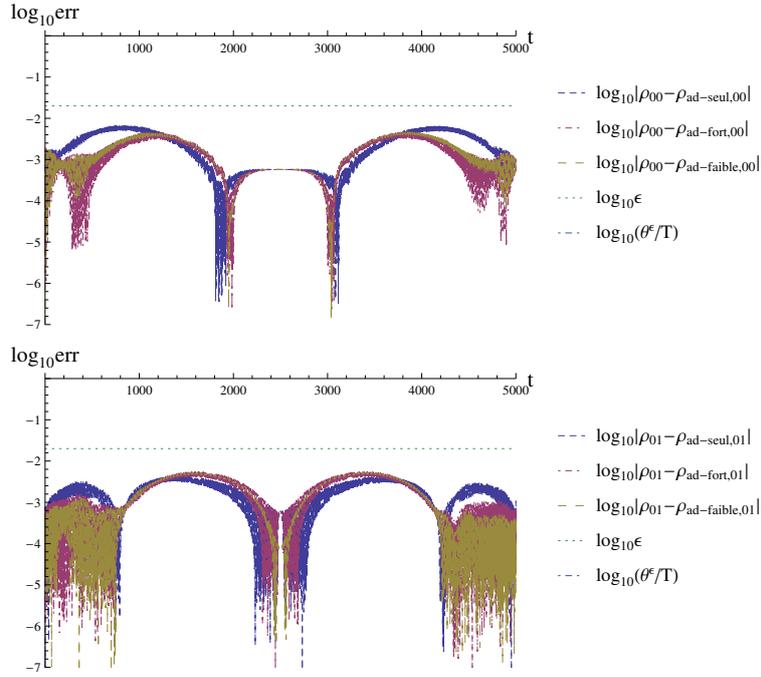


FIGURE 2.8 – Comparaison des évolutions de l’erreur logarithmique des approximations adiabatiques seul, fort et faible avec la dynamique exacte de la population de l’état 0 du qubit et de la cohérence. Toutes les conditions sont remplies pour être dans le régime adiabatique fort avec  $\hbar w_e = 2$  au,  $B_0 = 1$  au,  $B_{\min} = 0.67$  au et  $J = 2 \times 10^{-2}$  (au : unité atomique).

### Régime adiabatique faible

Nous cherchons à nous placer dans les conditions du régime adiabatique faible. Pour ceci nous posons les paramètres tels que  $T = 50$  au,  $\tau_S = \inf_{s \in [0,1]} \frac{\hbar}{|\mu_1(s) - \mu_0(s)|} = 10^2$  au,  $\theta^J = \frac{\hbar}{\epsilon \|V_{S-\epsilon}\|} = 10^3$  au et  $\tau_{\mathcal{E}} = \frac{1}{w_e} = 0.5$  au (au : unité atomique). Nous sommes donc bien dans les conditions  $T \gg \tau_{\mathcal{E}}$  et  $\theta^J \sim \tau_S \ll T$ .

La figure 2.9 montre l’évolution de la population de l’état 0  $\langle \zeta_0(s) | \rho(s) | \zeta_0(s) \rangle$  et de la cohérence  $|\langle \zeta_0(s) | \rho(s) | \zeta_1(s) \rangle|$  du spin contrôlé. La figure suivante 2.10 présente la comparaison des erreurs adiabatique seul, adiabatique fort et adiabatique faible avec la dynamique exacte. Les erreurs de la prédiction de la formule du transport adiabatique seul sont très grandes en accord avec le très faible gap entre les deux valeurs propres de  $H_S(s)$  durant la dynamique. La formule du transport adiabatique faible fournit une très bonne approximation avec une erreur plus faible que  $\frac{\tau_{\mathcal{E}}}{T} = 10^{-2}$  en accord avec l’erreur de la formule du transport adiabatique  $\max(\frac{\tau_{\mathcal{E}}}{T}, \epsilon^2)$ .

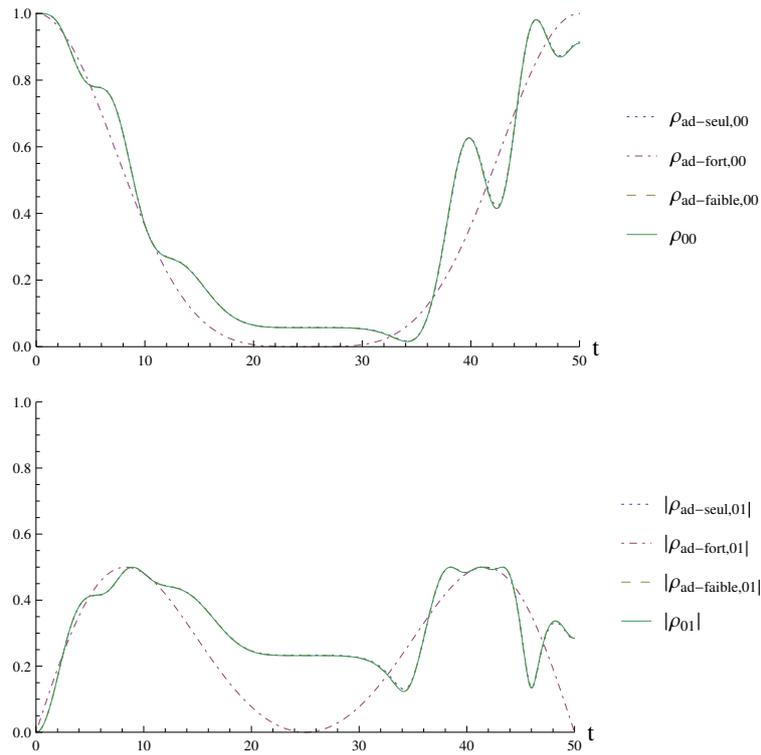


FIGURE 2.9 – Evolution de la population de l'état 0 du spin  $\rho_{\bullet,00} = \langle \zeta_0(s) | \rho_{\bullet}(s) | \zeta_0(s) \rangle$  et de la cohérence  $\rho_{\bullet,01} = |\langle \zeta_0(s) | \rho_{\bullet}(s) | \zeta_1(s) \rangle|$  du qubit contrôlé pour la dynamique exacte ( $\bullet = \emptyset$ ), la formule de transport adiabatique fort ( $\bullet = ad - fort$ ) et la formule de transport adiabatique faible ( $\bullet = ad - faible$ ). Toutes les conditions sont remplies pour être dans le régime adiabatique faible avec  $\hbar w_e = 2$  au,  $B_0 = 1$  au,  $B_{\min} = 10^{-2}$  au et  $J = 2 \times 10^{-3}$  (au : unité atomique). Le cas adiabatique fort et le cas seul ainsi que le cas adiabatique faible et exact sont confondus sur le graphique.

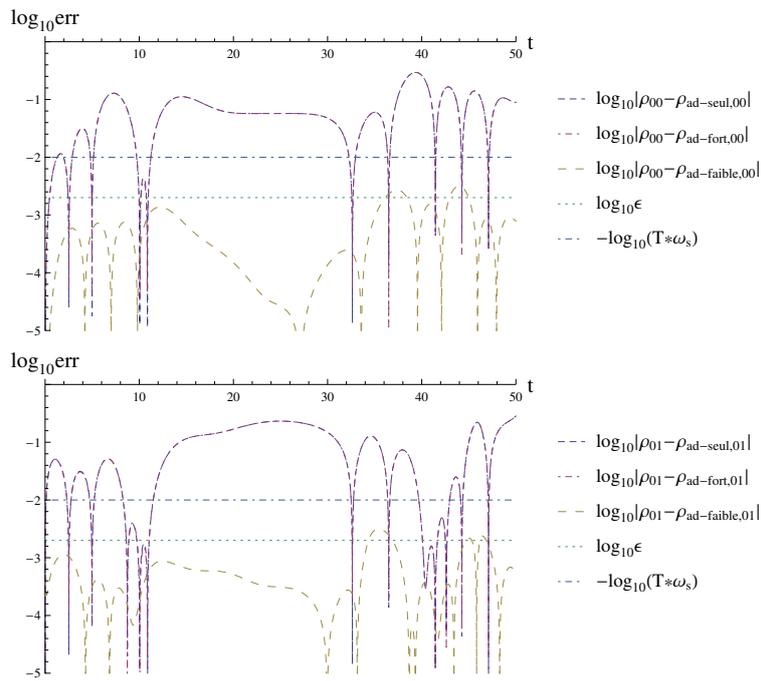


FIGURE 2.10 – Comparaison des évolutions de l’erreur logarithmique des approximations adiabatiques seul, fort et faible avec la dynamique exacte de la population de l’état 0 du qubit et de la cohérence. Toutes les conditions sont remplies pour être dans le régime adiabatique faible avec  $\hbar\omega_e = 2$  au,  $B_0 = 1$  au,  $B_{\min} = 10^{-2}$  au et  $J = 2 \times 10^{-3}$  (au : unité atomique).

# Conclusion

Nous nous sommes intéressés aux différents effets dus au couplage. Dans la chaîne de spins, celui-ci peut apparaître de différentes manières et nous avons choisi de regarder trois cas : le couplage d'Heisenberg, d'Ising-Z et d'Ising-X. Nous avons vu que sur la population, le couplage pouvait entraîner : aucune modification, variation de la vitesse d'oscillation et relaxation de la population qui se rapproche ou peut atteindre l'équiprobabilité. Pour la cohérence, les différents effets possibles sont : aucun effet, oscillations périodiques, augmentation ou diminution de la cohérence, et chute de la cohérence se rapprochant et pouvant atteindre 0. Le couplage d'Heisenberg est un couplage isotrope, il permet d'obtenir un même état pour deux spins voisins. Ainsi si les spins sont initialement dans le même état, il n'y a pas d'effet du couplage sur la population et sur la cohérence, contrairement au cas où les spins sont dans des états différents. Le couplage Ising-Z n'induit aucun effet sur la population. Il y a juste des oscillations de cohérence. Ce phénomène est purement quantique. Le couplage Ising-X est le couplage qui induit le plus de désordre. Quelque soit l'état initial des spins, ceux-ci vont s'intriquer.

Nous avons ensuite complexifié le système en nous intéressant au contrôle d'un système bipartite composé d'un système  $\mathcal{S}$  et d'un environnement  $\mathcal{E}$ . L'interaction entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$  est perturbative. Différents régimes adiabatiques ont été mis en avant : un régime adiabatique très fort, un régime adiabatique fort et un régime adiabatique faible. Pour le premier, le système et l'environnement sont fortement adiabatique, pour le second l'environnement est fortement adiabatique mais pas le système, et dans le dernier les temps caractéristiques du système et de l'environnement sont de l'ordre de grandeur de la durée du contrôle. Nous avons montré que la phase géométrique à valeurs opérateurs comme définie par [91, 95, 25, 2, 100, 102] est exhibée par les systèmes quantiques bipartites dans une approximation adiabatique avec couplage perturbatif. Ce résultat reste valide si le système bipartite est constitué d'un petit sous-système et d'un grand environnement (chaîne de spins). Néanmoins, pour un très grand environnement (un réservoir) les hypothèses du théorème adiabatique de non résonance et de non quasi-résonance entre les transitions de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{E}$  peuvent ne pas être satisfaites car le spectre d'un réservoir est assimilé à un continuum [19]. Ces phases géométriques adiabatiques à valeurs opérateurs surviennent quand l'environnement est faiblement adiabatique (le cas favorable pour un contrôle quantique du sous-système) mais avec un sous-système non nécessairement adiabatique par rapport au contrôle et aux effets de l'environnement. Le générateur de phase dynamique à valeurs opérateurs, est une sorte d'hamiltonien effectif représentant le système habillé par les états de l'environnement. Deux exemples ont été donnés : le contrôle d'un qubit atomique et le contrôle d'un spin au milieu d'une chaîne, et permettent de confirmer la présence des différents régimes adiabatiques. Les hypothèses perturbatives restreignent un peu le champ d'applications des présents résultats. Il serait intéressant de prouver que le transport adiabatique de la matrice densité exhibe aussi une phase géométrique à valeurs opérateurs avec une forte interaction entre les deux parties du système bipartite.

Nous connaissons maintenant les effets possibles du couplage sur un système quantique et nous disposons d'une méthode de représentation du contrôle adiabatique (à l'aide du transport adiabatique des matrices densités exhibant des phases à valeurs opérateurs). Cependant les systèmes quantiques ne sont pas isolés et sont plongés dans des environnements pouvant les perturber ou perturber le contrôle. C'est ce que nous allons étudier dans la partie suivante.



## Deuxième partie

# Transmission du désordre de l'environnement vers le système



# Introduction

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à l'évolution de systèmes dynamiques coupés de l'extérieur, i.e. aucun processus dynamique ne vient perturber le contrôle. Un problème clé est la compréhension des effets de la perturbation de l'environnement agissant sur la totalité du système quantique bipartite. Ils peuvent produire des conséquences sur chaque composant du système et induire de la décohérence, de la relaxation et des processus chaotiques [19, 51, 52, 80, 111, 22, 106, 20]. De manière à comprendre ces problèmes, nous considérerons dans cette partie un ensemble de spins (des spins sans interaction) et une chaîne de spins, i.e. un ensemble de  $N$  spins  $\frac{1}{2}$  deux à deux couplés (plus proches voisins) de manière à former une ligne. Les couplages seront modélisés par l'interaction d'Heisenberg, d'Ising-Z ou d'Ising-X, lesquels permettent une "cohésion" à l'intérieur du système dynamique. Les processus dynamiques sur les systèmes quantiques (ensemble de spins et chaîne de spins) seront induits par des trains de frappes ultra-courtes (pic de Dirac) sur les spins afin de s'intéresser aux dynamiques discrètes.

Les processus de décohérence de chaînes de spins frappés régulièrement ont été étudiés par plusieurs auteurs [73, 74, 75, 76, 54, 12, 71]. Dans ces études, les processus de frappes étaient réguliers. Dans la présente partie, nous considérerons des trains de frappes irréguliers, i.e. la force et le retard des différentes frappes sont modifiés au cours du temps, lesquels peuvent potentiellement induire des comportements dynamiques plus riches dans les systèmes quantiques.

La motivation pour étudier les systèmes quantiques frappés irrégulièrement est que dans certaines situations, les trains de frappes adressés aux spins peuvent traverser un environnement (que nous considérerons comme classique) avant d'atteindre les spins cibles. La perturbation peut atténuer les forces des frappes et/ou les retarder. Comme chaque train de frappes peut être irrégulier, les spins peuvent sentir des trains différents. L'ensemble de trains de frappes est appelé le "bain de frappes", assimilant le modèle à un système quantique en contact avec une sorte d'environnement classique. Les perturbations seront décrites par différents systèmes dynamiques classiques. Nous considérerons des dynamiques classiques académiques de manière à disposer de toutes les informations les concernant et de s'affranchir des difficultés à simuler le bruit. L'étude d'un environnement plus réaliste fera l'objet d'analyses futures.

Le but de ce chapitre est d'interpréter les origines des différentes évolutions d'un système de spins frappés et de voir les effets du couplage (comparaison entre un ensemble de spins et une chaîne de spins), mais aussi de voir la transmission du désordre dans une chaîne de spins frappés. Quand les frappes deviennent différentes (à cause de la perturbation choisie), du désordre apparaît dans le bain de frappes classiques. Ce désordre est ensuite transmis aux systèmes de spins par les frappes que chaque spin reçoit. De plus, le couplage est la source de la transmission du désordre le long de la chaîne de spins. Il induit un plus grand désordre dans la chaîne. Généralement le désordre induit des processus de décohérence et de relaxation de la population vers la distribution microcanonique. En opposition avec ces analyses, il est important de poser la question de la possibilité de conserver de la cohérence, de l'ordre dans la chaîne de spins et dans l'ensemble de spins en dépit du désordre des frappes. Toute cette analyse peut être très compliquée à cause de l'interaction entre les spins, de l'intrication et de la superposition d'états.

Cette partie est organisée comme suit. Le premier chapitre présente les modèles d'un système quantique frappé, dont les frappes sont perturbées par un environnement classique. Nous verrons un cas particulier de système frappé au travers d'un phénomène très intéressant qui est l'anholonomie de Cheon. Le chapitre suivant est dédié au comportement général d'une chaîne de spins frappés. Nous

analyserons l'entropie, la cohérence et la population de manière à comprendre comment le désordre du bain de frappes est transmis aux systèmes quantiques et ses conséquences sur la chaîne de spins par rapport au couplage. Nous regarderons aussi par quels moyens (en agissant sur le champ de contrôle), il est possible de ne pas induire de transmission du désordre du bain de frappes au système quantique. Dans ce chapitre, nous considérerons un ensemble de 1000 spins et une chaîne de 10 spins, mais nous verrons que les résultats ne dépendent pas du nombre de spins dans la chaîne.

# Chapitre 3

## Dynamique de spins frappés

Dans ce chapitre nous nous proposons de donner les équations permettant d'analyser le comportement de systèmes de spins frappés [8, 13].

### 3.1 Système de spins frappés

Considérons un ensemble de  $N$  spins sans aucune interaction entre eux. Nous supposons qu'à l'instant initial chaque spin est dans un état  $|\psi_0\rangle$  qui peut être un état propre ou une superposition d'états. À  $t > 0$ , les spins sont soumis à des trains d'impulsions magnétiques ultra-courtes (des pics de Dirac). Avant d'atteindre les spins, les trains passent dans un environnement classique modifiant à la fois la force et le retard de chaque frappe. Ainsi, chaque spin peut voir un train de frappes différent comme l'illustre la figure 3.1. Nous appellerons bain de frappes, le bain constitué par l'environnement classique et les frappes.

Soient  $\lambda_n^{(i)}$  et  $\tau_n^{(i)}$  respectivement la force et le retard de la  $i$ -ième frappe agissant sur le  $n$ -ième spin et  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$  la fréquence de frappe. L'Hamiltonien quantique du  $n$ -ième spin frappé est

$$H_n(t) = H_0 + \hbar W \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_n^{(i)} \delta(t - iT - \tau_n^{(i)}) \quad (3.1)$$

avec  $H_0$  l'Hamiltonien d'un seul spin,  $\delta(t)$  la distribution de Dirac et  $W$  l'opérateur de frappes choisi comme un projecteur de rang un. Ce dernier opérateur est relié à la direction des frappes  $|w\rangle = \cos(\vartheta)|\uparrow\rangle + \sin(\vartheta)|\downarrow\rangle$  par la relation  $W = |w\rangle\langle w|$ . En posant  $\varphi_n^{(i)} = w_0 \tau_n^{(i)}$  le retard de frappe angulaire, nous pouvons considérer l'Hamiltonien associé au temps réduit  $\theta = \frac{2\pi t}{T}$

$$H_n(\theta) = H_0 + \hbar w_0 W \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_n^{(i)} \delta(\theta - 2i\pi + \varphi_n^{(i)}) \quad (3.2)$$

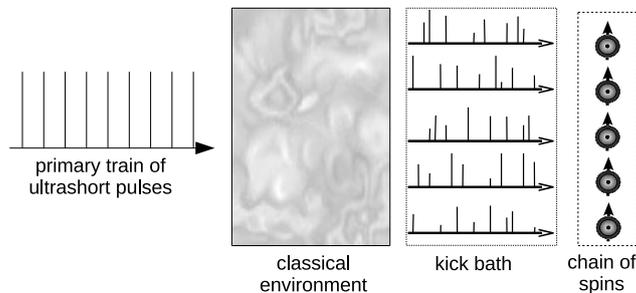


FIGURE 3.1 – Représentation schématique d'un système quantique (ici une chaîne de spins) soumis à des trains d'impulsions magnétiques. L'ensemble des frappes est perturbé par un environnement classique.

À partir de cette équation, il est possible de déterminer l'opérateur de monodromie (l'opérateur d'évolution de  $\frac{2i\pi}{w_0}$  à  $\frac{2(i+1)\pi}{w_0}$  qui est un opérateur unitaire) exact du système frappé pour le  $n$ -ième spin et à la  $i$ -ième frappe

$$U_n^{(i)} = e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}(2\pi - \varphi_n^{(i)})} [I + (e^{-i\lambda_n^{(i)}} - 1)W] e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}\varphi_n^{(i)}} \quad (3.3)$$

La démonstration se trouve dans [99] et est présentée en annexe A.

Dans ce que nous venons d'écrire, les spins ne sont pas couplés entre eux. Nous supposons maintenant qu'il existe un couplage de plus proches voisins. L'Hamiltonien 3.2 devient

$$H(\theta) = \sum_{n=1}^{N-1} H_{I_n} + \sum_{n=1}^N \left( H_{0_n} + I^{\otimes(n-1)} \otimes \hbar W \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_n^{(i)} \delta(\theta - 2i\pi + \varphi_n^{(i)}) \otimes I^{\otimes(N-n)} \right) \quad (3.4)$$

avec  $H_{0_n}$  l'Hamiltonien du  $n$ -ième spin et  $H_{I_n}$  l'Hamiltonien d'interaction de plus proches voisins du  $n$ -ième couple de spins. De cette équation et en se basant sur la méthode détaillée en annexe A nous obtenons l'opérateur de monodromie de la  $i$ -ième frappe pour les spins organisés du plus petit retard ( $n = 1$ ) au plus grand ( $n = N$ )<sup>1</sup>

$$U^{(i)} = e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}(2\pi - \varphi_N^{(i)})} \prod_{n=1}^{N-1} \left[ I^{\otimes(N-n)} \otimes \left( I + (e^{-i\lambda_{N-n+1}^{(i)}} - 1)W \right) \right. \\ \left. \otimes I^{\otimes(n-1)} e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}(\varphi_{N-n+1}^{(i)} - \varphi_{N-n}^{(i)})} \right] I^{\otimes(N-1)} \otimes \left( I + (e^{-i\lambda_1^{(i)}} - 1)W \right) e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}\varphi_1^{(i)}} \quad (3.5)$$

où  $H_{0,I} = \sum_{n=1}^N H_{0_n} + \sum_{n=1}^{N-1} H_{I_n}$ .

Dans cette dernière équation et dans l'équation 3.3, nous voyons clairement que les deux opérateurs de monodromie sont  $2\pi$  périodiques par rapport à  $\lambda$ . Ainsi, le couple  $(\lambda_n^{(i)}, \varphi_n^{(i)})$  définit un point sur le tore  $\mathbb{T}^2$  qui joue le rôle d'espace des phases classique pour le train de frappes.

Le modèle de spins frappés est bien équivalent à un spin dans un champ magnétique impulsionnel. L'Hamiltonien d'un spin frappé est

$$H = \frac{\hbar w_1}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + \hbar|w\rangle\langle w| \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_n^{(i)} \delta(t - iT - \tau_n^{(i)}) \quad (3.6)$$

$$|w\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.7)$$

$$|w\rangle\langle w| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta} \\ \bar{\alpha}\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \begin{pmatrix} \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} & Re(\bar{\alpha}\beta) - iIm(\bar{\alpha}\beta) \\ Re(\bar{\alpha}\beta) + iIm(\bar{\alpha}\beta) & -\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2} + \left( |\alpha|^2 - \frac{1}{2} \right) \sigma_z + Re(\bar{\alpha}\beta) \sigma_x + Im(\bar{\alpha}\beta) \sigma_y \quad (3.10)$$

Dans notre cas l'Hamiltonien vaut donc

$$H = \vec{B}(t) \cdot \vec{S} + f(t) \quad (3.11)$$

avec  $f(t) = \frac{\hbar w_1}{4} + \frac{\hbar}{2} \sum_i \lambda_n^{(i)} \delta(t - iT + \tau_n^{(i)})$  (induisant un changement de phase sans importance).

$$\vec{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{w_1}{4} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} Re(\bar{\alpha}\beta) \\ Im(\bar{\alpha}\beta) \\ |\alpha|^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_n^{(i)} \delta(t - iT + \tau_n^{(i)}) \quad (3.12)$$

1. les spins sont réorganisés après le tirage aléatoire pour aller du plus petit retard au plus grand

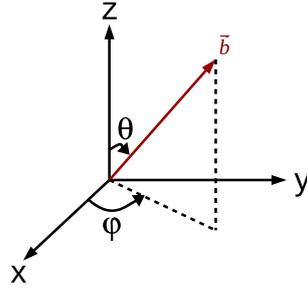


FIGURE 3.2 – Représentation schématique d'un repère orthonormé sphérique.

dont le premier terme correspond à un champ magnétique constant induisant un effet Zeeman, et le second est associé au champ de contrôle impulsif.

$$\vec{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{w_1}{2} \end{pmatrix} + \vec{b} \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_n^{(i)} \delta(t - iT + \tau_n^{(i)}) \quad (3.13)$$

avec  $\vec{b}$  le vecteur unitaire de la direction de polarisation du champ de contrôle.

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + b_z}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1 - b_z}{2}} e^{i \arctan \frac{b_y}{b_x}} \quad (3.14)$$

$$|w\rangle = \sqrt{\frac{1 + b_z}{2}} |\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{1 - b_z}{2}} e^{i \arctan \frac{b_y}{b_x}} |\downarrow\rangle \quad (3.15)$$

$$|w\rangle = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}} |\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} e^{i\varphi} |\downarrow\rangle \quad (3.16)$$

avec  $(\theta, \varphi)$  sont les directions de polarisation du champ de contrôle dans le repère 3.2.

L'analyse des systèmes frappés permet de mettre en avant plusieurs phénomènes intéressants dont l'un est l'anholonomie de Cheon.

## 3.2 Cyclicité des quasi-énergies

Le suivi d'une quasi-énergie lorsqu'un paramètre perturbatif varie continûment permet de mettre à jour un phénomène apparaissant dans des contextes adiabatiques : l'anholonomie de Cheon. Cet anholonomie utilise les quasi-énergies qui sont les valeurs propres de l'opérateur de monodromie. Il permet de changer de quasi-énergies en fin de période sans transition d'état. Une quasi-énergie est une sorte d'énergie du système habillé par les frappes. L'étude reprise ici a été réalisée dans les publications [99] et [68].

Nous devons considérer les états des quasi-énergies car nous ne pouvons pas faire du contrôle adiabatique avec les états d'énergie (à cause des frappes ultra-courtes qui sont des variations rapides). Alors que les états des quasi-énergies ne dépendent que des paramètres de contrôle évoluant lentement  $(\lambda, \varphi)$ , nous pouvons donc leur appliquer une approche adiabatique.

### 3.2.1 L'anholonomie de Cheon

Soit  $U_\lambda$  l'opérateur de monodromie pour une force de frappe  $\lambda$  et  $U_{\lambda_0}$  l'opérateur de monodromie pour la première force de frappe choisie  $\lambda_0$ .

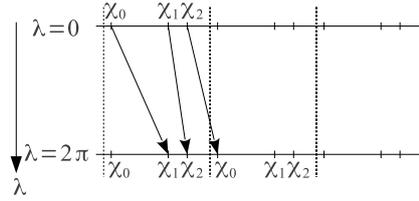


FIGURE 3.3 – Manifestation de l'anholonomie de Cheon. Le suivi continu d'une quasi-énergie en fonction d'un paramètre variant périodiquement permet de passer sur une autre quasi-énergie au bout d'une période de ce dernier. L'axe horizontal représente le spectre des quasi-énergies périodiques sur  $\mathbb{R}$ .

### Proposition 6. Anholonomie de Cheon

Soit un système caractérisé par l'ensemble des équations données dans la section précédente. Le seul paramètre variant est  $\lambda$ . L'espace des paramètres de contrôle est donc un cercle  $\mathbb{S}^1$ . Ce système possède un ensemble de quasi-énergies  $\{\chi_n(\lambda)\}_{n=0,\dots,N}$  que nous supposons non-dégénérées  $\forall \lambda$  avec  $N$  le nombre de quasi-énergies par cycle  $\frac{2\pi\hbar}{T}$  (le spectre de quasi-énergies étant cyclique, elles reviennent tous les  $\frac{2\pi\hbar}{T}$ ). Elles sont définies dans un espace de Hilbert pour lequel il faut d'une part, que  $|w\rangle$  ne soit pas vecteur propre de  $U_{\lambda_0}$  et d'autre part, il faut réduire l'espace de Hilbert en excluant les éventuels vecteurs propres de  $U_{\lambda_0}$  orthogonaux à  $|w\rangle$  (l'explication détaillée est donnée en annexe B). L'opérateur de frappe étant un projecteur, il vérifie  $W = W^2$ . Tout ceci permet d'obtenir la phénomène d'anholonomie de Cheon

$$\chi_n(\lambda_0 + 2\pi-) = \chi_{n+1}(\lambda_0) \quad \text{mod}(2\pi\hbar T^{-1}) \quad (3.17)$$

avec le signe moins signifiant par valeur inférieure. Ainsi lorsque nous suivons continûment  $\chi_n(\lambda)$  après un tour ( $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi$ )  $\chi_n$  est devenue  $\chi_{n+1}$ .

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \Delta\chi_n = \frac{2\hbar\pi}{T} \quad (3.18)$$

avec  $\Delta\chi_n = \chi_n(\lambda_0 + 2\pi-) - \chi_{n+1}(\lambda_0)$ .

Cette proposition se représente schématiquement par trois quasi-énergies par la figure 3.3. Lorsque  $\lambda$  varie de 0 à  $2\pi$ , la quasi-énergie varie de  $\chi_n$  à  $\chi_{n+1}$ . Dans notre exemple, il faut que  $\lambda$  varie de  $6\pi$  pour revenir à la quasi-énergie de départ. La mise en place des équations de cette anholonomie est réalisée en annexe B.

L'anholonomie de Cheon permettant de suivre les quasi-énergies et d'en changer au bout d'une période, il est intéressant de déterminer les groupes de quasi-énergies pouvant être adiabatiquement suivis. Si un croisement de quasi-énergies se produit, alors nous ne pouvons suivre que le groupe constitué des quasi-énergies se croisant et non une quasi-énergie seule.

### 3.2.2 Le spin

Considérons un système constitué d'un spin tel que l'Hamiltonien du système isolé soit  $H_0 = \frac{\hbar w_1}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$  avec un effet Zeeman pour lever la dégénérescence. Le spin est soumis à un opérateur de frappe dont la direction est

$$|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |c+id|^2}} (a|\uparrow\rangle + (c+id)|\downarrow\rangle) \quad (3.19)$$

Le calcul analytique de l'opérateur de monodromie equation 3.3 donne

$$U_\lambda(2\pi) = \begin{pmatrix} \frac{1+a^2(e^{-i\lambda}-1)}{|a|^2+|c+id|^2} & (e^{-i\lambda}-1)\frac{a(c-id)}{|a|^2+|c+id|^2}e^{-i\pi\frac{w_1}{w_0}} \\ (e^{-i\lambda}-1)\frac{a(c+id)}{|a|^2+|c+id|^2} & e^{-i\pi\frac{w_1}{w_0}} + (e^{-i\lambda}-1)\frac{c^2+d^2}{|a|^2+|c+id|^2}e^{-i\pi\frac{w_1}{w_0}} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

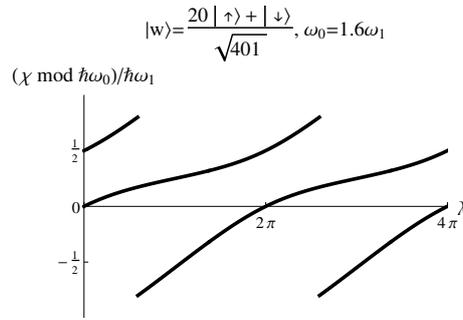


FIGURE 3.4 – Anholonomie de Cheon avec anti-croisements.

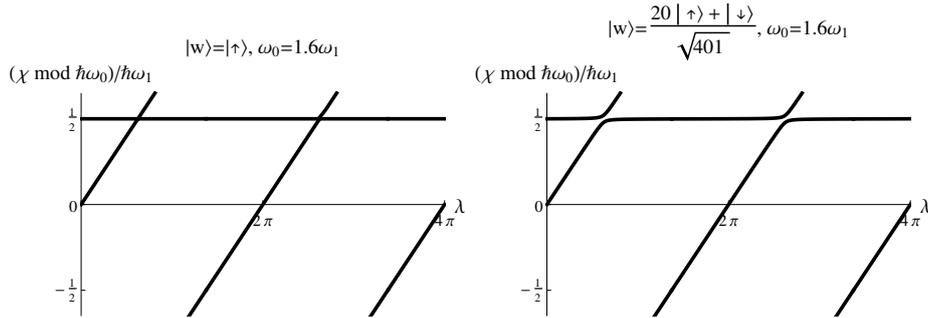


FIGURE 3.5 – Le premier graphique montre une anholonomie non-vérfiée lorsque la direction de frappe correspond à celle d'un vecteur propre. Le second graphique met en avant des anti-croisements apparaissant lorsque la direction de frappe est très proche d'un vecteur propre  $|w\rangle = \frac{20|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{401}}$ . L'anholonomie est vérifiée.

De manière générale, nous obtenons le graphique 3.4. Nous voyons très clairement qu'au bout d'une période de  $\lambda = 2\pi$ , nous sommes passés de la quasi-énergie  $\chi_n$  à  $\chi_{n+1}$ .

Par contre, nous devons faire attention à un cas particulier. Si l'opérateur de frappe est suivant un état propre,  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ , l'opérateur de monodromie devient

$$U_\lambda(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\pi \frac{w_1}{w_0}} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Nous obtenons donc deux valeurs propres  $e^{-i\lambda}$  suivant  $|\uparrow\rangle$  et  $e^{i\pi \frac{w_1}{w_0}}$  suivant  $|\downarrow\rangle$  dont la seconde est indépendante de  $\lambda$ . Aucun changement de quasi-énergie ne s'effectue au bout d'une période à cause de la valeur propre constante. L'anholonomie de Cheon n'est pas vérifiée comme en atteste le premier graphique de la figure 3.5. Par contre si nous nous plaçons très proche d'un vecteur propre mais sans être dans sa direction, l'anholonomie est vérifiée grâce à l'anti-croisement (voir le second graphique figure de la 3.5).

Pour faire du contrôle adiabatique, le phénomène d'anholonomie peut être utilisé. Par exemple si nous faisons varier lentement la force des frappes  $\lambda$  de 0 à  $2\pi$  nous passerons de  $\chi_0$  à  $\chi_1$  et de  $\chi_1$  à  $\chi_0$  (modulo  $2\pi$ ). Ainsi nous réalisons une sorte de porte *not*.



# Chapitre 4

## Effets du désordre de l'environnement

Dans ce chapitre, nous étudions le modèle de systèmes de spins frappés [8, 13] afin de voir comment la perturbation de l'environnement peut entraîner du désordre dans les systèmes de spins. Nous regarderons les phénomènes apparaissant dans deux systèmes : un ensemble de spins non couplés et une chaîne de spins [34]. Nous avons déjà vu dans la partie 1 que le couplage, en particulier le couplage Ising-X, pouvait introduire du désordre. Il est intéressant de voir si la perturbation de l'environnement accentue ce désordre ou permet, sous certaines conditions, de le diminuer. Afin d'étudier ces systèmes, nous allons reprendre les outils utilisés dans la première partie, à savoir la population, la cohérence et la distribution d'Husimi, auxquelles nous rajoutons une analyse de l'entropie. Dans tout ce chapitre nous supposons que les spins sont initialement dans le même état.

### 4.1 Modélisation de l'environnement classique

Le bain de frappes est caractérisé par la distribution initiale des premières frappes et la dynamique perturbant les trains de frappes. La suite des frappes  $(\lambda_n^{(i)})_i$  et  $(\varphi_n^{(i)})_i$  agissant sur le  $n$ -ième spin, sera modélisé par une évolution discrète caractérisée par un flot  $\phi$  :

$$\phi \begin{pmatrix} \lambda_n^{(i)} \\ \varphi_n^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_n^{(i+1)} \\ \varphi_n^{(i+1)} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Les premières frappes  $\{(\lambda_n^{(0)}, \varphi_n^{(0)})\}$  sont aléatoirement choisies dans l'intervalle  $[\lambda_*, \lambda_* + d_0] \times [\varphi_*, \varphi_* + d_0]$  de manière uniforme.  $d_0$  est appelé la magnitude de perturbation des premières frappes.

Dans la partie 3, nous avons vu que le couple  $(\lambda, \varphi)$  définit un tore comme espace des phases. Ainsi, les dynamiques classiques perturbant les impulsions des trains de frappes sont définies sur le tore  $\mathbb{T}^2$ . Les dynamiques de bruit que nous étudions sont au nombre de quatre :

1. Bain de frappes stationnaire, défini par le flot stationnaire

$$\phi \begin{pmatrix} \lambda \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Les frappes ne sont pas modifiées, le système va être soumis à chaque instant aux mêmes frappes.

2. Bain de frappes de dérive linéaire (aussi appelé "drift" dans les graphiques) défini par le flot

$$\phi \begin{pmatrix} \lambda \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{2\pi}{a} \pmod{2\pi} \\ \varphi + \frac{2\pi b}{a} \pmod{2\pi} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . L'orbite de  $(\lambda_0, \varphi_0)$  est dense dans  $\mathbb{T}^2$ .

3. Le bain de frappes microcanonique défini par le flot stochastique  $\phi$  consistant à tirer aléatoirement les variables sur  $\mathbb{T}^2$  avec la mesure de probabilité suivante

$$d\mu(\lambda, \varphi) = \frac{d\lambda d\varphi}{4\pi^2} \quad (4.4)$$

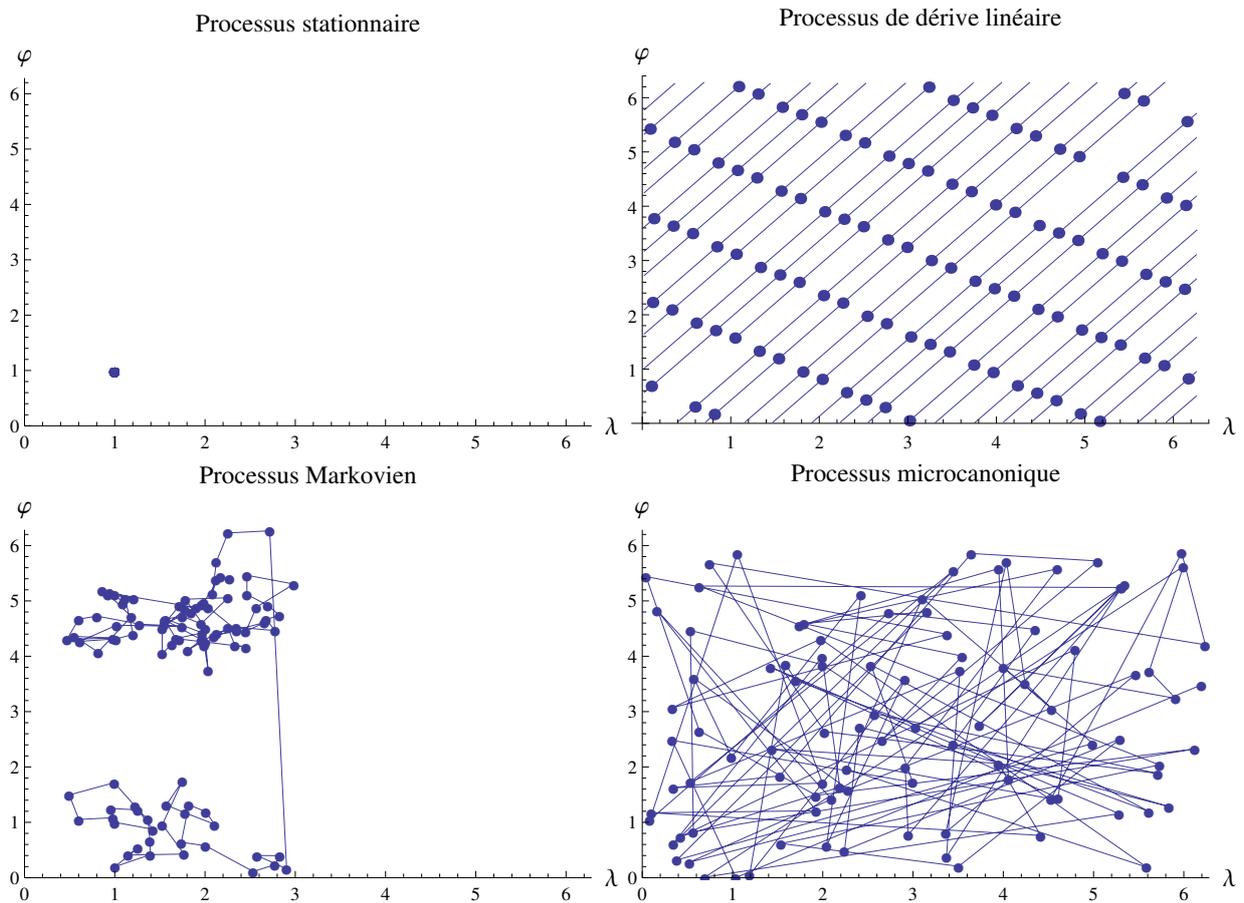


FIGURE 4.1 – Représentation des dynamiques stationnaires, de dérive linéaire, Markoviennes et microcanoniques. L'espace des phases  $\mathbb{T}^2$  est représenté déplié à plat.

avec  $\mu$  la mesure de probabilité de Haar sur  $\mathbb{T}^2$ . Il s'agit du bruit blanc. Les spins vont recevoir des frappes (forces et retards de frappes) différentes à chaque instant.

4. Bain de frappes Markovien défini par le flot  $\phi$  consistant à tirer aléatoirement les variables sur  $\mathbb{T}^2$  avec la mesure de probabilité suivante

$$d\nu_n(\lambda, \varphi) = \frac{d\lambda d\varphi}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{1}{2\sigma}((\lambda-\lambda_{n-1})^2 + (\varphi-\varphi_{n-1})^2)} \quad (4.5)$$

Ce processus est un processus de Wiener à temps discret (une marche aléatoire) correspondant au mouvement brownien sur  $\mathbb{T}^2$  avec un pas moyen de  $\sigma > 0$ . Les spins reçoivent des frappes d'autant plus différentes à un même instant que la largeur à mi-hauteur de la gaussienne ( $\sigma$ ) est grande.

Tous ces processus dynamiques sont représentés sur la figure 4.1.

Les trains de frappes sont perturbés par un environnement classique modifiant à la fois le retard et la force de chaque frappe. Selon l'environnement classique choisi, la variation de la force et du retard entre deux frappes n'est pas la même. Plus la variation entre deux frappes est grande, plus le désordre dans le bain de frappes augmente. Les bains de frappes stationnaires et dits de dérive linéaire sont moins désordonnés que le bain de frappes microcanonique. De plus, un désordre initial, une variation des premières frappes de chaque train est introduite par le paramètre  $d_0$ . Regardons ce que ces deux éléments induisent sur nos deux systèmes de spins.

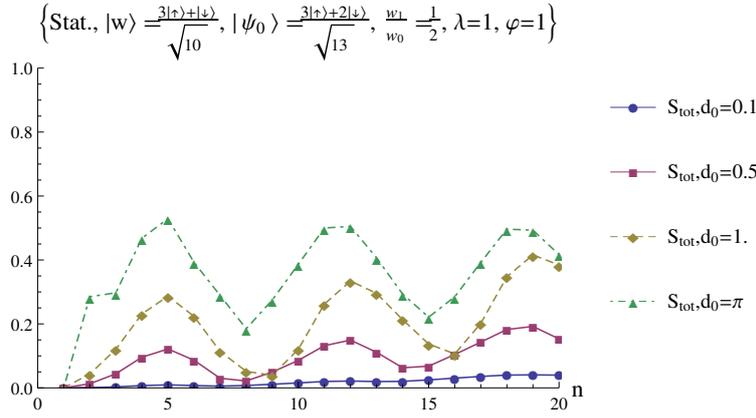


FIGURE 4.2 – Evolution de l’entropie d’un ensemble de 1000 spins par rapport à  $d_0$ . Les spins sont soumis à un bain de frappes stationnaire. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont uniformément tirées.

## 4.2 Le désordre dans un système de spins

Deux paramètres de désordre caractérisent le bain de frappes :

- la distribution initiale des premières frappes
- la dynamique des trains

Nous essaierons de comprendre comment le désordre du bain de frappes influence les systèmes de spins par analyse de l’entropie, de la population et de la cohérence d’un ensemble de spins. Nous nous intéresserons aussi au cas d’une chaîne de spins afin de voir comment le couplage modifie le désordre induit dans les systèmes de spins.

### 4.2.1 Effets du désordre sur la dynamique des spins

L’entropie étant une mesure du désordre, elle va nous permettre de quantifier la transmission du désordre du bain de frappes au système de spins. Plus l’entropie augmente, plus le désordre dans les systèmes de spins augmente. Dans le cas de spins couplés, l’entropie d’un spin est aussi une mesure d’intrication. Dans les études suivantes, nous utiliserons l’entropie quantique, l’entropie de von Neuman pour un spin

$$S_{vN,n} = -\gamma \text{tr}(\rho_n \log \rho_n) \quad (4.6)$$

et l’entropie du spin moyen (sachant que  $\rho_{tot}^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \rho_n^{(i)}$  (équation 1.10))

$$S_{tot} = -\gamma \text{tr}(\rho_{tot} \log \rho_{tot}) \quad (4.7)$$

avec  $\gamma$  une constante arbitraire choisie à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  dans ce chapitre.

### Paramètres responsable du désordre

Une augmentation de la dispersion initiale dans le bain de frappes entraîne une augmentation de l’entropie dans l’ensemble de spins comme en atteste la figure 4.2. Pour une dispersion initiale très petite,  $d_0 \ll 1$ , l’entropie est presque nulle. Presque aucun désordre n’est transmis à l’ensemble de spins. En effet, si  $d_0$  est petit, les frappes initiales ont presque toutes la même force et le même retard. Les spins vont donc changer d’états de la même manière ce qui n’introduit pas de désordre dans l’ensemble de spins. Au contraire, si la dispersion est grande, les spins sont initialement frappés différemment. Ils ne vont donc pas changer d’état de la même façon. Le désordre du bain de frappes est transmis au bain de spins et est associé à une augmentation de l’entropie

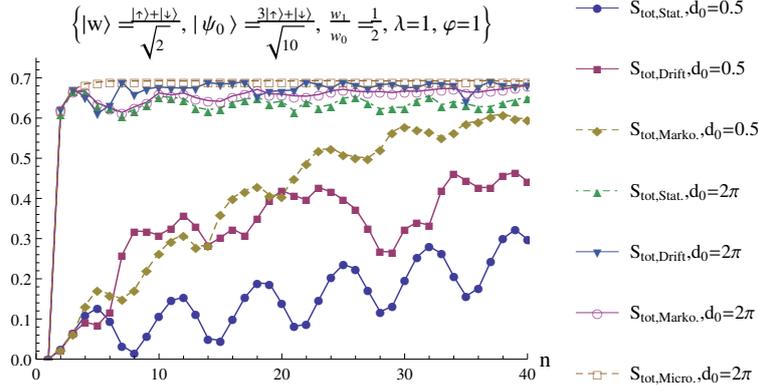


FIGURE 4.3 – Evolution de l'entropie d'un ensemble de 1000 spins en fonction de la dynamique classique pour deux valeurs de  $d_0$ . Pour le cas Markovien  $\sigma = 0.5$ . Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont uniformément tirées.

De la même manière, plus l'irrégularité de la frappe dans le temps augmente, plus l'entropie augmente dans l'ensemble de spins, ce que nous observons au travers du graphique 4.3. Pour un  $d_0$  petit, l'entropie est plus importante pour un ensemble de spins soumis à un bain de frappes Markovien avec une grande largeur à mi-hauteur que pour un bain de frappes stationnaire. Si  $d_0$  est grand, toutes les dynamiques induisent le maximum d'entropie.

Plus la dynamique est irrégulière dans le temps, plus les spins vont être frappés différemment les uns des autres et avoir des états différents. L'entropie et donc le désordre, augmentent dans l'ensemble de spins.

$d_0$  introduit une dispersion et un désordre initial dans l'ensemble de spins. Il est amplifié par l'irrégularité de la frappe dans le temps. Le désordre dans le bain de frappes est ainsi transmis à l'ensemble de spins.

Nous venons de voir comment la dispersion initiale et la dynamique classique influencent le désordre dans un ensemble de spins. Regardons maintenant l'effet du couplage sur le désordre. Pour ceci, nous considérons une chaîne de 10 spins couplés par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg, d'Ising-Z ou d'Ising-X. Le graphique du haut de la figure 4.4 montre l'évolution de l'entropie du spin moyen de la chaîne et celui du bas présente l'intrication du 5<sup>ème</sup> spin de la chaîne. Nous remarquons que plus l'interaction entre les spins est importante, plus l'entropie et l'intrication augmentent pour une dispersion initiale non nulle.

Dans une chaîne de spins couplés, l'intrication d'un spin semble augmenter avec presque le même taux que l'entropie du spin moyen et donc du désordre, comme le montre les figures 4.4, 4.5 et 4.6. Cependant pour un temps court, nous voyons que l'entropie d'intrication du 5<sup>ème</sup> spin met plus de temps à augmenter que celle du spin moyen. Plus le bain de frappes est désordonné, plus l'entropie et l'intrication augmentent rapidement. Les bains de frappes stationnaires et de dérive linéaire ont une entropie augmentant beaucoup plus lentement que le bain de frappes microcanonique. Nous remarquons aussi que comme pour l'ensemble de spins, plus  $d_0$  augmente et/ou plus l'irrégularité de la frappe dans le temps est importante, plus la chaîne de spins est désordonnée.

L'évolution de l'entropie et de l'intrication pour une chaîne de spins soumise à une interaction d'Ising-X est similaire à celle que l'on observe pour une interaction d'Ising-Z sauf que les oscillations initiales observées pour  $\frac{J}{w_0} = 1.25$  ne sont pas présentes (voir 4.7).

Nous avons vu que  $d_0$  introduisait un premier désordre dans un système de spins. L'irrégularité de la frappe dans le temps entraîne un désordre dans le système de spins dans le temps. Le paramètre de couplage permet de transmettre ces désordres le long de la chaîne de spins. Les couplages d'Heisenberg ou d'Ising-Z ne sont pas la source du désordre. Ils permettent une meilleure transmission de ce dernier.

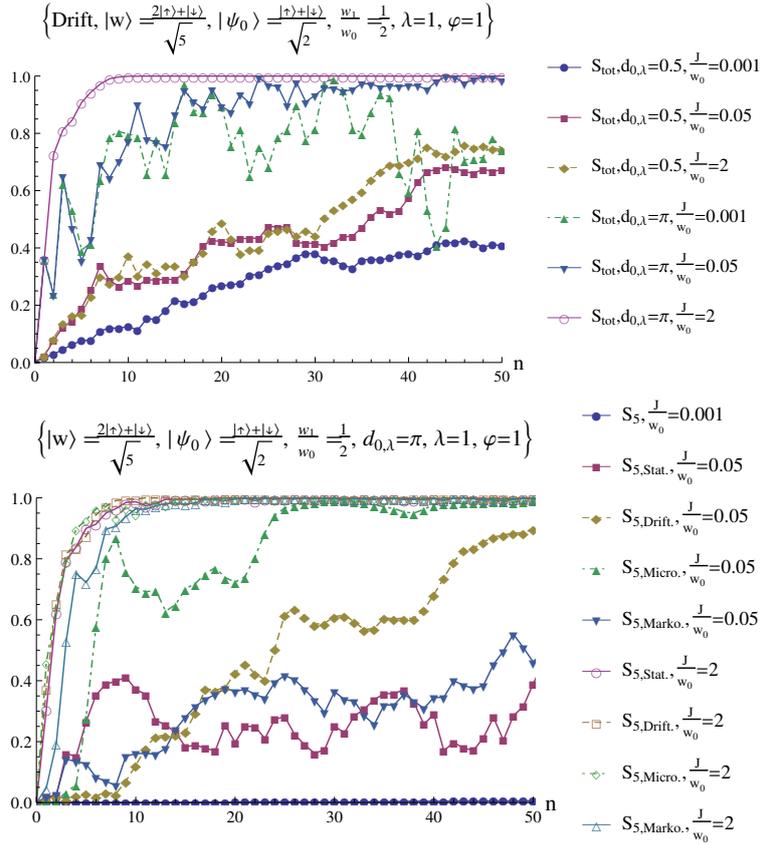


FIGURE 4.4 – Evolutions de l’entropie d’une chaîne de 10 spins (haut) et de l’intrication du 5ième spin d’une chaîne (bas) pour deux valeurs de  $J$ . Chaque spin est soumis à un bain de frappes de dérive linéaire (haut et bas), stationnaire, Markovien et microcanonique (bas) et est couplé à ses plus proches voisins par une interaction d’Heisenberg. Les graphiques sont similaires pour une interaction d’Ising-Z ou d’Ising-X. Pour le bain de frappes Markovien,  $\sigma = 10^{-3}$ . Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

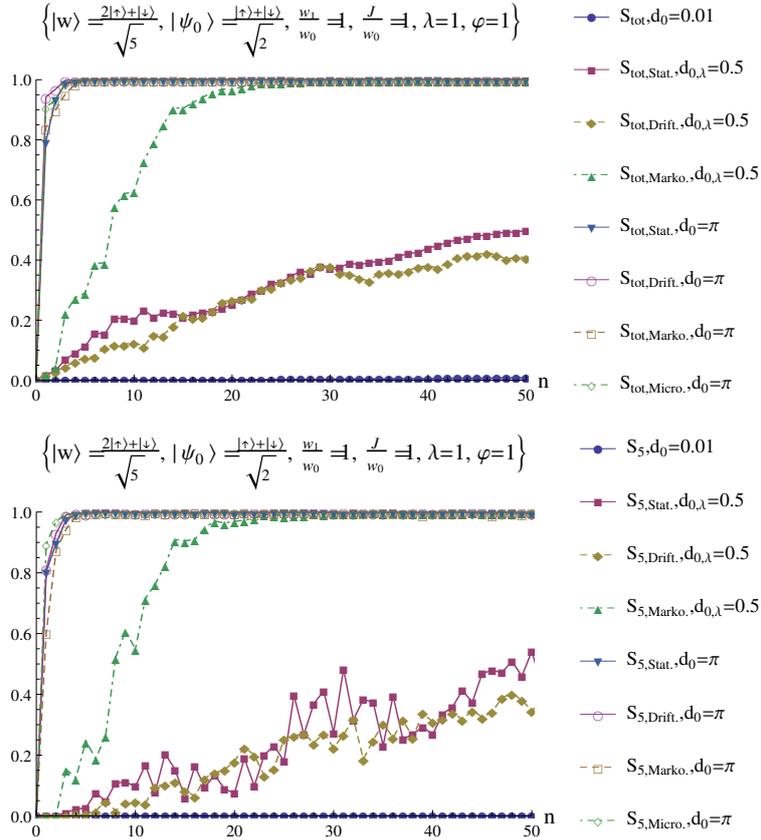


FIGURE 4.5 – Evolutions de l'entropie du spin moyen d'une chaîne de 10 spins (haut) et de l'intrication du 5ième spin de la chaîne (bas) par rapport au paramètre de dispersion initiale. Chaque spin est soumis à un bain de frappes stationnaire, de dérive linéaire, Markovien et microcanonique, et est couplé à ses plus proches voisins par une interaction d'Heisenberg. Les conditions initiales sont les mêmes pour toutes les dynamiques classiques. Le bain de frappes Markovien est caractérisé par un pas brownien moyen sur le tore de  $\sigma = 0.1$ . La première courbe nommée  $S_{tot}, d_0 = 0.01$  est la même pour toutes les dynamiques classiques.  $d_{0,\lambda}$  correspond à une dispersion initiale seulement pour le paramètre de frappes ( $\lambda$ ). Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

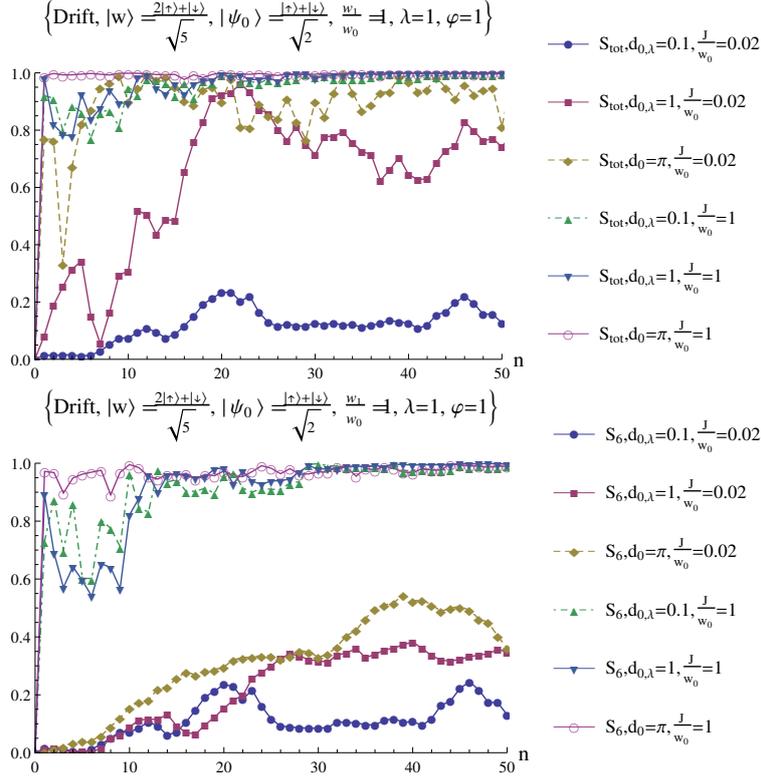


FIGURE 4.6 – Evolutions de l'entropie du spin moyen de la chaîne de 10 spins (haut) et de l'intrication du 5ième spin de la chaîne (bas) par rapport à la dispersion initiale et par rapport à deux valeurs de couplage  $J$ . Les spins de la chaîne sont soumis à un bain de frappes de dérive linéaire et sont couplés par une interaction d'Ising-Z.  $d_{0,\lambda}$  correspond à une dispersion initiale seulement sur le paramètre de frappes ( $\lambda$ ). Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

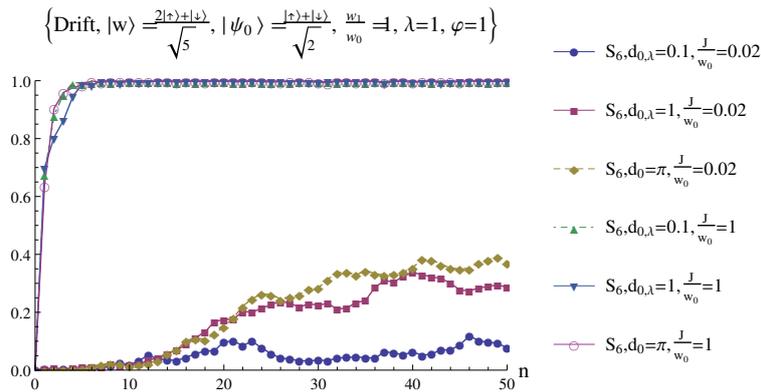


FIGURE 4.7 – Evolution de l'entropie du 6ième spin d'une chaîne de 10 spins par rapport à  $d_{0,\lambda}$  pour deux valeurs de  $\frac{J}{w_0}$ .  $d_{0,\lambda}$  correspond à une dispersion initiale uniquement sur le paramètre de force ( $\lambda$ ). Chaque spin est soumis à un bain de frappes de dérive linéaire et est couplé par une interaction d'Ising-X. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

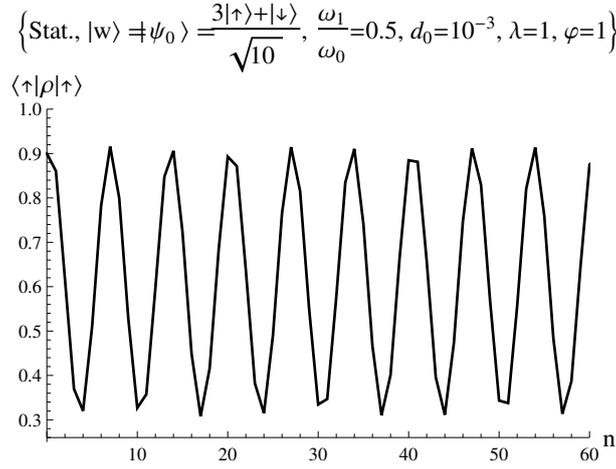


FIGURE 4.8 – Exemple d’oscillations de population du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ) d’un ensemble de 1000 spins soumis à un bain de frappes stationnaire. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

Au contraire le couplage Ising-X est une des sources du désordre induite dans la chaîne de spins.

Ainsi, la dispersion initiale, le paramètre d’interaction, le choix de la dynamique de frappes et le couplage Ising-X sont les sources de l’augmentation de l’entropie et de l’intrication dans la chaîne de spins. Le paramètre de dispersion initiale et la dynamique classique induisent du désordre dans le bain de frappes lequel est transmis à chaque spin de la chaîne. Le paramètre d’interaction permet une transmission de ce désordre d’un spin à son voisin.

Nous tirons de ces analyses que, plus le bain de frappes est dispersé dans le temps, plus le désordre augmente. Ce désordre est ensuite transmis dans la chaîne de spins grâce au couplage. Nous voulons maintenant connaître les effets de ces paramètres sur la chaîne de spins et en particulier sur la population et la cohérence.

### Oscillations de la population

Si les frappes sont peu dispersées et régulières dans le temps, comme dans le cas d’un bain de frappes stationnaire, la population moyenne présente des fluctuations ayant de grandes amplitudes comme le montre la figure 4.8. Dans ce cas, tous les spins subissent presque la même frappe et des oscillations de Rabi sont présentes. Comme les frappes sont presque toutes les mêmes, elles ont presque la même force et vont agir au même instant. Ainsi les spins vont évoluer sensiblement de la même manière. Il n’y a pas de compensation d’oscillations dans la matrice densité finale, les oscillations restent présentes.

Plus  $d_0$  augmente, plus les oscillations de population et de cohérence du spin moyen d’un ensemble et d’une chaîne de spins diminuent comme en atteste les figures 4.9 et 4.10. Pour un ensemble de spins, nous observons que plus  $d_0$  augmente, plus les spins sont frappés initialement différemment. À cause de ces frappes différentes (pas la même force ni le même retard), les spins vont changer d’états mais ils ne vont pas tous avoir le même. Il y a donc une compensation des oscillations dans la matrice densité moyenne entraînant une réduction des amplitudes d’oscillations avec l’augmentation de  $d_0$ .

Les oscillations de population et de cohérence d’un seul spin d’une chaîne couplée par une interaction d’Heisenberg, diminue de la même manière que celle du spin moyen de la chaîne.

Les oscillations de la population du spin moyen d’un ensemble de spins et d’une chaîne de spins couplés par une interaction d’Heisenberg sont aussi influencées par l’irrégularité de la frappe dans

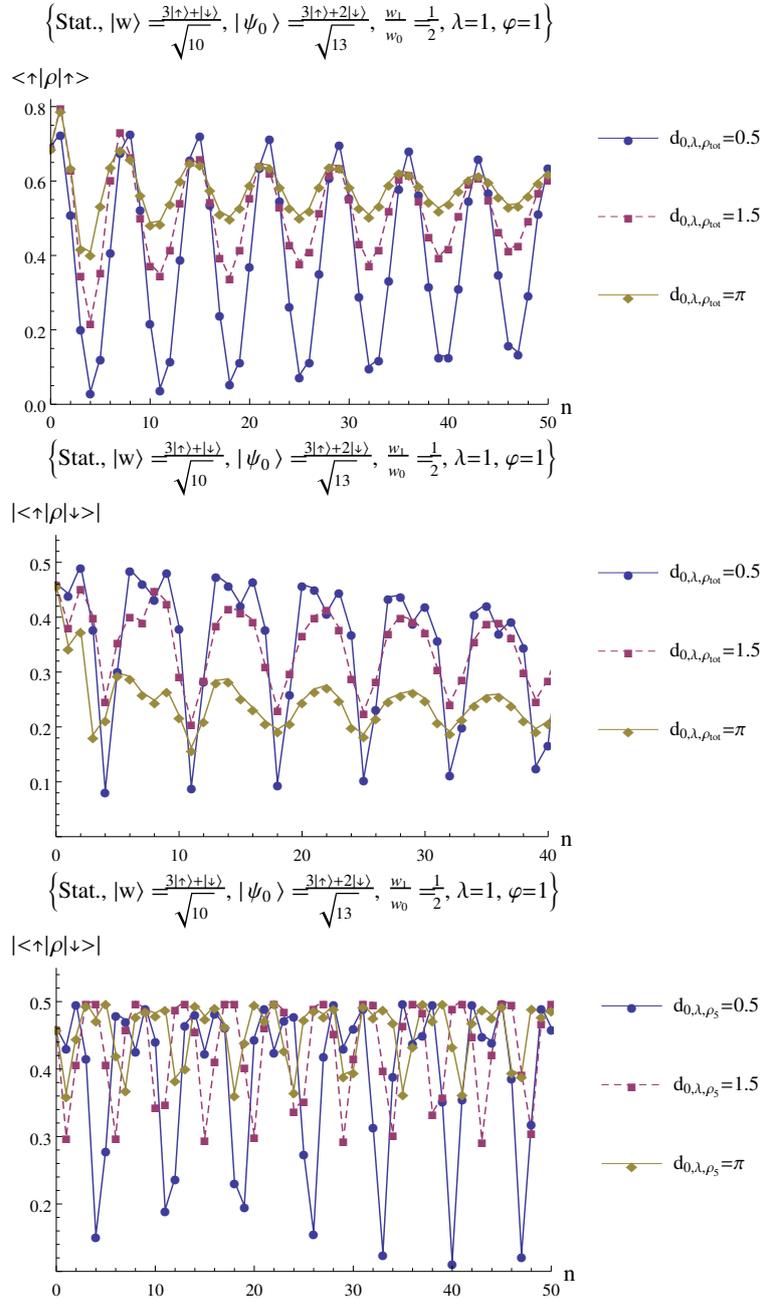


FIGURE 4.9 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen d'un ensemble de 1000 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin de l'ensemble ( $\rho_5$ ) avec une augmentation de la dispersion initiale. Chaque spin est soumis à un bain de frappes stationnaire.  $d_{0,\lambda}$  correspond à une dispersion initiale seulement sur le paramètre de force de la frappe ( $\lambda$ ). Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

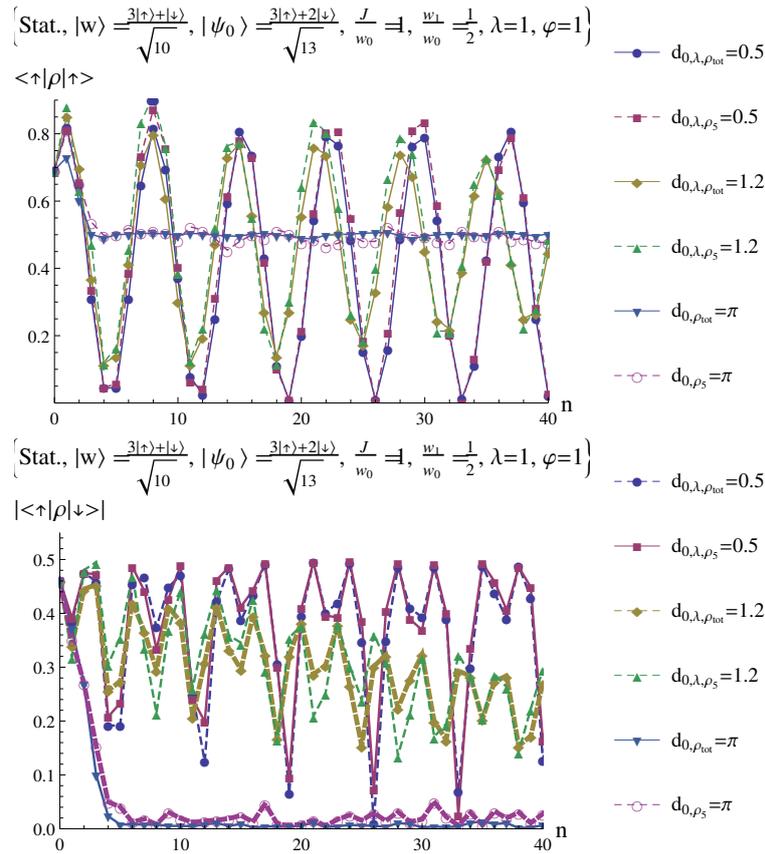


FIGURE 4.10 – Evolutions de la population (haut) et de la cohérence (bas) du spin moyen d’une chaîne de 10 spins et du 5ième spin de la chaîne avec une augmentation de la dispersion initiale. Chaque spin est soumis à un bain de frappes stationnaire et les spins sont couplés par une interaction d’Heisenberg de plus proches voisins.  $d_{0,\lambda}$  correspond à la dispersion initiale sur le paramètre de force ( $\lambda$ ). Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

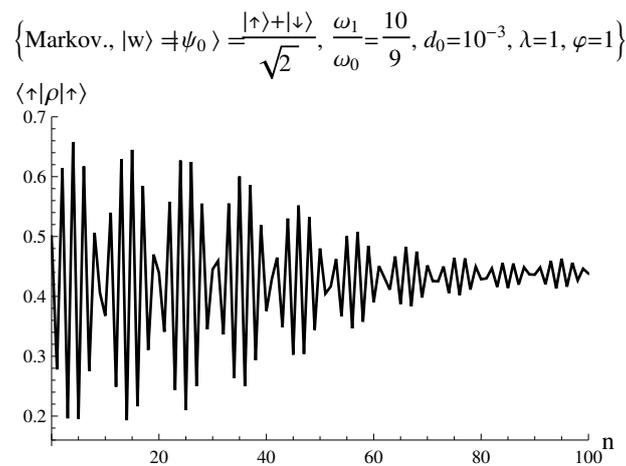


FIGURE 4.11 – Oscillations de la population du spin moyen d’un ensemble de 1000 spins soumis à un bain de frappes Markovien ( $\sigma = 0.07$ ). Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

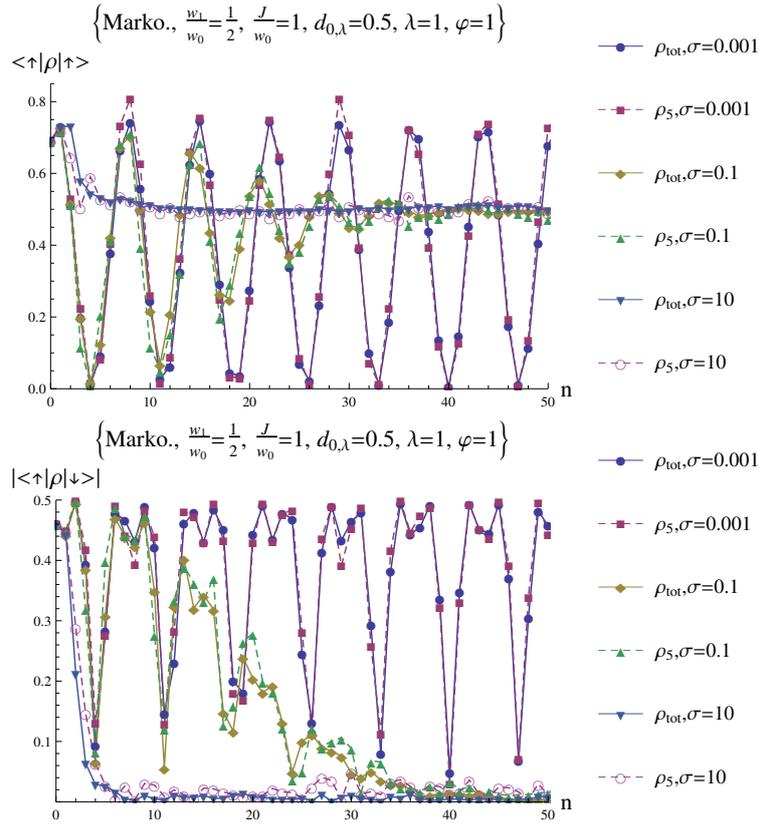


FIGURE 4.12 – Evolutions de la population (haut) et de la cohérence (bas) du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin de la chaîne ( $\rho_5$ ) en fonction de la déviation standard du mouvement brownien ( $\sigma$ ). Ce dernier définit l’évolution du bain de frappes classique. Les spins sont couplés par une interaction d’Heisenberg. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}(3|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

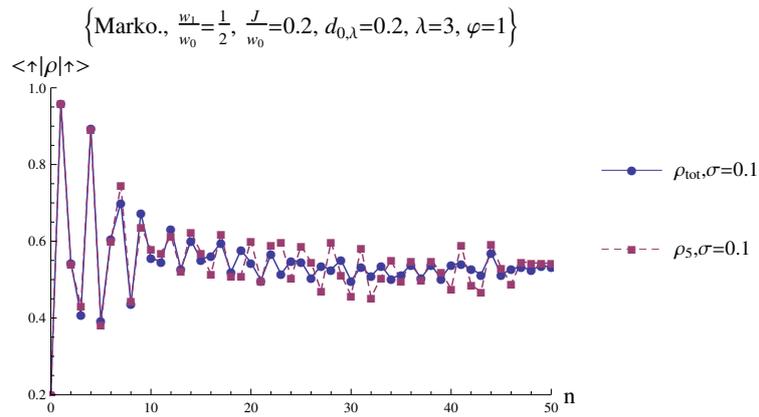


FIGURE 4.13 – Evolution de la population du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin de la chaîne ( $\rho_5$ ). Les spins de la chaîne sont soumis à un bain de frappes Markovien et sont couplés par une interaction d’Ising-Z. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.  $d_{0,\lambda}$  correspond à une dispersion initiale uniquement sur le paramètre de force. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

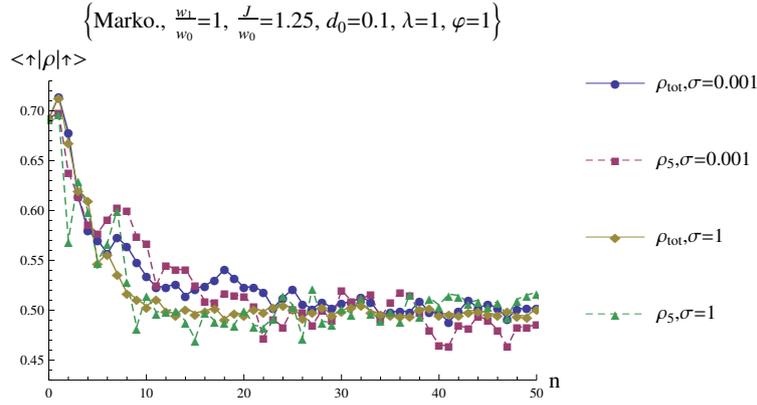


FIGURE 4.14 – Evolution de la population du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin ( $\rho_5$ ) de la chaîne par rapport à la déviation standard du mouvement brownien ( $\sigma$ ). Chaque spin est soumis à un bain de frappes Markovien et est couplé par une interaction d’Ising-X de plus proches voisins. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}(3|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

le temps. Prenons pour illustrer un bain de frappes Markovien. Pour une largeur à mi-hauteur très petite, le bain de frappes Markovien peut s’apparenter au bain de frappes stationnaire. Au contraire, si la largeur à mi-hauteur  $\sigma$  est très grande, le bain de frappes correspond à un bain de frappes microcanonique. Ainsi si  $\sigma$  n’est pas trop grand ni trop petit, nous voyons le passage d’un bain de frappes stationnaire à un bain de frappes microcanonique. Dans ce dernier cas, nous voyons que l’irrégularité des frappes dans le temps a tendance à détruire les oscillations comme le montre les figures 4.11 et 4.12 (pour les courbes  $\rho_{tot}, \sigma = 0.1$  et  $\rho_5, \sigma = 0.1$ ) au travers d’un amortissement de celles-ci. Au départ les frappes ne sont pas dispersées. Il faut un certain temps pour que le processus disperse les frappes, et ainsi que les spins soient dans des états différents, faisant disparaître les oscillations de Rabi à la moyenne. Plus  $d_0$  ou  $\sigma$  augmentent, plus l’amortissement est rapide car la dispersion est grande.

Pour le couplage Ising-Z, si l’interaction est faible il est possible d’observer une réduction des amplitudes d’oscillations avec  $d_0$ . Si en plus la dispersion initiale n’est pas trop grande, le bain de frappes Markovien présente aussi un amortissement de la population et de la cohérence comme le montre la figure 4.13.

Finalement, l’intrication est tellement grande pour une chaîne couplée par une interaction d’Ising-X qu’il est quasiment impossible d’observer l’amortissement de la population avec un bain de frappes Markovien (figure 4.14) ni la réduction des oscillations de la population. La chute est vraiment drastique (ici nous travaillons en couplage fort, si nous diminuons le couplage, nous avons un mélange entre les évolutions sans et avec couplage ce qui fait que les amortissements pourraient être visible; mais pour les observer il faut un couplage très faible.)

### Processus de décohérence et relaxation de la population

Dans les figures qui suivent, seule la population  $|\uparrow\rangle$  a été représentée car la trace de la matrice densité doit valoir 1. Il est donc facile à partir d’une population d’obtenir la seconde.

Le processus de relaxation consiste en une perte de l’information de l’état initial  $|\psi_0\rangle$ . Sur le graphique 4.15, nous voyons que plus l’irrégularité de la frappe dans le temps est grande, plus le processus de relaxation est important. Lorsque les frappes sont irrégulières, le désordre dans le bain de frappes augmente. Le désordre du bain de frappes induit du désordre dans le bain de spins qui peut être relié à un manque d’information. Ainsi l’irrégularité de la frappe dans le temps entraîne une augmentation de la perte d’information. L’information initiale est totalement perdue lorsque les populations tendent vers le microcanonique  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \uparrow | \rho | \uparrow \rangle = \frac{1}{2}$ . Le processus de relaxation est aussi plus

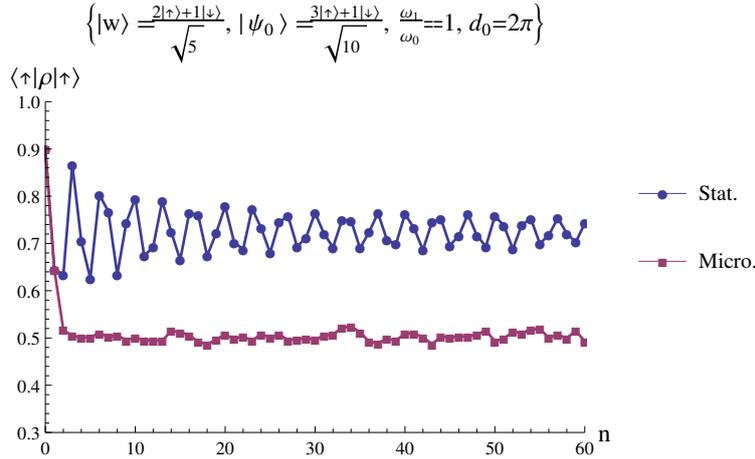


FIGURE 4.15 – Evolution de la population du spin moyen d’un ensemble de 1000 spins soumis à un bain de frappes stationnaire ou microcanonique.

important lorsque  $d_0$  augmente comme le montre le figure 4.9 pour la même raison que précédemment.

La figure 4.16 présente l’évolution de la cohérence en fonction du nombre de frappes pour différentes dynamiques de frappes. Le graphique du haut est pour une faible dispersion des frappes alors que sur celui du bas, les frappes sont dispersées au maximum. Plusieurs points sont mis en évidence. Tout d’abord, plus les frappes sont dispersées sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , plus la décohérence est forte. La dispersion dans les frappes est donnée par le paramètre  $d_0$  pour des bains de frappes stationnaires, microcanoniques et de dérive linéaire, et par  $d_0$  et/ou par la largeur à mi-hauteur  $\sigma$  pour le bain de frappes Markovien. Avec une dispersion extrêmement faible, la cohérence associée à la perturbation stationnaire oscille autour de sa valeur de départ, il n’y a donc pas de décohérence. Au contraire, pour une large dispersion, elle chute initialement fortement pour osciller ensuite. Cependant elle ne chute pas complètement, elle chute vers une valeur  $|\rho_{\uparrow\downarrow}| > 0$ . Il en est de même pour le processus Markovien pour une largeur à mi-hauteur relativement faible. Plus la largeur à mi-hauteur est grande, plus la chute de la cohérence est rapide. Ce phénomène s’explique facilement. Quand la dispersion initiale est faible, tous les spins sont initialement frappés de la même manière, avec le même retard et la même force. Il n’y a pas de raison que de la décohérence survienne car ils sont tous modifiés de la même manière. L’ensemble de spins reste donc cohérent. Au contraire, si la dispersion augmente, du désordre apparaît dans l’ensemble de spins entraînant des états de spins différents. La décohérence apparaît.

La présence d’irrégularités de la frappe dans le temps (ce qui se traduit par une modification du retard) permet une meilleure décohérence (voir figure 4.16). Nous voyons que les bains de frappes microcanoniques et celui dit de dérive linéaire permettent une décohérence totale  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle \uparrow | \rho | \downarrow \rangle| = 0$  alors que les deux autres bains, les bains de frappes stationnaires et Markoviens présentent une chute n’allant pas à 0,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle \uparrow | \rho | \downarrow \rangle| = c_{min} \neq 0$ . Le bain de frappes microcanonique permet une décroissance brutale et directe de la cohérence qui reste ensuite à 0 alors que pour celui de dérive linéaire, elle oscille une fois arrivée à 0. Pour les deux autres bains, la cohérence chute d’abord rapidement pour ensuite osciller.

Les irrégularités seules ne peuvent pas expliquer complètement la chute de la cohérence. Il faut un minimum de dispersion. Prenons par exemple un processus stationnaire mais avec une large dispersion. Dès le départ, la dispersion entraîne une chute rapide de la cohérence. Cependant cette chute n’est pas totale car le processus stationnaire n’entraîne pas de désordre, il est régulier, la cohérence ne rechute pas ensuite. La perte de cohérence correspondant à la transmission du désordre du bain de frappes à l’ensemble de spins devient minimale après celle créée par la dispersion initiale. Il faut un processus entraînant de l’irrégularité dans la frappe pour que la décohérence soit plus importante.

Regardons maintenant ce qu’il se passe quand les spins sont couplés par une interaction d’Hei-

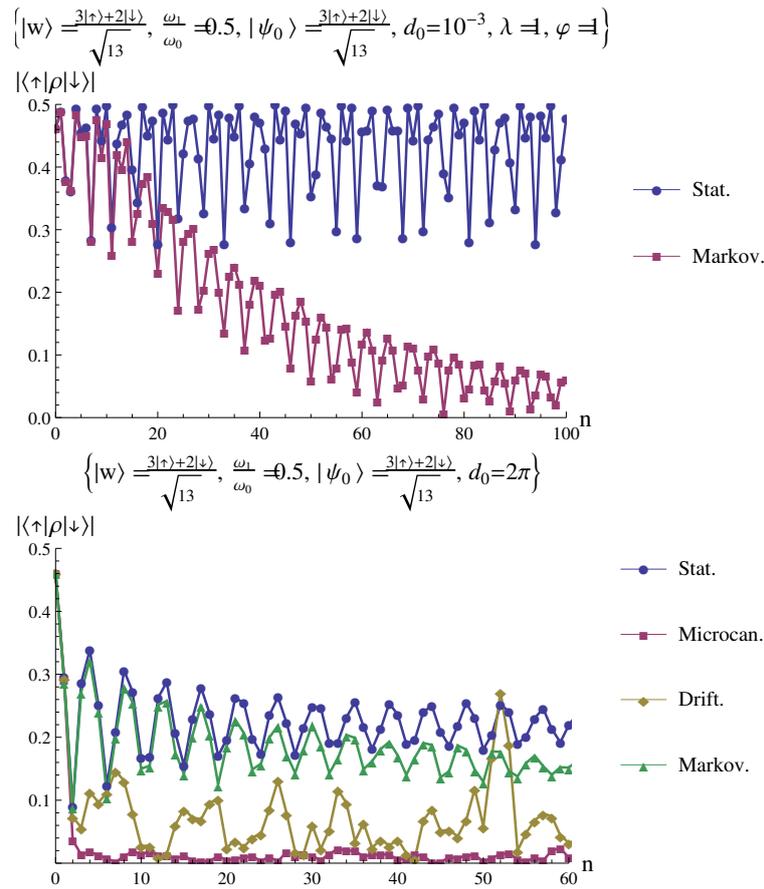


FIGURE 4.16 – Evolutions de la cohérence du spin moyen d'un ensemble de spins soumis à un bain de frappes stationnaire, microcanonique, Markovien ( $\sigma = 0.1$ ) et de dérive linéaire. Le graphique du haut est associé à une faible dispersion alors que celui du bas est pour une forte dispersion initiale des frappes. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

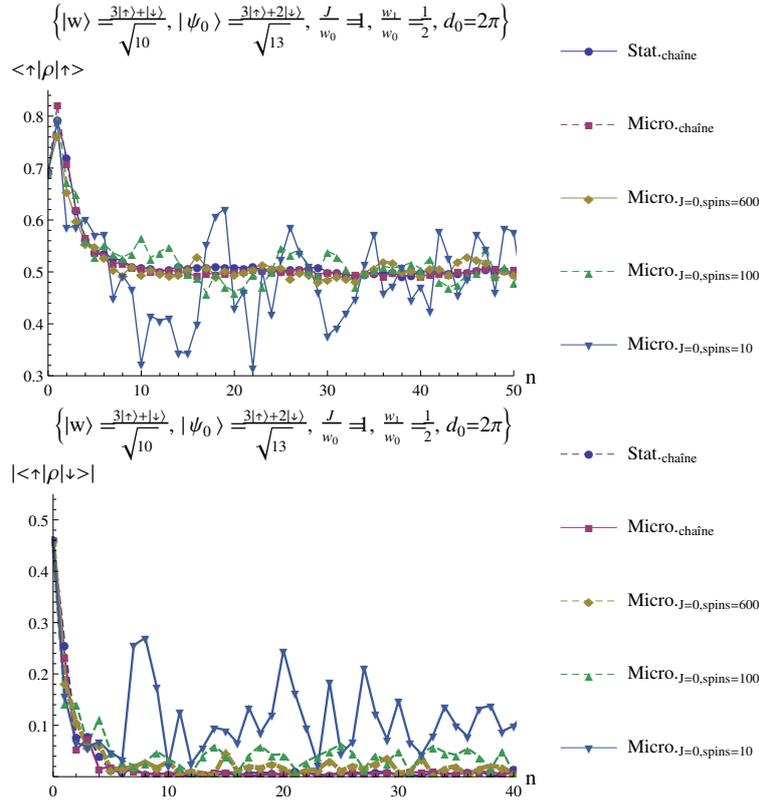


FIGURE 4.17 – Evolutions de la population (haut) et de la cohérence (bas) du spin moyen d’une chaîne de 10 spins, et d’un ensemble de spins sans couplage. L’ensemble de spins est frappé par un bain de frappes microcanonique et la chaîne par des bains de frappes stationnaires et microcanoniques. Les spins de la chaîne sont couplés par une interaction d’Heisenberg de plus proches voisins. *spins* correspond au nombre de spins contenu dans l’ensemble.

senberg. Les figures 4.9 et 4.10 montrent une comparaison entre un ensemble de spins et une chaîne de spins couplés par une interaction d’Heisenberg avec une augmentation de la dispersion initiale. Les graphiques montrent que plus la dispersion initiale est grande, plus la population et la cohérence moyenne d’une chaîne de spins se comportent comme une distribution microcanonique. Chaque spin suit l’évolution du spin moyen de la chaîne contrairement à un spin de l’ensemble. Le couplage d’Heisenberg induit donc que chaque spin adopte le comportement du spin moyen de la chaîne.

Nous avons vu que, pour un ensemble de spins, l’irrégularité de la frappe dans le temps augmentait la chute de la cohérence et la relaxation de la population pour atteindre le microcanonique. Au contraire, pour une chaîne de spins la population et la cohérence évoluent vers le microcanonique, peu importe l’irrégularité à partir du moment où la dispersion initiale est grande.

La figure 4.17 montre la même chose que précédemment mais avec la comparaison entre un bain de frappes stationnaire et un bain de frappes microcanonique pour une chaîne de spins et pour un ensemble caractérisé par différents nombres de spins. Nous remarquons que plus le nombre de spins dans l’ensemble est faible, plus la cohérence et la population du spin moyen oscillent. Un ensemble d’environ 1000 spins a presque le même comportement qu’une chaîne de 10 spins couplés par une interaction d’Heisenberg de plus proches voisins. De plus, la cohérence de la chaîne soumise à un bain de frappes stationnaire a le même comportement qu’un ensemble de spins soumis à un bain de frappes microcanonique. Le couplage d’Heisenberg permet de transmettre le désordre dans la chaîne de spins mais aussi d’augmenter ce désordre, ce que nous avons vu précédemment.

Concernant le couplage Ising-Z, comme le désordre dans la chaîne est important, la population relaxe rapidement vers  $\frac{1}{2}$  et la cohérence chute à 0 quelque soit la dispersion initiale. Le comportement est similaire à celui d’Heisenberg mais avec une large dispersion initiale. Cependant, contrairement au couplage d’Heisenberg, un spin ne suit pas l’évolution de la moyenne comme le montre la figure 4.18.

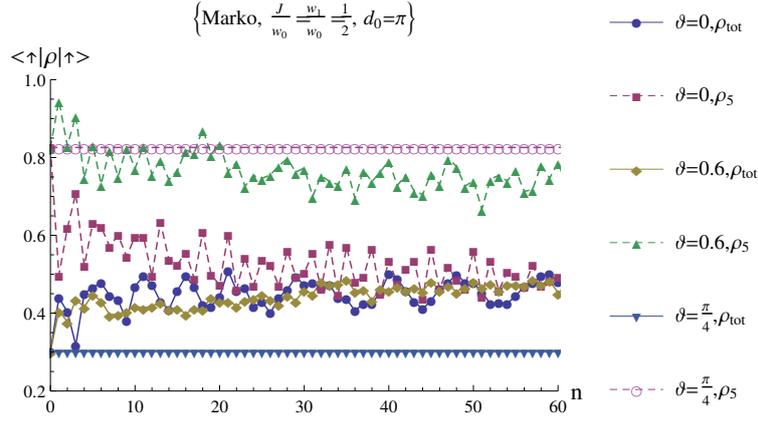


FIGURE 4.18 – Evolution de la population du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin de la chaîne ( $\rho_5$ ) couplés par une interaction d’Ising-Z. Chaque spin est soumis à un bain de frappes Markovien défini par une largeur à mi-hauteur  $\sigma = 0.1$ . L’état initial de chaque spin est aléatoirement choisi pour obtenir  $|\psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  avec  $a$  tiré uniformément dans  $[0, 1]$  et  $b$  qui vérifie  $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ . La direction de frappe est caractérisée par  $|w\rangle = \cos(\frac{\pi}{4} - \vartheta)|\uparrow\rangle + \sin(\frac{\pi}{4} - \vartheta)|\downarrow\rangle$ .

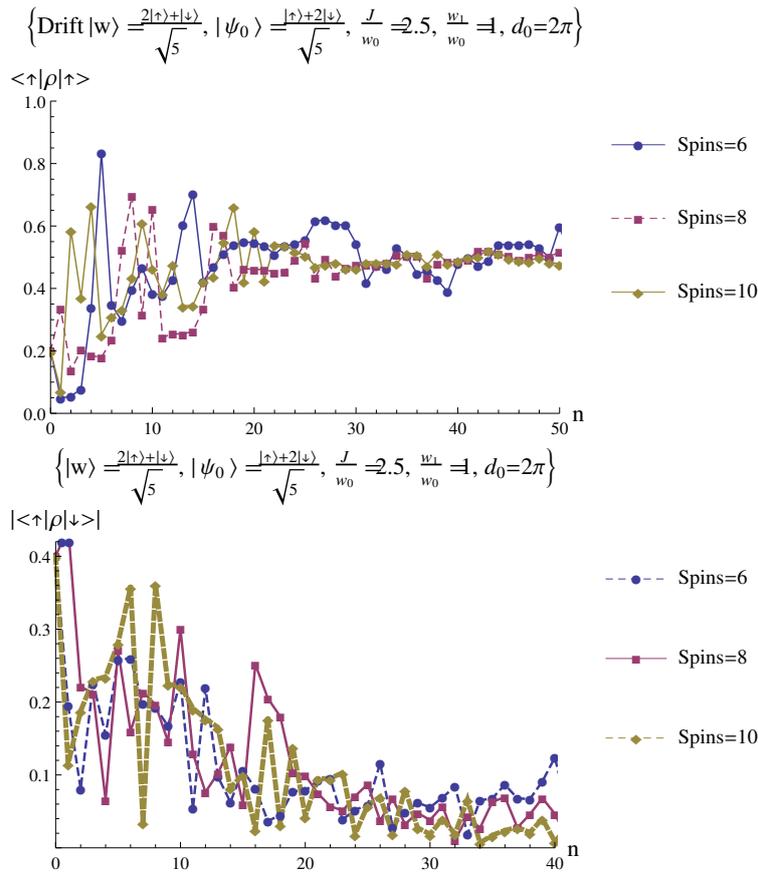


FIGURE 4.19 – Evolutions de la population et de la cohérence des spins appartenant à des chaînes de différentes tailles. Chaque spin est couplé par une interaction de plus proches voisins d’Ising-Z et est soumis à un bain de frappes de dérive linéaire.

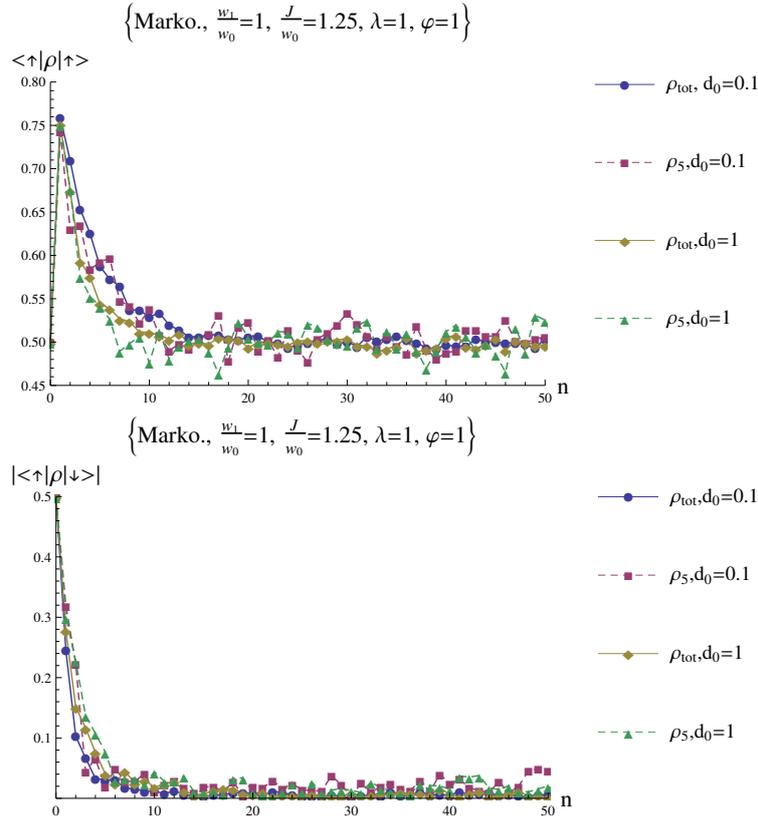


FIGURE 4.20 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin de la chaîne ( $\rho_5$ ) par rapport à  $d_0$ . Chaque spin est soumis à un bain de frappes Markovien et est couplé par une interaction d’Ising-X. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

Pour le couplage Ising-Z, nous observons initialement un petit "plateau" de cohérence comme le montre la figure 4.19. Celui-ci est visible pour un spin de la chaîne mais pas pour le spin moyen à cause de la compensation des oscillations dans la matrice densité moyenne. Le petit plateau de cohérence ne dépend pas de la dynamique, de la dispersion initiale ni apparemment du nombre de spins. Il ne correspond pas à une cohérence maximale, et sa valeur est d’environ 0.2 – 0.3. Mais durant ce plateau, il y a une évolution de la population de chaque spin. La population des spins peut osciller avant que la cohérence ne chute à 0. Le petit plateau est dû à l’interaction, laquelle tend à conserver tous les spins dans la même direction  $z$ . Un spin reste donc un peu cohérent avec son voisin.

Finalement, pour le couplage Ising-X (figure 4.20), comme pour le couplage d’Heisenberg, chaque spin suit l’évolution du spin moyen de la chaîne. Que le paramètre  $d_0$  soit petit ou grand, il y a une chute de la cohérence et une relaxation de la population vers le microcanonique. Peu importe le bain de frappes choisi et la dispersion initiale, il y a toujours un grand désordre dans la chaîne de spins dû à l’interaction. Le désordre semble être maximal.

Pour tous les couplages, si l’interaction décroît, il y a un mélange entre l’évolution sans interaction (ce que nous observons pour l’ensemble de spins) et celle due au couplage. La première partie de l’évolution dépend uniquement de la dispersion initiale, du bain de frappe choisi et du couplage si les spins sont couplés par une interaction d’Ising-X.

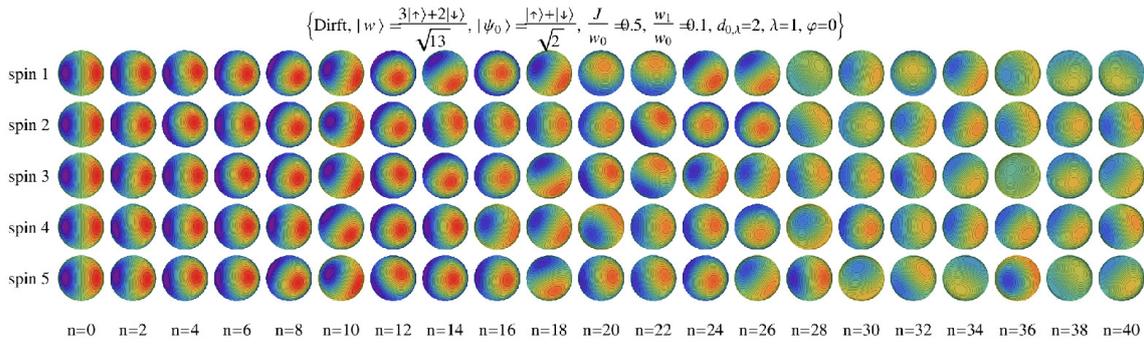


FIGURE 4.21 – Evolution de la distribution d’Husimi d’une chaîne de 5 spins couplés par une interaction d’Heisenberg de plus proches voisins. Chaque spin est soumis à un bain de frappes de dérive linéaire. La plus grande probabilité est représentée en rouge et la plus petite en bleu. Le processus d’intrication est aussi montré par la distribution d’Husimi. Dans ce cas, les sphères tendent à devenir vertes. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

## 4.2.2 Analyses des comportements des effets du couplage avec la distribution d’Husimi

Dans cette section nous voulons comprendre comment le couplage agit sur les spins soumis à un environnement classique. Pour ceci, il est intéressant d’utiliser la distribution d’Husimi et une analyse semi-classique. La distribution d’Husimi a été définie et analysée au chapitre 1.

### Interaction d’Heisenberg

Considérons une chaîne de spins couplés par une interaction d’Heisenberg. Sans frappe, si les spins sont initialement dans la même direction, ils ont un mouvement de précession autour de la direction  $z$  induite par le champ Zeeman, ce que nous avons vu figure 1.11. Si nous rajoutons des frappes, pour une même interaction et un même état initial des spins nous obtenons la figure 4.21. Au début, tous les spins sont orientés dans la même direction et bougent de la même manière pendant quelques frappes. A partir de la frappe 8, nous voyons que les spins commencent à être dans des directions différentes. Le désordre apparaît dans la chaîne. Plus le nombre de frappes augmente plus ce désordre augmente. Pour un grand nombre de frappes les spins deviennent intriqués avec leurs voisins. Aucun phénomène particulier n’est observé pour les spins du bord. En comparant les figures 1.11 et 4.21 nous remarquons que les spins n’ont plus de mouvement de précession lorsqu’ils sont frappés. Ils ont tendance à s’aligner dans la direction de la frappe sans toutefois l’atteindre complètement. Plus les spins sont fortement frappés plus ils vont avoir tendance à s’aligner dans la direction de la frappe.

Le couplage d’Heisenberg est un couplage isotrope. Il tend à aligner tous les spins dans la même direction. Si tous les spins sont initialement dans la même direction, et soumis à un bain de frappes régulier dans le temps ayant une très faible dispersion initiale ( $d_0 \approx 0$ ), ils sont frappés avec la même force et le même retard. Ainsi, à chaque instant, les spins conservent le même état. Le couplage ne modifie pas leurs orientations. L’entropie et l’intrication restent faibles.

Au contraire, si la dispersion augmente et/ou que le bain de frappes est irrégulier dans le temps, chaque spin va être frappé différemment de son voisin, c’est-à-dire avec une force et un retard différents. Un spin ne va pas évoluer de la même manière que son voisin et ils vont avoir des états différents. L’interaction va alors tendre à aligner les spins dans la même direction. Pour ceci les spins vont s’intriquer les uns avec les autres.

Les frappes entraînant du désordre dans les états des spins et l’interaction voulant les aligner sont deux effets en opposition. Les spins perdent leurs mouvements initiaux et vont vers la perte maximale de leurs informations : la distribution microcanonique.

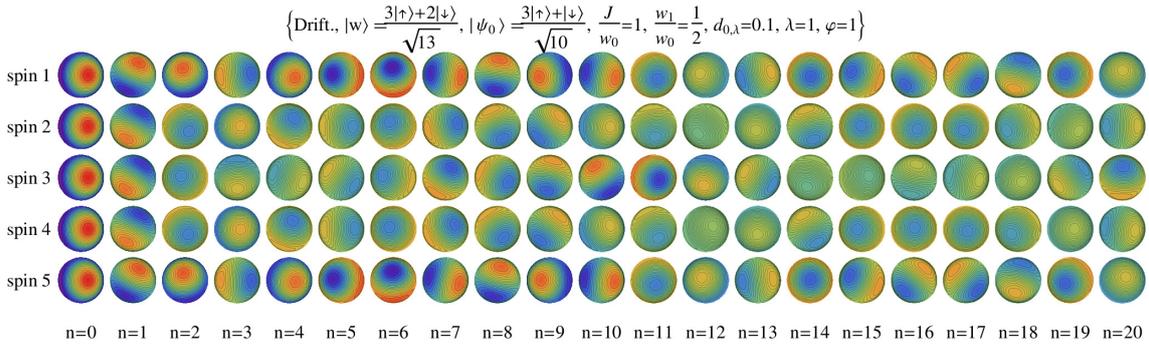


FIGURE 4.22 – Evolution de la distribution d’Husimi de chaque spin d’une chaîne couplée par une interaction de plus proches voisins d’Ising-Z et soumise à un bain de frappes de dérive linéaire. La plus grande probabilité est représentée en rouge et la plus petite en bleu. L’intrication est aussi représentée par la distribution d’Husimi. Dans ce cas, les sphères se rapprochent de la couleur verte. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

Tout ceci peut aussi s’expliquer en terme de gêne entre les spins (interprétation semi-classique). Une frappe est l’équivalent d’un champ magnétique pendant une très courte durée. Ainsi, au moment de la frappe, les spins vont avoir un mouvement de précession autour de celle-ci. Comme les frappes sont différentes d’un spin à un autre, ils ne vont pas tous avoir le même mouvement de précession. Les projections des précessions de deux spins voisins suivant les axes du couplage  $x, y$  et  $z$  montrent qu’ils se "recoupent". Ceci induit que les spins se gênent dans leur mouvement et de l’intrication apparaît.

### Couplage Ising-Z

La figure 4.22 montre l’évolution de la distribution d’Husimi d’une chaîne de spins couplés par une interaction d’Ising-Z. Deux comportements différents apparaissent : avant la dixième frappe, les sphères d’Husimi ne sont pas complètement vertes alors qu’elles le deviennent après. Ce premier comportement apparaît pendant le temps du petit plateau de cohérence dont nous avons parlé précédemment. Il y a un faible nombre de frappes pendant lequel les spins conservent de la cohérence et où la population peut osciller. De manière générale, après ce plateau, il y a une relaxation de la population vers le microcanonique et une chute à 0 de la cohérence (si  $|w\rangle \neq \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ , voir plus loin, à la section 4.3).

Pour comprendre ce phénomène, rappelons que sans frappe, le processus d’Ising-Z n’induit pas d’intrication, que les spins soient dans la même direction ou non.

L’intrication apparaissant peut être analysée comme le fait que les spins se gênent entre eux. À chaque frappe d’un bain caractérisé par une dispersion initiale et/ou une irrégularité de la frappe dans le temps, un spin va être orienté dans une direction différente des autres spins. Comme une frappe est l’équivalent d’un champ magnétique de faible durée, les spins vont avoir une micro-précession autour de la direction de ce champ. Pendant ce laps de temps, les projections des précessions de deux spins voisins suivant la direction  $z$  vont se "recouper". Les spins se gênent alors, ce qui induit de l’intrication.

Un phénomène apparaît et ne trouve pas d’explication semi-classique. Il peut provenir de processus purement quantiques. Si les spins sont tous frappés de la même manière (processus stationnaire) sans dispersion initiale, le processus d’intrication apparaît aussi au travers d’oscillations périodiques de la cohérence et de l’intrication (dues aux oscillations de Rabi) (ce que nous avons vu au chapitre 1 au travers des figures 1.9 et 1.12 pour des chaînes de spins non frappés). Pourtant les spins ont tous la même précession et sont tous dans la même direction.

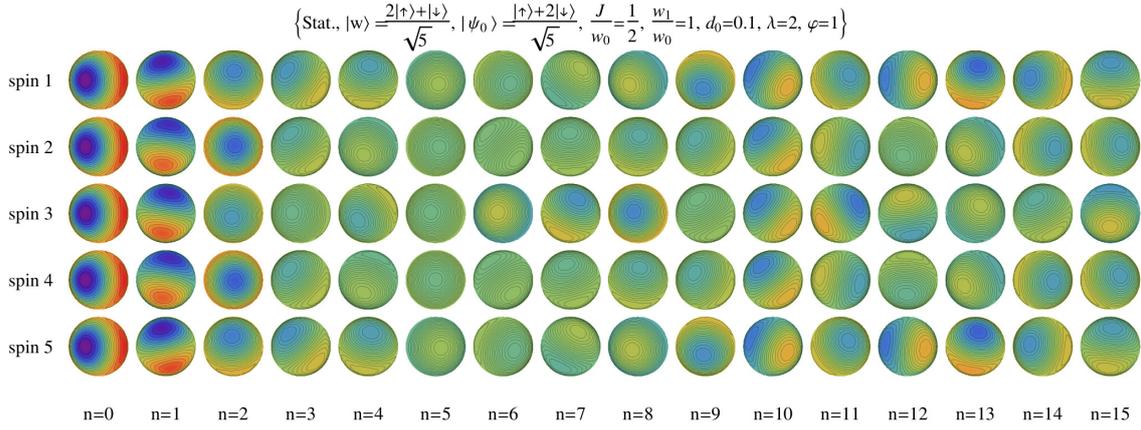


FIGURE 4.23 – Evolution de la distribution d’Husimi de chaque spin d’une chaîne de 5 spins couplés par une interaction d’Ising-X. Chaque spin est soumis à un bain de frappes stationnaire avec une faible dispersion initiale de la force et du retard de frappes. La plus grande probabilité est représentée en rouge et la plus petite en bleu. Le processus d’intrication est aussi montré par la distribution d’Husimi. Dans ce cas, les sphères deviennent vertes. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées.

### Couplage Ising-X

Nous avons déjà vu dans le chapitre 1 qu’une chaîne de spins couplés par une interaction d’Ising-X et non-frappés présentait de l’intrication. La frappe ne fait que rajouter du désordre dans le bain de spins comme le montre la figure 4.23. Il y a une modification de la direction des spins due à leurs précessions mais aussi aux frappes. Si une dispersion initiale est présente ou que le bain est irrégulier dans le temps, un spin est frappé différemment de ses voisins, il va avoir une précession différente de ses voisins car le champ total va être différent d’un spin à un autre. Les projections des précessions de deux spins voisins vont se recouper. Ceci induit une gêne dans le mouvement des spins. Une grande intrication entre les spins apparaît et elle se conserve.

## 4.3 Possibilités de conservation de l’ordre dans les systèmes de spins

En fonction du choix des paramètres de frappes, il est possible de réduire le phénomène de décohérence et d’empêcher le population de relaxer vers  $\frac{1}{2}$ .

### 4.3.1 Frappe dans la direction d’un vecteur propre

Les graphiques 4.24, 4.25 et 4.26 montrent l’évolution de la population en fonction de l’angle des frappes pour un ensemble de spins et une chaîne de spins couplés par une interaction d’Heisenberg et d’Ising-Z. Ces figures montrent que la relaxation est d’autant meilleure que l’angle entre la direction des frappes et un des vecteurs propres du spin est grand. De la même manière, les amplitudes des oscillations de Rabi diminuent avec la frappe se rapprochant d’un vecteur propre. Ces deux effets se comprennent facilement mathématiquement. Si  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$  ou  $|\downarrow\rangle$ , alors  $(\uparrow, \downarrow)$  sont aussi vecteurs propres de l’opérateur de frappe  $W$ . Ils sont donc vecteurs propres de l’opérateur de monodromie défini dans l’équation 3.3. La dynamique induit une phase entre les deux composantes de l’état quantique. Or la phase ne joue pas au niveau des populations, elles restent à leurs valeurs initiales. Une interprétation physique possible est que les oscillations de Rabi n’existent pas en classique. Or la frappe est dans la direction d’un vecteur propre, qui est une direction classique. Le système ne va donc pas osciller en terme de population car il n’y a pas d’oscillation classique.

La diminution de la relaxation de la population avec la frappe se rapprochant d’un état propre

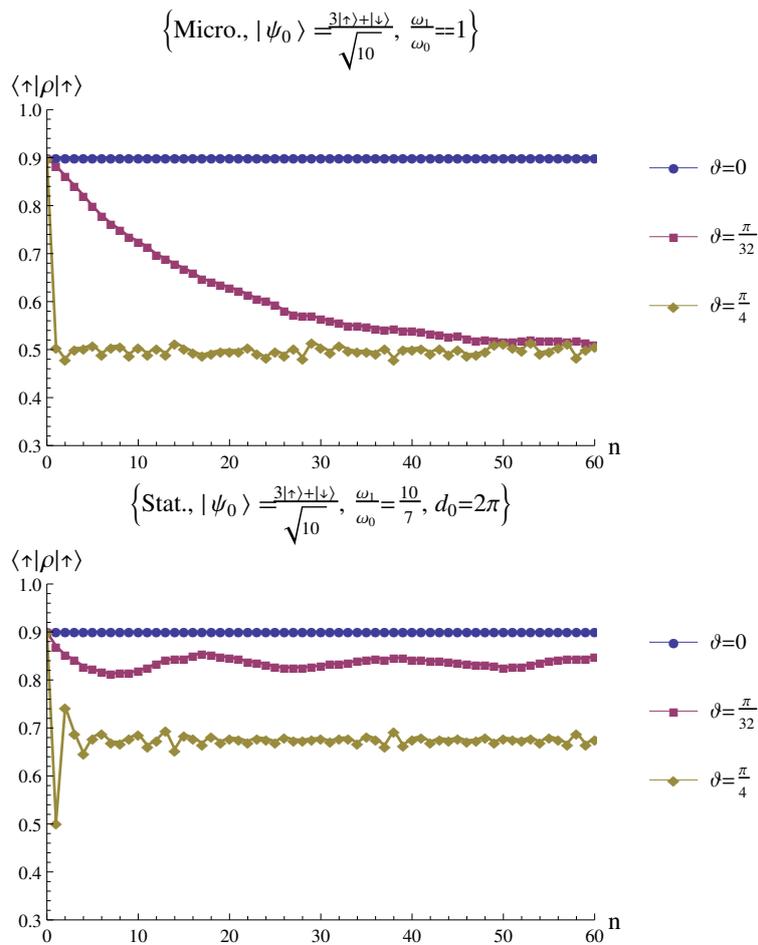


FIGURE 4.24 – Evolutions de la population du spin moyen d'un ensemble de spins en fonction du nombre de frappes et en fonction de  $\vartheta$  caractérisant la direction de frappe ( $|w\rangle = \cos \vartheta |\uparrow\rangle + \sin \vartheta |\downarrow\rangle$ ) en haut pour un bain de frappes microcanonique et en bas pour un bain de frappes stationnaire. La vitesse de relaxation augmente pour  $\vartheta$  loin de 0 ou  $\frac{\pi}{2}$ .

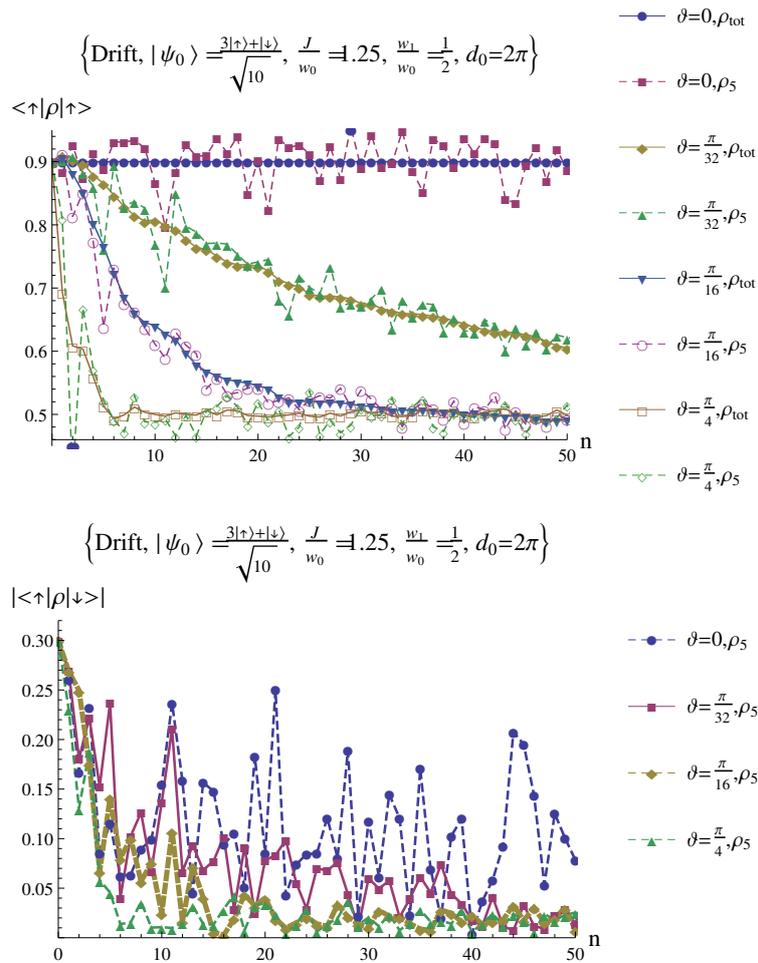


FIGURE 4.25 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin de la chaîne ( $\rho_5$ ) avec la variation de  $\vartheta$  ( $|w\rangle = \cos(\vartheta)|\uparrow\rangle + \sin(\vartheta)|\downarrow\rangle$ ). Chaque spin est soumis à un bain de frappes de dérive linéaire et est couplé par une interaction d’Heisenberg.

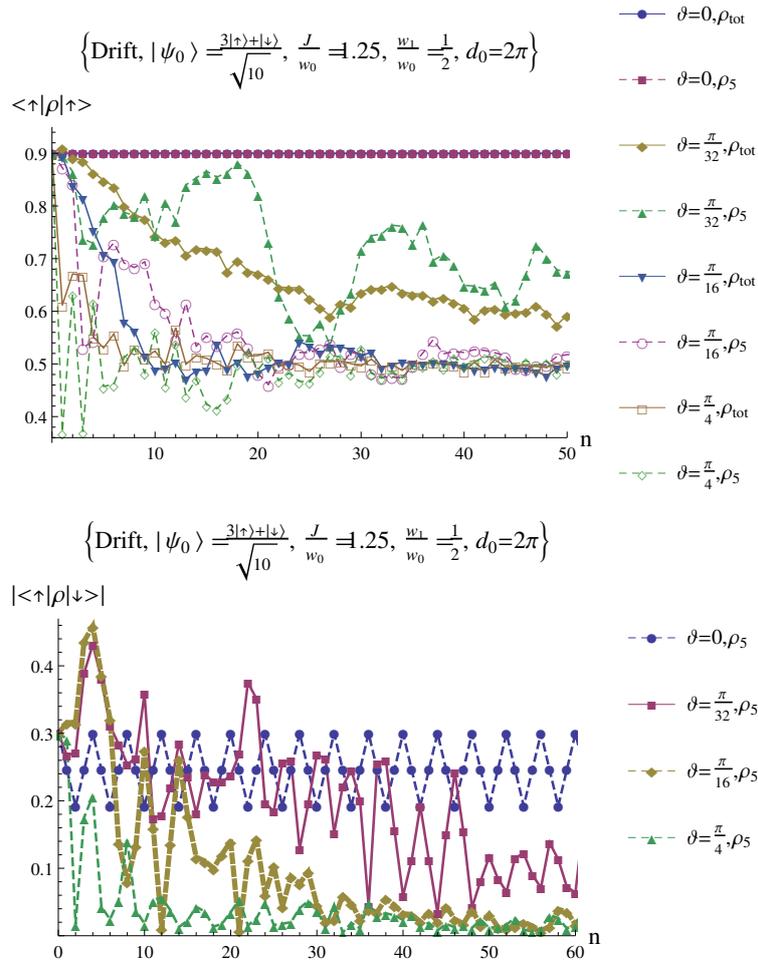


FIGURE 4.26 – Evolutions de la population et de la cohérence du 5ième spin ( $\rho_5$ ) et du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ) d’une chaîne de 10 spins couplés par une interaction d’Ising-Z. La direction de frappe est caractérisée par  $|w\rangle = \cos(\vartheta)|\uparrow\rangle + \sin(\vartheta)|\downarrow\rangle$ . Chaque spin est soumis à un bain de frappes microcanonique.

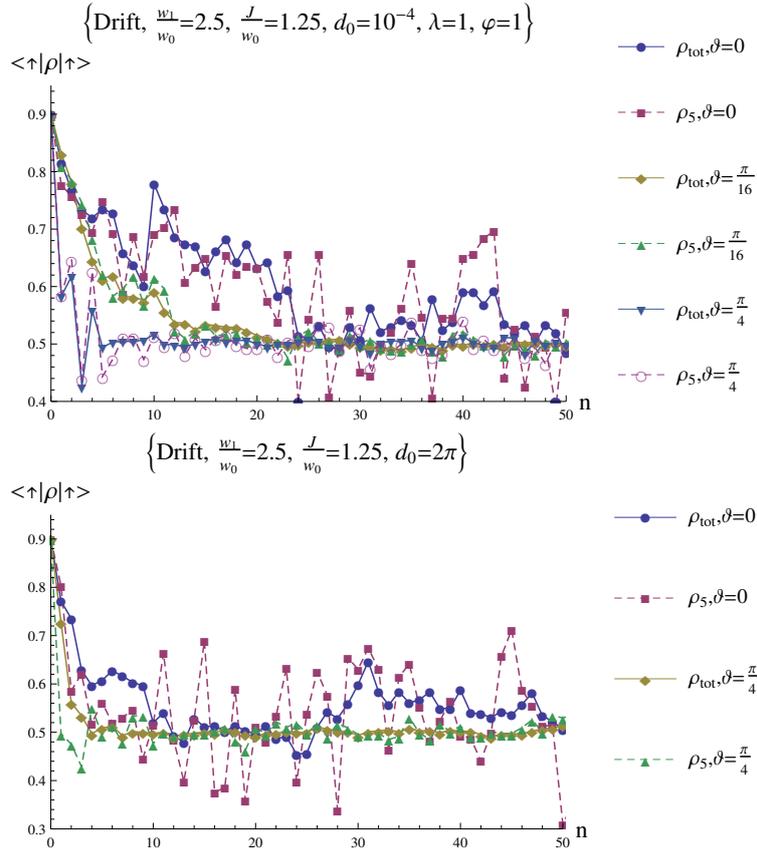


FIGURE 4.27 – Evolutions de la population du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin de la chaîne ( $\rho_5$ ). La direction des frappes est caractérisée par  $|w\rangle = \cos(\vartheta)|\uparrow\rangle + \sin(\vartheta)|\downarrow\rangle$ . Cette chaîne est soumise à un bain de frappes de dérive linéaire et est couplée par une interaction d’Ising-X. Le graphique du haut est pour une faible dispersion initiale, et le graphique du bas est pour une grande dispersion initiale. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

du spin est présente pour l’ensemble de spins et les couplages d’Heisenberg et d’Ising-Z. L’évolution obtenue pour la population d’un ensemble de spins en fonction de  $\vartheta$  est conservée pour une chaîne de spins car les vecteurs propres du couplage d’Heisenberg ou d’Ising-Z sont les mêmes que ceux de l’ensemble de spins.

Au contraire, la diminution de la relaxation de la population avec la frappe se rapprochant d’un état propre du spin n’est pas présente pour le couplage d’Ising-X comme nous pouvons le voir figure 4.27. Ceci se comprend parce que le couplage induit d’autres vecteurs propres de  $H$ . Nous observons simplement une légère diminution de la relaxation de la population avec la frappe se rapprochant d’un état propre du spin si le paramètre de dispersion initiale est très faible et que le dynamique classique n’est pas trop irrégulière dans le temps.

Contrairement à ce que nous avons observé pour la population, la perte de cohérence du spin moyen d’un ensemble de spins est d’autant meilleure que la frappe est dans la direction d’un vecteur propre comme le montre la figure 4.28. La superposition d’états n’existe pas en classique. Lorsque nous frappons dans une direction qui est une superposition d’états, nous créons encore de la superposition. Au contraire si nous frappons dans une direction propre, cet état est classique et le système voudrait se retrouver dans une configuration classique. Pour ceci il faut que la matrice densité soit un mélange statistique et qu’il y ait perte de cohérence.

La cohérence ne se comporte pas de la même façon pour le couplage d’Heisenberg, d’Ising-Z et

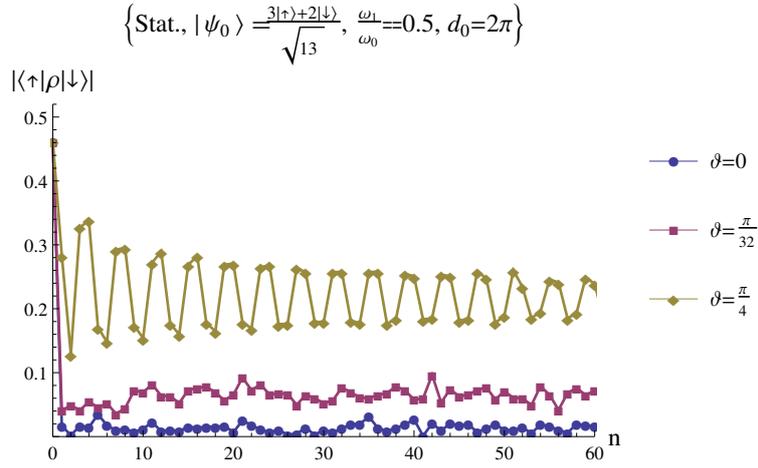


FIGURE 4.28 – Evolution de la cohérence du spin moyen d’un ensemble de spins soumis à un bain de frappes stationnaire ( $d_0 \gg 1$ ) en fonction de  $\vartheta$  ( $|w\rangle = \cos(\vartheta)|\uparrow\rangle + \sin(\vartheta)|\downarrow\rangle$ ).  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle \uparrow | \rho | \downarrow \rangle| = c_{min}$  diminue pour  $\vartheta$  proche de 0 ou  $\frac{\pi}{2}$ .

l’ensemble de spins. Pour une chaîne de spins, le processus de décohérence est d’autant plus important que la frappe tend vers une superposition équiprobable d’états ( $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ ) comme le montre les figures 4.25 et 4.26. Plus  $|w\rangle$  se rapproche d’un vecteur propre, plus la cohérence d’un spin oscille fortement et oscille périodiquement en revenant à sa valeur initiale pour le couplage d’Ising-Z. Ceci est un phénomène purement quantique qui ne trouve pas d’explication semi-classique.

### 4.3.2 Petite fréquence de Rabi du spin

Plus  $\frac{w_1}{w_0}$  ( $w_1$  la fréquence de Rabi et  $w_0$  la fréquence de frappes) diminue, plus le processus de décohérence et la relaxation de la population d’un ensemble de spins et d’une chaîne de spins couplés par une interaction d’Heisenberg sont lents, comme le montre la figure 4.29. Rappelons que  $\frac{2\pi}{w_1}$  représente le temps propre quantique, le temps de transition entre les deux états du spin et  $w_0$  est associé à la fréquence de frappes. Si  $w_0 \gg w_1$ , les spins n’ont pas le temps d’évoluer qu’ils sont tout de suite refrappés. Ils changent très lentement d’états, et la décohérence est faible.

Quand la direction de frappes est différente de celle des spins, et si  $w_1 \ll w_0$ , ce phénomène s’accompagne d’un saut de population. Pour un faible nombre de frappes, nous voyons apparaître sur la figure 4.30 un saut de population vers le haut ou vers le bas associé à un saut de la cohérence. Ce phénomène se produit principalement lorsque les frappes sont dispersées, régulières et pour  $\frac{w_1}{w_0} \ll 1$ . Nous avons vu que pour un bain de frappes régulier dans le temps présentant une dispersion des frappes initiales nulle, de fortes oscillations sont présentes. Nous pensons que dans ce contexte le saut de population est aussi présent mais qu’il est caché par les oscillations de la population.

Le saut de population provient du fait que les spins ont tendance à s’aligner avec la direction des frappes. Ceci se voit très clairement figure 4.31 en représentant l’amplitude du saut de population en fonction de l’angle entre la frappe et la direction du système. En particulier, nous voyons que le saut de population est nul lorsque la frappe est dans la direction d’un vecteur propre car il y a seulement un changement de phase.

Une étude similaire nous a permis d’analyser la variation du saut de cohérence en fonction de l’angle entre les directions du système et de la frappe. Les variations ressemblent très fortement à ce que nous observons pour la population mais avec un déphasage de  $\frac{\pi}{4}$ .

La variation de  $\frac{w_1}{w_0}$  s’explique de la même manière que précédemment. Plus  $w_0$  est grand par rapport à  $w_1$  moins le système a le temps d’évoluer entre deux frappes. Le système n’aura donc pas d’autre possibilité que de se rapprocher de la direction des frappes à force d’être frappé.

Nous avons aussi stipulé que les frappes devaient être régulières. Le processus d’alignement est d’autant plus efficace que les frappes sont fortes et sont toujours les mêmes. Si les frappes sont trop

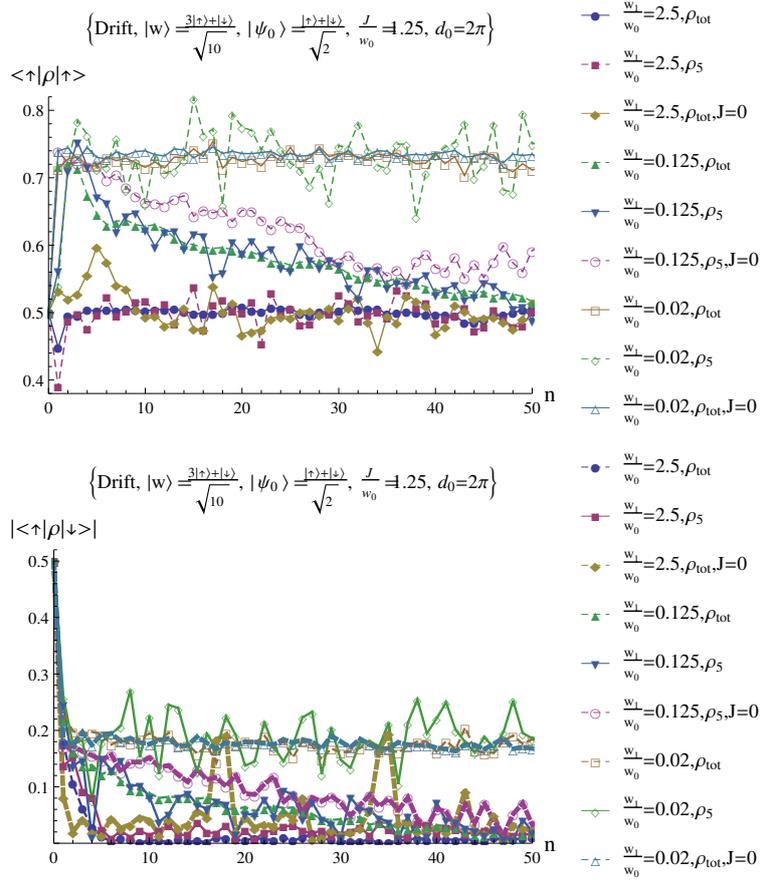


FIGURE 4.29 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ), du 5<sup>ème</sup> spin de la chaîne ( $\rho_5$ ) et du spin moyen d’un ensemble de 1000 spins ( $\rho_{tot}, J = 0$ ) en fonction de  $\frac{w_1}{w_0}$ . Chaque spin est soumis à un bain de frappes de dérive linéaire et les spins de la chaîne sont couplés par une interaction d’Heisenberg.

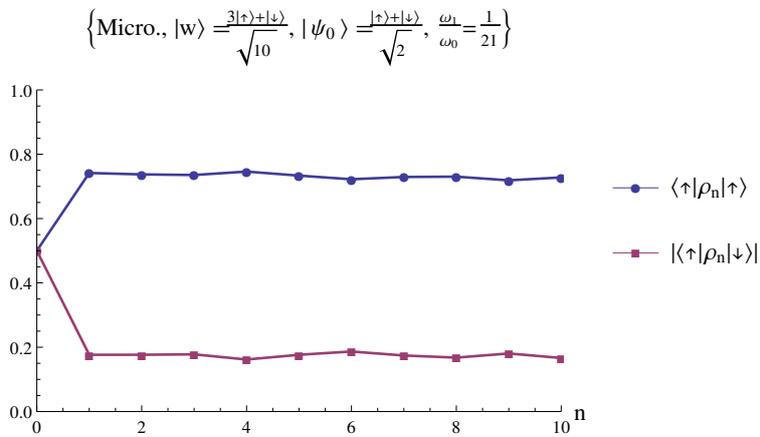


FIGURE 4.30 – Exemple d’un saut de population associé à une chute de la cohérence pour un ensemble de spins soumis à un bain de frappes microcanonique.

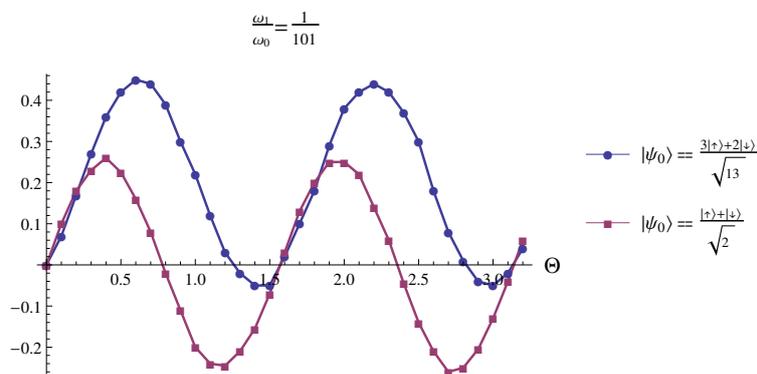


FIGURE 4.31 – Amplitude du saut de population en fonction de  $\Theta = \arccos\langle w|\psi_0\rangle$ . Les courbes peuvent être interpolées par des sinus.

Bains classiques	Comportements spécifiques des bains quantiques
Bain stationnaire	Décohérence nulle ou incomplète Relaxation nulle ou incomplète
Bain de dérive linéaire	Décohérence nulle ou avec de fortes fluctuations Relaxation nulle ou avec de fortes fluctuations
Bain microcanonique	Décohérence complète et rapide Relaxation complète et rapide
Bain Markovien	Oscillations de population nettement amorties

TABLE 4.1 – Résumé des différents comportements des ensembles de spins par rapport aux bains de frappes.

faibles, le saut de population n'est pas visible car la frappe n'est pas assez forte pour aligner les spins dans sa direction. Si le processus est irrégulier, la force de chaque frappe varie à chaque instant. Elle n'est donc pas toujours assez forte pour laisser entrevoir le saut de population et pour empêcher l'évolution libre des spins.

Le saut de population est donc d'autant moins visible que le désordre dans le bain de frappes est grand.

Cependant, pour les couplages Ising-Z et Ising-X, l'évolution avec  $\frac{w_1}{w_0}$  n'existe pas comme nous le voyons sur les figures 4.32 et 4.33. La population relaxe vers la distribution microcanonique et la cohérence chute à 0. Le désordre induit par ces couplages est trop important.

Au final, nous observons que les paramètres provoquant du désordre,  $d_0$  et la dynamique classique du bain de frappes, induisent dans le système de spins de la décohérence et de la relaxation de population. Le couplage entre les spins permet d'accentuer le désordre pour le couplage d'Heisenberg ou Ising-Z ou même d'en créer initialement pour le couplage Ising-X. En jouant sur les paramètres, il est possible de réduire cet effet en prenant par exemple  $\frac{w_1}{w_0}$  très petit pour le couplage d'Heisenberg. Les effets des différents paramètres sont résumés dans les tableaux 4.1 et 4.2

## 4.4 Discussion à propos de la taille de la chaîne

Nous avons vu le comportement des ensembles de spins et des chaînes de spins par rapport à différentes dispersions initiales et différentes dynamiques. Une étude intéressante serait de savoir comment

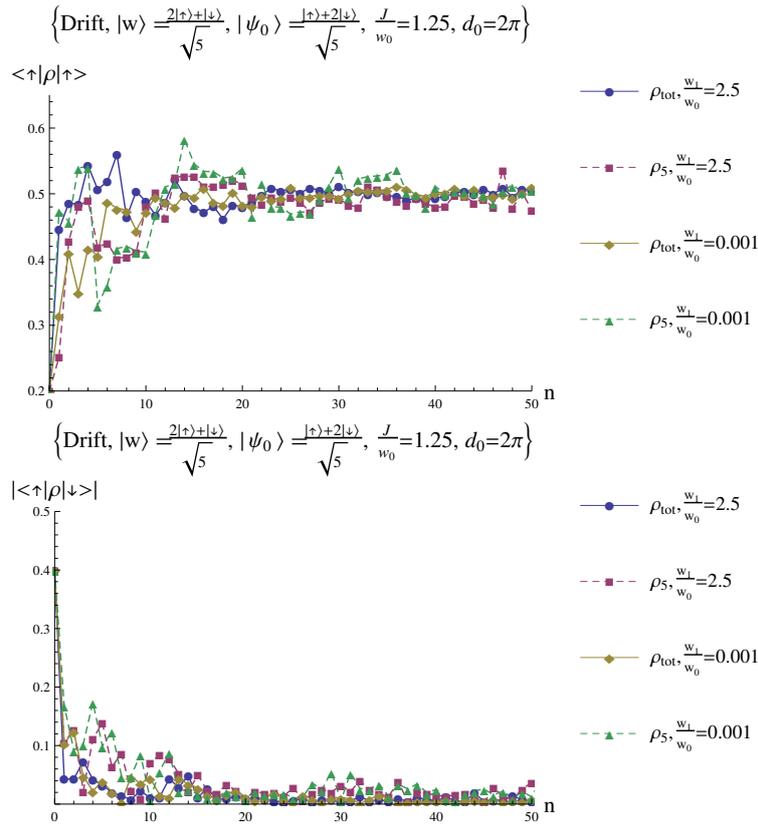


FIGURE 4.32 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin de la chaîne ( $\rho_5$ ). Chaque spin est couplé par une interaction d’Ising-Z et est soumis à un bain de frappes de dérive linéaire.

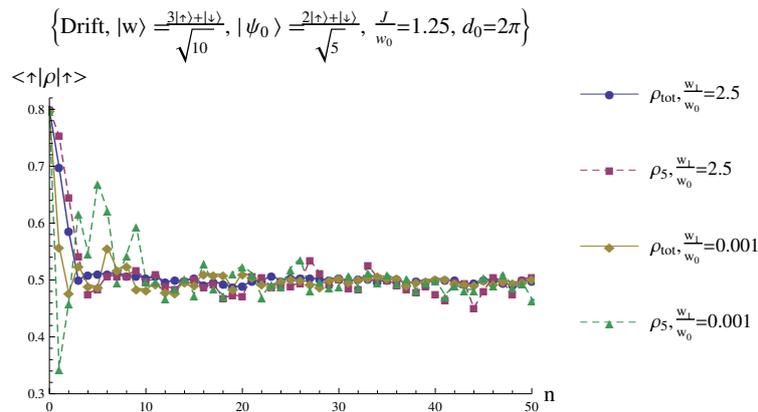


FIGURE 4.33 – Evolution de la population du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\rho_{tot}$ ) et du 5ième spin de la chaîne ( $\rho_5$ ) couplée par une interaction d’Ising-X par rapport à  $\frac{w_1}{w_0}$ . Chaque spin est soumis à un bain de frappes de dérive linéaire.

Paramètres	Aucun couplage	Heisenberg	Ising-Z	Ising-X
$d_0 = 0$	Oscillations de la population et de la cohérence pour une dynamique peu irrégulière	$d_0 < 1$ est équivalent au cas $J = 0$ : aucun désordre et aucune intrication	Désordre et intrication déjà forts si $\frac{J}{w_0}$ est important	Désordre et intrication déjà forts si $\frac{J}{w_0}$ est important
$d_0 \nearrow$	Efficacité de la décohérence et de la relaxation de la population $\nearrow$ . Amplitude des oscillations de population $\searrow$ . Le désordre $\nearrow$	Efficacité de la décohérence et de la relaxation de population $\nearrow$ . Amplitude des oscillations de populations $\searrow$ . Désordre et intrication $\nearrow$	Efficacité de la décohérence et de la relaxation de population $\nearrow$ . Désordre et intrication $\nearrow$	Efficacité de la décohérence et de la relaxation de population $\nearrow$ . Désordre et intrication $\nearrow$
$\frac{w_1}{w_0} \searrow$	Efficacité de la décohérence et de la relaxation de population $\searrow$ . La fréquence des oscillations de population $\nearrow$ . Effet du saut de population $\nearrow$	La relaxation de population $\searrow$ pour aller vers la direction de la frappe. Effet du saut de population $\nearrow$	Aucun effet	Aucun effet
$\frac{J}{w_0} \nearrow$		Le désordre et l'intrication $\nearrow$	Le désordre et l'intrication $\nearrow$	Le désordre et l'intrication $\nearrow$
$\vartheta \rightarrow 0$ ou $\frac{\pi}{2}$	Efficacité de la décohérence $\nearrow$ et de la relaxation de population $\searrow$ . Amplitude des oscillations de population $\nearrow$ . Effet du saut de population $\searrow$	La relaxation de population $\searrow$ et la cohérence des spins oscille plus avec de plus grandes amplitudes	La relaxation de population et la décohérence $\searrow$ et chaque spin oscille plus	Presque aucun effet
$\sigma \nearrow$	Amortissement des oscillations de population $\nearrow$	La décohérence et la relaxation de population $\nearrow$	La décohérence et la relaxation de population $\nearrow$ avec une interaction et une dispersion faible	Presque aucun effet
Phénomènes particuliers		Chaque spin suit l'évolution du spin moyen de la chaîne	Un "plateau" de cohérence	Intrication très grande

TABLE 4.2 – Résumé des différents comportements d'un ensemble de spins et d'une chaîne de spins frappés.

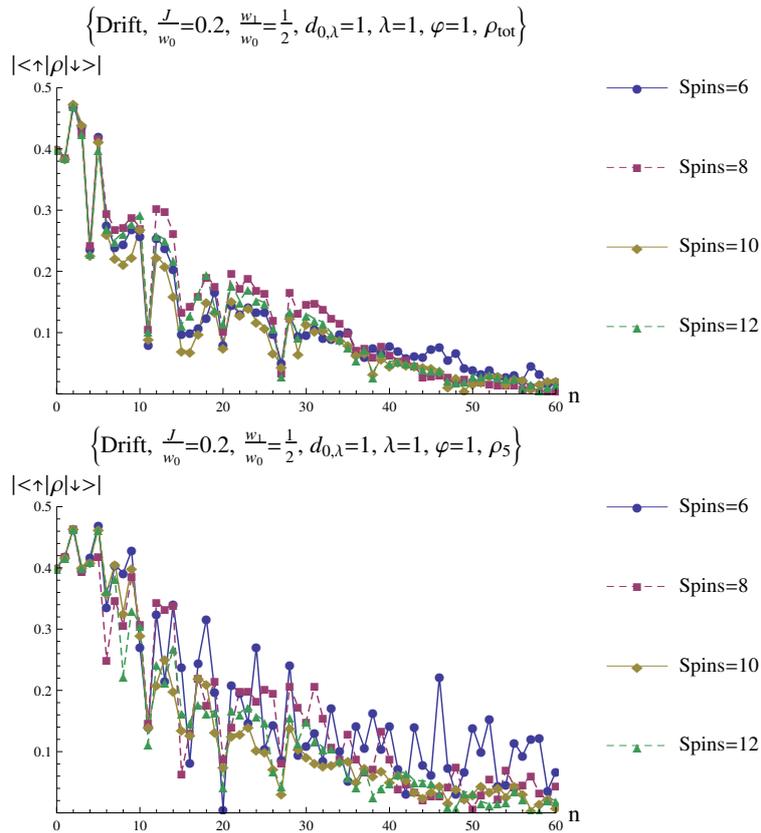


FIGURE 4.34 – Evolutions de la cohérence du spin moyen d’une chaîne de spins ( $\rho_{tot}$ ) et d’un spin de la chaîne ( $\rho_5$ ) pour différents nombres de spins. Les spins sont couplés avec leur plus proches voisins par une interaction d’Heisenberg et sont soumis à un bain de frappes de dérive linéaire. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

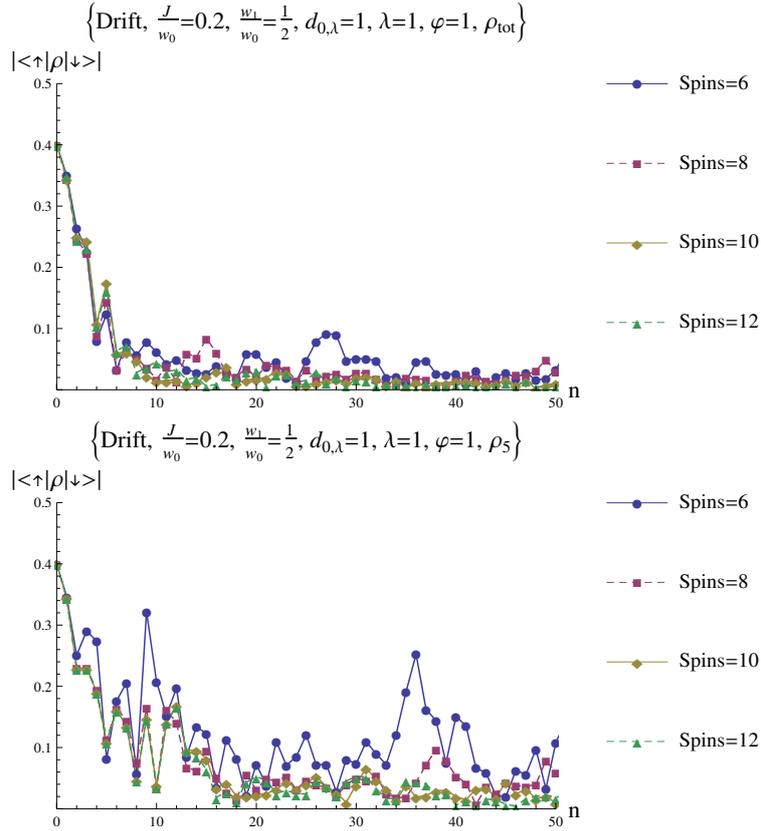


FIGURE 4.35 – Evolutions de la cohérence du spin moyen d’une chaîne de spins ( $\rho_{tot}$ ) et d’un spin de la chaîne ( $\rho_5$ ) pour différents nombres de spins. Les spins sont couplés avec leur plus proches voisins par une interaction d’Ising-Z et sont soumis à un bain de frappes de dérive linéaire. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

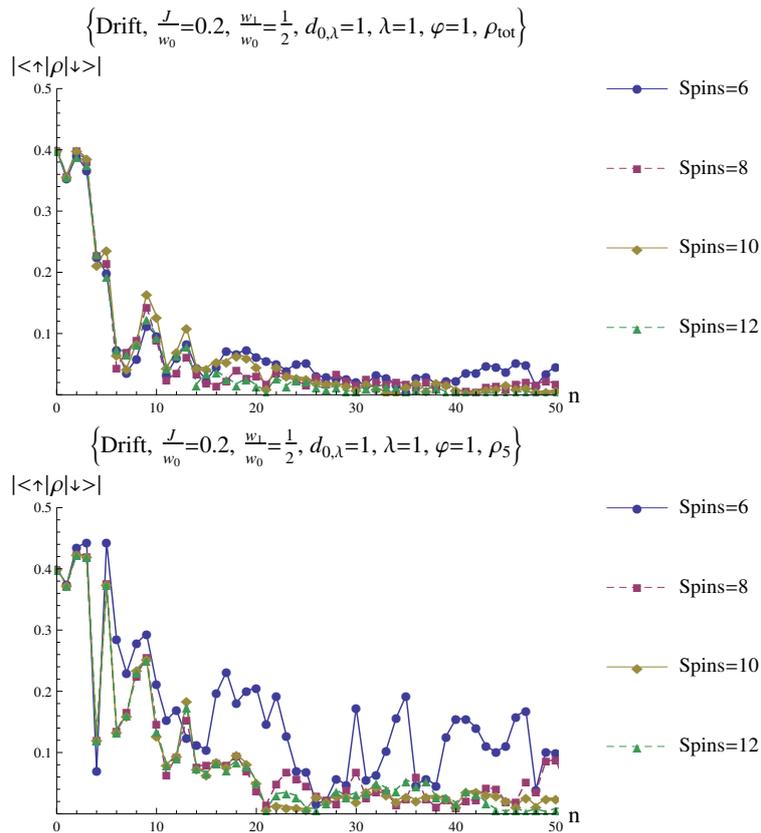


FIGURE 4.36 – Evolutions de la cohérence du spin moyen d’une chaîne de spins ( $\rho_{tot}$ ) et d’un spin de la chaîne ( $\rho_5$ ) pour différents nombres de spins. Les spins sont couplés avec leur plus proches voisins par une interaction d’Ising-X et sont soumis à un bain de frappes de dérive linéaire. Le couple  $(\lambda, \varphi)$  représente le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel les valeurs initiales des paramètres de force et de retard de frappes sont tirées. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

se comporte la chaîne de spins avec un nombre de spins augmentant. Pour ceci nous allons considérer des chaînes de 6, 8, 10 et 12 spins représentées figures 4.34 pour le couplage d'Heisenberg, figure 4.35 pour le couplage d'Ising-Z et 4.36 pour le couplage d'Ising-X. Nous voyons sur ces figures qu'il n'y a presque aucune modification du comportement de la cohérence. Les modifications que nous observons proviennent du fait que la dispersion des franges dans la chaîne varie d'une taille à une autre, comme le nombre de spins augmente.

Nous pouvons donc supposer que les comportements que nous avons observés dans ce chapitre restent les mêmes pour des chaînes beaucoup plus grandes.



# Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié le comportement d'un ensemble de spins et d'une chaîne de spins soumis à un bain de frappes. Ce bain est perturbé par un environnement classique lequel peut être stationnaire, Markovien, de dérive linéaire ou microcanonique. Les spins de la chaîne sont couplés par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg, d'Ising-Z ou d'Ising-X. Dans les tableaux 4.1 et 4.2, nous avons résumé les comportements de l'ensemble de spins et de la chaîne de spins en fonction des différents paramètres et de la présence d'interaction. L'évolution de la chaîne de spins couplés par une interaction d'Heisenberg est similaire à l'évolution d'un ensemble de spins sans interaction lorsque la dispersion initiale est faible. Pour une grande dispersion, les résultats obtenus avec une interaction d'Heisenberg sont similaires à ceux obtenus avec un bain de frappes microcanonique sans interaction. Mais il y a une différence essentielle : tous les spins adoptent le comportement du spin moyen dans une chaîne de spins caractérisée par une interaction d'Heisenberg. L'interaction d'Ising-Z induit plus de désordre que le couplage d'Heisenberg. Mais un petit plateau de cohérence apparaît. Les spins essaient de retenir leurs voisins avant d'aller vers la distribution microcanonique. L'interaction qui induit le plus de désordre est le couplage Ising-X. Il y a toujours une relaxation de la population et une chute de la cohérence vers la distribution microcanonique.

Le désordre dans le bain de frappes, lequel est dû à l'environnement classique, est transmis à la chaîne de spins. Celui-ci est plus grand pour une large dispersion initiale ou un bain de frappes désordonné. Si le paramètre d'interaction est grand, ceci augmente le désordre dans la chaîne de spins au travers de l'apparition d'une intrication. Donc, le désordre dans le bain de frappes est transmis aux spins de la chaîne lesquels le transmettent à leurs voisins sous forme d'intrication. Ceci est bien visible pour le couplage d'Heisenberg au travers de la comparaison entre une chaîne couplée et un ensemble de spins. Un plus grand nombre de spins est nécessaire pour obtenir le même comportement général que pour une chaîne de spins couplés.

Pour un bain de frappes ordonné avec une dispersion initiale pas trop grande, le couplage d'Heisenberg n'induit pas une évolution du comportement des spins vers la distribution microcanonique. Comme les spins sont frappés de la même manière, ils ne s'intriquent pas entre eux. Pour l'interaction d'Heisenberg ou d'Ising-Z, un bain de frappes Markovien est intéressant au travers de l'utilisation des premières frappes lesquelles n'induisent que peu de décohérence. Cependant, pour un bain très désordonné (comme le bain de frappes microcanonique) ou quand la dispersion initiale est grande, une conservation de l'ordre peut quand même être trouvée. Une frappe dans la direction d'un état propre du spin peut être utilisée pour les couplages d'Heisenberg ou d'Ising-Z. Pour l'interaction d'Heisenberg, prendre le facteur  $\frac{w_1}{w_0}$  très petit permet d'empêcher une relaxation de la population vers  $\frac{1}{2}$ . Ces analyses sont intéressantes pour un bain de frappes désordonné ou une large dispersion initiale.

L'étude réalisée ici est inchangée si nous considérons une modification de la direction de frappes à la place de la force et/ou du retard de frappes.

L'interaction d'Heisenberg étant le couplage le moins désordonné, il est le plus approprié pour faire du contrôle quantique. Pour ce contrôle, il est utile d'utiliser le bain de frappes le moins désordonné, le bain de frappes stationnaire. Cependant il faudrait trouver un environnement permettant ce contrôle pendant un laps de temps avant que la population et la cohérence de la chaîne de spins aillent vers la distribution microcanonique.



Troisième partie

**Bruit chaotique agissant sur un  
système quantique**



# Introduction

Dans cette partie nous utiliserons le même modèle que dans la partie précédente. Nous considérons un système de spins (qui peut être un ensemble de spins, une chaîne de spins ou une glace de spins) frappés par des trains d'impulsions magnétiques ultra-courtes. Avant d'atteindre les spins, ces trains vont passer dans un environnement classique qui va perturber la force et le retard de chaque frappe. Cet environnement est maintenant choisi chaotique. Les dynamiques chaotiques possèdent une propriété remarquable alors qu'ils sont parfaitement déterministes (contrairement aux bruits aléatoires de la partie précédente) : la sensibilité aux conditions initiales. Celle-ci stipule que si deux points soumis à une dynamique chaotique, sont initialement très proches mais non superposés, ils vont s'écarter à partir d'un temps qui correspond à l'horizon de prédictibilité. Ainsi si deux frappes sont initialement très proches (en terme de retard et de force de frappes), elles vont devenir différentes à partir de l'horizon de prédictibilité. Avant cet horizon, les frappes sont similaires, il n'y a donc pas de désordre dans le bain de frappes. Cependant après, les frappes deviennent différentes et du désordre apparaît dans le bain de frappes. La question majeure est de savoir comment cet horizon se traduit sur le système de spins, est-ce que pendant l'horizon de prédictibilité le système reste cohérent, est-ce qu'il présente un horizon plus grand, comment le désordre classique se transmet-il aux systèmes de spins ? Ceci constitue un des objectifs de cette partie.

Utilisant cet horizon chaotique, un autre but de cette partie est de réaliser du contrôle quantique. Il existe différents types de contrôles et nous pouvons citer par exemple le contrôle optimal [38]. Pour un tel type de contrôle nous voulons atteindre une cible de manière optimale et ceci se décompose en deux points. Le premier consiste à savoir si la cible est atteignable et le second à connaître quel chemin permet d'atteindre la cible avec un coût minimal. Dans cette partie nous n'utiliserons pas ce contrôle mais il pourrait faire l'objet d'études futures. Nous utiliserons deux exemples de contrôles plus simples. Le premier correspond au contrôle de la transmission d'information. Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'interaction d'Heisenberg induisait un même état pour deux spins voisins. Utilisant ce phénomène, si les spins voisins ne sont pas dans le même état, ils vont échanger leur information et c'est ce que nous appelons de la transmission d'information. Le second contrôle consiste à réaliser des portes logiques comme la porte *not*. Pour ce faire, nous utiliserons un champ de contrôle avec un processus stationnaire (concernant la force et le retard de frappes), sur lequel une perturbation chaotique vient agir. La réalisation de portes logiques constitue une question cruciale pour la réalisation d'ordinateurs quantiques. Dans ces ordinateurs, les bits qui n'ont que deux états sont remplacés par des qubits pouvant avoir une infinité d'états. Un spin pouvant représenter un qubit, ceci nous permettra de parler de l'information au lieu de l'état du spin. L'état up du spin représente la valeur 1 et l'état down, la valeur 0.

Nous utiliserons des bruits chaotiques académiques au travers principalement d'automorphismes continus sur le tore. Cependant il existe de vrais bruits chaotiques dans la nature, comme les systèmes de réaction-diffusion [26, 72, 82, 77, 33] et l'activité électrique dans les cellules [28, 29]. Il reste aussi la possibilité que nous imposions un bruit chaotique volontairement dans le contrôle, le but étant de transmettre le chaos classique aux systèmes de spins.

Dans ce chapitre, nous introduirons tout d'abord les notions de chaos classique et de chaos quantique. Nous étudierons ensuite le cas d'un ensemble de spins soumis à un train de frappes perturbés chaotiquement. Nous verrons que celles-ci entraînent un horizon de cohérence supérieur à l'horizon de prédictibilité pendant lequel les spins restent cohérents. Dans un troisième chapitre, nous regarderons la conservation de cet horizon de cohérence que ce soit en fonction du système quantique choisi (nous

prendrons le cas d'une chaîne de spins et d'une glace de spins) ou que ce soit en changeant de système dynamique classique (nous prendrons les exemples de la standard map et des systèmes dynamiques dissipatifs à trois dimensions). Finalement dans un dernier chapitre nous regarderons le contrôle de systèmes quantiques avant l'horizon de cohérence. Ce contrôle se décomposera en deux exemples : le contrôle par transmission d'information et le contrôle pour réaliser une porte logique.

# Chapitre 5

## Chaos classique et chaos quantique

### 5.1 Chaos classique

Afin de comprendre ce qu'est le chaos en dynamique classique, nous allons d'abord donner les définitions, propriétés, propositions et théorèmes associés pour ensuite les appliquer sur un exemple concret : la dynamique du chat d'Arnold. Le chaos classique a été étudié par de nombreux chercheurs [60, 107, 5, 32, 88].

#### 5.1.1 Définitions d'un système dynamique classique

Pour définir la notion de système dynamique classique, nous avons besoin de connaître ce qu'est une tribu et une mesure.

**Définition 1.** *Tribu*

Soit  $\Gamma$  un ensemble. On appelle tribu sur  $\Gamma$  un ensemble  $\mathcal{T}$  de parties de  $\Gamma$  qui vérifie

1.  $\mathcal{T}$  n'est pas vide
2.  $\mathcal{T}$  est stable par complémentaire. Autrement dit si on a  ${}^c b$  le complémentaire de  $b \in \mathcal{T}$ , alors  ${}^c({}^c b) \in \mathcal{T}$
3.  $\mathcal{T}$  est stable par union dénombrable. Autrement dit si  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathcal{T}$  alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_n \in \mathcal{T}$

Nous pouvons donner deux exemples de tribus :

- ◇ La tribu borélienne  $\mathcal{T}_B$  : c'est la tribu de tous les ouverts engendrés par des pavés  $]q, q + \Delta q[ \times ]p, p + \Delta p[$  (où dans le cas d'un espace des phases caractérisé par un Hamiltonien,  $q$  correspond à la coordonnée généralisée et  $p$  au moment conjugué associé).
- ◇ La tribu de Lebesgue  $\mathcal{T}_L$  : elle contient la tribu précédente et est complétée par la mesure de Lebesgue.

Juste à titre indicatif, comme la notion a été utilisée, introduisons la définition :

**Définition 2.** *Mesure de Lebesgue*

Soit  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$  l'espace mesurable  $\mathbb{R}$  muni de sa tribu borélienne. Il existe une unique mesure notée  $\lambda$  sur cet espace mesurable qui possède les propriétés suivantes :

1.  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall A \in B(\mathbb{R}), \lambda(a + A) = \lambda(A)$  (invariance par translation de la mesure de Lebesgue)
2.  $\lambda([0, 1]) = 1$
3.  $\lambda([a, b]) = b - a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Pour  $\Gamma$  nous pouvons utiliser la tribu borélienne. Celle-ci est généralement trop grossière et nous l'ajustons en rajoutant les ensembles de mesures de Lebesgue nulles qui ne s'y trouvent pas déjà ( $\mathcal{T}_L = \mathcal{T}_B \cap \{D \subset \Gamma, \text{vol}(D) = 0\}$ ).

**Définition 3.** *Mesure*

Une mesure sur l'espace des phases mesurable  $(\Gamma, \mathcal{T})$  est une application  $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$  telle que

- l'ensemble vide est de mesure nulle  $\mu(\emptyset) = 0$
- La mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, est la somme des mesures des ensembles

Si  $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$  avec  $\mu(\Gamma) = 1$ , nous dirons que  $\mu$  est une mesure de probabilité.

**Définition 4.** *Système dynamique classique continu en temps*

On appelle un système dynamique un triplet  $(\Gamma, F, d\mu)$  ou  $\Gamma$  est l'espace des phases,  $F$  est une application continue de  $\Gamma$  dans  $\Gamma$  et  $d\mu$  est une mesure d'intégration sur  $\Gamma$ . Les trajectoires de phase du système dynamique sont solutions de l'équation

$$\dot{X} = F(t, X(t)) \quad (5.1)$$

Si  $F$  ne dépend pas explicitement du temps,  $\dot{X} = F(X(t))$ , on dit que le système est autonome, dans le cas contraire on parle de système forcé.

**Définition 5.** *Flot*

On appelle flot d'un système dynamique  $(\Gamma, F, d\mu)$ , l'application continue  $\Phi^{t,s} : \Gamma \rightarrow \Gamma$  indexée par deux instants  $t \geq s$  telle que pour toute trajectoire de phase  $t \rightarrow X(t)$ , on a

$$\Phi^{t,s}(X(s)) = X(t) \quad (5.2)$$

Le flot est donc une application permettant l'évolution du système dynamique vers un temps ultérieur. L'application sur un système satisfait à :

**Propriété 2.** *Flot d'un système dynamique*

Le flot d'un système dynamique est un semi-groupe (car l'application  $\Phi^{t,s}$  n'est pas nécessairement réversible) continu de transformations, c'est à dire,  $\forall X \in \Gamma, \forall t \geq s \geq r$

$$\begin{aligned} \Phi^{t,t}(X) &= X \\ \Phi^{t,s} \circ \Phi^{s,r} &= \Phi^{t,s}(\Phi^{s,r}(X)) = \Phi^{t,r}(X) \end{aligned}$$

L'application du flot est réversible pour un système dynamique linéaire. Pour un système autonome on a  $\Phi^{t,s} = \Phi^{t-s}$  (le flot ne dépend que d'un indice correspondant au temps écoulé).

**Définition 6.** *Mesure préservée*

Nous disons qu'une mesure  $\mu$  est préservée par un flot  $\Phi^t$  (ou qu'un flot préserve la mesure) si

$$\forall D \in \mathcal{T}, \quad \mu(\Phi^t(D)) = \mu(D) \quad (5.3)$$

Le flot préserve la mesure si l'évolution de n'importe quelle région  $D \in \Gamma$  reste toujours de même mesure.

**Définition 7.** *Système conservatif et dissipatif*

On dit que  $(\Gamma, F, d\mu)$  est conservatif si la mesure  $\mu$  est préservée par le flot  $\Phi^t$  associé à  $F$ . Par contre si  $\mu(\Phi^t(D)) < \mu(D)$  pour  $t > 0$ , on dit qu'il est dissipatif.

**Définition 8.** *Attracteur*

Soit  $(\Gamma, F, d\mu)$  un système dynamique classique dissipatif. Un attracteur du système dynamique est une région de l'espace de phase vers laquelle converge toute trajectoire de phase passant à son voisinage. Le voisinage en question est appelé bassin d'attraction de l'attracteur.

Généralement l'attracteur a la topologie d'un point, d'un cycle, d'un tore ou d'un hypertore. Parfois c'est une structure fractale, nous disons alors que l'attracteur est étrange.

Nous pouvons nous intéresser à la linéarisation du flot. Nous posons  $X(s) = X_0$

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Phi^{t,s}(X_s) &= F(\Phi^{t,s}(X_s)) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi^{t,s}(X_0)}{\partial X_0^a} &= \sum_{b=1}^n \frac{\partial F(Y)}{\partial Y^b} \Big|_{Y=\Phi^{t,s}(X_0)} \left[ \frac{\partial \Phi^{r,s}(X_0)}{\partial X_0^a} \right]^b \end{aligned}$$

L'équation du Jacobien du flot est :

$$\Leftrightarrow \frac{\partial J(t,s)}{\partial t} = \partial F(X(t))J(t,s) \quad (5.4)$$

avec  $(J(t,s))_b^a = \frac{\partial \Phi_{t,s}^a(X_0)}{\partial X_0^b}$ ,  $J(s,s) = 1$  et  $(\partial F)_b^a = \frac{\partial F^a}{\partial X^b}$

Dans le cas d'un système linéaire et autonome, nous avons

$$J(t,s) = e^{(\partial F)(t-s)} \quad (5.5)$$

Tout système dynamique autonome à temps continu est associé à un système dynamique à temps discret relativement à une discrétisation du temps. Si  $\Delta t$  est son pas de temps,  $\Phi \equiv \Phi^{\Delta t}$ .

**Définition 9.** *Système dynamique à temps discret autonome*

On appelle système dynamique autonome à temps discret le triplet  $(\Gamma, \Phi, \mu)$  avec  $\Gamma$  un espace topologique,  $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  un automorphisme de l'espace des phases (le flot), et  $\mu$  une mesure sur  $\Gamma$ . La dynamique est définie par

$$X_{n+1} = \Phi(X_n) \quad (5.6)$$

avec  $X_n \in \Gamma$ . Le flot est conservatif si quelque soit  $D$  partie mesurable de  $\Gamma$ ,  $\mu(\Phi(D)) = \mu(D)$ , il est dissipatif si  $\mu(\Phi(D)) < \mu(D)$

### 5.1.2 Topologie des systèmes dynamiques conservatifs

Le principe d'ergodicité a été introduit par Ludwig Boltzmann en 1871 au cours de ses recherches en cinétique des gaz. Il fut ensuite développé pour s'appliquer aux systèmes dynamiques et à la théorie du chaos.

**Définition 10.** *Système ergodique*

Soit un système d'espace de phase  $\Gamma$  et de flot  $\Phi$  qui préserve la mesure de probabilité  $\mu$ . On dit que le système est ergodique si

$$\forall D \in \mathcal{T}, \quad \Phi^{-1}(D) = D \Rightarrow \mu(D) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad (5.7)$$

Ainsi, pour qu'un système soit ergodique, il faut que les seuls ensembles mesurables invariants par le flot vers le passé soient l'espace des phases total accessible, ou des domaines inaccessibles.

De la propriété d'ergodicité, nous avons :

**Propriété 3.** *Densité des orbites*

Si la mesure de probabilité est ergodique vis à vis du flot, alors pour  $\mu$ -presque tout  $X \in \Gamma$  on a  $\mu(\{\Phi^n(X), n \in \mathbb{N}\}) = 1$ , avec  $\bar{D}$  correspondant à  $D$  complété des points de son bord.

Ainsi, dans le cas d'un système ergodique, pour presque tout instant initial toute trajectoire va visiter tout l'espace au fur et à mesure des itérations. Elle va emplir tout l'espace.

Tous les systèmes ergodiques vérifient le théorème suivant

**Théorème 5.** *Théorème ergodique de Birkhoff*

Soit un système dynamique équipé d'une mesure ergodique. Pour toute fonction continue  $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$  telle que  $\int_{\Gamma} |f(X)| d\mu(X) < \infty$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\Phi^k(X)) = \int_{\Gamma} f(X) d\mu(X) \quad (5.8)$$

pour  $\mu$ -presque tout  $X \in \Gamma$

Ce théorème stipule que dans le cas d'une mesure ergodique, la moyenne temporelle au cours de son évolution est égale à la moyenne statistique de cette même grandeur [57].

**Définition 11.** *Topologiquement transitif*

Un flot est dit topologiquement transitif si pour chaque pair d'ouverts  $U, V \in \mathcal{T}$ , il existe un certain  $n$  tel que  $\Phi^n(U) \cap V \neq \emptyset$

**Définition 12.** *Mélangeant*

Un système dynamique conservatif  $(\Gamma, \Phi, \mu)$  est dit mélangeant si  $\forall A, B \in \mathcal{T}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A \cap \Phi^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) \quad (5.9)$$

### 5.1.3 Chaos

De nombreuses définitions concernant le chaos emploient la notion de sensibilité aux conditions initiales. Pour comprendre cette notion, prenons deux points très proches situés sur l'espace des phases. Le point qui nous intéresse est  $X(0)$  et nous faisons une toute petite erreur dessus  $\delta X(0)$  afin de définir le second point  $\tilde{X}(0) = X(0) + \delta X(0)$ . A l'instant initial, l'erreur entre les deux points est très faible :  $\exists \eta > 0$ , tel que quelque soit  $X(0)$ , quelque soit  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta X(0)$  tel que

$$\|\delta X(0)\| < \epsilon \quad (5.10)$$

et tel que le flot exhibe une sensibilité aux conditions initiales si  $\exists t > 0$  tel que

$$\|\Phi^t(X(0) + \delta X(0)) - \Phi^t(X(0))\| > \eta \gg \epsilon \quad (5.11)$$

Autrement dit, si deux points sont initialement très proches, ces points vont finir par s'écarter exponentiellement.

**Définition 13.** *Horizon de prédictibilité*

Soit  $\eta > 0$  la prédiction souhaitée. On appelle horizon de prédictibilité l'instant  $t_\eta$  le plus petit tel que  $\|\tilde{X}(t) - X(t)\| > \eta \forall t > t_\eta$ , sachant que  $\|\tilde{X}(0) - X(0)\| \ll \eta$ .

Le chaos est quelque chose de complexe à définir. Il existe plusieurs définitions. Celle qui semble être la plus utilisée est donnée par Robert Devaney [27]

**Définition 14.** *Définition du chaos*

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Alors  $\Phi : X \rightarrow X$  est dit chaotique sur  $X$  s'il satisfait les conditions suivantes :

- $\Phi$  possède une sensibilité aux conditions initiales
- $\Phi$  est topologiquement transitif

Il existe d'autres définitions du chaos. Nous pouvons citer encore par exemple la définition au sens de Wiggins

**Définition 15.** *Système dynamique chaotique*

Un système dynamique classique  $(\Gamma, \Phi, \mu)$  est dit chaotique s'il existe un sous ensemble invariant compact  $X$  de  $\Gamma$  tel que

- $\Phi|_X$  est mélangeant
- $\Phi|_X$  exhibe une sensibilité aux conditions initiales

Nous trouvons dans la littérature d'autres définitions de systèmes dynamiques chaotiques comme celle au sens de Li-York [58] ou encore Block-Coppel [10].

### 5.1.4 Les exposants de Lyapunov

#### **Théorème 6.** *Théorème de Lyapunov*

Soit  $(\Gamma, F, d\mu)$  un système dynamique autonome tel que la matrice de sa linéarisation au voisinage du point d'équilibre considéré  $\partial F$  ( $\partial F$  correspondant au point de linéarisation (point d'équilibre) de  $F$ ), soit diagonalisable. Soit  $\{Re(\lambda_i)\}_i$ , l'ensemble des parties réelles des valeurs propres de  $\partial F$ , on appelle ces nombres exposants de Lyapunov locaux. Soit  $(n_+, n_0, n_-) \in \mathbb{N}^3$  la signature des exposants de Lyapunov :  $n_+$  est le nombre d'exposants de Lyapunov positifs,  $n_0$  est le nombre d'exposants de Lyapunov nuls et  $n_-$  est le nombre d'exposants négatifs (avec les valeurs propres comptées autant de fois qu'elles sont dégénérées)

- $(n_+, n_0, n_-) = (0, 0, n)$ , alors 0 est un point fixe (exponentiellement stable par linéarisation) du système dynamique
- si  $(n_+, n_0, n_-) = (0, 1, n - 1)$ , alors 0 est stable et se trouve sur un cycle limite
- si  $(n_+, n_0, n_-) = (0, 2, n - 2)$ , alors 0 est stable et est entouré de cycles limites ou se trouve sur un tore limite
- si  $(n_+, n_0, n_-) = (0, 3, n - 3)$ , alors 0 est stable et se trouve sur un hypertore limite
- si  $(n_+, n_0, n_-) = (0, 4, n - 4)$ , alors 0 est stable et est entouré d'hypertores limites ou se trouve sur un hypertore limite
- si  $(n_+, n_0, n_-) = (0, n_0, n - n_0)$  avec  $n_0 > 4$  alors 0 est stable et est entouré d'hypertores limites
- si  $n_+ \neq 0$  alors 0 est instable

0 pour  $\partial F$  correspondant au point de linéarisation (point d'équilibre) de  $F$ .

Ce théorème est présent dans [107]. Les exposants de Lyapunov locaux sont définis au voisinage d'un point d'équilibre.

Nous définissons aussi l'exposant de Lyapunov asymptotique comme

$$\lambda = \limsup_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i} \log \left( \text{tr} \left( U_i^\dagger U_i \right) \right) \quad (5.12)$$

où  $U_i = \partial\Phi_{X_{i-1}} \dots \partial\Phi_{X_1} \partial\Phi_{X_0}$  avec  $X_n = \Phi^n(X_0)$ . Dans l'expression précédente, nous faisons une moyenne temporelle au travers du terme  $\frac{1}{i}$  et une sorte de moyenne dans l'espace de phase au travers de la trace et de la succession des  $X_n$ .

**Proposition 7.** *Soit  $(\Gamma, \Phi, \mu)$  un système dynamique classique. Si son exposant de Lyapunov asymptotique est positif, alors  $\Phi$  présente une sensibilité aux conditions initiales.*

Cette proposition peut être trouvée dans [88].

### 5.1.5 Exemple : Le chat d'Arnold

Afin de comprendre les notions abordées dans cette section, nous allons prendre appui sur un exemple : l'application du chat d'Arnold. Celui-ci est un modèle dynamique mis au point en 1967 par Vladimir Arnold [4]. Certains supposent qu'elle porte ce nom car Arnold aurait décrit ce modèle en s'aidant du dessin d'un chat. Le nom de cette application provient d'un jeu de mot purement anglais. Le traduction de "chat" est "cat" en anglais et Arnold l'utilisait en abréviation de "continuous automorphisms of the torus" soit en français "automorphismes continus sur le tore".

#### Modèle

Les équations de ce modèle sont

$$\begin{cases} \Phi(\theta) = \theta + \lambda \pmod{2\pi} \\ \Phi(\lambda) = \theta + 2\lambda \pmod{2\pi} \end{cases} \quad (5.13)$$

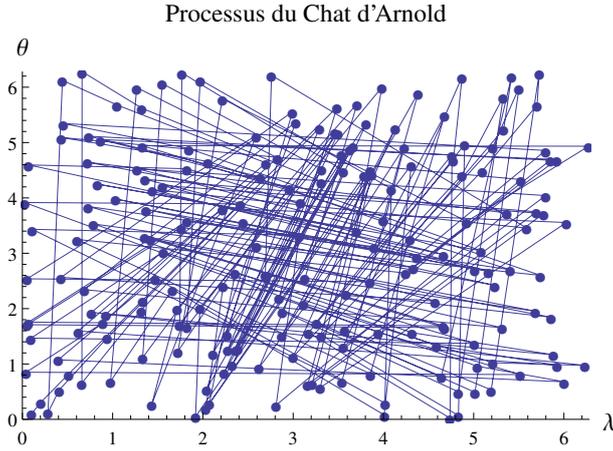


FIGURE 5.1 – Trajectoire d'un point suite à l'application du chat d'Arnold.

Elles constituent une bijection du tore  $\mathbb{T}^2$  sur lui-même. Autrement dit, nous partons de l'espace des phases (le tore  $\mathbb{T}^2$ ) et par application de ce flot, nous revenons dans l'espace de départ. La mesure du système dynamique est  $d\mu(\theta, \lambda) = \frac{d\theta d\lambda}{4\pi^2}$ .

L'application du chat d'Arnold est un système ne dépendant pas explicitement du temps, il est autonome. L'évolution de ce système est caractérisée par le flot.

### Exposants locaux de Lyapunov

Le point d'équilibre pour le système non-linéaire du chat d'Arnold ( $\mathbb{T}^2, \Phi, \frac{d\theta d\lambda}{4\pi^2}$ ) est  $(0, 0)$ . Ce point est aussi le point fixe du système linéarisé.

La matrice jacobienne du flot de l'application du chat d'Arnold est :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi^\theta}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir les exposants de Lyapunov, il faut diagonaliser cette matrice.

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (5.14)$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

Nous obtenons cette dernière matrice dans la base propre. Or, nous avons déjà stipulé que pour un système linéaire et autonome :  $J(t, s) = e^{(\partial F)(t-s)}$ . En posant  $s$  l'instant initial, nul :  $J(t, 0) = e^{(\partial F)(t)}$ , nous trouvons la matrice

$$\partial F = \begin{pmatrix} \frac{\ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})}{T} & 0 \\ 0 & \frac{\ln(\frac{3-\sqrt{5}}{2})}{T} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Nous obtenons les coefficients de Lyapunov pour  $T = 1$  :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) &\approx 0.9624 > 0 & \Rightarrow \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) &= 0 \\ \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) &\approx -0.9624 < 0 & & \end{aligned} \quad (5.16)$$

La trajectoire du point reste dans le domaine défini par les modulo, dans le carré de dimension  $2\pi \times 2\pi$ . L'application successive des équations du modèle nous donnent un système instable, qui diverge vers l'infini dans la direction de la dilatation. Mais le modulo permet au système de ne pas diverger, il est à l'origine des effets non-linéaires. Le système du chat d'Arnold est linéairement instable mais stabilisé par effet non-linéaire. Ceci est visible sur le schéma 5.1. L'espace est complètement rempli

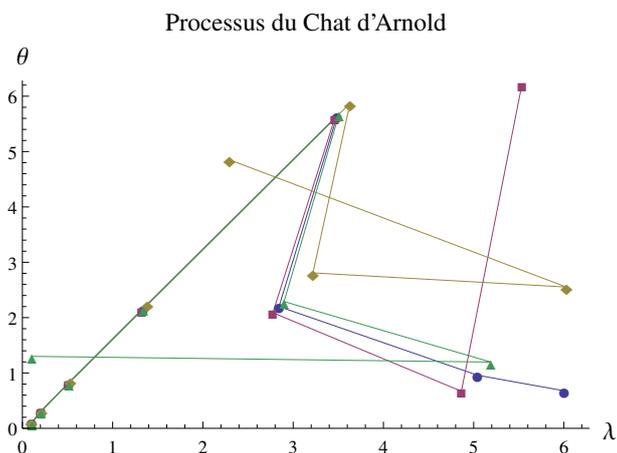


FIGURE 5.2 – Trajectoire de quatre points suite à l’application du chat d’Arnold (mise en évidence de la sensibilité aux conditions initiales). Les quatre points sont choisis initialement très proches et appartiennent à l’intervalle  $\theta \times \lambda \rightarrow [0.1, 0.11] \times [0.1, 0.11]$

par les trajectoires des différents points. Les exposants de Lyapunov sont aussi les exposants locaux en n’importe quel autre point de  $\mathbb{T}^2$  (ils ne dépendent pas du point de l’espace des phases). C’est une particularité de ce modèle.

### Direction de contraction et de dilatation

Nous avons précédemment déterminé les valeurs propres des équations du chat d’Arnold en cherchant les coefficients de Lyapunov. Sans le modulo, le système se dilate et se contracte selon les vecteurs propres du système d’équations. Nous obtenons la direction associée à la valeur propre  $\lambda_+$  caractérisée

par le vecteur  $v_+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$  et, la direction associée à la valeur propre  $\lambda_-$  et caractérisée par

le vecteur  $v_- = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ .

Les analyses des coefficients de Lyapunov et des vecteurs propres déterminés précédemment montrent explicitement qu’une région est étendue selon la direction donnée par le vecteur  $v_+$  et qu’elle est rétrécie selon la direction  $v_-$ .

### Sensibilité aux conditions initiales

Afin de visualiser la sensibilité aux conditions initiales dans le modèle du chat d’Arnold regardons la trajectoire de 4 points donnés par le graphique 5.2. Les quatre points sont choisis initialement très proches et appartiennent à l’intervalle  $\theta \times \lambda \rightarrow [0.1, 0.11] \times [0.1, 0.11]$ .

Très rapidement, ces points ne suivent pas la même trajectoire. La première itération (appliquer une fois les équations du modèle sur la position d’un point) semble encore assez bonne. Nous voyons ensuite que ces points s’éloignent sur la même ligne, pour après ne pas suivre le même chemin. Ceci se nomme la sensibilité aux conditions initiales. Une toute petite erreur initiale va devenir très grande au fur et à mesure des itérations.

Ce résultat se retrouve mathématiquement. À l'instant initial nous avons :

$$\begin{cases} X(0) \\ \tilde{X}(0) = X(0) + \delta X(0) = X(0) + \begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.17)$$

L'erreur peut se décomposer comme  $\delta X_1$  selon un des vecteurs propres de notre système d'équations et  $\delta X_2$  selon le second vecteur propre.

Pour une itération, en utilisant la diagonalisation de la matrice réalisée précédemment (il suffit juste d'appliquer notre modèle sur l'erreur décomposée dans la base de  $F$  diagonalisée), les points prennent les positions :

$$\begin{cases} X(t_1) \\ \tilde{X}(t_1) = X(t_1) + \begin{pmatrix} e^{\ln(\lambda_+)} \delta X_1 \\ e^{\ln(\lambda_-)} \delta X_2 \end{pmatrix} = X(t_1) + \begin{pmatrix} e^{\ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})} \delta X_1 \\ e^{\ln(\frac{3-\sqrt{5}}{2})} \delta X_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.18)$$

Ces équations nous montrent que l'erreur varie en fonction des valeurs propres. Comme ces dernières sont différentes de 1, les erreurs ne sont pas constantes. En particulier  $\lambda_+ > 1$  entraîne une augmentation de l'erreur et  $\lambda_- < 1$  une diminution de celle-ci. Il y a amplification exponentielle de  $\delta X_1$  avec le temps. Au bout de  $n$  itérations, nous aurons :

$$\begin{cases} X(t_n) \\ \tilde{X}(t_n) = X(t_n) + \begin{pmatrix} (e^{\ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})})^n \delta X_1 \\ (e^{\ln(\frac{3-\sqrt{5}}{2})})^n \delta X_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.19)$$

qui devient, lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini :

$$\begin{cases} X(t_\infty) \\ \tilde{X}(t_\infty) = X(t_\infty) + \begin{pmatrix} (e^{\ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})})^\infty \delta X_1 \\ (e^{\ln(\frac{3-\sqrt{5}}{2})})^\infty \delta X_2 \end{pmatrix} \approx X(t_\infty) + \begin{pmatrix} (e^{\ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})})^\infty \delta X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.20)$$

Notre raisonnement ne porte que sur la partie linéaire. La partie non-linéaire, le modulo, reste encore à appliquer pour avoir l'application du chat d'Arnold en entier. Pour un nombre infini d'itérations,  $\delta X_2$  s'est contractée alors que  $\delta X_1$  ne fait qu'augmenter de manière exponentielle. L'erreur commise sur le point de départ induit que la prédiction va être mauvaise à cause de l'instabilité dans la prédiction de la dilatation. L'évolution ne restera précise qu'à court terme. Ceci correspond, comme nous l'avons stipulé plus haut, à la sensibilité aux conditions initiales.

Il est possible de savoir au bout de combien d'itérations la prédiction sera fausse :  $\frac{1}{\ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})} = 1.03$ .

La première itération est à peu près fiable mais, à partir de la seconde, ce ne sera plus le cas. Ceci est en accord avec ce que nous avons remarqué sur le graphique précédent.

## Densité des orbites

A partir du flot et de la préservation de la mesure, nous pouvons montrer que  $\forall(\theta, \lambda) \in \mathbb{T}^2$ ,  $\{\Phi^n(\theta, \lambda)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $\mathbb{T}^2$ . C'est-à-dire que tout, ou presque tout l'espace du tore est atteint par le flot partant d'un point.

Confirmons tout d'abord que la mesure est préservée. En reprenant ce que nous avons vu sur le flot, nous avons de manière générale :  $\mu(\Phi^t(D)) = \int_{\Phi^t(D)} \frac{d\theta d\lambda}{4\pi^2} = \int_D |J(\theta, \lambda | \theta_{-t}, \lambda_{-t})| \frac{d\theta_{-t} d\lambda_{-t}}{4\pi^2}$ . Si les coordonnées avant application du flot sont  $\theta, \lambda$  et  $\tilde{\theta}, \tilde{\lambda}$  après application de celui-ci ( $\Phi(\theta, \lambda) = (\tilde{\theta}, \tilde{\lambda})$ ), et en utilisant l'équation ci-dessus, nous avons :

$$\int_{\Phi(D)} \frac{d\theta d\lambda}{4\pi^2} = \int_D |J(\theta, \lambda | \tilde{\theta}, \tilde{\lambda})| \frac{d\tilde{\theta} d\tilde{\lambda}}{4\pi^2} \quad (5.21)$$

$$J(\theta, \lambda | \tilde{\theta}, \tilde{\lambda}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}} & \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\lambda}} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{\theta}} & \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{\lambda}} \end{vmatrix}$$

avec les  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{\lambda}$  vérifiant les équations du chat d'Arnold :

$$\begin{cases} \theta &= \tilde{\theta} + \tilde{\lambda} & \text{mod}(2\pi) \\ \lambda &= \tilde{\theta} + 2\tilde{\lambda} & \text{mod}(2\pi) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \\ \Rightarrow \int_{\phi(D)} \frac{d\theta d\lambda}{4\pi^2} &= \int_D \frac{d\tilde{\theta} d\tilde{\lambda}}{4\pi^2} \\ \Rightarrow \mu(\Phi(D)) &= \mu(D) \end{aligned} \tag{5.22}$$

$\forall D \subset \mathbb{T}^2$ .

La mesure  $\mu$  est préservée par  $\Phi$ .

Revenons à ce que nous voulions démontrer, à savoir  $\forall (\theta, \lambda) \in \mathbb{T}^2$ ,  $\{\Phi^n(\theta, \lambda)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $\mathbb{T}^2$ . Soit  $(\theta, \lambda) \in \mathbb{T}^2$  un point non-cyclique<sup>1</sup> et soit  $D$  la plus grande région connexe non-cyclique non-atteinte par  $\{\Phi^n(\theta, \lambda), n \in \mathbb{Z}\}$ . Nous procédons par l'absurde en supposant que  $D$  n'est pas de mesure nulle. Une région est connexe, si c'est un domaine (surface, volume, ...) fermé par une seule et unique frontière extérieure. Mais, elle peut contenir des frontières intérieures. De ce fait  $\Phi^{-n}(D)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , n'est pas non plus atteinte sinon la région  $D$  serait atteinte après  $n + m$  itérations, avec  $m$  correspondant au nombre d'itérations pour que  $\phi^m(\theta, \lambda) \in D$ . Autrement dit, si  $D$  est cyclique, alors  $\mu(D) = 0$  et comme c'est la plus grande région non-atteinte par le flot, toutes les régions non-atteintes sont de mesure nulle et l'orbite est donc dense.

$D$  et tous les  $\Phi^{-n}(D)$  sont deux à deux disjointes. Si les ensembles n'étaient pas disjointes, des surfaces se recouperaient. A ce moment-là, nous pourrions construire une région connexe plus grande (formée par les surfaces se recoupant), ce qui est incompatible avec ce que nous avons dit avant. Sauf si  $\exists n$  tel que  $\Phi^n(D) = D$ .  $D$  ne serait alors constitué que de points cycliques. Or l'ensemble des points cycliques est de mesure nulle (nous admettrons ce fait sans plus de démonstration). Les régions étant deux à deux disjointes, nous avons alors :

$$\mu(\cup_{n=0}^{+\infty} \Phi^{-n}(D)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\Phi^{-n}(D)) \tag{5.23}$$

Or la mesure est préservée donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\Phi^{-n}(D)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(D) \tag{5.24}$$

nous obtenons une équation indépendante de  $n$ . Le résultat est forcément l'infini dans le cas où  $\mu(D) \neq 0$ .

L'espace  $\mathbb{T}^2$  correspond à l'espace des phases d'un tore. De ce fait son volume est  $\mu(\mathbb{T}^2) = 1$ . De plus, comme  $\cup_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}(D) \subset \mathbb{T}^2$  (car  $D \subset \mathbb{T}^2$ ),  $\mu(\cup_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}(D)) \subset \mu(\mathbb{T}^2)$ , ce que nous avons obtenu avant est impossible et  $\mu(D) = 0$ . Il n'existe pas de région accessible non atteinte par le flot et  $\{\Phi^n(\theta, \lambda)\}_{n \in \mathbb{N}}$  atteint presque tout  $\mathbb{T}^2$ . La formulation *presque tous* est utilisée car tous les points qui ne vérifient pas cette propriété forment un ensemble de mesure nulle.

Le flot préserve la mesure si l'évolution de n'importe quelle région  $D \subset \mathbb{T}^2$  reste toujours de même mesure. Les exposants de Lyapunov que nous avons précédemment calculés confirment ce fait car ils s'annulent, signifiant que la contraction se compense avec la dilatation.

1. un point ou une région  $D$  est cyclique si il existe  $n$  tel que  $\Phi^n(D) = D$ .

## Ergodicité

Pour le chat d'Arnold, nous avons déjà démontré que le flot préserve la mesure. Regardons si le système est aussi ergodique. Soit  $D \subset \mathbb{T}^2$  tel que  $\Phi(D) = D$ . Nous avons montré précédemment que  $\{\Phi^n(\theta, \lambda)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $\mathbb{T}^2$  pour presque tout  $(\theta, \lambda)$ . De ce fait

$$\overline{\cup_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D)} = \mathbb{T}^2 \quad (\text{sauf si } \mu(D) = 0)$$

Comme  $\Phi(D) = D$ ,

$$\begin{aligned} \cup_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D) &= \cup_{n=0}^{\infty} D = D \\ \Rightarrow \overline{D} &= \mathbb{T}^2 \end{aligned}$$

La mesure de  $D$  est équivalente à celle de  $\overline{D}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu(D) &= \mu(\mathbb{T}^2) \\ \Rightarrow \mu(D) &= 1 \end{aligned}$$

Donc  $\Phi(D) = D \Rightarrow \mu(D) = 1$  si  $D$  n'est pas constituée que de points cycliques. Si au contraire,  $D$  est constituée seulement de points cycliques  $\mu(D) = 0$ .

## 5.2 Chaos quantique

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés du chaos quantique [41] et aux méthodes permettant de différencier les états liés, les états de diffusion et les états chaotiques.

### 5.2.1 Discussion sur la notion de chaos quantique

$P_{surv}$  permet de définir le régime quantique par analogie avec la mécanique classique [65].  $P_{surv}$  est la probabilité de survie de l'état initial, autrement dit  $P_{surv}(t)$  est la probabilité pour que l'état du système quantique ressemble à l'état de départ.

$$P_{surv}(t) = |\langle \psi(0) | U(t, 0) | \psi(0) \rangle|^2 \quad (5.25)$$

L'état quantique est supposé être l'analogie du point de l'espace de phase en mécanique classique. L'analogie entre les différents régimes classiques et quantiques est la suivante :

- Point fixe de la mécanique classique : la trajectoire de phase reste toujours sur le même point. Son analogue quantique est  $P_{surv}(t) = 1$  (quelque soit  $t$ ) (à tout instant nous restons sur l'état initial). L'état quantique de départ est alors un état propre (discret). Nous dirons que nous nous trouvons dans un état lié. La dynamique est stationnaire.
- Cycle en mécanique classique : si nous partons d'un point du cycle, nous y revenons périodiquement. L'analogie quantique est  $P_{surv}(t)$  est périodique (nous revenons périodiquement à l'état quantique initial). Dans les deux cas, nous allons parler d'état lié. La dynamique est dite périodique.
- Tore invariant (si la dynamique part sur le tore, elle reste sur le tore : le tore est stable sous l'effet de la dynamique, il est invariant sous l'effet du flot) en mécanique classique : si nous partons d'un point du tore, nous revenons dans son voisinage périodiquement (trajectoire quasi-périodique). L'analogie quantique est  $P_{surv}(t)$  est quasi-périodique (nous revenons régulièrement à un état très proche de l'état initial (mais pas avec une probabilité de 1 seulement proche de 1). Nous sommes toujours dans un état lié.

- Attracteur étrange et chaos hamiltonien : si nous partons d'un point de l'attracteur (ou de l'espace de phase accessible pour le chaos Hamiltonien) nous revenons sans cesse dans son voisinage grossier mais de manière erratique, sans aucune régularité. L'analogie quantique est  $P_{surv}(t)$  présentant des oscillations erratiques avec une décroissance globale vers 0 mais avec des résurgences de probabilités non-nulles (globalement nous ne revenons pas vers l'état quantique initial mais de temps à autre, de manière erratique, nous avons un état qui ressemble un peu à l'état initial). Nous sommes dans un état chaotique.
- Pas d'attracteur ni de sous-variété stable : nous quittons définitivement le point initial et la trajectoire s'en éloigne à l'infini. L'équivalent quantique est  $P_{surv}(t)$  décroît vers 0 et y reste (nous ne retrouvons jamais un état quantique ressemblant à l'état initial). Nous sommes dans le cas d'un état de diffusion. La dynamique est dite de diffusion.

C'est donc à travers le comportement de  $P_{surv}$ , par analogie avec les comportements de récurrences des trajectoires classiques, que nous définissons les régimes quantiques (et donc le chaos quantique). Pour résumer :

- État lié classique : la trajectoire de phase revient dans le voisinage du point de départ quasi-périodiquement (voir périodiquement, voir ne change jamais). État lié quantique : la probabilité de retour à l'état initial ( $P_{surv}$ ) est quasi-périodique (incluant le cas périodique et le cas stationnaire).
- État de diffusion classique : la trajectoire de phase ne revient jamais dans le voisinage du point de départ. État de diffusion quantique : la probabilité de retour à l'état initial tend vers zéro de façon définitive.
- État chaotique classique : la trajectoire de phase revient erratiquement dans un voisinage grossier du point de départ. État chaotique quantique : la probabilité de retour à l'état initial tend globalement vers 0 avec des résurgences erratiques de probabilités non-nulles.

Le problème est qu'il est difficile d'analyser le comportement de  $P_{surv}$ . Graphiquement, nous pouvons facilement confondre des oscillations quasi-périodiques complexes avec des résurgences erratiques. Nous pouvons aussi avoir des oscillations quasi-périodiques comme des pics périodiques séparés par de grandes plages de probabilités nulles, et si nous traçons sur une durée trop courte, cela ressemble à une décroissance vers 0. Pour éviter ces confusions, nous pouvons tracer  $p_{cum}$  et  $p_{moy}$ .

$$p_{cum}(t) = \int_0^t p(t') dt' \quad (5.26)$$

$$p_{moyen}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t p(t') dt' \quad (5.27)$$

- État lié :  $P_{surv}$  est quasi-périodique alors  $p_{cum}$  croît linéairement et  $p_{moy}$  tend vers une valeur asymptotique non-nulle.
- État de diffusion :  $P_{surv}$  tend vers 0 alors  $p_{cum}$  tend vers une valeur asymptotique non-nulle et  $p_{moy}$  tend vers 0
- État chaotique :  $P_{surv}$  décroît vers 0 avec des résurgences non nulles alors  $p_{cum}$  croît non-linéairement et  $p_{moy}$  tend vers 0

$p_{moy}$  et  $p_{cum}$  sont des outils pour analyser le comportement de  $P_{surv}$  qui définit le comportement dynamique de l'état quantique.

### 5.2.2 Critères du chaos quantique

Nous donnerons ici quelques exemples de méthodes permettant de différencier les états liés, les états de diffusions et les états chaotiques. La décohérence dans le chaos quantique a déjà été étudiée dans [51].

### Le théorème de RAGE

D'après le théorème RAGE (Ruelle, Amrein, Georgescu, Enss) [65, 78] Nous avons :

- Les états liés sont des superpositions d'états propres associés au spectre purement ponctuel de  $H$ .
- Les états de diffusion sont des superpositions d'états propres associés au spectre absolument continu de  $H$ .
- Les états chaotiques sont des superpositions d'états propres associés au spectre singulièrement continu (fractal) de  $H$ .

$H$  étant l'Hamiltonien du système quantique (ou son opérateur de quasi-énergie).

### Ressemblance entre l'état quantique et un portrait de phase classique

La méthode consiste à tracer la distribution de probabilité de ressemblance entre l'état quantique et les points de l'espace des phases classiques [41], en général avec la distribution de Wigner ou la distribution d'Husimi

$$h(p, q) = |\langle p, q | \rho | p, q \rangle| \quad (5.28)$$

où  $|p, q\rangle$  est l'état cohérent du système associé au point  $(p, q)$  de l'espace des phases classique et  $\rho$  est la matrice densité. Cette méthode est très compliquée à employer car nous devons connaître l'état cohérent du système dynamique, de plus la distribution d'Husimi est sensible aux phénomènes d'intrication non présents en classique ce qui peut cacher les effets recherchés (différentiation entre les états liés, de diffusion et chaotiques).

### La distribution des espacements de niveaux

La méthode consiste à étudier la distribution des espacements de niveaux  $\eta(s)$  entre deux niveaux successifs  $\{\lambda_{n+1} - \lambda_n\}_{n=1, \dots, \dim \mathcal{H} - 1}$  [46, 20, 39, 41]. Nous observons alors différents phénomènes. Si la distribution présente des pics de Dirac correspondant aux gaps  $\eta(s) = \sum_n \delta(s - s_n)$ , le spectre est purement ponctuel et la dynamique est stable. Si la distribution des espacements de niveau suit une distribution de Poisson de la forme  $\eta(s) = e^{-s}$ , le spectre est pseudo-aléatoire et correspond à un état de diffusion. Finalement si la distribution des niveaux d'énergie suit une loi de Wigner de la forme  $\eta(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4} s^2}$  alors le spectre est singulièrement continu et la dynamique est chaotique. Cette formule provient de l'équivalent quantique des bifurcations assurant que le chaos quantique apparaît lorsque le système présente une infinité dense d'anti-croisements qui induisent des corrélations dans le spectre [46].

Le critère du théorème RAGE s'applique principalement au spectre de quasi-énergie (qui est toujours infini) alors que le critère de la distribution des espacements de niveaux est plus général.

#### 5.2.3 Chaînes de spins chaotiques

Nous allons illustrer les méthodes permettant de mettre en évidence du chaos quantique au travers des chaînes de spins. Les méthodes que nous allons donner permettent de dire si la chaîne correspond à un état lié, un état de diffusion ou un état chaotique. Pour ceci nous allons considérer trois sortes de chaînes :

- Une chaîne Ising-Z parfaite

$$H = \frac{w_0}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_{z_i} + \frac{J_z}{4} \sum_{i=1}^N \sigma_{z_n} \otimes \sigma_{z_{n+1}} \quad (5.29)$$

nous prendrons comme valeur des paramètres  $w_0 = 0.5$  et  $J_z = 1$ . Le système ne présente que des états liés.

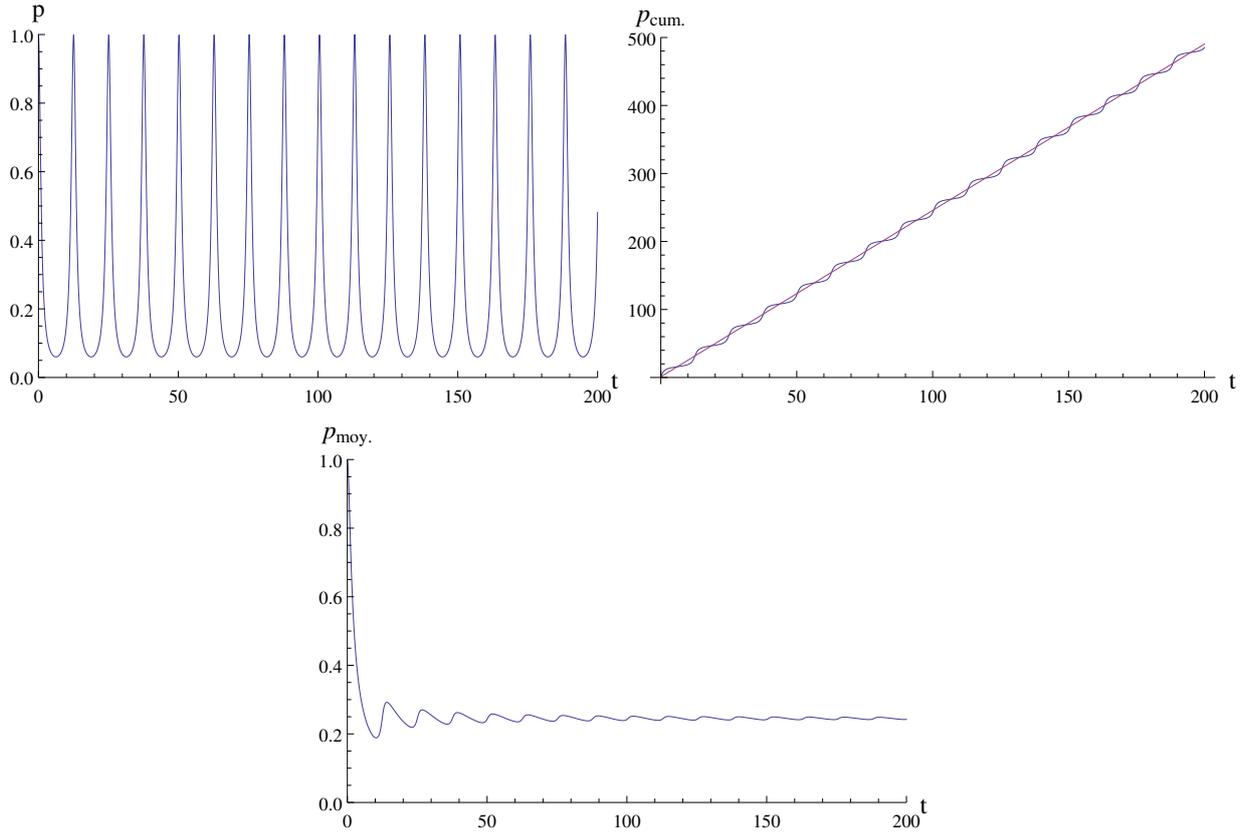


FIGURE 5.3 – Evolutions de la probabilité de survie, de la probabilité de survie cumulée et de la probabilité de survie moyenne d’une chaîne de 12 spins couplés par une interaction d’Ising-Z. La chaîne est initialement dans une superposition de tous les états propres  $\sum_n \frac{\sqrt{e^{\lambda_n}}}{Z} |\lambda_n\rangle$  avec  $Z = \sum_n e^{\lambda_n}$  et  $\lambda_n$  la  $n$ -ième valeur propre.

— Une chaîne Heisenberg XXZ parfaite

$$H = \frac{w_0}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_{z_i} + \frac{J_{xy}}{4} \sum_{n=1}^{N-1} (\sigma_{x_n} \otimes \sigma_{x_{n+1}} + \sigma_{y_n} \otimes \sigma_{y_{n+1}}) + \frac{J_z}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_{z_n} \otimes \sigma_{z_{n+1}} \quad (5.30)$$

nous choisissons les paramètres tel que  $w_0 = 0.5$ ,  $J_{xy} = 0.5$  et  $J_z = 1$ . Ce système se comporte comme un système pseudo-aléatoire sans mémoire [39].

— Une chaîne Ising-Z avec un défaut d’inclinaison du champ Zeeman

$$H = \frac{w_0}{2} \sum_{n=1}^N (\sin \theta \sigma_{x_n} + \cos \theta \sigma_{z_n}) + \frac{J_z}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_{z_n} \otimes \sigma_{z_{n+1}} \quad (5.31)$$

avec  $w_0 = 2$ ,  $J_z = 4$  et  $\theta = \frac{15\pi}{32}$ . Ce système a un comportement chaotique [46].

Commençons par regarder l’évolution de la probabilité de survie. Conformément aux caractéristiques décrites dans la sous-section dédiée 5.2.1, les états de la chaîne Ising-Z parfaite ont le comportement d’états liés comme ce que nous voyons figure 5.3. La figure suivante 5.4 montre que les états de la chaîne Heisenberg-XXZ se comportent comme des états de diffusion. Finalement la dernière figure 5.5 atteste que les états de la chaîne Ising-Z avec un défaut d’inclinaison du champ Zeeman se comportent comme des états chaotiques.

En ce qui concerne les espacements de niveaux, le graphique 5.6 présente un spectre purement ponctuel comme des pics de Dirac. Ceci atteste que la chaîne Ising-Z parfaite se comporte comme une dynamique stable. La figure 5.7 montre un spectre dense aléatoire qui suit la loi de Poisson. La chaîne Heisenberg-XXZ a le comportement d’états de diffusion. La figure 5.8 présente une distribution des

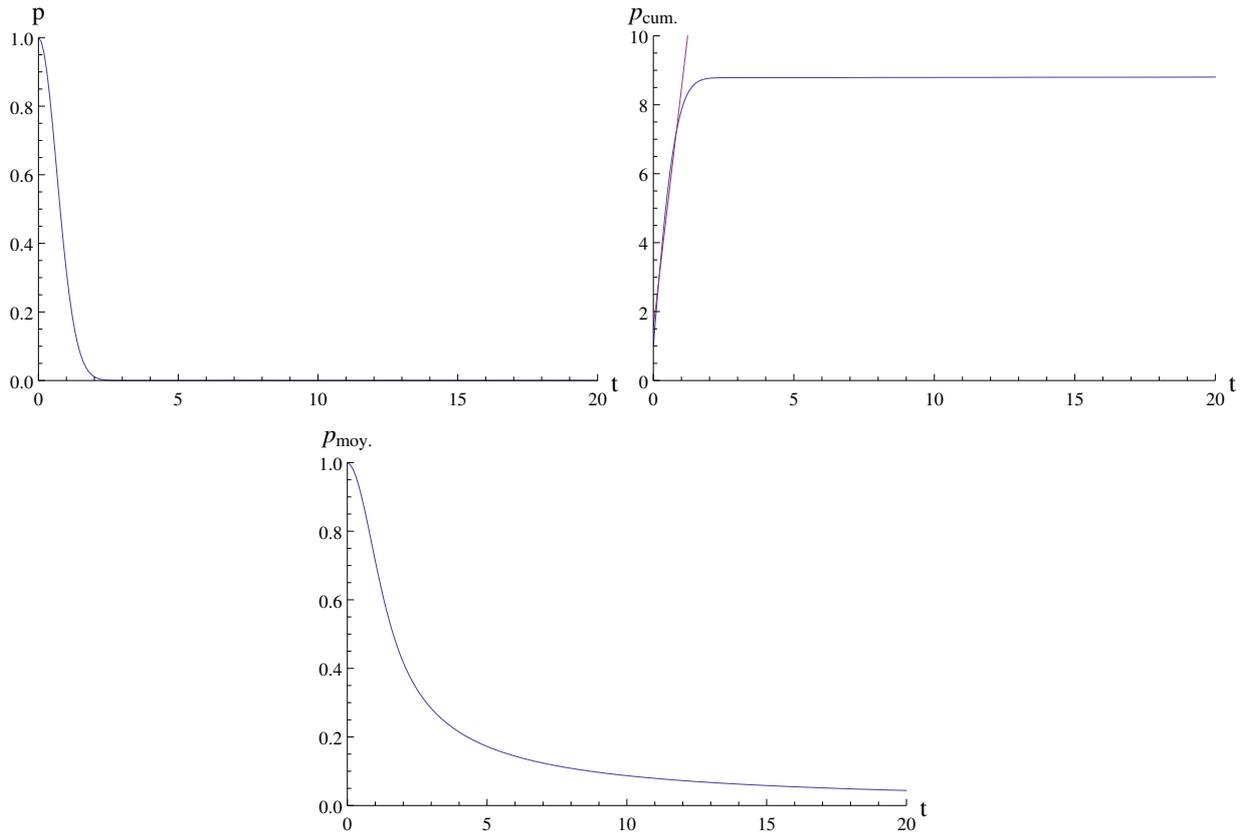


FIGURE 5.4 – Evolutions de la probabilité de survie, de la probabilité de survie cumulée et de la probabilité de survie moyenne d’une chaîne de 12 spins couplés par une interaction d’Heisenberg-XXZ. La chaîne est initialement dans une superposition de tous les états propres  $\sum_n \frac{\sqrt{e^{\lambda_n}}}{Z} |\lambda_n\rangle$  avec  $Z = \sum_n e^{\lambda_n}$  et  $\lambda_n$  la  $n$ -ième valeur propre.

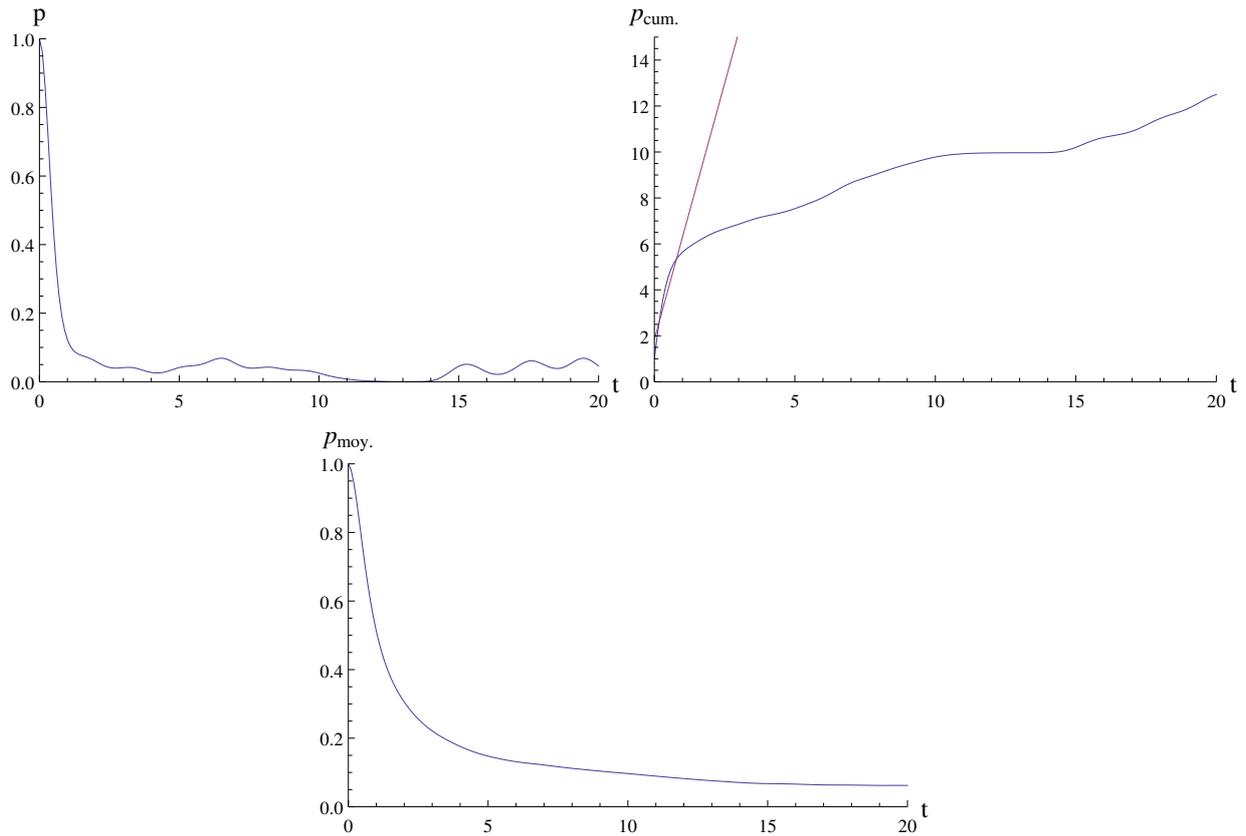


FIGURE 5.5 – Evolutions de la probabilité de survie, de la probabilité de survie cumulée et de la probabilité de survie moyenne d’une chaîne de 12 spins couplés par une interaction d’Ising-Z. Cette chaîne présente un défaut d’inclinaison du champ Zeeman. La chaîne est initialement dans une superposition de tous les états propres  $\sum_n \frac{\sqrt{e^{\lambda_n}}}{Z} |\lambda_n\rangle$  avec  $Z = \sum_n e^{\lambda_n}$  et  $\lambda_n$  la  $n$ -ième valeur propre.

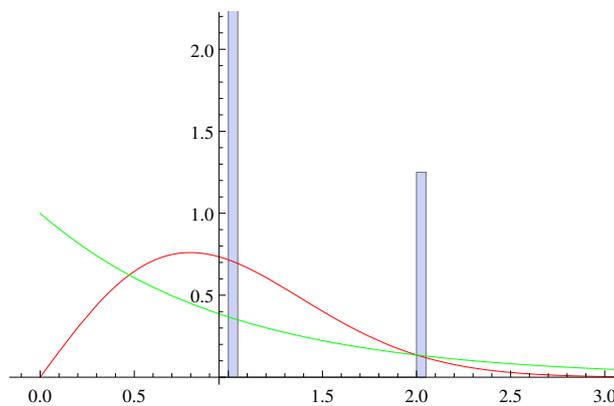


FIGURE 5.6 – Distribution des espacements de niveaux d’énergie pour une chaîne de 12 spins couplés par une interaction d’Ising-Z. La courbe rouge correspond à la loi de Wigner et la verte à la distribution de Poisson.

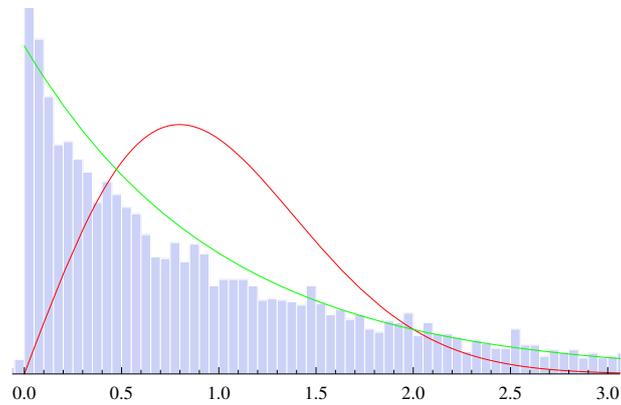


FIGURE 5.7 – Distribution des espacements de niveaux d'énergie pour une chaîne de 12 spins couplés par une interaction d'Heisenberg-XXZ. La courbe rouge correspond à la loi de Wigner et la verte à la distribution de Poisson.

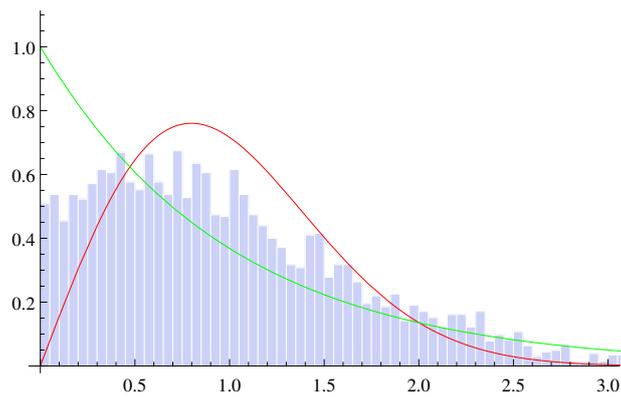


FIGURE 5.8 – Distribution des espacements de niveaux d'énergie pour une chaîne de 12 spins couplés par une interaction d'Ising-Z avec un défaut d'inclinaison du champ Zeeman. La courbe rouge correspond à la loi de Wigner et la verte à la distribution de Poisson.

espacements de niveaux pour la chaîne Ising-Z avec défaut, suivant la loi de Wigner. Elle est donc chaotique.

Les outils d'analyse du chaos quantique définis ici ont été utilisés pour étudier un modèle de réseau de spins présentant des états de chimère quantique (à la fois chaotique sur une partie du réseau, et régulier sur une autre), modèle proposé par M. David Viennot (se référer à la publication 5. de la page 9 des publications).

Note : Dans nos exemples, nous n'avons pas pris des chaînes de spins infinies, mais des chaînes de 12 spins finies.  $P_{surv}(t)$  revient donc à 1 au bout d'un certain temps (comme il y a un nombre fini de degrés de liberté, alors la dynamique est forcément périodique). Ce sont les chaînes de spins infinies qui sont chaotiques, mais quand nous les simulons, nous utilisons des chaînes finies. La chaîne de 12 spins se comporte comme la chaîne infinie au début de la dynamique, mais passé une certaine date, les effets de bords (qui devraient être absents avec une chaîne infinie) se propagent et la dynamique n'est plus bonne. Ce sont les réflexions des ondes de spins sur les bords qui par interférences constructives finissent par ressusciter la condition initiale.



## Chapitre 6

# Ensembles de spins soumis à des frappes chaotiques

Dans le chapitre 4, nous avons vu le comportement d'un ensemble de spins et d'une chaîne de spins soumis à des trains d'impulsions magnétiques perturbés par un environnement classique pouvant être stationnaire, de dérive linéaire, microcanonique ou Markovien. En reprenant le modèle développé dans le chapitre 3, nous nous intéressons maintenant au cas particulier d'un bain de frappes perturbés par un environnement classique chaotique dont le flot correspond à l'automorphisme continu sur le tore du chat d'Arnold [90]  $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Nous supposons ici que la dispersion initiale des frappes sur le tore est faible  $d_0 = 10^{-4}$ .

### 6.1 Décohérence avec une dynamique suivant le Chat d'Arnold

La figure 6.1 montre l'évolution de la population et de la cohérence du spin moyen d'un ensemble de spins en fonction du nombre de frappes. Avant d'atteindre 7 frappes, le bain reste cohérent et la population oscille autour de sa valeur de départ. Ceci est équivalent aux observations faites pour les bains de frappes réguliers (stationnaire et de dérive linéaire) au chapitre 4. Après ce laps de temps, la cohérence chute à 0 et la population relaxe vers 0.5 comme dans le cas des frappes non régulières avec une large dispersion initiale (cas microcanonique). Dans le cas particulier où la frappe est dans la direction d'un vecteur propre, la cohérence et la population ne présentent pas d'oscillation durant les 7 premières frappes comme le montre la figure 6.2.

L'utilisation d'un bain de frappes chaotique est très intéressante car c'est le seul modèle qui permet d'avoir deux comportements successifs différents bien mis en évidence : avant la ligne verticale des graphiques 6.1 et 6.2 il y a une conservation de la cohérence alors qu'après elle chute à 0. Nous nommons par horizon de cohérence le nombre de périodes au bout desquelles il y a un changement de comportement. Celui-ci correspond à 7 dans le modèle du chat d'Arnold avec une dispersion initiale de  $d_0 = 10^{-4}$ . Ce comportement est directement relié aux propriétés chaotiques du chat d'Arnold et en particulier à la propriété de sensibilité aux conditions initiales. Cette dernière nous dit que si deux points sont initialement très proches, ils vont s'écarter au bout d'un temps qui correspond à l'horizon de prédictibilité (alors que dans un cas déterministe non-chaotique, les points restent voisins quelque soit l'instant pris). Ainsi, des frappes initialement très proches vont finir par se disperser après l'horizon de prédictibilité. Le désordre créé par le bain de frappes est transmis au bain de spins à l'horizon de cohérence, entraînant une perte de cohérence et une distribution quantique microcanonique.

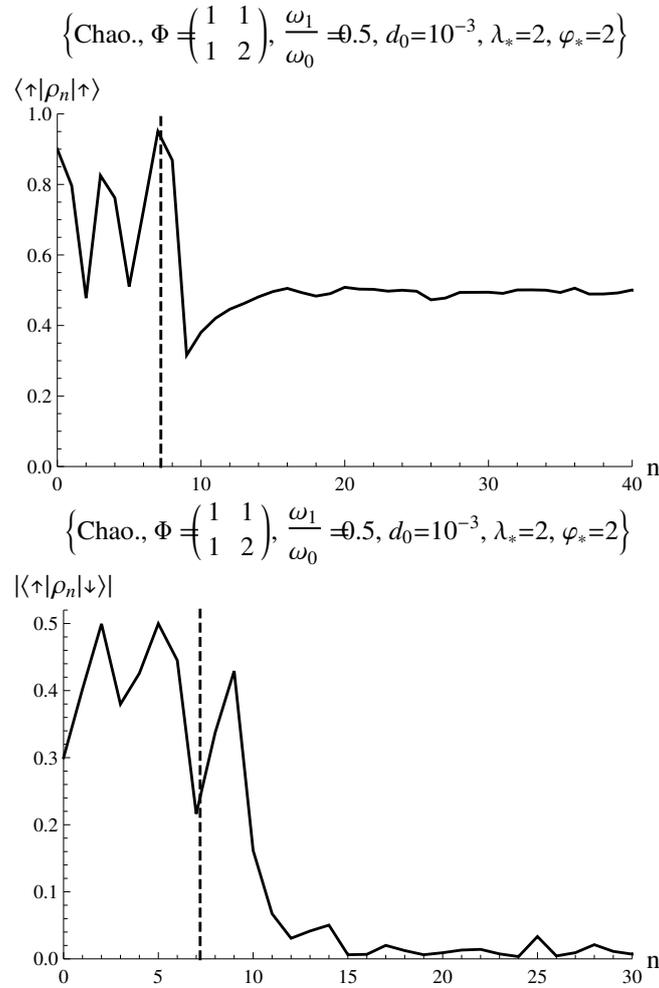


FIGURE 6.1 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen d'un ensemble de 1024 spins soumis à un bain de frappes chaotique. La ligne pointillée verticale représente l'horizon de cohérence. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales. Les spins sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

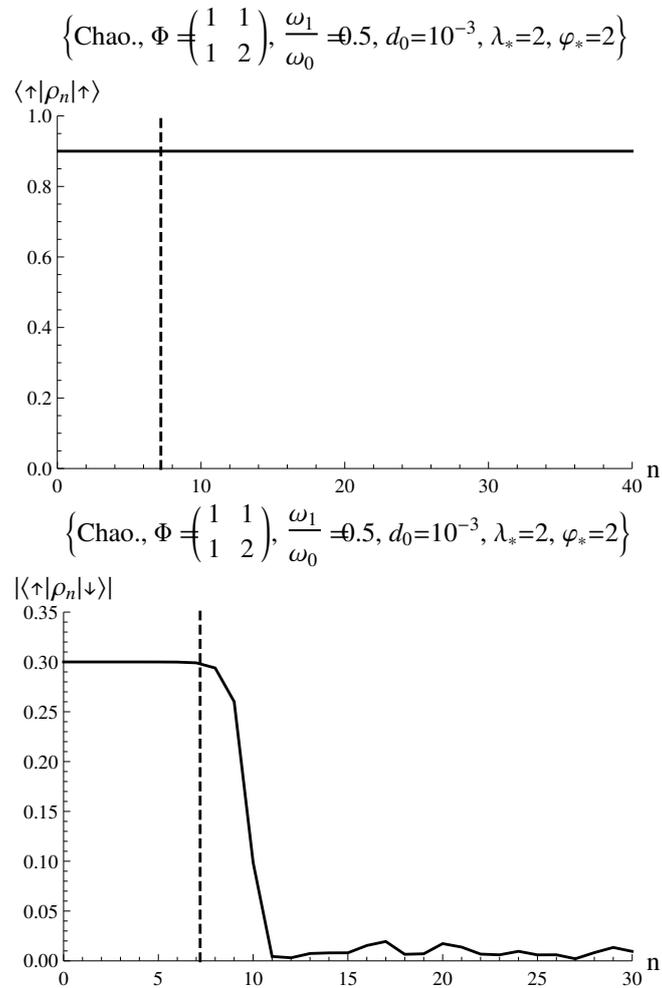
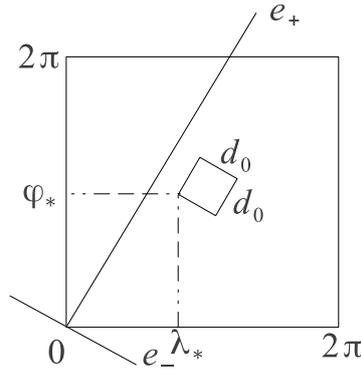


FIGURE 6.2 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen d'un ensemble de 1024 spins soumis à un bain de frappes chaotique. La ligne pointillée verticale représente l'horizon de cohérence. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales. Les spins sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ .

FIGURE 6.3 – Distribution initiale suivant les axes propres du flot (carré de largeur  $d_0$ ).

## 6.2 Analyse des exposants de Lyapunov et horizon de prédictibilité

Nous voulons trouver la condition analytique de l'horizon de prédictibilité. Pour ceci, considérons les automorphismes continus sur le tore caractérisés par le flot  $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & x \pm 1 \end{pmatrix}$  avec  $x \in \mathbb{R}^*$ .  $\forall x$ , ce flot est ergodique et chaotique. Soient  $\lambda_{\pm}$  les valeurs propres du flot,

$$\Phi e_{\pm} = \lambda_{\pm} e_{\pm} \quad (6.1)$$

avec  $e_{\pm} \in \mathbb{T}^2$ ,  $\|e_{\pm}\| = 1$ ,  $|\lambda_+| > 1$ ,  $|\lambda_-| < 1$  et  $|\lambda_+ \lambda_-| = 1$ .  $e_+$  correspond à la direction instable du flot et  $e_-$  à la direction stable.  $\ln |\lambda_{\pm}|$  sont les exposants de Lyapunov du système dynamique.

Soit  $\{(\lambda_n^{(0)}, \varphi_n^{(0)})\}_{n=0, \dots, N}$  les frappes initiales (respectivement la force et le retard des frappes) sur les  $N$  spins. Ces frappes sont choisies aléatoirement dans le carré de sommet  $(\lambda_*, \varphi_*)$  et de côté  $d_0 e_+$  et  $d_0 e_-$  de manière à être dans la direction des axes propres comme le montre la figure 6.3.

La distance maximale entre deux points à l'itération  $n$  est

$$d_n = \left\| \Phi^n \left( \begin{pmatrix} \lambda_* \\ \varphi_* \end{pmatrix} + d_0 e_+ + d_0 e_- \right) - \Phi^n \begin{pmatrix} \lambda_* \\ \varphi_* \end{pmatrix} \right\| \quad (6.2)$$

$$= \left\| \Phi^n (d_0 e_+ + d_0 e_-) \right\| \quad (6.3)$$

$$= \left\| \lambda_+^n e_+ + \lambda_-^n e_- \right\| d_0 \quad (6.4)$$

$$= \sqrt{\lambda_+^{2n} + \lambda_-^{2n}} d_0 \quad (6.5)$$

$$\approx |\lambda_+^n| d_0 \quad (6.6)$$

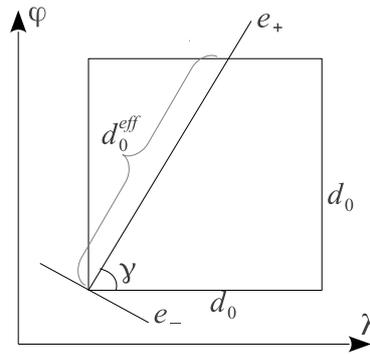
car pour  $n$  assez grand, selon les conditions précédemment posées,  $\lambda_+^n \gg 1$  et  $\lambda_-^n \approx 0$ . Nous pouvons noter que dans l'approximation linéaire nous regardons les deux points les plus loin pour voir comment ils se comportent. Nous regardons à  $n$  très grand, donc les fluctuations accidentelles sont non significatives.

Afin de définir l'horizon de prédictibilité, nous avons besoin de connaître la notion de partition.

**Définition 16.** (*Partition mesurable*)

Soit  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu)$  un espace de probabilité avec  $\Gamma$  un espace topologique,  $\mathcal{T}$  une tribu sur  $\Gamma$  et  $\mu$  une mesure de probabilité. Nous appellerons partition mesurable une famille  $\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$  de parties mesurables non vides telles que, pour  $i \neq j$ , on a  $\mu(A_i \cap A_j) = 0$  et  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = \Gamma$ .

Nous décidons de recouvrir l'espace des phases  $\mathbb{T}^2$  par un ensemble de cellules "presque" disjointes (sauf sur leur bord  $\mu(\sigma_i \cap \sigma_j) = 0$ ) de dimension  $d_{\square} \times d_{\square}$  qui constituent les micro-états classiques avec  $d_{\square}$  la longueur d'un micro-état. Le désordre dans les frappes ne commence que lorsque la propriété de sensibilité aux conditions initiales a séparé les orbites des trajectoires. Ce désordre correspond aussi

FIGURE 6.4 – Distribution initiale suivant les axes fondamentaux (carré de largeur  $d_0$ ).

à ce que nous appelons l'entropie classique. Pour un système dynamique classique, il y a séparation quand nous dépassons la longueur d'un micro-état classique

$$d_n \geq d_\square \Rightarrow |\lambda_+|^n d_0 \geq d_\square \quad (6.7)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln d_\square - \ln d_0}{\ln |\lambda_+|} \quad (6.8)$$

$n_\square = \frac{\ln d_\square - \ln d_0}{\ln |\lambda_+|}$  correspond à l'horizon de prédictibilité.

Pour une distribution initiale le long des directions fondamentales, la formule est un peu différente. La projection sur  $e_+$  et  $e_-$  ne donne pas des distributions uniformes. La largeur de la distribution le long de  $e_+$  est approximativement  $d_0^{eff} = \frac{d_0}{\sin(\gamma)}$  avec  $\gamma = \arctan\left(\frac{e_+^{(\varphi)}}{e_+^{(\lambda)}}\right)$  (figure 6.4). L'horizon de prédictibilité de Lyapunov pour le système classique de frappes est alors

$$n_\square = \frac{\ln d_\square - \ln\left(\frac{d_0}{\sin(\gamma)}\right)}{\ln |\lambda_+|} \quad (6.9)$$

### 6.3 Notions d'entropie

Afin de déterminer une formule empirique de l'horizon de cohérence, nous avons besoin de définir différentes notions d'entropie. Dans la partie précédente, nous avons déjà vu l'entropie de von Neumann permettant une mesure du désordre dans le bain de spins

$$S_{vN,n} = -10 \text{tr}(\rho_n \ln \rho_n) \quad (6.10)$$

Le facteur arbitraire ("10") sera expliqué par la suite.

Nous avons besoin de définir deux nouvelles entropies, l'entropie de Shannon permettant de mesurer le désordre dans le bain de frappes et l'entropie de Kolmogorov-Sinaï (ou entropie métrique) permettant de mesurer la production du désordre par le flot.

#### 6.3.1 Entropie de Shannon

Nous voulons modéliser le désordre dans le bain de frappes. Il correspond au désordre classique. Comme il est à relier à la mécanique statistique, nous devons définir le nombre de micro-états classiques du système. Pour ceci considérons la partition  $\alpha$  de  $\mathbb{T}^2$  en plusieurs cellules représentant les micro-états classiques. Nous choisissons la longueur d'un micro-état classique  $d_\square = \frac{\pi}{64}$  de manière à avoir une faible probabilité pour que plusieurs frappes d'une même itération soient simultanément dans le même micro-état. La partition de  $\mathbb{T}^2$  est représentée par la grille  $\left\{\frac{i\pi}{64}\right\}_{i=0,\dots,128} \times \left\{\frac{j\pi}{64}\right\}_{j=0,\dots,128}$ . Nous choisissons  $i$  et  $j$  allant jusqu'à 128 car  $128 \times \frac{\pi}{64} = 2\pi$  représente un des côtés de  $\mathbb{T}^2$ . Nous prenons un nombre de spins et donc un nombre de trains de frappes égal à  $N = 1024$ .

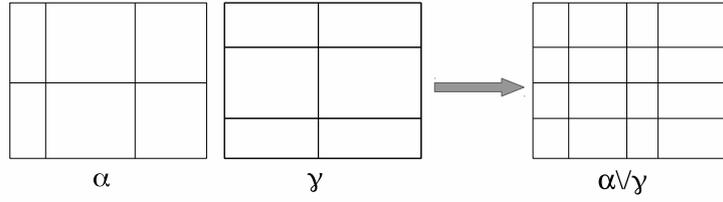


FIGURE 6.5 –  $\alpha$  et  $\gamma$  forment deux partitions d'un même espace mesurable. L'intersection (ou le joint) de ces deux partitions donnent une partition plus fine.

Pour visualiser la faible probabilité permettant de définir la longueur d'un micro-état  $\frac{\pi}{64}$ , nous tirons suivant une loi uniforme les 1024 points sur le tore. Ensuite, nous comptons le nombre de points arrivant dans chaque micro-état. Nous conservons le valeur du nombre maximum de points pouvant tomber dans un micro-état. Nous réitérons ceci plusieurs fois afin de faire une moyenne. Pour  $128 \times 128$  cellules, nous obtenons une moyenne inférieure à 2. Nous ne pouvons pas expliquer plus clairement pourquoi cette taille de micro-état convient pour notre problème.  $d_{\square} = \frac{\pi}{128}$  ou  $d_{\square} = \frac{\pi}{10^{100}}$  nous donnerait une probabilité de double occupation encore plus faible. Cependant les résultats qui seront donnés par la suite conviennent pour  $d_{\square} = \frac{\pi}{64}$ . Cette valeur a été ajustée grâce aux simulations numériques.

L'entropie classique dans le bain de frappes est mesurée par l'entropie de Shanon

$$S_{sh,n} = - \sum_{i,j} p_{ij,n} \ln p_{ij,n} \quad (6.11)$$

où  $p_{ij,n}^1$  est la fraction de trains de frappes étant dans le micro-état  $(i, j)$  à la  $n$ -ième itération.

Le nombre de spins  $N = 1024$  et le facteur 10 de l'entropie de von Neumann sont choisis de manière à ce que l'entropie maximale soit  $\sup(S_{vN,n}) = \sup(S_{Sh,n}) = 10 \ln 2 = \ln 1024$ . Pour l'entropie de von Neumann le maximum d'entropie est pour  $\rho_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  qui correspond à un manque maximum d'information.

$$\sup(S_{vN,n}) = -10 \operatorname{tr} \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = 10 \ln 2 \quad (6.12)$$

Dans le cas de l'entropie classique, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque l'entropie est maximale, chaque train occupe un micro-état différent. Dans ces conditions  $\sup(S_{Sh,n}) = \ln(\Omega)$  où  $\Omega$  est le nombre de micro-états occupés et nous avons

$$\sup(S_{Sh,n}) = \ln(1024)$$

### 6.3.2 L'entropie métrique

La production du désordre par le flot peut être mesurée par l'entropie de Kolmogorov-Sinaï. Soit  $\alpha_n = \bigvee_{p=0}^{n-1} \Phi^{-p}(\alpha)$  la partition de  $\mathbb{T}^2$  définie par  $\Phi$  avec  $\Phi^{-1}(\alpha) = \{\Phi^{-1}(A)\}_{A \in \alpha}$  et  $\alpha \vee \gamma = \{A \cap G / A \in \alpha, G \in \gamma, A \cap G \neq \emptyset\}$ .  $\alpha \vee \gamma$  s'appelle la partition jointe de  $\alpha$  et  $\gamma$  dont nous pouvons donner comme exemple la figure 6.5. L'intersection des deux partitions permet de créer la nouvelle partition  $\alpha \vee \gamma$ .

Soit  $\mu$  la probabilité de Haar sur  $\mathbb{T}^2$ . L'entropie de Kolmogorov-Sinaï du flot est définie par

$$h_{\mu}(\Phi) = \sup_{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{1}{n} \sum_{A \in \alpha_n} \mu(A) \ln(\mu(A)) \quad (6.13)$$

Cette notion est définie dans [7]. Les définitions et les propositions qui lui sont liées sont présentes en annexe C.

1. pour calculer numériquement cette grandeur, nous regardons à chaque itération le nombre de frappes (que nous normalisons par la taille des micro-états) qui vont être dans le micro-état  $(i, j)$

## 6.4 Evolutions de l'entropie

Nous voulons déterminer la formule empirique de l'horizon de cohérence. La formule 6.13 représente le désordre moyen produit par  $\Phi$  à chaque itération. Pour des automorphismes hyperboliques sur  $\mathbb{T}^2$  ([7])

$$h_\mu(\Phi) = \ln |\lambda_+| \quad (6.14)$$

$\lambda_+$  correspond à l'exposant de Lyapunov dans la direction instable. Le flot crée le désordre dans le bain de frappes avec un taux de  $\ln |\lambda_+|$  par frappe. Donc, si au départ il n'y a pas de désordre dans le bain ( $S = 0$ ), la première frappe efficace crée  $\ln |\lambda_+|$  désordre et  $S = \ln |\lambda_+|$ . Après  $n$  frappes  $S = n \ln |\lambda_+|$ . Avant un nombre de pas inférieur à l'horizon de prédictibilité  $n_\square$ , il ne se crée pas de désordre dans le bain classique et le flot n'induit du désordre que sur une échelle inférieure à  $d_\square$ . Il n'est donc pas visible. Ce n'est qu'à partir de  $n_\square$  que le flot crée du désordre sur une échelle supérieure à la longueur des micro-états.

$$S_{KS,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq n_\square \\ (n - n_\square) \ln |\lambda_+| & \text{si } n \geq n_\square \end{cases} \quad (6.15)$$

Cette formule est une estimation analytique de l'entropie classique dans le bain de frappes.

Le désordre quantique est issu du désordre classique. Mais, ce n'est pas un seuil de dispersion qui fait démarrer l'entropie quantique, ni un seuil d'entropie classique. Même si l'entropie classique est très petite (très petite dispersion), il y a un tout petit peu de désordre classique qui engendre du désordre quantique. À chaque pas (frappe), le faible désordre classique engendre du désordre quantique en petite quantité. L'effet se cumule de frappe en frappe. Ainsi, l'entropie quantique peut croître alors que l'entropie classique reste très petite. C'est donc l'entropie classique cumulée qui est significative. L'entropie quantique démarre quand l'entropie classique cumulée dépasse un certain seuil. Les simulations numériques montrent que ce seuil correspond à l'entropie maximale  $S_{max} = \text{sup}(S_{Sh}) = 10 \ln 2$ . L'horizon de cohérence quantique  $n_*$  est donc telle que

$$\sum_{n=0}^{n_*} S_{Sh,n} = S_{max} \quad (6.16)$$

Comme  $S_{Sh,n} \approx S_{KS,n}$  selon [7],

$$\sum_{n=n_\square}^{n_*} (n - n_\square) \ln |\lambda_+| = S_{max} \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow \frac{(n_* - n_\square)(n_* - n_\square + 1)}{2} \ln |\lambda_+| = S_{max} \quad (6.18)$$

Nous obtenons de cette équation, l'horizon de cohérence quantique :

$$n_* = n_\square + \sqrt{1 + \frac{8S_{max}}{\ln |\lambda_+|}} - \frac{1}{2} \quad (6.19)$$

Dans certains cas, et plus particulièrement lorsque  $x$  (les automorphismes continus sur le tore sont caractérisés par le flot  $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & x \pm 1 \end{pmatrix}$ ) est petit ( $|x| < 1$ ), la formule empirique précédente peut ne pas correspondre exactement aux résultats numériques. Ceci est dû aux faibles erreurs de la prédiction de Kolmogorov-Sinaï pour l'entropie classique. De petites variations de  $S_{Sh,n}$  peuvent arriver avant  $n_\square$  augmentant l'entropie cumulée. De plus, pour  $x$  petit (système faiblement chaotique), le taux de production d'entropie peut être plus petit que  $\ln |\lambda_+|$  (cette valeur issue des analyses de Kolmogorov-Sinaï est une valeur moyenne pour un  $n$  très grand et pour une partition optimale). Par contre, l'horizon quantique  $n_*$  vérifie toujours  $\sum_{n=0}^{n_*} S_{cl,n} = S_{max}$  (avec  $S_{cl,n}$  numérique).

Les résultats de cette analyse sont donnés sur la figure 6.6. Nous voyons bien que l'entropie classique commence à croître à partir de l'horizon de prédictibilité et que l'entropie quantique augmente à partir de l'horizon de cohérence. Ce n'est que lorsque l'entropie classique cumulée atteint l'entropie maximale que l'entropie quantique croît. Ces graphiques vérifient les formules que nous venons de donner. Ces formules ont aussi été vérifiées à de nombreuses reprises sur différents automorphismes continus sur le tore.

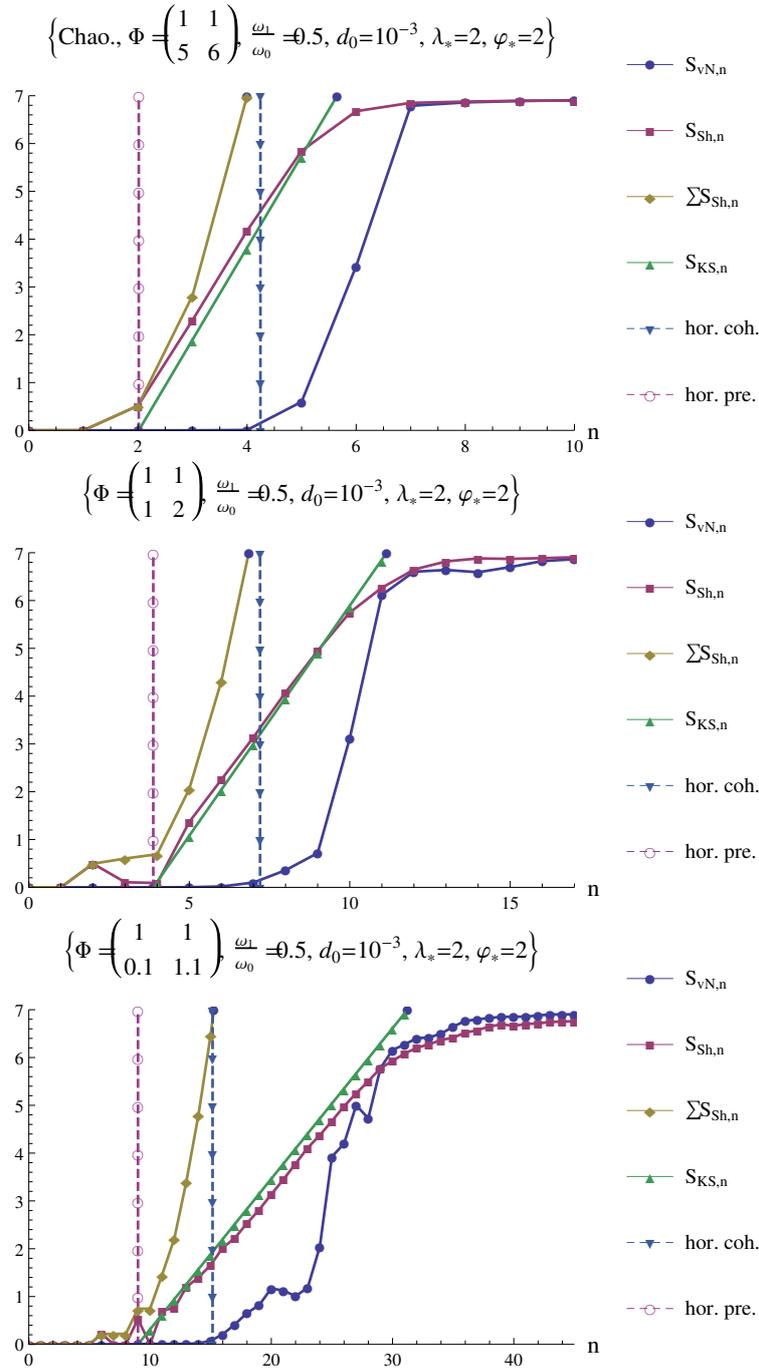


FIGURE 6.6 – Pour différents flots chaotiques, l’entropie de von Neumann de l’ensemble de spins, l’entropie de Shannon du bain de frappes, l’entropie de Shannon cumulée du bain de frappes et l’entropie du bain de frappes prédit par les analyses de Kolmogorov-Sinai. L’horizon de prédictibilité du bain de frappes (équation 6.9) et l’horizon de cohérence (équation 6.19) d’un bain de spins sont indiqués par des lignes pointillées verticales. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards des frappes initiales. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{26}}(5|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

# Chapitre 7

## Conservation de l'horizon de cohérence dans les structures de spins

L'horizon de cohérence correspond à un nombre de frappes pendant lequel le système reste cohérent et durant lequel la population peut évoluer. Nous avons vu l'apparition de cet horizon pour un ensemble de spins soumis à une dynamique classique représentant un automorphisme continu sur le tore. Nous nous intéressons ici à d'autres systèmes quantiques : des chaînes de spins et des glaces de spins [23, 43] mais aussi à d'autres dynamiques classiques chaotiques [60, 63]. Le but est de savoir si l'horizon de cohérence est conservé, si il reste décrit par la formule 6.19 et sous quelles conditions.

Le modèle reste le même que celui du chapitre 3.

### 7.1 Conservation par changement du système dynamique

#### 7.1.1 Chaîne de spins

Nous n'analyserons pas le cas d'une chaîne de spins couplés par une interaction d'Ising-X. Nous avons vu au chapitre 4 que ce système était très désordonné, qu'il induisait une chute très rapide de la cohérence et une relaxation de la population vers le microcanonique. Avec un couplage Ising-X, le plateau de cohérence est détruit.

#### Modèle Ising-Z : Une quasi-destruction du plateau de cohérence

Considérons une chaîne de spins couplés par une interaction de plus proches voisins d'Ising-Z décrite par l'équation 1.4. Un champ magnétique constant et uniforme est appliqué sur la chaîne induisant une levée de dégénérescence par effet Zeeman. Si les spins ne sont pas frappés (figures 1.4, 1.9 et 1.12), la population reste à sa valeur initiale et la cohérence oscille en dessous de sa valeur initiale.

Pour une chaîne de spins frappés par une dynamique chaotique (un automorphisme continu sur le tore) le couplage induit du désordre et de l'intrication. La cohérence et la population vont vers la distribution microcanonique (relaxation de la population vers 0.5 et chute de la cohérence à 0) et l'entropie croît. Ceci est très bien montré par la figure 7.1. L'entropie augmente très rapidement et la distribution d'Husimi tend à devenir complètement verte. Le maximum d'entropie est atteint quand la distribution d'Husimi est proche de la couleur verte (environ 13 frappes). Nous retrouvons sur ce graphique ce dont nous avons parlé au chapitre 4 et qui correspond au plateau de cohérence caractéristique du couplage Ising-Z. Ce plateau ne conserve pas la cohérence initiale et il est inférieur à la durée de l'horizon de cohérence.

Le plateau lié à l'horizon de cohérence est seulement visible dans une configuration : quand la direction de frappe correspond à un vecteur propre, c'est à dire  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$  ou  $|\downarrow\rangle$ , comme le montre la figure 7.2. Chaque spin conserve sa cohérence initiale avec de fortes oscillations vers le bas quelque soit le nombre de frappes. Il n'y a pas de modification de la population. La cohérence du spin moyen est

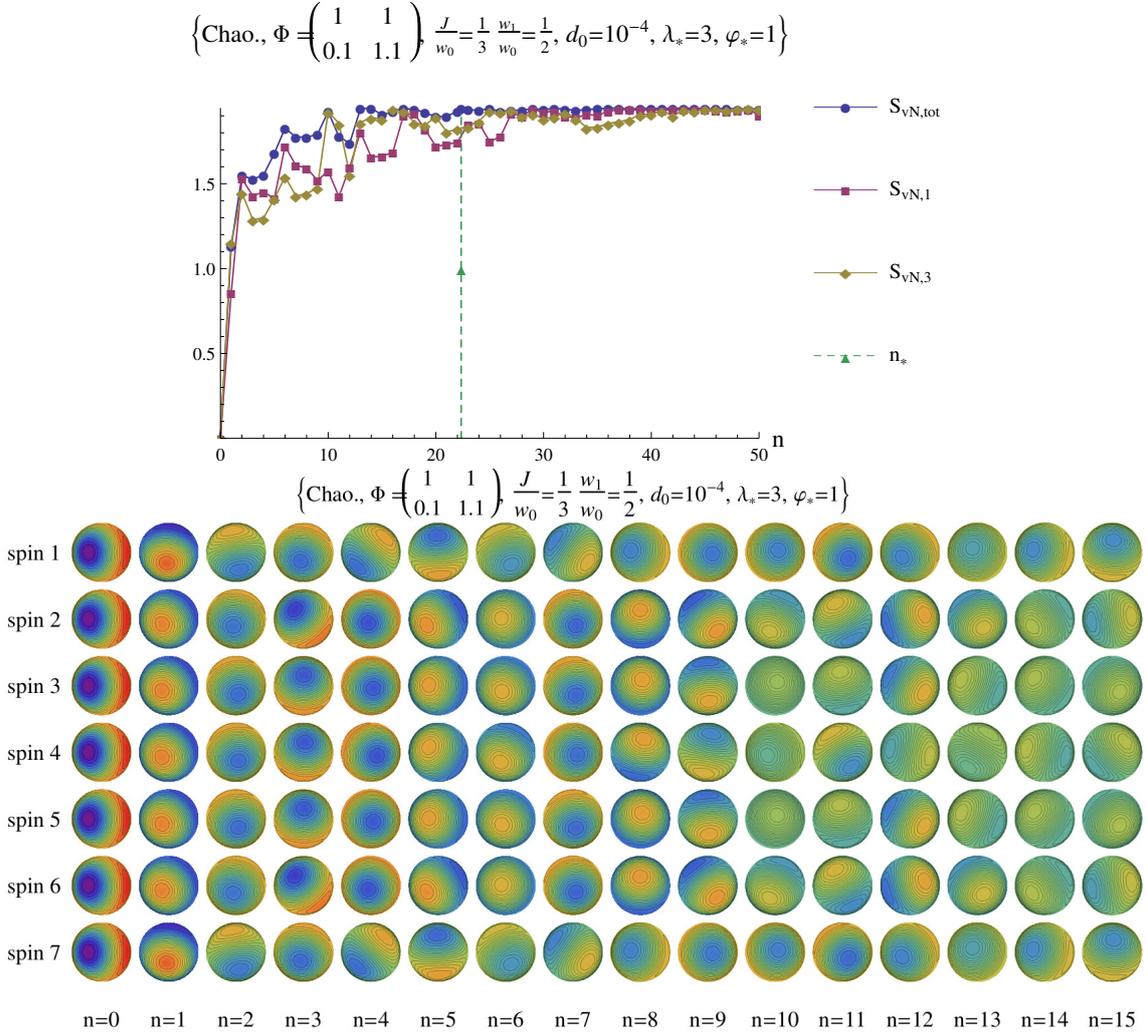


FIGURE 7.1 – Evolutions de l'entropie et de la distribution d'Husimi d'une chaîne de 7 spins couplés par une interaction d'Ising-Z. La chaîne est soumise à une dynamique classique chaotique.  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme du tore. Sur le graphique du haut, la ligne verticale représente l'horizon de cohérence. Sur le graphique du bas, la plus grande probabilité est représentée en rouge et le plus petite en bleu. Le processus d'intrication est aussi montré par la distribution d'Husimi. Dans ce cas les sphères deviennent vertes. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales. Les spins sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .

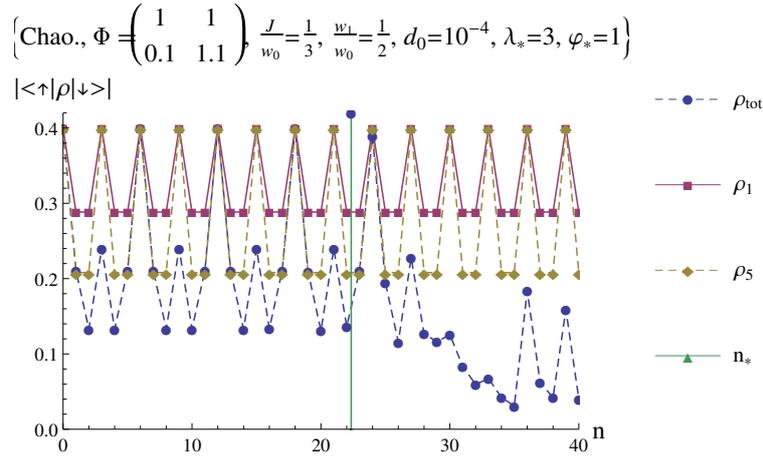


FIGURE 7.2 – Evolution de la cohérence du spin moyen ( $\rho_{tot}$ ), du 1er ( $\rho_1$ ) et du 5ième ( $\rho_5$ ) spin d'une chaîne couplée par une interaction d'Ising-Z. Les spins sont soumis à des frappes évoluant suivant une dynamique chaotique sur le tore.  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme continu du tore. La ligne verticale correspond à l'horizon de cohérence. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales. Les spins sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ .  $n_*$  est l'horizon de cohérence.

conservée avec de grandes oscillations vers le bas seulement avant l'horizon de cohérence. Après elle tend vers 0. La comparaison avec le graphique 1.9 montre qu'avant l'horizon de cohérence, la chaîne se comporte comme si elle n'était pas frappée. Pour le comprendre, considérons un ensemble de spins n'ayant aucun couplage entre eux. L'opérateur d'évolution pour la  $i$ -ième frappe est

$$U^{(i)} = e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}(2\pi - \varphi_n^{(i)})} \left[ I + (e^{-i\lambda_n^{(i)}} - 1)W \right] e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}\varphi_n^{(i)}} \quad (7.1)$$

Dans ce qui suit, toutes les matrices sont définies dans la base  $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$ . Nous supposons que les frappes sont dans la direction d'un vecteur propre alors  $W = |w\rangle\langle w| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Si nous calculons l'opérateur d'évolution du  $n$ -ième spin jusqu'à la  $m$ -ième frappe, nous obtenons

$$\Pi_{j=1}^m U^{(j)} = \Pi_{j=1}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{w_1}{2w_0}(2\pi - \varphi_n^{(j)})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n^{(j)}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{w_1}{2w_0}\varphi_n^{(j)}} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

$$= \Pi_{j=1}^m \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n^{(j)}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{w_1}{w_0}\pi} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\sum_{j=1}^m \lambda_n^{(j)}} & 0 \\ 0 & e^{-i\sum_{j=1}^m \frac{w_1}{w_0}\pi} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Soit  $|\psi^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  avec  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  l'état initial identique pour tous les spins. La fonction d'onde à la  $i$ -ième frappe est

$$|\psi^{(i)}\rangle = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\sum_{j=1}^i \lambda_n^{(j)}} \\ \beta e^{-i\sum_{j=1}^i \frac{w_1}{w_0}\pi} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

La matrice densité est alors

$$\rho^{(i)} = |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}| \quad (7.6)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* & \alpha\beta^* e^{-i\sum_{j=1}^i \lambda_n^{(i)}} e^{i\sum_{k=1}^i \frac{w_1}{w_0}\pi} \\ \alpha^*\beta e^{i\sum_{j=1}^i \lambda_n^{(i)}} e^{-i\sum_{k=1}^i \frac{w_1}{w_0}\pi} & \beta\beta^* \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

De cette dernière équation, nous voyons que la force et/ou le retard n'influencent pas la population quand la frappe est dans la direction d'un vecteur propre. La force induit juste un pur déphasage.

Mais ici, nous avons en plus un couplage entre les spins. Pour deux spins couplés par une interaction d'Ising-Z, l'opérateur d'évolution devient

$$U^{(i)} = e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}(2\pi - \varphi_2^{(i)})} \left[ I \otimes \left( I + \left( e^{-i\lambda_2^{(i)}} - 1 \right) W \right) \right] e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}(\varphi_2^{(i)} - \varphi_1^{(i)})} \\ \times \left[ \left( I + \left( e^{-i\lambda_1^{(i)}} - 1 \right) W \right) \otimes I \right] e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}\varphi_1^{(i)}} \quad (7.8)$$

Nous supposons que  $\varphi_1^{(i)} < \varphi_2^{(i)}$ . De manière à simplifier ce calcul, nous ne considérerons pas une variation de la force et du retard d'une frappe à une autre, c'est à dire que  $U^{(i)} = U$ ,  $\varphi_1^{(i)} = \varphi_1$ ,  $\varphi_2^{(i)} = \varphi_2$ ,  $\lambda_1^{(i)} = \lambda_1$  et  $\lambda_2^{(i)} = \lambda_2$ . Les frappes sont dans la direction d'un vecteur propre donc comme précédemment  $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$H_{0,I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar w_1}{2} \end{pmatrix} \otimes I + I \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar w_1}{2} \end{pmatrix} - JS_z \otimes S_z \quad (7.9)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar w_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar w_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar w_1 \end{pmatrix} - J\frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

$$= \begin{pmatrix} -J\frac{\hbar^2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar w_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar w_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J\frac{\hbar^2}{4} + \hbar w_1 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Comme les différents opérateurs dans 7.8 commutent,

$$U = e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}2\pi} \left[ I + \left( e^{-i\lambda_1^{(i)}} - 1 \right) W \right] \otimes \left[ I + \left( e^{-i\lambda_2^{(i)}} - 1 \right) W \right] \quad (7.12)$$

$$= e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}2\pi} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1^{(i)}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_2^{(i)}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

$$= e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}2\pi} \begin{pmatrix} e^{-i(\lambda_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_1^{(i)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\lambda_2^{(i)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

En posant  $\alpha = \frac{\hbar J}{4w_0}$  et  $\beta = \frac{w_1}{2w_0}$ , l'opérateur hamiltonien s'écrit

$$\Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} e^{i\alpha 2\pi} e^{-i(\lambda_2 + \lambda_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\alpha + \beta)2\pi} e^{-i\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\alpha + \beta)2\pi} e^{-i\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(\alpha - 2\beta)2\pi} \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Soient  $|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix}$  et  $|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$  les états initiaux des deux spins avec  $|\chi|^2 + |\zeta|^2 = 1$  et  $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ .

Alors

$$|\psi^{(0)}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \chi\gamma \\ \chi\delta \\ \zeta\gamma \\ \zeta\delta \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

L'évolution de la fonction d'onde à la  $i$ -ième frappe est

$$|\psi^{(i)}\rangle = U|\psi^{(i-1)}\rangle = \begin{pmatrix} \chi\gamma e^{i\alpha 2\pi} e^{-i(\lambda_2 + \lambda_1)} \\ \chi\delta e^{-i(\alpha + \beta)2\pi} e^{-i\lambda_1} \\ \zeta\gamma e^{-i(\alpha + \beta)2\pi} e^{-i\lambda_2} \\ \zeta\delta e^{i(\alpha - 2\beta)2\pi} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

La matrice densité est alors

$$\rho^{(i)} = |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}| \quad (7.18)$$

La cohérence du premier spin est

$$\rho_1^{cohe,(i)} = |\langle\uparrow\uparrow|\rho^{(i)}|\downarrow\uparrow\rangle + \langle\uparrow\downarrow|\rho^{(i)}|\downarrow\downarrow\rangle| \quad (7.19)$$

$$= |\chi\gamma\zeta^*\gamma^* e^{i(2\alpha + \beta)2\pi} e^{-i\lambda_1} + \chi\delta\zeta^*\delta^* e^{-i(2\alpha - \beta)2\pi} e^{-i\lambda_1}| \quad (7.20)$$

$$= |\chi\gamma\zeta^*\gamma^* e^{i(2\alpha + \beta)2\pi} + \chi\delta\zeta^*\delta^* e^{-i(2\alpha - \beta)2\pi}| \quad (7.21)$$

et la population up du premier spin est

$$\rho_1^{pop,(i)} = \langle\uparrow\uparrow|\rho^{(i)}|\uparrow\uparrow\rangle + \langle\uparrow\downarrow|\rho^{(i)}|\uparrow\downarrow\rangle \quad (7.22)$$

$$= \chi\chi^*\gamma\gamma^* + \chi\chi^*\delta\delta^* \quad (7.23)$$

Pour une frappe dans la direction d'un vecteur propre, la population reste constante et la cohérence d'un spin ne dépend pas de la force ni du retard quelque soit le nombre de frappes, comme ce que nous avons vu dans les graphiques. Pour la cohérence du spin moyen nous avons

$$\rho_{tot}^{cohe,(i)} = \frac{1}{2} |\langle\uparrow\uparrow|\rho^{(i)}|\downarrow\uparrow\rangle + \langle\uparrow\downarrow|\rho^{(i)}|\downarrow\downarrow\rangle + \langle\uparrow\uparrow|\rho^{(i)}|\uparrow\downarrow\rangle + \langle\uparrow\downarrow|\rho^{(i)}|\downarrow\downarrow\rangle| \quad (7.24)$$

$$\rho_{tot}^{cohe,(i)} = \frac{1}{2} |\chi\gamma\zeta^*\gamma^* e^{i(2\alpha + \beta)2\pi} e^{-i\lambda_1} + \chi\delta\zeta^*\delta^* e^{-i\lambda_1} e^{-i(2\alpha - \beta)2\pi} + \chi\gamma\chi^*\delta^* e^{-i\lambda_2} e^{i(2\alpha + \beta)2\pi} + \zeta\gamma\zeta^*\delta^* e^{-i(2\alpha - \beta)2\pi} e^{-i\lambda_2}| \quad (7.25)$$

et dans le cas où  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , nous obtenons

$$\rho_{tot}^{cohe,(i)} = \frac{1}{2} |\chi\gamma\zeta^*\gamma^* e^{i(2\alpha + \beta)2\pi} + \chi\delta\zeta^*\delta^* e^{-i(2\alpha - \beta)2\pi} + \chi\gamma\chi^*\delta^* e^{i(2\alpha + \beta)2\pi} + \zeta\gamma\zeta^*\delta^* e^{-i(2\alpha - \beta)2\pi}| \quad (7.26)$$

Nous remarquons que deux spins couplés et frappés ne ressentent jamais le retard (il n'apparaît pas dans l'opérateur d'évolution (équation 7.15)). Pour la force de frappes, deux cas apparaissent. Si les forces de frappes sont les mêmes, il n'y a pas d'effet sur la cohérence moyenne, mais si les forces de frappes sont différentes, la cohérence moyenne est modifiée. Ainsi, avant l'horizon de cohérence, les spins sont tous frappés de la même manière et la cohérence n'est pas modifiée. Au contraire, après l'horizon, la différence dans les frappes induit une chute de la cohérence. Ceci peut facilement être étendu à un nombre de spins plus grand.

Nous remarquons sur la figure 7.2, que les cohérences des spins individuels sont en phases. Ce n'est donc pas un effet de moyennage qui fait chuter la cohérence moyenne. Nous pouvons voir dans les

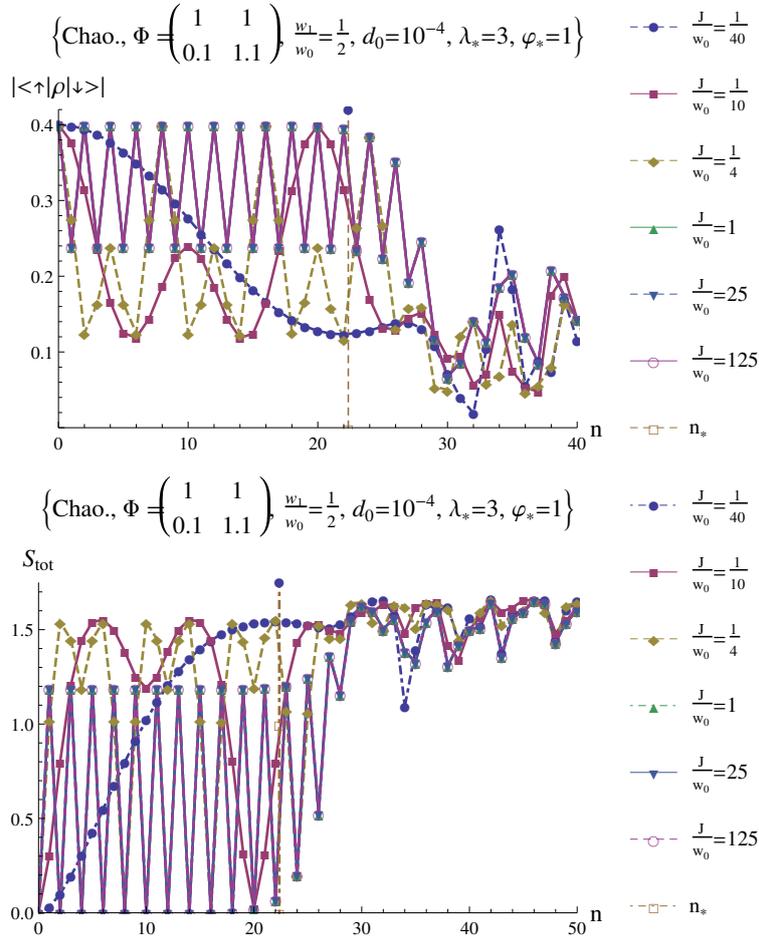


FIGURE 7.3 – Evolutions de la cohérence et de l'entropie du spin moyen d'une chaîne de 10 spins couplés par une interaction d'Ising-Z par rapport à la valeur du paramètre d'interaction. La chaîne est soumise à des frappes évoluant suivant une dynamique chaotique sur le tore.  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme continu du tore. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales. Les spins sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ .  $n_*$  est l'horizon de cohérence.

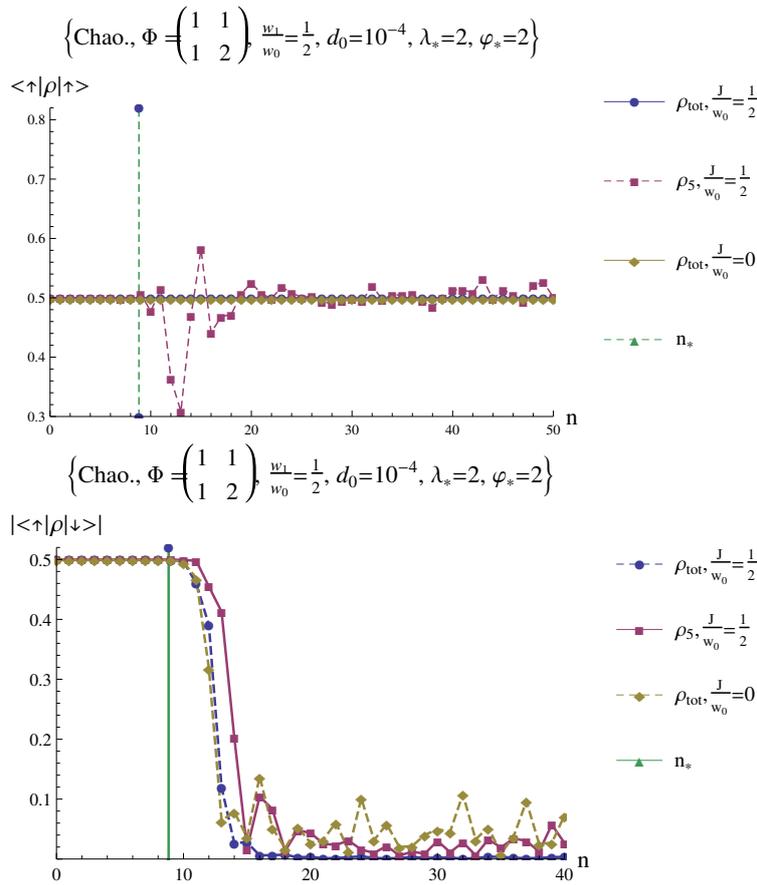


FIGURE 7.4 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen d'un ensemble de 80 spins sans interaction ( $\rho_{tot}, \frac{J}{w_0} = 0$ ), du spin moyen de 8 chaînes de 10 spins ( $\rho_{tot}, \frac{J}{w_0} = \frac{1}{2}$ ) et du 5ème spin de la première chaîne ( $\rho_5, \frac{J}{w_0} = \frac{1}{2}$ ), les chaînes étant décrites par la modèle d'Heisenberg. Les spins sont soumis à des frappes évoluant suivant la dynamique du chat d'Arnold.  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme du tore. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales. Les spins sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ .  $n_*$  est l'horizon de cohérence.

équations précédentes que les cohérences sont multipliées par des facteurs de phases différents car les forces de frappes sont différentes sur chaque spin. Ceci induit une chute de la cohérence vers 0 après moyennage.

Pour savoir si l'équation 6.19 est toujours valide pour ce système de spins, nous avons besoin de voir l'évolution du plateau de cohérence avec le paramètre d'interaction. La figure 7.3 montre l'évolution de la cohérence et de l'entropie d'une chaîne de spins couplés par une interaction d'Ising-Z. Pour un paramètre d'interaction petit, le plateau disparaît. Nous sommes presque dans le cas d'un ensemble de spins sans aucune interaction. Cependant, le nombre de spins n'est pas suffisant pour voir le plateau de cohérence. Si  $\frac{J}{w_0}$  est assez grand, nous voyons des oscillations de cohérence et d'entropie avant l'horizon de cohérence. Après celui-ci, la cohérence chute à 0 et l'entropie atteint sa valeur maximale. Sur le graphique de l'entropie, nous voyons que l'horizon de cohérence correspond toujours au nombre de frappes pour lesquelles les oscillations de l'entropie commencent à décroître et donc pour lesquelles la moyenne des oscillations commencent à augmenter. Pour un couplage Ising-Z la formule empirique correspond aussi au nombre de frappes pour lesquelles l'entropie commence à croître.

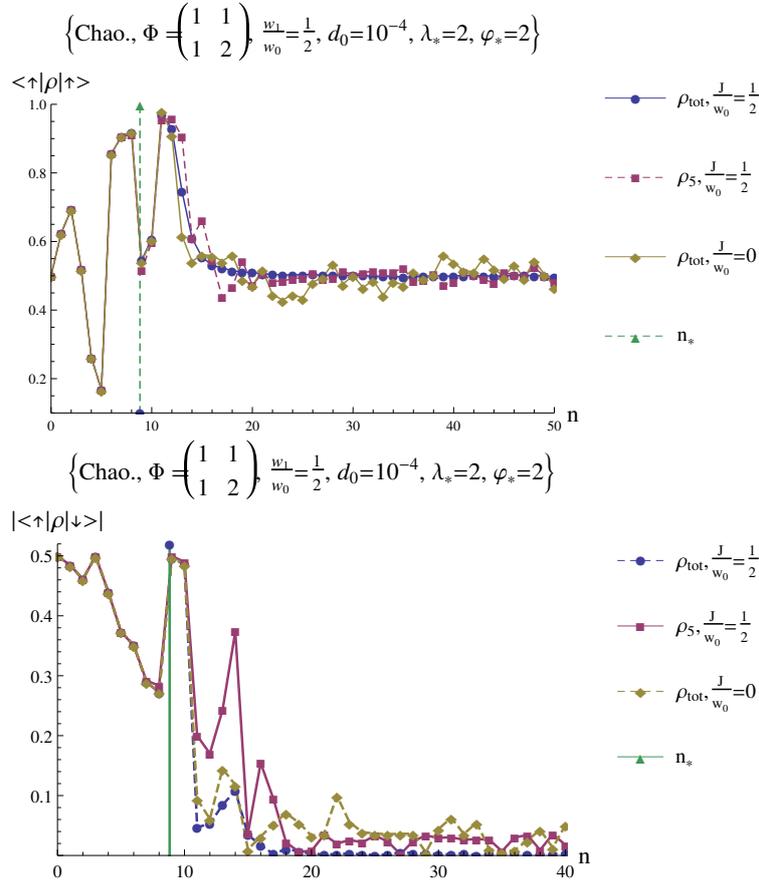


FIGURE 7.5 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen de 80 spins sans interaction ( $\rho_{tot}, \frac{J}{w_0} = 0$ ), du spin moyen de 8 chaînes de 10 spins ( $\rho_{tot}, \frac{J}{w_0} = \frac{1}{2}$ ) et du 5ième spin de la première chaîne ( $\rho_5, \frac{J}{w_0} = \frac{1}{2}$ ), les chaînes étant décrites par le modèle d’Heisenberg. Les spins sont soumis à des frappes évoluant suivant la dynamique du chat d’Arnold.  $\Phi$  est la matrice définissant l’automorphisme du tore. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .  $n_*$  est l’horizon de cohérence.

### Modèle d'Heisenberg : des résultats similaires à l'absence de couplage

Considérons maintenant une chaîne de spins couplés par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg. Nous savons que ce couplage est isotrope (deux spins ont tendance à s'aligner dans la même direction) et que les spins se comportent individuellement comme un spin moyen de la chaîne. Les graphiques 7.4 et 7.5 montrent l'évolution de la cohérence du spin moyen de 8 chaînes de 10 spins, d'un spin d'une chaîne et d'un ensemble de 80 spins. La première figure (7.4) est pour une frappe dans la direction d'un vecteur propre alors que pour sur la seconde (7.5), la frappe est dans une superposition d'états. Pour ces deux figures, toutes les courbes de cohérence sont confondues. Une chaîne de spins couplés par une interaction d'Heisenberg adopte le même comportement qu'un ensemble de spins, avec la particularité que la cohérence de chaque spin présente le plateau de cohérence. Le couplage d'Heisenberg semble rendre possible la conservation du résultat intéressant obtenu pour un ensemble de spins, pour le spin moyen de la chaîne et pour chaque spin de la chaîne. Pendant la durée de l'horizon de cohérence la population peut osciller et varier.

La longueur du plateau de cohérence semble ne pas être différent pour une chaîne de spins et correspond au nombre de frappes donné par l'équation 6.19. Ceci peut se voir en utilisant l'entropie au travers de la figure 7.6. Rappelons que l'entropie quantique, l'entropie à l'intérieur de la chaîne de spins est mesurée par l'entropie de von Neumann

$$S_{vN,n} = -\gamma \text{tr}(\rho_n \ln \rho_n) \quad (7.27)$$

et l'entropie classique, l'entropie dans le bain de frappes, est définie par l'entropie de Shannon

$$S_{Sh,n} = -\theta \sum_{ij,n} p_{ij,n} \ln p_{ij,n} \quad (7.28)$$

où  $p_{ij,n}$  est la fraction de trains de frappes qui sont dans le micro-état  $(i, j)$  à la  $n$ -ième itération. Les deux facteurs arbitraires  $\gamma$  et  $\theta$  sont choisis de manière à ce que l'entropie de von Neumann et de Shannon aient les mêmes maxima.

L'entropie est une mesure du désordre. Dans le bain de frappes, le désordre est donné par la variation de la force et du retard des frappes reçus par les spins. Dans la chaîne de spins, l'entropie quantique correspond à une large différence entre les états des spins dans la chaîne et/ou à une large intrication. Cette entropie provient uniquement des frappes comme nous choisissons les spins initialement tous dans le même état. Comme pour les ensembles de spins, nous observons que l'entropie classique commence à partir de l'horizon de prédictibilité et l'entropie quantique à partir de l'horizon de cohérence. Même si l'interaction et l'intrication permettent une meilleure transmission du désordre dans la chaîne de spins, le temps requis pour transmettre le désordre du bain classique au bain quantique est le même que sans interaction.

Pour seulement 5 ou 7 spins couplés, l'entropie quantique suit l'évolution obtenue pour 50 spins sans interaction ce qui n'est pas le cas de l'entropie classique. L'entropie classique peut être modélisée par l'entropie de Kolmogorov-Sinaï, laquelle nécessite un grand nombre de trains de frappes. Pour 50 trains de frappes (et donc 50 spins), l'évolution de l'entropie classique correspond à la prédiction de Kolmogorov-Sinaï. Donc, la notion de "un grand nombre de spins" est différente suivant que le désordre est classique ou quantique. Le désordre dans les frappes, lequel est un désordre classique, requiert un plus grand nombre de trains de frappes pour être en conformité avec la prédiction alors qu'un nombre de spins plus faible est suffisant pour voir le désordre dans la chaîne de spins.

De manière à connaître la modification de l'horizon de cohérence quand les spins sont couplés, nous devons regarder l'évolution de la cohérence et de l'entropie avec  $\frac{J}{w_0}$ , ce qui est réalisé figure 7.7. Quand  $J < w_0$ , l'entropie et la cohérence se comportent comme un ensemble de spins et la formule empirique donnée par l'équation 6.19 peut être utilisée. La dynamique induite par les frappes domine la dynamique interne de la chaîne. Dans ces conditions, les résultats peuvent être comparés à ceux d'un ensemble de spins. Au contraire, si  $J > w_0$ , l'augmentation de l'entropie et la chute de la cohérence commence de plus en plus tôt. Il y a toujours un horizon de cohérence mais il ne peut plus être prédit par la formule 6.19. La dynamique interne induit plus de désordre et d'autres phénomènes qui ne sont pas pris en compte dans la formule de l'horizon de cohérence.

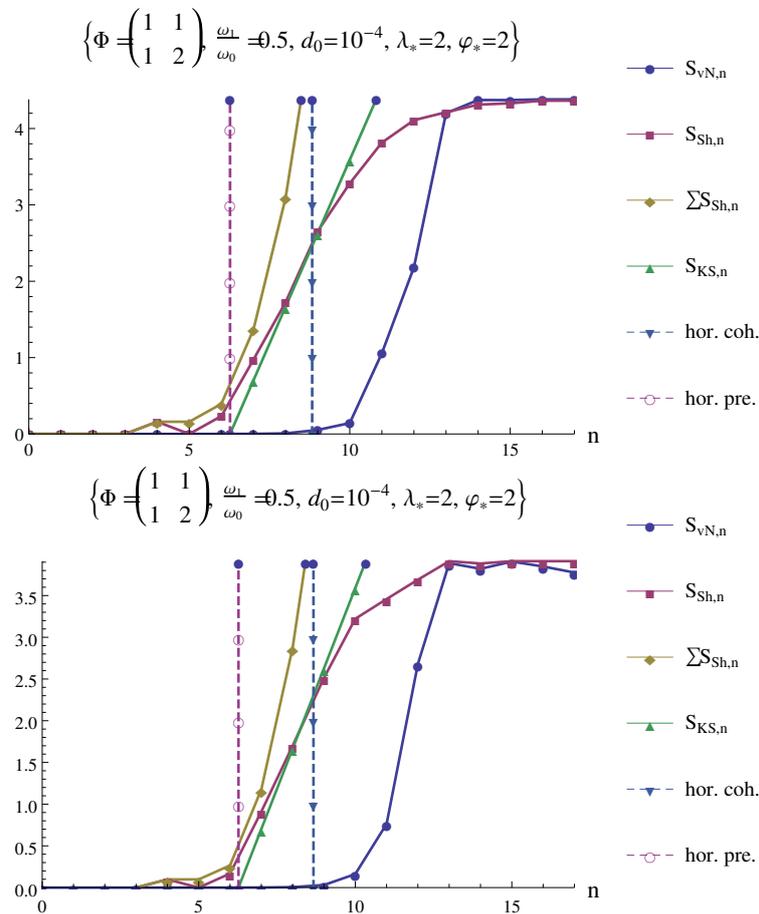


FIGURE 7.6 – Les graphiques montrent, pour le flot du chat d’Arnold, l’entropie de von Neuman (une mesure du désordre dans la chaîne de spins ou dans l’ensemble de spins), l’entropie de Shannon (une mesure du désordre dans le bain de frappes), l’entropie de Shannon cumulée du bain de frappes, et l’entropie du bain de frappes prédite par l’analyse de Kolmogorov-Sinaï (une mesure de la production du désordre par le flot prédit par la théorie du système dynamique). L’horizon de prédictibilité du bain de frappes et l’horizon de cohérence du bain de spins sont indiqués par des lignes pointillées verticales. Le graphique du haut est réalisé pour 5 chaînes de 10 spins couplés (avec  $\frac{J}{w_0} = \frac{1}{2}$ ) par une interaction d’Heisenberg et celui du bas est pour un ensemble de 50 spins. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ . Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

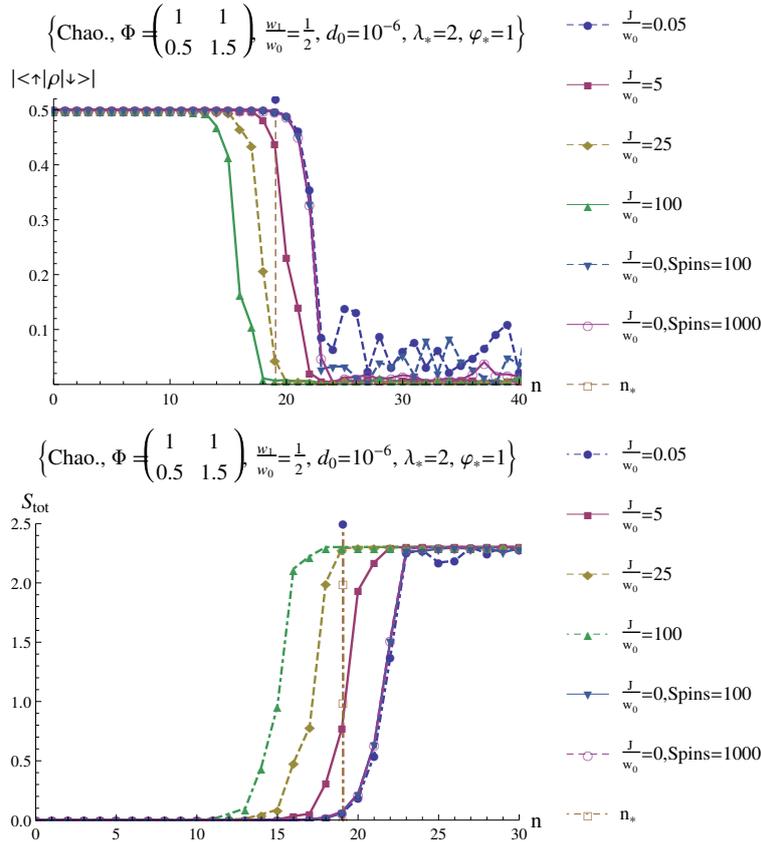


FIGURE 7.7 – Evolutions de la cohérence et de l’entropie d’un spin moyen d’un ensemble de 100 et 1000 spins sans interaction ( $\frac{J}{w_0} = 0$ ) et du spin moyen d’une chaîne de 10 spins ( $\frac{J}{w_0} \neq 0$ ) couplés par une interaction d’Heisenberg. Tous les spins sont dans l’état initial  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés suivant la direction d’un vecteur propre  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ . Les spins sont soumis à des frappes évoluant suivant un automorphisme continu du tore défini par  $\Phi$ . *Spins* correspond au nombre de spins sans aucun couplage entre eux. Les courbes définies par  $\frac{J}{w_0} = \frac{1}{20}$  et  $\frac{J}{w_0} = 0$  sont confondues sur les deux graphiques. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.  $n_*$  est l’horizon de cohérence.

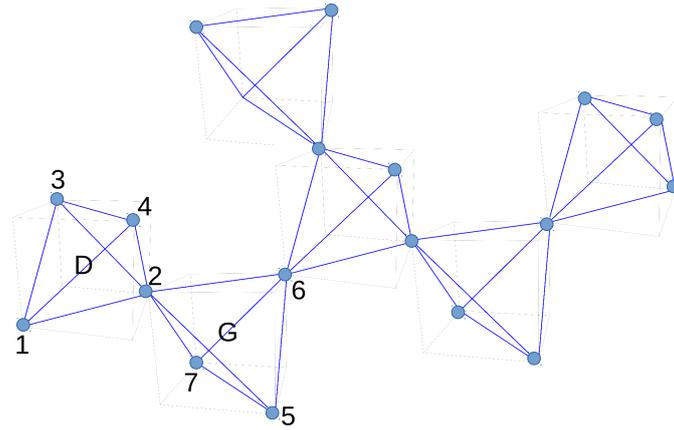


FIGURE 7.8 – Représentation schématique d'une glace de spins. Le symbole "D" signifie glace droite et le symbole "G", glace gauche.

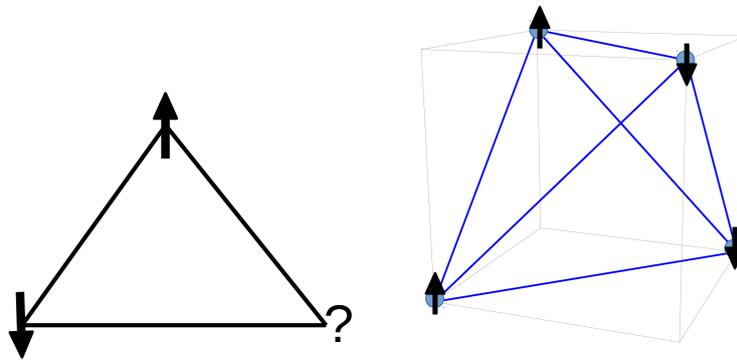


FIGURE 7.9 – Exemple de frustration géométrique à trois sites (2 dimensions) et à quatre sites (3 dimensions). La direction des spins est représentée par les flèches noires.

### 7.1.2 Glace de spins

Une glace de spins est un matériau magnétique exotique très intéressant qui peut présenter sous certaines conditions un ou plusieurs monopôles magnétiques [43, 23]. Elle est constituée de cristaux reliés les uns aux autres par un spin comme le montre la figure 7.8.

Comme nous le voyons sur la figure 7.8, les glaces de spins possèdent une forme tétraédrique où à chaque sommet se trouve un spin. La structure est la même que celle de la glace d'eau où chaque sommet du tétraèdre possède une molécule d'eau, à la différence que chaque tétraèdre possède aussi une molécule d'eau en son centre. Dans le cas de la glace d'eau, ce sont les moments dipolaires électriques des molécules d'eau qui jouent le rôle des spins. Les glaces de spins peuvent être faites de plusieurs matériaux mais nous trouvons principalement du titanate de dysprosium ( $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ ) et du titanate d'holmium ( $\text{Ho}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ ).

La glace de spins est caractérisée par la frustration géométrique. Pour bien la comprendre considérons un exemple à trois sites comme sur le premier graphique de la figure 7.9. L'interaction entre les particules est de type anti-ferromagnétique. Les spins des sites vont alors s'aligner mais dans des sens opposés pour être au niveau d'énergie minimale (alignement anti-parallèle). Cependant deux spins peuvent bien s'aligner dans des directions opposées mais le dernier pose problème. S'il se met dans une direction opposée à l'un des deux autres spins, il sera dans la même direction que le troisième, ceci provoque une frustration géométrique. Si nous passons maintenant à trois dimensions comme sur le second graphique de la figure 7.9, nous voyons aussi apparaître la frustration géométrique. Les spins

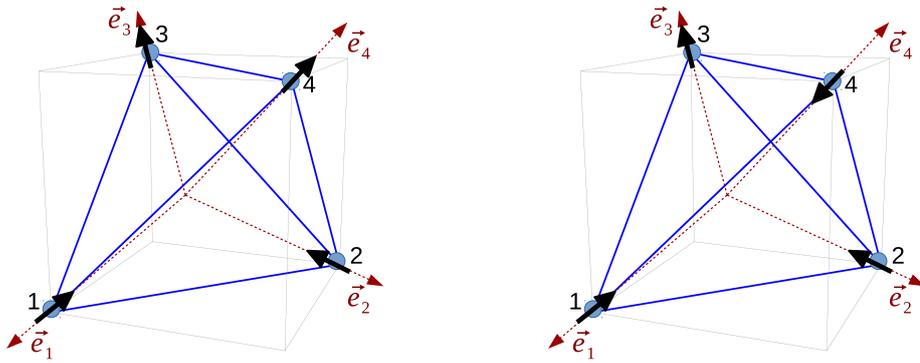


FIGURE 7.10 – Exemple de frustration géométrique dans une glace de spins. La direction des spins est représentée par les flèches noires. Les directions propres sont représentées par des flèches rouges.

ne peuvent pas tous être anti-parallèles les uns avec les autres. Comme il est impossible d'avoir une configuration favorable, nous parlons de frustration. Revenons maintenant aux glaces de spins. Pour être dans la configuration d'énergie minimale, les spins vont s'aligner suivant les directions propres, celles partant du centre du tétraèdre et rejoignant chaque sommet (voir plus loin pour plus d'explications). Il y a alors deux configurations possibles comme nous le montre la figure 7.10. Dans une glace de spins, les interactions sont de types ferromagnétiques (au sens des directions locales  $\{\vec{e}_i\}$  : c'est à dire que le spin 1 est dans la direction  $\vec{e}_1$ , le spin en 2 lui sera "parallèle" s'il est dans la direction  $\vec{e}_2$  et anti-parallèle s'il est dans la direction  $-\vec{e}_2$ ). Les spins veulent alors s'aligner dans la même direction (au sens des directions  $\{\vec{e}_i\}$ ). Dans le cas du premier graphique, entre les spins du haut et ceux du bas de la figure, les interactions ferromagnétiques sont bien minimisées, cependant entre ceux de droite et ceux de gauche, les spins sont alignés anti-parallèlement. Au final, il y a autant d'alignements parallèles que d'alignements anti-parallèles. Cependant dans le second graphique, nous voyons qu'il y a plus d'alignements parallèles que d'anti-parallèles. Ceci crée un surplus d'énergie associé au phénomène de monopôle magnétique.

### Construction de la glace de spins

Pour construire un cristal d'une glace de spins facilement, il faut le représenter dans un cube. Le premier spin se situe à un sommet du cube (spin 1 de la figure 7.8). Nous traçons ensuite les trois diagonales partant de ce point et traversant les faces du cube. Les trois sommets atteints par ces diagonales donnent les trois autres spins du tétraèdre (spins 2, 3 et 4 de la figure 7.8) qu'il suffit juste de rejoindre pour finir de construire le cristal.

Nous remarquons sur la figure 7.8 que deux types de cristaux apparaissent que nous nommons glace droite (représentée par un D sur le graphique) et glace gauche (représentée par un G sur le graphique). Nous allons donc analyser ces deux types de cristaux pour pouvoir construire l'Hamiltonien d'interaction ainsi que les états des spins.

La glace de spins est caractérisée par deux bases (dans  $\mathbb{R}^3$  (espace géométrique)) : la base globale associée aux directions  $\{x, y, z\}$  du graphique 7.11 et la base locale, la base associée aux directions  $\vec{e}_i$  (en rouge sur la figure 7.11). La base locale est associée aux directions  $z_i$  locales définies par la configuration des spins à l'état de plus basse énergie. Comme la direction  $z_i$  d'un spin dépend du point considéré (donc de la base locale associée), nous devons nous rapporter à une base globale. Pour ceci, il faut décrire globalement les vecteurs. Sur le graphique 7.11, nous avons représenté les vecteurs  $\vec{e}_i$  (de direction locale  $z_i$ ) associés à chaque spin d'un cristal droit. Ces vecteurs deviennent

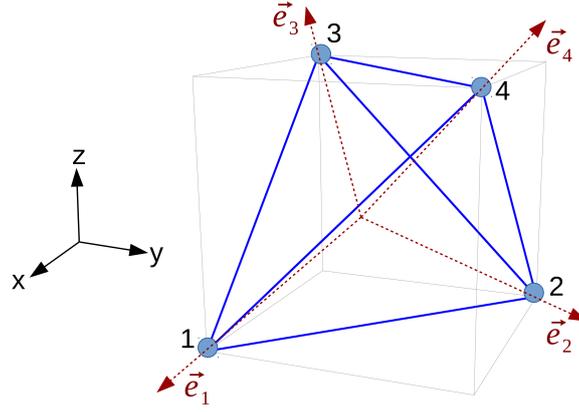


FIGURE 7.11 – Représentation schématique d'une glace de spins droite. Les vecteurs représentés en rouge correspondent aux directions  $z_i$  dans la base locale des spins.  $\{x, y, z\}$  est associé à la base globale.

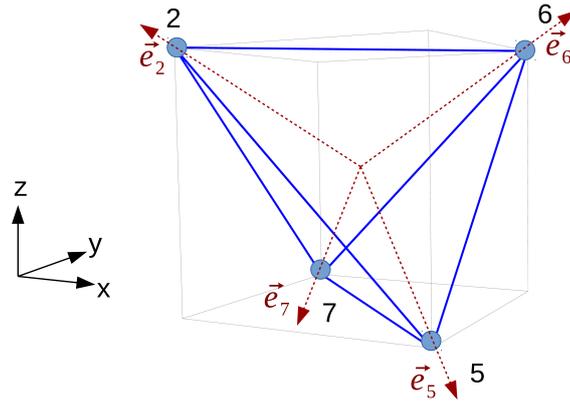


FIGURE 7.12 – Représentation schématique d'une glace de spins gauche. Les vecteurs représentés en rouge correspondent aux directions  $z_i$  dans la base locale des spins.  $\{x, y, z\}$  est associé à la base globale.

dans la base globale  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . A partir de ces vecteurs nous obtenons facilement les vecteurs de spins en chaque point  $\vec{S}_1 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ -\sigma_y \\ -\sigma_z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{S}_2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sigma_x \\ \sigma_y \\ -\sigma_z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{S}_3 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sigma_x \\ -\sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{S}_4 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$

Nous faisons la même chose pour le cristal gauche. En prenant comme appui le graphique 7.12, nous obtenons  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{e}_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Les vecteurs de spins en chaque

point sont  $\vec{S}_2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ -\sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{S}_5 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ -\sigma_z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{S}_6 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{S}_7 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sigma_x \\ -\sigma_y \\ -\sigma_z \end{pmatrix}$

L'hamiltonien d'interaction à l'intérieur d'un cristal de spin s'écrit

$$H_I = \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n>m}^N I^{\otimes n-1} \otimes \vec{S}_m \odot I^{\otimes n-m-1} \otimes \vec{S}_n \otimes I^{N-n} \quad (7.29)$$

avec  $N$  le nombre de spins dans un seul cristal et  $\vec{S} \odot \vec{S} = \sum_{i=x,y,z} S_i \otimes S_i$ . Quand on rajoute une ou plusieurs glaces de spins, il faut bien repérer le numéro du spin qui relie deux glaces afin d'avoir les bonnes interactions et rajouter des tensoriels identités pour arriver au nombre de spins total de tous les cristaux.

Les axes propres d'une glace de spins sont ceux partant du centre du tétraèdre et rejoignant les sommets. Pour connaître les états propres des spins, il faut obtenir la direction du spin dans la direction des axes propres.

Soit  $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  l'axe  $z$  d'un spin dans la base locale.

$$\sigma_i^3 = a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

Nous cherchons les vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cx + (a - ib)y = \pm x \\ (a - ib)y = (-c \pm 1)x \end{cases} \quad (7.32)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - ib \\ -c \pm 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + (-c \pm 1)^2}} = \begin{pmatrix} a - ib \\ -c \pm 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1 \mp c)}} \quad (7.33)$$

Nous obtenons finalement les états entrants et sortants décomposés dans la base des vecteurs propres de  $\sigma_z$

$$|out, i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1-c)}} \begin{pmatrix} a - ib \\ -c + 1 \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

$$|in, i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+c)}} \begin{pmatrix} a - ib \\ -c - 1 \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

correspondant aux états up et down locaux (par rapport à  $\vec{e}_i$ ). Ils sont dit entrants ou sortants car ils correspondent à des directions entrantes ou sortantes du tétraèdre.

### Horizon de cohérence

Nous avons regardé la conservation de l'horizon de cohérence pour 2, 3 et 4 glaces de spins pour des états de monopôle (1 spin sortant et 3 spins entrants) et de non monopôle (2 spins entrants et 2 spins sortants). Dans tous les cas nous obtenons une conservation de l'horizon de cohérence comme le montre les graphiques de population et de cohérence 7.13. Cette figure montre l'évolution de la population et de la cohérence pour une glace de spins constituée de 3 cristaux dont 2 forment un monopôle suivant la représentation de la figure 7.14. Les spins sont situés suivant leurs axes  $z_i$  propres donnés par les vecteurs des graphiques 7.11 et 7.12. Nous voyons qu'avant l'horizon de cohérence la population et la cohérence restent à leurs valeurs de départ. Elles vont ensuite vers la distribution microcanonique. Avant l'horizon de cohérence les spins ne ressentent pas les frappes car la force et

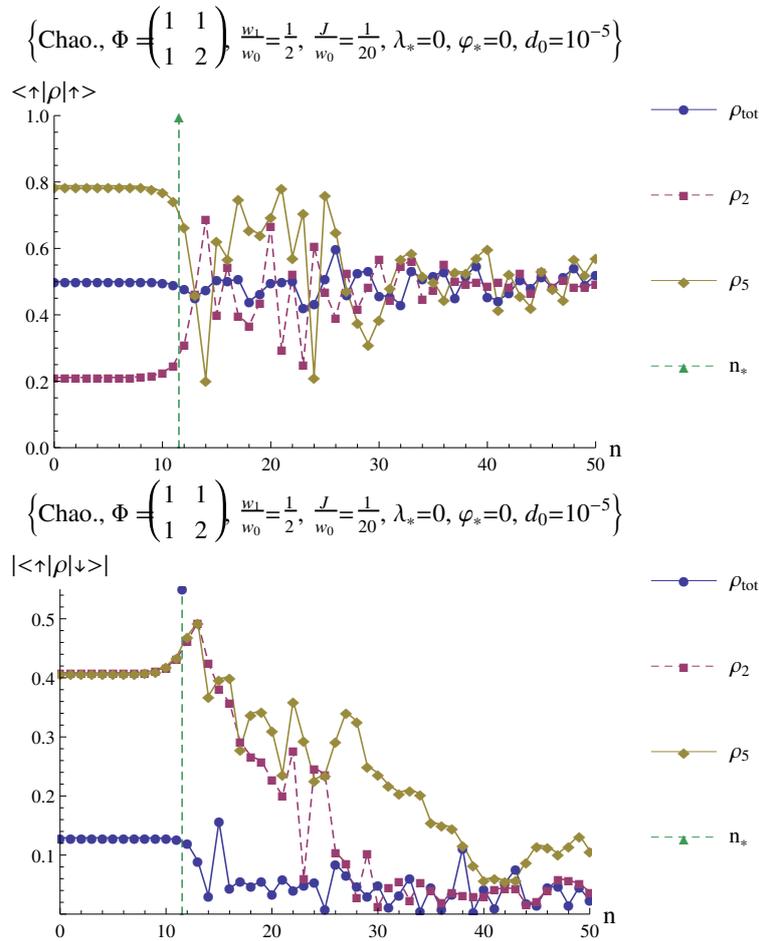


FIGURE 7.13 – Evolutions de la population et de la cohérence du spin moyen et d'un spin dans une glace de spins constituée de 3 mailles. L'état initial des spins est tel que deux mailles forment un monopôle et le troisième un non monopôle comme montré sur le figure 7.14. Chaque spin est soumis à un train de frappes chaotique pour lequel la direction de frappe est  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . L'axe vertical correspond à l'horizon de cohérence. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.  $n_*$  est l'horizon de cohérence.

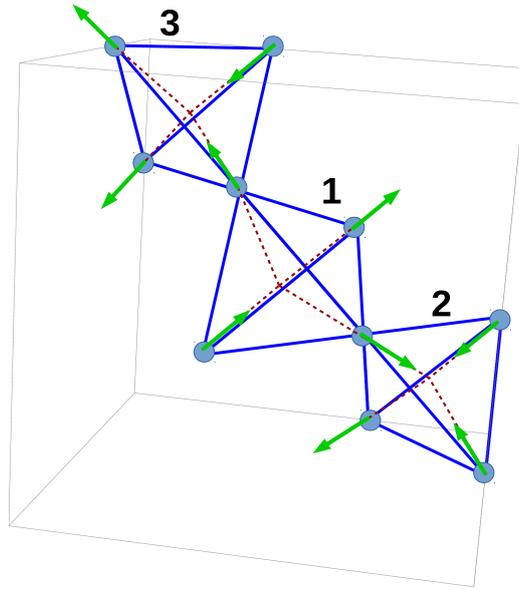


FIGURE 7.14 – Représentation schématique d'une glace de spins contenant 3 cristaux. Les flèches représentent la direction des états initiaux des spins.

le retard sont proches de 0. Comme en plus les spins sont suivant les axes propres, ils sont dans une configuration stable et ne bougent pas. Après l'horizon de cohérence, l'effet chaotique se fait ressentir au travers de la force et du retard. Les spins frappés différemment ne vont pas avoir le même état et les effets du couplage interviennent. Ceci induit de la décohérence et une relaxation de la population. L'analyse de l'horizon de cohérence avec la présence de monopôles ou de non-monopôles montre les mêmes résultats. Le monopôle n'a donc aucune influence sur la durée de l'horizon de cohérence. Si nous choisissons un couple initial  $(\lambda_*, \varphi_*) \neq (0, 0)$ , les effets des frappes se font ressentir dès le départ. Dans cette configuration le plateau de cohérence n'est pas visible à cause des couplages qui transmettent le désordre. Il en est de même si les spins ne sont pas dans la direction des axes propres. Ces résultats montrent que les discussions du début du chapitre ne sont pas limitées à la structure en chaîne de spins. Des réseaux de spins plus complexes, comme la glace de spins, exhibent aussi les mêmes phénomènes.

L'horizon de cohérence est aussi montré par la variation du monopôle magnétique au cours du temps comme le montre la figure 7.15. Nous avons représenté cette variation au travers du flux traversant ces cristaux. Dans le papier [23], nous trouvons que la charge magnétique moyenne d'une cellule  $\alpha$  est

$$Q_\alpha = \frac{\hbar \mu}{2 a_d} \sum_i \text{tr}(\rho_i \sigma_i^3) \quad (7.36)$$

avec  $\mu$  la magnitude du moment magnétique et  $a_d$  la longueur de la liaison du réseau du cristal (la sommation étant sur tous les sommets du tétraèdre). La charge magnétique est la moyenne statistique des états up et down des spins de la cellule. Le potentiel scalaire magnétique est

$$V(r_\alpha) = \frac{\mu_0 Q_\alpha}{4\pi r_\alpha} \quad (7.37)$$

en coordonnées sphériques au centre de la cellule  $\alpha$ . Nous en déduisons le champ magnétique au centre de la cellule  $\alpha$

$$\vec{B} = -\vec{grad}V(r_\alpha) = \frac{\mu_0 Q_\alpha}{4\pi r_\alpha^2} \vec{e}_{r_\alpha} \quad (7.38)$$

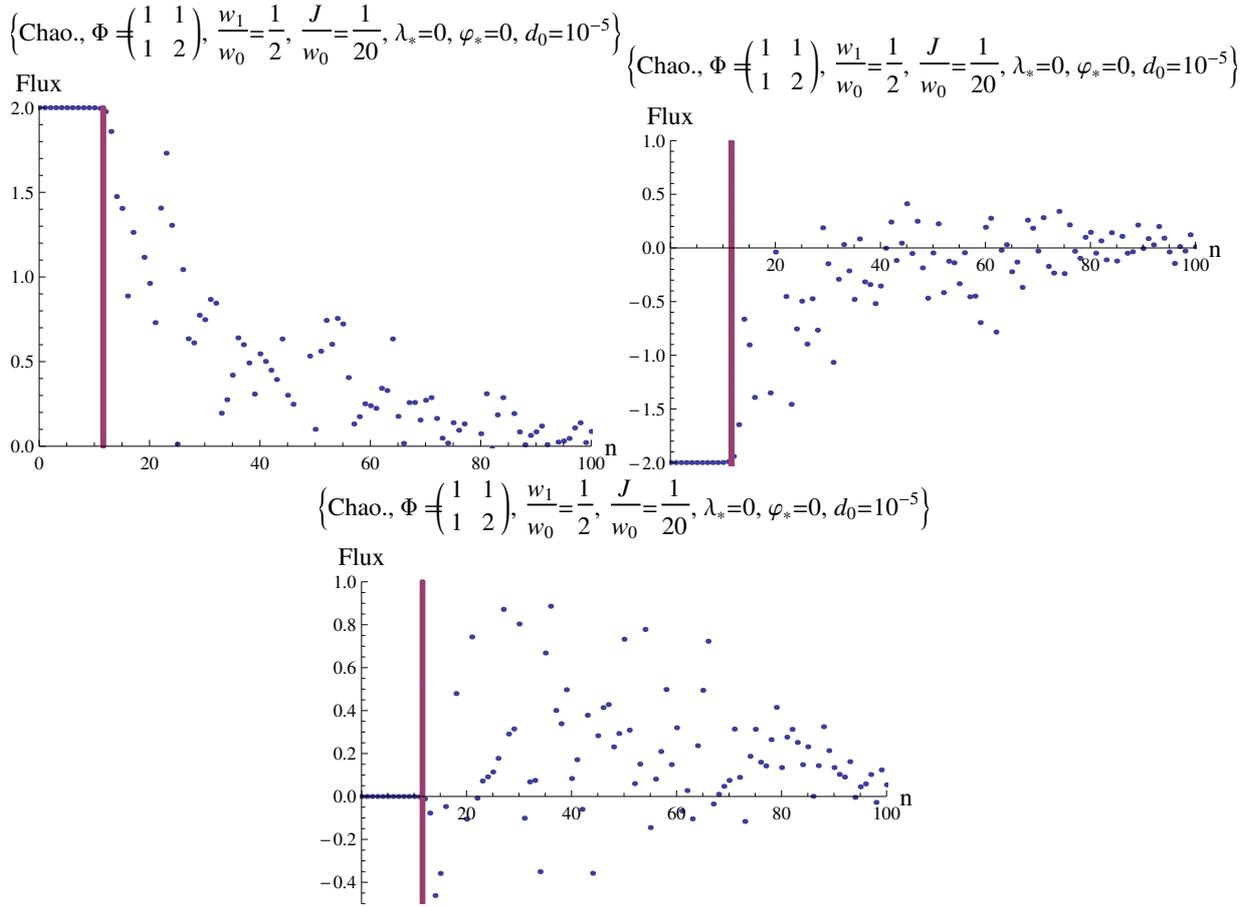


FIGURE 7.15 – Evolution du flux magnétique à travers les trois cristaux d'une glace de spins. Les graphiques sont respectivement associés au premier, au second et au troisième cristal de la figure 7.14. Les deux premiers cristaux forment un monopôle magnétique d'où le fait que le flux commence à  $\pm 2$ . La ligne verticale correspond à l'horizon de cohérence. Chaque spin est soumis à un train de frappes chaotique pour lequel la direction de frappe est  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

Si nous prenons une sphère  $S_\alpha$  de rayon  $r_\alpha$  centrée sur la cellule, le flux est

$$\Phi = \oiint_{S_\alpha} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.39)$$

$$= \mu_0 Q_\alpha \quad (7.40)$$

$$= \frac{\hbar \mu_0 \mu}{2a_d^2} \sum_i \text{tr}(\rho_i \sigma_i^3) \quad (7.41)$$

Nous utiliserons le flux sans dimension suivant

$$F = \frac{\Phi}{\frac{\hbar \mu_0 \mu}{2a_d^2}} = \sum_i \text{tr}(\rho_i \sigma_i^3) \quad (7.42)$$

Plus le flux tend vers  $\pm 2$  plus le cristal tend à être un monopôle et inversement. Nous voyons sur la figure 7.15 que pendant la durée de l'horizon de cohérence le monopôle est conservé. Après l'horizon il est complètement perdu.

Afin de vérifier la conservation de l'horizon de cohérence, nous devons regarder comment évolue l'entropie avec la variation du paramètre d'interaction. Ceci est représenté sur la figure 7.16. Nous

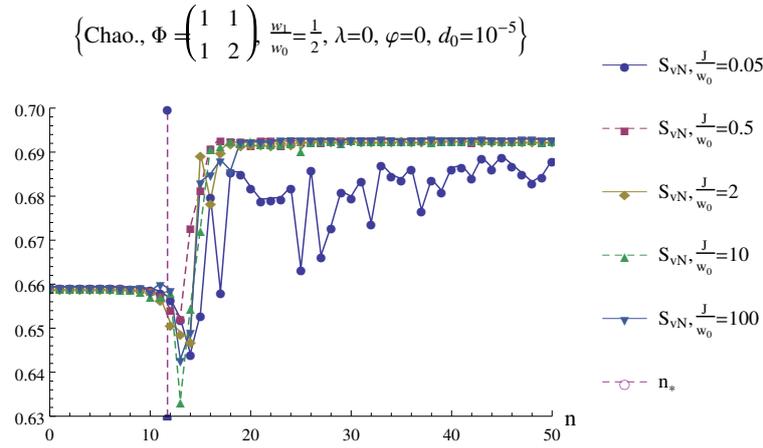


FIGURE 7.16 – Evolution de l’entropie d’une glace de spins constituée de 3 cristaux. Chaque spin est soumis à un train de frappes chaotique pour lequel la direction de frappe est  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . L’état initial des spins est tel que deux cristaux forment un monopôle et le troisième un non monopôle comme le montre la figure 7.14. L’axe vertical représente l’horizon de cohérence. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

voions la présence d’un petit décrochage dans la courbe de l’entropie attestant de la présence d’un changement dans le désordre de la glace. Celui-ci correspond au temps associé à l’horizon de cohérence. Nous remarquons que l’horizon de cohérence reste bien prédit par la formule 6.19 quelque soit la valeur du paramètre d’interaction.

## 7.2 Conservation par changement de l’environnement chaotique

Nous venons de voir que l’horizon de cohérence se conservait avec le changement de système de spins. Regardons maintenant si cet horizon se conserve en changeant le système dynamique classique et en prenant les systèmes chaotiques de la Standard map et les systèmes dynamiques dissipatifs à 3 dimensions.

### 7.2.1 Standard map

La Standard map est associée à la section de Poincaré du mouvement d’un rotateur frappé<sup>1</sup> [63]. Elle est caractérisée par les équations

$$p^{i+1} = p^i + K \sin(x^i) \quad \text{mod } 2\pi \quad (7.43)$$

$$x^{i+1} = x^i + p^{i+1} \quad \text{mod } 2\pi \quad (7.44)$$

avec  $p^i$  le moment angulaire du rotateur,  $x^i$  sa position angulaire après la  $i$ -ième frappe et  $K$  l’intensité des frappes.

La Standard map est une dynamique particulière car elle présente des îlots de stabilité et une mer chaotique dans son espace des phases comme le montre la figure 7.17. Au centre et sur les cotés se situent la mer chaotique et les points formant des ovales sont dans l’îlot de stabilité. Ce dernier ne nous intéresse pas ici car il n’est pas chaotique. Au centre d’un îlot les observations sont similaires à celles faites avec la dynamique stationnaire. Partout ailleurs dans l’îlot de stabilité, la dynamique ressemble à un mélange entre une dynamique stationnaire et une dynamique de dérive linéaire. Nous nous intéresserons ici à la mer chaotique.

1. un rotateur est une tige pouvant tourner autour d’un axe situé à une de ses extrémités. De plus le rotateur est frappé de l’autre côté de la tige.

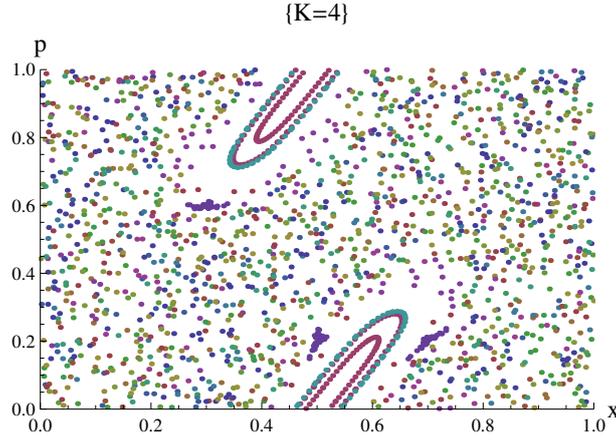


FIGURE 7.17 – Evolution de plusieurs dynamiques de la Standard map prises aléatoirement sur l'espace des phases. Chaque couleur correspond à une trajectoire de conditions initiales différentes.

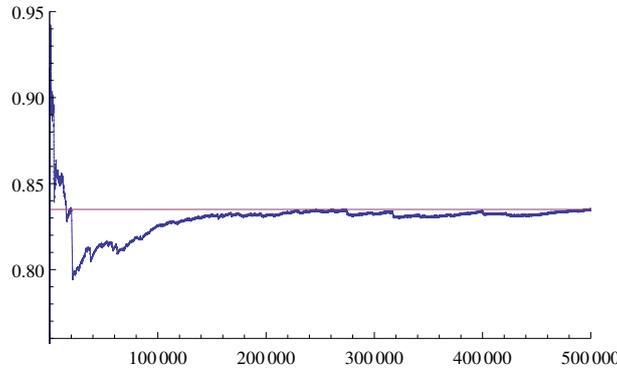


FIGURE 7.18 – Evolution de l'exposant asymptotique de la Standard map en fonction du nombre de Jacobiens considérés.

D'après le théorème de Pesin [49], l'entropie métrique est égale à l'exposant de Lyapunov. Nous devons donc calculer l'exposant de Lyapunov asymptotique pour connaître la pente de l'entropie classique ainsi que la prédiction de l'horizon de cohérence équation 6.19. Dans le cas de la standard map, nous avons

$$X_{n+1} = \phi(X_n) \quad (7.45)$$

Nous calculons alors les matrices jacobiniennes aux points  $X_n$  considérés

$$\partial\varphi_{X_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi^p(x,p)}{\partial p} & \frac{\partial\phi^p(x,p)}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi^x(x,p)}{\partial p} & \frac{\partial\phi^x(x,p)}{\partial x} \end{pmatrix}_{X_n} \quad (7.46)$$

L'exposant de Lyapunov asymptotique vaut

$$\lambda = \limsup_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i} \ln \left( \text{tr} \left( U_i^T U_i \right) \right) \quad (7.47)$$

avec  $U_i = \partial\varphi_{X_{i-1}} \dots \partial\varphi_{X_1} \partial\varphi_{X_0}$ . Le calcul numérique de l'exposant de Lyapunov asymptotique est donné figure 7.18. La valeur de cet exposant vaut approximativement 0.83.

Considérons maintenant un ensemble de  $N$  spins sans couplage. Ces spins sont soumis à un bain de frappes perturbées par un environnement classique chaotique suivant la dynamique de la Standard map. La perturbation touche la force et le retard de chaque frappe. En prenant les premières frappes

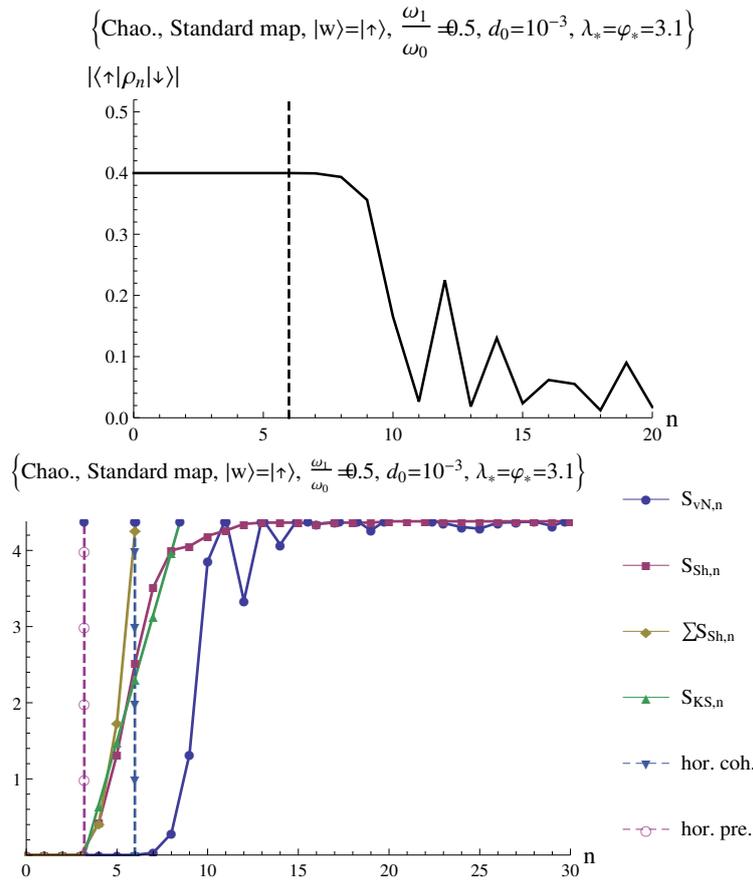


FIGURE 7.19 – Evolutions de l'entropie et de la cohérence d'un spin moyen d'un ensemble de 80 spins soumis à un environnement chaotique suivant la dynamique de la mer chaotique de la Standard map. Tous les spins sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ . La ligne verticale sur le graphique de la cohérence correspond à l'horizon de cohérence. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales. Le second graphique montre l'entropie de von Neuman (une mesure du désordre dans l'ensemble de spins), l'entropie de Shannon (une mesure du désordre dans le bain de frappes), l'entropie de Shannon cumulée du bain de frappes et l'entropie du bain de frappes prédite par l'analyse de Kolmogorov-Sinai (une mesure de la production du désordre par le flot prédit par la théorie du système dynamique). L'horizon de prédictibilité du bain de frappes et l'horizon de cohérence du bain de spins sont indiqués par des lignes pointillées verticales

dans la mer chaotique de la Standard map et une taille de micro-état de  $\frac{\pi}{64}$ , nous obtenons les évolutions de l'entropie et de la cohérence représentées figure 7.19. Sur ces graphiques l'horizon de prédictibilité a été ajusté manuellement. En effet, la Standard map est un système chaotique compliqué qui ne possède pas de directions propres (si nous linéarisons le flot en un point  $x$ , et que nous cherchons les directions propres comme vecteurs propres de la linéarisation, nous trouverons un résultat différent de la linéarisation en un point  $y$ ). Ces directions dépendent du point où nous nous trouvons, ce qui ne permet pas d'utiliser la formule de l'horizon de prédictibilité équation 6.9.

Par ailleurs, nous remarquons que lorsque l'horizon de prédictibilité correspond au moment où l'entropie classique commence à croître, l'horizon de cohérence prévoit le moment où l'entropie quantique commence à augmenter. La pente de l'entropie classique est bien donnée par l'exposant de Lyapunov asymptotique. L'entropie classique cumulée correspond au moment où l'entropie quantique commence à croître. La formule 6.19 reste donc valable.

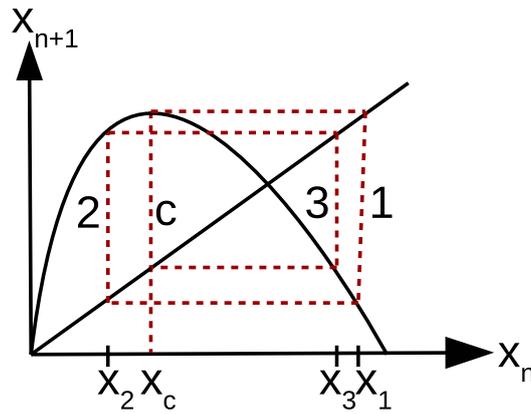


FIGURE 7.20 – Exemple d'application de premier retour de l'orbite permettant de retourner au point maximal.

### 7.2.2 Environnement chaotique dissipatif

Les systèmes chaotiques à trois dimensions que nous voulons regarder ici sont des systèmes dissipatifs dont l'exposant de Lyapunov varie en fonction du point considéré. Ainsi avec ces systèmes, la mesure n'est pas préservée. L'espace des phases occupé se réduit à l'attracteur étrange avec le temps, ce qui fait que la partition initiale de l'espace des phases peut devenir non pertinente avec le temps. A cause de ces deux éléments, nous ne pouvons pas utiliser les mêmes outils que précédemment. Il faut donc remplacer l'entropie de Kolmogorov-Sinaï par l'entropie topologique et calculer l'exposant asymptotique pour obtenir la formule de l'horizon de cohérence (équation 6.19). Celle-ci est définie dans [7] et l'ensemble des propositions, théorèmes, lemmes et définitions qui lui sont relatives se trouvent en annexe C.

#### Entropie topologique

Nous allons présenter une des méthodes permettant de calculer l'entropie topologique que nous pouvons trouver dans [29]. Elle utilise l'application de premier retour. Considérons le système chaotique décrit par les équations

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y, z) \quad (7.48)$$

$$\frac{dy}{dt} = F_2(x, y, z) \quad (7.49)$$

$$\frac{dz}{dt} = F_3(x, y, z) \quad (7.50)$$

Nous choisissons une des trois grandeurs  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Prenons  $x$ . Nous choisissons une partition du temps de telle manière que nous ayons un pas de temps  $\Delta t$  entre deux points. Soit  $x_n$  le maxima de  $x$  à la  $n$ -ième itération. Nous cherchons la fonction  $f$  telle que  $x_{n+1} = f(x_n)$  et nous traçons  $f$  pour obtenir l'application de premier retour. Ensuite, nous cherchons le point  $x_n$  ayant la plus grande image. Nous traçons l'orbite complète de ce point de manière à retourner sur le point de départ, le point maximal, comme sur la figure 7.20 (dans cet exemple, le point maximal est le point d'abscisse  $x_c$ ). Nous numérotions les points en fonction de leur position gauche ou droite en abscisse par rapport au point maximal. Dans notre exemple, nous avons  $L_{x_2} C_{x_c} R_{x_3} R_{x_1}$  avec  $C$  pour le point central,  $L$  pour les points à gauche du point central et  $R$  pour ceux à droite du point central (les indices correspondant à l'abscisse du point considéré). Nous créons alors les intervalles suivant la suite définie précédemment  $I_1 = [x_2, x_c]$ ,  $I_2 = [x_c, x_3]$ ,  $I_3 = [x_3, x_1]$  et leurs images  $f(I_1) = [x_3, x_1]$ ,  $f(I_2) = [x_1, x_c]$ ,  $f(I_3) = [x_c, x_2]$ . Nous construisons la matrice telle que si  $I_j \subset f(I_k)$  nous mettons un 1 dans la matrice

à la colonne  $j$  et à la ligne  $k$  sinon nous mettons 0. Dans l'exemple précédent cette matrice est

$$\begin{array}{cccc} I_1 & I_2 & I_3 & \\ 0 & 0 & 1 & f(I_1) \\ 1 & 0 & 0 & f(I_2) \\ 0 & 1 & 1 & f(I_3) \end{array} \quad (7.51)$$

Il ne reste plus qu'à chercher les valeurs propres de la matrice. L'entropie topologique vaut alors

$$h_{top} = \ln(\max(\text{valeur propre})) \quad (7.52)$$

La suite  $x_{n+1} = f(x_n)$  est un système dynamique à une dimension dont les propriétés sont similaires au système dynamique différentielle à trois dimensions, equations 7.48, 7.49 et 7.50.  $L_{x_2}C_xR_{x_3}R_{x_1}$  représente un système dynamique symbolique de propriétés équivalentes.

### Exposant de Lyapunov asymptotique

Afin de déterminer la valeur de l'horizon de cohérence par la formule empirique 6.19, nous devons calculer l'exposant asymptotique.

Le flot est caractérisé par

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) \quad (7.53)$$

$$X(t) = \Phi^t(X_0) \quad (7.54)$$

$$J(t, 0) = \partial\Phi_{X(t)} \quad (7.55)$$

avec  $\Phi$  le flot et  $J$  la matrice jacobienne du flot.

$$\dot{J}(t, 0) = \partial F_{x(t)} J(t, 0) \quad (7.56)$$

Donc

$$J(t, 0) = \mathbb{T}e^{\int_0^t \partial F_{x(t)} dt} \quad (7.57)$$

Le système dynamique dissipatif présente une variation à la fois dans le temps et dans l'espace. L'exposant de Lyapunov asymptotique est donc

$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left( \text{tr} \left( J^T(t, 0) J(t, 0) \right) \right) \quad (7.58)$$

Nous pouvons nous permettre de partir de l'instant initial car dans le "lim sup" le régime transitoire est supprimé. La norme utilisée est  $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ . Finalement après convergence  $\lambda$  correspond à l'exposant de Lyapunov asymptotique dans l'attracteur (une sorte d'exposant de Lyapunov moyen).

### Lorenz

Les mouvements de convection apparaissant dans l'atmosphère ou dans les fluides sont décrits par les cellules de Bénard. Nous retrouvons de tels mouvements dans l'atmosphère terrestre par exemple. Ce mouvement est très bien représenté lorsque nous faisons chauffer une casserole d'eau. Il y a la plaque qui chauffe le fond de la casserole alors que le haut reste froid. Il y a alors des transferts de chaleur par mouvements de convection. Le chaud va avoir tendance à monter alors que le froid descend. Ces mouvements se décomposent en cellules. Deux cellules adjacentes doivent avoir un mouvement opposé afin d'être compatibles entre elles. Ces échanges thermiques ont été décrits par Lorenz [60] à travers un modèle à trois dimensions régi par les équations suivantes

$$\frac{dx}{dt} = P(x - y) \quad (7.59)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + Rx - y \quad (7.60)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (7.61)$$

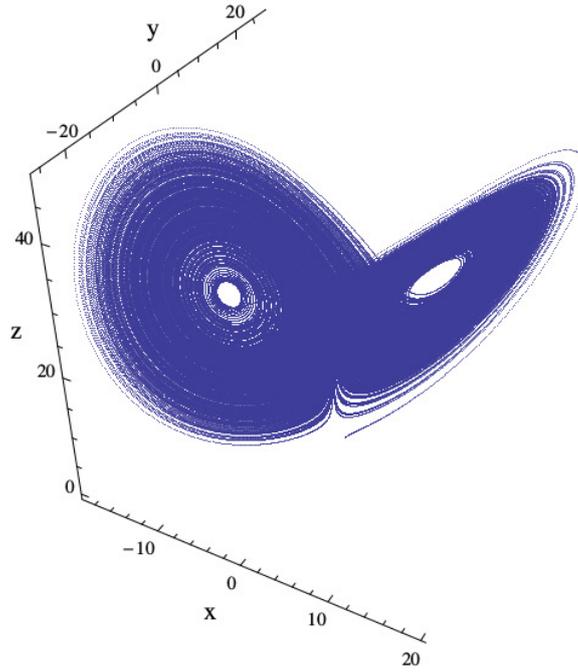


FIGURE 7.21 – Evolution de la dynamique de Lorenz au cours du temps.

avec  $P$  le nombre de Prandtl et  $R$  le nombre de Rayleigh. " $x$ " correspond à l'amplitude du champ de vitesse dans la cellule de Bénard au cours du temps, " $y$ " à l'écart de température entre les courants ascendants et descendants ( $T_{asc} - T_{desc}$ ) et " $z$ " à l'écart entre le profil vertical de température et un profil linéaire<sup>2</sup>. Le tracé de cette dynamique pour les paramètres  $P = 10$ ,  $R = 28$  et  $b = \frac{8}{3}$  nous donne la figure 7.21. Pour intégrer ces équations dans le temps, nous utilisons la méthode de Runge Kutta 4. Nous voyons la présence d'un attracteur étrange ressemblant à des ailes d'un papillon. Entre les deux ailes du papillon, le sens de rotation s'inverse.

Ces équations sont continues dans le temps, il n'est donc pas adéquat d'utiliser des frappes pour interagir avec notre système de spins. Nous utiliserons donc un champ continu qui va être perturbé par les différents paramètres de Lorenz tel que  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{bruit}$  avec  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  le champ de contrôle non perturbé formant une gaussienne et  $\vec{B}_{bruit}$  le bruit perturbant le champ de contrôle

$$\vec{B}_{bruit} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \times varB \\ y \times varB \\ z \times varB \end{pmatrix} \quad (7.62)$$

avec  $varB$  un petit facteur multiplicatif mesurant à quel point le champ est perturbé et  $\{x, y, z\}$  les paramètres de Lorenz. Prenons par exemple les figures 7.22 et 7.23. Ce champ va perturber

1. l'intensité du champ magnétique  $\|\vec{B}\|$
2. la direction de polarisation du champ magnétique de contrôle

L'Hamiltonien d'un tel système s'écrit

$$H = \vec{B}_0 \cdot \vec{S} + \vec{B}_{bruit} \cdot \vec{S} \quad (7.63)$$

$$= \vec{B}_0 \cdot \vec{S} + \|\vec{B}_{bruit}\| \vec{b}_{bruit} \cdot \vec{S} \quad (7.64)$$

Nous voulons réécrire cette dernière équation sous la forme

$$H = \vec{B}_0 \cdot \vec{S} + \|\vec{B}_{bruit}\| |w\rangle \langle w| + f(t) \cdot I \quad (7.65)$$

<sup>2</sup>. interpolation linéaire entre la température de la source de chaleur en bas, et la température du réservoir froid au dessus

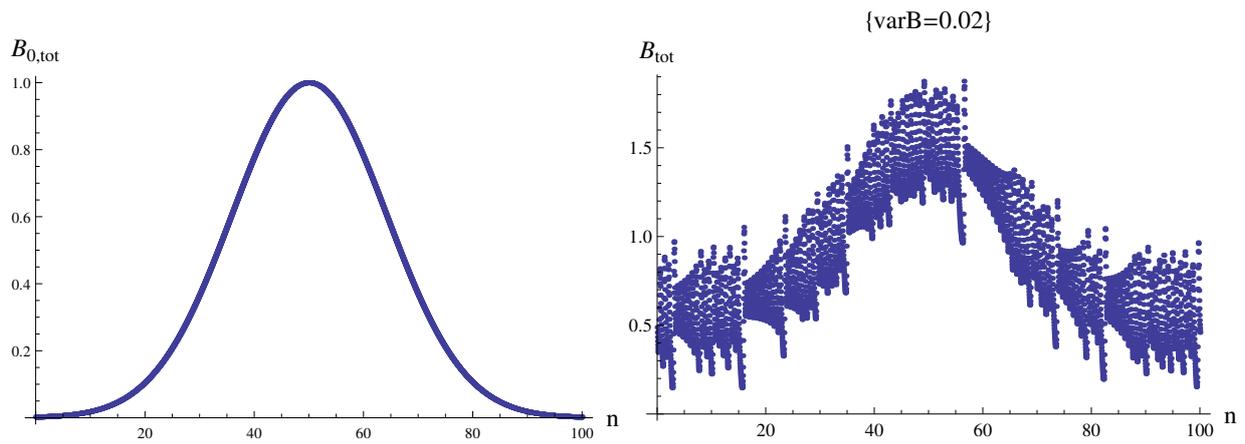


FIGURE 7.22 – A gauche, champ total sans perturbation. A droite, champ total avec l'ajout du bruit chaotique suivant la dynamique de Lorenz.

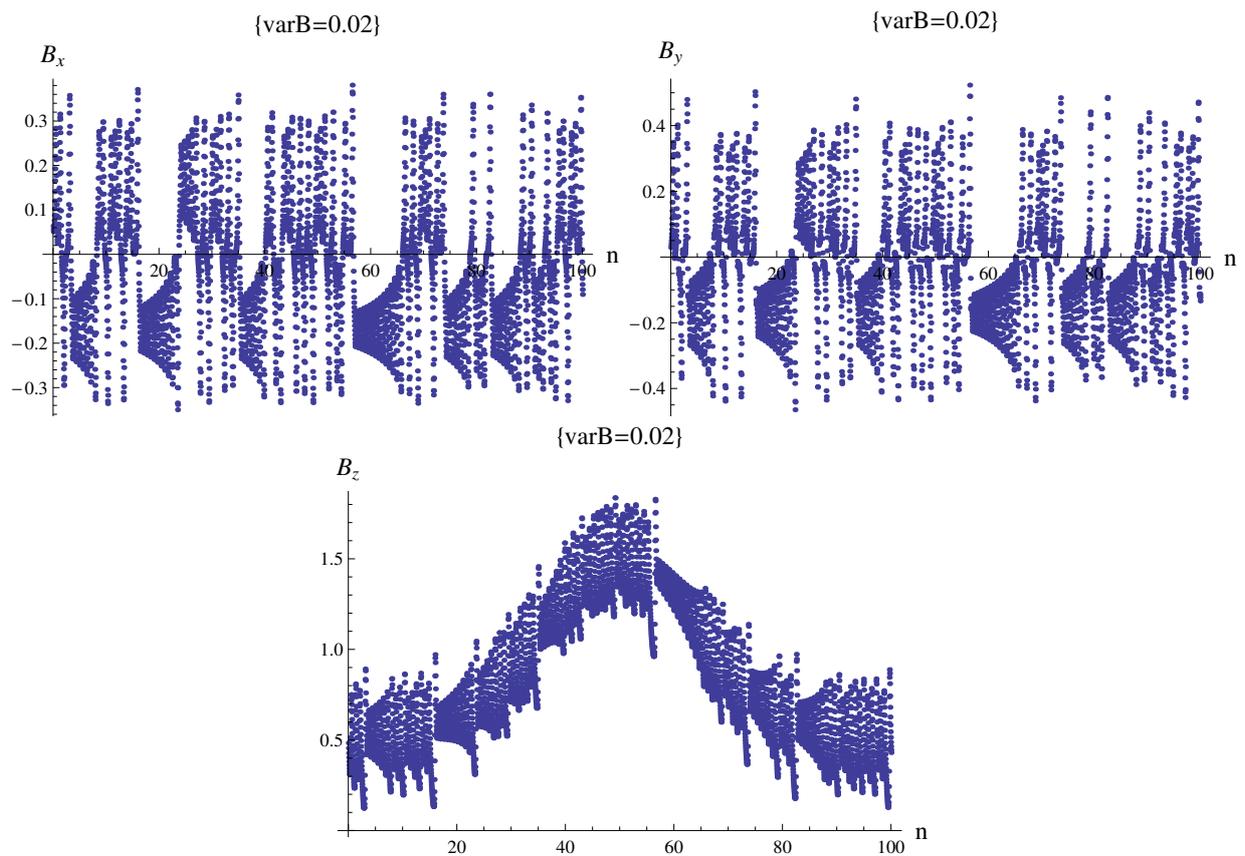


FIGURE 7.23 – Les trois composantes du champ perturbées par un environnement chaotique suivant la dynamique de Lorenz.

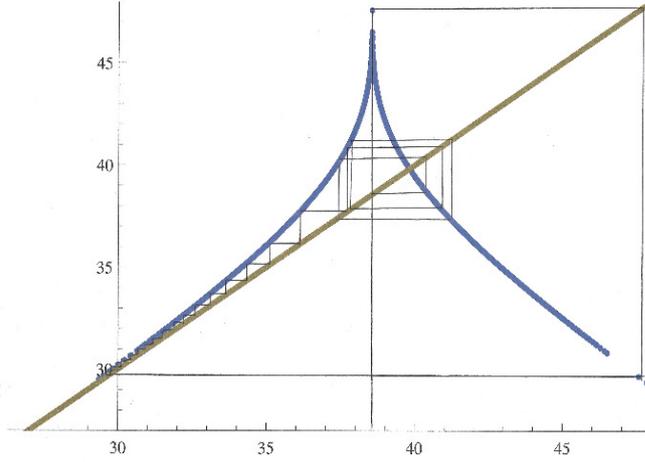


FIGURE 7.24 – Application de premier retour et orbite permettant de retourner au point maximal pour la dynamique de Lorenz. En jaune nous avons représenté la première bissectrice et en bleu l'application de premier retour  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Ceci est équivalent à ce qui a été fait dans la section 3.1 pour lequel la direction de frappe est

$$|w\rangle = \sqrt{\frac{1+b_z}{2}} |\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{1-b_z}{2}} e^{i \arctan \frac{b_y}{b_x}} |\downarrow\rangle \quad (7.66)$$

avec  $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 1$ . Nous reprendrons donc cet opérateur avec Lorenz. La fonction  $f(t)$  représente juste un changement de jauge et ne joue aucun rôle dans la matrice densité que nous étudions ni dans la fonction d'onde. En effet

$$i\dot{\psi} = \left( \vec{B}_0 \cdot \vec{S} + \lambda(t) |w\rangle \langle w| \right) \psi \quad (7.67)$$

$$i\dot{\tilde{\psi}} = \left( \vec{B}_0 \cdot \vec{S} + \lambda(t) |w\rangle \langle w| + f(t) \right) \tilde{\psi} \quad (7.68)$$

$$\Rightarrow \tilde{\psi} = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t f(t) dt} \psi \quad (7.69)$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle \langle \psi| = |\tilde{\psi}\rangle \langle \tilde{\psi}| \quad (7.70)$$

$$\tilde{\rho} = \left( |\tilde{\psi}\rangle \langle \tilde{\psi}| \right) = \rho \quad (7.71)$$

Au final, nous avons

$$H(t) = H_0(t) + \lambda(t)W(t) \quad (7.72)$$

avec  $H_0$  l'Hamiltonien de contrôle,  $\lambda$  la force de frappe et  $W$  l'opérateur de frappe. L'opérateur d'évolution associé s'écrit entre deux instants

$$U(t + \Delta t, t) = e^{-iH(t)\Delta t} \quad (7.73)$$

$$\approx e^{-i\hbar^{-1}\lambda(t)W(t)\Delta t} e^{-i\hbar^{-1}H_{ctrl}(t)\Delta t} \quad (7.74)$$

$$\approx \left( 1 + \left( e^{-i\lambda(t)\Delta t} - 1 \right) W(t) \right) e^{-i\hbar^{-1}H_{ctrl}(t)\Delta t} \quad (7.75)$$

En utilisant la méthode décrite précédemment pour trouver l'entropie topologique, nous obtenons le graphique 7.24. Ce graphique ne donnant pas de résultat très précis, nous avons utilisé une méthode numérique à l'aide de Mathematica en calculant les différentes images. Ceci nous a donné des valeurs précises permettant de construire la matrice ressemblant à 7.51. La valeur propre la plus grande obtenue est 2 et le logarithme népérien de cette valeur nous donne 0.69. La valeur de l'exposant

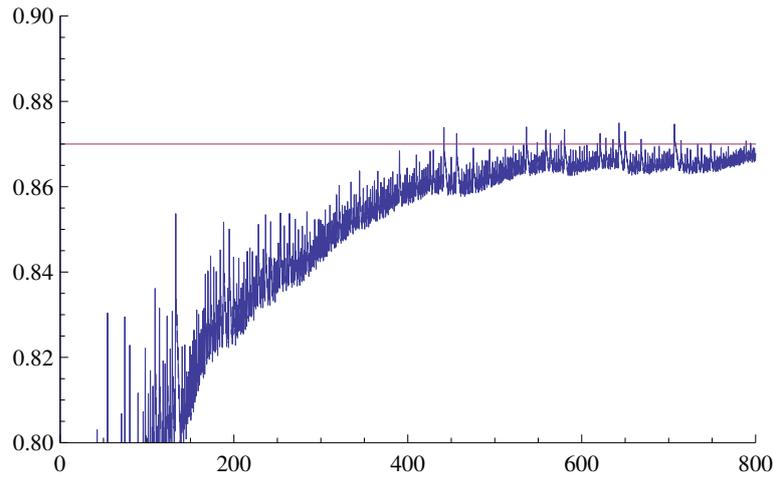
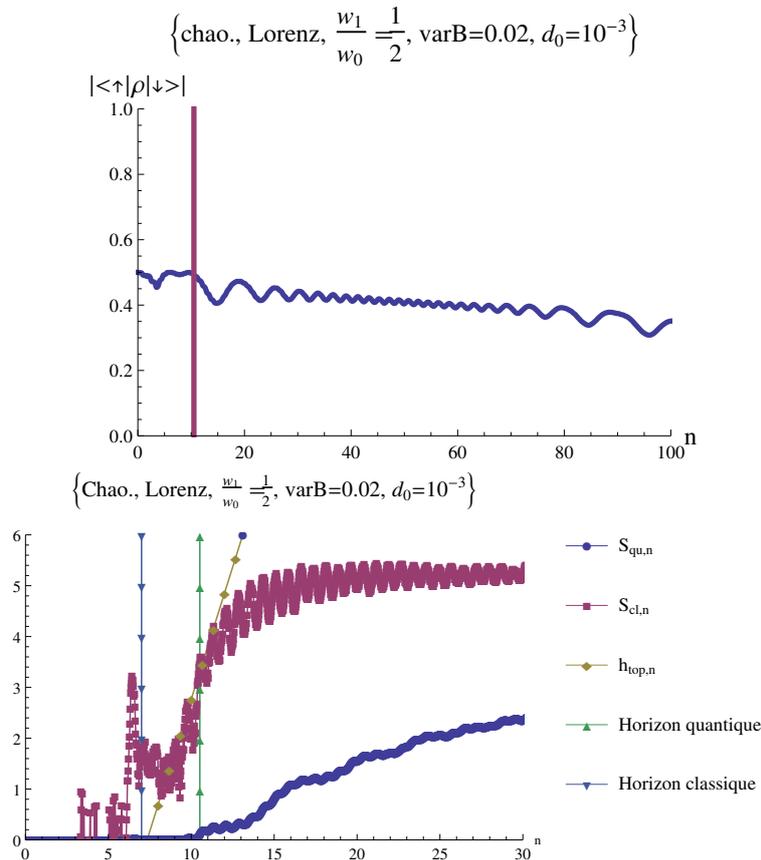
FIGURE 7.25 – Evolution de l'exposant asymptotique en fonction du nombre de pas de temps  $\Delta t$ .

FIGURE 7.26 – Évolutions de la cohérence et de l'entropie d'un spin moyen d'un ensemble de spins soumis à une perturbation chaotique selon la dynamique de Lorenz. Les spins sont dans l'état initial  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . Le second graphique montre l'entropie de von Neuman (une mesure du désordre dans l'ensemble de spins), l'entropie de Shannon (une mesure du désordre dans le bain de frappes) et l'entropie topologique. L'horizon de prédictibilité du bain de frappes et l'horizon de cohérence du bain de spins sont indiqués par des lignes pointillées verticales.

asymptotique est donnée par le graphique 7.25 et vaut 0.87.

Considérons un ensemble de  $N$  spins soumis à un champ magnétique Zeeman permettant une levée de dégénérescence. L'évolution de la cohérence et de l'entropie d'un tel système (graphiques 7.26) décrit par le champ de perturbation donné par les figures 7.22 et 7.23 montre la présence de l'horizon de cohérence. Celui-ci est bien prédit par la formule 6.19. La pente de l'entropie quantique est donnée par l'entropie topologique. L'horizon de prédictibilité est ajusté manuellement à partir de l'instant où l'entropie classique commence à augmenter. Pour définir l'entropie classique, nous avons pris une taille des micro-états de côté 0.01. Afin de réduire les oscillations de l'entropie classique, il faudrait pouvoir diminuer la taille des micro-états. Ceci nécessite une grande capacité mémoire.

L'analyse d'autres modèles chaotiques à 3 dimensions (Rössler [81, 60], Rucklidge [60], Genesisio-Tesi [60], Shimizu-Morioka [60], Chen [24, 60], Liu-Chen [60], Sprott [92, 60], Zou-chen [60] et Cellule de Glucose [28]) donnent des résultats similaires.

Les phénomènes observés (horizon de cohérence) et la formule empirique associée, semblent être indépendants de la structure du réseau de spins (ensemble, chaîne, glace), du type de bruit chaotique (Anosov, à mer chaotique, dissipatif avec attracteur étrange), et du type de contrôle (par frappes ou en champ continu).

# Chapitre 8

## Contrôle de systèmes quantiques soumis à un bruit chaotique

L'horizon de cohérence est un temps durant lequel la cohérence peut être conservée ainsi que les oscillations de la population. Nous pouvons donc penser que pendant cet horizon il est possible de réaliser de la transmission d'information ainsi que du contrôle quantique. Nous nous intéresserons ici au contrôle d'une chaîne de spins soumise à une interaction d'Heisenberg et au contrôle du monopôle magnétique d'une glace de spins.

Le transfert d'information dans les chaînes de spins a déjà été étudié par plusieurs auteurs [15, 16, 17, 31, 59, 89].

### 8.1 Un modèle approprié pour réaliser du contrôle

Nous avons vu dans la partie précédente que pour une chaîne de spins couplés par une interaction d'Heisenberg et soumis à un bain de frappes chaotique, il y a un temps durant lequel les spins conservent leur cohérence. La conservation de la cohérence est liée à une conservation de l'information des spins. Quand les frappes ne sont pas dans la direction d'un vecteur propre, il y a une oscillation de la population et de la cohérence due aux frappes durant l'horizon. Au contraire, si la frappe est dans la direction d'un vecteur propre, il y a une complète conservation de la cohérence sans aucune oscillation.

Comme un spin peut être représenté par un qubit, nous considérerons l'onde observée, l'excitation sur la chaîne, comme une transmission d'information le long de la chaîne de spins.

Dans cette section, nous choisissons de rester dans le cas où  $J \leq w_0$  afin de connaître la valeur de l'horizon de cohérence. Nous choisissons aussi cette condition de manière à ce que le contrôle de la dynamique par les frappes domine sur la dynamique interne de la chaîne.

#### 8.1.1 Dynamique de l'information le long d'une chaîne de spins

Nous considérons une chaîne de spins couplés par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg. La figure 8.1 représente l'évolution de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  par rapport au temps. Comme il n'y a pas de frappe, nous voyons une transmission de l'information due au couplage d'Heisenberg qui est représentée par la couleur jaune-orange (le couplage d'Heisenberg est isotrope). La figure présente des pics de densité (jaunes, oranges et blancs) lesquels résultent des interférences entre les différentes ondes. Le point jaune le plus brillant à la fin du graphique semble être une renaissance de l'onde initiale (à  $t = 0$ ) et au milieu, le pic ressemble à une renaissance inverse de l'information (la population est inversée) : le graphique ressemble à une renaissance de paquets d'ondes. Cependant la transformée de Fourier de la population (graphique du bas de la figure 8.1) présente une large bande ce qui est la signature d'oscillations chaotiques [53]. Ainsi le paquet d'ondes n'a pas une renaissance complète. Nous appelons ce phénomène une quasi-rennaissance.

Le graphique densité du haut de la figure 8.2 est le même que celui de la figure 8.1 sauf que tous les spins sont frappés dans la direction d'un vecteur propre. Les frappes sont perturbées par un environnement classique chaotique. En comparant les deux figures 8.2 et 8.1, nous voyons clairement que

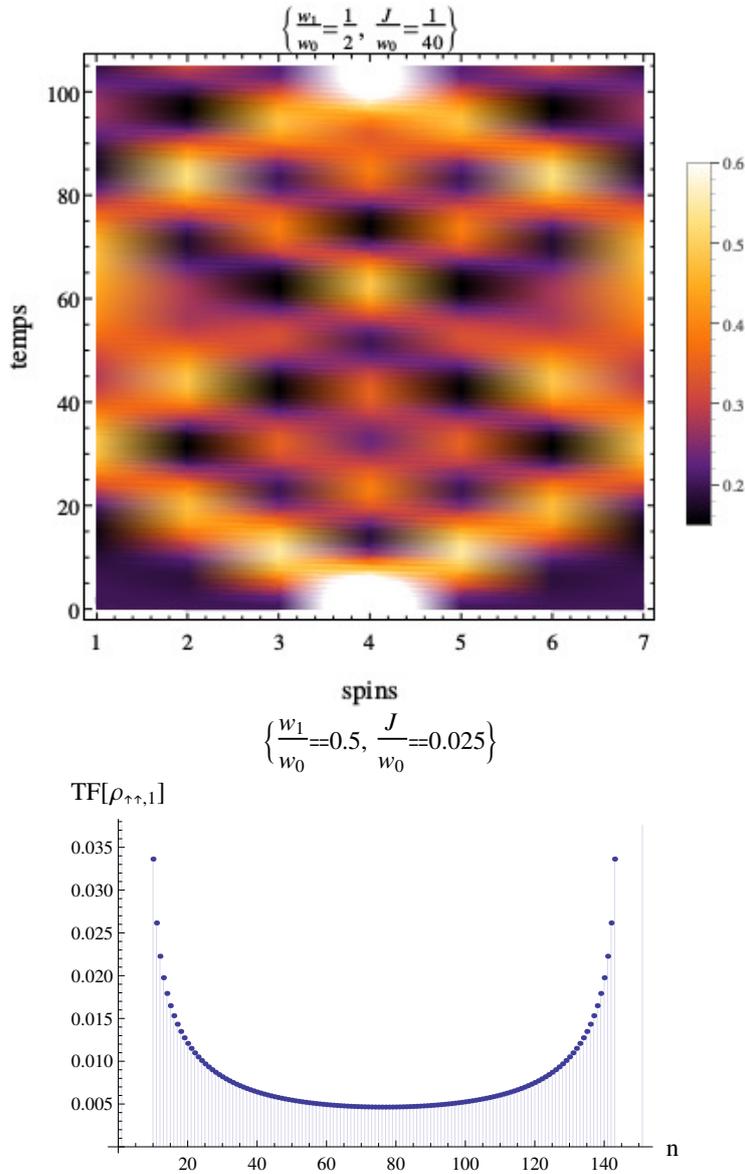


FIGURE 8.1 – Le graphique du haut représente la densité de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  d'une chaîne de 7 spins couplés par une interaction d'Heisenberg de plus proches voisins. Les spins ne sont pas frappés. Celui du bas montre la transformée de Fourier de la population par rapport au temps, associée au graphique densité du premier spin. Chaque spin est dans la direction initiale  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)$  sauf le 4ième qui est dans l'état  $|\uparrow\rangle$ .

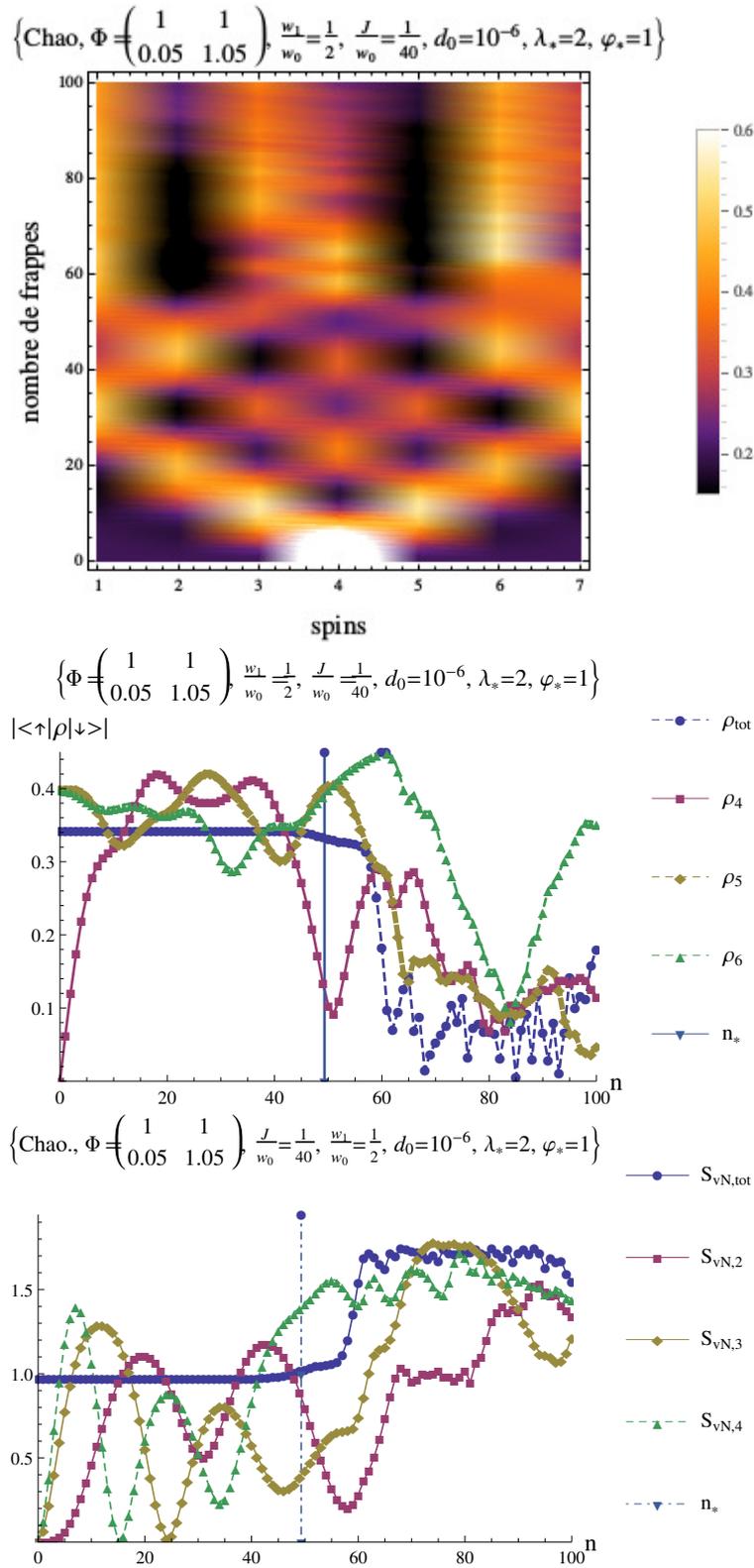


FIGURE 8.2 – Densité de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  d'une chaîne de 7 spins, et évolutions de la cohérence et de l'entropie du spin moyen d'une chaîne ( $\rho_{tot}$ ,  $S_{vN,tot}$ ), du 2nd ( $\rho_2$ ,  $S_{vN,2}$ ), du 3ième ( $\rho_3$ ,  $S_{vN,3}$ ) et du 4ième ( $\rho_4$ ,  $S_{vN,4}$ ) spin de la chaîne. Chaque spin de la chaîne est couplé par une interaction d'Heisenberg et est dans l'état initial  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)$  sauf le 4ième qui est dans l'état  $|\uparrow\rangle$ . Les spins sont soumis à un bain de frappes chaotique pour lequel chaque frappe est dans la direction d'un vecteur propre  $|\downarrow\rangle$ .  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme continu sur le tore. La ligne verticale sur les graphiques de la cohérence et de l'entropie correspond à l'horizon de cohérence. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

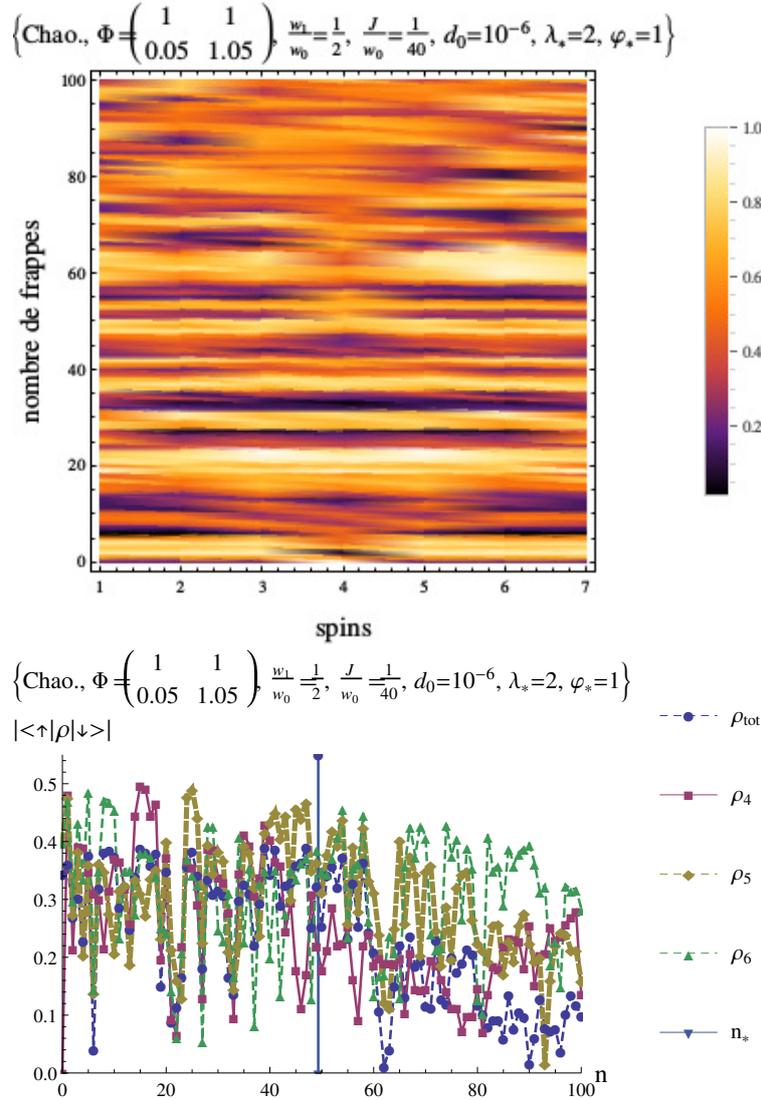


FIGURE 8.3 – Le graphique du haut montre la densité de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  d'une chaîne de 7 spins couplés par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg. La figure du bas représente l'évolution de la cohérence de trois spins de la chaîne ( $\rho_4$ ,  $\rho_5$  et  $\rho_6$ ) et du spin moyen de la chaîne ( $\rho_{tot}$ ) avec le nombre de frappes. La chaîne est soumise à un bain de frappes chaotique où la direction de frappes n'est pas celle d'un vecteur propre  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . A l'instant initial tous les spins sont dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)$  sauf le 4ième qui est l'état  $|\uparrow\rangle$ .  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme continu sur le tore. La ligne verticale sur le graphique de la cohérence correspond à l'horizon de cohérence. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

l'information est complètement transmise le long de la chaîne de spins jusqu'à un certain nombre de frappes, de la même manière que quand il n'y a pas de frappe. Le nombre de frappes pour lequel la transmission d'information est arrêtée correspond à la durée de l'horizon de cohérence. Le graphique central de la figure 8.2 montre que le spin moyen de la chaîne a une cohérence qui chute après l'horizon de cohérence. C'est exactement la même chose pour un spin de la chaîne mais avec de grandes oscillations. Ces oscillations apparaissent car on choisit la force du couplage petite de manière à voir la transmission d'information et à avoir une prédiction de la valeur de l'horizon de cohérence (pour une grande force de couplage, les oscillations et la transmission d'information sont très rapides). Les spins sont frappés différemment à partir de l'horizon de cohérence ce qui explique le gèle de la transmission d'information. Nous observons le même phénomène avec l'entropie (dernier graphique de la figure 8.2). L'entropie augmente à partir de l'horizon de cohérence. Cependant, si la direction des frappes ne correspond pas à un vecteur propre, l'onde d'information n'est pas visible, ainsi que l'horizon de cohérence, comme en atteste le graphique 8.3.

Une frappe dans la direction d'un vecteur propre permet une transmission d'information avant l'horizon de cohérence comme si il n'y avait pas de frappe. Pour comprendre ceci, considérons deux spins couplés par une interaction d'Heisenberg. L'opérateur d'évolution s'écrit

$$U^{(i)} = e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar\omega_0}(2\pi-\varphi_2^{(i)})} \left[ I \otimes \left( I + \left( e^{-i\lambda_2^{(i)}} - 1 \right) W \right) \right] e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar\omega_0}(\varphi_2^{(i)}-\varphi_1^{(i)})} \\ \times \left[ \left( I + \left( e^{-i\lambda_1^{(i)}} - 1 \right) W \right) \otimes I \right] e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar\omega_0}\varphi_1^{(i)}} \quad (8.1)$$

De manière à simplifier le calcul, nous ne prendrons pas en compte la variation de la force et du retard d'une frappe à une autre, i.e.  $U^{(i)} = U$ ,  $\varphi_1^{(i)} = \varphi_1$ ,  $\varphi_2^{(i)} = \varphi_2$ ,  $\lambda_1^{(i)} = \lambda_1$  et  $\lambda_2^{(i)} = \lambda_2$ . De plus comme nous nous intéressons seulement à la variation de la force de frappes entre le 1er et le 2nd spin, pour simplifier le calcul, nous poserons aussi que  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Comme la frappe est dans la direction d'un vecteur propre, nous avons

$$W = |w\rangle\langle w| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

L'opérateur d'évolution devient alors

$$U = e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar\omega_0}2\pi} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left( e^{-i\lambda_2} - 1 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right] e^{H_{0,I}\times 0} \\ \times \left[ \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left( e^{-i\lambda_1} - 1 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] e^{H_{0,I}\times 0} \quad (8.3)$$

avec

$$e^{H_{0,I}\times 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

$$\Leftrightarrow U = e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar\omega_0}2\pi} \begin{pmatrix} e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

$H_{0,I} = H_0 + H_I$  avec  $H_0$  une matrice diagonale et  $H_I$  une matrice avec des termes non-diagonaux associés au couplage. La matrice  $H_{0,I}$  peut être écrite comme

$$H_{0,I} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

avec  $a \neq d$  à cause de la forme de  $H_0$ . L'exponentielle d'une telle matrice est

$$e^{-i\frac{H_{0,I}}{\hbar\omega_0}2\pi} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & w & 0 \\ 0 & w & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

et l'opérateur d'évolution s'écrit

$$U = \begin{pmatrix} ue^{-i(\lambda_1+\lambda_2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ve^{-i\lambda_1} & we^{-i\lambda_2} & 0 \\ 0 & we^{-i\lambda_1} & ve^{-i\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

Soit l'état des spins à l'instant initial  $|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow |\psi^{(0)}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

L'évolution par rapport au nombre de frappes est donnée par

$$|\psi^{(i+1)}\rangle = U|\psi^{(i)}\rangle \quad (8.10)$$

De manière à connaître l'effet des frappes sur la population, nous devons calculer les trois premières populations up du 1er spin ( $\rho_1^{pop,(i)}$ ). Pour ceci, nous devons calculer la fonction d'onde complète  $|\psi^{(i)}\rangle$  et la matrice densité  $\rho^{(i)}$ .

$$\rho^{(0)} = |\psi^{(0)}\rangle\langle\psi^{(0)}| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

La population up du premier spin est donnée par la trace partielle sur le second

$$\psi_1^{(0)} = \langle\uparrow\downarrow|\rho^{(0)}|\uparrow\downarrow\rangle + \langle\uparrow\uparrow|\rho^{(0)}|\uparrow\uparrow\rangle = 1 \quad (8.12)$$

$$|\psi^{(1)}\rangle = U|\psi^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ue^{-i(\lambda_1+\lambda_2)} \\ ve^{-i\lambda_1} \\ we^{-i\lambda_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

$$\Leftrightarrow \rho^{(1)} = |\psi^{(1)}\rangle\langle\psi^{(1)}| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} uu^* & uv^*e^{-i\lambda_2} & uv^*e^{-i\lambda_2} & 0 \\ uv^*e^{i\lambda_2} & vv^* & vv^* & 0 \\ uv^*e^{i\lambda_2} & vv^* & vv^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

$$\Leftrightarrow \rho_1^{pop,(1)} = \langle\uparrow\downarrow|\rho^{(1)}|\uparrow\downarrow\rangle + \langle\uparrow\uparrow|\rho^{(1)}|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{2}(uu^* + vv^*) \quad (8.15)$$

$$|\psi^{(2)}\rangle = U|\psi^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u^2e^{-2i(\lambda_1+\lambda_2)} \\ v^2e^{-2i\lambda_1} + w^2e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)} \\ vwe^{-2i\lambda_1} + wve^{-i(\lambda_1+\lambda_2)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

$$\Leftrightarrow \rho_1^{pop,(2)} = \langle\uparrow\downarrow|\rho^{(2)}|\uparrow\downarrow\rangle + \langle\uparrow\uparrow|\rho^{(2)}|\uparrow\uparrow\rangle \quad (8.17)$$

$$= \frac{1}{2} \left( u^2(u^2)^* + v^2(v^2)^* + w(w^2)^* + v^2(w^2)^*e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)} + w^2(v^2)^*e^{i(\lambda_1-\lambda_2)} \right) \quad (8.18)$$

De la même manière nous obtenons

$$\rho_1^{pop,(3)} = \frac{1}{2} \left( u^3 (u^3)^* + vv^* \left[ v^2 (v^2)^* + 5w^2 (w^2)^* + v^2 (w^2)^* e^{2i(\lambda_2 - \lambda_1)} + 2v^2 (w^2)^* e^{-i(\lambda_1 - \lambda_2)} + w^2 (v^2)^* e^{2i(\lambda_1 - \lambda_2)} + 2w^2 (w^2)^* e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)} + 2w^2 (v^2)^* e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)} + 2w^2 (w^2)^* e^{-i(\lambda_1 - \lambda_2)} \right] \right) \quad (8.19)$$

Au travers des trois populations up du 1er spin, nous voyons que la force peut affecter la population seulement si elle est différente pour deux spins couplés. Si la force est la même, elle disparaît de la population et l'évolution du spin est seulement due au couplage. Cette démonstration peut aussi être faite pour un retard qui n'est pas le même d'une frappe à une autre et pour un plus grand nombre de spins couplés, la conclusion sera la même.

Dans le cas d'une chaîne de spins couplés et frappés chaotiquement, tous les trains de frappes sont presque similaires jusqu'à l'horizon de prédictibilité. Les spins ressentent seulement la différence à l'horizon de cohérence. Donc, avant l'horizon de cohérence, la population n'est pas modifiée par les frappes et nous conservons seulement la variation due au couplage. Inversement, s'il y a des modifications de la force de frappes entre deux trains de frappes ou plus (donc après l'horizon de prédictibilité), les populations des spins ne sont pas modifiées de la même manière. Ceci induit une perte de cohérence. Comme le couplage induit une "cohésion" entre les spins, si les frappes sont toutes les mêmes la cohésion est conservée, la population et la cohérence ne changent pas. Mais si les frappes sont modifiées, quand les spins ressentent cette modification, la cohésion dans la chaîne est perturbée et des interférences apparaissent.

Pour une frappe qui n'est pas dans la direction d'un vecteur propre, des oscillations apparaissent durant le plateau de cohérence comme nous l'avons vu figure 7.5. Au début de la dynamique, tous les spins sont dans le même état. Les frappes sur les spins sont approximativement les mêmes (la dispersion initiale des forces et des retards des frappes sont faibles). Donc aucun désordre n'est transmis du bain de frappes au bain de spins. Mais, la direction des frappes (pour une superposition) modifie les états des spins et perturbe la transmission de l'information (figure 8.2). Les états des spins peuvent être plus ou moins proche d'un état classique et alors perdre ou gagner de la cohérence. Ceci explique la présence d'oscillations de la cohérence avant l'horizon de cohérence et la perte d'information sur la figure 8.3. Mais si la frappe est dans la direction d'un vecteur propre, nous conservons seulement les modifications dues à l'interaction et non celles dues aux frappes. Le graphique du bas de la figure 6.2 montre que la frappe dans la direction d'un vecteur propre ne modifie pas la cohérence avant l'horizon de cohérence, i.e. avant la dispersion induite par la sensibilité aux conditions initiales.

Si les frappes ne sont pas dans la direction d'un vecteur propre, les états des spins sont complètement modifiés. Comme l'automorphisme continu sur le tore induit tout le temps une variation de la force et du retard des frappes, la direction de celles-ci est plus ou moins proche de l'état des spins. Il est très compliqué de réaliser un contrôle dans ces conditions. Cependant une chaîne de spins couplés par une interaction d'Heisenberg et frappés dans la direction d'un vecteur propre transmet toutes les informations (jusqu'à l'horizon de cohérence) comme une chaîne non frappée. Donc nous pouvons réaliser des transmissions d'information durant l'horizon de cohérence.

### 8.1.2 Analyse de la transmission d'information le long d'une chaîne de spins

Nous considérons une chaîne de spins couplés par une interaction d'Heisenberg où  $J \leq w_0$ . À cause du couplage d'Heisenberg, deux spins voisins tendent à être alignés dans la même direction. Ceci rend possible l'obtention d'une transmission d'information si deux spins voisins ne sont pas dans la même direction.

Considérons une chaîne de spins soumis à des frappes chaotiques et initialement dans la direction  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}(|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle)$  sauf le premier qui est dans l'état  $|\uparrow\rangle$ . Nous venons juste de voir que pour une chaîne de spins frappés chaotiquement dans la direction d'un vecteur propre, avant l'horizon de cohérence, l'évolution des états des spins est seulement due au couplage. Mais après l'horizon de cohérence, il y a relaxation de la population, chute de la cohérence et augmentation de l'entropie. Si la frappe

n'est pas dans la direction d'un vecteur propre, il existe deux sortes d'oscillations de la population. La première oscillation est due aux frappes et à la fréquence d'oscillations des spins, et correspond à l'onde porteuse. La seconde résulte du couplage et correspond à l'enveloppe. Ces deux oscillations décrivent le comportement de la population. Nous nous placerons dans le cas où la frappe est dans la direction d'un vecteur propre.

Nous voulons connaître le nombre de spins à travers lequel l'information passe durant l'horizon de cohérence. Nous rappelons que l'horizon de cohérence peut être prédite par l'équation 6.19 (car nous sommes dans les conditions  $J \leq w_0$ ). Considérons la figure 8.4. Nous voyons une variation du nombre de spins atteints par l'information avant l'horizon de cohérence en fonction de  $w_0$ . En particulier, plus  $w_0$  augmente, plus le nombre de spins atteint par l'information est faible. Dans l'équation de l'opérateur de monodromie 3.3,  $w_0$  est seulement inclus dans  $e^{-i \frac{H_{0,I}}{\hbar w_0}}$ . Quand  $w_0$  tend vers 0, cette exponentielle présente un grand nombre d'oscillations rapides et se comporte comme si elle valait 0 (théorème de Riemann-Lebesgue). Au contraire, si  $w_0$  est grand, elle tend vers 1. Si l'exponentielle tend vers 1, l'impact de ce facteur sur les états des spins est plus faible que si ce facteur tend vers 0, ce qui est en accord avec nos observations. Nous pouvons aussi faire cette analyse en considérant une variation du paramètre d'interaction, les résultats seront les mêmes. Physiquement, plus le paramètre d'interaction est grand, plus les spins tendent rapidement à être dans le même état et donc plus rapidement ils transmettent leur information.

De manière à obtenir le nombre de spins atteint par l'information avant l'horizon de cohérence, nous avons besoin de connaître la vitesse de transmission. La figure 8.5 présente l'évolution de la population up des 7 spins de la chaîne et correspond au premier graphique de la figure 8.4. Chaque spin transmet son information à ses voisins. L'état du premier spin est up. Il transmet son information au 2nd spin. L'état du 2nd spin dépend de l'état de ses deux voisins et tend à être une superposition des deux. C'est la même chose pour les autres spins. De plus, la population up des spins ne décroît pas jusqu'à 0 mais à une valeur supérieure à 0 à la fin de son oscillation. Donc chaque spin conserve un peu d'information ce qui explique la décroissance de la hauteur des pics de l'état up d'un spin à un autre avec le nombre de frappes. Le dernier spin n'a qu'un seul voisin, et est seulement influencé par celui-ci. C'est comme une onde dans une boîte : il a une augmentation de son information (une sorte de concentration de l'onde). Nous observons le phénomène classique de diffusion du signal durant sa propagation (l'étalement du signal avec une atténuation de son intensité maximale). Ici le signal correspond à la population up avec une diffusion le long de la chaîne.

Nous voulons obtenir la période d'oscillation d'un spin couplé avec seulement un autre spin (donc un spin du bord dans notre cas). L'Hamiltonien d'interaction de deux spins couplés est donné par la matrice suivante

$$H_I = \begin{pmatrix} -\frac{J\hbar}{4w_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J\hbar}{4w_0} & -\frac{J\hbar}{2w_0} & 0 \\ 0 & -\frac{J\hbar}{2w_0} & \frac{J\hbar}{4w_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J\hbar}{4w_0} \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

La partie due au couplage correspond au milieu de la matrice avec les termes non-diagonaux. Nous considérons le bloc matriciel associé aux états  $(|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{J\hbar}{4w_0} & -\frac{J\hbar}{2w_0} \\ -\frac{J\hbar}{2w_0} & \frac{J\hbar}{4w_0} \end{pmatrix}$  pour lequel les valeurs propres sont  $\lambda_{\pm} = \frac{J\hbar}{4w_0} \pm \frac{J\hbar}{2w_0}$ . La fréquence de Rabi des oscillations pour un spin qui n'a qu'un seul voisin correspond à  $\lambda_+ - \lambda_- = \frac{J\hbar}{w_0}$ . Un spin du bord à une période d'oscillation de

$$T_{bord}^{eff} = \frac{w_0}{J\hbar} \quad (8.21)$$

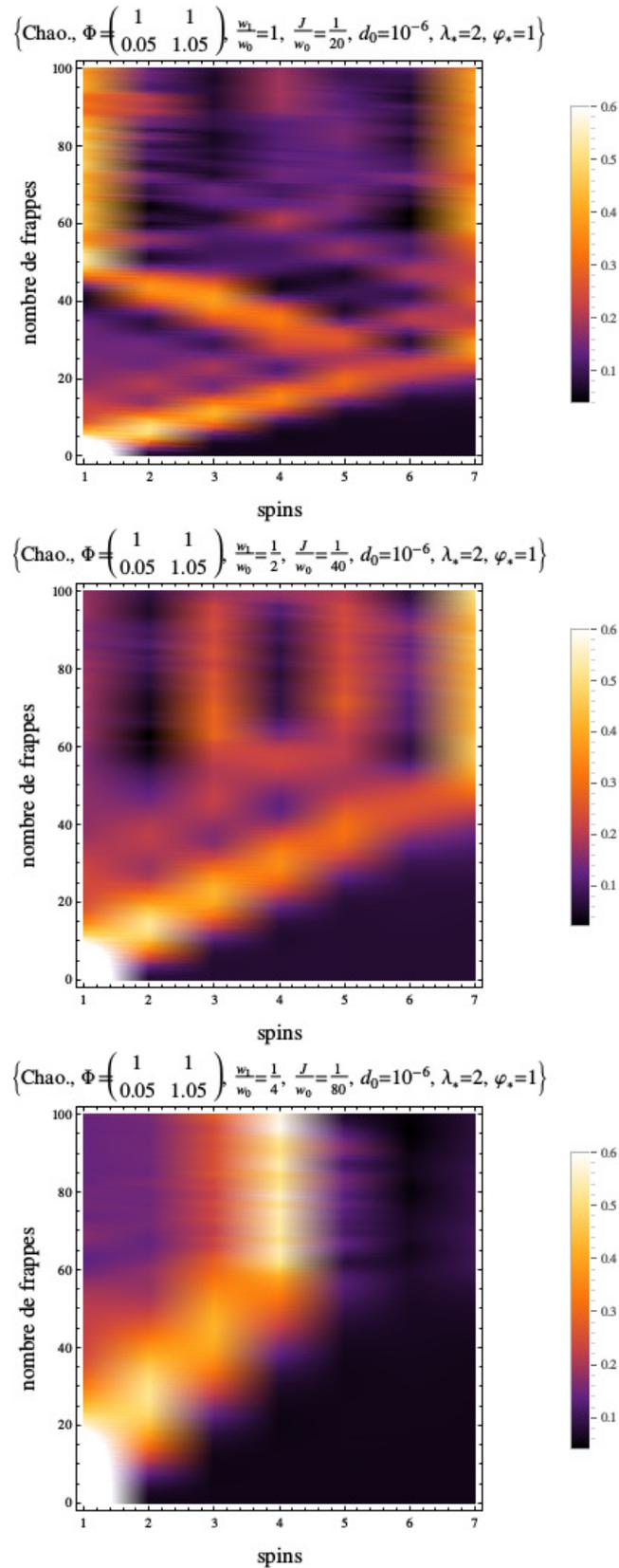


FIGURE 8.4 – Densités de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  de 7 spins couplés par une interaction d’Heisenberg de plus proches voisins. La chaîne est soumise à un bain de frappes chaotique où la frappe est dans la direction d’un vecteur propre  $|\downarrow\rangle$ . Au temps  $t = 0$  tous les spins sont dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}(|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle)$  sauf le 1er qui est dans l’état  $|\uparrow\rangle$ .  $J$  (le paramètre d’interaction) augmente du premier graphique au troisième.  $\Phi$  est la matrice définissant l’automorphisme continu sur le tore. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

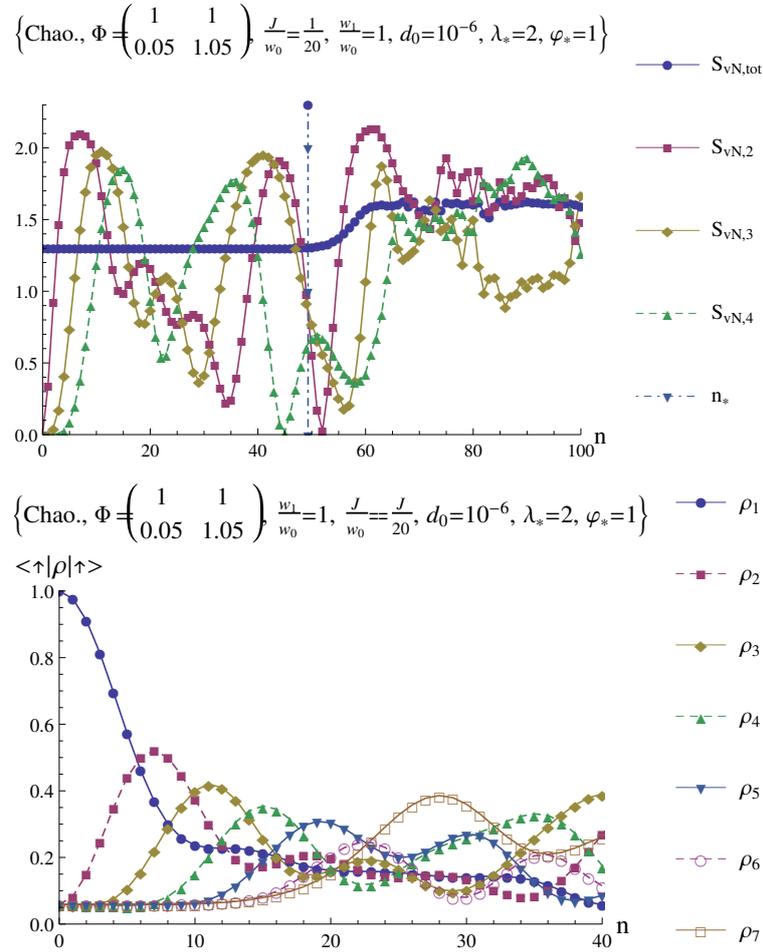


FIGURE 8.5 – Evolutions de l'entropie et de la population en fonction du nombre de frappes. Ces graphiques sont associés au premier graphique densité de la figure 8.4. La chaîne est soumise à un bain de frappes chaotique où la direction des frappes est celle d'un vecteur propre  $|\downarrow\rangle$ . A l'instant initial tous les spins sont dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}(|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle)$  sauf le premier qui est dans l'état  $|\uparrow\rangle$ .  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme continu du tore. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

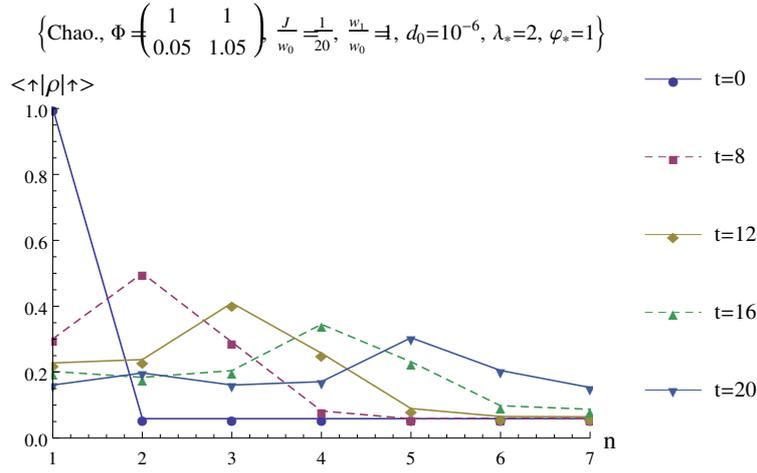


FIGURE 8.6 – Évolution de la population d'une chaîne de 7 spins couplés par une interaction d'Heisenberg par rapport à leurs positions dans la chaîne. Cette information est représentée pour 5 temps. Ces temps prédisent quand le 1ers, le 2nd, le 3ième, le 4ième et le 5ième spins atteignent le maximum d'information. Les spins sont soumis à des frappes chaotiques et sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}(|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle)$  sauf la premier qui est dans l'état  $|\uparrow\rangle$ . Chaque spin est frappé dans la direction d'un vecteur propre  $|\downarrow\rangle$ . Cette évolution correspond à celle du premier graphique densité de la figure 8.4.  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme continu du tore. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

En refaisant la même chose pour 3 spins couplés, nous obtenons la matrice d'interaction

$$H_I = \begin{pmatrix} \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & -\frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & -\frac{J\hbar}{2w_0} & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

Le bloc central

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{J\hbar}{2w_0} & -\frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 \\ 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 & -\frac{J\hbar}{2w_0} & \frac{J\hbar}{2w_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J\hbar}{2w_0} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

nous donne comme valeurs propres  $\{\frac{\hbar J}{w_0}, -\frac{\hbar J}{2w_0}, 0\}$  lesquelles sont toutes dégénérées. La fréquence d'oscillation d'un spin avec deux voisins est la plus grande fréquence définie par les différences des valeurs propres précédentes et vaut  $\frac{3\hbar J}{2w_0}$ . Sa période est donc

$$T_{milieu}^{eff} = \frac{2w_0}{3J\hbar} \quad (8.24)$$

Ceci est en accord avec ce que nous observons sur le graphique du bas de la figure 8.5.

Durant la propagation de l'information, il y a une diffusion du paquet d'onde. Donc la période d'oscillation de chaque spin augmente durant la propagation de l'information. Ce phénomène est bien

visible sur la figure 8.6. Plus le temps augmente, plus le paquet d'onde s'étale sur un grand nombre de spins.

La période d'oscillation du premier spin est  $T_{bord}^{eff}$ . Le second spin reçoit l'information d'un spin qui n'a qu'un seul voisin et qui n'a donc pas la même période d'oscillation que lui. La période d'oscillation du second spin est alors la moyenne entre celle d'un spin avec deux voisins et celle d'un spin avec un voisin

$$T_{moyen}^{eff,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{w_0}{J\hbar} + \frac{2w_0}{3J\hbar} \right) \quad (8.25)$$

De la même manière pour les autres spins nous obtenons la période d'oscillation

$$T_{moyen}^{eff,n} = \frac{1}{2} \left( T_{moyen}^{eff,n-1} + T^n \right) \quad (8.26)$$

avec  $T^n = T_{bord}^{eff}$  ou  $T_{milieu}^{eff}$  la période d'oscillation du  $n$ -ième spin seulement induit par les plus proches voisins.

Nous connaissons maintenant la période d'oscillation de tous les spins de la chaîne. Si nous obtenons le temps de transmission de l'information de la population up maximale d'un spin à la population up maximale du spin suivant, nous aurons toutes les informations dont nous avons besoin. Considérons un spin que l'on nomme " $sp$ " lequel à deux plus proches voisins. Ce spin a son maximum d'information quand la population du spin précédent et celui qui suit se croisent, comme nous le voyons clairement sur les figures 8.5 et 8.6. Ceci est seulement visible pour la première transmission du premier au dernier spin de la chaîne, i.e. seulement pour un aller de la transmission de l'information et pas pour le retour à cause de la diffusion et des interférences. Sur la figure 8.5, à  $t = 0$ , seul le premier spin a l'information. Quand  $t$  augmente, le nombre de spins atteints par l'information et la diffusion de l'onde sur un grand nombre de spins augmentent. La population up du spin avant le spin  $sp$  diminue, alors que celle de celui situé après augmente. L'information maximale que le spin  $sp$  peut obtenir est lorsque ses voisins ont la même information et donc quand leurs populations se croisent l'une l'autre. Comme la forme du paquet d'ondes est symétrique par rapport à la population up maximale, le spin  $sp$  a son maximum d'information quand le spin  $sp + 1$  est au quart de son oscillation. La dispersion et les interférences du paquet d'ondes rendent difficile l'obtention de la valeur de la population de tous les spins avec le temps. La dispersion n'est pas seulement entre trois spins. La population d'un spin a son maximum d'information à la moitié de son oscillation et la transmet au trois quart de son oscillation. Alors

$$T_{trans.}^n = \frac{1}{4} T_{moyen}^{eff,n} \quad (8.27)$$

Ceci ne concerne pas le dernier spin de la chaîne dans la direction de la transmission. Finalement une période complète de transmission de l'information du premier spin au dernier est (un aller)

$$P = \frac{3}{4} T_{moyen}^{eff,2} + \sum_{n=3}^{N-1} T_{trans.}^n \quad (8.28)$$

où  $N$  correspond au nombre total de spins. Le premier terme est le temps d'obtention de l'information maximale du 3ième spin et le second est le quart de la période d'oscillation des spins du 3ième au dernier spin de la chaîne. Pour le modèle choisi (7 spins),

$$\begin{aligned} P = & \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{w_0}{\hbar J} + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{w_0}{\hbar J} + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] \\ & + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{w_0}{\hbar J} + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] \\ & + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{w_0}{\hbar J} + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] \\ & + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{w_0}{\hbar J} + \frac{2w_0}{3\hbar J} \right) \right] + \frac{w_0}{\hbar J} \right] \quad (8.29) \end{aligned}$$

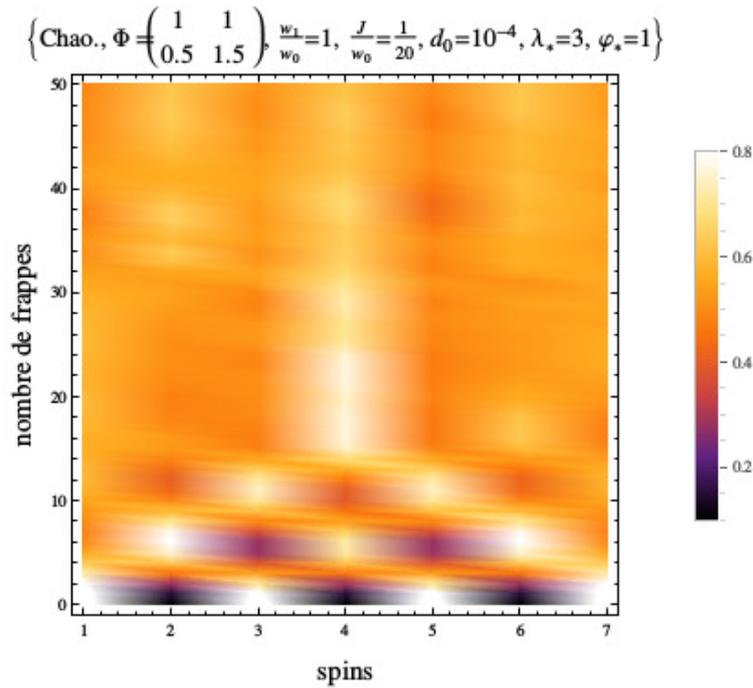


FIGURE 8.7 – Densité de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  d’une chaîne de 7 spins couplés par une interaction d’Heisenberg. La chaîne est soumise à un bain de frappes chaotique où les frappes sont dans la direction d’un vecteur propre  $|\uparrow\rangle$ . Les états initiaux des spins sont  $|\psi_{2n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et  $|\psi_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(|\uparrow\rangle + 3|\downarrow\rangle)$ .  $\Phi$  est la matrice définissant l’automorphisme continu sur le tore. Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

Finalement, pour obtenir le nombre de spins atteint par l’information avant l’horizon de cohérence, nous calculons

$$N_{sp} = \frac{n_*}{P} \times N - N_{tour} \quad (8.30)$$

avec  $n_*$  l’horizon de cohérence et  $N_{tour}$  le nombre de transmissions du premier spin au dernier dans la direction de la transmission. Ce nombre doit être retiré afin de ne pas additionner deux fois le dernier ou le premier spin. De manière à connaître la valeur de l’horizon de cohérence, nous utilisons l’équation 6.19. Afin de l’obtenir, nous réalisons le calcul avec 700 systèmes classiques (700 trains de frappes). Pour cette étude, nous avons besoin d’un grand nombre de systèmes classiques de manière à ce que les analyses de Kolmogorov-Sinaï soient pertinentes. Avec ce nombre de spins, l’horizon de cohérence de la figure 8.4 est approximativement de 50 frappes. Cependant, l’augmentation du désordre est relativement faible. La grande augmentation commence approximativement à 55 frappes. Dans les graphiques densités de la même figure, cette valeur correspond au moment où le désordre devient visible. Considérons  $n_* = 55$ . La prédiction du nombre de spins atteints par l’information pour le graphique du bas de la figure 8.4 est 3.5, la prédiction pour le second graphique est 7 et pour le premier, la prédiction est 13. Ces valeurs sont en accord avec le nombre de spins atteints sur les graphiques. Mais il est nécessaire de faire attention. Nous utilisons seulement une interaction de plus proches voisins. Donc l’information d’un spin est transmise à son ou ses plus proches voisins. Pour simplifier les calculs, la possibilité d’une renaissance de l’information due aux interférences entre les ondes n’est pas prise en compte dans ceux-ci.

Nous pouvons aussi observer un autre comportement figure 8.7. Sur ce graphique, nous avons alterné les états des spins. Si la position des spins dans la chaîne est impaire, alors l’état des spins est  $|\psi_{2n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ , et si elle est paire,  $|\psi_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(|\uparrow\rangle + 3|\downarrow\rangle)$ . L’horizon de cohérence est environ de 13. Comme précédemment, nous pouvons connaître l’état des spins au moment de l’horizon

de cohérence en fonction de  $w_0$  et du paramètre d'interaction. Il y a aussi un effet très bien visible sur ce graphique : il y a une sorte de gèle des états au moment de l'horizon de cohérence. L'état du 4ième spin est conservé au moment de l'horizon de cohérence pour un large nombre de frappes. Nous pouvons aussi voir ce gèle sur les autres graphiques densités. Ce phénomène est expliqué dans la sous-section suivante.

Note : par soucis de simplicité, nous choisissons de ne pas considérer le cas où les spins sont presque tous dans l'état  $|\uparrow\rangle$  et/ou  $|\downarrow\rangle$ , i.e. dans la direction d'un vecteur propre. Si la direction des spins est initialement proche d'un vecteur propre, à  $t = 0$  il n'y a pas de cohérence parce que les spins sont dans une direction classique. Donc l'effet de l'horizon de cohérence avec une chute de la cohérence et une grande augmentation de l'entropie n'est pas présent. Cependant le résultat sera le même. À partir de l'horizon de cohérence et à chaque frappe, les spins ressentent des forces et des retards de frappes différents. Donc les spins réagissent aux frappes ce qui induit un arrêt de la transmission d'information.

Nous pouvons maintenant déterminer le temps de transmission de l'information entre des spins couplés par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg. Utilisant ces analyses, il peut être intéressant de voir s'il est possible de réaliser une expérience de contrôle.

### 8.1.3 Contrôle de l'information transmise

Nous considérons une chaîne de spins fermée où chaque spin est couplé par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg. Ce modèle nécessite une modification de l'Hamiltonien d'interaction comme suit

$$H_I = \sum_{n=1}^{N-1} H_{I_n} - J \left( S_x \otimes I^{\otimes N-1} \otimes S_x + S_y \otimes I^{\otimes N-1} \otimes S_y + S_z \otimes I^{\otimes N-1} \otimes S_z \right) \quad (8.31)$$

où nous avons juste ajouté le terme d'interaction entre le 1er et le dernier spin.

Nous considérons les spins dans l'état initial  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}(|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle)$  sauf le 1er spin qui est dans l'état  $|\uparrow\rangle$ . Si il n'y a pas de frappe, nous obtenons une transmission libre de l'information entre les spins, comme nous pouvons le voir sur le premier graphique de la figure 8.8. Comme la chaîne est fermée, l'information du premier spin est transmise au 2nd spin et au 9ième. Pour le contrôle, nous voulons que l'information aille seulement dans une direction, c'est à dire vers le second spin. Pour ceci, nous calculons la période d'oscillation du 1er spin comme si il n'avait qu'un seul voisin, i.e.  $T_{bord}^{eff} = \frac{w_0}{J\hbar}$ . Ici, nous avons seulement la moitié de son oscillation (car le 1er spin est dans l'état up, il ne part pas de l'état down pour avoir une oscillations complète), donc  $T^1 = \frac{w_0}{2J\hbar} = 10$ . Nous choisissons de frapper le 9ième spin de manière à ce qu'il reste dans un état proche de l'état  $|\downarrow\rangle$  durant la première oscillation du 1er spin (approximativement 10 frappes). Ainsi, le premier spin peut seulement transmettre son information au 2nd spin et se comporte comme s'il n'avait qu'un seul voisin (ceci explique le calcul de la période d'oscillation du 1er spin). En utilisant des frappes stationnaires, le contrôle est représenté sur le graphique du bas de la figure 8.8.

Ce modèle est intéressant car il ne présente pas d'interférence entre les spins. Nous forçons le 1er spin à aller dans une direction, vers le 2nd spin. Nous imposons un chemin de transmission de l'information.

Le second contrôle consiste à arrêter la transmission d'information. Nous choisissons de concentrer l'information sur le 5ième spin quand elle l'a traversé deux fois. Nous obtenons la figure 8.9. Pour obtenir ce graphique, nous avons calculé la période d'oscillation de chaque spin et plus précisément la période de deux oscillations pour les spins 1, 2, 3 et 4 et la période d'une seule oscillation pour les spins 6, 7, 8 et 9. Après ceci, nous devons les frapper stationnairement dans la direction down quand leur information est la plus petite. Ceci rend possible la concentration de l'information sur le cinquième spin.

Note : Ici chaque spin est frappé au temps approprié de manière à ce qu'il soit presque dans l'état de la frappe. Cependant si nous frappons tous les spins (sauf le 5ième) en même temps, au moment de la frappe, ils peuvent avoir un état plus ou moins proche de l'état de frappes. Ceci induit une

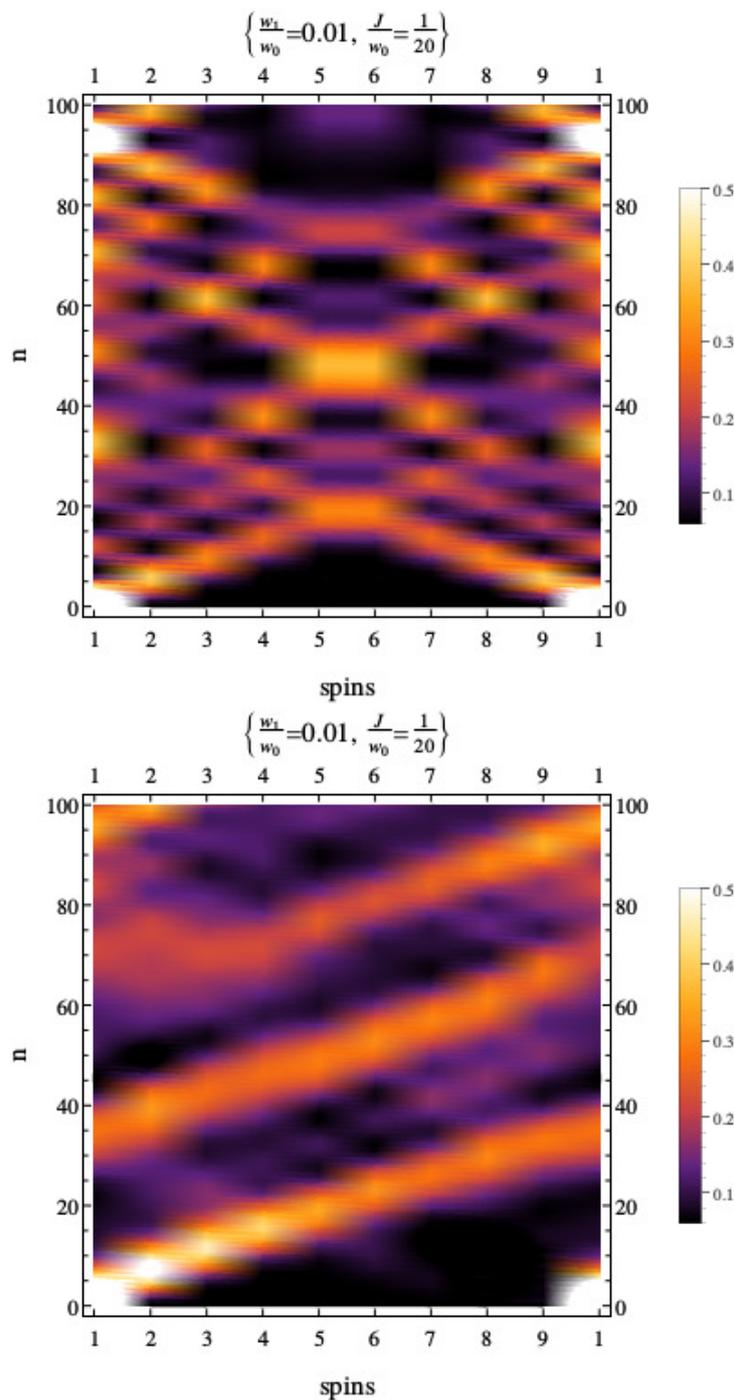


FIGURE 8.8 – Densités de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  d’une chaîne de 9 spins couplés par une interaction de plus proches voisins d’Heisenberg. Sur le graphique du haut, les spins ne sont pas frappés. Au contraire sur celui du bas, le 9ième spin est frappé dans la direction down ( $|w\rangle = |\downarrow\rangle$ ) entre la première et la dixième frappe. Le couple  $(\lambda, \varphi) = (3, 0)$  correspond aux valeurs initiales de la force et du retard de frappes. Tous les spins sont initialement dans l’état  $\frac{1}{\sqrt{17}}(|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle)$  sauf le 1er qui est dans l’état  $|\uparrow\rangle$ .  $n$  est le paramètre temporel (nombre de pas de discrétisation temporel ou nombre de frappes)

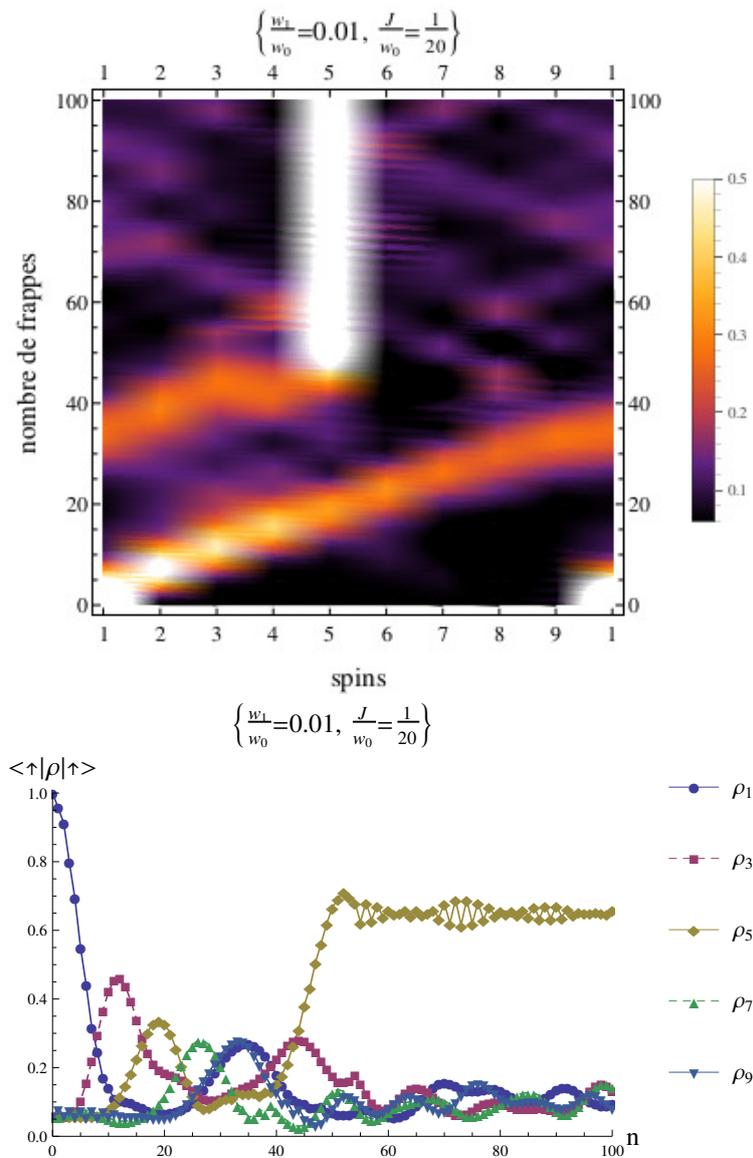


FIGURE 8.9 – En haut, graphique densité de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  d'une chaîne de 9 spins couplés par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg. En bas, évolution de la population par rapport au nombre de frappes. De manière à ce que le 5ième spin conserve toute l'information après que celle-ci l'ait traversé deux fois, les autres spins sont frappés dans la direction down quand la première oscillation est finie pour les spins 6, 7, 8 et 9 et quand la seconde oscillation est finie pour les spins 1, 2, 3 et 4. Tous les spins sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}(|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle)$  sauf le premier qui est dans la direction up. Le couple  $(\lambda, \varphi) = (3, 0)$  correspond aux valeurs initiales de la force et du retard de la frappe.

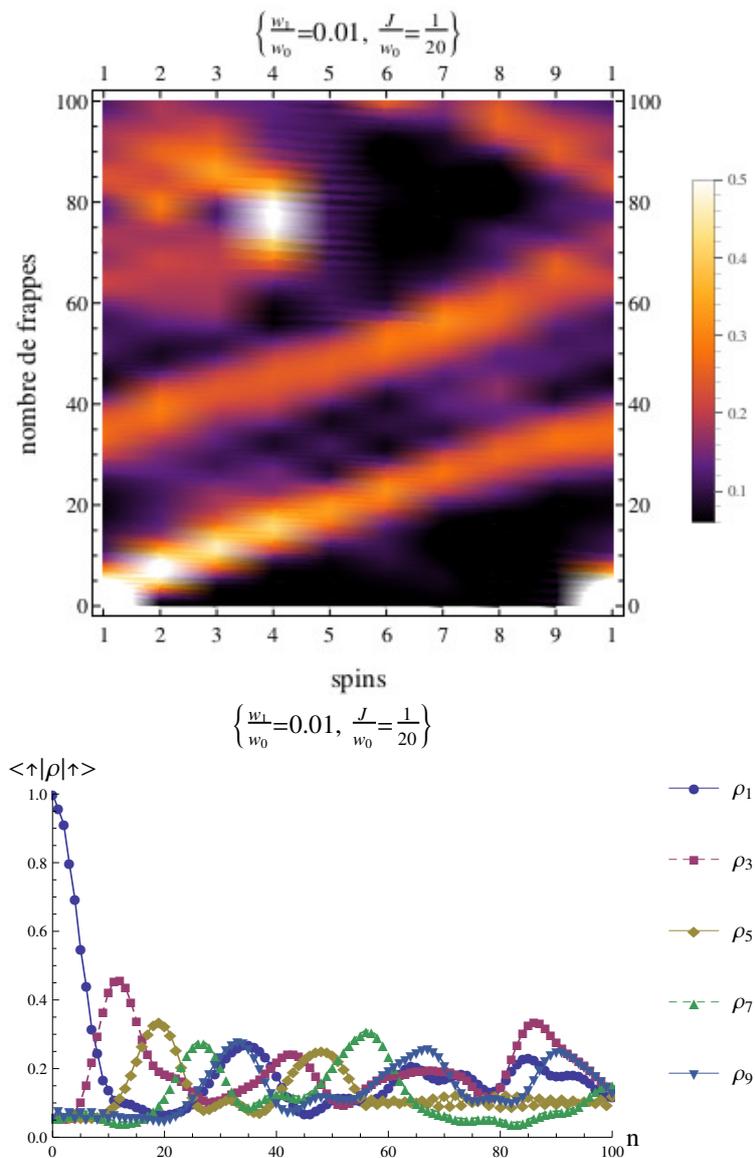


FIGURE 8.10 – En haut : graphique densité de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  d’une chaîne de 9 spins couplés par une interaction d’Heisenberg de plus proches voisins. En bas, évolution de la population par rapport au nombre de frappes. Tous les spins sont frappés stationnairement en même temps, i.e. quand la seconde oscillation du 4ième spin est finie. Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}(|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle)$  sauf le 1er qui est dans l’état up.

oscillation de la population, et une faible ou aucune concentration de l'information. Un exemple est donné figure 8.10. De manière à effectuer un contrôle, il est plus efficace de toujours frapper le spin dans son état afin qu'il y reste. Il est aussi plus efficace de le frapper dans la direction d'un vecteur propre.

Cette dernière analyse nous permet de comprendre pourquoi il y a une sorte de gèle de l'état des spins au moment de l'horizon de cohérence et qui dure pendant quelques frappes sur les figures 8.2, 8.4 et 8.7. Nous venons de voir que si nous frappons un spin au temps approprié, nous pouvons le forcer à rester dans l'état de la frappe. Considérons par exemple le graphique densité de la figure 8.2. Au départ, il y a une évolution libre des oscillations des spins. Nous voyons seulement les oscillations dues à l'interaction entre les spins car tous les spins sont frappés de la même manière. Mais, après l'horizon de cohérence, tous les spins sont frappés différemment. Donc les spins réagissent aux frappes. Au temps de l'horizon de cohérence, tous les spins sont presque dans l'état down sauf le 4ième qui est dans une superposition  $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$  avec  $\alpha > \beta$ . Comme les spins sauf le 4ième sont presque dans l'état de la frappe, la variation de leurs états est très faible. Ceci montre une sorte de gèle. Donc nous pouvons conserver l'information, comme le contrôle de cette partie mais avec des frappes chaotiques.

Dans cette sous-section, jusqu'à maintenant, nous avons réalisé un contrôle parfait, i.e. rien ne perturbe les frappes. Nous introduisons maintenant un bruit chaotique sur les frappes. Considérons les deux grandeurs  $(\lambda_n^{(i)}, \varphi_n^{(i)})$ . Elles représentent respectivement la force et le retard de la  $i$ -ième frappe sur le  $n$ -ième spin associées à la solution de contrôle parfaite. Nous introduisons un autre ensemble de frappes  $(\lambda_n^{pert,(i)}, \varphi_n^{pert,(i)})$  lequel correspond à la perturbation induite par le processus dynamique chaotique. La dispersion initiale est choisie pour être très proche de 0 (nous voulons seulement l'effet chaotique et pas la propagation des paramètres sur l'espace des phases induite par l'automorphisme du tore). Les nouvelles frappes sont définies par  $(\lambda_n^{(i)}, \varphi_n^{(i)}) + (\lambda_n^{pert,(i)}, \varphi_n^{pert,(i)})$ . Nous obtenons la figure 8.11. Sur le graphique du haut, nous voyons qu'avant 70 frappes, il n'y a pas de modification de l'information sous contrôle. Après ce nombre, l'information arrêtée sur le 5ième spin commence à être étalée sur les autres spins. Ceci est aussi visible sur le graphique de l'entropie. S'il n'y a pas de perturbation des frappes de contrôle, au temps où l'information est stoppée, le spin 5 a une large entropie alors que pour tous les autres spins elle est plus faible. Quand nous ajoutons la perturbation chaotique, l'évolution ne change pas jusqu'à l'horizon de cohérence. L'entropie est grande pour tous les spins avec beaucoup d'oscillations (parce que l'interaction est faible). Un phénomène intéressant est que l'horizon de cohérence est à 55 frappes comme nous le voyons sur le graphique de l'entropie. Cependant sur le graphique densité, l'information est conservée sur le 5ième spin jusqu'à environ 70 frappes. Il est donc possible de conserver de l'information après l'horizon de cohérence sur quelques frappes (grâce au phénomène de gèle dû aux frappes chaotiques évoqués plus haut).

Pour le contrôle, la propagation des paramètres de frappes sur l'espace des phases avant l'horizon de prédictibilité est considérablement réduit car nous choisissons de commencer à  $\lambda_n^{pert,(0)} = 0$  et  $\varphi_n^{pert,(0)} = 0$  (nous conservons seulement l'effet du chaos). Dans ces conditions, nous pouvons penser qu'il est possible de prendre d'autres directions de frappes. Cependant, ceci produit généralement des oscillations de la population et de la cohérence. Pour une frappe seulement sur un spin comme montré par exemple figure 8.8, nous pouvons utiliser une autre direction de frappe. Dans ce cas, les résultats du contrôle sont corrects. Par exemple, si l'état des spins est  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  sauf le 1er qui est dans l'état up, frapper le 1er spin dans la direction d'un vecteur propre détruit toute l'information des spins laquelle reste proche de  $\frac{1}{2}$ . Dans ce cas, il est préférable de frapper dans la direction des spins. Mais si nous frappons plusieurs spins, ils vont avoir différentes oscillations qui ne sont pas forcément les mêmes. A cause de l'interaction, les spins transmettent leurs oscillations aux autres spins, ce qui induit du désordre dans la chaîne (comme les spins n'ont pas tous la même oscillation). L'information des spins est alors complètement perdue.

Nous venons juste de voir la possibilité de changer et d'arrêter la transmission d'information. Mais

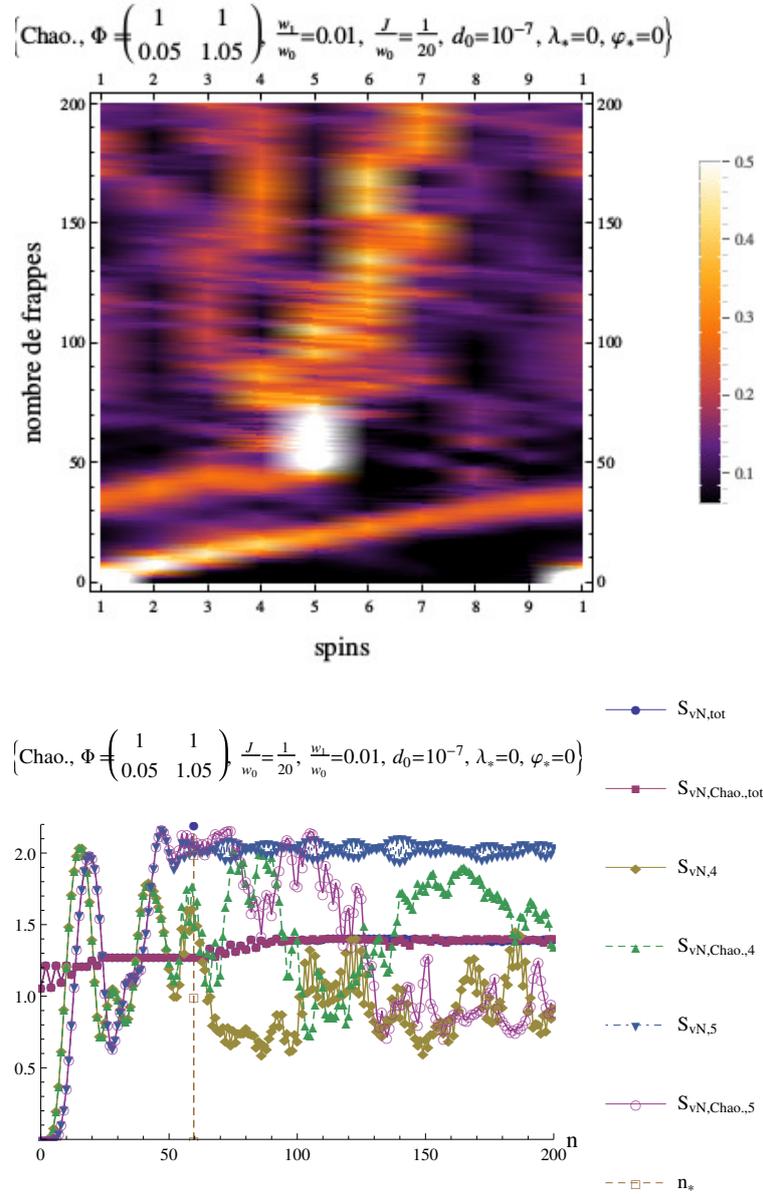


FIGURE 8.11 – En haut : densité de la population  $\langle \uparrow | \rho_n | \uparrow \rangle$  d'une chaîne de 9 spins couplés par une interaction d'Heisenberg de plus proches voisins. De manière à ce que le 5ième spin conserve toute l'information après qu'elle l'ait traversé deux fois, les autres spins sont frappés dans la direction down quand la première oscillation est finie pour les spins 6, 7, 8 et 9 et après la seconde oscillation pour les spins 1, 2, 3 et 4. Le graphique du bas représente l'évolution de l'entropie par rapport au nombre de frappes pour le spin moyen de la chaîne et le 4ième et le 5ième spin quand il n'y a pas de perturbation des frappes (respectivement  $S_{vN,tot}$ ,  $S_{vN,4}$ ,  $S_{vN,5}$ ) et quand les frappes sont perturbées par un environnement chaotique ( $S_{vN,Chao.,tot}$ ,  $S_{vN,Chao.,4}$ ,  $S_{vN,Chao.,5}$ ). Tous les spins sont initialement dans l'état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}(|\uparrow\rangle + 4|\downarrow\rangle)$  sauf le premier qui est dans l'état  $|\uparrow\rangle$  et sont frappés dans la direction  $|w\rangle = |\downarrow\rangle$ . Le couple  $(\lambda_*, \varphi_*)$  correspond au sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et retards de frappes initiales.

nous n'avons pas réalisé de vrais contrôles. Nous avons juste frappé les spins au temps approprié. Une question intéressante est la possibilité de contrôler par des frappes (avec des changements de la direction de frappes) l'information durant l'horizon de cohérence.

#### 8.1.4 Réalisation d'une opération et d'une porte *not*

Nous nous intéressons à la réalisation d'une opération *not*. Une opération *not* ne correspond pas à une porte *not*. En effet pour la porte *not* nous inversion l'état du spin quelque soit son état initial : la porte ne dépend pas de l'état initial du spin. Au contraire pour une opération *not* nous connaissons parfaitement l'état initial des spins et c'est en fonction de cette direction initiale que nous allons moduler la direction du champ de frappes pour inverser l'état du spin.

Nous voulons contrôler les spins de manière à ce qu'un spin ou tous passent de l'état up à l'état down. Pour réaliser ceci, nous utilisons des frappes suivant un schéma de contrôle, perturbées par un environnement chaotique, et définies par  $(\lambda_n^{(i)}, \varphi_n^{(i)}) + (\lambda_n^{pert,(i)}, \varphi_n^{pert,(i)})$ .

Les spins sont initialement dans le même état, l'état up  $|\uparrow\rangle$ . De manière à forcer les spins à aller vers la direction down, la direction de frappe  $|w\rangle = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)$  est modifiée : la valeur de  $\alpha$  décroît de 0.02 et celle de  $\beta$  augmente de 0.02 à chaque frappe pendant 50 frappes. Après ces frappes, nous frappons les spins afin qu'ils restent dans la direction down. Nous devons laisser le temps aux spins de changer de direction. Si la modification est trop rapide, une décohérence peut apparaître. Dans cette configuration, nous obtenons la figure 8.12. Cette figure montre que la population de tous les spins va de la direction up à la direction down et reste dans la direction down après l'horizon de cohérence. Sur le second graphique, quand les spins sont dans la direction down, la cohérence vaut 0. L'état des spins devient classique.

De la même manière, nous pouvons aussi produire une opération *not* avec seulement un spin de la chaîne. Tous les spins sont initialement dans la direction up et seulement le 1er est frappé. Les autres spins peuvent évoluer librement. Conservant les mêmes frappes que pour la figure 8.12, nous obtenons la figure 8.13. Le premier spin réalise une opération *not*. Il conserve un peu son information après l'horizon de cohérence. Au-delà de 20 frappes après l'horizon, cette information est perdue et la population du premier spin va vers la distribution microcanonique.

Ainsi, il est possible de produire une opération *not* avec une chaîne de spins durant l'horizon de cohérence. Si nous réalisons cette opération avec tous les spins, l'information est conservée après l'horizon de cohérence. Mais si seulement un spin de la chaîne est frappé de manière à former une opération *not*, les autres spins évoluant librement, l'information est conservée pendant 20 frappes après l'horizon de cohérence.

Cependant, ici nous n'avons pas réalisé une vraie porte *not* mais seulement une opération *not*. Pour réaliser une porte *not*, il faut que l'opération modifiant les frappes ne dépende pas de l'état initial des spins.

Considérons alors une chaîne de spins couplés par une interaction de plus proches voisins d'Heisenberg. Nous voulons réaliser une porte *not* pendant la durée de l'horizon de cohérence. Autrement dit si l'état initial des spins est  $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$  après l'application d'une porte *not* il devient  $\beta|\uparrow\rangle + \alpha|\downarrow\rangle$ . Ces directions sont données par rapport aux axes propres du spin, soit la direction  $z$ . On peut obtenir un renversement du spin en ne frappant qu'une seule fois dans une direction perpendiculaire, par exemple la direction  $x$  (donnée par le chat de Schrödinger  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ ) comme en atteste la figure 8.14. Dans cette figure nous avons choisi de frapper tous les spins dans la direction  $x$  une seule fois au bout de dix frappes pour deux exemples d'états initiaux des spins. Nous remarquons que dans les deux cas la porte *not* est réalisée. Il est possible aussi de ne frapper qu'un seul spin comme ce qui est réalisé sur la figure 8.15. Dans ce cas le 1er spin réalise bien la porte *not* mais à cause des interactions entre les spins celle-ci n'est pas conservée.

Nous avons vu qu'une libre transmission de l'information durant l'horizon de cohérence apparaît quand les spins sont chaotiquement frappés dans la direction d'un vecteur propre. Nous avons aussi réalisé un contrôle en changeant, modifiant ou concentrant l'information des spins. Pour ceci, nous

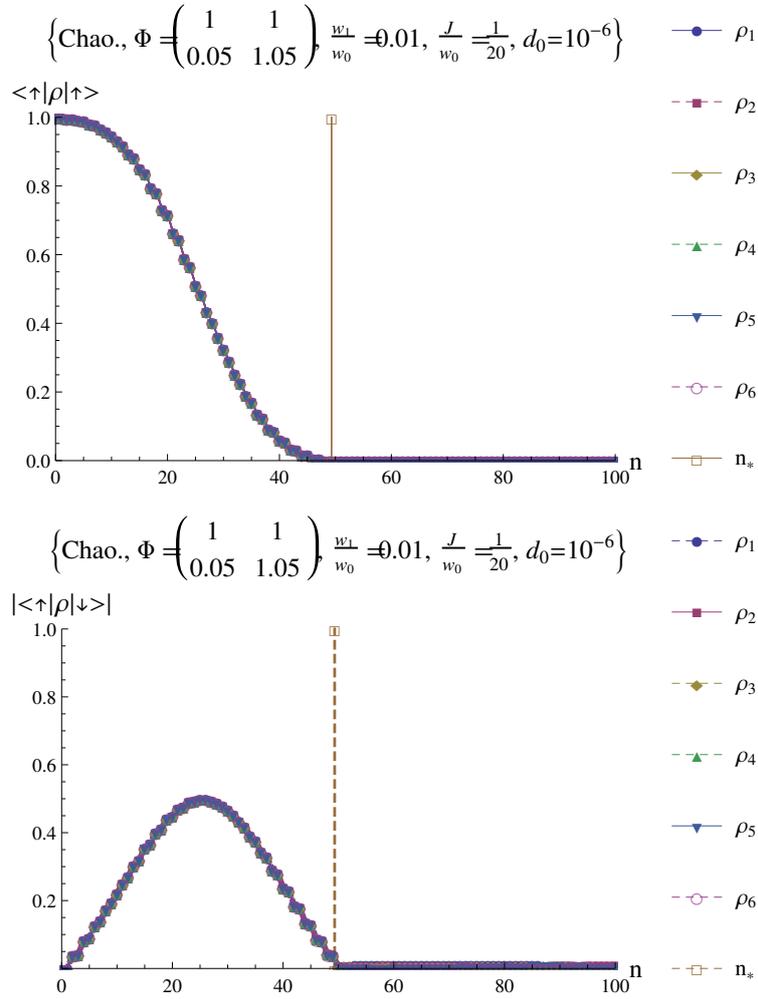


FIGURE 8.12 – Evolutions de la population et de la cohérence d’une chaîne de 6 spins couplés par une interaction de plus proches voisins d’Heisenberg. Les spins sont contrôlés de manière à former une opération *not*. Ils sont initialement dans la direction  $|\uparrow\rangle$  et sont frappés stationnairement suivant une direction allant de up à down. Les frappes sont perturbées par un environnement classique chaotique dont  $\Phi$  est la matrice définissant l’automorphisme continu du tore. Les paramètres de frappes sont définis tels que  $(\lambda_*^{pert,(0)}, \varphi_*^{pert,(0)}) = (0, 0)$  (la base du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et des retards de frappes initiales) et  $(\lambda_n^{(i)}, \varphi_n^{(i)}) = (3, 0)$ . La ligne verticale correspond à l’horizon de cohérence. Sur les deux graphiques, toutes les courbes sont confondues.

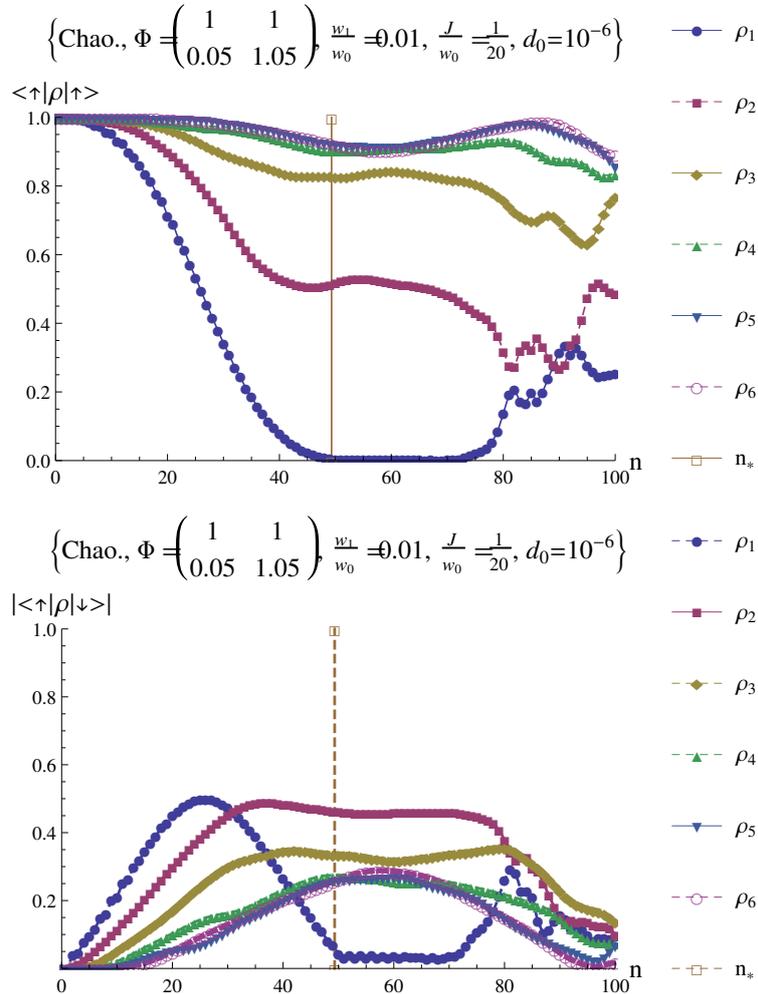


FIGURE 8.13 – Evolutions de la population et de la cohérence d'une chaîne de 6 spins couplés par une interaction d'Heisenberg de plus proches voisins. Le 1er spin est contrôlé de manière à former une opération *not*, les autres spins évoluant librement. Tous les spins sont initialement dans l'état  $|\uparrow\rangle$  et le 1er est frappé stationnairement suivant une direction allant de l'état up à l'état down. Les frappes sont perturbées par un environnement classique chaotique dont  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme continu du tore. Les paramètres de frappes sont définis par  $(\lambda_*^{pert,(0)}, \varphi_*^{pert,(0)}) = (0, 0)$  (le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs initiales des forces et des retards de frappes) et  $(\lambda_1^{(i)}, \varphi_1^{(i)}) = (3, 0)$ . La ligne verticale,  $n_*$ , correspond à l'horizon de cohérence.

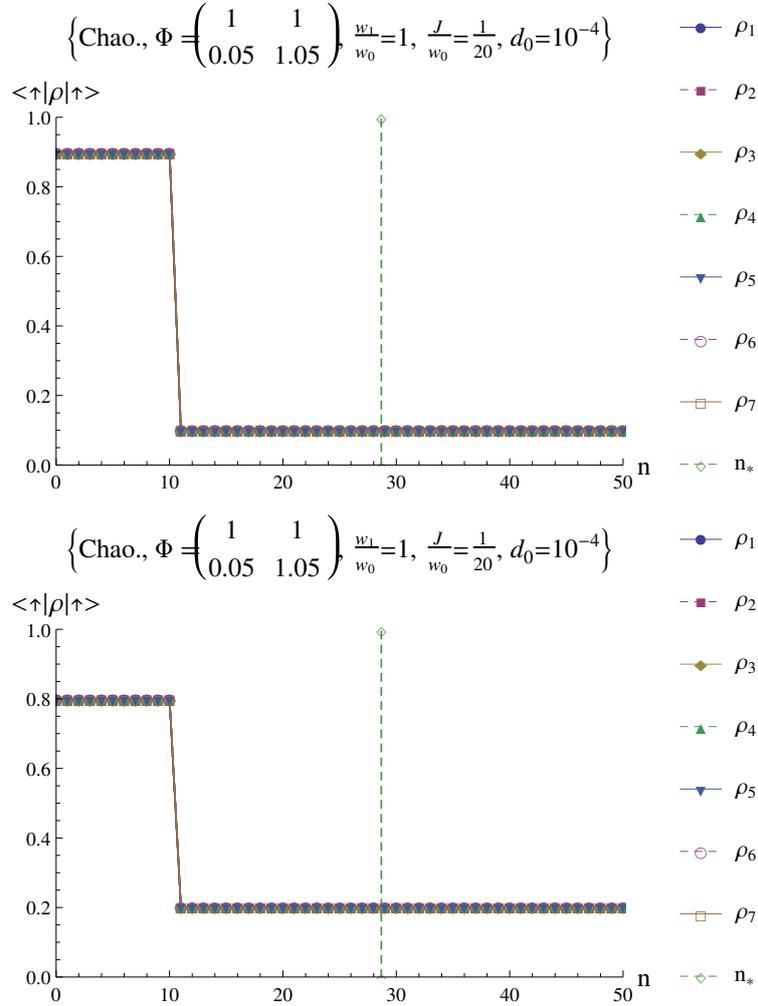


FIGURE 8.14 – Evolutions de la population d’une chaîne de 7 spins couplés par une interaction de plus proches voisins d’Heisenberg. Tous les spins sont frappés à la dixième frappe dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . Sur le graphique du haut les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  et sur celui du bas  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . Les paramètres de frappes sont définis tels que  $(\lambda_*^{pert,(0)}, \varphi_*^{pert,(0)}) = (0, 0)$  (le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et des retards de frappes initiales) et  $(\lambda_n^{(10)}, \varphi_n^{(10)}) = (3, 0)$ . La ligne verticale correspond à l’horizon de cohérence. Sur les deux graphiques toutes les courbes sont confondues.

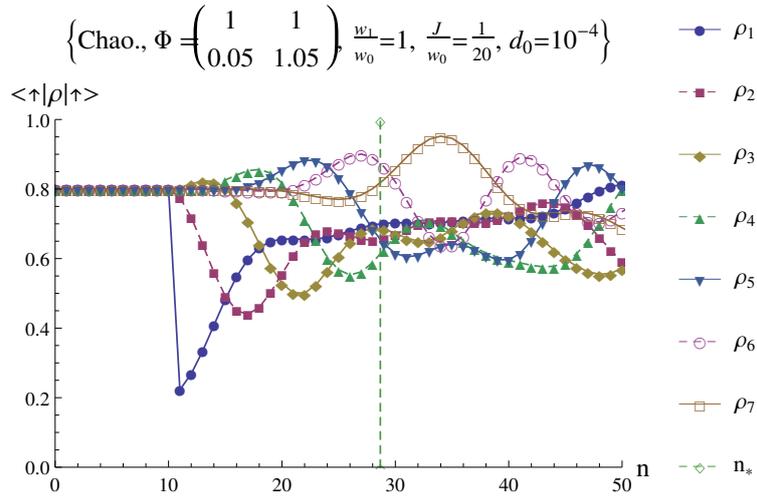


FIGURE 8.15 – Evolution de la population d’une chaîne de 7 spins couplés par une interaction de plus proches voisins d’Heisenberg. Seul le 1er spin est frappé à la dixième frappe dans la direction  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . Les spins sont initialement dans l’état  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ .  $\Phi$  est la matrice définissant l’automorphisme continu du tore. Les paramètres de frappes sont définis tels que  $(\lambda_*^{pert,(0)}, \varphi_*^{pert,(0)}) = (0, 0)$  (le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs des forces et des retards de frappes initiales) et  $(\lambda_1^{(10)}, \varphi_1^{(10)}) = (3, 0)$ . La ligne verticale correspond à l’horizon de cohérence.

avons utilisé des frappes stationnaires avant l’horizon de cohérence. Dans les deux dernières sous-sections, la propagation des paramètres de frappes chaotiques sur l’espace des phases avant l’horizon de prédictibilité est considérablement réduit car nous choisissons de commencer à  $\lambda = 0$  et  $\varphi = 0$  (nous considérons seulement les effets d’un bruit chaotique de faible intensité initiale). Dans ces conditions, nous avons contrôlé la transmission d’information et forcé un spin ou tous les spins à réaliser une opération *not* et une porte *not*.

## 8.2 Contrôle du monopôle d’une glace de spins

Considérons une glace de spins constituée seulement de deux cristaux comme représentée sur la figure 8.16. Initialement les spins sont dans un état tel que les deux cristaux forment un monopôle magnétique. Sous certaines conditions sur les paramètres de frappes il est possible de conserver le flux à travers un cristal alors que dans l’autre il oscille périodiquement comme le montre la figure 8.17. Cette oscillation signifie que le monopôle est périodiquement recréé. Ce phénomène et les conditions nécessaires pour y parvenir n’ont pas encore trouvé d’explications.

Dans ce premier graphique, il n’y a que les frappes de contrôle qui sont présentes. Si nous rajoutons une perturbation chaotique sur les frappes, nous obtenons le graphique 8.18. Nous voyons que pendant la durée de l’horizon de cohérence l’oscillation du monopôle est conservée mais qu’après il est complètement détruit et la population relaxe vers le microcanonique.

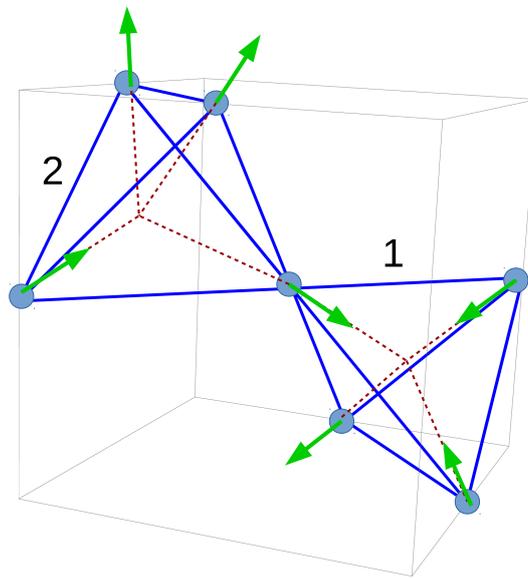


FIGURE 8.16 – Représentation schématique d'une glace de spins contenant deux cristaux. Les flèches représentent l'orientation des vecteurs de spins dans l'espace.

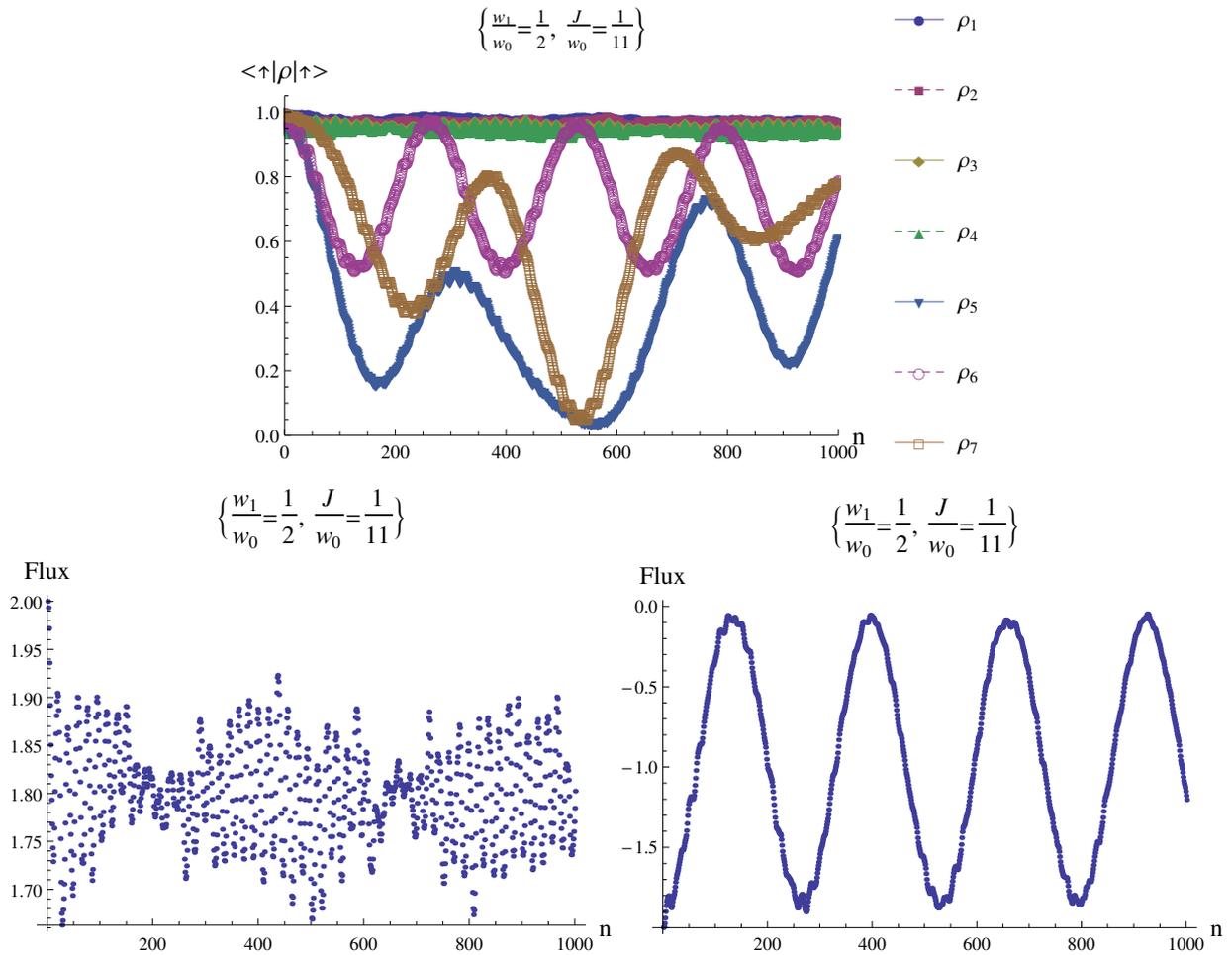


FIGURE 8.17 – Evolutions de la population dans la base locale des spins et du flux à travers une glace de spins constituée de deux cristaux suivant la représentation de la figure 8.16. Le second graphique est associé au premier cristal et le troisième au second. Les paramètres de frapes sont définis tels que  $(\lambda_n^{(i)}, \varphi_n^{(i)}) = (0.1, 0)$ . La direction de frappe est  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ .

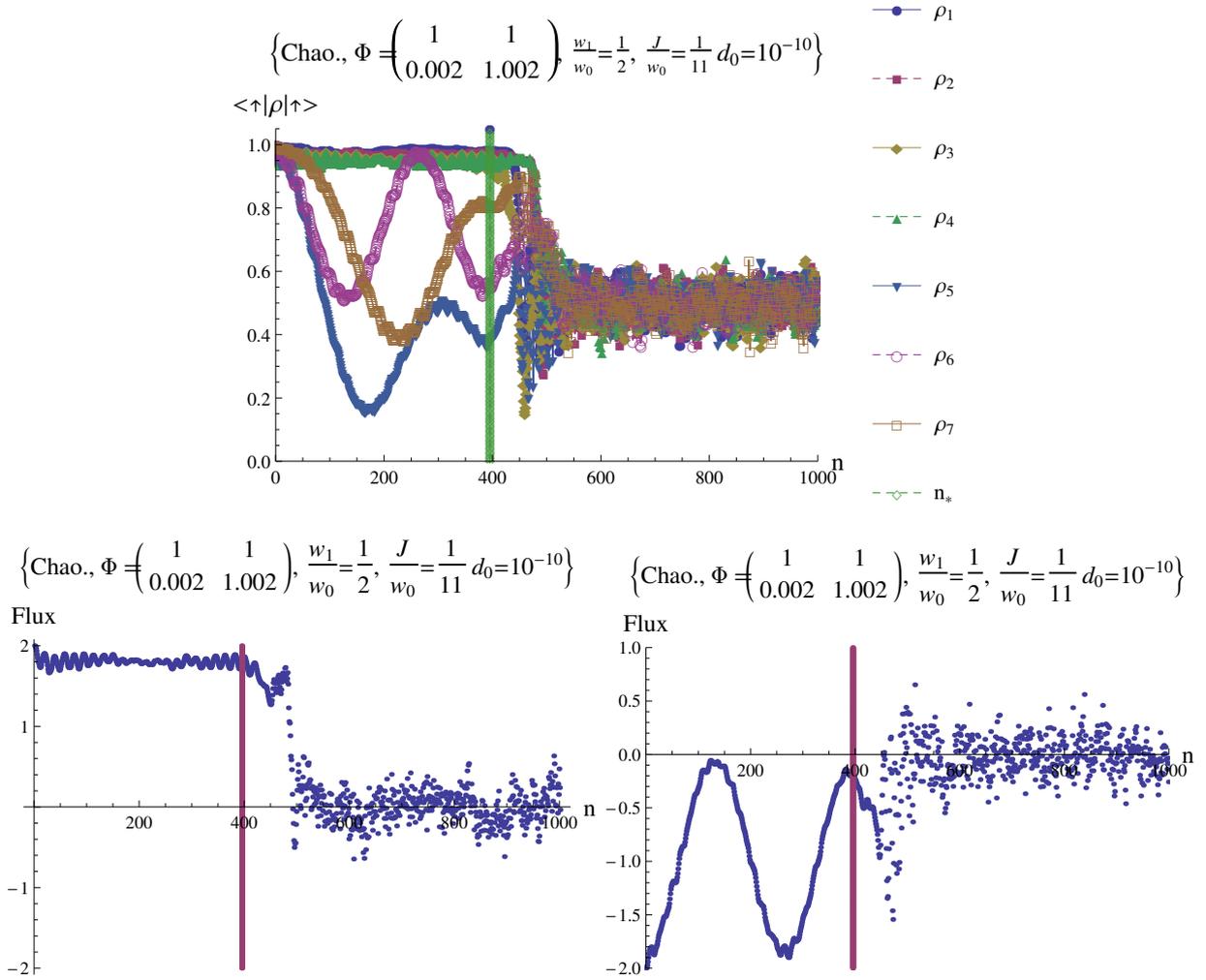


FIGURE 8.18 – Evolutions de la population dans la base locale des spins et du flux à travers une glace de spins constituée de deux cristaux suivant la représentation de la figure 8.16. Le second graphique est associé au première cristal et le troisième au second.  $\Phi$  est la matrice définissant l'automorphisme continu du tore. Les paramètres de frappes sont définis tels que  $(\lambda_*^{pert,(0)}, \varphi_*^{pert,(0)}) = (0, 0)$  (le sommet inférieur gauche du carré de côté  $d_0$  dans lequel sont tirées les valeurs initiales des forces et des retards de frappes) et  $(\lambda_n^{(i)}, \varphi_n^{(i)}) = (0.1, 0)$ . La direction de frappe est  $|w\rangle = |\uparrow\rangle$ . La ligne verticale correspond à l'horizon de cohérence.



# Conclusion

Le chaos classique est caractérisé par la propriété de sensibilité aux conditions initiales. Celle-ci stipule que si deux points sont initialement très proches, ceux-ci vont s'écartier exponentiellement au cours de la dynamique à partir d'un temps correspondant à l'horizon de prédictibilité. Nous avons vu qu'un ensemble de spins, soumis à des frappes perturbées chaotiquement (automorphisme continu sur le tore) présente un laps de temps pendant lequel le système conserve sa cohérence et pendant lequel la population peut osciller. Ce temps est appelé horizon de cohérence et est supérieur à l'horizon de prédictibilité. À l'instant initial toutes les frappes de l'environnement classique perturbées chaotiquement sont les mêmes. À partir de l'horizon de prédictibilité ces frappes deviennent différentes. Le système quantique ne ressent cette différence qu'à partir de l'horizon de cohérence pour lequel nous avons déterminé une formule empirique.

Nous avons vu que cet horizon restait présent pour d'autres systèmes quantiques tels que des chaînes de spins et des glaces de spins. De la même manière le changement d'environnement chaotique permet de conserver l'horizon en prenant par exemple la Standard map ou des systèmes dissipatifs tels que la dynamique de Lorenz.

Ainsi nous connaissons un environnement permettant aux systèmes quantiques de conserver leur cohérence pendant un laps de temps. Nous pouvons donc penser qu'il est possible de réaliser du contrôle quantique pendant la durée de l'horizon de cohérence. Nous avons réalisé de tels contrôles pour deux systèmes : la chaîne de spins et la glace de spins. Pour la chaîne de spins, nous avons commencé par réaliser un contrôle par transmission d'information. Pour ceci, nous avons utilisé une chaîne de spins couplés par une interaction d'Heisenberg de plus proches voisins. L'interaction d'Heisenberg est un couplage isotrope qui induit une même orientation des spins dans l'espace (ou un même état des spins). Ainsi si deux spins voisins n'ont pas le même état ils vont se transmettre leurs états de proche en proche. Ceci nous a permis de déterminer une formule donnant le nombre de spins atteints par l'information avant l'horizon de cohérence. Un second contrôle a été réalisé. Pour celui-ci, nous avons utilisé une chaîne fermée et des frappes stationnaires, qui sont perturbées par un environnement chaotique (automorphisme continu sur le tore). Pendant la durée de l'horizon de cohérence nous avons pu forcer l'information à aller que dans une seule direction (comme la chaîne est fermée si un spin possède un état up et tous les autres sont dans un autre état, l'information du spins up à tendance à se transmettre à ses deux plus proches voisins). Ensuite cette information a été stoppée sur le spin central de la chaîne. Pour ce faire, il faut frapper les spins au bon moment. Autrement dit, il faut frapper les spins quand leur état est quasiment le même que celui de la frappe pour les forcer à rester dans la direction de la frappe. Ceci constitue la meilleure méthode pour que le spin conserve son information. Finalement en utilisant la même méthode, nous avons pu réaliser une porte logique pendant l'horizon de cohérence, la porte *not* et une opération *not*. Les glaces de spins sont des matériaux à phases magnétiques exotiques possédant la propriété remarquable d'exhiber un monopôle magnétique sous certaines conditions. Pendant la durée de l'horizon de cohérence, il est possible de contrôler ce monopôle magnétique. Un cristal conserve le monopôle alors que le second voit son monopôle disparaître périodiquement.

Nous avons stipulé que l'horizon de cohérence pouvait être prédit par une formule empirique. Cette formule semble bien fonctionner mais nous ne comprenons pas tout ce qu'il se passe. En particulier nous pouvons nous demander pourquoi il y a la présence d'un décalage entre l'horizon de cohérence et l'horizon de prédictibilité et quelle est la pente de l'entropie quantique. Afin de mieux comprendre ces phénomènes, nous allons réaliser dans la partie suivante une analyse mathématique de ce modèle

en utilisant la théorie de Koopman.

## Quatrième partie

# **Théorie de Koopman et horizon de cohérence**



# Introduction

Dans ce chapitre, nous conservons le système étudié précédemment. Autrement dit nous considérons un système de spins soumis à des trains d'impulsions magnétiques ultra-courtes. Avant d'atteindre les spins, les impulsions passent dans un environnement classique modifiant à la fois la force et le retard de chaque frappe. Cet environnement est choisi chaotique. En effet pour un environnement classique chaotique, la cohérence et l'entropie présentent un phénomène particulier. Avant un laps de temps que nous appelons horizon de cohérence, le système reste cohérent et l'entropie est nulle (ou stable) alors qu'après l'horizon, la cohérence chute à 0 et l'entropie croît très fortement. L'horizon de cohérence est supérieur à l'horizon de prédictibilité (temps au bout duquel deux points très proches soumis à la dynamique chaotique vont s'écarter de manière exponentielle). Nous avons vu que ce phénomène se conservait lorsque nous changions de système classique chaotique (au lieu d'un automorphisme continu sur le tore, prendre la Standard map ou les systèmes dynamiques dissipatifs à trois dimensions) et lorsque nous changions de système quantique (que se soit pour un ensemble de spins, une chaîne de spins ou une glace de spins). De ce phénomène, plusieurs questions se posent. Comment l'information classique se transmet-elle au système quantique, pourquoi l'horizon de prédictibilité est plus court que l'horizon de cohérence, quelle est la pente de l'entropie quantique ? Ce sont des questions auxquelles nous voulons répondre dans cette partie par une analyse plus formelle.

Nous avons besoin d'un formalisme qui traite de manière unifiée la dynamique classique, quantique et leurs interactions. M. H.R. Jauslin donne une piste dans [84, 45] sur la construction de ce formalisme unifié. Pour ceci nous utilisons l'opérateur de Koopman défini dans  $\mathcal{K} = L^2(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}$ . Le premier terme est l'espace des observables  $L^2$  sur l'espace des phases  $\Gamma$  du système classique modélisant les trains de frappes, le second est l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  des spins.

Les quasi-énergies du contrôle avec bruit chaotique jouent un rôle important dans cette analyse. La notion élémentaire de quasi-énergie dans le contrôle des spins a été étudiée au chapitre 3.2. Cependant cette analyse peine à prendre en compte le bruit (les opérateurs de monodromie qui se succèdent changent rapidement à cause du bruit, donc les quasi-énergies changent avec lui ; le tracé de celles-ci au cours du temps ne nous a pas semblé pertinent pour interpréter les phénomènes). Nous avons donc besoin de définir des quasi-énergies incluant globalement l'effet du bruit chaotique. Ce sont celles-ci qui devraient exhiber une distribution d'espacements de niveaux (vu au chapitre 5) caractéristique du chaos quantique.

Dans un premier chapitre nous verrons comment l'opérateur de Koopman est défini. Nous analyserons ses propriétés, en particulier spectrales. Dans un second, nous regarderons comment l'opérateur de Koopman agit sur les systèmes quantiques asservis par un système dynamique classique.

Notons que dans cette partie nous donnons un début d'étude qui n'est pas terminée. Toutes les questions que nous avons posées ne trouvent pas encore de réponse.

*Nous pouvons noter que dans toute cette partie, nous adoptons la convention d'Einstein sur la répétition d'indices haut/bas.*

Tout le chapitre 9 reprend les théorèmes, définitions, propriétés et propositions que nous trouvons dans la littérature. Dans le chapitre 10, les définitions 18, 20 et 21, le théorème 9 et la propriété 15 sont tirés des articles de M. H.R. Jauslin. Le reste n'avait pas encore été traité.



# Chapitre 9

## L'opérateur de Koopman

Nous avons introduit dans la partie précédente une formule empirique permettant de donner la durée de l'horizon de cohérence. Nous proposons une approche par la théorie de Koopman [50, 21, 62] afin de donner des résultats plus formels. Avant de s'intéresser à l'analyse des systèmes quantiques asservis, nous regarderons les définitions fondamentales et les propriétés associées au spectre de Koopman.

### 9.1 Définitions fondamentales

Dans la définition 4 du chapitre 5, nous avons vu qu'un système dynamique classique était défini par un triplet  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  avec  $\Gamma$  l'espace topologique encore appelé espace des phases,  $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \varphi^t \in \text{Aut}(\Gamma)$  est un (semi-)groupe d'automorphismes de  $\Gamma$  appelé le flot et  $\mu$  une mesure sur  $\Gamma$ . Le système dynamique est dit conservatif si pour tout ensemble ouvert  $A \subset \Gamma$ ,  $\mu(\varphi^t(A)) = \mu(A)$ .

Dans toute cette partie nous prendrons  $\Gamma = \mathbb{T}^n$  ( $n$ -tore) et  $\mu(\Gamma) = 1$ . Soit  $\theta_0 \in \Gamma$ , la trajectoire de phase est définie par  $\theta(t) = \varphi^t(\theta_0)$ . Soit  $F \in \text{Aut}(\Gamma)$ , par la définition 4 les trajectoires de l'espace des phases du système dynamique sont solutions de l'équation

$$\dot{\theta} = F(\theta) \quad (9.1)$$

avec  $F$  le générateur du flot  $\varphi^t : \frac{d\varphi^t}{dt} = F(\varphi^t)$ .

**Définition 17.** *Opérateur de Koopman*

L'opérateur de Koopman d'un système dynamique  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  est l'opérateur linéaire  $\mathcal{T}^t \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma, d\mu))$  défini par

$$\forall f \in L^2(\Gamma, d\mu) \quad \mathcal{T}^t f(\theta) = f(\varphi^t(\theta)) \quad (9.2)$$

avec  $L^2(\Gamma, d\mu)$  l'espace des observables (fonctions de  $\Gamma$ ) de carré intégrable du système dynamique. L'opérateur de Koopman permet de traiter la dynamique non-linéaire  $\dot{\theta} = F(\theta)$  sur l'espace des phases comme une dynamique linéaire sur l'espace des observables.

Soit l'opérateur de Perron Frobenius  $P \in \mathcal{L}(L^1(\Gamma, d\mu))$  défini par ([48])

$$\int_A (P\rho)(x) d\mu(x) = \int_{\varphi^{-t}(A)} \rho(x) d\mu(x) \quad (9.3)$$

avec  $A \subset \Gamma$  ( $A \in \mathcal{T}$  tribu sur  $\Gamma$ ) et  $\rho \in L^1(\Gamma, d\mu)$  une densité sur l'espace des phases. Nous remarquons que comme l'opérateur de Koopman peut aussi être défini comme un opérateur linéaire de  $L^\infty(\Gamma, d\mu) \subset L^2(\Gamma, d\mu)$ , il est le dual de l'opérateur de Perron Frobenius<sup>1</sup>.  $\forall f \in L^\infty(\Gamma, d\mu), \forall \rho \in L^1(\Gamma, d\mu)$

$$\langle \rho | \mathcal{T}^t f \rangle = \langle P^t \rho | f \rangle \quad (9.4)$$

où  $\langle f | \rho \rangle = \int_\Gamma f(\theta) \rho(\theta) d\mu(\theta)$

**Propriété 4.** *L'opérateur de Koopman d'un système dynamique conservatif est unitaire*

---

1. l'espace dual de  $L^p$  est  $L^q$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

*Démonstration.*  $\forall f, g \in L^2(\Gamma, d\mu)$ , nous avons

$$\langle \mathcal{T}^t g | \mathcal{T}^t f \rangle = \int_{\Gamma} \overline{g(\varphi^t(\theta))} f(\varphi^t(\theta)) d\mu(\theta) \quad (9.5)$$

$$= \int_{\varphi^t(\Gamma)} \overline{g(\theta)} f(\theta) \rho_{\mu}(\varphi^{-t}(\theta)) |\det(\partial\varphi_{\theta}^{-t})| d\theta^1 \dots d\theta^n \quad (9.6)$$

avec  $\partial\varphi_{\theta}^t$  la matrice jacobienne du flot et  $\rho_{\mu}$  la densité de la mesure. Comme nous sommes dans le cas d'un système dynamique conservatif, le flot préserve la mesure ( $\mu(\varphi^t(A)) = \mu(A)$  avec  $A \subset \Gamma$ ). Alors

$$\int_{\varphi^t(A)} d\mu(\theta) = \int_A d\mu(\theta) \quad (9.7)$$

$$\Rightarrow \int_{\varphi^t(A)} \rho_{\mu}(\theta) d\theta^1 \dots d\theta^n = \int_A d\mu(\theta) \quad (9.8)$$

On pose  $\tilde{\theta} = \varphi^t(\theta)$  alors l'équation précédente devient

$$\Rightarrow \int_A \rho_{\mu}(\varphi^{-t}(\tilde{\theta})) |\det \partial\varphi_{\tilde{\theta}}^{-t}| d\tilde{\theta}^1 \dots d\tilde{\theta}^n = \int_A \rho_{\mu}(\theta) d\theta^1 \dots d\theta^n \quad (9.9)$$

Le système étant conservatif, nous avons

$$\rho_{\mu}(\varphi^{-t}(\theta)) |\det \partial\varphi_{\theta}^{-t}| = \rho_{\mu}(\theta) \quad (9.10)$$

La fermeture topologique<sup>2</sup> de  $\varphi^t(\Gamma)$  correspond à tout  $\Gamma$ . Ainsi par l'équation 9.6, nous voyons que

$$\langle \mathcal{T}^t g | \mathcal{T}^t f \rangle = \langle g | f \rangle \quad (9.11)$$

□

**Propriété 5.** *Le générateur linéaire de l'opérateur de Koopman est  $F^{\mu} \frac{\partial}{\partial \theta^{\mu}} \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma, d\mu))$*

*Démonstration.*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}^t - 1}{t} f(\theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi^t(\theta)) - f(\theta)}{t} \quad (9.12)$$

$$= \left. \frac{df(\varphi^t(\theta))}{dt} \right|_{t=0} \quad (9.13)$$

$$= \left. \frac{\partial f}{\partial \theta^{\mu}} \dot{\varphi}^t(\theta)^{\mu} \right|_{t=0} \quad (9.14)$$

$$= F^{\mu}(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta^{\mu}} \quad (9.15)$$

D'après le théorème de Stone [79] qui dit que

**Théorème 7.** *Soit  $U(t)$  un groupe fortement continu à un paramètre ( $U(t)U(s) = U(t+s)$  et  $U(-t) = U(t)^{-1}$ ). Le générateur du groupe est*

$$A\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - I}{t} \psi \quad (9.16)$$

avec la limite dans la topologie forte,  $I$  l'opérateur identité et  $U(t) = e^{At}$ .

$A$  est générateur du groupe  $U(t)$  si et seulement si  $\frac{dU}{dt} = AU$ . Nous voyons que  $F^{\mu}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^{\mu}}$  est le générateur de  $\mathcal{T}^t$ . □

**Propriété 6.** *Le générateur de Koopman d'un système dynamique conservatif (avec  $\Gamma = \mathbb{T}^n$ ) est anti-autoadjoint.*

---

2. la fermeture topologique  $\bar{A}$  correspond à tous les points de  $A$  auxquels nous rajoutons ceux de son bord

*Démonstration.* Soient  $f, g \in L^2(\Gamma, d\mu)$ , avec  $f \in \text{Dom}(F^\mu, \partial_\mu) = \{f \in L^2(\Gamma d\mu) \cap C^1(\Gamma), F^\mu \partial_\mu f \in L^2(\Gamma, d\mu)\}^3$  et  $g \in \text{Dom}((F^\mu, \partial_\mu)^\dagger)$ .

$$\langle g | F^\mu \partial_\mu f \rangle = \int_\Gamma \overline{g(\theta)} \vec{F}(\theta) \cdot \vec{\nabla} f(\theta) d\mu(\theta) \quad (9.17)$$

$$= \int_\Gamma \vec{\nabla} \cdot (\overline{g(\theta)} \vec{F}(\theta) f(\theta) \rho_\mu(\theta)) d\theta^1 \dots d\theta_n - \int_\Gamma \vec{\nabla} \cdot (\overline{g(\theta)} \vec{F}(\theta) \rho_\mu(\theta)) f(\theta) d\theta^1 \dots d\theta^n \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned} \langle g | F^\mu \partial_\mu f \rangle &= \int_\Gamma \vec{\nabla} \cdot (\overline{g(\theta)} \vec{F}(\theta) f(\theta) \rho_\mu(\theta)) d\theta^1 \dots d\theta^n - \int_\Gamma (\vec{\nabla} \overline{g(\theta)}) \cdot \vec{F}(\theta) f(\theta) d\mu(\theta) \\ &\quad - \int_\Gamma \overline{g(\theta)} \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}(\theta) \rho_\mu(\theta)) f(\theta) d\theta^1 \dots d\theta^n \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$\langle g | F^\mu \partial_\mu f \rangle = \oint_{\partial\Gamma} \overline{g(\theta)} f(\theta) \vec{F}(\theta) \cdot d\vec{S}(\theta) - \langle F^\mu \partial_\mu g | f \rangle - \int_\Gamma \overline{g(\theta)} f(\theta) \text{div}(\rho_\mu(\theta) \vec{F}(\theta)) d\theta^1 \dots d\theta^n \quad (9.20)$$

Nous considérons des systèmes conservatifs, donc des systèmes qui préservent la mesure, ainsi  $\text{div}(\rho_\mu \vec{F}) = 0$   $\mu$ -presque partout. De plus comme l'espace des phases correspond à un  $n$ -tore, le bord ne contient aucun élément  $\partial\Gamma = \emptyset$ . Nous trouvons donc de l'équation précédente que

$$\langle g | F^\mu \partial_\mu f \rangle = -\langle F^\mu \partial_\mu g | f \rangle \quad (9.21)$$

Il s'en suit également que  $\text{Dom}((F^\mu \partial_\mu)^\dagger) = \text{Dom}(F^\mu \partial_\mu)$ .  $\square$

Prenons par exemple le cas d'une dynamique Hamiltonienne avec  $\theta = (q, p)$ , avec  $p_i$  le moment conjugué de  $q_i$ . Nous avons

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial p_i} \quad (9.22)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial q^i} \quad (9.23)$$

avec  $\mathcal{H} \in C^1(\Gamma)$  l'Hamiltonien classique du système dynamique. Nous avons alors

$$F^\mu \partial_\mu = \dot{q}^i \partial_{q^i} + \dot{p}_i \partial_{p_i} \quad (9.24)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (9.25)$$

$$= \{., \mathcal{H}\} \quad (9.26)$$

avec  $\{.,.\}$  le crochet de Poisson.

## 9.2 Analyses spectrales de l'opérateur de Koopman

Soient  $\lambda \in \text{Sp}(F^\mu \partial_\mu)$  une valeur spectrale de  $F^\mu \partial_\mu$  et  $f_\lambda \in C^1$  une fonction propre associée. Par l'équation aux valeurs propres nous avons

$$F^\mu(\theta) \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta^\mu} = \lambda f(\theta) \quad (9.27)$$

Et l'opérateur de Koopman satisfait

$$\mathcal{T}^t f_\lambda(\theta) = e^{\lambda t} f_\lambda(\theta) \quad (9.28)$$

Nous pouvons noter que  $f_\lambda$  n'est pas nécessairement  $L^\infty$  ou  $L^2$ , en particulier si  $\lambda$  appartient au spectre continu. Les états du spectre continu sont non normalisables, et sont souvent des distributions, donc ne sont pas dans  $L^2$ .

---

3. nous définissons un domaine ( $\text{Dom}(\cdot)$ ) avec les fonctions de départ (fonctions sur lesquels nous agissons) et les fonctions d'arrivée de l'espace de Hilbert. Dans le cas présent nous définissons un endomorphisme (application linéaire d'un espace dans ce même espace) car  $F^\mu \partial_\mu$  appartient à  $L^2(\Gamma, d\mu)$ , les fonctions sur lesquels il peut agir doivent être dérivables dans  $C^1(\Gamma)$  et leurs images doivent toujours être dans  $L^2(\Gamma, d\mu)$

**Proposition 8.** Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in Sp(F^\mu \partial_\mu)$  deux valeurs propres spectrales associées à  $f_{\lambda_1}(\theta)$  et  $f_{\lambda_2}(\theta)$  (fonctions propres généralisées) alors  $\lambda_1 + \lambda_2 \in Sp(F^\mu \partial_\mu)$  dont la fonction propre associée est  $f_{\lambda_1 + \lambda_2}(\theta) = f_{\lambda_1}(\theta)f_{\lambda_2}(\theta)$ . De plus,  $\forall r \in \mathbb{R}$  tel que  $(f_{\lambda_1}^r) \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ , alors  $r\lambda_1 \in Sp(F^\mu \partial_\mu)$  dont la fonction propre associée est  $f_{r\lambda_1}(\theta) = (f_{\lambda_1}(\theta))^r$

Ce résultat suit directement le fait que le générateur de Koopman est une dérivée de premier ordre. Nous pouvons noter que nous ne pouvons pas prendre n'importe quel  $r$ . En effet dans le cas où nous prenons par exemple le système dynamique classique  $(\mathbb{S}^1, \varphi^t, \frac{d\theta}{2\pi})$  ( $\mathbb{S}^1$  est le cercle) tel que  $\varphi^t(\theta) = \theta + wt \text{ mod}(2\pi)$  (avec  $w > 0$  constant), l'équation aux valeurs propres est

$$w \frac{df}{d\theta} = \lambda f \quad (9.29)$$

Sa résolution nous donne

$$f(\theta) = e^{\frac{\lambda}{w}\theta} \quad (9.30)$$

Avec la condition de périodicité stipulant que  $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ , nous avons  $\frac{\lambda}{w}2\pi = 2in\pi \Rightarrow \lambda = nwi$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Le générateur de Koopman est dans ce cas  $w \frac{\partial}{\partial \theta}$  et le spectre de  $w \frac{\partial}{\partial \theta}$  est  $iw\mathbb{Z}$  avec  $f_{inw}(\theta) = e^{in\theta}$ . Nous avons  $(f_{inw})^r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S})$  (continu, dérivable et  $2\pi$ -périodique par rapport à  $\theta$ ) si et seulement si  $r \in \mathbb{Z}$  (sinon nous ne restons pas dans l'espace de Hilbert sur le cercle).

**Propriété 7.** Soient  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  un système dynamique classique et  $\lambda \in Sp(F^\mu \partial_\mu)$  associée à la fonction propre  $f_\lambda$ .

- Si  $\theta_*$  est un point fixe du flot ( $\forall t, \varphi^t(\theta_*) = \theta_*$ ), alors soit on a  $\lambda = 0$ , soit on a  $f_\lambda(\theta_*) = 0$  avec  $Re\lambda \leq 0$ , soit on a  $|f_\lambda(\theta_*)| = +\infty$  avec  $Re\lambda > 0$
- Si  $\theta_*$  est un point cyclique du flot ( $\exists T > 0$  tel que  $\varphi^T(\theta_*) = \theta_*$ ), alors soit on a  $\lambda \in \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Z}$ , soit on a  $f_\lambda(\theta_*) = 0$  avec  $Re\lambda \leq 0$ , soit on a  $|f_\lambda(\theta_*)| = +\infty$  avec  $Re\lambda > 0$
- Si  $\theta_*$  est un point d'un tore invariant d'une dynamique quasi-périodique ou sur un attracteur du flot, alors soit on a  $\lambda \in i\mathbb{R}$ , soit on a  $f_\lambda(\theta_*) = 0$  avec  $Re\lambda < 0$ , soit on a  $|f_\lambda(\theta_*)| = +\infty$  avec  $Re\lambda > 0$

*Démonstration.* Par définition des fonctions propres de Koopman nous avons

$$f_\lambda(\varphi^t(\theta)) = e^{\lambda t} f_\lambda(\theta) \quad (9.31)$$

$\forall \theta \in \Gamma$ . Si  $\theta_*$  est un point fixe  $\varphi^t(\theta_*) = \theta_*$  alors l'équation précédente devient

$$f_\lambda(\theta_*) = e^{\lambda t} f_\lambda(\theta_*) \quad (9.32)$$

Si  $f_\lambda(\theta_*) \neq 0$  ou  $\infty$ , cette égalité est satisfaite pour tout  $t$  seulement si  $\lambda = 0$ . Si  $\lambda \notin i\mathbb{R}$ ,  $|f_\lambda(\theta_*)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{Re\lambda t} |f_\lambda(\theta_*)| = 0$  si  $Re\lambda < 0$  ou  $|f_\lambda(\theta_*)| = +\infty$  si  $Re\lambda > 0$ .

Si  $\theta_*$  est un point cyclique  $\varphi^T(\theta_*) = \theta_*$ , l'équation 9.31 devient

$$f_\lambda(\theta_*) = e^{\lambda T} f_\lambda(\theta_*) \quad (9.33)$$

Si  $f_\lambda(\theta_*) \neq 0$  ou  $\infty$ , cette égalité n'est satisfaite que si  $\lambda T \in 2\pi i\mathbb{Z}$ . Si  $\lambda \notin i\mathbb{R}$ ,  $|f_\lambda(\theta_*)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{Re\lambda n T} |f_\lambda(\theta_*)| = 0$  si  $Re\lambda < 0$  ou  $|f_\lambda(\theta_*)| = +\infty$  si  $Re\lambda > 0$ .

Si maintenant  $\theta_*$  est sur un attracteur,  $\exists \theta_0 \in \Gamma$ ,  $\exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ ) tel que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^{t_k}(\theta_0) = \theta_*$ . D'après l'équation 9.31, ceci implique que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{\lambda t_k} f(\theta_0) = f(\theta_*) \quad (9.34)$$

Finalement, si  $Re\lambda < 0$ ,  $f(\theta_*) = 0$  et si  $Re\lambda > 0$ ,  $f(\theta_*) = +\infty$ . Nous avons la même chose avec un tore invariant d'une dynamique quasi-périodique en prenant le cas particulier  $\theta_0 = \theta_*$ .  $\square$

**Propriété 8.** Soit  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  un système dynamique classique et soit  $\theta_* \in \Gamma$  un point fixe du flot. Soit  $\lambda \in Sp(F^\mu \partial_\mu)$  associée à la fonction propre  $f_\lambda$ . Si  $Re\lambda \leq 0$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $\vec{\nabla} f_\lambda|_{\theta=\theta_*} \neq \vec{0}$  alors  $\vec{\nabla} f_\lambda|_{\theta=\theta_*}$  est un vecteur propre gauche de la matrice jacobienne du générateur du flot  $\partial F_{\theta_*}$ , et  $\lambda$  est la valeur propre de Lyapunov associée.

*Démonstration.* Nous considérons les développements de Taylor de  $f_\lambda$  et  $F$  au voisinage de  $\theta_*$

$$F^\mu(\theta) = \left. \frac{\partial F^\mu}{\partial \theta^\nu} \right|_{\theta_*} (\theta^\nu - \theta_*^\nu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.35)$$

$$f_\lambda(\theta) = \left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\nu} \right|_{\theta_*} (\theta^\nu - \theta_*^\nu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.36)$$

Comme nous considérons que  $\theta_*$  est un point fixe,  $\varphi^t(\theta_*) = \theta_* \Rightarrow \dot{\varphi}^t(\theta_*) = 0 \Rightarrow F^\mu(\theta_*) = 0$ . De plus de par la propriété 7,  $f_\lambda(\theta_*) = 0$ . Pour obtenir l'équation aux valeurs propres  $F^\mu \partial_\mu f_\lambda = \lambda f_\lambda$  il nous faut le développement de  $\partial_\mu f_\lambda$

$$\partial_\mu f_\lambda = \partial_\mu \left( \left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\nu} \right|_{\theta_*} (\theta^\nu - \theta_*^\nu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \right) \quad (9.37)$$

$$= \left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta_*} + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|) \quad (9.38)$$

$$\left. \frac{\partial F^\mu}{\partial \theta^\nu} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta_*} (\theta^\nu - \theta_*^\nu) = \lambda \left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\nu} \right|_{\theta_*} (\theta^\nu - \theta_*^\nu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.39)$$

Il s'en suit

$$(\partial F_{\theta_*})^{\mathfrak{T}} \vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\theta_*} = \lambda \vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\theta_*} \quad (9.40)$$

La transposée  $\mathfrak{T}$ , vient du fait que nous sommions sur les lignes et non sur les colonnes. Nous pourrions noter aussi que les vecteurs propres gauches de la matrice densité sont des vecteurs propres droits de sa transposée<sup>4</sup>. Les valeurs propres de Lyapunov sont les valeurs propres de la matrice jacobienne du générateur du flot ou du flot.  $\square$

Si nous travaillons en dimension  $n$ ,  $\Gamma = \mathbb{T}^n$ , la matrice jacobienne est d'ordre  $n$ , et supposons qu'elle a  $n$  valeurs propres de Koopman dans le semi-plan gauche complexe avec  $\vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\theta=\theta_*} \neq 0$ . Les vecteurs propres gauches  $(\nabla f_{\lambda_a} \Big|_{\theta_*})_{a=1, \dots, n}$  sont toujours biorthogonaux aux vecteurs propres droits qui sont les directions propres  $(\vec{e}_a)_{a=1, \dots, n}$  au voisinage de  $\theta_*$ . Autrement dit

$$\left. \frac{\partial F^\mu}{\partial \theta^\nu} \right|_{\theta_*} e_a^\nu = \lambda_a e_a^\mu \quad (9.41)$$

$$\left. \frac{\partial f_{\lambda_a}}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta_*} e_b^\mu = \delta_b^a \quad (9.42)$$

ceci avec un choix convenable de normalisation. Soient  $(\vartheta^a)_{a=1, \dots, n}$  le système de coordonnées de  $\Gamma$  au voisinage de  $\theta_*$  associée aux directions propres

$$\frac{\partial \theta^\mu}{\partial \vartheta^a} = e_a^\mu \quad (9.43)$$

Nous avons alors

$$f_{\lambda_a}(\theta) = \left. \frac{\partial f_{\lambda_a}}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta_*} (\theta^\mu - \theta_*^\mu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.44)$$

$$= \left. \frac{\partial f_{\lambda_a}}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta_*} e_b^\mu (\vartheta^b - \vartheta_*^b) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.45)$$

$$= (\vartheta^a - \vartheta_*^a) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.46)$$

**Propriété 9.** Soit  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  un système dynamique classique et soit  $\theta_* \in \Gamma$  un point cyclique du flot de période  $T$ . Soit  $\lambda \in Sp(F^\mu \partial_\mu)$  associée aux fonctions propres  $f_\lambda$ . Si  $Re \lambda \leq 0$ ,  $\lambda \notin \frac{2\pi i}{T} \mathbb{Z}$  et  $\vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\theta=\theta_*} \neq 0$  alors  $\vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\theta=\theta_*}$  est un vecteur gauche de la matrice de monodromie du cycle et  $\lambda$  est la valeur propre de Floquet-Lyapunov associée.

4. si nous écrivons ceci en terme de ket, nous avons  $\langle v|M = \lambda \langle v| \Leftrightarrow M^{\mathfrak{T}}|v\rangle = \lambda|v\rangle$

*Démonstration.* En utilisant le théorème de Floquet [37, 66, 99]  $\exists S^t, \Lambda \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tels que  $\partial\varphi_{\theta_*}^t = S^t e^{\Lambda t}$  où  $S^{t+T} = S^t$ .  $e^{\Lambda T}$  est la matrice de monodromie du cycle. En utilisant l'expansion de Taylor au voisinage de  $\theta_*$ , nous avons

$$f_\lambda(\varphi^t(\theta)) = f_\lambda(\varphi^t(\theta_*)) + \left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\nu} \right|_{\varphi^t(\theta_*)} \left. \frac{\partial \varphi^{t\nu}}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta_*} (\theta^\mu - \theta_*^\mu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.47)$$

$$= f_\lambda(\varphi^t(\theta_*)) + \left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\nu} \right|_{\varphi^t(\theta_*)} (S^t e^{\Lambda t})_\mu^\nu (\theta^\mu - \theta_*^\mu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.48)$$

En se plaçant à  $t = T$ , l'équation aux valeurs propres  $\mathcal{T}^T f_\lambda(\theta_*) = e^{\lambda T} f_\lambda(\theta_*)$  devient

$$\left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\nu} \right|_{\theta_*} (e^{\Lambda T})_\mu^\nu (\theta^\mu - \theta_*^\mu) = e^{\lambda T} \left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta_*} (\theta^\mu - \theta_*^\mu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.49)$$

car  $f(\varphi^T(\theta_*)) = f(\theta_*) = 0$  à cause de la propriété 7. Ainsi

$$(e^{\Lambda T})^\mathfrak{T} \vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\theta_*} = e^{\lambda T} \vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\theta_*} \quad (9.50)$$

avec  $\mathfrak{T}$  correspondant au signe de transposée.  $\square$

**Propriété 10.** Soit  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  un système dynamique classique. Soit  $A \subset \Gamma$  un tore invariant de dynamique quasi-périodique ou un attracteur du flot et soit  $\theta_* \in A$ . Soit  $\lambda \in \text{Sp}(F^\mu \partial_\mu)$  associée à la fonction propre  $f_\lambda$ . Si  $\text{Re} \lambda < 0$  et  $\vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\theta = \varphi^t(\theta_*)} \neq \vec{0}$  alors  $\vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\theta = \varphi^t(\theta_*)}$  est un vecteur propre gauche de la matrice jacobienne du flot  $\partial\varphi_{\theta_*}^t$  et  $\lambda$  est associée à la valeur propre locale de Lyapunov.

*Démonstration.* En utilisant le développement de Taylor au voisinage de  $\theta_*$  nous avons

$$f_\lambda(\varphi^t(\theta)) = f_\lambda(\varphi^t(\theta_*)) + \left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\nu} \right|_{\varphi^t(\theta_*)} \left. \frac{\partial \varphi^{t\nu}}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta_*} (\theta^\mu - \theta_*^\mu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.51)$$

L'équation aux valeurs propres  $\mathcal{T}^t f_\lambda(\theta_*) = e^{\lambda t} f_\lambda(\theta_*)$  devient

$$\left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\nu} \right|_{\varphi^t(\theta_*)} (\partial\varphi_{\theta_*}^t)_\mu^\nu (\theta^\mu - \theta_*^\mu) = e^{\lambda t} \left. \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta^\mu} \right|_{\varphi^t(\theta_*)} (\theta^\mu - \theta_*^\mu) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (9.52)$$

car pour  $\theta_* \in A$ ,  $\varphi^t(\theta_*) \in A$  et  $f(\varphi^t(\theta_*)) = 0$  par la propriété 7. Il vient que

$$(\partial\varphi_{\theta_*}^t)^\mathfrak{T} \vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\varphi^t(\theta_*)} = e^{\lambda t} \vec{\nabla} f_\lambda \Big|_{\varphi^t(\theta_*)} \quad (9.53)$$

$\square$

### 9.3 Propriétés ergodiques

**Propriété 11.** Soit  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  un système dynamique conservatif

— si le système dynamique est mélangeant (se référer à la définition 12 du chapitre 5) alors  $\forall f, g \in L^2(\Gamma, d\mu)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_\Gamma \overline{g(\theta)} \mathcal{T}^t f(\theta) d\mu(\theta) = \int_\Gamma \overline{g(\theta)} d\mu(\theta) \int_\Gamma f(\theta) d\mu(\theta) \quad (9.54)$$

— si le système dynamique est ergodique (se référer à la définition 10 du chapitre 5) alors  $\forall f \in L^2(\Gamma, d\mu)$  pour  $\mu$ -presque tout  $\theta_0 \in \Gamma$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{T}^t f(\theta_0) dt = \int_\Gamma f(\theta) d\mu(\theta) \quad (9.55)$$

*Démonstration.* voir [30]  $\square$

**Propriété 12.** Soient  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  un système dynamique classique et  $\lambda \in Sp(F^\mu \partial_\mu)$  associée à la fonction propre  $f_\lambda$ . Si  $\varphi^t$  est mélangeant alors

- si  $Re\lambda < 0$  alors  $\int_\Gamma f_\lambda(\theta) d\mu(\theta) = 0$  si  $f_\lambda \in L^2(\Gamma, d\mu)$
- si  $Re\lambda > 0$  alors  $f_\lambda \notin L^2(\Gamma, d\mu)$

*Démonstration.* Soit  $f, g \in L^2(\Gamma, d\mu)$ . Si  $\varphi^t$  est mélangeant alors nous avons d'après [57]

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_\Gamma \overline{g(\theta)} f(\varphi^t(\theta)) d\mu(\theta) = \int_\Gamma \overline{g(\theta)} d\mu(\theta) \int_\Gamma f(\theta) d\mu(\theta) \quad (9.56)$$

En appliquant cette relation avec  $f = g = f_\lambda$  en supposant que  $f_\lambda \in L^2(\Gamma, d\mu)$ , nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda t} \int_\Gamma |f_\lambda(\theta)|^2 d\mu(\theta) = \left| \int_\Gamma f_\lambda(\theta) d\mu(\theta) \right|^2 \quad (9.57)$$

Si  $Re\lambda < 0$  la partie gauche tend vers 0. Si  $Re\lambda > 0$  la partie gauche diverge et alors  $f_\lambda \notin L^1(\Gamma, d\mu)$  et comme nous avons  $L^2(\Gamma, d\mu) \subset L^1(\Gamma, d\mu)$  (nous rappelons que  $\mu(\Gamma) = 1$ ) ceci contredit l'hypothèse.  $\square$

**Théorème 8.** Soit  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  un système dynamique classique conservatif. Si  $Sp(F^\mu \partial_\mu) \setminus \{0\}$  est le spectre absolument continu (le spectre de pur point étant réduit à  $\{0\}$ ) alors  $\varphi^t$  est mélangeant.

*Démonstration.* voir [50]  $\square$

**Propriété 13.** Soient  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  un système dynamique classique conservatif,  $\varphi^t$  est ergodique si et seulement si toutes les valeurs propres de  $F^\mu \partial_\mu$  sont non-dégénérées et les fonctions propres sont de module 1. En particulier, la seule fonction propre associée à  $0 \in Sp(F^\mu \partial_\mu)$  est  $f_0(\theta) = 1$

*Démonstration.* voir [30]  $\square$

**Propriété 14.** Soit  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  un système dynamique classique conservatif mélangeant tel que  $Sp(F^\mu \partial_\mu) \setminus \{0\}$  est continu.  $\forall \lambda \in Sp(F^\mu \partial_\mu) \setminus \{0\}$  nous avons

$$\int_\Gamma f_\lambda(\theta) d\mu(\theta) = 0 \quad (9.58)$$

*Démonstration.* Comme le système dynamique est mélangeant et donc ergodique,  $f_\lambda$  est de module 1 et donc  $f_\lambda \in L^2(\Gamma, d\mu)$ . Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\lambda - \delta\lambda}^{\lambda + \delta\lambda} \int_\Gamma \overline{f_\lambda(\theta)} f_\lambda(\varphi^t(\theta)) d\mu(\theta) d\lambda = \int_{\lambda - \delta\lambda}^{\lambda + \delta\lambda} \left| \int_\Gamma f_\lambda(\theta) d\mu(\theta) \right|^2 d\lambda \quad (9.59)$$

où  $\delta\lambda$  est tel que  $0 \notin [\lambda - \delta\lambda, \lambda + \delta\lambda]$  (avec  $\delta\lambda \in \mathbb{R}$ ). Mais

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\lambda - \delta\lambda}^{\lambda + \delta\lambda} \int_\Gamma \overline{f_\lambda(\theta)} f_\lambda(\varphi^t(\theta)) d\mu(\theta) d\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\lambda - \delta\lambda}^{\lambda + \delta\lambda} e^{\lambda t} \int_\Gamma |f_\lambda(\theta)|^2 d\mu(\theta) d\lambda \quad (9.60)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\lambda - \delta\lambda}^{\lambda + \delta\lambda} e^{\lambda t} d\lambda \quad (9.61)$$

car  $|f_\lambda(\theta)|^2 = 1$ . On a un système conservatif donc le générateur de Koopman est anti-autoadjoint et les valeurs propres spectrales sont imaginaires pures ( $\lambda \in i\mathbb{R}^*$ ). Nous avons donc si  $f_\lambda$  est continu en  $\lambda$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\lambda - \delta\lambda}^{\lambda + \delta\lambda} e^{\lambda t} d\lambda = 0 \quad (9.62)$$

Ainsi

$$\int_{\lambda - \delta\lambda}^{\lambda + \delta\lambda} \left| \int_\Gamma f_\lambda(\theta) d\mu(\theta) \right|^2 d\lambda = 0 \quad (9.63)$$

$$\Rightarrow \left| \int_\Gamma f_\lambda(\theta) d\mu(\theta) \right|^2 = 0 \quad (9.64)$$

$\square$

## 9.4 Résumé sur le spectre de Koopman

Dans cette section nous résumons les différentes composantes attendues dans le spectre de Koopman et les propriétés des fonctions propres associées.

- $0 \in \text{Sp}_d(F^\mu \partial_\mu)$ .  
 $f_0(\theta)|_E = \text{constante} \forall E \subset \Gamma$  tel que  $\varphi^t(E) = E$  et  $\varphi^t|_E$  est ergodique. Au minimum  $f_0(\theta) = 1$  est une des fonctions propres associées à 0.
- Tous les  $\lambda \in i\mathbb{R}^* \cap \text{Sp}_d(F^\mu \partial_\mu)$  exposants de Lyapunov locaux de chaque point fixe  $\theta_*$ .  
 $f_\lambda(\theta_*) = 0$  et  $\vec{\nabla} f_\lambda|_{\theta_*}$  est la direction propre locale gauche.
- Tous les  $\lambda \in (i\mathbb{R} \setminus \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}) \cap \text{Sp}_d(F^\mu \partial_\mu)$  exposants de Lyapunov locaux de chaque cycle  $\mathcal{C}$ .  
 $f_\lambda(\theta_*) = 0$  et  $\vec{\nabla} f_\lambda|_{\theta_*}$  est la direction propre locale gauche  $\forall \theta_* \in \mathcal{C}$ .
- Tous les  $\lambda \in \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z} \subset \text{Sp}_d(F^\mu \partial_\mu)$  fréquences de chaque cycle  $\mathcal{C}$  de période  $T$ .  
 $f_\lambda(\theta_*) \neq 0, \forall \theta_* \in \mathcal{C}$ .
- Tous les  $\lambda \in i\mathbb{R}^* \cap \text{Sp}_d(F^\mu \partial_\mu)$  fréquences de chaque tore invariant  $A$ .  
 $f_\lambda(\theta_*) \neq 0, \forall \theta_* \in A$ .
- Des  $\lambda \in i\mathbb{R}^* \cap \text{Sp}(F^\mu \partial_\mu)$  sans propriété particulière.  
 $f_\lambda(\theta_*) = 0, \forall \theta_*$  point fixe ou cyclique et  $\vec{\nabla} f_\lambda|_{\theta_*} = \vec{0}$ .

De plus, si la dynamique est dissipative :

- Tous les  $\lambda \in \mathbb{C}_{\text{Re}<0} \cap \text{Sp}_d(F^\mu \partial_\mu)$  exposants de Lyapunov locaux de chaque point fixe  $\theta_*$ .  
 $f_\lambda(\theta_*) = 0$  et  $\vec{\nabla} f_\lambda|_{\theta_*}$  est une direction propre locale gauche.
- Tous les  $\lambda \in \mathbb{C}_{\text{Re}<0} \cap \text{Sp}_d(F^\mu \partial_\mu)$  exposants de Lyapunov locaux de chaque cycle  $\mathcal{C}$ .  
 $f_\lambda(\theta_*) = 0$  et  $\vec{\nabla} f_\lambda|_{\theta_*}$  est une direction propre locale gauche  $\forall \theta_* \in \mathcal{C}$ .
- Tous les  $\lambda \in \mathbb{C}_{\text{Re}<0} \cap \text{Sp}_d(F^\mu \partial_\mu)$  exposants de Lyapunov locaux de chaque tore invariant ou attracteur  $A$ .  
 $f_\lambda(\theta_*) = 0$  et  $\vec{\nabla} f_\lambda|_{\theta_*}$  est une direction propre locale gauche  $\forall \theta_* \in A$ .
- Tous les  $\lambda \in i\mathbb{R}^* \cap \text{Sp}_{\text{cont}}(F^\mu \partial_\mu)$  pour chaque attracteur étrange  $A$ .  
 $f_\lambda(\theta_*) \neq 0, \forall \theta_* \in A$ .
- Des  $\lambda \in \mathbb{C}_{\text{Re}<0} \cap \text{Sp}(F^\mu \partial_\mu)$  sans propriété particulière.  
 $f_\lambda(\theta_*) = 0, \forall \theta_*$  point fixe ou cyclique et  $\vec{\nabla} f_\lambda|_{\theta_*} = \vec{0}$ .
- Des  $\lambda \in \mathbb{C}_{\text{Re}>0} \cap \text{Sp}(F^\mu \partial_\mu)$  sans propriété particulière.  
 $|f_\lambda(\theta_*)| = +\infty, \forall \theta_*$  point fixe, cyclique, sur un tore invariant ou sur un attracteur.

# Chapitre 10

## Systeme quantique asservi

Dans la partie 9, nous avons determiné une formule empirique de l'horizon de coherence. Le but de ce chapitre est de trouver une formule plus formelle de cet horizon. Pour ce faire, nous allons d'abord développer l'équation de Schrödinger-Koopman, pour ensuite déterminer la forme des quasi-energies associées. Enfin nous nous intéresserons aux systemes quantiques asservis.

### 10.1 L'équation de Schrödinger-Koopman

**Définition 18.** *Systeme quantique asservi continu en temps*

Un systeme quantique continu en temps asservi par un systeme dynamique classique est défini par le quintuplet  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  où  $(\Gamma, \mu, \varphi^t)$  est un systeme dynamique classique,  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert d'états quantiques et  $\Gamma \ni \theta \mapsto H(\theta) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est une famille d'hamiltoniens auto-adjoints fortement continue par rapport à  $\theta$ . La dynamique du systeme quantique asservi est gouvernée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt} = H(\varphi^t(\theta_0))\tilde{\psi}(t) \quad (10.1)$$

avec  $\tilde{\psi}(t=0) = \tilde{\psi}_0 \in \mathcal{H}$  la condition initiale pour le systeme quantique,  $\theta_0 \in \Gamma$  étant la condition initiale pour le systeme classique.

Dans cette section, nous utiliserons seulement des systemes quantiques de dimension finie,  $\dim \mathcal{H} < +\infty$ . Nous considererons  $H(t) = H_0 + H_{ctrl}(\theta)$  avec  $H_0$  l'hamiltonien d'un systeme quantique isolé independant de  $\theta$  et  $H_{ctrl}(\theta)$  l'hamiltonien de contrôle. Il represente l'action d'un systeme de contrôle classique sur le systeme quantique avec éventuellement du bruit (chaotique) se superposant au contrôle. Nous sommes donc dans une situation analogue à celle des chapitres 6 et 7.

**Définition 19.** *Etats mixtes*

Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un systeme quantique asservi,  $\tilde{\psi}_0 \in \mathcal{H}$  un état quantique et  $\rho_0 \in L^1(\Gamma, d\mu)$  une densité de  $\Gamma$  ( $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\int_{\Gamma} \rho_0(\theta) d\mu(\theta) = 1$ ). L'état mixte associé avec les états quantique et statistique initiaux  $(\tilde{\psi}_0, \rho_0)$  est la matrice densité

$$\rho(t) = \int_{\Gamma} |\tilde{\psi}(t, \theta)\rangle \langle \tilde{\psi}(t, \theta)| \rho_0(\theta) d\mu(\theta) \quad (10.2)$$

où  $\tilde{\psi}(t, \theta) \in \mathcal{H}$  est solution de l'équation de Schrödinger  $i\hbar \frac{d\tilde{\psi}(t, \theta)}{dt} = H(\varphi^t(\theta))\tilde{\psi}(t, \theta)$  avec  $\tilde{\psi}(0, \theta) = \tilde{\psi}_0$ .

Un systeme quantique presente des états mixtes lorsque la coherence chute. Cette formule est analogue à la formule 1.10 :  $\rho_{tot}^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \rho_n^{(i)}$  pour un  $N$  très grand (avec des spins découplés pour lesquels  $\rho_n^{(i)}$  est un état pur). Il s'agit d'une moyenne sur toutes les conditions initiales des systemes dynamiques classiques (bruit).

**Définition 20.** *Hamiltonien de Koopman*

Soit  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un systeme quantique asservi et soit  $\mathcal{K} = L^2(\Gamma, d\mu) \otimes \mathcal{H}$  l'espace de Hilbert étendu.

Nous appelons l'hamiltonien de Koopman d'un système quantique asservi l'opérateur  $H_K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  défini par

$$H_K = -i\hbar F^\mu(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} \otimes I_{\mathcal{H}} + H(\theta) \quad (10.3)$$

où  $F^\mu \partial_\mu$  est le générateur de Koopman.

**Théorème 9.** Soit  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi. Soit  $t \mapsto \psi(t) \in \mathcal{K} = L^2(\Gamma, d\mu) \otimes \mathcal{H}$  une solution de l'équation de Schrödinger Koopman

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial t} = H_K \psi(\theta, t) \quad (10.4)$$

où  $H_K$  est l'hamiltonien de Koopman. Alors  $\tilde{\psi}(t, \theta_0) = \psi(\varphi^t(\theta_0), t)$  est une solution de l'équation de Schrödinger usuelle.

*Démonstration.* On a

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial t} = -i\hbar F^\mu(\theta) \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial \theta^\mu} + H(\theta) \psi(\theta, t) \quad (10.5)$$

Il vient que

$$i\hbar \frac{d\tilde{\psi}(t, \theta_0)}{dt} = i\hbar \frac{d\psi(\varphi^t(\theta_0), t)}{dt} \quad (10.6)$$

$$= i\hbar \left. \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial t} \right|_{\theta=\varphi^t(\theta_0)} + i\hbar F^\mu(\theta) \left. \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial \theta^\mu} \right|_{\theta=\varphi^t(\theta_0)} \quad (10.7)$$

$$= H(\theta) \psi(\theta, t)|_{\theta=\varphi^t(\theta_0)} \quad (10.8)$$

$$= H(\varphi^t(\theta_0)) \tilde{\psi}(t, \theta_0) \quad (10.9)$$

□

Ce théorème montre que nous pouvons obtenir la dynamique individuelle d'un spin  $\tilde{\psi}(t, \theta_0)$  (de condition initiale  $\theta_0$ ) à partir de la dynamique globale de Schrödinger-Koopman  $\psi(\theta, t)$  (fonction d'onde délocalisée sur tout l'espace de phase  $\Gamma$ ).

**Définition 21.** Opérateur d'évolution de Koopman

Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi et  $H_K \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$  son hamiltonien de Koopman. L'opérateur d'évolution de Koopman d'un système quantique asservi est

$$U_K(t, 0) = e^{-i\hbar^{-1} H_K t} \quad (10.10)$$

$\psi(t) = U_K(t, 0)\psi(0) \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_K \psi(t)$  avec  $\psi \in \mathcal{K}$ . Si le système dynamique est conservatif, alors  $H_K$  est auto-adjoint et  $U_K$  est unitaire.

**Propriété 15.** Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi conservatif,  $U_K(t, 0) \in \mathcal{U}(\mathcal{K})$  son opérateur d'évolution de Koopman,  $\mathcal{T}^t \in \mathcal{U}(L^2(\Gamma, d\mu))$  l'opérateur de Koopman du système classique et  $U(t, 0; \theta) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  l'opérateur d'évolution du système quantique, i.e. la solution fortement continue de l'équation

$$i\hbar \frac{dU(t, 0; \theta)}{dt} = H(\varphi^t(\theta))U(t, 0; \theta) \quad (10.11)$$

avec  $U(0, 0; \theta) = I_{\mathcal{H}}$ . Les trois opérateurs sont reliés par

$$U_K(t, 0) = \mathcal{T}^{-t} U(t, 0; \theta) = U(t, 0; \varphi^{-t}(\theta)) \mathcal{T}^{-t} \quad (10.12)$$

*Démonstration.* Voir [84] □

**Propriété 16.** Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi conservatif et  $\rho(t)$  son état mixte pour les conditions initiales  $(\tilde{\psi}_0, \rho_0) \in \mathcal{H} \times L^1(\Gamma, d\mu)$  (voir définition 19). Soit  $\Psi(\theta, t) = U_K(t, 0) \sqrt{\rho_0(\theta)} \tilde{\psi}_0 \in \mathcal{K}$ . Nous avons

$$\rho(t) = \text{tr}_{L^2(\Gamma, d\mu)} |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| \quad (10.13)$$

ou  $|\langle \cdot | \cdot \rangle|$  correspond au produit scalaire dans  $\mathcal{K}$ .

*Démonstration.* D'après l'équation 10.12,

$$\Psi(\theta, t) = \mathcal{T}^{-t} \sqrt{\rho_0(t)} U(t, 0; \theta) \tilde{\psi}_0 \quad (10.14)$$

Comme  $U(t, 0; \theta) \tilde{\psi}_0 = \tilde{\psi}(t, \theta)$ , avec  $\tilde{\psi}(t, \theta)$  la solution de l'équation de Schrödinger usuelle, nous avons

$$\Psi(\theta, t) = \mathcal{T}^{-t} \sqrt{\rho_0(t)} \tilde{\psi}(t, \theta) \quad (10.15)$$

$$= \sqrt{\rho_0(\varphi^{-t}(\theta))} \tilde{\psi}(t, \varphi^{-t}(\theta)) \quad (10.16)$$

$$\text{tr}_{L^2(\Gamma, d\mu)} |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| = \int_{\Gamma} \langle \theta | \Psi(t)\rangle\langle\Psi(t) | \theta \rangle d\mu(\theta) \quad (10.17)$$

$$= \int_{\Gamma} |\Psi(\theta, t)\rangle\langle\Psi(\theta, t)| d\mu(\theta) \quad (10.18)$$

$$= \int_{\Gamma} |\tilde{\psi}(t, \varphi^{-t}(\theta))\rangle\langle\tilde{\psi}(t, \varphi^{-t}(\theta))| \rho_0(\varphi^{-t}(\theta)) d\mu(\theta) \quad (10.19)$$

$$= \int_{\varphi^{-t}(\Gamma)} |\psi(t, \theta)\rangle\langle\psi(t, \theta)| \rho_0(\theta) |\det(\partial\varphi_{\theta}^t)| \rho_{\mu}(\varphi^t(\theta)) d\theta^1 \dots d\theta^n \quad (10.20)$$

où  $\rho_{\mu}$  est la densité de la mesure. Mais comme le flot préserve la mesure, d'après les équations 9.8 et 9.9, nous avons  $|\det(\partial\varphi_{\theta}^t)| \rho_{\mu}(\varphi^t(\theta)) d\theta^1 \dots d\theta^n = d\mu(\theta)$  et la fermeture topologique de  $\varphi^{-t}(\Gamma)$  correspond à tout  $\Gamma$ . Il vient que

$$\text{tr}_{L^2(\Gamma, d\mu)} |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| = \int_{\Gamma} |\psi(t, \theta)\rangle\langle\psi(t, \theta)| \rho_0(\theta) d\mu(\theta) = \rho(t) \quad (10.21)$$

□

L'état mixte se trouve être la trace partielle d'un état pur de l'espace de Hilbert élargi  $\mathcal{K}$ . Ainsi  $L^2(\Gamma, d\mu)$  joue le rôle d'un environnement classique induisant décohérence et relaxation sur le système dynamique quantique. Ainsi nous sommes en présence d'un système bipartite. Par analogie avec ce que nous avons vu dans le chapitre 2, l'environnement représente  $\mathcal{E}$  et le système dynamique quantique  $\mathcal{S}$ .

## 10.2 Le spectre de quasi-énergies

### 10.2.1 L'équation des quasi-énergies

**Définition 22.** Soit  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi. Nous appelons quasi-énergies, les valeurs propres de l'hamiltonien de Koopman

$$\left( -i\hbar F^{\mu}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^{\mu}} + H(\theta) \right) |a, \theta\rangle = \chi_a |a, \theta\rangle \quad (10.22)$$

Un exemple intéressant est lorsque  $\theta = (q, p)$  avec l'hamiltonien classique  $\mathcal{H} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ . Dans ce cas nous avons

$$H_K = i\hbar \{ \mathcal{H}, \cdot \} + H(\theta) \quad (10.23)$$

L'hamiltonien de Koopman se trouve alors être une somme de deux Hamiltoniens : le premier est une version quantifiée (non canonique) de l'Hamiltonien classique et le second est l'Hamiltonien quantique. Ainsi les quasi-énergies seront une composition des énergies classiques et quantiques. Au cours de cette thèse, nous souhaitons connaître la transmission d'information de l'environnement vers le système. L'environnement se trouve être classique et le système quantique. Connaître des quasi-énergies exhibant les deux domaines pourraient donner les informations nécessaires à cette étude.

Nous allons maintenant étudier la structure du spectre de quasi-énergie et les propriétés des états associés.

**Propriété 17.** Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système dynamique asservi conservatif et  $\chi_a \in \text{Sp}(H_K)$  une quasi-énergie associée à l'état propre  $|a, \theta\rangle \in \mathcal{K}$ . Soit  $U(t, 0; \theta) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  l'opérateur d'évolution du système quantique. Nous avons

$$U(t, 0; \theta)|a, \theta\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\chi_a t}|a, \varphi^t(\theta)\rangle \quad (10.24)$$

*Démonstration.*

$$U_K(t, 0) = e^{-i\hbar^{-1}H_K t} \quad (10.25)$$

$$\Rightarrow U_K(t, 0)|a, \theta\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\chi_a t}|a, \theta\rangle \quad (10.26)$$

Mais comme  $U_K(t, 0) = \mathcal{T}^{-t}U(t, 0; \theta)$ ,

$$U(t, 0; \theta)|a, \theta\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\chi_a t}\mathcal{T}^t|a, \theta\rangle \quad (10.27)$$

$$= e^{-i\hbar^{-1}\chi_a t}|a, \varphi^t(\theta)\rangle \quad (10.28)$$

□

**Proposition 9.** Soient  $\chi_a \in \text{Sp}(H_K)$  une quasi-énergie associée à l'état propre  $|a, \theta\rangle \in \mathcal{K}$ , et  $\lambda \in \text{Sp}(F^\mu \partial_\mu)$  une valeur propre de Koopman associée à la fonction propre  $f_\lambda \in L^2(\Gamma, d\mu)$ , alors  $\chi_a + i\hbar\lambda \in \text{Sp}(H_K)$  est une autre quasi-énergie associée à l'état propre  $f_\lambda(\theta)|a, \theta\rangle$ .

Ceci vient directement du fait que le générateur de Koopman est une dérivée du premier ordre. Il vient de cette proposition la décomposition suivante des quasi-énergies

$$\exists \{\tilde{\chi}_i\}_{i=1, \dots, \dim \mathcal{H}} \subset \text{Sp}(H_K), \forall \chi_a \in \text{Sp}(H_K), \exists \lambda \in \text{Sp}(F^\mu \partial_\mu), \exists i \in \{1, \dots, \dim \mathcal{H}\}$$

$$\chi_a = \tilde{\chi}_i - i\hbar\lambda \quad (10.29)$$

Cette équation peut s'expliquer comme suit. Nous savons que si  $\chi_a$  est dans le spectre de  $H_K$ , alors  $\chi_a - i\hbar\lambda$  aussi, quelque soit  $\lambda$  dans le spectre de Koopman. Donc nous choisissons un  $\tilde{\chi}_1$  dans le spectre de  $H_K$  et ensuite nous enlevons tous les  $\tilde{\chi}_1 - i\hbar\lambda$  qui sont engendrés par  $\tilde{\chi}_1$  et les valeurs de Koopman. Ensuite nous choisissons  $\tilde{\chi}_2$  parmi les valeurs propres restantes, puis nous enlevons tous les  $\tilde{\chi}_2 - i\hbar\lambda$ . Et ainsi de suite, jusqu'à  $\tilde{\chi}_{\dim \mathcal{H}}$  car après avoir enlevés tous les  $\tilde{\chi}_{\dim \mathcal{H}} - i\hbar\lambda$  il ne reste plus rien dans le spectre. Nous voyons alors que tout le spectre est engendré comme  $\{\tilde{\chi}_i\}_{i=1, \dots, \dim \mathcal{H}} - i\hbar \text{Sp}(F^\mu \partial_\mu)$ . Nous choisissons donc un plus petit ensemble de valeurs propres qui va permettre de générer toutes les autres à l'aide du spectre de Koopman.

Nous pouvons aussi écrire  $\chi_{\lambda, i} = -i\hbar\lambda + \tilde{\chi}_i$ . De plus nous avons

$$|(\lambda, i), \theta\rangle = f_\lambda(\theta)|Z\mu_i, \theta\rangle \quad (10.30)$$

avec  $H_K|Z\mu_i, \theta\rangle = \tilde{\chi}_i|Z\mu_i, \theta\rangle$ .

Nous considérons que les états de quasi-énergie  $\{|a, \theta\rangle\}_a$  sont normalisés dans  $\mathcal{K}$ , i.e.  $\langle a|a\rangle = 1$ . Nous avons donc aussi

$$\langle\langle Z\mu_i|Z\mu_i\rangle\rangle = 1 \Leftrightarrow \int_\Gamma \langle Z\mu_i, \theta|Z\mu_i, \theta\rangle d\mu(\theta) = 1 \quad (10.31)$$

$$\langle\langle (\lambda, i)|(\lambda, i)\rangle\rangle = 1 \Leftrightarrow \int_\Gamma \langle Z\mu_i, \theta|Z\mu_i, \theta\rangle |f_\lambda(\theta)|^2 d\mu(\theta) = 1 \quad (10.32)$$

Si nous voulions normaliser les  $|Z\mu_i, \theta\rangle$  dans  $\mathcal{H}$ , nous rajouterions une norme dépendant de  $\theta$  ( $N(\theta)$ ) tel que les nouveaux vecteurs soient  $N(\theta)|Z\mu_i, \theta\rangle$ . Mais, comme la norme dépend de  $\theta$ , ce nouveau vecteur propre ne serait pas vecteur propre de  $H_K$ .

$f_\lambda$  n'est pas normalisé dans  $L^2(\Gamma, d\mu)$  mais dans  $L^2(\Gamma, d\zeta_i)$  avec la "mesure propre quantique"  $d\zeta_i(\theta) = \langle Z\mu_i, \theta|Z\mu_i, \theta\rangle d\mu(\theta)$ . De plus nous avons

$$\chi_{\lambda, i} = \langle\langle Z\mu_i|\bar{f}_\lambda H_K f_\lambda|Z\mu_i\rangle\rangle \quad (10.33)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda,i} = \int_{\Gamma} \langle Z_{\mu_i}, \theta | H(\theta) | Z_{\mu_i}, \theta \rangle d\xi_{\lambda}(\theta) - i\hbar \int_{\Gamma} F^{\mu}(\theta) \langle Z_{\mu_i}, \theta | \partial_{\mu} | Z_{\mu_i}, \theta \rangle d\xi_{\lambda}(\theta) \\ - i\hbar \int_{\Gamma} F^{\mu}(\theta) \bar{f}_{\lambda}(\theta) \frac{\partial f_{\lambda}(\theta)}{\partial \theta^{\mu}} d\zeta_i(\theta) \end{aligned} \quad (10.34)$$

avec la "mesure propre classique"  $d\xi_{\lambda}(\theta) = |f_{\lambda}(\theta)|^2 d\mu(\theta)$

**Propriété 18.** Si  $f_{\lambda}$  sont tous de module 1, alors les états de quasi-énergie fondamentaux peuvent être orthonormés dans  $\mathcal{H}$  :  $\langle Z_{\mu_i}(\theta) | Z_{\mu_j}(\theta) \rangle = \delta_{ij}$  pour  $\mu$  presque tout  $\theta$ .

*Démonstration.* Nous supposons que  $|f_{\lambda}(\theta)|^2 = 1$ . Ainsi  $d\xi_{\lambda}(\theta) = d\mu(\theta)$ . Il suit que

$$\int_{\Gamma} \langle Z_{\mu_i}, \theta | H(\theta) | Z_{\mu_i}, \theta \rangle d\xi_{\lambda}(\theta) - i\hbar \int_{\Gamma} F^{\mu}(\theta) \langle Z_{\mu_i}, \theta | \partial_{\mu} | Z_{\mu_i}, \theta \rangle d\xi_{\lambda}(\theta) = \langle\langle Z_{\mu_i} | H_K | Z_{\mu_i} \rangle\rangle \quad (10.35)$$

$$= \tilde{\chi}_i \quad (10.36)$$

D'après l'équation 10.34, on a

$$-i\hbar \int_{\Gamma} F^{\mu}(\theta) \bar{f}_{\lambda}(\theta) \frac{\partial f_{\lambda}(\theta)}{\partial \theta^{\mu}} d\zeta_i(\theta) = \chi_{\lambda,i} - \tilde{\chi}_i \quad (10.37)$$

$$= -i\hbar \lambda \quad (10.38)$$

$$= -i\hbar \langle f_{\lambda}(\theta) | K | f_{\lambda}(\theta) \rangle \quad (10.39)$$

$$= -i\hbar \int_{\Gamma} F^{\mu}(\theta) \bar{f}_{\lambda}(\theta) \frac{\partial f_{\lambda}(\theta)}{\partial \theta^{\mu}} d\mu(\theta) \quad (10.40)$$

On remarque donc que  $d\zeta_i(\theta) = d\mu(\theta)$ . Ceci revient à dire que  $\langle Z_{\mu_i}, \theta | Z_{\mu_i}, \theta \rangle = 1$  pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$ .

Pour  $i \neq j$ ,  $\langle\langle Z_{\mu_i} | \bar{f}_{\lambda} H_K f_{\lambda} | Z_{\mu_j} \rangle\rangle = 0$  car les deux vecteurs propres sont différents. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle Z_{\mu_i}, \theta | H(\theta) | Z_{\mu_j}, \theta \rangle d\mu(\theta) - i\hbar \int_{\Gamma} F^{\mu}(\theta) \langle Z_{\mu_i}, \theta | \partial_{\mu} | Z_{\mu_j}, \theta \rangle d\mu(\theta) \\ - i\hbar \int_{\Gamma} F^{\mu}(\theta) \bar{f}_{\lambda}(\theta) \frac{\partial f_{\lambda}(\theta)}{\partial \theta^{\mu}} \langle Z_{\mu_i}, \theta | Z_{\mu_j}, \theta \rangle d\mu(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (10.41)$$

Mais nous avons

$$\int_{\Gamma} \langle Z_{\mu_i}, \theta | H(\theta) | Z_{\mu_j}, \theta \rangle d\mu(\theta) - i\hbar \int_{\Gamma} F^{\mu}(\theta) \langle Z_{\mu_i}, \theta | \partial_{\mu} | Z_{\mu_j}, \theta \rangle d\mu(\theta) = \langle\langle Z_{\mu_i} | H_K | Z_{\mu_j} \rangle\rangle \quad (10.42)$$

$$= 0 \quad (10.43)$$

D'après ces deux dernières équations,

$$\int_{\Gamma} F^{\mu}(\theta) \bar{f}_{\lambda}(\theta) \frac{\partial f_{\lambda}(\theta)}{\partial \theta^{\mu}} \langle Z_{\mu_i}, \theta | Z_{\mu_j}, \theta \rangle d\mu(\theta) = 0 \quad (10.44)$$

$$\Rightarrow \langle Z_{\mu_i}, \theta | Z_{\mu_j}, \theta \rangle = 0 \quad (10.45)$$

pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  □

**Propriété 19.** Soit  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi conservatif.

- Soit  $\theta_* \in \Gamma$  un point fixe de  $\varphi^t$ . On peut choisir comme ensemble de quasi-énergies fondamentales  $\{\tilde{\chi}_i\}_{i=1, \dots, \dim \mathcal{H}} = Sp(H(\theta_*))$ . De plus  $|Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle$  est le vecteur propre de  $H(\theta_*)$  associé à  $\tilde{\chi}_i$ .
- Soit  $\theta_* \in \Gamma$  un point cyclique de  $\varphi^t$ . On peut choisir comme quasi-énergies fondamentales l'ensemble  $\{\tilde{\chi}_i\}_{i=1, \dots, \dim \mathcal{H}} = Sp(M_{\theta_*})$  où  $M_{\theta_*}$  est la matrice de monodromie de l'équation de Schrödinger. De plus  $|Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle$  est le vecteur propre de  $M_{\theta_*}$  associé à  $\tilde{\chi}_i$

*Démonstration.* En utilisant la décomposition de l'équation 10.24, nous avons

$$U(t, 0; \theta) f_\lambda(\theta) |Z\mu_i, \theta\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\chi_{\lambda, it}} f_\lambda(\varphi^t(\theta)) |Z\mu_i, \varphi^t(\theta)\rangle \quad (10.46)$$

$$= e^{-\lambda t} e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} e^{\lambda t} f_\lambda(\theta) |Z\mu_i, \varphi^t(\theta)\rangle \quad (10.47)$$

$$= e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} f_\lambda(\theta) |Z\mu_i, \varphi^t(\theta)\rangle \quad (10.48)$$

Soit  $\theta_*$  un point fixe, alors  $\varphi^t(\theta_*) = \theta_*$ . De plus, de par la propriété 7  $f_\lambda(\theta_*) = 0$  sauf si  $\lambda = 0$ . Nous nous plaçons dans le cas où  $\lambda = 0$ .

$$U(t, 0; \theta_*) |Z\mu_i, \theta_*\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} |Z\mu_i, \theta_*\rangle \quad (10.49)$$

Mais

$$U(t, 0; \theta) = \mathbb{T} \overleftarrow{e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t H(\varphi^t(\theta)) dt}} \quad (10.50)$$

Et comme  $\theta_*$  est un point fixe nous pouvons traiter la dynamique comme un Hamiltonien non dépendant du temps :

$$U(t, 0; \theta_*) = e^{-i\hbar^{-1}H(\theta_*)t} \quad (10.51)$$

De plus

$$e^{-i\hbar^{-1}H(\theta_*)t} |Z\mu_i, \theta_*\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} |Z\mu_i, \theta_*\rangle \quad (10.52)$$

Nous trouvons alors l'équation aux valeurs propres

$$H(\theta_*) |Z\mu_i, \theta_*\rangle = \tilde{\chi}_i |Z\mu_i, \theta_*\rangle \quad (10.53)$$

Soit  $\theta_*$  un point cyclique, alors  $\varphi^T(\theta_*) = \theta_*$ . De part la propriété 7,  $f_\lambda(\theta_*) = 0$  sauf si  $\lambda \in \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$ . Nous nous plaçons dans cette dernière condition. Alors

$$U(T, 0, \theta_*) |Z\mu_i, \theta_*\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i T} |Z\mu_i, \theta_*\rangle \quad (10.54)$$

Comme nous sommes dans le cas d'un point cyclique, nous ne pouvons pas utiliser la dynamique d'un Hamiltonien indépendant du temps. Nous utilisons le théorème de Floquet [66, 99] qui stipule que

$$U(t, 0; \theta_*) = Z(t, 0; \theta_*) e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_*}t} \quad (10.55)$$

avec  $Z(t+T, 0; \theta_*) = Z_{\theta_*}(t, 0)$ . Ainsi

$$e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_*}T} |Z\mu_i, \theta_*\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i T} |Z\mu_i, \theta_*\rangle \quad (10.56)$$

Nous obtenons donc l'équation aux valeurs propres

$$M_{\theta_*} |Z\mu_i, \theta_*\rangle = \tilde{\chi}_i |Z\mu_i, \theta_*\rangle \quad (10.57)$$

□

Nous venons de déterminer des équations aux valeurs propres dans lesquelles apparaissent les états de quasi-énergies. Ces états sont choisis relativement à un point fixe ou un point cyclique. Dans ce qui suit nous étudions ce qu'ils deviennent lorsque nous changeons de point de référence.

**Propriété 20.** Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi conservatif, et  $\theta_{1*}$  et  $\theta_{2*}$  deux points fixes de  $\varphi^t$ . Soient  $\{\tilde{\chi}_{i1}\}_i$  les valeurs propres de  $H(\theta_{1*})$  et  $\{\tilde{\chi}_{i2}\}_i$  les valeurs propres de  $H(\theta_{2*})$ . Soient  $\{|Z\mu_{i1}, \theta\rangle\}_i$  les états de quasi-énergie fondamentaux associés au point fixe  $\theta_{1*}$  et  $\{|Z\mu_{i2}, \theta\rangle\}_i$  les états de quasi-énergie fondamentaux associés au point fixe  $\theta_{2*}$ . Si  $\tilde{\chi}_{i2} \in Sp(H(\theta_{1*}))$  alors  $\exists j \in \{1, \dots, \dim \mathcal{H}\}$  tel que  $|Z\mu_{j1}, \theta\rangle = |Z\mu_{i2}, \theta\rangle$ , sinon  $|Z\mu_{i2}, \theta_{1*}\rangle = 0$

*Démonstration.* On a

$$(-i\hbar F^\mu(\theta)\partial_\mu + H(\theta))|Z_{\mu_{i2}}, \theta\rangle = \tilde{\chi}_{i2}|Z_{\mu_{i2}}, \theta\rangle \quad (10.58)$$

Nous obtenons l'équation aux valeurs propres suivantes

$$\Rightarrow H(\theta_{1*})|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle = \tilde{\chi}_{i2}|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle \quad (10.59)$$

car  $F^\mu(\theta_{1*}) = 0$  comme  $\theta_{1*}$  est un point fixe. Il suit que  $|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle$  est un vecteur propre de  $H(\theta_{1*})$  avec la valeur propre  $\tilde{\chi}_{i2}$  sauf si  $|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle = 0$ .  $\square$

**Propriété 21.** Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi conservatif, et  $\theta_{1*}$  et  $\theta_{2*}$  deux points cycliques de  $\varphi^t$ . Soient  $\{\tilde{\chi}_{i1}\}_i$  les valeurs propres de  $M_{\theta_{1*}}$  et  $\{\tilde{\chi}_{i2}\}_i$  les valeurs propres de  $M_{\theta_{2*}}$ . Soient  $\{|Z_{\mu_{i1}}, \theta\rangle\}_i$  les états de quasi-énergie fondamentaux associés au point cyclique  $\theta_{1*}$  et  $\{|Z_{\mu_{i2}}, \theta\rangle\}_i$  les états de quasi-énergies fondamentaux associés au point cyclique  $\theta_{2*}$ . Si  $\theta_{1*}$  et  $\theta_{2*}$  appartiennent à deux cycles différents de périodes  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $\frac{T_2}{T_1} \in \mathbb{Q}$ , alors si  $\tilde{\chi}_{i2} \in \text{Sp}(M_{\theta_{1*}}) + \frac{2\pi\hbar}{T_1}\mathbb{Z}$  alors  $\exists j \in \{1, \dots, \dim\mathcal{H}\}$  tel que  $|Z_{\mu_{j1}}, \theta\rangle = |Z_{\mu_{i2}}, \theta\rangle$  sinon  $|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle = 0$ . Si  $\theta_{1*}$  et  $\theta_{2*}$  appartiennent au même cycle de période  $T$ , alors  $\tilde{\chi}_{i2} \in \text{Sp}(M_{\theta_{1*}}) + \frac{2\pi\hbar}{T-t_2}\mathbb{Z}$  (où  $\varphi^{t_2}(\theta_{1*}) = \theta_{2*}$ ) et  $\exists j \in \{1, \dots, \dim\mathcal{H}\}$  tel que  $|Z_{\mu_{j1}}, \theta\rangle = |Z_{\mu_{i2}}, \theta\rangle$ .

*Démonstration.* Soient  $\theta_{1*}$  et  $\theta_{2*}$  appartenant à deux cycles différents avec  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . En utilisant la théorème de Floquet [37, 66, 99]

$$U(qT_2, 0; \theta)|Z_{\mu_{i2}}, \theta\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_{i2}qT_2}|Z_{\mu_{i2}}, \varphi^{qT_2}(\theta)\rangle \quad (10.60)$$

$$\Rightarrow Z(qT_2, 0; \theta_{1*})e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_{1*}}qT_2}|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_{i2}qT_2}|Z_{\mu_{i2}}, \varphi^{qT_2}(\theta_{1*})\rangle \quad (10.61)$$

Comme  $qT_2 = pT_1$ , nous avons  $Z(qT_2, 0; \theta_{1*}) = Z(pT_1, 0; \theta_{1*}) = I_{\mathcal{H}}$  et  $\varphi^{qT_2}(\theta_{1*}) = \varphi^{pT_1}(\theta_{1*}) = \theta_{1*}$ . Nous avons alors

$$e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_{1*}}pT_1}|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_{i2}pT_1}|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle \quad (10.62)$$

$|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle$  est alors vecteur propre de  $M_{\theta_{1*}}$  avec pour valeur propre  $\tilde{\chi}_{i2} \bmod \frac{2\pi\hbar}{T_1}$  sauf si  $|Z_{\mu_{i2}}, \theta_{1*}\rangle = 0$ .

Si  $\theta_{1*}$  et  $\theta_{2*}$  appartiennent au même cycle, le même argument arrive avec  $p = q = 1$ . De plus,  $\exists t_2 < T$  tel que  $\varphi^{t_2}(\theta_{1*}) = \theta_{2*}$ . Il vient que

$$U(T, 0; \theta_{1*}) = U(T, t_2, \theta_{1*})U(t_2, 0; \theta_{1*}) \quad (10.63)$$

$$e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_{1*}}T} = Z(T, t_2, \theta_{1*})e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_{2*}}(T-t_2)}Z(t_2, 0; \theta_{1*})e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_{1*}}t_2} \quad (10.64)$$

$$e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_{1*}}(T-t_2)} = Z(T, t_2, \theta_{1*})e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_{2*}}(T-t_2)}Z(t_2, 0; \theta_{1*}) \quad (10.65)$$

Mais,  $Z(T, t_2, \theta_{1*})Z(t_2, 0; \theta_{1*}) = Z(T, 0; \theta_{1*}) = I_{\mathcal{H}} \Rightarrow Z(T, t_2, \theta_{1*}) = Z(t_2, 0; \theta_{1*})^{-1}$ . Ainsi  $e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_{1*}}(T-t_2)}$  et  $e^{-i\hbar^{-1}M_{\theta_{2*}}(T-t_2)}$  sont similaires et  $\text{Sp}(M_{\theta_{1*}}) = \text{Sp}(M_{\theta_{2*}}) \bmod \frac{2\pi\hbar}{T-t_2}$ .  $\square$

### 10.2.2 Développement local des états de quasi-énergies

Dans cette sous-section, nous voulons connaître le développement local des états de quasi-énergies, autrement dit ce que valent ces états au voisinage du point ou cyclique de référence. Nous utilisons le terme "local" car l'approximation ne sera valide qu'au voisinage d'un point fixe, plus nous nous éloignons de ce point fixe, moins l'approximation peut être utilisée.

**Propriété 22.** Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi conservatif,  $\theta_* \in \Gamma$  un point fixe de  $\varphi^t$ ,  $\{\tilde{\chi}_i\}_i$  les quasi-énergies fondamentales associées à  $\theta_*$  et  $\{|Z_{\mu_i}, \theta\rangle\}_i$  les états de quasi-énergies associés. Soient  $(\vec{e}_a)_a$  les directions propres dans  $\Gamma$  dans le voisinage de  $\theta_*$  et  $\{\underline{\lambda}_a\}_a$  les valeurs propres locales de Lyapunov associées. Nous avons

$$\langle Z_{\mu_j}, \theta | \nabla_{\vec{e}_a} | Z_{\mu_i}, \theta \rangle |_{\theta=\theta_*} = \frac{\langle Z_{\mu_j}, \theta_* | \nabla_{\vec{e}_a} H |_{\theta=\theta_*} | Z_{\mu_i}, \theta_* \rangle}{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar\underline{\lambda}_a} \quad (10.66)$$

*Démonstration.* On sait que

$$U(t, 0; \theta) |Z\mu_i, \theta\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} |Z\mu_i, \varphi^t(\theta)\rangle \quad (10.67)$$

Soit  $\theta = \theta_* + \delta\theta$ . Par un développement de Taylor, nous avons

$$\varphi^t(\theta)^\mu = \theta_*^\mu + (\partial\varphi_{\theta_*}^t)^\mu_\nu \delta\theta^\nu + \mathcal{O}(\|\delta\theta\|^2) \quad (10.68)$$

Le développement de Taylor de l'équation 10.67 donne

$$\begin{aligned} & \left( U(t, 0; \theta_*) + \frac{\partial U}{\partial\theta^\mu} \Big|_{\theta_*} \delta\theta^\mu \right) \left( |Z\mu_i, \theta_*\rangle + \frac{\partial}{\partial\theta^\mu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} \delta\theta^\mu \right) \\ &= e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} \left( |Z\mu_i, \theta_*\rangle + \frac{\partial}{\partial\theta^\mu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} (\partial\varphi_{\theta_*}^t)^\mu_\nu \delta\theta^\nu \right) + \mathcal{O}(\|\delta\theta\|^2) \end{aligned} \quad (10.69)$$

$$\begin{aligned} U(t, 0; \theta_*) \frac{\partial}{\partial\theta^\mu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} \delta\theta^\mu + \frac{\partial U}{\partial\theta^\mu} \Big|_{\theta_*} |Z\mu_i, \theta_*\rangle \delta\theta^\mu \\ = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} \frac{\partial}{\partial\theta^\mu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} (\partial\varphi_{\theta_*}^t)^\mu_\nu \delta\theta^\nu + \mathcal{O}(\|\delta\theta\|^2) \end{aligned} \quad (10.70)$$

Nous projetons chaque membre sur  $\langle Z\mu_j, \theta_* |$

$$e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_j t} \langle Z\mu_j | \frac{\partial}{\partial\theta^\mu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} + \langle Z\mu_j, \theta_* | \frac{\partial U}{\partial\theta^\mu} |Z\mu_i, \theta_*\rangle = e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} \langle Z\mu_j | \frac{\partial}{\partial\theta^\nu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} (\partial\varphi_{\theta_*}^t)^\nu_\mu \quad (10.71)$$

$$\langle Z\mu_j, \theta_* | \frac{\partial U}{\partial\theta^\mu} \Big|_{\theta_*} |Z\mu_i, \theta_*\rangle = \left( e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} (\partial\varphi_{\theta_*}^t)^\nu_\mu - e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_j t} \delta_\mu^\nu \right) \langle Z\mu_j | \frac{\partial}{\partial\theta^\nu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} \quad (10.72)$$

En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle Z\mu_j, \theta_* | i\hbar \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial\theta^\mu} \Big|_{\theta_*} |Z\mu_i, \theta_*\rangle &= \left( \tilde{\chi}_i e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} (\partial\varphi_{\theta_*}^t)^\nu_\mu + i\hbar e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} (\partial\dot{\varphi}_{\theta_*}^t)^\nu_\mu \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\chi}_j e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_j t} \delta_\mu^\nu \right) \langle Z\mu_j | \frac{\partial}{\partial\theta^\nu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} \end{aligned} \quad (10.73)$$

les  $|Z\mu_i\rangle$  ne dépendant pas du temps. Mais

$$i\hbar \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial\theta^\mu} = \frac{\partial}{\partial\theta^\mu} \left( H(\varphi^t(\theta)) U(t, 0; \theta) \right) \quad (10.74)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial\theta^\nu} \Big|_{\varphi^t(\theta)} (\partial\varphi_\theta^t)^\nu_\mu U(t, 0; \theta) + H(\varphi^t(\theta)) \frac{\partial U}{\partial\theta^\mu} \quad (10.75)$$

En utilisant l'équation 10.72,

$$\begin{aligned} \langle Z\mu_j, \theta_* | i\hbar \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial\theta^\mu} \Big|_{\theta_*} |Z\mu_i, \theta_*\rangle &= e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} \langle Z\mu_j, \theta_* | \frac{\partial H}{\partial\theta^\nu} \Big|_{\theta_*} |Z\mu_i, \theta_*\rangle (\partial\varphi_\theta^t)^\nu_\mu \\ &\quad + \tilde{\chi}_j \left( e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_i t} (\partial\varphi_{\theta_*}^t)^\nu_\mu - e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_j t} \delta_\mu^\nu \right) \langle Z\mu_j | \frac{\partial}{\partial\theta^\nu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} \end{aligned} \quad (10.76)$$

Par comparaison avec l'équation 10.73 nous avons

$$\langle Z\mu_j, \theta_* | \frac{\partial H}{\partial\theta^\nu} \Big|_{\theta_*} |Z\mu_i, \theta_*\rangle (\partial\varphi_\theta^t)^\nu_\mu = \left( (\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j) (\partial\varphi_\theta^t)^\nu_\mu + i\hbar (\partial\dot{\varphi}_{\theta_*}^t)^\nu_\mu \right) \langle Z\mu_j | \frac{\partial}{\partial\theta^\nu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} \quad (10.77)$$

Comme  $\dot{\varphi}^t(\theta) = F(\varphi^t(\theta)) \Rightarrow (\partial\dot{\varphi}_\theta^t)^\nu_\mu = (\partial F_{\varphi^t(\theta)})^\nu_\rho (\partial\varphi^t)^\rho_\mu$ . Ainsi

$$\langle Z\mu_j, \theta_* | \frac{\partial H}{\partial\theta^\nu} \Big|_{\theta_*} |Z\mu_i, \theta_*\rangle (\partial\varphi_\theta^t)^\nu_\mu = \left( (\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j) \delta_\rho^\nu + i\hbar (\partial F_{\theta_*})^\nu_\rho \right) (\partial\varphi_\theta^t)^\rho_\mu \langle Z\mu_j | \frac{\partial}{\partial\theta^\nu} |Z\mu_i\rangle \Big|_{\theta_*} \quad (10.78)$$

par définition  $(\partial F_{\theta_*})_\rho^\nu e_a^\rho = \lambda_a e_a^\nu$  et  $(\partial \varphi_{\theta_*}^t)_\mu^\rho e_a^\mu = e^{\lambda_a t} e_a^\rho$

$$\langle Z_{\mu_j}, \theta_* | \frac{\partial H}{\partial \theta^\nu} \Big|_{\theta_*} | Z_{\mu_i}, \theta_* \rangle e^{\lambda_a t} e_a^\nu = (\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar\lambda_a) e^{\lambda_a t} e_a^\nu \langle Z_{\mu_j} | \frac{\partial}{\partial \theta^\nu} | Z_{\mu_i} \rangle \Big|_{\theta_*} \quad (10.79)$$

$$\langle Z_{\mu_j}, \theta_* | \nabla_{\vec{e}_a} H \Big|_{\theta_*} | Z_{\mu_i}, \theta_* \rangle = (\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar\lambda_a) \langle Z_{\mu_j} | \nabla_{\vec{e}_a} | Z_{\mu_i} \rangle \Big|_{\theta_*} \quad (10.80)$$

□

En utilisant cette propriété, nous avons

$$|Z_{\mu_i}, \theta\rangle = |Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle + \sum_a \nabla_{\vec{e}_a} |Z_{\mu_i}\rangle \Big|_{\theta_*} (\vartheta^a - \vartheta_*^a) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (10.81)$$

$$= |Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle + \sum_a \sum_j \frac{\langle Z_{\mu_j}, \theta_* | \nabla_{\vec{e}_a} H \Big|_{\theta_*} | Z_{\mu_i}, \theta_* \rangle}{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar\lambda_a} |Z_{\mu_j}, \theta_*\rangle (\vartheta^a - \vartheta_*^a) + \mathcal{O}(\|\theta - \theta_*\|^2) \quad (10.82)$$

où  $(\vartheta^a)_a$  est le système de coordonnées de  $\Gamma$  au voisinage de  $\theta_*$  dans les directions propres du flot (équation 9.43). Le prolongement de  $|Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle$  n'est pas un vecteur propre de  $H(\theta)$ .  $\frac{\langle Z_{\mu_j}, \theta_* | \nabla_{\vec{e}_a} H \Big|_{\theta_*} | Z_{\mu_i}, \theta_* \rangle}{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar\lambda_a}$  mesure la propension du système dynamique classique à induire une transition de  $|Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle$  à  $|Z_{\mu_j}, \theta_*\rangle$  au voisinage de  $\theta_*$ .  $|\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar\lambda_a|$  est petit si  $Re\lambda_a \approx 0$  ( $Re\lambda_a$  est l'inverse de la durée de vie du flot autour de  $\theta_*$ ) et  $\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j \approx \hbar Im\lambda_a$  (condition de résonance).  $Im\lambda_a$  représente la fréquence de rotation du système dynamique autour du point fixe. Pour qu'il y ait résonance, il faut que la durée de vie de l'état (durée pendant laquelle le système tourne autour du point fixe) soit grande et soit accordée avec la fréquence de transition quantique  $\frac{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j}{\hbar}$ . Si nous avons une résonance de ce type là, il y a une transition de  $|Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle$  vers  $|Z_{\mu_j}, \theta_*\rangle$  à cause du système dynamique. Plus nous sommes loin de la résonance, moins les états se contaminent les uns les autres.

### 10.2.3 Développement global des états de quasi-énergies

Dans la sous-section précédente, nous avons fait un développement local des quasi-énergies. Maintenant, nous nous intéressons à un développement global des quasi-énergies, développement en fonction de l'intensité du couplage entre les vecteurs de quasi-énergies fondamentaux induit par l'Hamiltonien (plus les couplage sont forts, moins l'approximation est juste). Ici le terme "global" est utilisé car l'approximation que nous allons introduire est uniforme sur tout l'espace des phases.

**Propriété 23.** Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi conservatif,  $\theta_* \in \Gamma$  un point fixe de  $\varphi^t$ ,  $\{\tilde{\chi}_i\}_i$  les quasi-énergies fondamentales associées à  $\theta_*$  et  $\{|Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle\}_i$  les états de quasi-énergies associés. Soit  $Sp(F^\mu \partial_\mu) \ni \lambda \mapsto H_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tel que  $H(\theta) = H(\theta_*) + \sum_{\lambda \neq 0} f_\lambda H_\lambda$  ( $H_\lambda = \int_\Gamma f_\lambda(\theta) H(\theta) d\mu(\theta)$  (à cause de la propriété 7,  $f_\lambda(\theta_*) = 0$  pour  $\lambda \neq 0$ )). On suppose que  $\exists \epsilon > 0$  tel que  $|\langle Z_{\mu_i}, \theta_* | H_\lambda | Z_{\mu_j}, \theta_* \rangle| < \epsilon$ ,  $\forall \lambda \neq 0$ . Nous avons alors

$$|Z_{\mu_i}, \theta\rangle = |Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle + \sum_{\lambda \neq 0} \sum_j f_\lambda(\theta) \frac{\langle Z_{\mu_j}, \theta_* | H_\lambda | Z_{\mu_i}, \theta_* \rangle}{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar\lambda} |Z_{\mu_j}, \theta_*\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (10.83)$$

*Démonstration.* Nous posons

$$|Z_{\mu_i}, \theta\rangle = |Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle + \sum_{\lambda \neq 0} f_\lambda(\theta) |\zeta_{i\lambda}\rangle \quad (10.84)$$

avec  $|\zeta_{i\lambda}\rangle \in \mathcal{H}$ . L'équation propre  $(-i\hbar F^\mu \partial_\mu + H(\theta)) |Z_{\mu_i}, \theta\rangle = \tilde{\chi}_i |Z_{\mu_i}, \theta\rangle$  devient

$$\left( -i\hbar F^\mu \partial_\mu + H(\theta_*) + \sum_{\lambda \neq 0} H_\lambda f_\lambda(\theta) \right) \left( |Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle + \sum_{\lambda \neq 0} f_\lambda(\theta) |\zeta_{i\lambda}\rangle \right) = \tilde{\chi}_i \left( |Z_{\mu_i}, \theta_*\rangle + \sum_{\lambda \neq 0} f_\lambda(\theta) |\zeta_{i\lambda}\rangle \right) \quad (10.85)$$

Comme  $f_\lambda$  est vecteur propre de  $F^\mu \partial_\mu$ , alors  $F^\mu \partial_\mu f_\lambda = \lambda f_\lambda$ . Il vient donc que

$$\begin{aligned} -i\hbar \sum_{\lambda \neq 0} \lambda f_\lambda(\theta) |\zeta_{i\lambda}\rangle + \sum_{\lambda \neq 0} f_\lambda(\theta) H(\theta_*) |\zeta_{i\lambda}\rangle + \sum_{\lambda \neq 0} f_\lambda(\theta) H_\lambda |Z\mu_i, \theta_*\rangle + \sum_{\lambda, \nu \neq 0} f_{\lambda+\nu}(\theta) H_\lambda |\zeta_{i\nu}\rangle \\ = \tilde{\chi}_i \sum_{\lambda \neq 0} f_\lambda(\theta) |\zeta_{i\lambda}\rangle \end{aligned} \quad (10.86)$$

$$\sum_{\lambda \neq 0} f_\lambda(\theta) \left( -i\hbar \lambda |\zeta_{i\lambda}\rangle + H(\theta_*) |\zeta_{i\lambda}\rangle + H_\lambda |Z\mu_i, \theta_*\rangle + \sum_{\nu \neq 0, \lambda} H_{\lambda-\nu} |\zeta_{i\nu}\rangle \right) = \tilde{\chi}_i \sum_{\lambda \neq 0} f_\lambda(\theta) |\zeta_{i\lambda}\rangle \quad (10.87)$$

$$(H(\theta_*) - \tilde{\chi}_i - i\hbar \lambda) |\zeta_{i\lambda}\rangle + H_\lambda |Z\mu_i, \theta_*\rangle + \sum_{\nu \neq 0, \lambda} H_{\lambda-\nu} |\zeta_{i\nu}\rangle = 0 \quad (10.88)$$

Comme  $(|Z\mu_i, \theta_*\rangle)_j$  est une base de  $\mathcal{H}$ , nous posons  $|\zeta_{i\lambda}\rangle = \sum_j \zeta_{ij\lambda} |Z\mu_j, \theta_*\rangle$ .

$$\sum_j \zeta_{ij\lambda} (\tilde{\chi}_j - \tilde{\chi}_i - i\hbar \lambda) |Z\mu_j, \theta_*\rangle + H_\lambda |Z\mu_i, \theta_*\rangle + \sum_{\nu \neq 0, \lambda} \sum_j \zeta_{ij\nu} H_{\lambda-\nu} |Z\mu_j, \theta_*\rangle = 0 \quad (10.89)$$

Par projection de cette dernière équation sur  $\langle Z\mu_j, \theta_* |$  nous trouvons

$$\zeta_{ij\lambda} (\tilde{\chi}_j - \tilde{\chi}_i - i\hbar \lambda) + \langle Z\mu_j, \theta_* | H_\lambda | Z\mu_i, \theta_* \rangle + \sum_{\nu \neq 0, \lambda} \sum_k \zeta_{ik\nu} \langle Z\mu_j, \theta_* | H_{\lambda-\nu} | Z\mu_k, \theta_* \rangle = 0 \quad (10.90)$$

$$\zeta_{ij\lambda} = \frac{\langle Z\mu_j, \theta_* | H_\lambda | Z\mu_i, \theta_* \rangle}{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar \lambda} + \sum_{\nu \neq 0, \lambda} \sum_k \zeta_{ik\nu} \frac{\langle Z\mu_j, \theta_* | H_{\lambda-\nu} | Z\mu_k, \theta_* \rangle}{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar \lambda} \quad (10.91)$$

$$= \frac{\langle Z\mu_j, \theta_* | H_\lambda | Z\mu_i, \theta_* \rangle}{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar \lambda} + \sum_{\nu \neq 0, \lambda} \sum_k \frac{\langle Z\mu_k, \theta_* | H_\nu | Z\mu_i, \theta_* \rangle \langle Z\mu_j, \theta_* | H_{\lambda-\nu} | Z\mu_k, \theta_* \rangle}{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_k + i\hbar \nu} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (10.92)$$

□

Si  $F^\mu \partial_\mu$  présente un spectre continu, la formule peut être adaptée comme suit

$$|Z\mu_i, \theta\rangle = |Z\mu_i, \theta_*\rangle + \int \sum_j f_\lambda(\theta) \frac{\langle Z\mu_j, \theta_* | H_\lambda | Z\mu_i, \theta_* \rangle}{\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j + i\hbar \lambda} d\lambda |Z\mu_j, \theta_*\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (10.93)$$

où  $\int g(\lambda) d\lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int^{-\delta} g(\lambda) d\lambda + \int_\delta g(\lambda) d\lambda \right)$ . Nous avons les mêmes commentaires que pour l'expansion locale, avec le phénomène de résonance si  $\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j \approx \hbar \text{Im} \lambda$  ( $\text{Re}(\lambda) = 0$  comme nous considérons un système conservatif, le générateur de Koopman est anti-autoadjoint et donc son spectre est imaginaire pur).

### 10.3 Dynamique de Schrödinger-Koopman

Nous venons de déterminer les équations des quasi-énergies ainsi que leurs développements local et global. Nous pouvons appliquer des stratégies similaires au contrôle adiabatique (chapitre 2) sur les états de quasi-énergies.

**Théorème 10.** Soient  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi conservatif et  $|a, \theta\rangle \in \mathcal{K}$  les états de quasi-énergies normalisés. Soient  $A_a = \langle a, \varphi^t(\theta_0) | \frac{\partial}{\partial t} | a, \varphi^t(\theta_0) \rangle$  le générateur de phase géométrique associé à l'état de quasi-énergie et  $X(t) = F^\mu(\varphi^t(\theta_0)) \partial_\mu$  le champ de vecteurs tangents au flot. Si  $\varphi^t$  est ergodique alors

$$\tilde{\psi}(t) \simeq e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \langle a, \varphi^t(\theta_0) | H(\varphi^t(\theta_0)) | a, \varphi^t(\theta_0) \rangle dt - \int_0^t A_a(t) dt} |a, \varphi^t(\theta_0)\rangle \quad (10.94)$$

avec  $t$  dans le voisinage de  $+\infty$  et  $\tilde{\psi}$  solution de l'équation de Schrödinger pour  $\mu$ -presque toutes les conditions initiales  $(|a, \theta_0\rangle, \theta_0) \in \mathcal{H} \times \Gamma$ .  $e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \langle a, \varphi^t(\theta_0) | H(\varphi^t(\theta_0)) | a, \varphi^t(\theta_0) \rangle dt}$  est la phase dynamique et  $e^{-i \int_0^t A_a(t) dt}$  est la phase géométrique (non-adiabatique) de la dynamique asservie.

*Démonstration.* Soit  $\psi \in \mathcal{K}$  solution de l'équation de Schrödinger-Koopman  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_K \psi$  avec  $\psi(t=0, \theta) = |a, \theta\rangle$ . Nous avons

$$\psi(\theta, t) = U_K(t, 0)|a, \theta\rangle \quad (10.95)$$

$$= e^{-i\hbar^{-1}H_K t}|a, \theta\rangle \quad (10.96)$$

$$= e^{-i\hbar^{-1}\chi_a t}|a, \theta\rangle \quad (10.97)$$

En appliquant le théorème 9, nous avons

$$\tilde{\psi}(t) = e^{-i\hbar^{-1}\chi_a t}|a, \varphi^t(\theta_0)\rangle \quad (10.98)$$

Mais comme  $\chi_a = \langle\langle a|H_K|a\rangle\rangle$  nous avons (avec  $X = F^\mu(\theta)\partial_\mu$ )

$$\chi_a = \int_\Gamma \langle a, \theta|H(\theta)|a, \theta\rangle d\mu(\theta) - i\hbar \int_\Gamma F^\mu(\theta)\langle a, \theta|\partial_\mu|a, \theta\rangle d\mu(\theta) \quad (10.99)$$

$$= \int_\Gamma \langle a, \theta|H(\theta)|a, \theta\rangle d\mu(\theta) - i\hbar \int_\Gamma i_X \hat{A}_a d\mu(\theta) \quad (10.100)$$

avec  $i_X$  le produit intérieur<sup>1</sup> et  $\hat{A} = \langle a, \theta|d|a, \theta\rangle$ .

Le théorème ergodique de Birkoff [57] stipule que pour  $\dot{\theta}(t)^\mu = F^\mu(\theta)$ , si  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  est ergodique alors pour  $\mu$ -presque tout  $\theta_0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle a, \varphi^t(\theta_0)|H(\varphi^t(\theta_0))|a, \varphi^t(\theta_0)\rangle dt = \int_\Gamma \langle a, \theta|H(\theta)|a, \theta\rangle d\mu(\theta) \quad (10.101)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t A_a(t) dt = \int_\Gamma i_X \hat{A}_a d\mu(\theta) \quad (10.102)$$

Ainsi

$$\chi_a \sim \frac{1}{t} \int_0^t \langle a, \varphi^t(\theta_0)|H(\varphi^t(\theta_0))|a, \varphi^t(\theta_0)\rangle dt - \frac{i\hbar}{t} \int_0^t A_a(t) dt \quad (10.103)$$

□

Bien que les quasi-énergies soient définies par des moyennes statistiques sur tout  $\Gamma$  (équation 10.34), le théorème ergodique induit que la fonction d'onde se présente comme une formule de transport usuelle (équation 10.94) similaire au transport adiabatique (équation 2.7) (bien que nous ne sommes pas ici dans des conditions adiabatiques). Nous allons maintenant appliquer cela à l'expression de la matrice densité.

Soit  $\tilde{\psi}_0 \in \mathcal{H}$  avec  $\|\tilde{\psi}_0\| = 1$ . Comme  $(|Z\mu_i, \theta\rangle)_i$  est une base (non-orthonormée) de  $\mathcal{H}$ ,  $\exists c_i(\theta) \in L^2(\Gamma, d\mu)$  tel que  $\tilde{\psi}_0 = \sum_i c_i(\theta)|Z\mu_i, \theta\rangle$ . Par décomposition des  $c_i(\theta)$  sur les fonctions propres de Koopman nous avons  $\tilde{\psi}_0 = \sum_i \sum_\lambda c_{i\lambda} f_\lambda(\theta)|Z\mu_i, \theta\rangle$ . Comme la condition initiale est dans  $\mathcal{H}$ , elle ne dépend pas de  $\theta$  et nous avons  $\psi(\theta, t) = U_K(t, 0)\tilde{\psi}_0$ .

$$\psi(\theta, t) = \sum_i \sum_\lambda c_{i\lambda} e^{-i\hbar^{-1}\chi_{i\lambda} t} f_\lambda(\theta)|Z\mu_i, \theta\rangle \quad (10.104)$$

Ainsi la solution de l'équation de Schrödinger avec les conditions initiales  $(\tilde{\psi}_0, \theta_0)$  est (par le théorème 9)

$$\tilde{\psi}(t, \theta_0) = \sum_i \sum_\lambda c_{i\lambda} e^{-i\hbar^{-1}\chi_{i\lambda} t} f_\lambda(\varphi^t(\theta_0))|Z\mu_i, \varphi^t(\theta_0)\rangle \quad (10.105)$$

$$= \sum_i \sum_\lambda c_{i\lambda} e^{-i\hbar^{-1}\tilde{\chi}_{i\lambda} t} f_\lambda(\theta_0)|Z\mu_i, \varphi^t(\theta_0)\rangle \quad (10.106)$$

$$\sim \sum_i \sum_\lambda c_{i\lambda} e^{-i\hbar^{-1}\delta_i(t) + i\gamma_i(t)} f_\lambda(\theta_0)|Z\mu_i, \varphi^t(\theta_0)\rangle \quad (10.107)$$

1. soit  $M$  une variété alors  $A = A_\mu dx^\mu \in \Omega^1 M$ ,  $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in TM$  (vecteur tangent à  $M$ ) et  $i_V A = V^\mu A_\mu$

Cette dernière égalité est vraie pour un flot ergodique avec un grand  $t$ , la phase dynamique et géométrique étant respectivement  $\delta_i(t) = \int_0^t \langle Z\mu_i, \varphi^t(\theta_0) | H(\varphi^t(\theta_0)) | Z\mu_i, \varphi^t(\theta_0) \rangle dt$  et  $\gamma_i(t) = \int_0^t \tilde{A}_i(t) dt$  (avec  $\tilde{A}_i = \langle Z\mu_i, \varphi^t(\theta_0) | \frac{\partial}{\partial t} | Z\mu_i, \varphi^t(\theta_0) \rangle$ ).

De la même manière, l'état mixte associé aux conditions initiales  $(\tilde{\psi}_0, \rho_0) \in \mathcal{H} \times L^1(\Gamma, d\mu)$  est

$$\rho(t) = \int |\tilde{\psi}(t, \theta)\rangle \langle \tilde{\psi}(t, \theta) | \rho_0(\theta) d\mu(\theta) \quad (10.108)$$

$$\Rightarrow \rho(t) = \sum_{i,j} \sum_{\lambda,\nu} c_{i\lambda} \bar{c}_{j\nu} e^{i\hbar^{-1}(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)t} \int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) |Z\mu_i, \varphi^t(\theta)\rangle \langle Z\mu_j, \varphi^t(\theta) | \rho_0(\theta) d\mu(\theta) \quad (10.109)$$

car dans le cas d'un système conservatif,  $\text{Sp}(F^\mu \partial_\mu) \subset i\mathbb{R}$  et  $\bar{f}_\nu = f_{-\nu}$ . Si  $\text{Sp}(F^\mu \partial_\mu) \setminus \{0\}$  est continu, la formule peut être réécrite comme suit (10.106)

$$\tilde{\psi}(t, \theta_0) = \sum_i e^{-i\hbar^{-1}\tilde{x}_i t} \left( c_{i0} + \int c_{i\lambda} f_\lambda(\theta_0) d\lambda \right) |Z\mu_i, \varphi^t(\theta_0)\rangle \quad (10.110)$$

et

$$\begin{aligned} \rho(t) = \sum_{i,j} e^{i\hbar^{-1}(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)t} & \left( c_{i0} \bar{c}_{j0} \int_{\Gamma} |Z\mu_i, \varphi^t(\theta)\rangle \langle Z\mu_j, \varphi^t(\theta) | \rho_0(\theta) d\mu(\theta) \right. \\ & + c_{i0} \int \bar{c}_{j\nu} \int_{\Gamma} f_{-\nu} |Z\mu_i, \varphi^t(\theta)\rangle \langle Z\mu_j, \varphi^t(\theta) | \rho_0(\theta) d\mu(\theta) d\nu \\ & + \bar{c}_{j0} \int c_{i\lambda} \int_{\Gamma} f_\lambda(\theta) |Z\mu_i, \varphi^t(\theta)\rangle \langle Z\mu_j, \varphi^t(\theta) | \rho_0(\theta) d\mu(\theta) d\lambda \\ & \left. + \iint c_{i\lambda} \bar{c}_{j\nu} \int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) |Z\mu_i, \varphi^t(\theta)\rangle \langle Z\mu_j, \varphi^t(\theta) | \rho_0(\theta) d\mu(\theta) d\lambda d\nu \right) \quad (10.111) \end{aligned}$$

La formule pour  $\rho$  est relativement complexe, nous pouvons nous demander si en utilisant la propriété 16 et une approche similaire au chapitre 2, nous ne pourrions pas la reformuler ou l'approcher à l'aide de phases géométriques à valeurs opérateurs. Nous n'avons pas eu le temps d'étudier cette question. Avant de conclure, nous présentons ici une conjecture sur la façon dont le formalisme de Schrödinger-Koopman peut être utilisé pour formaliser les résultats observés dans les expériences.

**Conjecture 1.** Soit  $(\Gamma, \mu, \varphi^t, \mathcal{H}, H)$  un système quantique asservi conservatif avec  $\dim \mathcal{H} = 2$  (spin) et  $\mu$  la mesure microcanonique. Soit  $D_0 \subset \Gamma$  un ensemble connexe. Nous considérons les conditions initiales  $(\tilde{\psi}_0, \frac{\mathbb{I}_{D_0}}{\mu(D_0)}) \in \mathcal{H} \times L^1(\Gamma, d\mu)$  où  $\mathbb{I}_{D_0}$  est la fonction caractéristique de  $D_0$ , et  $\rho(t)$  l'état mixte associé. Soient  $\{|Z\mu_i, \theta\rangle\}_{i=1,\dots,m}$  un ensemble fondamental d'états de quasi-énergie.  $\forall A \subset \Gamma$  ensemble mesurable connexe, nous appelons diamètre de  $A$  la quantité  $\angle A = \max_{i \in \{1,\dots,m\}} \sup_{\theta_1, \theta_2 \in A} \text{dist}(|Z\mu_i, \theta_1\rangle, |Z\mu_i, \theta_2\rangle)$  la distance étant au sens de la sphère de Bloch représentant les états de spins (distance sur la surface de la sphère). Nous supposons que  $\angle \Gamma \gg \pi$

— Si  $(\Gamma, \mu, \varphi^t)$  est mélangeant alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = \frac{I_{\mathcal{H}}}{2} \quad (10.112)$$

— Si  $(\Gamma, \mu, \varphi^t)$  est chaotique avec l'exposant de Lyapunov asymptotique

$$\lambda = \sup_{\theta \in D_0} \sup_{\|\tilde{u}\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\nabla_{\tilde{u}} \varphi^t(\theta)\| > 0 \quad (10.113)$$

alors

$$\rho(t) = |\tilde{\psi}(t, \theta_0)\rangle \langle \tilde{\psi}(t, \theta_0) | + \mathcal{O}(e^{\lambda t} \angle D_0) \quad (10.114)$$

où  $\tilde{\psi}(t, \theta_0)$  est solution de l'équation de Schrödinger pour les conditions  $(\tilde{\psi}_0, \theta_0) \in \mathcal{H} \times D_0$

Idée justifiant cette conjecture :

De l'équation 10.109 et en utilisant le fait que le système dynamique préserve la mesure ( $\overline{\varphi^t}(\Gamma) = \Gamma$  et  $|\det(\partial\varphi_\theta^t)|\rho_\mu(\varphi^t(\theta))d\theta^1\dots d\theta^n = \rho_\mu(\theta)d\theta^1\dots d\theta^n = d\mu(\theta)$ ) nous avons

$$\rho(t) = \sum_{i,j} \int \int c_{i\lambda} \bar{c}_{j\nu} e^{ih^{-1}(\bar{x}_j - \bar{x}_i)t} \int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\varphi^{-t}(\theta)) |Z\mu_i, \theta\rangle \langle Z\mu_j, \theta| \frac{\mathbb{I}_{D_0}(\varphi^{-t}(\theta))}{\mu(D_0)} d\mu(\theta) d\lambda d\nu \quad (10.115)$$

$$= \sum_{i,j} \int \int c_{i\lambda} \bar{c}_{j\nu} e^{ih^{-1}(\chi_{j\nu} - \chi_{i\lambda})t} \int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) |Z\mu_i, \theta\rangle \langle Z\mu_j, \theta| \frac{\mathbb{I}_{\varphi^t(D_0)}(\theta)}{\mu(D_0)} d\mu(\theta) d\lambda d\nu \quad (10.116)$$

où pour simplifier les notations nous écrivons  $\oint g_\lambda d\lambda = g_0 + \int g_\lambda d\lambda$ .

Nous supposons que  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  est mélangeant. À cause de la propriété 11 nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) |Z\mu_i, \theta\rangle \langle Z\mu_j, \theta| \frac{\mathbb{I}_{\varphi^t(D_0)}(\theta)}{\mu(D_0)} d\mu(\theta) \quad (10.117)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) |Z\mu_i, \theta\rangle \langle Z\mu_j, \theta| d\mu(\theta) \mathcal{T}^{-t} \frac{\mathbb{I}_{D_0}(\theta)}{\mu(D_0)} d\mu(\theta) \quad (10.118)$$

$$= \int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) |Z\mu_i, \theta\rangle \langle Z\mu_j, \theta| d\mu(\theta) \int_{\Gamma} \frac{\mathbb{I}_{D_0}(\theta)}{\mu(D_0)} d\mu(\theta) \quad (10.119)$$

$$= \int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) |Z\mu_i, \theta\rangle \langle Z\mu_j, \theta| d\mu(\theta) \quad (10.120)$$

Puisque  $\angle\Gamma \gg \pi$ , nous pouvons supposer que  $|Z\mu_i, \theta\rangle$  parcourt uniformément l'intégralité de la sphère de Bloch  $\mathbb{S}^2$ . Nous avons avec  $\psi = \cos(\vartheta)|1\rangle + e^{i\phi} \sin(\vartheta)|2\rangle$  et  $\psi^\perp = \sin(\vartheta)|1\rangle - e^{i\phi} \cos(\vartheta)|2\rangle$  :

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\psi\rangle \langle \psi| d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \begin{pmatrix} \cos^2(\vartheta) & \frac{e^{i\phi}}{2} \sin(2\vartheta) \\ \frac{e^{-i\phi}}{2} \sin(2\vartheta) & \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix} \frac{d\vartheta d\phi}{2\pi^2} \quad (10.121)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.122)$$

et

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\psi\rangle \langle \psi^\perp| d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) & e^{i\phi} \sin^2(\vartheta) \\ -e^{-i\phi} \cos^2(\vartheta) & -\frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \end{pmatrix} \frac{d\vartheta d\phi}{2\pi^2} \quad (10.123)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.124)$$

Il suit que

$$\int_{\Gamma} |Z\mu_i, \theta\rangle \langle Z\mu_j, \theta| d\mu(\theta) = \frac{I_{\mathcal{H}}}{2} \delta_{ij} \quad (10.125)$$

Par la propriété 14, pour  $\lambda \neq \nu$ ,  $\int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) d\mu(\theta) = 0$ . Nous pouvons alors supposer (cela demanderait une justification rigoureuse) que

$$\int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) |Z\mu_i, \theta\rangle \langle Z\mu_j, \theta| d\mu(\theta) = \frac{I_{\mathcal{H}}}{2} \delta_{ij} \delta(\lambda - \nu) \quad (10.126)$$

Les états mixtes satisfont alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = \sum_i \oint |c_{i\lambda}|^2 d\lambda \frac{I_{\mathcal{H}}}{2} \quad (10.127)$$

De plus  $\langle \tilde{\psi}_0 | \tilde{\psi}_0 \rangle = 1 \Leftrightarrow \sum_i |c_i(\theta)|^2 = 1 \Leftrightarrow \sum_i \oint c_{i\lambda} \bar{c}_{i\nu} \int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta) d\mu(\theta) d\lambda d\nu = \sum_i \oint |c_{i\lambda}|^2 d\lambda = 1$ . Nous avons finalement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = \frac{I_{\mathcal{H}}}{2} \quad (10.128)$$

Nous supposons que  $(\Gamma, \varphi^t, \mu)$  est chaotique. Par définition,  $\forall A \subset \Gamma$  ensemble mesurable

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in A \quad || |Z\mu_i, \theta_1\rangle - |Z\mu_i, \theta_2\rangle || = \mathcal{O}(\angle A) \quad (10.129)$$

Soit  $\theta_0 \in D_0$  nous avons  $\forall \theta \in \varphi^t(D_0)$

$$\|f_{\lambda-\nu}(\theta)|Z_{\mu_i}, \theta\rangle\langle Z_{\mu_j}, \theta| - f_{\lambda-\nu}(\varphi^t(\theta_0))|Z_{\mu_i}, \varphi^t(\theta_0)\rangle\langle Z_{\mu_j}, \varphi^t(\theta_0)|\| \leq \mathcal{O}(\angle\varphi^t(D_0)) \quad (10.130)$$

car  $\| |\psi\rangle\langle\phi| - |\psi_0\rangle\langle\phi_0| \| = \| |\psi\rangle\langle\phi| - |\psi_0\rangle\langle\phi| + |\psi_0\rangle\langle\phi| - |\psi_0\rangle\langle\phi_0| \| = \| |\psi - \psi_0\rangle\langle\phi| + |\psi_0\rangle\langle\phi - \phi_0| \| \leq \| |\psi - \psi_0\rangle \| \| \phi \| + \| |\psi_0\rangle \| \| \phi - \phi_0 \|$ . De plus  $\theta$  et  $\varphi^t(\theta_0)$  sont dans  $\varphi^t(D_0)$ , donc la norme des différences de vecteurs est de l'ordre du diamètre de  $\varphi^t(D_0)$ . Nous avons alors

$$\int_{\Gamma} f_{\lambda-\nu}(\theta)|Z_{\mu_i}, \theta\rangle\langle Z_{\mu_j}, \theta| \frac{\mathbb{I}_{\varphi^t(D_0)}(\theta)}{\mu(D_0)} d\mu(\theta) = \int_{\varphi^t(D_0)} f_{\lambda-\nu}(\theta)|Z_{\mu_i}, \theta\rangle\langle Z_{\mu_j}, \theta| \frac{d\mu(\theta)}{\mu(D_0)} \quad (10.131)$$

$$= f_{\lambda-\nu}(\varphi^t(\theta_0))|Z_{\mu_i}, \varphi^t(\theta_0)\rangle\langle Z_{\mu_j}, \varphi^t(\theta_0)| + \mathcal{O}(\angle\varphi^t(D_0)) \quad (10.132)$$

En effet, comme nous intégrons sur quelque chose de petit, l'intégrale devient la valeur de la fonction sur ce quelque chose de petit auquel nous ajoutons un reste. Il suit alors

$$\rho(t) = \sum_{i,j} \iint c_{i\lambda} \bar{c}_{j\nu} e^{i\hbar^{-1}(\chi_{j\nu} - \chi_{i\lambda})t} f_{\lambda-\nu}(\varphi^t(\theta_0))|Z_{\mu_i}, \varphi^t(\theta_0)\rangle\langle Z_{\mu_j}, \varphi^t(\theta_0)| d\lambda d\nu + \mathcal{O}(\angle\varphi^t(D_0)) \quad (10.133)$$

$$= |\tilde{\psi}(t, \theta_0)\rangle\langle\tilde{\psi}(t, \theta_0)| + \mathcal{O}(\angle\varphi^t(D_0)) \quad (10.134)$$

Finalement, par définition des exposants de Lyapunov (l'écart entre deux points croît le long du flot comme  $e^{\lambda t}$ ),  $\forall \theta_1, \theta_2 \in D_0$ ,  $\text{dist}(|Z_{\mu_i}, \varphi^t(\theta_1)\rangle, |Z_{\mu_i}, \varphi^t(\theta_2)\rangle) \leq e^{\lambda t} \text{dist}(|Z_{\mu_i}, \theta_1\rangle, |Z_{\mu_i}, \theta_2\rangle)$ . Il suit que  $\angle\varphi^t(D_0) \leq e^{\lambda t} \angle D_0$ .

Nous voyons d'après l'équation 10.112 qu'un système mélangeant présente pour un grand  $t$  une forte décohérence et une forte relaxation vers une équipartition. Mais si il est chaotique, au début de l'évolution, l'état du système reste pur avec une impureté (entropie linéaire)  $1 - \text{tr}(\rho(t)^2) = \mathcal{O}(e^{\lambda t} \angle D_0)$  ( $1 - \text{tr}(\rho(t)^2)$  est une mesure d'impureté, plus ce facteur est petit, plus le système est pur).

Nous espérons démontrer la formule de l'horizon de cohérence avec une analyse ressemblant à celle qui vient d'être faite. En étendant cette idée de démonstration, nous espérons aussi déterminer la pente de l'évolution de l'entropie quantique.

# Conclusion

Dans la partie précédente, nous avons étudié les systèmes de spins soumis à des frappes perturbées chaotiquement. Nous avons vu que les évolutions de la cohérence et de l'entropie présentent un laps de temps avant que la cohérence chute et que l'entropie commence à croître. Ce temps est appelé horizon de cohérence et nous en avons déterminé une formule empirique. Il serait intéressant de comprendre la transmission du désordre du bain de frappes aux systèmes de spins. En particulier, pourquoi l'horizon de cohérence est-il plus grand que l'horizon de prédictibilité? Pourquoi le désordre dans le bain de frappes ne se transmet-il pas immédiatement au bain de spins?

Pour ceci nous avons commencé à étudier la théorie de Koopman. Nous avons rappelé en détail les différentes composantes attendues dans le spectre de Koopman et les propriétés des fonctions propres associées. Dans un second temps, nous avons analysé l'évolution de la dynamique de Koopman-Schrödinger pour laquelle nous avons obtenu une conjecture très intéressante. Nous avons vu que le départ de l'entropie quantique dépend de la pureté du système. Plus le système est pur, moins son entropie va augmenter. Nous espérons pouvoir tirer de la conjecture une analyse plus fine de l'horizon de cohérence. Cependant ceci n'est qu'une conjecture et nécessite encore d'être démontrée rigoureusement.

Le travail réalisé au cours de la thèse se termine ici, mais il reste de nombreuses autres analyses à faire : adapter l'analyse pour un système dynamique en temps discret, faire les analyses théoriques concernant l'horizon de cohérence et les comparer aux analyses numériques avec les différents systèmes que nous avons vu précédemment (chat d'Arnold, Standard map, glace de spins, systèmes dynamiques dissipatifs), trouver des signatures des propriétés du système dynamique classique dans le système dynamique quantique. Analyses où la présence d'exposant de Lyapunov quantique (voir [84]) pourrait trouver une utilité pour les recherches futures.



# Conclusion et perspectives

Pour ce travail de thèse, nous avons commencé par déterminer les effets du couplage sur un système de spins. Pour ce faire nous avons étudié des chaînes de spins au travers de trois couplages différents : Heisenberg, Ising-Z et Ising-X. Ceux-ci peuvent n'induire aucun effet, faire varier la vitesse d'oscillation de la population, avoir des oscillations périodiques de la cohérence, augmenter ou diminuer la cohérence et faire chuter la cohérence et relaxer la population pouvant atteindre la distribution microcanonique (la population relaxe vers  $\frac{1}{2}$  et la cohérence chute à 0). Le couplage permet donc de transmettre des informations entre les différents spins de la chaîne. Nous avons aussi continué l'étude en complexifiant le système. Pour ce faire, nous avons rajouté un contrôle et étudié le comportement adiabatique d'un système quantique bipartite (système constitué de deux sous-systèmes) décrit dans l'espace de Hilbert. Le couplage entre le système et l'environnement est perturbatif. Nous avons vu qu'il existait trois régimes adiabatiques définis en fonction des temps caractéristiques du système et de l'environnement. Il y a : le régime adiabatique très fort pour lequel le temps caractéristique du système  $\tau_S$  est très petit devant la durée du contrôle  $T$  et devant le temps caractérisant la perturbation du système par l'environnement  $\theta^\epsilon$  (équivalent aux théorèmes adiabatiques usuels), le régime adiabatique fort pour lequel  $\tau_S$  est de même ordre de grandeur que  $\theta^\epsilon$  et  $\theta^\epsilon$  est très petit devant  $T$ , et finalement le régime adiabatique faible pour lequel  $\theta^\epsilon$  et  $\tau_S$  sont de même ordre de grandeur que  $T$ . Ceci permet, dans ce dernier régime, d'avoir des transitions, ce qui peut rendre la dynamique plus riche d'un point de vue comportemental. Nous avons aussi déterminé les formules de transports adiabatiques associés aux théorèmes adiabatiques. Nous avons montré l'existence d'une phase géométrique à valeurs opérateurs. Une question importante serait de savoir ce que devient cette phase géométrique à valeurs opérateurs ainsi que les trois régimes adiabatiques dans le cas d'un couplage fort entre le système et l'environnement.

Cependant les systèmes quantiques ne sont jamais isolés et l'interaction avec leur environnement peut entraîner des comportements plus riches mais surtout plus compliqués. En particulier nous avons regardé le cas de systèmes de spins couplés ou non, frappés par des impulsions magnétiques ultra-courtes. Ces impulsions sont perturbées par un environnement classique modifiant à la fois la force et le retard de chaque frappe. L'environnement classique peut être stationnaire, de dérive linéaire, Markovien et microcanonique. Nous avons vu que plus l'environnement était désordonné dans le temps (sachant que le moins désordonné est l'environnement stationnaire, et le plus désordonné est l'environnement microcanonique) plus le système allait vers la distribution microcanonique. Plus le système présente un désordre initial, que ce soit des états de spins différents, ou dans l'amplitude de perturbation initial des frappes (retards et/ou forces de frappes entre deux spins différents sont les mêmes ou très différents) alors plus le système va se rapprocher de la distribution microcanonique. Nous voyons donc qu'il y a une forte transmission d'informations entre l'environnement et le système. La perturbation des frappes dans l'environnement induit une perturbation des spins dans le système qui deviennent désordonnés. Cependant cette transmission de l'information ne permet pas de réaliser dans de bonnes conditions du contrôle quantique. Nous avons vérifié que les résultats trouvés étaient invariants d'échelle. Une étude future serait de regarder les effets d'environnements réalistes. En effet ici nous avons fait une liste exhaustive des effets pouvant intervenir dans la cohérence et la population d'une chaîne de spins et d'un ensemble de spins pour des environnements académiques. Réaliser la même étude sur des environnements non académiques permettrait de savoir rapidement dans quelle classe d'environnements il se situe (stationnaire, de dérivé linéaire, Markovien ou microcanonique).

Afin d'étendre encore la complexité de notre modèle, nous pouvons utiliser un environnement

classique présentant des propriétés particulières. Toujours afin de comprendre la transmission d'information entre le système et l'environnement, nous avons utilisé des automorphismes continus sur le tore, la Standard map et les environnements chaotiques dissipatifs à trois dimensions du type Lorenz. Pour ces environnements chaotiques, nous avons vu qu'avant un laps de temps correspondant à l'horizon de cohérence, le système restait cohérent alors qu'après il allait vers la distribution microcanonique. En particulier si la frappe est dans la direction d'un vecteur propre, toute la cohérence est conservée pendant la durée de l'horizon de cohérence. Un système chaotique présente la propriété remarquable de sensibilité aux conditions initiales. Ainsi au départ, les frappes sont toutes les mêmes jusqu'à l'horizon de prédictibilité où elle deviennent différentes. Ce désordre dans les frappes est transmis aux systèmes de spins à partir de l'horizon de cohérence qui est supérieur à l'horizon de prédictibilité. Ceci nous a permis de réaliser du contrôle pendant la durée de l'horizon de cohérence. Le premier contrôle est réalisé avec une chaîne de spins couplés par une interaction d'Heisenberg et frappés dans la direction d'un vecteur propre. Nous mettons le système initialement dans un état particulier et nous le laissons évoluer librement ce qui correspond à de la transmission d'information entre les spins. Pour le second, nous considérons une chaîne de spins fermée couplée par une interaction d'Heisenberg et nous agissons directement sur les spins par des frappes stationnaires pour leur donner une direction de transmission de l'information et imposer un point de "stockage" de l'information. De plus pendant la durée de l'horizon de cohérence, nous avons pu réaliser une porte logique, la porte *not*. Des études futures consisteraient à refaire cette analyse pour des environnements chaotiques existant comme par exemple de la RMN en environnement biologiques chaotiques (réaction diffusion [28, 29], activités électriques des cellules [26, 72, 82, 77, 33]).

Si des environnements concrets pouvaient présenter les mêmes propriétés que les environnements chaotiques alors il serait possible de réaliser toutes les portes logiques pendant la durée de l'horizon de cohérence et peut être même de réaliser un ordinateur quantique. En effet, le problème majeur aujourd'hui pour créer de tels ordinateurs est la présence de décohérence. Comme cette décohérence est nulle ou presque pendant la durée de l'horizon de cohérence, peut être que l'environnement chaotique serait un bon atout à utiliser. De plus il pourrait être intéressant d'essayer de réaliser d'autres portes logiques, comme la porte de Hadamard. Nous pouvons noter que les résultats obtenus dans la troisième partie ne changent pas si nous remplaçons la perturbation de la force et/ou du retard de frappes par la perturbation de la direction de frappes.

Nous avons déterminé une formule empirique de l'horizon de cohérence, le but de la dernière partie est de trouver une formule mathématique de cet horizon. Nous voulons mieux comprendre comment l'information se transmet entre le système classique et le système quantique et en particulier pourquoi l'horizon de cohérence est supérieur à l'horizon de prédictibilité, autrement dit, pourquoi le désordre dans le bain de frappes ne se transmet pas immédiatement au bain de spins. Nous avons déterminé une conjecture dans cette partie qui permettrait de commencer à répondre à ces questions mais la démonstration est incomplète. Des études futures consisteraient à démontrer cette conjecture, à refaire l'analyse en temps discret (pour traiter des automorphismes continus sur le tore), à essayer de comprendre la pente de l'entropie quantique (qui semble liée à l'entropie classique cumulée). Et bien sûr il faudrait confirmer numériquement les résultats ainsi obtenus. Il s'agirait également d'appliquer les approches du contrôle adiabatique avec phases à valeurs opérateurs aux états de quasi-énergies et d'étudier la distribution d'espacements de niveaux de quasi-énergies afin de faire le lien entre le chaos classique du système dynamique et le chaos quantique du système de spins qui lui est asservi.

Ce problème peut encore être complexifié. En effet nous avons dit que pour comprendre la transmission de l'information de l'environnement vers le système, nous négligeons l'effet direct du bruit environnemental sur le système. Pour avoir un problème complet, qui prenne en compte tous les effets possibles, il faudrait rajouter cette perturbation du système par l'environnement au travers d'un bain thermique (équation de Lindblad [19]). Toute l'étude réalisée ici devrait alors être refaite pour comprendre les effets conjoints des deux sources de décohérence.

## Annexe A

# Opérateur d'évolution d'un système de spins frappés

Cette démonstration reprend celle effectuée dans [99].

Nous voulons montrer que l'opérateur d'évolution du  $n$ -ième spin à la  $i$ -ième frappe est caractérisé par

$$U_n^{(i)} = e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}(2\pi - \varphi_n^{(i)})} [I + (e^{-i\lambda_n^{(i)}} - 1)W] e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}\varphi_n^{(i)}} \quad (\text{A.1})$$

L'hamiltonien du  $n$ -ième spin est caractérisé par

$$H_n(\theta) = H_0 + \hbar w_0 W \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_n^{(i)} \delta(\theta - 2i\pi + \varphi_n^{(i)}) \quad (\text{A.2})$$

Sur  $[2i\pi, 2(i+1)\pi]$ , on a

$$H_n^{(i)}(\theta) = H_0 + \hbar w_0 W \lambda_n^{(i)} \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) \quad (\text{A.3})$$

avec  $\varphi_n^{(i)}$  le retard de la frappe qui aurait dû être en 0 (frappe pour  $\theta = \varphi_n^{(i)}$  plutôt que  $\theta = 0$ ).

L'opérateur de monodromie à la  $i$ -ième frappe est

$$U_n^{(i)} = U(2(i+1)\pi, 2i\pi) = \mathbb{T}e^{-i \int_0^{2\pi} \frac{H_n^{(i)}(\theta)}{\hbar w_0} d\theta} \quad (\text{A.4})$$

$$= U(2\pi, \varphi_n^{(i)} + \epsilon) U(\varphi_n^{(i)} + \epsilon, 0) \quad \text{avec } \epsilon \ll 1 \quad (\text{A.5})$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{T}e^{-i \int_{\varphi_n^{(i)} + \epsilon}^{2\pi} \frac{H_0}{\hbar w_0} dt} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{T}e^{-i \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \left( \frac{H_0}{\hbar w_0} + W \lambda_n^{(i)} \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) \right) d\theta} \quad (\text{A.6})$$

$$= e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}(2\pi - \varphi_n^{(i)})} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{T}e^{-i \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \left( \frac{H_0}{\hbar w_0} + \lambda_n^{(i)} W \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) \right) d\theta} \quad (\text{A.7})$$

Il reste à déterminer le second opérateur d'évolution. Pour ceci nous utilisons le théorème des représentations intermédiaires [64].

$$U(\varphi_n^{(i)} + \epsilon, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{T}e^{-i \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \left( \frac{H_0}{\hbar w_0} + \lambda_n^{(i)} W \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) \right) d\theta} \quad (\text{A.8})$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{T}e^{-i \int_0^{\varphi_n^{(i)}} \frac{H_0}{\hbar w_0} d\theta} \mathbb{T}e^{-i \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \frac{H_0}{\hbar w_0} d\theta'} \lambda_n^{(i)} W \mathbb{T}e^{-i \int_0^{\theta} \frac{H_0}{\hbar w_0} d\theta'} e^{-i \int_0^{\theta} \frac{H_0}{\hbar w_0} d\theta'} \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) d\theta \quad (\text{A.9})$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}\varphi_n^{(i)}} \mathbb{T}e^{-i \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} e^{i\frac{H_0}{\hbar w_0}\theta} \lambda_n^{(i)} W e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}\theta} \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) d\theta} \quad (\text{A.10})$$

Nous passons à la dernière équation car  $H_0$  est diagonale. Donc l'exponentielle ordonnée est égale à son exponentielle normale.

Pour tout opérateur  $K(\theta)$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{T}e^{-i \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} K(\theta) \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) d\theta} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-i)^n \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} K(\theta_1) \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \int_0^{\theta_1} K(\theta_2) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) \dots \\ &\dots \int_0^{\theta_{n-1}} K(\theta_n) \delta(\theta_n - \varphi_n^{(i)}) d\theta_n \dots d\theta_1 \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} K(\theta_1) \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_1 = K(\varphi_n^{(i)}) \quad (\text{A.12})$$

$$\int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} K(\theta_1) \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \int_0^{\theta_1} K(\theta_2) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 = K(\varphi_n^{(i)})^2 \int_{\theta_1=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \int_{\theta_2=0}^{\theta_1} \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 \quad (\text{A.13})$$

La double intégration sur  $[0, \varphi_n^{(i)} + \epsilon]^2$  définie par  $0 \leq \theta_2 \leq \theta_1 \leq \varphi_n^{(i)} + \epsilon$  donne

$$\int_{\theta_1=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \int_{\theta_2=0}^{\theta_1} \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 = \int_{\theta_2=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \int_{\theta_1=\theta_2}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_1 d\theta_2 \quad (\text{A.14})$$

$$= \int_{\theta_1=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \int_{\theta_2=\theta_1}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 \quad (\text{A.15})$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \int_{\theta_2=0}^{\theta_1} \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 &= \frac{1}{2} \left( \int_{\theta_1=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \int_{\theta_2=0}^{\theta_1} \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 \right. \\ &\left. + \int_{\theta_1=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \int_{\theta_2=\theta_1}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 \right) \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

$$\int_{\theta_1=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \int_{\theta_2=0}^{\theta_1} \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 = \frac{1}{2} \int_{\theta_1=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \int_{\theta_2=0}^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) d\theta \right)^2 \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{1}{2} \quad (\text{A.19})$$

Donc

$$\int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} K(\theta_1) \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \int_0^{\theta_1} K(\theta_2) \delta(\theta_2 - \varphi_n^{(i)}) d\theta_2 d\theta_1 = \frac{K(\varphi_n^{(i)})^2}{2} \quad (\text{A.20})$$

De même

$$\int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} K(\theta_1) \delta(\theta_1 - \varphi_n^{(i)}) \dots \int_0^{\theta_{n-1}} K(\theta_n) \delta(\theta_n - \varphi_n^{(i)}) d\theta_n \dots d\theta_1 = \frac{K(\varphi_n^{(i)})^n}{n!} \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbb{T}e^{-i \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} K(\theta) \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) d\theta} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i K(\varphi_n^{(i)}))^n}{n!} = e^{-i K(\varphi_n^{(i)})} \quad (\text{A.22})$$

Revenons au problème

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{T}e^{-i \int_0^{\varphi_n^{(i)} + \epsilon} e^{i \frac{H_0 \theta}{\hbar w_0}} \lambda_n^{(i)} W e^{-i \frac{H_0 \theta}{\hbar w_0}} \delta(\theta - \varphi_n^{(i)}) d\theta} = e^{-i e^{i \frac{H_0 \varphi_n^{(i)}}{\hbar w_0}} \lambda_n^{(i)} W e^{-i \frac{H_0 \varphi_n^{(i)}}{\hbar w_0}}} \quad (\text{A.23})$$

$$U_n^{(i)} = e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}(2\pi - \varphi_n^{(i)})} e^{-i\frac{H_0 \varphi_n^{(i)}}{\hbar w_0}} e^{-i e^{i\frac{H_0 \varphi_n^{(i)}}{\hbar w_0}} \lambda_n^{(i)}} W e^{-i\frac{H_0 \varphi_n^{(i)}}{\hbar w_0}} \quad (\text{A.24})$$

$$= e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}(2\pi - \varphi_n^{(i)})} e^{-i\lambda_n^{(i)} W} e^{-i\frac{H_0 \varphi_n^{(i)}}{\hbar w_0}} \quad (\text{A.25})$$

Nous avons aussi comme  $W = W^2 = W^n$

$$e^{-i\lambda_n^{(i)} W} = I_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-i\lambda_n^{(i)})^k}{k!} W^k \quad (\text{A.26})$$

$$= I_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-i\lambda_n^{(i)})^k}{k!} W \quad (\text{A.27})$$

$$= I_{\mathcal{H}} + (e^{-i\lambda_n^{(i)}} - 1)W \quad (\text{A.28})$$

Finalement

$$U_n^{(i)} = e^{-i\frac{H_0}{\hbar w_0}(2\pi - \varphi_n^{(i)})} \left( 1 + (e^{-i\lambda_n^{(i)}} - 1)W \right) e^{-i\frac{H_0 \varphi_n^{(i)}}{\hbar w_0}} \quad (\text{A.29})$$



## Annexe B

# Démonstration de la présence d'anholonomie

La démonstration de l'anholonomie de Cheon est présente dans la publication [68].

Nous avons

$$H(t) = H_0 + \lambda W \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta(t - iT) \quad (\text{B.1})$$

L'opérateur d'évolution associé dépendant de  $\lambda$  est

$$U_\lambda = e^{-\frac{iH_0 T}{\hbar}} e^{-\frac{i\lambda W}{\hbar}} \quad (\text{B.2})$$

Soit  $\lambda_0$  la première valeur de la force de frappe, alors nous avons

$$U_{\lambda_0} = e^{-\frac{iH_0 T}{\hbar}} e^{-\frac{i\lambda_0 W}{\hbar}} \quad (\text{B.3})$$

$$\Rightarrow U_\lambda = U_{\lambda_0} e^{-i\frac{(\lambda - \lambda_0)W}{\hbar}} \quad (\text{B.4})$$

Nous nous plaçons dans le cas où l'opérateur de frappe est un projecteur de rang 1, i.e.  $W = |w\rangle\langle w|$ . L'équation aux valeurs propres de l'opérateur de monodromie est :

$$U_\lambda |\zeta_n(\lambda)\rangle = z_n(\lambda) |\zeta_n(\lambda)\rangle \quad (\text{B.5})$$

avec  $z_n(\lambda) = e^{-i\chi_n(\lambda)T}$ . L'analyse des équations donne deux sortes de vecteurs propres triviaux à  $U_\lambda$ . Pour le premier, nous supposons qu'un vecteur propre  $|\zeta\rangle$  de  $U_{\lambda_0}$  est orthogonal à  $|w\rangle$  (la direction de frappe).

$$W|\zeta\rangle = |w\rangle\langle w|\zeta\rangle = 0 \quad (\text{B.6})$$

La valeur propre associée est  $z_0$ . Dans ces conditions

$$U_\lambda |\zeta\rangle = U_{\lambda_0} e^{-i\frac{(\lambda - \lambda_0)W}{\hbar}} |\zeta\rangle \quad (\text{B.7})$$

D'après l'équation B.6,

$$\Rightarrow U_\lambda |\zeta\rangle = U_{\lambda_0} |\zeta\rangle = z_0 |\zeta\rangle \quad (\text{B.8})$$

$|\zeta\rangle$  est vecteur propre de  $U_\lambda$  avec une valeur propre qui est constante et indépendante de  $\lambda$ .

Pour le second cas, nous supposons que  $|w\rangle$  est un vecteur propre de  $U_{\lambda_0}$  et que la valeur propre associée est  $z_0$ . Comme des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux, tous les vecteurs de  $U_{\lambda_0}$  sauf  $|w\rangle$  sont orthogonaux à  $|w\rangle$ . Comme ces vecteurs sont orthogonaux à la direction de frappe, ils vérifient le premier cas donné ci-dessus. De plus, comme

$$U_\lambda |w\rangle = U_{\lambda_0} e^{-i\frac{(\lambda - \lambda_0)W}{\hbar}} |w\rangle \quad (\text{B.9})$$

$$= U_{\lambda_0} e^{-i\frac{(\lambda - \lambda_0)|w\rangle\langle w|}{\hbar}} |w\rangle \quad (\text{B.10})$$

$$= U_{\lambda_0} e^{-i\frac{(\lambda - \lambda_0)}{\hbar}} |w\rangle \quad (\text{B.11})$$

$$= z_0 e^{-i\frac{(\lambda - \lambda_0)}{\hbar}} |w\rangle \quad (\text{B.12})$$

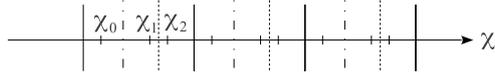


FIGURE B.1 – Cyclicité des quasi-énergies et choix d'une valeur seuil. Les différents traits montrent trois types de cyclicités différents : le premier par des traits droits, les deux autres par des traits pointillés.

alors,  $|w\rangle$  est vecteur propre de  $U_\lambda$  avec la valeur propre  $z_0 e^{-\frac{i(\lambda-\lambda_0)}{\hbar}}$  dépendant de  $\lambda$ .

Dans la suite, nous allons nous placer dans un espace de Hilbert réduit ne contenant pas les deux cas triviaux donnés ci-dessus. De plus, nous supposons que le spectre de  $U_\lambda$  n'a pas de dégénérescence  $\forall \lambda$ . Dans le cas contraire, des quasi-énergies se croiseraient, ce que nous voulons éviter pour le suivi adiabatique. En effet, soient  $u_1$  et  $u_2$  deux valeurs propres identiques, et soit  $|w\rangle = \dots + |u_1\rangle + |u_2\rangle + \dots$ , alors  $\langle w|u_1 - u_2\rangle = 0$ . Or  $|u_1 \pm u_2\rangle$  est aussi vecteur propre de  $H_0$ . Il y a donc bien une valeur propre constante car  $|w\rangle$  est orthogonal à un vecteur propre de  $H_0$ . Ceci induit dans le graphique des quasi-énergies, une droite coupant les autres quasi-énergies.

Expliquons pourquoi nous ne considérons pas non plus les deux classes de vecteurs propres précédemment citées. Comme dans les deux cas triviaux  $z_0$  est indépendant de  $\lambda$ , la quasi-énergie l'est aussi. A ce moment là, quelque soit la frappe, la quasi-énergie est la même. Il n'y a pas d'anholonomie à cause des croisements dus à la quasi-énergie constante.

Comme le spectre de  $U_\lambda$  n'est pas dégénéré, ceci permet de dire que :

$$0 \leq \frac{|\langle w|\zeta\rangle|}{\neq} \leq 1 \quad (\text{B.13})$$

La première inégalité s'explique car si  $U_\lambda$  est non dégénéré, alors  $|w\rangle$  est non-orthogonal à tout vecteur propre  $|\zeta\rangle$  de  $U_\lambda$ . Si la seconde inégalité était absente,  $|w\rangle$  serait un vecteur propre de  $U_\lambda$ . Or si  $|w\rangle$  est vecteur propre, d'après ce que nous avons dit dans le premier des cas triviaux, tous les vecteurs propres de  $U_\lambda$  sont orthogonaux à  $|w\rangle$ . Ceci est faux comme  $|\langle w|\zeta\rangle| \neq 0$ .

D'après le théorème de Floquet [37], le spectre des quasi-énergies est périodique. De plus dans notre cas, elles sont  $2\pi$  périodiques en  $\lambda$ . Supposons qu'il existe  $N$  quasi-énergies  $\chi_n(\lambda)$  (avec  $N = \dim \mathcal{H}$ ). De par la cyclicité du spectre des quasi-énergies, nous devons choisir un seuil. Nous avons tracé (figure B.1) sur une flèche la cyclicité de trois quasi-énergies. En fonction de la valeur seuil choisie, nous devons redéfinir l'énergie seuil  $\chi_0$ . Nous avons ainsi tracé trois cycles différents. Le premier délimité par des barres verticales complètes et les deux autres par des barres verticales avec des pointillées.

Ainsi, pour  $N$  quasi-énergies, il existe  $N$  possibilités de quasi-énergies seuil. Une fois ce choix fait, nous lui assignons  $n = 0$ . Ensuite  $\chi_n(\lambda)$  augmente avec  $n$ . Plus précisément

$$\chi_0(\lambda_0) < \chi_1(\lambda_0) < \dots < \chi_{N-1}(\lambda_0) < \chi_0 + 2\pi\hbar T^{-1} \quad (\text{B.14})$$

où  $\chi_0(\lambda_0)$  et  $\chi_0(\lambda_0) + 2\pi\hbar T^{-1}$  correspondent à la même valeur propre  $z_0(\lambda_0) = e^{-i\chi_0(\lambda_0)T}$ . Ainsi,  $n$  est identifié avec  $n + N$ .

Nous voulons ensuite savoir ce qui arrive lorsque  $\lambda$  augmente de  $2\pi$ . Si  $\chi_n$  était effectivement une fonction  $2\pi$  périodique alors  $\chi_n(\lambda + 2\pi) = \chi_n(\lambda)$ . Mais vérifions le en regardant quelle valeur prend  $n$  après un cycle  $2\pi$ . Pour ceci, évaluons

$$\Delta\chi_n = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} \frac{\partial\chi_n(\lambda)}{\partial\lambda} d\lambda \quad (\text{B.15})$$

Normalement, dans le cas d'une fonction  $2\pi$  périodique  $f$ ,  $\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} f(x)dx = f(x_0+2\pi) - f(x_0) = 0$ . Ici, nous posons  $\Delta\chi_0 = \chi_\mu(\lambda_0) - \chi_0(\lambda_0) \pmod{2\pi\hbar T^{-1}}$ . Autrement dit, après une variation  $\lambda$  de  $2\pi$ , nous

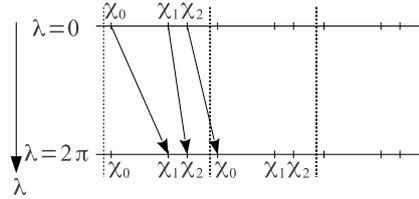


FIGURE B.2 – Manifestation de l’anholonomie de Cheon. Le suivi adiabatique d’une quasi-énergie en fonction d’un paramètre variant périodiquement permet de passer sur une autre quasi-énergie au bout d’une période de ce dernier. L’axe horizontal représente le spectre des quasi-énergies périodiques sur  $\mathbb{R}$ .

envisageons le fait que nous ne retrouvons pas la même quasi-énergie.  $\chi_0(\lambda_0)$  varie jusqu’à  $\chi_\mu(\lambda_0)$  lorsque  $\lambda$  croit de  $\lambda_0$  jusqu’à  $\lambda_0 + 2\pi$ . Pour déterminer la valeur de  $\mu$ , nous évaluons la formule de Hellmann–Feynman :

$$\frac{\partial \chi_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \hbar T^{-1} \langle \zeta_n(\lambda) | W | \zeta_n(\lambda) \rangle = \hbar T^{-1} |\langle w | \zeta_n(\lambda) \rangle|^2 \quad (\text{B.16})$$

Comme dit précédemment,  $W$  est un projecteur donc  $W^2 = W$ . Cette égalité implique que les valeurs propres de  $W$  sont soit 0, soit 1. Nous obtenons alors

$$0 \leq \frac{\partial \chi_n(\lambda)}{\partial \lambda} \leq \hbar T^{-1} \quad (\text{B.17})$$

Or, d’après l’équation B.13,  $0 < |\langle w | \zeta_n(\lambda) \rangle| < 1$ , donc

$$0 < \frac{\partial \chi_n(\lambda)}{\partial \lambda} < \hbar T^{-1} \quad (\text{B.18})$$

Ceci donne pour  $\Delta \chi_n$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} 0 d\lambda < \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} \frac{\partial \chi_n(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda < \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} \hbar T^{-1} d\lambda \quad (\text{B.19})$$

$$\Leftrightarrow 0 < \Delta \chi_n < \hbar T^{-1} (\lambda_0 + 2\pi - \lambda_0) \quad (\text{B.20})$$

$$\Leftrightarrow 0 < \Delta \chi_n < 2\pi \hbar T^{-1} \quad (\text{B.21})$$

De ce fait  $0 < \mu < N$  car si  $\mu = N$ ,  $\chi_N(\lambda_0) = \chi_0(\lambda_0) + 2\pi \hbar T^{-1}$  et  $\Delta \chi_0 = 2\pi \hbar T^{-1}$ .

Ainsi, nous voyons bien que lorsque  $\lambda$  varie de 0 à  $2\pi$ , nous passons de la quasi-énergie  $\chi_0(\lambda_0)$  à  $\chi_\mu(\lambda_0)$  avec  $0 < \mu < N$ . Ceci correspond à l’anholonomie de Cheon. Nous pouvons la représenter graphiquement pour trois quasi-énergies figure B.2. Au bout de  $6\pi$ , nous retrouvons la quasi-énergie seuil pour  $\mu = 1$ .

Nous voulons trouver la valeur de  $\mu$ . Dans le cas d’un système à deux niveaux comme il n’y a que deux quasi-énergies,

$$\chi_n(\lambda_0 + 2\pi^-) = \chi_{n+1}(\lambda_0) \quad (\text{B.22})$$

le signe moins est ajouté car lors d’une variation, nous passons de  $\lambda_0$  à  $\lambda_0 + 2\pi$  par valeurs inférieures.

Pour montrer que l’équation B.22 est toujours vérifiée pour  $N > 2$ , analysons

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta \chi_n = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} \frac{\partial \chi_n(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \quad (\text{B.23})$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\hbar}{T} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} \langle \zeta_n | W | \zeta_n \rangle d\lambda \quad (\text{B.24})$$

$$= \frac{\hbar}{T} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} \text{tr}(W) d\lambda \quad (\text{B.25})$$

avec  $\text{tr}$  représentant la trace matricielle. Or, comme  $W = |w\rangle\langle w|$ ,  $\text{tr}(W) = 1$  et

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} \frac{\hbar}{T} \text{tr}(W) d\lambda = \frac{2\hbar\pi}{T} \quad (\text{B.26})$$

Est-ce que  $\chi_n(\lambda_0 + 2\pi-) = \chi_{n+\mu}(\lambda_0) \pmod{2\pi\hbar T^{-1}}$  vérifie bien la formule précédente  $\forall \mu$  ?

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta\chi_n = \sum_{n=0}^{N-1} (\chi_n(\lambda_0 + 2\pi-) - \chi_n(\lambda_0)) \quad (\text{B.27})$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{n+\mu}(\lambda_0) - \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n(\lambda_0) \quad (\text{B.28})$$

Les quasi-énergies correspondant aux indices  $0 \leq n < N$  sont dans un même cycle. L'indice de la quasi-énergie dans la première somme est  $n + N$ . Pour rester dans un même cycle, il faut que  $0 \leq n + \mu < N \Rightarrow -\mu \leq n < N - \mu$ . En dehors de ce cycle, nous appliquons le modulo  $\frac{2\hbar\pi}{T}$  pour y retourner.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta\chi_n = \sum_{n=0}^{N-\mu-1} \chi_{n+\mu}(\lambda_0) + \sum_{n=N-\mu}^{N-1} \chi_{n+\mu}(\lambda_0) - \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n(\lambda_0) \quad (\text{B.29})$$

$$= \sum_{n=\mu}^{N-1} \chi_n(\lambda_0) + \sum_{n=0}^{\mu-1} \left( \chi_n(\lambda_0) + \frac{2\hbar\pi}{T} \right) - \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n(\lambda_0) \quad (\text{B.30})$$

$$= \frac{\mu 2\hbar\pi}{T} \quad (\text{B.31})$$

Le deuxième terme de la deuxième égalité vient du fait que  $n + \mu = m \Rightarrow \sum_{n=\mu}^{N-1} \chi_n(\lambda_0) = \sum_N^{N-1+\mu} \chi_m(\lambda_0)$ . Nous décalons ensuite d'une période  $N$  ce qui revient à ajouter  $\frac{2\hbar\pi}{T}$  à la quasi-énergie. Nous retrouvons l'équation B.26 que lorsque  $\mu = 1$ . Et nous avons bien  $\chi_n(\lambda_0 + 2\pi-) = \chi_{n+1}(\lambda_0) \forall N \geq 2$ .

Nous pouvons nous demander si  $\mu$  est toujours de 1 lorsque nous modifions les paramètres initiaux et en particulier la dimension.  $\mu$  dépend directement de la forme de  $W$ . Il faut que celui-ci soit un projecteur sinon nous ne pouvons faire ce développement car  $W \neq W^2$ . Ses valeurs propres ne seraient alors pas 0 ou 1.

En plus de la condition  $W = W^2$ , il faut reconstruire l'espace de Hilbert réduit que nous considérons pour  $W = |w\rangle\langle w|$ . Prenons par exemple un projecteur de rang 2,  $W = |w_1\rangle\langle w_1| + |w_2\rangle\langle w_2|$ . Les deux conditions précédentes conservent la même structure. En effet, pour la première condition nous supposons qu'un vecteur propre  $|\zeta\rangle$  de  $U_{\lambda_0}$  est orthogonale à  $|w_1\rangle$  et  $|w_2\rangle$  et la valeur propre correspondante est  $z_0$ . Ceci implique que  $|\zeta\rangle$  est aussi un vecteur propre de  $U_\lambda \forall \lambda$  et la valeur propre  $z_0$  ne dépend pas de  $\lambda$ . Pour la seconde condition, nous supposons que  $|w_1\rangle$  et  $|w_2\rangle$  sont vecteurs propres de  $U_{\lambda_0}$  et la valeur propre associée est  $z_0$ . Ainsi, tous les vecteurs propres de  $U_{\lambda_0}$ , sauf  $|w_1\rangle$  et  $|w_2\rangle$  sont orthogonaux à  $|w_1\rangle$  et  $|w_2\rangle$  et sont reliés au premier cas. Sur ce principe, nous pouvons aller jusqu'à un projecteur de rang  $n$ .

Ainsi, il faut d'une part que  $|w\rangle$  ne soit pas vecteur propre de  $U_{\lambda_0}$  et d'autre part réduire l'espace de Hilbert en excluant les éventuels vecteurs propres de  $U_{\lambda_0}$  orthogonaux à  $|w\rangle$ .

## Annexe C

# Définitions et propriétés des entropies

Toutes les propositions, théorèmes et définitions présents ici sont tirés de [7] dans lequel sont présentes les démonstrations.

### C.1 Entropie métrique

#### Partition d'un espace mesurable

Soit  $\Gamma$  un espace mesurable, i.e un espace équipé d'une mesure  $\mu$  et d'une tribu, dont nous voulons faire une partition, par exemple un rectangle. Pour ceci, il suffit de décomposer le rectangle en sous-ensembles mesurables tel que la réunion de ces ensembles reforment l'espace de départ, comme ce qui est fait figure C.1.

Pour définir mathématiquement ce qu'est une partition mesurable, nous avons besoin de la notion d'espace topologique. Un espace topologique est un couple  $(\Gamma, \mathcal{T})$  où  $\Gamma$  est un ensemble et  $\mathcal{T}$  une topologie. La topologie est l'ensemble des ouverts (par définition, un ouvert est un élément de  $\mathcal{T}$ ). Un espace de probabilité est un triplet  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu)$  où  $\Gamma$  est un ensemble décrivant tous les événements élémentaires possibles (cela peut être un ensemble discret ou un espace topologique),  $\mathcal{T}$  est une tribu sur  $\Gamma$ , qui est l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $\Gamma$  qui constituent un événement possible. La loi de probabilité  $\mu$  est une application de  $\mathcal{T}$  dans  $[0, 1]$  qui à une partie  $O$  de  $\Gamma$  se trouvant dans la tribu  $\mathcal{T}$  associe sa probabilité de survenue (i.e. la probabilité pour qu'au moins un des points de  $O$  se produise).

Soient deux partitions  $\alpha$  et  $\gamma$ . Nous supposons que la partition  $\alpha$  est présente dans  $\gamma$  mais qu'en plus la partition  $\gamma$  est plus fine. Nous notons cette nouvelle relation  $\alpha \preceq \gamma$  qui signifie que  $\alpha$  est moins fine que  $\gamma$ . Par exemple figure C.2,  $\alpha$  et  $\gamma$  sont deux partitions d'un même espace mesurable. Nous voyons que la partition  $\alpha$  est contenue dans la partition  $\gamma$  mais que la partition  $\gamma$  est plus précise. Ainsi  $\alpha$  est moins fine ou plus grossière que  $\gamma$ .

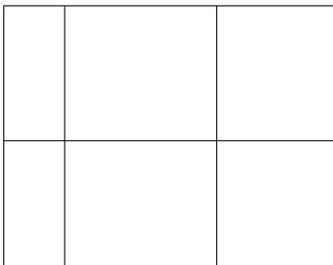


FIGURE C.1 – Exemple de partition d'un espace mesurable formant un rectangle.

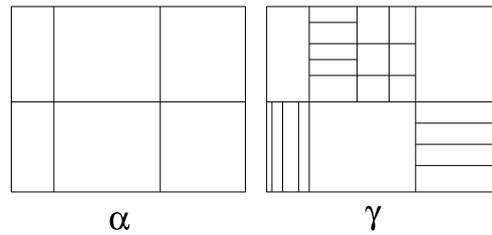


FIGURE C.2 –  $\alpha$  et  $\gamma$  sont deux partitions d'un même espace mesurable. La partition de  $\alpha$  est contenue dans celle de  $\gamma$ . On dit que  $\alpha$  est moins fine que  $\gamma$ .

### L'entropie, une mesure de partition

Soit une grille dans laquelle nous jetons un ensemble de points suivant la mesure  $\mu$ .  $H_\mu(\alpha)$  est l'entropie associée à cette répartition de points dans la partition  $\alpha$  de l'espace mesurable. Sur cette grille, nous rajoutons une application  $\Phi$  préservant la mesure et qui modifie la répartition des points dans l'espace mesurable. Ainsi, à chaque application de  $\Phi$  sur un espace mesurable  $\Gamma$ , la grille de partition  $\alpha$  et donc  $H_\mu(\alpha)$  sont modifiés.

Soit  $h_\mu(\Phi)$  l'entropie moyenne que fait gagner  $\Phi$  à chaque application. Pour ceci nous appliquons  $\Phi$  un très grand nombre de fois. Nous calculons alors  $H_\mu(\alpha)$  pour une partition  $\alpha$  donnée et on fait la moyenne.

Cependant, il est important de noter qu'en mathématiques, le fonctionnement est inverse,  $\Phi$  ne s'applique pas sur les points mais sur les partitions. C'est pourquoi nous sommes obligés de considérer  $\Phi^{-1}$ . En effet prenons par exemple une application amplificatrice. Si nous appliquons  $\Phi$  sur les points, à un moment les points sortent de la partition fixe et nous perdons de l'information. Si nous agissons sur les partitions et que nous prenons  $\Phi$ , les cellules sont de plus en plus grandes et nous gagnons de l'information (ce n'est pas équivalent au cas où  $\Phi$  agit sur les points). Au contraire, si nous appliquons  $\Phi^{-1}$  sur la partition supposée finale, la partition diminue et nous perdons des points. Nous retrouvons donc une équivalence.

Pour imaginer tout ceci, nous pouvons considérer l'exemple de la règle à 1 dimension. Un point que nous déplaçons le long de la règle revient à faire bouger la règle dans l'autre sens du déplacement du point pour l'atteindre.

Afin d'obtenir la valeur de l'entropie métrique, considérons  $I(\mu(A))$  le manque d'information associée au micro-état  $A$  de la partition  $\alpha$ , une fonction allant de  $[0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$

$$H_\mu(\alpha) = \sum_{A \in \alpha} I(\mu(A)) \quad (\text{C.1})$$

De plus, le manque d'information doit vérifier

$$I(\mu(A) = 1) = 0 \quad (\text{C.2})$$

Il n'y a pas de manque d'information, nous savons exactement où se trouvent les points. Elle doit aussi vérifier

$$I(\mu(A) = 0) = 0 \quad (\text{C.3})$$

Car nous savons parfaitement que le système ne se trouve pas en  $A$ . Finalement de ces conditions, nous trouvons

$$H_\mu(\alpha) = \sum_{A \in \alpha} -\mu(A) \ln(\mu(A)) \quad (\text{C.4})$$

De plus pour une distribution uniforme nous avons  $\mu(A) = \frac{1}{\Omega}$  avec  $\Omega$  le nombre de micro-états total ( $\Omega = \text{card}(\alpha)$ ), alors

$$H_\mu(\alpha) = \ln(\Omega) \quad (\text{C.5})$$

**Propriété de l'entropie métrique agissant sur une partition**

Afin de définir les propriétés reliées à l'entropie, nous avons besoin de définir l'entropie relative de  $\alpha$  par rapport  $\beta$ . Nous déduisons facilement de l'équation C.4

$$H_\mu(\alpha|\beta) = \sum_{A \in \alpha, B \in \beta} -\frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} \ln \left( \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} \right) \quad (\text{C.6})$$

L'entropie est une fonction additive suivant la proposition suivante

**Proposition 10.** *Additivité de l'entropie*

On a

$$H_\mu(\alpha \vee \beta|\gamma) = H(\alpha|\beta \vee \gamma) + H(\beta|\gamma) \quad (\text{C.7})$$

avec la partition jointe  $\alpha \vee \beta = \{A \cap B / A \in \alpha, B \in \beta, A \cap B \neq \emptyset\}$ .

Si la partition  $\gamma$  correspond à l'espace total alors  $H_\mu(\alpha) = H_\mu(\alpha|\{\Gamma\})$ . Nous obtenons facilement ceci car  $\frac{\mu(A \cap \{\Gamma\})}{\mu(\{\Gamma\})} = \mu(A)$ . La proposition précédente devient donc

**Corollaire 2.**  $H_\mu(\alpha \vee \beta) = H(\alpha|\beta) + H(\beta)$

Le fait de connaître quelle partition est plus fine qu'une autre, par exemple  $\alpha \preceq \beta$ , permet de connaître l'entropie la plus grande car l'entropie est une fonction monotone de la relation de finesse. Il est alors possible de comparer les entropies entre elles.

**Proposition 11.** *Monotonie de l'entropie*

1. si  $\alpha \preceq \beta$ , alors  $H(\alpha|\gamma) \leq H(\beta|\gamma)$
2. si  $\gamma \preceq \beta$ , alors  $H(\alpha|\beta) \leq H(\alpha|\gamma)$

Si la partition  $\gamma$  correspond à l'espace total, nous obtenons facilement le corollaire suivant

**Corollaire 3.**

1. Si  $\alpha \preceq \beta$ , alors  $H(\alpha) \leq H(\beta)$
2.  $H(\alpha|\beta) \leq H(\beta)$
3.  $H(\alpha) - H(\beta) \leq H(\alpha|\beta)$

En suivant les relations de finesse entre les partitions, il est possible de montrer la sous-additivité de l'entropie

**Proposition 12.** *Sous-additivité de l'entropie*

$$H(\alpha \vee \beta|\gamma) \leq H(\alpha|\gamma) + H(\beta|\gamma) \quad (\text{C.8})$$

Si la partition  $\gamma$  correspond à l'espace total, nous obtenons facilement le corollaire suivant

**Corollaire 4.**

$$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta) \quad (\text{C.9})$$

**Proposition 13.** *Exhaustion de l'information*

Soit  $\beta_0 \preceq \beta_1 \preceq \dots \preceq \beta_n \preceq \dots$  une suite de partitions mesurables de  $\Gamma$  telle que la réunion  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$  engendre la tribu borélienne  $\mathcal{B}$ . Alors  $H(\alpha|\beta_n)$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Lemme 1.** Soient  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu)$  un espace de probabilité et  $\mathcal{C}$  une sous algèbre de Boole<sup>1</sup> de  $\mathcal{T}$  qui engendre la tribu  $\mathcal{T}$ . Alors pour tout  $B \in \mathcal{T}$  et  $\epsilon > 0$ , il existe  $C \in \mathcal{C}$  telle que  $\mu(B \Delta C) \leq \epsilon$ .

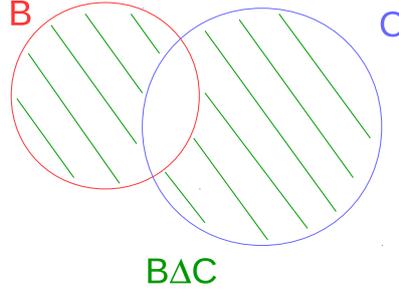


FIGURE C.3 – La partie verte représente l'union disjointe des deux ensembles  $B$  et  $C$ .

$B\Delta C = (B \cup C) - (B \cap C)$  est appelé l'union disjointe (voir graphique C.3). On sait que  $\mu(B) = \int_B d\mu(x) = \int_X \mathbb{I}_B(x) d\mu(x)$ . Or

$$\begin{aligned} \|\mathbb{I}_B - \mathbb{I}_C\|_{L^1} &= \int_X |\mathbb{I}_B(x) - \mathbb{I}_C(x)| d\mu(x) \\ &= \mu(B\Delta C) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \cup C \\ 0 & \text{si } x \in B \cap C \\ 1 & \text{sinon } (x \in (B \cup C - B \cap C)) \end{cases} \end{aligned}$$

**Lemme 2.** Soient  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu)$  un espace de probabilité, et  $\alpha$  une partition mesurable de  $\Gamma$ . Alors, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que, si  $\beta$  est une partition mesurable de  $\Gamma$  telle que pour tout  $A$  dans  $\alpha$ , il existe  $B$  dans  $\beta$  avec  $\mu(A\Delta B) \leq \epsilon$ , alors on a  $H(\alpha|\beta) \leq \eta$ .

### Propriété de l'entropie métrique agissant sur un système dynamique probabilisé

Un espace dynamique probabilisé est formé par un triplet  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu)$  avec  $\Gamma$  l'espace total,  $\mathcal{T}$  une tribu et  $\mu$  une mesure sur cette tribu. Nous passons à un système dynamique probabilisé en rajoutant une application  $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  qui préserve la mesure. Nous obtenons alors le quadruplet  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu, \Phi)$ .

**Lemme 3.** La limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \Phi^{-i}\alpha\right)$  existe. On l'appelle l'entropie de  $\Phi$  pour la partition  $\alpha$ , et on la note  $h(\Phi, \alpha) = h_\mu(\Phi(\alpha))$ .

avec  $\Phi^{-i}\alpha$  la partition  $\{\Phi^{-i}(A)/A \in \alpha\}$ .

Deux systèmes dynamiques  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu, \Phi)$  et  $(\Gamma', \mathcal{T}', \mu', \Phi')$  sont dit conjugués s'il existe une application  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  tel que

$$\psi \circ \Phi = \Phi' \circ \psi \tag{C.10}$$

presque partout<sup>2</sup>. Nous pouvons donc dire que  $\psi$  change le transformé par  $\Phi$  est équivalent à transformer par  $\Phi'$  l'image de  $x$  par  $\psi$

$$\psi(\Phi(x)) = \Phi'(\psi(x)) \tag{C.11}$$

Ce qui se résume par le schéma C.4.

1. Une algèbre de Boole est un ensemble équipé par trois types d'opérations : *et* ( $x \text{ et } y = 1$  si  $x = y = 1$  et  $x \text{ et } y = 0$  sinon), *ou* ( $x \text{ ou } y = 0$  si  $x = y = 0$  et  $x \text{ ou } y = 1$  sinon) et *non* ( $\text{non } x = 0$  si  $x = 1$  et  $x = 1$  sinon) et de deux éléments  $\{0, 1\}$ . Les éléments de l'espace obéissent à l'associativité ( $x \text{ ou } (y \text{ ou } z) = (x \text{ ou } y) \text{ ou } z$  et  $x \text{ et } (y \text{ et } z) = (x \text{ et } y) \text{ et } z$ ), la commutativité ( $x \text{ ou } y = y \text{ ou } x$  et  $x \text{ et } y = y \text{ et } x$ ), l'identité ( $x \text{ ou } 0 = 0$  et  $x \text{ et } 1 = x$ ), l'annihilation ( $x \text{ et } 0 = 0$  et  $x \text{ ou } 1 = 1$ ), l'idempotence ( $x \text{ et } x = x$  et  $x \text{ ou } x = x$ ) et l'absorption ( $x \text{ et } (x \text{ ou } y) = x$  et  $x \text{ ou } (x \text{ et } y) = x$ ) par rapport aux opérations *et* et *ou*, la distributivité de *et* sur *ou* ( $x \text{ et } (y \text{ ou } z) = (x \text{ et } y) \text{ ou } (x \text{ et } z)$ ) et le complémentaire ( $x \text{ et non } x = 0$  et  $x \text{ ou non } x = 1$ ) par l'élément *non*.

2. une propriété  $P$  est vraie presque partout si elle est vraie sur  $\Gamma \setminus F$  avec  $\mu(F) = 0$  la probabilité d'être en  $F$  est nulle.

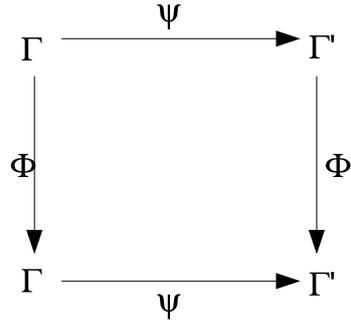


FIGURE C.4 – Représentation schématique de la formule C.11.

**Proposition 14.** *Si  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu, \Phi)$  et  $(\Gamma', \mathcal{T}', \mu', \Phi')$  sont deux systèmes dynamiques probabilisés conjugués (au sens de la mesure), alors*

$$h_\mu(\Phi) = h_{\mu'}(\Phi') \quad (\text{C.12})$$

Autrement dit l'entropie est un invariant des systèmes dynamiques probabilisés.

**Lemme 4.** *La suite  $C_n = H(\alpha | \bigvee_{i=1}^n \Phi^{-i}\alpha)$  est décroissante et converge vers  $h(\Phi(\alpha))$ .*

Les  $C_n$  sont donc des grandeurs qui permettent d'obtenir l'entropie de  $\alpha$  sachant que nous connaissons l'entropie de  $\bigvee_{i=1}^n \Phi^{-i}\alpha$ . Nous savons que l'entropie est liée au manque d'information, c'est donc le manque d'information que nous avons sur  $\alpha$  par rapport au manque d'information de  $\bigvee_{i=1}^n \Phi^{-i}\alpha$ . Le manque d'information est donc une fonction de  $\Phi$  et dépend du désordre déjà créé par  $\Phi$ . C'est grâce à cette quantité que nous obtenons l'entropie moyenne.

La proposition suivante montre que l'entropie moyenne est sous-additive et montre que l'inégalité de Rokhlin est vérifiée.

**Proposition 15.** *Soient  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu, \Phi)$  un système dynamique probabilisé et  $\alpha$  et  $\beta$  des partitions mesurables de  $\Gamma$ . Alors*

1.  $h(\Phi, \alpha \vee \beta) \leq h(\Phi, \alpha) + h(\Phi, \beta)$
2.  $h(\Phi, \alpha) - h(\Phi, \beta) \leq H(\alpha | \beta)$
3. *Pour tout  $k \geq 1$ , on a  $h(\Phi, \alpha) = h(\Phi, \bigvee_{i=0}^k \Phi^{-i}\alpha)$ . De plus, si  $\Phi$  est inversible, alors  $h(\Phi, \alpha) = h(\Phi, \bigvee_{i=-k}^k \Phi^{-i}\alpha)$*

**Proposition 16.** *Pour tout  $k \geq 1$ , on a*

$$h_\mu(\Phi^k) = kh_\mu(\Phi) \quad (\text{C.13})$$

**Définition 23.** *Partition génératrice*

*Une partition mesurable  $\alpha$  de  $\Gamma$  est dite génératrice pour  $\Phi$  si la suite des partitions  $\alpha_n = \bigvee_{i=0}^n \Phi^{-i}\alpha$  engendre la tribu  $\mathcal{T}$  ou si  $\Phi$  est inversible et si la suite des partitions  $\alpha_n = \bigvee_{i=-n}^n \Phi^{-i}\alpha$  engendre la tribu  $\mathcal{T}$ .*

**Théorème 11.** *Kolmogorov-Sinaï*

*Si  $\alpha$  est génératrice pour  $\Phi$ , alors*

$$h_\mu(\Phi) = h_\mu(\Phi, \alpha) \quad (\text{C.14})$$

**Lemme 5.** *Soient  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu)$  un espace de probabilité,  $\alpha$  une partition mesurable de  $\Gamma$ ,  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $(\Gamma, \mathcal{T})$  et  $s, t \geq 0$  avec  $s + t = 1$ . Alors*

$$sH_\mu(\alpha) + tH_\nu(\alpha) \leq H_{s\mu+t\nu}(\alpha) \leq sH_\mu(\alpha) + tH_\nu(\alpha) + \ln(2) \quad (\text{C.15})$$

**Proposition 17.** Soient  $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu, \Phi)$  un système dynamique probabilisé,  $\alpha$  une partition mesurable de  $\Gamma$ ,  $\nu$  une mesure de probabilité  $\Phi$ -invariante sur  $(\Gamma, \mathcal{T})$  et  $s, t \geq 0$  avec  $s + t = 1$ . Alors on a

1.  $h_{s\mu+t\nu}(\Phi, \alpha) = sh_{\mu}(\Phi, \alpha) + th_{\nu}(\Phi, \alpha)$
2.  $h_{s\mu+t\nu}(\Phi) = sh_{\mu}(\Phi) + th_{\nu}(\Phi)$

## C.2 Entropie topologique

Nous avons vu dans la section précédente la notion d'entropie métrique. Pour celle-ci nous avons dû définir la notion de partition mesurable. L'entropie topologique se définit à partir de recouvrements d'ouverts.

Nous travaillerons dans des espaces compacts métrisables  $\Gamma$ . Un espace est compact si il peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts. Un espace est métrisable si il est homéomorphe à un espace métrique, c'est à dire qu'il possède une application bijective continue allant de cet espace dans un espace métrique, dont la bijection réciproque est continue.

Soit  $\mathcal{U}$  une topologie.  $N(\mathcal{U})$  correspond au nombre minimum d'ouverts que nous pouvons prendre dans  $\mathcal{U}$  pour recouvrir entièrement  $\Gamma$ .

**Définition 24.** *Recouvrement ouvert*

Un recouvrement d'ouverts est un ensemble  $\mathcal{U}$  d'ouverts de  $\Gamma$  tel que  $\bigcup_{u \in \mathcal{U}} u = \Gamma$ .

Pour toute application continue  $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ , nous notons  $\Phi^{-1}\mathcal{U}$  le recouvrement ouvert  $\{\Phi^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$  de  $\Gamma$

Comme pour l'entropie métrique, nous définissons le recouvrement joint de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  par

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V / U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\} \quad (\text{C.16})$$

Si chaque ouvert de  $\mathcal{V}$  est contenu dans au moins un ouvert de  $\mathcal{U}$ , alors  $\mathcal{V}$  est plus fin que  $\mathcal{U}$  et nous notons  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ . Ces deux notions sont caractérisées par le lemme suivant

**Lemme 6.** 1. On a  $N(\Phi^{-i}\mathcal{U}) \leq N(\mathcal{U})$  avec égalité lorsque  $\Phi$  est surjective

2.  $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq N(\mathcal{U})N(\mathcal{V})$
3. Si  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ , alors  $N(\mathcal{U}) \leq N(\mathcal{V})$

Maintenant que nous avons défini ce qu'est un recouvrement d'ouverts, regardons les propriétés, définitions et lemmes associés à l'entropie topologique.

Soit  $\mathcal{O}_{\epsilon}$  le recouvrement de l'espace métrique compact par des boules de rayon  $\epsilon$

$$B(x, \epsilon) = \{y \in \Gamma, \text{dist}(x, y) < \epsilon\} \quad (\text{C.17})$$

( $y$  un point de la boule considéré et  $x$  le centre de la boule).

Soit  $F$  une partie de l'espace métrique compact  $\Gamma$ .  $F$  peut être n'importe quel morceau de  $\Gamma$ . Il peut par exemple être  $\Gamma$  lui-même, l'ensemble vide, un ensemble de points isolés de  $\Gamma$ , un ensemble de points continus de  $\Gamma$ , etc. Nous dirons que  $F$  est  $\epsilon$ -dense si les boules centrées sur les points de  $F$  permettent de recouvrir entièrement l'espace métrique compact  $\Gamma$ .

$$\Gamma = \bigcup_{x \in F} B(x, \epsilon) \quad (\text{C.18})$$

Au contraire, nous dirons que  $F$  est  $\epsilon$ -séparé si deux boules centrées sur des points de  $F$  ont une distance par rapport à leur centre supérieure à  $\epsilon$ . Ainsi les boules ne se touchent pas.

Nous définissons maintenant  $N_d(\epsilon)$  le nombre minimum de boules d'une partie de  $F$   $\epsilon$ -dense permettant de recouvrir tout  $\Gamma$ .

**Définition 25.** On note  $N_d(\epsilon)$  la borne inférieure des cardinaux des parties  $\epsilon$ -denses de  $\Gamma$ .

$$N_d(\epsilon) = \inf_{F\epsilon\text{-dense}} N(\mathcal{U}_F^\epsilon) \quad (\text{C.19})$$

avec  $\mathcal{U}_F^\epsilon$  recouvrement de boules de rayon  $\epsilon$  de  $F$ .

Soit  $N'_d(\epsilon)$  la borne supérieure des cardinaux des parties  $\epsilon$ -séparées. Pour obtenir ce nombre, nous prenons toutes les parties  $\epsilon$ -séparées. Pour chacune nous cherchons le recouvrement qui nécessite le moins de boules de rayon  $\epsilon$  et nous choisissons celle qui a le plus grand nombre de boules (dans son recouvrement minimum de boules).

**Lemme 7.** Pour tout  $\epsilon > 0$ , on a les inégalités

$$N'_d(2\epsilon) \leq N_d(\epsilon) \leq N'_d(\epsilon) \quad (\text{C.20})$$

**Lemme 8.** Soient  $\Gamma$  un espace topologique compact,  $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  une application continue et  $\mathcal{U}$  un recouvrement d'ouverts de  $\Gamma$ . Alors la suite des  $\frac{1}{n} \ln \left[ N \left( \bigvee_{i=0}^{n-1} \Phi^{-i}\mathcal{U} \right) \right]$  admet une limite finie quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Nous notons cette limite

$$h(\Phi, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[ N \left( \bigvee_{i=0}^{n-1} \Phi^{-i}\mathcal{U} \right) \right] \quad (\text{C.21})$$

qui représente l'entropie de  $\Phi$  pour le recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$ .

**Définition 26.** On appelle entropie topologique de  $\Phi$ , et on note  $h_{top}(\Phi)$  l'élément de  $[0, +\infty]$  suivant

$$h_{top}(\Phi) = \sup_{\mathcal{U}} H(\Phi, \mathcal{U}) \quad (\text{C.22})$$

Nous avons l'équivalence suivante entre des dynamiques topologiquement conjuguées

**Proposition 18.** Soient  $(\Gamma, \Phi)$ ,  $(\Upsilon, \Psi)$  des systèmes dynamiques topologiques (topologiquement) conjugués, avec  $\Gamma, \Upsilon$  métrisables compacts. Alors

$$h_{top}(\Phi) = h_{top}(\Psi) \quad (\text{C.23})$$

**Proposition 19.** On a

$$h_{top}(\Phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_{d_n \Phi}(\epsilon) \right) \quad (\text{C.24})$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N'_{d_n \Phi}(\epsilon) \right) \quad (\text{C.25})$$

Considérons un recouvrement d'ouverts  $\mathcal{U}$  de  $\Gamma$ . Comme le montre la figure C.5, les ouverts possèdent un plus grand diamètre. Nous appelons  $diam(\mathcal{U})$  le plus grand diamètre des ouverts  $U$  de  $\mathcal{U}$ .

**Corollaire 5.** Soit  $\mathcal{U}_n$  une suite de recouvrement d'ouverts de  $\Gamma$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} diam(\mathcal{U}_n) = 0$ , alors

$$h_{top} = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\Phi, \mathcal{U}_n) \quad (\text{C.26})$$

**Proposition 20.** Soient  $\Gamma$  un espace topologique compact,  $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  une application continue et  $\mathcal{U}$  un recouvrement d'ouverts de  $\Gamma$ .

1. Pour tout  $k \geq 1$ , on a  $h(\Phi, \mathcal{U}) = h(\Phi, \bigvee_{i=0}^k \Phi^{-i}\mathcal{U})$  et, si  $\Phi$  est inversible, alors  $h(\Phi, \mathcal{U}) = h(\bigvee_{i=-k}^k \Phi^{-i}\mathcal{U})$
2. Pour tout  $k \geq 1$ , on a  $h_{top}(\Phi^k) = kh_{top}(\Phi)$

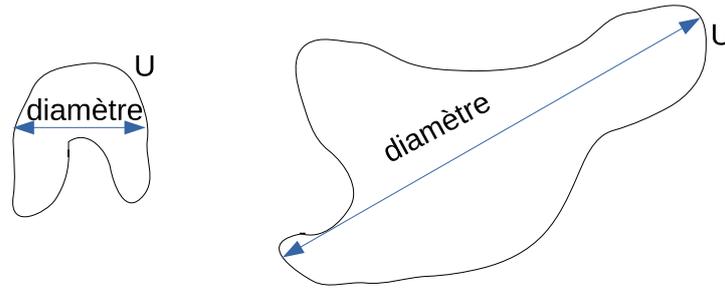


FIGURE C.5 – Exemple d'ouverts où "diamètre" représente les diamètres des ouverts  $U$  de  $\mathcal{U}$ .

**Définition 27.** Un recouvrement d'ouverts  $\mathcal{U}$  de  $\Gamma$  est dit *générateur* pour  $\Phi$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bigvee_{i=0}^n \Phi^{-i}\mathcal{U}) = 0$  ou si  $\Phi$  est inversible et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{diam}(\bigvee_{i=-n}^n \Phi^{-i}\mathcal{U})) = 0$ .

Ceci signifie qu'il n'y a pas d'ouvert de  $\mathcal{U}$  (ou de morceau d'ouvert de  $\mathcal{U}$ ) qui ne soit pas recoupé à un moment ou à un autre par les pré-images  $\Phi^{-i}\mathcal{U}$ . Les découpes successives sont telles que les morceaux sont de plus en plus petits pour devenir infinitésimaux.

**Théorème 12.** Si  $\mathcal{U}$  est générateur pour  $f$ , alors  $h_{\text{top}}(\Phi) = h(\Phi\mathcal{U})$ .

**Définition 28.** Soit  $(\Gamma, \text{dist})$  un espace métrique compact. Une application continue  $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  est dite *expansive* s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que, si  $x \neq y$  alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{dist}(\Phi^n(x), \Phi^n(y)) \geq \epsilon \quad (\text{C.27})$$

ou si  $\Phi$  est inversible et s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que, si  $x \neq y$  alors

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \text{dist}(\Phi^n(x), \Phi^n(y)) \geq \epsilon \quad (\text{C.28})$$

**Théorème 13.** *Principe variationnel*

Soient  $\Gamma$  un espace métrique compact et  $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  une application continue. Alors on a l'égalité

$$h_{\text{top}}(\Phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\Gamma)^\Phi} h_\mu(\Phi) \quad (\text{C.29})$$

avec  $\mathcal{M}(\Gamma)^\Phi$  l'espace des mesures de probabilités boréliennes  $\Phi$ -invariantes sur  $\Gamma$

## Annexe D

# Partition de l'exponentielle ordonnée en temps

**Corollaire 6.** Soit  $s \rightarrow A(s) \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$  une famille d'opérateurs auto-adjoints bornés de l'espace de Hilbert  $\mathcal{V}$ . Soit  $s \rightarrow U_A(s) \in \mathcal{U}(\mathcal{V})$  un opérateur unitaire fortement continu par rapport à  $s$  et solution de l'équation

$$U'_A = -AU_A \quad U_A(0) = I_{\mathcal{V}} \quad (\text{D.1})$$

Soit  $s \rightarrow B(s) \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$  une autre famille d'opérateurs auto-adjoints bornés. Nous avons

$$U'_{A+B} = -(A+B)U_{A+B} \quad (\text{D.2})$$

$$\Rightarrow U_{A+B} = U_X U_A \quad (\text{D.3})$$

avec  $X = A + B - U_X A U_X^{-1}$

*Démonstration.*

$$U_{A+B} = U_X U_A \Rightarrow U'_X U_A + U_X U'_A = -(A+B)U_{A+B} \quad (\text{D.4})$$

$$\Rightarrow -X U_X U_A - U_X A U_A = -(A+B)U_X U_A \quad (\text{D.5})$$

$$\Rightarrow X U_X + U_X A = A U_X + B U_X \quad (\text{D.6})$$

$$\Rightarrow X = A + B - U_X A U_X^{-1} \quad (\text{D.7})$$

□



# Bibliographie

- [1] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phase change during a cyclic quantum evolution*, Phys. Rev. Lett., **58** 1593 (1987)
- [2] O. Andersson and H. Heydari, *Operational geometric phase for mixed quantum states*, New J. Phys., **15** 053006 (2013)
- [3] L. Aolita, F. de Melo and L. Davidovich, *Open-System Dynamics of Entanglement : a key issues review*, Reports on Progress in Physics, **78** 042001 (2015)
- [4] V.I. Arnold and A. Avez, *Ergodic Problems in Classical Mechanics*, Benjamin, New York (1968)
- [5] B. Aulbach and B. Kieninger, *On Three Definitions of Chaos*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, **1** 23-37 (2001)
- [6] J.E. Avron and A. Elgart, *Adiabatic theorem without gap condition : Two-level system coupled to quantized radiation field*, Commun. Math. Phys., **203** 445-463 (1999)
- [7] Y. Benoist et F. Paulin, *Systèmes dynamiques élémentaires*, Ecole Normale Supérieurs
- [8] L. Barrera, A. García and P.C. López Vásquez, *Non equilibrium stationary states of a kicked linear chain of spins coupled to a heat bath*, arXiv, 1611.01727 [quant-ph] (2016)
- [9] M.V. Berry, *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proc. R. Soc. Lond. A, **392** 45-57 (1984)
- [10] L.S. Block and W.A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Springer Lecture Notes, Springer Verlag, Berlin, **1513** (1992)
- [11] A. Bohm and A. Mostafazadeh, *The relation between the Berry and the Anandan–Aharonov connections for  $U(N)$  bundles*, J. Math. Phys., **35** 1463 (1994)
- [12] T. Boness, M.M.A. Stocklin and T.S. Monteiro, *Quantum chaos with spin-chains in pulsed magnetic fields*, arXiv, quant-ph/0612074 (2006)
- [13] T. Boness, K. Kudo and T.S. Monteiro, *Doubly excited ferromagnetic spin chain as a pair of coupled kicked rotors*, Phys. Rev. E, **81** 046201 (2010)
- [14] M. Born and V. Fock. *Beweis des adiabatsatzes*, Z. Phys., **51** 165-180 (1928)
- [15] S. Bose, *Quantum communication through spin chain dynamics : an introductory overview*, Contemporary Phys., **48** 13-30 (2007)
- [16] S. Bose, *Quantum Communication through an Unmodulates Spin Chain*, Phys. Rev. Lett., **91** 207901 (2003)
- [17] M. Bruderer, K. Franke, S. Ragg, W. Belzig and D. Obreschkow, *Exploiting boundary states of imperfect spin chains for high-fidelity state transfer*, Phys. Rev. A, **85** 022312 (2012)
- [18] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*, Springer-Verlag, Berlin, (1979)
- [19] H.-P. Breuer & F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*, Oxford university press, New York (2002)
- [20] H. Brox, J. Bergli, Y.M. Galperin, *Importance of level statistics in the decoherence of a central spin due to a spin environment*, Phys. Rev. A, **85** 052117 (2012)
- [21] M. Budišić, R. Mohr and I Mezić, *Applied Koopmanism*, Chaos, **22** 047510 (2012)

- [22] M. Castagnino, S. Fortin and O. Lombardi, *Suppression of decoherence in a generalisation of the spin-bath model*, J. Phys. A : Math. Theor., **43** 065304 (2010)
- [23] C. Castelnovo, R. Moessner and S.L. Sondhi, *Magnetic monopoles in spin ice*, Nature L., **451** 42-45 (2008)
- [24] G. Chen and T. Ueta, *Yet Another Chaotic Attractor*, Int. J. Bifurc. Chaos, **9** 1465 (1999)
- [25] J. Dajka, J. Łuczka and P. Hänggi, *Geometric phase as a determinant of a qubit-environment coupling*, Quantum Inf. Process., **10** 85 (2011)
- [26] V.A.Davydov, N.V.Davydov, V.G.Morozov, M.N.Stolyarov and T.Yamaguchi, *Autowaves in the moving excitable media*, Condens. Matter. Phys., **7** 565-578 (2004)
- [27] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, second ed., Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA (1989)
- [28] J. Duarte, C. Januário and N. Martins, *Topological entropy and the controlled effect of glucose in the electrical activity of pancreatic  $\beta$ -cells*, Physica D, **238** 2129-2137 (2009)
- [29] J. Duarte, L. Silva and J. Sousa Ramos, *Computation of the topological entropy in chaotic biophysical bursting models for excitable cells*, Discrete Dynamics in Nature and Society, **2006** 60918 (2006)
- [30] T. Eisner, B. Farkas, M. Haase and R. Nagel, *Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory*, Springer, New York (2015)
- [31] K. Eckert, O. Romero-Isart and A. Sanpera, *Efficient quantum state transfer in spin chains via adiabatic passage*, New J. of Phys., **9** 155 (2007)
- [32] Z. Elhadj and J.C. Sprott, *Simplest 3D Continuous-Time Quadratic Systems as Candidates for Generating Multiscroll Chaotic Attractors*, Int. J. Bifurc. Chaos, **23** 1350120 (2013)
- [33] C. Elphick, E. Meron and E. A. Spiegel, *Spatiotemporal Complexity in Traveling Patterns*, Phys. Rev. Lett., **61** 496 (1988)
- [34] F.H.L. Essler and M. Fagotti, *Quench dynamics and relaxation in isolated integrable quantum spin chains*, J. Stat. Mech. : Theor. and Experiment, **2016** 064002 (2016)
- [35] A. Fleisher and N. Moiseyev, *Adiabatic theorem for non-Hermitian time-dependent open systems*, Phys. Rev. A, **72** 032103 (2005)
- [36] A.J. Fisher, *Graduate course on open quantum systems* (2004)
- [37] G. Floquet, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, de l'E.N.S, **12** 47-88 (1883)
- [38] S.J. Glaser, U. Boscain, T. Calarco, C.P. Koch, W. Köckenberger, R. Kosloff, I. Kuprov, B. Luy, S. Schirmer, T. Schulte-Herbrüggen, D. Sugny and F.K. Wilhelm, *Training Schrödinger's cat : quantum optimal control*, Eur. Phys. J. D, **69** 279 (2015)
- [39] A. Gubin and L.F. Santos, *Quantum chaos : An introduction via chains of interacting spins 1/2*, Am. J. Phys., **80** 246 (2012)
- [40] S. Guérin and H.R. Jauslin, *Control of Quantum Dynamics by Laser Pulses : Adiabatic Floquet Theory*, Adv. Chem. Phys., **125** 147 (2003)
- [41] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer, New York (2010)
- [42] J. Herbrych, J. Kokalj and P. Prelovšek, *Local spin relaxation within the random Heisenberg chain*, Phys. Rev. Lett, **111** 147203 (2013)
- [43] L.D.C. Jaubert and P.C.W. Holdsworth, *Magnetic Monopole Dynamics in Spin Ice*, J. Phys. : Cond. Matter, **23** 164222 (2011)
- [44] A. Joye, F. Monti, S. Guérin and H.R. Jauslin, *Adiabatic evolution for systems with infinitely many eigenvalue crossings*, J. Math. Phys., **40** 5456 (1999)
- [45] H.R. Jauslin, O. Sapin, S. Guérin and W.F. Wreszinski, *Upper quantum Lyapunov exponent and parametric oscillators*, J. Math. Phys., **45** 4377 (2004)

- [46] J. Karthik, A. Sharma and A. Lakshminarayan, *Entanglement, avoided crossings, and quantum chaos in an Ising model with a tilted magnetic field*, Phys. Rev. A, **75** 022304 (2007)
- [47] T. Kato, *On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics*, J. Phys. Soc. Jpn, **5** 435-439 (1950)
- [48] K. Kawamura, *The Perron-Frobenius operators, invariant measures and representations of the Cuntz-Krieger algebras*, J. Math. Phys, **46** 083514 (2005)
- [49] C. Kawan, *Topological Entropie - A Survey*, Augsburg University (2013)
- [50] B.O. Koopman and J von Neumann, *Dynamical Systems of Continuous Spectra*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **18** 255 (1932)
- [51] J. Lages, V.V. Dobrovitski, M.I. Katsnelson, H.A. De Raedt and B.N. Harmon, *Decoherence by a chaotic many-spin bath*, Phys. Rev. E, **72** 026225 (2005)
- [52] J. Lages and D.L. Shepelyansky, *Suppression of quantum chaos in a quantum computer hardware*, Phys. Rev. E, **74** 026208 (2006)
- [53] Y.-C. Lai, *Analytic signals and the transition to chaos in deterministic flows*, Phys. Rev. E, **58** R6911 (1998)
- [54] A. Lakshminarayan and V. Subrahmanyam, *Multipartite entanglement in a one-dimensional time dependent Ising model*, Phys. Rev. A, **71** 062334 (2005)
- [55] N.P. Landsman, *C \* -Algebras, Hilbert C \* -modules and Quantum Mechanics*, Lecture Notes, arXiv, math-ph/9807030 (1998)
- [56] Lev D. Landau, *A theory of energy transfer II*, Physik. Z. Sowjet., **2** 46 (1932)
- [57] A Lasota and M.C. Mackey, *Chaos, fractals and noise*, Springer, New York (1994)
- [58] T.-Y. Li and J. A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** 985 (1975)
- [59] S. Lorenzo, T. J. G. Apollaro, A. Sindona and F. Plastina, *Quantum-state transfer via resonant tunneling through local-field-induced barriers*, Phys. Rev. A, **87** 042313 (2013)
- [60] J. Lü, G. Chen and D. Cheng, *A New Chaotic System and Beyond : the Generalized Lorenz-Like System*, Int. J. Bifurc. Chaos, **14** 1507-1537 (2004)
- [61] D. Lucarelli, *Control aspects of holonomic quantum computation*, J. Math. Phys., **46** 052103 (2005)
- [62] A. Mauroy and I. Mezic, *Global stability analysis using the eigenfunctions of the Koopman operator*, IEEE Transactions on Automatic Control, **61** 3356-3369 (2016)
- [63] J.D. Meiss, *Visual explorations of dynamics : The standard map*, PRAMANA- J. Phys., **70** 965 (2008)
- [64] A. Messiah, *Mecanique quantique*, volume 2, Dunod, Paris (1959)
- [65] B. Milek and P. Seba, *Singular continuous quasienergy spectrum in the kicked rotator with separable perturbation : Possibility of the onset of quantum chaos*, Phys. Rev. A, **42** 3213 (1990)
- [66] D.J.Moore, *The calculation of nonadiabatic Berry phases*, Physics Reports, *210* 1-43 (1991)
- [67] H. Narnhofer and W. Thirring, *Adiabatic theorem in quantum statistical mechanics*, Phys. Rev. A, **26** 3646 (1982)
- [68] M. Miyamoto and A. Tanaka, *Cheon's anholonomies in Floquet operators*, Phys. Rev A, **76** 042115 (2007)
- [69] G. Nenciu, *On the adiabatic theorem of quantum mechanics*, Journal of Physics A : Math. Gen., **13** L15 (1980)
- [70] A. Perelomov, *Generalized coherence states and their applications*, Springer Verlag (1986)
- [71] C. Pineda and T. Prosen, *Universal and nonuniversal level statistics in a chaotic quantum spin chain*, Phys. Rev. E, **76** 061127 (2007)
- [72] L.M. Pismen, *Chaotic wave trains*, Phys. Rev. A, **39** 6604 (1989)
- [73] T. Prosen, *Exact time-correlation functions of quantum Ising chain in a kicking transversal magnetic field*, Prog. Theor. Phys. Suppl., **139** 191 (2000)

- [74] T. Prosen and T.H. Seligman, *Decoherence of spin echoes*, J. Phys. A : Math. Gen., **35** 4707 (2002)
- [75] T. Prosen, *General relation between quantum ergodicity and fidelity of quantum dynamics*, Phys. Rev. E, **65** 036208 (2002)
- [76] T. Prosen, *Ruelle resonances in kicked quantum spin chain*, Phys. D, **187** 244 (2004)
- [77] A. Rabinovitch, M. Gutman, Y. Biton and I. Aviram, *Chaotic wave trains in an oscillatory/excitable medium*, Phys. Lett. A, **360** 84-91 (2006)
- [78] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics III Scattering theory*, Academic Press, New York (1979)
- [79] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I Functional analysis*, Academic Press, New York (1980)
- [80] D. Rossini, T. Calarco, V. Giovannetti, S. Montangero and R. Fazio, *Decoherence induced by interaction quantum spin baths*, Phys. Rev. A, **75** 032333 (2007)
- [81] O.E. RöSSLer, *An equation for continuous chaos*, Phys. Lett. A, **57** 397-398 (1976)
- [82] M.N. Sinha Roy, P. Titum and J.K. Bhattacharjee, *Reaction diffusion equation in the ultra cold coexisting atomic and molecular condensates and the importance of Feshbach interaction*, Eur. Phys. J. D, **58** 23-28 (2010)
- [83] G.E. Santoro and E. Tosatti, *Optimization using quantum mechanics : quantum annealing through adiabatic evolution*, J. Phys. A : Math Gen, **39** R393 (2006)
- [84] O. Sapin, H.R. Jauslin and S. Weigert, *Upper Quantum Lyapunov Exponent and Anosov Relations for Quantum Systems Driven by a Classical Flow*, J. Stat. Phys., **127** 699 (2007)
- [85] M.S. Sarandy and D.A. Lidar, *Adiabatic approximation in open quantum systems*, Phys. Rev. A, **71** 012331 (2005)
- [86] M.S. Sarandy and D.A. Lidar, *Abelian and non-Abelian geometric phases in adiabatic open quantum systems*, Phys. Rev. A, **73** 062101 (2006)
- [87] G. Sardanashvily, *Classical and quantum mechanics with time-dependent parameters*, J. Math. Phys., **41** 5245 (2000).
- [88] A. Sengupta, *Chaos, Nonlinearity, Complexity*, Springer, New York (2006)
- [89] Z. C. Shi, L. Zhao and X. X. Yi, *Robust state transfer with high fidelity in spin-1/2 chains by Lyapunov control*, Phys. Rev. A, **91** 032301 (2015)
- [90] K. Shiokawa and B.L. Hu, *Environment-Induced Effects on Quantum Chaos : Decoherence, Delocalization and Irreversibility*, arXiv, hep-th/9501054 (1995)
- [91] E. Sjöqvist, A.K. Pati, A. Ekert, J.S. Anandan, M. Ericsson, D.K.L. Oi and V. Vedral, *Geometric phases for Mixed States in Interferometry*, Phys. Rev. Lett., **85** 2845 (2000)
- [92] J.C. Sprott, *Some simple chaotic flows*, Phys. Rev. E **50** R647 (1994)
- [93] A. Streltsov, G. Adesso and M.B. Plenio, *Colloquium : Quantum Coherence as a Resource*, ArXiv, 1609.02439 [quant-ph] (2016)
- [94] S. Teufel, *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics*, Springer, Berlin (2003)
- [95] D.M.Tong, E. Sjöqvist, L.C.Kwek, C.H. Oh and M. Ericsson, *Relation between geometric phases of entangled bipartite systems and their subsystems*, Phys. Rev. A., **68** 022106 (2003)
- [96] T. Verkholyak and J. Streckačka, *Low-Temperature Thermodynamics of Spin-1/2 Orthogonal-Dimer Chain with Ising and Heisenberg Interactions*, Acta Phys. Polonica A, **126** 22 (2014)
- [97] D. Viennot, *Principal bundle structure of quantum adiabatic dynamics with a Berry phase which does not commute with the dynamical phase*, J. Math. Phys., **46** 072102 (2005).
- [98] D. Viennot, *Geometry of quantum active subspaces and of effective Hamiltonians*, J. Math. Phys., **48** 052102 (2007)

- [99] D. Viennot, *Geometric phases in adiabatic Floquet theory, Abelian gerbes and Cheon's anholonomy*, J. Phys. A : Math. Theor., **42** 395302 (2009)
- [100] D. Viennot and J. Lages , *A new kind of geometric phases in open quantum systems and higher gauge theory*, J. Phys. A : Math. Theor., **44** 365301 (2011)
- [101] D. Viennot and J. Lages,  *$C^*$ -geometric phase for mixed states : entanglement, decoherence and the spin system*, J. Phys. A : Math. Theor., **45** 365305 (2012)
- [102] D. Viennot, A. Lecler, J. Jolicart an J.P. Killingbeck, *Consistency between adiabatic and non-adiabatic geometric phases for non-self-adjoint Hamiltonians*, J. Phys. A : Math. Theor., **45** 335301 (2012)
- [103] P. Vivo, M. P. Pato and G. Oshanin, *Random pure states : quantifying bipartite entanglement beyond the linear statistics*, Phys. Rev. E, **93** 052106 (2016)
- [104] P.R. Wells Jr., C.M. Chaves, J.A.e. Castro and Belita Koiller, *Quantum and classical correlations and Werner states in finite spin linear arrays*, arXiv, 1305.5818 (2013)
- [105] F. Wilczek and A. Zee, *Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical Systems*, Phys. Rev. Lett, **52** 2111 (1984)
- [106] Q. Xu, G. Sadiek and S. Kais, *Dynamics of entanglement in a two-dimensional spin system*, Phys. Rev. A, **83** 062312 (2011)
- [107] L.-S. Young, *Mathematical theory of Lyapunov exponents*, J. Phys. A : Math. Theor., **46** 254001 (2013)
- [108] P. Zanardi and M. Rasetti, *Holonomic quantum computation*, Phys. Lett. A, **264** 94 (1999)
- [109] C. Zener, *Non-Adiabatic Crossing of Energy Levels*, Proc. R. Soc. Lond., **137** 696 (1932)
- [110] H. Zhao, S.-M. Fei, J. Fan and Z.-X. Wang, *Inequalities detecting entanglement for arbitrary bipartite systems*, Int. J. Quant. Inf., **12** 1450013 (2014)
- [111] Z. Zhou, S.I. Chu and S. Han, *Relaxation and decoherence in a resonantly driven qubit*, J. Phys. B : At. Mol. Pot. Phys., **41**, 045506 (2008)