HAL open science

# Modélisation géométrique et reconstruction de formes équipées de capteurs d'orientation

Mathieu Huard

**To cite this version:**

Mathieu Huard. Modélisation géométrique et reconstruction de formes équipées de capteurs d'orientation. Géométrie symplectique [math.SG]. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENM090 . tel-01548290

**HAL Id: tel-01548290**

**https://theses.hal.science/tel-01548290v1**

Submitted on 27 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

# THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par


## Mathieu Huard


Thèse dirigée par **Luc Biard**
et encadrée par **Nathalie Sprynski**

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann**
et du **Laboratoire de Fonctionnalisation et Automatisation des Objets** du **CEA-Leti**
dans **l'École Doctorale MSTII**

# Modélisation Géométrique et Reconstruction de Formes Equipées de Capteurs d'Orientation

Thèse soutenue publiquement le **23 Septembre 2013**,
devant le jury composé de :

**M. Christian GOUT**
Professeur – Insa Rouen – Rapporteur
**M. Marc NEVEU**
Professeur – Université de Bourgogne – Rapporteur
**M. Marc DANIEL**
Professeur – Université d'Aix-Marseille – Examinateur
**Mme Stefanie HAHMANN**
Professeur – Grenoble INP – Examinatrice
**M. Luc BIARD**
Maître de Conférences – Université Joseph Fourier – Directeur de Thèse
**Mme Nathalie SAGUIN SPRYNSKI**
Docteur – CEA – Encadrante de Thèse

*Université Joseph Fourier / Université Pierre Mendès France /*
*Université Stendhal / Université de Savoie / Grenoble INP*

# Table des matières


**1 Stratégie pour la reconstruction à partir de capteurs d'orientation** **7**
1.1 Préliminaires géométriques . . . . . 8
1.2 Contexte technologique . . . . . 10
1.2.1 Les capteurs d'orientation . . . . . 10
1.2.2 Le ruban Morphosense . . . . . 11
1.2.3 Exemples d'applications . . . . . 13
1.3 Problématique de la reconstruction à partir de données d'orientation . . . . . 14
1.3.1 Le cas des courbes . . . . . 14
1.3.2 Le cas des surfaces . . . . . 14
1.4 Travaux précédents . . . . . 16
1.4.1 Reconstruction de courbes . . . . . 16
1.4.2 Reconstruction de surfaces . . . . . 17
1.5 Objectifs et travaux réalisés . . . . . 21
1.5.1 Reconstruction spline PH $C^2$ de la courbe ruban . . . . . 21
1.5.2 Exploitation de l'intégralité des données capteurs . . . . . 22
1.5.3 Acquisition et reconstruction de surfaces . . . . . 24
1.5.4 Métrologie pour la reconstruction . . . . . 29
1.6 Organisation et positionnement des travaux . . . . . 32

**2 Interpolation spline PH sous contraintes de longueur** **35**
2.1 Introduction . . . . . 36
2.2 Courbes PH spatiales . . . . . 36
2.2.1 Généralités . . . . . 36
2.2.2 Cas cubique et quintique . . . . . 37
2.3 Splines PH quintiques à dérivées première et seconde continues . . . . . 37
2.4 Interpolation de points sous contraintes de longueur . . . . . 38
2.4.1 Description de la méthode . . . . . 38
2.4.2 Initialisation des coefficients . . . . . 40
2.4.3 Implémentation de la méthode . . . . . 41
2.4.4 Exemples numériques . . . . . 42
2.5 Interpolation $C^2$ de dérivées sous contraintes de longueur . . . . . 46
2.5.1 Description de la méthode . . . . . 46
2.5.2 Initialisation des coefficients . . . . . 48
2.5.3 Exemples numériques . . . . . 48
2.6 Conclusion . . . . . 51

**3 Interpolation de Hermite sur la sphère** **54**
3.1 Préliminaires et objectifs . . . . . 54
3.2 Approche analytique rationnelle de degré 4 . . . . . 55
3.2.1 Projection stéréographique généralisée . . . . . 56
3.2.2 Interpolation de deux points et de vecteurs dérivés associés . . . . . 56

3.2.3 Solution au problème d'interpolation de Hermite sur la sphère . . . . . 57
3.3 Solutions itératives pseudo-$C^k$ (ou $G^k$) . . . . . 58
3.3.1 Slerp et applications à la construction de courbes splines sur la sphère . . 58
3.3.2 Solution itérative pseudo-$C^1$ de type cubique . . . . . 59
3.3.3 Solution itérative pseudo-$C^2$ (ou $G^2$) de type cubique . . . . . 60
3.3.4 Comparaison des méthodes . . . . . 61
3.4 Application au Morphosense . . . . . 61

**4 Des rubans aux surfaces développables 68**
4.1 Surfaces développables et quasi-développables . . . . . 68
4.2 Identification et reconstruction de surfaces développables . . . . . 70
4.2.1 Segmentation à l'aide du cylindre de Blaschke . . . . . 71
4.3 Approche continue pour les développées tangentielles . . . . . 73
4.4 Résultats . . . . . 74
4.5 Tolérance pour la méthode aux moindres carrés . . . . . 74

**5 Surfaces quasi-développables délimitées par un réseau de courbes géodésiques 78**
5.1 Principe de l'interpolation géodésique . . . . . 78
5.1.1 Contexte . . . . . 78
5.1.2 Interpolation géodésique . . . . . 79
5.1.3 Le cas $n > 4$ . . . . . 80
5.2 Splitting . . . . . 80
5.2.1 Direction des géodésiques manquantes pour une surface développable . . . 83
5.2.2 Le cas des surfaces coniques ou cylindriques . . . . . 84
5.2.3 Processus de reconstruction . . . . . 85
5.3 Résultats . . . . . 90

**6 Surfaces délimitées par des géodésiques planaires 95**
6.1 Fermeture et stratégie de reconstruction . . . . . 96
6.1.1 Conditions de croisement pour des géodésiques planaires . . . . . 96
6.1.2 Caractérisation d'un contour géodésique planaire . . . . . 96
6.1.3 Stratégie de reconstruction illustrée sur un exemple . . . . . 97
6.2 Mise à plat et relèvement . . . . . 97
6.2.1 Mise à plat . . . . . 99
6.2.2 Relèvement . . . . . 101
6.2.3 Construction de séquences 2D admissibles pour le relèvement . . . . . 102
6.2.4 Courbe $G^2$-orthogonale à une séquence de droites périodique . . . . . 105
6.3 Identification des contours admissibles dans le cas de géodésiques planaires . . . 106
6.4 Résultats . . . . . 106

**Conclusion 110**

# Résumé

*Ce travail de thèse en Mathématiques Appliquées a été effectué au sein du service Capteurs et Systèmes Electroniques (SCSE) au CEA-Leti (Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives - Laboratoire d'Electronique et Technologies de l'Information), organisme majeur de la recherche publique française implanté à Grenoble. Il s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire de mathématiques appliquées Jean Kuntzmann (LJK) de l'Université Joseph Fourier (UJF).*

*Le Leti développe des systèmes de capteurs de données terrestres (magnétomètres, accéléromètres...) capables de se géoréférencer de manière autonome. Placés sur des objets, ces dispositifs de capteurs fournissent leur orientation propre dans l'espace, et ouvrent donc un vaste champ d'applications dans le domaine de l'acquisition et la reconstruction de formes.*

*Le problème de la reconstruction de surfaces à partir de données d'orientation non structurées est par essence un problème mal posé. Cependant, des travaux précédents effectués au Leti ont permis de dégager un protocole fournissant un cadre valide pour le processus de reconstruction. Les capteurs ont été intégrés dans les rubans Morphosense : ces rubans souples équipés de noeuds de capteurs selon une géométrie connue permettent ainsi le développement d'algorithmes de reconstruction de la courbe suivie par le ruban. L'application de rubans Morphosense sur une surface physique permet alors d'acquérir la famille des courbes suivies par les rubans et tracées sur la surface. Il s'agit ensuite d'exploiter le réseau des courbes ainsi obtenues pour reconstruire la surface.*

*Dans un premier temps, nous revisitons la question de la reconstruction du ruban. Nous proposons des algorithmes de reconstruction de la courbe 3D suivie par le ruban Morphosense prenant maintenant en compte l'intégralité des données fournies par les capteurs d'orientation, ainsi que les propriétés mécaniques du ruban qui le conduisent à suivre des courbes géodésiques sur une surface. De ce point de vue, la reconstruction peut être considérée comme optimale.*

*On étudie ensuite un ensemble de méthodes pour la reconstruction de surfaces à partir d'un réseau de courbes rubans. Dans le cas général, un tel type de réseau conduit à des problèmes de fermeture et d'estimation de données manquantes. La question de la fermeture, d'ordre essentiellement numérique et liée à des contraintes différentielles, concerne le réseau des courbes et la difficulté d'obtenir des contours fermés. La question cruciale de l'estimation des données manquantes traduit le fait qu'aucune information sur la surface n'est connue et accessible en dehors du réseau des courbes rubans.*

*Afin de s'affranchir de ces problèmes et de proposer des solutions pratiques pour la reconstruction, il est nécessaire de faire des hypothèses sur le modèle de surfaces à reconstruire ou sur la topologie de réseau de courbes acquises. Les méthodes développées s'inscrivent donc dans l'une des deux approches suivantes.*

- *D'une part des méthodes de reconstruction de surfaces développables et quasi-développables, qui modélisent de manière satisfaisante les surfaces étudiées dans le cadre de nombreuses applications.*
- *D'autre part des méthodes de reconstruction à partir d'une topologie spécifique de réseaux de courbes (courbes quasi-planaires, contour ouvert), permettant de résoudre le problème de fermeture.*

*L'ensemble des méthodes proposées dans ces travaux permet ainsi de formuler un processus global de reconstruction de surfaces, qu'il est possible d'adapter aux problèmes étudiés en pratique, afin de proposer une solution à la fois simple et précise dans chaque cas.*

*La validation des résultats dans le cadre des données réelles fournies par les rubans Morphosense nous a conduit à développer des dispositifs métrologiques. Enfin, notons que le contexte général des données d'orientation étudié ici soulève des problématiques peu classiques, voire nouvelles, auxquelles nous avons essayé d'apporter des solutions originales, en particulier au travers d'algorithmes d'interpolation et d'optimisation.*

# Abstract

*This PhD thesis in applied mathematics was conducted within the Electronic Systems and Sensors department of the CEA-Leti (Atomic Energy and Alternative Energies Commission - Laboratory for Electronics and Information Technologies), a major organism for technological research located in Grenoble, France. This work originated from a partnership with the applied mathematics laboratory (LJK) of the Joseph Fourier university (UJF).*

*The Leti develops embedded systems equiped with micro-sensors (magnetometers, accelerometers...) from which it is possible to retrieve informations about their spatial orientation. These systems allow for innovative applications in the field of shape acquisition and reconstruction.*

*The problem of reconstructing surfaces from unstructured orientation data is ill-posed. However, previous work done within the Leti came up with a valid reconstruction protocol. The micro-sensors were integrated into the Morphosense ribbon : this flexible ribbon instrumented with sensor knots according to a known geometry is at the core of a number of reconstruction algorithms for the curves followed by the ribbon. When lied on a physical surface, Morphosense ribbons then allow the acquisition and reconstruction of a network of curves on the surface, that are then used for the reconstruction of the entire surface.*

*We first propose new algorithms for curve reconstruction thanks to the Morphosense ribbon. Those new methods now integrate the orientation informations provided by the sensors in their entirety, as well as the mechanical properties of the ribbon that force it to follow geodesic curves on a surface. From this point of view, the curve reconstruction can be considered optimal, as it integrates all the information embedded in the ribbons' structure.*

*We then study a set of methods for the reconstruction of surfaces using a network of ribbon curves. Such a network generally leads to problems linked to the closure of the network and missing data estimation. The closure of the network is essentially a numerical problem related to differential constraints. The missing data corresponds to the lack of information on the surface outside the network of curves.*

*In order to deal with these problems and propose practical solutions for the reconstruction, hypotheses either on the surface models or the topology of the network of curves are required. Therefore, the developed methods fall within the two following approaches.*

- *On the one hand, reconstruction methods for developable and quasi-developable surfaces, which are a good approximation for the surfaces considered in numerous applications.*
- *On the other hand, reconstruction methods from networks of curves with specific topologies (quasi-planar curves, open network) so as to deal with the closure problem.*

*The set of methods developed in this work allow to formulate a global process for the reconstruction of surfaces, with flexible algorithms adapting to the different practical situations, so as to propose a solution both simple and precise in each case. The validation of our results in the case of real sensors data provided by the Morphosens ribbons also led us to develop metrological device. Finally, notice that the general context of reconstruction from orientation data studied here raises original theorical problems, to which we tried to answer with innovative solutions through interpolation and optimization algorithms.*

# Chapitre 1

# Stratégie pour la reconstruction à partir de capteurs d'orientation


**1.1 Préliminaires géométriques** . . . . . **8**
**1.2 Contexte technologique** . . . . . **10**
1.2.1 Les capteurs d'orientation . . . . . 10
1.2.2 Le ruban Morphosense . . . . . 11
1.2.3 Exemples d'applications . . . . . 13
**1.3 Problématique de la reconstruction à partir de données d'orientation** . . . . . **14**
1.3.1 Le cas des courbes . . . . . 14
1.3.2 Le cas des surfaces . . . . . 14
**1.4 Travaux précédents** . . . . . **16**
1.4.1 Reconstruction de courbes . . . . . 16
1.4.2 Reconstruction de surfaces . . . . . 17
**1.5 Objectifs et travaux réalisés** . . . . . **21**
1.5.1 Reconstruction spline PH $C^2$ de la courbe ruban . . . . . 21
1.5.2 Exploitation de l'intégralité des données capteurs . . . . . 22
1.5.3 Acquisition et reconstruction de surfaces . . . . . 24
1.5.4 Métrologie pour la reconstruction . . . . . 29
**1.6 Organisation et positionnement des travaux** . . . . . **32**


L'objectif général de cette thèse est de proposer des méthodes pour la reconstruction de formes (courbes et surfaces) à l'aide de micro-capteurs, qui fournissent des informations différentielles sur les formes considérées.

Pour cela, suivant les travaux effectués dans [Spr07], on organise les capteurs selon des rubans que l'on peut appliquer sur les formes à reconstruire. Cette structuration des données donne naissance à des méthodes spécifiques de reconstruction de courbes, ainsi qu'à des méthodes de reconstruction de surfaces à partir d'un réseau de courbes.

On considère ainsi des procédés consistant à acquérir des courbes sur une surface à l'aide de ces rubans, puis à reconstruire les courbes correspondant à chaque ruban, pour enfin reconstruire la surface délimitée par le réseau de rubans ainsi reconstruits (la figure 1.1 illustre un processus possible pour la reconstruction).

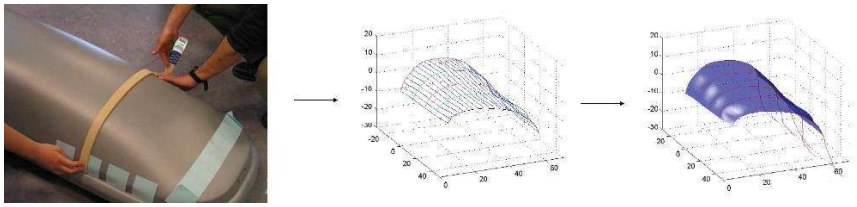

FIGURE 1.1 – *Schéma d'un processus global de reconstruction*

On détaille tout d'abord les technologies qui ont donné naissance à la démarche de reconstruction présentée dans cette thèse. Dans un premier temps sont présentés les capteurs (nouvelle génération) utilisés ainsi que leur intégration dans le ruban Morphosense, qui est le principal outil pour la reconstruction de formes 3D.

On décrit également les principales difficultés qu'un tel dispositif implique, notamment au niveau de la validation des résultats, et comment elles justifient les approches étudiées lors de ces travaux.

On présente ensuite comment ce contexte technologique a motivé à étendre les travaux précédents effectués au CEA-Leti. Deux motivations y sont principalement développées :

- La volonté d'exploiter l'intégralité des données fournies par les capteurs,

- La nécessité de faire des hypothèses sur les surfaces à reconstruire afin d'estimer les données manquantes.

On développe enfin la stratégie détaillée des travaux de cette thèse, avec une chronologie en accord avec le processus général de reconstruction. On se réfère aux différentes méthodes présentées dans les chapitres suivants au fur et à mesure qu'elles interviennent dans ce processus.

Ce chapitre se veut auto-suffisant, dans le sens où il décrit de manière exhaustive l'ensemble des travaux de cette thèse. Chaque méthode faisant l'objet d'un chapitre ultérieur y est présentée et abondamment motivée. Tous les éléments nécessaires à la compréhension de la stratégie de reconstruction sont ici présents, et il suffira au lecteur intéressé plus particulièrement par une des étapes du processus de se référer au chapitre correspondant pour les détails techniques.

## 1.1 Préliminaires géométriques

On donne ici les notions de géométrie différentielle nécessaires à la bonne compréhension de ce chapitre. Elles concernent principalement les courbes paramétrées de l'espace en général, et en particulier les courbes tracées sur des surfaces de $\mathbb{R}^3$. Les courbes et surfaces considérées dans la suite de ce document seront supposées régulières et suffisamment différentiables.

**Définition 1.** *En tout point* $\mathbf{r}(t)$ *d'une courbe régulière de classe* $C^2$ *de* $\mathbb{R}^3$ *vérifiant* $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) \neq 0$*, on définit le* ***repère de Serret–Frenet*** $(\mathbf{e}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$*, la* ***courbure*** $k(t)$ *et la* ***torsion*** $\tau(t)$ *au point de paramètre* $t$ *par :*

$$\mathbf{e}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{e}(t), \tag{1.1}$$

$$k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \qquad \textit{et} \qquad \tau(t) = \frac{\mathtt{det}(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2}, \tag{1.2}$$

*où* det *désigne le déterminant de* $\mathbb{R}^3$*.*

Les formules de Serret-Frenet permettent d'exprimer la dérivée de ce repère :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\mathbf{e}(t)\\ \mathbf{n}(t)\\ \mathbf{b}(t)\end{bmatrix} = |\mathbf{r}'(t)|\begin{bmatrix}0 & k(t) & 0\\ -k(t) & 0 & \tau(t)\\ 0 & -\tau(t) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}(t)\\ \mathbf{n}(t)\\ \mathbf{b}(t)\end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Si $\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)=0$, le point $\mathbf{r}(t)$ est appelé *point d'inflexion*. En un tel point, la courbure $k(t)$ s'annule, la normale principale $\mathbf{n}(t)$, la binormale $\mathbf{b}(t)$, et la torsion $\tau(t)$ ne sont pas définies [DoC76, Str61]. On note que le plan défini au point $\mathbf{r}(t)$ par les vecteurs $\mathbf{e}(t)$ et $\mathbf{n}(t)$ est appelé *plan osculateur* à la courbe en ce point, et celui défini par les vecteurs $\mathbf{e}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$ est appelé *plan rectifiant*.

Pour une courbe $\mathbf{r}(t), t\in[a,b]$, l'application $\sigma : t\mapsto\sigma(t)=\int_a^t|\mathbf{r}'(u)|du$ permet de définir l'abscisse curviligne $s=\sigma(t)$, ainsi que la paramétrisation *normale* ou paramétrisation par abscisse curviligne $\bar{\mathbf{r}}(s)=\mathbf{r}\circ\sigma^{-1}(s)$ pour $s\in[0,L]$, $L$ étant la longueur de la courbe. On note qu'alors $|\bar{\mathbf{r}}'(s)|=1$ et $\bar{\mathbf{r}}'(s)\perp\bar{\mathbf{r}}''(s)$ pour tout $s$. Par souci de simplicité, la paramétrisation normale sera le plus souvent notée $\mathbf{r}(s)$.

**Définition 2.** *Pour une courbe $\mathbf{r}(s)=\mathbf{s}(u(s),v(s))$ tracée sur une surface $\mathbf{s}(u,v)$, où $s$ est l'abscisse curviligne de la courbe, on définit le* **repère de Darboux** $(\mathbf{e}(s),\mathbf{h}(s),\mathbf{n_s}(s))$ *— où $\mathbf{e}(s)$ est le vecteur tangent unitaire à la courbe, $\mathbf{n_s}(s)$ est le vecteur normal unitaire à la surface au point $\mathbf{s}(u(s),v(s))=\mathbf{r}(s)$, et $\mathbf{h}(s)=\mathbf{n_s}(s)\times\mathbf{e}(s)$. La dérivée du repère de Darboux par rapport à l'abscisse curviligne est donnée par les relations*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}\mathbf{e}(s)\\ \mathbf{h}(s)\\ \mathbf{n_s}(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k_g(s) & k_n(s)\\ -k_g(s) & 0 & -\tau_g(s)\\ -k_n(s) & \tau_g(s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}(s)\\ \mathbf{h}(s)\\ \mathbf{n_s}(s)\end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

*ce qui permet de définir la* **courbure normale** $k_n(s)$*, la* **courbure géodésique** $k_g(s)$*, et la* **torsion géodésique** $\tau_g(s)$ *en chaque point de la courbe $\mathbf{r}(s)$ :*

$$k_n = \langle\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s},\mathbf{n_s}\,\rangle, \qquad k_g = \langle\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}s},\mathbf{h}\,\rangle, \qquad \tau_g = \langle\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{n_s}}{\mathrm{d}s},\mathbf{h}\,\rangle. \tag{1.5}$$

Le repère de Serret-Frenet est intrinsèquement lié aux propriétés différentielles de la courbe. En revanche, les vecteurs $\mathbf{h}$ et $\mathbf{n_s}$ du repère de Darboux ne donnent pas d'informations différentielles intrinsèques à la courbe, mais uniquement à son comportement sur la surface. Le repère de Darboux est notamment essentiel pour la caractérisation des courbes géodésiques d'une surface.

**Définition 3.** *Une courbe régulière $\mathbf{r}(t)$ sur une surface est appelée* **courbe géodésique** *de la surface si sa courbure géodésique est identiquement nulle. Selon (1.3) et (1.4), c'est équivalent aux conditions*

$$\mathbf{n_s}(t) = \sigma(t)\,\mathbf{n}(t), \qquad \mathbf{h}(t) = -\sigma(t)\,\mathbf{b}(t), \tag{1.6}$$

*avec $\sigma(t)=\pm1$. Autrement dit les repères de Serret-Frenet et de Darboux coïncident au signe près le long de la courbe.*

Intuitivement, ce sont les courbes qui correspondent aux lignes droites sur le plan. En particulier, le plus court chemin entre deux points d'une surface est une courbe géodésique.

On déduit également des relations (1.3) et (1.4) que la courbure $k(t)$ et la courbure normale $k_n(t)$ d'une courbe géodésique d'une part, sa torsion $\tau(t)$ et sa torsion géodésique $\tau_g(t)$ d'autre part sont liées comme suit [FSB09b] :

$$k(t)=\sigma(t)\,k_n(t) \quad \text{et} \quad \tau(t)=-\tau_g(t), \tag{1.7}$$

avec $\sigma(t) = \pm 1$ défini comme précédemment.

La courbure normale $k_n$ et la torsion géodésique $\tau_g$ en un point d'une courbe sur une surface $C^2$ $\mathbf{s}$ ne dépendent que de la direction de la tangente à la courbe en ce point. Autrement dit, si $\mathrm{T}_{\mathbf{p}}$ est le plan tangent au point $\mathbf{p}$ de la surface $\mathbf{s}$, et $L$ une droite de $\mathrm{T}_{\mathbf{p}}$ passant par $\mathbf{p}$, toutes les courbes de $\mathbf{s}$ qui passent par $\mathbf{p}$, et qui admettent $L$ comme direction tangentielle en ce point possèdent les mêmes courbure normale $k_n$ et torsion géodésique $\tau_g$. En particulier, on a le résultat suivant. En un point fixé $\mathbf{p}$ de la surface, la courbure normale $k_n(L)$, vue comme une fonction de la direction $L$, admet deux extrema $K_1$, $K_2$ (les *courbures principales*), correspondant à deux directions orthogonales $L_1$, $L_2$ (les *directions principales*). Ainsi, en notant $\alpha$ l'angle orienté entre les droites $L$ et $L_1$ dans le sens de la normale à la surface $\mathbf{n}_p(\mathbf{p})$ au point $\mathbf{p}$, on peut montrer [DoC76] que

$$k_n(\alpha) \,=\, K_1 \cos^2\alpha \,+\, K_2 \sin^2\alpha \quad \text{et} \quad \tau_g(\alpha) \,=\, (K_1 - K_2)\,\sin\alpha\,\cos\alpha\,. \tag{1.8}$$

Finalement, en utilisant (1.7) et (1.8) on obtient le lemme suivant.

**Lemme 1.** *La courbure $k$ et la torsion $\tau$ en tout point d'une courbe géodésique $\mathbf{r}(t)$ sur une surface $C^2$ dépendent uniquement de la direction tangentielle de $\mathbf{r}(t)$ dans le plan tangent à la surface en ce point.*

On remarque aussi grâce aux relations (1.7) et (1.8), que toute géodésique sur $\mathbf{s}$ suivant une direction principale au point $\mathbf{p}$ est localement planaire en ce point (sa torsion géodésique y est nulle).

Les courbures principales $K_1$ et $K_2$ définissent deux quantités couramment utilisées pour la caractérisation des surfaces : la *courbure de Gauss* $K = K_1K_2$, et la *courbure moyenne* $H = \frac{K_1+K_2}{2}$.

La courbure de Gauss, en particulier, fournit d'importantes informations locales :

- un point $\mathbf{p}$ où $K > 0$ est appelé *point elliptique*. La surface autour de ce point est convexe, elle est tout entière d'un seul côté du plan tangent en $\mathbf{p}$.

- un point $\mathbf{p}$ où $K < 0$ est appelé *point hyperbolique*. La surface autour de ce point traverse le plan tangent (point "selle").

- un point $\mathbf{p}$ où $K = 0$ est appelé *point parabolique*. Si une seule des courbures principales est nulle, la surface n'est "courbée" qu'en une seule direction (type cylindre). Si les deux courbures principales sont nulles, la surface est localement planaire.

On énonce enfin un lemme simple qui sert de point de départ aux réflexions sur la reconstruction à l'aide des rubans Morphosense.

**Lemme 2.** *Soient deux surfaces régulières $C^2$ orientées $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$ ayant un contact $G^1$ le long d'une courbe commune $\Gamma$. Alors si $\Gamma$ est une courbe géodésique de $\mathbf{s}_1$, elle est aussi courbe géodésique de $\mathbf{s}_2$.*

**Preuve** : En effet, par hypothèse de contact $G^1$, les normales unitaires aux deux surfaces vérifient $\mathbf{n}_{\mathbf{s}_1} = \pm\mathbf{n}_{\mathbf{s}_2}$ le long de la courbe $\Gamma$. Ainsi, si $\Gamma$ est une géodésique de $\mathbf{s}_1$, sa normale principale coïncide au signe près avec $\mathbf{n}_{\mathbf{s}_1}$ en tout point et donc elle coïncide avec $\mathbf{n}_{\mathbf{s}_2}$ au signe près en tout point, de sorte que $\Gamma$ est également une géodésique de $\mathbf{s}_2$. □

## 1.2 Contexte technologique

### 1.2.1 Les capteurs d'orientation

Le Leti dispose de plusieurs familles de capteurs de données terrestres, capables de se géoréférencer. Le dispositif Morphosense utilise deux familles de ces capteurs :

- Les *accéléromètres* sont des capteurs sensibles à l'accélération à laquelle ils sont soumis. Utilisés en situation statique, ou quasi-statique, les accéléromètres que l'on utilise ne mesurent alors que l'accélération induite par le champ gravitationnel. L'accélération étant mesurée dans une direction particulière, la force appliquée au capteur varie en fonction de son orientation.

- Les *magnétomètres* sont eux sensibles aux champs magnétiques environnants. En l'absence d'objets métalliques ou de champ artificiel à proximité, ils fournissent la valeur du champ magnétique terrestre, cette mesure dépendant de leur orientation.

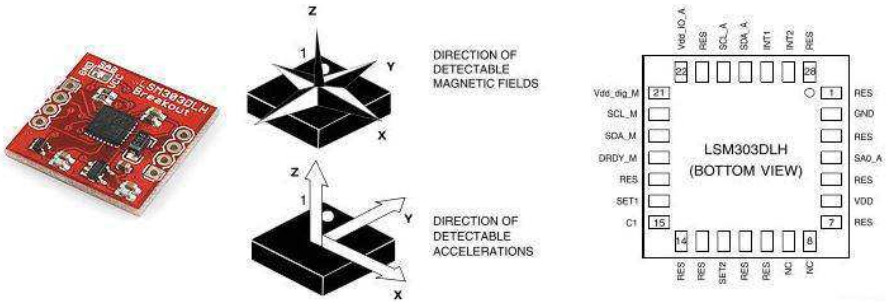


FIGURE 1.2 – *Noeud de capteurs LSM303DLH utilisé pour le Morphosense*

On montre alors [Spr07] qu'un noeud composé d'un accéléromètre triaxe (trois accéléromètres orientés selon un trièdre orthonormé) et d'un magnétomètre biaxe (deux magnétomètres orientés selon deux des axes du trièdre) est suffisant pour reconstruire les trois axes du repère correspondant à l'orientation du noeud. En pratique, la dernière génération de noeuds utilisés intègre un magnétomètre triaxe également, afin de rendre plus robuste l'estimation du repère d'orientation (figure 1.2). De plus, les accéléromètres et les magnétomètres forment des noeuds de capteurs confondus, alors qu'ils étaient séparés sur l'ancienne génération de rubans. La reconstruction bénéficie ainsi de données plus précises.

**Remarque 1.** *L'estimation des repères orientés à partir des données capteurs est un aspect important, qui relève du traitement du signal et qui est préliminaire aux problématiques étudiées dans cette thèse. Les données fournies par les capteurs sont entâchées d'erreurs (voir figure 1.3) qui rendent les algorithmes de reconstruction difficiles à mettre en oeuvre sur des données réelles. On évoquera toutefois ces aspects, qui justifient certains des choix algorithmiques présentés ici. La robustesse au bruit guide les méthodes proposées dans la mesure du possible.*

Les avantages de ces capteurs tiennent à leur capacité à donner des informations locales pour la capture de forme sans système de mesure extérieur (scanner, radar...), qui sont en général très coûteux et difficiles à mettre en oeuvre dans de nombreuses situations. Les capteurs utilisés sont eux-mêmes peu coûteux et leur miniaturisation les rend très souples d'utilisation.

### 1.2.2 Le ruban Morphosense

Le ruban Morphosense est un ruban souple, non élastique, déformable, d'épaisseur très faible et d'une largeur de deux à trois centimètres, équipé des capteurs décrits ci-dessus, en des noeuds répartis à intervalles réguliers sur le ruban (voir figure 1.4, à gauche). L'axe médian du ruban Morphosense définit une courbe 3D, que nous appellerons *courbe ruban*.

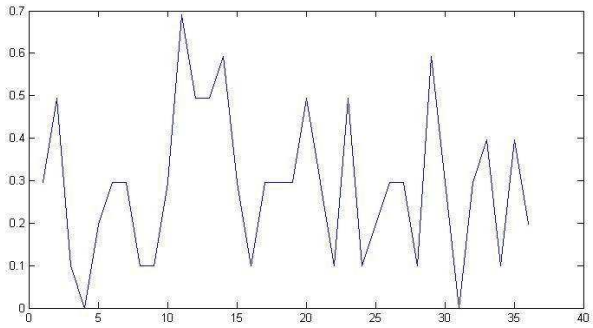


FIGURE 1.3 – *Valeur mesurée au cours du temps (en s) par un accéléromètre MEMS immobile (en % de sa valeur maximale)*

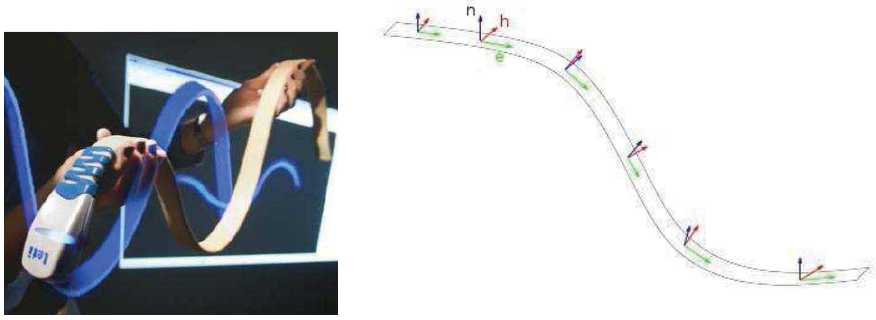


FIGURE 1.4 – *Prototype de démonstration de ruban Morphosense (à gauche) et schéma des données géométriques obtenues après traitement (à droite)*

Lorsque le ruban est à plat, cette courbe ruban est une droite et donc une courbe géodésique de ce plan. Par ailleurs, il s'avère que la nature mécanique du ruban permet de l'assimiler à une surface développable (voir chapitre 4). Précisément, les déformations non élastiques du ruban génèrent des surfaces isométriques au plan, et donc développables de sorte que la courbe ruban reste une géodésique du ruban Morphosense lors des déformations de ce ruban.

Ainsi, lorsqu'on applique le ruban Morphosense sur une surface régulière $\mathbf{s}$ avec contact $G^1$ (figure 1.5), la courbe ruban suit nécessairement une courbe géodésique de cette surface $\mathbf{s}$ (voir section 1.1, lemme 2). Cette propriété a permis de développer des méthodes d'acquisition et de reconstruction de surfaces lisses.

Après traitement des données fournies par les capteurs, on obtient une succession de repères orthonormés de l'espace associés à des points équi-répartis de la courbe ruban. En un point $\mathbf{p}_i$, ce repère est défini comme suit :

- le vecteur $\mathbf{e}_i$ (en vert figure 1.4, à droite) correspond au vecteur tangent à la courbe ruban,

- le vecteur $\mathbf{h}_i$ (en rouge) est le vecteur orthogonal à $\mathbf{e}_i$, tel que $(\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i)$ définit un repère orthonormé du plan tangent au ruban,

- le vecteur $\mathbf{n}_i$ (en bleu) est orthogonal au plan défini par $\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{h}_i$, tel que $(\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i, \mathbf{n}_i)$ forme un repère orthonormé de l'espace. Le vecteur $\mathbf{n}_i$ est normal au ruban Morphosense

au point considéré.

Autrement dit, ces repères correspondent au signe près à un échantillonnage du repère de Darboux de la courbe ruban en tant que courbe de la “surface développable ruban” (voir section 1.1), et donc à un échantillonnage du repère de Serret-Frenet de la courbe ruban.

Il est ici important de souligner que cette structuration des capteurs sur le ruban (et en particulier la connaissance de leur répartition linéique) est essentielle pour la reconstruction de la courbe ruban et a donné lieu à un certain nombre de méthodes développées dans [Spr07].

FIGURE 1.5 – *Ruban Morphosense (ancienne génération) appliqué sur une surface*

### 1.2.3 Exemples d’applications

Le ruban Morphosense couplé aux algorithmes développés dans ces travaux permet de faire de la capture de forme de courbes et surfaces, avec par conséquent des applications dans des divers domaines.

Dans le domaine de la *santé*, les rubans Morphosense peuvent être à la base d’outils de mesures de morphologie (forme de la colonne vertébrale, bassin...) pour l’aide au diagnostic ou créer des matériels de correction sur mesure (corsets, bas de contention).

En *CAO*, l’utilisation de ces capteurs permet de définir des procédés de modélisation de formes qui s’apparentent aux techniques de la sculpture 3D.

Les applications *industrielles* sont nombreuses dans le cas de matériaux déformables dont la mesure de propriétés locales telles que la courbure permet d’estimer certains paramètres physiques.

Dans le domaine du *sport*, la capture et la modélisation de voiles de bateau en temps réel permettrait d’améliorer leurs performances et d’assister la navigation.

De manière générale, les applications rejoignent toutes celles de la capture de forme, pour lesquelles les dispositifs étudiés ici ont l’avantage de s’affranchir des systèmes optiques coûteux et d’être auto-référencés, et peuvent être intégrés à des systèmes embarqués.

## 1.3 Problématique de la reconstruction à partir de données d'orientation

### 1.3.1 Le cas des courbes

La spécificité de ce problème de reconstruction vient du fait que les données d'orientation ne sont pas localisées dans l'espace. Ainsi, dans le cas 2D, il se distingue du problème d'interpolation de Hermite (figure 1.6, à gauche) et du problème d'enveloppe (figure 1.6, au milieu). En effet, l'interpolation de Hermite consiste à interpoler une série de points et de vecteurs tangents associés fixés, tandis que le problème d'enveloppe consiste à interpoler une suite de droites tangentes fixées, le point de contact étant libre.

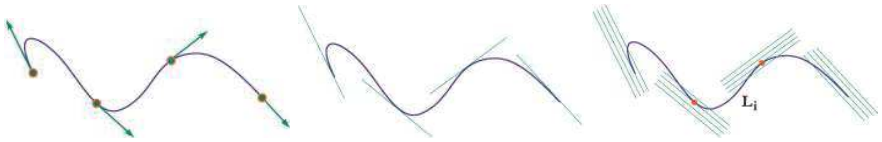


FIGURE 1.6 – *Trois problèmes d'interpolation tangentielle*

Notre problème lié aux données d'orientation consiste à interpoler uniquement des directions tangentielles (figure 1.6, à droite), le point de contact étant inconnu, sous contraintes de longueur.

Précisément, dans le cas général, l'ensemble des $N+1$ noeuds de capteurs du ruban Morphosense fournit à chaque instant, moyennant une erreur due au bruit d'acquisition, des données d'orientation converties en une succession de trièdres orthonormés $(\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i, \mathbf{n}_i)$ en des points $\mathbf{p}_i$ (inconnus) de la courbe ruban $\mathbf{r}(t)$ à reconstruire sous la contrainte des distances inter-capteurs $l_i$. On rappelle (voir section 1.2.2) que le repère $(\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i, \mathbf{n}_i)$ coïncide avec le repère de Serret-Frenet au point $\mathbf{p}_i$ de la courbe ruban $\mathbf{r}(t)$.

Le problème général de reconstruction de la courbe ruban se formule donc de la manière suivante.

**Problème 1a** Etant donnés une suite de noeuds $a = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = b$, on cherche une courbe $\mathbf{r}(t)$ satisfaisant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} \mathbf{r}'(t_i) = \mu_i \mathbf{e}_i, \ i = 0, ..., N \\ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''(t_i) = \lambda_i \mathbf{h}_i, \ i = 0, ..., N \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\mathbf{r}'(t)| dt = l_i, \ i = 0, ..., N-1, \end{cases} \tag{1.9}$$

où $\mu_i > 0$ et $\lambda_i$ sont des inconnues réelles.

On note que les données du repère $(\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i, \mathbf{n}_i)$ étant unitaires, il est nécessaire d'introduire les coefficients $\mu_i$ et $\lambda_i$.

**Remarque 2.** *On notera que la solution de ce problème ne peut être obtenue qu'à translation près du fait de la nature des données d'orientation.*

### 1.3.2 Le cas des surfaces

Le problème de reconstruction à partir de capteurs distribués sur une surface est mal posé. Une structuration topologique de l'ensemble des capteurs est nécessaire. L'organisation des capteurs sur les rubans Morphosense font de ces derniers un outil naturel pour l'acquisition de surfaces. Autrement dit, les rubans étant eux-mêmes structurés, il s'agit

maintenant de structurer la disposition des rubans pour l'acquisition. Pour ce faire, la stratégie d'acquisition devra être conçue en fonction de la méthode de reconstruction envisagée.

En plaçant le ruban Morphosense sur une surface physique selon différentes "directions" sur la surface, cette dernière est subdivisée en un système de patches délimités par des segments de courbes qui sont des géodésiques de la surface à reconstruire (voir figure 1.7).

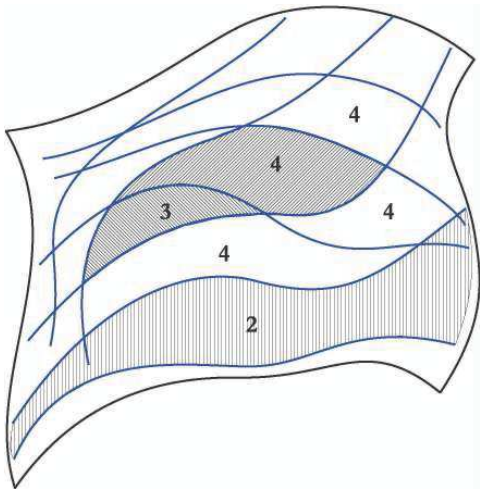


FIGURE 1.7 – *Réseau de courbes obtenu après acquisition dans le cas général. Sont indiqués le nombre de bords de chaque patch délimité par les courbes.*

La stratégie consiste ensuite à reconstruire chacune de ces courbes rubans, puis à reconstruire les différents patches de la surface par des méthodes de remplissage.

Néanmoins, en pratique cette approche "ruban" conduit à considérer les points et difficultés suivants :

- ◇ Données manquantes : le procédé d'acquisition à l'aide du ruban Morphosense ne fournit aucune information géométrique sur les patches en dehors de leurs courbes frontières, ce qui conduit nécessairement à émettre des hypothèses sur la surface.

- ◇ Interpolation géodésique : idéalement, les courbes rubans reconstruites doivent être des courbes géodésiques de la surface reconstruite, en accord avec les propriétés d'acquisition du ruban Morphosense.

- ◇ Fermeture du réseau : chaque courbe ruban étant reconstruite à translation près, il s'agit de recaler les courbes entre elles de sorte à ce qu'elles forment un contour fermé compatible avec les contraintes de longueur et les contraintes différentielles de croisement des courbes géodésiques (voir chapitre 5).

- ◇ Patches à $n$ côtés : les rubans Morphosense suivant nécessairement des courbes géodésiques de la surface, il est en pratique difficile de contrôler le nombre de côtés des patches obtenus, ce qui nécessite d'adapter les méthodes de remplissage qui pour la plupart s'appliquent à des patches à trois ou quatre côtés.

## 1.4 Travaux précédents

On rappelle ici les travaux précédents relatifs à la reconstruction de forme à partir de capteurs d'orientation. Ces travaux ont été essentiellement développés dans la thèse de N. Sprynski [Spr07].

### 1.4.1 Reconstruction de courbes

Dans un premier temps, le problème de reconstruction de la courbe ruban a été reformulé [Spr07] comme un problème d'interpolation sur la sphère et a été traité à l'aide des $\nu$-splines sphériques introduites par Nielson [Nie04].

**• Modélisation du problème : interpolation sur la sphère**

L'originalité des méthodes précédentes a consisté à traiter les contraintes de longueur par l'utilisation de l'abscisse curviligne. Cependant, le caractère géodésique de la courbe ruban n'ayant pas été identifié, seuls les vecteurs $\mathbf{e}_i$ issus des informations capteurs ont été exploités.

Ainsi le problème traité dans [Spr07] est le suivant.

**Problème 2a** Etant donnés une suite de noeuds $a = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = b$, on cherche une courbe $\mathbf{r}(t)$ satisfaisant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} \mathbf{r}'(t_i) = \mu_i \mathbf{e}_i, \ i = 0, ..., N, \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\mathbf{r}'(t)| dt = l_i, \ i = 0, ..., N-1, \end{cases} \tag{1.10}$$

où les coefficients $\mu_i > 0$ sont des inconnues réelles.

Ce problème se réécrit plus simplement sous la forme suivante en utilisant l'abscisse curviligne.

**Problème 2b** On cherche une courbe $\mathbf{r}(s)$ satisfaisant les contraintes suivantes.

$$\mathbf{r}'(s_i) = \mathbf{e}_i, \ i = 0, ..., N, \tag{1.11}$$

avec $s_0 = 0$ et $s_{i+1} = s_i + l_i$ pour $i = 0, ..., N-1$.

Le problème 2b se présente comme un problème d'interpolation sur la sphère. En effet, d'une part les vecteurs tangents $\mathbf{e}_i$ à interpoler sont sur la sphère $S^2$, et d'autre part le choix de la paramétrisation par abscisse curviligne $\mathbf{r}(s)$ conduit à $\mathbf{r}'(s) \equiv 1$, de sorte que la courbe hodographe $\mathbf{r}'(s)$ parcourt la sphère. Il s'agit donc d'interpoler les données $\mathbf{e}_i$ sur la sphère, puis à intégrer cette courbe hodographe pour reconstruire la courbe ruban.

**• Une approche : les $\nu$-splines sphériques**

L'interpolation sur la sphère a été traitée à l'aide de la méthode de Nielson [Nie04]. L'idée consiste à adapter l'algorithme de De Casteljau en remplaçant les interpolations linéaires par des interpolations sphériques pour obtenir des splines tendues ($\nu$-splines) qui interpolent les données.

La méthode est efficace, et permet de contrôler la tension de la courbe obtenue sur la sphère. Cependant, elle n'exploite pas toutes les données fournies par les capteurs du

ruban. Elle comporte en outre l'inconvénient de donner une solution discrète pour la dérivée de la courbe, qu'il faut ensuite intégrer numériquement pour retrouver la courbe suivie par le ruban.

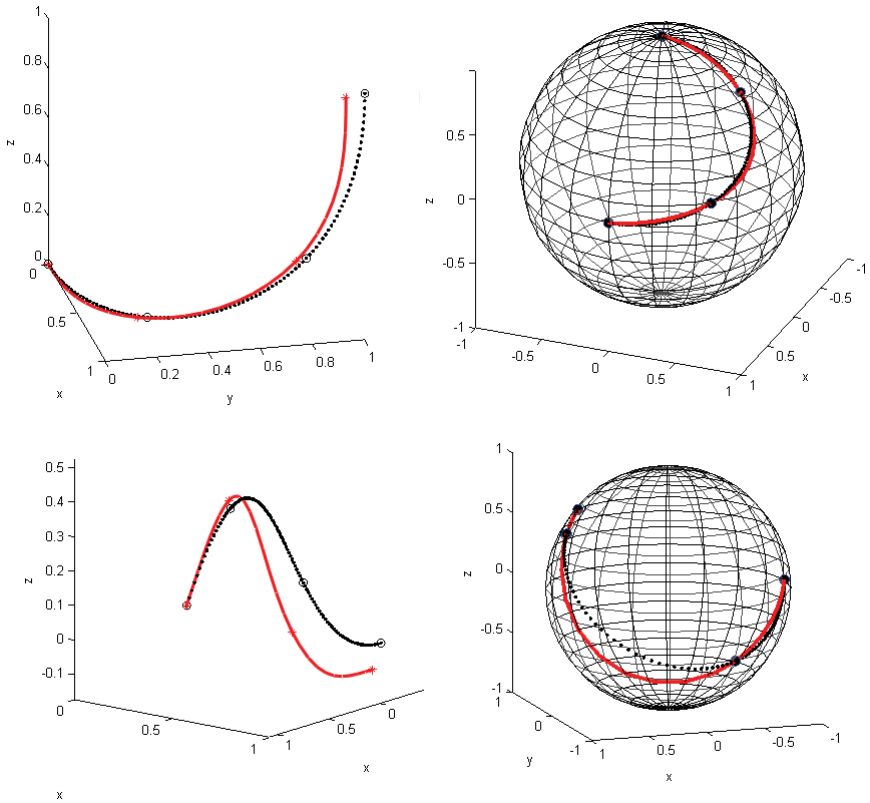


FIGURE 1.8 – *Exemples de reconstruction (en rouge) d'une courbe connue (en noir) à partir de l'interpolation des dérivées sur la sphère (à droite).*

La figure 1.8 montre deux exemples de courbes reconstruites avec cette méthode. La courbe reconstruite sur la sphère interpole bien les points correspondant aux vecteurs $\mathbf{e}_i$, mais dans le deuxième exemple (en bas) la courbe obtenue présente des tangentes très différentes de la courbe dérivée initiale. Cela se traduit par une courbe reconstruite, après intégration, potentiellement différente de celle que suivait le ruban Morphosense.

### 1.4.2 Reconstruction de surfaces

Dans le cas de capteurs indépendants distribués individuellement sur la surface, des résultats ont été obtenus [AM12] en faisant des hypothèses de convexité sur la surface (projet "GeoNor", MSTIC-UJF) ou en calculant de manière passive (par propagation d'ondes) les distances géodésiques entre capteurs [Ga08].

Cependant, dans le cas général la reconstruction de surfaces à partir de capteurs nécessite de structurer les données. Ainsi, la plupart des méthodes développées précédemment et également dans cette thèse s'appuient sur la stratégie "ruban" telle que présentée dans la section 1.3.

Deux points ont été considérés jusqu'ici : d'une part la structuration des rubans en un réseau cohérent pour la reconstruction des surfaces et d'autre part la reconstruction

d'une surface interpolant les courbes rubans en tant que courbes géodésiques. Notons que toutes ces méthodes s'appuient sur des méthodes de remplissage de type Coons qui seront décrites à la fin de cette section.

**• Réseau structuré de rubans pour la reconstruction de surfaces**

Afin de résoudre le problème de localisation spatiale des courbes rubans, deux configurations de structuration des données ont été étudiées pour l'acquisition de surface.

◇ **Filet de capteurs.** – La première méthode d'acquisition étudiée dans [Spr07] est dite du *filet de capteurs*. On y utilise un réseau fermé de rubans Morphosense, qui conduit à des contraintes tangentielles et des contraintes de longueur dans les deux directions suivies par les rubans qui se croisent. Cette méthode est complexe à mettre en oeuvre puisqu'il faut effectuer des opérations de recalage sur les courbes transverses reconstruites afin qu'elles se croisent effectivement. De plus, l'acquisition est contraignante et n'est pas possible sur tous les types de surfaces. Une méthode comparable a été développée dans [HS08] où des capteurs sont organisés selon une grille avec des distances contraintes dans chaque direction. Il s'agit cependant dans ces travaux d'un maillage discret de capteurs, sans contraintes géométriques.

◇ **Structure en peigne.** – La deuxième méthode d'acquisition développée dans [Spr07] (et celle qui a été la plus utilisée en pratique) utilise une famille de rubans orientés dans une même direction et référencés à l'aide d'un ruban transverse. L'idée est d'utiliser une *structure en peigne* : à partir d'un ruban de référence reconstruit en premier, on fait partir une famille de rubans dans la direction transverse, de sorte qu'en utilisant leur position sur le ruban déjà reconstruit, on peut les positionner relativement à celui-ci. On reconstruit ensuite dans la direction du premier ruban une série de rubans virtuels à partir des capteurs liés aux rubans réels. Le réseau ainsi obtenu comprend automatiquement deux familles de rubans transverses qui se croisent par construction (voir fig 1.9). La structure est ici moins contrainte, car les rubans virtuels ne sont pas soumis à des contraintes de longueur.

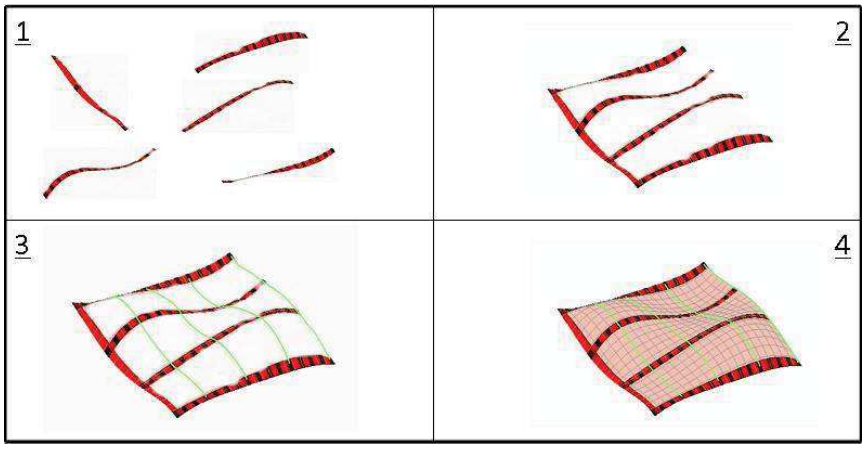


FIGURE 1.9 – *Reconstruction d'une surface à l'aide d'une structure en peigne*

Plus précisément, le réseau de rubans utilisé pour la reconstruction est composé ici de $M + 1$ rubans, chaque ruban comprenant $N + 1$ capteurs. Cette structure

comporte un premier ruban transversal, porteur de la structure du réseau, qui suit une courbe $\mathbf{x}_0$ sur la surface. Les $M$ rubans restants suivent des courbes $\mathbf{r}_j, j = 1, ..., M$ sur la surface et sont disposés transversalement au premier ruban, avec leur origine fixée en des points connus $\mathbf{p}_{0,j}$ du ruban porteur (voir figure 1.10). On note alors $\mathbf{p}_{k,j}$ les $N + 1$ points de la courbe ruban $\mathbf{r}_j$ correspondant aux localisations des capteurs, et $\mathbf{r}_{k,j}$ la portion de la courbe $\mathbf{r}_j$ comprise entre les points $\mathbf{p}_{k,j}$ et $\mathbf{p}_{k+1,j}$.

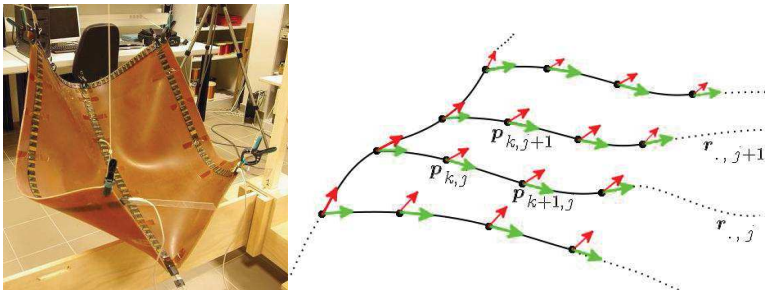


FIGURE 1.10 – *Structure en peigne de rubans Morphosense (à gauche) et schématisation (à droite).*

Afin de reconstruire la surface par des méthodes de remplissage de type Coons, il faut découper la structure en peigne précédente en patches à 3 ou 4 côtés. Etant donnée la nature de cette structure, un moyen naturel d'obtenir ce découpage et de faire passer des courbes "virtuelles" $\mathbf{x}_k$ ,transversales aux $M$ rubans du peigne, pour obtenir des patches à 4 côtés. Chaque courbe $\mathbf{x}_k$ passe alors par les points $\mathbf{p}_{k,j}, j = 1, ..., M$, qui sont connus après la reconstruction et le recalage des rubans. On obtient des patches de la forme présentée en figure 1.11.

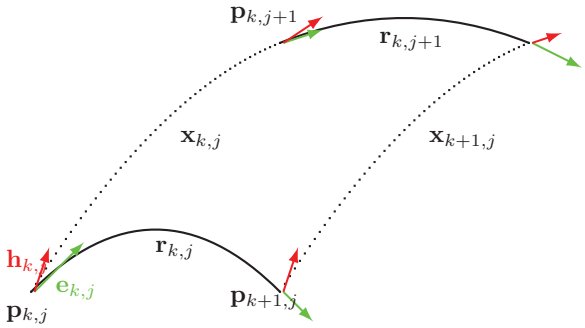


FIGURE 1.11 – *Forme générale d'un patch*

Les courbes $\mathbf{x}_k$ sont alors reconstruites par interpolation de Hermite des points $\mathbf{p}_{k,j}$ associés aux vecteurs dérivés $\mathbf{h}_{k,j},\ j = 1, ..., M$. Enfin, les différents patches obtenus sont alors remplis à l'aide d'un procédé de Coons bicubique (décrit ci-après).

• **Interpolation géodésique**

La construction de surfaces qui interpolent une ou deux courbes spatiales en tant que géodésiques a été considérée par plusieurs auteurs [BVI91, Pal08, SRD08, SLDB08, Tuc97, WTT04], dans le contexte d'applications telles que le mapping de textures sans distortions, la spécification de formes de tissus pour le design et la fabrication de chaussures ou l'organisation de fibres dans les structures de matériaux composites.

Le cas de surfaces interpolant en tant que géodésiques 3 ou 4 courbes formant un contour fermé a été traité dans [FSB09b, FSB09a, FSB10]. Ces travaux ont montré que la possibilité de construire une telle surface dépend de deux types de contraintes sur le contour formé par les courbes de bord. La première contrainte est globale, et concerne la compatibilité des variations de la normale principale aux courbes de bord avec la normale à une surface orientée sous-jacente. La seconde contrainte est une contrainte différentielle locale, qui donne une relation entre les courbures et les torsions aux extrémités des courbes du contour fermé, et les angles entre ces courbes aux sommets du contour. Pour des courbes satisfaisant ces contraintes, on peut alors reconstruire un carreau de surface en utilisant un procédé de Coons bicubique (voir ci-dessous) [FSB09b, FSB09a].

Une méthode d'interpolation par une surface de Bézier rationnelle a également été développée [FSB10], afin de reconstruire des surfaces compatibles avec les systèmes modernes de CAO. Les auteurs étendent dans ces travaux les méthodes précédentes en adaptant les méthodes de remplissage.

• **Méthodes de Coons**

Dans le cas d'un réseau fermé de courbes, les méthodes de Coons [Coo64, Far02] fournissent un procédé de remplissage permettant d'interpoler ces courbes par une surface lisse.

On considère quatre courbes $\mathbf{r}_N$, $\mathbf{r}_E$, $\mathbf{r}_S$ et $\mathbf{r}_O$ définies sur $[0,1]$ formant un contour fermé dans $\mathbb{R}^3$. On veut calculer une portion de surface $\mathbf{s}$ délimitée par ces 4 courbes, telle que $\mathbf{s}(u,0) = \mathbf{r}_S(u)$, $\mathbf{s}(u,1) = \mathbf{r}_N(u)$, $\mathbf{s}(0,v) = \mathbf{r}_O(v)$ et $\mathbf{s}(1,v) = \mathbf{r}_E(v)$. Pour cela, on utilise les fonctions de mélange de Hermite cubiques définies comme suit :

$$\begin{cases} H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \\ H_1(t) = t^3 - 2t^2 + t, \\ H_2(t) = t^3 - t^2, \\ H_3(t) = -2t^3 + 3t^2, \end{cases} \tag{1.12}$$

pour un paramètre $t \in [0,1]$.

On détaille ici les procédés de Coons partiellement et totalement bicubiques dans le cas d'un patch à 4 côtés.

◇ **Procédé de Coons partiellement bicubique** –
Si l'on ne spécifie que les quatre courbes de bord, la solution la plus simple est alors d'interpoler directement les bords avec les fonctions $H_0$ et $H_3$. On obtient une surface qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_(u,v) &= [H_0(u) H_3(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}_O(v) \\ \mathbf{r}_E(v) \end{bmatrix} \\ &+ [\mathbf{r}_S(u) \mathbf{r}_N(u)] \begin{bmatrix} H_0(v) \\ H_3(v) \end{bmatrix} \\ &- [H_0(u) H_3(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}_O(0) & \mathbf{r}_O(1) \\ \mathbf{r}_E(0) & \mathbf{r}_E(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(v) \\ H_3(v) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

qui vérifie bien les conditions requises.

◇ **Procédé de Coons bicubique** –
Si l'on désire spécifier également le comportement de la surface à proximité des bords, il faut en plus spécifier des vecteurs tangents transverses $\mathbf{T}_O(v)$, $\mathbf{T}_E(v)$, $\mathbf{T}_S(u)$, $\mathbf{T}_N(u)$ qui décrivent la direction dans laquelle la surface s'éloigne des bords respectifs. Le patch s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_(u,v) &= [H_0(u)H_1(u)H_2(u)H_3(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}_O(v) \\ \mathbf{T}_0(v) \\ \mathbf{T}_E(v) \\ \mathbf{r}_E(v) \end{bmatrix} \\
&+ [\mathbf{r}_S(u)\mathbf{T}_S(u)\mathbf{T}_N(u)\mathbf{r}_N(u)] \begin{bmatrix} H_0(v) \\ H_1(v) \\ H_2(v) \\ H_3(v) \end{bmatrix} \\
&- [H_0(u)H_1(u)H_2(u)H_3(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}_O(0) & \mathbf{r}'_S(0) & \mathbf{r}'_S(1) & \mathbf{r}_O(1) \\ \mathbf{r}'_O(0) & \mathbf{s}_{uv}(0,0) & \mathbf{s}_{uv}(0,1) & \mathbf{r}'_E(0) \\ \mathbf{r}'_O(1) & \mathbf{s}_{uv}(1,0) & \mathbf{s}_{uv}(1,1) & \mathbf{r}'_E(1) \\ \mathbf{r}_E(0) & \mathbf{r}'_N(0) & \mathbf{r}'_N(1) & \mathbf{r}_E(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(v) \\ H_1(v) \\ H_2(v) \\ H_3(v) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où les quatre vecteurs $\mathbf{s}_{uv}(i,j) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\mathbf{s}(i,j)$ sont les vecteurs *twist* aux quatre coins du patch, qui restent à déterminer.

## 1.5 Objectifs et travaux réalisés

Dans cette section sont décrits les grands axes qui ont orienté ces travaux et les différentes méthodes permettant d'apporter des solutions aux problématiques identifiées dans la section 1.3. Il s'agit d'un exposé chronologique qui permet d'appréhender l'importance de chacune des étapes en tant que brique du processus de reconstruction. Chaque méthode y est motivée mais les aspects techniques sont développés dans les chapitres respectifs, que l'on référence systématiquement.

### 1.5.1 Reconstruction spline PH $C^2$ de la courbe ruban

Jusqu'à présent, les méthodes de reconstruction de la courbe ruban consistaient à reconstruire son hodographe par interpolation sur la sphère puis à l'intégrer numériquement. On propose dans le **chapitre 2** une alternative plus souple permettant de résoudre le problème 2a, afin de reconstruire directement la courbe ruban sous forme analytique.

L'utilisation des courbes polynomiales PH (courbes à hodographes pythagoriciennes) permet de gérer aisément les contraintes de longueur. Précisément, la solution sera obtenue sous forme d'une spline $C^2$ composée de segments PH quintiques satisfaisant les contraintes tangentielles aux noeuds capteurs. Les contraintes de longueur et d'interpolation conduisent à résoudre un système d'équations quadratiques.

L'étude et la résolution de ce problème nous ont conduit dans un premier temps à considérer un problème associé d'interpolation spline PH $C^2$ de points sous contraintes de longueur. Ces deux méthodes d'interpolation PH sous contraintes sont présentées dans le chapitre 2.

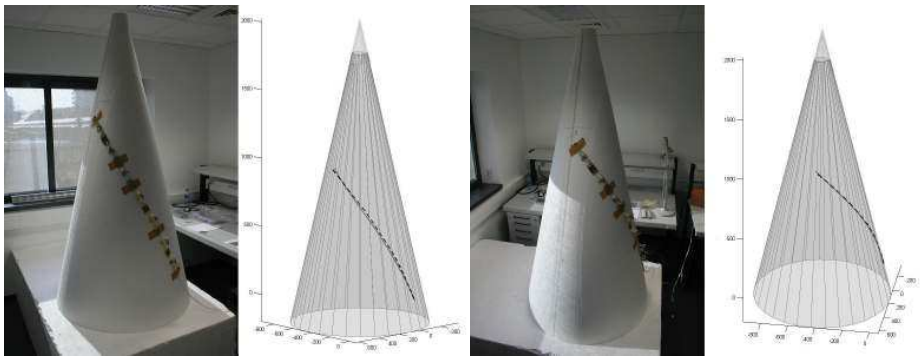

FIGURE 1.12 – *A*cquisition et reconstruction d'une courbe sur un cône à l'aide du ruban Morphosense en utilisant la méthode du chapitre 2. En trait plein, la courbe analytique acquise par le ruban (voir section 1.5.4), et en pointillés sa reconstruction spline PH $C^2$.

Cette méthode est une alternative intéressante à l'approche développée dans les travaux précédents (section 1.4) car elle fournit une solution analytique, mais elle n'exploite pas l'intégralité des informations données par les noeuds de capteurs (problème 1a) : seuls les vecteurs $\mathbf{e}_i$ sont interpolés.

### 1.5.2 Exploitation de l'intégralité des données capteurs

Aucune des méthodes précédentes pour la reconstruction des courbes rubans n'exploite l'intégralité des données capteurs. La satisfaction du caractère géodésique des courbes rubans conduit à résoudre le problème 1a, qui prend en compte l'intégralité des données capteurs. Autrement dit, il s'agit d'interpoler une suite de repères de Serret-Frenet sous contraintes de longueur.

A notre connaissance, ce problème n'a pas été considéré dans la littérature, et est intéressant au-delà du contexte du ruban Morphosense. La recherche d'une solution analytique s'avère très contrainte, et nécessiterait des courbes PH de degré 7 ou plus. A ce jour, aucune méthode explicite n'a pu être développée afin de résoudre le problème 1a.

**• Reformulation du problème**

Généralisant la démarche développée dans [Spr07], l'approche par abscisse curviligne permet de se ramener à un problème d'interpolation de type Hermite sur la sphère. Précisément, on cherche une courbe $\mathbf{r}(s)$, où $s$ est l'abscisse curviligne, satisfaisant l'intégralité des conditions du problème général 1a qui se traduisent de la manière suivante.

- ⋄ $|\mathbf{r}'(s)| \equiv 1$, ce qui signifie que l'hodographe appartient à la sphère.
- ⋄ L'interpolation des vecteurs tangents se traduit par $\mathbf{r}'(s_i) = \mathbf{e}_i$.
- ⋄ L'interpolation des vecteurs $\mathbf{h}_i$ : $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''(s_i) = \lambda_i \mathbf{h}_i$ se traduit plus simplement par

une condition d'interpolation sur la dérivée seconde. En effet, on a successivement :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''(s_i) = \lambda_i \mathbf{h}_i, & \\ \big(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''(s_i)\big) \times \mathbf{r}'(s_i) = \lambda_i \mathbf{h}_i \times \mathbf{e}_i & \text{car} \quad \mathbf{r}'(s_i) = \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{r}''(s_i) = \lambda_i(-\mathbf{n}_i), & \\ \mathbf{r}''(s_i) = \delta_i \mathbf{n}_i & \text{avec} \quad \delta_i = -\lambda_i. \end{array} \tag{1.13}$$

◇ La contrainte de longueur est prise en compte par l'abscisse curviligne.

Finalement, le problème 1a se reformule avec l'abscisse curviligne sous la forme suivante.

**Problème 1b** On cherche une courbe $\mathbf{r}(s)$ paramétrisée par l'abscisse curviligne vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{r}'(s_i) = \mathbf{e}_i, \ i = 0, ..., N \\ \mathbf{r}''(s_i) = \delta_i \mathbf{n}_i, \ i = 0, ..., N \end{cases} \tag{1.14}$$

avec $s_0 = 0$ et $s_{i+1} = s_i + l_i$ pour $i = 0, ..., N-1$. Les coefficients $\delta_i$ sont des inconnues réelles.

**Remarque 3.** *Notons que la résolution du problème général reconstruit la courbe ruban en tant que courbe géodésique du ruban Morphosense physique et donc une courbe géodésique d'une surface physique sur laquelle ce ruban est appliqué avec un contact $G^1$ (voir lemme 2). En effet, la méthode de reconstruction fait coïncider aux points capteurs le repère de Serret-Frenet de la courbe reconstruite avec les repères capteurs ($\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i, \mathbf{n}_i$) qui sont des repères de Darboux de la courbe ruban tracée sur le ruban Morphosense (voir la relation (1.6)).*

Finalement, cette formulation se traduit par un problème d'interpolation sur la sphère (comme dans les travaux précédents), avec des contraintes de type Hermite qui s'ajoutent aux points à interpoler. Plusieurs méthodes sont présentées ci-dessous pour réaliser cette interpolation et seront décrites plus précisément dans le **chapitre 3**.

**• Différentes approches pour l'interpolation de Hermite sur la sphère**

Nous proposons plusieurs approches pour interpoler des points sur la sphère et des vecteurs dérivés associés par une courbe sur la sphère. Ces solutions seront soit de type analytique soit issues d'un schéma itératif et seront de classe $C^k$ $(k = 1, 2)$ dans le cas analytique ou pseudo-$C^k$ $(k = 1, 2)$ dans le cas itératif, ce qui signifie que ces solutions sont calquées sur des schémas itératifs (à l'aide des interpolations sphériques) conduisant à des solutions $C^k$ dans l'espace.

◇ **Approche analytique rationnelle de degré** 4 :
Jüttler et Wang proposent dans [JW03] une solution analytique rationnelle de degré 4 pour la construction d'un segment de courbe sur la sphère joignant deux points de cette sphère avec des dérivées imposées aux extrémités. Les solutions sont toutefois exprimées dans un repère local, ce qui rend difficile la construction d'une spline composée de segments de courbes de ce type. On présentera une solution analytique $C^1$ au problème 1b, et nos tentatives pour exploiter les degrés de liberté restants afin d'obtenir une solution tendue.
L'utilisation des degrés de liberté pour imposer une continuité $C^2$ conduit à un système d'équations difficile (voire impossible) à résoudre même par des méthodes numériques. Une approche itérative se révèle mieux appropriée.

◇ **Solution itérative pseudo-$C^1$ :**
Dans l'espace, il existe une unique spline cubique polynomiale $C^1$ interpolant des points associés à des vecteurs dérivés. Nous proposerons une approche équivalente sur la sphère basée sur l'algorithme de De Casteljau en remplaçant les interpolations linéaires par leur équivalent sur la sphère. Cette méthode fournit une solution unique et pseudo-$C^1$ au problème 1b.

◇ **Solution itérative pseudo-$C^2$ :**
Pour obtenir une spline pseudo-$C^2$, il est possible d'adapter directement la méthode de Nielson [Nie04] en dédoublant les segments cubiques. L'idée est de rajouter des points virtuels entre deux points à interpoler successifs, et d'ajuster la position de ces nouveaux points afin d'imposer un raccord pseudo-$C^2$ entre les différents segments. Ces nouveaux points agissent comme des degrés de liberté que l'on fixe en imposant la continuité pseudo-$C^2$.
La solution obtenue est unique et ne permet pas de jouer sur la position des points virtuels ajoutés, mais il est possible de relaxer la contrainte $C^2$ en une contrainte $G^2$ et d'obtenir en contrepartie des paramètres de tension qui permettent de contrôler la forme de la courbe solution sur la sphère (cet aspect n'a pas encore été étudié).

• **Application au Morphosense**

Dans la réalité du problème Morphosense, les normes des vecteurs $\mathbf{r}''(s_i) = |\delta_i|$, dans la reformulation du problème donnée ci-dessus, ne sont pas connues. Le choix d'une valeur cohérente pour ces coefficients $\delta_i$, permettant d'appliquer les méthodes précédentes, est discuté à la fin du chapitre 3. On montre qu'il s'agit essentiellement d'un problème de paramétrisation.

### 1.5.3 Acquisition et reconstruction de surfaces

On présente ici la méthodologie d'acquisition et de reconstruction de surfaces à l'aide de rubans Morphosense permettant de résoudre un certain nombre des problématiques développées dans la section 1.3.2. Les clés permettant d'appréhender les différentes stratégies développées dans cette thèse sont les suivantes.

D'une part, la connaissance ou le choix d'un modèle pour la surface à reconstruire influe considérablement la stratégie d'acquisition, autrement dit le nombre et l'organisation des courbes géodésiques à acquérir sur cette surface. En effet, une unique géodésique permet de reconstruire localement une surface développable suffisamment régulière, de la même manière que trois points de l'espace permettent de reconstruire un plan de manière unique. — Ainsi, le réseau d'acquisition est d'autant moins contraint que l'on a plus d'informations sur la surface, et réciproquement.

D'autre part, l'obtention d'un réseau de courbes fermé compatible avec les contraintes différentielles liées à l'interpolation géodésique est extrêmement difficile à obtenir dans la réalité de l'acquisition Morphosense (voir section 1.3.2). Des simplifications sont donc nécessaires, et concerneront soit la nature de ces courbes rubans (recherche de courbes géodésiques planaires sur la surface physique à reconstruire) soit leur organisation (structure en peigne à contour ouvert).

Enfin, notons que ces différents points seront bien évidemment liés. Nous détaillons maintenant les différentes méthodes développées dans la suite de cette thèse concernant l'acquisition et la reconstruction de surfaces.

**• Identification et segmentation de surfaces développables**

La connaissance d'une courbe géodésique sur une surface quelconque ne permet pas en général de reconstruire cette surface.

En revanche, une courbe géodésique caractérise complètement une surface développable, définie comme *l'enveloppe des plans rectifiants* de cette géodésique. Autrement dit, à une courbe géodésique correspond localement une unique surface développable régulière, qui peut être reconstruite par interpolation géodésique [Pal08, SRD08], si l'on dispose de l'expression analytique de cette géodésique.

Ainsi, l'application $G^1$ du ruban Morphosense (assimilé à une surface développable), sur une surface physique supposée développable permet de reconstruire en théorie cette surface.

Cependant, dans le contexte pratique du Morphosense, la reconstruction numérique de la courbe ruban conduit à des imprécisions qui nécessitent un traitement différent. Pour cela, en nous inspirant des travaux de [Pet04], nous développons une méthode permettant d'identifier, de segmenter et de reconstruire les différentes composantes (cône généralisé, cylindre généralisé, développée tangentielle) de cette surface développable (voir **chapitre 4**).

**• Reconstruction d'une surface quasi-développable**

Dans le cas d'une surface quelconque, l'acquisition de plusieurs courbes géodésiques à l'aide du ruban Morphosense est nécessaire, découpant ainsi la surface en carreaux fermés à $n$ côtés.

L'hypothèse d'une surface "quasi-développable" permet de se ramener à des carreaux triangulaires (ou rectangulaires), qui sont reconstruits par interpolation géodésique. En effet, les géodésiques intérieures manquantes peuvent être estimées par cette hypothèse de modèle et une méthode de mise à plat. Cette méthode est présentée dans le **chapitre 5**.

L'hypothèse de modèle qui est faite est cohérente avec diverses applications dans la reconstruction de surfaces. En pratique, elle modélise des surfaces lisses issues des déformations d'un matériau plan à l'élasticité faible (tissu, plaque de tôle, ou le parablond de notre plate-forme de test présenté dans la section suivante).

Notons néanmoins que la question de la fermeture de ces contours à 3 ou 4 côtés reste contraignante dans un contexte numérique.

**• Reconstruction d'une surface délimitée par des géodésiques planaires**

Dans le cas général, la fermeture d'un contour composé de $n$ géodésiques reste problématique dans le cadre de l'interpolation géodésique.

Cependant, s'il est possible d'acquérir des courbes géodésiques planaires sur la surface physique, la fermeture du réseau sera grandement simplifiée car les contraintes différentielles de croisement ne feront plus intervenir la torsion.

Nous étudions donc la caractérisation des carreaux de surface délimités par de telles géodésiques planaires. En pratique, cette méthode conduit à une stratégie d'acquisition consistant à rechercher sur la surface physique des courbes géodésiques "quasi-planaires", puis à fermer le contour par une méthode d'approximation, pour finalement appliquer une reconstruction par interpolation géodésique. Cette méthode est présentée dans le **chapitre 6**.

**• Optimisation du contour ouvert en peigne**

La structure en peigne introduite dans les travaux précédents (voir section 1.4.2) permet de s'affranchir des délicates conditions de croisement géodésique. On propose

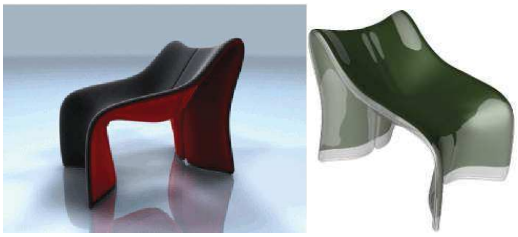

FIGURE 1.13 – *Reconstruction d'une chaise à partir de quatre courbes géodésiques planaires.*

dans ce cadre une optimisation de cette structure en peigne consistant à mieux choisir les paramètres des courbes virtuelles qui ferment le réseau. Cette optimisation simple ne fait pas l'objet d'un chapitre à part entière. On se contente de la présenter ici et d'en donner quelques résultats pratiques.

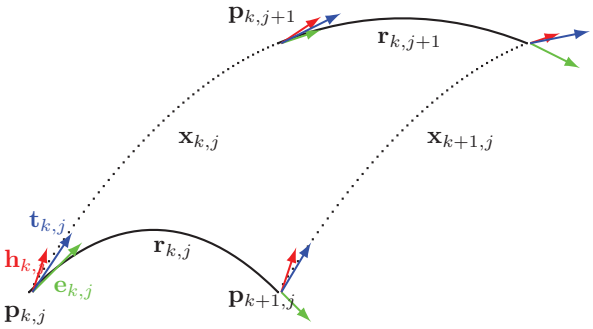


FIGURE 1.14 – *Forme générale d'un patch*

Dans les travaux précédents, le choix des vecteurs $\mathbf{h}_{k,j}$ comme vecteurs dérivés de Hermite pour les courbes virtuelles $\mathbf{x}_{k,j}$ était arbitraire. A priori, la seule contrainte est d'utiliser des vecteurs $\mathbf{t}_{k,j}$ contenus dans les plans tangents à la surface aux points $\mathbf{p}_{k,j}$ (figure 1.14). L'idée est alors de trouver les vecteurs $\mathbf{t}_{k,j}$ optimaux pour reconstruire les courbes $\mathbf{x}_{k,j}$. On choisit pour cela de minimiser l'énergie de plaque mince de la surface reconstruite :

$$J(X) = \iint \|\mathbf{s}_{uu}(u,v)\|^2 + 2\|\mathbf{s}_{uv}(u,v)\|^2 + \|\mathbf{s}_{vv}(u,v)\|^2)dudv \tag{1.15}$$

où

$$X = (\alpha_{1,1}, \beta_{1,1}, ..., \alpha_{N,1}, \beta_{N,1}, \alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, ..., \alpha_{N,2}, \beta_{N,2}, ..., \alpha_{1,M}, \beta_{1,M}, ..., \alpha_{N,M}, \beta_{N,M}). \tag{1.16}$$

C'est un choix par défaut essentiellement justifié par l'hypothèse de régularité des surfaces entre les mesures disponibles. La minimisation de cette énergie aboutit à des surfaces aussi lisses que possibles moyennant l'interpolation des données et le respect des contraintes fixées. En l'absence d'hypothèses sur la surface sous-jacente, les variations de la surface sont imprédictibles en examinant uniquement les données d'interpolation. Une reconstruction qui ne rend pas compte de ces variations est alors essentiellement la conséquence d'un sous-échantillonnage de la zone instrumentée.

On veut minimiser l'énergie globale de la surface, mais par linéarité des intégrales il

suffit de minimiser la somme des énergies de chaque patch. Ainsi, si l'on note $J$ l'énergie de la surface et $J_{k,j}$ l'énergie du patch $(k, j)$, on a :

$$\begin{aligned}\min_X J &= \min_X \sum_{k,j} J_{k,j} \\ &= \min_X \sum_{k,j} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \int_{u_k}^{u_{k+1}} (\|\mathbf{s}_{uu}(u,v)\|^2 + 2\|\mathbf{s}_{uv}(u,v)\|^2 + \|\mathbf{s}_{vv}(u,v)\|^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (1.17)\end{aligned}$$

Le segment compris entre les rubans $j$ et $j+1$ de la courbe $\mathbf{x}_k$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k,j}(v) \quad &= H[\mathbf{p}_{k,j}, \mathbf{p}_{k,j+1}, \mathbf{t}_{k,j}, \mathbf{t}_{k,j+1}, v_j, v_{j+1}](v) \\ &= H_0(t)\mathbf{p}_{k,j} + H_1(t)\mathbf{t}_{k,j} \\ &+ H_2(t)\mathbf{t}_{k,j+1} + H_3(t)\mathbf{p}_{k,j+1}\end{aligned}$$

où $v \in [v_j, v_{j+1}]$, $t = \frac{v - v_j}{v_{j+1} - v_j}$ et $\mathbf{t}_{k,j} = \alpha_{k,j}\mathbf{e}_{k,j} + \beta_{k,j}\mathbf{h}_{k,j}$.

On peut alors exprimer les patches de Coons en fonction de ces variables :

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{k,j}(u,v) = &[H_0(u)H_3(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k,j}(v) \\ \mathbf{x}_{k+1,j}(v) \end{bmatrix} \\ &+ [\mathbf{r}_{k,j}(u)\mathbf{r}_{k,j+1}(u)] \begin{bmatrix} H_0(v) \\ H_3(v) \end{bmatrix} \\ &- [H_0(u)H_3(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k,j} & \mathbf{p}_{k,j+1} \\ \mathbf{p}_{k+1,j} & \mathbf{p}_{k+1,j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(v) \\ H_3(v) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

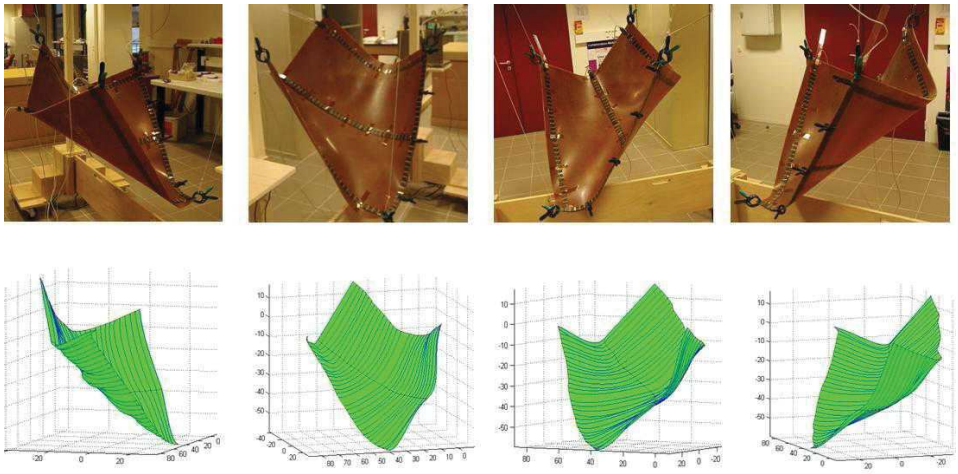

FIGURE 1.15 – *Application de la méthode aux données réelles du Morphosense (ancienne génération de capteurs)*

L'expression de $\mathbf{x}_{k,j}$ précédente permet de simplifier $\mathbf{s}_{k,j}$ :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_{k,j}(u,v) = \mathbf{r}_{k,j}(u)H_0(v) + \mathbf{r}_{k,j+1}(u)H_3(v) \\
+ [H_0(u)H_3(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{k,j} & \mathbf{t}_{k,j+1} \\ \mathbf{t}_{k+1,j} & \mathbf{t}_{k+1,j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(v) \\ H_3(v) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

La minimisation de l'énergie (1.16) est alors un problème d'optimisation quadratique non contraint, qui possède donc une solution analytique. On présente quelques résultats de reconstruction sur les figures 1.15 et 1.16.

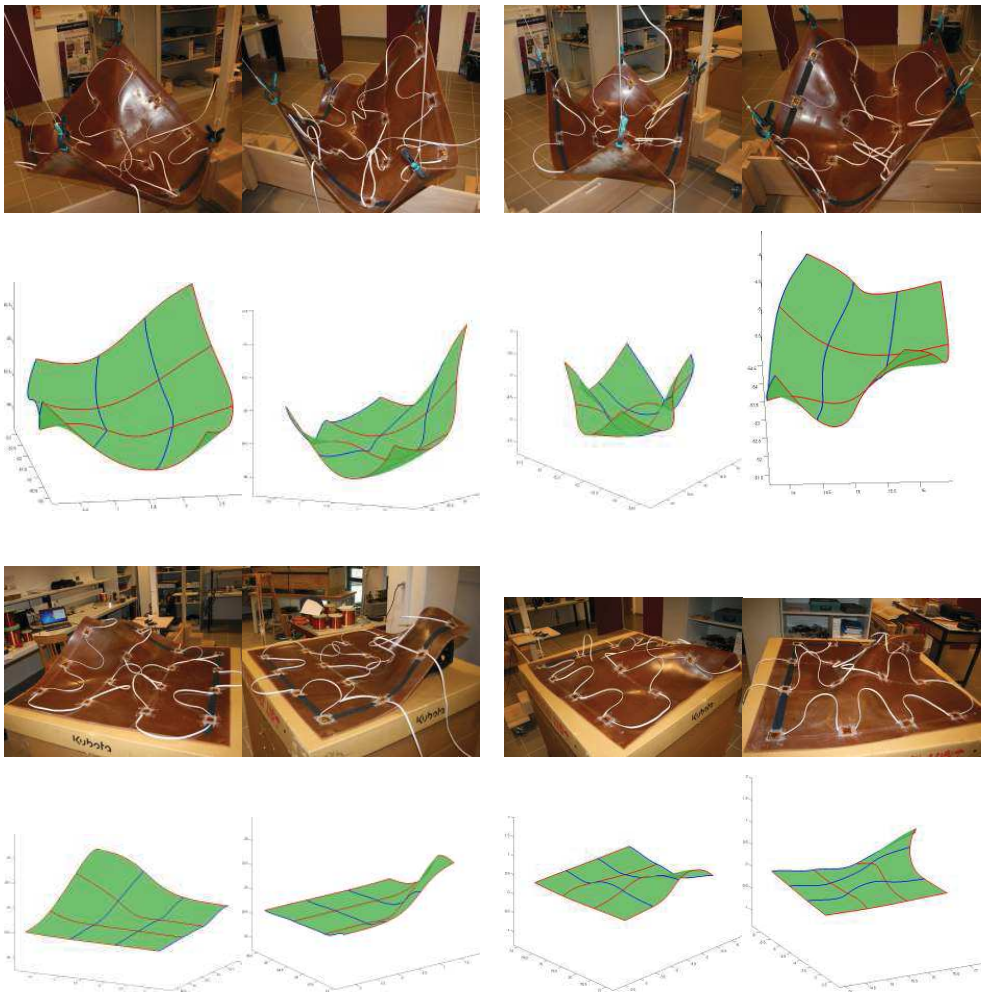

FIGURE 1.16 – *Application de la méthode aux données réelles du Morphosense (nouvelle génération de capteurs)*

### 1.5.4 Métrologie pour la reconstruction

Afin de valider les méthodes de reconstruction développées dans ces travaux, des plateformes d'acquisition ont été développées, ou sont encore en cours de développement. Ces plateformes comportent nécessairement une surface sur laquelle il est possible d'appliquer le ruban Morphosense, et idéalement un moyen alternatif précis de reconstruction des courbes acquises par le ruban et de la surface en question. Cette deuxième reconstruction est essentielle pour comparer nos algorithmes de reconstruction et valider leurs performances.

Plusieurs moyens pour effectuer cette deuxième reconstruction ont été mis en oeuvre :

- Utilisation d'un dispositif externe de métrologie, dont on connaît la précision. Ce dispositif se doit d'être performant dans le cas d'une surface quelconque, puisqu'il sera notre seul point de comparaison pour valider nos algorithmes.
- Utilisation de surfaces dont on connaît une expression analytique de la forme. La précision dépend alors des mesures effectuées manuellement lors de l'acquisition.

De telles approches sont maintenant présentées, ainsi que la question de la mesure d'erreur entre deux surfaces (proches) reconstruites.

**• Validation par un dispositif externe de métrologie**

Diverses configurations équipées d'un dispositif externe de métrologie ont été étudiées. Elles ont été pensées autour de l'utilisation d'une feuille de caoutchouc *parablond* (figure 1.17). Cette surface déformable présente une souplesse intéressante pour modéliser des surfaces variées, et une élasticité faible qui facilite la pose des rubans.

La première configuration consiste en un *portique* (1.17, à gauche), sur lequel le parablond est accroché par des pinces en ses extrémités. Il est possible de déformer la surface obtenue en faisant varier les positions des pinces. Cette solution provisoire mais très simple à mettre en oeuvre nous a permis de faire les premiers tests. Cependant, elle présente l'inconvénient de limiter la classe des surfaces mesurables (intuitivement, de telles surfaces fixées à leurs extrémités ont des formes similaires).

A terme, la solution envisagée est celle d'une *plateforme de test* munie de vérins (1.17, en bas à droite) permettant la création d'une grande variété de surfaces. Cette plateforme est toujours en cours de développement.

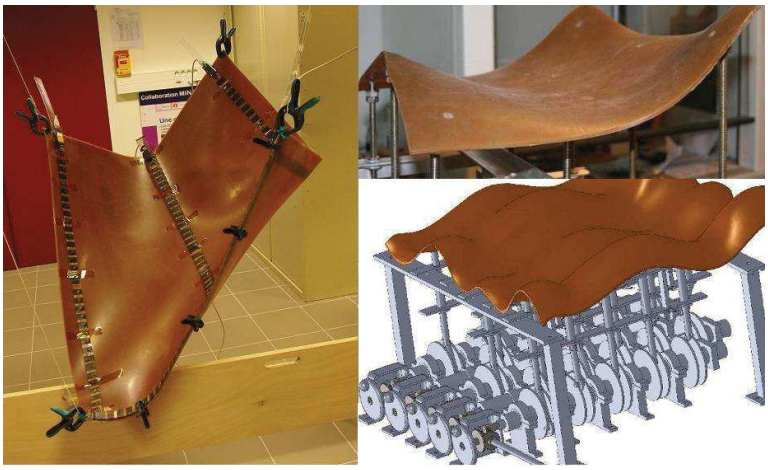

FIGURE 1.17 – *Exemples de dispositifs d'acquisition.*

Une plateforme préliminaire à celle-ci a cependant déjà pu être développé. Il s'agit

d'une *rampe* unique munie de vérins sur laquelle on ne peut déformer qu'un seul ruban (voir figure 1.18).

FIGURE 1.18 – *Version 1D de la plateforme déjà développée : rampe munie de vérins.*

Il s'agit alors de coupler ces plateformes de test avec un dispositif externe pour valider nos algorithmes. Le premier dispositif s'appuie sur un système optique de type scanner (figure 1.19), qui donne une reconstruction numérique précise de la surface capturée, permettant ainsi le contrôle de l'efficacité de nos algorithmes. Ce scanner étant couplé avec le système de plateforme en cours de développement, il n'a pas encore été utilisé pour les tests.

FIGURE 1.19 – *Scanner utilisé pour des tests préliminaires.*

Une second dispositif est celui du Coda Motion. Il comporte d'une part plusieurs caméras (figure 1.20, à gauche), et d'autre part des marqueurs de position reliés à des batteries autonomes (figure 1.20, à droite). Les caméras sont alors capables de localiser la position des marqueurs visibles, et ainsi de reconstruire une carte des positions de l'ensemble des marqueurs actifs. En positionnant un certain nombre de marqueurs le long des rubans Morphosense, on peut donc comparer la position de notre courbe reconstruite avec celles des marqueurs, aux endroits où ils sont placés.

Ces dispositifs de validation sont contraignants car pour la plupart ils s'appuient sur des systèmes de contrôle externe optiques (comme le scanner et le Coda Motion utilisé dans nos travaux) difficiles à utiliser sur tous les types de surfaces (notamment les surfaces se repliant sur elles-mêmes). Par ailleurs, leur coût augmente énormément avec le besoin de précision.

FIGURE 1.20 – *Caméras, batterie et marqueurs de position du dispositif Coda Motion.*

**• Validation après acquisition d'une surface analytique**

Une deuxième méthode de validation possible consiste à appliquer le ruban Morphosense sur une surface dont on connaît l'expression analytique exacte. Il s'agit de repérer quelques points clés du ruban Morphosense lors de l'acquisition, puis d'exploiter ces mesures afin de déterminer l'expression analytique de la courbe géodésique sous-jacente. On peut alors comparer les courbes issues de nos algorithmes de reconstruction à cette courbe analytique.

Ainsi, nous avons acquis un cône moulé en polystyrène (figure 1.21), de caractéristiques connues (angle d'ouverture et hauteur)

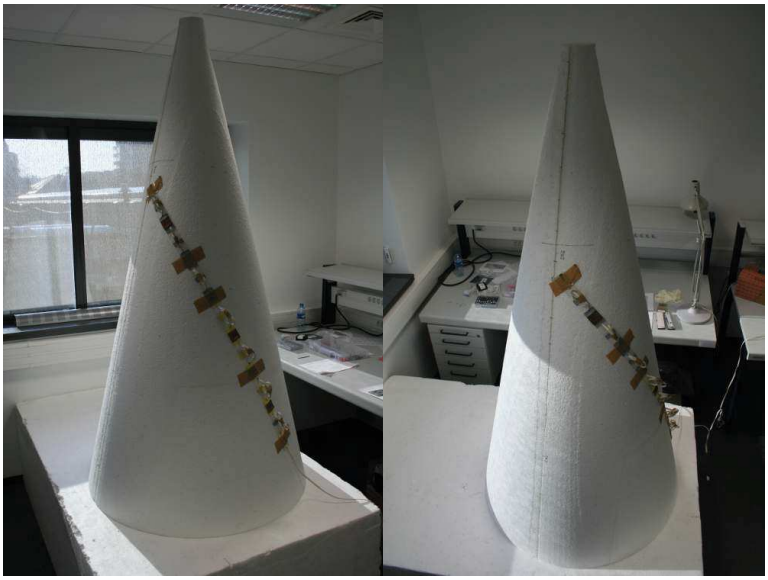

FIGURE 1.21 – *Deux vues du cône utilisé pour la validation des algorithmes.*

Bien évidemment, de tels dispositifs sont contraignants en pratique du fait du caractère figé de la surface. Cependant, il est possible de créer un tel modèle pour tous les types de surfaces, afin de valider les algorithmes sur une plus grande variété d'exemples.

• **Comparaison de courbes et de surfaces**

La question de la comparaison entre la reconstruction Morphosense et la reconstruction témoin se pose, conduisant à une mesure de leur distance. Il est très compliqué de définir une telle mesure, qui doit prendre en compte à la fois la forme et la position générale des formes à comparer, mais aussi des propriétés locales comme la courbure, déterminantes visuellement mais aussi dans beaucoup d'applications.

## 1.6 Organisation et positionnement des travaux

On décrit ici à l'aide d'un schéma l'ensemble des approches de reconstruction liées aux capteurs d'orientation, afin de mieux situer les travaux de cette thèse.

La partie de gauche concerne les approches en marge de cette thèse, qui se passent de rubans. Le projet MSTIC est un projet de l'UJF qui étudie la reconstruction de surface à partir des normales fournies par des capteurs répartis aléatoirement sur la surface. La deuxième approche dite du Morphosense passif se base sur l'idée que les ondes se déplaçant sur la surface instrumentée de capteurs pourraient permettre d'accéder aux distances géodésiques entre capteurs même en l'absence de rubans physiques.

Le reste du schéma décrit les approches étudiées dans ces travaux, pour les différentes étapes du processus de reconstruction. Ce sont les méthodes qui sont présentées dans les chapitres suivants. Elles sont souvent basées sur les travaux de Nathalie Saguin Sprynski [Spr07]. Seule l'interpolation d'un polygône curviligne [FSB09b, FSB09a, FSB10] est antérieure à ces travaux, et l'on a uniquement étudié son extension à un cadre plus général (contour à $n$ côtés).

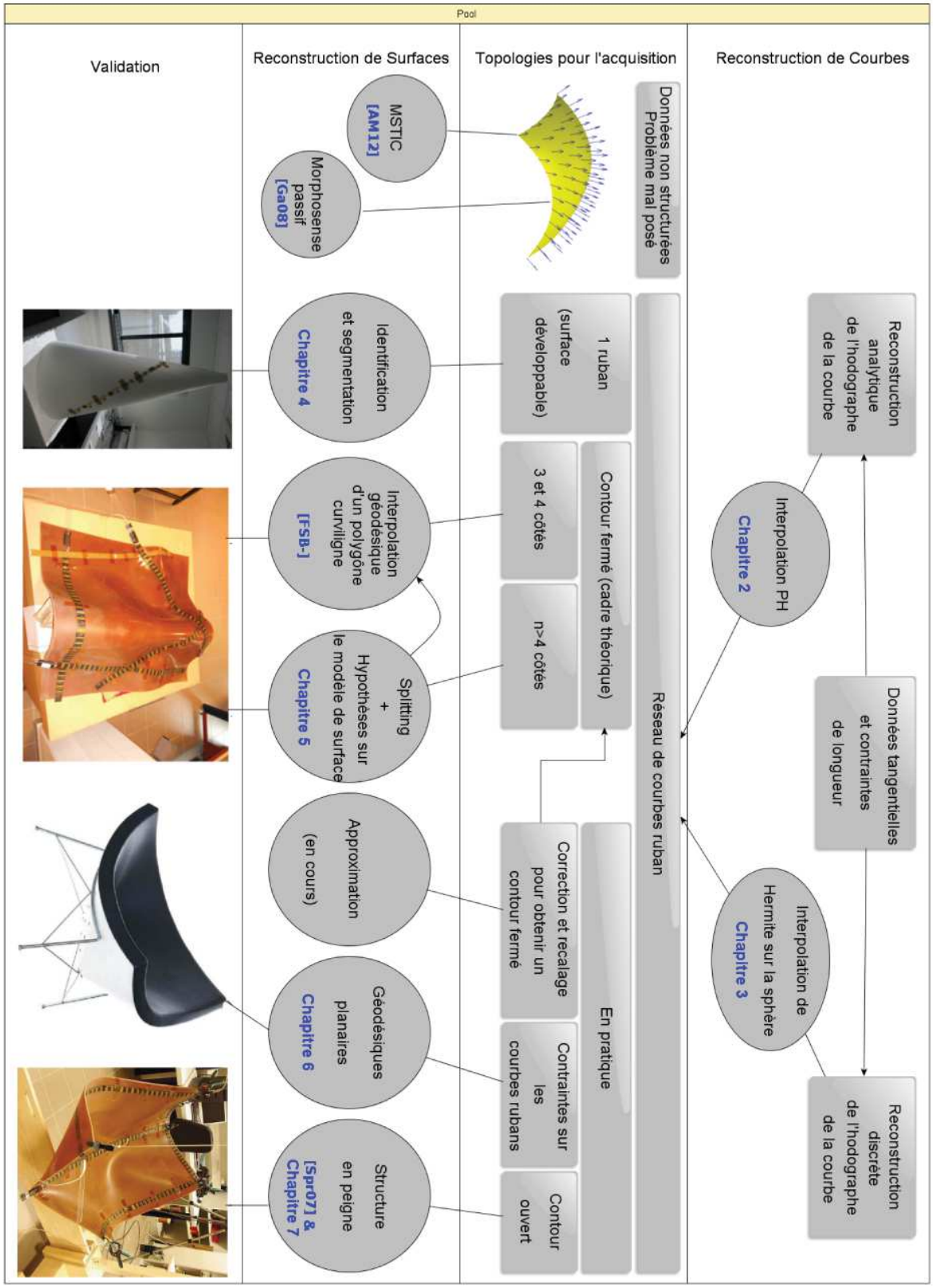


FIGURE 1.22 – *Travaux de reconstruction liés aux capteurs d'orientation.*

## Bibliographie du Chapitre


[AM12] H. Abdallah and Q. Mérigot, *On the reconstruction of convex sets from random normals measurements*, 28th European Workshop on Computational Geometry, EuroCG - Assisi, Perugia, Italy, 2012.

[BVI91] C. Bennis, J.-M. Vézien, and G. Iglésias, *Piecewise surface flattening for non-distorted texture mapping*, Computer Graphics **25** (1991), 237–246.

[Coo64] S. Coons, *Surfaces for computer aided design*, Technical Report, M.I.T (1964).

[DoC76] M. P. DoCarmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, 1976.

[Far02] G. Farin, *Curves and surfaces for cagd (5th edition)*, Academic Press, 2002.

[FSB09a] Rida Farouki, Nicolas Szafran, and Luc Biard, *Construction of bézier surface patches with bézier curves as geodesic boundaries*, Computer Aided Design **41** (2009), 772–781.

[FSB09b] ———, *Existence conditions for coons patches interpolating geodesic boundary curves*, Computer Aided Geometric Design **26** (2009), 599–614.

[FSB10] ———, *Construction and smoothing of triangular coons patches with geodesic boundary curves*, Computer Aided Geometric Design **27** (2010), 301–312.

[Ga08] P. Gouédard and al., *Cross-correlation of random fields : mathematical approach and applications*, Geophysical Prospecting **56** (2008), 375–393.

[HS08] T. Hoshi and H. Shinoda, *3d shape measuring sheet utilizing gravitational and geomagnetic fields*, Proceedings of the SICE Annual Conference, The University of Electro-Communications, Japan, 2008.

[JW03] Bert Jüttler and Wenping Wang, *The shape of spherical quartics*, Computer Aided Geometric Design **20** (2003), 621–636.

[Nie04] Gregory Nielson, *$\nu$-quaternion splines for the smooth interpolation of orientations*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics **10** (2004), 224–229.

[Pal08] M. Paluszny, *Cubic polynomial patches through geodesics*, Computer Aided Geometric Design **40** (2008), 56–61.

[Pet04] Martin Peternell, *Developable surface fitting to point clouds*, Computer Aided Geometric Design **21** (2004), 785–803.

[PH05] H. Pottmann and M. Hofer, *A variational approach to spline curves on surfaces*, Computer Aided Geometric Design **22** (2005), 693–709.

[SLDB08] N. Sprynski, B. Lacolle, D. David, and L. Biard, *Surface reconstruction via geodesic interpolation*, Computer Aided Geometric Design **40** (2008), 480–492.

[Spr07] Nathalie Sprynski, *Reconstruction de courbes et surfaces à partir de données tangentielles*, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, 2007.

[SRD08] J. Sanchez-Reyes and R. Dorado, *Constrained design of polynomial surfaces from geodesic curves*, Computer Aided Geometric Design **40** (2008), 49–55.

[Str61] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, Dover Publications, Inc, 1961.

[Tuc97] C.L. Tucker, *Forming of advanced composites*, Advanced Composites Manufacturing **19** (1997), 370–376.

[WTT04] G. Wang, K. Tang, and C.H. Tai, *Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic*, Computer Aided Design **36** (2004), 447–459.

# Chapitre 2

# Interpolation spline PH sous contraintes de longueur


**2.1 Introduction** . . . . . **36**
**2.2 Courbes PH spatiales** . . . . . **36**
2.2.1 Généralités . . . . . 36
2.2.2 Cas cubique et quintique . . . . . 37
**2.3 Splines PH quintiques à dérivées première et seconde continues** . . . . . **37**
**2.4 Interpolation de points sous contraintes de longueur** . . . **38**
2.4.1 Description de la méthode . . . . . 38
2.4.2 Initialisation des coefficients . . . . . 40
2.4.3 Implémentation de la méthode . . . . . 41
2.4.4 Exemples numériques . . . . . 42
**2.5 Interpolation $C^2$ de dérivées sous contraintes de longueur** **46**
2.5.1 Description de la méthode . . . . . 46
2.5.2 Initialisation des coefficients . . . . . 48
2.5.3 Exemples numériques . . . . . 48
**2.6 Conclusion** . . . . . **51**


On présente dans cette section deux problèmes d'interpolation sous contraintes de longueur. Plus précisément, étant donnée une suite de noeuds $t_i,\ i = 0, ..., N$, on cherche une spline $\mathbf{r}(t)$ composée de segments $\mathbf{r}_i(t)$ telle que chaque segment vérifie une longueur imposée $l_i$. Ces contraintes se traduisent simplement par la relation intégrale

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\mathbf{r}'(t)|dt = l_i. \tag{2.1}$$

On propose une solution à ces problèmes s'appuyant sur les courbes aux hodographes pythagoriciennes. Le premier problème étudié est un problème classique d'interpolation d'une série de points de l'espace $\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{p}_i$, tandis que le second est un problème d'interpolation de vecteurs dérivés $\mathbf{r}'(t_i) = \mathbf{d}_i$ qui répond plus précisément au problème de reconstruction de courbes lié aux rubans Morphosense.

Cette approche a fait l'objet d'une publication [HFSB13].

## 2.1 Introduction

Nous proposons ici une approche globale qui s'appuie sur l'utilisation de courbes polynomiales à hodographes pythagoriciens (PH). La solution consiste en une spline PH quintique $C^2$ respectant des contraintes de longueur sur chacun de ses segments. La structure algébrique qui régit l'hodographe des courbes PH a de nombreux avantages par rapport aux courbes paramétrées polynomiales classiques. Elles possèdent des offsets rationnels, et sont particulièrement efficaces pour l'interpolation en temps réel du mouvement des machines à commande numérique (CNC), dont la vitesse de déplacement est prédéterminée. L'interpolation spline $C^2$ à l'aide de courbes PH quintiques a fait l'objet de plusieurs travaux [FMS03, FMPS12]. Le problème récurrent de ces travaux consistait à fixer les degrés de liberté introduits par les segments de courbe PH de degré 5. La méthode la plus récente [FMPS12] présente un moyen de fixer tous ces degrés de liberté en optimisant la forme de la courbe. Dans notre cas, les contraintes de longueur entre les noeuds successifs fournissent un moyen cohérent physiquement et géométriquement pour fixer la plupart d'entre eux.

Les généralités sur les courbes PH et en particulier sur les splines PH quintiques sont présentées en section 2.2. Ces splines PH sont ensuite utilisées en section 2.4 pour résoudre le problème d'interpolation plus classique d'une série de points sous contraintes de longueur. Le problème d'interpolation des dérivées sous contraintes de longueurs est traité en section 2.5. Des exemples seront fournis et en conclusion les limites et améliorations possibles de ces méthodes seront envisagées.

## 2.2 Courbes PH spatiales

On présente ici quelques généralités sur les courbes PH spatiales, en insistant sur les cas de courbes quintiques.

### 2.2.1 Généralités

Une courbe PH $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de $\mathbb{R}^3$ est caractérisée par le fait que son hodographe $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ satisfait la relation :

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = \sigma(t)^2, \tag{2.2}$$

où $\sigma(t)$ est un polynôme. La vitesse paramétrique $|\mathbf{r}'(t)|$ de la courbe s'exprime alors simplement sous forme polynomiale par $|\mathbf{r}'(t)| = \sigma(t)$. La relation (2.2) est satisfaite si et seulement si $x'(t),\ y'(t)$ et $z'(t)$ peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\ y'(t) &= 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)], \\ z'(t) &= 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)], \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $u(t), v(t), p(t), q(t)$ sont quatre polynômes, conduisant alors à l'expression suivante pour la vitesse paramétrique :

$$\sigma(t) = u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t). \tag{2.4}$$

De manière équivalente, les courbes PH peuvent être générées par un couple de polynômes complexes

$$\alpha(t) = u(t) + \mathbf{i}\ v(t), \quad \beta(t) = q(t) + \mathbf{i}\ p(t), \tag{2.5}$$

à l'aide de la représentation de Hopf (voir chapitre 3 pour plus de détails)

$$\mathbf{r}'(t) = (|\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2,\ 2\,\mathrm{Re}(\alpha(t)\bar{\beta}(t)),\ 2\,\mathrm{Im}(\alpha(t)\bar{\beta}(t)) \tag{2.6}$$

où $\bar{\mathbf{z}}$ est le conjugé du complexe $\mathbf{z}$, conduisant alors à l'expression de la vitesse paramétrique :

$$\sigma(t) = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2. \tag{2.7}$$

### 2.2.2 Cas cubique et quintique

Une courbe PH cubique de l'espace est générée par deux polynômes de degré un :

$$\alpha(t) = \alpha_0(1-t) + \alpha_1 t, \quad \beta(t) = \beta_0(1-t) + \beta_1 t, \tag{2.8}$$

exprimés dans la base de Bernstein. L'intégration de la forme (2.6) conduit bien à une courbe polynomiale cubique.

De façon similaire, une courbe PH quintique s'obtient à partir de deux polynômes quadratiques :

$$\begin{array}{l} \alpha(t) = \alpha_0(1-t)^2 + \alpha_1 2(1-t)t + \alpha_2 t^2, \\ \beta(t) = \beta_0(1-t)^2 + \beta_1 2(1-t)t + \beta_2 t^2. \end{array} \tag{2.9}$$

Considérant ensuite l'écriture $(x,\, y + \mathbf{i}\, z)$ pour les points $(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, les points de contrôle $\mathbf{q}_k = (x_k,\, y_k + \mathbf{i}\, z_k)$ de la courbe PH quintique écrite sous la forme de Bézier

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (1-t)^{5-k} t^k \mathbf{q}_k, \tag{2.10}$$

sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \frac{1}{5}(|\alpha_0|^2 - |\beta_0|^2, 2\alpha_0\beta_0), \\ \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \frac{1}{5}(\mathrm{Re}(\alpha_0\bar{\alpha}_1 - \beta_0\bar{\beta}_1), \alpha_0\bar{\beta}_1 - \alpha_1\bar{\beta}_0), \\ \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 + \frac{1}{15}(2(|\alpha_1|^2 - |\beta_1|^2) \\ \quad + \mathrm{Re}(\alpha_2\bar{\alpha}_0 - \beta_2\bar{\beta}_0), 4\alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_0\bar{\beta}_2 + \alpha_2\bar{\beta}_0), \\ \mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_3 + \frac{1}{5}(\mathrm{Re}(\alpha_1\bar{\alpha}_2 - \beta_1\bar{\beta}_2), \alpha_1\bar{\beta}_2 - \alpha_2\bar{\beta}_1), \\ \mathbf{q}_5 = \mathbf{q}_4 + \frac{1}{5}(|\alpha_2|^2 - |\beta_2|^2, 2\alpha_2\beta_2), \end{array} \right. \tag{2.11}$$

où le point $\mathbf{q}_0 = (x_0, y_0 + \mathbf{i}\, z_0)$ est libre et peut être vu comme la constante d'intégration.

**Remarque 4.** *Notons que pour $\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_0 - 2\beta_1 + \beta_2 = 0$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des polynômes de degré un, de sorte que la PH quintique générée est intrinsèquement une PH cubique.*

## 2.3 Splines PH quintiques à dérivées première et seconde continues

Par souci de simplicité, on se limite ici aux splines à paramétrisation uniforme, autrement dit pour chaque segment $\mathbf{r}_i(t)$ de la courbe spline, on a $t \in [0, 1]$. Cette restriction est appropriée au cas des courbes rubans acquises par le Morphosense, puisque les capteurs sont répartis uniformément sur le ruban.

Etant donnée une suite de coefficients complexes $a_i$ et $b_i$, $i = 0, ..., N+1$, on considère les $N$ courbes PH quintiques $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, ..., N$ générées par les polynômes complexes $\alpha_i(t)$ et $\beta_i(t)$ écrits sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l} \alpha_i(t) = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)(1-t)^2 + a_i 2(1-t)t + \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})t^2, \\ \beta_i(t) = \frac{1}{2}(b_{i-1} + b_i)(1-t)^2 + b_i 2(1-t)t + \frac{1}{2}(b_i + b_{i+1})t^2. \end{array} \tag{2.12}$$

Cette écriture fait clairement apparaître une interdépendance entre les segments PH adjacents. Précisément, on vérifie [FMPS12, Far08] que cette écriture conduit automatiquement à la continuité des dérivées première et seconde entre deux segments successifs, à savoir :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i'(1) = \mathbf{r}_{i+1}'(0) &= (\tfrac{1}{4}(|a_i + a_{i+1}|^2 - |b_i + b_{i+1}|^2), \\ &\qquad \tfrac{1}{2}(a_i + a_{i+1})(\bar{b}_i + \bar{b}_{i+1})), \\ \mathbf{r}_i''(1) = \mathbf{r}_{i+1}''(0) &= (|a_{i+1}|^2 - |a_i|^2 + |b_{i+1}|^2 - |b_i|^2, \\ &\qquad 2(a_{i+1}\bar{b}_{i+1} - a_i\bar{b}_i)),\end{aligned} \tag{2.13}$$

de sorte que ce procédé génère une spline PH quintique à dérivées première et seconde continues.

**Continuité** $C^0$. – Notons que la continuité $C^0$ entre les segments PH n'est pas réalisée a priori. La procédure d'intégration permet de choisir l'origine $\mathbf{r}_i(0)$ de chaque segment (2.11) mais pas l'extrémité $\mathbf{r}_i(1)$.

**Longueur d'un segment**. – Avec les notations précédentes, la longueur $L_i = \int_0^1 (|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2)dt$ de chaque segment $\mathbf{r}_i(t)$ est définie par l'expression quadratique suivante en fonction des coefficients complexes $a_i$ et $b_i$ :

$$\begin{aligned}120\, L_i \;=\; & 6|a_{i-1}|^2 + 54|a_i|^2 + 6|a_{i+1}|^2 \\ & + 6|b_{i-1}|^2 + 54|b_i|^2 + 6|b_{i+1}|^2 \\ & + 13(a_{i-1}\bar{a}_i + \bar{a}_{i-1}a_i + a_i\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_i a_{i+1}) \\ & + 13(b_{i-1}\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}b_i + b_i\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_i b_{i+1}) \\ & + a_{i-1}\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_{i-1}a_{i+1} \\ & + b_{i-1}\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_{i-1}b_{i+1}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Notons que l'équation (2.14) est réelle même si elle est exprimée en fonction de nombres complexes.

## 2.4 Interpolation de points sous contraintes de longueur

On considère ici le problème de l'interpolation d'une suite de points $\mathbf{p}_i$ associés à des noeuds $t_i$ par une spline PH quintique de classe $C^2$, sous contraintes de longueur $l_i$ pour chaque segment.

### 2.4.1 Description de la méthode

Précisément, étant donnée une suite de points $\mathbf{p}_0, ..., \mathbf{p}_N$ associés à des noeuds $t_0, ..., t_N$, ainsi que des contraintes de longueur $l_1, ..., l_N$, on cherche une spline PH quintique comme définie en section 2.3, composée de segments $\mathbf{r}_i(t),\ i = 1, ..., N$ telle que pour tout $i$ :

$(i)$ $\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{r}_i(1) = \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_{i+1}(0)$ et $\mathbf{r}_N(1) = \mathbf{p}_N$,

$(ii)$ $\int_0^1 |\mathbf{r}_i'(t)|dt = l_i$.

La première contrainte couplée avec l'utilisation des splines introduites en section 2.3 génère une spline PH quintique de classe $C^2$.

**(i) : interpolation des points $\mathbf{p}_i$** – Cette contrainte revient à imposer $\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{p}_{i-1}$ et $\mathbf{r}_i(1) = \mathbf{p}_i$ pour chaque segment. Avec l'intégration, nous choisissons $\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{p}_{i-1}$ de sorte que la contrainte d'interpolation se traduit par l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^1 \mathbf{r}_i'(t)dt = \Delta\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}. \tag{2.15}$$

pour chaque segment $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, .., N$. En utilisant (2.6) avec la notation $\Delta\mathbf{p}_i = (\Delta x_i,\, \Delta y_i + \mathbf{i}\,\Delta z_i)$, l'équation vectorielle (2.15) s'écrit :

$$\begin{array}{l} \int_0^1 |\alpha_i|^2 - |\beta_i|^2 dt = \Delta x_i, \\ \int_0^1 2\alpha_i(t)\bar{\beta}_i(t)dt = \Delta y_i + \mathbf{i}\,\Delta z_i, \end{array}$$

ce qui permet d'exprimer ces deux équations en fonction des nombres complexes $a_i$, $b_i$ :

$$\begin{array}{l} 6|a_{i-1}|^2 + 54|a_i|^2 + 6|a_{i+1}|^2 \\ - 6|b_{i-1}|^2 - 54|b_i|^2 - 6|b_{i+1}|^2 \\ + 13(a_{i-1}\bar{a}_i + \bar{a}_{i-1}a_i + a_i\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_i a_{i+1}) \\ - 13(b_{i-1}\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}b_i + b_i\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_i b_{i+1} \\ + a_{i-1}\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_{i-1}a_{i+1} \\ - b_{i-1}\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_{i-1}b_{i+1} = 120\Delta x_i, \end{array} \tag{2.16}$$

$$\begin{array}{l} 6a_{i-1}\bar{b}_{i-1} + 54a_i\bar{b}_i + 6a_{i+1}\bar{b}_{i+1} \\ + 13(a_{i-1} + ai + 1)\bar{b}_i + 13a_i(\bar{b}_{i-1} + \bar{b}_{i+1}) \\ + a_{i-1}\bar{b}_{i+1} + a_{i+1}\bar{b}_{i-1} = 60(\Delta y_i + \mathbf{i}\Delta z_i). \end{array} \tag{2.17}$$

Notons que les $N$ équations (2.16) sont réelles. Finalement, l'ensemble des équations (2.16) et (2.17) pour chaque segment fournit $3N$ équations réelles pour l'interpolation des points $\mathbf{p}_i$.

**(ii) : contraintes de longueur** $l_i$ – Cette contrainte s'écrit avec la relation (2.14) sous la forme

$$\begin{array}{l} 6|a_{i-1}|^2 + 54|a_i|^2 + 6|a_{i+1}|^2 \\ + 6|b_{i-1}|^2 + 54|b_i|^2 + 6|b_{i+1}|^2 \\ + 13(a_{i-1}\bar{a}_i + \bar{a}_{i-1}a_i + a_i\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_i a_{i+1}) \\ + 13(b_{i-1}\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}b_i + b_i\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_i b_{i+1}) \\ + \mathbf{a}_{i-1}\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_{i-1}a_{i+1} \\ + \mathbf{b}_{i-1}\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_{i-1}b_{i+1} = 120\ l_i. \end{array} \tag{2.18}$$

**Synthèse** – La réalisation des contraintes $(i)$ et $(ii)$ se traduit par les équations (2.16), (2.17) et (2.18). Afin de simplifier le système, on remplace les équations (2.16) et (2.18) par les équations $\frac{1}{2}$((2.18)+(2.16)) et $\frac{1}{2}$((2.18)-(2.16)) :

$$\begin{array}{l} 6|a_{i-1}|^2 + 54|a_i|^2 + 6|a_{i+1}|^2 \\ + 13(a_{i-1}\bar{a}_i + \bar{a}_{i-1}a_i + a_i\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_i a_{i+1}) \\ + a_{i-1}\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_{i-1}a_{i+1} + = 60(l_i + \Delta x_i), \end{array} \tag{2.19}$$

$$\begin{array}{l} 6|b_{i-1}|^2 + 54|b_i|^2 + 6|b_{i+1}|^2 \\ + 13(b_{i-1}\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}b_i + b_i\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_i b_{i+1}) \\ + b_{i-1}\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_{i-1}b_{i+1} = 60(l_i - \Delta x_i). \end{array} \tag{2.20}$$

Au final (2.17), (2.19) et (2.20) fournissent $4N$ équations pour les $4N + 8$ variables réelles du problème : $2(N + 2)$ nombres complexes $a_i$, $b_i$.

**Discussion** – En général, pour les problèmes d'interpolation spline classiques, les degrés de liberté résiduels sont fixés par le moyen de conditions aux bords pour le premier et le dernier segment. Une méthode consiste à imposer aux courbes de bord d'être de degré dégénéré. Dans notre cas, on vérifie facilement que pour $a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} = b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1} = 0$, un segment $\mathbf{r}_i(t)$ est en réalité une courbe PH cubique. Ainsi, les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 - 2a_1 + a_2 = 0, \\ b_0 - 2b_1 + b_2 = 0, \\ a_{N+1} - 2a_N + a_{N-1} = 0, \\ b_{N+1} - 2b_N + b_{N-1} = 0, \end{array} \right. \tag{2.21}$$

conduisent à un système carré. Néanmoins, puisqu'il s'agit d'un système quadratique cela n'implique rien sur l'existence ou l'unicité d'une solution. En réalité, dans la plupart des cas il n'existe pas de solution pour lesquelles les segments aux bords puissent être écrits comme courbes PH cubiques (principalement à cause de la contrainte de longueur).

Nous considérons donc ici une approche similaire à celle développée dans [FMPS12], qui s'appuie également sur les bonnes propriétés et la nature plus simple des courbes PH cubiques. Idéalement, s'il existe une spline PH cubique solution du problème d'interpolation sous contraintes de longueur, on souhaite que notre solution PH quintique coïncide avec la solution cubique (modulo une élévation de degré), ce qui nous conduit à introduire l'énergie globale

$$\begin{aligned} &F(a_0, b_0, ..., a_{N+1}, b_{N+1}) = \\ &\quad \textstyle\sum_{i=1}^{N} |a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}|^2 + |b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1}|^2, \end{aligned} \tag{2.22}$$

dont la minimisation contraindra la solution à s'approcher d'une spline PH cubique. Notre problème se résume ainsi à un problème d'optimisation quadratique sous les contraintes également quadratiques (2.17), (2.19) et (2.20). L'efficacité de l'implémentation dépend fortement de l'étape d'initialisation des coefficients.

### 2.4.2 Initialisation des coefficients

Afin de déterminer des valeurs initiales pour les coefficients $a_i$ et $b_i$, nous commençons par simplifier les équations (2.17), (2.19) et (2.20). Pour cela, on note $\Delta a_i = a_i - a_{i-1}$, et $\Delta b_i = b_i - b_{i-1}$, de sorte qu'en substituant

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= a_i - \Delta a_i, \quad a_{i+1} = a_i + \Delta a_{i+1}, \\ b_{i-1} &= b_i - \Delta b_i, \quad b_{i+1} = b_i + \Delta b_{i+1}, \end{aligned}$$

dans les équations, et en ne retenant que les termes d'ordre 0 en $\Delta a_i$ et $\Delta b_i$, les trois équations (2.17), (2.19) et (2.20) se simplifient en

$$\begin{aligned} a_i \bar{b}_i &= \tfrac{1}{2}(\Delta y_i + \mathbf{i}\ \Delta z_i), \\ |a_i|^2 &= \tfrac{1}{2}(l_i + \ \Delta x_i), \\ |b_i|^2 &= \tfrac{1}{2}(l_i - \ \Delta x_i). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Puis, afin d'assurer la condition de compatibilité

$$|a_i \bar{b}_i|^2 = |a_i|^2 |b_i|^2,$$

on modifie les équations (2.23) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a_i \bar{b}_i &= \tfrac{1}{2}\gamma_i(\Delta y_i + \mathbf{i}\Delta z_i), \\ |a_i|^2 &= \tfrac{1}{2}\gamma_i(\Delta p_i + \Delta x_i), \\ |b_i|^2 &= \tfrac{1}{2}\gamma_i(\Delta p_i - \Delta x_i). \end{aligned} \tag{2.24}$$

en notant $\Delta p_i = |\Delta \mathbf{p}_i|$ et $\gamma_i = l_i / \Delta p_i \geq 1$.

Les solutions du système d'équations (2.24) s'écrivent sous la forme

$$a_i = \sqrt{\frac{\gamma_i}{2}(\Delta p_i + \Delta x_i)}\, e^{\mathbf{i}(\theta_i + \phi_i)},\ b_i = \sqrt{\frac{\gamma_i}{2}(\Delta p_i - \Delta x_i)}\, e^{\mathbf{i}\phi_i},$$

où $\phi_i$ est un paramètre libre et $\theta_i$ est défini par

$$(\cos\theta_i, sin\theta_i) = \frac{(\Delta y_i, \Delta z_i)}{\sqrt{(\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}}.$$

Pour déterminer les paramètres libres $\phi_1, ..., \phi_N$ on choisit $\phi_1 = 0$, puis pour $i = 2, ..., N$ on détermine $\phi_i$ à partir de $\phi_{i-1}$ par minimisation de $|\Delta a_i|^2 + |\Delta b_i|^2$ relativement à $\Delta\phi_i$, avec

$$\begin{aligned}|\Delta a_i|^2 + |\Delta b_i|^2 &= \gamma_{i-1}\Delta p_{i-1} + \gamma_i \Delta p_i \\ &-\sqrt{\gamma_{i-1}\gamma_i(\Delta p_{i-1} - \Delta x_{i-1})(\Delta p_i - \Delta x_i)}\cos(\Delta\phi_i) \\ &-\sqrt{\gamma_{i-1}\gamma_i(\Delta p_{i-1} + \Delta x_{i-1})(\Delta p_i + \Delta x_i)}\cos(\Delta\theta_i + \Delta\phi_i),\end{aligned}$$

où $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ et $\Delta\phi_i = \phi_i - \phi_{i-1}$. Pour cela, on annule la dérivée de cette expression par rapport à $\Delta\phi_i$, ce qui revient à résoudre l'équation

$$\tan(\Delta\phi_i) = \frac{-\sin\Delta\theta_i}{\cos\Delta\theta_i + \sqrt{\frac{(\Delta p_{i-1} - \Delta x_{i-1})(\Delta p_i - \Delta x_i)}{(\Delta p_{i-1} + \Delta x_{i-1})(\Delta p_i + \Delta x_i)}}}.$$

On trouve alors deux valeurs $\Delta\phi_i \in ]-\pi, \pi]$ associées à un minimum et un maximum de $|\Delta a_i|^2 + |\Delta b_i|^2$, qu'il faut ensuite séparer pour remonter aux valeurs de $a_i$ et $b_i$.

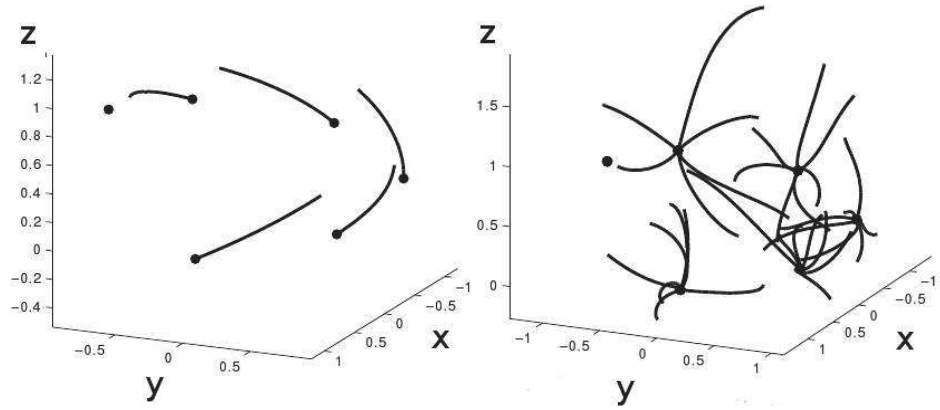


FIGURE 2.1 – *Segments de courbes issus de l'initialisation (à gauche) et segments initiaux sans initialisation (à droite) dans le cas d'une hélice circulaire (voir figure 2.3)*

La figure 2.1 (à gauche) montre un exemple de courbe correspondant aux coefficients obtenus à l'issue de cette initialisation. On peut comparer cette initialisation aux segments non initialisés issus de coefficients quelconques (figure 2.1, à droite).

L'intégration permet d'interpoler les points initiaux de chaque segment. La minimisation de $F$ permet ensuite de satisfaire les contraintes de longueur et d'obtenir une solution $C^2$ interpolant les points $\mathbf{p}_i$ (et donc continue).

### 2.4.3 Implémentation de la méthode

Les exemples présentés dans la section suivante sont tous obtenus à l'aide de l'algorithme "interior-point" de la fonction d'optimisation sous contraintes "fmincon" de MATLAB. La fonction à minimiser (2.22) est quadratique et convexe en fonction des variables $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, ..., \mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{N+1}$. Les contraintes (2.18) et (2.19)– (2.20) sont également quadratiques mais elles ne sont pas convexes. L'efficacité de la méthode est améliorée en exploitant le fait que les matrices Jacobienne et Hessienne de la fonction coût et des contraintes sont creuses et ont des expressions analytiques simples.

Il est important de noter que les solutions n'existent pas toujours pour des données arbitraires. En particulier, quand les points $\mathbf{p}_0, ..., \mathbf{p}_N$ sont échantillonnés depuis une courbe analytique lisse, les expériences montrent que les longueurs prescrites $l_1, ..., l_N$ doivent être suffisamment proches des longueurs de la courbe sous-jacente pour assurer l'existence d'une solution. Le problème étant non linéaire, il est difficile de formuler un critère analytique qui garantisse l'existence d'une solution.

Pour un ensemble de points et de longueurs admissible, le processus d'optimisation est robuste et converge rapidement vers une solution (à précision aussi grande que voulu). En l'absence de l'étape d'initialisation des coefficients, l'algorithme converge aussi la plupart du temps, mais cette étape est fortement conseillée car d'une part la convergence est beaucoup plus rapide, et d'autre part on garantit mieux la convergence vers le minimum global plutôt qu'un minimum local.

### 2.4.4 Exemples numériques

On distingue au moins deux types d'exemples d'applications et donc de données initiales.

a) Dans un premier cas, les données (points $\mathbf{p}_i$ de l'espace et longueurs $l_i$ des segments) sont issues de mesures et correspondent donc à une courbe réelle. Les données sont donc physiquement ou géométriquement cohérentes. Il s'agit alors d'un problème de reconstruction pour lequel on peut espérer une solution proche de la courbe initiale. De telles données initiales peuvent par exemple être issues d'un système d'acquisition équipé de capteurs de position dont on connait la répartition. On déduit de l'analyse des exemples les deux points suivants.

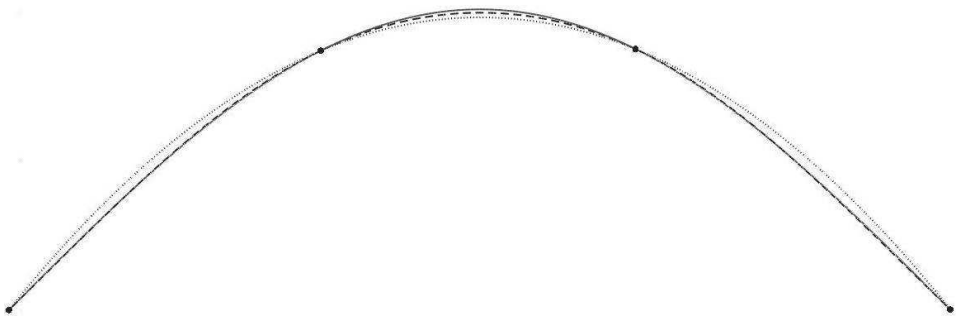

FIGURE 2.2 – *Approximation d'un sinus (rouge) par une spline cubique (vert) et par une spline PH quintique sous contraintes de longueur (bleu). Les longueurs des différents segments sont ajustées de sorte à rendre la spline PH plane.*

◇ L'interpolation d'une courbe analytique à partir de données exactes permet une reconstruction plus fidèle que par une méthode classique d'interpolation. Comme le montre la figure 2.2, la méthode est en effet une alternative possible à un coûteux rééchantillonnage plus fin ; en contraignant les longueurs à se rapprocher des longueurs réelles de la courbe initiale, notre méthode donne une solution spline $C^2$ plus fidèle que la spline cubique naturelle.

◇ Si les données sont intrinsèquement contraintes par une structure sous-jacente forte (on montre que le ruban Morphosense suit une courbe géodésique de la surface sous-jacente), la méthode donne de bons résultats pour les longueurs réelles entre les noeuds.

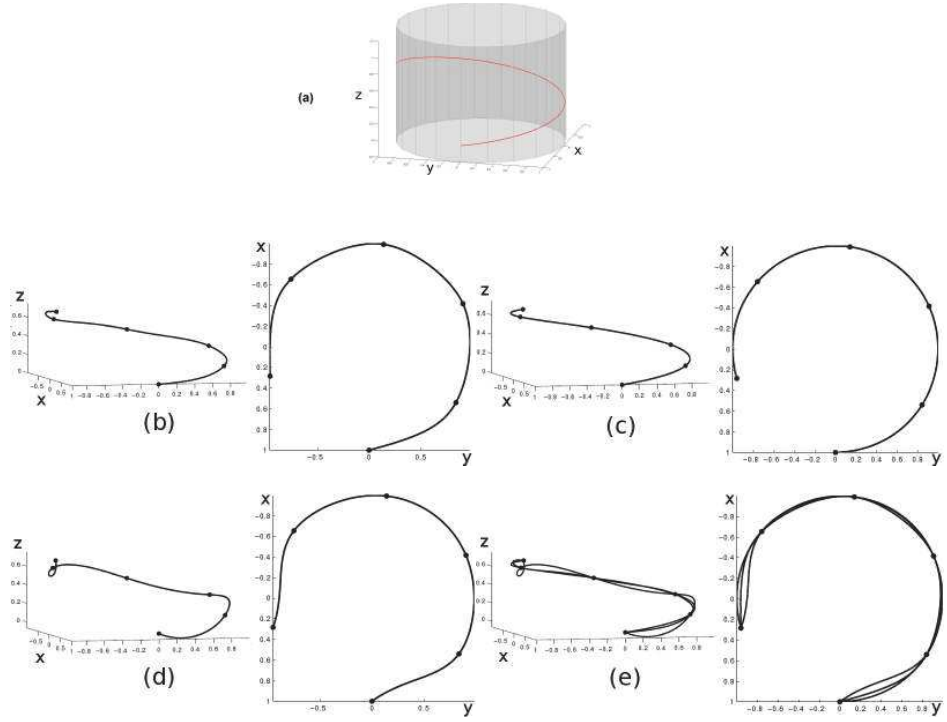


FIGURE 2.3 – *(a) : Hélice cylindrique avec des segments de longueurs $L_i$. (b) : Reconstruction avec $l_i = 0.99\ L_i$. (c) : Reconstruction avec $l_i = L_i$. (d) : Reconstruction avec $l_i = 1.01\ L_i$. (e) : Superposition des trois reconstructions.*

Si les contraintes de longueur sont modifiées, même légèrement, les courbes interpolées présentent des variations souvent difficiles à contrôler (voir figure 2.3).

La table 2.1 détaille, pour cet exemple, le nombre d'itérations et le temps CPU d'exécution résultant du processus d'optimisation vers les solutions, avec et sans la procédure d'initialisation. Même si l'optimisation converge souvent dans le cas d'une initialisation aléatoire, le tableau montre clairement le gain de l'initalisation au niveau des performances. La table 2.2 illustre l'évolution du nombre d'itérations et du temps CPU d'exécution en fonction du nombre de points échantillonnés sur la même hélice circulaire, en utilisant la procédure d'initialisation.

Table 2.1 – Nombre d'itérations et temps d'exécution des exemples de la figure 2.3.

| | avec initialisation | | sans initialisation | |
|---|---|---|---|---|
| | itérations | temps cpu | itérations | temps cpu |
| $l_i = 0.99L_i$ | 30 | 0.24 s | 130 | 0.85 s |
| $l_i = 1.00L_i$ | 49 | 0.29 s | 135 | 0.67 s |
| $l_i = 1.01L_i$ | 24 | 0.17 s | 124 | 0.73 s |

Table 2.2 – Nombre d'itérations et temps d'exécution en fonction du nombre de points à interpoler dans le cas de l'hélice.

| point interpolés | itérations | temps cpu |
|---|---|---|
| 4 | 15 | 0.12 s |
| 6 | 37 | 0.33 s |
| 8 | 45 | 0.47 s |
| 10 | 62 | 0.80 s |
| 15 | 69 | 1.03 s |
| 20 | 141 | 3.14 s |

b) Dans un cadre différent, on peut ne disposer que de données ponctuelles $\mathbf{p}_i$ et introduire des longueurs $l_i$ pour les différents segments comme paramètres de tension ou de design. Dans ce cas, le choix de ces longueurs $l_i$ doit être réalisé avec soin. En particulier, ces longueurs doivent respecter la borne inférieure évidente $l_i \geq |\Delta\mathbf{p}_i|$. Des longueurs trop importantes induisent des comportements indésirables (boucles...).

La figure 2.4 montre une courbe spline pour laquelle on impose deux longueurs très différentes pour le deuxième segment, ce qui résulte en deux solutions radicalement différentes pour la courbe, y compris sur les segments adjacents qui gardent pourtant la même longueur.

La figure 2.5 montre l'interpolation de la série de points

$$\mathbf{p}_0 = (1,1,0),\ \mathbf{p}_1 = (0,4,3),\ \mathbf{p}_2 = (2,1,1),\ \mathbf{p}_3 = (2,4,2),\ \mathbf{p}_4 = (3,3,3), \tag{2.25}$$

pour laquelle trois différentes splines PH quintiques sont calculées, avec trois différentes contraintes de longueur pour le premier segment mais des longueurs égales $l_2 = 5.0, l_3 = 3.9$ et $l_4 = 2.75$ dans les trois cas. Cet exemple souligne l'intérêt du paramètre longueur comme outil de design. La table 2.3 donne le nombre d'itérations et le temps cpu d'exécution pour les différents cas de cet exemple.

On rappelle que des solutions n'existent pas nécessairement quand les longueurs prescrites $l_i$ sont grandes en comparaison de l'espacement $\Delta p_i$ des points à interpoler – et si elles existent ces solutions ont généralement un aspect visuel peu satisfaisant. La figure 2.6 illustre ceci dans le cas de quatre points équidistants

$$\mathbf{p}_0 = (0,0,0), \quad \mathbf{p}_1 = (0,1,0), \quad \mathbf{p}_2 = (1,1,0), \quad \mathbf{p}_3 = (1,1,1), \tag{2.26}$$

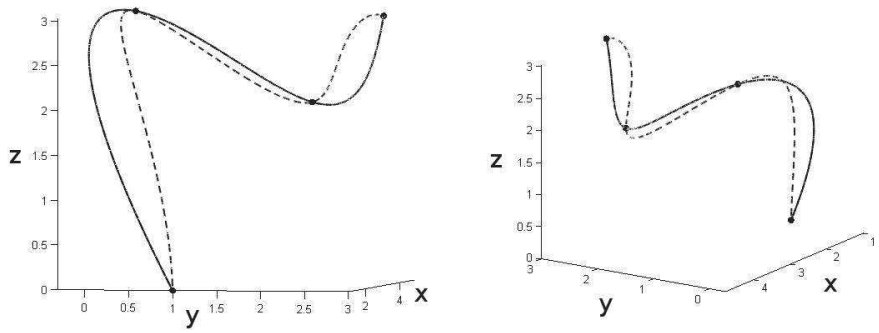


FIGURE 2.4 – *Deux vues d'un exemple interpolant les points* $\mathbf{p}_0 = (1,1,0), \mathbf{p}_1 = (0,4,3), \mathbf{p}_2 = (2,4,2)$ *et* $\mathbf{p}_3 = (3,3,3)$ *avec des longueurs égales* $l_1 = 4.9$ *et* $l_3 = 2.0$ *pour les deux courbes. La longueur du segment central vaut* $l_2 = 2.9$ *pour la courbe en pointillés et* $l_2 = 2.5$ *pour la courbe en trait plein (*16% *de différence).*

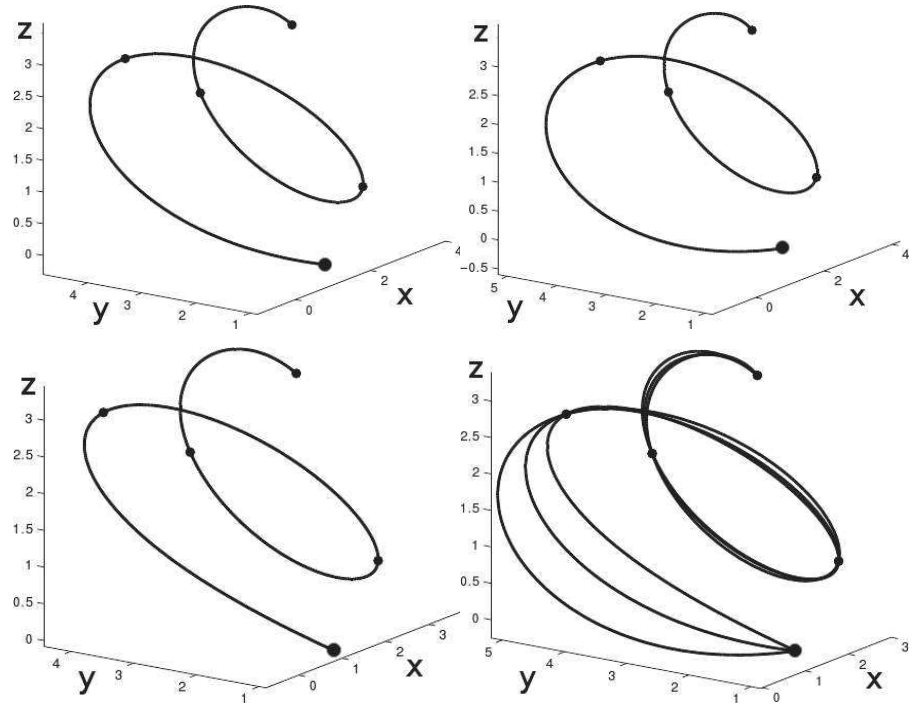


FIGURE 2.5 – *Suite de points (2.25). Les contraintes de longueur* $l_2, l_3$ *et* $l_4$ *sont fixées et on considère différentes longueurs pour le premier segment. La courbe (b) a un premier segment de longueur* $l_1 = 6.3$*. Dans l'exemple (a), on augmente cette longueur de* 15% *(*$l_1 = 7.24$*) et dans l'exemple (c) elle est diminuée de* 15% *(*$l_1 = 5.35$*). On superpose les différentes courbes en (d).*

Table 2.3 – Nombre d'itérations et temps d'exécution des exemples de la figure 2.5.

| | avec initialisation | | sans initialisation | |
|---|---|---|---|---|
| | itérations | temps cpu | itérations | temps cpu |
| $l_i = 0.85L_i$ | 31 | 0.16 s | 90 | 0.48 s |
| $l_i = 1.00L_i$ | 27 | 0.14 s | 99 | 0.51 s |
| $l_i = 1.15L_i$ | 25 | 0.12 s | 91 | 0.50 s |

où un ou plusieurs ratios $\gamma_i = l_i/\Delta p_i$ sont grands par rapport à 1. Pour comparaison, la solutions dans le cas où $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1.15, 1.08, 1.15)$ est aussi montrée en figure 2.6 – elle correspond à la solution du problème d'optimisation quand les contraintes de longueur sont relaxées.

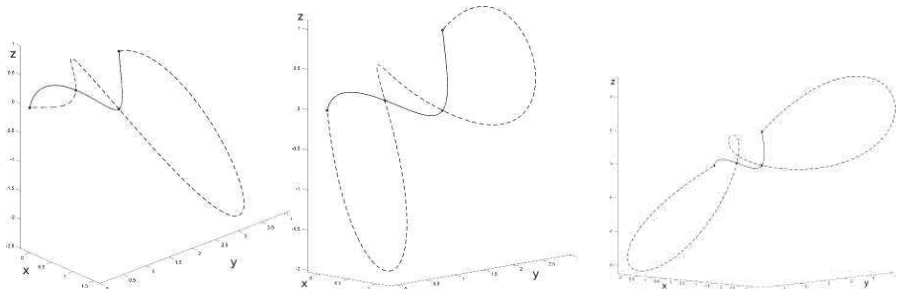


Figure 2.6 – *Exemples de splines PH $C^2$ quintiques interpolant les points 2.26 avec des longueurs prescrites $l_i$ très grandes en comparaison de l'espacement $\Delta p_i$ des points adjacents (courbe en pointillés). Les ratios $\gamma_i = l_i/\Delta p_i$ ont les valeurs $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1.1, 2, 10)$ à gauche, $5, 2, 5)$ au milieu et $(10, 3, 10)$ à droite. La courbe en trait plein correspond au cas $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1.15, 1.08, 1.15)$.*

Enfin, on montre un exemple de configuration où plusieurs minima locaux existent pour la fonction (2.22) en figure 2.7. Les 4 points de cet exemple sont les mêmes que sur la figure 2.4, mais les longueurs prescrites ont pour valeurs $l_1 = 9.25, l_2 = 4.75$ et $l_3 = 3.70$. Quand l'initialisation est effectuée, l'optimisation converge vers le minimum global, mais en l'absence d'initialisation elle peut également converger vers un autre minimum local.

## 2.5 Interpolation $C^2$ de dérivées sous contraintes de longueur

On considère ici le problème de l'interpolation d'une suite de vecteurs dérivés $\mathbf{d}_i$ associés à des noeuds $t_i$ par une spline PH quintique de classe $C^2$, sous contraintes de longueur $l_i$ pour chaque segment.

### 2.5.1 Description de la méthode

Précisément, étant donnée une suite de vecteurs dérivés $\mathbf{d}_0, ..., \mathbf{d}_N$ associés à des noeuds $t_0, ..., t_N$, ainsi que des contraintes de longueur $l_1, ..., l_N$, on cherche une spline PH quintique comme définie en section 2.3, composée de segments $\mathbf{r}_i(t),\ i = 1, ..., N$ telle que pour tout $i$ :

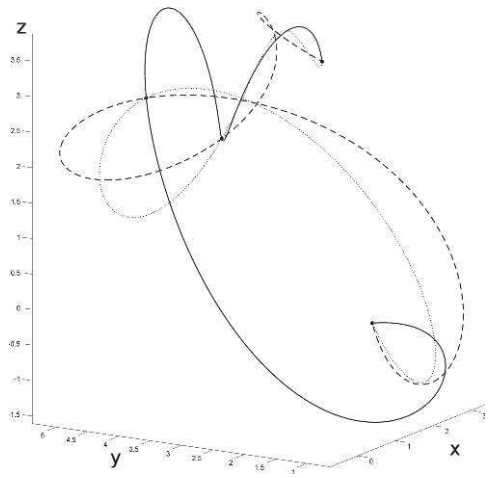


FIGURE 2.7 – *Courbes solutions correspondant au minimum global (trait plein) et d'autres minima locaux de la fonction (2.22). La procédure d'initialisation assure la convergence vers le minimum global.*

$(i)$ $\mathbf{r}_i(1) = \mathbf{r}_{i+1}(0)$,
$(ii)$ $\mathbf{r}'_1(0) = \mathbf{d}_0$, $\mathbf{r}'_i(1) = \mathbf{d}_i = \mathbf{r}'_{i+1}(0)$ et $\mathbf{r}'_N(1) = \mathbf{d}_N$,
$(iii)$ $\int_0^1 |\mathbf{r}'_i(t)|dt = l_i$.

Comme dans la première méthode, on note que la première contrainte couplée avec l'utilisation des splines introduites en section 2.3 génère automatiquement une spline PH quintique de classe $C^2$.

**(i) : continuité** $C^0$ – Dans le cas présent, $(i)$ traduit simplement la continuité de la spline à reconstruire. Il suffit pour cela de raccorder chaque segment $\mathbf{r}_{i+1}(t)$ au segment précédent $\mathbf{r}_i(t)$ en choisissant $\mathbf{r}_{i+1}(0) = r_i(1)$ lors de l'intégration. Ainsi, seule la première constante d'intégration $\mathbf{r}_1(0)$ est libre, de sorte que la spline solution sera reconstruite à une translation près.

**(ii) : interpolation des vecteurs dérivés** $\mathbf{d}_i$ – Les courbes PH étant définies à partir de leur hodographe, cette contrainte d'interpolation s'écrit directement à partir de l'équation (2.13) sous la forme

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4}(|a_i + a_{i+1}|^2 - |b_i + b_{i+1}|^2) = dx_i, \\ \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})(\bar{b}_i + \bar{b}_{i+1}) = dy_i + \mathbf{i}\, dz_i, \end{array} \tag{2.27}$$

en notant $\mathbf{d}_i = (dx_i, dy_i, dz_i)$ pour $i = 0, ..., N$. Comme précédemment, la première équation de (2.27) est une équation réelle exprimée en fonction des nombres complexes $a_i$, $b_i$. Les relations (2.27) fournissent $3(N + 1)$ équations, trois pour chaque vecteur dérivé interpolé.

**(iii) : contraintes de longueur** $l_i$ – Aux équations précédentes, on ajoute à nouveau les $N$ équations des contraintes de longueur (2.18), qui sont en tout point identiques à celles de la section 2.4.

**Synthèse** – Le système comporte ainsi $4N + 3$ équations, à satisfaire par les $4N + 8$ coefficients $a_i$, $b_i$. Cette méthode est donc plus contrainte : les 3 équations supplémentaires par rapport à la méthode précédente viennent du premier noeud d'interpolation car dans la section 2.4, le premier point peut être choisi arbitrairement lors de l'intégration. Dans le cas présent, le premier vecteur dérivé est contraint comme les autres par 3 équations.

Comme pour l'interpolation de points, c'est-à-dire la méthode de la section 2.4, la méthode consiste ensuite à minimiser la fonctionnelle (2.22) sous les contraintes (2.27) et (2.18).

### 2.5.2 Initialisation des coefficients

On utilise ici une méthode d'initialisation similaire à celle de la méthode d'interpolation de points. En substituant $a_{i-1} = a_i - \Delta a_i$, $a_{i+1} = a_i + \Delta a_{i+1}$, et $b_{i-1} = b_i - \Delta b_i$, $b_{i+1} = b_i + \Delta b_{i+1}$ dans les équations (2.27) et (2.18) et en ne retenant que les termes d'ordre 0, on obtient le système d'équations simplifiées

$$\begin{array}{l} |a_i|^2 - |b_i|^2 = dx_i, \\ a_i\bar{b}_i = \frac{1}{2}(dy_i + \mathbf{i}\ dz_i), \\ |a_i|^2 + |b_i|^2 = l_i. \end{array} \tag{2.28}$$

En combinant les première et troisième lignes on obtient

$$\begin{array}{l} a_i\bar{b}_i = \frac{1}{2}(dy_i + \mathbf{i}\ dz_i), \\ |a_i|^2 = \frac{1}{2}(l_i + dx_i), \\ |b_i|^2 = \frac{1}{2}(l_i - dx_i). \end{array} \tag{2.29}$$

Ce système est identique au système d'équations simplifiées (2.23) de la méthode précédente, et peut être vu comme sa version "continue" où les vecteurs des différences progressives $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ sont respectivement remplacés par les vecteurs dérivés $(dx_i, dy_i, dz_i)$. On présente un exemple de courbe issue de l'initialisation en figure 2.8.

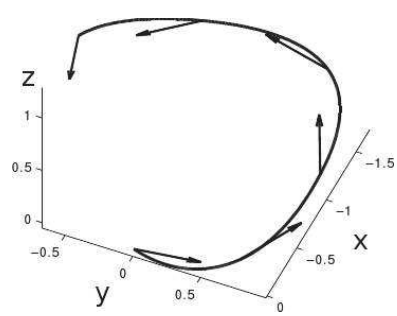


FIGURE 2.8 – *Courbe issue de l'initialisation (cas d'une hélice circulaire - voir figure 2.10). On remarque que les vecteurs dérivés et les longueurs ne sont pas interpolés à l'issue de l'initialisation.*

### 2.5.3 Exemples numériques

L'implémentation utilisée dans le cas de cette méthode est, au-delà des modifications appropriées, en tout point similaire à celle de la méthode précédente décrite en section 2.4.3.

On distingue à nouveau les contextes de reconstruction et de design. La méthode d'interpolation des dérivées présentée ici s'inscrit dans le contexte de notre application liée au ruban Morphosense. Cependant, les données fournies par celui-ci sont normalisées (vecteurs unitaires), ce qui pose le probléme du choix des normes des vecteurs dérivés à interpoler. Plusieurs heuristiques sont actuellement à l'étude concernant cette question. On se référera en particulier aux résultats obtenus à partir de données réelles (brutes non débruitées) de la figure 2.9. Ces résultats ont été obtenus à partir des vecteurs dérivés unitaires (bruités) fournis par les capteurs

$$\begin{array}{ll} \mathbf{d}_0 = (0.3862, -0.0315, 0.9219), & \mathbf{d}_1 = (0.3775, -0.1613, 0.9118), \\ \mathbf{d}_2 = (0.4077, -0.1947, 0.8921), & \mathbf{d}_3 = (0.4444, -0.3071, 0.8415), \\ \mathbf{d}_4 = (0.3224, -0.4485, 0.8336), & \mathbf{d}_5 = (0.3913, -0.4889, 0.7797), \\ \mathbf{d}_6 = (0.2771, -0.5945, 0.7548), & \mathbf{d}_7 = (0.1710, -0.7053, 0.6880), \end{array} \tag{2.30}$$

et les distances mesurées entre les capteurs successifs sont $l_1 = 170.05, l_2 = 169.50, l_3 = 168.26, l_4 = 169.33, l_5 = 169.53, l_6 = 168.82$ et $l_7 = 170.10$. Pour la reconstruction, on multiplie la norme des vecteurs $\mathbf{d}_i$ par $\frac{1}{2}(l_i + l_{i+1}$ pour $i = 1, ..., 6$ et par $l_0$ (resp. $l_7$) pour $\mathbf{d}_0$ (resp. $\mathbf{d}_7$). Après initialisation, la solution converge en 31 itérations et 0.28 secondes. Ces chiffres sont représentatifs de tous les exemples suivants de la section.

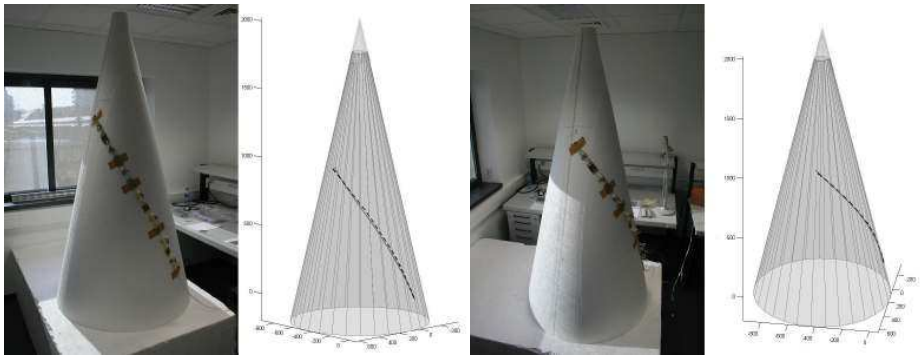

FIGURE 2.9 – *Acquisition et reconstruction d'une courbe sur un cône à l'aide du ruban Morphosense. En trait plein, la courbe analytique acquise par le ruban, et en pointillés sa reconstruction.*

On présente en figure 2.10 une reconstruction à partir de données (vecteurs dérivés et longueurs) issues d'une courbe analytique (hélice circulaire). Comme dans la méthode d'interpolation de points, on note une grande sensibilité aux longueurs. Dès qu'elles différent des longueurs réelles de la courbe initiale, les résultats présentent d'importantes oscillations.

La reconstruction à partir de données quelconques comme dans les figures 2.11 et 2.12 souligne à nouveau l'influence des contraintes de longueur sur les solutions obtenues. Dans la figure 2.11, les dérivées interpolées sont $\mathbf{d}_0 = (2, 1, 1), \mathbf{d}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{d}_2 = (0, 1, 0)$ et $\mathbf{d}_3 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Les longueurs utilisées pour le premier segment varient tandis qu'on a $l_2 = 1.4$ et $l_3 = 1.0$ pour toutes les courbes. Dans la figure 2.12, les dérivées interpolées sont $\mathbf{d}_0 = (-2, -1, -1), \mathbf{d}_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \mathbf{d}_2 = (0, 1, \frac{1}{2})$ et $\mathbf{d}_3 = (0, -1, -\frac{1}{2})$. Les longueurs utilisées pour le deuxième segment varient tandis qu'on a $l_1 = 1.2$ et $l_3 = 0.7$ pour toutes les courbes.

Ainsi, comme dans la méthode d'interpolation de points, la longueur apparaît à

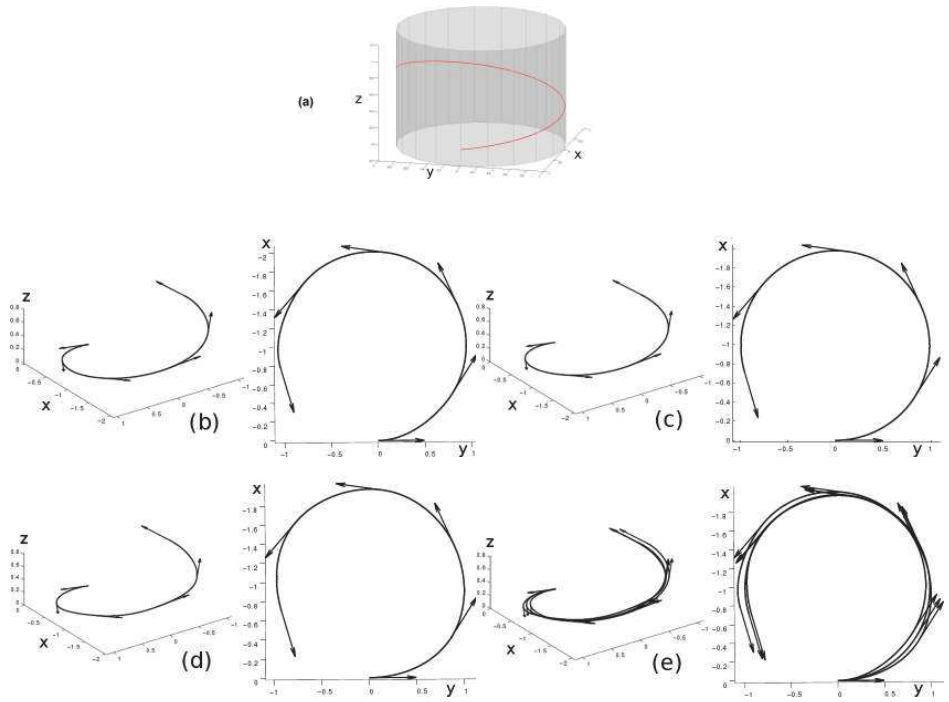


FIGURE 2.10 – *(a) : Hélice cylindrique avec des segments de longueurs $L_i$. (b) : Reconstruction avec $l_i = 0.99\ L_i$. (c) : Reconstruction avec $l_i = L_i$. (d) : Reconstruction avec $l_i = 1.01\ L_i$. (e) : Superposition des trois reconstructions.*

nouveau comme un paramètre efficace de tension pour des applications en design géométrique.

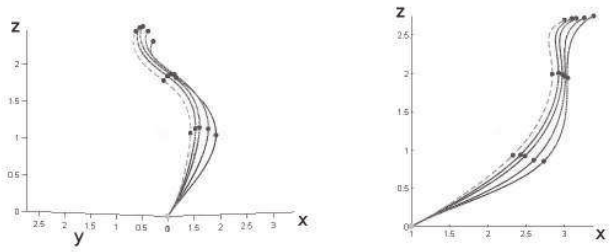


FIGURE 2.11 – *Suite de points quelconques. Les contraintes de longueur des deuxième et troisième segments sont fixées et on considère différentes longueurs pour le premier segment. La courbe en pointillés a pour longueur $l_1 = 2$ et on augmente cette longueur de 1% pour chacune des courbes suivantes.*

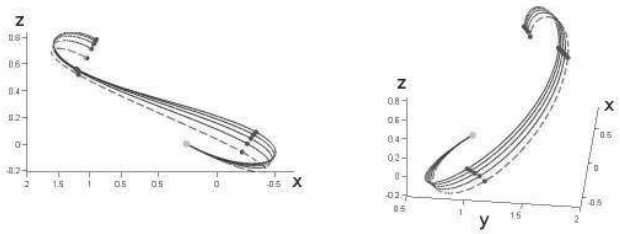


FIGURE 2.12 – *Suite de points quelconques. Les contraintes de longueur des premier et troisième segments sont fixées et on considère différentes longueurs pour le deuxième segment. La courbe en pointillés a pour longueur $l_2 = 1.4$ et on augmente cette longueur de 1% pour chacune des courbes suivantes.*

Enfin, la figure 2.13 illustre le comportement des courbes solutions dans le cas de longueurs prescrites grandes comparées aux normes des vecteurs dérivés à interpoler. Dans cet exemple, les vecteurs dérivés $\mathbf{d}_i$ sont

$$\mathbf{d}_0 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{d}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{d}_2 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{d}_3 = (1, 0, 0). \tag{2.31}$$

En trait plein, on trace une courbe de référence pour laquelle les longueurs prescrites sont $l_1 = l_2 = l_3 = 1$. Si l'on augmente les longueurs sans changer la norme des vecteurs dérivés, on obtient une courbe relativement "plate" entre les noeuds, alors qu'en augmentant également leur norme avec le même facteur on obtient une courbe isométrique à la courbe de référence.

## 2.6 Conclusion

On a considéré ici deux problèmes d'interpolation originaux, motivés par des applications dans le domaine de la reconstruction de courbes à partir d'informations issues

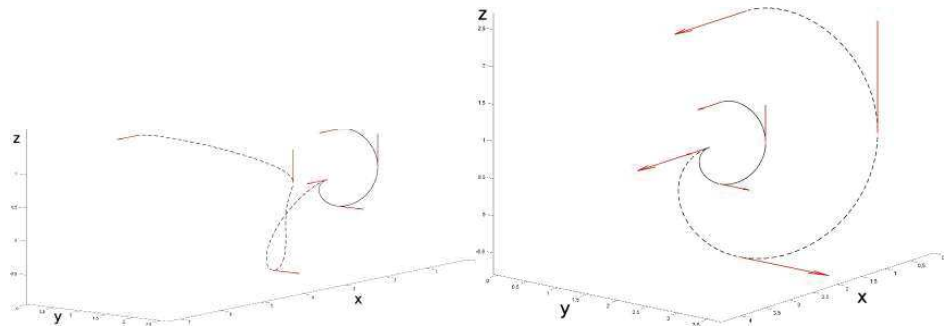


FIGURE 2.13 – *Dans les deux cas, la courbe en trait plein a pour longueurs* $l_1 = l_2 = l_3 = 1$*, et la courbe en pointillés vérifie* $l_1 = l_2 = l_3 = 3$*. A gauche, les vecteurs dérivés de la courbe en pointillés sont de norme* 1*, alors qu'à droite les vecteurs sont de norme* 3*.*

de capteurs micro-électroniques. La principale caractéristique des méthodes développées est le contrôle de la longueur des solutions obtenues.

Les exemples considérés montrent que la longueur influence significativement la forme des courbes reconstruites. Ainsi, dans un contexte de design géométrique, la longueur peut s'interpréter comme un paramètre de forme ou de tension. Ces longueurs peuvent aussi être déterminées afin de satisfaire à certains critères physiques ou géométriques pour des applications en modélisation géométrique.

Dans le contexte de la reconstruction, la connaissance de la longueur des différents segments contribue à améliorer la précision de la courbe reconstruite, en particulier dans le cas d'un échantillonnage insuffisant. Notons que la solution développée dans la section 2.5 ne répond pas exactement aux exigences des contraintes liées à la reconstruction du ruban Morphosense. En effet, les données d'orientation fournies par le ruban Morphosense en chaque noeud capteur consistent en des repères de Serret-Frenet (composés de vecteurs unitaires).

Le choix de la norme des vecteurs dérivés à interpoler a été discuté ci-desssus en section 2.5.3. La méthode développée en section 2.5 permet d'interpoler des vecteurs dérivés de normes quelconques mais ne permet pas actuellement d'interpoler un repère de Serret-Frenet. L'interpolation de tels repères de Serret-Frenet n'est pas possible par les splines PH quintiques développées ci-dessus. Une solution pourrait consister à relâcher les contraintes $C^2$ en contraintes uniquement géométriques.

## Bibliographie du Chapitre

[Far08] R.T. Farouki. *Pythagorean–Hodograph Curves : Algebra and Geometry Inseparable.* Springer, Berlin, 2008.

[FMPS12] R.T. Farouki, C. Manni, F. Pelosi, and M.L. Sampoli. Design of $c^2$ spatial pythagorean-hodograph quintic splines by control polygons. *Lecture Notes in Computer Science*, 6920 :253–269, 2012.

[FMS03] R.T. Farouki, C. Manni, and A. Sestini. Spatial $c^2$ ph quintic splines. In *Curve and Surface Design : Saint Malo 2002*, 2003.

[HFSB13] Mathieu Huard, Rida Farouki, Nathalie Sprynski, and Luc Biard. C2 interpolation of spatial data subject to arc length constraints using pythagorean hodograph quintic splines. *Graphical Models*, XX, 2013.

# Chapitre 3

# Interpolation de Hermite sur la sphère


**3.1 Préliminaires et objectifs** . . . . . **54**
**3.2 Approche analytique rationnelle de degré** 4 . . . . . **55**
3.2.1 Projection stéréographique généralisée . . . . . 56
3.2.2 Interpolation de deux points et de vecteurs dérivés associés . 56
3.2.3 Solution au problème d'interpolation de Hermite sur la sphère 57
**3.3 Solutions itératives pseudo-$C^k$ (ou $G^k$)** . . . . . **58**
3.3.1 Slerp et applications à la construction de courbes splines sur la sphère . . . . . 58
3.3.2 Solution itérative pseudo-$C^1$ de type cubique . . . . . 59
3.3.3 Solution itérative pseudo-$C^2$ (ou $G^2$) de type cubique . . . . 60
3.3.4 Comparaison des méthodes . . . . . 61
**3.4 Application au Morphosense** . . . . . **61**


Dans ce chapitre, on considère un problème d'interpolation de type Hermite $C^1$ sur la sphère $S^2$. Précisément, étant donnés une suite de points $\mathbf{e}_i,\ \mathbf{i} = 0, ..., N$ appartenant à $S^2$, associés à des vecteurs dérivés $\delta_i \mathbf{n}_i$ ($|\mathbf{n}_i| = 1$), on cherche une courbe spline $\mathbf{x}(t)$ tracée sur la sphère, associée à une suite de noeuds $t_i$, composée de $N$ segments, telle que

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{x}'(t_i) = \delta_i \mathbf{n}_i. \tag{3.1}$$

Ce problème est motivé par le problème d'interpolation de données d'orientation (associées au ruban Morphosense), la courbe $\mathbf{x}(t)$ correspondant alors à l'hodographe de la courbe ruban lorsque celle-ci est paramétrée par l'abscisse curviligne (voir chapitre 1).

Après un bref rappel sur le contexte et les objectifs, nous proposons deux types d'approche : une solution analytique de classe $C^1$ (section 3.2), puis plusieurs solutions pseudo-$C^k$ issues d'un processus de subdivision (section 3.3). Finalement, l'application aux données d'orientation se résumant essentiellement à un choix de la norme $|\delta_i|$ des vecteurs dérivés ou d'une paramétrisation adéquate sera discutée en section 3.4.

## 3.1 Préliminaires et objectifs

Le choix d'une approche pour résoudre ce problème d'interpolation de Hermite sur la sphère doit idéalement permettre de satisfaire les critères suivants.

- ◇ Solution tendue : afin d'éviter les oscillations de l'hodographe.
- ◇ Solution analytique : l'intégration d'une solution analytique pour l'hodographe conduit à une solution plus précise pour la courbe ruban.
- ◇ Temps réel : le calcul des solutions doit être rapide pour permettre les applications sur des systèmes embarqués.

Les deux derniers points nous ont conduit à considérer les travaux de Jüttler et Wang [JW03] qui proposent des solutions analytiques rationnelles de degré 4 au problème d'interpolation de Hermite de deux points associés à des vecteurs dérivés sur la sphère. Toutefois, les solutions proposées sont exprimées dans un repère local, ce qui complique considérablement le raccord entre les différents segments pour l'obtention d'une spline d'interpolation. Par ailleurs, chaque segment possède deux degrés de liberté difficiles à fixer pour minimiser les oscillations (premier point).

Le premier point conduit à minimiser une énergie de type spline de la forme

$$\int ||\mathbf{x}''(t)||^2 + \omega \int ||\mathbf{x}'(t)||^2 dt, \tag{3.2}$$

où $\omega$ est un paramètre de tension. Ce point est difficile à traiter par les méthodes traditionnelles de calcul variationnel dans le cas d'une courbe sur la sphère. Nielson [Nie04] a proposé une solution associée à des paramètres de tension, en transposant les $\nu$-splines sur la sphère. Cette transposition se fait en adaptant l'algorithme de De Casteljau, où les interpolations linéaires sont remplacées par leur équivalent sur la sphère (Spherical Linear Interpolation : Slerp, voir section 3.3.1).

Pottmann et al. ont proposé une caractérisation des courbes minimisant le critère (3.2) sur les surfaces suffisamment régulières. Précisément, pour une surface de classe au moins $C^4$ (et a fortiori pour la sphère), une courbe tracée sur cette surface est dite *admissible* si elle est de classe $C^1$, et au moins $C^4$ sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, et satisfait les contraintes d'interpolation $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i$ pour une suite de noeuds $t_i$ donnés. On a alors le résultat suivant [PH05].

**Théorème 1.** *Parmi les courbes admissibles définies ci-dessus, la courbe* $\mathbf{x}(t)$ *qui minimise le critère (3.2) est de classe* $C^2$*, et vérifie :*
– $\mathbf{x}^{(4)}(t) - \omega\mathbf{x}''(t)$ *est orthogonal à la surface sur chaque intervalle* $]t_i, t_{i+1}[$,
– $\mathbf{x}''(t_0)$ *et* $\mathbf{x}''(t_{N+1})$ *sont orthogonaux à la surface.*

Il s'agit d'une généralisation des splines classiques aux surfaces. En effet, pour une spline de $\mathbf{R}^n$, l'équation d'Euler-Lagrange appliquée à la fonctionnelle (3.2) implique que la quantité $\mathbf{x}^{(4)}(t) - \omega\mathbf{x}''(t)$ est identiquement nulle, ce qui conduit à des solutions exponentielles (ou polynomiales cubiques si $\omega = 0$). Dans le cas de courbes sur des surfaces, le théorème précédent revient à imposer que la projection de $\mathbf{x}^{(4)}(t) - \omega\mathbf{x}''(t)$ sur le plan tangent à la surface soit nulle : $\mathrm{Tpr}\Big(\mathbf{x}^{(4)}(t) - \omega\mathbf{x}''(t)\Big) \equiv 0$.

Dans la suite de ce chapitre, plusieurs méthodes d'interpolation de Hermite sur la sphère sont présentées. Leurs avantages et inconvénients sont discutés au regard des 3 critères détaillés ci-dessus.

## 3.2 Approche analytique rationnelle de degré 4

On présente ici les outils de projection de courbes rationnelles sur la sphère, et la façon dont Jüttler et Wang les ont exploités pour interpoler deux points et leurs vecteurs dérivés.

### 3.2.1 Projection stéréographique généralisée

Soit $\delta$ la projection qui à un point $\mathbf{P} = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ fait correspondre le point

$$\delta(\mathbf{P}) = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, 2p_0p_1 - 2p_2p_3, 2p_1p_3 + 2p_0p_2, p_1^2 + p_2^2 - p_0^2 - p_3^2) \tag{3.3}$$

où $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ est l'espace des coordonnées homogènes associé à $\mathbb{R}^3$.

Le point $\mathbf{X} = \delta(\mathbf{p})$ satisfait la relation $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, qui est l'équation de la sphère unité en coordonnées homogènes. Ainsi $\delta$ est une application des points de $\mathbb{R}^3$ sur la sphère unité. On appelle $\delta$ la *projection stéréographique généralisée*, ou encore *Hopf map*. En effet, la projection stéréographique classique centrée sur le pôle nord de la sphère $(1, 0, 0, 1)$ est une restriction de $\delta$ au plan $xy$ ($p_3$=0).

$\delta$ induit une correspondance entre les points de la sphère et les droites de $\mathbb{R}^3$. Pour un point $\mathbf{p}$, soit $\mathbf{p}^\perp = (-p_3, p_2, -p_1, p_0)$. Alors la droite passant par $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}^\perp$ est une droite de projection. Tout point de cette droite $\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{p}^\perp$ sera projeté sur le même point de la sphère :

$$\delta(\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{p}^\perp) = (\lambda^2 + \mu^2)\delta(\mathbf{p}) \tag{3.4}$$

De manière réciproque, tous les antécédents d'un même point de la sphère appartiennent à la même droite (voir figure 3.1).

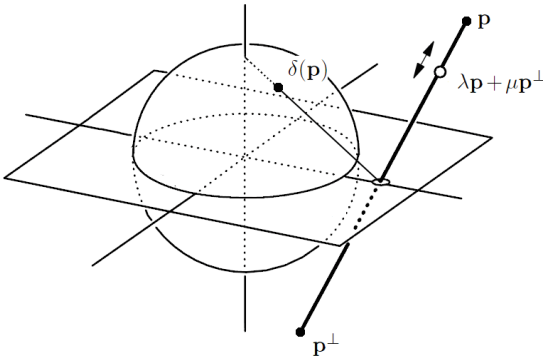


FIGURE 3.1 – *Correspondance entre la droite $\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{p}^\perp$ et le point $\delta(\mathbf{p})$, image d'un point de la droite par projection stéréographique généralisée.*

La structure algébrique de cette projection permet la construction des courbes rationnelles de degré $2n$ sur la sphère comme images des courbes rationnelles de degré $n$ de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, tous les cercles de la sphère (courbes rationnelles de degré 2) peuvent être obtenus comme images des droites de l'espace. Dans notre cas, on s'intéresse à l'obtention des quartiques (rationnelles de degré 4) sur la sphère, images des courbes spatiales rationnelles de degré 2 (les coniques). En effet, on verra que les quartiques sur la sphère présentent suffisamment de degrés de liberté pour satisfaire l'interpolation du problème .

### 3.2.2 Interpolation de deux points et de vecteurs dérivés associés

Jüttler et Wang ont décrit une méthode qui permet d'interpoler deux points et leurs dérivées respectives sur la sphère (interpolation de Hermite) à l'aide de quartiques

obtenues par projection stéréographique généralisée [JW03]. Etant donnés deux points $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_1$ de la sphère et leurs tangentes respectives $\mathbf{d}_0$ et $\mathbf{d}_1$, on cherche la courbe $\mathbf{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_0, & \mathbf{x}(1) = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{n}_0, & \mathbf{x}'(1) = \mathbf{n}_1 \end{cases} \tag{3.5}$$

Pour simplifier les calculs, on se place dans un repère où $\mathbf{e}_0$ et $\mathbf{e}_1$ sont dans le demi-plan $xz, z \leq 0$, leur bissectrice étant l'axe $0z$. On peut alors réécrire dans ce repère

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0 = (\frac{-2q}{1+q^2}, 0, \frac{q^2-1}{1+q^2}) \\ \mathbf{e}_1 = (\frac{2q}{1+q^2}, 0, \frac{q^2-1}{1+q^2}) \\ \mathbf{n}_0 = \frac{1}{q^2+1}(T_1(q^2-1), T2, 2T_1 q) \\ \mathbf{n}_1 = \frac{1}{q^2+1}(S_1(q^2-1), S_2, -2S_1 q) \end{cases} \tag{3.6}$$

où $q = \tan(\frac{(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)}{2})$ et $T_1, T_2, S_1$ et $S_2$ sont des constantes.

En projetant une conique sur la sphère, on montre alors que les quartiques solutions du problème s'écrivent sous forme de Bézier homogène avec les points de contrôle suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= (\lambda_0^2 + \mu_0^2)(q^2+1, -2q, 0, q^2-1) \\ \mathbf{C}_1 &= (-\lambda_0 qX + \mu_0 qY + \lambda_0, \lambda_0 X - \mu_0 Y - \lambda_0 q, \\ &\quad \mu_0 X + \lambda_0 Y + \mu_0 q, -\lambda_0 qX + \mu_0 qY - \lambda_0) \\ \mathbf{C}_2 &= \tfrac{1}{3}(2X^2 + 2Y^2 + (\lambda_0\lambda_1 + \mu_0\mu_1)(1-q^2) + 2, 4X, \\ &\quad 4Y + 2\mu_0\lambda_1 q - 2\lambda_0\mu_1 q, 2X^2 + 2Y^2 - (\lambda_0\lambda_1 + \mu_0\mu_1)(1+q^2) - 2) \\ \mathbf{C}_3 &= (\lambda_1 qX - \mu_1 qY + \lambda_1, \lambda_1 X - \mu_1 Y + \lambda_1 q, \\ &\quad \mu_1 X + \lambda_1 Y - \mu_1 q, \lambda_1 qX - \mu_1 qY - \lambda_1) \\ \mathbf{C}_4 &= (\lambda_1^2 + \mu_1^2)(q^2+1, 2q, 0, q^2-1) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Les points $\mathbf{C}_0$ et $\mathbf{C}_4$ correspondent bien aux points $\mathbf{e}_0$ et $\mathbf{e}_1$, et l'interpolation des dérivées est réalisée en respectant les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 4\frac{T_2 Y - T_1(q^2+1)(X+q)}{T_1^2(q^2+1)^2 + T_2^2}, & \mu_0 &= 4\frac{T_2(X+q) + T_1 Y(q^2+1)}{T_1^2(q^2+1)^2 + T_2^2} \\ \lambda_1 &= 4\frac{S_1(q^2+1)(X-q) - S_2 Y}{S_1^2(q^2+1)^2 + S_2^2}, & \mu_1 &= 4\frac{S_2(q-X) - S_1 Y(q^2+1)}{S_1^2(q^2+1)^2 + S_2^2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.2.3 Solution au problème d'interpolation de Hermite sur la sphère

Etant donnés une suite de points $\mathbf{e}_i$ sur la sphère et des vecteurs dérivés associés $\delta_i \mathbf{n}_i$, la méthode précédente fournit donc une famille de solutions $C^1$ sur la sphère, composées de $N$ segments de courbe obtenus par l'approche décrite dans la section précédente. Chaque segment comporte deux degrés de liberté $X_i$ et $Y_i$ (notés $X$ et $Y$ précédemment) sur chaque segment de la spline.

Il s'agit alors de fixer ces nombreux degrés de liberté en s'efforçant de satisfaire les critères définis en section 3.1. A ce jour, nous n'avons pu définir un critère simple pour fixer les variables $X_i$ et $Y_i$. Les valeurs $X_i = Y_i = 0$ simplifient les expressions analytiques et aboutissent à des courbes satisfaisantes dans de nombreux cas, mais elles créent parfois des comportements indésirables (voir section 3.3.4).

On peut obtenir des solutions tendues en s'appuyant sur une procédure d'optimisation de l'énergie spline sur les variables $X_i, Y_i$, mais une telle procédure très lourde ne convient pas à l'utilisation que nous voulons faire des solutions. De même, le critère de Pottmann ou l'imposition d'une continuité $C^2$ entre les segments de la spline conduisent à des systèmes rationnels de degrés élevés, instables numériquement.

## 3.3 Solutions itératives pseudo-$C^k$ (ou $G^k$)

On présente dans cette section deux méthodes itératives basées sur l'adaptation de l'algorithme de De Casteljau sur la sphère. Pour ce faire, on utilise le *Slerp*, équivalent sphérique de l'interpolation linéaire de l'espace.

On propose dans un premier temps une méthode simple qui transpose sur la sphère l'unique solution de $\mathbb{R}^3$ au problème d'interpolation de Hermite par une courbe $C^1$ composée de segments cubiques. Cette solution est unique, et par conséquent si la courbe obtenue n'est pas satisfaisante il ne sera pas possible de l'ajuster. Cependant, la spline cubique classique minimise par construction l'énergie spline, et sa transposition sur la sphère semble hériter ce critère de tension [Nie04].

Pour obtenir une solution de continuité pseudo-$C^2$ sur la sphère, il est nécessaire d'utiliser une structure plus complexe, disposant de plus de degrés de liberté. Cependant, cette approche se fait au détriment de la propriété de minimisation d'énergie des splines cubiques. Il est alors nécessaire d'introduire des paramètres de tension (en s'inspirant des $\nu$-splines de Nielson), ou de trouver un moyen de respecter le critère de Pottmann, ou un critère approchant.

Une tentative a été faite en remplaçant les segments cubiques par des segments quintiques, pour respecter la continuité $C^2$, en choisissant les degrés de liberté restants en accord avec le critère de Pottmann. Cette méthode n'a pas abouti à l'heure actuelle.

On propose une autre méthode qui dédouble les segments cubiques de la spline afin d'obtenir une continuité pseudo-$C^2$.

### 3.3.1 Slerp et applications à la construction de courbes splines sur la sphère

Soient deux points $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ du plan. Quand le paramètre $t$ parcourt l'intervalle $[0, 1]$, le point $(1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1$ se déplace de $\mathbf{p}_0$ à $\mathbf{p}_1$ selon le plus court chemin possible (la ligne droite).

Pour deux points de la sphère $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$, on définit

$$\mathrm{G}[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1](t) = \frac{\sin((1-t)\theta(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1))}{\sin(\theta(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1))}\mathbf{p}_0 + \frac{\sin(t\theta(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1))}{\sin(\theta(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1))}\mathbf{p}_1, \tag{3.9}$$

où $\theta(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = \cos^{-1}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$.

Un calcul élémentaire aboutit à l'équivalence suivante :

$$\mathbf{p} = \mathrm{G}[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1](t) \Leftrightarrow \mathbf{p}_1 = \mathrm{G}[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}](\frac{1}{t}) \Leftrightarrow \mathbf{p}_0 = \mathrm{G}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}](\frac{1}{1-t}) \tag{3.10}$$

Le Slerp (Spherical Linear Interpolation) est l'équivalent de l'interpolation linéaire sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Quand le paramètre $t$ parcourt l'intervalle $[0, 1]$, le point interpolé se déplace selon le plus court chemin possible sur la sphère (le grand cercle joignant les points $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_1$). Cette analogie permet de reproduire sur la sphère l'ensemble des algorithmes géométriques du plan (en particulier les algorithmes de subdivision) qui s'appuient sur des interpolations linéaires entre les points mis en jeu.

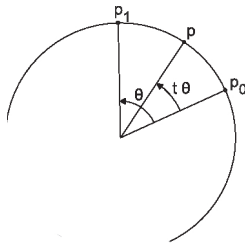


FIGURE 3.2 – *Représentation du Slerp dans le plan*

Etant donnée une série de points de contrôle $\mathbf{q}_i,\ i = 0, ..., N$ sur la sphère, on peut par exemple définir l'analogue de l'algorithme de De Casteljau, où les interpolations linéaires successives y sont remplacées par des Slerps.

$$\mathbf{q}_i^k(t) = \mathrm{G}[\mathbf{q}_{i-1}^{k-1}(t), \mathbf{q}_i^{k-1}(t)](t), \tag{3.11}$$

avec $\mathbf{q}_i^0 = \mathbf{q}_i$ pour tout $i$. La courbe de Bézier sphérique associée s'écrit alors

$$\mathrm{BS}[\mathbf{q}_0, ..., \mathbf{q}_N](t) = \mathbf{q}_N^N(t),\ 0 \leq t \leq 1. \tag{3.12}$$

Il est alors également possible de construire des courbes splines sur la sphère, composées de segments de courbes de Bézier sphériques.

### 3.3.2 Solution itérative pseudo-$C^1$ de type cubique

Le problème classique d'interpolation de Hermite de points $\mathbf{e}_i$ de l'espace associés à des vecteurs dérivés $\delta_i \mathbf{n}_i$ avec une spline composée de segments cubiques a une unique solution $C^1$ qui satisfasse les contraintes d'interpolation.

Cela se traduit, sous forme de Bézier, par une unique position possible pour les points de contrôle des segments cubiques. En effet, pour chaque segment de courbe cubique $\mathbf{x}_i(t), t \in [t_i, t_{i+1}]$ de points de contrôle Bézier $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_3$, on a nécessairement

$$\begin{array}{cc} \mathbf{C}_0 = \mathbf{x}_i(t_i) = \mathbf{e}_i, & \mathbf{C}_3 = \mathbf{x}_i(t_{i+1}) = \mathbf{e}_{i+1}, \\ \frac{3}{t_{i+1}-t_i}(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) = \mathbf{x}_i'(t_i), & \frac{3}{t_{i+1}-t_i}(\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_2) = \mathbf{x}_i'(t_{i+1}), \end{array} \tag{3.13}$$

ce qui définit entièrement les points de contrôle de chaque segment de la spline. Autrement dit, en notant $h_i = t_{i+1} - t_i$ pour tout $i$, chaque segment $\mathbf{x}_i(t)$ est défini par les quatre points de contrôle $(\mathbf{e}_i, \mathbf{R}_i = \mathbf{e}_i + \frac{\delta_i h_i}{3}\mathbf{n}_i, \mathbf{L}_{i+1} = \mathbf{e}_{i+1} - \frac{\delta_{i+1} h_{i+1}}{3}\mathbf{n}_{i+1}, \mathbf{e}_{i+1})$ (voir figure 3.3).

On s'inspire de ce formalisme pour le problème d'interpolation sur la sphère. Par analogie, on peut définir une succession de points de contrôle sur la sphère définis pour chaque segment de courbe $\mathbf{x}_i(t)$ par les points à interpoler $\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{e}_{i+1}$ ainsi que les points

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_i = \mathrm{G}[\mathbf{e}_i, \mathbf{n}_i](\frac{\delta_i h_i}{3}), \\ \mathbf{L}_{i+1} = \mathrm{G}[\mathbf{e}_{i+1}, -\mathbf{n}_{i+1}](\frac{\delta_{i+1} h_{i+1}}{3}). \end{array} \right. \tag{3.14}$$

On peut alors construire la spline recherchée en calculant chaque segment comme courbe de Bézier sphérique

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathrm{BS}[\mathbf{e}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{L}_{i+1}, e_{i+1}](t) \tag{3.15}$$

telle que définie précédemment.

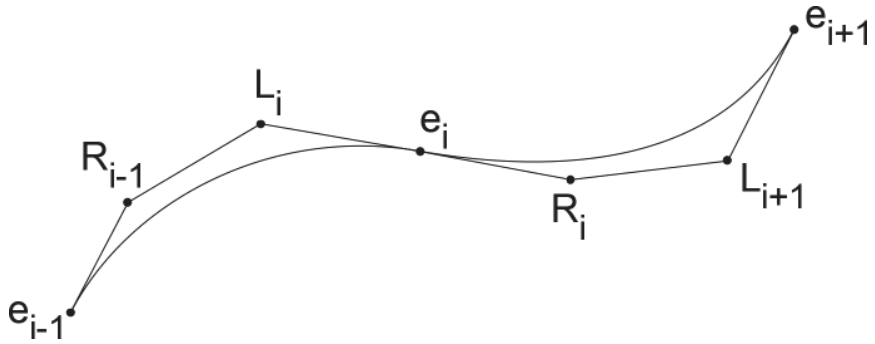


FIGURE 3.3 – *Spline cubique de Hermite dans le plan*

### 3.3.3 Solution itérative pseudo-$C^2$ (ou $G^2$) de type cubique

L'idée de cette méthode est de conserver une spline de type cubique, préférable pour ses propriétés de minimisation d'énergie, pour effectuer l'interpolation pseudo-$C^2$. Pour ce faire, on rajoute entre deux points successifs $\mathbf{e}_i$ à interpoler des points supplémentaires, dont la position n'est pas contrainte. Ainsi, en jouant sur la position de ces nouveaux points, on construit une spline de type cubique comprenant non plus $N$ mais $2N$ segments, interpolant les points $\mathbf{e}_i$ et leurs vecteurs dérivés associés $\delta_i \mathbf{n}_i$, de continuité pseudo-$C^2$.

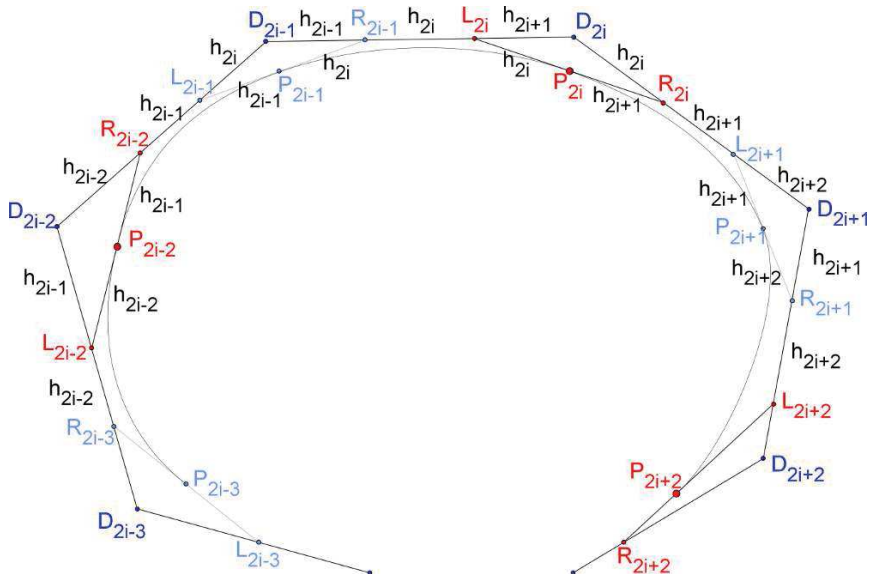


FIGURE 3.4 – *Spline cubique $C^2$ dans le plan. En rouge, les points fixés par les contraintes d'interpolation. Pour tout $i$, $\mathbf{P}_{2i} = \mathbf{e}_i$. Les points $\mathbf{P}_{2i+1}$ dépendent des points de contrôle $\mathbf{D}_i$ qui sont choisis de manière à vérifier la contrainte pseudo-$C^2$.*

Plus précisément, on note $\mathbf{P}_{2i} = \mathbf{e}_i$ pour tout $i \in [0, N]$. On construit alors une spline à partir des points $\mathbf{P}_k, k \in [0, 2N]$, où les termes pairs correspondent aux points $\mathbf{e}_i$ et les termes impairs sont les nouveaux points dont la position est à déterminer de façon à interpoler les vecteurs dérivés $\delta_i \mathbf{n}_i$.

L'interpolation des conditions du problème est équivalente aux relations (3.14) de la section précédente, avec les notations de ce problème

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{2i} = \mathrm{G}[\mathbf{P}_{2i}, -\mathbf{n}_i](\frac{\delta_i h_{2i}}{3}), \\ \mathbf{R}_{2i} = \mathrm{G}[\mathbf{P}_{2i}, \mathbf{n}_i](\frac{\delta_i h_{2i+1}}{3}). \end{cases} \tag{3.16}$$

La condition de spline pseudo-$C^2$ s'obtient, par analogie avec les conditions de spline $C^2$ dans l'espace, par les équations suivantes.

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{2i} = \mathrm{G}[\mathbf{D}_{2i-1}, \mathbf{D}_{2i}](\frac{h_{2i-1}+h_{2i}}{h_{2i-1}+h_{2i}+h_{2i+1}}), \ i = 1, ..., N, \\ \mathbf{R}_{2i} = \mathrm{G}[\mathbf{D}_{2i}, \mathbf{D}_{2i+1}](\frac{h_{2i}}{h_{2i}+h_{2i+1}+h_{2i+2}}), \ i = 0, ..., N-1, \end{cases} \tag{3.17}$$

et l'on impose aux extrémités que $\mathbf{D}_0 = \mathbf{e}_0$ et $\mathbf{D}_{2N} = \mathbf{e}_N$.

On a finalement un système non linéaire de $2N + 2$ équations en $2N + 1$ variables $\mathbf{D}_i$ de $\mathbb{R}^3$. En effet, les coefficients de ce système dépendent des vecteurs inconnus. Le système se résout donc de manière itérative en utilisant les coefficients calculés à l'étape $n$ pour calculer les nouveaux points de contrôle $\mathbf{D}_i$ de l'étape $n + 1$.

### 3.3.4 Comparaison des méthodes

On présente ici quelques exemples afin de comparer les trois méthodes utilisables à l'heure actuelle. Dans les figures 3.5 et 3.6, chaque ligne correspond à un même ensemble de données en entrée. Tous les $\delta_i$ sont égaux à 1 (vecteurs tangents unitaires). La colonne de gauche correspond à la méthode analytique rationnelle où l'on a choisi $X_i = Y_i = 0$ pour tout $i$. La colonne du milieu présente la solution itérative pseudo-$C^1$ avec une paramétrisation cordale (pour tout $i$, $h_i = \arccos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1})$). La colonne de droite présente la solution itérative pseudo-$C^2$ de la section 3.3.3 paramétrée telle que pour tout $i$, $h_{2i-1} = h_{2i} = \frac{1}{2}\arccos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1})$.

L'exemple (a) est typique d'un cas où les données $\mathbf{e}_i, \mathbf{n}_i$ correspondent à une courbe lisse échantillonnée de manière précise. Dans ce cas les trois méthodes donnent des résultats très proches.

La méthode analytique donne souvent des résultats comparables aux autres méthodes (figure 3.5) avec un temps d'exécution moindre, mais aboutit à des solutions au comportement incontrolable dans certains cas (figure 3.6). Ce type de comportement semble possible à éviter, moyennant un critère satisfaisant pour fixer les degrés de liberté $X_i, Y_i$. Nous n'avons pu donner de méthode satisfaisante pour ce faire.

Les deux méthodes itératives sont plus robustes pour tous les types de données à interpoler. On constate cependant que la méthode pseudo-$C^1$ aboutit à des solutions en général plus tendues (voir en particulier les exemples (b),(c) et (f)). Il est possible d'ajouter à la méthode pseudo-$C^2$ les paramètres de tension de la méthode de Nielson ($\nu$-splines), mais ces paramètres ne jouent pas sur la position des points additionnels ajoutés pour satisfaire la contrainte $C^2$, qui sont la raison principale des oscillations plus importantes obtenues avec cette méthode.

Ainsi, dans le cadre d'applications qui nécessitent d'obtenir une courbe $C^2$ sur la sphère, et de manière générale pour obtenir des solutions plus lisses, la dernière méthode est préférable. La méthode pseudo-$C^1$ permet cependant d'éviter naturellement les oscillations, et son temps d'exécution est très inférieur puisqu'elle ne comporte pas de procédure itérative de convergence vers les points de contrôle.

## 3.4 Application au Morphosense

On discute dans cette section de l'intérêt des vecteurs $\mathbf{n}_i$ pour la reconstruction des courbes rubans à l'aide du ruban Morphosense.

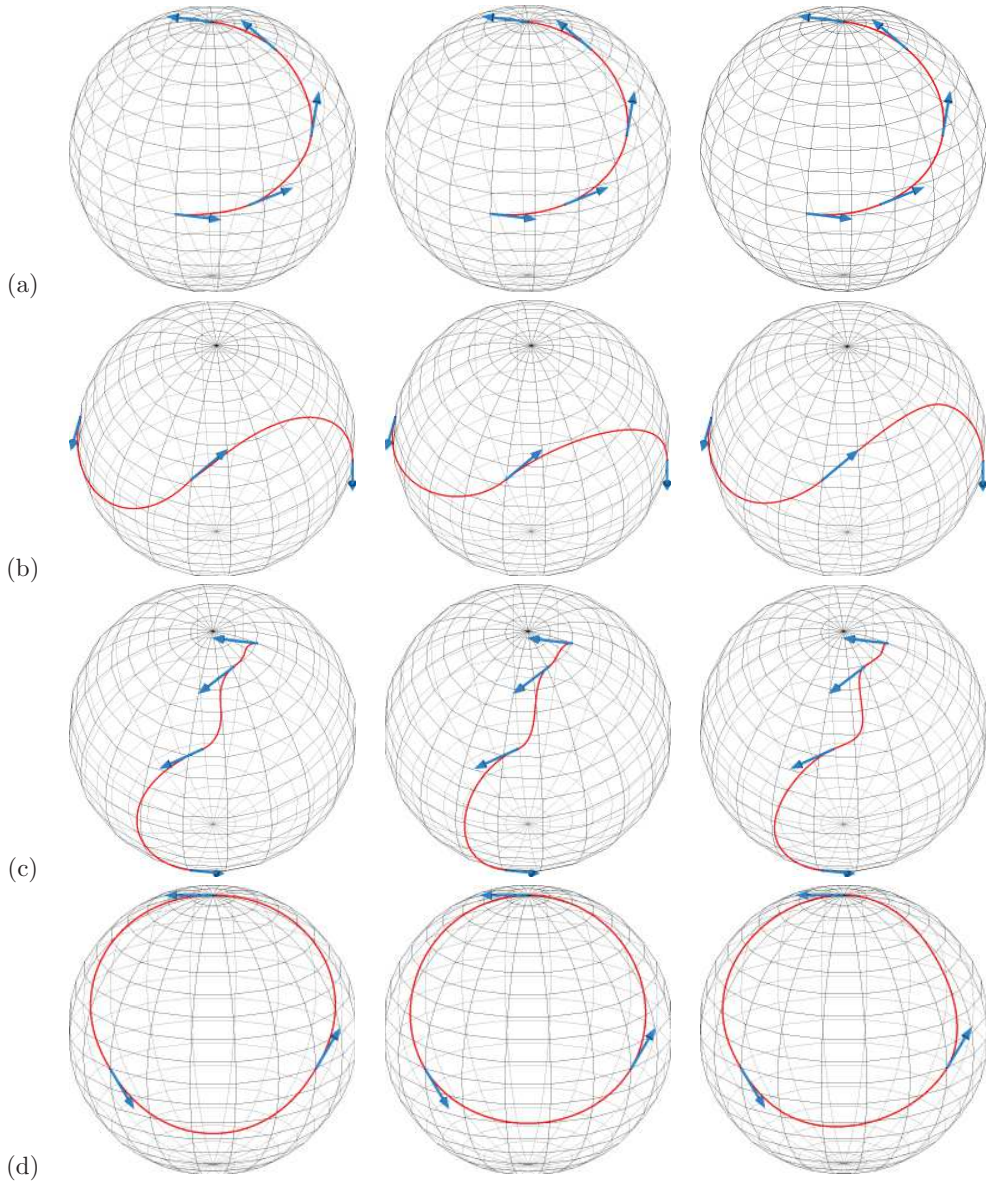


FIGURE 3.5 – *Comparaison des trois méthodes. A gauche : la méthode analytique rationnelle. Au milieu : la méthode itérative pseudo-$C^1$. A droite : la méthode itérative pseudo-$C^2$ de la section 3.3.3.*

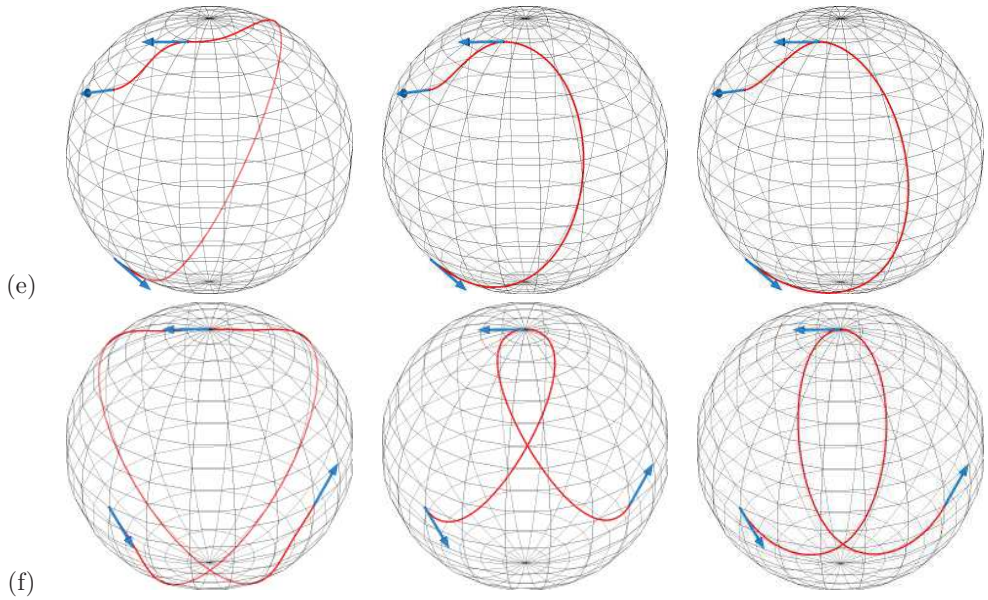


FIGURE 3.6 – *Comparaison des trois méthodes. A gauche : la méthode analytique rationnelle. Au milieu : la méthode itérative pseudo-$C^1$. A droite : la méthode itérative pseudo-$C^2$ de la section 3.3.3.*

**• Exemple introductif**

On présente tout d'abord en figure 3.7 une application simple à l'aide du ruban Morphosense. Dans ces exemples, l'exploitation des vecteurs $\mathbf{n}_i$ donne des informations cruciales pour la reconstruction. C'est le cas de manière générale pour les courbes faiblement échantillonnées : dans ce cas les vecteurs $\mathbf{n}_i$ permettent d'améliorer grandement la précision de la courbe reconstruite.

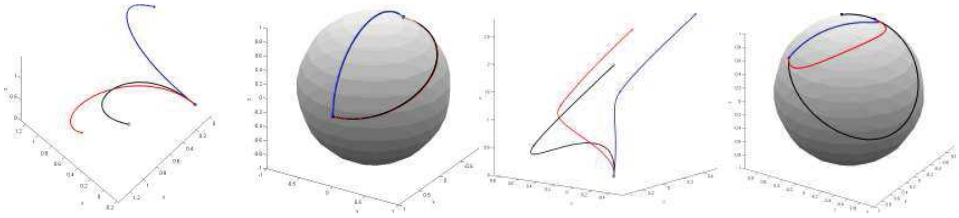

FIGURE 3.7 – *A gauche : reconstruction d'un ruban à partir de deux capteurs fixés à ses extrémités, par intégration de son hodographe reconstruit sur la sphère. En noir, le ruban initial à reconstruire. En bleu, la reconstruction obtenue par interpolation des points seuls sur la sphère (méthode de Nielson). En rouge, la reconstruction obtenue par la méthode de la section 3.3.3. A droite : reconstruction à partir de* 3 *capteurs.*

• **Norme des vecteurs tangents et paramétrisation sur la sphère**

Les méthodes développées plus haut répondent de différentes manières au problème d'interpolation de points $\mathbf{e}_i$ de la sphère unité associés à des vecteurs dérivés $\delta_i \mathbf{n}_i$ de norme $\delta_i$ quelconque (problème de Hermite classique). Dans le cadre du Morphosense, les données fournies par le ruban ne permettent d'exploiter que la direction des tangentes $\mathbf{n}_i$, dont on ne connaît pas la norme. Ainsi, il reste en pratique à fixer la valeur de ces normes en chaque point d'interpolation afin de pouvoir appliquer les algorithmes présentés précédemment.

L'influence des normes $\delta_i$ peut se décomposer en deux catégories. D'une part, elles influent directement l'aspect géométrique de la courbe hodographe qui parcourt la sphère. En l'absence d'informations sur la courbe entre les données correspondant aux noeuds de capteurs, on cherche naturellement à minimiser les oscillations entre les données et donc à produire des solutions tendues. Nous avons déjà cherché à travailler sur cet aspect indépendamment de la norme des vecteurs dérivés, de façon à obtenir des formes satisfaisantes dans la plupart des cas. A ce titre, le choix $\delta_i = 1$ pour tout $i$ est cohérent avec l'échelle des données sur la sphère (de rayon 1), et compatible avec l'obtention de solutions tendues par l'une des méthodes décrites précédemment.

Le second aspect de cette influence est plus délicat. Il est directement lié à la paramétrisation de la courbe hodographe : deux courbes identiques sur la sphère mais paramétrisées différemment aboutissent après intégration à deux courbes rubans différentes (voir figure 3.8). En effet, les normes $\delta_i$ sont liées à la courbure de la courbe ruban. Une norme $\delta_i$ plus grande dilate la paramétrisation, ce qui correspond à accélérer la vitesse de parcours de la courbe hodographe, et donc à modifier la tangente plus rapidement pour finalement aboutir à une courbure plus grande en ce point de la courbe ruban. Inversement, une norme plus faible ralentit la vitesse de paramétrisation et implique donc un changement moins rapide de la tangente à la courbe ruban, autrement dit une courbure plus faible.

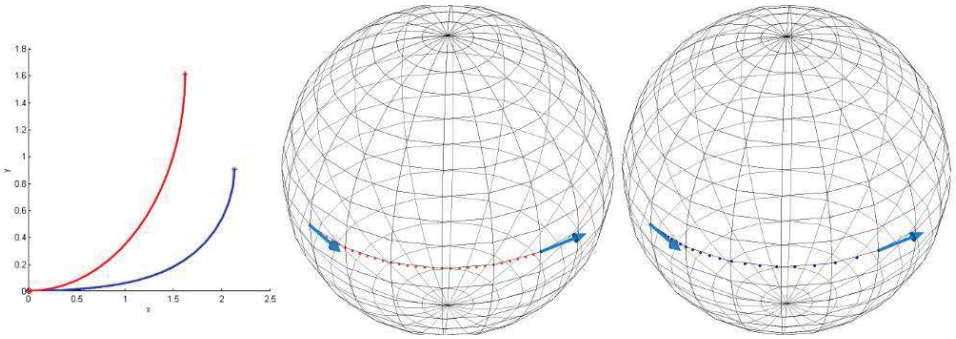


FIGURE 3.8 – *La même courbe sur la sphère interpolée selon deux paramétrisations différentes (à droite), et leurs intégrations respectives (à gauche).*

L'analyse de ces deux aspects permet donc de considérer que l'influence des normes $\delta_i$ se réduit à un problème de paramétrisation. Encore une fois, en l'absence d'informations sur la courbe entre les noeuds de capteurs, il est naturel d'introduire un minimum de variations de courbure entre deux points successifs. Cela correspond à imposer une paramétrisation cordale pour la courbe hodographe entre les points $\mathbf{e}_i$ de la sphère. Dans ce cas, après intégration la courbure de la courbe ruban varie aussi peu que possible sur chaque intervalle.

Finalement, les solutions que nous proposons ont une paramétrisation cordale et vérifient $\delta_i = 1$ pour tout $i$. Il est évident que les variations entre les noeuds de capteurs

sont impossibles à reproduire avec ces choix, mais il s'agit essentiellement d'un problème d'échantillonnage : idéalement, les capteurs devraient être espacés d'une distance inférieure au rayon maximal de courbure de la courbe ruban.

**• Reconstruction à partir de données réelles**

On présente ici des résultats liés à une acquisition d'un ruban Morphosense en mouvement, composé de huit noeuds de capteurs séparés de 17 cm en moyenne. Les données d'acquisition y ont été récupérées en temps réel et filtrées afin de reconstruire en chaque instant les repères d'orientation, puis de reconstruire la courbe suivie par le ruban par la méthode d'interpolation pseudo-$C^1$, assez rapide pour reconstruire la courbe ruban en temps réel. Lors de l'acquisition, les capteurs était par ailleurs équipés de marqueurs du système optique codamotion, permettant d'enregistrer très précisément leur position au cours du temps, afin de les comparer avec nos résultats.

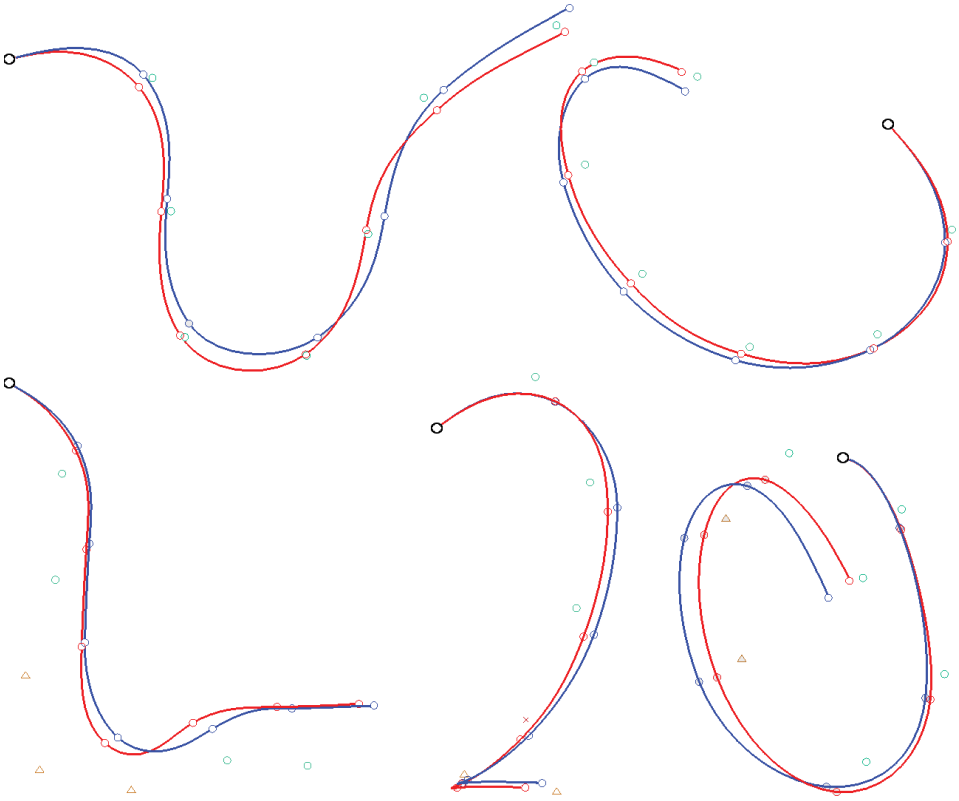

FIGURE 3.9 – *Extraits de la reconstruction en mouvement du ruban Morphosense. La reconstruction témoin des capteurs correspond aux marqueurs verts (remplacés par des triangles quand la visibilité est mauvaise et des croix quand elle est nulle). En bleu, la reconstruction à l'aide de la méthode de Nielson. En rouge, la reconstruction à l'aide de la méthode de la section 3.3.2.*

La figure 3.9 montre quelques extraits à des instants fixés de cette reconstruction. On y remarque une meilleure approximation de la position des capteurs par notre méthode qu'avec la méthode de Nielson utilisée précédemment. La figure 3.10 compare les erreurs et confirme ce résultat. On remarque toutefois que les erreurs ne sont pas réduites

considérablement par rapport à la méthode précédente. Cela est dû au fait que les données capteurs sont bruitées : la précision supplémentaire apportée par cette méthode est partiellement perturbée par des valeurs $\mathbf{n}_i$ parfois aberrantes. Dans ce cas de données de mauvaise qualité, la méthode de Nielson peut donner des résultats comparables ou même meilleurs, puisqu'elle aboutit à des tangentes sur la sphère lissées par la nature même de la méthode et des paramètres de tension. Notre méthode verra son efficacité augmenter de pair avec la précision des capteurs utilisés et la qualité des méthodes de filtrage des signaux qu'ils produisent.

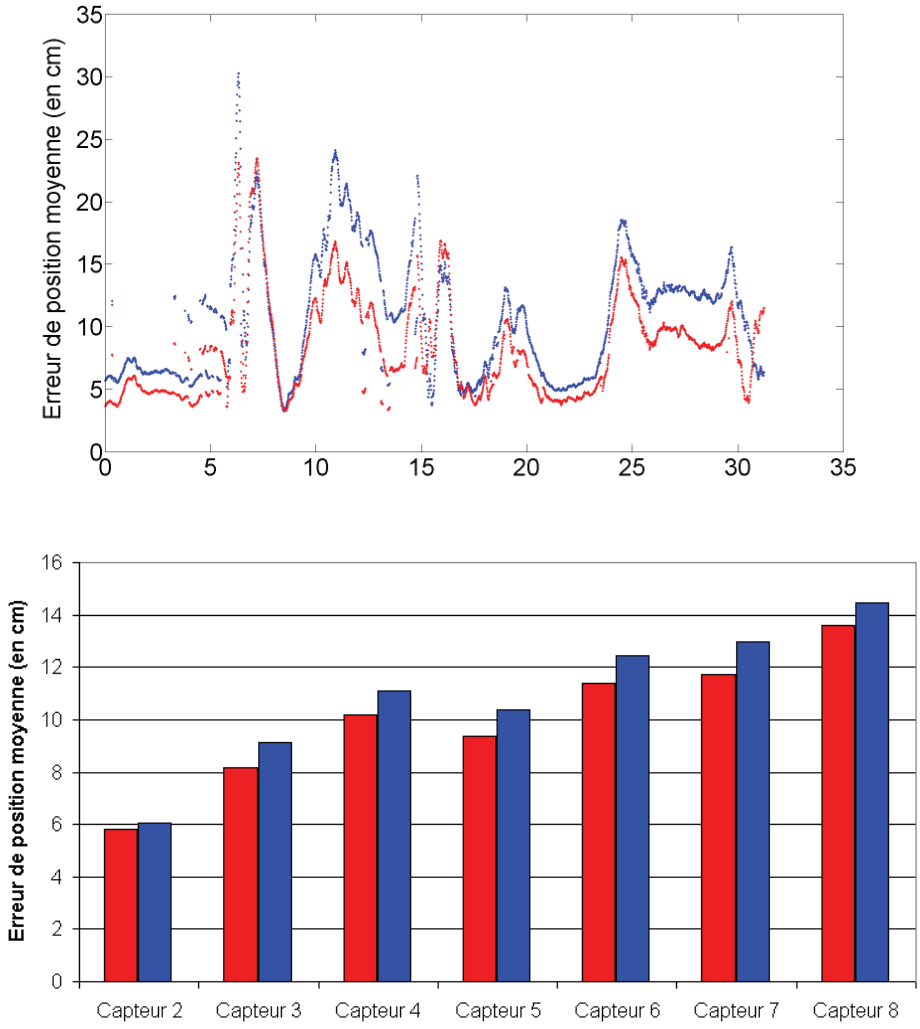


FIGURE 3.10 – *En haut : erreur de position du dernier capteur en fonction du temps (s), pour la méthode de Nielson (en rouge) et la méthode de la section 3.3.2 (en bleu). En bas : erreur moyenne de position sur toute la période de simulation pour chaque capteur.*

## Bibliographie du Chapitre


[JW03] Bert Jüttler and Wenping Wang. The shape of spherical quartics. *Computer Aided Geometric Design*, 20 :621–636, 2003.

[Nie04] Gregory Nielson. $\nu$-quaternion splines for the smooth interpolation of orientations. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10 :224–229, 2004.

[PH05] H. Pottmann and M. Hofer. A variational approach to spline curves on surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 22 :693–709, 2005.

# Chapitre 4

# Des rubans aux surfaces développables


**4.1 Surfaces développables et quasi-développables . . . . . 68**
**4.2 Identification et reconstruction de surfaces développables 70**
4.2.1 Segmentation à l'aide du cylindre de Blaschke . . . . . 71
**4.3 Approche continue pour les développées tangentielles . . 73**
**4.4 Résultats . . . . . 74**
**4.5 Tolérance pour la méthode aux moindres carrés . . . . . 74**


On détaille dans ce chapitre un algorithme de reconstruction d'une catégorie particulière de surfaces : les surfaces développables. En remarquant que les courbes géodésiques caractérisent localement les surfaces développables $C^2$ auxquelles elles appartiennent, il apparait que le ruban Morphosense est un outil privilégié pour reconstruire ce type de surfaces.

Cependant, en pratique, on doit considérer des surfaces plus générales que les surfaces $C^2$ qui forment une classe très réduite, et on souhaite considérer la classe plus large des surfaces développables $G^1$. D'autre part, les erreurs dûes aux mesures des capteurs ainsi qu'aux contraintes physiques d'acquisition doivent être prises en compte afin de pouvoir reconstruire la surface de manière robuste.

On propose un algorithme qui permet la reconstruction des surfaces $G^1$ et on discute d'extensions qui permettraient de l'appliquer sur des données bruitées et une classe plus large de surfaces.

Cette approche a fait l'objet d'une participation à une conférence [HSB12].

## 4.1 Surfaces développables et quasi-développables

• **Approche cartésienne**. – Une surface $\mathbf{s}$ de $\mathbb{R}^3$ est dite *réglée* si elle admet une paramétrisation de la forme

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\,\mathbf{e}(u), \tag{4.1}$$

où $\mathbf{c}(u)$ est une courbe de $\mathbb{R}^3$ appelée *directrice* de la surface et $\mathbf{e}(u)$ est un champ de vecteurs. La surface est ainsi engendrée par la famille des droites $L(u) = \{\mathbf{c}(u), \mathbf{e}(u)\}$, appelées *génératrices* de la surface.

Une telle paramétrisation est dite *normalisée* [DoC76] si

$$|\mathbf{e}(u)| \equiv 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}'(u) \cdot \mathbf{c}'(u) \equiv 0.$$

La directrice $\mathbf{c}(u)$ est alors la *courbe de régression* et concentre l'ensemble des (éventuels) points singuliers. Notons qu'une autre normalisation consiste à choisir une directrice orthogonale à l'ensemble des génératrices [Hos71].

Une surface *développable* est une surface que l'on peut "déplier" (*développer*) sur le plan par une transformation isométrique.

Une surface réglée est développable si le plan tangent est constant le long de chaque droite génératrice, ce qui se traduit par la condition

$$\det(\mathbf{c}'(u), \mathbf{e}(u), \mathbf{e}'(u)) \equiv 0\,, \tag{4.2}$$

exprimant la coplanarité de ces trois vecteurs. Ainsi, la direction du vecteur normal

$$\mathbf{s}'_u \wedge \mathbf{s}'_v = \mathbf{c}'(u) \wedge \mathbf{e}(u) + v\ \mathbf{e}'(u) \wedge \mathbf{e}(u) \tag{4.3}$$

est indépendante de $v$.

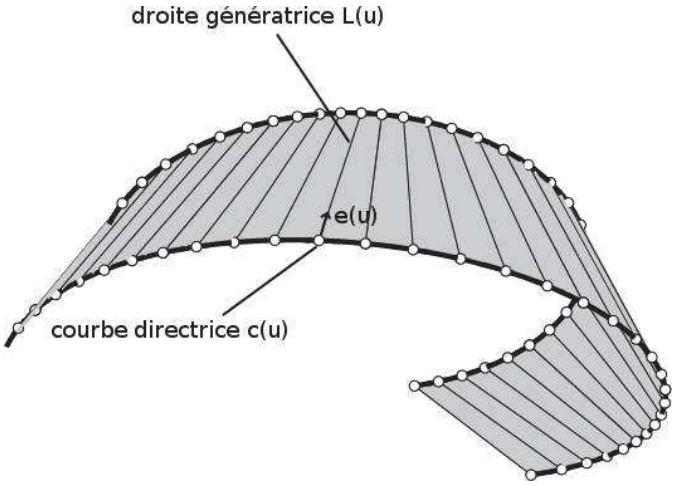


FIGURE 4.1 – *Exemple de surface réglée développable*

Pour une paramétrisation normalisée, on déduit $\mathbf{e}'(u) \cdot \mathbf{e}(u) \equiv 0$, ce qui permet de classer les surfaces réglées développables $C^2$ dans l'une des trois catégories suivantes.

◇ Les *développées tangentielles*, définies comme l'enveloppe des tangentes à la courbe de régression (dont tous les points sont singuliers sur la surface développable) :

$$\mathbf{s}_0(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\ \mathbf{c}'(u)\,. \tag{4.4}$$

◇ Les *cônes généralisés*, pour lesquels la courbe de régression dégénère en un unique point, le sommet du cône.

◇ Les *cylindres généralisés*, pour lesquels la courbe de régression dégénère en un unique point à l'infini. La direction $\mathbf{e}$ du cylindre est alors la direction commune à toutes ses génératrices : $\mathbf{e}(u) = \mathbf{e}$.

Pour une paramétrisation quelconque (4.1) d'une surface réglée développable, la courbe de régression $\mathbf{b}(u)$ est définie par

$$\mathbf{b}(u) = \mathbf{c}(u) + v(u)\ \mathbf{e}(u) \text{ avec } v(u) = -\frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{e}' \times \mathbf{e})}{(\mathbf{e}' \times \mathbf{e})^2}(u). \tag{4.5}$$

Notons que les surfaces développables $C^2$ sont caractérisées par une courbure de Gauss identiquement nulle.

Les surfaces développables $C^2$ forment une classe restrictive qui ne représente pas les surfaces obtenues en pratique à partir de surfaces planaires souples (comme les feuilles de papier, par exemple).

Nous considérons donc ici des surfaces développables $G^1$, composées de développées tangentielles, de cônes généralisés et de cylindres généralisés, ayant un contact $G^1$ le long de droites génératrices communes. Cette classe permet de considérer une variété plus large de surfaces dans le cadre de la reconstruction.

• **Approche duale**. – Toute surface développable peut également être définie comme l'enveloppe d'une famille à un paramètre de plans :

$$U(t): \; n_1(t)\, u_1 + n_2(t)\, u_2 + n_3(t)\, u_3 + d(t) = 0, \tag{4.6}$$

avec la convention de Hesse $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, où $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est le vecteur normal unitaire au plan et $d$ sa distance à l'origine. La surface est ainsi associée à la courbe $\mathbf{U}(t) = (d(t), \mathbf{n}(t))$ contenue dans le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1, \tag{4.7}$$

appelé *cylindre de Blaschke*, chaque vecteur $\mathbf{U}(t)$ représentant le plan tangent $U(t)$ à la surface. Les droites génératrices $L(t)$ de la surface développable sont alors définies par l'intersection

$$L(t) = U(t) \cap U'(t). \tag{4.8}$$

La courbe de régression $\mathbf{B}(t) = (b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t))$ est définie en coordonnées homogènes par la double intersection :

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{U}(t) \wedge \mathbf{U}'(t) \wedge \mathbf{U}''(t). \tag{4.9}$$

• **Surfaces quasi-développables**. – De petites déformations non isométriques appliquées à une surface développable résultent en des surfaces quasi-développables. Précisément, on introduit la définition suivante.

**Définition 4.** *Une portion régulière* $\mathbf{s}_\epsilon$ *d'une surface* $\mathbf{s}$ *orientée de classe* $C^2$ *est quasi-développable (ou* $\epsilon$*-développable) s'il existe un nombre* $\epsilon$ *positif tel que*

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathbf{s}_\epsilon} |K(\mathbf{p})| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \iint_{\mathbf{s}_\epsilon} K \, \mathrm{d}\sigma = 0\,,$$

*où* $K$ *est la courbure gaussienne de la surface* $\mathbf{s}$ *d'élément d'aire* $\mathrm{d}\sigma$.

## 4.2 Identification et reconstruction de surfaces développables

On considère une surface développable $\mathbf{s}$ de régularité $G^1$ sur laquelle on se donne une (ou plusieurs) courbe géodésique $\mathbf{r}$. Cela correspond à une modélisation du problème de reconstruction de la table métrologique ($\mathbf{s}$) par les rubans Morphosense (courbe $\mathbf{r}$).

On veut alors reconstruire la surface $\mathbf{s}$ en exploitant la courbe géodésique $\mathbf{r}$. L'approche présentée ici s'appuie sur le résultat suivant.

*Une courbe géodésique sur une surface développable identifie complètement la portion de la surface dont les génératrices intersectent cette géodésique. Précisément, la surface développable est l'enveloppe des plans rectifiants de la courbe géodésique [Str61].*

FIGURE 4.2 – *Un ruban appliqué sur une surface développable*

En effet, le repère de Serret-Frenet d'une géodésique coïncide en tout point avec le repère de Darboux de la surface développable (voir chapitre 1). En particulier, la normale du repère de Serret-Frenet

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}' \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''),$$

coïncide le long de la courbe avec la normale à la surface sous-jacente. Ainsi, connaître la géodésique sur une portion de la surface revient à connaître la famille des plans tangents associés à cette portion, et permet donc de la reconstruire précisément.

Cependant, deux questions essentielles sont à prendre en considération pour la mise en oeuvre de cette stratégie.

◇ **L'absence d'expression analytique** exacte pour les géodésiques considérées. En effet, en pratique les géodésiques sont reconstruites numériquement à partir des informations capteurs. L'approche duale, qui implique l'utilisation des dérivées secondes, ne peut donc être appliquée en l'état.

◇ **La segmentation**. Par notre choix d'un modèle de surfaces développables $G^1$, la géodésique calculée traversera successivement des portions de cône, de cylindre et de développées tangentielles. L'un des enjeux est donc de localiser et d'identifier chacune des portions de la géodésique associées à ces différentes composantes canoniques.

Dans la suite, les courbes géodésiques sont donc assimilées à une suite de points $\mathbf{p}_i, i = 1..n$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ associés à des normales $\mathbf{n}_i$ définissant le plan tangent à la surface en ces points.

La reconstruction globale des surfaces développables $G^1$ que nous étudions se fait au travers d'une première étape de segmentation de la surface, puis par la reconstruction individuelle de chacune des portions de la surface. Cela nécessite, dans le cas des développées tangentielles, une approximation continue des données.

### 4.2.1 Segmentation à l'aide du cylindre de Blaschke

L'idée de cette approche est d'étudier directement les données dans l'espace des normales pour caractériser la surface sous-jacente.

Pour un cylindre généralisé $\mathbf{s}(u,v)$ de direction $\mathbf{e}$, on déduit de l'expression (4.3) que $\langle \mathbf{s}'_u \wedge \mathbf{s}'_v, \mathbf{e}\rangle \equiv 0$, ce qui prouve que la famille des normales $\mathbf{n}_i$ décrivent un grand cercle de $S^2$, à savoir l'intersection de $S^2$ avec le plan vectoriel de normale $\mathbf{e}$. Cette propriété permet d'identifier un cylindre généralisé uniquement à partir des normales.

L'opération est plus compliquée pour les deux autres classes de surfaces développables. En particulier, le lemme suivant montre que l'ensemble des normales ne suffit pas à identifier les autres catégories.

**Lemme 3.** *Soit $\mathbf{c}(u)$ une courbe régulière tracée sur la sphère unité $S^2$ ($\mathbf{c}(u)$ non tangente à un grand cercle). Alors il existe un cône généralisé et une développée tangentielle dont la famille des normales $\mathbf{n}(u)$ coïncide avec $\mathbf{c}(u)$.*

**Preuve** : Considérons le cône $\mathbf{s}(u,v) = v\,\varphi(u)$ avec $\varphi(u) = \mathbf{c}(u) \times \mathbf{c}'(u)$. La courbe $\mathbf{c}(u)$ étant régulière, $\varphi(u)$ ne s'annule pas et le cône est donc bien défini. On déduit ensuite de la relation (4.3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}'_u \wedge \mathbf{s}'_v &= v\,\varphi'(u) \wedge \varphi(u)\,, \\ &= (\mathbf{c} \wedge \mathbf{c}'') \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{c}')\,, \\ &= -\det(\mathbf{c}, \mathbf{c}', \mathbf{c}'')\,\mathbf{c}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, quitte à réorienter la surface, la famille des normales unitaires au cône $\mathbf{s}(u,v)$ coïncide avec $\mathbf{c}(u)$.

La preuve pour les développées tangentielles est donnée dans [DoC76] (section 3-5). □

L'idée est alors de travailler là encore avec les points $\mathbf{U}_i = (d_i, \mathbf{n_i})$ du cylindre de Blaschke, où $d_i = -\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_i$. On a vu que les surfaces développables étaient duales de courbes $\mathbf{U}(t)$ sur le cylindre de Blaschke (cf 4.3). On peut caractériser plus précisément ces courbes selon les différentes classes de surfaces développables :

(1) Dans le cas des *cylindres généralisés*, tous les plans tangents $\mathbf{U}(t) = (d(t), \mathbf{n}(t))$ sont parallèles à un vecteur direction $\mathbf{d}$, et vérifient donc la relation $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$. Ainsi la courbe $\mathbf{U}$ est contenue dans l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ :

$$d_1\,u_1 + d_2\,u_2 + d_3\,u_3 = 0,$$

(2) Dans le cas des *cônes généralisés*, tous les plans tangents $\mathbf{U}(t)$ passent par un même point $\mathbf{B} = (1, \mathbf{b})$. Cela implique que la courbe $\mathbf{U}$ est contenue dans le sous-espace affine de dimension 3 décrit par la relation d'incidence :

$$u_0 + b_1\,u_1 + b_2\,u_2 + b_3\,u_3 = 0$$

(3) Dans le cas des *développées tangentielles*, la courbe ne pourra pas être restreinte à ce type d'espaces.

Cette classification permet de déterminer à quel type de surface correspondent les points $\mathbf{U}_i$, sans avoir recours à un paramétrage de $\mathbf{U}$. On s'inspire pour cela de la méthode développée dans [Pet04]. L'idée est de déterminer si un ensemble de points $\mathbf{U}_i$ appartient à un espace de type (1) ou (2) qui sont des hyperplans de $\mathbb{R}^4$. Une méthode efficace est alors de déterminer le meilleur hyperplan approximant les données par une minimisation aux moindres carrés, puis de vérifier si l'hyperplan solution est de la forme (1) ou (2). Dans le cas des surfaces $G^1$ que nous étudions, on cherche à partitionner l'ensemble des points $\mathbf{U}_i$ pour retrouver les différentes portions de la surface considérée.

Les points $\mathbf{U}_i$ étant extraits d'une courbe géodésique, ils sont ordonnés. Autrement dit si la surface couverte par la géodésique est composée de $m$ portions de classe $C^2$, il existe $m+1$ indices

$$i_0 = 0 \leq i_1 \leq ... \leq i_{m-1} \leq i_m = n$$

tels que les sous-ensembles de points

$$\{\mathbf{U}_{i_k+1}, \mathbf{U}_{i_k+2}, ..., \mathbf{U}_{i_{k+1}}\}, k = 0...m$$

sont entièrement contenus dans l'une de ces portions.

On peut donc procéder à l'aide d'une fenêtre glissante de points $\mathbf{U}_i$ successifs sur lesquels on calcule le meilleur hyperplan au sens des moindres carrés. Quand la fenêtre est toute entière contenue dans un espace de type (1) ou (2), on vérifie que l'hyperplan solution correspond bien à l'une des deux formes associées. La portion de surface décrite correspond alors à un cône ou à un cylindre dont on peut déterminer respectivement le sommet ou la direction.

Dès que la fenêtre chevauche deux portions de type différent, ou si elle est contenue dans une portion de développée tangentielle, on ne peut plus vérifier ce critère. Ainsi, en parcourant tous les points $\mathbf{U}_i$, il est possible de segmenter la surface en succession de portions correspondant à des cônes, des cylindres ou des développées tangentielles. On peut alors reconstruire les portions de cônes et de cylindres comme faisceaux de droites sécantes au sommet du cône ou parallèles à la direction du cylindre qui passent par les points $\mathbf{p}_i$ correspondants. Les points qui ne satisfont pas les cas (1) et (2) sont issus de portions de développées tangentielles. Ce cas est plus complexe et nécessite un traitement différent décrit dans la section suivante.

En pratique, les différentes erreurs dues à l'acquisition (données capteurs bruitées) et à la reconstruction (voir Chapitres 3 et 2) conduisent à faire deux choix cruciaux pour le bon fonctionnement de la méthode.

• D'une part, il faut déterminer la taille de la fenêtre glissante de points $\mathbf{U}_i$. Théoriquement, quatre points suffisent puisqu'ils déterminent entièrement les espaces de dimension 3 décrits en (1) et en (2), mais en raison des erreurs mentionnées plus haut, il faut prévoir de prendre en compte plus de points pour que l'identification des hyperplans soit plus robuste.

• Il faut également prévoir une tolérance d'erreur sur le résultat du calcul aux moindres carrés. L'amplitude de cette tolérance pourra être choisie en fonction du bruit induit par les capteurs ainsi que des erreurs dues à la méthode de reconstruction de la courbe (si ces erreurs sont quantifiables).

## 4.3 Approche continue pour les développées tangentielles

Pour reconstruire les portions de surface correspondant à des développées tangentielles, on a besoin d'approcher la courbe de régression $\mathbf{b}(t)$ correspondante. L'idée est d'interpoler les points $\mathbf{U}_i$ que l'on a identifié dans cette portion selon un paramètre $t$, afin de construire une approximation de l'enveloppe $\mathbf{U}(t)$ des plans tangents à la surface. On peut ainsi appliquer directement le cadre théorique de la représentation duale. En effet, l'équation (4.9) permet d'obtenir la courbe de régression $\mathbf{B}(t)$ sous sa forme homogène ([PW99]). On peut alors reconstruire $\mathbf{s}$ sur $[a, b]$ comme l'enveloppe des tangentes de $\mathbf{b}$.

**Remarque 5.** *On vérifie que la géodésique* $\mathbf{r}$ *(l'ensemble des points* $\mathbf{p}_i$*) est contenue dans la surface reconstruite, mais contrairement aux cas du cône et du cylindre, on n'a plus besoin de* $\mathbf{r}$ *au moment de la reconstruction.*

## 4.4 Résultats

On présente ici un exemple qui détaille les étapes du processus de reconstruction. On génère les surfaces développables $G^1$ comme des surfaces de Bézier. Il est aisé de générer des cônes et des cylindres généralisés par cette méthode. Les développées tangentielles peuvent également s'écrire sous forme de Bézier (produit tensoriel), que l'on trouve par un calcul élémentaire en utilisant l'équation (4.4).

En effet, si l'on écrit $\mathbf{c}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{x}_i B_i^n(u)$ la courbe de régression, et en posant

$$\begin{cases} \mathbf{d}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0,\ \mathbf{d}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1} \\ \mathbf{d}_i = i\ (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) + (n-i)(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i),\ i = 1..n-1, \end{cases}$$

on obtient la forme suivante

$$\mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{1} \mathbf{q}_{i,j} B_i^n(u) B_j^1(v), \tag{4.10}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{i,0} = \mathbf{x}_i \\ \mathbf{q}_{i,1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{d}_i \end{cases},\ i = 0...n.$$

On peut ainsi générer les surfaces développables $G^1$ en raccordant des patches Bézier de chacune des trois catégories. Cette méthode permet d'obtenir une grande variété de surfaces.

L'exemple présenté dans la figure 4.3 détaille les étapes de la méthode d'acquisition, de segmentation et de reconstruction. A partir d'une surface développable quelconque (a) sur laquelle on pose un ruban pour acquérir une courbe géodésique (b), on segmente la surface grâce à la méthode aux moindres carrés. On identifie alors dans un premier temps les portions de cône et de cylindre (c) pour les reconstruire individuellement (d). Les portions restantes, correspondant à des développées tangentielles, sont alors reconstruites par l'intermédiaire de leur courbe de régression, identifiée par dualité dans l'espace des plans tangents (e). La surface dont les droites génératrices sont couvertes par la géodésique est alors entièrement identifiée et reconstruite (f).

## 4.5 Tolérance pour la méthode aux moindres carrés

La méthode de la section 4.2.1 pour la reconnaissance et la segmentation des portions coniques et sphériques peut être étendue en pratique en introduisant une tolérance d'erreur pour les résidus de la méthodes aux moindres carrés. Cela permet principalement deux applications de l'algorithme.

**• Utilisation sur des données réelles**

Les données réelles fournies par les capteurs étant bruitées, il est nécessaire d'introduire cette tolérance si l'on veut appliquer la méthode en pratique. L'idée est alors de trouver la surface développable $G^1$ la plus proche possible de la surface réelle que l'on cherche à reconstruire. Dans ce cas, les données ne sont plus interpolées mais seulement approximées. Cette approche est intéressante si l'on cherche en priorité à retrouver la forme de la surface, plutôt que de reconstruire une surface différente mais interpolant plus précisément les données.

Pour illustrer cette méthode, nous avons acquis plusieurs courbes géodésiques sur un cône de révolution à l'aide des rubans Morphosense. Malheureusement, les données

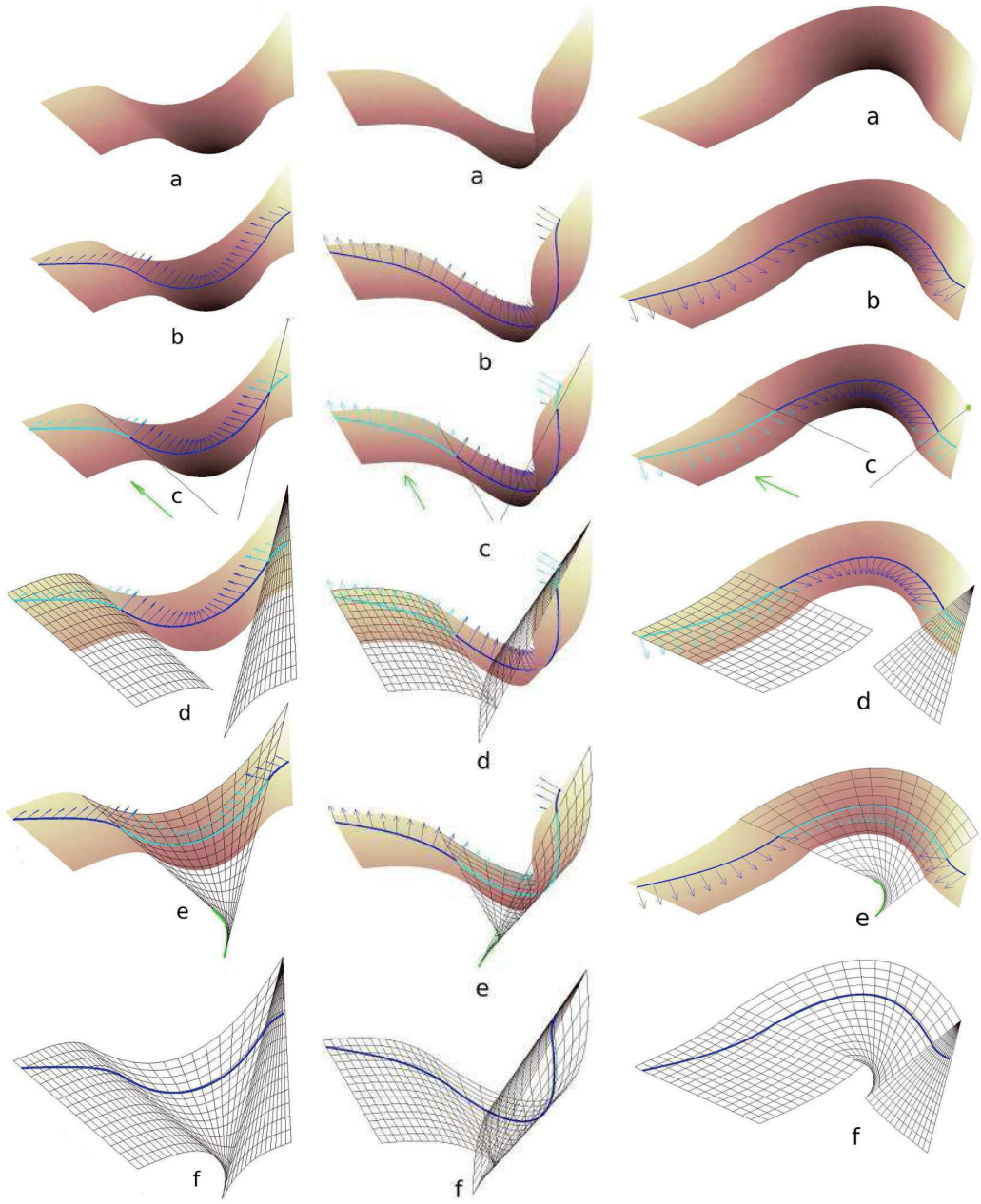


FIGURE 4.3 – *3 vues différentes des étapes (a-f) du processus de reconstruction.*

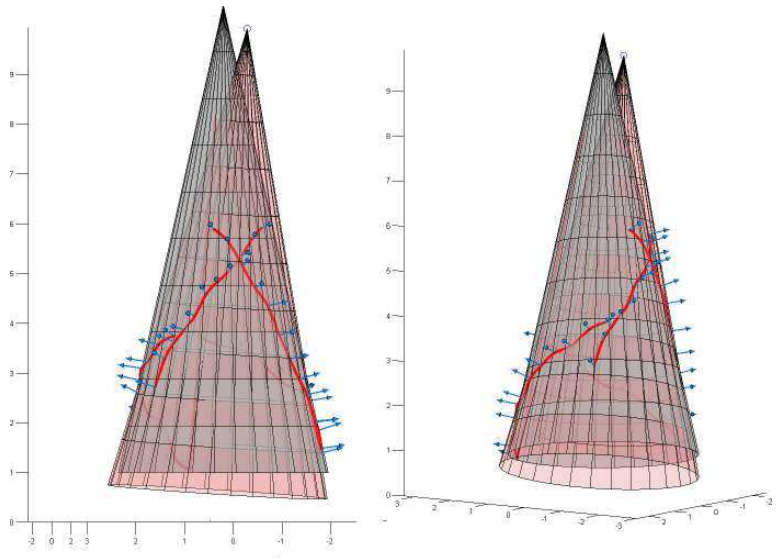

FIGURE 4.4 – *2 vues différentes d'un cône de révolution reconstruit à partir de courbes rubans bruitées.*

fournies par les capteurs sont encore trop bruitées à l'heure actuelle pour appliquer la méthode.

On présente en figure 4.4 l'analogue de cette expérience, où les courbes géodésiques ont été obtenues en introduisant un bruit (2%) sur des géodésiques analytiques. L'algorithme est alors capable d'identifier un cône de révolution proche du cône initial.

**• Application aux surfaces quasi-développable**

Des extensions de la méthode sont à l'étude pour le cas des surfaces quasi-développables. L'idée est d'exploiter la régression aux moindres carrés en autorisant ici aussi une erreur lors du fitting des points du ruban à une surface développable. Cela permet alors d'appliquer la méthode aux surfaces quasi-développables en les approximant par des segments de surfaces développables.

On peut encore raffiner le résultat en déformant la surface de Bézier générée pour chaque segment élémentaire de la surface reconstruite. En effet, la structure de Bézier permet, par élévation de degré, d'appliquer des déformations locales en fonction de la courbure de la surface sous-jacente : ces corrections permettent de rendre strictement positive ou négative la courbure de Gauss (nulle pour les surfaces développables) après localisation des points de la surface où cette correction semble nécessaire.

## Bibliographie du Chapitre


[DoC76] M. P. DoCarmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice Hall, 1976.

[Hos71] J. Hoschek. *LinienGeometrie.* Zürich : Bibliographisches Institut, 1971.

[HSB12] M. Huard, N. Sprynski, and L. Biard. Reconstruction de surfaces développables à partir de courbes géodésiques. In *Actes des journées du GTMG*, 2012.

[Pet04] Martin Peternell. Developable surface fitting to point clouds. *Computer Aided Geometric Design*, 21 :785–803, 2004.

[PW99] Helmut Pottmann and Johannes Wallner. Approximation algorithms for developable surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 16 :539–556, 1999.

[Str61] D. J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover Publications, Inc, 1961.

# Chapitre 5

# Surfaces quasi-développables délimitées par un réseau de courbes géodésiques


**5.1 Principe de l'interpolation géodésique . . . . . 78**
5.1.1 Contexte . . . . . 78
5.1.2 Interpolation géodésique . . . . . 79
5.1.3 Le cas $n > 4$ . . . . . 80
**5.2 Splitting . . . . . 80**
5.2.1 Direction des géodésiques manquantes pour une surface développable . . . . . 83
5.2.2 Le cas des surfaces coniques ou cylindriques . . . . . 84
5.2.3 Processus de reconstruction . . . . . 85
**5.3 Résultats . . . . . 90**


On considère dans ce chapitre la situation où l'on dispose d'un certain nombre d'acquisitions de rubans Morphosense sur une surface à reconstruire. L'acquisition fournit un réseau fermé de courbes rubans de la surface. Ainsi dans le cas général, la surface est segmentée en patches délimités par $n$ courbes rubans (voir figure 5.1).

Outre la souplesse apportée par cette structure d'acquisition, on prend également en compte le caractère géodésique des courbes acquises sur la surface. Plus précisément, on va chercher à interpoler les courbes de façon à ce qu'elles soient des courbes géodésiques de la surface interpolante. Dans le cas d'une surface quelconque, l'estimation des données manquantes est difficile. On fait ici l'hypothèse que la surface sous-jacente est quasi-développable, ce qui modélise bien les surfaces développables présentant une faible élasticité, et plus généralement de nombreuses surfaces dans le cadre des applications. Cette méthode a fait l'objet d'une publication [HSSB12].

## 5.1 Principe de l'interpolation géodésique

### 5.1.1 Contexte

Les courbes reconstruites segmentent la surface $\mathbf{s}$ supposée régulière en plusieurs patches à $n$ côtés délimités par une succession de segments $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, ..., n$. Chaque

FIGURE 5.1 – *Dispositif d'acquisition en réseau*

segment $\mathbf{r}_i(t), t \in [0,1]$ croise la courbe $\mathbf{r}_{i+1}(t)$ au sommet $\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{r}_i(1) = \mathbf{r}_{i+1}(0)$, avec $n+1 \equiv 1$. Les dérivées des courbes $\mathbf{r}_i(t)$ et $\mathbf{r}_{i+1}(t)$ au sommet $\mathbf{p}_{i+1}$ sont supposées linéairement indépendantes, pour que le plan tangent $\mathrm{T}_{i+1}$ de la surface $\mathbf{s}$ au point $\mathbf{p}_{i+1}$ soit bien défini. (cf Fig. 5.2).

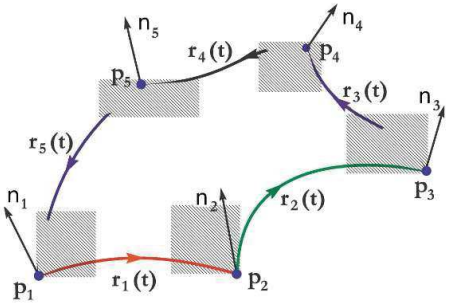


FIGURE 5.2 – *Patch délimité par 5 courbes admissibles.*

### 5.1.2 Interpolation géodésique

Les travaux précédents [FSB09b, FSB10] ont défini les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe spatiale fermée, régulière par morceaux, composée de segments $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, ..., n$, soit le bord d'un patch de surface $\mathbf{s}$ régulière, tel que chaque segment $\mathbf{r}_i(t)$ est une courbe géodésique de la surface.

Le repère de Serret-Frenet, la courbure et la torsion de chacune des courbes $\mathbf{r}_i(t)$ seront notés respectivement $(\mathbf{e}_i(t), \mathbf{n}_i(t), \mathbf{b}_i(t))$, $k_i(t)$ et $\tau_i(t)$. Pour une courbe admissible et la surface géodésique interpolante, la normale unitaire $\mathbf{n}$ au point $\mathbf{p}_i$ sera notée $\mathbf{n}(\mathbf{p}_i)$ ou $\mathbf{n}_{\mathbf{p}_i}$.

En utilisant [FSB09b], on énonce alors les conditions (C1–C3) pour que la courbe délimitante $\mathbf{r}(t)$ soit une courbe admissible à l'interpolation géodésique. Les conditions (C1) et (C3) sont des contraintes différentielles locales, et la condition (C2) est de nature globale (orientation globale des normales le long de la courbe

**(C1)** *Les normales principales* $\mathbf{n}_i$ *des segments* $\mathbf{r}_i$ *sont identiques (au signe près) à chaque sommet, et correspondent (au signe près) avec la normale unitaire à la surface* $\mathbf{n}(\mathbf{p}_i)$.

On introduit les valeurs utiles $\sigma_{iL}, \sigma_{iR} \in \{-1, +1\}$, définies par $\mathbf{n}(\mathbf{p}_i) = \sigma_{i-1,R}\, \mathbf{n}_{i-1}(1) = \sigma_{iL}\, \mathbf{n}_i(0)$ . On définit un *point d'inflexion* de la courbe $\mathbf{r}(t)$ comme étant soit un point d'inflexion de l'une de ses composantes $\mathbf{r}_i(t)$, soit un *retournement* des normales principales $\mathbf{n}_{i-1}$ et $\mathbf{n}_i$ au sommet $\mathbf{p}_i$, correspondant à $\sigma_{i-1,R}\, \sigma_{iL} < 0$.

**(C2)** *La courbe* $\mathbf{r}(t)$ *a un nombre pair de points d'inflexion.*

La dernière condition implique la courbure, la torsion et l'angle de croisement $A_i = (\mathbf{e}_{i-1}(1), \mathbf{e}_i(0))_{\mathbf{n}(\mathbf{p}_i)}$ à chaque sommet $\mathbf{p}_i$.

**(C3)** *Contrainte de croisement géodésique aux sommets* :

$$[\, \sigma_{i-1,R} k_{i-1}(1) - \sigma_{iL} k_i(0) \,] \cos A_i + [\, \tau_{i-1}(1) + \tau_i(0) \,] \sin A_i = 0\,. \tag{5.1}$$

Les quantités $\sigma_{i-1,R} k_{i-1}(1)$ et $\sigma_{iL} k_i(0)$ définissent les *courbures signées* des courbes $\mathbf{r}_{i-1}(t)$ et $\mathbf{r}_i(t)$ respectivement aux points $\mathbf{r}_{i-1}(1)$ et $\mathbf{r}_i(0)$.

L'interpolation géodésique dans le cas $n = 3$ d'une courbe $\mathbf{r}(t)$ satisfaisant les conditions (C1–C3), par un patch triangulaire est basée sur un schéma d'interpolation cubique $C^1$ [GC80], et sur l'utilisation de coordonnées barycentriques relatives au triangle défini par les sommets de la courbe $\mathbf{r}(t)$.

Le cas d'une courbe admissible à 4 côtés ($n = 4$) peut être traité directement par produit tensoriel [FSB09b].

### 5.1.3 Le cas $n > 4$

L'approche étudiée ici étend les méthodes existantes d'interpolation géodésique, qui n'étaient possibles qu'avec des patches à $n = 2, 3, 4$ côtés. Une telle étude est motivée par le fait qu'en pratique, la pose des rubans est délicate et ne permet pas en général de former en réseau de patches à $n \leq 4$ côtés (cf 5.1).

Elle résout le cas $n$ quelconque en estimant les données géodésiques manquantes qui permettent de se ramener aux cas connus.

## 5.2 Splitting

L'idée de cette approche est d'estimer les courbes géodésiques qui manquent pour que les patches du réseau de courbes aient $n \leq 3$ côtés (rendre le réseau triangulaire). Par exemple, la figure 5.3 montre un cas de patch à 5 côtés pour lequel on veut estimer les courbes géodésiques (rouges) manquantes pour connecter les sommets p1 et p4 ainsi que les sommets p2 et p4.

On commence par étendre le résultat du Lemme 1 de la section 1.1. Etant donnée une courbe de bord admissible et une surface $\mathbf{s}$ interpolant la courbe en tant que géodésique, on montre que la courbure et la torsion de toute géodésique de $\mathbf{s}$ passant par un sommet $\mathbf{p}$ de la courbe ne dépendent pas de la surface interpolante $\mathbf{s}$ mais seulement de la direction de la géodésique et de la courbe de bord admissible.

Alors, en étudiant le cas des surfaces développables, on montre qu'il est possible de déterminer les directions initiales et finales, dans les plans tangents, des géodésiques manquantes. On développe ensuite une méthode qui permet de déterminer la géodésique

manquante réelle dans le cas de surfaces coniques et cylindriques. Finalement, on décrit le processus de reconstruction global.

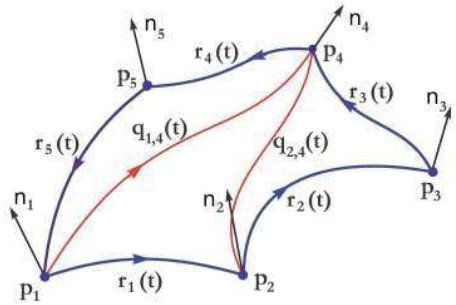


FIGURE 5.3 – *Un exemple de splitting pour un patch à 5 côtés.*

**• Courbure signée et torsion des géodésiques aux sommets**

Soient deux courbes géodésiques $\mathbf{r}_1(t)$ et $\mathbf{r}_2(t)$ sur une surface $\mathbf{s}$, qui se croisent au point $\mathbf{p} = \mathbf{r}_1(1) = \mathbf{r}_2(0)$, avec un angle orienté $A$ dans le sens de la normale à la surface $\mathbf{n}(\mathbf{p})$, la contrainte de croisement géodésique – condition (C3) –, peut être réécrite en fonction des courbures normales $k_{n,i}(t)$ des courbes $\mathbf{r}_i(t)$ comme suit

$$[\, k_{n,1}(\mathbf{p}) - k_{n,2}(\mathbf{p})\,] \cos A + [\, \tau_1(\mathbf{p}) + \tau_2(\mathbf{p})\,] \sin A = 0\,, \tag{5.2}$$

en se passant des symboles $\sigma_{i-1,R}$ et $\sigma_{i,L}$. Cela provient du fait que la courbure normale est signée (en fonction de la normale unitaire à la surface sous-jacente), contrairement à la courbure intrinsèque $k$. En suivant cette idée, on introduit la courbure signée pour une courbe spatiale admissible.

Considérons maintenant deux courbes spatiales $\mathbf{r}_1(t)$ et $\mathbf{r}_2(t)$ se croisant au point $\mathbf{p} = \mathbf{r}_1(1) = \mathbf{r}_2(0)$ et satisfaisant les conditions (C1) et (C3). Cela nous permet de définir une fonction normale $\mathbf{n}$ continue le long des deux courbes $\mathbf{r}_1(t)$ et $\mathbf{r}_2(t)$, telle que $\mathbf{n}(t) = \sigma_i(t)\,\mathbf{n}_i(t)$, $\sigma_i(t) = \pm 1$. On définit la *courbure signée* $\hat{k}_i(t)$ de chaque segment $\mathbf{r}_i(t)$ comme suit $\hat{k}_i(t) = \sigma_i(t)\,k_i(t)$. La courbure signée correspond à la courbure normale pour toute surface interpolante géodésique.

**Proposition 1.** *Avec les notations précédentes, soit* $A = (\mathbf{r}_1'(1), \mathbf{r}_2'(0))_{\mathbf{N_p}}$ *l'angle de croisement orienté entre ces courbes au point* $\mathbf{p}$*, au sens de la normale unitaire* $\mathbf{n_p} = \mathbf{n}(\mathbf{p})$*. On suppose que* $A \neq 0$ *modulo* $\pi$*, pour pouvoir définir le plan tangent* $\mathrm{T}_\mathbf{p} = \big(\mathbf{p}, \mathbf{r}_1'(1), \mathbf{r}_2'(0)\big)$*.*
*Alors, pour toute surface* $\mathbf{s}$ *interpolant ces deux courbes en tant que géodésiques de* $\mathbf{s}$*, et pour toute autre courbe géodésique* $\mathbf{r}(t)$ *sur* $\mathbf{s}$*, et passant par* $\mathbf{p} = \mathbf{r}(0)$ *la courbure signée et la torsion de* $\mathbf{r}(t)$ *au point* $\mathbf{p}$ *ne dépend que de la direction de la tangente à* $\mathbf{r}(t)$ *dans* $\mathrm{T}_\mathbf{p}$ *ainsi que de la courbure signée et de la torsion des courbes* $\mathbf{r}_i(t)$ *au point* $\mathbf{p}$*.*
*Par conséquent, l'existence d'un retournement au point* $\mathbf{p}$ *entre* $\mathbf{r}(t)$ *et* $\mathbf{r}_i(t)$*,* $i = 1, 2$*, est vérifiable en inspectant les signes de la courbure signée des trois géodésiques au point* $\mathbf{p}$*.*

**Preuve** : Pour toute surface interpolante $\mathbf{s}$, les conditions (C3) au point $\mathbf{p}$ pour les deux couples $\big(\mathbf{r}_1(t),\, \mathbf{r}(t)\big)$ et $\big(\mathbf{r}(t),\, \mathbf{r}_2(t)\big)$ de courbes géodésiques de $\mathbf{s}$, implique le système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} \cos A_1 & -\sin A_1 \\ \cos A_2 & \sin A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}(\mathbf{p}) \\ \tau(\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1(\mathbf{p}) \sin A_1 + \hat{k}_1(\mathbf{p}) \cos A_1 \\ -\tau_2(\mathbf{p}) \sin A_2 + \hat{k}_2(\mathbf{p}) \cos A_2 \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

avec les angles orientés $A_1 = (\mathbf{r}_1'(1), \mathbf{r}'(0))_{\mathbf{N_p}}$, $A_2 = (\mathbf{r}'(0), \mathbf{r}_2'(0))_{\mathbf{N_p}}$ les courbures signées (en fonction de la normale unitaires $\mathbf{n_p}$) $\hat{k}_1(\mathbf{p})$, $\hat{k}(\mathbf{p})$, $\hat{k}_2(\mathbf{p})$, et les torsions $\tau_1(\mathbf{p})$, $\tau(\mathbf{p})$, $\tau_2(\mathbf{p})$ des courbes $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ au point $\mathbf{p}$.
On obtient le résultat en remarquant que le déterminant de ce système, $\sin(A_1 + A_2) = \sin(A)$, est non nul. ∎

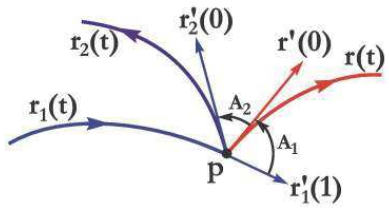


FIGURE 5.4 – *Trois géodésiques se croisant en un même point.*

Ainsi, étant donnée une courbe admissible $\mathbf{r}(t)$ composée de segments $\mathbf{r}_i(t)$ se croisant aux sommets $\mathbf{p}_i$ (cf Fig. 5.4), et pour toute surface $\mathbf{s}$ interpolant ces courbes en tant que géodésiques, la courbure signée et la torsion de toute courbe géodésique de $\mathbf{s}$ passant par un des sommets $\mathbf{p}_i$, est connue en $\mathbf{p}_i$, dans toute direction du plan tangent $\mathrm{T}_i$, indépendamment de la surface interpolante $\mathbf{s}$.

L'analyse de la courbure signée $\hat{k}(\mathbf{p})$ – identique à la courbure normale pour toute surface géodésiquement interpolante $\mathbf{s}$ –, en tant que fonction de la direction (angle $A_1$) dans le plan tangent $\mathrm{T}_\mathbf{p}$, permet de déterminer les directions principales au point $\mathbf{p}$ de $\mathbf{s}$. Ces directions principales sont liées aux courbes $\mathbf{r}_1(t)$ et $\mathbf{r}_2(t)$ et ne dépendent pas de la surface interpolante $\mathbf{s}$. Précisément, on a le résultat suivant.

**Proposition 2.** *Pour toute surface géodésiquement interpolante* $\mathbf{s}$*, les directions et courbures principales au point* $\mathbf{p}$*, sont déterminées comme suit.*

◇ *Si* $\hat{k}_1(\mathbf{p}) = \hat{k}_2(\mathbf{p})$ *et* $\tau_1(\mathbf{p}) = \tau_2(\mathbf{p}) = 0$*,*
$\mathbf{p}$ *est un point ombilic de* $\mathbf{s}$*, et* $\hat{k}(\mathbf{p})(A_1) = \hat{k}_1(\mathbf{p}) = \hat{k}_2(\mathbf{p}),\ \forall A_1$*.*

◇ *Si* $\hat{k}_1(\mathbf{p}) = \hat{k}_2(\mathbf{p})$ *et* $\tau_1(\mathbf{p}) = -\tau_2(\mathbf{p}) \neq 0$*,*
*les directions principales sont obtenues modulo* $\pi$ *pour* $A_1^{[1]} = \frac{A}{2}$ *et* $A_1^{[2]} = \frac{A}{2} + \pi/2$*, et les courbures principales sont alors*

$$\hat{k}(\mathbf{p})^{[1]} = \hat{k}_1(\mathbf{p}) - \tau_1(\mathbf{p}) \frac{\cos(A) + 1}{\sin(A)} \quad \textit{et} \quad \hat{k}(\mathbf{p})^{[2]} = \hat{k}_1(\mathbf{p}) - \tau_1(\mathbf{p}) \frac{\cos(A) - 1}{\sin(A)}.$$

◇ *Sinon, pour* $\hat{k}_1(\mathbf{p}) \neq \hat{k}_2(\mathbf{p})$*, les directions principales sont obtenues modulo* $\pi$ *pour*

$$A_1^{[1]} = \frac{A}{2} - \arctan(X - \sqrt{1 + X^2}) \quad \textit{et} \quad A_1^{[2]} = \frac{A}{2} - \arctan(X + \sqrt{1 + X^2}),$$

*avec* $X = \dfrac{\tau_1(\mathbf{p}) - \tau_2(\mathbf{p})}{\hat{k}_2(\mathbf{p}) - \hat{k}_1(\mathbf{p})}$*, et les courbures principales sont alors*

$$\hat{k}(\mathbf{p})^{[1]} = \hat{k}(\mathbf{p})\Big(A_1^{[1]}\Big) \quad \textit{et} \quad \hat{k}(\mathbf{p})^{[2]} = \hat{k}(\mathbf{p})\Big(A_1^{[2]}\Big).$$

*Elles n'admettent pas d'expression simple.*

**Preuve** : On remarque que par la condition (C3), l'égalité $\hat{k}_1(\mathbf{p}) = \hat{k}_2(\mathbf{p})$ implique nécessairement que $\tau_1(\mathbf{p}) + \tau_2(\mathbf{p}) = 0$. Alors, comme les courbures principales sont des extrema de la courbure normale, on dérive $\hat{k}(\mathbf{p})$ par rapport à l'angle $A_1$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A_1}\hat{k}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sin A}\Big[\big(\hat{k}_2(\mathbf{p}) - \hat{k}_1(\mathbf{p})\big)\cos(A - 2A_1) + \big(\tau_1(\mathbf{p}) - \tau_2(\mathbf{p})\big)\sin(A - 2A_1)\Big]$$

d'où l'on déduit le résultat en résolvant une équation quadratique de $a = \tan(A/2 - A_1)$ si $A/2 - A_1 \neq \pm\pi/2$. ∎

### 5.2.1 Direction des géodésiques manquantes pour une surface développable

Dans le cas des surfaces développables, on montre que les directions initiale et finale de la géodésique plus court chemin connectant deux sommets non adjacents $\mathbf{p}_j$ et $\mathbf{p}_k$ peut être déterminée dans les plans tangents $\mathrm{T}_j$ et $\mathrm{T}_k$.

Pour les surfaces $C^2$, la développabilité est caractérisée par une courbure Gaussienne nulle partout et de telles surfaces développables sont composées de portions de surfaces réglées [PW01]. Une surface $C^1$ est développable si en tout point il existe un voisinage pouvant être projeté de manière isométrique dans le plan euclidien (avec préservation des distances et des angles). On considère en particulier dans ces travaux les surfaces développables $G^1$ composées de surfaces cylindriques, de surfaces coniques et de développées tangentielles raccordées entre elles avec un contact $G^1$ le long de droites génératrices. De plus, on suppose qu'une telle surface est isométrique du plan euclidien par le biais d'une application $x$. Une courbe géodésique sur une telle surface développable est l'image d'une droite du plan par l'application $x^{-1}$.

Soit une courbe de bord admissible $\mathbf{r}(t)$ pour laquelle il existe une surface développable $G^1$ $\mathbf{s}$ interpolant cette courbe en tant que géodésique. Chaque segment $\mathbf{r}_i(t)$ de $\mathbf{r}(t)$ est donc isométrique à un segment $[\bar{\mathbf{p}}_i\bar{\mathbf{p}}_{i+1}]$ dans le plan. Ainsi, la courbe de bord à $n$ côtés $\mathbf{r}(t)$ peut être dépliée sur le plan en un polygône fermé à $n$ côtés $[\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2...\bar{\mathbf{p}}_n]$, $\bar{\mathbf{p}}_{n+1} = \bar{\mathbf{p}}_1$. Un exemple est donné sur la figure (5.5). Les longueurs $L_i$ des segments $\mathbf{r}_i(t)$ sont préservées ainsi que les angles de croisement $A_i$, et par conséquent les angles $a_i$ également.

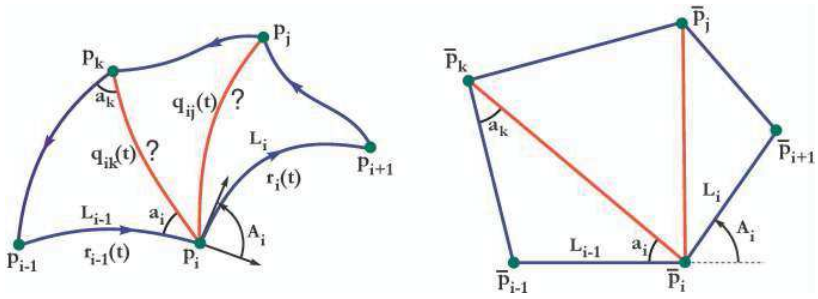


FIGURE 5.5 – *Courbe de bord admissible sur une surface développable dépliée sur le plan.*

Les géodésiques manquantes sur la surface $\mathbf{s}$ sont isométriques à des segments sur le plan, se croisant aux sommet associés $\bar{\mathbf{p}}_i$, permettant ainsi de calculer les directions initiale et finale puisque l'isométrie préserve les angles.

Sur l'exemple de la figure 5.5, la géodésique manquante $\mathbf{q}_{ik}(t)$ de $\mathbf{s}$, qui joint les points $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_k$ est isométrique au segment $[\bar{\mathbf{p}}_i\bar{\mathbf{p}}_k]$ du plan, d'où l'on déduit les angles $a_i$ et $a_k$ et ainsi les directions de la géodésique $\mathbf{q}_{ik}(t)$ dans les plans tangents aux points $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_k$.

### 5.2.2 Le cas des surfaces coniques ou cylindriques

Si la surface initiale est une surface réglée $C^2$, ou au moins localement au voisinage du point $\mathbf{p}$, une des courbures principales au point $\mathbf{p}$ doit être nulle – voir Proposition 2 –, et la géodésique dans la direction principale associée est localement une droite. Un point ombilic dégénère alors en un point "planaire", où les géodésiques sont des droites dans toutes les directions au point $\mathbf{p}$.

On suppose maintenant que la surface initiale est conique ou cylindrique. Soient deux segments $\mathbf{r}_{i-1}(t)$ et $\mathbf{r}_i(t)$, on détermine les directions principales dans les plans $\mathrm{T}_{i-1}$ et $\mathrm{T}_{i+1}$ associés à une courbure nulle (cf Fig. 5.6, à gauche). Ces directions sont associées avec les droites génératrices se croisant en un point réel $\mathbf{v}$ dans le cas d'une surface conique, ou en un point à l'infini $\mathbf{v}_\infty$ dans le cas d'une surface cylindrique. On note que la droite génératrice passant par le point $\mathbf{p}_i$ peut être déterminée de la même façon, mais pas les génératrices qui passent par les point intérieurs des courbes $\mathbf{r}_{i-1}(t)$ et $\mathbf{r}_i(t)$, puisque l'on a besoin de deux géodésiques se croisant afin de déterminer les directions principales. La surface conique ou cylindrique est alors définie comme l'ensemble des droites passant par $\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v}_\infty$ et par les points des courbes $\mathbf{r}_{i-1}(t)$ et $\mathbf{r}_i(t)$. Finalement, on a le résultat suivant.

**Proposition 3.** *Une surface conique ou cylindrique* $\mathbf{s}$ *de classe* $C^2$ *est entièrement déterminée par un triangle de courbes géodésiques quelconque, non dégénéré. Précisément, étant données trois courbes géodésiques formant un triangle curviligne sur* $\mathbf{s}$*, avec au plus un point planaire aux sommets du triangle, le processus décrit précédemment permet la reconstruction du patch de surface de* $\mathbf{s}$ *délimité par le triangle.*

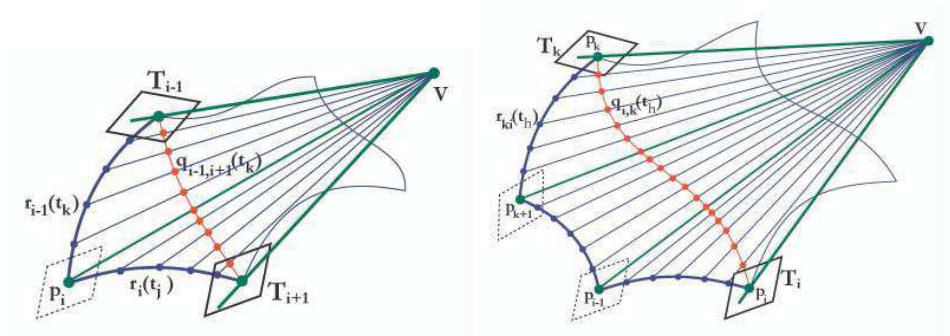


FIGURE 5.6 – *Construction de la surface conique interpolante à partir de droites génératrices aux sommets et d'une courbe de bord, puis approximation d'une géodésique par isométrie sur le plan, dans le cas d'un patch obtenu à* 3 *côtés (gauche) et* 4 *côtés (droite).*

La courbe géodésique manquante $\mathbf{q}_{i,k}(t)$ qui relie les sommets $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_k$ est alors déterminée par un processus de dépliement classique. Précisément, en notant $\mathbf{r}_{ki}(t)$ la concaténation des segments de courbes $\mathbf{r}_k(t)$, $\mathbf{r}_{k+1}(t)$,... $\mathbf{r}_{i-1}(t)$, reliant de manière continue le point $\mathbf{p}_k$ au point $\mathbf{p}_i$, on détermine dans un premier temps le sommet $\mathbf{v}$ de la surface conique (ou $\mathbf{v}_\infty$ de la surface cylindrique) par la proposition 3 (cf Fig 5.6, à droite). Alors, en considérant un échantillonnage $\big(\mathbf{r}_{ki}(t_h)\big)_h$ de la courbe $\mathbf{r}_{ki}(t)$, on opère successivement des rotations sur les triangles $\mathcal{T}_h = \big(\mathbf{r}_{ki}(t_h), \mathbf{v}, \mathbf{r}_{ki}(t_{h+1})\big)$ autour des droites génératrices $(\mathbf{r}_{ki}(t_h), \mathbf{v})$, de sorte que les triangles soient coplanaires. La géodésique manquante $\mathbf{q}_{i,k}(t)$ est dépliée par ce processus en une droite, de laquelle on déduit les points échantillonnés $\mathbf{q}_{i,k}(t_h)$ sur les génératrices $(\mathbf{r}_{ki}(t_h), \mathbf{v})$.

On note que le processus décrit ici nécessite uniquement que le patch de surface curviligne, délimité par les courbes $\mathbf{r}_{ki}(t)$ et $\mathbf{q}_{i,k}(t)$, soit entièrement contenu dans une surface conique ou cylindrique. Cependant, selon la Proposition 3, il faut également que les points $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_k$, ou au moins deux sommets de la courbe $\mathbf{r}_{ki}(t)$, ne soient pas des points planaires, pour pouvoir définir le sommet $\mathbf{v}$.

### 5.2.3 Processus de reconstruction

On considère maintenant une courbe de bord admissible à $n$ côtés $\mathbf{r}(t)$ définie comme précédemment, avec $n \geq 5$, acquise sur une surface $C^2$ quasi développable $\mathbf{s}_\epsilon$. La courbe $\mathbf{r}(t)$ est supposée *convexe* dans le sens où son polygône (quasi) déplié sur le plan (voir ci-dessous) est convexe dans le plan. Si la courbe $\mathbf{r}(t)$ est acquise sur une surface développable $G^1$ $\mathbf{s}_0$ isométrique au plan, de classe $C^2$ excepté le long des droites génératrices de jonction (cf section 5.2.1), on suppose que les sommets $\mathbf{p}_i$ n'appartiennent pas à ces droites. Avec les notations précédentes, la relation de Gauss-Bonnet globale [DoC76, FSB10]

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbf{r}_i} k_{g,i}(s)\,\mathrm{d}s \,+\, \iint_{\mathbf{s}_\epsilon} K\,\mathrm{d}\sigma \,+\, \sum_{i=1}^{n} A_i \,=\, 2\pi\,,$$

où $k_{g,i}(s)$ est la courbure géodésique de la courbe $\mathbf{r}_i$ et $s$ l'abscisse curviligne le long de $\mathbf{r}_i$, se simplifie comme suit

$$\iint_{\mathrm{R}} K\,\mathrm{d}\sigma \,+\, \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) \,=\, 2\pi\,,$$

où $\alpha_i$ sont les angles intérieurs du polygône. Finalement, avec la Definition 4, on déduit

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,=\, (n-2)\,\pi\,. \tag{5.4}$$

Cette relation classique pour un polygône à $n$ côtés dans le plan sera utile pour le dépliement de la courbe $\mathbf{r}(t)$. On expose maintenant les étapes principales du processus de reconstruction.

$\diamondsuit$ **Etape 1 : dépliement de la courbe admissible $\mathbf{r}(t)$.** –
Dans le cas d'une surface développable $G^1$ $\mathbf{s}_0$, la courbe $\mathbf{r}(t)$ est isométrique à un polygône à $n$ côtés du plan, qui est déterminé aisément par les angles intérieurs $\alpha_i$ et les longueurs $L_i$ des segments $\mathbf{r}_i(t)$.

Dans le cas d'une surface quasi développable $\mathbf{s}_\epsilon$,chaque segment de courbe géodésique $\mathbf{r}_i(t)$ se déplie en un segment de droite, mais le polygône planaire obtenu n'est pas fermé dans le plan. Le problème est de construire un polygône planaire fermé le plus proche possible du polygône curviligne de la surface quasi développable. On propose deux approches pour résoudre ce problème.

Conservation des angles :

La relation(5.4) montre que l'on peut utiliser des angles intérieurs identiques $\alpha_i$ pour le polygône planaire déplié. Le problème est alors de construire un polygône à $n$ côtés, $[\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2 ... \bar{\mathbf{p}}_n]$, $\bar{\mathbf{p}}_{n+1} = \bar{\mathbf{p}}_1$, avec les angles intérieurs $\alpha_i$ et des côtés de longueurs $L'_i$ proches des longueurs données $L_i$.

Il existe une solution analytique à ce problème. Sans perte de généralité, on peut supposer que le vecteur $\overrightarrow{\bar{\mathbf{p}}_n\bar{\mathbf{p}}_1}$ est orienté positivement par rapport à l'axe $Ox$, de sorte

que les points $\bar{\mathbf{p}}_i$ sont caractérisés par les $n$ inégalités suivantes

$$\bar{\mathbf{p}}_{i+1} = \bar{\mathbf{p}}_i + L'_i\,\mathbf{U}_i\,, \qquad i = 1, ..., n\,, \tag{5.5}$$

avec $\mathbf{U}_i = (\cos\tilde{\alpha}_i, \sin\tilde{\alpha}_i)^T$, $\tilde{\alpha}_1 = \pi - \alpha_1$, $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_{i-1} + \pi - \alpha_i$ pour $i \geq 2$. On pose $L'_i = L_i + \delta_i$ et en sommant les $n$ equations (5.5), on obtient $\sum_{i=1}^{n}(L_i + \delta_i)\,\mathbf{U}_i = \overrightarrow{0}$, d'où le système linéaire $\mathbf{U}\,\delta = \mathbf{V}$, avec

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, ..., \mathbf{U}_n]\,, \quad \delta = [\delta_1, ..., \delta_n]^T\,, \quad \mathbf{V} = -\sum_{i=1}^{n} L_i\,\mathbf{U}_i\,.$$

Pour obtenir les longueurs $L'_i$ proches des longueurs $L_i$, la construction revient alors à résoudre le problème de minimisation suivant avec des contraintes d'égalité

$$\underset{\mathbf{U}\,\delta = \mathbf{V}}{\text{Min}} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta_i}{L_i}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\mathbf{U_L}\,\mathbf{x} = \mathbf{V}}{\text{Min}} \quad \mathbf{x}^T\,\mathbf{I}\,\mathbf{x} \tag{5.6}$$

avec

$$\mathbf{U_L} = [L_1\mathbf{U}_1, ..., L_n\mathbf{U}_n]\,, \quad \mathbf{x} = [x_1 = \frac{\delta_1}{L_1}, ..., x_n = \frac{\delta_n}{L_n}]^T\,,$$

ce qui implique la résolution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2\,\mathbf{I} & \mathbf{U_L}^T \\ \mathbf{U_L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

(avec les coefficients de Lagrange $\lambda$) qui admet la solution explicite suivante

$$\mathbf{x} = \mathbf{U_L}^T\,(\mathbf{U_L}\,\mathbf{U_L}^T)^{-1}\,\mathbf{V}\,.$$

Conservation des longueurs :

En pratique, les longueurs étant fixées physiquement par la structure des rubans Morphosense, il semble plus logique de modifier légèrement les angles intérieurs lors du dépliement, ce qui est cohérent avec la nature géométrique des sommets associés sur une surface quasi développable. A priori, la première approche est suffisante puisque le processus global sera soumis à une passe d'optimisation à l'étape 8. On propose toutefois une seconde approche qui modifie les angles et conserve les longueurs. Plus cohérente avec notre problème, elle n'a cependant pas de solution analytique, contrairement à la première méthode.

On cherche donc des angles intérieurs $\tilde{\alpha_i} = \alpha_i + \delta_i$, $i = 0, .., N$ qui, associés aux longueurs $L_i$, forment un polygône fermé dans le plan. Avec les notations précédentes (voir fig. 5.5), les angles $A_i$ seront également modifiés par la relation $\tilde{A}_i = A_i + \Delta_i$ où $\Delta_i = -\sum_{k=0}^{i}\delta_k$. En supposant d'autre part, sans perte de généralité, que le point $\mathbf{P}_0$ est à l'origine, la fermeture du polygône s'écrit de la manière suivante en fonction des $\tilde{A}_i$

$$C_1 : \sum_{i=1}^{N} L_i \begin{bmatrix} \cos(\tilde{A}_i) \\ \sin(\tilde{A}_i) \end{bmatrix} = 0. \tag{5.8}$$

Il existe bien sûr de multiples solutions au problème de fermeture du polygône, mais l'on voudrait idéalement que les angles $\alpha_i$ soient modifiés le moins possible, autrement dit comme dans la méthode précédente que les $\delta_i$ minimisent l'énergie

$$E_1(\delta_0, .., \delta_N) = \sum_{i=0}^{N} \delta_i^2. \tag{5.9}$$

Ainsi, une première formulation du problème d'optimisation serait de minimiser l'énergie $E_1$ sur les variables $\delta_i$ sous la contrainte $C_1$. Toutefois, la présence de cosinus et de sinus ainsi que le changement des variables $\delta_i$ aux $\Delta_i$ au sein de la contrainte rendent le problème complexe.

On peut simplifier le problème en remarquant que

$$\begin{bmatrix} \cos(\tilde{A}_i) \\ \sin(\tilde{A}_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(A_i + \Delta_i) \\ \sin(A_i + \Delta_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(A_i) & -\sin(A_i) \\ \sin(A_i) & \cos(A_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\Delta_i) \\ \sin(\Delta_i) \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

On note alors

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos(A_i) & -\sin(A_i) \\ \sin(A_i) & \cos(A_i) \end{bmatrix}$$

la matrice de rotation par l'angle $A_i$. On peut alors réécrire la contrainte $C_1$ simplement en fonction du vecteur

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta_0) \\ \sin(\Delta_0) \\ ... \\ \cos(\Delta_N) \\ \sin(\Delta_N) \end{bmatrix}$$

de taille $2(N+1)$, des matrices $R_i$ et des longueurs $L_i$ :

$$C_1 : [L_0 R_0, ..., L_N R_N]\, \mathbf{X} = 0. \tag{5.11}$$

L'écriture de l'énergie $E_1$ en fonction de $\mathbf{X}$ est complexe, mais en faisant l'approximation $\sin(\Delta_i) \approx \Delta_i$ pour des petits angles, on remarque que

$$\sin(\Delta_i) - \sin(\Delta_{i-1}) \approx \Delta_i - \Delta_{i-1} = -\delta_i. \tag{5.12}$$

Ainsi, avec la convention $\Delta_{N+1} = -\sum_{k=0}^{N} \delta_k - \delta_0$, on considère l'énergie

$$E_2(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{N} (\sin(\Delta_{i+1}) - \sin(\Delta_i))^2. \tag{5.13}$$

Cette énergie se réécrit en termes du vecteur $X$ sous la forme quadratique $E_2(X) = \mathbf{X}^T H \mathbf{X}$, où H est la matrice

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

dans le cas où $N = 4$ (5 côtés). Dans le cas général, H est de taille $2(N+1) \times 2(N+1)$.

Le problème est alors la minimisation de l'énergie quadratique $E_2$ sous la contrainte linéaire $C_1$, auxquelles s'ajoutent $N+1$ contraintes quadratiques

$$EQ_i(\mathbf{X}) = \mathbf{X}[2i-1]^2 + \mathbf{X}[2i]^2 - 1,\ i = 0, .., N, \tag{5.15}$$

pour respecter la forme cosinus et sinus des composantes de $\mathbf{X}$.

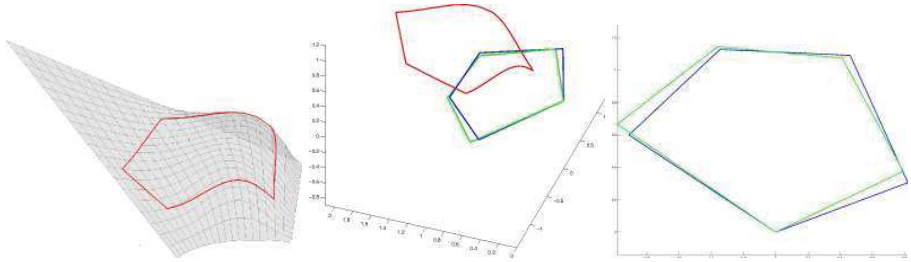

FIGURE 5.7 – *Comparaison des deux méthodes. En rouge, le polygone curviligne initial. En vert, le polygône issu de la méthode de conservation des angles. En bleu, le polygône issu de la méthode de conservation des longueurs.*

♢ **Etape 2 : choix d'une configuration de splitting**. –
Par expérimentation, un choix pertinent consiste à éviter – si possible – les points d'inflexion sur les courbes estimées et à maximiser le minimum des angles intérieurs de chaque triangle, pour obtenir des triangles aussi proches de triangles équilatéraux que possible (cf Fig. 5.5, à droite), ce qui revient à effectuer une triangulation de Delaunay [BY95].

Le processus de splitting peut être ajusté pour prendre en compte des portions de surfaces coniques ou cylindriques.

♢ **Etape 3 : données géométriques aux extrémités**. –

3.1 : on déduit des étapes 1 et 2 une approximation des directions initiale et finale $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{u}_k$ (vecteurs unitaires) des courbes géodésiques estimées $\mathbf{q}_{i,k}(t)$, et alors par la Proposition 1, on déduit les courbures signées $k(\mathbf{u}_i)$, $k(\mathbf{u}_k)$ et les torsions $\tau(\mathbf{u}_i)$, $\tau(\mathbf{u}_k)$ de ces géodésiques dans les directions trouvées aux extrémités. Dans le cas d'une surface développable, ce processus fournit les directions initiale et finale exactes des géodésiques manquantes.

3.2 : Par analyse de la courbure signée, on déduit ensuite l'existence d'un retournement aux sommets entre les segments de courbe $\mathbf{r}_i(t)$ et les géodésiques estimées $\mathbf{q}_{i,k}(t)$.

♢ **Etape 4 : condition (C2) pour chaque patch triangulaire**. –
L'analyse des retournements aux sommets, ainsi que des inflexions des segments $\mathbf{r}_i(t)$ permet de décider si un point d'inflexion est requis pour chaque courbe estimée. Le lemme suivant assure qu'une solution existe toujours.

**Lemme 4.** *Etant donnée une courbe de bord admissible à $n$ côtés $\mathbf{r}(t)$, on note $\mathbf{r}_{ik}(t)$ la portion de $\mathbf{r}(t)$ qui joint le point $\mathbf{p}_i$ au point $\mathbf{p}_k$, et $\mathbf{r}_{ki}(t)$ la portion qui joint le point $\mathbf{p}_k$ au point $\mathbf{p}_i$. Alors, pour toute géodésique estimée $\mathbf{q}_{i,k}(t)$ $(= \mathbf{q}_{k,i}(1-t))$ joignant les sommets $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_k$ telle que la courbe concaténée fermée $[\mathbf{q}_{i,k}(t), \mathbf{r}_{ki}(t)]$ est admissible, la courbe concaténée $[\mathbf{q}_{k,i}(t), \mathbf{r}_{ik}(t)]$ l'est également.*

**Preuve** : La preuve est évidente en étudiant les retournements et les inflexions le long des différentes courbes. ∎

♢ **Etape 5 : courbe estimée**. –
Chaque courbe géodésique estimée $\mathbf{q}_{i,k}(t)$ est approximée par une courbe de Bézier polynomiale $\mathbf{Q}(t) = \sum_{l=0}^{7} \mathbf{Q}_l\, B_l^7(t)$ de degré 7 si aucun point d'inflexion n'est requis, ou

par deux courbes de Bézier $\mathbf{Q}^{(\beta)}(t) = \sum_{l=0}^{6} \mathbf{Q}_l^{(\beta)} B_l^6(t)$, $(\beta = 1, 2)$, de degré 6 dans le cas où l'on doit introduire un point d'inflexion.

On note $\mathbf{n}_i$ la norme unitaire de la surface au point $\mathbf{p}_i$. Les points de contrôle $\mathbf{Q}_0, ..., \mathbf{Q}_3$ sont définis comme suit

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{Q}_0 & = \mathbf{p}_i\,, & \\
\mathbf{Q}_1 & = \mathbf{p}_i + \lambda_1\,\mathbf{u}_i, & \text{avec} \quad \lambda_1 > 0\,, \\
\mathbf{Q}_2 & = \mathbf{p}_i + \lambda_2\,\mathbf{u}_i + \mu_2\,\mathbf{n}_i\,, & \text{avec} \quad \text{sign}(\mu_2) \text{ défini selon l'étape 3.2}, \\
\mathbf{Q}_3 & = \mathbf{p}_i + \lambda_3\,\mathbf{u}_i + \mu_3\,\mathbf{n}_i + \nu_3\,\mathbf{w}_i, & \text{avec} \quad \mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_i,
\end{array}$$

sous les contraintes $k_Q(0) = k(\mathbf{u}_i)$ et $\tau_Q(0) = \tau(\mathbf{u}_i)$. Les points de contrôle $\mathbf{Q}_4, ..., \mathbf{Q}_7$ sont définis de manière similaire relativement au point $\mathbf{p}_k$.

Dans le cas où un point d'inflexion est requis, les points de contrôle $\mathbf{Q}_0^{(1)}, ..., \mathbf{Q}_3^{(1)}$ et $\mathbf{Q}_3^{(2)}, ..., \mathbf{Q}_6^{(2)}$ sont définis de la même façon relativement aux points $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_k$. Les points de contrôle restants $\mathbf{Q}_4^{(1)}$, $\mathbf{Q}_5^{(1)}$, $\mathbf{Q}_6^{(1)} = \mathbf{Q}_0^{(2)}$, $\mathbf{Q}_1^{(2)}$, $\mathbf{Q}_2^{(2)}$ sont définis de manière à générer une point d'inflexion avec retournement de normale en $\mathbf{Q}^{(1)}(1) = \mathbf{Q}^{(2)}(0)$, où la courbure et la torsion sont nulles.

La courbure et la torsion aux extrémités d'une courbe de Bézier peuvent être exprimées en fonction des coefficients des points de contrôle [Far02, FSB09a]. Par exemple, au point $\mathbf{Q}(0)$ on a $k_Q(0) = |\mu_2|/\lambda_1^2$ et $\tau_Q(0) = \nu_3/\lambda_1\mu_2$.

Finalement, on note qu'un point d'inflexion $\mathbf{p}$ sur une géodésique estimée génère nécessairement un *point hyperbolique ou parabolique* en $\mathbf{p}$ sur n'importe quelle surface reconstruite.

◇ **Etape 6 : initialisation**. –

Pour fixer les degrés de liberté restants sur la courbe de Bézier (pour fixer la courbure et la torsion on n'a que deux équations sur les coefficients), on détermine une approximation grossière de la géodésique manquante $\mathbf{q}_{i,k}(t)$ à l'aide d'une méthode similaire à celle décrite plus haut ('Le cas des surfaces coniques ou cylindriques'). Précisément, on détermine une surface cylindrique interpolant $\mathbf{r}_{ki}(t)$ (ou $\mathbf{r}_{ik}(t)$) avec un contact $G^1$ aux points $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_k$ (et donc avec la surface $\mathbf{s}_\epsilon$), comme suit.

On suppose que la courbe $\mathbf{r}_{ki}(t)$ est la plus courte des deux courbes $\mathbf{r}_{ki}(t)$ et $\mathbf{r}_{ik}(t)$, et en considérant la droite d'intersection $\Delta_{ik} = \mathrm{T}_i \cap \mathrm{T}_k$, l'ensemble des droites passant par les points de la courbe $\mathbf{r}_{ki}(t)$, de direction $\Delta_{ik}$, définit une surface cylindrique sur laquelle on calcule une initialisation de la géodésique estimée $\tilde{\mathbf{q}}_{ik}(t)$. On note que les directions initiale et finale de cette estimation ne correspondent pas en général avec les directions $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{u}_k$ estimées à l'étape 3.

La courbe de Bézier décrite ici est alors ajustée pour s'approcher de cette géodésique 'cylindrique' en minimisant la quantité $\sum_h |\mathbf{Q}(t_h) - \tilde{\mathbf{q}}_{ik}(t_h)|^2$ pour certains paramètres $t_h$.

◇ **Etape 7 : remplissage des patch triangulaires curvilignes**. –
Les étapes 1 à 6 résultent en un splitting de la courbe admissible initiale $\mathbf{r}(t)$ en un ensemble de triangles curvilignes admissibles, chacun d'entre eux composés d'une ou deux courbes estimées additionnelles. Chaque triangle admissible est alors interpolé par un patch de surface triangulaire, produisant une surface interpolant $\mathbf{r}(t)$ de manière géodésique. Chaque courbe estimée est une géodésique de la surface reconstruite, qui est donc globalement $G^1$.

◇ **Etape 8 : optimisation**. –

La surface $G^1$ triangulaire par morceaux construite à travers les étapes 1 à 7 est alors optimisée en minimisant la courbure gaussienne de manière à satisfaire la quasi-développabilité de la surface initiale $\mathbf{s}_\epsilon$.

Trois familles de degrés de liberté seront paramètres de l'optimisation :
- les directions initiale et finale $\mathbf{u}_i$ and $\mathbf{u}_k$,
- les coefficients restants qui définissent les points de contrôle des courbes de Bézier,
- les degrés fournis par le schéma cubique de remplissage des triangles curvilignes.

## 5.3 Résultats

Actuellement, les rubans Morphosense ne permettent pas de valider le processus décrit ici (une nouvelle génération est en développement). De plus, les problèmes de recalage sont en cours d'étude pour obtenir une véritable courbe de bord admissible (à partir de données bruitées).

Par conséquent, la méthode présentée est validée à travers des simulations numériques sur des surfaces analytiques. Le besoin de courbes de bord admissibles requiert le calcul de courbes géodésiques analytiques permettant de connaître exactement leur propriétés différentielles aux extrémités, pour satisfaires les conditions (C1–C3). Pour ces raisons, nous considérerons des exemples de surfaces développables $G^1$, et un paraboloïde (quasi développable).

Sur chaque exemple, la courbe de bord composée de $n$ segments (correspondant aux rubans) est représentée par le polygone curviligne bleu parcourant la surface. Les courbes rouges représentent les géodésiques calculées entre les sommets.

Les erreurs numériques des différents exemples sont présentées à la fin de la section.

♢ **Exemple 1** – Cône circulaire.
Dans le cas du cône, on vérifie que la méthode fonctionne avec une excellente précision sur cette surface développable simple – voir Fig. 5.8. L'estimation initiale des courbes géodésiques manquantes est très proche des véritables géodésiques de la surface, et l'optimisation agit essentiellement comme processus de lissage sans induire de corrections significatives des géodésiques estimées.

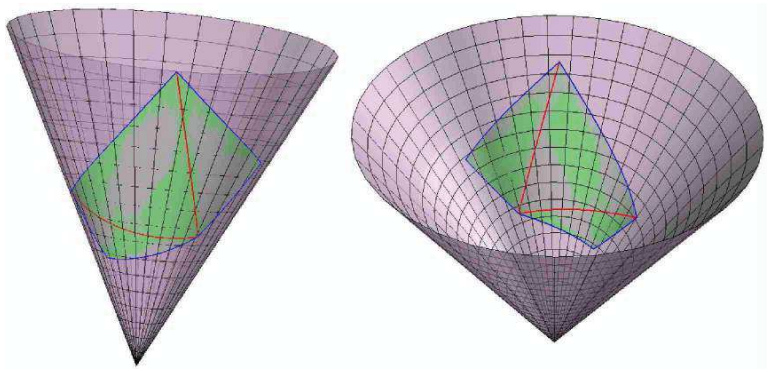

FIGURE 5.8 – *Un patch à 5 côtés sur une surface conique circulaire.*

♢ **Exemple 2** – paraboloïde.
Le cas du paraboloïde nous permet de valider notre approche sur une surface non développable. L'heuristique calcule une courbe qui s'approche de la géodésique réelle lors de l'optimisation – voir Fig. 5.9.

♢ **Exemple 3** – Surface développable $G^1$.
La surface développable $G^1$ suivante a été construite pour nous permettre de tester la méthode sur une surface comprenant des retournements de normales le long de certaines

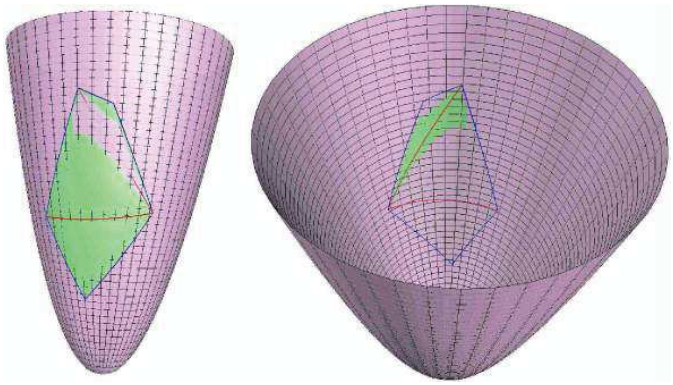

FIGURE 5.9 – *Cas d'un paraboloïde.*

géodésiques – voir Fig. 5.12. L'initialisation est dans ce cas plus imprécise, mais on observe que l'optimisation introduit un retournement le long des géodésiques estimées, très proche de leur localisation réelle sur la surface sous-jacente – voir Figs. 5.10 & 5.11.

Sur la figure 5.12, la ligne noire représente le contact $G^1$ entre deux portions de surfaces développables élémentaires. Chaque courbe géodésique qui traverse cette droite subit nécessairement un retournement de normale. Les normales principales sont représentées sur chaque courbe géodésique (au milieu et à droite). On observe que le nombre de retournements de normales est pair le long de la courbe admissible initiale à 5 côtés, et le long de chaque triangle curviligne (condition (C2)).

**• Erreurs numériques**

Le tableau 5.1 présente les erreurs radiales maximales des différents patches reconstruits. Ces erreurs radiales sont calculées sur les surfaces de révolution des exemples simplement comme la différence absolue du rayon de la surface reconstruite (par rapport à l'axe de révolution) et celui de la surface analytique. On note que l'utilisation de polynômes cubiques lors du processus de remplissage de Coons ne permet pas de suivre exactement les cônes et les cylindres circulaires.

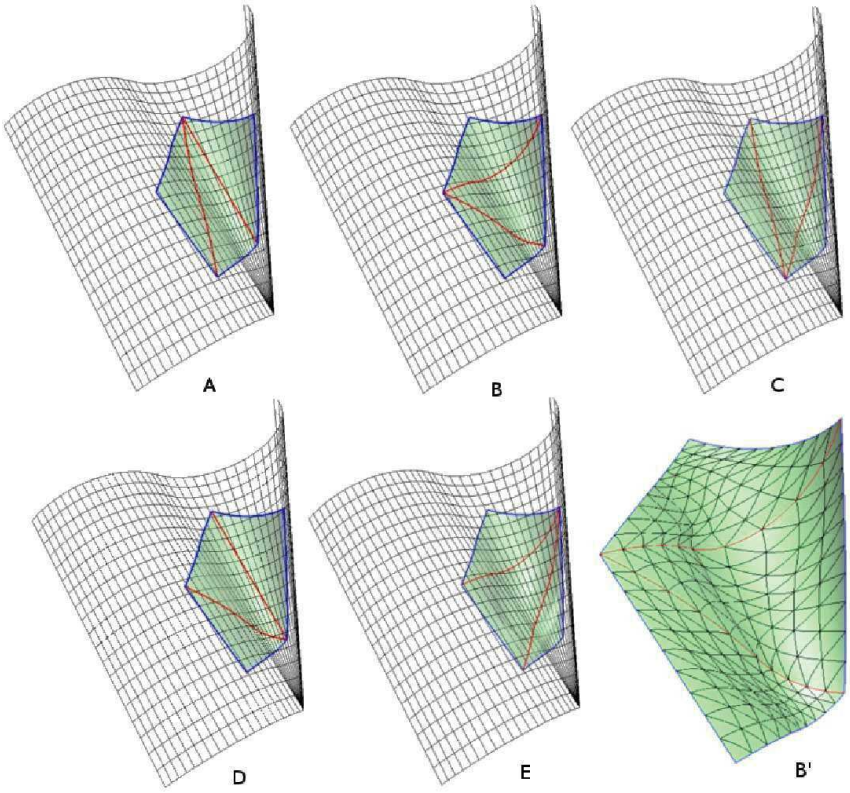


FIGURE 5.10 – *Cinq patches de surface reconstruits à partir du même polygone curviligne initial sur une surface développable $G^1$ non convexe.*

| | Errors (%) | | |
|---|---|---|---|
| | Cône | Paraboloïde | Surface développable $G^1$ |
| Thin Plate Spline Energy | | | |
| Configuration A | 6,79 | 1,87 | 5,14 |
| Configuration B | 1,66 | 4,39 | 8,23 |
| Configuration C | 1,8 | 1,57 | 6,74 |
| Configuration D | 6,17 | 3,15 | 4,58 |
| Configuration E | 2,52 | 2,62 | 6,12 |
| | | | |
| Gaussian Curvature | | | |
| Configuration A | 3,32 | 2,33 | 2,49 |
| Configuration B | 0,45 | 3,19 | 4,48 |
| Configuration C | 2,43 | 1,52 | 2,93 |
| Configuration D | 0,91 | 3,15 | 3,87 |
| Configuration E | 0,36 | 2,62 | 4,27 |

TABLE 5.1 – *Erreurs radiales maximales entre les surfaces analytiques et les patches reconstruits.*

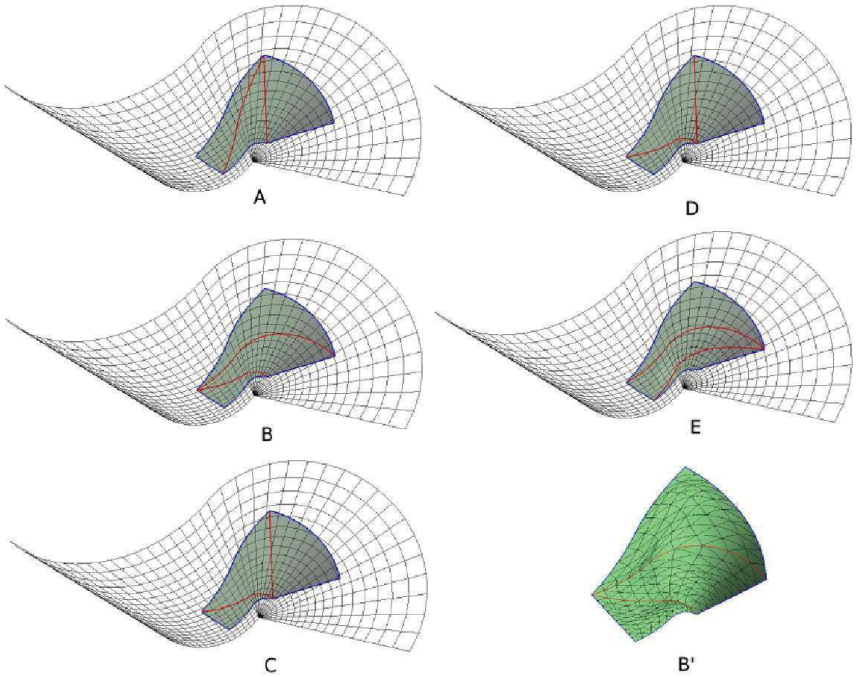


FIGURE 5.11 – *Une vue différente du cas de la Figure 5.10.*

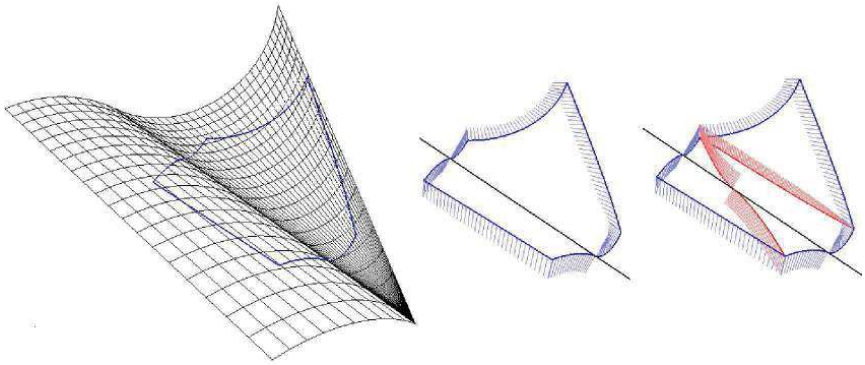

FIGURE 5.12 – *Retournement de normales*

## Bibliographie du Chapitre


[BY95] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec. *A $C^1$ triangular interpolation patch for computer–aided geometric design*. Ediscience international, 1995.

[DoC76] M. P. DoCarmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

[Far02] G. Farin. *Curves and Surfaces for CAGD (5th Edition)*. Academic Press, 2002.

[FSB09a] Rida Farouki, Nicolas Szafran, and Luc Biard. Construction of bézier surface patches with bézier curves as geodesic boundaries. *Computer Aided Design*, 41 :772–781, 2009.

[FSB09b] Rida Farouki, Nicolas Szafran, and Luc Biard. Existence conditions for coons patches interpolating geodesic boundary curves. *Computer Aided Geometric Design*, 26 :599–614, 2009.

[FSB10] Rida Farouki, Nicolas Szafran, and Luc Biard. Construction and smoothing of triangular coons patches with geodesic boundary curves. *Computer Aided Geometric Design*, 27 :301–312, 2010.

[GC80] J. A Gregory and P. Charrot. A $c^1$ triangular interpolation patch for computer–aided geometric design. *Computer Graphics and Image Processing*, 13 :80–87, 1980.

[HSSB12] Mathieu Huard, Nathalie Sprynski, Nicolas Szafran, and Luc Biard. Reconstruction of quasi developable surfaces from ribbon curves. *Numerical Algorithms*, 63 :483–506, 2012.

[PW01] H. Pottmann and J. Wallner. *Computational Line Geometry*. Springer Verlag, 2001.

# Chapitre 6

# Surfaces délimitées par des géodésiques planaires


**6.1 Fermeture et stratégie de reconstruction . . . . . 96**
6.1.1 Conditions de croisement pour des géodésiques planaires . . . 96
6.1.2 Caractérisation d'un contour géodésique planaire . . . . . 96
6.1.3 Stratégie de reconstruction illustrée sur un exemple . . . . . 97
**6.2 Mise à plat et relèvement . . . . . 97**
6.2.1 Mise à plat . . . . . 99
6.2.2 Relèvement . . . . . 101
6.2.3 Construction de séquences 2D admissibles pour le relèvement 102
6.2.4 Courbe $G^2$-orthogonale à une séquence de droites périodique 105
**6.3 Identification des contours admissibles dans le cas de géodésiques planaires . . . . . 106**
**6.4 Résultats . . . . . 106**


Ce chapitre a pour objectif d'apporter une solution au problème de la fermeture d'un contour composé de $n$ géodésiques pour certaines configurations de surfaces, afin de pouvoir appliquer la méthode décrite dans le chapitre 5. En effet, dans le cas général la fermeture d'un tel contour reste inextricable du fait des conditions de croisement géodésique. On remarque cependant que si ce contour est composé de géodésiques planaires, la torsion s'annule de sorte que les conditions de croisement géodésique se simplifient grandement.

Nous considérons une stratégie d'acquisition et de reconstruction basée sur les points suivants :

1. recherche et acquisition d'un contour composé de géodésiques quasi-planaires,
2. reconstruction d'un contour géodésique planaire (admissible pour l'interpolation géodésique) approximant le contour acquis,
3. reconstruction de la surface par interpolation géodésique suivant la méthode du chapitre 5.

Le deuxième point de cette approche est cohérent avec le caractère bruité des données fournies par les capteurs, ainsi que les incertitudes numériques liées à la reconstruction des courbes rubans. La fermeture du contour géodésique planaire compatible avec les conditions de croisement géodésique nécessite alors une bonne compréhension des surfaces délimitées par de tels contours.

Ainsi, dans un premier temps on décrit la stratégie générale d'acquisition et de reconstruction de tels contours (lorsque c'est possible) basée sur une double approche d'approximation et d'interpolation. On étudie ensuite les configurations de surfaces régulières orientées délimitées par des géodésiques planaires, afin d'en déduire des algorithmes pour la reconstruction pratique. On présente enfin plusieurs résultats de reconstruction.

Cette approche a été soumise pour publication [HSSB13].

## 6.1 Fermeture et stratégie de reconstruction

On identifie dans cette section les contours fermés composés de courbes géodésiques planaires, par le biais d'un processus de mise à plat des différents plans osculateurs contenant ces courbes. On en déduit ensuite un algorithme pratique d'acquisition et de reconstruction de surfaces basé sur cette approche, permettant d'obtenir un contour compatible par approximation.

### 6.1.1 Conditions de croisement pour des géodésiques planaires

Le cas général d'une surface délimitée par des courbes géodésiques a été traité dans le chapitre 5. Dans la section 5.1.2, on a énoncé les contraintes (C1), (C2) et (C3) vérifiées par les courbes du contour fermé délimitant la surface. Ces conditions sont par conséquent vérifiées également dans le cas présent. Plus précisément, les conditions (C1) et (C2) sont identiques, mais on peut simplifier la condition (C3) comme suit :

(C3) *Condition de croisement géodésiques de le cas de géodésiques planaires.*

$$[\,\sigma_{i-1,R}k_{i-1}(1) - \sigma_{iL}k_i(0)\,]\cos A_i = 0\,. \tag{6.1}$$

En effet, la torsion de courbes planaires étant nulles, seule la courbure intervient dans ce cas. On remarque qu'il existe deux types de configurations possibles qui vérifient la condition (C3). La première configuration possible correspond à des courbes se croisant perpendiculairement sur la surface (cas où $\cos(A_i) = 0$). En pratique, c'est le cas le plus fréquememnt exploité puisqu'il n'implique pas de conditions différentielles sur les courbes et la surface considérée. La seconde configuration implique que le croisement se fait en un point "ombilic". Il s'agit du cas particulier de point elliptique pour lequel les courbures principales sont identiques, égales à la courbure normale de n'importe quelle courbe géodésique passant par ce point. Cette configuration est moins fréquente en pratique.

### 6.1.2 Caractérisation d'un contour géodésique planaire

On énonce ici le résultat qui permet d'appliquer l'algorithme de reconstruction dans le cas de géodésiques planaires.

*Soit une portion de surface fermée, délimitée par $n$ géodésiques planaires (Figure 6.1, à gauche). La mise à plat de son contour autour des droites normales aux sommets (Figure 6.1, au milieu) produit une courbee planaire $G^2$ (à l'exception de quelques points $G^1$) traversant orthogonalement la séquence des droites normales mises à plat, et admettant un nombre pair de retournements de sa normale principale par morceaux (Figure 6.1, à droite). Inversement, toute courbe planaire ainsi définie, croisant orthogonalement une séquence de droites admissibles correspond au contour fermé d'une portion de surface délimitée par $n$ géodésiques planaires.*

Ce résultat nécessite d'introduire plusieurs notions techniques détaillées dans la section 6.2, et sera explicité dans la section 6.3.

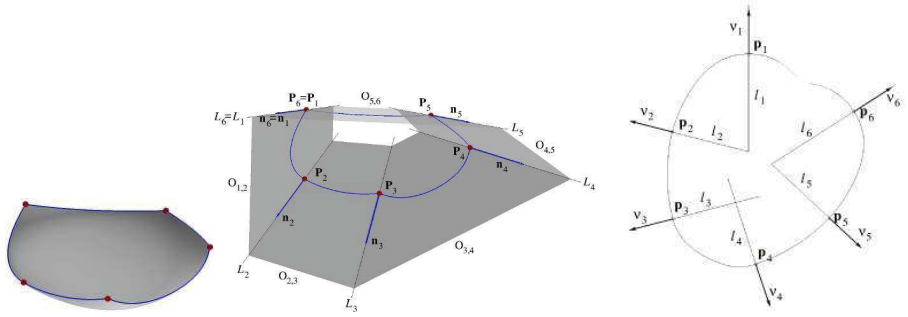


FIGURE 6.1 – *Mise à plat du contour à $n$ côtés d'une portion de surface fermée pour laquelle les côtés sont des géodésiques planaires.*

### 6.1.3 Stratégie de reconstruction illustrée sur un exemple

L'exemple suivant détaille le processus de reconstruction à l'aide du ruban Morphosense s'appuyant sur la stratégie décrite dans les sections précédentes. Il s'agit de reconstruire un modèle 3D de chaise [coc] avec des géodésiques planaires (ou presque), à partir desquelles ont peut appliquer notre algorithme. L'objet étant uniquement disponible sous forme de modèle 3D, l'acquisition par le ruban Morphosense est remplacée par un calcul numérique des courbes géodésiques sur le modèle. Les géodésiques ainsi acquises sont de la même forme que celles que l'on obtient à l'issue de l'étape d'acquisition par le ruban, bien qu'elles soient plus précises puisqu'il n'y a pas de bruit comme dans le cas de données fournies par les capteurs réels.

Précisément, les étapes du processus de reconstruction sont illustrées sur la figure 6.2, que nous commentons ci-dessous.

Commentaires de la figure 6.2 :

(a) Modèle 3D de la chaise (j),

(b) Acquisition de géodésiques quasi-planaires sur la chaise,

(c,d) Reconstruction (discrète) de trois géodésiques planaires projetées dans un plan aux moindres carrés. Cette projection permet de définir les droites d'intersection $L_1$, $L_2$, $L_3$,

(e) Mise à plat des reconstructions obtenues en (d),

(f) Construction d'une courbe $G^2$, orthogonale aux droites $L_i$, correspondant aux points obtenues en (e),

(g) Relèvement de la courbe reconstruite en (f),

(h,i) Deux vues de la surface reconstruite interpolant les courbes de bord en tant que géodésiques, superposées au modèle initial,

(k,l) Une reconstruction plus précise s'appuyant sur une courbe géodésique également axe de symétrie de l'objet.

## 6.2 Mise à plat et relèvement

On considère un contour admissible pour l'interpolation géodésique $\mathbf{r}(t)$ (ie un contour satisfaisant les contraintes (C1)-(C3)) composé de $m$ courbes planaires, dont les plans

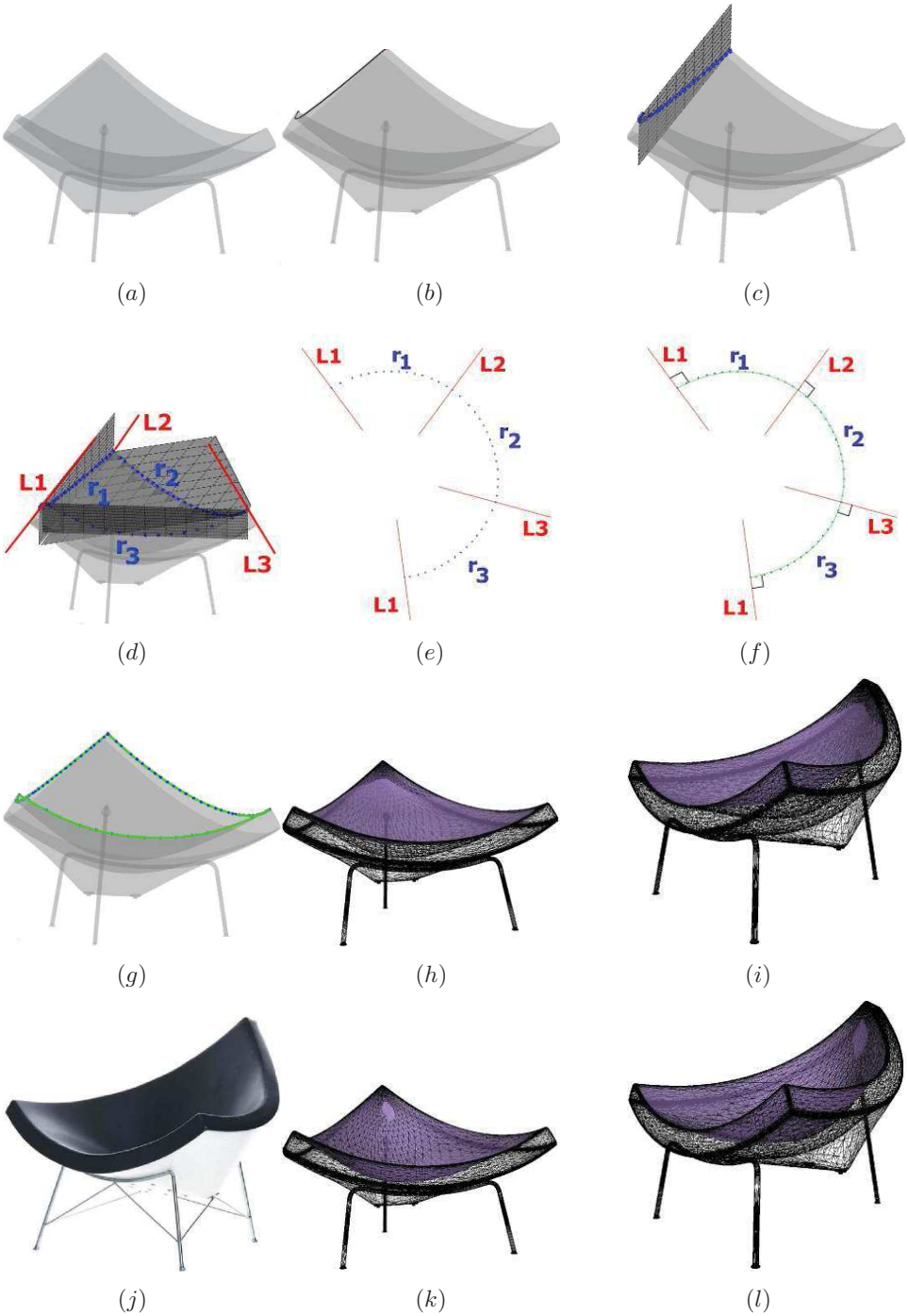


FIGURE 6.2 – *Etapes du processus de reconstruction*

osculateurs adjacents s'intersectent selon $m$ droites de l'espace $L_i$. En faisant les rotations appropriées autour de ces droites, les plans osculateurs peuvent être mis à plat de façon à les rendre tous coplanaires. A travers ce procédé, les $m$ droites $L_i$ sont mises à plat en $m+1$ droites $l_i$ de ce plan, formant une *séquence périodique* de droites dans le sens où il existe un procédé de relèvement inverse tel que la droite $l_{m+1}$ soit confondue avec $l_1$ – voir figure 6.3.

De ce point de vue, les droites de l'espace $L_i$ forment une séquence périodique de $m+1$ droites avec $L_{m+1} = L_1$ et la propriété que deux droites successives sont coplanaires.

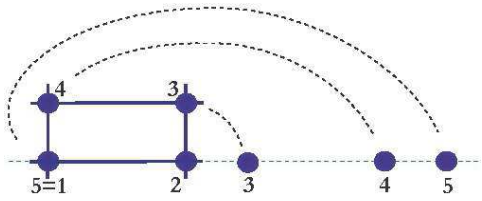


FIGURE 6.3 – *Séquence périodique de droites*

Inversement, pour un ensemble de $m+1$ droites du plan, on peut se demander si ces droites forment une séquence périodique. La caractérisation de tels ensembles de droites est un problème complexe qui dépasse le cadre de nos travaux.

L'intérêt de cette approche est le suivant : tout contour admissible $\mathbf{r}(t)$ sur les surfaces que nous considérons peut être mis à plat par ce procédé en une courbe planaire $G^2$ qui intersecte orthogonalement la séquence périodique de droites dépliées sur la plan. Inversement, toute courbes planaire $G^2$ orthogonale à une séquence périodique de droites du plan caractérise un contour admissible.

Afin d'être décrit précisément, ce procédé nécessite l'introduction de notations et de concepts plus rigoureux.

### 6.2.1 Mise à plat

Le procédé de mise à plat décrit dans cette section est naturel, mais sa description peut paraître austère en raison des nombreuses notations introduites.

Séquence périodique de repères de l'espace. – Un repère de l'espace $(\mathbf{P}, \mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{n})$ est un quadruplet composé d'un points $\mathbf{P}$ de l'espace affine associé à trois vecteurs unitaires $\mathbf{e}^0$, $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{n}$ tels que $\mathbf{e}^0 \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{e}^1 \perp \mathbf{n}$, et $\mathbf{e}^0 \neq \pm\mathbf{e}^1$, définissant ainsi une droite $L$ passant par le point $\mathbf{P}$ et dirigée par le vecteur $\mathbf{n}$, et l'angle $A = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^0)_{\mathbf{n}} \neq 0 \pmod{\pi}$.

Une *$m$-séquence périodique* de repères de l'espace ($m \geq 2$, voir figure 6.4) est une suite de repères $(\mathbf{P}_i, \mathbf{e}_i^0, \mathbf{e}_i^1, \mathbf{n}_i)$, $i = 1, ..., m+1$, telle que :

i) $(\mathbf{P}_{m+1}, \mathbf{e}_{m+1}^0, \mathbf{e}_{m+1}^1, \mathbf{n}_{m+1}) = (\mathbf{P}_1, \mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_1^1, \mathbf{n}_1)$,

ii) tous les autres points sont distincts : $\mathbf{P}_j \neq \mathbf{P}_k$ , $1 \leq j < k \leq m$,

iii) $\mathbf{n}_i \times \mathbf{e}_i^0 = \mathbf{n}_{i+1} \times \mathbf{e}_{i+1}^1$, pour $i = 1, ..., m$,

iv) les deux plans affines $(\mathbf{P}_i, \mathbf{e}_i^0, \mathbf{n}_i)$ et $(\mathbf{P}_{i+1}, \mathbf{e}_{i+1}^1, \mathbf{n}_{i+1})$ sont identiques pour $i = 1, ..., m$.

Ce plan commun, noté $\mathrm{O}_i$, de normale unitaire $\mathbf{b}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{e}_i^0 = \mathbf{n}_{i+1} \times \mathbf{e}_{i+1}^1$, contient les droites $L_i$ et $L_{i+1}$ qui sont donc coplanaires. On remarque que $L_i$ et $L_{i+1}$ sont identiques si et seulement si $\mathbf{P}_{i+1} \in L_i$ et $\mathbf{n}_{i+1} = \pm\mathbf{n}_i$ — voir figure 6.5, et que deux plans adjacents $\mathrm{O}_{i-1}$ et $\mathrm{O}_i$ sont distincts puisque les angles $A_i = (\mathbf{e}_i^1, \mathbf{e}_i^0)_{\mathbf{n}_i}$ sont supposés non nuls modulo $\pi$.

Le plan $\mathrm{O}_i$ (noté aussi $\mathrm{O}_{i,i+1}$ par souci de clarité dans la description des processus de mise à plat et de relèvement) correspond au plan osculateur de la $i$-ème courbes

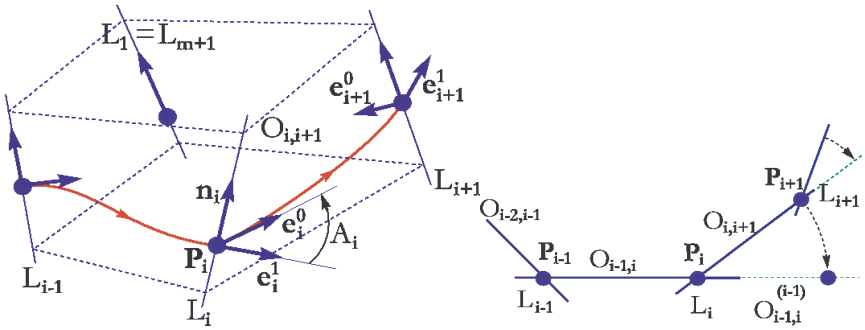


FIGURE 6.4 – *Mise à plat des plans* $(\mathrm{O}_{i,i+1})_{i=1,\ldots,m}$.

géodésique planaire du contour, joignant $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_{i+1}$, avec les vecteurs tangents unitaires respectifs $\mathbf{e}_i^0$ et $\mathbf{e}_{i+1}^1$.

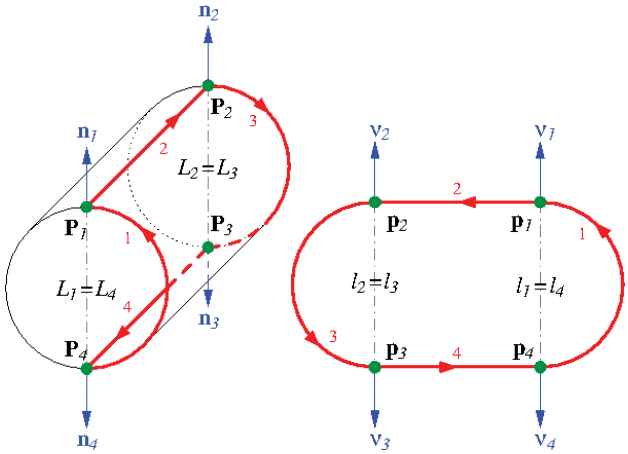


FIGURE 6.5 – *Une configuration avec des lignes adjacentes identiques* $L_2 = L_3$ *et* $L_4 = L_1$.

<u>Processus de mise à plat.</u> – Etant donnée une séquence $m$-périodique de repères de l'espace telle que définie précédemment, on associe chaque droite $L_i$ avec la rotation affine intrinsèque $\mathcal{R}_i$ autour de cette droite orientée $L_i$ et d'angle $(\mathbf{e}_i^0, \mathbf{e}_i^1)_{\mathbf{n}_i} = -A_i$, tel que $\mathcal{R}_i(\mathbf{e}_i^0) = \mathbf{e}_i^1$ et $\mathcal{R}_i(\mathrm{O}_{i,i+1}) \subset \mathrm{O}_{i-1,i}$ — voir figure 6.4.

Le processus de mise à plat consiste alors à appliquer successivement les rotations $\mathcal{R}_i$ aux plans $\mathrm{O}_{i,i+1}$, pour $i = m, m-1, \ldots, 2$, de la façon suivante.

*Etape d'initialisation :*

$\mathrm{O}_{m,m+1}^{(m)} := \mathrm{O}_{m,m+1}$

*Pour* $i = m$ *décroissant jusqu'à* $i = 2$ *:*

$\mathrm{O}_{i-1,i}^{(i-1)} := \mathrm{O}_{i-1,i} \cup \mathcal{R}_i\big(\mathrm{O}_{i,i+1}^{(i)}\big)$

*Résultat :* le plan $\mathrm{O}_{1,2}^{(1)} = \mathrm{O}_{1,2}$ contient une image isométrique $\hat{X}$ de chaque élément géométrique $X$ (courbe, droite, point, vecteur...) de $\cup_{i=1}^m \mathrm{O}_{i,i+1}$.

En particulier, on obtient une séquence dépliée de droites coplanaires $\hat{L}_i$ dans le plan $\mathrm{O}_{1,2}$.

Formellement, ce processus de mise à plat $\mathcal{U}$ sera noté comme suit :

$$\mathcal{U} : \cup_{i=1}^{m} \mathrm{O}_{i,i+1} \to \Pi := \mathrm{O}_{1,2}, \quad X \mapsto \mathcal{U}(X) := \hat{X}.$$

On note que les deux droites identiques $L_1 = L_{m+1}$ [resp. les deux points identiques $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{m+1}$] sont dépliés en deux droites distinctes $\hat{L}_1$ t $\hat{L}_{m+1}$ [resp. deux points distincts $\hat{\mathbf{P}}_1$ et $\hat{\mathbf{P}}_{m+1}$].

Finalement, on remarque que le processus $\mathcal{U}$ est intrinsèque à la séquence $m$-périodique de repères considérée.

### 6.2.2 Relèvement

On considère ici le processus inverse de relèvement d'une séquences de repères 2D inclus dans un plan affine $\Pi$ de l'espace affine 3D.

Séquence périodique de repères 2D. – On considère un plan affine $\Pi$, l'espace des vecteurs de ce plan $\overrightarrow{\Pi}$ et un vecteur normal unitaire à ce plan $\mathbf{b}$. Un *repère* 2D $(\mathbf{p}, \epsilon, \nu)$ de $\Pi$ est un triplet composé d'un point $\mathbf{p}$ de $\Pi$ associé à une base orthonormée $(\epsilon, \nu)$ de $\overrightarrow{\Pi}$ telle que $\epsilon \times \nu = \mathbf{b}$, définissant ainsi une droite affine de l'espace $l$ passant par $\mathbf{p}$, dirigée par le vecteur $\nu$, et donc inclue dans le plan $\Pi$.

Une séquence de repères 2D $(\mathbf{p}_i, \epsilon_i, \nu_i)_{i=1,\ldots,m+1}$ du plan $\Pi$ est dite *$m$-périodique* si elle correspond à l'image dépliée d'une séquence $m$-periodique de repères 3D $(\mathbf{P}_i, \mathbf{e}_i^0, \mathbf{e}_i^1, \mathbf{n}_i)$, $i = 1, \ldots, m+1$.

Dans ce cas : $\Pi = \mathrm{O}_{1,2}$ avec $l_1 = L_1 = L_{m+1}$ et $l_2 = L_2$.

Processus de relèvement. – Le *processus de relèvement* est défini comme l'inverse du processus de mise à plat. On y obtient donc une séquence $m$-périodique de repères 3D à partir d'une séquence $m$-périodique de repères 2D. On note que la séquence de repères 2D n'est pas nécessairement périodique, et que le relèvement d'une séquence de repères 2D périodique n'est pas nécessairement unique, comme on le montre dans les deux exemples simples de la figure 6.6.

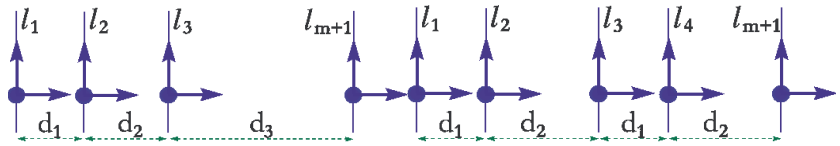


FIGURE 6.6 – *Deux séquences de repères 2D avec des droites $l_i$ parallèles. La séquence de gauche ($m = 3$) ne peut pas être pliée en une séquence 3-périodique de repères 3D car $d_1 + d_2 < d_3$. La séquence de droite ($m = 4$) peut clairement être pliée en une infinité de séquences 4-périodiques de repères 3D.*

Si une séquence de repères 2D est admissible pour le relèvement en une séquence $m$-périodique de repères 3D, chaque droite $l_i$ peut être associée à une angle $A_i \neq 0$ modulo $\pi$, définissant les rotations lors du relèvement.

Séquence périodique de droites. – Une séquence de droites affines de l'espace $(L_i)_{i=1,\ldots,m+1}$ ($m \geq 2$) est dite $m$-périodique si :

i) $L_{m+1} = L_1$,

ii) deux lignes adjacentes distinctes $L_i$ et $L_{i+1}$ sont coplanaires, définissant ainsi un plan $\mathrm{O}_{i,i+1}$,

iii) si $L_i = L_{i+1}$, un plan supplémentaire $\mathrm{O}_{i,i+1}$ contenant la droite $L_i$ est associé à la séquence,

iv) deux plans adjacents $\mathrm{O}_{i-1,i}$ et $\mathrm{O}_{i,i+1}$ sont distincts.

Une séquence de droites affines 2D $(l_i)_{i=1,\ldots,m+1}$ dans un plan $\Pi$ est dite $m$-périodique si c'est l'image d'une séquence $m$-périodique de droites affines de l'espace par le processus de mise à plat précédent. On vérifie alors facilement qu'une séquence $m$-périodique de droites 3D [resp. droites 2D] permet de définir une famille $m$-périodique de repères 3D [resp. repères 2D].

Finalement, la construction d'une séquence de repères 2D admissibles pour le relèvement est réduite à la construction d'une séquence de droites 2D admissibles pour le relèvement.

### 6.2.3 Construction de séquences 2D admissibles pour le relèvement

Le processus de relèvement implique les rotations de l'espace d'angles $A_i$ autour des droites $l_i$. On distingue les cas $m = 2$, $m = 3$ and $m \geq 4$ dans l'analyse suivante.

Cas $m = 2$. On considère une séquence 2-périodique de repères 2D $(\mathbf{p}_i, \epsilon_i, \nu_i)$ et on suppose que les droites $l_1$ et $l_2$ sont distinctes.

Alors, comme $l_1 = L_1 = L_3$ et $l_2 = L_2$, on a $L_1 \neq L_2$ et $L_3 \neq L_2$, de sorte que les plans $\mathrm{O}_{1,2} = (L_1, L_2)$ et $\mathrm{O}_{2,3} = (L_2, L_3)$ sont identiques, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi, les droites $l_1 = L_1$ et $l_2 = L_2$ doivent être identiques.

Finalement, une séquence de repères 2D est admissible pour le relèvement si et seulement si les trois droites $l_i$ sont identiques. Une telle séquence est alors admissible pour tous angles de rotations $A_i$ satisfaisant $A_3 = A_1 = -A_2$ (voir figure 6.7).

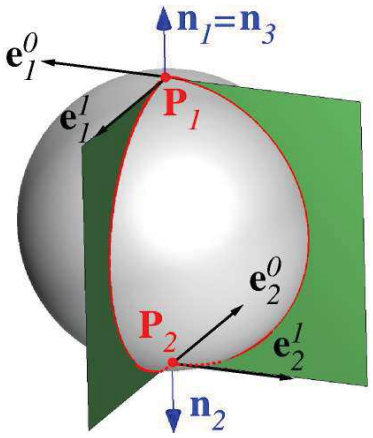


FIGURE 6.7 – *Une séquence 2-périodique de repères 3D sur une sphère.*

Cas $m = 3$. On consdidère une séquence 3-périodique de repères 2D associés à des droites $l_1, l_2, l_3, l_4$. Alors, les droites $l_i$ sont nécessairement dans une des trois configurations suivantes (voir figure 6.8 pour les notations) :

– les droites $l_i$ sont toutes identiques,

– les droites $l_i$ sont parallèles, avec $|d_1 - d_2| < d_3 < d_1 + d_2$ (voir figure 6.9),

– les droites $l_i$ se croisent toutes en un point, avec $|a_1 - a_2| < a_3 < a_1 + a_2$ (voir figure 6.10).

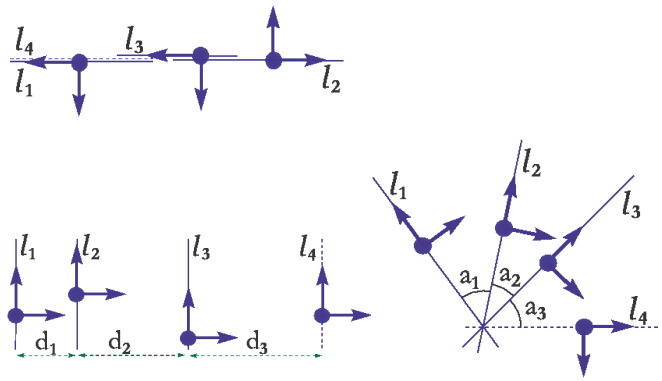


FIGURE 6.8 – *Configurations de séquences* 3*-périodiques de repères 2D.*

**Preuve** : De manière évidente, ces trois configurations remplissent les conditions requises pour définir une séquence périodique. On doit donc uniquement prouver qu'aucune autre configuration n'est possible. Tout d'abord, dans le cas de droites parallèles $l_i$ avec deux droites identiques et une troisième distincte des deux premières, deux des plans $\mathrm{O}_{i,i+1}$ sont identiques, ce qui est exclus. Maintenant, on suppose que les droites $l_1 = L_1$ et $l_2 = L_2$ s'intersectent en un point $\mathbf{R}$. Alors la droite $L_3$ ne peux appartenir au plan $\mathrm{O}_{1,2}$ (pour la même raison que précédemment), et d'autre part elle ne peut être parallèle à la droite $L_2$, auquel cas les droites $L_3$ et $L_1$ ne seraient pas coplanaires. Ainsi, la droite $L_3$ est nécessairement sécante à $L_2$ en un point $\mathbf{S}$. Si $\mathbf{S} \neq \mathbf{R}$, on a $L_2 = (\mathbf{SR}) \subset \mathrm{O}_{1,3} = (L_1, L_3)$ puisque $\mathbf{R} = L_1 \cap L_2$ et $\mathbf{S} \in L_2 \cap L_3$. Cette situation est également exclue, et donc $\mathbf{S} = \mathbf{R}$ : les trois droites se croisent toutes en un point. ∎

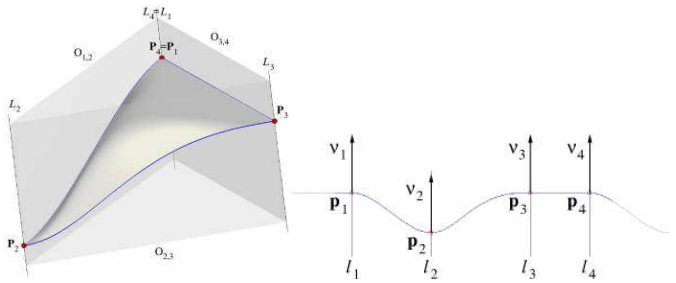


FIGURE 6.9 – *Une séquence* 3*-périodique de repères 2D/3D associés à des droites parallèles.*

<u>Cas $m \geq 4$</u>. Comme on l'a déjà mentionné, une séquences de droites 2D $l_i$ d'un plan $\Pi$ n'est pas nécessairement (et uniquement) admissible pour le relèvement. L'analyse générale de ce cas est un problème complexe qui dépasse le cadre de nos travaux.

En ce qui nous concerne, nous nous intéressons à la construction de séquences de droites $l_i$ admissibles pour le relèvement. Pour ce faire, on propose deux stratégies pour

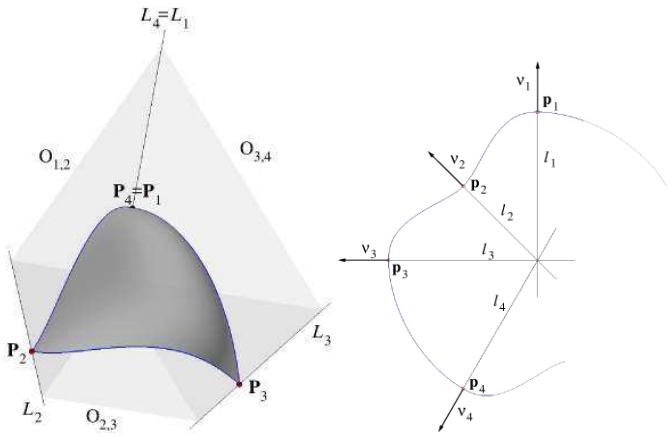


FIGURE 6.10 – *Une séquence 3-périodique de repères 2D/3D associés à des droites se croisant en un point.*

la construction de séquences $m$-périodiques de droites 2D, en se basant sur les points suivants.

i) Un point essentiel pour qu'une séquence de droites 2D $(l_i)_{i=1,...,m}$ soit admissible pour le relèvement est que la droite mise à plat $L_m$ soit coplanaire avec la droite $L_1 = l_1$. Cela conduit à poser $L_{m+1} = L_1$ et à définir une droite 2D $l_{m+1}$ par mise à plat de la droite de l'espace $L_{m+1}$.

ii) L'autre point essentiel est de s'assurer que chaque angle de rotation du processus de relèvement soit non nul (modulo $\pi$).

• Première stratégie.

On considère une séquence de droites 2D $(l_i)_{i=1,...,m}$ et une séquence d'angles $A_i \neq 0$ mod $\pi$, $i = 2, ..., m-2$, et on note $(L_i)_{i=1,...,m-1}$ la séquence repliée correspondant aux droites $(l_i)_{i=1,...,m-1}$ par les rotations d'angles $A_i$. Dans cette configuration, la droite $l_m$ a subi $m-3$ rotations, mais n'a pas atteint sa position finale.

Si la droite $L_1 = l_1$ coupe le cône (ou cylindre) circulaire $C_{m-1}$ généré par la rotation de la droite $l_m$ autour de $L_{m-1}$, alors il existe un angle $A_{m-1}$ tel que la droite $L_1$ et la droite repliée $L_m$ soient coplanaires.

On pose alors $L_{m+1} = L_1$, ce qui permet de définir les angles $A_m$ et $A_1$, ainsi que la droite 2D $l_{m+1}$ par mise à plat de la droite $L_{m+1}$. Finalement, si if $A_m, A_1 \neq 0$ mod $\pi$, on obtient une séquence $m$-périodique de droites 2D $(l_i)_{i=1,...,m+1}$.

Maintenant, si la droite $L_1 = l_1$ ne coupe pas le cône (ou cylindre) circulaire $C_{m-1}$, si $A_m = 0$ mod $\pi$, ou si $A_1 = 0$ mod $\pi$, on modifie successivement les angles $A_{m-2}, A_{m-3}, A_{m-4}, ...$, (avec $A_i \neq 0$ mod $\pi$), afin de respecter ces conditions.

S'il est impossible de déterminer une telle séquences d'angles, alors $(l_i)_{i=1,...,m}$ n'est pas admissible pour le relèvement, comme en figure 6.6-à gauche.

• Deuxième stratégie. On considère encore une séquence de droites 2D $(l_i)_{i=1,...,m}$ et une séquence d'angles $A_i \neq 0$ mod $\pi$, $i = 2, ..., m-2$, et on note $(L_i)_{i=1,...,m-1}$ la séquence repliée correspondant aux droites $(l_i)_{i=1,...,m-1}$ par les rotations d'angles $A_i$.

Si les droites $L_{m-1}$ t $L_1$ ne sont pas coplanaires, il est possible de choisir un point $\mathbf{M}_{m-1} \in L_{m-1}$ et un point $\mathbf{M}_1 \in L_1$ tels que la droite $L_m = (\mathbf{M}_{m-1}\mathbf{M}_1)$ n'appartienne pas au plan $O_{m-2,m-1}$ ni au plan $O_{1,2}$. Une telle droite $L_m$ est coplanaire aux droites

$L_{m-1}$ et $L_1$, et définit ainsi les plans $\mathrm{O}_{m-1,m} = (\mathbf{L}_{m-1}, \mathbf{L}_m)$ et $\mathrm{O}_{m,m+1} = (\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_1)$ tels que $\mathrm{O}_{m-2,m-1} \neq \mathrm{O}_{m-1,m} \neq \mathrm{O}_{m,m+1} \neq \mathrm{O}_{1,2}$.

Si les droites $L_{m-1}$ et $L_1$ sont coplanaires, on vérifie facilement qu'il est possible de choisir une droite distincte $L_m$ coplanaire aux droites $L_{m-1}$ et $L_1$ telle que les conditions précédentes soient satisfaites.

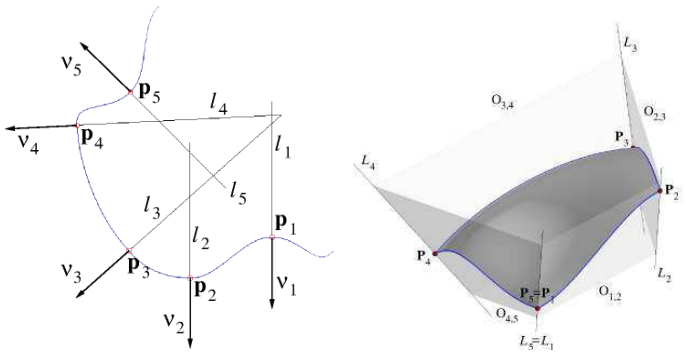


FIGURE 6.11 – *Une séquence 4-périodique de repères 2D/3D.*

Une analyse directe montre que toutes les séquences $m$-périodiques de droites affines 2D peuvent être générées par ce processus. Une séquences 4-périodique est montrée en figure 6.11.

### 6.2.4 Courbe $G^2$-orthogonale à une séquence de droites périodique

A partir de maintenant, le plan $\Pi$ est identifié à l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, la courbure $k(t)$ d'une courbe régulière $C^2$ $\mathbf{f}(t)$ appartenant à $\Pi$ est *signée* : précisément, $k(t) = \det(\mathbf{f}', \mathbf{f}'')/|\mathbf{f}'^3|(t)$, et le contact $G^2$ des courbes appartenant à $\Pi$ correspond au contact $G^2$ entre des courbes planaires.

On considère une séquence $m$-périodique de droites affines 2D $(l_i)$ dans le plan $\Pi$. Comme cette séquence est admissible pour le relèvement, chaque droite $l_i$ est associée à une rotation d'angle $A_i$.

Une courbe régulière $\hat{\mathbf{r}}(t)$ dans le plan $\Pi$ est dite *$G^2$-orthogonale à la séquence $l_i$* s'il existe une séquence $m$-périodique de repères 2D $(\mathbf{p}_i, \epsilon_i, \nu_i)$ associée à la séquence $l_i$ telle que la courbe $\hat{\mathbf{r}}(t)$ :

i) est composée de $m$ segment réguliers $\hat{\mathbf{r}}_i(t), t \in [0,1]$, de classe $C^2$, et de vecteurs tangents unitaires $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$, is composed of $m$ regular segments $\hat{\mathbf{r}}_i(t), t \in [0,1]$, of class $C^2$,

ii) est orthogonale aux droites $l_i$ aux points $\mathbf{p}_i = \hat{\mathbf{r}}_{i-1}(1) = \hat{\mathbf{r}}_i(0)$, avec $\hat{\mathbf{e}}_{i-1}(1) = \hat{\mathbf{e}}_i(0) = \epsilon_i$,

iii) a un contact $G^2$ en chaque point $\mathbf{p}_i$ associé à un angle $A_i \neq \pi/2$ modulo $\pi$.

En un point $\mathbf{p}_i$ associé à un angle $A_i = \pi/2$ modulo $\pi$, la courbe $\hat{\mathbf{r}}(t)$ n'a qu'un contact $G^1$. On rappelle que, suite à notre hypothèse de la section 1.1, les inflexions pathologiques sont exclues.

Un *retournement* d'une telle courbe $\hat{\mathbf{r}}(t)$ est soit un retournement de la normale principale en un points d'inflection $G^2$ de la courbe (éventuellement en une jonction $\mathbf{p}_i$ où la courbure est par conséquent nulle=), soit une retournement de la normale principale en un point $\mathbf{p}_i$ $G^1$ associé à un angle $A_i = \pi/2$ modulo $\pi$.

## 6.3 Identification des contours admissibles dans le cas de géodésiques planaires

On considère dans cette section un contour $\mathbf{r}(t)$, composé de $m$ segments planaires $\mathbf{r}_i(t)$, admissible pour l'interpolation géodésique (voir chapitre 5), qui satisfait par conséquent les conditions (C1–C3), et soit $\mathbf{s}$ une surface de normale unitaire $\mathbf{N}$ interpolant géodésiquement le contour $\mathbf{r}(t)$. La courbe $\mathbf{r}(t)$ définit de manière naturelle une séquence $m$-périodique de repères 3D $(\mathbf{P}_i, \mathbf{e}_i^0, \mathbf{e}_i^1, \mathbf{n}_i)$ avec

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{r}_{i-1}(1) = \mathbf{r}_i(0), \quad \mathbf{e}_i^0 = \mathbf{e}_i(0), \quad \mathbf{e}_i^1 = \mathbf{e}_{i-1}(1), \quad \mathbf{n}_i = \mathbf{N}(\mathbf{P}_i),$$

ainsi qu'une séquence $m$-périodique de droites de l'espace $\mathrm{L}_i$ associées à des angles $A_i = (\mathbf{e}_i^1, \mathbf{e}_i^0)_{\mathbf{n}_i} \neq 0 \pmod{\pi}$, et des plans osculateurs $\mathrm{O}_i$. Les droites $\mathrm{L}_i$ sont orthogonales aux plans tangents $\mathrm{T}_i$ aux sommets $\mathbf{P}_i$ du contour.

Lemme 1. – *En effectuant le processus de mise à plat des plans* $\mathrm{O}_i$ *autour des droites* $\mathrm{L}_i$*, comme défini en section 6.2.1, la courbe* $\mathbf{r}(t)$ *est dépliée en une courbe du plan* $\hat{\mathbf{r}}(t) \in \mathrm{O}_1$*,* $G^2$*-orthogonale à la séquence* $m$*-périodique de droites* $l_i = \hat{L}_i$*, avec un nombre pair de retournements.*

**Preuve** : Le résultat découle des conditions (C1–C3) et du fait que les rotations ne modifient pas les propriétés intrinsèques de courbes et préservent les angles. ∎

Inversement, on considère une séquence $m$-périodique de droites affines 2D $(l_i)$ dans un plan $\Pi$, et une courbe $\hat{\mathbf{r}}(t)$ $G^2$-orthogonale à cette séquence, avec un nombre pair de retournements La séquence périodiques de droites $l_i$ peut être repliée en une séquence périodique de droites de l'espace $L_i$. Le relèvement de la courbe $\hat{\mathbf{r}}(t)$ produit alors un contour 3D fermé $\mathbf{r}(t)$, composé de segments $C^2$ de courbe planaires. Finalement, avec des arguments similaires à ceux du Lemme 1, nous obtenons les résultats suivants.

Lemme 2. – *Le relèvement d'une courbe* $\hat{\mathbf{r}}(t)$ $G^2$*-orthogonale à une séquence* $m$*-périodique de droites* $l_i$*, avec un nombre pair de retournements, produit un contour* $\mathbf{r}(t)$ *admissible pour l'interpolation géodésique.*

Enfin, en remarquant qu'une courbe géodésique sur une surface elliptique n'a pas de points d'inflexion [DoC76, Str61], on a le corollaire suivant.

Corollaire. – *Si un contour* $\mathbf{r}(t)$ *avec* $A_i \neq \pi/2$ *(mod* $\pi$*) pour tout* $i$*, admet une surface* $\mathbf{s}$ *interpolant* $\mathbf{r}(t)$ *en tant que géodésiques, et dont tous les points sont elliptiques, alors la courbe dépliée* $\hat{\mathbf{r}}(t)$ *est* $G^2$ *et localement convexe, autrement dit sa courbure est continue et de signe constant.*

**Preuve** : Le résultat vient du fait que dans ce cas, il ne se produit pas de retournement de la normale principale aux sommets du contour. ∎

## 6.4 Résultats

On présente deux autres exemples illustrant les résultats de cette stratégie de reconstruction sur les figures 6.12 et 6.13.

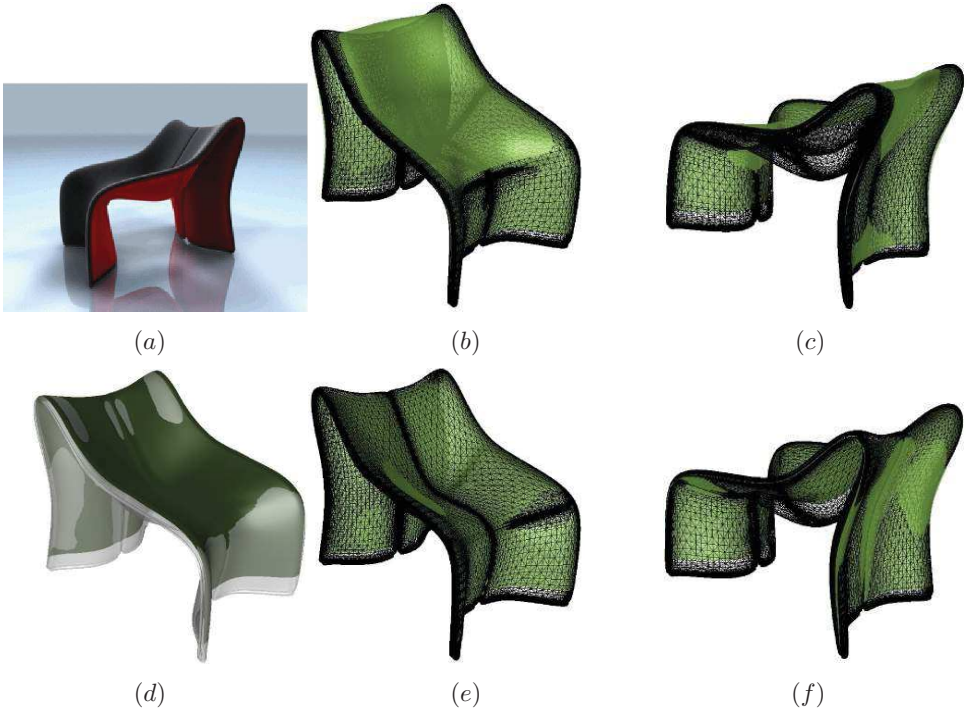


FIGURE 6.12 – *La chaise présentée en (a) [fre] est reconstruite en (b) et (c) à partir de quatre géodésiques planaires. Dans les vues (d), (e) t (f), l'utilisation d'une géodésique planaire également axe de symétrie de la figure permet une reconstruction plus précise.*

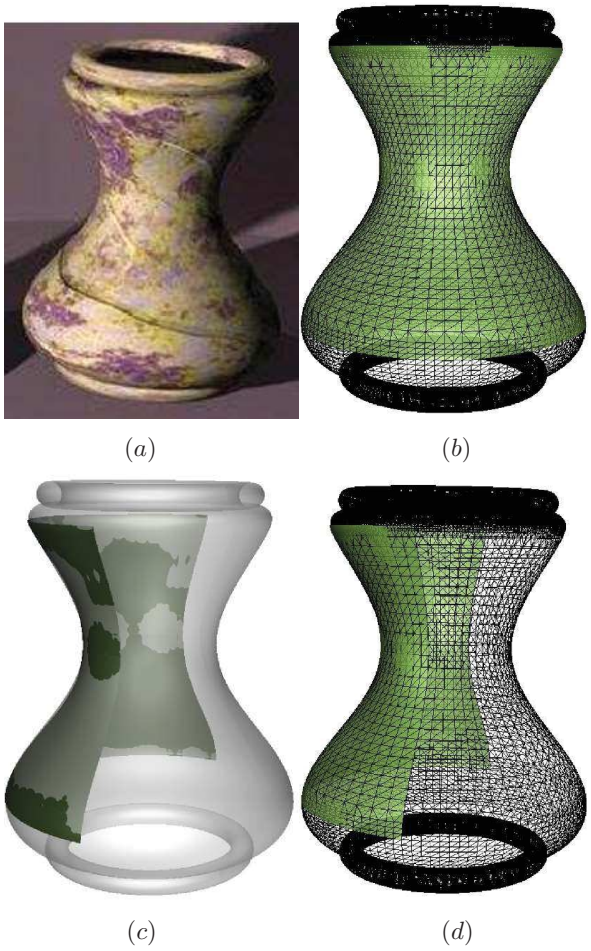


FIGURE 6.13 – *Reconstruction d'une portion de vase [jar] à partir de quatre géodésiques planaires.*

## Bibliographie du Chapitre


[coc] The coconut chair. http ://www.turbosquid.com/3d-models/3d-model-coconut-chair/502745.

[DoC76] M. P. DoCarmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

[fre] The organic freeform chair. http ://www.the3dstudio.com/product_details.aspx ?id_product=444832.

[HSSB13] M. Huard, N. Sprynski, N. Szafran, and L. Biard. Identification of n-sided surface patches with planar geodesic boundaries. *Computer Aided Geometric Design*, XX, 2013.

[jar] The jar. http ://www.sharecg.com/v/7022/.

[Str61] D. J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover Publications, Inc, 1961.

# Conclusion

Dans le cadre de la reconstruction de formes instrumentées à l'aide du ruban Morphosense conçu par le CEA-Leti, on a développé dans cette thèse plusieurs innovations portant sur différents aspects du processus de reconstruction. On a les a présentées dans le premier chapitre selon une chronologie en accord avec les étapes du processus. A l'heure du bilan, il semble plus intéressant de les répertorier selon leur nature, et la manière dont elles prolongent et étendent les travaux antérieurs à cette thèse.

Une première catégorie de méthodes se contente d'optimiser les travaux existants (structure en peigne, chapitre 1), ou de proposer des alternatives à ceux-ci sans chercher à renouveler leur approche (chapitre 2). Si l'optimisation de la structure en peigne a permis d'obtenir les résultats pratiques de reconstruction de surface les plus solides à ce jour, la méthode d'interpolation par spline PH semble difficile à appliquer pour la reconstruction en temps réel, du fait de la procédure d'optimisation qu'elle implique.

La seconde catégorie de méthodes regroupe les méthodes nouvelles qui s'inscrivent encore dans le cadre général défini par la thèse de Nathalie Saguin Sprynski. Les méthodes d'interpolation de Hermite sur la sphère (chapitre 3) adoptent en effet la même approche que dans les travaux précédents, tout en permettant de prendre en compte l'intégralité des données fournies par les capteurs. De même, la méthode de reconstruction développée dans le chapitre 5 se base sur des outils et des approches existantes pour proposer un moyen nouveau de reconstruction à partir d'un réseau de courbes géodésiques.

La dernière catégorie de méthodes est née d'une volonté de repenser plus en profondeur la méthodologie globale de reconstruction. L'étude de modèles particuliers de surfaces (surfaces développables, chapitre 4) et de courbes (géodésiques planaires, chapitre 6) a permis d'identifier plus précisément les possibilités et les limites de reconstruction, tout en soulignant la dualité entre les contraintes sur le modèle des objets géométriques à reconstruire et la topologie du réseau de courbes.

Il est intéressant de noter que cette classification est en accord avec la chronologie réelle de ces travaux. Elle reflète la prise progressive de recul par rapport aux problématiques liées au contexte du Morphosense.

On a présenté pour chaque méthode des résultats théoriques, et quand cela a été possible des résultats pratiques à partir de mesures réelles effectuées avec les rubans. Certaines méthodes nécessitent encore d'être menées à terme, et d'être testées sur des signaux capteurs réels. La méthode de reconstruction des surfaces développables du chapitre 4 en particulier est très sensible aux erreurs de mesure, et nécessite soit une plus grande précision, soit un très grand nombre de mesures sur la surface à reconstruire. La méthode du chapitre 6 qui exploite les géodésiques planaires d'une surface a été appliquée à des modèles virtuels, mais elle est prête à être utilisée dans le contexte du Morphosense, pour peu que l'on dispose de surfaces qui rentrent dans ce cadre.

Au-delà de ces travaux, une importante marge de progression est également possible, tant sur les aspects théoriques que pratiques. D'un point de vue pratique, la validation des méthodes a été abordée mais reste difficile dans la plupart des cas pratiques. Les dispositifs de validation restent à être achevés pour donner de véritables calculs d'erreurs de reconstruction, notamment dans le cas des surfaces. Les dispositifs aboutis évoqués au chapitre 1 sont en cours de développement au CEA. En outre, la miniaturisation des capteurs et leur précision accrue permettra une application plus aisée des algorithmes développés dans cette thèse. En l'absence d'une telle

précision cependant, de nombreux développements théoriques sont à envisager, afin de pouvoir reconstruire de manière plus réaliste les formes acquises à partir de données capteurs réelles.

D'une part, il semble fondamental de relâcher la plupart des contraintes d'interpolation (à l'exception des contraintes de longueur que l'on connaît de manière exacte) en contraintes d'approximation uniquement. Au lieu d'interpoler de manière exacte des données par essence bruitées, l'idée est d'utiliser la liberté acquise en se contentant d'approximer pour mieux respecter une certaine cohérence physique, et en particulier éviter d'introduire des oscillations inexistantes sur les formes à reconstruire. Pour la plupart des algorithmes de type spline d'interpolation développés dans ces travaux, on peut envisager une version spline de lissage se limitant à approximer les données capteurs. Ce type d'algorithmes est particulièrement adapté à l'application Morphosense, puisqu'on y introduit des poids pour chaque noeud de données, qui correspondent en pratique à la confiance que l'on donne pour les mesures des différents noeuds de capteurs, et qui dépend de leur qualité, âge, état général, etc... Ainsi, en fixant ces poids à partir des caractéristiques physiques des capteurs, les algorithmes associés permettront non seulement d'obtenir des solutions plus cohérentes, mais aussi d'obtenir une reconstruction évolutive, en accord avec les éventuelles dégradations et le vieillissement des capteurs utilisés.

Cette approche d'approximation pourra aussi être généralisée à des capteurs répartis sur une surface en un réseau s'affranchissant des rubans Morphosense. Des travaux sont en cours au CEA sur l'identification des distances géodésiques entre capteurs en étudiant la propagation des ondes passives sur une surface. On peut ainsi espérer obtenir un réseau de noeuds de capteurs Morphosense caractérisé pas les informations tangentielles données par les noeuds d'une part, et les distances estimées entre eux d'autre part. Une telle configuration permettrait d'étendre les différents algorithmes étudiés dans nos travaux, qui fournissent de nombreuses pistes pour gérer les contraintes de longueur entre les différents capteurs, dans le cadre d'une répartition non curviligne des capteurs sur la surface.

Enfin, il est nécessaire d'entreprendre des changements plus en profondeur du processus général d'acquisition et de reconstruction. Le processus actuel consiste à traiter dans un premier temps les signaux fournis par les capteurs de manière indépendante, puis d'appliquer les algorithmes développés dans ces travaux aux données traitées pour reconstruire les formes considérées. Or les contraintes physiques liées aux rubans et aux courbes et surfaces que l'on cherche à reconstruire sont à même de donner des informations quant à la validité des signaux et leur cohérence. Cette étape de retour dynamique d'informations, impliquant une communication bidirectionnelle entre le traitement des signaux et le traitement géométrique des informations, n'existe pas à l'heure actuelle. On peut même à terme envisager des applications où l'environnement géométrique des capteurs ne serait pas une fin en soi, mais bien un outil permettant d'améliorer la robustesse des informations fournies par les capteurs.

De manière générale, un vaste domaine d'investigation se situe à la croisée du traitement du signal et de la géométrie. La répartition des capteurs le long d'une courbe ou d'une surface correspond à un échantillonnage de l'information tangentielle contenue dans les formes à reconstruire. Il serait intéressant d'étudier les liens entre une telle répartition et les caractéristiques différentielles des courbes et surfaces considérées. L'idée serait d'obtenir des résultats comparables aux théorèmes de type Shannon transposés dans un cadre géométrique.