HAL
open science

Jeux graphiques et théorie de la démonstration

Florian Hatat

▶ To cite this version:

Florian Hatat. Jeux graphiques et théorie de la démonstration. Analyse numérique [math.NA]. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENM083 . tel-01548329

HAL Id: tel-01548329
https://theses.hal.science/tel-01548329v1

Submitted on 27 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques et Informatique**

Arrêté ministériel : 7 aout 2006

présentée par

Florian Hatat

Thèse dirigée par **Laurent Vuillon**
et codirigée par **Tom Hirschowitz**

préparée au sein du **LAMA, Université de Savoie**
et de l'école doctorale **MSTII**.

Jeux graphiques et théorie de la démonstration

Thèse soutenue publiquement le **23 octobre 2013**,
devant le jury composé de :

Olivier Laurent
ENS Lyon, rapporteur
Luigi Santocanale
Université d'Aix-Marseille, rapporteur
Pierre-Louis Curien
Université Paris 7, examinateur
Laurent Regnier
Université d'Aix-Marseille, examinateur
Laurent Vuillon
Université de Savoie, directeur de thèse
Tom Hirschowitz
CNRS, Université de Savoie, codirecteur de thèse

Remerciements

De nombreuses personnes ont contribué, par leur travail, leur présence, leur soutien, ou leur amitié, à la réalisation de ce manuscrit. Qu'il me soit permis d'adresser mes remerciements à certains d'entre eux. Des doctorants cherchaient conseil auprès de moi pour certaines démarches : pour les suivants, voici par écrit et en quelques mots une recette pour faire une thèse.

Commencer par trouver un bon directeur. Si un seul ne suffit pas, il est possible d'en prendre deux. Merci à Tom Hirschowitz, qui a encadré mes travaux pendant plusieurs années. Cette tâche n'avait rien de simple, et je lui adresse toute ma reconnaissance pour sa patience, ses qualités pédagogiques, et son talent pour partager sa curiosité scientifique. Merci également à Laurent Vuillon, qui a joué avec perfection son rôle de directeur bienveillant.

Après quelques années, trouver deux rapporteurs : merci à Olivier Laurent et Luigi Santocanale d'avoir accepté ce rôle. Leur travail de relecture minutieux a très largement contribué à améliorer la rédaction de ce manuscrit, à corriger plusieurs erreurs, et à enrichir des passages manquant de clarté.

Accompagner, le jour de la soutenance, de deux examinateurs : merci à Pierre-Louis Curien et à Laurent Regnier d'avoir accepté de se prêter à cet exercice.

Laisser mijoter le doctorant en bonne compagnie pendant ses années de travail. J'ai trouvé au LAMA, que ce soit parmi les membres de l'équipe LIMD, ou parmi les autres enseignants et chercheurs du laboratoire, de nombreuses personnes prêtes à partager leur amitié. Les doctorants, toujours de passage et avec lesquels nous avons partagé les mêmes bureaux, tiennent une place particulière : Annette, Matthieu, Humayoun, Mouhamad, Julien, Pierre-Étienne, et quelques autres qui ont eu l'audace de finir les premiers ; Rana, Nasr et Mohamad, partenaires dans les semaines de rédaction ; enfin, les nouveaux arrivants, qui prennent nos anciennes places.

Réserver, avant ébullition. Merci à toute ma famille, à des amis rencontrés au fil du temps. Dans des moments de doutes, ils constituent un refuge paisible vers lequel il est toujours possible de se tourner.

Vérifier l'assaisonnement avant de servir : merci aux étudiants et aux élèves que j'ai eu le plaisir de rencontrer en parallèle de mes travaux de recherche, et qui m'ont donné la joie d'exercer mon métier.

Saupoudrer d'une anecdote énigmatique à mettre dans les remerciements. Un grand merci à la gent palmipède pour ses pattes de canard, qui, tout compte fait après plusieurs mois de travail, ne descendent pas ; pour avoir contribué à la part zoologique des discussions au coin café ; pour exceller en typographie.

Enfin, cette ultime coquetterie sans laquelle la recette perdrait son sens. À ma Sophie.

Table des matières

1 Introduction **7**
1.1 Contexte . . . 7
1.2 Résumé . . . 8
1.3 Conclusion et perspectives . . . 14

2 Catégories de réponse **17**
2.1 Définition de la catégorie des catégories de réponse . . . 17
2.2 Catégories de dialogue (catégories cartésiennes avec négation) . . . 20
2.3 Catégories de réponse libres . . . 23
2.3.1 λ-calcul en forme β-normale et η-longue . . . 23
2.3.2 Catégorie syntaxique . . . 24

3 Catégorie des positions et coups du jeu **29**
3.1 Occurrences . . . 29
3.2 Positions . . . 30
3.2.1 Représentation graphique des positions . . . 33
3.2.2 Séquents . . . 33
3.2.3 Syntaxe pour les positions . . . 34
3.2.4 Pullbacks et pushouts dans P . . . 35
3.3 Sous-positions . . . 36
3.3.1 Composantes connexes . . . 36
3.3.2 Plongements . . . 37
3.3.3 Plongements de sous-arbres . . . 39
3.3.4 Plongements ouverts . . . 42
3.4 Coups . . . 44
3.5 Forte normalisation des parties globales . . . 50

4 Stratégies innocentes et composition parallèle **55**
4.1 Catégorie double des vues . . . 55
4.1.1 Extension verticale dans une catégorie double . . . 55
4.1.2 Câbles . . . 60
4.1.3 Vues . . . 65
4.2 Stratégies . . . 66
4.2.1 Stratégies innocentes . . . 66
4.2.2 Stratégies gagnantes . . . 68
4.3 Catégorie des stratégies . . . 69
4.3.1 Recollement des stratégies . . . 69
4.3.2 Extension des stratégies aux câbles . . . 70

5 Élimination des coupures par systèmes de commutation **73**
5.1 Résumé . . . 73
5.2 Systèmes de commutation . . . 74
5.2.1 Définition . . . 74
5.2.2 Lemmes ternaires . . . 76
5.2.3 Décomposition de carrés commutatifs . . . 78
5.3 Coupures . . . 80
5.3.1 Définition . . . 80
5.3.2 Factorisation des coupures . . . 81
5.3.3 Pullbacks le long de plongements ouverts . . . 83
5.3.4 Descente des câbles . . . 86
5.4 Contractions . . . 87
5.4.1 Propriétés des contractions . . . 87
5.4.2 Morphismes sans contraction . . . 89
5.4.3 Interaction avec les coupures . . . 92
5.4.4 Commutation avec les câbles . . . 94
5.5 Morphismes de descente . . . 96
5.6 Affaiblissements . . . 96
5.6.1 Interaction avec les coups . . . 97
5.6.2 Interaction avec la descente . . . 98
5.6.3 Interaction avec les plongements ouverts . . . 100

6 Quelques résultats sur les carrés exacts **103**
6.1 Foncteurs entre préfaisceaux booléens . . . 104
6.2 Carrés exacts . . . 105
6.2.1 Compagnons (calcul des *mates*) . . . 105
6.2.2 Notation . . . 107
6.3 Exemples de carrés exacts . . . 108
6.3.1 Foncteurs pleins ou fidèles . . . 108
6.3.2 Coproduits de carrés exacts . . . 110
6.3.3 Comma catégories . . . 110
6.3.4 Fibrations ou op-fibrations . . . 111

7 Descente **115**
7.1 Plan du chapitre . . . 115
7.2 Une catégorie triple . . . 116
7.2.1 Cubes de descente . . . 116
7.2.2 Extension verticale des cubes de descente . . . 122
7.3 Reconstructions de cubes de descente . . . 123
7.3.1 Face de droite . . . 124
7.3.2 Face arrière . . . 125
7.3.3 Face avant . . . 127
7.4 Descente des stratégies gagnantes . . . 134
7.4.1 Préservation de l'innocence et du déterminisme . . . 134
7.4.2 Stabilité par descente . . . 139
7.5 Composition des stratégies gagnantes . . . 142
7.6 Structure de réponse . . . 148
7.6.1 Produits binaires . . . 149
7.6.2 Négation . . . 152

Bibliographie **165**

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Cette thèse est une contribution à la sémantique de jeux des langages de programmation. La sémantique de jeux est apparue au début des années 90, dans les travaux de Coquand [9], Hyland et Ong [25], Abramsky, Jagadeesan et Malacaria [1], et Nickau [38]. Elle fournit des modèles de langages de programmation fonctionnels typés, comme PCF [25], dans lesquels les programmes sont vus comme des joueurs qui interagissent selon une certaine stratégie avec un opposant. Ce dernier représente intuitivement l'environnement du programme considéré. Nous avons indiqué que ces programmes étaient typés : chaque type définit une règle de jeu différente, son *arène*. La construction principale en sémantique de jeux consiste à définir l'interaction de deux stratégies sur les arènes respectives $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow C$, pour tous types A, B, C.

Cette approche a été développée à grande échelle. Elle a fourni des modèles de langages fonctionnels avec références, en appel par nom et par valeur, de divers fragments de la logique linéaire. Plus récemment, elle a même trouvé des applications en vérification de programmes [5].

Si les intuitions de base de la sémantique de jeux sont claires, certains de ses aspects se révèlent très subtils, en particulier la notion d'*innocence*. En effet, une fois définie l'arène correspondant à un type, la notion naïve de stratégie (un ensemble de parties non vide et clos par préfixe) peut se révéler trop générale. Un symptôme en est qu'on peut définir de telles stratégies sur une arène fonctionnelle $A \longrightarrow B$ qui ne sont pas applicatives, c'est-à-dire qu'elles ne renvoient pas toujours le même résultat lorsqu'on leur donne le même argument. De telles fonctions sont bien sûr définissables en présence de références, mais pas dans les langages purement fonctionnels tel que PCF. Les auteurs [25] introduisent donc la notion de *vue* d'un joueur dans une partie et se restreignent aux stratégies dont les réactions ne dépendent, à chaque stade du jeu, que de la vue du joueur considéré. En particulier, la vue d'un joueur sur une arène fonctionnelle ne lui permet pas de connaitre les précédents arguments lui ayant été passés.

Un autre aspect mal compris de la sémantique de jeux réside dans la combinatoire mise en jeu par la composition de stratégies innocentes. Melliès [37] a notamment proposé une présentation alternative de l'innocence fondée sur les structures d'évènements, tandis que Harmer et al. [21] ont étudié la question d'un point de vue plus catégorique.

Enfin, la sémantique de jeux ne s'est que très peu aventurée hors du cadre séquentiel. En effet, à part les travaux de Laird [33] et Ghica et Murawski [17], elle ne capture qu'une équivalence peu fine, l'équivalence par *may-testing*. Néanmoins, les sémantiques de jeux présentent des similitudes avec certaines approches sémantiques pour les langages concurrents.

Ainsi, les modèles proposés par Joyal et al. [28] utilisent les préfaisceaux, en gros, comme des stratégies non-déterministes. Cependant, ces modèles ne présentent aucun analogue de la notion d'innocence. Un travail récent de Hirschowitz et Pous [42] donne un modèle, les *terrains de jeux*, rapprochant les modèles de préfaisceaux à la Joyal et al. des sémantiques de jeux. En effet, dans les terrains de jeux, on utilise aussi les préfaisceaux pour représenter les stratégies non-déterministes, mais cette fois avec une condition d'innocence conceptuellement très proche de la notion de Hyland et Ong. Les terrains de jeux n'ayant pas encore été adaptés au berceau originel des sémantiques de jeux, les langages fonctionnels, la présente thèse peut se comprendre comme partant des dernières et faisant un pas dans la direction des premiers.

Résumons brièvement les contributions que nous apportons à ces questions.

1.2 Résumé

Le résultat principal de la thèse est une nouvelle sémantique de jeux pour un λ-calcul de continuations dans le style de Lafont, Reus et Streicher [32]. Mais notre sentiment est que la contribution essentielle de la thèse réside dans les méthodes utilisées pour arriver à ce résultat, plus que dans le résultat lui-même.

Stratégies innocentes et extensions de Kan à droite Le premier aspect nouveau de notre sémantique est une reformulation de la notion d'innocence en termes de préfaisceaux et d'extensions de Kan [34], que nous résumons maintenant. Notre point de départ est un enrichissement de la structure des parties du jeu. Habituellement, les parties sont des séquences de coups (éventuellement modulo homotopie pour Melliès [37]) munies de l'ordre préfixe. Ici, nous considérons une catégorie de parties qui contient, en plus de la relation préfixe, d'autres morphismes. En particulier, cette catégorie n'est pas un préordre : il peut y avoir plusieurs morphismes entre deux objets fixés. Cela reflète le fait qu'une partie peut contenir plusieurs occurrences de la même vue.

Ce point de vue permet de considérer les vues (V) comme une sous-catégorie de la catégorie des parties (K). Une *stratégie innocente* est alors simplement un préfaisceau booléen sur la catégorie des vues, c'est-à-dire un foncteur $\mathrm{V}^{op} \longrightarrow 2$, où 2 est l'ordinal fini $0 \leq 1$, vu comme la catégorie engendrée par le graphe $0 \longrightarrow 1$. Pour expliquer le sens de cette définition, on dit qu'un tel préfaisceau $\sigma\colon \mathrm{V}^{op} \longrightarrow 2$ *accepte* une vue v si $\sigma(v) = 1$ et la refuse si $\sigma(v) = 0$. Une propriété importante d'un tel préfaisceau, qui fait écho à la stabilité par préfixe requise en sémantique de jeux standard, est le fait que pour tout morphisme $h\colon v' \longrightarrow v$ de vues, si v est acceptée, alors v' l'est aussi. En effet, le cas contraire demanderait un morphisme $1 \longrightarrow 0$, qui manque dans la catégorie 2.

Étant donné une stratégie innocente, on peut calculer son comportement sur toutes les parties, par opposition aux seules vues. Ce comportement est représenté par un préfaisceau booléen sur la catégorie K des parties. Comme ci-dessus avec les vues, un tel préfaisceau spécifie quelles parties sont acceptées ou refusées. Pour calculer le comportement d'une stratégie innocente σ comme ci-dessus, on prend son *extension de Kan à droite* le long du plongement $i\colon \mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{K}$. On commence par donner rapidement la définition d'extension de Kan à droite, puis on explique.

Si $i\colon \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{K}$ et $\sigma\colon \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{C}$ sont deux foncteurs, l'extension de Kan à droite de σ le long de i est une manière d'étendre le foncteur σ sur K tout entier, i.e., de compléter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \mathrm{K} \arrow[dl, dashed, "\tau"] \\
& \mathrm{C} \arrow[ul, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

avec un foncteur τ qui, lorsqu'on le restreint à V par précomposition par i, vaut σ (à la transformation naturelle α près). Il n'existe en général pas de manière unique de réaliser une telle extension : l'extension de Kan à droite est la plus grande extension, au sens où tout autre choix d'extension se factorise par α.

Si on note $\widehat{\mathrm{C}}$, pour toute catégorie C, la catégorie de foncteurs $\mathrm{C}^{op} \longrightarrow 2$, alors on peut voir de manière équivalente le foncteur $\widehat{\mathrm{V}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{K}}$ d'extension de Kan à droite comme l'adjoint à droite du foncteur de restriction $\widehat{\mathrm{K}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{V}}$ envoyant tout foncteur $F\colon \mathrm{K}^{op} \longrightarrow 2$ sur le composé

$$\mathrm{V}^{op} \xrightarrow{i^{op}} \mathrm{K}^{op} \xrightarrow{F} 2.$$

Dans notre cas particulier, où les foncteurs (en particulier, les stratégies) dont on prend les extensions de Kan à droite sont tous des préfaisceaux booléens, on a une caractérisation des extensions sous la forme suivante :

Proposition 1.1. *L'extension à droite d'un foncteur $F\colon \mathrm{V}^{op} \longrightarrow 2$ le long de i est définie comme l'inf :*

$$F'(k) = \bigwedge_{\{v \in \mathrm{V} \mid \mathrm{K}(i(v),k) \neq \emptyset\}} F(v).$$

Preuve. Considérons $G\colon \mathrm{K}^{op} \longrightarrow 2$. Les catégories de préfaisceaux booléens étant des ordres partiels, un morphisme $G \longrightarrow F'$ se résume à la condition que pour toute partie k acceptée par G et pour toute vue v telle qu'il existe un morphisme $v \longrightarrow k$, v est acceptée par F. Mais comme G est clos par le bas, ceci est équivalent à la condition que toutes les vues acceptées par G le soient aussi par F. Or, cette dernière condition est équivalente à $G \circ i^{op} \leq F$. $\square$

Pour revenir aux stratégies innocentes, le comportement d'une telle stratégie consiste donc à accepter uniquement les parties dont toutes les vues sont acceptées, les vues d'une partie k étant toutes les vues v telles qu'il existe un morphisme $v \longrightarrow k$.

De plus, étant donné une stratégie naïve non innocente, on peut l'*innocentiser* en restreignant le préfaisceau correspondant sur K à V, puis en reprenant une extension de Kan à droite. En résumé, les stratégies innocentes sont équivalentes à une sous-catégorie réflexive de celle des stratégies naïves, $\mathrm{K}^{op} \longrightarrow 2$.

Au passage, l'extension de Kan *à gauche* d'un préfaisceau booléen $F\colon \mathrm{C}^{op} \longrightarrow 2$ le long d'un foncteur $f\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ est une opération qui permet de compléter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathrm{D} \arrow[dl, dashed, "G"] \\
& 2 \arrow[ul, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

avec la paire (G, α). Le foncteur d'extension de Kan à gauche est défini de manière équivalente comme l'adjoint à gauche du foncteur de restriction. Comme pour les extensions de Kan à droite, on dispose d'une caractérisation dans notre cas, que l'on utilisera abondamment dans la suite :

Proposition 1.2. *L'extension à gauche de F est définie comme le sup :*

$$F'(d) = \bigvee_{\{c \in \mathrm{C} \mid \mathrm{D}(d, f(c)) \neq \emptyset\}} F(c).$$

En particulier, si f satisfait la condition que pour tout $u \colon d \longrightarrow f(c)$ dans D, il existe $u' \colon c' \longrightarrow c$ dans C tel que $f(u') = u$, alors on a

$$F'(d) = \bigvee_{\{c \in \mathrm{C} \mid f(c) = d\}} F(c).$$

Preuve. Pour le cas général, considérons $G \colon \mathrm{D}^{op} \longrightarrow 2$. Le fait que $F' \leq G$ revient au fait que pour tout d et $u \colon d \longrightarrow f(c)$, on ait $F(c) \leq G(d)$. En particulier, pour $d = f(c)$ et $u = id_d$, cela donne $F(c) \leq G(f(c))$. Ainsi, $F \leq G \circ f^{op}$.

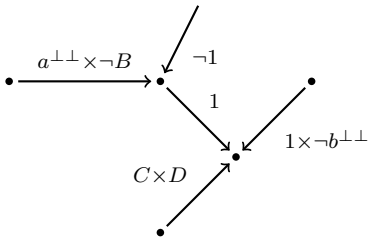
Réciproquement, $F \leq G \circ f^{op}$ signifie que pour tout $c \in \mathrm{C}$ on ait $F(c) \leq G(f(c))$. Ainsi, pour tout $u \colon d \longrightarrow f(c)$, on a $G(f(c)) \leq G(d)$, donc $F(c) \leq G(d)$. On a donc $F' \leq G$.

Pour les deux cas spéciaux, on démontre facilement que la formule donnée est équivalente à celle du cas général. □

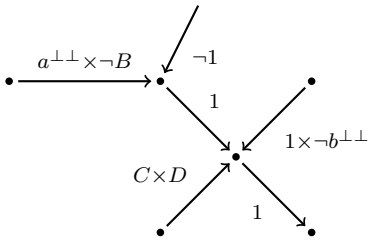
Élimination des coupures par factorisation Le second aspect nouveau de notre sémantique est qu'elle représente les coups du jeu comme des morphismes dans une catégorie P, bien distincte de la catégorie K des parties ci-dessus (dont elle fournit en fait les briques de base). Cette idée a été appliquée précédemment dans des cadres considérablement plus simples [23, 22].

Au-delà des coups du jeu, la catégorie P contient aussi comme morphismes, d'une part, des plongements entre positions du jeu et, d'autre part, des *coupures*.

En simplifiant à l'extrême, une position du jeu est une sorte de graphe dans lequel les nœuds représentent des joueurs. Les arêtes font office de « plateaux de jeu » entre leurs deux extrémités. Par exemple le graphe partiel étiqueté par des formules :



est une position valide du jeu avec cinq joueurs. Chaque coup effectué par un joueur sur l'un de ces plateaux de jeu passe la main à l'autre extrémité, tout en modifiant la configuration globale. Les coups possibles peuvent différer d'un plateau à l'autre et sont spécifiés par une formule logique. Avec l'exemple précédent, le joueur racine pourrait par exemple jouer un coup qui ferait passer à la configuration :



On peut noter un dernier point important : les arêtes peuvent être partielles, ce qui permet aux positions de donner une vision partielle de la configuration globale.

En sémantique de jeux standard, tout se passe comme si seules les positions de la forme

$$\xrightarrow{A} \bullet \xrightarrow{B}$$

avaient droit de cité. La construction de base consiste à considérer une catégorie dont les objets sont les formules $A, B, \ldots$ et dont les morphismes $A \longrightarrow B$ sont les stratégies sur la position ci-dessus. Pour composer une stratégie $\sigma\colon A \longrightarrow B$ avec une stratégie $\tau\colon B \longrightarrow C$, on construit un pseudo-jeu ad hoc (« pseudo » parce qu'il n'en est pas un dans le sens formel du terme), qui modélise l'interaction entre les deux stratégies. On *cache* ensuite les coups intervenant sur le plateau commun, B, pour ne garder que les interactions avec les joueurs extérieurs à la position.

Dans notre cadre, pour composer une stratégie $\sigma\colon A \longrightarrow B$ avec une stratégie $\tau\colon B \longrightarrow C$ on considère la position, disons X, donnée par

$$\xrightarrow{A} \bullet \xrightarrow{B} \bullet \xrightarrow{C}$$

et une opération catégorique standard et très simple, le *copairing*, noté $[\sigma, \tau]$, permet de définir la stratégie dans laquelle le joueur de gauche suit σ, celui de droite suivant τ. Reste à cacher les coups sur B. La catégorie P fournit pour cela une classe spéciale de morphismes, les *coupures*, qui peuvent fusionner l'arête et les deux joueurs adjacents en un seul joueur. Dans notre exemple, on a un morphisme c

$$\xrightarrow{A} \bullet \xrightarrow{B} \bullet \xrightarrow{C} \qquad \xrightarrow{c} \qquad \xrightarrow{A} \bullet \xrightarrow{C} .$$

Pour obtenir la composée de σ et τ, on commence par faire *descendre* (en écho à la notion de descente de Grothendieck) les parties de la position de gauche, X, à celle de droite, disons Y. Pour cela, il suffit de savoir factoriser une composée $X' \xrightarrow{m} X \xrightarrow{c} Y$, où m est un coup, en $X' \xrightarrow{c'} Y' \xrightarrow{m'} Y$, où c' est une coupure et m' est à nouveau un coup. On obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "m"'] & Y' \arrow[d, "m'"] \\ X \arrow[r, "c"'] & Y, \end{tikzcd}$$

qui représente la *descente de m en m' le long de c*. Cette notion s'étend inductivement aux parties.

On passe ici sur de nombreux détails techniques, notre notion de partie étant en fait plus riche que celle de suite de coups. De même, la notion de coupure doit être significativement étendue pour obtenir le résultat souhaité. Ceci est dû à la non-linéarité du λ-calcul considéré : la descente de certains coups le long d'une coupure fait apparaitre des sortes de contractions, qui méritent un traitement spécial.

L'étape suivante est de définir la composée $\tau \circ \sigma$ comme acceptant toutes les vues obtenues par descente d'une partie acceptée par (la stratégie naïve associée à) $[\sigma, \tau]$.

Le lecteur catégoricien attend depuis longtemps l'entrée en scène de la notion de système de factorisation [15]. Décevons-le tout de suite : si les coupures définissent en effet un système de factorisation sur P, nous devons, comme mentionné plus haut, définir la descente sur une classe plus générale de morphismes, D_h^0, qu'on appelle morphismes de *descente*. Or, le système de factorisation induit par D_h^0 n'est pas pertinent dans notre cas. Nous aurons donc recours à une structure plus faible ad hoc, celle de *système de commutation*.

Pour expliquer cela, rappelons la notion de système de factorisation sur une catégorie C. Soient $f\colon X \longrightarrow X'$ et $g\colon Y \longrightarrow Y'$ deux morphismes de C. On dit que f est orthogonal à g, ce qu'on note $f \perp g$, lorsque tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y' \end{tikzcd}$$

admet un unique relèvement h faisant commuter les deux triangles. Cette définition s'étend aux ensembles de morphismes de la manière évidente et on définit, pour un ensemble M de morphismes, son *orthogonal* $\mathrm{F}^{\perp}$ *à droite* comme l'ensemble des g tels que pour tout $f \in \mathrm{F}$ on ait $f \perp g$. On définit symétriquement l'orthogonal ${}^{\perp}\mathrm{F}$ à gauche.

Définition 1.1. Un système de factorisation sur C consiste en une paire (L, R) de classes de morphismes de C, telles que

— tout morphisme $f\colon X \longrightarrow Y$ se factorise en $X \xrightarrow{l} Z \xrightarrow{r} Y$ avec $l \in \mathrm{L}$ et $r \in \mathrm{R}$;
— $\mathrm{L} = {}^{\perp}\mathrm{R}$;
— $\mathrm{L}^{\perp} = \mathrm{R}$.

On a le résultat standard :

Proposition 1.3. *La paire* (L, R) *forme un système de factorisation ssi*

(i) tout morphisme $f\colon X \longrightarrow Y$ *se factorise en* $X \xrightarrow{l} Z \xrightarrow{r} Y$ *avec* $l \in \mathrm{L}$ *et* $r \in \mathrm{R}$ *;*

(ii) cette factorisation est unique à unique isomorphisme près ;

(iii) L *et* R *contiennent tous les isomorphismes et sont stables par composition.*

Lorsqu'on écrit, ci-dessus, que les coupures induisent un système de factorisation sur P, cela signifie que la paire $({}^{\perp}(\mathrm{Cuts}^{\perp}), \mathrm{Cuts}^{\perp})$ forme un système de factorisation. En l'occurrence, on a même un système de factorisation $(\mathrm{Cuts}, \mathrm{Cuts}^{\perp})$. Un symptôme de l'inadéquation du système de factorisation induit par D_h^0 est qu'aucun des coups de notre jeu n'est dans $(\mathrm{D}_h^0)^{\perp}$. En factorisant $c \circ m$ comme ci-dessus, on n'aurait donc aucune chance d'obtenir que m' soit un coup.

Notre solution est d'introduire une notion plus faible, celle de système de commutation, qui relâche celle de système de factorisation sur les points (i) et (iii) de la proposition 1.3. Brièvement, pour le point (i), on se contente de demander que tout morphisme de la forme $l \circ r$ (avec $l \in \mathrm{L}$ et $r \in \mathrm{R}$) admette une factorisation ; pour le point (iii), on s'abstient de demander que R soit stable par composition (voir la définition 5.2 ci-dessous). On développe quelques outils généraux pour composer de tels systèmes, qui adaptent des résultats sur les systèmes de factorisation *ternaires* [43, 40]. Ceci nous permet de construire un système de commutation $(\mathrm{D}_h^0, \mathrm{M})$, où M est la classe des coups. Notons au passage que M n'est pas stable par composition et que la propriété (ii) deviendrait fausse si on considérait la sous-catégorie engendrée. Le système de commutation ainsi obtenu mène comme attendu à une définition de la composition de stratégies innocentes.

De manière inattendue, la notion de système de commutation s'avère utile par ailleurs pour démontrer la correction de notre sémantique.

Composition de stratégies et foncteurs polynomiaux booléens Venons-en au troisème aspect nouveau de notre sémantique, qui réside dans l'utilisation de la théorie des foncteurs polynomiaux pour définir la composition des stratégies. Pour expliquer cela, il faut rendre leur juste place aux versions *relativisées* des catégories de vues et de parties V et K. En effet, lorsqu'on définit les stratégies comme des préfaisceaux booléens $\mathrm{V}^{op} \longrightarrow 2$, on omet de préciser que les stratégies sont définies relativement à une position de départ donnée.

La catégorie V contient comme objets des vues sur toutes les positions. Si on considère une position X, on veut se contenter de demander qu'une stratégie sur X spécifie son acceptation pour les seules vues sur X. On définit donc la catégorie $\mathrm{V}/_X$ des *vues sur* X. Techniquement, elle s'obtient à partir de V et de X comme une catégorie *comma*. Une stratégie sur X est donc un préfaisceau booléen $(\mathrm{V}/_X)^{op} \longrightarrow 2$. De manière similaire, on définit la catégorie $\mathrm{K}/_X$ des *parties sur* X.

Pour définir la composition de stratégies, reprenons la coupure $c\colon X \longrightarrow Y$ définie plus haut et remarquons que la descente établit une relation entre les parties sur X et celles sur Y. Cette relation n'est pas fonctionnelle : certaines parties sur X n'admettent pas d'image et, de plus, l'image d'une partie, lorsqu'elle est définie, ne l'est qu'à isomorphisme près dans $\mathrm{K}/_Y$. Ainsi, plutôt qu'un foncteur $\mathrm{K}/_X \longrightarrow \mathrm{K}/_Y$, la descente est une relation entre $\mathrm{K}/_X$ et $\mathrm{K}/_Y$. Dans la catégorie des ensembles, on peut représenter toute relation $R \subseteq X \times Y$ par un *span* $X \xleftarrow{s} R \xrightarrow{t} Y$, constitué de ses projections. Ici, de même, on peut représenter la relation de descente le long de c par un span

$$\mathrm{K}/_X \xleftarrow{\mathrm{lef}} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\mathrm{rig}} \mathrm{K}/_Y$$

de foncteurs, tel que pour toutes parties $k \in \mathrm{K}/_X$ et $k' \in \mathrm{K}/_Y$, k' soit une descente de k le long de c si et seulement s'il existe $t \in \mathrm{T}_{H/c}$ tel que $\mathrm{lef}(t) = k$ et $\mathrm{rig}(t) = k'$.

Pour composer nos deux stratégies σ et τ ci-dessus, on veut d'abord considérer leur copairing $[\sigma, \tau]\colon \mathrm{V}/_X{}^{op} \longrightarrow 2$, puis calculer son comportement, qui doit être un préfaisceau $\mathrm{K}/_X{}^{op} \longrightarrow 2$ par extension de Kan à droite. On veut ensuite exprimer le fait d'accepter une partie sur Y exactement si elle est l'image par descente d'une partie acceptée sur X. Enfin, on veut restreindre le résultat aux vues sur Y pour obtenir une stratégie sur Y.

On a ainsi la suite de foncteurs

$$(\mathrm{V}/_{A;B} + \mathrm{V}/_{B;C}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{V}/_X \xhookrightarrow{i_X} \mathrm{K}/_X \xleftarrow{\mathrm{lef}} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\mathrm{rig}} \mathrm{K}/_Y \xhookleftarrow{i_Y} \mathrm{V}/_Y,$$

où $A;B$ et $B;C$ désignent respectivement les positions

$$\xrightarrow{A} \bullet \xrightarrow{B} \qquad \text{et} \qquad \xrightarrow{B} \bullet \xrightarrow{C}.$$

La composition de stratégies transporte les préfaisceaux booléens par changement de base le long de cette suite en prenant

— d'abord une extension de Kan à droite pour arriver à $\mathrm{K}/_X$,
— puis une restriction pour arriver à $\mathrm{T}_{H/c}$,
— puis une extension de Kan à gauche pour arriver à $\mathrm{K}/_Y$,
— puis enfin une nouvelle restriction.

Si l'on note $\widehat{\mathrm{C}}$ la catégorie de foncteurs $C^{op} \longrightarrow 2$, alors la composition s'écrit comme un foncteur :

$$\widehat{(\mathrm{V}/_{A;B} + \mathrm{V}/_{B;C})} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathrm{V}/_X} \xhookrightarrow{(i_X)_*} \widehat{\mathrm{K}/_X} \xrightarrow{\mathrm{lef}^*} \widehat{\mathrm{T}_{H/c}} \xrightarrow{\mathrm{rig}_!} \widehat{\mathrm{K}/_Y} \xhookrightarrow{i_Y^*} \widehat{\mathrm{V}/_Y},$$

que l'on notera en abrégé comme :

$$(\mathrm{V}/_{A;B} + \mathrm{V}/_{B;C}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{V}/_X \xhookrightarrow{\Pi_{i_X}} \mathrm{K}/_X \xleftarrow{\Delta_{\mathrm{lef}}} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\Sigma_{\mathrm{rig}}} \mathrm{K}/_Y \xhookleftarrow{\Delta_{i_Y}} \mathrm{V}/_Y,$$

où Π indique une extension à droite, Δ une restriction et Σ une extension à gauche.

Le point important est que ce foncteur est un exemple de foncteur *polynomial* entre catégories de préfaisceaux, au sens de Kock [30, chapitre 16]. Il existe plusieurs notions de foncteurs polynomiaux, même entre catégories. Considérons un diagramme

$$\mathrm{C} \xleftarrow{d} \mathrm{E} \xrightarrow{p} \mathrm{F} \xrightarrow{s} \mathrm{D}.$$

Un tel diagramme induit un foncteur

$$\mathrm{C} \xleftarrow{\Delta_d} \mathrm{E} \xrightarrow{\Pi_p} \mathrm{F} \xrightarrow{\Sigma_s} \mathrm{D}.$$

Dans ce travail, on considèrera la notion suivante de foncteur polynomial :

Définition 1.2. Un foncteur $\widehat{\mathrm{C}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{D}}$ est *polynomial* si et seulement s'il est isomorphe à une composée de foncteurs de la forme $\Sigma_s \circ \Pi_p \circ \Delta_d$.

Un résultat non-trivial habituel de la théorie des foncteurs polynomiaux est leur stabilité par composition : si nous n'avons pas trouvé de preuve de cette stabilité dans notre cadre, elle n'intervient cependant pas dans les résultats présentés dans ce travail.

La composition des stratégies innocentes est un foncteur polynomial. Cette construction nous mènera à une méthode presque systématique pour démontrer les résultats attendus sur cette notion de composition, tels que l'associativité de la composition. Dans la plupart des cas, appliquer la méthode bêtement conduit à réduire le résultat aux quelques cas qu'on aurait trouvés difficiles dans une démonstration plus standard.

1.3 Conclusion et perspectives

Nous introduisons dans cette thèse trois nouvelles techniques pour définir des sémantiques de jeux et raisonner dessus.

— Nous enrichissons la notion de stratégie en y ajoutant de nouveaux morphismes au-delà de l'ordre préfixe ; cela permet la mise en relation des stratégies innocentes et des stratégies naïves par extension de Kan à droite.

— Nous proposons la notion de système de commutation pour définir l'opération de *hiding*, qui permet de cacher l'interaction entre deux joueurs.

— Enfin, nous définissons la composition des stratégies innocentes à l'aide de foncteurs polynomiaux booléens, ce qui mène à une démonstration nouvelle d'associativité.

À l'aide de ces techniques, nous définissons un nouveau modèle de jeux pour un λ-calcul de continuations, dont nous démontrons la correction. Nous laissons ouverte, en revanche, la question de sa complétude.

Plusieurs voies d'améliorations de ce travail restent cependant ouvertes. La principale d'entre elles réside dans la structure utilisée pour décrire le jeu, la catégorie des positions P. Les objets de cette structure ad hoc sont, en gros, des espaces topologiques finis étiquetés. Cette catégorie n'a aucune bonne propriété habituelle, telle que la présence de certaines limites ou colimites, ce qui rend les preuves de certains résultats particulièrement techniques, alors que les énoncés semblent tout à fait naturels.

Cette catégorie a l'avantage de pouvoir représenter les morphismes que nous avons appelés plus haut les coupures, ce qui va de pair avec notre volonté de traiter le *hiding* avec les systèmes de commutation. Or, dans le développement de la thèse, nous considérons des structures proches des terrains de jeux évoqués plus haut, sans les atteindre tout à fait : on peut regretter ceci, du fait que les terrains de jeux semblent offrir de meilleures propriétés. Cependant, les outils utilisés jusqu'ici pour définir ces derniers, à savoir les préfaisceaux finis sur des catégories graduées, semblent peu propices à modéliser les coupures.

Nous posons donc la question : peut-on, dans le cadre des terrains de jeux et plus précisément des préfaisceaux finis sur une catégorie graduée, représenter le *hiding* sans trop y perdre en simplicité ? Il semble en particulier peu encourageant de conserver notre catégorie P telle quelle.

En revanche, il nous semble prometteur d'utiliser :

— les extensions de Kan à droite pour relier les stratégies innocentes aux stratégies naïves ;
— ainsi que les foncteurs polynomiaux booléens pour définir la composition des stratégies innocentes et démontrer son associativité.

Ces deux outils se rélèvent finalement assez indépendants du choix de la représentation concrète du jeu, au point qu'ils s'appliqueraient probablement à d'autres approches. Ils ne dépendent en particulier pas du traitement du *hiding* comme un système de commutation. Il pourrait par exemple être fructueux d'appliquer ces techniques dans le cadre original de la sémantique de jeux.

Chapitre 2

Catégories de réponse

Ce chapitre sert essentiellement, du point de vue du travail sur la sémantique de jeux présentée par la suite, à introduire :

— un λ-calcul, appelé λ-calcul de réponse, avec tous les produits, ainsi que les implications de la forme $A \longrightarrow \perp$ pour un type $\perp$ fixé ;

— les *catégories de réponse*, qui définissent la sémantique catégorique habituelle de ce λ-calcul.

Le but de ce travail de thèse sera de montrer, aux chapitres suivants, que les stratégies gagnantes de notre sémantique de jeux forment une *catégorie de réponse* de Selinger [45], la définition de cette structure étant redonnée dans ce chapitre en partie 2.1.

Nous définissons la sémantique catégorique habituelle du λ-calcul de réponse en construisant la *catégorie syntaxique* engendrée par le λ-calcul. Il s'agit d'une catégorie $\Lambda(\mathbb{A})$ dont les objets sont les *types* du λ-calcul et dont les morphismes sont les classes d'équivalences pour $\beta\eta$ de termes typés en contexte. Un morphisme $A \longrightarrow B$ dans cette catégorie est un terme M qui admet un jugement de typage

$$x\colon A \vdash M\colon B.$$

Les produits et l'exponentielle sur les termes engendrent des produits et une exponentielle sur la catégorie syntaxique, qui satisfont les axiomes des catégories de réponse. Nous montrons en partie 2.3 que la catégorie syntaxique $\Lambda(\mathbb{A})$ est une catégorie de réponse *libre*.

Lafont, Reus et Streicher [32] adoptent un point de vue différent, en exprimant l'implication par une négation. Du point de vue catégorique, cela revient à introduire la notion de structure de catégorie cartésienne équipée d'un foncteur de négation [46] (on se restreindra ici au cas où le tenseur est en réalité un produit cartésien). Il est communément accepté que ces deux points de vue sont les mêmes : catégoriquement, cela s'exprime comme une équivalence entre la catégorie des (petites) catégories de réponse et celle des catégories de dialogue. Cette preuve, essentiellement technique, ne semble cependant pas avoir été totalement écrite, aussi nous la détaillons dans les parties 2.1 et 2.2.

Ce résultat permet en particulier de préciser les conditons de cohérence requises sur les foncteurs préservant les structures de réponses ou la négation afin de vérifier l'équivalence entre ces deux notions.

2.1 Définition de la catégorie des catégories de réponse

Définition 2.1. Une catégorie de réponse est une catégorie C ayant :

(i) les produits finis, et on note 1 l'objet terminal,

(ii) un objet $\perp$ tel que toutes les exponentielles de la forme $\perp^A$ existent, pour tout objet A. On dit que $\perp$ est un *objet exponentiel*.

Il est bien connu qu'avoir les produits finis dans une catégorie est équivalent à demander uniquement les produits binaires ainsi que la présence d'un objet terminal : c'est ce point de vue que nous adopterons dans la suite. Pour alléger les notations lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité, nous noterons simplement AB pour le produit $A \times B$, en convenant que l'associativité des produits se fait à gauche. On notera également $\alpha_{A,B,C} \colon A(BC) \longrightarrow ABC$ l'associativité, en omettant les indices lorsque le contexte le permet.

Lemme 2.1. *Pour tout objet C, l'objet $\perp^C$ est lui-même exponentiel dans* C*, en posant $\left(\perp^C\right)^B := \perp^{BC}$. Son morphisme d'évaluation* $\mathbf{ev}'$ *est la curryfiée dans le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
\perp^{BC}BC \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[drrr, "\mathbf{ev}'C"'] & \perp^{BC}(BC) \arrow[r, "\mathbf{ev}"] & \perp & \\
& & & \perp^C C. \arrow[u, "\mathbf{ev}"']
\end{tikzcd}$$

Preuve. Pour un morphisme $m \colon AB \longrightarrow \perp^C$, la flèche $\lambda' m \colon A \longrightarrow \perp^{BC}$ est donnée par la curryfication pour $\perp$ de la flèche supérieure du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A(BC) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drrr, "\lambda' m(BC)"'] & ABC \arrow[r, "mC"] & \perp^C C \arrow[r, "\mathbf{ev}"] & \perp & \\
& & & & \perp^{BC}BC. \arrow[u, "\mathbf{ev}"']
\end{tikzcd}$$

Considérons par ailleurs le diagramme suivant, pour n'importe quel morphisme $\psi \colon A \longrightarrow \perp^{BC}$:

$$\begin{tikzcd}
A(BC) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\psi(BC)"'] & ABC \arrow[r, "mC"] \arrow[dr, "\psi BC"'] \arrow[d, phantom, "="] & \perp^C C \arrow[r, "\mathbf{ev}"] & \perp & \\
& \perp^{BC}(BC) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drrr, equal] & \perp^{BC}BC \arrow[u, "\mathbf{ev}'C"'] \arrow[dr, "\alpha^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "(\star)"] & = & \\
& & & \perp^{BC}(BC) \arrow[uur, "\mathbf{ev}"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme α est un isomorphisme, et par propriété universelle de $\mathbf{ev}$, le périmètre du diagramme commute si et seulement si le triangle marqué avec $(\star)$ commute, ce qui prouve d'une part que $\lambda' m$ vérifie :

$$\mathbf{ev}'(\lambda' m B) = m$$

et d'autre part son unicité. $\square$

La curryfication partielle λ' et l'évaluation $\mathbf{ev}'$ définissent un isomorphisme naturel entre les homsets $\mathrm{C}(AB, \perp^C)$ et $\mathrm{C}(A, \perp^{BC})$. Étant donné un morphisme $m \colon ABC \longrightarrow \perp^D$ dans C, il existe deux manières d'obtenir la flèche curryfiée $A \longrightarrow \perp^{BCD}$: soit en appliquant la curryfication partielle deux fois (sur C puis sur B), soit en utilisant l'associativité puis en curryfiant $\alpha m \colon A(BC) \longrightarrow \perp^D$. Dans une catégorie de réponse, on peut prouver que ces deux méthodes aboutissent au même résultat :

Lemme 2.2. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}(ABC, \bot^D) \arrow[r, "\mathrm{C}(\alpha, \bot^D)"] \arrow[d, "\lambda'"'] & \mathrm{C}(A(BC), \bot^D) \arrow[dd, "\lambda'"] \\
\mathrm{C}(AB, \bot^{(CD)}) \arrow[d, "\lambda'"'] & \\
\mathrm{C}(A, \bot^{(B(CD))}) \arrow[r, "\mathrm{C}(A, \bot^{\alpha^{-1}})"'] & \mathrm{C}(A, \bot^{(BCD)})
\end{tikzcd}$$

Preuve. Soit $m\colon ABC \longrightarrow \bot^D$. Son image par la partie supérieure du diagramme est d'après le lemme 2.1 l'unique flèche telle que :

$$\begin{tikzcd}
A(BC) \arrow[rr, "\lambda'(m \circ \alpha)(BC))"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \bot^{BCD}(BC) \arrow[dd, "\mathbf{ev}'"] \\
& ABC \arrow[dr, "m"'] & \\
& & \bot^D
\end{tikzcd}$$

commute. L'image de m par la partie inférieure du diagramme est la flèche :

$$A \xrightarrow{\lambda'\lambda' m} \bot^{B(CD)} \xrightarrow{\bot^{\alpha^{-1}}} \bot^{BCD},$$

donc il suffit de vérifier que sa composition avec $\mathbf{ev}'$ est bien égale à $m \circ \alpha$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A(BC) \arrow[rr, "\lambda'\lambda' m(BC)"] \arrow[dr, "\alpha"'] \arrow[drr, phantom, "=^\dagger"] & & \bot^{B(CD)}(BC) \arrow[rr, "\bot^{\alpha^{-1}}(BC)"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[drr, phantom, "=^\dagger"] & & \bot^{BCD}(BC) \arrow[dd, "\mathbf{ev}'"] \\
& ABC \arrow[r, "\lambda'\lambda' mBC"] \arrow[dr, "\lambda' mC"'] \arrow[drr, bend right, "m"'] \arrow[drr, phantom, "=^\ddagger"] & \bot^{B(CD)}BC \arrow[r, "\bot^{\alpha^{-1}}BC"] \arrow[d, "\mathbf{ev}'C"] & \bot^{BCD}BC \arrow[ur, "\alpha^{-1}"] & \\
& & \bot^{CD}C \arrow[drr, "\mathbf{ev}'"] \arrow[drr, phantom, "=^\ddagger"] & & \\
& & & & \bot^D
\end{tikzcd}$$

Les parties marquées avec † commutent par naturalité de α. Les parties marquées avec ‡ commutent grâce au lemme 2.1. Enfin, pour prouver que le pentagone restant commute, on montre que son image par le foncteur $- \times D$ commute :

$$
\begin{tikzcd}
\bot^{B(CD)}BCD \arrow[rr, "\bot^{\alpha^{-1}}BCD"] \arrow[dr, "\alpha^{-1}"] \arrow[drr] \arrow[ddd, "\mathbf{ev}'CD"'] & & \bot^{BCD}BCD \arrow[rr, "\alpha^{-1}D"] \arrow[dr] & & \bot^{BCD}(BC)D \arrow[dl, "\alpha^{-1}"'] \arrow[ddd, "\mathbf{ev}'D"] \\
& (\times) & \bot^{B(CD)}(BCD) \arrow[r, "\bot^{\alpha^{-1}}(BCD)"] \arrow[d, "\bot^{B(CD)}\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\ddagger)"] & \bot^{BCD}(BCD) \arrow[d, "\mathbf{ev}"] & \\
& \bot^{B(CD)}B(CD) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\mathbf{ev}'(CD)"'] \arrow[dl, phantom, "(\times)"] & \bot^{B(CD)}(B(CD)) \arrow[r, "\mathbf{ev}"] \arrow[dr, phantom, "(\dagger)"] & \bot \arrow[dr, phantom, "(\dagger)"] & \\
& \bot^{CD}(CD) \arrow[urr, "\mathbf{ev}"] & & & \\
\bot^{CD}CD \arrow[uur, "\alpha^{-1}"] \arrow[rrr, "\mathbf{ev}'D"'] & & & \bot^{D}D. \arrow[uuurr, "\mathbf{ev}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Les parties marquées avec $(\times)$ commutent par associativité du produit cartésien. Les parties marqués avec $(\dagger)$ sont toutes de la forme :

$$
\begin{tikzcd}
\bot^{XY}XY \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\mathbf{ev}'Y"'] & \bot^{XY}(XY) \arrow[r, "\mathbf{ev}"] & \bot \\
\bot^{Y}Y \arrow[urr, "\mathbf{ev}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

et commutent par définition de $\mathbf{ev}'$. Enfin, le carré marqué $(\ddagger)$ correspond à la définition de $\bot^{\alpha^{-1}}$, qui est la flèche $\lambda(\mathbf{ev} \circ \bot^{B(CD)}\alpha^{-1})$. $\square$

On note Resp la catégorie des petites catégories de réponse, en prenant pour morphismes les foncteurs qui préservent la structure de réponse à isomorphismes cohérents près. Précisément, un foncteur $f\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ entre deux catégories de réponse est un *foncteur de réponse* lorsque :

Définition 2.2 (Foncteur de réponse)**.** (i) f préserve les produits. On notera f_{AB} l'isomorphisme $f(AB) \longrightarrow fAfB$.

(ii) il existe un isomorphisme $f(\bot) \longrightarrow \bot$, noté $f_\bot$,

(iii) la flèche $f(\bot^A) \longrightarrow \bot^{fA}$ définie par

$$
\begin{tikzcd}
f(\bot^A)fA \arrow[r, "\cong"] \arrow[drrr, "\lambda(-)(fA)"'] & f(\bot^A A) \arrow[r, "f\mathbf{ev}"] & f(\bot) \arrow[r, "\cong"] & \bot \\
& & & \bot^{fA}(fA) \arrow[u, "\mathbf{ev}"']
\end{tikzcd}
$$

est un isomorphisme. On la note $f_{\bot^A}$.

On peut voir que ces isomorphismes pris entre les objets $f(\bot^{AB}) \longrightarrow \bot^{fBfA}$ correspondent aux flèches induites par les diagrammes similaires pour $\mathbf{ev}'$ et λ'.

2.2 Catégories de dialogue (catégories cartésiennes avec négation)

Définition 2.3. On appelle *catégorie de dialogue cartésienne*, ou plus simplement catégorie de dialogue dans la suite, une catégorie C qui possède :

(i) les produits finis, en notant 1 l'objet terminal,

(ii) un foncteur de négation contravariant $\neg\colon \mathrm{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{C}$,

(iii) et une bijection

$$\varphi_{A,B,C}\colon \mathrm{C}(A \times B, \neg C) \longrightarrow \mathrm{C}(A, \neg(B \times C)) \tag{2.1}$$

naturelle en A, B et C, vérifiant le diagramme de cohérence :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}(ABC, \neg D) \arrow[r, "\mathrm{C}(\alpha, \neg D)"] \arrow[d, "\varphi_{AB,C,D}"'] & \mathrm{C}(A(BC), \neg D) \arrow[dd, "\varphi_{A,BC,D}"] \\
\mathrm{C}(AB, \neg(CD)) \arrow[d, "\varphi_{A,B,CD}"'] & \\
\mathrm{C}(A, \neg(B(CD))) \arrow[r, "\mathrm{C}(A, \neg\alpha^{-1})"'] & \mathrm{C}(A, \neg(BCD)).
\end{tikzcd}$$

Définition 2.4. On note Dial la catégorie des petites catégories de dialogue cartésiennes, en prenant pour flèches les foncteurs qui préservent la structure de dialogue à isomorphismes cohérents près, i.e., $f\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ est un foncteur de dialogue quand :

(i) f préserve les produits. On notera f_{AB} l'isomorphisme $f(AB) \longrightarrow fAfB$;

(ii) il existe des isomorphismes $f_{\neg A}\colon f(\neg A) \longrightarrow \neg fA$;

(iii) f est cohérent avec φ, i.e., le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}(AB, \neg C) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{C}(A, \neg(BC)) \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{C}(f(AB), f\neg C) \arrow[d, "\mathrm{C}(f_{AB}^{-1}, f_{\neg C})"'] & \mathrm{C}(fA, f\neg(BC)) \arrow[d, "\mathrm{C}(fA, (\neg f_{BC}^{-1}) f_{\neg BC})"] \\
\mathrm{C}(fAfB, \neg fC) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{C}(fA, \neg fBfC).
\end{tikzcd}$$

Les catégories de réponse sont toutes des catégories de dialogue dès lors que l'on choisit comme foncteur de négation l'exponentiation $\perp^{-}$, et pour φ la fonction qui à chaque morphisme $m\colon AB \longrightarrow \perp^{C}$ associe sa curryfiée partielle $\lambda' m\colon A \longrightarrow \perp^{BC}$. La cohérence de φ est donnée par le lemme 2.2.

De plus, tout foncteur de réponse $f\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ est également un foncteur de dialogue entre ces catégories vues comme des catégories de dialogue, puisque :

1. f préserve les produits,
2. les isomorphismes requis $f(\neg A) \cong \neg fA$ sont les isomorphismes $f(\perp^{A}) \cong \perp^{fA}$ dans la catégorie de réponse D,
3. la cohérence de f avec φ est vérifiée par le fait que f préserve l'exponentielle.

On note $F\colon \mathrm{Resp} \longrightarrow \mathrm{Dial}$ le foncteur correspondant.

Inversement, on peut définir un foncteur $G\colon \mathrm{Dial} \longrightarrow \mathrm{Resp}$ qui à chaque catégorie de dialogue associe une catégorie de réponse en choisissant, pour tout object B :

— comme objet exponentiable l'objet $\perp = \neg 1$, avec $(\neg 1)^{B} = \neg(B \times 1)$,

— comme morphisme d'évaluation la flèche $\varphi^{-1}\left(id_{\neg(B\times 1)}\right)$.

Lemme 2.3. *Les flèches* $\mathbf{ev} = \varphi^{-1}\left(id_{\neg(B\times 1)}\right)$ *définissent un objet exponentiable* $\bot$*.*

Preuve. Pour tout morphisme $m\colon AB \longrightarrow \neg 1$, soit $\psi\colon A \longrightarrow \neg(B1)$ un morphisme qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} AB & \xrightarrow{\;m\;} & \neg 1 \\ & \searrow^{\psi B} & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{ev}=\varphi^{-1}(id)} \\ & & \neg(B1)B. \end{array}$$

Par naturalité de $\varphi^{-1}_{-,B,C}$ en A, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} id & \longmapsto & & & \psi \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ & \mathrm{Hom}(\neg(BC),\neg(BC)) & \xrightarrow{-\circ\psi} & \mathrm{Hom}(A,\neg(BC)) & \\ & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{-1}} & \\ & \mathrm{Hom}(\neg(BC)B,\neg C) & \xrightarrow[-\circ(\psi\times B)]{} & \mathrm{Hom}(AB,\neg C) & \varphi^{-1}(\psi) \\ \downarrow & & & & \| \\ \varphi^{-1}(id) & \longmapsto & & & \varphi^{-1}(id)\circ(\psi\times B) \end{array}$$

Ainsi, on a l'identité :

$$AB \xrightarrow{\;\psi B\;} \neg(B1)B \xrightarrow{\;\varphi^{-1}(id)\;} \neg 1, \qquad \varphi^{-1}(id)\circ \psi B = \varphi^{-1}(\psi)\colon AB \longrightarrow \neg 1$$

ce qui prouve que $\lambda m = \varphi(m)$ fait commuter le triangle. En composant par φ, on a $\psi = \varphi(m)$, donc λm est unique. □

Lemme 2.4. *Tout foncteur de dialogue* $f\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ *est également un foncteur de réponse, avec la structure de réponse précédente sur* C *et* D*.*

Preuve. Le foncteur f préserve les produits, et l'isomorphisme $f(\bot) \longrightarrow \bot$ correspond à l'isomorphisme $f(\neg 1) \cong \neg f1 \cong \neg 1$ dans D.

Il reste à prouver que la flèche canonique $\psi\colon f(\neg(A1)) \longrightarrow \neg(fA1)$ est un isomorphisme. On considère pour cela le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\neg(A1),\neg(A1)) & \xrightarrow{\;\varphi^{-1}\;} & \mathrm{Hom}(\neg(A1)A,\neg 1) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{Hom}(f\neg(A1),f\neg(A1)) & & \mathrm{Hom}(f(\neg(A1)A),f\neg 1) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(id,h_1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(k_1,k_2)} \\ \mathrm{Hom}(f\neg(A1),\neg(fAf1)) & \xrightarrow{\;\varphi^{-1}\;} & \mathrm{Hom}((f\neg(A1))A,\neg f1) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(h_2,h_3)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(k_3,k_4)} \\ \mathrm{Hom}(\neg((fA)1),\neg((fA)1)) & \xrightarrow{\;\varphi^{-1}\;} & \mathrm{Hom}(\neg((fA)1)fA,\neg 1) \end{array}$$

où les h_i et k_j sont les isomorphismes associés à f. Il est facile de voir que $h_3 h_1 h_2 = id$. Le carré du haut commute par cohérence de f par rapport à φ^{-1}, et le carré du bas commute par naturalité de φ^{-1} en ses premier et troisième paramètres.

En prenant l'image de $id_{\neg(A1)}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
f\neg(A1)fA \arrow[r, "k_3k_1"] \arrow[drrr, "h(fA)"'] & f((\neg A1)A) \arrow[r, "f\varphi^{-1}(id_{\neg(A1)})"] & f(\neg 1) \arrow[r, "k_2k_4"] & \neg 1 \\
 & & & \neg((fA)1)(fA) \arrow[u, "\varphi^{-1}(id_{\neg(fA)1})"']
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 2.3, ψ est l'unique flèche qui fait commuter ce diagramme, donc $\psi = h$ est un isomorphisme. □

On peut désormais prouver l'équivalence entre les catégories de dialogue et les catégories de réponse.

Théorème 2.5. *Les foncteurs F et G*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Resp} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathrm{Dial} \arrow[l, bend left, "G"]
\end{tikzcd}$$

définissent une équivalence de catégories.

Preuve. L'image par FG d'une catégorie de dialogue D est une catégorie de dialogue dont la négation vaut $\neg(-\ 1)$, qui est isomorphe à $\neg$.

L'image par GF d'une catégorie de réponse C est une catégorie de réponse dont l'objet exponentiable est $\perp^1$, qui est isomorphe à $\perp$. Le lemme 2.1 garantit que toutes les exponentielles sont isomorphes. □

2.3 Catégories de réponse libres

Dans cette section, on fixe un ensemble de types atomiques que l'on note $\mathbb{A}$, et on construit une catégorie de réponse syntaxique engendrée par $\mathbb{A}$, sur le même modèle que les catégories cartésiennes fermées avec le λ-calcul simplement typé [10]. On introduit pour cela une variante du λ-calcul, notée λ_d-calcul. On prouve au théorème 2.9 que cette catégorie est la catégorie de réponse libre engendrée par $\mathbb{A}$.

2.3.1 λ-calcul en forme β-normale et η-longue

Étant donné un ensemble dénombrable de variables, on considère l'ensemble des λ-termes à α-équivalence près engendré par la grammaire :

$$\begin{array}{rcccc} M, N, \ldots & ::= & x & | & () \\ & | & \pi_i M & | & \langle M, N\rangle \\ & | & \lambda x.M & | & MN \end{array} \tag{2.2}$$

dont on rappelle les règles usuelles de β-réduction :

$$\begin{array}{rcl} (\lambda y.M)N & \longrightarrow_\beta & M[y \mapsto N] \\ \pi_i\langle M_1, M_2\rangle & \longrightarrow_\beta & M_i \end{array}$$

De même que les catégories de réponse se restreignent à un seul objet exponentiable, on définit les termes du λ-calcul de réponse comme un sous-ensemble du λ-calcul simplement typé en restreignant le membre droit de la flèche à un seul symbole, noté $\perp$. Ainsi, les types sont engendrés par la grammaire :

$$A, B, \ldots \quad ::= \quad \mathbb{A} \quad | \quad 1 \quad | \quad \perp \quad | \quad \perp^A \quad | \quad A \times B \tag{2.3}$$

et on dérive les jugements de typage à partir des règles :

$$\Gamma, a\colon A \vdash a\colon A \qquad\qquad \Gamma \vdash ()\colon 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash M\colon \perp^A \qquad \Gamma \vdash N\colon A}{\Gamma \vdash MN\colon \perp} \qquad\qquad \frac{\Gamma, y\colon A \vdash M\colon \perp}{\Gamma \vdash \lambda y.M\colon \perp^A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M\colon A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_i M\colon A_i} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash M\colon A \qquad \Gamma \vdash N\colon B}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle\colon A \times B}$$

Lemme 2.6 (Substitution)**.** *Si* $\Gamma, x\colon A \vdash M\colon B$ *et* $\Gamma \vdash N\colon A$*, alors* $\Gamma \vdash M[x \mapsto N]\colon B$*.*

Corollaire 2.7 (Réduction du sujet)**.** *Si* $\Gamma \vdash M\colon A$ *et* M *se réduit en* N*, alors on peut typer* N *en* $\Gamma \vdash N\colon A$*.*

Grâce à la réduction du sujet, puisque tout terme du λ_d-calcul se traduit en un λ-terme simplement typé, on en déduit que β est fortement normalisante.

Il reste à traiter le cas de l'η-expansion, et on procède pour cela exactement comme [26]. Si l'on dispose d'un terme typé, alors on réécrit :

$$\begin{array}{lll} N & \longrightarrow_\eta & () \qquad\qquad \text{si le sous-terme } N \text{ est de type } 1, \\ N & \longrightarrow_\eta & \lambda y.Ny \qquad \text{si le sous-terme } N \text{ est de type } \perp^A, \\ N & \longrightarrow_\eta & \langle \pi_1 N, \pi_2 N\rangle \quad \text{si le sous-terme } N \text{ est de type } A \times B, \end{array}$$

dans les cas où ces réécritures ne créent pas de β-redex. Un terme est dit *en forme η-longue* lorsque toute étape d'η-expansion dont il est la source crée un β-redex.

Remarque 2.1. L'η-expansion préserve les types.

Le λ_d-calcul est un fragment du λ-calcul stable par β et η : en appliquant la même preuve que dans [26], on peut donc montrer que tout terme typé du λ_d-calcul admet une forme normale β-réduite et η-longue :

Lemme 2.8. *Le λ_d-calcul est fortement normalisant pour $\beta\eta$.*

Dans la section suivante, on s'intéresse à la sémantique catégorique du λ_d-calcul. Cette dernière interprète les termes quotientés par $\beta\eta$ en tant que morphismes. L'existence de formes β-réduites et η-longues permet de construire cette catégorie en choisissant un représentant canonique de chaque classe d'équivalence, et donc de raisonner sur les morphismes en procédant par induction sur la syntaxe des termes $\beta\eta$-normaux.

2.3.2 Catégorie syntaxique

Afin de construire la sémantique catégorique usuelle pour le λ_d-calcul, on suit le même schéma que pour le λ-calcul simplement typé et les catégories cartésiennes fermées, en définissant d'abord la catégorie syntaxique $\Lambda(\mathbb{A})$ formée par les termes du λ_d-calcul puis en prouvant que cette catégorie syntaxique est une catégorie de réponse (proposition 2.11). On montre finalement le théorème :

Théorème 2.9. *La catégorie syntaxique* $\Lambda(\mathbb{A})$ *est la catégorie de réponse libre engendrée par l'ensemble de types atomiques* $\mathbb{A}$.

Définition 2.5. Soit $\Lambda(\mathbb{A})$ la catégorie dont :
- les objets sont les formules engendrées par la grammaire (2.3) ;
- les morphismes $A \longrightarrow B$ sont les termes M du λ_d-calcul en forme β-normale et η-longue qui admettent un jugement de typage :

$$x\colon A \vdash M\colon B.$$

La composition dans $\Lambda(\mathbb{A})$ est, comme d'habitude, donnée par la substitution. Ainsi, si l'on dispose de deux termes $M\colon A \longrightarrow B$ et $N\colon B \longrightarrow C$, alors la forme normale de $N[x \mapsto M]$ admet, d'après lemme de substitution 2.6, un jugement de typage

$$x\colon A \vdash N[x \mapsto M]\colon C.$$

L'identité en A est simplement la forme η-longue du terme x. L'associativité de la composition traduit l'égalité :

$$(P[x \mapsto N])[x \mapsto M] = P[x \mapsto N[x \mapsto M]]$$

où $M\colon A \longrightarrow B$, $N\colon B \longrightarrow C$ et $P\colon C \longrightarrow D$. Cette égalité est évidemment vérifiée par le λ-calcul. On a donc bien que :

Lemme 2.10. $\Lambda(\mathbb{A})$ *est une catégorie.*

Les produits et exponentielles syntaxiques sur les formules créent directement la structure de réponse de $\Lambda(\mathbb{A})$:

Proposition 2.11. *La catégorie* $\Lambda(\mathbb{A})$ *est une catégorie de réponse.*

Preuve. Comme indiqué précédemment, on montre que le produit de deux objets A et B de $\Lambda(\mathbb{A})$ est la formule $A \times B$. Les projections $\pi\colon A \times B \longrightarrow A$ et $\pi'\colon A \times B \longrightarrow B$ sont définies à partir des formes η-longues des termes :

$$\begin{array}{rcl} \pi & := & (x\colon A \times B \vdash \pi_1 x\colon A) \\ \pi' & := & (x\colon A \times B \vdash \pi_2 x\colon B) \end{array}$$

et, pour tout cône $x\colon C \vdash P\colon A$, $x\colon C \vdash Q\colon B$, l'unique morphisme $C \longrightarrow A \times B$ qui joint ce cône aux projections est la forme normale de $\langle P, Q\rangle$. Un calcul montre que $\pi \circ \langle P, Q\rangle = P$ et que $\pi' \circ \langle P, Q\rangle = Q$. L'unicité vient du fait que $\langle P, Q\rangle$ est de type $A \times B$ et est en particulier en forme η-longue. Si l'on suppose l'existence d'une flèche $F\colon C \longrightarrow A \times B$ qui joint les deux cônes, alors comme F est β-normal et η-long, il existe F_1 et F_2 tels que $F = \langle F_1, F_2\rangle$. En composant avec π et π', on a bien $F_1 = P$ et $F_2 = Q$.

L'exponentielle de A est donnée par la formule $\perp^A$. Le morphisme d'évaluation $\mathbf{ev}\colon \perp^A \times A \longrightarrow \perp$ est le terme typé :

$$x\colon \perp^A \times A \vdash (\pi_1 x)(\pi_2 x)\colon \perp.$$

Pour tout morphisme $M\colon A \times B \longrightarrow \perp$, l'unique flèche λM qui fait commuter

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "M"] \arrow[dr, "\lambda M \times id_B"'] & \perp \\ & \perp^B \times B \arrow[u, "\mathbf{ev}"'] \end{tikzcd}$$

est donnée par le terme

$$x\colon A \vdash \lambda y.M[x \mapsto \langle x, y\rangle]\colon \perp^B.$$

Un calcul donne $\mathbf{ev} \circ (\lambda M \times id_B) =_{\beta\eta} M[x \mapsto \langle \pi_1 x, \pi_2 x\rangle]$, qui a la même forme normale que M.

Pour l'unicité, tout autre terme $F\colon A \longrightarrow \perp^B$ en forme normale et qui fait commuter le diagramme s'écrit, à cause de son type, sous la forme $F = \lambda y.F'$. On peut réduire $\mathbf{ev}\circ(F\times id)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{ev} \circ (F \times id) & = & (\pi_1 x)(\pi_2 x)[x \mapsto \langle (\lambda y.F')[x \mapsto \pi_1 x], \pi_2 x\rangle] \\ & = & F'[x \mapsto \pi_1 x][y \mapsto \pi_2 x] \end{array}$$

qui par hypothèse est convertible à M. Or, la substitution :

$$\sigma = [x \mapsto \pi_1 x][y \mapsto \pi_2 x][x \mapsto \langle x, y\rangle]$$

est β-égale à l'identité, donc on a :

$$F' = F'\sigma = M[x \mapsto \langle x, y\rangle]$$

ce qui montre l'unicité de λM. □

Lien avec la structure de dialogue Lors de la définition des types du λ_d-calcul, nous aurions pu faire le choix équivalent d'introduire une négation syntaxique, i.e., choisir les types engendrés par la grammaire :

$$A, B, \ldots \quad ::= \quad \mathbb{A} \quad | \quad 1 \quad | \quad \neg A \quad | \quad A \times B \tag{2.4}$$

Le théorème 2.5 permet en effet ce choix, à une équivalence de catégories près. Nous aurions donc dû prouver, à la place de la proposition 2.11, que $\Lambda(\mathbb{A})$ est une catégorie de dialogue cartésienne, comme défini en section 2.2. Il aurait cependant fallu définir les isomorphismes $\varphi_{A,B,C}$ sur les termes du λ_d-calcul, puis prouver leur naturalité en A, B et C ainsi que le diagramme de cohérence : ces résultats reviennent à effectuer des vérifications calculatoires, qui sont immédiates lorsque l'on considère simplement les exponentielles.

Cependant, en partie 7.6 où l'on s'intéressera à la catégorie des stratégies gagnantes du jeu graphique, la structure du jeu est telle qu'il est au contraire plus facile de prouver que la catégorie des stratégies gagnantes est une catégorie de dialogue cartésienne. Le résultat du théorème 2.5 est donc crucial pour faire le lien entre le λ-calcul et le jeu graphique.

Il ne reste désormais plus qu'à montrer l'initialité de la catégorie syntaxique. On redonne pour cela d'abord la définition de *catégorie de réponse libre (ou initiale) engendrée par un ensemble*. Soit $\mathcal{U}\colon \mathrm{Resp} \longrightarrow \mathrm{Set}$ le foncteur d'oubli qui envoie chaque catégorie de réponse sur son ensemble d'objets. On dit que $\mathcal{F}\mathbb{A}$ est la catégorie de réponse libre engendrée par $\mathbb{A}$ s'il existe une fonction

$$\mathbb{A} \xrightarrow{\eta} \mathcal{U}\mathcal{F}\mathbb{A}$$

telle que pour toute fonction $F\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{U}\mathrm{D}$, où D est une catégorie de réponse, alors il existe un foncteur de réponse $F^*\colon \mathcal{F}\mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{D}$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{U}\mathcal{F}\mathbb{A} \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}F^*"] \\ & \mathcal{U}D. \end{tikzcd}$$

Ce foncteur est unique dans le sens suivant : s'il existe un autre foncteur $G\colon \mathcal{F}\mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{D}$ qui fait commuter le même diagramme, alors il existe un isomorphisme naturel $G \cong F^*$.

Preuve du théorème 2.9. La fonction η est la fonction évidente qui envoie chaque point de $\mathbb{A}$ sur le type atomique correspondant.

Le foncteur F^* est défini par induction sur les types et la structure des termes. Sur les objets :

— $F^*(a) = a$ quand $a \in \mathbb{A}$,
— $F^*(A \times B) = F^*A \times F^*B$,
— $F^*(\bot) = \bot$,
— $F^*(1) = 1$,
— $F^*(\bot^A) = \bot^{F^*A}$.

et sur les morphismes :

— $F^*(x\colon a \vdash x\colon a) = id_{Fa}$,
— $F^*(\langle M, N\rangle) = \langle F^*M, F^*N\rangle$,
— $F^*(MN) = \mathbf{ev} \circ \langle F^*M, F^*N\rangle$,
— $F^*(()) = ()$,
— $F^*(\lambda y.M) = \lambda F^*(M[x \mapsto \pi_1 x, y \mapsto \pi_2 x])$.

Sur les types atomiques, tout autre foncteur G qui fait commuter le diagramme vérifie $Ga = Fa$ pour $a \in \mathbb{A}$. Or, G préserve la structure de réponse de $\mathcal{F}\mathbb{A}$ donc par induction sur la structure des types, les isomorphismes qui font de G un foncteur de réponse s'étendent en des isomorphismes :

— $G(A \times B) \cong F^*A \times F^*B$,
— $G(\bot) \cong \bot$,
— $G(1) \cong 1$,
— $G(\bot^A) \cong \bot^{F^*A}$.

On vérifie facilement par induction sur les termes de $\mathcal{F}\mathbb{A}$ que ces isomorphismes engendrent l'isomorphisme naturel $G \cong F^*$ qui garantit l'unicité de F^*. $\square$

Chapitre 3

Catégorie des positions et coups du jeu

3.1 Occurrences

Nous définissons dans cette partie les formules utilisées dans les positions du jeu graphique : il s'agit essentiellement des types du λ-calcul défini à la section 2.3.1, avec une petite modification sur les atomes.

On dispose comme précédemment d'un ensemble dénombrable de symboles atomiques $\mathbb{A}$, mais nous distinguons pour le jeu deux copies de ces symboles, notées $a^{\perp\perp}$ et $a^{\perp}$ pour $a \in \mathbb{A}$. Elles servent uniquement en section 3.4 à traiter les axiomes : les règles du jeu graphique introduisent en effet une notion forte de polarité due à l'enracinement des positions. Cette polarisation nécessite de traiter les axiomes de façon particulière. Le jeu graphique se comporte comme si, dans les règles de déduction de la section 2.3, on remplaçait tous les atomes a par $a^{\perp\perp}$, et si on remplaçait la règle axiome :

$$\frac{}{\Gamma, a \vdash a}$$

par des preuves :

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, a^{\perp} \vdash a^{\perp}}}{\Gamma, a^{\perp\perp}, a^{\perp} \vdash}}{\Gamma, a^{\perp\perp} \vdash a^{\perp\perp}}$$

qui utilisent les deux nouvelles règles :

$$\frac{}{\Gamma, a^{\perp} \vdash a^{\perp}} \qquad\qquad \frac{\Gamma, a^{\perp\perp}, a^{\perp} \vdash}{\Gamma, a^{\perp\perp} \vdash a^{\perp\perp}}$$

L'ensemble des formules $\mathcal{F}$ est formé de l'union des mots engendrés par les deux règles suivantes :

$$\begin{array}{lcl} P & ::= & \mathbb{A}^{\perp} \\ Q & ::= & P^{\perp} \quad | \quad 1 \quad | \quad \neg Q \quad | \quad Q \times Q \\ \mathcal{F} & := & P \cup Q. \end{array} \tag{3.1}$$

Une *occurrence* d'une formule A dans une formule B, identifiées avec leurs arbres de syntaxe abstraite, est un chemin depuis la racine de B jusqu'à un sommet v, tel que A est égale au sous-arbre de B enraciné en v.

On note Occ la catégorie des occurrences, dont les objets sont les formules de $\mathcal{F}$, et dont les morphismes $\xi\colon A \longrightarrow B$ sont les occurrences de A dans B. La composition, donnée par la concaténation des chemins, est évidemment associative. Son identité est le chemin à un sommet. On représentera les occurrences par la séquence des connecteurs traversés, en mentionnant quelle branche est sélectionnée pour $\times$.

Exemple 3.1. La formule $\neg 1$ admet deux occurrences dans $\neg(\neg 1 \times \neg\neg 1)$, qu'on notera $\neg; \times_l$ et $\neg; \times_r; \neg$.

La formule $a^\perp$ a une occurrence dans $1 \times \neg(a^{\perp\perp})$, notée $\times_r; \neg; \perp$.

Avec cette notation, l'occurrence identité étant représentée par la séquence vide, on l'appelle parfois l'occurrence *vide*.

Pour définir la catégorie des positions à la section 3.2, nous aurons besoin d'une notion de *signe* sur les occurrences afin de déterminer les changements d'orientation autorisés dans le jeu graphique. Pour cela, on dit qu'une occurrence $\xi\colon A \longrightarrow B$ est :

- *positive* lorsque B contient un nombre pair de négations $\neg$ ou $-^\perp$ situées strictement au-dessus de l'occurrence ξ de A. Dans le cas particulier où B ne contient aucune négation située strictement au-dessus de A, on dit que l'occurrence est *sans négation* ;
- *négative* lorsque B contient un nombre impair de négations situées strictement au-dessus de A. Dans le cas particulier où le chemin contient exactement *une* négation, on dit que l'occurrence est *alternante*.

Exemple 3.2. L'occurrence $\neg; \times_l$ est négative, alors que $\neg; \times_r; \neg$ est positive. L'occurrence $\times_r; \neg; \perp$ est positive.

Lemme 3.1. *Si un carré*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\xi_0"] \arrow[d, "\xi_1"'] & B \arrow[d, "\xi_3"] \\ C \arrow[r, "\xi_2"'] & D \end{tikzcd}$$

commute dans Occ *alors il existe un unique relèvement dont le type est soit* $C \longrightarrow B$ *soit* $B \longrightarrow C$.

Preuve. Il s'agit d'un résultat classique sur les arbres. □

3.2 Positions

Les positions du jeu sont, intuitivement, des fragments partiels d'arbres étiquetés. Formellement :

Définition 3.1. Une *position* U du jeu est un triplet de fonctions :

$$\mathcal{F} \xleftarrow{\ \ell_U\ } \mathrm{edg}(U) \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathrm{ver}(U)$$

où :

- $\mathrm{ver}(U)$ est un ensemble fini de *sommets*,
- $\mathrm{edg}(U)$ est un ensemble fini d'*arêtes*,

— ℓ_U affecte une formule à chaque arête,
— s et t sont des fonctions partielles, qui indiquent respectivement les source et but de chaque arête,

et qui vérifient les propriétés suivantes :

(i) bonne formation locale : le voisinage de tout sommet $v \in V$ est de la forme

$$\Gamma \vdash A, \qquad \Gamma \vdash, \qquad \Gamma, a^\perp \vdash, \text{ ou} \qquad \Gamma, a^\perp \vdash a^\perp,$$

où
— Γ est un multiensemble de formules dans Q (3.1),
— A est une formule dans Q (3.1),
— le voisinage de v est ici le multiensemble des étiquettes d'arêtes adjacentes à v, celles des arêtes entrantes étant notées à gauche du signe $\vdash$ et celle de l'éventuelle arête sortante étant notée à droite ;

(ii) sans branchement : s est injective sur son ensemble de définition ;

(iii) acyclicité : en oubliant l'orientation des arêtes, il n'existe aucun cycle élémentaire dans le graphe ;

(iv) quasi-enracinement : l'ensemble

$$\{v \in \mathrm{ver}(U) \text{ tel que } \forall e \in \mathrm{edg}(U), s(e) \neq v\}$$

des sommets sans arête sortante contient au plus un seul sommet. Lorsqu'il existe, ce sommet est appelé indifféremment la *racine* de la position, ou le sommet *actif*.

Remarque 3.1. Dans la définition précédente, la condition de bonne formation locale (i) implique la condition de non-branchement (ii). Nous conservons ici cette dernière par analogie avec les travaux sur MLL [22], la bonne formation locale étant une adaptation très spécifique à la logique étudiée ici.

Les fonctions s et t sont partielles, mais on peut les considérer de manière équivalente comme des fonctions totales s^* et t^* de codomaine $\mathrm{ver}(U) + 1$, en posant $s^*(e) = \perp$, l'unique élément de 1, lorsque $s(e)$ n'est pas défini. L'ensemble $\mathrm{ver}(U) + 1$ est équipé de l'ordre $\leq$ engendré par : $\forall v \in \mathrm{ver}(U), \perp \leq v$.

Définition 3.2 (Signe d'une position)**.** Une position est *positive* lorsqu'elle possède un sommet actif, et *négative* sinon, i.e., lorsque tous les sommets ont une arête sortante.

Cette définition des positions cherche en réalité à formaliser l'intuition que les positions sont des fragments d'arbres. Ceci s'explique en considérant une variation de la topologie usuelle sur les graphes. On voit chaque position U comme un espace topologique dont les points sont ceux du coproduit $\mathrm{edg}(U) + \mathrm{ver}(U)$ et dont les ouverts sont définis par :

Définition 3.3 (Ouvert)**.** O est *ouvert* lorsque pour tout sommet $v \in O$, toutes ses arêtes adjacentes sont également dans O.

Sans tenir compte provisoirement des étiquettes et des orientations des arêtes, les positions sont des sous-ensembles ouverts d'arbres totaux.

Les fonctions continues au sens de cette topologie donnent une première notion de morphismes entre les positions, qui, si l'on oublie temporairement les étiquettes et les orientations, ressemblent intuitivement à des morphismes de graphes mais peuvent par ailleurs envoyer des arêtes sur des sommets et inversement.

— L'envoi d'arêtes sur des sommets permet de définir les *coupures* en section 5.1 ;

— L'envoi de sommets sur des arêtes n'a pas de sens dans notre cadre et sera interdit par la suite.

Si $f\colon U \longrightarrow V$ est une fonction continue entre deux positions, et si e est une arête de U, on dit que e est *persistante* par f lorsque $f(e)$ est une arête de V ; f est elle-même *persistante* si toutes les arêtes de U sont persistantes.

Il est désormais possible de définir les morphismes entre positions, de la façon suivante :

Définition 3.4 (Morphisme de positions)**.** Un morphisme $U \longrightarrow V$ où U et V sont des positions est un couple (f, o_f) de fonctions, que l'on notera dans la suite simplement $f\colon U \longrightarrow V$, telles que :

(i) f est une fonction continue de U vers V, vues comme des espaces topologiques,

(ii) f envoie les sommets sur des sommets,

(iii) o_f est une fonction qui à chaque arête persistante $e \in \mathrm{edg}(U)$ associe une occurrence $o_f(e)$:

$$o_f \in \prod_{e \in f^{-1}(\mathrm{edg}(V))} \mathrm{Occ}(\ell_U(e), \ell_V(f(e))),$$

(iv) et si e est une arête persistante, alors e est renversée si et seulement si $o_f(e)$ est négative. Formellement, cela signifie que l'on doit vérifier les inégalités :

$$t(f(e)) \geq f(s(e)) \qquad\qquad s(f(e)) \geq f(t(e))$$

lorsque $o_f(e)$ est négative, et :

$$s(f(e)) \geq f(s(e)) \qquad\qquad t(f(e)) \geq f(t(e))$$

lorsque $o_f(e)$ est positive.

La composition est définie en composant les fonctions continues d'une part, et en concaténant les occurrences d'autre part. L'identité est le morphisme (id, ϵ) où ϵ est la fonction constante égale à l'occurrence identité, et il est facile de voir que :

Lemme 3.2. *On a une* catégorie des positions*, notée* P*.*

Lemme 3.3 (Caractérisation équivalente des morphismes)**.** *De manière équivalente dans la définition 3.4, on peut remplacer l'hypothèse de continuité de la fonction $f\colon U \longrightarrow V$ par la propriété : pour chaque arête $e \in \mathrm{edg}(U)$ qui s'envoie par f sur un sommet de V, on a les inégalités*

$$f(e) \geq fs(e) \qquad \textit{et} \qquad f(e) \geq ft(e).$$

Preuve. Pour l'implication, les inégalités sont évidentes si $fs(e)$ (resp. $ft(e)$) n'est pas définie. Si $fs(e)$ est définie, comme $\{s(e), e\}$ est connexe, son image par f continue est encore connexe. Un ensemble à deux sommets distincts n'est pas connexe, donc $f(e) = fs(e)$. La seconde inégalité s'obtient de la même manière.

Pour la réciproque, on note $O \subseteq V$ un ouvert, v un sommet de $f^{-1}(O)$ et e une arête adjacente à v dans U, afin de montrer que $f(e) \in O$. On détaille le cas $s(e) = v$, le cas $t(e) = v$ se résout de la même façon.

— Si $f(e)$ est une arête, alors le point (iv) de la définition 3.4 impose que $f(e)$ est adjacente au sommet $f(v)$. Comme O est ouvert et contient $f(v)$, on a $f(e) \in O$.

— Si $f(e)$ est un sommet, l'inégalité $f(e) \geq fs(e)$ entraine : $f(e) = f(v)$, donc $f(e) \in O$.

□

3.2.1 Représentation graphique des positions

On représente graphiquement par

$$\bullet \xrightarrow{A} \circ$$

une position U où $\mathrm{ver}(U) = \{\bullet, \circ\}$, $\mathrm{edg}(U) = \{e\}$ et :

$$s(e) = \bullet \qquad t(e) = \circ \qquad \ell(e) = A.$$

Une arête dont l'une des extrémités n'est pas définie sera représentée de la façon suivante, lorsque par exemple le sommet but manque :

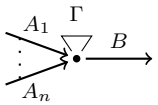
$$\bullet \xrightarrow{A}$$

Quand une arête ne possède aucun sommet source ni but, l'orientation de l'arête n'est pas définie, mais l'on utilisera malgré cela la notation

$$\xrightarrow{A}$$

où la tête de la flèche ne correspond à aucune information sur la position elle-même, autre que l'indication de type disant que l'on représente effectivement une arête. Une telle arête est dite *isolée*.

Enfin, la plupart des morphismes que l'on considèrera dans P sont décrits par une transformation locale sur quelques arêtes et sommets d'une position, et laissent le reste de la position intact. Pour représenter les parties non modifiées, on utilisera



pour dessiner une position connexe enracinée Γ, dont la racine est notée sur le dessin, et où l'on ajoute éventuellement à cette racine :

— une arête sortante d'étiquette B,

— des arêtes entrantes d'étiquettes $A_1, \ldots, A_n$.

3.2.2 Séquents

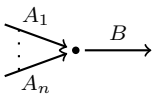
Intuitivement, on identifie les sommets dans une position aux joueurs du jeu. Chaque position possède alors au plus un joueur en position active, qui est le sommet racine. Ainsi, les positions possédant un seul sommet jouent un rôle important dans la définition du jeu, car elles décrivent le comportement local d'un même joueur dans une stratégie.

Par ailleurs certaines de ces positions à un seul sommet s'identifient aux jugements du chapitre 2 de la façon suivante.

Définition 3.5 (Séquent)**.** Un *séquent* est une position à un seul sommet, sans arête isolée.

Si U est une position quelconque, on note $\mathrm{Sq}(U)$ l'ensemble des séquents de U, c'est-à-dire l'ensemble des parties de U qui sont des séquents.

Graphiquement, un séquent est une position de la forme :



et

Dans la suite, on reprendra les notations $A_1, \cdots, A_n \vdash B$ et $A_1, \cdots, A_n \vdash$ pour désigner respectivement ces positions.

Lemme 3.4 (Continuité)**.** *On note $\mathcal{U}$ la composée des foncteurs d'oubli* $\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$*. Soient U et V deux positions, et $f\colon \mathcal{U}U \longrightarrow \mathcal{U}V$ une fonction.*

Si f envoie les sommets sur des sommets, et si pour tout séquent S de V, $f^{-1}(\mathcal{U}S)$ est un ouvert de U, alors f est continue.

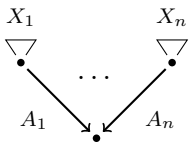
Preuve. Les ouverts d'une position s'écrivent comme des unions de séquents et d'arêtes isolées. □

3.2.3 Syntaxe pour les positions

Lorsque $A_1, \ldots, A_n$ sont n formules, avec $X_1, \ldots, X_n$ des positions connexes enracinées (i.e., telles qu'il existe un sommet sans arête sortante), alors on définit la position enracinée notée :

$$(A_1 \cdot X_1, \ldots, A_n \cdot X_n)$$

comme étant la position :



c'est-à-dire la position dont la racine possède n arêtes entrantes, l'arête i, pour $1 \leq i \leq n$, ayant pour étiquette A_i et pour sommet source la racine de X_i.

On étend légèrement la notation précédentes au cas où les X_i sont des ensembles vides (qui ne sont donc pas enracinés), en définissant la position :

$$(A_1, \ldots, A_n)$$

qui possède n arêtes entrantes à la racine, d'étiquettes les A_i, dont la source est pendante.

Par ailleurs, on peut étendre cette notation sur les morphismes, si l'on dispose :

— de morphismes de positions enracinées $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$, qui préservent les racines, et

— d'occurrences positives $\xi_i\colon A_i \longrightarrow B_i$ dans Occ,

pour $1 \leq i \leq n$, alors on peut définir un morphisme

$$(\xi_1 \cdot f_1, \ldots, \xi_n \cdot f_n)\colon (A_1 \cdot X_1, \ldots, A_n \cdot X_n) \longrightarrow (B_1 \cdot Y_1, \ldots, B_n \cdot Y_n)$$

qui envoie la i^{e} arête à la racine vers l'arête correspondante du codomaine avec l'occurrence ξ_i, et la sous-position X_i vers la sous-position Y_i en appliquant le morphisme f_i.

La continuité de $(\xi_i \cdot f_i)_i$ provient du fait que tous les f_i préservent les racines. Pour la vérifier, on utilise la caractérisation donnée au lemme 3.4 en considérant $S' = (\xi_i \cdot f_i)_i^{-1}(S)$ pour chaque séquent S du codomaine. Lorsque S est à la racine, alors S' est le séquent racine du domaine, donc est ouvert. Lorsque S est contenu dans l'un des Y_i mais n'est pas à la racine de Y_i, alors le fait que f_i préserve la racine de X_i assure que S' ne contient pas le sommet racine de X_i : par continuité de f_i, S' est un ouvert de X_i, donc un ouvert de $(A_1 \cdot X_1, \ldots, A_n \cdot X_n)$. Enfin, lorsque S est à la racine de Y_i, alors :

— $S' \cap X_i$ est un ouvert de X_i car f_i est continue,

— S' contient la racine de X_i, mais également l'arête A_i qui relie X_i à la racine de $(A_i \cdot X_i)_i$, donc S' est encore ouvert dans $(A_i \cdot X_i)_i$.

3.2.4 Pullbacks et pushouts dans P

La catégorie P admet un objet terminal, noté 1 et constitué d'un seul sommet, et un objet initial $\emptyset$. Elle n'est cependant ni complète ni cocomplète car elle ne possède pas tous les pullbacks ni tous les pushouts.

Ceci provient en grande partie de la catégorie des occurrences Occ : en effet, en présence d'arêtes persistantes dans un diagramme commutatif dans P

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[d, "g'"] \\ U' \arrow[r, "f'"'] & V' \end{tikzcd}$$

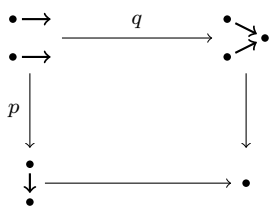
on peut déduire, pour une arête persistante $e \in \mathrm{edg}(U)$ donnée, un diagramme dans Occ :

$$\begin{tikzcd} \ell_U(e) \arrow[r, "o_f(e)"] \arrow[d, "o_g(e)"'] & \ell_V(f(e)) \arrow[d, "o_{g'}(f(e))"] \\ \ell_{U'}(g(e)) \arrow[r, "o_{f'}(g(e))"'] & \ell_{V'}(f'g(e)). \end{tikzcd}$$

Un tel carré n'existe, d'après le lemme 3.1, que si l'une des formules $\ell_{U'}(g(e))$ ou $\ell_V(f(e))$ est une sous-formule de l'autre. Il est facile de construire des paires (f, g) ou (f', g') qui ne vérifient pas cette condition, par exemple avec le span d'étiquettes :

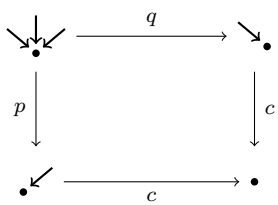
$$A \times \neg A \xleftarrow{\times_r;\neg} A \xrightarrow{\times_l} A \times \neg A.$$

Dans la suite de cette section, pour ignorer les problèmes d'occurrences, on considère la sous-catégorie pleine P^1 de P obtenue en se limitant aux positions dont toutes les arêtes ont pour étiquette 1. On remarque que le foncteur d'oubli $\mathcal{U}\colon \mathrm{P}^1 \longrightarrow \mathrm{Top}$ ne crée ni les limites, ni les colimites. Ainsi, le carré



où p écrase chaque arête sur son sommet source (l'arête verticale n'a pas d'antécédent), et où q préserve les arêtes mais leur ajoute un sommet but commun, est un pushout dans P^1 et même dans P. Néanmoins, on sait que le foncteur d'oubli $\mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$ relève les limites, dans le sens de Adámek et al [2], et donc que le pushout du diagramme ci-dessus a quatre éléments dans Top.

Lemme 3.5. *De même, le carré*



est un pullback dans P*, alors que la limite dans* Top *serait donnée par un objet à quatre points*

$$\{(\bullet,\bullet),(\bullet,\downarrow),(\downarrow,\bullet),(\downarrow,\downarrow)\}$$

dont seul le premier est fermé, et seul le dernier est ouvert.

Preuve. On note U, V, W les positions telles que $p\colon U \longrightarrow V$ et $q\colon U \longrightarrow W$. La position U est composée de trois arêtes entrantes e_l, e_m et e_r, sur un sommet v.

Pour expliciter les définitions des morphismes p et q dans le diagramme précédent, on note e_p l'arête du codomaine de p, et v_p son sommet but. On procède de même pour e_q et v_q dans le codomaine de q.

Les morphismes p et q sont définis par :

$$\begin{array}{rcl} p(e_l) & := & v_p \\ p(e_m) & := & e_p \\ p(e_r) & := & e_p \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} q(e_l) & := & e_q \\ q(e_m) & := & e_p \\ q(e_r) & := & v_q. \end{array}$$

Soit $(f\colon U' \longrightarrow V, g\colon U' \longrightarrow W)$ un cône au-dessus de (c,c). On définit le morphisme $k\colon U' \longrightarrow U$ par :

$$\begin{array}{rcll} k(w) & := & v & \text{si } w \in \mathrm{ver}(U'), \\ k(e) & := & v & \text{si } f(e) \text{ est un sommet et } g(e) \text{ est un sommet}, \\ k(e) & := & e_r & \text{si } f(e) \text{ est une arête et } g(e) \text{ est un sommet}, \\ k(e) & := & e_m & \text{si } f(e) \text{ est une arête et } g(e) \text{ est une arête}, \\ k(e) & := & e_l & \text{si } f(e) \text{ est un sommet et } g(e) \text{ est une arête}. \end{array}$$

Ce morphisme est bien défini, car il est continu (l'image réciproque du seul séquent est U' en entier) et tous les sommets ont pour image v.

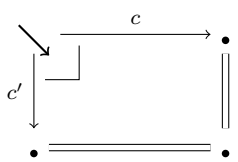
L'égalité $f = pk$ résulte d'une simple vérification pour chaque élément de U'. Pour une arête $e \in \mathrm{edg}(U')$:

— si $f(e)$ est une arête, alors $k(e) = e_r$ ou $k(e) = e_m$. En composant par p, on obtient dans les deux cas $p(k(e)) = e_p = f(e)$;

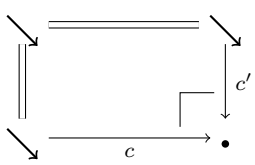
— si $f(e)$ est un sommet, alors $k(e) = v$ ou $k(e) = e_l$. En composant par p, on obtient dans les deux cas $p(k(e)) = v_p = f(e)$.

Symétriquement, $g = qk$. Les égalités précédentes suffisent à définir uniquement k. □

Le foncteur d'oubli $\mathcal{U}$ ne reflète pas non plus les limites et les colimites, comme le montrent les deux exemples suivants, qui sont respectivement un pullback et un pushout dans Top (les flèches c et c' s'envoient sur des isomorphismes dans Top), mais pas dans P^1, ni d'ailleurs dans P :



et



3.3 Sous-positions

3.3.1 Composantes connexes

Définition 3.6. Pour tous points x et y de l'espace topologique X sous-jacent à une position U, un *arc* de x à y est un chemin, i.e., une fonction continue de $[0,1]$ dans X. On note $x \frown y$ si et seulement s'il existe un arc de x à y.

Lemme 3.6. *Pour toute position U, $\supset$ est une relation d'équivalence, dont chaque classe forme un sous-ensemble fermé et ouvert de U.*

On appelle les classes d'équivalence pour $\supset$ des *composantes connexes* de U. Elles correspondent en effet aux composantes connexes de l'espace topologique sous-jacent (grâce au fait que dans les espaces considérés, la connexité revient à la connexité par arcs).

Remarque 3.2. La connexité peut s'exprimer de manière alternative en terme de graphes usuels. Si U est une position, on note $\overline{U}$ la position obtenue en ajoutant un nouveau sommet pour chaque extrémité d'arête sans sommet dans U.

Deux points de U sont dans la même composante connexe si ces deux points sont dans la même composante faiblement connexe du graphe $\overline{U}$.

Proposition 3.7. *Une position est isomorphe au coproduit de ses composantes connexes.*

Un morphisme $f\colon U \longrightarrow V$ de P est appelé *plongement d'une composante connexe* lorsqu'il se décompose en

$$U \xrightarrow{\iota_l} U + W \xrightarrow{\cong} V,$$

où U est connexe. On note CEmb la sous-catégorie de P dont les objets sont toutes les positions, et dont les morphismes sont uniquement les plongements de composantes connexes et les isomorphismes.

3.3.2 Plongements

Définition 3.7. Un *plongement* $i\colon U \longrightarrow V$ est un morphisme injectif, persistant et à occurrences vides.

On notera les plongements avec une flèche spéciale, $\rightarrowtail$.

Lemme 3.8. *Pour tout triangle commutatif*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "h"] \\ U \arrow[ur, "g"] \arrow[r, tail, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

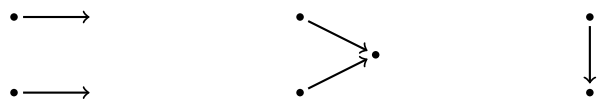
où f est un plongement, alors g est un plongement.

Preuve. Simple vérification. □

On remarque que les plongements ne sont pas stables par pushout, car le carré

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, tail] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[d] \\ W \arrow[r, "f"'] & 1 \end{tikzcd}$$

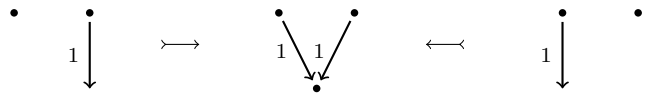
où U, V et W sont respectivement les positions :



et où g écrase chaque arête sur l'un des deux sommets de W, est un pushout dans P mais la flèche f n'est pas mono.

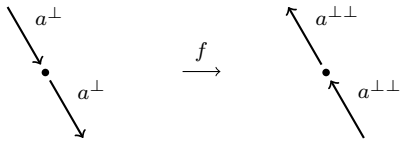
Exemple 3.3. La catégorie P n'a *pas* tous les pullbacks le long des plongements, et lorsqu'un tel pullback existe, il n'est pas nécessairement calculé comme dans Top. Dans les deux contrexemples suivants, l'existence d'un pullback calculé comme dans Top contredirait l'hypothèse de bonne formation locale des positions ou l'hypothèse de quasi-enracinement.

Pour le quasi-enracinement, on considère les deux plongements suivants :

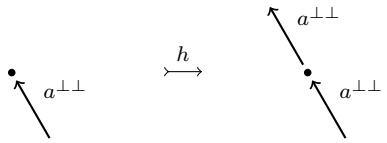


Le pullback calculé dans Top serait un objet formé uniquement de deux sommets, qui ne vérifie pas la condition de quasi-enracinement pour être une position.

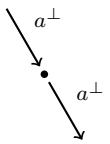
Pour la bonne formation locale, on considère d'une part le morphisme f :



qui retourne chaque arête avec, pour chacune, l'occurrence négative $a^{\perp} \longrightarrow a^{\perp\perp}$, et d'autre part le plongement h :



Leur pullback dans P est la position :



qui s'envoie sur le domaine de f non pas avec l'identité, mais en écrasant l'arête entrante sur son sommet but. Elle s'envoie sur le domaine de h en écrasant l'arête entrante sur sommet but et en jouant l'occurrence négative $a^{\perp} \longrightarrow a^{\perp\perp}$ sur l'autre arête. Calculé dans Top, le pullback serait de la forme :

qui ne vérifie pas la condition de bonne formation locale. En effet, cette dernière demande que tout sommet avec une arête sortante atomique $a^{\perp}$ possède une arête entrante portant le même atome.

Ce dernier contrexemple montre également que les plongements ne sont pas toujours stables par pullback. En revanche, lorsque l'un des morphismes est sans occurrence, on a :

Lemme 3.9. *Lorsqu'il existe, le pullback d'un plongement le long d'un morphisme sans occurrence est encore un plongement.*

Preuve. Soit :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & U \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, tail, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

un tel pullback, où h est un plongement et f est un morphisme sans occurrence.

Le morphisme h' est sans occurrence, car si $e \in \mathrm{edg}(P)$ est une arête persistante par h', on peut construire la position Q avec une seule arête e' d'étiquette $\ell_U(h'(e))$. Cette position a deux morphismes

$$V \longleftarrow Q \longrightarrow U$$

qui font commuter le diagramme précédent, donc par propriété universelle du pullback il existe une unique flèche $Q \longrightarrow P$ qui joint les deux cônes. Ceci induit un triangle commutatif dans Occ :

$$\begin{tikzcd} \ell_Q(e') \arrow[d] \arrow[dr, equal] & \\ \ell_P(e) \arrow[r, "o_{h'}(e)"'] & \ell_U(h'(e)) \end{tikzcd}$$

donc $o_{h'}(e)$ est l'occurrence vide.

Le morphisme h' est persistant car si $e \in \mathrm{edg}(P)$ était écrasée par h' sur un sommet, alors comme h est persistant, e s'envoie par f' également sur un sommet. On pourrait construire un cône :

$$V \longleftarrow 1 \longrightarrow U$$

qui envoie l'unique sommet de 1 respectivement sur $f'(e)$ et $h'(e)$ dans V et U. Par propriété universelle du pullback, il existe un unique morphisme $k\colon 1 \longrightarrow P$ qui joint les deux cônes. Comme l'image de l'unique sommet de 1 est un sommet, e a donc un sommet adjacent. Supposons qu'il s'agit du sommet source. Dans ce cas, on a un cône qui part de la position :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr] & \\ \ell_P(e) & \end{tikzcd}$$

et s'envoie sur V et U en envoyant ses deux éléments sur les images respectives de e. Il existerait alors deux morphismes de ce cône vers le cône de sommet P : l'identité, et le morphisme qui écrase l'arête sur son sommet adjacent. Ceci contredirait la propriété universelle du pullback.

Pour l'injectivité de h', on considère deux éléments $x, x' \in P$ tels que $h'(x) = h'(x')$. On distingue deux cas :

— si x et x' sont de même nature (deux arêtes ou deux sommets), alors l'injectivité est triviale ;

— tandis que le cas où x et x' sont de natures différentes (une arête et un sommet) est impossible, car leur image commune serait un sommet, mais on vient de prouver que h' était persistant.

□

3.3.3 Plongements de sous-arbres

Pour toute position U, on définit un ordre sur $\mathrm{edg}(U) + \mathrm{ver}(U)$ en prenant la plus petite relation $\leq$ réflexive et transitive telle que pour tout $e \in \mathrm{edg}(U)$,

— si $s(e)$ est définie, alors $s(e) \leq e$ et

— si $t(e)$ est définie, alors $e \leq t(e)$.
Cette relation forme un ordre partiel par acyclicité de U. Un arc dans U est *orienté* ssi la fonction $[0,1] \longrightarrow U$ correspondante est croissante.

Un plongement $h\colon U \rightarrowtail V$ est dit *clos par le bas* ssi pour tout arc orienté $x \rightsquigarrow h(y)$ dans V, on a $x \in h(U)$.

Définition 3.8. Un *plongement de sous-arbre* est un plongement $h\colon U \longrightarrow V$ clos par le bas, tel que U est connexe et enracinée. On note ces plongements par la flèche $h\colon U \longrightarrow\!\!\!\triangleright V$. Ils forment une sous-catégorie de P.

Un plongement de sous-arbre $U \longrightarrow V$ est, en gros, l'injection d'un sous-arbre complet de V dans V. Une caractérisation équivalente est :

Lemme 3.10. *Un morphisme h est un plongement de sous-arbre si et seulement s'il est obtenu par pushout*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[d, "h"] \\ V \arrow[r] & W \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

d'un morphisme racine ρ*, i.e., un morphisme* $1 \longrightarrow U$ *envoyant l'unique sommet de* 1 *sur la racine de* U*, pour* U *connexe, le long d'un morphisme* feuille f*, i.e., un morphisme* $1 \longrightarrow V$ *envoyant l'unique sommet de* 1 *sur un sommet de* V *sans arête entrante.*

On utilise pour le résultat précédent un lemme intermédiaire. On dit qu'un morphisme $f\colon U \longrightarrow V$ *conserve les atomes* si tout sommet de U qui possède une arête entrante atomique (i.e., d'étiquette un certain $a^{\perp}$ avec $a \in \mathbb{A}$) a pour image un sommet de V avec une arête entrante de même étiquette. Les morphismes persistants conservent en particulier les atomes, mais également, par exemple, les morphismes qui écrasent uniquement des arêtes non pendantes. Le lemme 3.10 est une conséquence de :

Lemme 3.11. *Soit $f\colon U \longrightarrow V$ est un morphisme sans occurrence, qui préserve la racine entre deux positions connexes enracinées U et V, et qui conserve les atomes. Soit $g\colon U \longrightarrow\!\!\!\triangleright W$ un plongement de sous-arbre. Alors il existe un pushout*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[d, dashed, "q"] \\ W \arrow[r, dashed, "p"'] & X \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

et q est encore un plongement de sous-arbre.

Preuve. Ce pushout est calculé comme dans Top, et consiste à greffer la position enracinée V dans W sur le même sommet que celui sélectionné par g.

Soit $v \in \mathrm{ver}(W)$ l'image de la racine de U par g, et v' la racine de V. On définit la position X en posant :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{edg}(X) & := & \mathrm{edg}(V) + (\mathrm{edg}(W) \setminus \mathrm{edg}(U)) \\ \ell_X & := & \ell_V + \ell_W \\ \mathrm{ver}(X) & := & \mathrm{ver}(V) + (\mathrm{ver}(W) \setminus \mathrm{ver}(U)), \end{array}$$

les sources et buts des arêtes étant hérités des orientations dans V et W (elles sont identiques pour les parties communes car f et g sont sans occurrence). Seules les hypothèses de non-branchement et de bonne formation locale ne sont pas trivialement vérifiées pour s'assurer que X est bien définie. Le non-branchement est cependant immédiat pour tous les sommets sauf l'image de v' : pour ce dernier on remarque qu'en tant que racine de V, v' n'a aucune arête sortante dans V. Pour la bonne formation locale de X :

— comme V est localement bien formée, les voisinages des sommets de X qui proviennent de V à l'exception de v' sont bien formés ;
— de même pour les sommets qui proviennent de W à l'exception de v ;
— pour le sommet v', s'il possède une arête sortante étiquetée de la forme $a^\perp$, alors $v \in \mathrm{ver}(W)$ possède une arête sortante d'étiquette $a^\perp$. Par bonne formation locale de W, il existe une arête entrante $e \in \mathrm{edg}(W)$ d'étiquette $a^\perp$. On distingue alors deux cas : soit $e \notin \mathrm{edg}(U)$ et on retrouve bien cette même arête dans $\mathrm{edg}(W) \setminus \mathrm{edg}(U)$, donc dans $\mathrm{edg}(X)$; soit $e \in \mathrm{edg}(U)$, mais comme f est sans occurrence et que f conserve les atomes, alors le voisinage de de v' dans V possède encore une arête entrante de même étiquette que e. Cette arête est donc dans $\mathrm{edg}(X)$. Dans les deux cas, v' a bien une arête entrante dans X d'étiquette $a^\perp$.

Les morphismes p et q sont définis par $p(x) = f(x)$, $o_p(e) = o_f(e)$, et $q(x) = g(x)$, $o_q(x) = o_g(x) = \epsilon$. La flèche q est un plongement (évidemment injectif et persistant), clos par le bas par construction, donc q est un plongement de sous-arbre.

Le carré est bien un pushout dans P : soit

$$W \xrightarrow{p'} X' \xleftarrow{q'} V$$

un autre cocône, et $k\colon X \longrightarrow X'$ un morphisme qui relie les deux cocônes. Si $x \in X$, alors :

— soit x provient de V, donc il existe $x' \in V$ tel que $p(x') = x$, donc $k(x) = k(p(x')) = p'(x')$;
— soit x provient de W, et de même il existe $x' \in W$ tel que $k(x) = q'(x')$.

De même pour les arêtes persistantes par k, on a $o_k(e) = o_{p'}(e')$ quand e est dans l'image de p, pour une certaine arête e', et similairement dans le cas contraire $o_k(e) = o_{q'}(e')$.

Comme par ailleurs tout sommet $v \in \mathrm{ver}(X)$ a un antécédent dans W ou V, alors il existe un sommet de $v' \in \mathrm{ver}(X')$ tel que $k(v) = v'$, les équations précédentes suffisent à définir k. □

Preuve du lemme 3.10. Pour l'implication, si $h\colon U \longrightarrow W$ est un plongement de sous-arbre, on note v l'image de la racine de U par h. La position V est formée à partir de W en retirant tous les points qui possèdent un arc orienté non trivial vers v : on retire donc l'image de U privée de v. On vérifie simplement que c'est le pushout demandé.

Réciproquement, un morphisme feuille est un plongement de sous-arbre, donc son pushout le long de ρ est encore un plongement de sous-arbre par le lemme 3.11. □

Lemme 3.12. *On peut prendre le pullback de deux plongements de sous-arbres.*

Preuve. Soient :

$$U \xrightarrow{f} W \xleftarrow{k} V$$

deux plongements de sous-arbres. Leur pullback est calculé comme dans Top en définissant d'abord P la position par :

— les sommets de P sont les sommets de W qui sont à la fois dans l'image de f et dans celle de k ;

— les arêtes de P sont les arêtes de W qui sont à la fois dans l'image de f et dans celle de k ;
— leurs étiquettes sont celles dans W (qui sont identiques aux étiquettes de leurs antécédents dans U et V) ;
— les orientations sont héritées de W.

Comme f et k sont injectives, il existe des inclusions canoniques $P \longrightarrow U$ et $P \longrightarrow V$. Pour vérifier que P est une position, les conditions de non-branchement et d'acyclicité sont donc évidentes. Il reste à vérifier la bonne formation locale et le quasi-enracinement.

Pour la bonne formation locale, soit $v \in \mathrm{ver}(P)$ un sommet qui possède une arête sortante atomique $e \in \mathrm{edg}(P)$. Comme W est localement bien formée, il existe une arête atomique $e' \in \mathrm{edg}(P)$ de même étiquette que e et de sommet but v. Comme f et k sont des plongements de sous-arbres dont l'image contient v, alors e' est encore dans leur image.

Pour le quasi-enracinement, on remarque d'abord que si deux sommets sont dans P, alors il existe un chemin non orienté dans W qui les relie : ceci provient du fait qu'ils sont tous les deux dans les sous-arbres U et V. Pour toute paire de sommet, l'un des deux au moins possède donc une arête sortante, ce qui montre que P a au plus une racine.

Le fait que ce cône est universel est une simple vérification, que l'on détaillera dans un cas similaire au lemme 3.14. □

3.3.4 Plongements ouverts

Définition 3.9. Un *plongement ouvert* est un plongement qui envoie les ouverts sur des ouverts. On utilisera la flèche $h\colon U \hookrightarrow V$ pour représenter les plongements ouverts.

Ils forment une catégorie, que l'on note Emb.

Autrement dit, les plongements ouverts sont les plongements qui n'ajoutent pas d'arêtes à leurs sommets. Plus précisément :

Lemme 3.13. *Un plongement $h\colon U \rightarrowtail V$ est ouvert si et seulement si pour tout sommet $v \in \mathrm{ver}(U)$, les arêtes adjacentes à $f(v)$ sont exactement les images par f des arêtes adjacentes à v.*

Preuve. Il s'agit d'une reformulation directe de la définition des ouverts. □

Lemme 3.14. *La catégorie des positions* P *a les pullbacks le long des plongements ouverts de* Emb. *Ces plongements sont stables par pullback.*

Preuve. Ces pullbacks sont calculés comme dans Top. Soient $h\colon U \hookrightarrow V$ un plongement ouvert, et $f\colon W \longrightarrow V$ un morphisme. On pose $P = f^{-1}(h(U))$, qui vient avec une inclusion évidente $h'\colon P \longrightarrow W$, et un morphisme $f'\colon P \longrightarrow U$ défini par :

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & := & h^{-1}(f(x)) & \\ o_{f'}(e) & := & o_f(e) & \text{si } e \text{ est persistante par } f. \end{array}$$

La première égalité définit bien une *fonction* $\mathrm{edg}(P) + \mathrm{ver}(P) \longrightarrow \mathrm{edg}(U) + \mathrm{ver}(U)$, car h est injective. De plus, il est facile de vérifier l'égalité $fh' = hf'$ en tant que fonctions dans Set. On montre que cette fonction f' est bien un morphisme dans P.

Avec la deuxième égalité, on peut en effet vérifier les conditions suivantes :

(i) continuité : soit $O \subseteq U$ un ouvert de U. Comme h est injective, $O = h^{-1}h(O)$, donc

$$f'^{-1}(O) = (hf')^{-1}(h(O)) = (fh')^{-1}(h(O)),$$

qui est ouvert car h est ouvert et fh' est continue ;

(ii) l'image d'un sommet est un sommet : si $v \in \mathrm{ver}(P)$, $f(v)$ est un sommet. Comme h est persistant et injectif (définition 3.7), $f'(v)$ est un sommet ;

(iii) $o_{f'}$ donne une occurrence pour chaque arête persistante : h est persistant, donc toute arête $e \in \mathrm{edg}(P)$ est persistante par f' ssi elle est persistante par f. Comme h est sans occurrence, $\ell_U(f'(e)) = \ell_V(hf'(e))$, donc $o_{f'}$ a le type attendu ;

(iv) préservation de l'orientation : f' renverse les arêtes de la même manière que f.

On vérifie que P est bien une position : les seules propriétés non triviales sont la bonne formation locale et le quasi-enracinement. Pour la première, si $e \in \mathrm{edg}(P)$ est une arête sortante d'un sommet $v \in \mathrm{ver}(P)$ avec une arête atomique, alors $h'(e)$ est une arête atomique de $\mathrm{edg}(W)$ avec un sommet source $h'(v)$. Comme W est localement bien formée, il existe une arête $e' \in \mathrm{edg}(W)$ de même étiquette atomique que $h'(e)$ et de sommet but $h'(v)$. Il reste à montrer que $f(e')$ est dans l'image de h, ainsi e' aura un antécédent dans P qui garantira la bonne formation locale autour de v. On distingue deux cas, selon la nature de l'image de e' par f : s'il s'agit du sommet $f(h'(v))$, alors il est par hypothèse dans l'image de h, tandis que s'il s'agit d'une arête, elle est adjacente à $f(h'(v))$. Ce dernier est dans l'image de h, et comme h est ouvert, toutes ses arêtes adjacentes sont dans l'image de h.

Pour le quasi-enracinement de P, on utilise encore le fait que h est ouvert. En effet, comme pour la bonne formation locale, toutes les arêtes adjacentes à un sommet v de $\mathrm{ver}(W)$ tel que $f(v)$ est dans l'image de h sont également dans l'image de h. Les sommets de P et de W ont donc le même ensemble d'arêtes adjacentes, avec les mêmes orientations et étiquettes. Si P n'était pas quasi-enracinée, W ne le serait donc pas non plus.

Le cône $U \xleftarrow{f'} P \xrightarrow{h'} W$ est universel car si $U \xleftarrow{p} Q \xrightarrow{q} W$ est un autre cône, on a l'inclusion $q(Q) \subseteq f^{-1}(h(U))$. En effet : $q(Q) \subseteq f^{-1}fq(Q) = f^{-1}(hp(Q))$, mais h est injectif donc $hp(Q) \subseteq h(U)$. On peut donc poser $k\colon Q \longrightarrow P$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} k(x) & := & q(x) \\ o_k(x) & := & o_q(x) \end{array}$$

ce qui caractérise k de façon unique.

Il reste à vérifier que les plongements ouverts sont stables par pullback. Soit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail, "h'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & W \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, hook, "h"'] & V \end{tikzcd}$$

un pullback le long d'un plongement ouvert h. Soit $v \in \mathrm{ver}(W)$ un sommet qui est dans l'image de h', et e une arête adjacente à v. D'après ce qui précède, $f(v)$ est dans l'image de h. De plus quelle que soit sa nature, $f(e)$ est dans l'image de h, car :

— si $f(e)$ est un sommet, $f(e) = f(v)$ par continuité de f,

— si $f(e)$ est une arête, elle est adjacente à $f(v)$. Comme h est ouvert, d'après la remarque précédente $f(e)$ est dans l'image de h.

Par construction de P, e est donc dans l'image de h'. On conclut grâce au lemme 3.13 que h' est ouvert. □

Restrictions Dans la suite, sauf mention contraire, on définit la *restriction* d'un morphisme $f\colon U \longrightarrow V$ le long d'un plongement ouvert $h\colon W \hookrightarrow V$ par le pullback de f le long de h. Cette restriction, qui se fait par le codomaine du morphisme, est plus naturelle dans notre cadre que la restriction usuelle (par exemple dans Set), qui consisterait à précomposer par

un plongement, du fait de la structure des coups (que nous verrons en partie 3.4). Un coup d'une position U vers une position V sera en effet vu comme un morphisme dans P de type $V \longrightarrow U$: le pullback permet alors d'isoler un joueur dans U et de suivre son évolution dans V par le coup.

Lemme 3.15. *Soit h_1 un plongement, h_3 un plongement ouvert, et h_2 un morphisme tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "h_2"'] \arrow[dr, hook, "h_3"] & \\ V \arrow[r, hook, "h_1"'] & W \end{tikzcd}$$

commute, alors h_2 est un plongement ouvert.

Preuve. La flèche h_2 est un plongement par le lemme 3.8. Comme h_3 et h_1 sont des plongements, l'image d'un ouvert $O \subseteq U$ par h_2 s'écrit $h_1^{-1}(h_3(O))$, qui est ouvert car h_3 est ouvert. □

Lemme 3.16. *Tout carré de la forme :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, hook, "h_1"'] & V \arrow[d, hook, "h_2"] \\ U + W \arrow[r, "f_1+f_2"'] & V + X, \end{tikzcd}$$

où h_1 et h_2 sont des plongements de composantes connexes, est un pullback.

Preuve. Si l'on se donne un cône $U + W \xleftarrow{p} P \xrightarrow{q} V$, alors l'image de p est contenue dans U, donc l'unique morphisme $k\colon P \longrightarrow U$ est donné par la corestriction de p. □

Proposition 3.17. *Un plongement ouvert surjectif h est un isomorphisme.*

Preuve. Chaque point du codomaine admet un antécédent, qui est unique dans le cas d'un plongement, ce qui donne une fonction inverse h^{-1} dans Set. Elle est continue car h envoie les ouverts sur des ouverts, donc les images réciproques par h^{-1} d'ouverts sont ouverts. On a donc un inverse dans Top. Pour obtenir enfin un morphisme dans P, le seul point non trivial à vérifier est que cette fonction envoie bien les sommets sur des sommets. Or, un plongement envoie les arêtes sur des arêtes : l'antécédent d'un sommet est toujours un sommet. □

3.4 Coups

Nous pouvons désormais définir la classe M des *coups* de notre jeu, en considérant d'abord deux classes de *coups globaux*. Les coups seront obtenus par restriction de ces coups globaux le long de plongements (ouverts).

L'idée utilisée dans les travaux sur MLL [22, 23] pour définir un jeu graphique à partir du calcul des séquents reposait sur la possibilité de définir des coups sur les positions graphiques qui miment les règles duales du calcul des séquents. Cependant, le jeu pour MLL se voulait très souple quant à la *polarité*, les joueurs ne jouant pas nécessairement à tour de rôle et plusieurs ordres de jeu étant possibles.

Ici, nous utilisons encore le jeu graphique pour mimer les règles logiques. Le jeu étant fortement polarisé (c'est en effet une présentation de la logique linéaire polarisée), nous nous

faciliterons le travail en choisissant une présentation *focalisée*, au sens d'Andreoli [3]. Cela signifie que les coups correspondent à des règles dérivables en calcul des séquents, qui inversent la polarité. Plus précisément, nous considérons les formules *synthétiques* suivantes :

$$A \quad := \quad \mathbb{A}^\perp \quad | \quad [A_1, \ldots, A_n].$$

Ces formules sont presque en bijection avec les formules de $\mathcal{F}$, via la traduction θ définie inductivement par

$$\begin{array}{rcl} \theta(a^\perp) & = & a^\perp \\ \\ \theta(a^{\perp\perp}) & = & [a^\perp] \\ \theta(1) & = & [] \\ \theta(\neg Q) & = & [\theta(Q)] \\ \theta(Q \times Q') & = & \theta(Q); \theta(Q') \\ \\ [A_1, \ldots, A_n]; [B_1, \ldots, B_m] & = & [A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m]. \end{array}$$

La fonction θ n'est pas vraiment une bijection, puisqu'elle identifie par exemple $A \times (B \times C)$ et $(A \times B) \times C$, pour tous A, B, C. Néanmoins, modulo associativité et neutralité de 1 pour le produit, la fonction suivante définit son inverse γ :

$$\begin{array}{rcl} \gamma(a^\perp) & = & a^\perp \\ \gamma[A_1, \ldots, A_n] & = & \delta(A_1) \times \ldots \times \delta(A_n) \\ \\ \delta(a^\perp) & = & a^{\perp\perp} \\ \delta(Q) & = & \neg(\gamma(Q)), \end{array}$$

avec la convention que le produit d'une liste vide est 1. Nos étiquettes, formellement, restent donc des formules de $\mathcal{F}$; mais on définit le jeu en se fondant sur leur image par θ.

Nous considérons donc une règle droite :

$$\frac{\Gamma, A_i \vdash}{\Gamma \vdash [A_1, \ldots, A_n]} \tag{3.2}$$

et deux règles gauches :

$$\frac{\Delta, [A_1, \ldots, A_n] \vdash A_i}{\Gamma, [A_1, \ldots, A_n], \Delta \vdash} \qquad \frac{\Delta, [A_1, \ldots, A_n], a^\perp \vdash a^\perp}{\Gamma, [A_1, \ldots, A_n], \Delta, a^\perp \vdash} \; (A_i = a^\perp) \tag{3.3}$$

où Γ et Δ dénotent des listes de formules de Q (on ne tient pas compte de l'ordre dans les listes pour appliquer les règles).

La règle droite n'a en elle-même pas d'interprétation en logique, car nous serions plutôt tentés d'utiliser une règle de la forme :

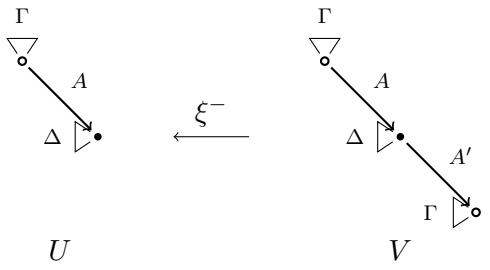
$$\frac{\Gamma, A_1 \vdash \qquad \cdots \qquad \Gamma, A_i \vdash \qquad \cdots \qquad \Gamma, A_n \vdash}{\Gamma \vdash [A_1, \ldots, A_n]}$$

Notre règle droite mime en fait le coup du jeu, où l'opposant doit choisir la composante sur laquelle il interroge le joueur. On retrouve la règle logique complète au moment de construire les stratégies : on demandera que les stratégies soient *réceptives*, c'est-à-dire qu'elles contiennent toutes les manières d'interroger le joueur pour chaque prémisse possible.

La première règle gauche est applicable dans le cas où toutes les hypothèses sont non-atomiques. La seconde s'applique lorsqu'exactement une des hypothèses est atomique et exige que la formule choisie pour passer à droite du séquent soit à son tour atomique. Cette gestion complexe des formules atomiques reflète les intuitions suivantes. Dans les règles de déduction naturelle en forme η-longue présentées en partie 2.3.1, on a un axiome standard : $\Gamma, a, \Delta \vdash a$. Considérons par exemple $a, a \vdash a$. Pour offrir une interprétation fidèle du λ-calcul, notre jeu doit spécifier quelle hypothèse est utilisée. Notre solution consiste à considérer que l'opposant doit d'abord «marquer» l'atome de droite (techniquement en le faisant passer de $[a^\perp]$ à $a^\perp$ et de droite à gauche), puis que, dans un séquent comportant un atome marqué, le seul coup possible consiste à en marquer un autre (cette fois de gauche à droite).

L'alternance entre joueurs se traduit ici par le fait que chaque règle fait passer d'un séquent avec formule à droite à un séquent sans formule à droite, ou l'inverse. Cela sera reflété dans le jeu par le fait que les coups modifieront systématiquement la racine de la position considérée.

Coup de base Les *coups de base globaux* sont les morphismes $m\colon U \longleftarrow V$ entre positions connexes de la forme :



(3.4)

où ξ^- est une occurrence alternante $A' \longrightarrow A$. (Pour indiquer les images par m de chaque sommet de V, on a utilisé le même symbole pour représenter chaque sommet de V et son image par m.) Autrement dit, on a $\theta(A) = [A_1, \ldots, A_n]$ et $A' = A_i$ pour un $1 \leq i \leq n$. Le coup fait ainsi passer :

— le voisinage du sommet marqué avec le symbole $\bullet$ de la conclusion de la règle droite (3.2) à la prémisse de cette règle ;
— et, pour l'une des deux copies, le voisinage du sommet marqué avec le symbole $\circ$ de la conclusion de la règle gauche (3.3) à la prémisse de cette règle.

Ce morphisme :

— identifie les deux copies de la sous-position Γ de V vers la sous-position Γ de U,
— laisse la sous-position Δ intacte,
— envoie les arêtes A et A' de V sur l'arête A de U.

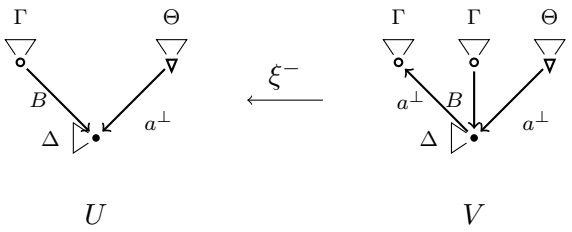
Toutes les occurrences sont vides, sauf celle de l'arête A', qui vaut ξ^-.

Le morphisme est bien défini pour l'orientation des arêtes car seule l'arête $e_{A'}$ est renversée, et ξ^- est une occurrence alternante, donc en particulier négative.

Remarque 3.3. Les coups de base globaux sont caractérisés de façon unique par l'occurrence ξ^- et par la donnée de l'arête d'étiquette A distinguée dans la représentation précédente.

Coup axiome Parmi les coups globaux, on distingue un cas particulier où l'arête active est atomique, et on dit que le coup est un *coup axiome global*. Graphiquement, il s'agit des

coups de la forme :



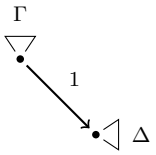
(3.5)

où ξ^- est ici une occurrence alternante $a^\perp \longrightarrow B$. (Pour indiquer les images par m de chaque sommet de V, on a utilisé le même symbole pour représenter chaque sommet de V et son image par m.) Autrement dit, B est nécessairement de la forme $[B_1, \cdots, B_n]$, où $B_i = a^\perp$, pour $1 \leq i \leq n$.

Appelons GM la classe des coups globaux.

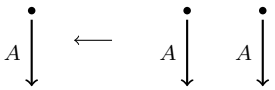
Définition 3.10. Dans un coup global $f\colon V \longrightarrow U$, l'*arête active* est l'unique arête d'occurrence non identité. Un *coup local*, ou simplement *coup* dans la suite, est le pullback d'un coup global le long d'un plongement ouvert $h\colon W \longrightarrow U$, où W est connexe et son image contient l'arête active. On note M l'ensemble des coups.

Remarque 3.4. Dans les positions de la forme :



on ne définit aucun coup dont l'arête active est l'arête d'étiquette 1.

Exemple 3.4. Le morphisme



est le pullback d'un coup global le long d'un plongement ouvert, mais n'est pas un coup car l'arête active n'apparait pas.

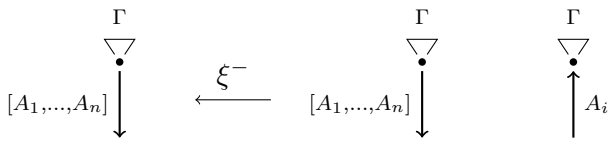
Considérons la classe CM^+ de coups locaux dont les domaine et codomaine sont respectivement les prémisse et conclusion des règles d'inférence suivantes :

$$\frac{\Gamma, [A_1, \ldots, A_n], \Delta \vdash A_i}{\Gamma, [A_1, \ldots, A_n], \Delta \vdash} \qquad \frac{\Gamma, [A_1, \ldots, A_n], \Delta, a^\perp \vdash a^\perp}{\Gamma, [A_1, \ldots, A_n], \Delta, a^\perp \vdash} \ (A_i = a^\perp) \tag{3.6}$$

et, de même, la classe CM^- de morphismes définie par les règles d'inférence :

$$\frac{\Gamma \vdash [A_1, \ldots, A_n] \qquad \Gamma, A_i \vdash}{\Gamma \vdash [A_1, \ldots, A_n]} \qquad \frac{\Gamma \vdash [A_1, \ldots, A_n] \qquad \Gamma, a^\perp \vdash}{\Gamma \vdash [A_1, \ldots, A_n]} \ (A_i = a^\perp.) \tag{3.7}$$

Ces règles sont à interpréter comme des morphismes du coproduit des prémisses vers la conclusion, où Γ et Δ représentent des arbres. Par exemple, la première règle de (3.7) représente le morphisme



On dit que les coups correspondant aux deux règles de gauche dans (3.6) et (3.7) sont *négatifs*, tandis que ceux correspondant aux règles de droite sont *positifs*.

Considérons enfin la classe EM des morphismes de la forme

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "{[A_1,\dots,A_n]}"'] & {} \arrow[l, "\xi^-"'] & {} \arrow[d, "{[A_1,\dots,A_n]}"'] & {} \arrow[u, "A_i"'] \end{tikzcd}$$

Lemme 3.18 (Caractérisation des pullbacks ouverts de coups)**.** *Soit $h\colon Z \hookrightarrow Y$ un plongement ouvert où Y est connexe. Soit $m\colon X \longrightarrow Y$ un coup, tel que l'arête active $e \in \mathrm{edg}(Y)$ est dans l'image de h. Alors le pullback de m le long de h est isomorphe, dans $\mathrm{P}^{\to}$, à un morphisme de la forme*

$$(f + [id_V, id_V] + id_W)\colon (U' + V + V + W) \longrightarrow (U + V + W),$$

où $f\colon U' \longrightarrow U$ est dans $\mathrm{GM} \cup \mathrm{CM}^+ \cup \mathrm{CM}^- \cup \mathrm{EM}$, et $Z \simeq U + V + W$.

De plus, on a l'une des situations suivantes :

— *U est réduite à une arête et $f \in \mathrm{EM}$;*

— *U et U' sont positives (définition 3.2) et $f \in \mathrm{GM}$;*

— *$U > 0$ et $U' < 0$ et $f \in \mathrm{CM}^+$;*

— *$U < 0$ et $U' > 0$ et $f \in \mathrm{CM}^-$.*

Preuve. Considérons un coup défini par le pullback

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_0 \arrow[d, "m_0"] \\ Y \arrow[r, hook, "h_0"'] & Y_0. \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, (l'image de) Y contient l'arête active e de m_0. Soit U la composante connexe de Y contenant e. Le plongement $U \hookrightarrow Y$ est encore ouvert. Soit f le morphisme obtenu par pullback

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "m"] \\ U \arrow[r, hook] & Y. \end{tikzcd}$$

Par construction, f est un coup.

— Si U contient les deux extrémités de e, alors $f \in \mathrm{GM}$.

— Si U ne contient aucune des extrémités de e, alors $f \in \mathrm{EM}$.

— Si U contient la source de e mais pas son but, alors $f \in \mathrm{CM}^-$.

— Si U contient le but de e mais pas sa source, alors $f \in \mathrm{CM}^+$.

Soit $Y' = Y \setminus U$. On a $Y \cong Y' + U$.

Soient Γ et Δ les sous-positions de Y_0 comme définies en (3.4). Soient maintenant $V = \Gamma \cap Y'$ et $W = \Delta \cap Y'$. On a des pullbacks de la forme

$$\begin{tikzcd} V + V \arrow[r, hook] \arrow[d, "{[id_V, id_V]}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "m"] \\ V \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "m"] \\ W \arrow[r, hook] & Y, \end{tikzcd}$$

ce qui conclut la démonstration. □

Corollaire 3.19 (Caractérisation des coups)**.** *On a :*

$$\mathrm{M} = \mathrm{EM} \cup \mathrm{CM}^- \cup \mathrm{CM}^+ \cup \mathrm{GM}.$$

En particulier, le domaine d'un coup possède :
- *une seule composante connexe lorsque le coup est dans* $\mathrm{GM} \cup \mathrm{CM}^+$ *;*
- *deux composantes connexes lorsque le coup est dans* $\mathrm{EM} \cup \mathrm{CM}^-$*.*

Preuve. Le codomaine d'un coup est connexe, donc dans le lemme 3.18, V et W sont vides. Tout ouvert connexe s'écrit comme le codomaine d'un coup dans l'une des classes de coups. □

Définition 3.11. Une arête e dans une position V est *disponible* ssi
- V a une racine v et e est adjacente à v,
- ou V n'a pas de racine et e n'a pas de but.

Soit MCode l'ensemble des triplets (V, e, ξ), où V est une position, e est une arête disponible de V et ξ est une occurrence alternante dans $\ell_V(e)$.

Voyons M comme une sous-catégorie de $\mathrm{P}^{\to}$, dont les morphismes $m_1 \longrightarrow m_2$ sont les carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "m_1"'] & U' \arrow[d, "m_2"] \\ V \arrow[r, hook, "h"'] & V', \end{tikzcd}$$

avec h et k dans Emb.

Équipons de plus MCode de la structure de catégorie suivante : un morphisme $(V, e, \xi) \longrightarrow (V', e', \xi')$ est un plongement ouvert $h\colon V \longrightarrow V'$ tel que $h(e) = e'$ et $\xi = \xi'$.

Construisons maintenant le foncteur code$\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{MCode}$ envoyant
- tout coup $m\colon U \longrightarrow V$ sur (V, e, ξ), où e est l'arête active de m et ξ est l'occurrence correspondante
- et tout morphisme (k, h) sur h.

Lemme 3.20. *Le foncteur* code *est une équivalence de catégories.*

Preuve. Un coup $m\colon U \longrightarrow V$ est déterminé, à isomorphisme près dans $\mathrm{P}_{/V}$, son arête active $e \in V$ et une occurrence alternante dans l'étiquette de e. □

Corollaire 3.21 (Extension des coups)**.** *Si* $m\colon U \longrightarrow V$ *est un coup, et si* $h\colon V \hookrightarrow W$ *est un plongement ouvert avec* W *connexe, alors il existe un unique coup* $\overline{m}\colon \overline{U} \longrightarrow W$ *et un plongement ouvert* $\overline{h}\colon U \hookrightarrow \overline{U}$ *(à un isomorphisme près) tels que :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "\overline{h}"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \overline{U} \arrow[d, "\overline{m}"] \\ V \arrow[r, hook, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

est un pullback.

Preuve. Soit $e \in \mathrm{edg}(V)$ l'arête active de m. On définit le coup $\overline{m}$ sur W dont l'arête active est $h(e)$, avec la même occurrence que m. On note $m' \colon U' \longrightarrow V$ le pullback de $\overline{m}$ le long de h. D'après le lemme 3.18, comme W est connexe, m' est un coup d'arête active e et d'occurrence l'occurrence de m : ces deux coups sont isomorphes (lemme 3.20).

De même, la caractérisation des coups par arête active (lemme 3.20 assure l'unicité de $\overline{m}$. □

Lemme 3.22. *Si $m \colon V \longrightarrow W$ est un coup, si $f, g \colon U \longrightarrow V$ sont des isomorphismes, et si*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & V \arrow[r, "m"] & W \end{tikzcd}$$

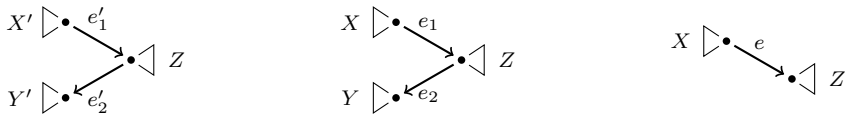
commute, alors $f = g$.

Preuve. Soit $e \in \mathrm{edg}(W)$ l'arête active de m, et $e_1, e_2 \in \mathrm{edg}(V)$ les antécédents de e par m telles que $o_m(e_1) = \epsilon$ et $o_m(e_2)$ n'est pas vide.

Comme f est un isomorphisme, il est en particulier sans occurrences, donc il existe une unique arête $e'_2 \in \mathrm{edg}(U)$ antécédent de e_2 par f. Comme il s'agit de la seule arête de U qui s'envoie avec une occurrence non vide sur e par mf, on a également $g^{-1}(e_2) = e'_2$. Les isomorphismes f et g préservent les sommets source et but de e'_2.

L'image inverse $f^{-1}(\{e_1, e_2\})$ est une paire $\{e'_1, e'_2\}$ de deux arêtes distinctes. Il s'agit également de l'image inverse $(mf)^{-1}(e)$, donc $g(e'_1) = f(e'_1)$, et f et g préservent les source et but de e'_1.

Les positions U, V et W sont par conséquent de la forme :



Soit $x \in X'$: on montre que $f(x)$ est dans X par induction sur un chemin de x à la racine du sous-arbre X' :

— la racine du sous-arbre est la source de e'_1, donc elle est préservée par f ;
— les arêtes adjacentes à un sommet v de X' tel que $f(v) \in X$ ont, par continuité, leur image dans X ;
— il en est de même pour les sommets adjacents à une arête dont l'image par f est dans X.

Or si $f(x)$ et $g(x)$ sont tous les deux dans X, alors $f(x) \neq g(x)$ implique que $mf(x) \neq mg(x)$, ce qui est absurde.

On procède de même sur Y et Z, ce qui montre que $f(u) = g(u)$ pour tout $u \in U$. □

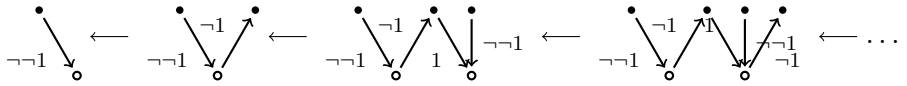
3.5 Forte normalisation des parties globales

Dans cette section on s'intéresse aux *parties globales naïves*, c'est-à-dire aux suites dénombrables (finies ou non) de coups globaux composables :

$$U_0 \xleftarrow{m_0} U_1 \xleftarrow{m_1} \cdot$$

Lorsqu'elles sont finies, ces parties sont les morphismes de la catégorie libre engendrée par le graphe dont les sommets sont les positions sans arêtes pendantes, et dont les flèches sont les coups globaux entre ces positions.

La structure des coups de base dans le jeu permet de créer de telles parties potentiellement infinies, comme par exemple :

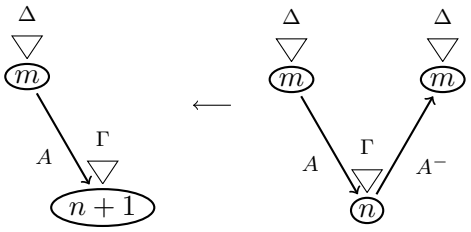


où les copies successives du joueur noté $\circ$ jouent toujours le même coup sur l'arête d'origine $\neg\neg 1$, sans répondre aux coups sur les autres arêtes. Cependant afin d'isoler une notion de stratégie gagnante pour notre jeu, nous aurons besoin de pouvoir identifier des positions finales pour chaque joueur, et donc d'éliminer à priori les comportements divergents.

Pour cela, nous introduirons la notion de *vue* à la section 4.1.3, mais nous prouvons dès maintenant un résultat intermédiaire qui garantit la forte normalisation des parties.

On définit pour cela des positions *enrichies* où les sommets sont tous étiquetés par un entier naturel, c'est-à-dire que l'on ajoute dans la donnée de chaque position U une fonction $\ell_U \colon \mathrm{ver}(U) \longrightarrow \mathbb{N}$, et on forme la catégorie $\mathrm{P}[\mathbb{N}]$ dont les objets sont les positions enrichies, et les morphismes sont les morphismes de P entre les positions non enrichies sous-jacentes.

Comme coup de base global enrichi, on choisit une variante des coups de base globaux :



qui diminue de 1 l'étiquette du nœud actif. En particulier, ce nœud ne peut plus jouer de nouveau coup lorsque son étiquette est nulle.

Pour toute position $U \in \mathrm{P}$, on définit la position enrichie $U[n]$ obtenue en ajoutant l'étiquette n à tous les nœuds de U. Le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathrm{P}[\mathbb{N}] \longrightarrow \mathrm{P}$ est fidèle, ce qui assure que :

Lemme 3.23. *Si*

$$U_0 \xleftarrow{m_0} U_1 \xleftarrow{m_1} U_2 \xleftarrow{m_2} \cdots \xleftarrow{m_{n-1}} U_n$$

est une partie finie dans P*, alors il existe une position enrichie U'_0, qui est la position de départ d'une unique partie enrichie qui simule $(m_i)_{0 \leq i < n}$, c'est-à-dire une suite de coups enrichis*

$$U'_0 \xleftarrow{m'_0} U'_1 \xleftarrow{m'_1} U'_2 \xleftarrow{m'_2} \cdots \xleftarrow{m'_{n-1}} U'_n$$

telle que $\mathcal{U} m'_i = m_i$.

On peut par ailleurs choisir $U'_0 = U[n]$.

Preuve. Dans la partie $(m_i)_{0 \leq i < n}$, chaque sommet est en position active au plus n fois : en posant $U'_0 = U[n]$, on s'assure donc que $\ell_{U'_i}(\rho_i) > 0$, où ρ_i est la racine de U'_i, et $0 \leq i < n$. On peut donc jouer tous les coups à l'identique.

L'unicité des $(m'_i)_{0 \leq i < n}$, étant donné une position U'_0 de départ, provient de la fidélité de $\mathcal{U}$. □

La fin de cette section est consacrée à la preuve que le jeu enrichi est fortement normalisant, en utilisant un argument similaire à [11, 12]. On dit qu'une position enrichie U est *fortement normalisante* (abrégé SN dans la suite) lorsque toute partie enrichie démarrant de la position U est finie.

Lemme 3.24. *Soient U et V deux positions enrichies telles que $\mathcal{U}U = \mathcal{U}V$, et pour tout sommet $v \in \mathrm{ver}(U)$, $\ell_U(v) \geq \ell_V(v)$.*

Si U est SN*, alors V est* SN*.*

Preuve. On prouve par induction sur n que toute suite $V = V_0 \xleftarrow{m_0} V_1 \xleftarrow{m_1} \dots \xleftarrow{m_n} V_n$ de coups enrichis se relève en une suite de coups enrichis $U = U_0 \xleftarrow{m_0} U_1 \xleftarrow{m_1} \dots \xleftarrow{m_n} U_n$ où pour chaque $1 \leq i \neq n$ on vérifie d'une part l'égalité $\mathcal{U}U_i = \mathcal{U}V_i$ et d'autre part la propriété $\ell_{U_i}(v) \geq \ell_{V_i}(v)$ pour chaque v.

Le résultat est évident pour $n = 0$.

Par hypothèse d'induction on a pu obtenir une suite $U_0 \longleftarrow \dots \longleftarrow U_{n-1}$ vérifiant la propriété précédente. Soit v_r la racine de V_{n-1} : étant donné que l'on a pu jouer le coup m_{n-1} depuis la position V_{n-1}, alors le rang $\ell_{V_{n-1}}(v_r)$ est strictement positif. Il en est donc de même pour $\ell_{U_{n-1}}(v_r) > 0$.

On peut donc définir U_n avec $\mathcal{U}U_n = \mathcal{U}V_n$ et dont les étiquettes valent :

$$\ell_{U_n}(v) = \begin{cases} \ell_{U_{n-1}}(m_{n-1}(v)) - 1 & \text{quand } m_{n-1}(v) = v_r, \\ \ell_{U_{n-1}}(m_{n-1}(v)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette définition, m_n est un coup $U_{n-1} \longleftarrow U_n$. L'expression précédente de $\ell_{U_n}(v)$ peut être réécrite en :

$$\ell_{U_n}(v) = \ell_{V_n}(v) + \ell_{U_{n-1}}(m_{n-1}(v)) - \ell_{V_{n-1}}(m_{n-1}(v))$$

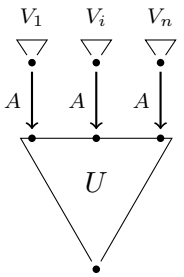
d'où $\ell_{U_n}(v) \geq \ell_{V_n}(v)$. □

Lorsque U est une position enrichie avec n sommets distingués $v_1, \dots, v_n$, A est une formule, et $V_1, \dots, V_n$ des positions enrichies enracinées, on définit la position enrichie

$$W(U, (v_i)_{1 \leq i \leq n}, A, (V_i)_{1 \leq i \leq n})$$

en prenant

- l'union disjointe de U et des V_i,
- et pour chaque i, on ajoute une arête dont la source est la racine de V_i et le but est le sommet v_i dans U. Cette arête est étiquetée par A :



Lemme 3.25. *Si U et $V_1, \dots, V_n$ sont* SN*, alors $W(U, A, V_i)$ est* SN*.*

Preuve. On prouve ce résultat par induction selon un ordre lexicographique bien fondé

$$<:= (<_{\text{form}}, <_{\text{play}}, <_{\text{rank}})$$

entre les paires (A, U) où A est une formule, et U une position enrichie qui est SN.

Soit $<_{\text{form}}$ l'ordre sur les formules défini par $A <_{\text{form}} B$ ssi A est une sous-formule stricte de B.

Soit $<_{\text{play}}$ l'ordre sur les positions enrichies dont on sait qu'elles sont SN, défini par $U <_{\text{play}} V$ quand il existe une partie finie $p\colon \mathcal{U}U \longrightarrow \mathcal{U}V$ non vide entre les positions non enrichies. Nous n'avons pas encore prouvé que cet ordre est de manière générale bien fondé, mais il l'est évidemment si l'on se restreint aux positions bien fondées.

Enfin, pour chaque position enrichie U, on note $\mathcal{R}(U)$ le multiensemble *fini* des rangs des sommets de U :

$$\mathcal{R}(U) = \{\ell_U(v) \mid v \in \mathrm{ver}(U)\}.$$

Définition 3.12 (Ordre multiensemble)**.** Soit $\leq_b$ un ordre bien fondé. Si X est un multiensemble (dénombrable), on note $X(x)$ le nombre d'occurrences d'un élément $x \in X$, en convenant que $X(x) = 0$ si $x \notin X$. L'*ordre multiensemble* est l'ordre défini entre deux multiensembles X et Y par :

$$X \leq_m Y \Leftrightarrow \forall x \in X, (X(x) \leq Y(x) \text{ou} \exists x', x \leq_b x' \text{et} X(x') < Y(x')).$$

Proposition 3.26. *L'ordre multiensemble sur les multiensembles finis est bien fondé.*

On note $<_{\text{rank}}$ l'ordre induit sur les positions enrichies par l'ordre multiensemble sur les $\mathcal{R}(U)$.

Soit m un coup enrichi $W(U, (v_i), A, (V_i)) \longleftarrow X$. Son arête active e_m est l'une des arêtes entrantes à la racine de $W(U, (v_i), A, (V_i))$. Cette arête e_m donc est :

— interne à U,

— ou bien l'une des arêtes ajoutées par l'opération W, qui relie, pour un certain j, la racine de V_j au sommet $v_j \in \mathrm{ver}(U)$. Ce sommet v_j est la racine de U.

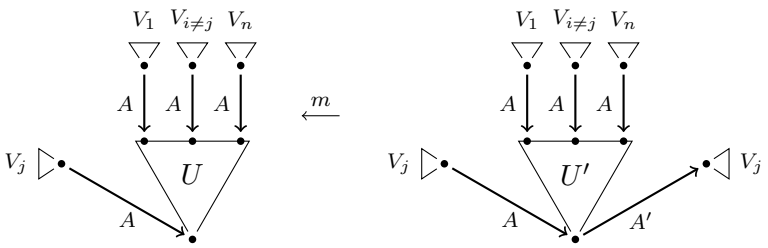
Dans le premier cas, lorsque l'arête active est interne à U, il existe donc une position U' et un coup $m'\colon U \longleftarrow U'$. On définit la famille $(v'_j)_j$ de sommets de U' en prenant :

— pour $1 \leq j \leq n$, on conserve $v'_j = v_j$,

— on ajoute pour chaque $1 \leq i \leq n$ tel que v_i apparait dans le sous-arbre de U sous l'arête active e_m, une copie du sommet $v_i = v'_{\sigma i}$, en choisissant une numérotation arbitraire σ de ces sommets.

On procède de même pour définir la famille des positions (V'_j) correspondante. Ceci permet d'écrire $X = W(U', v'_j, A, V'_j)$. Par hypothèse, U est SN, donc U' l'est également, ce qui assure que $(A, U') < (A, U)$ et donc que $W(U', v_i, A, V_i)$ est SN par hypothèse d'induction.

Dans le second cas, l'arête active est une arête qui relie la racine d'un V_j au sommet v_j de U, ce qui donne graphiquement pour un coup m, en notant A' la sous-formule de A choisie par le coup, et en omettant les étiquettes des nœuds :



L'étiquette de la racine de U vaut $n+1$, avec $n \geq 0$. Soit U' la position telle que $\mathcal{U}U' = \mathcal{U}U$, dont la racine est étiquetée avec n, et dont les autres sommets portent les mêmes étiquettes que dans U. La position enrichie X se décompose sous la forme :

$$X = W(V_j, \rho_j, A', W(U', (v_i), A, (V_i))),$$

où ρ_j est la racine de V_j.

La position U' est SN d'après le lemme 3.24. Comme $U' <_{\text{rank}} U$, alors $W(U', (v_i), A, (V_i))$ est SN par hypothèse d'induction. Comme V_j est SN par hypothèse, et que $A' <_{\text{form}} A$, alors X est SN par hypothèse d'induction.

Ainsi, pour tout coup $W(U, (v_i), A, (V_i)) \longleftarrow X$, on prouve que X est SN, donc la position $W(U, (v_i), A, (V_i))$ est SN. $\square$

Les positions enrichies à un seul sommet, i.e., dont l'image par $\mathcal{U}$ est isomorphe à 1, sont SN par absence de coup dont elles seraient la position de départ. On peut reconstruire n'importe quel arbre complet en ajoutant chaque arête, avec sa source, une à une avec l'opération W précédente, ce qui assure que :

Théorème 3.27. *Les parties enrichies sont fortement normalisantes.*

Chapitre 4

Stratégies innocentes et composition parallèle

Dans le chapitre précédent, nous avons défini une catégorie P, guidés par l'intuition que ses objets sont les positions de notre jeu. Nous avons isolé une classe de morphismes représentant les coups. Il serait naturel de définir à présent les *parties séquentielles* comme des suites de coups composables et les *stratégies naïves* comme les ensembles de parties séquentielles clos par préfixe. Toutefois, cette notion ne fait pas vraiment sens, puisqu'elle permet à une stratégie d'accepter un coup, tout en refusant un coup isomorphe. On corrige ce petit défaut en fin de chapitre, pour donner une définition plus sensée des stratégies naïves.

On obtient ainsi une notion naïve de stratégie, qui reste faiblement reliée aux catégories de réponse et au λ-calcul étudiés au chapitre 2. Cette notion de stratégie pose en fait plusieurs problèmes. D'abord, une telle stratégie peut refuser des coups sur une position négative. Ensuite, une telle stratégie peut envisager de jouer de plusieurs manières différentes ; elle peut ne pas être déterministe. De plus, une telle stratégie peut rester sans réponse à un coup, voire répéter indéfiniment le même coup. Enfin, une telle stratégie permet aux joueurs d'agir différemment en fonction de ce qui arrive aux autres (ce qui bloque toute tentative d'obtenir un modèle plein du λ-calcul). Chacune de ces caractéristiques représente un obstacle pour établir une correspondance forte avec les catégories de réponse.

Notre première étape pour améliorer la situation suit la méthode proposée par Hyland et Ong [25] et indépendamment par Nickau [38]. On définit la notion de *vue* et on raffine la notion de stratégie. D'une part, on définit une stratégie *innocente* comme étant un ensemble de vues clos par préfixe. D'autre part, on montre comment reconstruire une stratégie naïve à partir d'une stratégie innocente.

Cela résout le dernier des problèmes mentionnés ci-dessus. On traite les autres, qui sont plus faciles dans un second temps. On revient en fin de chapitre aux stratégies naïves pour les relier aux stratégies innocentes.

4.1 Catégorie double des vues

4.1.1 Extension verticale dans une catégorie double

On définit d'abord, à partir de la catégorie P, la catégorie double K^0 des *câbles*, qui permet ensuite de définir une notion de *vues* analogues aux vues en sémantique de jeux. Intuitivement, une catégorie double D^0 [13, 14, 18] est constituée d'un ensemble de *cellules* α :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

dont les bords horizontaux forment une catégorie D^0_h, et les bords verticaux forment une catégorie D^0_v avec le même ensemble d'objets. Ces cellules peuvent être composées horizontalement :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & B \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "v_2"'] \arrow[dr, phantom, "(\beta)"] & C \arrow[d, "v_3"] \\ A' \arrow[r, "h'_1"'] & B' \arrow[r, "h'_2"'] & C' \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h_2 \circ h_1"] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[drr, phantom, "(\beta \circ \alpha)"] & & C \arrow[d, "v_3"] \\ A' \arrow[rr, "h'_2 \circ h'_1"'] & & C' \end{tikzcd}$$

et verticalement (on applique d'abord la cellule du haut puis celle du bas) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & B \arrow[d, "v_2"] \\ A' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "v'_1"'] \arrow[dr, phantom, "(\beta)"] & B' \arrow[d, "v'_2"] \\ A'' \arrow[r, "h''"'] & B'' \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "v'_1 \circ v_1"'] \arrow[dr, phantom, "(\beta \bullet \alpha)"] & B \arrow[d, "v'_2 \circ v_2"] \\ A'' \arrow[r, "h''"'] & B'', \end{tikzcd}$$

et forment donc deux catégories de cellules respectivement D^0_H et D^0_V. Ces deux compositions vérifient la *loi d'échange*. Notons $\circ$ la composition dans D^0_H, et $\bullet$ la composition dans D^0_V. La loi d'échange demande que pour toutes les cellules α, β, γ et δ composables, on ait l'égalité suivante :

$$(\delta \circ \gamma) \bullet (\beta \circ \alpha) = (\delta \bullet \beta) \circ (\gamma \bullet \alpha).$$

Dans la suite, les cellules que l'on utilise s'interprètent naturellement comme des transformations qui partent du bord bas-gauche et qui vont vers le bord haut-droit. On les notera par conséquent sous la forme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow \alpha"] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B'. \end{tikzcd}$$

Le sens de la flèche n'entre pas en conflit avec le sens de la composition horizontale, mais va en revanche dans le sens contraire de la composition verticale. On pourra retenir que la composition verticale va du haut vers le bas : les diagrammes dans la suite respectent cet ordre.

On se concentre désormais sur la catégorie D^0_H dont les objets sont les morphismes verticaux et les morphismes sont les cellules de D^0. On souhaite ajouter des morphismes supplémentaires à cette catégorie D^0_H pour former une catégorie D. Cette construction sera utilisée dans la suite sur les vues, les câbles et la descente pour prendre ne compte l'ordre préfixe sur leurs tuiles respectives. Nous présentons donc ici le cas général.

Concrètement, on va considérer certaines cellules $\alpha\colon v \longrightarrow v'$ de D^0_H non plus comme des morphismes de v vers v' (qui sont des flèches de D^0_h), mais comme des morphismes de v vers $v'v''$ pour toute flèche v'' qui se compose avec v'. Autrement dit, α sera vue dans D comme un morphisme de son domaine (dans D^0_H) vers une extension de son codomaine (dans D^0_H). Pour souligner l'intuition que l'on *agrandit* les codomaines en passant de D^0_H à D, on nomme cette construction l'*extension verticale d'une catégorie double*. Cette dernière intervient déjà, par exemple, pour montrer les résultats de [42].

Commençons par isoler les cellules de D^0 concernées par cette construction : il s'agit des cellules *minimales* que l'on définit à présent.

Définition 4.1 (Décomposition)**.** Soit α une cellule de D^0, et $g \circ f$ une factorisation donnée de son bord gauche :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & U' \arrow[dd, "v"] \\
V \arrow[d, "g"'] & \\
W \arrow[r] & W'.
\end{tikzcd}$$

Une *décomposition* de la cellule α par rapport à (f, g) est une paire de cellules (β, γ) telles que

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & U' \arrow[d, "v_1"'] \arrow[dd, bend left, "v"] \\
V \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\beta"] & V' \arrow[d, "v_2"'] \\
W \arrow[r] & W'
\end{tikzcd}$$

commute, i.e., $\alpha = \beta \bullet \gamma$.

Définition 4.2 (Décomposition minimale)**.** Une *décomposition minimale* est une décomposition (β, γ) telle que pour toute autre décomposition (β', γ'), il existe une unique cellule δ telle que

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrr] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\gamma'"] & & & U' \arrow[dl, "v'_1"'] \arrow[dll, "v_1"] \arrow[dd, "v"] \\
V \arrow[rr] \arrow[d, equal] \arrow[drr, dashed, "\delta"] & & V'' \arrow[d, dashed] \arrow[ddr, "v'_2"] & \\
V \arrow[rr] \arrow[d, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\beta"] & & V' \arrow[dr, "v_2"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\gamma"] & \\
W \arrow[rrr] & & & W' \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\beta'"]
\end{tikzcd}$$

commute. Algébriquement, ceci se résume à demander que les égalités :

$$\delta \bullet \gamma' = \gamma \qquad \text{et} \qquad \beta \bullet \delta = \beta'$$

soient vraies.

Une cellule α est dite minimale si elle est sa propre décomposition minimale, i.e.,

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, equal, "id"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & U' \arrow[d, equal, "id"'] \arrow[dd, bend left, "v"] \\
U \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[d, "v"'] \\
W \arrow[r] & W'
\end{tikzcd}$$

est une décomposition minimale de α.

Lorsque l'on dispose de cellules de la forme :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & U' \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha'"] & U'' \arrow[d, "v_1'"] \\
V \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\beta"] & V' \arrow[r] \arrow[d, "v_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\beta'"] & V'' \arrow[d, "v_2'"] \\
W \arrow[r] & W' \arrow[r] & W''
\end{tikzcd}$$

où les paires (α, β) et (α', β') forment des décompositions minimales, alors il ne semble pas nécessaire que la paire $(\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta)$ soit une décomposition minimale relativement au bord gauche de la grande cellule.

Autrement dit, les décompositions minimales ne semblent pas être nécessairement stables par composition horizontale dans la catégorie double, même si cette propriété sera vérifiée dans les catégories construites par la suite.

Définition 4.3. On dit qu'une catégorie *a les décompositions* si :

(i) elle possède toutes les décompositions minimales,

(ii) et si ces décompositions minimales sont stables par composition horizontale.

Lemme 4.1. *Si $\gamma = \beta \bullet \alpha$ est une décomposition minimale, alors β est minimale.*

Preuve. Par propriété universelle des décompositions minimales, il suffit de montrer que toute décomposition de β en :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\delta"] & V' \arrow[d] \\
V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\beta'"] & X' \arrow[d] \\
W \arrow[r] & W'
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

admet une cellule ϵ vers la décomposition :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "id"] & V' \arrow[d, equal] \\
V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\beta"] & V' \arrow[d] \\
W \arrow[r] & W',
\end{tikzcd}$$

i.e., une cellule ϵ telle que :

$$id \bullet \epsilon = \delta \qquad \text{et} \qquad \epsilon \bullet \beta' = \beta.$$

Or, en précomposant verticalement (4.1) par α, on obtient deux décompositions de γ, d'une part en $\beta' \bullet (\delta \bullet \alpha)$, et d'autre part en $\beta \bullet (id \bullet \alpha) = \beta \bullet \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & U' \arrow[d] & \\
V \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & V' \arrow[d] \arrow[ddr, equal] & \\
V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\beta'"] \arrow[rr, bend left] & X' \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\epsilon"] & V' \arrow[dl] \\
W \arrow[r] & W' \arrow[ur, phantom, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

La propriété universelle de la décomposition minimale de $\gamma = \beta \bullet \alpha$ donne la cellule ϵ cherchée. $\square$

Les décompositions minimales sont uniques à un isomorphisme près, donc en faisant un choix pour ces décompositions, on peut définir une loi interne $\circ$ sur les cellules minimales de la façon suivante. Soient :

$$\begin{tikzcd}
 & & W_3 \arrow[d] \\
 & V_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\beta"] & W_2 \arrow[dd] \\
U_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & V_1 \arrow[d] & \\
U \arrow[r] & V \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

deux cellules minimales. On prend une décomposition minimale de la cellule β en $\beta = \beta_2 \bullet \beta_1$. On définit alors $\beta \circ \alpha$ comme étant la cellule :

$$\begin{tikzcd}
 & & W_3 \arrow[d] \\
 & & W_2 \arrow[d] \\
U_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & V_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\beta_2"] & W_1 \arrow[d] \\
U \arrow[r] & V \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

qui est encore bien minimale, par hypothèse sur D^0. Cette opération *n'est pas nécessairement* associative en général. Dans la suite, tous les décompositions minimales seront cependant uniques, et non uniques à isomorphisme près : la loi $\circ$ sera donc une loi de composition sur ces cellules minimales.

Définition 4.4 (Extension verticale d'une catégorie double)**.** Étant donné une catégorie double D^0 avec décompositions telle que la loi $\circ$ définie ci-dessus soit associative, on définit D la catégorie dont les objets sont les flèches verticales de D^0, et dont les morphismes $v \longrightarrow v'$ sont les cellules minimales $\alpha\colon v \longrightarrow v'_2$ telles qu'il existe v'_1 vérifiant :

$$v' = v'_2 \circ v'_1.$$

Graphiquement :

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[d, "v'_1"'] \arrow[dd, bend left, "v'"] \\
X \arrow[r] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & Y' \arrow[d, "v'_2"'] \\
Y \arrow[r, "u"'] & Z'.
\end{tikzcd}$$

4.1.2 Câbles

On définit à présent la catégorie double K^0 des tuiles de câbles, que l'on peut voir comme une généralisation des vues (ces dernières formeront une sous-catégorie pleine de la catégorie verticale K^0_v) :

— sa catégorie horizontale K^0_h est la sous-catégorie pleine de Emb (définition 3.9) dont les positions sont connexes, potentiellement vides,

— sa catégorie verticale est la catégorie libre engendrée par le graphe possédant les mêmes objets, et ayant pour arêtes $X \longrightarrow Y$ les *câbles élémentaires*.

Définition 4.5. Un câble élémentaire est une paire

$$X \overset{h}{\hookrightarrow} Z \overset{m}{\longrightarrow} Y$$

de morphismes composables dans P, où :

— m est un coup,

— h est un plongement ouvert et son image est une composante connexe de Z,

— la composée mh dans P n'est pas un isomorphisme.

Si l'on considère les sommets d'une position Y comme des joueurs, et que l'on joue sur Y le coup m, alors ce coup décrit l'évolution de l'ensemble des joueurs. Un câble élémentaire permet au contraire, grâce au plongement ouvert h, de ne considérer plus qu'un sous-ensemble des joueurs après avoir joué le coup. Ceci permettra, lors de la construction des stratégies, de spécifier le comportement de tout sous-ensemble de joueurs sans tenir compte de l'évolution des autres joueurs éloignés dans la position.

Certains câbles élémentaires, où h n'est pas trivial, permettent de déduire l'ensemble de tous les autres câbles élémentaires de même coup m : c'est le cas lorsque l'image de h contient le sommet actif, en utilisant le corollaire 3.21. En utilisant par ailleurs le lemme 3.18, on peut remarquer que les seuls plongements possibles pour h sont les plongements qui contiennent l'arête active du coup m, afin que mh ne soit pas un isomorphisme.

Définition 4.6 (Câbles)**.** La catégorie des *câbles* est la catégorie librement engendrée par le graphe dont les objets sont les positions connexes et dont les arêtes sont les câbles élémentaires. On la note K_v^0.

La composition dans P définit un foncteur $\mathrm{K}_v^0 \longrightarrow \mathrm{P}$.

Lemme 4.2. *Si (h, m) est un câble élémentaire, alors la composée $m \circ h$ est épi dans* P*.*

L'image d'un câble par le foncteur de composition $\mathrm{K}_v^0 \longrightarrow \mathrm{P}$ est épi dans P*.*

Preuve. D'après le corollaire 3.19, on a l'une des deux situations suivantes :

— Z est connexe, donc h est trivial,

— Z a deux composantes connexes, qui ont la même image par m.

Or les coups sont épis. □

Il reste à définir les catégories de cellules K_H^0 et K_V^0. La catégorie K_V^0 sera librement engendrée par le graphe des tuiles de câbles élémentaires :

Définition 4.7. Une *tuile de câbles élémentaire* est un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "h_1"] \arrow[d, hook, "h"'] & X' \arrow[d, hook, "h'"] \\
Y \arrow[r, hook, "k"'] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y' \arrow[d, "m'"] \\
Z \arrow[r, hook, "h_2"'] & Z'
\end{tikzcd}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "h"'] & X' \arrow[d, hook, "h'"] \\
X \arrow[ur, hook, bend left, "h_1"] \arrow[dr, equal] \arrow[drr, hook, bend right, "h_2"'] & Y \arrow[r, hook, "k"'] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y' \arrow[d, "m'"] \\
 & X \arrow[r, hook] & Z'
\end{tikzcd}$$

où les carrés marqués sont des pullbacks, et vérifiant :

— sur le diagramme de gauche, (h, m) est un câble élémentaire,

— sur le diagramme de droite, h est un plongement de X en tant que composante connexe de Y.

Dans la suite, on appellera *tuiles actives* les tuiles provenant du diagramme de gauche, et *tuiles passives* les tuiles provenant du diagramme de droite.

Les foncteurs $\mathrm{dom}_l, \mathrm{cod}_r \colon \mathrm{K}_V^0 \longrightarrow \mathrm{K}_v^0$, qui à chaque tuile associent respectivement son bord gauche et son bord droit, dont définis inductivement sur les tuiles, en prenant sur une tuile élementaire α comme ci-dessus :

— si α est active, $\mathrm{dom}_l(\alpha) = (h, m)$;
— si α est passive, $\mathrm{dom}_l(\alpha) = id_X$;
— et $\mathrm{cod}_r(\alpha) = (h', m')$ dans les deux cas.

La catégorie K^0_V est la catégorie libre engendrée par le graphe dont les sommets sont les plongements de K^0_h, et dont les arêtes $h_1 \longrightarrow h_2$ sont les tuiles de câbles élémentaires.

Remarque 4.1. Pour la catégorie double K^0, ainsi que dans la suite pour les tuiles de descente, on désigne les deux cellules sous l'appellation *tuiles*, reprenant ainsi la terminologie de [16].

La composition horizontale des suites formées de tels diagrammes se définit par induction sur la longueur de ces suites. Les tuiles élémentaires se composent grâce au lemme du pullback, et pour deux cellules quelconques α et β

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & X' \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\beta"] & X'' \arrow[d] \\ Z \arrow[r, hook] & Z' \arrow[r, hook] & Z'' \end{tikzcd}$$

on procède par induction sur la longueur du bord droit de β :
— s'il est de longueur nulle, son bord droit l'est également, et α et β sont triviales,
— sinon on décompose la cellule en $\beta = \beta_2 \bullet \beta_1$ où β_2 est une tuile élémentaire. Si le bord gauche de β_2 est un câble élémentaire, alors α se décompose en $\alpha_2 \bullet \alpha_1$ où α_2 est une tuile élémentaire : on pose alors

$$\beta \circ \alpha = (\beta_2 \circ \alpha_2) \bullet (\beta_1 \circ \alpha_1)$$

où $\beta_1 \circ \alpha_1$ est défini par induction. Sinon, lorsque le bord gauche de β_2 est trivial, on pose en utilisant l'hypothèse d'induction

$$\beta \circ \alpha = (\beta_2 \circ id) \bullet (\beta_1 \circ \alpha).$$

Avec cette définition, on peut tout de suite noter que si $\alpha = \alpha_2 \bullet \alpha_1$ et $\beta = \beta_2 \bullet \beta_1$ où β_2 est une tuile élémentaire composable horizontalement avec la tuile α_2, alors $\beta \circ \alpha = (\beta_2 \circ \alpha_2) \bullet (\beta_1 \circ \alpha_1)$. On en déduit que :

Lemme 4.3. *La composition de* K^0_H *est associative.*

Preuve. Soient α, β et γ trois cellules composables horizontalement. On prouve le résultat par induction sur la longueur du bord droit de γ.

Lorsque ce bord est de longueur nulle, les trois cellules sont triviales.

Sinon, on peut décomposer $\gamma = \gamma_2 \bullet \gamma_1$, où γ_2 est une tuile élémentaire. On obtient, en itérant, les décompositions $\beta = \beta_2 \bullet \beta_1$ et $\alpha = \alpha_2 \bullet \alpha_1$ où β_2 et α_2 sont soit triviales, soit des tuiles élémentaires, selon la longueur de leur bord gauche, et se composent horizontalement avec γ_2. Avec la remarque précédente, la composée $\gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ est égale à :

$$(\gamma_2 \circ (\beta_2 \circ \alpha_2)) \bullet (\gamma_1 \circ (\beta_1 \circ \alpha_1)).$$

La composition horizontale est associative sur les tuiles élémentaires, et en utilisant l'hypothèse d'induction, cette composée est égale à :

$$((\gamma_2 \circ \beta_2) \circ \alpha_2) \bullet ((\gamma_1 \circ \beta_1) \circ \alpha_1).$$

Or $\gamma \circ \beta$ vaut, comme γ_2 est une tuile élémentaire : $\gamma \circ \beta = (\gamma_2 \circ \beta_2) \bullet (\gamma_1 \circ \beta_1)$, où $\gamma_2 \circ \beta_2$ est encore une tuile élémentaire. On a donc l'identité :

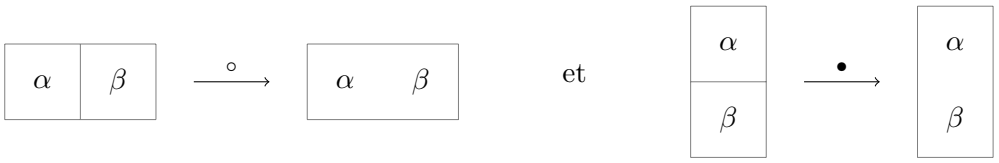
$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = ((\gamma_2 \circ \beta_2) \circ \alpha_2) \bullet ((\gamma_1 \circ \beta_1) \circ \alpha_1).$$

□

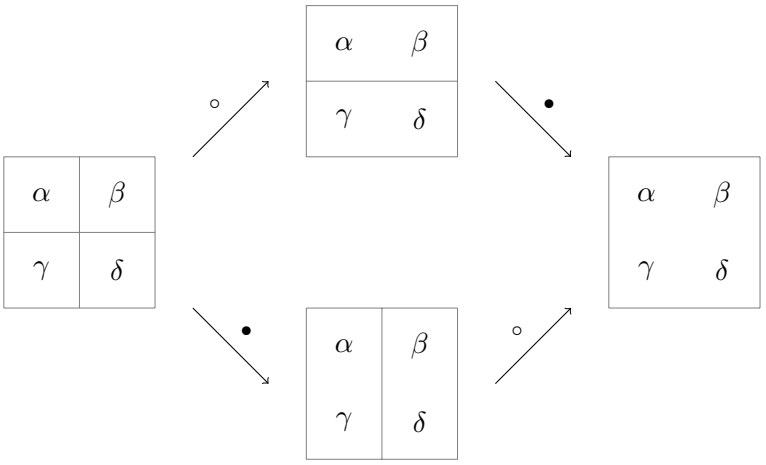
Proposition 4.4. K^0 *est une catégorie double.*

Preuve. Les seuls points non triviaux sont l'associativité de la composition dans K^0_H, prouvée au lemme 4.3, ainsi que la loi d'échange. Pour cette dernière, on sait par définition de la composition verticale que la version faible où la cellule en bas à droite est une tuile élémentaire est vérifiée.

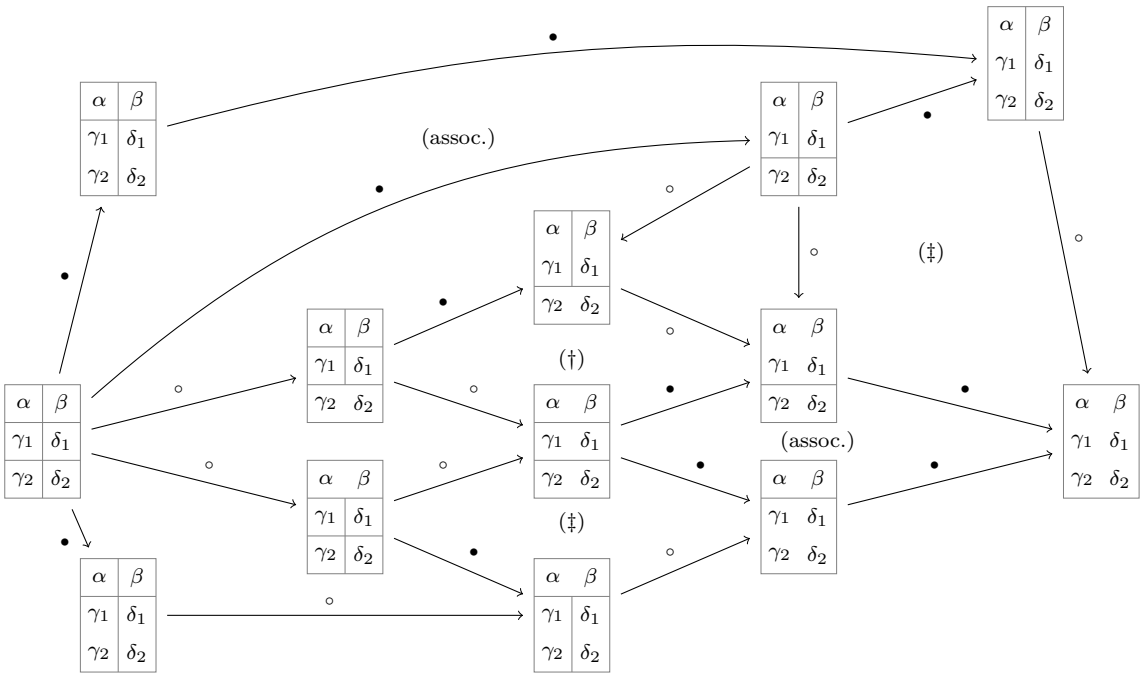
On peut représenter graphiquement les compositions de cellules comme un système de réécriture avec deux règles :



La loi d'échange revient à prouver l'égalité entre les deux réécritures :



On prouve cette égalité par induction sur la longueur du bord droit de δ. Lorsque ce bord est de longueur 1, alors le résultat correspond à la loi d'échange faible prouvée précédemment. Sinon, on peut décomposer δ et γ en deux tuiles élémentaires $\delta = \delta_2 \bullet \delta_1$ et $\gamma = \gamma_2 \bullet \gamma_1$. On considère alors le diagramme :



où le diamant marqué avec (†) est une égalité par hypothèse d'induction, et les diamants marqués avec (‡) sont égaux par la loi d'échange faible. □

En anticipant sur la définition 6.4 de *fibration* qui sera détaillée au chapitre 6, on prouve dès maintenant le résultat suivant, qui indique intuitivement que les tuiles de câbles sont caractérisées par la donnée de leurs bords supérieur et droit.

Lemme 4.5. *Le foncteur domaine* $\mathrm{dom}\colon \mathrm{K}^0_V \longrightarrow \mathrm{CEmb}$ *est une fibration.*

Preuve. On définit d'abord par induction sur la longueur du câble k le relèvement d'un plongement $h\colon U' \longrightarrow \mathrm{dom}\, k$. Lorsque k est un câble élémentaire, soit

$$U \xhookrightarrow{h_1} V \xrightarrow{m} W$$

sa décomposition en un plongement h_1 suivi d'un coup m.

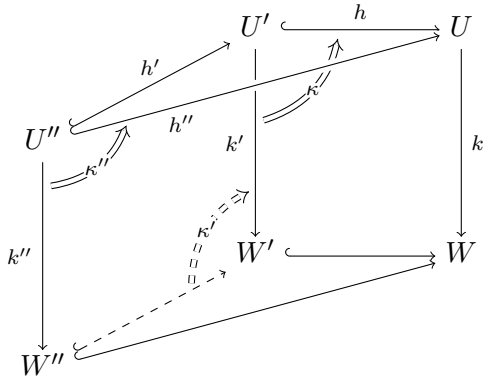
Soit W' l'image de U' par l'image du morphisme mh_1h. On remarque que les coups sont ouverts, donc mh_1h est ouvert. On a donc bien un plongement ouvert $h'\colon W' \longrightarrow W$ dans K^0_h. On prend ensuite le pullback de m le long de h' :

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dd, bend right=60, "mh_1h"'] & U \arrow[d, hook, "h_1"'] \arrow[dd, bend left=60, "k"] \\
V' \arrow[r, hook, "h_2"] \arrow[d, "m_{|W'}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & V \arrow[d, "m"] \\
W' \arrow[r, hook, "h'"'] & W.
\end{tikzcd}$$

Par propriété universelle du pullback, il existe une flèche $f\colon U' \longrightarrow V'$. D'après le lemme 3.15, f est un plongement. W et U' sont connexes, donc W' est également connexe. D'après la caractérisation des coups 3.19, V' possède au plus deux composantes connexes : U' est contenue dans une composante connexe de V'. On montre que U' est exactement cette composante connexe.

Comme f est ouvert, si v est un sommet de V' dans l'image de f et e une arête adjacente à v, alors e a un antécédent par f. D'autre part si e est une arête de V' dans l'image de f et v est un sommet adjacent à e, alors $m_{|W'}(v) \in W'$ implique que v admet un antécédent dans U par mh_1h, donc en particulier par f. Par induction, U' est donc bien une composante connexe de V'.

Pour montrer que ce relèvement est cartésien, il faut montrer que si l'on a deux tuiles de câbles comme dans :



alors il existe une unique tuile de câbles κ' qui fait commuter le diagramme. On traite le cas où les tuiles sont élémentaires, le cas général étant ensuite immédiat par induction.

On remarque que W'' est l'image de U'' par kh'' : le relèvement de h' le long de k' convient pour la tuile κ'. Cette tuile est unique car les plongements sont monos. $\square$

4.1.3 Vues

Définition 4.8. Une *vue* $X \longrightarrow Z$ est un câble tel que Z est un séquent.

Les *vues élémentaires* sont les câbles élémentaires qui sont également des vues. Leurs domaine et codomaine sont toujours de signes opposés, car d'après la décomposition des coups du corollaire 3.19, pour une vue élémentaire

$$X \overset{h}{\hookrightarrow} Z \overset{m}{\longrightarrow} Y$$

alors, comme Y est un séquent, m est un coup de la classe CM. Donc Z est :

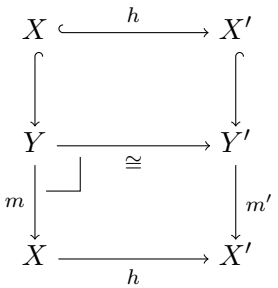
— soit, si Y est positif, un séquent négatif isomorphe à X ;

— soit, si Y est négatif, le coproduit $Y + P$ où P est un séquent positif. Comme la composée mh n'est pas un isomorphisme, h envoie X sur le séquent P.

Par ailleurs, au moins l'une des positions X et Y dans la décomposition précédente est positive, un séquent ne pouvant pas passer en un seul coup d'une position négative à une autre position négative.

Définition 4.9. Soit V^0 la sous-catégorie double pleine de K^0 obtenue en restreignant les morphismes verticaux uniquement aux vues.

Il est facile de voir que la catégorie V^0_H est un groupoïde, car toute cellule $\alpha\colon v \longrightarrow v'$ dans cette catégorie est un empilement de tuiles élémentaires actives dont les bords horizontaux sont des isomorphismes. En effet α se projette, par le foncteur codomaine, sur un plongement ouvert $h\colon \operatorname{cod}(v) \hookrightarrow \operatorname{cod}(v')$ dont les domaine et codomaine sont des séquents : h est donc un isomorphisme. La tuile élémentaire de bord inférieur h est une tuile active : si tel n'était pas le cas, alors on aurait un diagramme commutatif



dont le bord droit serait un isomorphisme ainsi que le bord droit de α, ce qui serait absurde. On conclut par induction sur la longueur de α.

On peut appliquer la définition 4.4 pour étendre verticalement la catégorie double V^0 en une catégorie des vues V. Dans ce cas, les cellules minimales sont les empilements de tuiles de vues dont le bord droit de la tuile supérieure n'est pas trivial. On peut par ailleurs décrire cette catégorie comme étant la catégorie dont :

— les objets sont toutes les vues,

— et les morphismes $v \longrightarrow v'$ sont donnés par les cellules de la forme

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & X' \arrow[dd, "v'"] \\
X \arrow[d, "v"'] & \\
Y \arrow[r, hook, "l"'] & Y'
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

dans K^0, où deux morphismes (Z, w, h, l, α) et $(Z', w', h', l', \alpha')$ sont identifiés lorsque $l = l'$ et qu'il existe un isomorphisme β dans K^0_H qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[ddr] & & X' \arrow[ddd, "v'"] \\
& Z' \arrow[ur, hook] \arrow[dl] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\alpha'"] & \\
X \arrow[d, "v"'] & & \\
Y \arrow[rr, hook] & & Y',
\end{tikzcd}$$

i.e., $\alpha = \alpha' \circ (id_v \bullet \beta)$ dans K^0_H ($\bullet$ est la composition de K^0_V).

Le foncteur codomaine $\mathrm{cod}\colon \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{Emb}$ envoie tout objet $v\colon X \longrightarrow Y$ sur Y et toute cellule α sur le morphisme noté l ci-dessus. Pour une position X donnée, la sous-catégorie de V dont les seuls morphismes sont les cellules de bord inférieur id_X, est la *fibre* de cod au-dessus de X, notée $\mathrm{V}(X)$.

Proposition 4.6. *Pour tout X, $\mathrm{V}(X)$ est un préordre.*

Preuve. On se donne une cellule $\alpha\colon v \longrightarrow v'$ dans $V(X)$ et on procède par induction. Comme le morphisme inférieur de α est id_X, le pullback inférieur est trivial : les vues v et v' débutent par le même coup. On construit ainsi un isormorphisme de vues dans V^0, ce qui, après quotient dans $\mathrm{V}(X)$, donne bien un préordre. □

4.2 Stratégies

4.2.1 Stratégies innocentes

On peut désormais définir les stratégies innocentes du jeu. Les stratégies innocentes sont habituellement des ensembles de vues pour chaque joueur de la position de départ, clos par préfixe. Ici, la relation « être un préfixe » entre les vues est donnée par l'existence

d'un morphisme dans la catégorie V. La condition de clôture par préfixe vient du fait que les stratégies seront des préfaisceaux (booléens) sur (une variante de) V, que l'on définit maintenant.

On identifie les joueurs avec les sommets d'une position, ou de façon isomorphe, avec les séquents d'une position en incluant leurs voisinages ouverts. Pour une position X donnée, on pourrait uniquement considérer les ensembles, clos par préfixe, de vues dont le codomaine est un séquent de X. Cependant, l'introduction des coupures au chapitre 5 permet à un joueur de se scinder en deux sommets reliés par une arête : nous serons donc amenés à considérer des stratégies formées de câbles sur une position de base. La construction $\widehat{\mathrm{V}/X}$ est donc présentée ici de façon à pouvoir être immédiatement généralisée à la catégorie des câbles.

Pour chaque position X, qui n'est pas nécessairement un séquent, on note $\ulcorner X \urcorner \colon 1 \longrightarrow \mathrm{Emb}$ le foncteur qui à l'unique objet de 1 associe l'objet X dans Emb. On considère la comma-catégorie

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V}/X \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow \theta"] & 1 \arrow[d, "\ulcorner X \urcorner"] \\
\mathrm{V} \arrow[r, "\mathrm{cod}"'] & \mathrm{Emb}.
\end{tikzcd}$$

Ses objets sont les paires (v, h) où :

— $v \colon Z \longrightarrow Y$ est une vue sur un séquent Y,

— $h \colon Y \hookrightarrow X$ est un plongement ouvert ;

et ses morphismes $(v, h) \longrightarrow (v', h')$ sont les paires

$$\begin{tikzcd}
 & & V'' \arrow[dd, "v'"] \\
Z \arrow[rr, hook] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow \alpha"] & & \\
Y \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook, "h"'] & & V \arrow[dl, hook, "h'"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

formées :

— d'une cellule minimale $\alpha \colon v \longrightarrow v'$ de V,

— dont le bord inférieur est un morphisme $h \longrightarrow h'$ dans Emb/X.

Définition 4.10 (Stratégie (innocente))**.** Une *stratégie* sur une position X est un foncteur $(\mathrm{V}/X)^{op} \longrightarrow 2$, où 2 est l'ensemble ordonné $0 \leq 1$.

On appelle *préfaisceau booléen* sur une catégorie C un foncteur $\mathrm{C}^{op} \longrightarrow 2$. Comme 2 est un ordre, un tel préfaisceau est caractérisé par sa valeur sur les objets. Dans la suite, on dit qu'un objet $c \in \mathrm{Ob}(\mathrm{C})$ *appartient* à un préfaisceau booléen σ ssi $\sigma(c) = 1$.

Une stratégie innocente σ sur X vérifie, grâce à la structure de préfaisceau booléen sur V/X, les stabilités par :

— préfixe : si v est un préfixe d'une autre vue v', il existe un morphisme $v \longrightarrow v'$ dans V/X, et par fonctorialité, $\sigma(v) \geq \sigma(v')$,

— isomorphismes : si deux vues sont isomorphes dans V/X, elles ont même valeur par σ.

Dans le cas particulier d'une stratégie sur un séquent Z, cette dernière est donc équivalente à un ensemble de vues sur Z clos par préfixe et stable par isomorphisme dans V.

Si, pour une catégorie C, on note $\widehat{\mathrm{C}}$ la catégorie des foncteurs $\mathrm{C}^{op} \longrightarrow 2$ (qui est un poset), alors la fonction qui à chaque position X associe $\widehat{\mathrm{V}_{/X}}$ s'étend en un foncteur

$$\widehat{\mathrm{V}_{/-}} \colon \mathrm{Emb}^{op} \longrightarrow \mathrm{Poset}.$$

En effet, un plongement ouvert $h \colon X \hookrightarrow Y$ induit une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\ulcorner X \urcorner"] \arrow[r, bend right, "\ulcorner Y \urcorner"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow h"] & \mathrm{Emb}, \end{tikzcd}$$

donc, par propriété universelle de la comma-catégorie $\mathrm{V}_{/Y}$, un foncteur $\mathrm{V}_{/h} \colon \mathrm{V}_{/X} \longrightarrow \mathrm{V}_{/Y}$. La précomposition par $(\mathrm{V}_{/h})^{op}$ définit un foncteur $\widehat{\mathrm{V}_{/h}} \colon \widehat{\mathrm{V}_{/Y}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{V}_{/X}}$ entre posets. Autrement dit :

$$\widehat{\mathrm{V}_{/h}} = \mathrm{Cat}((\mathrm{V}_{/h})^{op}, 2) \colon \mathrm{Cat}((\mathrm{V}_{/Y})^{op}, 2) \longrightarrow \mathrm{Cat}((\mathrm{V}_{/X})^{op}, 2).$$

4.2.2 Stratégies gagnantes

Définition 4.11. Dans une catégorie C, un *chemin* est une suite éventuellement dénombrable de morphismes composables, dont aucun n'est un isomorphisme.

Une stratégie $\sigma \in \mathrm{K}_{/X}$ est *non vide* lorsqu'elle accepte au moins les vues identité sur les séquents de sa position de départ.

Une stratégie σ est *finie* lorsque sa catégorie des éléments $\mathrm{el}\,(\sigma)$, qui est un préordre, n'a pas de chemin infini. Autrement dit, il n'existe pas de suite infinie de câbles composables :

$$X \xleftarrow{k_0} X_1 \xleftarrow{k_1} X_2 \longleftarrow \cdots$$

telle que σ en accepte tous les préfixes finis.

Une stratégie σ sur X est *réceptive* quand pour toute vue $v \colon V \longrightarrow U$ où V est négative, pour tout $x \colon U \hookrightarrow X$, et pour toute vue élémentaire $v' \colon W \longrightarrow V$, on a $(v, x) \in \sigma$ implique $(v \circ v', x) \in \sigma$. Autrement dit, la stratégie σ est stable par ajout de coups négatifs.

Une stratégie σ est *robuste* quand toute vue $v \colon V \longrightarrow W$ dans σ où V est positive admet un prolongement dans σ, i.e., il existe $w \colon U \longrightarrow V$ une vue élémentaire telle que $(v \circ w) \in \sigma$.

Une stratégie est *déterministe* si une telle extension par un coup positif est unique, i.e., si $v \colon V \longrightarrow W$ est dans σ et que V est positive, alors pour tous w_1 et w_2,

$$v \circ w_1 \in \sigma \qquad \text{et} \qquad v \circ w_2 \in \sigma$$

implique que w_1 et w_2 sont isomorphes dans $\mathrm{K}^0{}_{/V}$, i.e., on a :

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "w_1"'] & & U_2 \arrow[dl, "w_2"] \\ & V. & \end{tikzcd}$$

Définition 4.12. Une stratégie est *gagnante* lorsqu'elle est non vide, finie, réceptive, robuste et déterministe.

Nous verrons en partie 7.6 que les stratégies gagnantes forment une catégorie de réponse. Nous pensons même qu'il s'agit de la catégorie de réponse libre engendrée par l'ensemble des atomes $\mathbb{A}$.

4.3 Catégorie des stratégies

4.3.1 Recollement des stratégies

On décrit dans cette partie l'opération de *recollement* des stratégies, dont un cas particulier sera analogue à la composition parallèle en sémantique de jeux.

Rappelons d'abord que :

— pour un séquent Z, on note $\mathrm{V}(Z)$ l'ensemble des vues de V de codomaine Z. Il s'agit de la fibre de $\mathrm{cod}\colon \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{P}$ au-dessus de Z ;

— pour une position X, on note $\mathrm{Sq}(X)$ comme en section 3.2.2 l'ensemble des séquents de X, i.e., les ouverts de X qui contiennent exactement un sommet.

Proposition 4.7. *On a :*

$$\mathrm{V}/_X \simeq \sum_{Z \in \mathrm{Sq}(X)} \mathrm{V}(Z) \simeq \sum_{Z \in \mathrm{Sq}(X)} (\mathrm{V}/_Z).$$

Preuve. Les objets de $\mathrm{V}/_X$ sont les paires (v, h) où v est une vue sur un séquent S et h est un plongement ouvert $S \hookrightarrow X$. Un tel S est isomorphe à l'un des éléments Z de $\mathrm{Sq}(X)$, et on peut choisir une vue v' sur Z isomorphe à v dans V^0. □

Par propriété universelle du coproduit dans Cat, on obtient donc un procédé pour recoller des stratégies :

Proposition 4.8. *Étant donné une famille de stratégies σ_x pour tous les joueurs x d'une position X, il existe une unique stratégie σ dont chaque restriction sur un séquent autour de x est σ_x. Ce recollement est défini par l'isomorphisme*

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{V}/_X} \arrow[r, bend left, "\sigma, Z \mapsto \sigma_{|Z}"] & \prod_{Z \in \mathrm{Sq}(X)} \widehat{\mathrm{V}/_Z}. \arrow[l, bend left, "P \mapsto \langle P \rangle"] \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Preuve. La proposition 4.7 donne l'équivalence de catégories :

$$\mathrm{Cat}((\mathrm{V}/_X)^{op}, 2) \simeq \mathrm{Cat}\left(\left(\sum_{Z \in \mathrm{Sq}(X)} (\mathrm{V}/_Z)\right)^{op}, 2\right).$$

Comme 2 n'a pas d'automorphismes non triviaux, le seul isomorphisme naturel entre deux foncteurs $F, G\colon \mathrm{C} \longrightarrow 2$, pour n'importe quelle catégorie C, est l'identité. L'équivalence précédente est donc un isomorphisme, et on a :

$$\widehat{\mathrm{V}/_X} = \mathrm{Cat}((\mathrm{V}/_X)^{op}, 2) \cong \mathrm{Cat}\left(\left(\sum_{Z \in \mathrm{Sq}(X)} (\mathrm{V}/_Z)\right)^{op}, 2\right)$$

$$\cong \prod_{Z \in \mathrm{Sq}(X)} \mathrm{Cat}((\mathrm{V}/_Z)^{op}, 2) = \prod_{Z \in \mathrm{Sq}(X)} \widehat{\mathrm{V}/_Z}.$$

□

On généralise ici la notation des séquents $(A \vdash B)$: si A, B et C sont trois formules, alors on définit $A \vdash B \vdash C$ la position à deux sommets 0 et 1, et trois arêtes $2, 3, 4$, d'étiquettes respectives A, B et C, de la forme :

$$\xrightarrow{A} 0 \xrightarrow{B} 1 \xrightarrow{C},$$

i.e., le pushout de $A \vdash B$ et de $B \vdash C$ le long de l'arête d'étiquette B.

Définition 4.13. Soient $X = (A \vdash B)$, $Y = (B \vdash C)$, et $U = (A \vdash B \vdash C)$. On considère deux stratégies $\sigma \in \widehat{\mathrm{V}/X}$ et $\tau \in \widehat{\mathrm{V}/Y}$. Leur *composition parallèle* $(\sigma \mid \tau) \in \widehat{\mathrm{V}/U}$ est l'image de la famille $P = [0 \mapsto \sigma, 1 \mapsto \tau]$ par l'isomorphisme (4.3), i.e., $\langle P \rangle$.

Proposition 4.9. *Les stratégies gagnantes sont stables par composition parallèle.*

Preuve. Chacune des propriétés, parmi non vide, finie, déterministe, robuste et réceptive, est préservée par composition parallèle. □

4.3.2 Extension des stratégies aux câbles

Dans cette partie, on étend d'une part les stratégies aux préfaisceaux booléens de câbles en général, sans se restreindre aux seules vues, et on montre d'autre part comment ces stratégies sont reliées aux stratégies naïves.

En appliquant à K^0 la construction de la définition 4.4 sur les catégories doubles $\mathrm{D}^0 \mapsto \mathrm{D}$, on obtient une catégorie K dont les objets sont les câbles et dont les morphismes sont les classes d'équivalences de cellules de la forme :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & X' \arrow[dd, "k'"] \\
X \arrow[d, "k"'] & \\
Y \arrow[r, hook, "l"'] & Y',
\end{tikzcd}$$

où k et k' sont des câbles.

De même que pour les vues, on définit un foncteur $\widehat{\mathrm{K}/-} \colon \mathrm{Emb}^{op} \longrightarrow \mathrm{Poset}$.

Il existe un plongement évident $\mathrm{i} \colon \mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{K}$ et, de manière similaire pour chaque position X, un plongement $\mathrm{i}/X \colon \mathrm{V}/X \hookrightarrow \mathrm{K}/X$. En choisissant des extensions de Kan à droite le long de $(\mathrm{i}/X)^{op}$, on obtient un foncteur, qui est en fait un morphisme de préordres, $\mathrm{ext}_X \colon \widehat{\mathrm{V}/X} \longrightarrow \widehat{\mathrm{K}/X}$.

On peut expliciter, pour une stratégie σ, son extension à droite $\mathrm{ext}_X(\sigma)$ le long de i/X

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{V}/X)^{op} \arrow[r, "(\mathrm{i}/X^{op})"] \arrow[dr, "\sigma"'] & (\mathrm{K}/X)^{op} \arrow[d, dashed, "\mathrm{ext}_X(\sigma)"] \\
& 2
\end{tikzcd}$$

qui vaut sur les objets, d'après [34, X.4] :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ext}_X(\sigma)(k,h) &= \bigwedge_{v,x} \sigma(v,x)^{\mathrm{K}/X((v,x),(k,h))} \\
&= \bigwedge_{\{v,x \mid \exists \alpha \colon (v,x) \to (k,h)\}} \sigma(v,x)
\end{aligned}$$

Autrement dit, $\mathrm{ext}_X(\sigma)$ est la stratégie qui accepte un câble lorsque toutes ses vues sont acceptées par σ.

Proposition 4.10. *L'opération $X \mapsto \mathrm{ext}_X$ définit une transformation naturelle*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Emb}^{op} \arrow[r, bend left=50, "\widehat{\mathrm{V}/-}"] \arrow[r, bend right=50, "\widehat{\mathrm{K}/-}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{ext} \Downarrow"] & \mathrm{Poset}
\end{tikzcd}$$

On revient maintenant aux stratégies naïves, annoncées en début de chapitre. En première approche, on peut se restreindre aux positions sans arête pendante. Dans ce cas, on peut assimiler la catégorie $\mathrm{K}(X)$ à une catégorie de parties séquentielles. En effet, sur les positions sans arête pendante, les coups préservent la connexité et les câbles sont donc simplement des suites de coups. De plus, la notion de morphisme de câble dans $\mathrm{K}(X)$, c'est-à-dire les diagrammes (4.2) dans K^0 tels que $Y = Y'$ et $l = id_Y$, revient à l'ordre préfixe modulo isomorphisme. On peut donc poser :

Définition 4.14. Une stratégie naïve sur une position sans arête pendante X est un préfaisceau booléen sur $\mathrm{K}(X)$.

On obtient un ordre partiel comme précédemment. On peut de plus composer la transformation naturelle de la proposition 4.10 avec la transformation obtenue par restriction le long de l'inclusion $\mathrm{K}(X) \hookrightarrow \mathrm{K}/_X$ pour obtenir une transformation naturelle de composantes $\widehat{\mathrm{V}/_X} \longrightarrow \widehat{\mathrm{K}/_X}$, comme souhaité.

Le cas des positions avec arêtes pendantes est plus compliqué et on se contentera ici d'esquisser une solution. On commence par étendre K^0, en remplaçant les câbles élémentaires par les *câbles élémentaires généralisés*, obtenus en demandant, dans la définition 4.5, que h soit un plongement ouvert, mais sans exiger que son image soit une composante connexe de Z. Les câbles élémentaires généralisés contiennent donc en particulier les coups, obtenus en prenant $h = id_Z$. En répétant les définitions suivantes, on obtient une notion de *câble généralisé* et une catégorie double GK^0, munie d'un plongement évident $\mathrm{K}^0 \hookrightarrow \mathrm{GK}^0$, qui induit un plongement $\mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{GK}$. De plus, appelons *partie séquentielle* un câble généralisé composé de câbles élémentaires généralisés (m, h) tels que $h = id$. Soit Plays la sous-catégorie pleine de GK restreinte aux parties séquentielles. Plays admet un foncteur d'oubli vers Emb, dont on peut donc prendre les fibres.

Définition 4.15. Une stratégie naïve sur une position arbitraire X est un préfaisceau booléen sur $\mathrm{Plays}(X)$.

Bien sûr, si X est totale, on a $\mathrm{Plays}(X) \simeq \mathrm{K}(X)$. Pour passer des stratégies innocentes aux stratégies naïves, on prend maintenant l'extension à droite le long du plongement $\mathrm{V}/_X \hookrightarrow \mathrm{GK}/_X$, puis on restreint le long de $\mathrm{GK}/_X \hookleftarrow \mathrm{Plays}(X)$.

Chapitre 5

Élimination des coupures par systèmes de commutation

Nous avons mentionné le fait que le recollement de stratégies jouait le rôle de la composition parallèle de la sémantique des jeux. Nous nous intéressons dans ce chapitre aux propriétés d'élimination des coupures dans la catégorie des positions, afin de pouvoir définir au chapitre 7 la descente des stratégies, qui joue le rôle du *hiding* en sémantique de jeux.

5.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la règle de coupure multiplicative

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad A, \Delta \vdash}{\Gamma, \Delta \vdash}$$

du λ-calcul, que l'on peut représenter par un morphisme

$$\Gamma \ \triangleright\!\bullet \xrightarrow{A} \bullet\!\triangleleft \ \Delta \qquad \xrightarrow{c} \qquad \Gamma \ \triangleright\!\bullet\!\triangleleft \ \Delta$$

dans la catégorie des positions. Idéalement, l'élimination des coupures s'exprimerait comme une factorisation, sous la forme du lemme 5.10, de tout carré

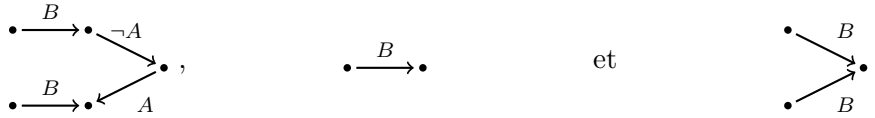
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dashed, "c'"] \arrow[d, "m"'] & V \arrow[d, dashed, "f"] \\ W \arrow[r, "c"'] & X \end{tikzcd}$$

où le bord droit f serait un coup lorsque le bord gauche m était déjà un coup. Lorsque c'est le cas, on dit que f est la *descente* de m le long de c. Pour arriver à cette première étape, on aura d'abord besoin d'autoriser les coupures à intervenir sur n'importe quelle arête de la position, et pas uniquement une arête adjacente à la racine comme suggéré par le morphisme c précédent.

Cependant, dans le cas où l'on considère la suite $U \xrightarrow{m} W \xrightarrow{c} X$, avec m un coup au-dessus de la position W définie par

$$\bullet \xrightarrow{B} \bullet \xrightarrow{\neg A} \bullet$$

et U, X et V les positions définies par



alors en factorisant cm, le morphisme $f\colon X \longrightarrow V$ n'est pas un coup, mais une *contraction élémentaire*. Pour une position enracinée X et une étiquette A, on définit le morphisme évident $\delta_{A,X}\colon (A \cdot X, A \cdot X) \longrightarrow (A \cdot X)$ qui identifie les deux copies de A et de X. Alors :

Définition 5.1 (Contraction élémentaire)**.** Une *contraction élémentaire* est un morphisme δ obtenu par pushout le long de plongements de sous-arbre (définition 3.8) de la forme

$$\begin{tikzcd} (A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\delta_{A,X}"'] & Y \arrow[d, "\delta"] \\ (A \cdot X) \arrow[r] & Z \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

pour une formule A et une position enracinée X. Une *contraction* est une composée, potentiellement triviale, de contractions élémentaires, et on note Contr la catégorie des contractions.

On observe que la flèche $(A \cdot X) \longrightarrow Z$ est un plongement d'un sous-arbre complet dans le diagramme précédent.

Cet exemple montre qu'il est nécessaire d'ajouter une étape supplémentaire d'élimination des contractions : contrairement aux coupures, les classes de morphismes correspondantes ne forment pas un système de factorisation (voir 1.1), mais une variante plus faible, un *système de commutation*, que l'on introduit en partie 5.2.

La présence de ces contractions dans l'élimination des coupures justifie par ailleurs le fait que l'on ne s'intéresse à qu'une règle de coupure multiplicative, et non à une coupure additive de la forme :

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash}.$$

Cette dernière s'obtient en composant une coupure et une contraction, telles que décrites ici.

Le résultat essentiel de ce chapitre est le théorème 5.29, qui assure d'une part que la classe des morphismes de descente, définis comme les morphismes qui se décomposent sous la forme

$$A \xrightarrow{c} B \xrightarrow{\delta} C,$$

où c est une coupure, et δ une contraction, est une sous-catégorie ; et d'autre part que la composition définie au chapitre 7 est bien associative.

5.2 Systèmes de commutation

5.2.1 Définition

Définition 5.2. Un *système de commutation* dans une catégorie C est une paire de classes de morphismes L et R, que l'on note $R \llcorner L$, et qui vérifie :

1. L est une sous-catégorie qui contient tous les isomorphismes ;
2. R contient tous les isomorphismes, et est stable par composition avec les isomorphismes ;

3. lorsqu'un morphisme se décompose en $r \circ l$ avec $r \in R$ et $l \in L$, alors cette décomposition est unique, i.e., si $rl = r'l'$ avec également $r' \in R$ et $l' \in L$, alors il existe un unique isomorphisme φ tel que

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "l'"'] \arrow[dr, "l"] & \\
V' \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "r'"'] & & V'' \arrow[dl, "r"] \\
 & W &
\end{tikzcd}$$

commute ;

4. lorsque $l \in L$ et $r \in R$ sont deux morphismes composables, il existe $l' \in L$ et $r' \in R$ tels que :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, dashed, "l'"] \arrow[d, "r"'] & V' \arrow[d, dashed, "r'"] \\
V \arrow[r, "l"'] & W
\end{tikzcd}$$

commute.

Remarque 5.1. Les systèmes de factorisation sont des systèmes de commutation.

Les seules différences entre les systèmes de commutation et les systèmes de factorisation résident dans le fait que :

— la classe R peut ne pas être une sous-catégorie, comme nous le verrons par exemple à la section 5.4 où la composée de deux flèches dans R peut donner une flèche de L,

— nous ne cherchons pas nécessairement à factoriser tous les morphismes de la catégorie C, mais uniquement ceux de la forme $L \circ R$.

À un unique isomorphisme près, on pourra donc noter pour un morphisme $f = rl$, avec $r \in R$ et $l \in L$:

$$\text{left } f = l \qquad\qquad \text{right } f = r.$$

La notation $L \llcorner R$ d'un système de commutation mime les positions respectives des morphismes venant de R et de L dans le bord bas-gauche du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, dashed, "l'"] \arrow[d, "r"'] & V' \arrow[d, dashed, "r'"] \\
V \arrow[r, "l"'] & W,
\end{tikzcd}$$

en particulier afin de suggérer que le système de commutation est une manière de replacer *dans le bon ordre* les morphismes de $L \circ R$.

Remarque 5.2. Si U et V sont deux classes de morphismes d'une catégorie, on note $U \circ V$ la classe de morphismes obtenue en composant un morphisme de U avec un morphisme de V, i.e. :

$$U \circ V = \{u \circ v \mid u \in U \text{ et } v \in V\}.$$

Cette classe n'est en particulier pas nécessairement une catégorie.

On peut commencer par remarquer qu'il est souvent possible d'obtenir un système de commutation à partir d'un autre, en restreignant les deux classes de morphismes. En effet, si l'on se donne une paire de classes de morphismes $Y \llcorner X$ dans une catégorie, ainsi que des sous-ensembles de flèches $U \subseteq X$ et $V \subseteq Y$, on dit que U et V sont *relativement stables* si pour toutes flèches $u \in U$ et $v \in V$, il existe un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "u'"] \arrow[d, "v"'] & B' \arrow[d, dashed, "v'"] \\ B \arrow[r, "u"'] & C, \end{tikzcd}$$

où les flèches u' et v' sont encore respectivement dans U et V. On a :

Lemme 5.1. *Si U est une sous-catégorie qui contient les isomorphismes, si V contient tous les isomorphismes et est stable par composition par les isomorphismes, et si U et V sont relativement stables pour un système de factorisation, alors $V \llcorner U$ est un système de commutation.*

Preuve. Le système $Y \llcorner X$ sous-jacent fournit l'unique isomorphisme qui joint deux morphismes égaux dans $V \circ U$. □

5.2.2 Lemmes ternaires

Le but de cette section est de prouver trois résultats d'unicité, aux lemmes 5.2, 5.3 et 5.4, similaires à l'unicité d'une factorisation dans un système de factorisation ternaire (voir [40]).

Les deux premiers résultats sont adaptés aux cas où l'on dispose de systèmes de commutation hérités de systèmes de factorisation :

Lemme 5.2. *On se donne trois systèmes de commutation :*

$$A \llcorner B \qquad\qquad A \llcorner C \qquad\qquad NC \llcorner C$$

tels que $A \circ B \subseteq NC$, et $B \circ C$ forme une catégorie. Alors on a le système de commutation :

$$A \llcorner B \circ C.$$

Preuve. La catégorie $B \circ C$ contient les isomorphismes car B et C, qui apparaissent dans les systèmes de commutation $A \llcorner B$ et $A \llcorner C$ contiennent eux-mêmes les isomorphismes. Soient trois flèches composables $a \in A$, $c \in C$ et $b \in B$. On peut compléter les carrés :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "a"'] & V' \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "a_1"'] & W' \arrow[d, "a'"] \\ V \arrow[r, "c"'] & W \arrow[r, "b"'] & X \end{tikzcd}$$

en utilisant successivement, de gauche à droite, les systèmes de commutation $A \llcorner C$ et $A \llcorner B$. Ceci prouve l'existence de la factorisation pour $A \llcorner B \circ C$.

Pour prouver son unicité, on se donne une autre factorisation

$$U \xrightarrow{c''} V'' \xrightarrow{b''} W'' \xrightarrow{a''} X.$$

On peut alors construire le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & V' \arrow[r, "b'"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & W' \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[dr, "a'"] & \\
U \arrow[ur, "c'"] \arrow[dr, "c''"'] & & & X \\
 & V'' \arrow[r, "b''"'] & W'', \arrow[ur, "a''"'] &
\end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme φ est donné par unicité dans $NC \llcorner C$, puis l'isomorphisme ψ est obtenu par unicité de la factorisation dans $A \llcorner B$. La flèche ψ est unique car pour tout autre isomorphisme $\psi' \colon W' \longrightarrow W''$ qui fait commuter l'extérieur du diagramme, on construit dans la partie gauche grâce à $NC \llcorner C$ un isomorphisme $\varphi' \colon V' \longrightarrow V''$. Par hypothèse, seul φ convient, donc $\varphi' = \varphi$ et $\psi' = \psi$. □

Lemme 5.3. *On se donne trois systèmes de commutation :*

$$B \llcorner A \qquad\qquad C \llcorner A \qquad\qquad NA \llcorner A$$

où $C \circ B \subseteq NA$. Alors on a le système de commutation :

$$C \circ B \llcorner A.$$

Preuve. On se donne trois flèches composables $c \in C$, $b \in B$ et $a \in A$. On peut compléter les carrés :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a'"'] & V \arrow[r, "c"] \arrow[d, "a_1"] & W \arrow[d, "a"] \\
V' \arrow[r, "b'"'] & W' \arrow[r, "c'"'] & X
\end{tikzcd}$$

en utilisant successivement de droite à gauche $C \llcorner A$ et $B \llcorner A$, ce qui prouve l'existence d'une factorisation $a' \in A$, $(c' \circ b') \in C \circ B$.

Pour prouver l'unicité, si $c'b'a' = c''b''a''$ alors, grâce à $C \circ B \subseteq NA$ et $A \llcorner NA$, il existe un unique isomorphisme φ qui joint a' et a''. □

Lemme 5.4. *On se donne les trois systèmes de commutation suivants :*

$$C \llcorner B \qquad\qquad B \llcorner A \qquad\qquad C \circ B \llcorner A.$$

On a alors :

$$C \llcorner B \circ A.$$

Preuve. Soient $c \colon U \longrightarrow V$, $a \colon V \longrightarrow W$ et $b \colon W \longrightarrow X$ trois flèches, prises respectivement dans C, A et B. On construit a', b' et c' :

— d'abord en factorisant dans $C \circ B \llcorner A$ les flèches c et a en $a' \in A$ et $c_1 b_1 \in C \circ B$, avec $c_1 \in C$ et $b_1 \in B$,

— puis en factorisant bc_1 dans $C \llcorner B$ en $c'b_2$, $c' \in C$ et $b_2 \in B$.

Graphiquement :

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[rr, "a"] & & W \arrow[dr, "b"] & \\
U \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "a'"'] & & V_1 \arrow[ur, "c_1"] \arrow[dr, "b_2"] & & X \\
 & V' \arrow[ur, "b_1"] \arrow[rr, "b'"'] & & W'. \arrow[ur, "c'"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme on a $C \circ B \llcorner A$, alors $C \circ B$ est une sous-catégorie. Comme on a par ailleurs $C \llcorner B$, alors C contient les identités, donc B est encore une sous-catégorie de $C \circ B$. On a donc $b' = b_2 b_1$ dans B.

Enfin, on prouve la condition d'unicité des systèmes de factorisation. Soient $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ et $c, c' \in C$ des flèches telles que l'extérieur de

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "b"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & W \arrow[dr, "c"] \arrow[d, dashed, "\varphi'"] & \\
U \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "a'"'] & & & X \\
 & V' \arrow[r, "b'"'] & W' \arrow[ur, "c'"'] &
\end{tikzcd}$$

commute. On obtient d'abord l'isomorphisme φ par unicité dans $C \circ B \llcorner A$, puis l'isomorphisme φ' par unicité de la factorisation dans $C \llcorner B$. Cet isomorphisme φ' est unique, car si l'on prend une autre flèche ψ' faisant commuter le diagramme complet, alors en particulier la partie gauche du diagramme commute. Par unicité dans $B \llcorner A$, on obtient ψ tel que

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "b"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & W \arrow[d, "\psi'"] \\
U \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "a'"'] & & \\
 & V' \arrow[r, "b'"'] & W'
\end{tikzcd}$$

commute. Cependant, φ et ψ font tous les deux commuter le diagramme complet :

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "b"] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] \arrow[d, bend left, "\psi"] & W \arrow[dr, "c"] & \\
U \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "a'"'] & & & X \\
 & V' \arrow[r, "b'"'] & W' \arrow[ur, "c'"'] &
\end{tikzcd}$$

donc grâce à $C \circ B \llcorner A$, on obtient l'égalité $\varphi = \psi$. Dès lors, $\psi' = \varphi'$, ce dernier étant l'unique isomorphisme faisant commuter la partie droite du diagramme. $\square$

5.2.3 Décomposition de carrés commutatifs

Dans cette partie, on fixe un système de commutation $B \llcorner A$, et on convient que tous les morphismes a, a', a'' sont dans A, et les morphismes b, b', b'' sont dans B.

Lemme 5.5. *On peut prouver que tout diagramme*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "a'"] \arrow[d, "a"'] & & V \arrow[d, "b"] \\ U' \arrow[r, "a''"'] & W' \arrow[r, "b''"'] & V' \end{tikzcd}$$

admet un unique relèvement $h\colon U' \longrightarrow V$ *dans* A.

Preuve. Par $B \llcorner A$, il existe en effet un unique isomorphisme $\varphi\colon W' \longrightarrow V$ qui fait commuter le diagramme : h est alors la composée $U' \xrightarrow{a''} W' \xrightarrow{\varphi} V$. Tout autre relèvement $k \in A$ fait commuter en particulier le triangle

$$\begin{tikzcd} & & V \arrow[d, "b"] \\ U' \arrow[r, "a''"'] \arrow[urr, "k"] & W' \arrow[r, "b''"'] \arrow[ur, "\psi"'] & V'. \end{tikzcd}$$

Par $B \llcorner A$ il existe un isomorphisme $\psi\colon W' \longrightarrow V$ qui fait commuter le diagramme : cependant ψ fait également commuter l'extérieur du rectangle d'origine. Par unicité, on a donc $\phi = \psi$, ce qui implique que $k = h$. $\square$

Soit C la catégorie obtenue en posant $\mathrm{Ob}(\mathrm{C}) = B$ et $\mathrm{Hom}(b, b')$ l'ensemble des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "b"'] & U' \arrow[d, "b'"] \\ V \arrow[r, "a"'] & V' \end{tikzcd}$$

où $a, a' \in A$. Les morphismes de C sont caractérisés, à un unique isomorphisme près, par la flèche a, puisque b' se construit à partir de $B \llcorner A$.

Lemme 5.6. C *est une catégorie.*

Si l'on note $\mathrm{cod}\colon \mathrm{C} \longrightarrow A$ le foncteur codomaine, alors :

Lemme 5.7. *Le foncteur* cod *est une opfibration. Tous les morphismes de* C *sont opcartésiens.*

Preuve. Soient $U \xrightarrow{b} V \xrightarrow{a} V'$ deux flèches respectivement dans B et A. Le relèvement de a est obtenu en factorisant ab dans $B \llcorner A$.

Tout carré $(a, a')\colon b \longrightarrow b' \in \mathrm{C}$ est opcartésien, car pour tous morphismes $a_1, a_1', a_2 \in A$

et $b'' \in B$ composables comme indiqué ci-dessous, on peut construire par $B \llcorner A$:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "b"'] \arrow[drr, "a_1"'] & V' \arrow[d, "b'"'] \arrow[dr, dashed, "a'_2"] & \\
V \arrow[r, "a"] \arrow[drr, "a'_1"'] & W \arrow[dr, "a_2"] & W' \arrow[d, "b''"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

où $a'_2 \in A$ est l'unique relèvement donné par le lemme 5.5. $\square$

Ceci implique en particulier que :

Lemme 5.8. *Toute factorisation*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "a'"] \arrow[d, "b"'] & & W \arrow[d, "b'"] \\
U' \arrow[r, "a_1"'] & V' \arrow[r, "a_2"'] & W'
\end{tikzcd}$$

peut se décomposer en

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "a'_1"] \arrow[rr, bend left, "a'"] \arrow[d, "b"'] & V \arrow[r, "a'_2"] \arrow[d, "b''"] & W \arrow[d, "b'"] \\
U' \arrow[r, "a_1"'] & V' \arrow[r, "a_2"'] & W'.
\end{tikzcd}$$

Preuve. On obtient deux relèvements opcartésiens de a_1 et a_2 par cod. Leur composée est un relèvement opcartésien de $a_2 a_1$, donc isomorphe a'. Quitte à composer par cet isomorphisme, étant donné que A est stable sous les isomorphismes, on pouvait donc choisir $a'_2 a'_1 = a'$. $\square$

5.3 Coupures

Pour montrer le lemme 5.11, on fait un détour dans cette section par la catégorie LaxP qui est construite comme P, mais où l'on autorise également les positions qui ne vérifient pas la condition de bonne formation locale de la définition 3.1.

On reviendra finalement dans P à partir du lemme lemme 5.11.

5.3.1 Définition

Pour chaque formule A, on définit le morphisme c_A dans LaxP comme la flèche qui envoie la position avec une seule arête A vers la position 1 qui ne contient qu'un point. Graphiquement :

$$\xrightarrow{A} \qquad \xrightarrow{c_A} \qquad \bullet$$

Définition 5.3 (Coupures généralisées)**.** Une *coupure généralisée élémentaire* est un pushout d'une flèche c_A le long d'un plongement. Toute composée d'une suite de coupures généralisées élémentaires est une *coupure généralisée*, et on note GCuts la classe des coupures généralisées.

Comme les c_A sont épis, alors on a évidemment que :

Lemme 5.9. *Les coupures généralisées sont épis.*

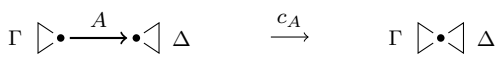
En posant la convention que tout isomorphisme de LaxP est la composée d'une suite vide de coupures élémentaires, GCuts est une sous-catégorie de LaxP qui contient tous les isomorphismes.

Remarque 5.3. Lorsqu'il existe, le pushout d'une coupure généralisée de long d'un plongement est encore une coupure généralisée.

Par ailleurs on définit la sous-catégorie des *vraies coupures*, que l'on note Cuts, comme étant la sous-catégorie de GCuts engendrée par les composées de *vraies coupures élémentaires*, i.e., les pushouts de c_A de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "c_A"'] & U \arrow[d] \\ V \arrow[r] & W \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

lorsque l'arête A est persistante par m et que son image possède des sommets source et but dans U. Graphiquement, une vraie coupure élémentaire est un morphisme de la forme :



Remarque 5.4. Les vraies coupures préservent la bonne formation locale des positions, i.e., tous les séquents du codomaine sont de la forme :

$$\Gamma \vdash \qquad \Gamma \vdash A \qquad \Gamma, \bot^a \vdash \qquad \Gamma, \bot^a \vdash \bot^a$$

dès que cette propriété est vérifiée sur le domaine.

5.3.2 Factorisation des coupures

Définition 5.4 (Sans coupure)**.** Un morphisme est *sans coupure* lorsque toutes les arêtes sont persistantes. On note CutFree la sous-catégorie des morphismes sans coupure.

Lemme 5.10. *La paire* (GCuts, CutFree) *forme un système de factorisation dans* LaxP*.*

Preuve. On adapte à la catégorie LaxP une preuve déjà donnée dans [23, Section 3.2]. Tout morphisme $f\colon U \longrightarrow V$ de LaxP peut se décomposer en :

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dr, "r"] & \\ U \arrow[ur, "c"] \arrow[rr, "f"'] & & V \end{tikzcd}$$

où c est une coupure généralisée, et r est persistant.

Lorsque f est persistant, on choisit $c = id_U$ et $r = f$.

Sinon, il existe une arête $e\colon \{e\} \longrightarrow U$ qui n'est pas persistante par f. On prend le pushout :

$$\begin{tikzcd}
\{e\} \arrow[r, "c_e"] \arrow[dd, "\ulcorner e \urcorner"'] & 1 \arrow[d] \arrow[ddr, "\iota"] & \\
& U_1 \arrow[dr, dashed, "f_1"] & \\
U \arrow[ur, "c_1"] \arrow[rr, "f"'] & & V
\end{tikzcd}$$

où la flèche ι envoie l'unique sommet de son domaine sur $f(e)$, qui est bien un sommet. Le morphisme f_1 est obtenu par propriété universelle : son domaine possède exactement une arête de moins que U. On termine la construction de c par récurrence sur le nombre d'arêtes de la position source.

On montre ensuite l'existence d'un unique relèvement $h \in \mathrm{LaxP}$ pour tout carré :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c"'] & Y \arrow[d, "r"] \\
U \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & V
\end{tikzcd}$$

où $c \in \mathrm{GCuts}$, $r \in \mathrm{CutFree}$ et $f, g \in \mathrm{LaxP}$. On choisit d'abord une factorisation pour f dans $(\mathrm{GCuts}, \mathrm{CutFree})$:

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dr, "r'"] & \\
X \arrow[ur, "c'"] \arrow[rr, "f"'] & & Y.
\end{tikzcd}$$

Pour tout morphisme $k\colon X \longrightarrow Y$ de LaxP, on note $\mathrm{col}(k)$ l'ensemble des arêtes de X dont l'image par k est un sommet de Y. Comme $\mathrm{col}(r) = \mathrm{col}(r') = \emptyset$, on a :

$$\mathrm{col}(c) \subseteq \mathrm{col}(f) = \mathrm{col}(c').$$

Soit, par pushouts successifs, $c''\colon U \longrightarrow W$ la coupure qui écrase les arêtes de $c(\mathrm{col}(c')) \cap \mathrm{col}(g)$: on a $\mathrm{col}(c''c) = \mathrm{col}(c')$, donc

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "c'"] & \\
U \arrow[r, "c''"'] & W
\end{tikzcd}$$

commute. Le relèvement h est défini par $h = r'c''$. L'ensemble du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "c'"] \arrow[dd, "c"'] & & Y \arrow[dd, "r"] \\
& W \arrow[ur, "r'"] \arrow[d, phantom, "(\star)"] & \\
U \arrow[ur, "c''"] \arrow[rr, "g"'] & & V
\end{tikzcd}$$

commute donc, comme c est épi, le triangle marqué $(\star)$ commute également. L'unicité de h vient également du fait que c est épi. $\square$

On revient désormais dans P. La preuve du lemme 5.10 ne fonctionne à priori pas dans cette catégorie, car la position U_1 n'est pas nécessairement localement bien formée. En revanche si l'on est uniquement en présence de vraies coupures, i.e., de coupures qui n'écrasent que des arêtes ayant un sommet but et un sommet source, alors cette construction est valide dans P. Enfin, certains morphismes dans CutFree peuvent malgré tout faire apparaitre des coupures généralisées : pour éviter ce cas, on se restreint aux morphismes sans coupure et *fermés*.

Définition 5.5. On note CCutFree la sous-catégorie de P des morphismes sans coupure et fermés, i.e., qui envoient les fermés sur des fermés.

Lemme 5.11. *On a le système de commutation* CCutFree $\llcorner$ Cuts *dans* P.

Preuve. On se donne un morphisme $g \in$ CCutFree et une vraie coupure $c \in$ Cuts comme dans :

$$U \xrightarrow{\quad g \quad} V \xrightarrow{\quad c \quad} W$$

et on montre que lors de la construction de la factorisation de cg au lemme 5.10, chaque étape préserve la bonne formation locale.

Tout d'abord, si $e \in \mathrm{edg}(U)$ est une arête écrasée par cg, on montre que e possède un sommet à chaque extrémité. Pour cela, remarquons que $g(e)$ est une arête, car g est persistant, qui est écrasée par c. Comme c est une vraie coupure, $g(e)$ possède dans V un sommet à chaque extrémité, que l'on note v_s et v_t. On a alors à priori quatre cas, mais on montre une contradiction dans les trois premiers :

- e n'a pas de sommet source ni de sommet but, donc $\{e\}$ est fermé dans U. Cependant, $g(\{e\}) = \{g(e)\}$ n'est pas fermé dans e, car il ne contient pas v_s et v_t. Ceci contredit l'hypothèse que g est fermé ;
- e possède un sommet v à une extrémité tel que $g(v) = v_s$, et n'a pas de sommet à l'autre extrémité. Ceci contredit encore le fait que g est fermé car la paire $\{e, v\}$ est fermée dans U mais son image par g ne contient pas v_t ;
- de même, le cas ou e n'a qu'un sommet extrémité tel que $g(v) = v_t$ est impossible ;
- e possède donc un sommet à chaque extrémité.

La coupure c_1 définie dans la preuve du lemme 5.10 est donc une vraie coupure, ce qui assure que U_1 est bien formée localement. $\square$

5.3.3 Pullbacks le long de plongements ouverts

Lemme 5.12. *Soient* $c \in$ Cuts *et* $h \in$ Emb *qui se factorisent en*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "c'"] \arrow[d, hook, "h"'] & V \arrow[d, "h'"] \\ X \arrow[r, "c"'] & Y \end{tikzcd}$$

alors h' *est un plongement ouvert.*

Preuve. On *définit*, sans utiliser pour l'instant le système de factorisation, $c' \colon U \longrightarrow V$ comme étant la coupure qui écrase une arête $e \in \mathrm{edg}(U)$ si et seulement si $h(e)$ est écrasée par c.

On définit ensuite h' en distinguant les arêtes et les sommets de V :

— les arêtes de V ont un unique antécédent dans U par c'. On pose alors pour $e \in \mathrm{edg}(V)$, $h'(e) = chc'^{-1}(e)$;
— par définition de c', tous les antécédents dans U par c' d'un sommet $v \in \mathrm{ver}(V)$ ont la même image $v' \in \mathrm{ver}(Y)$. On pose $h'(v) = v'$.

Pour chaque arête persistante par h', on choisit l'occurrence vide. Le fait que h' est bien un morphisme (il reste à démontrer la continuité) provient de la caractérisation donnée au lemme 3.3, car toutes les arêtes sont persistantes par h'.

Il reste à montrer que h' est ouvert. On utilise pour cela le lemme 3.13. Soit $v \in \mathrm{ver}(V)$ un sommet, et $e \in \mathrm{edg}(Y)$ une arête voisine de $h'(v)$. Montrons que e admet un antécédent par h'. Comme c est surjective, il existe une arête $e' \in \mathrm{edg}(X)$ et un sommet $v' \in \mathrm{ver}(X)$ tels que $c(e') = e$, $c(v') = h'(v)$, et e' est voisine de v'. En identifiant ces points avec leurs antécédents par h, la coupure c' préserve l'arête e' car c la préserve : on a donc dans V une arête $c'(e')$ et un sommet $c'(v')$ voisins. Or, $c'(v') = v$ et $h'(c'(e')) = e$, donc e est bien l'image d'une arête $c'(e')$ voisine de v.

En définissant ces morphismes c' et h', nous venons d'exhiber une factorisation de ch. Or par unicité d'une telle factorisation dans un système de factorisation, toute factorisation est isomorphe, donc le bord droit du carré commutatif de départ est toujours un plongement ouvert. □

Lemme 5.13. *Tout carré :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "c'"] \arrow[d, hook, "h"'] & V' \arrow[d, hook, "h'"] \\ V \arrow[r, "c"'] & W \end{tikzcd}$$

où $c, c' \in \mathrm{Cuts}$ *et* $h, h' \in \mathrm{Emb}$ *est un pullback.*

On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 5.14. *Dans tout carré :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "c'"] \arrow[d, hook, "h"'] & V' \arrow[d, hook, "h'"] \\ V \arrow[r, "c"'] & W \end{tikzcd}$$

où $c, c' \in \mathrm{Cuts}$ *et* $h, h' \in \mathrm{Emb}$*, si* $z \in W$ *est dans l'image de* h' *alors on a l'égalité :*

$$h(c'^{-1}(h'^{-1}(\{z\}))) = c^{-1}(\{z\}).$$

Preuve. On note $P = h(c'^{-1}(h'^{-1}(\{z\})))$. P n'est pas vide, car z est dans l'image de h et c' est épi : on note x un point de P (qui est un sommet, ou une arête).

L'égalité à montrer est équivalente à : $h(h^{-1}(c^{-1}(\{z\}))) = c^{-1}(\{z\})$, or l'inclusion

$$h(h^{-1}(Y)) \subseteq Y$$

est toujours vraie.

Les coupures ne modifient pas les composantes connexes, donc $c^{-1}(z)$ est une composante connexe de V. Soit $y \in c^{-1}(\{z\})$. Les points x et y ont pour image z par c, donc par connexité, il existe un chemin qui relie x à y.

— Si e est une arête sur ce chemin, alors il suffit que $s(e) \in P$ ou $t(e) \in P$ pour avoir $e \in P$, car h est ouvert.

— Si v est un sommet de ce chemin, alors comme c' est une vraie coupure, il suffit qu'une arête adjacente à v soit dans P pour avoir $v \in P$.

Ainsi de proche en proche en partant de x, on montre que $y \in P$. □

Preuve du lemme 5.13. Soit

$$V \xleftarrow{\ f\ } P \xrightarrow{\ g\ } V'$$

un cône au-dessus de (c, h'). On prouve en premier lieu que $f(P) \subseteq h(U)$, en montrant que pour tout $x \in P$, il est impossible que $f(x) \notin h(U)$. En effet, si un tel x existe alors $g(x) \in V'$. Or comme c' est épi, il existe $y \in U$ tel que $c'(y) = g(x)$. En composant par h', on obtient :

$$ch(y) = h'c'(y) = h'g(x) = cf(x).$$

Soit O le plus petit ouvert de W contenant $ch(y)$: en considérant son image réciproque par c, l'égalité précédente assure que $f(x) \in c^{-1}(O)$. Mais par ailleurs, $h'(V')$ est un ouvert de W qui contient $ch(y)$ donc $O \subseteq h'(V')$. On utilise alors l'égalité du lemme 5.14 pour obtenir :

$$O = h'c'(O') = ch(O').$$

Or, comme c est une coupure, $c^{-1}(O)$ est le plus petit ouvert de V qui contient $c^{-1}(ch(y))$, et $h(O')$ est un ouvert (car h est ouvert) qui contient également $c^{-1}(ch(y))$, d'où :

$$c^{-1}(O) = h(O'),$$

donc en particulier $f(x) \in h(O') \subseteq h(U)$, ce qui contredit l'hypothèse $x \notin f^{-1}(h(U))$.

On peut donc définir $w \colon P \longrightarrow U$ par :

$$\forall x \in P, w(x) = h^{-1}(f(x))$$

et, comme toutes les occurrences sont vides pour les morphismes c, c', h, h', poser $o_w(e) = o_f(e)$ pour les arêtes persistantes.

La continuité de w vient du fait que pour tout ouvert $O \subseteq U$, $w^{-1}(O) = f^{-1}(h(O))$. Or, h est ouvert donc $h(O)$ est ouvert, et f est continue, donc $f^{-1}(h(O))$ est ouvert.

L'unicité de w vient du fait que h est mono. □

Lemme 5.15. *Les coupures sont stables par pullback le long des plongements ouverts.*

Preuve. Soit :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "c'"] \arrow[dd, "g"'] & & V \arrow[dd, hook, "h"] \\
& V' \arrow[dr, "h'"] & \\
W \arrow[rr, "c"'] & & X
\end{tikzcd}$$

un pullback où h est un plongement ouvert, et c une coupure. D'après le lemme 3.14, g est un plongement ouvert. On factorise le morphisme cg en $h'c'$ comme indiqué (h' est un plongement ouvert d'après le lemme 5.12). Le carré :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c'"'] & V \arrow[d, hook, "h"] \\
V' \arrow[r, hook, "h'"'] \arrow[ur, dashed, "k"] & X
\end{tikzcd}$$

admet un unique relèvement k, qui est un plongement ouvert d'après le lemme 3.15. Le morphisme f est surjectif car le pullback est, par construction au lemme 3.14, calculé comme dans Top : si $x \in V$, alors comme c est surjectif, il existe $y \in V'$ tel que $h(x) = c(y)$. Le pullback U possède ainsi un point $z \in U$ tel que $f(z) = x$.

Le relèvement k est surjectif car f et c' sont surjectifs, donc d'après la proposition 3.17, k est un isomorphisme : f est par conséquent une coupure. □

5.3.4 Descente des câbles

Les coups sont fermés, donc on peut étudier leur comportement par factorisation dans le système de commutation CCutFree ⌞ Cuts :

Lemme 5.16. *Si $m\colon U \longrightarrow V$ est un coup, et $c\colon V \longrightarrow W$ est une coupure, alors en factorisant dans* CCutFree ⌞ Cuts*, le morphisme* right cm *est :*

— *un coup si c ne coupe pas l'arête active de m,*

— *ou sinon, une contraction élémentaire.*

Preuve. La factorisation de cm donne un carré

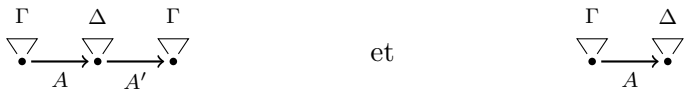
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "m"'] & V' \arrow[d, "m'"] \\ V \arrow[r, "c"'] & W \end{tikzcd}$$

et on détaille la forme des positions U, V, V' et W pour chaque cas.

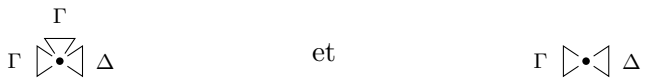
Lorsque c ne coupe pas l'arête active de m, alors il est facile de voir que c' est encore une coupure et m' est un coup (les arêtes modifiées par chacun sont disjointes). L'arête active de m' est l'image par c de l'arête active de m.

On raisonne par cas sur m grâce au corollaire 3.19.

Si c coupe l'arête active de $m \in$ GM, alors les positions U et V sont respectivement :

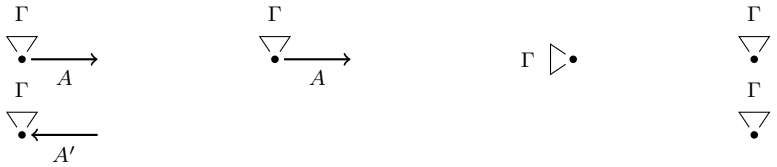


où l'on a représenté l'arête active par m avec l'étiquette A, et A' est une occurrence négative une fois dans A. Comme c coupe l'arête A, alors V' et W sont les positions :

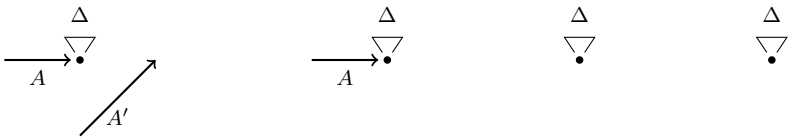


et m' est la contraction élémentaire qui fusionne les deux copies du sous-arbre Γ.

Dans le cas où $m \in \mathrm{CM}^-$, alors U, V, V' et W sont respectivement les positions :



Dans le cas où $m \in \mathrm{CM}^+$, alors U, V, V' et W sont respectivement les positions :



Dans le cas $m \in \mathrm{EM}$, V' est réduite à deux sommets. $\square$

5.4 Contractions

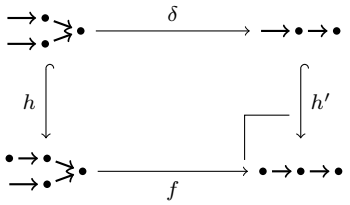
5.4.1 Propriétés des contractions

On note Contr la classe des contractions. Les contractions sont fermées : la classe Contr est une sous-catégorie des morphismes de CCutFree qui contient les isomorphismes. (Ces derniers sont engendrés par convention par la suite vide.)

Lemme 5.17. *Tous les morphismes $\delta_{A,X}$ sont épis, donc les contractions sont épis.*

Lemme 5.18. *Les contractions sont stables par pushout le long des plongements de sous-arbres complets.*

Exemple 5.1. La propriété précédente n'est pas vérifiée si on l'étend aux plongements, même ouverts, car le carré :



est un pushout, mais le morphisme du bas n'est plus une contraction.

Pour toute occurrence $\xi\colon A \longrightarrow B$, et toute paire de morphismes préservant la racine $f\colon X \longrightarrow Z$ et $g\colon Y \longrightarrow Z$ de même codomaine, on peut définir un morphisme $\xi \cdot \langle f, g\rangle\colon (A \cdot X, A \cdot Y) \longrightarrow (B \cdot Z)$ qui :

— préserve la racine,

— fusionne les deux arêtes A en les envoyant sur l'arête B,

— et envoie chaque sous-position X et Y sur Z respectivement par f et g.

De manière similaire à $(\xi \cdot f, \xi \cdot g)$ en 3.2.3, le fait que f et g préservent la racine entraine la continuité de $\xi \cdot \langle f, g\rangle$. On a alors en particulier l'identité :

$$\delta_{A,X} = A \cdot \langle id_X, id_X\rangle$$

Lemme 5.19 (Décomposition des contractions)**.** *Si une contraction δ vérifie :*

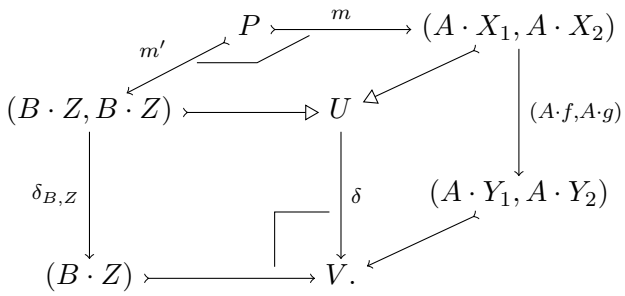
$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X_1, A \cdot X_2) \arrow[r, tail] \arrow[d, "(A\cdot f, A\cdot g)"'] & U \arrow[d, "\delta"] \\
(A \cdot Y_1, A \cdot Y_2) \arrow[r, tail] & V
\end{tikzcd}$$

pour $f\colon X_1 \longrightarrow Y_1$ et $g\colon X_2 \longrightarrow Y_2$ alors f et g sont des contractions.

Preuve. On procède par induction sur la longueur d'une décomposition choisie pour δ. Dans le cas où δ est une contraction élémentaire, elle est engendrée par un pushout de la forme :

$$\begin{tikzcd}
(B \cdot Z, B \cdot Z) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\delta_{B,Z}"'] & U \arrow[d, "\delta"] \\
(B \cdot Z) \arrow[r, tail] & V.
\end{tikzcd}$$

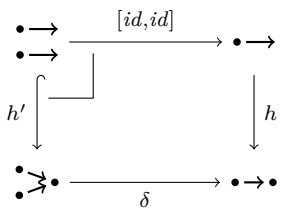
On considère le pullback sur la face supérieure du diagramme (lemme 3.12) :



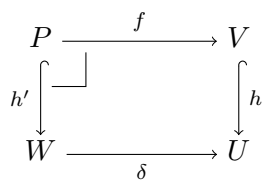
— Le cas $m = m' \cong id$ est impossible car $(B \cdot Z) \neq (A \cdot Y_1, A \cdot Y_2)$.
— Si P est vide, alors $f \cong id_{X_1}$ et $g \cong id_{X_2}$, puisque δ est l'identité ailleurs que sur $(B \cdot Z, B \cdot Z)$.
— Si $m \cong id$ alors $(A \cdot X_1, A \cdot X_2)$ est contenue dans Z, donc $f \cong id$ et $g \cong id$.
— Si $m' \cong id$ alors $(B \cdot Z, B \cdot Z)$ est contenue dans X_1 ou X_2 : l'un des deux morphismes f ou g est donc un pullback de la contraction δ, et l'autre est un isomorphisme.
— Si aucun des cas précédents n'est vérifié, alors $A = B$, X_1 et X_2 sont contenues dans Z, et $(A \cdot X_1, A \cdot X_2)$ et $(B \cdot Z, B \cdot Z)$ partagent une arête A dans U. Dans ce cas, $f \cong id$ et $g \cong id$.

□

Pullbacks le long de plongements ouverts De manière générale, les contractions ne sont pas stables par pullback le long des plongements, en particulier à cause du contrexemple suivant :



Remarque 5.5. Le pullback



d'une contraction élémentaire le long d'un plongement ouvert est :
— soit une contraction élémentaire, lorsque le sommet fourche de δ est dans l'image de h,
— soit isomorphe, dans $\mathrm{P}^{\rightarrow}$, à un morphisme :

$$id_X + [id_Y, id_Y] \colon X + Y + Y \longrightarrow Y.$$

5.4.2 Morphismes sans contraction

Définition 5.6. Un morphisme $f\colon U \longrightarrow V$ dans CCutFree est dit *sans contraction* si, pour tout diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot Y) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\xi\cdot\langle g,h\rangle"'] & U \arrow[d, "f"] \\
(B \cdot Z) \arrow[r] & V
\end{tikzcd}$$

avec $\xi\colon A \longrightarrow B \in \mathrm{Occ}$, $g\colon X \longrightarrow Z$ et $h\colon Y \longrightarrow Z$, alors $g \neq h$. On note ContrFree la classe des morphismes fermés, sans coupure et sans contraction.

De manière équivalente, f est sans contraction s'il n'existe pas de carré commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, tail] \arrow[d, "A\cdot\langle g,g\rangle"'] & U \arrow[d, "f"] \\
(A \cdot Z) \arrow[r] & V.
\end{tikzcd}$$

Lemme 5.20. *Une contraction* $\delta \in \mathrm{Contr}$ *n'est pas dans* ContrFree.

Preuve. La contraction δ est obtenue par un pushout d'un morphisme $\delta_{A,X}$ le long d'un monomorphisme m :

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "\delta_{A,X}"'] & Y \arrow[d, "\delta"] \\
(A \cdot X) \arrow[r, "m'"'] & Z. \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"]
\end{tikzcd}$$

□

Un contrexemple détaillé ci-dessous montre que la classe des morphismes sans contraction n'est pas stable par composition. Ceci implique que la paire $(\mathrm{Contr}, \mathrm{ContrFree})$ ne peut pas être un système de factorisation pour la catégorie CCutFree des morphismes fermés sans coupure. Cependant, les propositions 5.22 et 5.24 montrent que cette paire vérifie tous les autres axiomes des systèmes de factorisation, en particulier l'unicité d'une factorisation pour tout morphisme.

Pour montrer que ContrFree n'est pas stable par composition, on peut considérer l'exemple de deux morphismes $f\colon U \longrightarrow V$ et $g\colon V \longrightarrow W$ dans ContrFree dont la composée se factorise par une contraction. Soit X une position enracinée, Y une position enracinée, et $h\colon X \longrightarrow Y$ un morphisme qui préserve la racine. Pour une formule A, on définit :

— U la position $(A \cdot X, A \cdot X)$,
— V la position $(A \cdot X, A \cdot Y)$,
— W la position $(A \cdot Y)$,
— f est le morphisme $(A \cdot id, A \cdot h)\colon (A \cdot X, A \cdot X) \longrightarrow (A \cdot X, A \cdot Y)$,
— g est le morphisme $\delta_{A,Y} \circ (A \cdot h, A \cdot id)\colon (A \cdot X, A \cdot Y) \longrightarrow (A \cdot Y, A \cdot Y) \longrightarrow (A \cdot Y)$.

La composée $g \circ f$ est égale au morphisme $A \cdot \langle h, h\rangle$, ce qui prouve qu'elle n'est pas dans ContrFree.

Proposition 5.21. *Les isomorphismes de* P *sont sans contraction. De plus,* ContrFree *est stable par composition par les isomorphismes.*

Preuve. Si l'on suppose qu'un isomorphisme f admet une décomposition :

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot Y) \arrow[r, tail] \arrow[d, "A\cdot\langle g,h\rangle"'] & U \arrow[d, "f"] \\
(A \cdot Z) \arrow[r, "m"'] & V
\end{tikzcd}$$

alors $A \cdot \langle g, h\rangle$ est un monomorphisme d'après le lemme 3.8, ce qui est absurde.

La stabilité par isomorphisme de ContrFree est évidente par construction. □

Proposition 5.22. *Tout morphisme de* CCutFree *se décompose dans* ContrFree $\circ$ Contr.

Preuve. Soit $f : U \longrightarrow V$ un morphisme fermé sans coupure qui admet une décomposition

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, tail] \arrow[d, "A\cdot\langle g,g\rangle"'] & U \arrow[d, "f"] \\
(A \cdot Y) \arrow[r] & V
\end{tikzcd}$$

où g est un morphisme $X \longrightarrow Y$. Prenons le pushout suivant dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[rr, tail] \arrow[d, "\delta_{A,X}"] \arrow[dd, bend right, "A\cdot\langle g,g\rangle"'] & & U \arrow[dl, "\delta_1"] \arrow[dd, "f"] \\
(A \cdot X) \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "A\cdot g"] & W \arrow[dr, dashed, "f'"] & \\
(A \cdot Y) \arrow[rr] & & V
\end{tikzcd}$$

où f' est donné par propriété universelle du pushout. La flèche δ_1 est une contraction, et h' est un plongement de sous-arbre d'après le lemme 3.11. On peut conclure la factorisation de f par induction sur le nombre d'arêtes dans dom f : dans le diagramme précédent, W possède au minimum une arête de moins que U (les deux arêtes d'étiquette A sont fusionnées par δ_1). □

Lemme 5.23. *Pour tous* $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$*, si* gf *et* g *sont sans contraction, alors* f *aussi.*

Preuve. Supposons $f \notin$ ContrFree. Par définition, il existe un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, tail] \arrow[d, "A\cdot\langle h,h\rangle"'] & U \arrow[d, "f"] \\
(A \cdot Z) \arrow[r] & V.
\end{tikzcd}$$

On obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, tail] \arrow[d, "A\cdot\langle h,h\rangle"'] & U \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "gf"] & \\
(A \cdot Z) \arrow[r] & V \arrow[r, "g"'] & W,
\end{tikzcd}$$

contredisant $gf \in$ ContrFree. □

Proposition 5.24. *Les ensembles* Contr *et* ContrFree *forment un système de commutation* ContrFree $\llcorner$ Contr.

Preuve. Il reste seulement à prouver que la factorisation est unique à unique isomorphisme près. On prouve pour cela que tout carré de la forme

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\delta"'] & U \arrow[d, "h"] \\ V' \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "w"] & V \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

où δ et δ' sont des contractions, h un morphisme sans contraction, et g un morphisme quelconque, admet un unique relèvement w, qui n'est formé que de contractions. Ainsi lorsque g est lui-même sans contraction, par le lemme 5.23, le relèvement w est l'unique isomorphisme qui fait commuter le carré.

Remarquons aussi que l'unicité de w est une conséquence directe du fait que δ est épi (lemme 5.17).

Pour l'existence du relèvement, on procède par induction bien fondée sur la paire $(|U'|, |\delta|)$, où $|U'|$ est le cardinal de U' et $|\delta|$ est la longueur minimale des décompositions de δ en contractions élémentaires.

Observons d'abord que si δ est un isomorphisme, on peut choisir $\delta'\delta^{-1}$ comme relèvement.

Si $|\delta| > 0$, on choisit une décomposition minimale de δ en $\delta_1 \circ \delta_2$ avec δ_1 une contraction élémentaire et l'hypothèse d'induction (puisque $|\delta_2| < |\delta|$) fournit un relèvement w qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\delta_2"'] & U \arrow[dd, "h"] \\ W \arrow[ur, "w"] \arrow[d, "\delta_1"'] & \\ V' \arrow[r, "g"'] & V. \end{tikzcd}$$

Soit X la position contractée par δ_1, et A l'étiquette de l'arête correspondante, c'est-à-dire que δ_1 est engendrée par le pushout :

$$\begin{tikzcd} (A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "\delta_{A,X}"'] & W \arrow[d, "\delta_1"] \\ (A \cdot X) \arrow[r] & V'. \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

On note X_1 et X_2 les images par m des deux copies de X dans $(A \cdot X, A \cdot X)$, et $w_1 \colon X_1 \longrightarrow Y_1$ et $w_2 \colon X_2 \longrightarrow Y_2$ les restrictions du domaine de w à X_1 et X_2. Enfin, on note h_1 et h_2 les morphismes $h_i \colon Y_i \longrightarrow Z$, $i \in \{1, 2\}$, obtenus en restreignant le domaine de h à Y_1 et Y_2. Ces deux flèches ont même codomaine Z car d'après l'égalité (5.1), X_1 et X_2 ont même image par hw.

Observons d'abord que si X_1 et X_2 ont même image par w, alors w se factorise par la contraction δ_1, ce qui conclut la démonstration.

Or, X_1 et X_2 ont forcément même image par w. En effet, supposons le contraire. Alors, comme w est une contraction, les deux arêtes A n'ont pas non plus même image et on obtient

un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X_1, A \cdot X_2) \arrow[r, tail] \arrow[d, "{(A\cdot w_1, A\cdot w_2)}"'] & W \arrow[d, "w"] \\
(A \cdot Y_1, A \cdot Y_2) \arrow[r, tail] \arrow[d, "{A\cdot\langle h_1, h_2\rangle}"'] & U \arrow[d, "h"] \\
(A \cdot Z) \arrow[r] & V.
\end{tikzcd}$$

Comme w est une contraction, le lemme 5.19 assure que w_1 et w_2 sont également des contractions. Comme h est sans contraction, on en déduit que h_1 et h_2 sont sans contraction : dans le cas contraire, on peut construire à partir d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
(B \cdot Y', B \cdot Y') \arrow[r, tail] \arrow[d, "{\xi\cdot\langle m, m\rangle}"'] & Y_i \arrow[d, "h_i"] \\
(B \cdot Y') \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

pour h_i, on peut composer horizontalement avec :

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r, tail] \arrow[d, "h_i"'] & U \arrow[d, "h"] \\
Z \arrow[r] & V
\end{tikzcd}$$

ce qui contredirait l'hypothèse que h est sans contraction (définition 5.6). En appliquant l'hypothèse d'induction aux carrés

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "w_2"'] & Y_1 \arrow[d, "h_1"] \\
Y_2 \arrow[r, "h_2"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "w_1"'] & Y_2 \arrow[d, "h_2"] \\
Y_1 \arrow[r, "h_1"'] & Z,
\end{tikzcd}$$

on obtient des relèvements $j\colon Y_1 \longrightarrow Y_2$ et $k\colon Y_2 \longrightarrow Y_1$, dont on montre par unicité qu'ils sont inverses l'un de l'autre. On a donc (modulo isomorphisme) $h_1 = h_2$, ce qui contredit $h \in \mathrm{ContrFree}$. □

5.4.3 Interaction avec les coupures

Dans cette partie, on démontre

Proposition 5.25. *On a le système de commutation* $\mathrm{Contr} \llcorner \mathrm{Cuts}$.

C'est une conséquence directe des lemmes 5.11 et 5.1, et de :

Lemme 5.26. *Si* $\delta\colon U \longrightarrow V \in \mathrm{Contr}$ *et* $c\colon V \longrightarrow W \in \mathrm{Cuts}$ *se factorisent en* $c'\colon U \longrightarrow V' \in \mathrm{Cuts}$ *et* $\delta'\colon V' \longrightarrow W \in \mathrm{CCutFree}$*, alors* $\delta' \in \mathrm{Contr}$.

On commence par prouver le lemme suivant :

Lemme 5.27. *Tout carré :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "c'"] \arrow[d, tail, "m"'] & V' \arrow[d, tail, "m'"] \\ V \arrow[r, "c"'] & W \end{tikzcd}$$

où $c, c' \in$ Cuts et m, m' sont des monos, et tel que l'adhérence de toute arête coupée par c est dans $m(U)$, est un pushout.

Preuve. Soit :

$$V \xrightarrow{f} P \xleftarrow{g} V'$$

un autre cocône. On peut d'abord remarquer que :

$$\forall x \in W, \forall y, y' \in c^{-1}(x), f(y) = f(y').$$

En effet, quand $c^{-1}(x)$ n'est pas un singleton, alors $c^{-1}(x) \subseteq m(U)$ par hypothèse. On note $X = m^{-1}(c^{-1}(x))$. Comme $m'c' = cm$, alors $c'(X)$ est un singleton, donc $gc'(X) = fm(X)$ également. Un morphisme $h\colon W \longrightarrow P$ vérifie donc :

$$\forall x \in W, h(x) = f(c^{-1}(x))$$

ce qui prouve son existence en tant que *fonction*. On vérifie grâce au lemme 3.3 que h est continue : soit $e \in \mathrm{edg}(W)$ est une arête telle que $h(e)$ est un sommet. La coupure c est bijective sur les arête de son image, donc il existe une unique arête $e' \in \mathrm{edg}(V)$ telle que $c(e') = e$. Comme f est continue, on a $f(e') \geq fs(e')$, ou autrement dit en réécrivant $f = hc$, $h(e) \geq hs(e)$. On procède de même pour $h(e) \geq ht(e)$.

L'unicité de h est assurée par le fait que c est épi. □

Preuve du lemme 5.26. On prouve d'abord le résultat pour une contraction $\delta_{A,X}\colon (A \cdot X, A \cdot X) \longrightarrow (A \cdot X)$, et une coupure élémentaire. Soit $c\colon (A \cdot X) \longrightarrow B$ une coupure élémentaire :

- si l'arête coupée est dans X, alors $c' = (A \cdot c_{|X}, A \cdot c_{|X})\colon (A \cdot X, A \cdot X) \longrightarrow (A \cdot c(X), A \cdot c(X))$ est une coupure, et $\delta_{A,c(X)}c'$ est une factorisation de $c\delta_{A,X}$,
- si l'arête coupée est l'arête A de $(A \cdot X, A \cdot X)$, on pose Y le pushout du morphisme racine ρ le long de lui-même :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & X \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

  et $c'\colon (A \cdot X, A \cdot X) \longrightarrow Y$ la coupure qui écrase l'arête A. On décompose la position X en :

$$X = (A_1 \cdot X_1, \ldots, A_n \cdot X_n)$$

  où les X_i peuvent être vides. La position Y est la colimite des morphimes racines $1 \longrightarrow (A_i \cdot X_i, A_i \cdot X_i)_{1 \leq i \leq n}$. On note par ailleurs X'_i la colimite des $(A_j \cdot X_j)_{1 \leq j < i}$ et des $(A_j \cdot X_j, A_j \cdot X_j)_{i \leq j \leq n}$. La suite des contractions δ_i obtenues par pushouts :

$$\begin{tikzcd} (A_i \cdot X_i, A_i \cdot X_i) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\delta_{A_i,X_i}"'] & X'_i \arrow[d, "\delta_i"] \\ (A_i \cdot X_i) \arrow[r, tail] & X'_{i+1} \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

vérifie $\delta_n \dots \delta_1 c' = c\delta_{A,X}$.

Pour passer à une contraction élémentaire engendrée par $\delta_{A,X}$, on distingue deux cas, selon la position de l'arête coupée par c, qui est une coupure élémentaire :

— le cas où c coupe une arête externe à $(A \cdot X)$ est facile, car les arêtes modifiées par c et par δ sont distinctes ;

— sinon, si c coupe une arête interne à $(A \cdot X)$, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[rr, "c_2"] \arrow[dr, tail, "m'"] \arrow[dd, "\delta_{A,X}"'] & & U' \arrow[dr, tail] \arrow[dd, "\delta_1"] & \\
& U \arrow[rr, "c_3"] \arrow[dd, "\delta"] & & U'' \arrow[dd, dashed, "h"] \\
(A \cdot X) \arrow[rr, "c_1"] \arrow[dr, tail, "m"'] & & V' \arrow[dr, tail] & \\
& V \arrow[rr, "c"'] & & V''
\end{tikzcd}$$

construit de la façon suivante :

1. la face de gauche est le pushout obtenu par définition de la contraction δ,
2. la face du bas est obtenue par factorisation de cm. Comme c ne coupe que des arêtes internes à $(A \cdot X)$, cette face est un pushout d'après le lemme 5.27,
3. la face du fond est la descente de $\delta_{A,X}$ par c_1. La flèche δ_1 est une contraction d'après ce qui précède,
4. la face du haut est le pushout de c_2 le long de m' (lemme 3.11),
5. h est obtenu par propriété universelle de ce pushout.

Le rectangle formé par la face de gauche suivie de la face du bas est un pushout :

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, "\delta_{A,X}"] \arrow[d, tail, "m'"'] & (A \cdot X) \arrow[r, "c_1"] \arrow[d, tail, "m"] & V' \arrow[d, tail] \\
U \arrow[r, "\delta"'] & V \arrow[r, "c"'] & V''
\end{tikzcd}$$

donc le rectangle formé de la face du haut suivie de la face de droite est également un pushout :

$$\begin{tikzcd}
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, "c_2"] \arrow[d, tail] & U' \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, tail] & V' \arrow[d, tail] \\
U \arrow[r, "c_3"'] & U'' \arrow[r, "h"'] & V''
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme du pushout, la face de droite est ainsi également un pushout : h est donc une contraction.

On conclut la preuve par induction en choisissant une décomposition en contractions élémentaires. □

5.4.4 Commutation avec les câbles

Le but de cette section est de prouver que les classes :

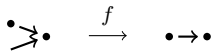
— des coups d'une part,

— et des plongements de composantes connexes d'autre part,

sont stables par commutation dans ContrFree $\llcorner$ Contr.

De manière générale, les contractions et les plongements ne forment pas un système de commutation à cause du contrexemple suivant.

Exemple 5.2. Le morphisme :



est sans contraction car il n'identifie pas deux sous-arbres *complets*, à cause de l'absence de sommet source à l'arête inférieure. Il s'écrit cependant comme la composée

d'un plongement ouvert suivi d'une contraction. La factorisation dans ContrFree $\llcorner$ Contr de (h, δ) est $id \in$ Contr, $f \in$ ContrFree, mais f n'est pas un plongement.

Cependant, les plongements utilisés pour définir les câbles sont uniquement des plongements de composantes connexes : dans ce cas il est évident que l'on peut permuter les contractions et ces plongements.

Lemme 5.28. *On a le système de commutation* M $\llcorner$ Contr.

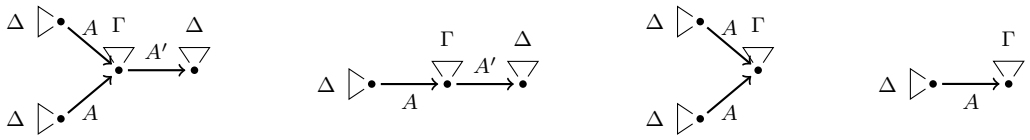
Preuve. Les coups sont sans contraction. Grâce à la caractérisation des coups au corollaire 3.19, il suffit de vérifier que chacune des classes EM, CM$^+$, CM$^-$ et GM sont stables par factorisation dans ContrFree $\llcorner$ Contr. On vérifie que la factorisation d'un coup m pour chaque classe le long d'une contraction élémentaire $\delta\colon W \longrightarrow X$ en :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "m"'] & V \arrow[d, "m'"] \\ W \arrow[r, "\delta"'] & X \end{tikzcd}$$

vérifie que m' est encore un coup. On conclut dans le cas d'une contraction quelconque en choisissant une décomposition en contractions élémentaires (grâce à l'unicité de la factorisation dans ContrFree $\llcorner$ Contr).

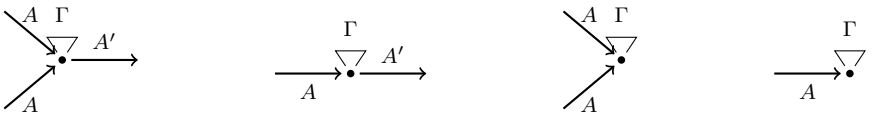
Le cas $m \in$ EM est impossible, car W serait réduite à une arête, or δ doit avoir au moins un sommet dans son domaine.

Lorsque $m \in$ GM, le seul cas non trivial apparait lorsque δ fusionne l'arête active de m. Les positions U, V, W et X sont alors respectivement de la forme :



et m' est le coup dont l'arête active est l'arête marquée A dans W ; δ' est la contraction qui fusionne les arêtes A de U.

Lorsque $m \in$ CM$^+$, et que δ fusionne l'arête active, alors les positions U, V, W et X sont de la forme :



Lorsque $m \in$ CM$^-$, l'arête active de m n'a pas de but, donc δ ne fusionne pas cette arête. □

5.5 Morphismes de descente

On définit la catégorie des morphismes de descente D_h^0 comme étant la sous-catégorie de P dont les morphismes sont les flèches qui se décomposent en :

$$U \xrightarrow{c} V \xrightarrow{\delta} W$$

où c est une vraie coupure, et δ est une contraction. Il s'agit bien d'une catégorie car on a montré à la proposition 5.25 que $\mathrm{Contr} \llcorner \mathrm{Cuts}$ formait un système de commutation, donc on sait écrire toute composée :

$$U \xrightarrow{c} V \xrightarrow{\delta} W \xrightarrow{c'} V \xrightarrow{\delta'} W$$

comme un morphisme de D_h^0 en faisant commuter δ et c', et en utilisant le fait que Cuts et Contr sont des sous-catégories.

La notation D_h^0 sera justifiée au chapitre 7, où cette classe de morphismes formera la catégorie horizontale d'une catégorie double des tuiles de descente.

Le seul résultat important à retenir sur les systèmes de commutation est le suivant :

Théorème 5.29. *Nous avons les deux systèmes de commutation :*

$$\mathrm{M} \llcorner \mathrm{D}_h^0 \qquad\qquad \mathrm{CEmb} \llcorner \mathrm{D}_h^0$$

Preuve. On prouve le résultat pour $\mathrm{M} \llcorner \mathrm{Contr} \circ \mathrm{Cuts}$, en appliquant les différents résultats de ce chapitre de la façon suivante :

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{M} \llcorner \mathrm{Contr}}\,\text{Lem. 5.28} \qquad \dfrac{}{\mathrm{Contr} \llcorner \mathrm{Cuts}}\,\text{Prop. 5.25} \qquad \mathrm{M} \circ \mathrm{Contr} \llcorner \mathrm{Cuts}}{\mathrm{M} \llcorner \mathrm{Contr} \circ \mathrm{Cuts}}\,\text{Lem. 5.4}$$

Il reste seulement à prouver $\mathrm{M} \circ \mathrm{Contr} \llcorner \mathrm{Cuts}$, ce qui est une conséquence des lemmes 5.1 et 5.16.

Le système de commutation $\mathrm{CEmb} \llcorner \mathrm{D}_h^0$ s'obtient en raisonnant sur chaque composante connexe pour un morphisme $h \in \mathrm{CEmb}$ donné : sur le domaine de h, ce plongement est l'identité. Ceci donne une factorisation évidemment unique. Sur les autres composantes connexes, un morphisme de descente qui modifie ces composantes se factorise en un isomorphisme. □

5.6 Affaiblissements

Dans cette partie, on définit la classe des *affaiblissements*, qui sont des plongements d'une certaine forme. Les affaiblissements incarnent dans le jeu graphique les règles d'affaiblissement habituelles :

$$\dfrac{\Gamma, \Delta \vdash}{\Gamma, A, \Delta \vdash} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma, \Delta \vdash B}{\Gamma, A, \Delta \vdash B}$$

Définition 5.7 (Affaiblissements)**.** Un *affaiblissement élémentaire* est un morphisme w de la forme

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & X \arrow[d, "w"] \\ Z \arrow[r] & Y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

pour une position Z connexe enracinée sans arête atomique, et où ρ est le morphisme qui envoie le seul sommet de 1 sur la racine de Z. Toute composée d'une suite d'affaiblissements élémentaires est un *affaiblissement*.

On note Weak la sous-catégorie des affaiblissements, et on représentera les affaiblissements par des flèches $U \longrightarrow V$.

Étant donné qu'un affaiblissement n'ajoute pas de sommet aux arêtes pendantes de son domaine, on remarque que :

Lemme 5.30. *Les affaiblissements envoient les fermés sur des fermés.*

Lemme 5.31. *On peut prendre le pullback des affaiblissements le long :*
- *des coups lorsque l'arête active n'est pas affaiblie,*
- *des coupures,*
- *des contractions.*

Les affaiblissements sont stables par ces pullbacks.

Preuve. Il s'agit d'une simple vérification pour chaque cas, en prenant d'abord les versions élementaires de chaque classe (entre affaiblissements, coupures et contractions). On passe au cas général en choisissant une décomposition, puis en appliquant le lemme du pullback. □

Dans le cadre actuel, les affaiblissements servent uniquement à définir la structure de négation de la catégorie de réponse formée par les stratégies, en partie 7.6.2 afin de prouver la correction de notre sémantique de jeux. On les décrit dès à présent, car on utilise les deux résultats suivants afin de définir la négation d'une stratégie. Sur les câbles, nous aurons besoin d'un résultat d'élimination des affaiblissements que l'on présente sous la forme de systèmes de commutation en section 5.6.1. Sur les morphismes de descente nous verrons en section 5.6.2 qu'il n'existe pas de tel système de commutation car les affaiblissements ne sont en général pas stables par commutation avec les contractions. On montre à la place un résultat de factorisation qui s'avèrera suffisant pour montrer que la négation est fonctorielle à la proposition 7.41.

5.6.1 Interaction avec les coups

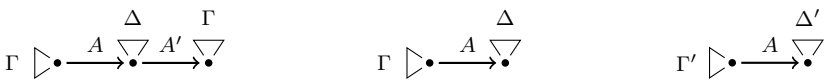
Lemme 5.32. *On a le système de commutation* $\mathrm{M} \llcorner \mathrm{Weak}$.

Preuve. On procède par induction sur la longueur d'une décomposition choisie pour les affaiblissements. On détaille le cas où l'on a $m\colon U \longrightarrow V$ un coup de base. La factorisation pour un coup en général s'obtient en retirant les parties manquantes par rapport au coup de base. Soit $w\colon V \longrightarrow W$ un affaiblissement élémentaire. On cherche à construire l'unique paire (à un unique isomorphisme près) :

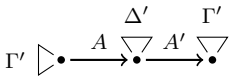
$$U \xrightarrow{\quad w' \quad} V' \xrightarrow{\quad m' \quad} W$$

égale à wm.

Lorsque m est un coup global, on peut représenter les positions U, V et W respectivement sous la forme :



où Γ et Δ sont les sous-positions respectivement de Γ' et Δ' par l'affaiblissement w. On peut alors définir V' comme étant la position :



ainsi que w' l'affaiblissement qui envoie les sous-arbres Γ sur les sous-arbres Γ' et le sous-arbre Δ sur Δ', et m' le coup d'arête active A dans V.

L'unicité d'une telle factorisation provient du lemme 3.20. □

5.6.2 Interaction avec la descente

Les affaiblissements sont des morphismes fermés sans coupure. Dans cette partie, on montre qu'ils sont stables par factorisation dans les systèmes de commutation CCutFree$\llcorner$Cuts et ContrFree $\llcorner$ Contr.

Commutation avec les coupures

Lemme 5.33. *Les classes* Cuts *et* Weak *sont relativement stables pour le système de commutation* (GCuts, CCutFree).

Preuve. Les affaiblissements étant stables par pushout le long des monomorphismes, il suffit de prouver que la descente d'un affaiblissement élémentaire le long d'une vraie coupure est un affaiblissement. Mais si

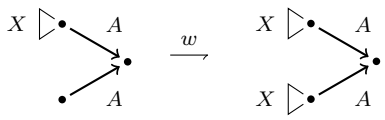
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "w"] & U' \arrow[d, "w'"] \\ X \arrow[r, "m"'] & U \arrow[r, "c"'] \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] & V \end{tikzcd}$$

est une telle factorisation avec une décomposition de w, alors on peut remarquer que w' est l'affaiblissement élémentaire :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & c'(Y) \arrow[d, "w'"] \\ cm(X) \arrow[r] & V. \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

On conclut la preuve par induction sur la longueur d'une décomposition (choisie) d'un affaiblissement comme composée d'affaiblissements élémentaires. □

Interaction avec les contractions Le but de cette partie est de prouver un résultat assurant qu'en factorisant dans ContrFree $\llcorner$ Contr un affaiblissement suivi d'une contraction, on obtient de nouveau une contraction et un affaiblissement. Dans le cas général, cet énoncé est faux car si l'on considère l'affaiblissement :



que l'on compose avec la contraction $\delta_{A,X}$, alors la composée $\delta_{A,X} \circ w$ est sans contraction, mais n'est pas un affaiblissement.

Définition 5.8 (Affaiblissement équilibré)**.** Soit $\delta\colon V \longrightarrow W$ une contraction, et $w\colon U \longrightarrow V$ un affaiblissement. On dit que w est *δ-équilibré* si, pour toute paire d'arêtes $e, e' \in \mathrm{edg}(V)$ telles que $\delta(e) = \delta(e')$ alors $w^{-1}(e) \cong w^{-1}(e')$.

Autrement dit, pour toute paire de branches contractées par δ, alors w doit soit préserver les deux branches, soit les affaiblir toutes les deux. Dans le contrexemple précédent, w n'était pas $\delta_{A,X}$-équilibré.

Lemme 5.34. *Si δ est une contraction et w est un affaiblissement δ-équilibré, alors la factorisation dans* ContrFree $\llcorner$ Contr *des flèches :*

$$U \xrightarrow{\ w\ } V \xrightarrow{\ \delta\ } W$$

donne une contraction suivie d'un affaiblissement.

On peut immédiatement remarquer deux propriétés d'une telle factorisation :
— les affaiblissements étant sans contraction, le système ContrFree $\llcorner$ Contr garantit que la factorisation est unique ;
— le carré obtenu est toujours un pullback (il est calculé comme dans Top).

Preuve du lemme 5.34. On prouve le résultat par induction sur la longueur d'une décomposition choisie pour δ. Lorsque δ est une contraction élémentaire, on note e et e' les deux arêtes distinctes de V de même but, d'étiquette A, et fusionnées par δ

Lorsque les arêtes e et e' ne possèdent pas d'inverses par w, alors la composée δw est déjà un affaiblissement.

Dans le cas contraire, les sous-arbres enracinés en $s(e)$ et $s(e')$ sont isomorphes (et potentiellement vides si e et e' n'ont pas de sommet source), et on les note indifféremment X.

Ainsi, δ est obtenue par un pushout :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{A,X}"'] & V_0 \arrow[d] \\
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\delta_{A,X}"'] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & V \arrow[d, "\delta"] \\
(A \cdot X) \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & W.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $(A \cdot X, A \cdot X) \longrightarrow V$ est un plongement de sous-arbre (définition 3.8).

On construit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & (A \cdot X', A \cdot X') \arrow[rr, tail] \arrow[dl] \arrow[dd, "\delta_{A,X'}"'] & & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dd, "\delta'"] \\
(A \cdot X, A \cdot X) \arrow[rr, tail] \arrow[dd, "\delta_{A,X}"'] & & V \arrow[dd, "\delta"] & \\
 & (A \cdot X') \arrow[rr, tail] \arrow[dl] & & V' \arrow[dl, dashed, "w'"] \\
(A \cdot X) \arrow[rr] & & W &
\end{tikzcd}$$

de la façon suivante :

1. on part de la face avant, qui est la définition de la contraction δ ;
2. la face du haut est obtenue par pullback le long de w (lemme 5.31). Ce pullback est bien $(A \cdot X', A \cdot X')$ car w est δ-équilibré, où X' est obtenu par affaiblissement $w'' \colon X' \longrightarrow X$ à partir de X ;
3. on utilise cet affaiblissement pour définir l'affaiblissement $(A \cdot X') \longrightarrow (A \cdot X)$, que l'on place sur l'arête inférieure de la face de gauche ;
4. pour la face du fond, on prend le pushout de $\delta_{A,X'}$ le long du plongement de sous-arbre $(A \cdot X', A \cdot X') \longrightarrow U$, ce qui définit la contraction δ' ;
5. la flèche w' est obtenue par propriété universelle de ce pushout.

Il reste à montrer que w' est un affaiblissement, en calculant sa valeur sur chaque point de V' : comme la face de droite commute, w' est sans occurrence, et préserve toutes les arêtes. Si e est une arête qui n'a pas d'antécédent par w', alors $\delta^{-1}(e)$ n'a pas d'antécédent par w, donc aucun point du sous-arbre sous e n'a d'antécédent par w'. $\square$

5.6.3 Interaction avec les plongements ouverts

De même que pour les contractions à la section 5.4, l'ensemble des plongements ouverts ne forme pas en général un système de commutation avec l'ensemble des affaiblissements notamment parce qu'un affaiblissement w de la forme :

$$\bullet \xrightarrow{w} \bullet \longrightarrow \bullet$$

peut se décomposer en :

$$\bullet \xrightarrow{w'} \longrightarrow \bullet \xhookrightarrow{h'} \bullet \longrightarrow \bullet$$

où h' est un plongement et w' un affaiblissement.

On peut cependant prouver qu'il existe une commutation des affaiblissements et des plongements, qui est maximale au sens du résultat suivant :

Lemme 5.35. *Toute composée :*

$$U \xhookrightarrow{h} V \xrightarrow{w} W$$

avec $h \in \mathrm{Emb}$ *et* $w \in \mathrm{Weak}$ *se factorise en :*

$$U \xrightarrow{w'} V' \xhookrightarrow{h'} W$$

avec $h' \in \mathrm{Emb}$ *et* $w' \in \mathrm{Weak}$. *Cette factorisation est maximale, car pour toute paire* $h'' \in \mathrm{Emb}$ *et* $w'' \in \mathrm{Weak}$ *telle que :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "w''"'] & V' \arrow[d, hook, "h'"] \\ V'' \arrow[r, hook, "h''"'] & W \end{tikzcd}$$

alors il existe un unique plongement $k \colon V'' \longrightarrow V'$ *qui fait commuter le diagramme.*

Preuve. On note $h\colon U \hookrightarrow V$ un plongement et $w\colon V \longrightarrow W$ un affaiblissement élémentaire, en procédant comme pour les résultats précédents par induction sur la longueur d'une décomposition des affaiblissements.

On note :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & V \arrow[d, "w"] \\ X \arrow[r] & W \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

le pushout dont provient l'affaiblissement élémentaire w, en notant 1 l'image de son unique sommet dans V ou dans X. Le cas où 1 n'a pas d'inverse par h est facile, car les sous-positions affectées par h et w sont disjointes. Lorsque 1 est également un sommet de U, alors on choisit $w\colon U \longrightarrow V'$ l'affaiblissement

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & U \arrow[d, "w'"] \\ X \arrow[r] & V'. \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

La position V' est un ouvert de W, ce qui donne le plongement $h'\colon V' \hookrightarrow W$.

Pour prouver la maximalité, on remarque que h'', étant ouvert, ne peut pas ajouter des arêtes aux sommets déjà présents dans son domaine : pour chaque sous-arbre X affaibli par w', alors w'' affaiblit au minimum les arêtes à la racine de X. Pour chaque arête e à la racine de X, on note X_e le sous-arbre négatif de X contenant e : ce sont des ouverts de X. De même on note X' le sous-arbre de X affaibli par w'', et X'_e les sous-arbres négatifs sous chaque arête e à la racine de X'.

On a l'inclusion $X'_e \subseteq X_e$. Le plongement h' est ouvert, donc X_e est un ouvert de W. De même, X'_e est un ouvert de W, donc l'inclusion $X'_e \hookrightarrow X_e$ est un plongement, ce qui définit un plongement $k\colon V'' \hookrightarrow V'$. Ce dernier est unique car h' est mono. □

Ainsi, dans le cas particulier des câbles où les plongements sont des plongements de composantes connexes, on prouve bien le lemme :

Lemme 5.36. *On a bien le système de commutation* CEmb ⌞ Weak*. Chaque carré de factorisation est un pullback.*

Preuve. Les pullbacks viennent du lemme 3.16, car un affaiblissement dont le domaine a plusieurs composantes connexes s'écrit toujours comme un coproduit. □

Chapitre 6

Quelques résultats sur les carrés exacts

Avec la définition des stratégies au chapitre 4 et l'élimination des coupures via des systèmes de commutation au chapitre 5, nous avons défini tous les éléments de base de notre sémantique de jeux. Il reste à montrer comment l'élimination des coupures engendre une opération de *descente* sur les stratégies, ce qui sera l'objet du chapitre 7.

Pour cela, nous utiliserons le langage des foncteurs polynomiaux [30, chapitre 16], d'une part pour définir l'opération de descente elle-même comme un foncteur polynomial, et d'autre part comme une technique systématique de preuve. Ainsi, les preuves d'associativité de la composition des stratégies et de correction de la sémantique de jeux seront des preuves d'égalité entre foncteurs polynomiaux.

Le but de ce court chapitre est donc de redonner les définitions que nous utiliserons par la suite, ainsi que quelques résultats principaux sur les diagrammes de foncteurs polynomiaux, définis en introduction (voir 1.2).

On se place ici dans le cadre, restreint par rapport à [30] ou [19], où l'on ne considère que des préfaisceaux booléens (les foncteurs ont pour codomaine 2) et non pas ensemblistes (les foncteurs ont pour codomaine Set). Concrètement, si C est une catégorie, un préfaisceau booléen est un foncteur :

$$\sigma \colon \mathrm{C}^{op} \longrightarrow 2$$

où :

— 2 est la catégorie — et même l'ordre — possédant exactement deux objets notés 0 et 1, et un unique morphisme non trivial $0 \longrightarrow 1$;

— C^{op} est la catégorie formée à partir de C en renversant formellement tous les morphismes. En d'autres termes, $\mathrm{C}^{op}(A, B) = \mathrm{C}(B, A)$.

Si la catégorie C est un préordre, on note alors un morphisme $a \longrightarrow b$ sous la forme $a \leq b$. Un préfaisceau booléen σ sur C indique pour chaque objet s'il est *accepté* ($\sigma(a)$ vaut 1) ou s'il est refusé ($\sigma(a)$ vaut 0). Le fait que σ soit un foncteur indique que l'image d'un morphisme $a \leq b$ dans C est un morphisme $\sigma(b) \longrightarrow \sigma(a)$ dans 2, le sens de la flèche est renversé car σ a pour domaine C^{op}. Si b est accepté, i.e., $\sigma(b) = 1$, alors comme le seul morphisme dans 2 qui part de 1 est l'identité, a est également accepté. Si l'on voit le préordre dans C comme une relation « être un préfixe », alors un préfaisceau booléen sur C est équivalent à un ensemble d'objets de C acceptés, stable par préfixe et par isomorphisme.

Si $\sigma, \tau \colon \mathrm{C}^{op} \longrightarrow 2$ sont deux préfaisceaux booléens, détaillons à présent les transformations naturelles $\alpha \colon \sigma \longrightarrow \tau$. Formellement, une telle transformation est [34] une famille de morphismes $\alpha_a \colon \sigma(a) \longrightarrow \tau(a)$ dans 2 tels que pour tout morphisme $f \colon a \longrightarrow b$, le diagramme

suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \sigma(a) \arrow[r, "\sigma(f)"] \arrow[d, "\alpha_a"'] & \sigma(b) \arrow[d, "\alpha_b"] \\ \tau(a) \arrow[r, "\tau(f)"'] & \tau(b). \end{tikzcd}$$

Cependant dans le cas de préfaisceaux booléens, comme 2 est un préordre et donc qu'il existe au plus un morphisme entre deux objets donnés, alors la condition de naturalité est triviale. Une telle transformation naturelle exprime simplement le fait que les objets acceptés par σ sont inclus dans les objets acceptés par τ.

L'existence d'un isomorphisme naturel entre préfaisceaux booléens se résume en une égalité entre ces préfaisceaux.

Si C est une catégorie, on peut donc former la catégorie $\widehat{\mathrm{C}}$ — qui est un ordre, car 2 l'est — dont les objets sont les préfaisceaux booléens sur C et dont les morphismes sont les transformations naturelles.

Les foncteurs polynomiaux sont une manière d'exprimer certains foncteurs entre ces catégories de préfaisceaux.

6.1 Foncteurs entre préfaisceaux booléens

Définition 6.1. Si $F\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ est un foncteur, alors on note F^* le foncteur $\widehat{\mathrm{D}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{C}}$ qui envoie chaque préfaisceau σ sur $F^{op} \circ \sigma$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^{op} \arrow[rr, "F^{op}"] \arrow[dr, "F^*(\sigma)"'] & & \mathrm{D}^{op} \arrow[dl, "\sigma"] \\ & 2. & \end{tikzcd}$$

Le foncteur F^* est appelé *foncteur de restriction le long de F*. On peut reformuler la définition précédente en disant que : un objet $c \in \mathrm{C}$ est accepté par $F^*(\sigma)$ si et seulement si l'objet $F(c) \in \mathrm{D}$ est accepté par σ.

Proposition 6.1. *Pour tout F, il existe deux adjonctions :*

$$F_! \dashv F^* \qquad \textit{et} \qquad F^* \dashv F_*.$$

Ces foncteurs sont respectivement les extensions de Kan à gauche et à droite, déjà données en introduction de cette thèse (chapitre 1). On rappelle que l'on dispose de caractérisations explicites grâce aux propositions 1.1 et 1.2. Intuitivement, ces caractérisations peuvent se formuler ainsi :

— si $d \in \mathrm{Obj}(\mathrm{D})$, alors $F_!(\sigma)d = 1$ si et seulement s'il existe un morphisme $d \longrightarrow Fc$ dans D tel que $\sigma c = 1$;

— si $d \in \mathrm{Obj}(\mathrm{D})$, alors $F_*(\sigma)d = 1$ si et seulement si pour toute flèche $Fc \longrightarrow d \in \mathrm{Hom}(\mathrm{D})$ alors $\sigma c = 1$.

Dans le cas de $F_!$, si F admet des relèvements, alors on peut même choisir $Fc \cong d$.

6.2 Carrés exacts

Le fait de disposer d'un diagramme commutatif, ou même d'une simple transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathrm{D} \end{tikzcd}$$

entre foncteurs n'implique à priori en rien qu'un diagramme de foncteurs polynomiaux défini à partir du premier ne commute ou ne possède une transformation naturelle. Le but de cette partie est de définir :

— d'une part les carrés *compagnons*, qui fournissent certaines transformations naturelles automatiques entre foncteurs polynomiaux quand il existe une transformation naturelle entre les foncteurs sous-jacents ;

— d'autre part la notion de *carrés exacts* : il s'agit des carrés où les transformations naturelles obtenues précédemment sont en fait des isomorphismes. Dans le cas des préfaisceaux booléens, les carrés exacts sont des carrés commutatifs de foncteurs polynomiaux.

6.2.1 Compagnons (calcul des *mates*)

Une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathrm{D} \end{tikzcd}$$

induit une transformation naturelle $\alpha^* \colon G^* \longrightarrow F^*$. Ainsi lorsque l'on dispose de quatre foncteurs et d'une transformation α tels que

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "I"'] & \mathrm{B} \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow\alpha"] \\ \mathrm{D} \arrow[r, "H"'] & \mathrm{C} \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

alors il existe une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{A}} & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[l, "F^*"'] \\ \widehat{\mathrm{D}} \arrow[u, "I^*"] \arrow[ur, phantom, "\Rightarrow\alpha^*"] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[l, "H^*"] \arrow[u, "G^*"'] \end{tikzcd}$$

et on peut construire deux carrés *compagnons*, en utilisant respectivement les adjonctions $F^* \dashv F_*$ et $F_! \dashv F^*$:

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{A}} \arrow[d, "I_*"'] & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[l, "F^*"'] \arrow[d, "G_*"] \arrow[ul, phantom, "\Leftarrow\gamma"] \\ \widehat{\mathrm{D}} & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[l, "H^*"] \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{A}} \arrow[r, "F_!"] & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow\beta"] \\ \widehat{\mathrm{D}} \arrow[u, "I^*"] \arrow[r, "H_!"'] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[u, "G^*"'] \end{tikzcd}$$

en composant dans le diagramme suivant d'une part la partie verticale pour obtenir γ et la partie horizontale pour obtenir β :

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[dr, equal] & & \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[dr, equal] & \widehat{\mathrm{A}} \arrow[l, "I_*"'] \arrow[u, "F_!"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\epsilon"] & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[l, "F^*"'] \arrow[dr, equal] & \\
 & \widehat{\mathrm{D}} \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\eta"] \arrow[u, "I^*"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\alpha^*"] \arrow[dr, equal] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[l, "H^*"] \arrow[u, "G^*"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\epsilon"] & \widehat{\mathrm{B}} \\
 & & \widehat{\mathrm{D}} \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] \arrow[u, "H_!"'] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[l, "G_*"]
\end{tikzcd}$$

Schématiquement, ce résultat peut se retenir en représentant les transformations naturelles de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{A}} & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[l, "F^*"'] \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[u, "I^*"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[l, "H^*"] \arrow[u, "G^*"']
\end{tikzcd}
\quad \text{implique} \quad
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{A}} \arrow[d, "I_*"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[l, "F^*"'] \arrow[d, "G_*"] \\
\widehat{\mathrm{D}} & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[l, "H^*"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{A}} & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[l, "F^*"'] \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[u, "I^*"] \arrow[ur, phantom, "\Rightarrow"] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[l, "H^*"] \arrow[u, "G^*"']
\end{tikzcd}
\quad \text{implique} \quad
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{A}} \arrow[r, "F_!"] & \widehat{\mathrm{B}} \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[u, "I^*"] \arrow[ur, phantom, "\Rightarrow"] \arrow[r, "H_!"'] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[u, "G^*"']
\end{tikzcd}$$

En suivant la terminologie de [39], on nomme *transformation de Beck-Chevalley* l'opération qui permet de passer de la cellule α aux cellules γ et β comme noté ci-dessus.

Définition 6.2 (Carré exact)**.** On dit que le carré (6.1) est *exact* lorsque β est un isomorphisme.

Proposition 6.2. *Un carré est exact si et seulement si γ est un isomorphisme.*

Preuve. Ce résultat apparait dans [39] pour des préfaisceaux non nécessairement booléens, cependant sans référence à sa preuve. Il est vraisemblable qu'un calcul sur les adjoints permette de l'obtenir. On redonne ici une preuve uniquement dans le cas des préfaisceaux booléens, notablement simplifiée du fait que ces derniers forment un préordre (car 2 est un préordre).

Si γ est un isomorphisme, on considère uniquement sa réciproque pour construire une transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{A}} \arrow[r, "F_!"] & \widehat{\mathrm{B}} \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[u, "I^*"] \arrow[r, "H_!"'] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[u, "G^*"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\delta"]
\end{tikzcd}$$

en composant avec les unités et counités de la façon suivante :

$$
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{\mathrm{A}} \arrow[d, "F_!"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\eta"] & \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[r, "I^*"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \widehat{\mathrm{A}} \arrow[d, "I_*"'] \arrow[ur, equal] & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[l, "F^*"'] \arrow[d, "G_*"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\gamma^{-1}"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & \\
 & \widehat{\mathrm{D}} \arrow[d, "H_!"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[l, "H^*"] \arrow[r, "G^*"'] \arrow[dl, equal] & \widehat{\mathrm{B}} \\
 & \widehat{\mathrm{C}}. & &
\end{tikzcd}
$$

La transformation de Beck-Chevalley donnait une transformation naturelle dans le sens contraire :

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{A}} \arrow[r, "F_!"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \widehat{\mathrm{B}} \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[u, "I^*"] \arrow[r, "H_!"'] & \widehat{\mathrm{C}}. \arrow[u, "G^*"']
\end{tikzcd}
$$

Dans le cas booléen, les transformations entre préfaisceaux booléens forment un préordre donc ces deux transformations sont inverses l'une de l'autre.

Pour la réciproque, on procède de même en partant de l'inverse de β. □

Lemme 6.3 (Distributivité)**.** *Lorsque la transformation naturelle compagnon est également un isomorphisme, alors on peut obtenir un sens de la distributivité. Ainsi, si*

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{A}} \arrow[r, "F_!"] & \widehat{\mathrm{B}} \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[u, "I^*"] \arrow[r, "H_!"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftrightarrow"] & \widehat{\mathrm{C}} \arrow[u, "G^*"']
\end{tikzcd}
$$

est un isomorphisme, alors avec la transformation précédente on obtient l'implication :

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{A}} \arrow[r, "F_!"] \arrow[d, "I_*"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow"] & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[d, "G_*"] \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[r, "H_!"'] & \widehat{\mathrm{C}}.
\end{tikzcd}
$$

Remarque 6.1. Comme le carré est exact, on aurait pu partir du carré $I_*F^* \Leftrightarrow H^*G_*$ et appliquer la transformation analogue : on obtient alors la même implication que ci-dessus.

6.2.2 Notation

Dans la suite, nous serons souvent amenés à considérer d'abord des foncteurs entre certaines catégories, puis les foncteurs entre catégories de préfaisceaux booléens qu'ils induisent. Pour chaque foncteur de la première classe, on indiquera sur les flèches les lettres :

— Δ si l'on prend, entre préfaisceaux booléens, le foncteur précomposition ;

— Σ si l'on prend l'extension de Kan à gauche ;

— ou Π si l'on prend l'extension de Kan à droite.

Par exemple au chapitre 7, on considère en premier lieu des foncteurs :

$$\mathrm{V}/_X \xhookrightarrow{h} \mathrm{K}/_X \xleftarrow{\mathrm{dom}} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\mathrm{cod}} \mathrm{K}/_Y \xhookleftarrow{h'} \mathrm{V}/_Y$$

que l'on annote de la façon suivante :

$$\mathrm{V}/_X \xhookrightarrow{\Pi} \mathrm{K}/_X \xleftarrow{\Delta} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{K}/_Y \xhookleftarrow{\Delta} \mathrm{V}/_Y$$

pour indiquer que l'on s'intéresse au foncteur polynomial défini par la composée :

$$\widehat{\mathrm{V}/_X} \xrightarrow{h_*} \widehat{\mathrm{K}/_X} \xrightarrow{\mathrm{dom}^*} \widehat{\mathrm{T}_{H/c}} \xrightarrow{\mathrm{cod}_!} \widehat{\mathrm{K}/_Y} \xrightarrow{h'^*} \widehat{\mathrm{V}/_Y}.$$

Par ailleurs dans un diagramme où l'on a annoté les flèches avec Δ, Σ ou Π, on indiquera avec une flèche double pleine les transformations naturelles entre les foncteurs de base, et avec une flèche double en pointillés les transformations naturelles entre les foncteurs de préfaisceaux correspondants. Ainsi, le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "\Sigma_F"] \arrow[d, "\Delta_I"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow \alpha \quad \Leftarrow\!\!=\!\!\Rightarrow"] & \mathrm{B} \arrow[d, "\Delta_G"] \\
\mathrm{D} \arrow[r, "\Sigma_H"'] & \mathrm{C}
\end{tikzcd}$$

signifiera qu'il existe une transformation naturelle $\alpha\colon GF \longrightarrow HI$, ainsi qu'un isomorphisme naturel :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{A}} \arrow[r, "F_!"] & \widehat{\mathrm{B}} \\
\widehat{\mathrm{D}} \arrow[u, "I^*"] \arrow[r, "H_!"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftrightarrow \beta"] & \widehat{\mathrm{C}}. \arrow[u, "G^*"']
\end{tikzcd}$$

Avec ces notations, on peut en particulier réécrire les carrés compagnons de la section 6.2.1 sous les formes suivantes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "\Delta_F"] \arrow[d, "\Pi_I"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow\!\!=\!\!=\!\!="] & \mathrm{B} \arrow[d, "\Pi_G"] \\
\mathrm{D} \arrow[r, "\Delta_H"'] & \mathrm{C}
\end{tikzcd}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "\Sigma_F"] \arrow[d, "\Delta_I"'] \arrow[dr, phantom, "=\!\!=\!\!=\!\!\Rightarrow"] & \mathrm{B} \arrow[d, "\Delta_G"] \\
\mathrm{D} \arrow[r, "\Sigma_H"'] & \mathrm{C}.
\end{tikzcd}$$

6.3 Exemples de carrés exacts

6.3.1 Foncteurs pleins ou fidèles

Proposition 6.4 (Guitart [19, Exemple 1.14 (4)])**.** *Si F est plein et fidèle, alors le carré*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, "F"] \\
B \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{id}{\Rightarrow}"] & C
\end{tikzcd}$$

est exact.

Proposition 6.5. *Si G est plein, alors pour tous F et H tels que $F = GH$ alors le carré*

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "\Delta_F"'] \arrow[d, equal] \\ C \arrow[u, "\Pi_G"] \arrow[ur, phantom, "\overset{id}{\Rightarrow}"] & B \arrow[l, "\Delta_H"] \end{tikzcd}$$

est exact.

Preuve. Un objet $b \in \mathrm{Obj}(B)$ est accepté :

(i) par le foncteur du bas si Hb est accepté,

(ii) par le foncteur du haut si pour toute flèche $Gc \longrightarrow Fb$, alors c est accepté.

La transformation de Beck-Chevalley donne l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).

Réciproquement, comme $GHb = Fb$, et si l'on suppose que G est plein, alors (ii) est équivalent à : pour toute flèche $c \longrightarrow Hb$, c est accepté. Or Hb est accepté si l'on suppose (i), donc tous ses préfixes c également. □

Corollaire 6.6. *Lorsque G est plein, le carré :*

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "\Sigma_F"'] \arrow[d, equal] \\ C \arrow[u, "\Delta_G"] \arrow[ur, phantom, "\overset{id}{\Rightarrow}"] & B \arrow[l, "\Sigma_H"] \end{tikzcd}$$

est exact.

Proposition 6.7. *Si G est surjectif sur les objets, alors le carré :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta_F"] & B \arrow[d, equal] \\ C \arrow[u, "\Sigma_G"] \arrow[r, "\Delta_H"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{id}{\Rightarrow}"] & B \end{tikzcd}$$

est exact.

Preuve. Un objet $a \in \mathrm{Obj}(A)$ est accepté :

(i) par le foncteur du bas s'il existe $a \longrightarrow Gc$ tel que Hc est accepté ;

(ii) par le foncteur du haut si Fa est accepté.

La transformation de Beck-Chevalley donne l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour la réciproque, comme G est surjectif sur les objets, alors il existe c tel que $a = Gc$. Comme Fa est accepté, et que $Fa = FGc = Hc$, alors Hc est accepté. □

6.3.2 Coproduits de carrés exacts

Proposition 6.8. *Si deux carrés :*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\Delta_{f_i}"] \arrow[d, "\Pi_{k_i}"'] & B_i \arrow[d, "\Pi_{g_i}"] \\ D_i \arrow[r, "\Delta_{h_i}"'] & C_i \end{tikzcd}$$

pour $i \in \{1, 2\}$ sont exacts, alors le carré :

$$\begin{tikzcd} A_1 + A_2 \arrow[r, "\Delta_{f_1+f_2}"] \arrow[d, "\Pi_{k_1+k_2}"'] & B_1 + B_2 \arrow[d, "\Pi_{g_1+g_2}"] \\ D_1 + D_2 \arrow[r, "\Delta_{h_1+h_2}"'] & C_1 + C_2 \end{tikzcd}$$

est exact.

Preuve. On note f le coproduit des foncteurs $f_1 + f_2$, ainsi que pour g, h et k. On explicite les valeurs des foncteurs polynomiaux sur un préfaisceau $\sigma \in \widehat{B_1 + B_2}$:

$$(\Delta_h \Pi_g \sigma)(d) = \bigwedge_{b \mid \exists g(b) \to h(d)} \sigma(b)$$

$$(\Pi_k \Delta_f \sigma)(d) = \bigwedge_{a \mid \exists k(a) \to d} \sigma(f(a)).$$

Par symétrie, on peut supposer que $d \in D_1$. Dans ce cas, il existe un morphisme $g(b) \longrightarrow h(d)$ si et seulement si $b \in B_1$ et s'il existe un morphisme $g_1(b) \longrightarrow h_1(d)$. De même pour $k(a) \longrightarrow d$: l'existence d'un tel morphisme n'est possible que dans le cas $k_1(a) \longrightarrow d$ dans D_1, avec $a \in A_1$. On a donc :

$$(\Delta_h \Pi_g \sigma)(d) = (\Delta_{h_1} \Pi_{g_1})(\pi_1 \sigma)(d)$$

qui est bien égal, comme le premier carré est exact, à :

$$(\Pi_k \Delta_f \sigma)(d) = (\Pi_{k_1} \Delta_{f_1})(\pi_1 \sigma)(d).$$

□

6.3.3 Comma catégories

On mentionne dans cette partie la dernière structure importante que l'on utilisera dans les preuves : les comma catégories. Nous les avons déjà mentionnées au chapitre 4 pour définir les catégories des vues et des câbles relativisées à une position. Nous donnons à présent la définition générale.

Définition 6.3. Soient $F\colon \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{C}$ et $G\colon \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ deux foncteurs. La *comma catégorie* $F \downarrow G$ est la catégorie dont :

— les objets sont les triplets (a, f, b) où f est un morphisme $F(a) \xrightarrow{f} G(b)$ dans C, a est un objet de A et b un objet de B ;

— les morphismes sont les paires (h, k) de morphismes de A et B qui font commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "f"'] & F(a') \arrow[d, "f'"] \\ G(b) \arrow[r, "G(k)"'] & G(b'). \end{tikzcd}$$

Cette catégorie est équipée de deux foncteurs de projection $\pi\colon F \downarrow G \longrightarrow A$ et $\pi'\colon F \downarrow G \longrightarrow B$. Le foncteur π envoie par exemple :

— les objets $F(a) \longrightarrow G(b)$ sur l'objet $a \in \mathrm{Obj(A)}$;

— les morphismes (h, k) sur le morphisme $h \in \mathrm{Hom(A)}$.

Il existe par ailleurs une transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd} F \downarrow G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow \alpha"] & \mathrm{A} \arrow[d, "F"] \\ \mathrm{B} \arrow[r, "G"'] & \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

définie par $\alpha_{(a,f,b)} = f$. Les comma catégories sont également appelées *pullbacks lax*, car ils généralisent la notion de pullback. En particulier, s'il existe un cône *lax*, i.e., deux foncteurs P et Q équipés d'une transformation naturelle comme dans :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D} \arrow[dr, dashed, "K"] \arrow[drr, "P"] \arrow[ddr, "Q"'] & & \\ & F \downarrow G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & \mathrm{A} \arrow[d, "F"] \\ & \mathrm{B} \arrow[r, "G"'] & \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

alors il existe un unique foncteur K indiqué en pointillés qui fait commuter le diagramme.

Le résultat important pour la suite concernant les comma catégories est que :

Proposition 6.9 (Guitart [19, Exemple 1.14 (2)])**.** *La comma catégorie :*

$$\begin{tikzcd} F \downarrow G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & \mathrm{A} \arrow[d, "F"] \\ \mathrm{B} \arrow[r, "G"'] & \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

est exacte.

6.3.4 Fibrations ou op-fibrations

On montre dans cette partie un résultat spécifique aux préfaisceaux booléens, mais très similaire à [7, Lemme 3.6].

Définition 6.4 (Fibration)**.** Soit $F\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ un foncteur entre catégories. On dit que F est une *fibration* quand tout morphisme de la forme $f\colon d \longrightarrow Fc$ admet un *relèvement* par F,

i.e., un morphisme $u\colon c' \longrightarrow c$ tel que $Fu = f$. On demande que ce relèvement soit de surcroit *cartésien*, c'est-à-dire que pour toutes flèches g et v telles que $f \circ g = Fv$ comme dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
c'' \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[dd, "F"'] & & c \arrow[dd, "F"] \\
& c' \arrow[ur, "u"'] \arrow[dd, "F"] & \\
Fc'' \arrow[dr, "g"'] & & Fc \\
& d \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

où u est le relèvement par F de f, alors il existe une unique flèche w qui fait commuter le diagramme et telle que $Fw = g$.

Une *op-fibration* est une fibration entre les catégories opposées, i.e., $F\colon C \longrightarrow D$ est une op-fibration si et seulement si $F^{op}\colon C^{op} \longrightarrow D^{op}$ est une fibration.

Proposition 6.10. *Pour les préfaisceaux booléens, tout pullback :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D} \arrow[r, "\Sigma_q"] \arrow[d, "\Delta_p"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{B} \arrow[d, "\Delta_g"] \arrow[dl, Rightarrow, "id"'] \\
\mathrm{A} \arrow[r, "\Sigma_f"'] & \mathrm{C}
\end{tikzcd}$$

est exact si f est une fibration.

Preuve. On a déjà l'implication :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow"] & \mathrm{B} \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathrm{A} \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathrm{C}
\end{tikzcd}$$

dont il reste à montrer la réciproque.

Soit $F \in \widehat{\mathrm{A}}$, et b un objet de B. On calcule les valeurs sur b de l'image de F par chaque foncteur polynômial :

(i) par le foncteur du bas :

$$(\Delta_g \Sigma_f F)(b) = \bigvee_{\{a \mid \exists gb \to fa\}} Fa,$$

(ii) par le foncteur du haut :

$$(\Sigma_q \Delta_p F)(b) = \bigvee_{\{d \mid \exists b \to qd\}} F(p(d)) = \bigvee_{\{a', b' \mid \exists b \to b' \wedge fa' = gb'\}} F(a').$$

Soit $u\colon gb \longrightarrow fa$ tel que $Fa = 1$. On prend $v\colon a' \longrightarrow a$ un relèvement cartésien de u par f, en particulier $fv = u$. On a $fa' = gb$, donc (a', b) est bien un objet du pullback D. Comme $Fa = 1$ et qu'il existe un morphisme $a' \longrightarrow a$, alors $Fa' = 1$, ce qui montre que l'on a bien (ii). $\square$

Proposition 6.11. *Pour les préfaisceaux booléens, le carré :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D} \arrow[r, "\Sigma_q"] \arrow[d, "\Delta_p"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{B} \arrow[d, "\Delta_g"] \arrow[dl, bend left, "id"'] \\
\mathrm{A} \arrow[r, "\Sigma_f"'] & \mathrm{C}
\end{tikzcd}$$

est exact si g est une op-fibration.

Preuve. On reprend les mêmes notations qu'à la proposition 6.10. Soit $u\colon gb \longrightarrow fa$ tel que $Fa = 1$, et $v\colon b \longrightarrow b'$ un relèvement op-cartésien de u par g. On a $gb' = fa$, donc (ii). $\square$

Chapitre 7

Descente

Avec les résultats du chapitre 5 concernant les systèmes de commutation, nous pouvons désormais définir la *descente* des stratégies, qui correspond au *hiding* habituel de la sémantique des jeux. En appliquant le recollement des stratégies, introduit à la section 4.3.1 suivi de la descente, nous montrons à la section 7.5 que l'on peut définir une opération associative sur les stratégies. Dans le cas particulier des stratégies sur des séquents de la forme $A \vdash B$ à la section 7.6, cette opération définit une composition qui forme une catégorie de réponse, dont on conjecture l'équivalence avec la catégorie de réponse syntaxique de la section 2.3.

7.1 Plan du chapitre

Si l'on se donne un morphisme de descente $c\colon X \longrightarrow Y$, on veut pouvoir définir une opération qui établit une relation entre les parties acceptées sur X et les parties acceptées sur Y. Les systèmes de commutation du chapitre 5 fournissent l'outil de base pour transformer les parties sur X vers les parties sur Y, mais cette relation n'est pas fonctionnelle :

— un objet $(k, h) \in \mathrm{K}_{/X}$ est une paire composée d'un plongement ouvert $h\colon X' \hookrightarrow X$ et d'un câble $k\colon X'' \longrightarrow X'$. Il est en particulier possible que X' contienne une arête écrasée par c, mais ne contienne pas l'un de ses sommets source ou but. Dans ce cas, le câble k n'admet pas de descente par le système de commutation 5.29 ;

— et dans les cas où la descente est définie, elle ne l'est en réalité qu'à isomorphisme près.

On représente pour ces raisons la descente le long de c comme un span :

$$\mathrm{K}_{/X} \xleftarrow{\mathrm{lef}} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\mathrm{rig}} \mathrm{K}_{/Y}$$

où $\mathrm{T}_{H/c}$ est une catégorie qui possède un objet t si et seulement si $\mathrm{lef}(t)$ descend le long de c sur le câble $\mathrm{rig}(t)$.

Examinons succinctement les étapes principales de la construction de ce span. On commence en section 7.2 par définir une nouvelle catégorie double D^0, la catégorie des *tuiles de descente*, à partir de laquelle on formera la catégorie triple T^0 des *cubes de descente*. En fixant une direction dans cette catégorie triple, on obtient une catégorie double T^0_H, que l'on étend en T_H avec la méthode déjà décrite à la définition 4.4. On procède ensuite comme à la section 4.2.1 pour relativiser les tuiles de descentes à un morphisme de descente $c\colon X \longrightarrow Y$, pour former la catégorie $\mathrm{T}_{H/c}$. Cette opération de relativisation construit simultanément les deux fonctions lef et rig annoncés.

La section 7.3 est une suite de résultats assez naturels, mais dont les preuves sont essentiellement techniques, permettant de reconstruire des cubes de T^0 à partir de certaines de leurs faces.

L'intérêt de cette structure réside surtout dans le fait de pouvoir écrire à la section 7.4 la définition suivante de la descente des stratégies gagnantes, que l'on donne dès à présent :

Définition 7.1. Le foncteur $\mathcal{D}_c \colon \widehat{\mathrm{V}/X} \longrightarrow \widehat{\mathrm{V}/Y}$, appelé *descente* le long de $c \colon X \longrightarrow Y$, est la composée de :
— l'extension de Kan à droite le long de l'opposé de $\mathrm{V}/X \hookrightarrow \mathrm{K}/X$,
— la restriction le long de l'opposé de $\mathrm{lef} \colon \mathrm{T}_{H/c} \longrightarrow \mathrm{K}/X$,
— l'extension de Kan à gauche le long de l'opposé de $\mathrm{rig} \colon \mathrm{T}_{H/c} \longrightarrow \mathrm{K}/Y$,
— la restriction aux vues, i.e., la restriction le long de l'opposé de $\mathrm{V}/Y \hookrightarrow \mathrm{K}/Y$.

Graphiquement, on parcourt (de gauche à droite) :

$$\mathrm{V}/X \hookrightarrow \mathrm{K}/X \xleftarrow{\mathrm{dom}} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\mathrm{cod}} \mathrm{K}/Y \hookleftarrow \mathrm{V}/Y.$$

Remarque 7.1. La descente, vue comme un foncteur $\widehat{\mathrm{V}/X} \longrightarrow \widehat{\mathrm{V}/Y}$, est donc un foncteur polynomial au sens de Kock [30, chapitre 16], défini par la composée :

$$\mathrm{V}/X \xhookrightarrow{\Pi} \mathrm{K}/X \xleftarrow{\Delta} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{K}/Y \xhookleftarrow{\Delta} \mathrm{V}/Y.$$

Le foncteur de descente est à priori défini pour n'importe quel préfaisceau booléen sur une catégorie de vues, mais on peut montrer que les stratégies gagnantes (définies en section 4.2.2) restent stables par application de $\mathcal{D}_c$.

On peut alors utiliser cette opération en section 7.5 dans le but de définir une catégorie de stratégies, dont la composition est définie par :

Définition 7.2. Pour toutes formules A, B et C, on définit la *composition en* A, B, C comme le foncteur polynomial

$$\widehat{\mathrm{V}_{A \vdash B}} \times \widehat{\mathrm{V}_{B \vdash C}} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathrm{V}_{A \vdash B \vdash C}} \xrightarrow{\mathcal{D}_c} \widehat{\mathrm{V}_{A \vdash C}},$$

où $c \colon (A \vdash B \vdash C) \longrightarrow (A \vdash C)$ est la coupure qui écrase l'arête B, et l'isomorphisme du milieu est le recollement de stratégies donné en proposition 4.8.

Le résultat principal de la partie 7.5 réside dans le fait que cette opération est bien une loi de composition, et en particulier qu'elle vérifie bien la propriété d'associativité. Ce résultat fait l'objet du théorème 7.21, dont la preuve met en œuvre des techniques génériques fournies par le langage des foncteurs polynomiaux, qui reposent fortement sur les résultats généraux du chapitre 6.

Ces mêmes techniques servent en section 7.6 à montrer que la catégorie des stratégies que l'on vient de définir possède la structure de réponse définie au chapitre 2.

7.2 Une catégorie triple

7.2.1 Cubes de descente

On définit dans cette partie les structures annoncées précédemment :
— la catégorie double D^0 des tuiles de descente,
— et la catégorie triple T^0 des cubes de descente.

La catégorie horizontale de D^0 est la catégorie des morphismes de descente D^0_h. Sa catégorie verticale est la catégorie des câbles K^0_v. Ses cellules sont construites librement à partir

des *tuiles de descente atomiques* : il s'agit des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c_1"] \arrow[d, hook, "h"'] & X' \arrow[d, hook, "h'"] \\ Y \arrow[r, "c"'] \arrow[d, "m"'] & Y' \arrow[d, "m'"] \\ Z \arrow[r, "c_2"'] & Z' \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, hook, "h"'] \arrow[dr, "c_1"] & \\ Y \arrow[r, "c"'] \arrow[d, "m"'] & X', \\ Z \arrow[ur, "c_2"'] & \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

où les bords verticaux, non dégénérés, sont des câbles élémentaires, et où les bords horizontaux sont des morphismes de descente. D'après le théorème 5.29, le bord bas-gauche de chaque diagramme détermine le reste du carré à un isomorphisme près.

Définition 7.3. La catégorie D^0_V est la catégorie libre engendrée par le graphe dont les sommets sont les morphismes de descente, et dont les arêtes $c_1 \longrightarrow c_2$ sont les tuiles de descente élémentaires données en (7.1).

Remarque 7.2. Les bords des tuiles de descente sont des câbles : les objets de D^0_V sont donc tous connexes.

Proposition 7.1. *Les foncteurs* $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} \colon \mathrm{D}^0_V \rightrightarrows \mathrm{K}^0_v$ *s'étendent en une structure de catégorie double* D^0.

Preuve. Le seul point un peu délicat concerne la définition de la composition horizontale. On procède en fait comme pour la composition horizontale des tuiles de câbles à la section 4.1.2, en utilisant une induction sur la longueur du bord droit des tuiles de descente.

Dans le cas de deux tuiles de descente élémentaires ou triviales :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow\alpha"] & X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow\beta"] & X'' \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Z' \arrow[r] & Z'', \end{tikzcd}$$

on raisonne par cas :

— si α est triangulaire, alors β est triviale ;

— si le bord droit de α n'est pas trivial, alors le diagramme de bord gauche $\mathrm{lef}(\alpha)$ et de bord droit $\mathrm{rig}(\beta)$ obtenu en composant les morphismes de descente est encore une tuile de descente par unicité de la factorisation.

Cette opération est associative et vérifie la loi d'échange, en appliquant les mêmes preuves qu'au lemme 4.3 et qu'en proposition 4.4. □

On peut désormais définir la catégorie triple T^0 des cubes de descente, qui est une structure à trois dimensions et qui inclut les plongements ouverts, les câbles et les morphismes de descente. Contrairement aux catégories des câbles ou des tuiles de descente, que l'on avait définies en donnant leurs générateurs avec les tuiles de câbles ou de descentes élémentaires, nous définissons directement la catégorie T^0 via ses *cubes de descente*. Nous isolerons ensuite des *cubes de descente élémentaires* à la définition 7.5, et nous montrerons au théorème 7.2 que tous les cubes s'écrivent comme une composée de cubes élémentaires.

Définition 7.4. Un *cube de descente* est un quadruplet $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ tel qu'il apparait dans un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, dash] \arrow[dd] \arrow[dr, tail] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \beta \; \Nearrow \alpha"] & & U' \arrow[dd] \arrow[dr, tail] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \alpha'"] & \\
& X \arrow[rr, dash] \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \beta'"] & & X' \arrow[dd] \\
V \arrow[rr, dash] \arrow[dr, tail] & & V' \arrow[dr, tail] & \\
& Y \arrow[rr, dash] & & Y'
\end{tikzcd} \tag{7.2}$$

où les bords verticaux sont des câbles, α et α' sont des cellules dans K^0, β et β' sont des cellules dans D^0, et où les faces inférieure et supérieure commutent dans P.

Les faces inférieure et supérieure de ces cubes sont des cellules dans la catégorie double $\mathrm{Emb}^{\rightarrow}$ dont :

— les objets sont les positions connexes,
— la catégorie horizontale est la catégorie Emb,
— la catégorie verticale est la catégorie des morphismes de descente D^0_h,
— les cellules sont tous les carrés commutatifs de P entre ces morphismes.

Pour chaque cube de descente, on peut donner six fonctions qui envoient le cube sur ses faces :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^0 \arrow[rr, shift left, shift left, "\mathrm{fro}"] \arrow[rr, shift right, shift right] \arrow[dr, shift left, shift left, "\mathrm{roo}"] \arrow[dr, shift right, shift right, "\mathrm{bas}"'] \arrow[dd, shift left, shift left, "\mathrm{rig}"'] \arrow[dd, shift right, shift right, "\mathrm{lef}"] & & \mathrm{D}^0_2 \arrow[dr, shift left, shift left, "\mathrm{roo}"] \arrow[dr, shift right, shift right, "\mathrm{bas}"'] \arrow[dd, shift left, shift left] \arrow[dd, shift right, shift right] & \\
& \mathrm{Emb}^{\rightarrow} \arrow[rr, shift left, shift left, "\mathrm{bac}"] \arrow[rr, shift right, shift right] \arrow[dd, shift left, shift left] \arrow[dd, shift right, shift right] & & \mathrm{D}^0_h \arrow[dd, shift left, shift left] \arrow[dd, shift right, shift right] \\
\mathrm{K}^0_2 \arrow[rr, shift left, shift left] \arrow[rr, shift right, shift right] \arrow[dr, shift left, shift left] \arrow[dr, shift right, shift right] & & \mathrm{K}^0_v \arrow[dr, shift left, shift left] \arrow[dr, shift right, shift right] & \\
& \mathrm{Emb} \arrow[rr, shift left, shift left] \arrow[rr, shift right, shift right] & & \mathrm{P}_0
\end{tikzcd}$$

où les commutations évidentes sont vérifiées. Les noms de ces fonctions proviennent des faces qu'elles sélectionnent : fro (*front*, face avant), bac (*back*, face arrière), roo (*roof*, face supérieure), bas (*base*, face inférieure), lef (*left*, face gauche), rig (*right*, face droite).

On peut par ailleurs définir des compositions dans chacune des trois directions de la catégorie pour obtenir :

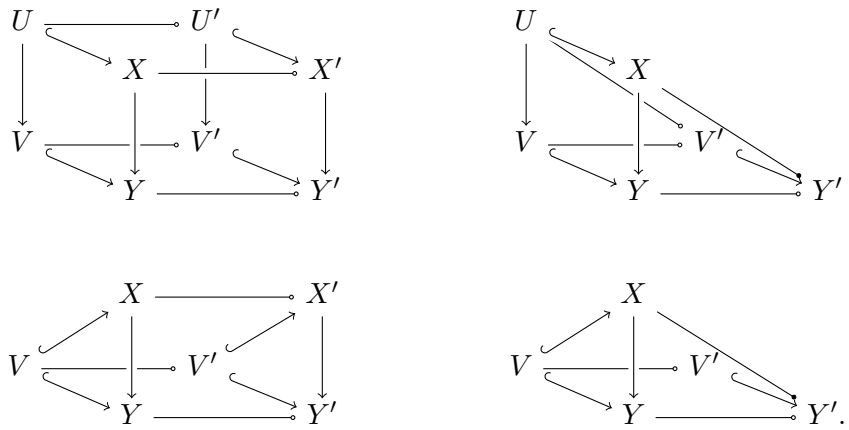
Remarque 7.3. Les cubes de descente forment une catégorie triple T^0, i.e., un objet catégorie dans DCat.

Les cellules triples de T^0 sont donc les cubes dont :

— les faces inférieure et supérieure sont des morphismes dans $\mathrm{Emb}^{\rightarrow}$;
— les faces gauche et droite sont des cellules doubles dans K^0 ;
— les faces avant et arrière sont des cellules doubles dans D^0_h.

Une propriété essentielle des cubes de descente est qu'ils admettent une unique décomposition en *cubes élémentaires*, ce qui est formalisé par le théorème 7.2.

Définition 7.5. Un *cube de descente élémentaire* est un cube de descente de l'une des formes suivantes, où toutes les arêtes verticales représentées sont des câbles élémentaires :



Les cubes de descente élémentaires forment un graphe T^e, dont les sommets sont les morphismes dans $\mathrm{Emb}^{\rightarrow\bullet}$, les arêtes étant les cubes de descente élémentaires, notre convention étant que la source est la face du haut et le but la face du bas.

De même, les cubes de descente forment un graphe $\mathrm{roo}, \mathrm{bas}\colon \mathrm{T}^0 \rightrightarrows \mathrm{Emb}^{\rightarrow\bullet}$, notre convention étant que roo est la fonction source et bas la fonction but.

On a de plus une inclusion évidente de graphes $I\colon \mathrm{T}^e \hookrightarrow \mathrm{T}^0$. Or T^0 forme une catégorie ; on obtient donc par propriété universelle un unique foncteur $I^*\colon (\mathrm{T}^e)^* \longrightarrow \mathrm{T}^0$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^e \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "I"'] & (\mathrm{T}^e)^* \arrow[d, "I^*"] \\ & \mathrm{T}^0 \end{tikzcd}$$

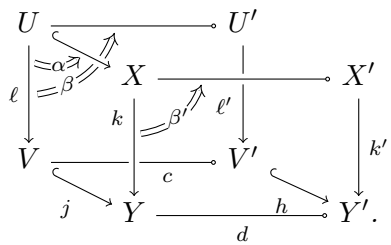
de graphes, où $(\mathrm{T}^e)^*$ est la catégorie libre engendrée par T^e, i.e., ses objets sont ceux de T^e et ses morphismes sont les chemins dans T^e.

La propriété essentielle évoquée plus haut est :

Théorème 7.2. *Le foncteur I^* est un isomorphisme, identité sur les objets.*

On a besoin de quelques lemmes.

Lemme 7.3. *Soient un carré commutatif $(c, d)\colon j \longrightarrow h$ dans $\mathrm{Emb}^{\rightarrow\bullet}$, $\alpha\colon \ell \longrightarrow k$ une tuile de câbles dans K^0_H et $\beta\colon \ell \longrightarrow \ell'$ et $\beta'\colon k \longrightarrow k'$ des tuiles de descente dans D^0_H, comme représenté dans*



Si k et ℓ sont tous deux des câbles élémentaires, alors $|\ell'| = |k'|$, i.e., k' est trivial ssi ℓ' l'est.

Preuve. Si k' est trivial, alors d écrase l'arête active du coup sous-jacent à k. Or, ℓ n'étant pas trivial, V contient cette arête active, qui est donc écrasée par c aussi : ℓ' est trivial.

Si k' n'est pas trivial, l'arête active du coup sous-jacent n'est pas écrasée par d, donc *a fortiori* pas non plus par c : ℓ' n'est pas trivial. □

Lemme 7.4. *Il n'existe pas de cube de descente de la forme*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & U' \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & \\
& X \arrow[rr] \arrow[dd] & & X' \arrow[dd] \\
& & V' \arrow[dr, hook] & \\
& Y \arrow[rr] & & Y' \arrow[dd, "k'"] \\
W \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, hook] & & W' \arrow[dr, hook] & \\
& Z \arrow[rr, "c"'] & & Z',
\end{tikzcd}$$

où les arêtes verticales $k\colon Y \longrightarrow Z$, $k'\colon Y' \longrightarrow Z'$ et $V' \longrightarrow W'$ sont des câbles élémentaires.

Preuve. S'il en existait un, on aurait un cône d'épimorphismes qui ferait commuter le rectangle

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[r] & V' \arrow[d, hook] \\
W \arrow[r, hook] & Y \arrow[r] & Y'.
\end{tikzcd}$$

(Les câbles sont épis d'après lemme 4.2, et les morphismes de descente également d'après les lemmes 5.9 et 5.17.)

Or, le câble élémentaire $k\colon Y \longrightarrow Z$, descendant en un câble élémentaire $k'\colon Y' \longrightarrow Z'$ non trivial, le morphisme de descente $c\colon Z \longrightarrow Z'$ n'écrase pas son arête active.

L'arête active de k est nécessairement présente dans W : si ce n'était pas le cas, alors W' ne contiendrait pas non plus l'arête active de k', ce qui contredirait le fait qu'il existe une tuile de câbles élémentaire sur la face de droite.

Pour admettre une tuile de câbles $id_W \longrightarrow k$ depuis un câble trivial, Y doit contenir deux arêtes, disons e_1 et e_2, s'envoyant sur la même arête e par k, l'une, disons e_1 avec une occurrence vide et l'autre avec une occurrence alternante. Ces deux arêtes survivent à la descente et s'envoient respectivement sur e'_1 et e'_2 dans Y'. L'image de $W \hookrightarrow Y$, doit de plus contenir e_1 mais pas e_2, donc celle de $W \hookrightarrow Y \longrightarrow Y'$ contient e'_1 mais pas e'_2. De même, l'image de $V' \hookrightarrow Y'$ doit contenir e'_2 mais pas e'_1 (par définition du câble élémentaire $V' \longrightarrow W'$, celui-ci n'étant pas un câble trivial).

Revenons maintenant au rectangle ci-dessus. Comme il commute, les images des deux morphismes doivent coïncider. Cependant, l'une contient e'_1 mais pas e'_2 et l'autre contient e'_2 mais pas e'_1 : contradiction. □

Lemme 7.5. *Il n'existe pas de cube de descente de la forme*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & U' \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & \\
& X \arrow[rr] \arrow[dd] & & X' \arrow[dd] \\
V \arrow[rr] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & V' \arrow[dd] & \\
& Y \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y' \arrow[dd] \\
W \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & W' \arrow[dr, hook] \arrow[ur, hook] & \\
& Z \arrow[rr] & & Z'
\end{tikzcd}$$

où les arêtes verticales $V \longrightarrow W$, $Y \longrightarrow Z$, $Y' \longrightarrow Z'$ et $V' \longrightarrow W'$ sont des câbles élémentaires.

Preuve. Comme $k\colon Y \longrightarrow Z$ descend en un câble élémentaire $k''\colon Y' \longrightarrow Z'$, alors $c\colon Z \longrightarrow Z'$ n'écrase pas son arête active e. Comme $k'\colon V \longrightarrow W$ est aussi un câble élémentaire, on déduit de l'existence de la tuile de câbles $k' \longrightarrow k$ que W contient e. On en déduit aussi que e admet un antécédent e_1 par k', qui admet une occurrence alternante.

Or, l'existence de la tuile de câbles $id_{W'} \longrightarrow k''$ assure que e admet un autre antécédent que e_1 par k, disons e_2, qui est munie de l'occurrence vide. Ces deux arêtes survivent à la descente et ont pour images respectives e'_1 et e'_2 dans Y'. Par construction, W' contient e'_2 mais pas e'_1. En revanche, l'image de $V \hookrightarrow Y \longrightarrow Y'$ contient e'_1 mais pas e'_2. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[d] & V' \arrow[r] & W' \arrow[d] \\
Y \arrow[rr] & & Y'
\end{tikzcd}$$

ne commute donc pas, puisque les deux chemins n'ont pas la même image.

Or, l'existence supposée du cube de descente implique que, préfixé par $U \longrightarrow V$, ce même diagramme commute, ce qui est impossible puisque $U \longrightarrow V$ est épi. □

Lemme 7.6. *Si l'on dispose de morphismes sous la forme :*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & U' \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & \\
& X \arrow[rr] \arrow[dd] & & X' \arrow[dd] \\
V \arrow[rr] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & V' \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & \\
& Y \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y' \arrow[dd] \\
W \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & W' \arrow[dr, hook] & \\
& Z \arrow[rr] & & Z'
\end{tikzcd}$$

tels que :

— *le cube extérieur est un cube de descente ;*

— *et les faces gauche, droite, avant et arrière commutents ;*

alors le carré

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[d] & V' \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & Y'
\end{tikzcd}$$

commute.

Preuve. Le carré en question, préfixé par $U \longrightarrow V$, commute. Comme ce morphisme est épi, il commute. □

Preuve du théorème 7.2. Ce foncteur est évidemment l'identité sur les objets ; il suffit donc de montrer qu'il est plein et fidèle. Pour cela, on montre qu'étant donné un cube de descente $\theta\colon e \longrightarrow e'$, il existe un unique chemin $\rho\colon e \longrightarrow e'$ dans T^e tel que $I^*(\rho) = \theta$. En posant $\theta = (\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ comme à l'équation (7.2), on procède par induction sur la longueur du câble $k\colon X \longrightarrow Y$.

On montre facilement que si k est la liste vide, alors θ est le cube trivial : c'est donc l'image du chemin vide et de lui seul. Sinon, on a quatre cas.

Soit $\alpha_k\colon k' \longrightarrow k$ la première tuile de câbles de la face gauche du cube et soit $\gamma_k\colon k \longrightarrow k''$ la première tuile de descente de la face avant.

Si k' et k'' sont tous deux des câbles élémentaires (i.e., non-triviaux), alors la première tuile de descente de la face du fond est de la forme $\alpha_b\colon k' \longrightarrow k_b$. Par le lemme 7.3, k_b est un câble élémentaire. Par le lemme 7.5, la première tuile de câbles du bord droit du cube est de la forme $\beta_r\colon k_b \longrightarrow k''$. On conclut par le lemme 7.6 et par hypothèse d'induction.

Si k' est non-trivial mais k'' l'est, alors par le lemme 7.3, la première tuile de la face du fond est de la forme $\alpha_b\colon k' \longrightarrow id_{W'}$. On conclut par le lemme 7.6 et par hypothèse d'induction.

Si k' est trivial mais pas k'', alors par le lemme 7.4 la première tuile de la face de droite est de la forme $\beta_r\colon id_{W'} \longrightarrow k''$ et on conclut par le lemme 7.6 et par hypothèse d'induction.

Si k' et k'' sont tous deux triviaux, on conclut par le lemme 7.6 et par hypothèse d'induction. □

7.2.2 Extension verticale des cubes de descente

Notation 7.1. Pour une catégorie double D^0, on rappelle qu'on note D^0_V et D^0_H les catégories obtenues en considérant les cellules doubles comme des morphismes respectivement verticaux et horizontaux.

De manière similaire, on note T^0_V, T^0_H et T^0_D les catégories doubles obtenues en considérant les cellules triples de T^0 comme des cellules doubles dans les plans orthogonaux aux directions verticale, horizontale et frontale.

En particulier, T^0_H est une catégorie double dont les objets sont les morphismes de descente, les morphismes horizontaux sont les morphismes de $\mathrm{Emb}^{\rightarrow}$, les morphismes verticaux sont les cellules de D^0, et dont les cellules doubles sont les cubes de descente.

Proposition 7.7. *La catégorie double* T^0_H *a les décompositions.*

Preuve. Par induction sur les cubes de descente, en utilisant la décomposition en cubes élémentaires du théorème 7.2. □

On peut donc appliquer à cette catégorie double la construction de la définition 4.4, ce qui nous donne une catégorie T_H dont :

— les objets sont les cellules β de D^0,

— les morphismes $\beta \longrightarrow \beta'$ sont les cubes de descente minimaux dont la face du fond est β et la face avant une tuile β'_0, préfixe de β'.

De même que pour les vues en section 4.2.1, on définit pour tout morphisme de descente $c\colon X \longrightarrow Y$ la comma-catégorie $\mathrm{T}_{H/c}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{H/c} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow"] & 1 \arrow[d, "\ulcorner c \urcorner"] \\
\mathrm{T}_H \arrow[r, "\mathrm{bas}"'] & \mathrm{Emb}^{\rightarrow}.
\end{tikzcd}$$

Les objets de $\mathrm{T}_{H/c}$ sont des diagrammes de la forme :

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow"] & V' \arrow[d] \\
U \arrow[r] \arrow[d, hook] & V \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "c"'] & Y
\end{tikzcd}$$

avec α une cellule de D^0, et les morphismes sont des paires :

$$\begin{tikzcd}
 & U_2' \arrow[rr] \arrow[dd] & & V_2' \arrow[dd] \\
U_1' \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[ur] & & V_1' \arrow[d] \arrow[ur] & \\
U_1 \arrow[rr] \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & V_1 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\
 & U_2 \arrow[rr] \arrow[dl, hook] & & V_2 \arrow[dl, hook] \\
X \arrow[rr, "c"'] & & Y &
\end{tikzcd}$$

formées d'un cube de descente minimal dans T_H et d'un morphisme dans $\mathrm{Emb}^{\rightarrow}$.

Par propriété universelle des comma-catégories, elle admet deux foncteurs :

$$\mathrm{K}/X \xleftarrow{\mathrm{dom}} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\mathrm{cod}} \mathrm{K}/Y,$$

qui envoient chaque morphisme comme dessiné précédemment respectivement sur ses faces de gauche et droite. Ces foncteurs existent bien, car en considérant les cubes de descente élémentaires (définition 7.5, on remarque que les foncteurs qui envoient chaque cube sur respectivement sur sa face gauche et sa face droite préservent la minimalité : l'image d'un cube minimal est une tuile minimale.

Remarque 7.4. La notation $\mathrm{T}_{H/c}$ utilisée ici ne correspond pas à une *slice* de la forme C/c où c serait un objet d'une catégorie C. En termes de comma-catégories, il serait usuel de noter $\mathrm{T}_{H/c}$ sous la forme $\mathrm{bas} \downarrow id_c$. La notation $\mathrm{T}_{H/c}$ correspond ici mieux à l'intuition que les tuiles de descentes considérées sont toutes construites sur une même base, donnée par le morphisme de descente c.

7.3 Reconstructions de cubes de descente

Dans de nombreux cas, on peut à partir de certaines faces et certaines arêtes reconstruire l'intégralité d'un cube de descente (mais pas nécessairement de façon unique). Intuitivement, on peut mentionner par exemple le fait que dans un cube de descente, le câble avant-gauche permet presque toujours de déduire un cube entier :

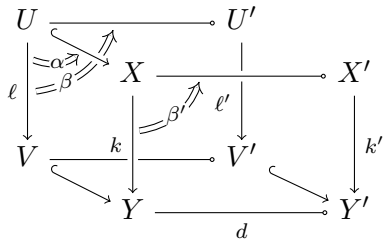
— la tuile de descente dont il est le domaine se déduit par commutation avec les morphismes de descente,
— le domaine de la face arrière est un sous-câble, et le reste de la face arrière se construit de nouveau par commutation.

En général, il reste alors à prouver que ces constructions peuvent se faire de façon compatible avec certaines autres faces données à priori par hypothèse, comme par exemple au lemme 7.9.

Dans cette partie, on énonce donc de tels résultats de reconstruction de cubes qui seront utilisés par la suite dans les preuves des propriétés de la descente des stratégies.

7.3.1 Face de droite

Lemme 7.8. *Tout diagramme*

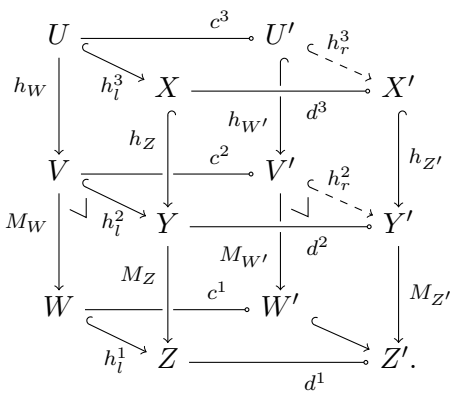


dans T^0 *se complète de manière unique en un cube de descente.*

Preuve. Par une induction sur α, il suffit de montrer le cas où α est une tuile de câbles élémentaire. On procède ensuite par cas sur la forme de β et β'. D'après le lemme 7.3, si k' est trivial, alors ℓ' l'est aussi et le résultat est trivial. Pour traiter le cas où k' n'est pas trivial, on commence par montrer que tout diagramme comme la partie solide ci-dessous, où

— (h_Z, M_Z) est un câble élémentaire, et donc $(h_{Z'}, M_{Z'})$ aussi,
— h_W et $h_{W'}$ sont des plongements de composantes connexes,
— mais M_W n'est pas forcément un coup : M_W peut être de la forme $W + W \longrightarrow W$ lorque h_l^1 ne contient pas l'arête active de M_Z. On dit dans ce cas que M_W est une *duplication* ;

se complète avec la partie en pointillés :



Dans ce diagramme, on a facilement que si M_W est un coup (respectivement une duplication), alors $M_{W'}$ aussi.

On construit $h_r^2 \colon V'' \longrightarrow V$ grâce au lemme 3.20 : comme les face avant, arrière et gauche commutent, les coups $M_{W'}$ et $M_{Z'}$ jouent la même occurrence sur la même arête active, donc il existe une unique manière de compléter la face de droite avec le plongement h_r^2. Il s'agit

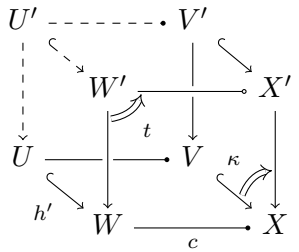
d'un pullback car le pullback de $M_{Z'}$ est encore un coup qui joue la même occurrence sur la même arête, donc est isomorphe à $M_{W'}$.

Les morphismes de descente sur la face supérieure préservent les composantes connexes : on déduit donc de l'existence de h_l^3 celle de h_r^3, car h_W et $h_{W'}$ sélectionnent la même composante connexe (modulo descente). L'unicité de h_r^3 vient du fait que $h_{Z'}$ est mono.

Retournons au cas où k' n'est pas trivial. Si ℓ non plus n'est pas trivial, alors on a un diagramme ci-dessus avec M_W et $M_{W'}$ des coups, qui donne le complètement attendu. Si à présent ℓ est trivial, alors M_W est une duplication et par conséquent $M_{W'}$ aussi. On complète donc facilement le diagramme ci-dessus en un cube de descente de la forme en bas à gauche dans la définition 7.5. □

7.3.2 Face arrière

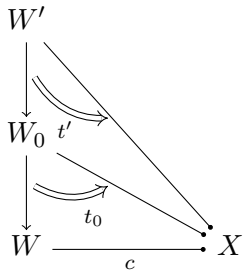
Lemme 7.9. *Si t est une tuile de descente et κ est une tuile de câbles comme dans*



alors on peut construire un cube de descente comme indiqué en pointillés.

Preuve. On prouve d'abord le résultat par induction quand $\kappa = id$, puis on l'étend, de nouveau par induction, au cas général.

Lorsque $\kappa = id$, t se décompose en une suite de tuiles de descente triangulaires (de bord droit trivial), i.e., c écrase les arêtes actives de tous les coups de $\operatorname{lef} t$. On procède alors pour ce cas par induction sur t en la décomposant en :



où t' est une tuile de descente et t_0 est une tuile élémentaire. Le bord gauche de cette tuile élémentaire se décompose en $\operatorname{dom} t_0 = m_0 h_0$ où m_0 est un coup élémentaire et h_0 est un plongement de composante connexe : comme c préserve les composantes connexes et que W est connexe, alors $\operatorname{dom} m_0$ est connexe et h_0 est trivial.

Par pullback de m_0 le long du plongement $U \hookrightarrow W$, on construit m_1 dont le domaine peut à priori ne pas être connexe. Ce cas se produit lorsque l'arête active est écrasée par c et n'a pas de sommet but dans U : ceci contredit le fait que c est une vraie coupure.

Le morphisme m_1 est donc soit un isomorphisme, soit un coup. Dans le premier cas, on peut poser le cube de descente :

$$\begin{tikzcd}
 & W_0 \arrow[dd, "m_0 id"'] \arrow[ddrr] & & \\
U \arrow[ur, hook] \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & V \arrow[dr, hook] & \\
 & W \arrow[rr, "c"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Dans le second cas, il existe un morphisme de câbles $m_1 id \longrightarrow m_0 id$. On peut donc poser un cube de descente de la forme

$$\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[dd, "m_1 id"'] \arrow[dr, hook] \arrow[ddrr] & & & \\
 & W_0 \arrow[dd, "m_0 id"'] \arrow[ddrr] & & \\
U \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & V \arrow[dr, hook] & \\
 & W \arrow[rr, "c"'] & & X
\end{tikzcd}$$

et terminer la construction par induction.

On passe ensuite au cas où la tuile de câbles κ n'est plus nécessairement triviale, par induction sur κ. On écrit $\kappa = \kappa_0 \bullet \kappa'$ où κ_0 est une tuile de câbles élémentaire. Le bord droit de κ_0 est par définition toujours non trivial, et comme $\operatorname{cod} t = \operatorname{dom} \kappa$, on décompose t de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\Uparrow t'"] & & X' \arrow[dd] \\
W_1 \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Uparrow t_1"] & & \\
W_0 \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Uparrow t_0"] & & X_1 \arrow[d] \\
W \arrow[rr, "c"'] & & X
\end{tikzcd}$$

où :

— t_0 est une suite de tuiles de descente élémentaires de bord droit trivial,

— t_1 est une tuile de descente élémentaire de bord droit $\operatorname{cod} \kappa_0$,

— t' est une tuile de descente de bord droit $\operatorname{cod} \kappa'$.

Grâce au cas précédent, on construit un premier cube de descente de face avant t_0 et de face droite la tuile identité.

Il faut ensuite construire le cube derrière t_1. On décompose cette tuile élémentaire en :

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "h_2"'] & W_1 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, hook, "h_1"'] & X_1 \arrow[d, hook, "h_0"] \\
U_0' \arrow[r, hook] \arrow[d, "m_2"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & W_0' \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "m_1"'] & X_0' \arrow[d, "m_0"] \\
U_0 \arrow[r, hook] & W_0 \arrow[r, "d_0"] & X
\end{tikzcd}$$

et on prend, comme indiqué, le pullback de m_1 le long du plongement $U_0 \hookrightarrow W_0$. Selon les cas :

— soit U_0' est connexe, donc h_2 est un plongement trivial ;

— soit U_0' n'est pas connexe, mais alors comme précédemment W_0' et X_0' ne sont pas non plus connexes : on prend pour h_2 le seul plongement de composante connexe compatible avec h_0.

Quitte à compléter le rectangle à gauche (si m_2h_2 est un isomorphisme, afin d'obtenir une tuile de câbles négative), alors on définit bien une tuile de câbles au-dessus de U_0. D'après le lemme 7.8, elle se complète de manière unique en un cube de descente de face avant t_1 et de face droite κ_0.

On conclut en précomposant verticalement ce cube avec le cube de face avant t' et de face droite κ' obtenu par hypothèse d'induction. □

Corollaire 7.10. *Le foncteur* $\mathrm{rig}\colon \mathrm{T}_{H/c} \longrightarrow \mathrm{K}/Y$ *qui à chaque tuile associe son bord droit est une fibration.*

7.3.3 Face avant

Les résultats de reconstruction précédents utilisent tous la structure de la face avant afin de construire le cube de descente en entier : intuitivement, le bord gauche de cette face est le câble qui contient le plus d'information en espace (toutes les autres positions de départ sont plus petites en un certain sens) et sur la partie (le bord gauche d'une tuile de descente élémentaire et le bord droit d'une tuile de câbles élémentaire ne sont jamais triviaux).

On montre cependant dans cette partie un résultat de reconstruction de la face avant d'un cube, à partir d'un ensemble de tuiles de descente pour la face du fond, *compatibles* en un certain sens. Ce résultat, même si nous ne parvenons pas à le formuler de cette façon, ressemble néanmoins fortement à une preuve d'amalgamation dans un champ [48].

On définit d'abord la *restriction* d'une tuile de descente à un câble. Soit t une telle tuile, et k un préfixe de $\mathrm{rig}\, t$: on note $t_{|k}$ la tuile de descente obtenue comme le plus grand préfixe de t de bord droit k.

Soient t_1 et t_2 deux tuiles de descente de la forme :

$$\begin{tikzcd}
U_i' \arrow[r] \arrow[d, "k_i'"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow t_i"] & S_i' \arrow[d, "k_i"] \\
U_i \arrow[r, "c"'] & S
\end{tikzcd}$$

sont *compatibles* si pour tout préfixe commun k de k_1 et k_2, alors $t_{1|k} = t_{2|k}$.

On définit enfin les *vues-tuiles* :

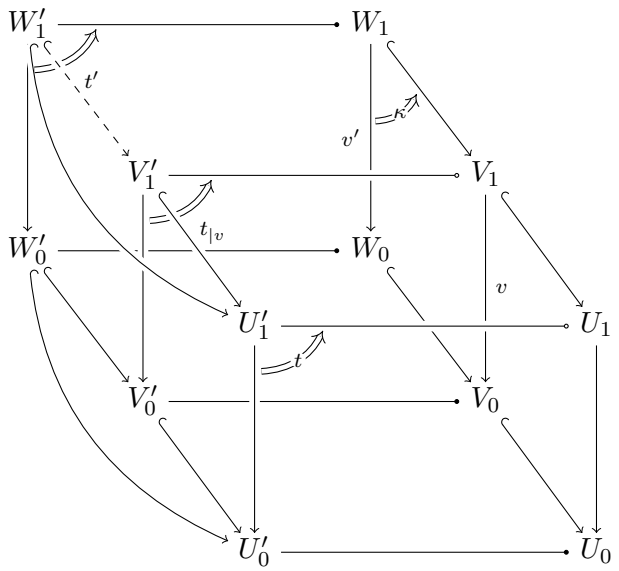
Définition 7.6. Une *vue-tuile* est une tuile de descente dont le bord droit est une vue. Si t est une tuile de descente, on dit que t' est une vue-tuile de t s'il existe un morphisme $t' \longrightarrow t$ dans T_H.

On note V_t la sous-catégorie pleine de T_H des vues-tuiles.

Proposition 7.11. *Le foncteur* $\mathrm{rig}\colon \mathrm{V}_t \longrightarrow \mathrm{V}$ *est une fibration.*

Preuve. Le relèvement cartésien d'une tuile de vues $v \longrightarrow \mathrm{rig}\, t$, où t est une vue-tuile, est le cube donné par le lemme 7.9, dont la face arrière est $t_{|v}$.

Le fait que ce relèvement est cartésien signifie que si l'on se donne deux cubes :



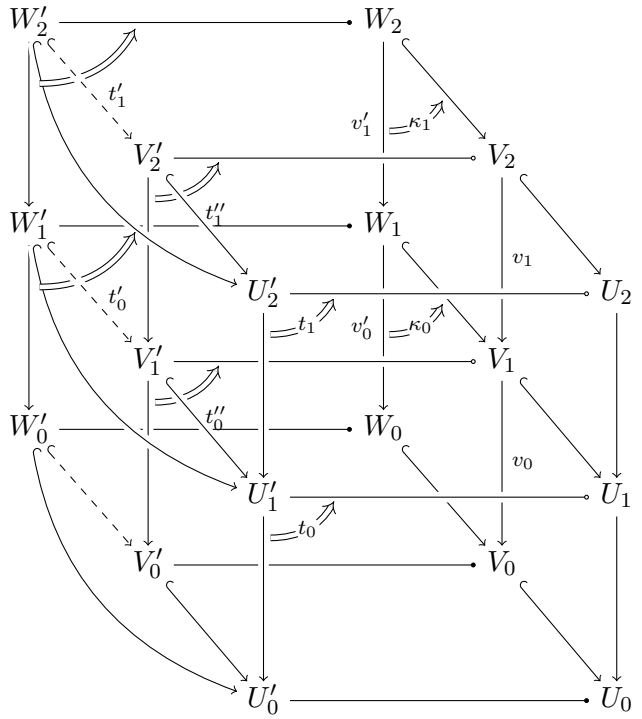
où le cube avant est le relèvement de $v \longrightarrow \mathrm{rig}\, t$, alors on a une unique factorisation comme indiqué en pointillés. (Les cubes représentés sur le diagramme sont en réalité des morphismes entre tuiles de descente dans la catégorie T_H, avec extensions verticales.) Comme V_0 est déjà un séquent, on peut remarquer que W_0 est un séquent isomorphe.

On procède ensuite par induction sur la tuile de descente t. Lorsque t est triviale, alors t' est l'identité : le cube $t' \longrightarrow t_{|v}$ est le cube $id_{t'}$.

Pour l'étape d'induction, on décompose verticalement t en $t = t_0 t_1$ où la tuile supérieure t_1 est élémentaire. Le morphisme $t' \longrightarrow t$ dans T_H est :

— soit un morphisme $t' \longrightarrow t_0$ dans la catégorie étendue verticalement T_H. Dans ce cas, on applique directement l'hypothèse d'induction ;
— soit un morphisme $t' \longrightarrow t$ dans la catégorie T^0_H, sans extension verticale.

Dans ce second cas, on peut décomposer les cubes en :



de la façon suivante :

1. $t_0 t_1$ est la décomposition de t où t_1 est élémentaire. Le bord droit de t_1 peut en particulier être trivial ;
2. $v_0 v_1$ est l'unique décomposition de v telle qu'il existe des tuiles de câbles $v_0 \longrightarrow \operatorname{rig} t_0$ et $v_1 \longrightarrow \operatorname{rig} t_1$;
3. de même, $\kappa_0 \kappa_1$ est l'unique décomposition de κ qui fait commuter la face droite. La tuile κ_1 est soit triviale, quand $\operatorname{rig} t_1$ est triviale, soit élémentaire ;
4. $t_{|v}$ est décomposée en $t''_1 t''_0$;
5. t' est décomposée en $t'_1 t'_0$.

En appliquant l'hypothèse d'induction sur la partie inférieure, on obtient un morphisme $t'_0 \longrightarrow t''_0$ dans T^0_H, qu'il reste à précomposer par un cube de descente $t'_1 \longrightarrow t''_1$ que l'on définit à présent.

Comme la tuile t_1 est élémentaire et qu'il existe des cubes de descente $t'_1 \longrightarrow t_1$ et $t''_1 \longrightarrow t_1$, alors les tuiles t'_1 et t''_1 sont élémentaires ou triviales. Or, t'_1 n'est pas triviale, ce cas ayant déjà été traité plus haut car il existerait alors un cube $t' \longrightarrow t_0$. (Son bord droit peut cependant être trivial.)

On décompose les bords gauches de t'_1 et t''_1 en :

$$\begin{tikzcd} W'_2 \arrow[r, hook, "h'"] \arrow[rr, bend right, "\operatorname{rig} t'_1"'] & W'_3 \arrow[r, "m'"] & W'_1 \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} V'_2 \arrow[r, hook, "h''"] \arrow[rr, bend right, "\operatorname{rig} t''_1"'] & V'_3 \arrow[r, "m''"] & V'_1. \end{tikzcd}$$

Le pullback de m'' le long du plongement $W'_1 \hookrightarrow V'_1$ est, par le lemme du pullback, le coup m'. (Au passage, t''_1 n'est donc pas triviale.)

La position W'_3 est connexe si et seulement si V'_3 l'est. Lorsqu'elles sont connexes, les plongements h' et h'' sont triviaux. Dans le cas contraire, le fait que la descente préserve les composantes connexes assure, grâce au choix fait sur la tuile κ_1, que h' et h'' sélectionnent la

même composante connexe, et donc qu'il existe un plongement $W_2' \hookrightarrow V_2'$ qui fait commuter le cube de descente. $\square$

Lemme 7.12. *Soit k_r un câble $W' \longrightarrow W$. On se donne un morphisme de descente $c_1 \colon V \longrightarrow\!\!\!\!\bullet\; W$. Pour chaque séquent $S \in \mathrm{Sq}(W)$, on se donne un carré commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
U_S \arrow[r, "c_S"] \arrow[d, hook, "h_S"'] & S \arrow[d, hook] \\
V \arrow[r, "c_1"'] & W.
\end{tikzcd}$$

Pour chaque séquent $S_i' \in \mathrm{Sq}(W')$, on se donne enfin une tuile de câbles κ_i et une tuile de descente t_i comme dans :

$$\begin{tikzcd}
U_i' \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow t_i"] & & S_i' \arrow[dd, "v_i"'] \arrow[dr, hook] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow \kappa_i"] & \\
& & & W' \arrow[dd, "k_r"] \\
U_S \arrow[rr, "c_S"] \arrow[dr, hook, "h_S"'] & & S \arrow[dr, hook] & \\
& V \arrow[rr, "c_1"'] & & W
\end{tikzcd}$$

où les t_i sont deux à deux compatibles.

Il existe alors une tuile de descente t dont les t_i sont les restrictions par la fibration rig.

Avant de donner la preuve de ce résultat, nous détaillons un contrexemple à l'existence d'un recollement si l'on ne demande pas la compatibilité des tuiles de descente. On définit pour cela deux câbles k_l et k_r donnés en figure 7.1, ainsi que la coupure c :

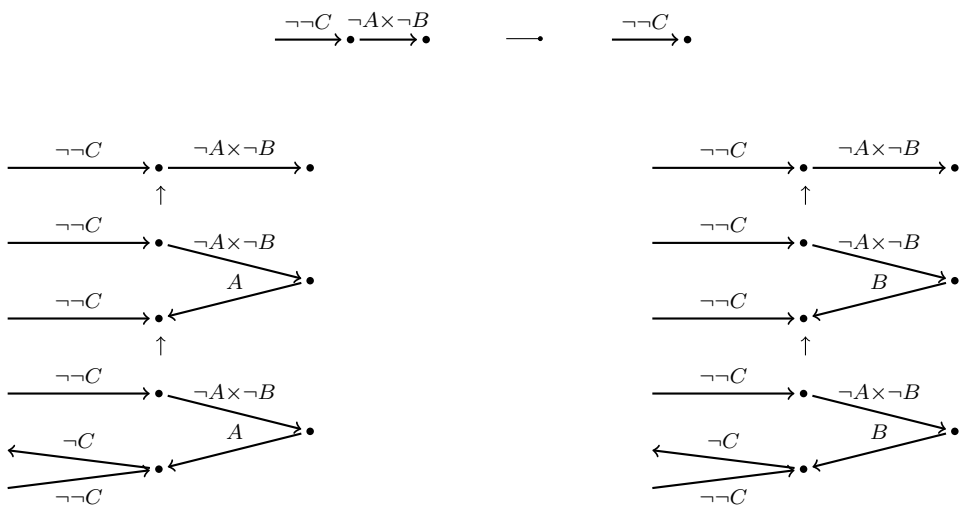


FIGURE 7.1 – Câbles k_l et k_r non recollables.

Comme k_l et k_r débutent par deux coups positifs distincts, il n'existe aucun recollement k qui possèderait des morphismes $k_l \longrightarrow k$ et $k_r \longrightarrow k$. Pourtant, leurs descentes $c(k_l)$ et $c(k_r)$ sont des vues qui se recollent, car les coups qui distinguent k_l et k_r sont des coups internes du point de vue de la descente le long de c. Ces deux câbles ne sont bien sûr pas compatibles au sens précédent, car les restrictions maximales pour le bord gauche trivial ne sont pas égales.

Preuve du lemme 7.12. On procède par induction sur le câble k_r.

Lorsque k_r est l'identité, on note S le séquent positif de W. Quitte à les réordonner, les t_i sont :

— soit les tuiles identité lorsque leur base n'est *pas* $U_S \xrightarrow{c_S} S$;

— soit, pour l'unique tuile t_0 de base $U_S \xrightarrow{c_S} S$, une suite de la forme :

$$\begin{tikzcd}
U_n \arrow[d, "m_n"'] \arrow[dr] & \\
\vdots \arrow[d, "m_2"'] & S \\
U_1 \arrow[d, "m_1"'] \arrow[ur] & \\
U_S. \arrow[uur, "c_S"'] &
\end{tikzcd}$$

On note $U_0 = U_S$. Le coup $m_1 \colon U_1 \longrightarrow U_0$ est positif, donc s'étend de manière unique en $m'_1 \colon V_1 \longrightarrow V$ le long du plongement $U_S \xhookrightarrow{h_S} V$ (corollaire 3.21). La position U_1 est positive, car sinon m_1 serait un coup qui joue sur une arête pendante : cette arête ne pourrait donc pas être une arête écrasée par c_1 (qui ne fait que des vraies coupures), ce qui contredit le fait que m_1 descend sur l'identité.

On peut donc itérer cette construction, en constatant à chaque étape que chacun des $m_j \colon U_j \longrightarrow U_{j-1}$ est positif, donc s'étend de manière unique le long du plongement $h_j \colon U_j \longrightarrow V_j$ obtenu à l'étape précédente. On forme le cube de descente κ_0 en composant verticalement les cubes de descente :

$$\begin{tikzcd}
U_{j+1} \arrow[d, "m_{j+1}"'] \arrow[r, hook, "h_{j+1}"] \arrow[dr, hook] & V_{j+1} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
U_j \arrow[r, hook, "h_j"'] \arrow[rr, hook, "m'_{j+1}"] & V_j \arrow[r] & S \arrow[r, hook] & W
\end{tikzcd}$$

pour $0 \leq j < n$.

Pour toutes les autres tuiles t_i, avec $i > 0$, alors la base de t_i est négative : les coups m_i joués par la tuile t_0 ne modifient pas la base de t_i, donc les κ_i sont des cubes de descente identités.

Pour l'étape d'induction, on décompose k_r en

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "k_r^1"] \arrow[rr, bend right, "k_r"'] & W_0 \arrow[r, "k_r^0"] & W
\end{tikzcd}$$

où k_r^1 est un câble élémentaire.

Cette décomposition induit une décomposition unique des vues v_i en $v_i = v_i^0 v_i^1$ où :

— v_i^0 est une vue de k_r^0 ;

— v_i^1 est une vue élémentaire ou triviale de k_r^1.

Pour appliquer l'hypothèse d'induction sur k_r^0, il faut définir une famille de vues-tuiles :

$$\prod_{S_j \in \mathrm{Sq}(W_0)} t'_j$$

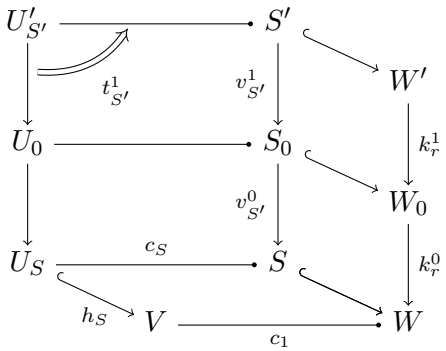
que l'on obtient par restrictions des t_i. Si S_j est un séquent de W_0, alors il existe un séquent $S_i \in \mathrm{Sq}(W')$ (pas nécessairement unique) tel que $k_r^1(S_i) = S_j$, car k_r^1 est surjectif. On pose $t'_j = t_{i|v_i^0}$. Cette définition ne dépend pas du choix de S_i car si $S_{i'}$ est un autre séquent tel que $k_r^1(S_{i'}) = S_j$, alors $v_i^0 = v_{i'}^0$ (les vues d'un câble sont déterminées de façon unique par leur domaine), et par compatibilité, les restrictions de t_i et $t_{i'}$ le long de cette vue sont égales.

La famille des t'_j est compatible, car si v est un préfixe de $\mathrm{rig}\, t_{i|v_i^0}$ alors v est également un préfixe de v_i^0 et $t_{i|v_i^0|v} = t_{i|v}$.

Ceci donne donc une tuile de descente t^0 de bord droit k_r^0 dont les restrictions sont les $t_{i|v_i^0}$. Il reste à compléter cette tuile avec une tuile t^1 de bord droit le câble élémentaire k_r^1. On distingue selon les signes de W_0 et de W'.

Le cas où W_0 et W'_0 sont toutes les deux négatives est impossible : par définition, les câbles élémentaires ont au moins une extrémité positive.

Lorsque W_0 est positive et W' est négative, alors k_r^1 est un coup qui rend la main à l'environnement. Soit S_0 le séquent positif de W_0, et S' son antécédent (unique car S_0 est positif) par k_r^1. La tuile de descente $t_{S'}$ donnée pour le séquent S' se décompose en :

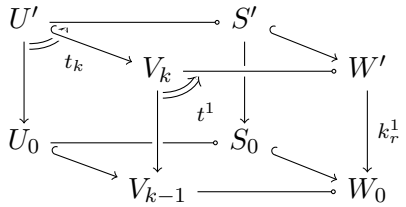


où $v_{S'}^0$ et $v_{S'}^1$ sont des vues respectivement de k_r^0 et k_r^1. On décompose inductivement la tuile de descente $t_{S'}^1$ en une suite de tuiles élémentaires $t_1 \cdots t_k$: le bord droit de la composée est $v_{S'}^1$, qui est élémentaire, donc les bords droits de toutes ces tuiles sont triviaux, sauf un. On montre qu'il s'agit du bord droit de la tuile du haut t_k. Si le bord droit de t_j n'est pas trivial, alors son domaine est négatif, donc le bord droit de la tuile suivante t_{j+1} n'est pas non plus trivial : seul le bord droit de t_k est donc non trivial.

On construit la tuile de descente t^1 cherchée :

— en procédant comme précédemment avec le cas de base pour les tuiles t_1 à t_{k-1} :

— pour la tuile t_k, on étend de la même façon le coup (positif) donné par t_k sur toute la position, et on prend pour cube de descente élémentaire le cube de la forme :



Les autres séquents S_j ne sont pas modifiés par ce coup, donc on compose avec un dernier cube de la forme :

$$\begin{tikzcd}
 & V_k \arrow[rr, dash] \arrow[dd, "t^1"] & & W' \arrow[dd, "k_r^1"] \\
X_0 \arrow[ur, hook] \arrow[rr, dash] \arrow[dr, hook] & & S_j \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\
 & V_{k-1} \arrow[rr, dash] & & W_0.
\end{tikzcd}$$

Lorsque W_0 et W' sont toutes les deux positives, k_r^1 est un coup où deux séquents internes s'échangent la main. Soit S_0 le séquent positif de W_0, et on reprend les mêmes notations que dans le cas précédent. De la même façon, les coups joués par t_{S_0} sont d'abord des coups internes, suivis d'un coup qui passe la main à un autre séquent de la position. On construit la tuile de descente t^1 cherchée :

— en procédant comme précédemment avec le cas de base pour les coups internes données par les tuiles t_1 à t_{k-1} :

— pour la tuile t_k, on étend de la même façon le coup (positif) donné par t_k sur toute la position, et on prend pour cube de descente élémentaire le cube de la forme :

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[rr, dash] \arrow[dr, hook, "t_k"'] \arrow[dd] & & S' \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & \\
 & V_k \arrow[rr, dash] \arrow[dd, "t^1"] & & W' \arrow[dd, "k_r^1"] \\
U_0 \arrow[rr, dash] \arrow[dr, hook] & & S_0 \arrow[dr, hook] & \\
 & V_{k-1} \arrow[rr, dash] & & W_0.
\end{tikzcd}$$

Pour le séquent qui reprend la main après le coup, on empile un cube de la même forme. Les autres séquents ne sont pas modifiés par ce coup, donc on compose avec un dernier cube dont la face du fond est l'identité.

Lorsque W_0 est négative et W' est positive, k_r^1 est un coup qui reprend la main depuis l'extérieur : ce cas se traite comme le cas où W_0 est positive et W' négative. □

La condition de compatibilité des vues-tuiles nécessaire pour appliquer le résultat précédent semble à priori trop forte, car les vues-tuiles à recoller sont obtenues à partir de préfaisceaux sur les tuiles de descente, qui ne donnent des vues-tuiles qu'à isomorphisme près.

On dit qu'une famille de vues-tuiles est *faiblement compatible* lorsque la condition d'égalité $t_{1|k} = t_{2|k}$ demandée pour les familles compatibles est remplacée par la donnée d'un simple isomorphisme $\iota_{k,ij} \colon t_{i|k} \cong t_{j|k}$. Lorsque l'on montre l'effectivité d'un champ, on demande habituellement que ces isomorphismes satisfassent également la *condition de cocycle*, i.e., que l'on a toutes les égalités :

$$\iota_{k,ij} = \iota_{k,il} \circ \iota_{k,jl}.$$

Dans le cas présent, cette condition est vérifiée grâce au résultat suivant :

Lemme 7.13. *Il n'existe pas d'automorphisme non trivial de tuiles de descente dans* $\mathrm{D}^0/_c$*, pour une coupure* $c \colon U \longrightarrow V$*.*

Preuve. On montre d'abord que si k est un câble, il n'existe pas d'automorphisme non trivial de k dans $\mathrm{K}^0/_{\operatorname{cod} k}$. Pour un câble élémentaire, un automorphisme s'écrit :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "h"] \arrow[dd, "\iota_l"'] & V \arrow[dd, "\iota_r"'] \arrow[dr, "m"] & \\
 & & W \\
U \arrow[r, hook, "h"'] & V \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

où m est un coup et h un plongement de composante connexe. D'après le lemme 3.22, ι_r est l'identité. Comme h est mono, ι_l est également l'identité.

Ce résultat s'étend à tous les câbles par induction.

On considère un tel automorphisme d'une tuile t, dont le bord inférieur est c. Cet automorphisme est donné par un automorphisme de k_l et un automorphisme de k_r, qui sont triviaux d'après la remarque précédente. □

Lemme 7.14. *Soit $c\colon U \longrightarrow V$ un morphisme de descente entre positions connexes.*

Si $(t_i)_{0\leq i<n}$ est une famille faiblement compatible acceptée par un préfaisceau booléen $\gamma \in \widehat{\mathrm{T}_{H/c}}$, alors il existe une famille compatible isomorphe $(t'_i)_{0\leq i<n}$ également acceptée par γ.

Preuve. Ce résultat provient de la stabilité de γ par composition par les isomorphismes, et de l'absence d'automorphismes de vues-tuiles non triviaux.

Formellement on traite d'abord le cas où tous les t_i sont élémentaires par induction sur la structure d'arbre de V. Le résultat se généralise ensuite par induction sur le multiensemble des longueurs des tuiles t_i.

Lorsque toutes les tuiles de descente sont élémentaires, soit S le séquent *disponible* de V, i.e., le séquent racine quand V est positive, ou l'unique séquent avec une arête sans but lorsque V est négative (l'unicité de cette arête provient du fait que V est connexe). Soit t_0 l'une des tuiles de descente sur S :

$$\begin{tikzcd}
U'_S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow t_0"] & S' \arrow[d] \\
U_S \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Pour chaque autre tuile t_1 sur S, il existe un isomorphisme $\iota\colon t_0 \cong t_1$. Soit $t'_1 := t_1 \cdot \iota$: cette tuile est acceptée par γ, et $t'_1 = t_0$. On procède de même pour toutes les autres tuiles sur S. Les tuiles sur les autres séquents sont triviales. □

7.4 Descente des stratégies gagnantes

7.4.1 Préservation de l'innocence et du déterminisme

Pour une coupure $c\colon X \longrightarrow Y$, le foncteur de descente $\mathcal{D}_c$ (définition 7.1) définit successivement à partir d'une stratégie dans $\widehat{\mathrm{V}/X}$ des préfaisceaux booléens dans $\widehat{\mathrm{K}/X}$, $\widehat{\mathrm{T}_{H/c}}$, $\widehat{\mathrm{K}/Y}$ et enfin $\widehat{\mathrm{V}/Y}$. Ainsi, si α est une stratégie dans $\widehat{\mathrm{V}/X}$, on note β, γ, δ, ϵ les préfaisceaux booléens obtenus à chaque étape dans

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{V}/X & \xhookrightarrow{\Pi} & \mathrm{K}/X & \xleftarrow{\Delta} & \mathrm{T}_{H/c} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathrm{K}/Y & \xhookleftarrow{\Delta} & \mathrm{V}/Y \\
\alpha & \mapsto & \beta & \mapsto & \gamma & \mapsto & \delta & \mapsto & \epsilon.
\end{array}$$

La notion habituelle d'innocence des stratégies provient, dans notre cadre, directement de la structure de préfaisceau booléen sur la catégorie des vues étendues. Cependant, lorsque l'on passe aux préfaisceaux booléens sur les câbles ou les tuiles de descente, il existe certains préfaisceaux qui peuvent ne pas être « définis par leurs vues. » (On donne ci-dessous un exemple d'un tel préfaisceau.)

Dans cette partie, on commence donc par étendre la notion d'innocence à ces préfaisceaux, puis on montre que l'innocence est préservée par chacun des foncteurs polynomiaux qui définissent l'opération de descente, à condition de vérifier l'hypothèse de déterminisme à partir de δ.

Définition 7.7 (Préfaisceau de câbles innocent)**.** On dit qu'un préfaisceau de câbles $\beta \in \widehat{\mathrm{K}/X}$ est innocent si tout câble k de K/X, k est accepté par β lorsque toutes ses vues sont acceptées par β.

Pour les préfaisceaux sur $\mathrm{T}_{H/c}$, on utilise les vues-tuiles (définition 7.6) :

Définition 7.8 (Préfaisceau de tuiles innocent)**.** Un préfaisceau de tuiles $\gamma \in \widehat{\mathrm{T}_{H/c}}$ est innocent si pour toute tuile de descente $t \in \mathrm{T}_{H/c}$, il suffit que γ accepte toutes les vues-tuiles de t pour que γ accepte t.

Proposition 7.15. *Les préfaisceaux β et γ sont innocents.*

On a d'abord besoin d'un lemme de décomposition :

Lemme 7.16. *Pour toute tuile de câbles élémentaire $\kappa\colon k_1 \longrightarrow k_2$ telle que $\mathrm{cod}(\kappa)$ se décompose en $X \xhookrightarrow{f} Y \xhookrightarrow{g} Z$, il existe un câble k' sur Y et des morphismes $k_1 \xrightarrow{\kappa_1} k' \xrightarrow{\kappa_2} k_2$ tels que $\kappa = \kappa_2 \circ \kappa_1$.*

Preuve. On commence par construire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook, "f_2"'] \arrow[dd, "h_X"'] \arrow[ddd, bend right=60, "k_1"'] & & Z_2 \arrow[dl, dashed, hook, "g_2"] \arrow[dd, "h_Z"] \arrow[ddd, bend left=60, "k_2"] \\
& Y_2 \arrow[dd, "h_Y"] & \\
X_1 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook, dashed, "f_1"'] \arrow[dd, "m_X"'] & & Z_1 \arrow[dl, hook, "g_1"] \arrow[dd, "m_Z"] \\
& Y_1 \arrow[dd, "m_Y"] & \\
X \arrow[dr, hook, "f"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, hook, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

où

- (m_X, h_X) est la vue élémentaire apparaissant dans t, côté X ;
- f_1 est obtenue par propriété universelle du pullback Y_1 ;
- Y_2 est la composante connexe de X_2 dans Y_1 ;
- et g_2 découle du fait que Z_2 est une composante connexe de Z_1 contenant X_2 ; en effet, comme Y_2 est connexe et contient aussi X_2, on conclut que Z_2 contient Y_2.

On procède ensuite par cas. Si la composée $m_Y \circ h_Y$ a des occurrences non triviales, alors on obtient une tuile active $\kappa_2\colon (m_Y, h_Y) \longrightarrow (m_Z, h_Z)$. Si $m_X \circ h_X$ a aussi des occurrences non triviales, alors k_1 est un câble élémentaire et on a directement la décomposition voulue. Sinon, k_1 est le câble identité sur X et on décompose t en une tuile passive κ_1, suivie de κ_2.

Si maintenant la composée $m_Y \circ h_Y$ n'a pas d'occurrences non triviales, alors $m_X \circ h_X$ non plus et on décompose κ en un morphisme trivial κ_1 entre les câbles identité sur X et Y, suivi d'une tuile passive κ_2. □

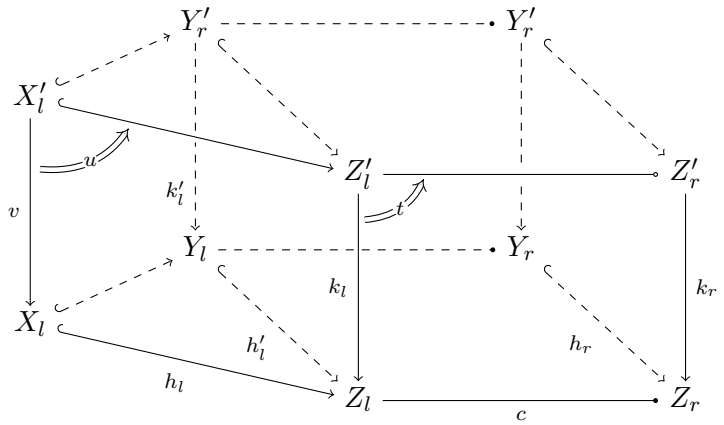
Ce résultat s'étend pour toute tuile de câbles :

Lemme 7.17. *Pour tout morphisme $\kappa\colon k_1 \longrightarrow k_2$ dans K^0_H tel que $\mathrm{cod}(\kappa)$ se décompose en $X \xhookrightarrow{f} Y \xhookrightarrow{g} Z$, il existe un câble k' sur Y et des morphismes $v \xrightarrow{\kappa_1} k' \xrightarrow{\kappa_2} k$ tels que $\kappa = \kappa_2 \circ \kappa_1$.*

Preuve. Par induction sur κ. □

Preuve de la proposition 7.15. L'innocence de β provient directement de la définition de Π.

Pour l'innocence de γ, on se donne une tuile de descente $t\colon k_l \longrightarrow k_r$ dont toutes les vues-tuiles sont acceptées par γ. Pour montrer que t est acceptée par γ, il suffit de montrer que toutes les vues de k_l sont acceptées par β. Prenons $u\colon v \longrightarrow k_l$ une telle vue et appelons $h_l\colon X_l \longrightarrow Z_l$ le codomaine (vertical) de u et $c\colon Z_l \longrightarrow Z_r$ le codomaine vertical de t. Graphiquement, on a donc un diagramme :



dans lequel on s'apprête à construire les parties notées en traits pointillés.

Soit $Y_l = c^{-1}(c(X_l))$: intuitivement, Y_l est le plus petit ouvert de Z_l contenant X_l et tous les sources et buts des arêtes écrasées par c. Considérons la factorisation

$$\begin{tikzcd} Y_l \arrow[r, "c_Y"] \arrow[d, hook, "h'_l"'] & Y_r \arrow[d, hook, "h_r"] \\ Z_l \arrow[r, "c"'] & Z_r \end{tikzcd}$$

de $c \circ h_l$. La coupure c_Y est une vraie coupure. Comme X_l est un séquent (parce que v est une vue), toutes les arêtes non pendantes de Y_l sont écrasées par c_Y ; de plus Y_l est connexe et donc Y_r est un séquent. Par le lemme 7.17, on obtient un câble k'_l au dessus de Y_l tel que u se factorise en $v \xrightarrow{u_1} k'_l \xrightarrow{u_2} k_l$. On choisit une tuile de descente de bord gauche k'_l le long de c_Y, ce qui, comme Y_r est un séquent, donne par le lemme 7.8 donne une vue-tuile $t' \longrightarrow t$. Comme, par hypothèse, toutes les vues-tuiles de t sont acceptées par γ, t' est acceptée, ce qui est équivalent au fait que k'_l est accepté par β, qui est lui-même équivalent au fait que toutes les vues de k'_l sont acceptées par α. Donc, en particulier, v est acceptée. Comme on a pris v arbitraire, toutes les vues de k_l sont acceptées par α, donc k_l est accepté par β et donc t est acceptée par γ, comme souhaité. $\square$

En revanche en présence de non déterminisme sur les préfaisceaux de câbles, l'implication « γ est innocent implique δ est innocent » seule est fausse. En effet, considérons deux câbles k_A et k_B : on représente k_A sur la figure 7.2 (k_B est obtenu de manière similaire avec les occurrences qui sélectionnent la formule B). Les coups positifs joués par ce câble ainsi que les coups négatifs qu'il accepte se font tous sur l'occurrence gauche de chaque produit (dans la branche qui contient la formule A). On définit le préfaisceau γ qui accepte tout câble qui possède un morphisme dans K vers k_A ou k_B. En particulier, le préfaisceau γ n'accepte pas le câble qui prolonge k_A par le coup négatif qui sélectionne l'occurrence de B dans $\neg A \times \neg B$. Ce préfaisceau décrit le comportement d'un joueur, marqué $\bullet$, qui tire un booléen au hasard la première fois qu'il a la main pour décider s'il joue sur A ou s'il joue sur B, puis n'accepte plus que les coups qui correspondent à ce choix.

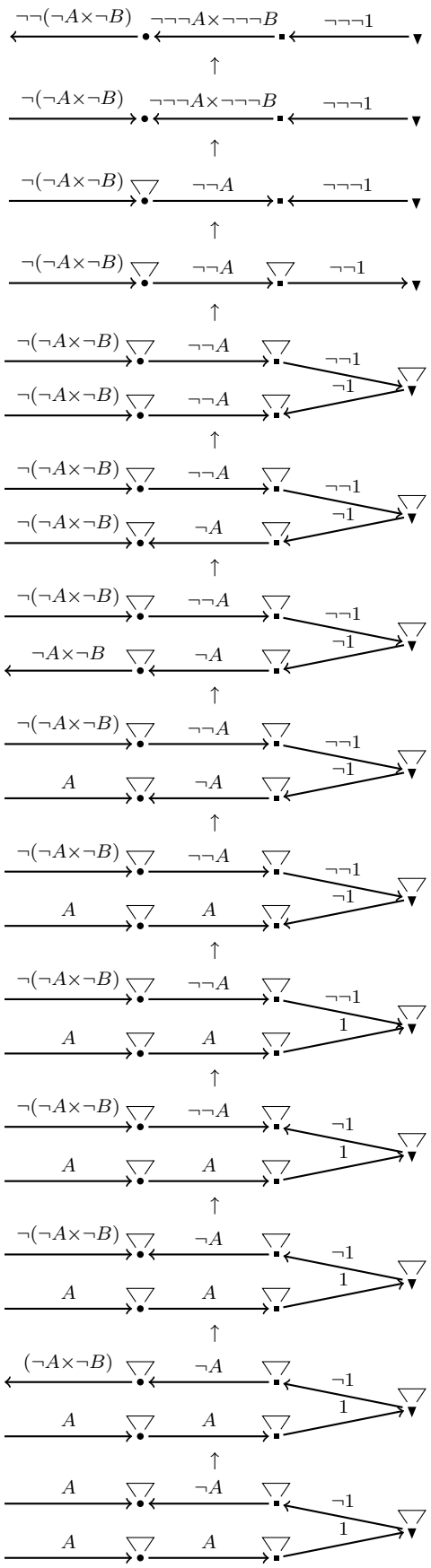


FIGURE 7.2 – Câble k_A innocent non déterministe.

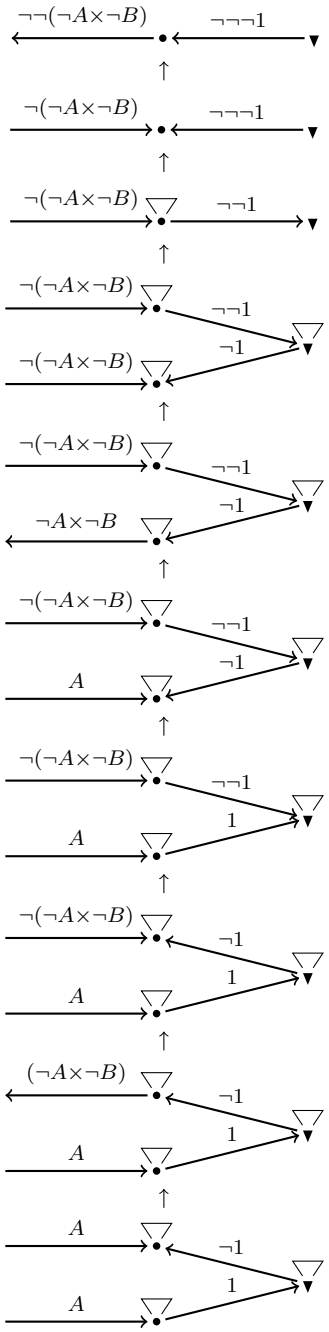
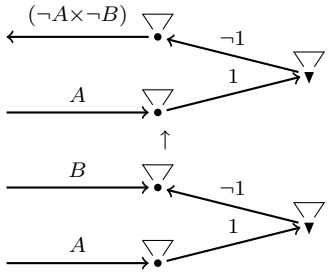


FIGURE 7.3 – Câble descendu k_A^c.

Ce préfaisceau est innocent, mais si l'on considère la coupure qui écrase l'arête d'étiquette $\neg\neg\neg A \times \neg\neg\neg B$, alors δ n'accepte que deux câbles k_A^c et k_B^c (et leurs vues). On donne une représentation de k_A^c en figure 7.3. Cependant, le câble k', qui débute comme k_A^c et k_B^c mais

dont le dernier coup est :



a toutes ses vues acceptées par δ, mais n'est pas lui-même accepté par δ. Autrement dit, avant la descente, le joueur marqué avec $\bullet$ fait un choix interne dont il conserve une trace dans sa vue grâce à l'arête écrasée. Après descente de cette arête, ce choix n'est plus visible dans la vue du sommet : en refusant k', δ n'est pas innocent.

Ce problème, bien connu en sémantique de jeux [20], se résout facilement en se restreignant aux préfaisceaux déterministes, car on peut alors prouver le lemme 7.18 et la proposition 7.19.

Lemme 7.18. *Si α est déterministe, alors β, γ, δ et ϵ sont déterministes.*

Preuve. Par l'absurde, si β n'était pas déterministe, il accepterait un câble k et deux extensions de k par des coups positifs non isomorphes m_1 et m_2, i.e., β accepterait km_1 et km_2. Ces deux coups jouent sur l'unique séquent positif de $\operatorname{dom} k$, que l'on note S. Par induction sur k, on construit facilement une vue v de k, de domaine S. En prenant les pullbacks de m_1 et m_2 le long du plongement $S \hookrightarrow \operatorname{cod} m_1 = \operatorname{cod} m_2$, on obtient deux extensions de v par des coups positifs non isomorphes m_1' et m_2' et acceptées par β. Par définition de Π, α accepterait les vues $m_1'v$ et $m_2'v$, ce qui contredit l'hypothèse « α déterministe. »

Les préfaisceaux γ et ϵ sont obtenus par restriction le long d'un Δ plein et fidèle, qui préserve évidemment le déterminisme.

Pour δ, si ce préfaisceau accepte deux câbles km_1 et km_2 où m_1 et m_2 sont deux coups positifs non isomorphes, on peut remarquer par unicité de la descente que m_1 et m_2 descendent d'une suite de coups positifs composables $(m_{1,1}', \ldots, m_{1,k}')$ et $(m_{2,1}', \ldots, m_{2,l}')$ donc isomorphes jusqu'à un certain rang (au pire, seuls $m_{1,k}'$ et $m_{2,l}'$ qui descendent respectivement sur m_1 et m_2 ne sont pas isomorphes). Autrement dit, on aurait deux tuiles de descente non isomorphes, ce qui contredirait l'hypothèse « γ déterministe. » $\square$

Proposition 7.19. *Si γ est déterministe et innocent, alors δ est innocent.*

Preuve. On se donne un câble k_r sur Y, tel que toutes ses vues $v \longrightarrow k_r$ sont acceptées par δ. Par définition de Σ, il suffit d'exhiber une tuile de descente t de bord droit k_r acceptée par γ. Cette tuile sera obtenue en appliquant le lemme 7.12, où le déterminisme de γ suffit à garantir la compatibilité des tuiles. On montrera que toutes les vues-tuiles de t possèdent des morphismes vers les vues-tuiles utilisées pour reconstruire t : par innocence de γ, ceci assurera que t est acceptée.

Le câble k_r définit une famille de vues

$$\prod_{S_i \in \operatorname{dom}(k_r)} v_{S_i}$$

où chaque vue est unique à isomorphisme de vues près. Par hypothèse, ces vues sont acceptées par δ donc on a une famille de vues-tuiles :

$$\prod_{S_i \in \mathrm{dom}(k_r)} t_{S_i}$$

où pour chaque i, $\mathrm{rig}\, t_{S_i} = v_{S_i}$. Soient t_1 et t_2 deux tuiles quelconques dont les bords droits partagent une vue préfixe commune v. On montre que $t_{1|v} \cong t_{2|v}$ par l'absurde en considérant le premier coup de $\mathrm{lef}\, t_1$ qui n'est pas isomorphe à un coup de $\mathrm{lef}\, t_2$:

— ce coup n'est pas positif car γ est déterministe,

— il n'est pas non plus négatif car alors sa descente ne serait pas triviale. Or, un coup est identifié de manière unique par sa descente (ici dans $\mathrm{rig}\, t_1$) lorsqu'elle n'est pas triviale.

Quitte à appliquer le lemme 7.14, on peut choisir une famille où l'égalité $t_{1|k} = t_{2|k}$ est vérifiée.

D'après le lemme 7.12, il existe donc une tuile t et des cubes de descente $c_i \colon t_{S_i} \longrightarrow t$. On montre que toutes ses vues-tuiles sont acceptées par γ.

Soit $t' \longrightarrow t$ une vue-tuile de t : son bord droit admet un morphisme vers une vue v_i donc le lemme 7.12 donne une factorisation du cube en $t' \longrightarrow t_{S_i} \longrightarrow t$ pour l'une des vues-tuiles t_{S_i} définies précédemment. Le préfaisceau γ accepte t_{S_i} donc γ accepte t'. Par innocence de γ, t est acceptée, donc δ accepte $\mathrm{rig}\, t = k_r$. □

Proposition 7.20. *Le préfaisceau ϵ est innocent.*

Preuve. Ce préfaisceau est obtenu par restriction de δ, qui est innocent. □

7.4.2 Stabilité par descente

On prouve dans cette partie que :

Théorème 7.21. *Les stratégies gagnantes sont stables par descente.*

(On conserve dans cette partie les notations α, β, γ, δ et ϵ introduites au début de la section précédente.)

Pour montrer ce résultat, on prouve que la descente préserve les différentes propriétés des stratégies gagnantes (voir la définition 4.12). Ainsi, on a :

Lemme 7.22. *Les stratégies réceptives sont stables par descente.*

Preuve. Le préfaisceau β est réceptif car s'il accepte un câble k avec $\mathrm{dom}\, k < 0$, et si k' est une extension élémentaire de k par un coup négatif, alors toutes les vues de kk' sont de la forme vv' où v est une vue de k, v' une vue de k' (tous les deux élementaires), et v' est une extension de v par un coup négatif. Comme α est réceptif, vv' est acceptée dès que v est acceptée : toutes les vues de kk' sont donc acceptées quand k est accepté. Par définition de Π, kk' est accepté.

Les préfaisceaux γ et ϵ sont réceptifs dès que respectivement β et δ le sont, car ils sont obtenus par restriction.

Il reste à montrer que δ est réceptif. Soit k un câble accepté par δ dont le domaine est négatif. Par définition de δ, comme le foncteur $\mathrm{rig} \colon \mathrm{T}_{H/c} \longrightarrow \mathrm{K}_{/Y}$ est une fibration, il existe une tuile de descente t :

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r] \arrow[d, "k'"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow t"] & V \arrow[d, "k"] \\ U' \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

qui est acceptée par γ. Soit $k_e = m_e h_e$ un câble élémentaire composable avec k où m_e est un coup négatif, et h_e sélectionne la composante positive de $\operatorname{dom} m_e$. L'arête $e \in \operatorname{edg}(V)$ n'a pas de sommet but : elle admet donc une unique arête antécédent $e' \in \operatorname{edg}(V')$ par le morphisme de descente. Soit m'_e le coup négatif sur V' qui joue sur e' la même occurrence que m_e sur e : à isomorphisme près, la descente de m'_e est m_e. Soit h'_e le plongement de composante connexe qui sélectionne la composante positive de $\operatorname{dom} m'_e$: ce plongement descend en h_e. Il existe donc une tuile de descente t_e négative :

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r] \arrow[d, "k'_e"'] \arrow[dr, phantom, "\Rrightarrow t_e"] & W \arrow[d, "k_e"'] \\
V' \arrow[r] \arrow[d, "k'"'] \arrow[dr, phantom, "\Rrightarrow t"] & V \arrow[d, "k"'] \\
U' \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

qui prolonge t. Comme γ est réceptif, $t \bullet t_e$ est acceptée : ainsi par définition de Σ, l'extension kk_e est acceptée par δ. $\square$

En revanche, les stratégies robustes ne sont en général pas stables par descente, et l'hypothèse que les vues sont finies joue un rôle crucial dans la preuve. Cette propriété demande l'existence de prolongements de câbles par certains types de coups : or, il est à priori possible que le foncteur polynomial

$$\mathrm{V}/_X \xrightarrow{\Pi} \mathrm{K}/_X$$

engendre des stratégies infinies, i.e., pour lesquelles il existe une suite infinie de câbles élémentaires composables dont tout préfixe fini est accepté. Un exemple d'un tel comportement est donné en début de partie 3.5. Tant que ces coups se jouent sur des arêtes qui seront écrasées par descente, toutes les tuiles de descente correspondantes ont un bord droit trivial : ceci permet d'engendrer des stratégies non robustes par descente de stratégies robustes.

En revanche, lorsque les stratégies sont finies on peut utiliser la forte normalisation énoncée au théorème 3.27 pour montrer le lemme suivant :

Lemme 7.23. *Si α est une stratégie finie, alors β, γ, δ et ϵ sont finis.*

Preuve. Le seul résultat non trivial est le fait que β est fini, les autres préfaisceaux étant obtenus par extension de Kan à gauche ou par restriction.

Soit $\overline{X}$ la position enrichie (voir section 3.5) construite à partir de X en rajoutant, pour chaque arête pendante de X, un sommet qui bouche cette arête, et en choisissant pour chaque nœud l'étiquetage suivant :

— pour les nœuds qui proviennent de X, on prend la longueur maximale d'une vue acceptée par α sur son séquent ;

— pour les nœuds « bouchons », leur voisinage possède exactement une arête : on prend, sur la formule de cette arête, le plus grand nombre de négations imbriquées. Par exemple pour la formule $(\neg\neg A) \times (\neg B)$, on prend l'étiquette 2. On note $|e|$, pour une arête $e \in \operatorname{edg}(X)$, ce nombre.

La position $\overline{X}$ vérifie que pour chaque $x \in \operatorname{ver}(\overline{X})$:

$$\ell(x) \geq \min\{|e| \mid e \text{ adjacente à } x\}. \tag{7.3}$$

On montre désormais que pour tout câble k accepté par β, il existe une partie enrichie p ainsi qu'une tuile de câbles :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, "k"'] & \overline{Y} \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}p"'] \\ X \arrow[r, hook] \arrow[ur, Rightarrow] & \overline{X}, \end{tikzcd}$$

par induction sur le câble k. On commence par le cas où k est élémentaire. Le coup p est le coup qui joue la même occurrence que m sur la même arête active : l'étiquette du sommet actif enrichi permet de jouer ce coup, car l'arête active possède au moins une négation, et X vérifie (7.3).

Les étiquettes des sommets non modifiés de $\overline{Y}$ vérifient encore (7.3). L'antécédent du sommet actif de p vérifie également cette condition : son étiquette a diminué de 1, mais c'est aussi le cas de la mesure de la formule sur l'arête active.

Ainsi, si $\overline{X}$ vérifie (7.3), alors $\overline{Y}$ vérifie également cette condition, ce qui permet de terminer la construction de p par induction.

Or, d'après le théorème 3.27, la position $\overline{X}$ est fortement normalisante : toutes les parties p partant de cette position sont finies. Tout câble k accepté par β est donc de longueur finie. □

Ce résultat entraine alors facilement le lemme suivant.

Lemme 7.24. *Les stratégies finies et robustes sont stables par descente.*

Preuve. Comme pour la réceptivité, le seul préfaisceau qui n'est pas évidemment robuste est δ.

Soit k un câble accepté par δ et dont le domaine est positif. Par définition de δ, comme le foncteur $\mathrm{rig}\colon \mathrm{T}_{H/c} \longrightarrow \mathrm{K}/_Y$ est une fibration, il existe une tuile de descente t acceptée par γ de la forme :

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, dash] \arrow[d, "k'"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow t"] & V \arrow[d, "k"] \\ U' \arrow[r, dash] & U \end{tikzcd}$$

Le domaine de k' est positif (les morphismes de descente préservent la polarité), donc il existe une extension de k' par un coup m'_0 telle que la composée des tuiles de descente :

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, dash] \arrow[d, "m'_0"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow t'"] & W \arrow[d, "k_0"] \\ V' \arrow[r, dash] \arrow[d, "k'"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow t"] & V \arrow[d, "k"] \\ U' \arrow[r, dash] & U \end{tikzcd}$$

est acceptée par γ. Si k_0 n'est pas trivial, alors on obtient bien une extension de k par un coup, ce qui assure que δ est robuste.

En revanche, si le bord droit de t' est trivial, alors $\operatorname{dom} m'_0$ est encore une position positive. On répète l'opération précédente, ce qui donne une suite de coups positifs tels que les préfixes de

$$km'_0m'_1m'_2\dots m'_n$$

sont acceptés. Comme γ est finie ce processus s'arrête, i.e., $\operatorname{dom} m'_n$ est négatif. Le coup m'_n joue en particulier sur une arête dont la source est pendante dans $\operatorname{cod} m'_n$: par descente, ce coup descend sur un câble élémentaire non trivial.

Si m'_{i_0} est le premier coup de la suite des $(m_i)_{0 \leq i \leq n}$ qui descend en un coup non trivial m, alors km est accepté par γ. □

Preuve du théorème 7.21. Les stratégies gagnantes sont par définition les stratégies :

— non vides, évidemment stables par descente,
— finies, stables par descente d'après le lemme 7.23,
— réceptives, stables par descente d'après le lemme 7.22,
— robustes, stables par descente d'après le lemme 7.24,
— et déterministes, stables par descente d'après le lemme 7.18.

□

7.5 Composition des stratégies gagnantes

Pour définir la catégorie des stratégies gagnantes dans cette partie, nous devons définir un foncteur de composition.

Si A, B et C sont des formules, on pose, en reprenant la notation de la section 4.3.1, $X_1 = (A \vdash B)$ et $X_2 = (B \vdash C)$. On note $X = (A \vdash B \vdash C)$ leur pushout le long de l'arête B, et $Y = (A \vdash C)$.

Cette catégorie de stratégies est en réalité enrichie sur les ordres. Ses objets sont les formules, et le poset des morphismes $A \longrightarrow B$ est donné par les stratégies gagnantes sur $A \vdash B$. Les identités sont les stratégies copycat, dont on donnera la définition précise plus tard.

La composition en A, B, C est le foncteur polynomial $\mathcal{D}_c$ défini par

$$\mathrm{V}/_{X_1} + \mathrm{V}/_{X_2} \cong \mathrm{V}/_X \xrightarrow{\Pi} \mathrm{K}/_X \xleftarrow{\Delta} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{K}/_Y \xleftarrow{\Delta} \mathrm{V}/_Y,$$

où $c \colon X \longrightarrow Y$ est la coupure qui écrase uniquement l'arête B, restreint aux seules stratégies gagnantes.

Remarque 7.5. Au premier isomorphisme $\mathrm{V}/_{X_1} + \mathrm{V}/_{X_2} \cong \mathrm{V}/_X$ près, il s'agit du même foncteur que le foncteur donné en définition 7.1.

Le reste de cette partie est consacré à la preuve de :

Théorème 7.25. *La composition est associative.*

Pour cela, on commence par montrer que :

Lemme 7.26. *La descente est fonctorielle sur les stratégies gagnantes, i.e., pour tous morphismes de descente $c \colon X \longrightarrow Y$ et $c' \colon Y \longrightarrow Z$, on a :*

$$\mathcal{D}_{c'} \circ \mathcal{D}_c = \mathcal{D}_{c'c}.$$

La composée $\mathcal{D}_{c'} \circ \mathcal{D}_c$ vaut par définition :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V}/_X \arrow[dr, "\Pi"'] & & \mathrm{T}_{H/c} \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Sigma"'] & & \mathrm{V}/_Y \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Pi"'] & & \mathrm{T}_{H/c'} \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Sigma"'] & & \mathrm{V}/_Z \arrow[dl, "\Delta"'] \\
& \mathrm{K}/_X & & \mathrm{K}/_Y & & \mathrm{K}/_Y & & \mathrm{K}/_Z &
\end{tikzcd}$$

On remarque que la partie du milieu :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{V}/Y \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Pi"] & \\ \mathrm{K}/Y & & \mathrm{K}/Y \end{tikzcd}$$

consiste à d'abord oublier les câbles, en ne gardant que les vues, puis à recréer ces câbles juste après. La condition de Beck-Chevalley assure qu'il existe une transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{K}/Y} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \widehat{\mathrm{V}/Y} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{\mathrm{K}/Y}. \end{tikzcd}$$

mais l'implication inverse n'est pas vraie en général, car si l'on part d'un préfaisceau sur K/X non innocent, alors le foncteur polynomial du haut le rend innocent, quitte à la rendre non déterministe. Intuitivement, c'est grâce à la précomposition par

$$\mathrm{V}/X \xrightarrow{\Pi} \mathrm{K}/X$$

au tout début de la descente qui assure que tous les préfaisceaux que l'on rencontre à chaque étape de la descente sont innocents, et donc que l'on peut prouver :

Lemme 7.27. *Les deux foncteurs polynomiaux suivants sont égaux :*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{K}/X & \mathrm{T}_{H/c} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] & \mathrm{K}/Y & \mathrm{V}/Y \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Pi"] & \\ \mathrm{V}/X \arrow[ur, "\Pi"] \arrow[dr, "\Pi"'] \arrow[r, phantom, "id \Downarrow"] & & & & & \mathrm{K}/Y \\ & \mathrm{K}/X & \mathrm{T}_{H/c} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[urrr, "\Sigma"'] & & & \end{tikzcd}$$

Preuve. On considère uniquement des préfaisceaux booléens, et on dispose déjà d'une transformation naturelle dans un sens. Il reste donc uniquement à montrer qu'il existe une transformation naturelle du foncteur du haut vers le foncteur du bas.

Si α est une stratégie gagnante dans $\widehat{\mathrm{V}/X}$, on pose comme en section 7.4.1 :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{V}/X & \xleftarrow{\Pi} & \mathrm{K}/X & \xleftarrow{\Delta} & \mathrm{T}_{H/c} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathrm{K}/Y & \xleftarrow{\Delta} & \mathrm{V}/Y \\ \alpha & \mapsto & \beta & \mapsto & \gamma & \mapsto & \delta & \mapsto & \epsilon. \end{array}$$

On sait, par la proposition 7.15 que tous les préfaisceaux sont innocents. En particulier, δ accepte un câble k si et seulement s'il accepte toutes les vues de k, ce qui garantit bien par définition de Π que $\delta = \Pi\Delta(\delta)$. □

Preuve du lemme 7.26. Grâce au lemme 7.27, il suffit de prouver qu'il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs polynomiaux :

$$\mathrm{K}/X \xleftarrow{\Delta} \mathrm{T}_{H/c} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{K}/Y \xleftarrow{\Delta} \mathrm{T}_{H/c'} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{K}/Z$$

et

$$\mathrm{K}/_X \xleftarrow{\Delta} \mathrm{T}/_{c'c} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{K}/_Z.$$

On considère pour cela le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{T}_{H/c} \arrow[rr, "\Sigma"] \arrow[dl, "\Delta"'] & & \mathrm{K}/_Y & \\
\mathrm{K}/_X & & \mathrm{T} \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[dl, "\sim"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & \mathrm{T}_{H/c'} \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[dl, "\Sigma"] \\
 & \mathrm{T}_{H/c'c} \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & \mathrm{K}/_Z. &
\end{tikzcd}$$

Le pullback T (pris entre les foncteurs sous-jacents, et non entre les foncteurs polynomiaux) a pour objets les paires composables de tuiles de descente sur c et c' : grâce au lemme 5.8, on peut construire l'équivalence de catégories avec la catégorie des tuiles de descente sur $c'c$.

Il reste à prouver que le carré de pullback est exact, grâce à la proposition 6.10 car le foncteur $\mathrm{T}_{H/c} \longrightarrow \mathrm{K}/_Y$ est une fibration. □

Preuve du théorème 7.25. On considère quatre formules A, B, C et D, et on définit les positions

$$\begin{array}{rcl}
X & := & (A \vdash B \vdash C \vdash D) \\
Y & := & (A \vdash C \vdash D) \\
Z & := & (A \vdash D) \\
X_1 & := & (A \vdash B) \\
X_2 & := & (B \vdash C) \\
X_{12} & := & (A \vdash B \vdash C) \\
X_3 & := & (C \vdash D) \\
Y_1 & := & (A \vdash C).
\end{array}$$

On pose $c\colon X \longrightarrow Y$, $c'\colon Y \longrightarrow Z$ et $c_{12}\colon X_{12} \longrightarrow Y_1$ les coupures qui écrasent respectivement les arêtes B, C et B.

Pour prouver l'associativité, on montre que la composition *biaisée à droite*, i.e., le foncteur polynomial qui envoie des stratégies (σ, τ, γ) sur (X_1, X_2, X_3) vers $(\gamma \circ (\tau \circ \sigma))$, coïncide avec la *composition non biaisée*, qui est définie en précomposant $\mathcal{D}_{c'c}$ avec l'isomorphisme

$$\mathrm{V}/_X \cong \sum_{i=1,2,3} \mathrm{V}/_{X_i}.$$

La preuve que la composition non biaisée est égale à la composition *biaisée à gauche*, i.e., qui renvoie les stratégies précédentes sur $((\gamma \circ \tau) \circ \sigma)$ est analogue.

D'après le lemme 7.26, $\mathcal{D}_{c'c} = \mathcal{D}_{c'} \circ \mathcal{D}_c$: on prouve donc en réalité que la composition biaisée à droite est égale à ce foncteur. En explicitant les définitions, cette composition est égale au foncteur polynomial

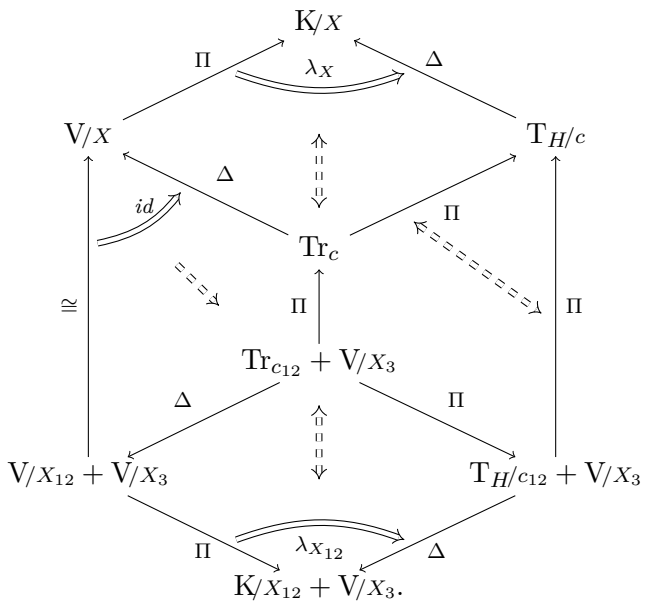
$$\begin{tikzcd}
\sum_{i\in 1,2,3} \mathrm{V}/_{X_i} \arrow[dr, "\cong"'] & & \mathrm{K}/_{X_{12}} + \mathrm{V}/_{X_3} & & \mathrm{K}/_{Y_1} + \mathrm{V}/_{X_3} & & \mathrm{V}/_Y \\
 & \mathrm{V}/_{X_{12}} + \mathrm{V}/_{X_3} \arrow[ur, "\Pi"] & & \mathrm{T}_{H/c_{12}} + \mathrm{V}/_{X_3} \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[ur, "\Sigma"] & & \mathrm{V}/_{Y_1} + \mathrm{V}/_{X_3} \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd} \tag{7.4}$$

composé avec

$$\mathrm{V}/_Y \xrightarrow{\Pi} \mathrm{K}/_Y \xleftarrow{\Delta} \mathrm{T}_{H/c'} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{K}/_Z \xleftarrow{\Delta} \mathrm{V}/_Z.$$

Ce dernier foncteur est exactement $\mathcal{D}_{c'}$, donc on prouve simplement que le foncteur (7.4) est égal à $\mathcal{D}_c$.

On considère pour cela le diagramme



Les catégories Tr_c et $\mathrm{Tr}_{c_{12}}$ sont par définition des comma catégorie (définition 6.3), de cônes respectifs λ_X et $\lambda_{X_{12}}$. Le carré du haut est exact d'après la proposition 6.9, et le carré du bas est exact comme coproduit de carrés exacts (proposition 6.8), ce que l'on indique avec les flèches doubles en pointillés.

Le foncteur $\mathrm{Tr}_{c_{12}} + \mathrm{V}/_{X_3} \longrightarrow \mathrm{Tr}_c$ est donné par propriété universelle de la comma catégorie Tr_c. Il envoie :

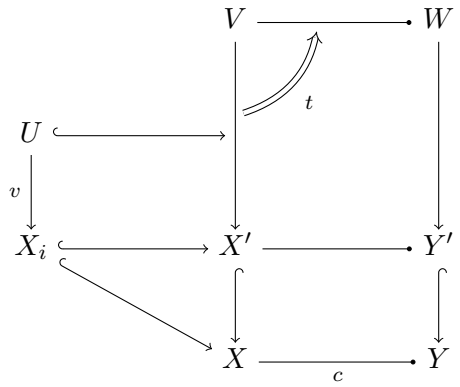
— les triplets (v, κ, t) de $\mathrm{Tr}_{c_{12}}$ (dont on explicite la définition ci-dessous) sur des triplets $(h \circ v, \kappa, t')$ où t' est obtenue à partir de t en composant la base de la tuile avec le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} X_{12} \arrow[r, "c_{12}"] \arrow[d, hook, "h"'] & Y_1 \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "c"'] & Y, \end{tikzcd}$$

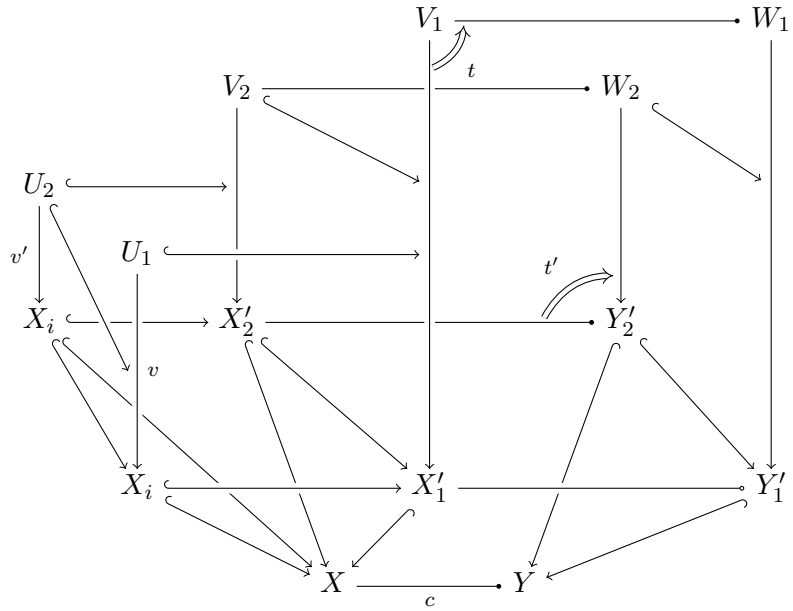
— les vues de $\mathrm{V}/_{X_3}$ sur ces vues composées avec le plongement h.

L'isomorphisme entre foncteurs polynomiaux du carré de droite provient directement du fait que le carré commute. Enfin, comme le carré de gauche commute, la transformation de Beck-Chevalley donne une implication. Pour prouver que le diagramme de foncteurs polynomiaux commute, il reste donc à montrer sa réciproque. Pour cela on explicite d'abord la catégorie Tr_c :

— ses objets sont les flèches de $v \longrightarrow \mathrm{dom}\, t$ de $\mathrm{K}/_X$, où $v \in \mathrm{V}/_X$ et $t \in \mathrm{T}_{H/c}$, i.e., les diagrammes :



— ses morphismes $(v', t') \longrightarrow (v, t)$ sont des paires de morphismes $v' \longrightarrow v$ de V/X et $t' \longrightarrow t$ de Tr_c qui font commuter le diagramme :



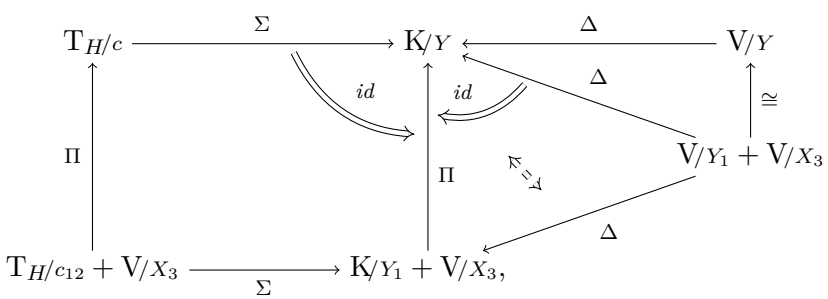
En dépliant les définitions, si l'on se donne un préfaisceau sur $\mathrm{V}/X_{12} + \mathrm{V}/X_3$, alors son image accepte une paire (v, t) :

(i) par le foncteur polynomial du bas si d'une part toute sous-tuile t' dans $\mathrm{Tr}_{c_{12}}$ dont le bord gauche est une vue a son bord gauche accepté, et si d'autre part toute sous-vue v' de v est acceptée ;

(ii) par le foncteur polynomial du haut si v est acceptée.

Dans (i), on peut en particulier choisir $v' = v$, ce qui prouve (i) $\Rightarrow$ (ii).

Considérons désormais le diagramme



où la flèche en pointillés est donnée par la proposition 6.5.

On montre désormais que le carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{H/c} \arrow[rr, "\Delta"] & & \mathrm{K}_{/Y} \\
\mathrm{T}_{H/c_{12}} + \mathrm{V}_{/X_3} \arrow[u, "\Pi"] \arrow[rr, "\Delta"'] \arrow[urr, dashed, leftrightarrow] & & \mathrm{K}_{/Y_1} + \mathrm{V}_{/X_3} \arrow[u, "\Pi"']
\end{tikzcd}$$

est exact ce qui, d'après la remarque 6.1, donnera la première implication :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{H/c} \arrow[rr, "\Sigma"] & & \mathrm{K}_{/Y} \\
\mathrm{T}_{H/c_{12}} + \mathrm{V}_{/X_3} \arrow[u, "\Pi"] \arrow[rr, "\Sigma"'] \arrow[urr, dashed, Rightarrow] & & \mathrm{K}_{/Y_1} + \mathrm{V}_{/X_3}. \arrow[u, "\Pi"']
\end{tikzcd}$$

. Dans ce carré, une tuile de descente $t \in \mathrm{T}_{H/c}$ est acceptée :

(i) par le haut si d'une part pour tout $k' \longrightarrow \operatorname{cod} t$, $k' \in \mathrm{K}_{/Y_1}$, k' est accepté, et d'autre part pour toute vue avec $v \longrightarrow \operatorname{cod} t$, $v \in \mathrm{V}_{/X_3}$, v est acceptée ;

(ii) par le foncteur du bas si d'une part pour toute tuile $t' \longrightarrow t$ avec $t' \in \mathrm{T}_{H/c_{12}}$, alors $\operatorname{cod} t'$ est accepté, et d'autre part pour toute vue $v \in \mathrm{V}_{/X_3}$ telle que $id_v \longrightarrow t$ alors v est acceptée.

On montre l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Elle est évidente pour les vues $v \in \mathrm{V}_{/X_3}$, qui ne sont pas modifiées par descente le long de c_{12}. Pour un câble $k' \longrightarrow \operatorname{cod} t$, alors d'après le lemme de reconstruction 7.9, il existe une tuile $t' \longrightarrow t$ de bord droit k'. Or par (ii), $\operatorname{cod} t' = k'$ est accepté.

Il reste à montrer l'implication

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{H/c} \arrow[rr, "\Sigma"] & & \mathrm{K}_{/Y} \\
\mathrm{T}_{H/c_{12}} + \mathrm{V}_{/X_3} \arrow[u, "\Pi"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & \mathrm{K}_{/Y_1} + \mathrm{V}_{/X_3} \arrow[u, "\Pi"'] \arrow[ull, dashed, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

en montrant que (i) $\Rightarrow$ (ii) dans :

(i) un câble $k \in \mathrm{K}_{/Y}$ est accepté par le foncteur du bas si :
- pour tout $k' \in \mathrm{K}_{/Y_1}$ tel que $k' \longrightarrow k$, il existe $t \in \mathrm{T}_{H/c_{12}}$ telle que $\operatorname{cod} t = k'$ et t est acceptée (car le foncteur $\operatorname{rig} \colon \mathrm{T}_{H/c} \longrightarrow \mathrm{K}_{/Y}$ est une fibration),
- et pour toute vue $v \in \mathrm{V}_{/X_3}$ avec $v \longrightarrow k$, v est acceptée ;

(ii) un câble $k \in \mathrm{K}_{/Y}$ est accepté par le foncteur du haut s'il existe une tuile $t \in \mathrm{T}_{H/c}$ avec $\operatorname{cod} t = k$ telle que :
- pour toute tuile $t' \in \mathrm{T}_{H/c_{12}}$ avec $t' \longrightarrow t$, alors t' est acceptée,
- pour toute vue $v \in \mathrm{V}_{/X_3}$ avec $id_v \longrightarrow t$, alors v est acceptée.

Autrement dit, cette implication revient à savoir construire une tuile de descente t sur c de bord droit k qui soit maximale, au sens où tout autre sous-câble sur Y_1 ou sur X_3 provient d'une tuile de descente plus petite que t. Pour des stratégies déterministes, il s'agit exactement du résultat du lemme 7.12, puisque :
- l'hypothèse (i) donne pour chaque vue $v_i \longrightarrow k$ une tuile t_i de bord droit v_i,
- pour une vue de $\mathrm{V}_{/X_3}$, la tuile de descente identité,
- qui, par déterminisme, sont compatibles.

Ces vues-tuiles se recollent donc en une tuile t avec $\operatorname{rig} t = k$. Cette tuile vérifie bien les hypothèses pour être acceptée par (ii) car :

— si t' est une vue-tuile de $\mathrm{T}_{H/c_{12}}$ avec $t' \longrightarrow t$ alors, par la proposition 7.11, il existe une factorisation $t' \longrightarrow t_i \longrightarrow t$, or chacune des tuiles t_i était acceptée donc t' est acceptée ;
— si v est une vue dans V/x_3 telle que $id_v \longrightarrow t$, alors v est une vue de k donc est acceptée.

On conclut en précomposant par l'isomorphisme $\sum_{i\in 1,2,3} \mathrm{V}/x_i \cong \mathrm{V}/x_{12} + \mathrm{V}/x_3$. □

7.6 Structure de réponse

Dans cette partie, on montre comment on peut définir une catégorie de réponse à partir des stratégies gagnantes. Nous prouvons pour cela :

— que la descente permet de définir une composition sur les stratégies gagnantes (proposition 7.28) ;
— que l'on a des produits cartésiens dans cette catégorie (propositions 7.29 et 7.35) ;
— que l'on a un foncteur de négation (proposition 7.41) qui vérifie les conditions de cohérence des catégories cartésiennes avec négation.

Les preuves de ces résultats font intervenir plusieurs diagrammes de foncteurs polynomiaux, dont les objets sont les préfaisceaux sur les vues, les câbles et les tuiles de descentes. Pour alléger les notations dans ces diagrammes, nous remplacerons si nécessaire l'écriture d'une position :

$$\Gamma_1 \vdash \Gamma_2 \vdash \cdots \vdash \Gamma_n$$

par la notation :

$$\Gamma_1; \Gamma_2; \cdots; \Gamma_n$$

où les Γ_i sont des listes de formules séparées par des virgules.

Définition 7.9. On note $\mathrm{Win}(\mathbb{A})$, ou dans la suite simplement Win, le graphe dont les sommets sont les formules sur $\mathbb{A}$, dont les arêtes $A \longrightarrow B$ sont les stratégies gagnantes sur $A \vdash B$, et avec pour loi de composition la composition des stratégies.

Proposition 7.28. Win *forme une catégorie.*

Preuve. Nous avons prouvé en partie 7.5 que la composition des stratégies gagnantes est associative. Il reste à montrer l'existence d'identités, qui sont données comme d'habitude par les stratégies copycat.

Soit A une formule et $\xi\colon A' \longrightarrow A$ une occurrence alternante. On dit que le coup $m_{\Gamma,\xi}$ jouant l'occurrence ξ dans

est un coup copycat lorsque Γ est formée uniquement d'arêtes entrantes, sans sources, et dont aucune ne porte l'étiquette A.

Soit $v\colon U \longrightarrow (A \vdash A)$ une vue où U est positive. Elle se décompose en

$$v = v_1^- v_1^+ \cdots v_{n-1}^- v_{n-1}^+ v_n^-$$

où les v_i^- sont des vues dont le codomaine est positif et le domaine négatif, et les v_i^+ sont des vues sont le codomaine est négatif et le domaine positif.

Soit ξ_i l'occurrence jouée par chaque coup v_i^-. La vue v est une vue copycat sur $A \vdash A$ si et seulement si chaque v_i^+ est un coup copycat d'occurrence ξ_i.

La stratégie copycat i_A est la stratégie réceptive engendrée par les vues copycat sur $A \vdash A$. Il s'agit bien d'une stratégie finie (les occurrences sont des occurrences sur A strictement

décroissantes), déterministe (étant donné un séquent positif, il existe au plus un coup copycat depuis ce séquent car l'arête d'étiquette A dans la définition précédente est unique).

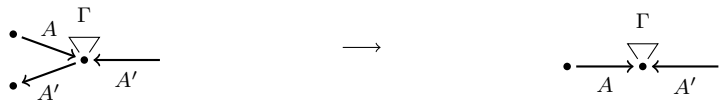
La stratégie copycat est robuste, car on montre par induction que :

— $\operatorname{cod} v_i^-$ est un séquent de la forme $\Gamma_i, A' \vdash A'$ où A' est une sous-formule stricte des formules de Γ_i ;

— $\operatorname{dom} v_i^-$ est un séquent de la forme $\Gamma_i, A', A'' \vdash$ pour le même Γ_i que ci-dessus, avec $\xi_i \colon A'' \longrightarrow A'$.

Il existe donc bien un coup copycat d'occurrence ξ_i qui part de la position $\Gamma_i, A', A'' \vdash$.

Pour montrer que i_A est l'identité de A dans la catégorie des stratégies gagnantes, on considère une version étendue des coups copycat, de la forme :



où les arêtes de Γ ont toutes un sommet source. La descente de ce coup le long de c_A est un isomorphisme. Ceci montre que dans la descente pour définir $i_A\sigma$, tous les coups positifs provenants de i_A sont écrasés, et les coups sur σ sont préservés. Il en est de même pour la composée σi_A en ajoutant cette fois-ci un sommet source à l'arête A' de départ du coup copycat. □

Les stratégies gagnantes ont été définies en section 4.2.2 comme étant en particulier *non vides*, afin d'avoir la propriété suivante :

Proposition 7.29. *La formule* 1 *est un objet terminal de* Win.

Preuve. Il n'existe aucun coup partant de la position $A \vdash 1$, quelle que soit A, donc la stratégie qui accepte uniquement la partie vide est le seul morphisme $A \longrightarrow 1$. Elle est évidemment gagnante.

(Cette stratégie est distincte de la stratégie qui n'accepte aucune partie.) □

7.6.1 Produits binaires

On traite à présent le cas des produits binaires. On commence pour cela par donner une caractérisation de la descente des stratégies gagnantes, en particulier pour traiter le fait qu'elles sont non vides. On montre ensuite l'existence des produits dans la catégorie Win.

On note $\mathrm{Strat}^+(X)$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathrm{V}/X}$ dont les objets sont non vides (i.e., ils acceptent au moins la vue identité sur X). On peut en fait voir un morphisme $A \longrightarrow B$ comme un préfaisceau booléen (gagnant) sur $\mathrm{V}^+/(A \vdash B)$, où V^+ est la restriction de V aux vues qui ne sont pas l'identité.

On a d'abord :

Proposition 7.30. *À l'isomorphisme* $\mathrm{Strat}^+(A \vdash B) \cong \widehat{\mathrm{V}^+/(A \vdash B)}$ *près, la composition dans* Win *est égale à*

$$\mathrm{V}^+/A \vdash B + \mathrm{V}^+/B \vdash C \cong \mathrm{V}^+/A \vdash B \vdash C \xrightarrow{\Pi} \mathrm{K}^+/A \vdash B \vdash C \xleftarrow{\Delta} \mathrm{T}^+_{H/c_B} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{K}/A \vdash C \xleftarrow{\Delta} \mathrm{K}^+/A \vdash C.$$

Preuve. Ce résultat revient à prouver que le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{V}^+{}_{/A;B} + \mathrm{V}^+{}_{/B;C} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dd, "\Pi"'] & \mathrm{V}^+{}_{/A;B;C} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[dd, "\Pi"'] & \mathrm{K}^+{}_{/A;B;C} \arrow[dd, "\Pi"'] & \mathrm{T}^+_{H/c_B} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[dd, "\Pi"'] & \mathrm{K}_{/A;C} \arrow[d, "\Pi"] \arrow[dr, phantom, "\text{Prop. 6.4}"] & \mathrm{K}^+{}_{/A;C} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dd, "\Pi"] \\
 & & & & \mathrm{K}_{/A;C} \arrow[ur, phantom, "(\star)"] & \\
\mathrm{V}_{/A;B} + \mathrm{V}_{/B;C} \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{V}_{/A;B;C} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathrm{K}_{/A;B;C} & \mathrm{T}_{H/c_B} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[ur, "\Sigma"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & \mathrm{K}_{/A;C} \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}
$$

commute, où la partie horizontale supérieure est le foncteur considéré, et où la partie inférieure est le foncteur de descente le long de c_B. Le triangle en bas à droite est exact d'après le corollaire 6.6. Les foncteurs polynomiaux verticaux ne changent pas les valeurs des stratégies sur les objets, donc tous les carrés sauf celui marqué avec $(\star)$ sont exacts.

Ce dernier carré n'est *pas* exact (la stratégie vide sur $\widehat{\mathrm{T}^+_{H/c_B}}$ s'envoie sur la stratégie vide par le foncteur polynomial du haut, et sur la stratégie qui accepte le câble identité par le foncteur polynomial du bas).

On peut quand même prouver l'implication :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^+_{H/c_B} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & \mathrm{K}_{/A;C} \arrow[d, "\Pi"'] \\
\mathrm{T}_{H/c_B} \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathrm{K}_{/A;C}
\end{tikzcd}
$$

car un câble $k \in \mathrm{K}_{/A;C}$ est accepté :

(i) par le foncteur du haut si pour tout $k' \longrightarrow k$, il existe une tuile $t' \in \mathrm{T}^+_{H/c_B}$ acceptée et telle que $\operatorname{cod} t' = k'$;

(ii) par le foncteur du bas s'il existe une tuile $t \in \mathrm{T}_{H/c_B}$ telle que $\operatorname{cod} t = k$ et pour toute sous-tuile $t' \longrightarrow t$ non triviale, t' est acceptée.

Pour montrer (ii), on utilise (i) en choisissant $k' = k$, ce qui donne une tuile acceptée $t \in \mathrm{T}^+_{H/c_B}$ telle que $\operatorname{cod} t = k$. On peut en particulier voir t comme une tuile de T_{H/c_B} : par hypothèse, toutes ses sous-tuiles sont acceptées.

On obtient donc une première implication :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^+_{H/c_B} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & \mathrm{K}_{/A;C} & \mathrm{K}^+{}_{/A;C} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathrm{T}_{H/c_B} \arrow[rr, "\Sigma"'] & & \mathrm{K}_{/A;C}.
\end{tikzcd}
$$

On obtient sa réciproque grâce au lemme 7.9. $\square$

On traite à présent le cas des produits binaires. Pour cela, on commence par montrer que les vues (différentes de l'identité) sur les séquents de la forme $C \vdash A \times B$ sont en fait en bijection avec les vues sur les séquents $C \vdash A$ ou $C \vdash B$. Ceci permet de définir d'une part les projections, et d'autre part pour toute paire de stratégies gagnantes $\sigma \colon C \longrightarrow A$ et

$\tau\colon C \longrightarrow B$ le morphisme $\langle\sigma,\tau\rangle$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[d, dashed, "\langle\sigma,\tau\rangle"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] & B.
\end{tikzcd}$$

On montre enfin en proposition 7.35 que cette construction correspond bien à un produit cartésien.

Pour chaque séquent X, on définit BV_X l'ensemble des classes d'équivalence des vues élémentaires au-dessus de X. Autrement dit, il s'agit des vues élémentaires de $\mathrm{V}^0(X)$ quotientées par isomorphismes de vues. Pour chacune de ces classes, on choisit un représentant afin de pouvoir écrire $b \in \mathrm{BV}(Y,X)$ pour indiquer que $[b] \in \mathrm{BV}_X$, lorsque b est une vue élémentaire $b\colon Y \longrightarrow X$. On montre facilement que :

Lemme 7.31. *Pour toutes formules A, B et C, on a* $\mathrm{BV}_{C\vdash A\times B} \simeq \mathrm{BV}_{C\vdash A} + \mathrm{BV}_{C\vdash B}$.

Preuve. Chaque séquent étant négatif, l'arête active est unique. Par ailleurs, si l'on note $\mathrm{Occ}_{-1}(A)$ la classe des occurrences alternantes de codomaine A, alors on a $\mathrm{Occ}_{-1}(A \times B) \cong \mathrm{Occ}_{-1}(A) + \mathrm{Occ}_{-1}(B)$.

Le résultat est alors une conséquence de la caractérisation des coups par arête active et occurrence (remarque 3.3). □

Lemme 7.32. *Pour tout séquent X, on a :*

$$\mathrm{V}^+/_X \simeq \sum_{[b]\in\mathrm{BV}_X} \mathrm{V}/_{\mathrm{dom}(b)}.$$

On a alors :

Lemme 7.33. $\mathrm{V}^+/_{C\vdash A\times B} \simeq \mathrm{V}^+/_{C\vdash A} + \mathrm{V}^+/_{C\vdash B}$.

Preuve. On applique d'abord l'isomorphisme du lemme 7.32 et on réécrit les vues élémentaires initiales avec l'équivalence du lemme 7.31. □

On peut alors construire les objets produits et les projections avec :

Corollaire 7.34. *Cette équivalence induit un isomorphisme d'ordres partiels* $\mathrm{Win}(C, A \times B) \cong \mathrm{Win}(C,A) \times \mathrm{Win}(C,B)$.

Les projections $A \times B \longrightarrow A$ et $A \times B \longrightarrow B$ sont simplement les images de la stratégie copycat $A \times B \longrightarrow A \times B$ le long de cet isomorphisme.

Proposition 7.35. Win *possède les produits binaires, hérités des produits syntaxiques, i.e., le produit de A et B est la formule $A \times B$.*

Preuve. Il reste à montrer la naturalité de l'isomorphisme du corollaire 7.34, ce qui revient à vérifier que le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{V}^+/_{C';C} + \mathrm{V}^+/_{C;A} + \mathrm{V}^+/_{C;B} \arrow[rr, "\cong"] & & \mathrm{V}^+/_{C';C} + \mathrm{V}^+/_{C;A\times B} \arrow[dd, "\cong"] \\
\mathrm{V}^+/_{C';C} + \mathrm{V}^+/_{C;A} + \mathrm{V}^+/_{C';C} + \mathrm{V}^+/_{C;B} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\cong"] & & \\
\mathrm{V}^+/_{C';C;A} + \mathrm{V}^+/_{C';C;B} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "\Pi"] & & \mathrm{V}^+/_{C';C;A\times B} \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathrm{K}^+/_{C';C;A} + \mathrm{K}^+/_{C';C;B} \arrow[rr, "\cong"] & & \mathrm{K}^+/_{C';C;A\times B} \\
\mathrm{T}^+_{H/c_C} + \mathrm{T}^+_{H/c'_C} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[rr, "(\star)\ \Sigma"] \arrow[d, "\Sigma"] & & \mathrm{T}^+_{H/c''_C} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathrm{K}/_{C';A} + \mathrm{K}/_{C';B} \arrow[rr, "\cong"] & & \mathrm{K}/_{C';A\times B} \\
\mathrm{K}^+/_{C';A} + \mathrm{K}^+/_{C';B} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[rr, "\cong"] & & \mathrm{K}^+/_{C';A\times B}. \arrow[u, "\Delta"]
\end{tikzcd}
$$

Tous les rectangles commutent trivialement, sauf celui marqué avec $(\star)$: ce dernier est exact car le foncteur horizontal est surjectif sur les objets (proposition 6.7). $\square$

7.6.2 Négation

On ajoute à présent à la catégorie Win un foncteur de négation $\neg\colon \mathrm{Win}^{op} \longrightarrow \mathrm{Win}$, et on montre qu'il vérifie les conditions de cohérence demandées pour une catégorie de réponse. La négation est héritée de la négation syntaxique sur les formules : sur les objets, ce foncteur $\neg$ envoie chaque formule A sur la formule $\neg A$.

Afin de définir la négation sur les morphismes, on considère d'abord pour chaque affaiblissement (voir la définition 5.7) $w\colon X \longrightarrow X'$ le *foncteur d'affaiblissement* $W_w\colon \mathrm{V}/_X \longrightarrow \mathrm{V}/_{X'}$ qui envoie chaque vue sur X vers la vue sur X' obtenue par les commutations successives données par les lemmes 5.32 et 5.36. On peut alors définir $\neg$ sur les morphismes $A \longrightarrow B$ en prenant l'extension de Kan à gauche le long du foncteur :

$$
\mathrm{V}/_{A\vdash B} \xrightarrow{W_w} \mathrm{V}/_{(A,\neg B\vdash B)} \longrightarrow \mathrm{V}/_{(A,\neg B\vdash)} \longrightarrow \mathrm{V}/_{(\neg B\vdash\neg A)}, \tag{7.5}
$$

où

- $w\colon (A \vdash B) \longrightarrow (A, \neg B \vdash B)$ est l'affaiblissement évident entre les deux séquents,
- le foncteur du milieu est la post-composition avec la vue élémentaire qui joue le coup $(A, \neg B \vdash B) \longrightarrow (A, \neg B \vdash)$, et
- le dernier foncteur est la post-composition avec la vue élémentaire qui joue le coup $(A, \neg B \vdash) \longrightarrow (\neg B \vdash \neg A)$.

On définit de façon similaire, grâce aux résultats de commutation de la section 5.6.2, qu'il est également possible d'éliminer les affaiblissements sur les tuiles de descente, ce qui définit le foncteur d'affaiblissement $W_w\colon \mathrm{T}_{H/c_B} \longrightarrow \mathrm{T}_{H/c_{\neg B}}$, avec les coupures évidentes $c_B\colon A \vdash B \vdash C \longrightarrow A \vdash C$ et $c_{\neg B}\colon \neg C \vdash \neg B \vdash \neg A \longrightarrow \neg C \vdash \neg A$. Ceci revient à savoir construire, par induction sur les tuiles de descente, la face avant de diagrammes de la forme :

$$
\begin{tikzcd}
U_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "k_l"'] \arrow[dr, dashed, "w'_l"] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow t"] & & V_2 \arrow[dd, "k_r"] \arrow[dr, dashed, "w'_r"] & \\
& U'_2 \arrow[rr, dashed, "d'"] \arrow[dd, dashed, "k'_l"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow t'"] & & V'_2 \arrow[dd, dashed, "k'_r"] \\
U_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "w_l"'] & & V_1 \arrow[dr, "w_r"] & \\
& U'_1 \arrow[rr, "d"'] & & V'_1.
\end{tikzcd}
$$

Cette construction n'est possible, pour construire la face du haut, que dans le cas où w'_l est d'-équilibré. On montre que :

Lemme 7.36. *Si t est élémentaire et si d'une part w_l est d-équilibré et d'autre par w_l n'affaiblit pas les arêtes écrasées par d, alors il existe une tuile de descente t', et des affaiblissements w'_l et w'_r comme indiqués dans le diagramme précédent.*

L'affaiblissement w'_l est d'-équilibré et n'affaiblit pas les arêtes écrasées par d'.

Preuve. On obtient d'abord les faces :

$$
\begin{tikzcd}
U_2 \arrow[r, dashed, "w'_l"] \arrow[d, "k_l"'] & U'_2 \arrow[d, dashed, "k'_l"] \\
U_1 \arrow[r, "w_l"'] & U'_1
\end{tikzcd}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{tikzcd}
V_2 \arrow[r, dashed, "w'_r"] \arrow[d, "k_r"'] & V'_2 \arrow[d, dashed, "k'_r"] \\
V_1 \arrow[r, "w_r"'] & V'_1
\end{tikzcd}
$$

grâce aux systèmes de commutation 5.32 et 5.36.

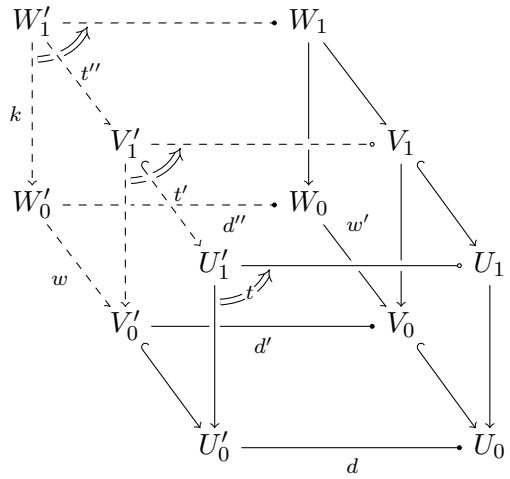
On considère ensuite la tuile de descente t' obtenue en faisant commuter k'_l avec d. Comme w_l n'affaiblit pas les arêtes écrasées par d, cette dernière écrase exactement les mêmes arêtes que la descente $U_1 \longrightarrow V_1$, donc k'_r est trivial si et seulement si k_r est trivial. Dans le cas où ces câbles ne sont pas triviaux, comme les coups sont caractérisés de manière unique par leur arête active et leur occurrence, la descente de k'_l le long de d est isomorphe à k'_r.

La face supérieure est une factorisation dans ContrFree$\llcorner$Contr. Comme w'_l et w'_r sont par construction deux affaiblissements, w'_l est d'-équilibré.

Les arêtes affaiblies par w'_l s'envoient sur des arêtes affaiblies par w_l par k'_l, tandis que les arêtes écrasées par d' s'envoient par ce même câble sur des arêtes écrasées par d : w'_l n'affaiblit par conséquent aucune arête écrasée par d'. $\square$

Ce résultat se généralise immédiatement par induction sur t'. On montre par ailleurs que l'on a trois propriétés de relèvement :

Lemme 7.37. *Si t est une tuile de descente, et k un câble tels que l'on a la partie en traits pleins du diagramme :*



alors on peut compléter avec les flèches notées en pointillés, de sorte que l'on ait :

— *un cube de descente $t' \longrightarrow t$,*

— *où t' est l'image de t'' par élimination des affaiblissements.*

Preuve. Les morphismes w et d'' sont obtenus par pullback de d' le long de w' (lemme 5.31). Les arêtes écrasées par d'' ne sont donc en particulier pas affaiblies par w.

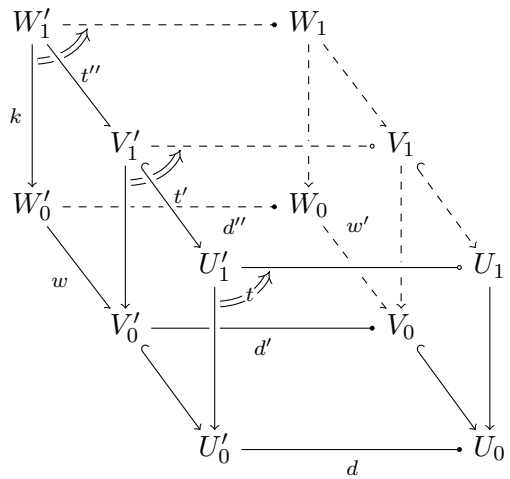
La tuile t' est obtenue en appliquant le lemme 7.9.

Pour construire t'', on se ramène par induction au cas où t' est élémentaire. Soit k' le bord droit de t' : c'est un câble élémentaire. L'arête active de k' a un antécédent par w dans W_0' : soit m le coup qui joue dans W_0' la même occurrence que le coup de k' sur cette arête. Le choix de composante connexe de k' donne un unique choix de composante connexe pour compléter m en un câble k.

On distingue ensuite selon la nature de $\operatorname{rig} t'$. S'il s'agit d'un câble trivial, alors comme d et d'' écrasent les mêmes arêtes (w n'affaiblit pas les arêtes écrasées par d''), alors m descent également sur un câble trivial, ce qui donne bien un cube de descente $t'' \longrightarrow t'$.

Dans le cas où $\operatorname{rig} t'$ n'est pas trivial, tous les coups partant de W_0, W_0', V_0' et V_0 jouent la même occurrence sur la même arête, ce qui assure que le câble k descend bien sur le câble $W_1 \longrightarrow W_0$. □

Lemme 7.38. *Si t est une tuile de descente, et k un câble tels que l'on a la partie en traits pleins du diagramme :*



où w est d'-équilibré, alors on peut compléter avec les flèches notées en pointillés, de sorte que l'on ait :

— *un cube de descente $t' \longrightarrow t$,*

— *où t' est l'image de t'' par élimination des affaiblissements.*

Preuve. Comme w est d'-équilibré, on peut factoriser w pour obtenir w' et d'' (partie arrière de la face inférieure).

La face du fond est construite par descente de k le long de d''. La tuile de descente t' du milieu est obtenue par élimination des affaiblissements.

On applique pour conclure le lemme 7.8 qui fournit une tuile de câbles sur la face droite pour compléter le diagramme avec un cube de descente $t' \longrightarrow t$. □

Lemme 7.39. *Soit $k' \colon V' \longrightarrow V$ un câble, et $w \colon U \longrightarrow V$ un affaiblissement tel que les arêtes affaiblies par w ne sont actives dans aucun coup de k'. On suppose que pour toute vue $v'_i \hookrightarrow k'$, on possède une vue v_i telle que $W_{w'}(v_i) = v'_i$, comme ci-dessous. Il existe alors un câble $k \colon U' \longrightarrow U$ et des tuiles de vues $\kappa_i \colon v_i \hookrightarrow k$ comme dans :*

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, dashed, "k"'] & & X'_i \arrow[ll, hook', dashed] \arrow[dr] \arrow[dd, "v_i"] & \\
& V' \arrow[dd, "k'"] & & W'_i \arrow[ll, hook', "\kappa_i"'] \arrow[dd, "v'_i"] \\
U \arrow[dr, "w"'] & & X_i \arrow[ll, hook', "h_i"] \arrow[dr, "w'"] & \\
& V & & W_i, \arrow[ll, hook']
\end{tikzcd}$$

où $W_w(k) = k'$.

Preuve. On se ramène par induction au cas où k' est élémentaire, et on décompose ce dernier en un plongement ouvert suivi d'un coup :

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, hook, "h'"] \arrow[rr, bend right, "k'"'] & V'' \arrow[r, "m'"] & V.
\end{tikzcd}$$

Chaque tuile de câbles $v'_i \longrightarrow k'$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{tikzcd}
W'_i \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "h'_i"] \arrow[dd, bend right, "v'_i"'] & V' \arrow[d, hook, "h'"'] \arrow[dd, bend left, "k'"] \\
W''_i \arrow[r, hook] \arrow[d, "m'_i"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & V'' \arrow[d, "m'"'] \\
W_i \arrow[r, hook] & V
\end{tikzcd}
\quad \text{ou} \quad
\begin{tikzcd}
& W'_i \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "h'_i"] \arrow[dl, equal] & V' \arrow[d, hook, "h'"'] \arrow[dd, bend left, "k'"] \\
W_i \arrow[ur, hook, bend left] \arrow[dr, equal] \arrow[drr, hook, bend right] & W''_i \arrow[r, hook] \arrow[d, "m'_i"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & V'' \arrow[d, "m'"'] \\
& W_i \arrow[r, hook] & V
\end{tikzcd}$$

et on reconstruit dans un premier temps un cube commutatif dont les faces avant et arrière sont des carrés commutatifs d'arêtes de droite respectivement $m_i h_i$ et $m'_i h'_i$, au lieu de tuiles

de câbles. Pour passer aux tuiles de câbles, il suffira de compléter ce cube dans les cas où les vues sont triviales.

Selon les signes de V et V', on est dans l'un des cas suivants :

— si V et V' sont de signes contraires, alors toutes les vues v'_i sauf une sont triviales ;

— si V et V' sont positives, alors toutes les vues v'_i sauf deux sont triviales. Quitte à les réordonner, ces deux vues sont v'_0 où W_0 est positive et W'_0 est négative, et v'_1 où W_1 est négative et W'_1 est positive ;

— le cas où V et V' sont négatives est impossible.

Soit $e \in \mathrm{edg}(U)$ l'antécédent par w de l'arête active de k' (qui existe bien par hypothèse). On définit le coup $m\colon U'' \longrightarrow U$ comme le coup qui joue la même occurrence que m' sur l'arête e. Autrement dit, m est obtenu par le pullback (lemme 5.31) :

$$\begin{tikzcd} U'' \arrow[r, "w''"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & V'' \arrow[d, "m'"] \\ U \arrow[r, "w"'] & V. \end{tikzcd}$$

On définit ensuite $h\colon U' \hookrightarrow V'$ par le pullback :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d, hook, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & V' \arrow[d, hook, "h'"] \\ U'' \arrow[r, "w''"'] & V''. \end{tikzcd}$$

Comme w'' préserve les composantes connexes, ce plongement est bien un plongement de composante connexe.

Pour chaque i, m_i est obtenu par pullback de m'_i le long de w'_i : par unicité, le pullback de m le long de h_i est bien le coup m_i. On construit de même h_i par pullback de h'_i le long de l'affaiblissement : par construction, h_i est un plongement de composante connexe. Par propriété universelle du pullback sur la face de gauche, il existe un morphisme $X'_i \longrightarrow U'$ qui fait commuter la face arrière. Cette flèche est un plongement ouvert d'après le lemme 3.15. □

Lemme 7.40. *Si l'on a un diagramme de la forme :*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[dr] \arrow[dd, "k"'] & & X' \arrow[ll, hook', dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, dashed, "v"] & \\ & V' \arrow[dd, "k'"'] & & W' \arrow[ll, hook', "\kappa"'] \arrow[dd, "v'"] \\ U \arrow[dr, "w"'] & & X \arrow[ll, hook', dashed, "h"] \arrow[dr, dashed, "w'"] & \\ & V & & W \arrow[ll, hook', "h'"] \end{tikzcd}$$

où k est un câble, w un affaiblissement, $k' = W_w(k)$, et où v' est une vue de k', alors il existe une tuile de vues $\kappa\colon v \longrightarrow k$ comme indiqué.

Preuve. On construit d'abord la face inférieure en prenant le pullback :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, "w'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & U \arrow[d, "w"] \\ W \arrow[r, hook, "h'"'] & V. \end{tikzcd}$$

On procède ensuite par induction sur k', en traitant le cas où k' est élémentaire. Comme au lemme 7.39, on construit d'abord le cube où les vues sur les arêtes de droite sont remplacées par un plongement précomposé par un coup. Lorsque cette composée est un isomorphisme, on retrouve les tuiles de vues en complétant le diagramme pour former la tuile de vues négative.

Le câble k' est élémentaire lorsque k l'est : on décompose ces câbles en $k = hm$ et $k' = h'm'$ où m et m' sont des coups et h et h' des plongements de composantes connexes.

Soit m_v le pullback de m le long de h. Graphiquement, on a :

$$\begin{tikzcd}
U'' \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[d, "m"'] & & X'' \arrow[dl, hook] \arrow[d, "m_v"] \arrow[dr, dashed, hook] & \\
& V'' \arrow[rr, hook] \arrow[d, "m'"'] & & W'' \arrow[d, "m_{v'}"] \\
U \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "w"'] & & X \arrow[dr, hook] & \\
& V \arrow[rr, hook] & & W
\end{tikzcd}$$

Par propriété universelle du pullback, il existe un morphisme $X'' \longrightarrow W''$ qui fait commuter le cube. D'après le lemme du pullback, la face de droite est un pullback et de plus son arête supérieure est un plongement ouvert.

Soit h_v le pullback de h' le long de w'' : par propriété universelle du pullback pour la face de gauche, il existe un morphisme $X' \longrightarrow U'$, qui, comme au lemme précédent, est un plongement de composante connexe. □

Proposition 7.41. *Le foncteur polynomial* (7.5) *définit bien un foncteur* $\mathrm{Win}^{op} \longrightarrow \mathrm{Win}$.

Preuve. La fonctorialité provient du fait que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V}_{/A;B;C} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\Sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(i)}"] & \mathrm{K}_{/A;B;C} \arrow[d, "\Sigma"'] \arrow[dl, phantom, "\text{(ii)}"] & \mathrm{T}_{H/c_B} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Sigma"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{K}_{/A;C} \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathrm{V}_{/\neg C;\neg B;\neg A} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathrm{K}_{/\neg C;\neg B;\neg A} & \mathrm{T}_{H/c_{\neg B}} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathrm{K}_{/\neg C;\neg A}.
\end{tikzcd}$$

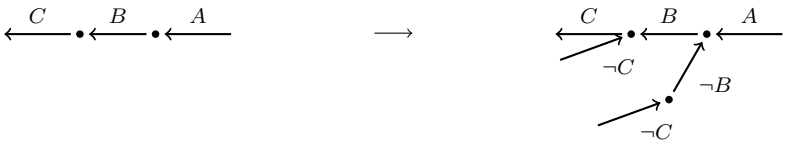
Les foncteurs polynomiaux horizontaux sont les foncteurs de descente en $A \vdash B \vdash C$ et $\neg C \vdash \neg B \vdash \neg A$, tandis que les foncteurs verticaux correspondent au foncteur de négation.

On note $F\colon \mathrm{K}_{/A;B;C} \longrightarrow \mathrm{K}_{/\neg C;\neg B;\neg A}$ et $G\colon \mathrm{T}_{H/c_B} \longrightarrow \mathrm{T}_{H/c_{\neg B}}$ les foncteurs correspondants dans le diagramme précédent. G est l'extension de Kan à gauche le long du foncteur :

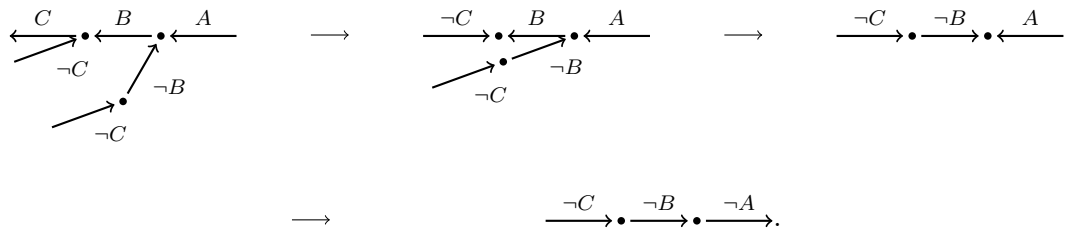
$$\mathrm{V}_{/A\vdash B\vdash C} \xrightarrow{W_w} \mathrm{V}_{/X} \longrightarrow \mathrm{V}_{/(\neg C\vdash\neg B\vdash\neg A)},$$

où :

— w est l'affaiblissement :



— le foncteur de droite est le foncteur précomposition par la partie p définie comme composée des coups :



Le carré (ii) est exact car si $t \in \mathrm{T}_{H/c_{\neg B}}$ est acceptée par le foncteur du bas alors il existe un câble $k' \in \mathrm{K}_{/A;B;C}$ accepté, et un morphisme $\operatorname{lef} t \longrightarrow Fk'$. Ceci implique en particulier que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

— $\operatorname{lef} t$ est un préfixe de p. Soit t_p la tuile de descente de bord gauche p, alors on a un cube de descente $t \longrightarrow t_p$, ce qui permet de se ramener au cas suivant ;

— ou alors p est un préfixe de $\operatorname{lef} t$.

Dans ce cas, quitte à raccourcir k', on peut choisir $\operatorname{lef} t = Fk'$. D'après le lemme 7.36 appliqué avec le câble k' et à la tuile de câbles $id_{\operatorname{lef} t}$, alors on a bien une tuile de descente t' telle que $t \longrightarrow Gt'$ (en réalité, $t = Gt'$ ici), et dont le bord gauche k' est accepté.

Pour le carré (i), on montre d'abord la réciproque du carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V}_{/A;B;C} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathrm{K}_{/A;B;C} \arrow[d, "\Delta"'] \\
\mathrm{V}_{/\neg C;\neg B;\neg A} \arrow[r, "\Pi"'] \arrow[ur, dashed, "\nless"] & \mathrm{K}_{/\neg C;\neg B;\neg A}.
\end{tikzcd}$$

Soit $k \in \mathrm{K}_{/A;B;C}$ est un câble accepté par le foncteur du haut, et $v' \in \mathrm{V}_{/\neg C;\neg B;\neg A}$ une vue $v' \longrightarrow Fk$. On est dans l'un des deux cas suivants :

— soit v' est une vue de p. Dans ce cas, v' se prolonge en une vue v_p, où v_p est une vue de p. On se ramène au cas suivant pour montrer que v_p est acceptée ce qui impliquera, par stabilité par préfixe, que v' est acceptée ;

— soit v' se décompose en $v'_p v_0$ où v_p est une vue de p.

Dans le second cas, on a donc un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[d, "k"'] \arrow[dr] & & \\
U \arrow[dr] & V' \arrow[r, hook] \arrow[d] & W' \arrow[d, "v'_0"] \\
& V'' \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"'] & W'' \arrow[d, "v_p"] \\
& V & W.
\end{tikzcd}$$

Ce dernier se complète d'après le lemme 7.40 avec une vue $v \longrightarrow k$ telle que $Fv = v'$. Comme k est accepté par le foncteur du haut, Fv est acceptée, donc v' est acceptée.

On a donc l'implication :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V}_{/A;B;C} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\Sigma"'] & \mathrm{K}_{/A;B;C} \arrow[d, "\Sigma"'] \\
\mathrm{V}_{/\neg C;\neg B;\neg A} \arrow[r, "\Pi"'] \arrow[ur, phantom, "\nleftarrow"] & \mathrm{K}_{/\neg C;\neg B;\neg A}.
\end{tikzcd}$$

et il reste à montrer sa réciproque, grâce au lemme 7.39. Soit $k \in \mathrm{K}_{/\neg C;\neg B;\neg A}$ un câble accepté par le foncteur du bas. On distingue trois cas :

— si k ne joue pas ses premiers coups comme p, i.e., si k n'est pas un préfixe de p, et si p n'est pas un préfixe de k, alors il existe une vue $v \hookrightarrow k$ qui n'admet par de morphisme vers l'image de F : autrement dit, k n'est pas accepté par le foncteur du bas ;

— si k est un préfixe de p, alors on prolonge k en p pour se ramener au cas suivant ;

— si k se décompose en pk_0. D'après le lemme 7.39, il existe un câble $k' \in \mathrm{K}_{/A;B;C}$ avec $Fk' = k$ et dont toutes les vues sont acceptées, ce qui prouve que k est accepté par le foncteur du haut.

□

On montre désormais que $\neg$ fait de Win une catégorie de réponse. On doit pour cela définir les isomorphismes $\varphi_{A,B,C} \colon \mathrm{Win}(A \times B, \neg C) \longrightarrow \mathrm{Win}(A, \neg(B \times C))$.

Définition 7.10. Soit $\varphi_{A,B,C}$ le foncteur polynomial défini sur les stratégies par

$$\mathrm{V}_{/A\times B\vdash\neg C} \xleftarrow{\Delta} \mathrm{V}_{/A\times B,C\vdash} \xleftarrow{\cong} \mathrm{V}_{/A,B,C\vdash} \xrightarrow{\cong} \mathrm{V}_{/A,B\times C\vdash} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{V}_{/A\vdash\neg(B\times C)},$$

où les foncteurs sont, respectivement de gauche à droite :

— la post-composition par $(A \times B, C \vdash) \longrightarrow (A \times B \vdash \neg C)$,

— le foncteur qui remplace tout coup éventuel sur A ou B par le coup correspond sur $A \times B$, et qui fusionne les arêtes A et B sur une seule arête $A \times B$,

— la même opération avec B et C,

— la post-composition par $(A, B \times C \vdash) \longrightarrow (A \vdash \neg(B \times C))$.

Lemme 7.42. *Les $\varphi_{A,B,C}$ sont des isomorphismes.*

Preuve. Tous les foncteurs polynomiaux dans la définition précédente sont des isomorphismes sur les stratégies non vides et réceptives. □

Théorème 7.43. *Les $\varphi_{A,B,C}$ donnent une structure de réponse sur* Win.

Pour montrer le résultat précédent, il reste à prouver que les $\varphi_{A,B,C}$ sont :

— naturels en A, B et C ;

— vérifient le diagramme de cohérence de la définition 2.3.

La naturalité se prouve en exploitant encore les techniques de preuves des foncteurs polynomiaux :

Lemme 7.44. *Les $\varphi_{A,B,C}$ sont naturels en A, B et C.*

Preuve. On prouve simultanément la naturalité sur chaque composante, en montrant que le diagramme de foncteurs polynomiaux suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{l}\mathrm{V}/A';A+\\ \mathrm{V}/B';B+\\ \mathrm{V}/C';C+\\ \mathrm{V}/A\times B;\neg C\end{array} \arrow[d, "\Sigma"'] & \begin{array}{l}\mathrm{V}/A';A+\\ \mathrm{V}/B';B+\\ \mathrm{V}/C';C+\\ \mathrm{V}/A,B,C;\end{array} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[dd, "\cong"] & \begin{array}{l}\mathrm{V}/A';A+\\ \mathrm{V}/B';B+\\ \mathrm{V}/C';C+\\ \mathrm{V}/A;\neg(B\times C)\end{array} \arrow[d, "\Sigma"] \\
\begin{array}{l}\mathrm{V}/A'\times B';A\times B+\\ \mathrm{V}/\neg C;\neg C'+\\ \mathrm{V}/A\times B;\neg C\end{array} \arrow[d, "\cong"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\text{(i)}}{\Leftarrow}"] & & \begin{array}{l}\mathrm{V}/A';A+\\ \mathrm{V}/\neg(B\times C);\neg(B'\times C')+\\ \mathrm{V}/A;\neg(B\times C)\end{array} \arrow[d, "\cong"] \arrow[l, phantom, "\overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}"] \\
\mathrm{V}/A'\times B';A\times B;\neg C;\neg C' \arrow[d, "\Pi"'] & \mathrm{V}/X \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Pi"] \arrow[r, phantom, "\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}"] & \mathrm{V}/A';A;\neg(B\times C);\neg(B'\times C') \arrow[d, "\Pi"] \arrow[dl, phantom, "\text{(v)}"] \\
\mathrm{K}/A'\times B';A\times B;\neg C;\neg C' \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, phantom, "\overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}"] & \mathrm{K}/X \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, phantom, "\overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow}"] & \mathrm{K}/A';A;\neg(B\times C);\neg(B'\times C') \arrow[u, "\Delta"] \\
\mathrm{T}_{H/c_{A\times B,\neg C}} \arrow[d, "\Sigma"'] & \mathrm{T}_{H/c_X} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Sigma"] \arrow[r, phantom, "\overset{\text{(iv)}}{\Leftarrow}"] & \mathrm{T}_{H/c_{A,\neg(B\times C)}} \arrow[d, "\Sigma"] \arrow[l, phantom, "\overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}"] \\
\mathrm{K}/A'\times B';\neg C' & \mathrm{K}/A',B',C'; \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathrm{K}/A';\neg(B'\times C')
\end{tikzcd}
$$

où X est la position

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr, "A"] & & \\
& \bullet & C \arrow[l] & C' \arrow[l] \\
B' \arrow[ur, "B"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Les implications triviales ou données par Beck-Chevalley sont indiquées en pointillés. Parmi les six implications qu'il reste à vérifier, la réciproque du carré (i) est donnée grâce à la proposition 6.5.

Pour la réciproque de (ii), on note $F\colon \mathrm{K}/X \longrightarrow \mathrm{K}/A'\times B';A\times B;\neg C;\neg C'$ le foncteur correspondant dans le diagramme. On se donne un câble $k \in \mathrm{K}/X$ ainsi qu'une vue $v' \longrightarrow Fk$, avec $v' \in \mathrm{V}/A'\times B';A\times B;\neg C;\neg C'$. En supposant que k est accepté par le foncteur du haut, il faut montrer que v' est acceptée. Quitte à prolonger v' en une vue v'', on peut supposer que l'on a les traits pleins d'un diagramme de la forme :

$$
\begin{tikzcd}
V_2' \arrow[rr, hook, dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, dashed, "v"'] & & V_2 \arrow[dr] \arrow[dd, "k"'] & \\
& U_2' \arrow[rr, hook] \arrow[dd] \arrow[ur, Rightarrow] & & U_2 \arrow[dd] \arrow[ddd, bend left, "Fk"] \\
V_1' \arrow[rr, hook, dashed] \arrow[dr, dashed] & & V_1 \arrow[dr] & \\
& U_1' \arrow[rr, hook] \arrow[dd] \arrow[uur, Rightarrow] & & U_1 \arrow[dd, "p"'] \\
& & & \\
& U_0' \arrow[rr, hook] \arrow[uuu, bend left, "v''"] & & U_0,
\end{tikzcd}
$$

où p est la suite des deux coups négation sur C' puis C. Grâce au lemme 7.40, on reconstruit la vue v de k comme indiqué. Comme k est accepté par le foncteur du haut, l'existence de la tuile de câbles $v \longrightarrow k$ implique que $Fv = v''$ est acceptée. La vue v' est un préfixe de v'', donc v' est acceptée.

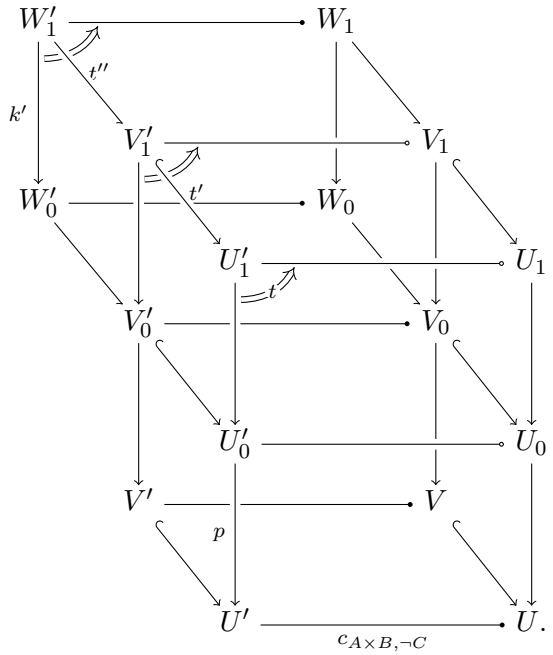
La réciproque de (iii) se prouve de la même manière que la réciproque du carré (ii) en proposition 7.41.

Prouver la réciproque de (iv) revient, d'après la proposition 6.2, à prouver la réciproque du carré :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{H/c_{A\times B,\neg C}} \arrow[d, "\Delta"'] & \mathrm{T}_{H/c_X} \arrow[l, "\Pi"'] \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathrm{K}_{/A'\times B';\neg C'} \arrow[ur, dashed, Rightarrow] & \mathrm{K}_{/A',B',C'}; \arrow[l, "\Pi"]
\end{tikzcd}
\tag{7.6}
$$

sur lequel on a noté l'implication donnée par Beck-Chevalley.

On utilise pour cela le lemme 7.37. Soient t une tuile de $\mathrm{T}_{H/c_{A\times B,\neg C}}$ et $k' \in \mathrm{K}_{/A',B',C'}$ un câble tels qu'il existe une tuile de câbles $F(k') \longrightarrow \operatorname{rig} t$. Il faut montrer que k' est accepté. On décompose t en séparant les coups de p du reste de la tuile. Concrètement, on dispose de la face droite et de la face avant du diagramme :



Le cube de descente inférieur est construit par descente, tandis que les cubes supérieurs d'élimination des affaiblissements (à l'arrière) et de descente (à l'avant) sont construits par le lemme 7.37. Il existe donc une tuile de descente $t'' \in \mathrm{T}^{+}_{H/c_B}$ de bord droit k', et un cube de descente $G(t'') \longrightarrow t$. Par le foncteur du haut, t'' est acceptée, donc k' est accepté.

Le carré (v) se prouve de la même manière que le carré (i) à la proposition 7.41. □

Il reste à montrer que les $\varphi_{A,B,C}$ sont des isomorphismes et vérifient le diagramme de cohérence de la définition 2.3. Pour ce dernier point, afin de pouvoir utiliser ici encore les mêmes techniques que précédemment sur les foncteurs polynomiaux, il est nécessaire d'exprimer chaque partie de ce diagramme comme un foncteur polynomial. Si pour $\varphi_{A,B,C}$, ceci provient de sa définition, le diagramme fait cependant intervenir l'associativité du produit cartésien (par précomposition par α^{-1}). Nous avons donc besoin du lemme suivant :

Lemme 7.45. *La précomposition par α^{-1} :*

$$\mathrm{Win}(\alpha^{-1}_{A,B,C}, D)\colon \mathrm{Win}(A \times (B \times C), D) \longrightarrow \mathrm{Win}((A \times B) \times C, D)$$

est égale au changement de base le long de

$$\mathrm{V}_{/(A\times(B\times C)\vdash D)} \cong \mathrm{V}_{/(A,B,C\vdash D)} \cong \mathrm{V}_{/((A\times B)\times C\vdash D)}.$$

Preuve. Soit σ une stratégie dans $\mathrm{Win}(A \times (B \times C), D)$. Les câbles de $(\alpha^{-1} \mid \sigma)$ sont des câbles sur la position

$$\xrightarrow{(A\times B)\times C} \bullet \xrightarrow{A\times(B\times C)} \circ \xrightarrow{D}$$

Par induction sur les câbles de $(\alpha^{-1} \mid \sigma)$, pour chaque vue v de σ, il existe un unique câble k sur la position complète qui admet v comme vue (dans K^0). Le morphisme $v \longrightarrow k$ dans K^0

se décompose en un empilement de tuiles des formes :

$$\begin{tikzcd}
 & V' \arrow[d] \\
U' \arrow[ur, hook] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\bullet\to\circ"] & V'' \arrow[d] \\
U \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook, "l\to\bullet"] & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & V' \arrow[d] \\
U' \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook, "\bullet\to t"] \arrow[d] & V'' \arrow[d] \\
U \arrow[r, hook, "\circ\to\bullet"] & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "r\leftrightarrow\circ"] & V' \arrow[d] \\
U \arrow[r, hook] & V
\end{tikzcd}$$

où l'on note, dans chaque tuile élementaire :

— $l \longrightarrow \bullet$ quand une des copies du sommet plein reçoit un coup négatif sur son arête à gauche ;

— $\bullet \longrightarrow l$ quand une des copies du sommet plein joue un coup positif sur une arête à gauche ;

— $\circ \longrightarrow \bullet$ quand une des copies du sommet creux passe la main à un sommet plein adjacent ;

— $\bullet \longrightarrow \circ$ quand une des copies du sommet plein passe la main à un sommet creux adjacent ;

— $r \longleftrightarrow \circ$ pour les coups échangés une copie de l'arête de droite, i.e., quand une des copies du sommet creux joue un coup positif sur une arête de droite, ou quand une des copies du sommet creux reçoit un coup négatif depuis son arête de droite.

Par descente, on a donc une décomposition des tuiles acceptées dans $\mathrm{T}_{H/c_{A(BC)}}$ de la forme (on remet les tuiles de câbles correspondantes sur la partie gauche de chaque diagramme) :

$$\begin{tikzcd}
 & V' \arrow[d] \arrow[dr] & \\
U' \arrow[ur, hook] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\bullet\to\circ"] & V'' \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[d] \\
U \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook, "l\to\bullet"] & V \arrow[r] & W
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & V' \arrow[d] \arrow[dr] & \\
U' \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook, "\bullet\to t"] \arrow[d] & V'' \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[d] \\
U \arrow[r, hook, "\circ\to\bullet"] & V \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "r\leftrightarrow\circ"] & V' \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[d] \\
U \arrow[r, hook] & V \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

Dans les deux premiers diagrammes, l'étiquette de l'arête active sur le bord gauche est :

— soit une sous-formule de A, B ou C, dans ce cas l'arête active à droite porte la même formule, et les deux coups jouent la même occurrence ;

— soit $(A \times B) \times C$, dans ce cas l'arête active à droite porte l'étiquette $A \times (B \times C)$, et la vue joue la même occurrence au parenthésage près.

En composant, les bords droits de ces diagrammes sont exactement les images des bords gauches par le changement de base annoncé. □

Preuve du théorème 7.43. On a prouvé au lemme 7.44 que les $\varphi_{A,B,C}$ sont naturels. Il reste

à montrer que ce sont des isomorphismes qui satisfont le diagramme de cohérence :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Win}(A \times (B \times C), \neg D) \arrow[r, "\mathrm{Win}(\alpha^{-1}, \neg D)"] \arrow[dd, "\varphi_{A,B\times C,D}"'] & \mathrm{Win}((A \times B) \times C, \neg D) \arrow[d, "\varphi_{A\times B,C,D}"] \\
& \mathrm{Win}(A \times B, \neg(C \times D)) \arrow[d, "\varphi_{A,B,C\times D}"] \\
\mathrm{Win}(A, \neg((B \times C) \times D)) \arrow[r, "\mathrm{Win}(A, \neg\alpha)"'] & \mathrm{Win}(A, \neg(B \times (C \times D))).
\end{tikzcd}$$

Le diagramme de cohérence est vérifié, car d'après le lemme 7.45, il suffit de vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V}_{/(A\times(B\times C)\vdash\neg D)} \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{V}_{/(A,B,C\vdash\neg D)} \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{V}_{/((A\times B)\times C\vdash\neg D)} \\
& & \mathrm{V}_{/((A\times B),C,D\vdash)} \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathrm{V}_{/(A,(B\times C),D\vdash)} \arrow[uu, "\Delta"] \arrow[r, "\cong"] \arrow[dd, "\Sigma"'] \arrow[dr, phantom, "(\star)"] & \mathrm{V}_{/(A,B,C,D\vdash)} \arrow[uu, "\Delta"] \arrow[dd, equal] \arrow[ur, "\cong"] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathrm{V}_{/(A\times B\vdash\neg(C\times D))} \\
& & \mathrm{V}_{/(A,B,C\times D\vdash)} \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathrm{V}_{/(A\vdash\neg((B\times C)\times D))} & \mathrm{V}_{/(A,B,C,D\vdash)} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathrm{V}_{/(A\vdash\neg(B\times(C\times D)))},
\end{tikzcd}$$

commute sur les stratégies non-vides et réceptives. Les seules parties non triviales sont marquées avec $(\star)$, mais elles sont exactes car les foncteurs sont pleinement fidèles (proposition 6.4). $\square$

Bibliographie

[1] Samson Abramsky, Radha Jagadeesan et Pasquale Malacaria : Full abstraction for pcf. *Information and Computation*, 163:409–470, 1996.

[2] Jiří Adámek, Horst Herrlich et George Strecker : *Abstract and concrete categories*. Wiley-Interscience, 1990. URL : `http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf`.

[3] Jean-Marc Andreoli : Focussing and proof construction. *Annals of Pure and Applied Logic*, 107:131–163, 2001. URL : `db/journals/apal/apal107.html#Andreoli01`.

[4] S. Arun-Kumar et Naveen Garg, éditeurs. *FSTTCS 2006 : Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, 26th International Conference, Kolkata, India, December 13-15, 2006, Proceedings*, volume 4337 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2006.

[5] Adam Bakewell et Dan R. Ghica : On-the-fly techniques for game-based software model checking. *In* Ramakrishnan et Rehof [44], pages 78–92.

[6] Michele Basaldella et Claudia Faggian : Ludics with repetitions (exponentials, interactive types and completeness). *Logical Methods in Computer Science*, 7, 2011. URL : `http://arxiv.org/abs/1104.0504`, doi :10.2168/LMCS-7(2 :13)2011.

[7] Marta Bílková, Alexander Kurz, Daniela Petrişan et Jiří Velebil : Relation liftings on preorders and posets. *In Algebra and Coalgebra in Computer Science*, pages 115–129. Springer, 2011. URL : `http://arxiv.org/abs/1210.1433`.

[8] Richard Blute, R. Cockett, R. A. G. Seely et Todd Trimble : Natural deduction and coherence for weakly distributive categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 113(3):229–296, 1996. URL : `http://aix1.uottawa.ca/~rblute/bcst.ps`.

[9] Thierry Coquand : A semantics of evidence for classical arithmetic. *Journal of Symbolic Logic*, 60(1):325–337, 1995.

[10] Roy L. Crole : *Categories for Types*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 1993. xvii+335 pages.

[11] René David : Normalization without reducibility. *Annals of Pure and Applied Logic*, 107, 2001.

[12] René David et Karim Nour : A short proof of the strong normalization of classical natural deduction with disjunction. *Journal of Symbolic Logic*, 68(4), 2003.

[13] Charles Ehresmann : Catégories structurées. *In Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 80, pages 349–426. Société mathématique de France, 1963.

[14] Charles Ehresmann : *Catégories et structures*, volume 10. Dunod, 1965.

[15] Peter Freyd et G. M. Kelly : Categories of continuous functors, I. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2:169–191, 1972.

[16] Fabio Gadducci et Ugo Montanari : The tile model. *In Proof, Language, and Interaction*, pages 133–166, 2000.

[17] Dan R. Ghica et Andrzej S. Murawski : Angelic semantics of fine-grained concurrency. *Ann. Pure Appl. Logic*, 151(2-3):89–114, 2008.

[18] Marco Grandis et Robert Paré : Limits in double categories. *Cahiers de Topologie et Géometrie Differentielle Catégoriques*, 40:162–220, 1999.

[19] René Guitart : Relations et carrés exacts. *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 4(2):103–125, 1980.

[20] Russ Harmer : *Games and Full Abstraction for Nondeterministic Languages.* Thèse de doctorat. URL : `http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~russ/tesi.ps.gz`.

[21] Russ Harmer, Martin Hyland et Paul-André Melliès : Categorical combinatorics for innocent strategies. *In Logic in Computer Science, 2007. LICS 2007. 22nd Annual IEEE Symposium on*, pages 379–388. IEEE, 2007.

[22] Florian Hatat et Tom Hirschowitz : A Graphical Game Semantics for MLL. *In Fifth International Conference on Topology, Algebra and Categories in Logic - TACL 2011*, Marseille, France, juillet 2011.

[23] André Hirschowitz, Michel Hirschowitz et Tom Hirschowitz : Topological observations on multiplicative additive linear logic. URL : `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00295949`.

[24] Dominic J. D. Hughes : Simple free star-autonomous categories and full coherence. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 216:2386–2410, november 2012. URL : `http://boole.stanford.edu/~dominic/papers/freestar/freestar.pdf`, doi :10.1016/j.jpaa.2012.03.020.

[25] J. Martin E. Hyland et C.-H. Luke Ong : On Full Abstraction for PCF : I, II, and III. *Information and Computation*, 163(2):285–408, 2000. doi :10.1006/inco.2000.2917.

[26] C. Barry Jay et Neil Ghani : The virtues of eta-expansion. *Journal of functional programming*, 5(02):135–154, 1995.

[27] Peter T Johnstone : *Sketches of an elephant : a topos theory compendium*, volume 2. Oxford University Press on Demand, 2002.

[28] André Joyal, Mogens Nielsen et Glynn Winskel : Bisimulation and open maps. *In Proceedings, Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 19-23 June 1993, Montreal, Canada*, pages 418–427. IEEE Computer Society, 1993. doi :10.1109/LICS.1993.287566.

[29] André Joyal, Mogens Nielsen et Glynn Winskel : Bisimulation from open maps. *Information and Computation*, 127(2):164–185, 1996.

[30] Joachim Kock : Notes on polynomial functors. Draft, 2009. URL : `http://mat.uab.cat/~kock/cat/polynomial.html`.

[31] Joachim Kock : Polynomial functors and trees. *International Mathematics Research Notices*, pages 609–673, 2011. URL : `http://mat.uab.es/~kock/cat/trees.html`.

[32] Yves Lafont, Bernhard Reus et Thomas Streicher : Continuations Semantics or Expressing Implication by Negation. Rapport technique 9321, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1993. URL : `http://iml.univ-mrs.fr/~lafont/pub/continuation.ps`.

[33] James Laird : Game semantics for higher-order concurrency. *In* Arun-Kumar et Garg [4], pages 417–428.

[34] Saunders Mac Lane : *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, seconde édition, 1998.

[35] Saunders Mac Lane et Ieke Moerdijk : *Sheaves in Geometry and Logic*. Universitext. Springer, 1992.

[36] Paul-André Melliès : Double categories : a modular model of multiplicative linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 12:449–479, 2002.

[37] Paul-André Melliès : Asynchronous games 2 : The true concurrency of innocence. *Theor. Comput. Sci.*, 358(2-3):200–228, 2006.

[38] Hanno Nickau : Hereditarily sequential functionals. *In Logical Foundations of Computer Science, Third International Symposium, LFCS'94, St. Petersburg, Russia, July 11–14, 1994, Proceedings*, volume 813 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 253–264. Springer, 1994. doi :10.1007/3-540-58140-5_25.

[39] nLab : Exact squares, 2011. [Online ; accessed 2013-04-15]. URL : `http://ncatlab.org/nlab/show/exact+square`.

[40] nLab : Ternary factorisation systems, 2011. [Online ; accessed 13-June-2012]. URL : `http://ncatlab.org/nlab/show/ternary+factorization+system`.

[41] nLab : Double category, 2013. [Online ; accessed 2013-09-16]. URL : `http://ncatlab.org/nlab/show/double+category`.

[42] Damien Pous et Tom Hirschowitz : Innocent strategies as presheaves and interactive equivalences for ccs. *Sci. Ann. Comp. Sci.*, 22(1):147–199, 2012. URL : `db/journals/cuza/cuza22.html#HirschowitzP12`.

[43] Aleš Pultr et Walter Tholen : Free Quillen Factorization Systems. *Georgian Mathematical Journal*, 9(4), 2002.

[44] C. R. Ramakrishnan et Jakob Rehof, éditeurs. *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems, 14th International Conference, TACAS 2008, Held as Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software, ETAPS 2008, Budapest, Hungary, March 29-April 6, 2008. Proceedings*, volume 4963 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2008.

[45] Peter Selinger : Some remarks on control categories. Rapport technique, 2003.

[46] Nicolas Tabareau : *Modalités de ressource et contrôle en logique tensorielle*. Thèse de doctorat. URL : `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00339149`.

[47] Walter Tholen et George Janelidze : Facets of descent, I. *Applied Categorical Structures*, 2(3):245–281, 1994.

[48] Angelo Vistoli : Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory. *In Fundamental algebraic geometry*, volume 123 de *Math. Surveys Monogr.*, pages 1–104. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

Résumé

Ce travail est une contribution à la sémantique de jeux des langages de programmation. Il présente plusieurs méthodes nouvelles pour construire une sémantique de jeux pour un λ-calcul de continuations.

Si les sémantiques de jeux ont été développées à grande échelle pour fournir des modèles de langages fonctionnels avec références, en appel par nom et par valeur, ou pour différents fragments de la logique linéaire, certains de leurs aspects demeurent cependant très subtils. Cette thèse s'intéresse spécifiquement à la notion d'innocence et à la combinatoire mise en jeu dans la composition des stratégies innocentes, en donnant pour chacune une interprétation via des constructions catégoriques standards.

Nous reformulons la notion d'innocence en termes de préfaisceaux booléens sur une catégorie de vues. Pour cela, nous enrichissons la notion de partie dans notre sémantique de jeux en ajoutant des morphismes entre parties qui vont au-delà du simple ordre préfixe habituel. À partir d'une stratégie, donnée par les vues qu'elle accepte, on calcule son comportement sur toutes les parties en prenant une extension de Kan à droite.

La composition des stratégies innocentes s'appuie sur les notions catégoriques habituelles de systèmes de factorisation et de foncteurs polynomiaux. Notre sémantique permet de modéliser l'interaction entre deux stratégies comme une seule stratégie dont il faut parvenir à cacher les coups internes, grâce à une technique d'élimination des coupures : cette étape est accomplie avec une version affaiblie des systèmes de factorisation. La composition de stratégies repose pour sa part sur l'utilisation de la théorie des foncteurs polynomiaux. Les propriétés essentielles, telles que l'associativité ou la correction de la sémantique, proviennent d'une méthode de preuve presque systématique donnée par cette théorie.

Abstract

This work is a contribution to game semantics for programming languages. We describe new methods used to define a game semantics for a λ-calculus with continuations.

Game semantics have been widely used to provide models for functional programming languages with references, using call-by-name or call-by-value, or for different fragments of linear logic. Yet, some parts of these semantics are still highly subtle. This work mainly deals with the notion of innocence, and with combinatorics involved in composing innocent strategies. We provide both of them with an interpretation which relies on standard categorical constructions.

We reformulate innocence in terms of boolean presheaves over a given category of views. We design for this purpose an enriched class of plays, by adding morphisms which do not appear in the traditional preorder of plays. We show how to compute the global behaviour, i.e., on every play, of a strategy given by its class of accepted views by taking a right Kan extension.

Our composition of innocent strategies relies on the usual categorial notions of factorisation systems and polynomial functors. In our semantics, the interaction between two strategies is itself a strategy, in which we must hide internal moves with a cut-elimination process. This step is given by a weakened version of factorisations systems. Composition of strategies involves material borrowed from polynomial functors theory. This theory yields a systematic proof method for showing essential properties, such as associativity of composition, or correction of our semantics.