HAL
open science

Modélisation, analyse et simulation numérique de solides combinant plasticité, rupture et dissipation visqueuse

Lukáš Jakabčin

To cite this version:

Lukáš Jakabčin. Modélisation, analyse et simulation numérique de solides combinant plasticité, rupture et dissipation visqueuse. Modélisation et simulation. Université de Grenoble, 2014. Français. NNT : 2014GRENM043 . tel-01549112

HAL Id: tel-01549112

https://theses.hal.science/tel-01549112v1

Submitted on 28 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

Arrêté ministériel : 07 août 2006

Présentée par

Lukáš Jakabčin

Thèse dirigée par **Eric Bonnetier et Stéphane Labbé**

préparée au sein **Laboratoire Jean Kuntzmann**
et de **L'Ecole Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

Modélisation, analyse et simulation numérique de solides combinant plasticité, rupture et dissipation visqueuse

Thèse soutenue publiquement le **22 septembre 2014**,
devant le jury composé de :

M. Gilles Francfort
Professeur, Université Paris Nord, Rapporteur
M. Patrick Laborde
Professeur, Université Paul Sabatier, Rapporteur
M. Olivier Pantz
Professeur, Ecole Polytechnique, Examinateur
Mme. Annie Raoult
Professeur, Université René Descartes, Examinatrice
M. Eric Bonnetier
Professeur, Université Joseph Fourier, Directeur de thèse
M. Stéphane Labbé
Professeur, Université Joseph Fourier, Directeur de thèse
M. Dorin Bucur
Professeur, Université de Savoie, Invité

A mon épouse Miloslava,
et à mes enfants Kristina et Štefan.

Remerciements

Voilà. Quatre belles années enrichissantes et passionnantes de ma thèse se terminent. C'est le moment de remercier les personnes qui m'ont permis de vivre cette aventure.

Tout d'abord, je voudrais exprimer toute ma gratitude à Eric Bonnetier et Stéphane Labbé qui ont accepté de diriger cette thèse. Leurs conseils, leurs connaissances scientiques et leurs qualités humaines m'ont permis d'effectuer mon travail dans des conditions optimales.

Je remercie Gilles Francfort et Patrick Laborde qui ont accepté de rapporter sur mes travaux de thèse. En particulier, je les remercie pour la lecture detaillée de mon manucrit, pour leur intérêt pour mon travail, pour leurs remarques et leurs précieux conseils.

Merci à Dorin Bucur, Olivier Pantz et Annie Raoult qui m'ont fait l'honneur et le plaisir de faire partie de mon jury.

Je remercie particulièrement Anne Replumaz qui m'a introduit le problème de la tectonique des plaques et de la plasticine et ainsi le côté applicatif de mon travail. C'était un plaisir pour moi d'échanger avec elle et découvrir quelques thèmes de recherche dans les sciences géophysiques.

Je remercie aussi Jean-François Babadjian qui a porté intérêt à mon travail et a relu mon manuscrit avec soins. Ses remarques m'ont été utiles.

Merci aux membres de l'équipe EDP qui m'ont accueilli chaleureusement au sein du Laboratoire Jean Kuntzmann où j'ai passé mes années de thèse.

Je n'oublie pas les thésards que j'ai pu rencontrer durant ma thèse. Leur présence était un réconfort.

Résumé

Nous nous intéressons à des modèles de matériaux qui peuvent exhiber plusieurs mécanismes dissipatifs, plasticité, rupture et dissipation visqueuse, du point de vue de l'analyse mathématique et de la simulation numérique. La rupture est modélisée de manière approchée par la fonctionnelle d'Ambrosio et Tortorelli, suivant les travaux de B. Bourdin. Les modèles étudiés vérifient une inégalité de dissipation de type Clausius-Duhem. Nous définissons l'évolution du comportement de tels matériaux à partir d'une semi-discrétisation en temps. Quand le pas de temps tend vers 0, nous montrons l'existence de solutions du problème d'évolution limite pour deux modèles particuliers. La loi de plasticité du premier permet un contrôle ponctuel uniforme du tenseur de taux de déformation élastique. Pour le deuxième, la loi de rupture approchée utilise un r-laplacien et induit de la compacité sur le champ v qui décrit la rupture. Nous étudions ces modèles numériquement en fonction de leurs paramètres mécaniques : nous montrons en particulier que pour certains régimes de paramètres, les différents mécanismes de dissipation peuvent s'exprimer. Nous utilisons les modèles étudiés pour reproduire numériquement une expérience de G. Peltzer et P. Tapponnier sur la plasticine, qui modélise l'action de la plaque indienne sur le plateau tibétain et les failles géologiques résultantes.

Abstract

We are interested in material models that may exhibit several dissipation mechanisms, plasticity, fracture and viscous dissipation, from the point of view of the mathematical analysis and the numerical simulation. The fracture is modeled in an approximate way using the Ambrosio Tortorelli functional, following the work of B. Bourdin. The studied models verified a dissipation inequality of Clausius-Duhem type. We define the evolution of the behavior of such materials using a semi-discretization in time. As the time step tends to 0, we show the existence of solutions of a limiting evolution problem for two particular models. For the first model, the plastic law allows a uniform control of the tensor of the elastic rate deformation. For the second, we approximate fracture using a r-Laplacian, which induces compactness of the field v which describes fracture. We study these models numerically, according to their mechanical parameters : we show in particular that for some parameters, different dissipation mechanisms can be expressed. We numerically reproduce the plasticine experiment of G. Peltzer and P. Tapponnier, which models the action of the Indian plate on the Tibetan plateau and the resulting geological faults.

Table des matières

Introduction générale **15**

1 Modélisation de matériaux dissipatifs par des modèles d'évolution de plasticité et de rupture **21**
1.1 Introduction 21
1.2 Modèles de plasticité 21
1.2.1 Modèle d'évolution en élasto-plasticité parfaite 21
1.2.2 Modèle d'évolution élasto-visco-plastique 24
1.2.3 Modèle d'évolution élasto-viscoplastique 25
1.2.4 Modèle d'évolution d'écrouissage cinématique linéaire . 26
1.2.5 Conclusion 27
1.3 Modèles de ruptures 27
1.3.1 Modèle de Griffith 27
1.3.2 Modèle de Francfort et Marigo 29
1.3.3 Modèle de Francfort-Larsen 31
1.3.4 Modèle d'évolution de rupture de Giacomini 31
1.3.5 Modèle d'évolution de rupture de Babadjian-Millot . . 32
1.4 Modèles dissipatifs 33
1.4.1 Modèle d'Ortner-Larsen-Süli - Rupture et viscoélasticité 33
1.4.2 Modèle de Dal Maso-Toader - Rupture et plasticité . . 35
1.5 Conclusion 37

2 Construction d'une classe de modèles d'évolution de plasticité et de rupture **39**
2.1 Introduction 39
2.2 Définitions et propriétés mathématiques 39
2.3 Formulation des modèles 43
2.4 Lien des modèles avec la thermodynamique 45
2.4.1 Cadre thermodynamique 45
2.4.2 Preuve formelle de l'égalité d'énergie et d'une inégalité de type Clausius-Duhem 46

2.5 Conclusion 51

3 An elasto-viscoplastic evolution model with regularized fracture : Model 1 53
3.1 Introduction 55
3.2 Formulation of the model 56
3.2.1 Preliminaries and mathematical setting 56
3.2.2 The elasto-visco-plastic evolution with regularized fracture 59
3.3 Existence result 60
3.3.1 Time discretization 60
3.3.2 A priori estimates 63
3.3.3 Compactness results 68
3.3.4 Passage to the limit in the equilibrium condition 69
3.3.5 Strong compactness result for the elastic strain 71
3.3.6 Passage to the limit in the plastic flow rule 78
3.3.7 Passage to the limit in the crack propagation condition 79
3.4 Conclusion 80

4 Existence of solutions to an elasto-viscoplastic model with kinematic hardening and r-Laplacian fracture approximation : Model 4. 81
4.1 Introduction 83
4.2 Description of the model 84
4.2.1 Preliminaries and mathematical setting 84
4.2.2 The evolution for elasto-viscoplastic model with linear kinematic hardening and fracture 86
4.3 Proof of the existence theorem 87
4.3.1 Time discretization 87
4.3.2 A priori estimates 90
4.3.3 Compactness results 93
4.3.4 The proof of Theorem 4.2.1 102
4.4 Conclusion 104

5 Etude numérique 1D et 2D des modèles 1, 2 et 3 105
5.1 Introduction 105
5.2 Préliminaires mathématiques et numériques 106
5.3 Evolution semi-discrète 107
5.4 Algorithme de minimisation alternée 109
5.4.1 Un algorithme de minimisation alternée 109
5.4.2 Backtracking 111

5.5 Calcul numérique du tenseur plastique p 113
5.5.1 Calcul de p pour le Modèle 1 114
5.5.2 Calcul du tenseur plastique p pour les modèles 2 et 3 . 116
5.6 Simulations numériques 117
5.6.1 Expérience de traction 1D 117
5.6.2 Expériences numériques de traction 2D - Modèle 3 . . 122
5.6.3 Simulation numérique 2D de l'expérience de Peltzer et Tapponnier 123
5.7 Conclusion 139

Conclusions et perspectives **141**

Bibliographie **147**

Liste des travaux

Les chapitres 2, 3, 4, 5 constituent principalement les 3 publications ou prépublications suivantes :

Modélisation et Simulation numérique

- (P1) E. Bonnetier, L. Jakabčin, S. Labbé, A. Replumaz. *Numerical simulation of a class of models that combine several mechanisms of dissipation : fracture, plasticity, viscous dissipation.* Journal of Computational Physics 271, 397-414, 2014.

Le chapitre 2 de cette thèse est principalement consacré à la partie modélisation de (P1) et une partie conséquente du chapitre 5 au numérique de (P1).

Analyse des EDPs et Calcul des variations

- (P2) L. Jakabčin, *An elasto-visco-plastic evolution model with regularized fracture.* En révision.

- (P3) L. Jakabčin, *Existence of solutions to an elasto-viscoplastic model with kinematic hardening and r-Laplacian fracture approximation.* En révision.

Le chapitre 3 de cette thèse est constitué de (P2) et le chapitre 4 de (P3).

Introduction générale

Motivations

Collision Inde-Asie

La collision du continent Indien avec le continent Asiatique met en jeu des mécanismes complexes de déformation : épaississement de la croûte terrestre, création de failles, coulissage de blocs continentaux le long de ses failles (Fig. 1). La pénétration de l'Inde dans l'Asie depuis 50 Millions d'années a produit la zone la plus importante de déformation du globe. Cette collision est à l'origine de la formation de la chaîne de l'Himalaya dont les sommets ont une hauteur supérieure à 8000 m, et du Plateau Tibétain, dont le relief est plus plat mais d'altitude moyenne élévée, environ 5000 m.

Durant cet épaississement, une partie de la déformation se localise au niveau des grandes failles qui découpent l'Asie en blocs (Fig. 1, bloc orange (Indochine) entre la faille de Sagaing à l'Ouest et la Faille du Fleuve Rouge à l'Est, et bloc jaune (Tibet) entre la faille du Fleuve Rouge au Sud et la faille de l'Altyn Tagh au nord). Sous la poussée de l'Inde, les deux blocs coulissent successivement vers l'Est le long de ces failles. Dans un premier temps, l'Indochine coulisse vers l'Est le long de la faille du Fleuve Rouge, puis le bloc Tibet coulisse le long de la faille de l'Altyn Tagh.

Un modèle analogue de localisation de déformation et de rupture pour les géomatériaux

Les mécanismes mis en jeu lors d'une telle collision sont trop complexes pour être modéliser dans leur ensemble. La lithosphère terrestre (la partie supérieure de la Terre, que l'on peut observer depuis la surface) n'a pas un comportement simple proche d'un comportement idéal élastique, plastique et/ou visqueux.

Dans la communauté des géophysiciens, l'un des enjeux est de comprendre les phénomènes accompagnant la formation du Plateau Tibétain et de Hima-

laya, en explorant différents comportements rhéologiques de la lithosphère. A court terme ou très court terme, le comportement de la lithosphère peut être considéré comme élastique, ce qui est utilisé pour la modélisation de la rupture sismique (relâchement des contraintes élastiques accumulées), des déformations intersismiques, ou pour la modélisation des données interférométrique et GPS.

A long terme, les déformations permanentes, en particulier les mouvements le long des failles, sont plus complexes à modéliser. Plusieurs modélisations analogiques, consistant à construire un système physique qui reproduit un phénomène que l'on souhaite étudier, ont été réalisées.

Un type de modèles classiques est de considérer la lithosphère comme un fluide, en utilisant comme matériau analogue la silicone. Ces modèles analogues reproduisent l'épaississement du Plateau Tibétain qui se propage vers le nord au cours du temps, mais il est impossible de créer et de propager une rupture dans un tel matériau [8]. La modélisation numérique d'un tel matériau est relativement simple à mettre en œuvre, en utilisant la mécanique des fluides newtoniens [29], [30].

Une autre approche de modélisation analogue consiste à utiliser comme analogue le sable, un matériau granulaire assez complexe, qui reproduit bien l'épaississement de la lithosphère localisé sur des failles que l'on dit inverse, qui empile des écailles de lithosphère pour l'épaissir. La modélisation numérique d'un tel matériau est plus compliquée, son comportement pouvant être modélisé par un comportement plastique avec le critère de Mohr-Coulomb (voir [17]).

Peu d'expériences ont tenté de reproduire les grandes failles décrochantes d'Asie, qui permettent des mouvements horizontaux de plusieurs centaines de km (Figure 1). En 1988, Peltzer et Tapponnier [53] modélisent la collision Inde/Asie par l'indentation d'une couche de plasticine, répresentant l'Asie, par un poinçon rigide représentant l'Inde. Les grandes failles apparaissent comme des fissures très localisées propagées dans la plasticine et le long desquelles coulissent des blocs de plasticine peu déformés (voir Figure 2). Dans cette expérience, l'épaississement est rendu impossible par une vitre en verre posée sur la plasticine. Les mouvements horizontaux sont donc amplifiés. La bordure l'Est du modèle est laissée libre pour pouvoir reproduire l'asymétrie de l'Asie, avec la présence d'océans à l'Est (Figure 1). Cette expérience, associée à la particularité de la plasticine de localiser la déformation, reproduit un analogue des grandes failles d'Asie permettant des centaines de km de déplacement horizontal. A notre connaissance, il n 'y pas de modèles numériques de l'expérience de Peltzer et Tapponnier.

Nous pouvons observer sur la maquette de la plasticine (Figure 2) :

– l'apparition des fissures,

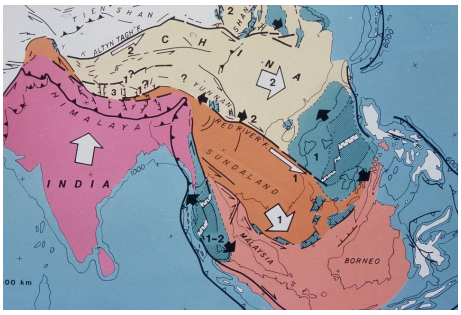

FIGURE 1 – La carte intérprétée de la collision de l'Inde avec le continent Asiatique

FIGURE 2 – Evolution de la déformation plane lors de l'indentation d'une couche de plasticine par un poinçon rigide

- les blocs de plasticine sont déformés, coullissent le long des fissures,
- l'observation qualitative du comportement plastique ou visco-plastique lié à la déformation permanente de la plasticine.

Cadre de cette thèse

Sur la base de l'expérience de la déformation de plasticine, nous nous intéressons à la création et à la propagation de fissures dans un matériau solide élasto-visco-plastique. Le but de cette thèse est de construire et d'étudier du point de vue mathématique et numérique une classe de modèles pour la déformation de solides qui combinent les principaux phénomènes de dissipation qui pourraient être mis en jeu lors de l'expérience de Peltzer et Tapponnier : déformation inélastique (plasticité, visco-élasticité et visco-plasticité) et rupture.

Lors de la déformation ces mécanismes peuvent-ils s'exprimer simultanément ? L'un d'eux est-il dominant ? Avec nos modèles peut-on reproduire numériquement l'expérience de Peltzer et Tapponnier ?

Construire un modèle mathématique élasto-visco-plastique avec la rupture doit tout d'abord suivre des régles de la mécanique. Ensuite il faut assurer qu'un tel modèle est bien posé (admet des solutions dans des espaces mathématiques convenables). Enfin, pour répondre à nos questions concernant les mécanismes de dissipation, le meilleur moyen est l'étude numérique vu la complexité des équations qui le caractérisent.

Nous cherchons donc à construire des modèles mathématiques qui couplent plusieurs phénomènes dissipatifs, et qui pourraient être étudiés numériquement. Pour cette raison, nous traitons la rupture de manière approchée : une fissure sera représentée comme l'ensemble de niveau $v \leq 1/2$ d'une fonction marqueur. Les premiers travaux de mécanique de la rupture remontent aux

années 1920 et au modèle de Griffith [40]. Celui-ci souffre de plusieurs faiblesses. Il ne permet pas d'initier (nucléer) des fissures et suppose connu a priori le trajet de fissuration. Dans les années 90, pour palier à ces faiblesses Francfort et Marigo [35] ont reformulé le modèle de rupture de Griffith de façon variationnelle et ont remplacé un principe de stationnarité unilatérale dans le modèle de Griffith par un principe de moindres énergies.

Les travaux de thèse de Bourdin [12] ont permis d'illustrer l'intérêt de l'approche variationnelle de la rupture et en particulier de la possibilité d'utliser la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli [1] pour approcher le calcul des énergies de surface. Nous allons également utiliser cette approximation de rupture pour un milieu élasto-visco-plastique. Nous allons coupler la rupture approchée avec la plasticité, la viscoplasticité, l'écrouissage et la viscoélasticité.

Nous espérons qu'un tel modèle pourra aussi servir à reproduire les premières étapes de l'expérience de plasticine, où l'on observe d'abord des zones de déformations inélastiques puis la rupture. De manière générale, nous travaillerons dans $\mathbb{R}^2$, mais certains des résultats présentés se généralisent en dimension supérieure. Ce travail est divisé en 5 chapitres :

Chapitre 1 : Modélisation de matériaux dissipatifs par des modèles d'évolution de plasticité et de rupture.

Le premier chapitre est un état de l'art des modèles d'évolution de plasticité et de rupture. Nous présentons tout d'abord le modèle d'évolution de plasticité parfaite, puis des modèles régularisés de plasticité via la viscoplasticité de Perzyna, la viscoélasticité de Kelvin-Voigt et l'écrouissage cinématique linéaire.

Nous présentons ensuite le modèle d'évolution de Francfort et Marigo et les résultats d'existence des solutions associés à ce modèle. Nous décrivons aussi une classe de modèles d'évolution avec la rupture approchée de Giacomini, de Babadjian et Millot et de Larsen, Ortner et Süli. Nous terminons par la formulation du modèle d'évolution élastique-parfaitement plastique avec rupture étudiée par Dal Maso et Toader.

Chapitre 2 : Construction d'une classe de modèles d'évolution combinant plasticité, rupture et dissipation visqueuse.

Nous construisons 4 modèles d'évolution contenant des phénomènes de dissipation liés à la plasticité, la viscoplasticité, la viscoélasticité, l'écrouissage et la rupture numérique.

– Modèle 1 : élasticité, plasticité, viscoélasticité et rupture.

- Modèle 2 : élasticité, plasticité, viscoplasticité et rupture.
- Modèle 3 : élasticité, plasticité, écrouissage cinématique et rupture.
- Modèle 4 : élasticité, plasticité, écrouissage cinématique, viscoplasticité et rupture (r-Laplacien).

Nous montrons aussi dans ce chapitre que sous l'hypothèse de renforcement de loi d'évolution de rupture (critère de Griffith régularisé), le traceur v représentant la rupture peut être vu non seulement comme une variable numérique, mais aussi de point de vue thérmodynamique, comme une variable interne globale du modèle. Nous montrons aussi que les modèles construits rentrent dans un cadre similaire à celui des matériaux standards généralisés et que des modèles vérifient une inégalité de type Clausius-Duhem.

Chapitre 3 : Analyse mathématique du modèle d'évolution élasto-visco-plastique avec rupture (Modèle 1).

Nous montrons dans ce chapitre que le modèle élasto-visco-plastique avec la rupture de type Ambrosio-Tortorelli admet au moins une solution. La preuve est basée sur la construction d'approximations par semi-discrétisation en temps en résolvant à chaque pas de temps deux problèmes de minimisation. On définit ensuite à l'aide des solutions de ces problèmes les évolutions semi-discrètes en temps. Nous montrons un résultat de compacité forte pour les solutions élastiques approchées. Nous passons ensuite à la limite quand le pas de discrétisation en temps h converge vers 0, et montrons que la solution limite vérifie l'équation d'équilibre, la loi d'écoulement plastique et de propagation de rupture du modèle continu en temps.

Chapitre 4 : Analyse mathématique du modèle d'évolution élasto-visco-plastique avec l'écrouissage cinématique et rupture approchée via r-Laplacien (Modèle 4).

Nous étudions dans ce chapitre l'existence des solutions pour le modèle d'évolution élasto-viscoplastique avec écrouissage cinématique linéaire et rupture approchée dans lequel la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli utilisée est associée au r-Laplacien. La preuve est basée aussi sur une semi-discrétisation en temps en résolvant à chaque pas de temps un problème de minimisation par rapport à l'ensemble des variables mécaniques (u, v, e, p). Les solutions de ces problèmes nous permettent de définir les évolutions semi-discrètes en temps. Ensuite nous passons à la limite quand le pas de discrétisation en temps h converge vers 0. Nous montrons un résultat de compacité forte pour la partie élastique de déformation utilisant le théorème de Helly pour montrer que les suites approximantes sont de Cauchy. Nous montrons que la

solution limite vérifie l'équation d'équilibre, la loi d'écoulement plastique et de propagation de rupture.

Chapitre 5 : Etude numérique 1D et 2D des modèles 1, 2 et 3

Dans la dernière partie de cette thèse, nous nous intéressons à l'implémentation numérique des modèles construits. Nous présentons les schéma numériques de discrétisation en temps et en espace pour les solutions approchées des modèles. Nous implémentons l'algorithme de minimisation altérnée où on l' implémente a posteriori à chaque pas de temps, une vérification d'une condition nécessaire de l'optimalité du minimiseur. Cette étape supplémentaire s'appelle backtracking. Nous étendons l'algorithme de backtracking, aux matériaux à mémoire. Nous illustrons le comportement des modèles sur l'exemple de la barre en traction 1D et présentons différents régimes de déformation en fonction de différents paramètres mécaniques des modèles. Nous implémentons également le modèle élasto-plastique avec écrouissage cinématique linéaire et rupture numérique (Modèle 3) dans le cas d'une barre 2D et d'une plaque de plasticine. Nous montrons que ce modèle reproduit qualitativement les premières étapes de l'expérience de Peltzer et Tapponnier.

Chapitre 1

Modélisation de matériaux dissipatifs par des modèles d'évolution de plasticité et de rupture

1.1 Introduction

Nous présentons des modèles d'évolution liés aux méchanismes de plasticité et de rupture. D'une part, nous présentons une classe de matériaux dissipatif contenant la plasticité parfaite et des modèles regularisés de plasticité parfaite, de viscoplasticité, de viscosité et d'écrouissage cinématique. D'autre part, nous nous intéréssons au modèles de rupture de Francfort et Marigo et à ses régularisations via la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli.

1.2 Modèles de plasticité

1.2.1 Modèle d'évolution en élasto-plasticité parfaite

Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert borné suffisamment régulier qui représente la configuration élasto-plastique de référence. Le modèle élasto-plastique est décrit par trois variables :

- le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^2$,
- la partie élastique (réversible) de déformation $e : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$,
- la partie plastique (irréversible) de déformation $p : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$.

$\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ désigne l'ensemble des matrices symétriques 2×2. Sous hypothèse des petites déformations, les trois variables (u, e, p) sont liées via la relation

$$Eu = e + p \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T], \tag{1.1}$$

où le tenseur de déformation linéarisé Eu est défini par

$$Eu := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T).$$

Le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ est lié à la déformation élastique via la loi de Hooke

$$\sigma := Ae \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T], \tag{1.2}$$

où A représente le tenseur de coefficients de Lamé d'ordre 4 symétrique et coercif.

Le modèle d'élasto-plasticité parfaite est caractérisée par l'existence d'une zone fixe qui n'évolue pas au cours de temps, convexe fermée contenant 0, notée K, telle que le tenseur de contrainte σ demeure dans K :

$$\sigma \in K, \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T]. \tag{1.3}$$

K s'appelle *le convexe d'élasticité*, c'est un sous-ensemble de $\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$. Lorsque σ est à l'intérieur de K ($\sigma \in \mathring{K}$), le milieu se comporte comme un matériau élastique, $\dot{p} = 0$. Lorsque σ atteint le bord de K ($\sigma \in \partial K$), appelé *surface seuil de plasticité*, le matériau subit une déformation plastique permanente décrite par la loi d'écoulement plastique de Prandtl-Reuss :

$$\dot{p} \in N_K(\sigma), \tag{1.4}$$

avec $N_K(\sigma)$ le cône normal à K en σ. Définissons la fonction indicatrice $\mathbb{I}_K$ de l'ensemble K par : $\mathbb{I}_K(\sigma) = 0$ si $\sigma \in K$, $\mathbb{I}_K(\sigma) = +\infty$ sinon. Utilisant l'analyse convexe [voir [43], chapitre 4] nous avons

$$N_K(\sigma) = \partial \mathbb{I}_K(\sigma), \tag{1.5}$$

et la loi d'écoulement (1.4) peut être écrite de la façon équivalente utilisant la dualité convexe :

$$\sigma : \dot{p} = \max_{\xi \in K} \xi : \dot{p} := H(\dot{p}), \tag{1.6}$$

avec $H : \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ la fonction support de K. La formulation (1.6) exprime le principe du travail maximal de Hill : A chaque instant où la vitesse de déformation plastique est définie, la puissance réellement dissipée est supérieure

ou égale à la puissance qui serait dissipée par toute contrainte admissible avec la même vitesse de déformation plastique. $H(\dot{p})$ dénote la dissipation plastique. Comme $\dot{p} \in \partial \mathbb{I}_K(\sigma)$, par la dualité convexe nous obtenons aussi $\sigma \in \partial I_K^*(\dot{p})$ ce qui donne que la loi d'évolution plastique peut s'écrire aussi :

$$\sigma \in \partial H(\dot{p}). \tag{1.7}$$

Il est pratique de définir *le convexe d'élasticité* K à l'aide d'une fonction $F : \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ appelée *fonction seuil* ou *critère de plasticité*. Nous définissons alors K :

$$K := \{\sigma \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}; F(\sigma) \leq 0\}. \tag{1.8}$$

En présence des forces extérieures $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$ et d'un déplacement imposé $w : \partial\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$ au bord $\partial\Omega$, nous définissons alors l'évolution dynamique (ED) élasto-plastique au cours de l'intervalle de temps $[0,T]$ par le triplet $(u,e,p) : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(ED) \begin{cases} (u(0), \dot{u}(0), e(0), p(0)) = (u_0, v_0, e_0, p_0) & \text{dans } \Omega \\ Eu = e + p, \text{ dans } \quad \Omega \times [0,T], & u = w \text{ sur } \quad \partial\Omega \times [0,T], \\ \ddot{u} - \text{div}(\sigma) = f, & \text{dans } \quad \Omega \times [0,T], \\ \sigma \in K, & \text{dans } \quad \Omega \times [0,T], \\ \dot{p} \in N_K(\sigma), & \text{dans } \quad \Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

Lorsque le mouvement est suffisament lent, on peut négliger les effets d'inertie et on obtient le modèle quasi-statique élasto-plastique (EQ) en négligeant le terme d'accéleration $\ddot{u}$ dans l'équation de mouvement $\ddot{u} - \text{div}(\sigma) = f$.

$$(EQ) \begin{cases} (u(0), e(0), p(0)) = (u_0, e_0, p_0) & \text{dans } \Omega \\ Eu = e + p, \text{ dans } \quad \Omega \times [0,T], & u = w \text{ sur } \quad \partial\Omega \times [0,T], \\ -\text{div}(\sigma) = f, & \text{dans } \quad \Omega \times [0,T], \\ \sigma \in K, & \text{dans } \quad \Omega \times [0,T], \\ \dot{p} \in N_K(\sigma), & \text{dans } \quad \Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

Le problème d'existence d'une évolution élasto-plastique quasi-statique (EQ) a été premièrement étudiée par Duvaut-Lions [28], où le problème d'existence de solution pour le problème en contrainte σ a été montré via les méthodes d'approximation de Galerkin et de régularisation visco-plastique. Dans la suite, Johnson [44] a étudié le problème faible associé formulé pour le problème en contrainte σ et en vitesse $v = \dot{u}$. La difficulté mathématique principale pour étudier les évolutions (ED) et (EQ) est de définir un bon cadre fonctionnel pour les champs de déplacements cinématiquement admissibles qui est celui des espaces BD des fonctions à déformations bornées

(voir Suquet [57]). L'existence d'une évolution quasi-statique élasto-plastique parfaite a été prouvée dans les espaces BD par Suquet [55], [56], voir aussi Temam [59]. Remarquons aussi qu'une autre preuve d'existence d'une évolution quasi-statique élasto-plastique parfaite a été proposée par Dal Maso, De Simone, Mora (voir [21]) en formulant l'évolution élasto-plastique dans le cadre des processus indépendant des vitesses étudiés par Mielke [52] et Mainik et Mielke [50]. Leur approche définit d'une façon équivalente une évolution quasi-statique élasto-plastique (u, e, p) qui vérifie un principe de minimisation d'énergie et une égalité d'énergie. Les modèles de ce types sont complexes : choix des espaces, manque de régularité des fonctions manipulées. Pour construire leurs solutions, des processus de régularisation ont été proposés, qui se prêtent également plus facilement à l'approximation numérique.

Nous présenterons 3 type de régularisation : viscoélasticité de Kelvin-Voigt, viscoplasticité de Perzyna et écrouissage cinématique linéaire. Le convenient mathématique de régularisation est le fait que l'analyse du modèle régularisé peut être suivie dans les espaces de Sobolev au lieu des espaces moins réguliers.

1.2.2 Modèle d'évolution élasto-visco-plastique

Nous appelons l'évolution quasi-statique élasto-visco-plastique le triplet $(u, e, p) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(EVP) \begin{cases} (u(0), e(0), p(0)) = (u_0, e_0, p_0) & \text{dans } \Omega, \\ Eu = e + p, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ u = w & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \sigma = Ae + \beta_1 E\dot{u} & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ -\text{div}(\sigma) = f, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ Ae \in K, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \dot{p} \in N_K(Ae), & \text{dans } \Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Le modèle est construit en introduisant le paramètre de viscosité $\beta_1 > 0$ et de remplacer la loi de comportement $\sigma = Ae$ du modèle élasto-parfaitement plastique par une loi de comportement de type Kelvin-Voigt : σ_{β_1} est la somme de la partie réversible de la déformation et de la partie régularisée visqueuse dûe à l'amortissement :

$$\sigma_{\beta_1} := Ae_{\beta_1} + \beta_1 E\dot{u}_{\beta_1} \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T]. \tag{1.9}$$

Ce modèle est formulé en des variables $(\dot{u}, \sigma)$ dans le papier d'Anzelotti et Luckhaus [3]. L'existence d'une évolution dynamique élasto-parfaitement

plastique est obtenue en faisant tendre $\beta_1 \to 0$ dans le modèle (EVP). Le même type d'approximation d'évolutions dynamique et quasi-statique est utilisée pour approcher un modèle de plasticité des sols par Babadjian et Mora [7]. La preuve d' existence d'une évolution pour ce type de modèle est basée sur la compacité forte pour les solutions approchées élastiques semi-discrétisés en temps, linéaires par morceaux $(e_h)_h$ et constantes par morceaux $(e_h^+)_h$ qui convergent fortement dans $L^2(0,T,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{Sym}))$. Ce type de convergence est établi grâce au principe de Hill qui donne une monotonie pour certains termes à contrôler. Dans l'étude mathématique du modèle, nous sommes amenés à passer à la limite, quand le pas de semi-discrétisation en temps h converge vers zero, dans un produit de suites $\dot{p}_h$ représenant le taux de déformation plastique et e_h^+ qui convergent chacun seulement faiblement dans $L^2(0,T,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{Sym}))$ et donc la convergence du produit $\dot{p}_h : e_h^+$ n'est pas assurée. Donc, la convergence forte $L^2(0,T,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{Sym}))$ permet le passage à la limite dans la loi d'écoulement plastique discrète. Remarquons que le modèle élasto-parfaitement plastique peut être aussi obtenu comme limite d'un modèle dynamique d'élasto-visco-plasticité (Dal Maso, Scala [24]).

1.2.3 Modèle d'évolution élasto-viscoplastique

Nous présentons maintenant le modèle d'évolution quasi-statique élasto-viscoplastique de Perzyna (voir par ex. [55]) La fonction support H permet de définir un potentiel de dissipation

$$\begin{aligned} &H : \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \to \mathbb{R} \\ &p \to H(p) := \sup_{\xi \in K} \xi : p. \end{aligned}$$

Dans le cadre de la régularisation via viscoplasticité de Perzyna nous introduisons un potentiel de dissipation régularisé défini pour $\beta_2 > 0$ fixé par :

$$\begin{aligned} &H_{\beta_2} : \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \to \mathbb{R} \\ &p \to H_{\beta_2}(p) := H(p) + \frac{\beta_2}{2}|p|^2. \end{aligned}$$

La loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\sigma \in \partial H_{\beta_2}(\dot{p}) \text{ dans } \Omega \times [0,T],$$

ou de façon équivalente

$$\sigma - \beta_2 \dot{p} \in \partial H(\dot{p}) \text{ dans } \Omega \times [0,T].$$

Nous définissons alors une évolution élasto-viscoplastique par un triplet (u, e, p) : $\Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(VP)\begin{cases} (u(0), e(0), p(0)) = (u_0, e_0, p_0) & \text{dans } \Omega, \\ Eu = e + p, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ u = w, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \sigma := Ae, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ -\text{div}(\sigma) = f, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \sigma - \beta_2 \dot{p} \in K, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \sigma - \beta_2 \dot{p} \in \partial H(\dot{p}), & \text{dans } \Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

De point de vue mathématique, une telle approximation viscoplastique permet de gagner de la compacité forte pour les solutions approchées en temps de tenseur élastique $(e_h)_h$ et plastique $(p_h)_h$ qui sont des suites de Cauchy dans les espaces $L^\infty(0, T, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{Sym}))$. Une telle approche a été par exemple utilisée dans les travaux de modèles en plasticité de Babadjian, Francfort, Mora [5], ou de Dal Maso et al. [22], [23] où les auteurs traitent des modèles de plasticité plus sophistiqués que (VP). Par exemple dans [5], les auteurs traitent un modèle de plasticité non-associée. Concernant de plasticité non-associée, on peut consulter aussi les travaux de Laborde [45], [46], [47].

1.2.4 Modèle d'évolution d'écrouissage cinématique linéaire

Le modèle d'élasto-plasticité parfaite est caractérisé par le convexe d'élasticité qui reste fixe au cours de temps. Dans ce paragraphe, nous allons présenter le modèle d'évolution avec écrouissage, c'est-à-dire un modèle dont le domaine d'élasticité varie au cours de temps. En particulier, nous considérons le modèle d'écrouissage cinématique linéaire qui représente une translation du domaine élastique. Dans ce cas, l'analyse mathématique du modèle peut se faire dans les espaces de Sobolev car l'énergie libre du modèle élasto-parfaitement plastique est régularisée en lui ajoutant un terme d'écrouissage quadratique en p :

$$\frac{1}{2}k|p|^2,$$

où $k > 0$ désigne la constante d'écrouissage. Ce modèle est décrit par la seule variable interne qui peut être identifiée avec la variable interne p de déformation plastique (voir Han et Reddy [43]). La loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\dot{p} \in N_K(\sigma - kp).$$

De façon équivalente nous pouvons écrire :

$$\sigma - kp \in \partial H(\dot{p}).$$

L'évolution quasi-statique élasto-plastique avec écrouissage cinématique linéaire est alors définie par un triplet $(u, e, p) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(ECR) \begin{cases} (u(0), e(0), p(0)) = (u_0, e_0, p_0) & \text{dans } \Omega, \\ Eu = e + p, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ u = w, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \sigma := Ae, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ -\text{div}(\sigma) = f, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \sigma - kp \in K, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \dot{p} \in N_K(\sigma - kp), & \text{dans } \Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Il existe aussi des modèles mathématiques d'écrouissage non linéaire (voir par exemple Francfort et Stefanelli [36])

1.2.5 Conclusion

Dans cette partie nous avons décrit le modèle d'élasto-plasticité parfaite et son évolution. Nous avons présenté 3 façons de le régulariser. Soit on régularise le tenseur de contrainte (la viscosité, visco-élasticité), soit on modifie le potentiel de dissipation plastique (la viscoplasticité), soit on modifie l'énergie libre du modèle (l'écrouissage cinématique linéaire). L'avantage de régularisation est le traitement possible des modèles dans les espaces de Sobolev ainsi que l'approximation numérique.

1.3 Modèles de ruptures

1.3.1 Modèle de Griffith

A la connaissance de l'auteur, le premier modèle de la mécanique de rupture rémonte aux travaux de Griffith [40]. Plaçons-nous dans le cadre bidimensionnel. Considérons un matériau élastique occupant un domaine Ω avec le bord suffisamment régulier. Sur une partie du bord $\partial\Omega_D$ nous imposons un chargement $u = w(t)$ avec $w(t) : \partial\Omega_D :\to \mathbb{R}^2$. Supposons aussi que le milieu n'est soumis à aucune force extérieure ($f = 0$) et le bord de Neumann reste libre : $\partial\Omega_N := \partial\Omega \backslash \partial\Omega_D$. Nous supposons que le matériau peut se fissurer et que le chemin de fissuration $\hat{\Gamma} \subset \overline{\Omega} \backslash \partial\Omega_N$ est a priori connu où $\hat{\Gamma}$ est une courbe suffisamment régulière. Nous supposons que la fissure au temps

$t \in [0,T]$ est un sous-ensemble connexe croissant (au sens de l'inclusion) de $\hat{\Gamma}$. Son trajet de propagation est prédéfini, et elle est donc détérminée entièrement par sa longueur $l(t)$. Nous notons cette fissure $\Gamma(l(t)) \subset \hat{\Gamma}$. Nous définissons au temps t l'énergie potentielle élastique du matériau en dehors de la fissure par

$$\mathcal{W}(u(t,l(t)),l(t)) := \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\Gamma(l(t))} AEu(t,l(t)) : Eu(t,l(t))\,dx \tag{1.10}$$

où $C : D = \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}d_{ij}$ est le produit scalaire usuel des matrices symétriques et Eu le tenseur de déformation linéarisée. Rappelons que A est le tenseur élastique de coefficients de Lamé. Supposons qu'à chaque pas de temps t le matériau élastique fissuré est à l'équilibre mécanique sous les effets de chargement imposé $w(t)$. Pour la longueur de fissure $l(t)$ fixée au temps t, le champs de déplacement $u(t,l(t))$ vérifie en dehors de la fissure le système d'équations d'équilibre :

$$(EQUI)\begin{cases} -\mathrm{div}(AEu(t,l(t))) = 0, & \text{dans } \Omega\backslash\Gamma(l(t)),\\ u(t,l(t)) = w(t), & \text{sur } \partial\Omega_D\backslash\Gamma(l(t)),\\ AEu(t,l(t)).\vec{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_N \cup \Gamma(l(t)). \end{cases}$$

Le modèle de Griffith est basé sur 2 hypothèses :

1. l'énergie de surface liée à la fissure $\Gamma(l(t))$ est proportionnelle à sa longueur $l(t)$:

$$\mathcal{E}_S(\Gamma(l(t))) := G_c l(t), \tag{1.11}$$

   avec $G_c > 0$ la constante de ténacité du matériau.

2. la propagation des fissures est basée sur le critère de Griffith : pour tout $t \in [0,T]$, $(l(t),u(t,l(t)))$ satisfait

$$(GRIF)\begin{cases} \dot{l}(t) \geqslant 0,\\ -\dfrac{\partial\mathcal{W}}{\partial l}(u(t,l(t)),l(t)) \leq G_c,\\ \left(\dfrac{\partial\mathcal{W}}{\partial l}(u(t,l(t)),l(t)) + G_c\right)\dot{l}(t) = 0 \quad . \end{cases}$$

Francfort et Marigo ont proposé dans [15], [35] une formulation variationnelle du modèle de Griffith : Pour tout $t \in [0,T]$, $(l(t),u(t,l(t)))$ vérifie le critère de Griffith (GRIF), l'équation d'équilibre (EQUI) et la condition initiale $l(0) = l_0$ si et seulement si on a pour tout $t \in [0,T]$,

1. Stationnarité unilatérale : $(l(t), u(t, l(t)))$ est un point stationnaire (maximum, minimum, point d'inflexion) de l'énergie

$$(u, l) \longrightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma(l)} AEu : Eu \, dx + G_c(l - l(t))$$

   parmi tous les couples (u, l) avec $l \geqslant l(t)$ et $u = w(t)$ sur $\partial\Omega_d \setminus \Gamma(l)$.
2. Irréversibilité : $\dot{l}(t) \geqslant 0$,
3. Egalité d'énergie :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(u(t), l(t)) = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma(l(t))} AEu(t)\vec{n} : \dot{w}(t) \, ds$$

   avec

$$\mathcal{E}(u, l) := \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma(l)} AEu : Eu \, dx + G_c l.$$

Francfort et Marigo [Proposition 2.4, [15]] renforce la condition de stationnarité qui devient la condition d'optimalité d'ordre 1 d'un principe de minimalité locale : $(u(t), l(t))$ sont des points critiques qui sont les minima locaux de l'énergie $\mathcal{E}$.

1.3.2 Modèle de Francfort et Marigo

Ayant formulé le modèle de Griffith de la manière variationnelle, Francfort et Marigo proposent de remplacer dans le modèle de Griffith, le principe de stationnarité unilatérale par un principe de minimisation globale de l'énergie. En différence avec le modèle de Griffith, la formulation du modèle de Francfort et Marigo ne connaît pas a priori le chemin de fissuration et permet d'initier la rupture dans les matériaux sains (voir Chambolle, Giacomini et Ponsiglione [20]). Nous présentons le modèle de Francfort et Marigo en dimension N quelconque. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné suffisamment régulier. Pour tout $K \subset \overline{\Omega}$ et $u : \Omega \setminus K \longrightarrow \mathbb{R}^N$ avec $u = w(t)$ sur $\partial\Omega_D \setminus K$, on définit l'énergie totale par

$$\mathcal{E}(u, K) := \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus K} AEu : Eu \, dx + G_c \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

avec $\mathcal{H}^{N-1}$ désignant la mesure de Hausdorff de dimension $N - 1$. Francfort et Marigo définissent l' évolution quasi-statique élastique avec rupture par la fonction $t \to (u(t), K(t))$ avec les données initiales $(u(0), K(0)) = (u_0, K_0)$ qui vérifie pour tout $t \in [0, T]$:

1. Principe de minimum global : pour tout couple (u, K) avec $K(t) \subset K$ et $u = w(t)$ sur $\partial\Omega_D \backslash K$ on a
$$\mathcal{E}(u(t), K(t)) \leq \mathcal{E}(u, K)$$
2. Irréversibilité : pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$,
$$K(s) \subset K(t).$$
3. Egalité d'énergie :
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(u(t), K(t)) = \int_{\partial\Omega_D \backslash K(t)} AEu(t)\vec{n} : \dot{w}(t)\, ds$$

La formulation mathématique du modèle de Francfort et Marigo a fait l'objet de plusieurs papiers dans la dernière décennie. En 2D et en petites déformations, dans le cas-antiplan Dal Maso-Toader [26] proposent le premier résultat d'existence de solutions du modèle de Francfort et Marigo avec

$$\mathcal{E}(w, K) := \min_{u \in L^{1,2}(\Omega \backslash K)} \left\{ \int_{\Omega \backslash K} |\nabla u|^2\, dx + G_c \mathcal{H}^1(K) : u = w \,\text{sur}\, \partial\Omega_D \backslash K \right\} \tag{1.12}$$

où $L^{1,2}(\Omega \backslash K) = \{u \in L^2_{loc}(\Omega \backslash K);\ \nabla u \in L^2(\Omega \backslash K, \mathbb{R}^2)\}$. Nous définissons l'ensemble $\mathcal{K}^f_m(\overline{\Omega})$ de tous les sous ensembles $K \subset \overline{\Omega}$ compacts ayant au plus $m \geqslant 1$ composantes connexes et $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$. Nous notons AC les fonctions absolument continues.

Théorème 1.3.1 *[26] Soit $w \in AC([0,1], H^1(\Omega))$ et $K_0 \in \mathcal{K}^f_m(\overline{\Omega})$. Il existe une fonction $K : [0,1] \to \mathcal{K}^f_m(\overline{\Omega})$ telle que*
- *(L1) $K_0 \subset K(s) \subset K(t)$ pour tout $0 \leq s \leq t \leq 1$,*
- *(L2) $\mathcal{E}(w(0), K(0)) \leq \mathcal{E}(w(t), K)$, pour tout $K \in \mathcal{K}^f_m(\overline{\Omega})$, $K_0 \subset K$*
- *(L3) pour $0 < t \leq 1$, $\mathcal{E}(w(t), K(t)) \leq \mathcal{E}(w(t), K)$, pour tout $K \in \mathcal{K}^f_m(\overline{\Omega})$, avec $\bigcup_{s<t} K(s) \subset K$.*
- *(L4) $t \to \mathcal{E}(w(t), K(t))$ est absolument continue sur $[0,1]$,*
- *(L5) $\frac{d}{ds}\mathcal{E}(w(t), K(s))_{s=t} = 0$ pour p. t. $t \in [0,1]$,*
- *pour tout $K : [0,1] \to \mathcal{K}^f_m(\overline{\Omega})$ satisfaisant (L1)-(L5) on a pour p. t. $t \in [0,1]$*
$$\frac{d}{ds}\mathcal{E}(w(t), K(t)) = 2\int_{\Omega \backslash K(t)} \nabla u(t) \nabla \dot{w}(t)\, dx,$$

où $u(t)$ est solution du problème variationnel (1.12) avec les données $(w(t), K(t))$ et $\dot{w}(t)$ le derivée en temps de $w(t)$.

Notons que ce résultat de DalMaso et Toader a été étendu par Chambolle [19] dans le cadre 2D de l'élasticité linéaire plane.

1.3.3 Modèle de Francfort-Larsen

Francfort et Larsen [34] ont établi l'existence de l'évolution quasi-statique du modèle de Francfort et Marigo dans le cadre des espaces des fonctions spéciales à variations bornées $SBV(\Omega)$, un sous-espace des fonctions à variations bornées $BV(\Omega)$. Pour plus de détails sur ces espaces, nous conseillons voir le livre de Evans et Gariepy [32] et ses références.

Théorème 1.3.2 *[34] Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $\partial\Omega_D \subset \partial\Omega$ un fermé, et $w \in L^\infty_{loc}([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^N)) \cap W^{1,1}_{loc}([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^N))$. Il existe une évolution $t \to (u(t), \Gamma(t))$ avec $u(t) \in SBV(\mathbb{R}^N)$ et $\Gamma(t) \subset \overline{\Omega}$ telle que*

- *$\Gamma(t_1) \subset \Gamma(t_2)$ pour tout $t_1 \leq t_2$,*
- *$u(0)$ minimise*

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(S(v)\backslash\partial\Omega_D)$$

  pour tout $v \in SBV(\mathbb{R}^N)$ avec $v = w(0)$ sur $\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$,
- *pour $t > 0$ $u(t)$ minimise*

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(S(v)\backslash(\Gamma(t) \cup \partial\Omega_D))$$

  pour tout $v \in SBV(\mathbb{R}^N)$ avec $v = w(t)$ sur $\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$,
- *$S(u(0)) = \Gamma(0)$, $S(u(t)) \subset \Gamma(t)$ sauf sur un ensemble de $\mathcal{H}^{N-1}$-mesure nulle.*
- *l'énergie totale*

$$\mathcal{E}(t) := \int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma(t)\backslash\partial\Omega_D)$$

  est absolument continue et on a

$$\mathcal{E}(t) := \mathcal{E}(0) + 2\int_0^t \int_\Omega \nabla u(s)\nabla\dot{w}(s)\, dx\, ds.$$

avec $\Gamma(t) := \cup_{s\in I,\, s\leq t} S(u(s))$ où $S(u)$ désigne l'ensemble des sauts de u et $I \subset [0,+\infty)$ un ensemble dénombrable dense contenant 0.

1.3.4 Modèle d'évolution de rupture de Giacomini

Sur la base des résultats d'approximation numérique du modèle de Francfort et Marigo [10], [12], [14], via une fonctionnelle elliptique d'Ambrosio et Tortorelli [1] et des résultats de Γ-convergence (voir [16]) de Bourdin [12],

Chambolle [18], A. Giacomini prouve existence d'une évolution quasi-statique en élasticité avec rupture régularisée qui satisfait la condition de minimalité globale et le principe de conservation d'énergie [voir [37]] où la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli est donnée par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u,v) := \int_\Omega (v^2+\eta_\varepsilon)|\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2}|\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{2\varepsilon}\,dx. \tag{1.13}$$

A. Giacomini prouve en plus que ce modèle converge quand $\varepsilon \to 0$ vers le modèle d'évolution de Francfort-Larsen.

Théorème 1.3.3 *[37] Soit $w \in W^{1,1}(0,1,H^1(\Omega))$. Il existe une fonction*

$$[0,1] \to H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \tag{1.14}$$

$$t \to (u(t),v(t)) \tag{1.15}$$

avec $0 \le v(t) \le 1$ dans Ω $u(t)=w(t)$, $v(t)=1$ sur $\partial\Omega_D$ pour tout $t\in[0,1]$ telle que

- *pour tout $0\le s\le t\le 1$: $v(t)\le v(s)$,*
- *pour tout $(u,v)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ avec $u=w(0)$, $v=1$ sur $\partial_D\Omega$*

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u(0),v(0)) \le \mathcal{E}_\varepsilon(u,v).$$

- *pour tout $t\in]0,1]$ et $(u,v)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ avec $0\le v\le v(t)$ dans Ω,et $u=w(t)$, $v(t)=1$ sur $\partial\Omega_D$:*

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u(t),v(t)) \le \mathcal{E}_\varepsilon(u,v);$$

- *la fonction $t\to\mathcal{E}_\varepsilon(u(t),v(t))$ est absolument continue et*

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u(t),v(t)) = \mathcal{E}_\varepsilon(u(0),v(0)) + 2\int_0^t\int_\Omega (v^2(s)+\eta_\varepsilon)\nabla u(s)\nabla\dot{w}(s)\,dx\,dt.$$

1.3.5 Modèle d'évolution de rupture de Babadjian-Millot

Basé sur les résultats de la Γ-convergence de M. Focardi [33], J.F. Babadjian et V. Millot [6] proposent une formulation d'évolution du modèle de rupture avec la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli modifiée. Plus précisement, on impose une r-croissance dans le terme du gradient ∇v avec $r>N$ où N est la dimension de l'espace. Nous considérons pour $(u,v)\in H^1(\Omega)\times W^{1,r}(\Omega)$, l'energie totale modifiée de la forme

$$\mathcal{E}^r_\varepsilon(u,v) \;:=\; \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v^2+\eta_\varepsilon\right)|\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}|1-v|^r\,dx,$$

avec $\alpha > 0$ une constante de régularisation et $r' = r/(r-1)$. L'avantage d'une telle approche est la convergence uniforme en espace pour la variable de rupture v grâce au théorème d'injection de Sobolev.

Théorème 1.3.4 *[4], [6], Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. On suppose que $\partial\Omega$ a la régularité $C^{1,1}$. Soient $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et*

$$v_0 := \underset{v \in W^{1,r}(\Omega)}{\operatorname{argmin}} \ \mathcal{E}_\varepsilon^r(u_0, v)$$

Alors, il existe une évolution $t \to (u(t), v(t))$ telle que

$$\begin{cases} u \in H^1(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,H^1(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0,T,H^2(\Omega)), \\ v \in L^\infty(0,T,W^{1,r}(\Omega)), \\ \text{avec } v(0) = v_0, \quad 0 \le v(t) \le v(s) \le 1 \text{ pour tout } 0 \le s \le t \le T, \end{cases} \tag{1.16}$$

satisfaisant

$$\begin{cases} \dot{u} = div((v^2 + \eta_\varepsilon)\nabla u), & \text{dans} \quad L^2(0,T,H^2(\Omega)), \\ \nabla u.\vec{n} = 0, & \text{dans} \quad L^2(0,T,H^{1/2}(\partial\Omega)), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

et

$$(BM) \begin{cases} \mathcal{E}_\varepsilon^r(u(t), v(t)) \le \mathcal{E}_\varepsilon^r(u(t), v), \\ \text{pour tout } t \in [0,T], \text{ pour tout } v \in W^{1,r}(\Omega) \text{ avec } v \le v(t) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Pour prouver l'existence d'une évolution aux modèles de Giacomini et de Bababdjian-Millot, l'un des points clés est l'utilisation du Théorème de Helly généralisé [50]. On en parlera plus en détail au chapitre 4 de cette thèse.

1.4 Modèles combinant rupture et autres phénomènes de dissipation

Jusqu'à ici nous avons presenté des modèles soit pour la rupture soit pour la plasticité et quelques modèles régularisés. Nous décrivons dans la suite des modèles couplant ces mécanismes.

1.4.1 Modèle d'Ortner-Larsen-Süli - Rupture et visco-élasticité

Le premier de ces modèles est le modèle dynamique d'évolution avec rupture régularisée de type Ambrosio-Tortorelli proposé par Ortner, Larsen,

Süli [49], (voir aussi [13], [48]). Ce modèle couple la rupture numérique avec un autre phénomène dissipatif - la viscoélasticité. Les inconnues de ce modèle sont le déplacement u et le champ de phase v représentant la rupture. Pour $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$

- l'énergie élastique est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{el} \,:\, H^1(\Omega,\mathbb{R}^2) \times H^1(\Omega,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \mathcal{E}_{el}(u,v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v^2+\eta\right) AEu : Eu\, dx \end{aligned}$$

- l'énergie de surface est définie par $\mathcal{E}_S \,:\, H^1(\Omega,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}_S(v) := \int_\Omega \varepsilon|\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \frac{(1-v)^2}{4\varepsilon}\, dx.$$

- l'énergie cinétique est definie par $\mathcal{K} : H^1(\Omega,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{K}(\dot{u}) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\dot{u}|^2\, dx$$

- les forces extérieures sont définies au temps $t \in [0,T_f]$ par l'élément $l(t) \in (H^1_D)^*$ où $(H^1_D)^*$ désigne le dual de $H^1_D := \{u \in H^1(\Omega),\, u = 0 \,\text{sur}\, \partial\Omega_D\}$.

$$\langle l(t), u\rangle := \int_\Omega f(t,x)u(x)\, dx + \int_{\partial\Omega_N} g(t,x)u(x)\, ds. \tag{1.17}$$

L'évolution dynamique du modèle est définie par le couple de fonctions (u,v) : $\Omega \times [0,T_f] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ vérifiant

- (L1) Conditions initiales : $(u(0),v(0)) = (u_0,v_0)$ avec $u(0) = u_0 \in H^1_D$, $\dot{u}(0) = u_1 \in H^1_D$, $v_0 = 1$ sur $\partial\Omega_D$ et $0 \le v_0 \le 1$ p.p. dans Ω
- (L2) Equation dynamique : pour presque tout $t \in [0,T_f]$,

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) - \operatorname{div}(\sigma(t)) = f(t), & \text{dans} \quad \Omega, \\ \sigma(t).\vec{n} = g(t), & \text{sur} \quad \partial\Omega_N, \\ (u(t),v(t)) = (0,1), & \text{sur} \quad \partial\Omega_D. \end{cases}$$

  où $\sigma(t) = a(t)A(Eu(t) + E\dot{u}(t))$ et $a(t) := v(t)^2 + \eta$.
- (L3) Condition de propagation de rupture : pour $t \in (0,T_f]$,

$$(LOS) \quad \mathcal{E}_{el}(u(t),v(t)) + \mathcal{E}_S(v(t)) = \inf_{v\in H^1(\Omega),\, v=1 \,\text{sur}\, \partial\Omega_D, v\le v(t)} \mathcal{E}_{el}(u(t),v) + \mathcal{E}_S(v).$$

– (L4) Principe de conservation d'énergie : pour $T \in (0, T_f]$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{el}(u(T), v(T)) + \mathcal{E}_S(v(T)) + \mathcal{K}(\dot{u}(T)) - \langle l(T), u(T)\rangle = \\ &\mathcal{E}_{el}(u(0), v(0)) + \mathcal{E}_S(v(0)) + \mathcal{K}(\dot{u}(0)) - \langle l(0), u(0)\rangle \\ - &\int_0^T \int_\Omega aAE\dot{u} : E\dot{u}\, dx\, dt - \int_0^T \langle \dot{l}, u\rangle\, dt. \end{aligned}$$

En particulier Ortner, Larsen et Süli [49] prouvent que

Théorème 1.4.1 *[49] Il existe au moins une evolution* $(u, v) \in (H^2(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)) \cap W^{1,\infty}(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)) \times W^{1,\infty}(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}))$ *qui satisfait les conditions initiales (L1), l'équation dynamique (L2) au sens faible, la loi de propagation de rupture (L3) et l'égalité d'énergie (L4).*

1.4.2 Modèle de Dal Maso-Toader - Rupture et plasticité

Le deuxième modèle qui nous paraît intéressant est le modèle variationnel d'évolution élasto-plastique avec la rupture proposé par Dal Maso et Toader [25]. Ce modèle met en évidence deux phénomènes de dissipation : la plasticité et la rupture. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. L'évolution du matériau est assurée par l'imposition du déplacement dépendant du temps $w(t)$ suffisamment régulier sur la partie Dirichlet $\partial\Omega_D$, $(w \in AC(0, T, H^1))$. Soit $\Gamma_0 \subset \overline{\Omega}$ un ensemble compact avec un nombre fini de composantes connexes telles que $\mathcal{H}^1(\Gamma_0) < \infty$. Pour $m \in \mathbb{N}$ fixé, l'ensemble des fractures admissibles est défini par :

$$\mathcal{C}_m := \{\Gamma \subset \overline{\Omega}; \Gamma_0 \subset \Gamma, \Gamma \text{ a au plus m composantes connexes}, \mathcal{H}^1(\Gamma) < \infty\}.$$

Pour tout compact $\Gamma \subset \overline{\Omega}$, on définit : $\Omega_\Gamma := \Omega \setminus \Gamma$, $\hat{\Omega}_\Gamma := \overline{\Omega} \setminus \Gamma$ et $\partial_D\Omega_\Gamma := \partial\Omega \setminus \Gamma$. L'espace des déplacements admissibles est défini par :

$$BD_l(\Omega_\Gamma, \partial_D\Omega_\Gamma) := \{v \in BD_{loc}(\Omega_\Gamma) : Eu \in M_b(\Omega_\Gamma; \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}),\ v \in L^1(\partial_D\Omega_\Gamma, \mathbb{R}^2)\}.$$

Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma \subset \overline{\Omega}$, $w \in H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^2)$. Le triplet $(u, e, p) \in BD_l(\Omega_\Gamma, \partial_D\Omega_\Gamma) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times M_b(\overline{\Omega}, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ est dit admissible sur $\overline{\Omega}$ s'il satisfait :

$$\begin{cases} Eu = e + p & \text{dans } \Omega_\Gamma \\ p = (w - u) \odot \nu_\Omega \mathcal{H}^1 & \text{sur } \partial_D\Omega_\Gamma \\ e = 0 \quad \text{et} \quad p = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.18}$$

où ν_Ω désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ et $a \odot b$ le produit tensoriel symétrisé entre deux vecteur $a, b \in \mathbb{R}^2$ ($a \odot b$ est une matrice symétrique avec les

coefficients $c_{ij} = (a_i b_j + a_j b_i)/2$). L'ensemble des tenseurs admissibles de déformation élastique et plastique est défini par :

$$\begin{aligned} A(w,\Gamma) \;:=\; & \{(e,p) \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times M_b(\overline{\Omega}, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})\, t.q.\, \exists\, u \in BD_l(\Omega_\Gamma, \partial_D \Omega_\Gamma) \\ & t.q.\, (u,e,p)\, \text{satisfait} \quad (1.18)\}. \end{aligned}$$

Enfin, l'ensemble des triplets admissible (e,p,Γ) est défini par :

$$A(w) := \{(e,p,\Gamma); (e,p) \in A(w,\Gamma), \Gamma \in \mathcal{C}_m\}.$$

Nous présentons maintenant le processus de dissipation dans un matériau élasto-parfaitement plastique avec le modèle de rupture variationnelle. Nous définissons la distance de dissipation sur $M_b(\overline{\Omega}, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times \mathcal{C}_m$ par :

$$\mathcal{D}((p_2,\Gamma_2),(p_1,\Gamma_1)) := \begin{cases} H(p_2 - p_1)(\hat{\Omega}_2) + \mathcal{H}^1(\Gamma_2 \backslash \Gamma_1) & \text{si} \quad \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \\ +\infty \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\hat{\Omega}_2 := \overline{\Omega} \backslash \Gamma_2$, et

$$H(p)(\hat{\Omega}_2) := \int_{\hat{\Omega}_2} H(\frac{p}{|p|})\, d|p|. \tag{1.19}$$

A partir de la distance de dissipation, on définit la dissipation du système sur intervalle de temps $[a,b]$ par :

$$\text{Diss}(p(.),\Gamma(.);a,b) := \sup \sum_{i=1}^{k} \mathcal{D}((p(t_i),\Gamma(t_i)),(p(t_{i-1}),\Gamma(t_{i-1}))), \tag{1.20}$$

où le sup est realisé sur l'ensemble de toutes les partitions finies de l'intervalle $[a,b]$: $a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k = b$. Le résultat principal de l'article de Dal Maso et Toader est l'existence d'une évolution quasi-statique :

Théorème 1.4.2 *[25] Soit $w \in AC([0,T], H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^2))$, $(e(0),p(0),\Gamma(0)) = (e_0,p_0,\Gamma_0) \in A(w(0))$ tels que :*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega Ae_0 : e_0\, dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega A\eta : \eta\, dx + \mathcal{D}((q,\Gamma^*),(p_0,\Gamma_0))$$

pour tout $(\eta,q,\Gamma^*) \in A(w(0))$. Il existe une évolution du système définie par la fonction

$$t \in [0,T] \to (e(t),p(t),\Gamma(t)) \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}) \times M_b(\overline{\Omega}, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}) \times \mathcal{C}_m,$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

– *la stabilité globale : pour tout* $t \in [0,T]$, $(e(t), p(t), \Gamma(t)) \in A(w(t))$ *et*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega Ae(t) : e(t)\,dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega A\eta : \eta\,dx + \mathcal{D}((q,\Gamma^*),(p(t),\Gamma(t)))$$

pour tout $(\eta, q, \Gamma^*) \in A(w(t))$

– *le principe de conservation d'énergie : la fonction* $t \in [0,T] \longrightarrow e(t) \in L^\infty([0,T], L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})$ *et pour tout* $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega Ae(t) : e(t)\,dx \quad &+ \quad Diss(p(.),\Gamma(.);0,t)\\ &= \quad \frac{1}{2}\int_\Omega Ae(0) : e(0)\,dx + \int_0^t\int_\Omega \sigma(s) : E\dot{w}(s)\,dx\,ds.\end{aligned}$$

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des modèles d'évolution en plasticité ou (et) rupture. Rappelons notre objectif : nous voulons construire des modèles mathématiques et numériques contenant les principaux phénomènes de dissipation (plasticité, rupture, dissipation visqueuse) et qui pourraient permettre de simuler numériquement la déformation de matériaux géophysiques ou au moins, de simuler les expériences analogues, telles celles de Peltzer et Tapponnier. Pour cela nous proposons de construire une classe de modèles d'évolution combinant les modèles d'évolution de plasticité, d'écrouissage cinématique linéaire, de viscoplasticité ou viscoélasticité avec la rupture régularisée de type Ambrosio-Tortorelli qui suit la loi d'évolution de rupture du modèle de Larsen-Ortner-Süli (LOS) ou du modèle de Babadjian-Millot (BM).

Chapitre 2

Construction d'une classe de modèles d'évolution de plasticité et de rupture

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de construire des modèles d'évolution qui pourraient tenir en compte de plusieurs phénomènes dissipatifs liés à la plasticité, la dissipation visqueuse et la rupture. Pour construire nos modèles, nous utiliserons les ingrédients vus au chapitre précedent : la plasticité, la visco-élasticité, la viscoplasticité, l'écrouissage cinématique, la rupture regularisée de type Ambrosio-Tortorelli. La première question naturelle que nous nous posons est de savoir si ces modèles sont bien posés de points de vue physique. Dans le chapitre précedent nous avons vu qu'une rupture représentée par une fonction champ de phase v est intérpretée comme une variable d'approximation numérique. Nous pouvions juste considérer un modèle élasto-visco-plastique et lui ajouter artificiellement la rupture numérique. Une telle stratégie ne nous parrait pas pertinente. Nous montrons qu'en fait on peut aussi considérér v comme une variable interne globale (et donc lui donner un sens mécanique) dans un cadre thermodynamique cohérent.

2.2 Définitions et propriétés mathématiques

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$ avec le bord Lipschitz $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$, où $\partial\Omega_D$, $\partial\Omega_N$ sont des ensembles disjoints et ouverts dans $\partial\Omega$. Nous noterons le dérivée en temps avec un point et $\operatorname{argmin}_{v\in V} \mathcal{F}(v)$ une fonction u qui minimise $\mathcal{F}$ sur V. Soit X un espace de Banach. Pour $T_f > 0$ fixé, nous

notons $L^p((0,T_f),X)$, $W^{k,p}((0,T_f),X)$, les espaces de Lebesgue et de Sobolev dépendant du temps [voir [31] p. 285]. Nous noterons pour $1 \leq p \leq \infty$, la norme L^p par $\| \, . \, \|_p$ ou $\| \, . \, \|_{L^p}$. L'ensemble des matrices symétriques 2×2 sera noté $\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$. Pour $\xi, \zeta \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ nous définissons le produit scalaire matriciel par $\zeta : \xi := \sum_{ij} \zeta_{ij}\xi_{ij}$, et associons la norme matricielle $|\xi| := \sqrt{\xi : \xi}$. Soit A le tenseur élastique d'ordre 4 des coefficients de Lamé et B un tenseur symmétrique d'ordre 4. Nous supposons qu'ils existent $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \infty$, qui satisfont les conditions suivantes :

$$\forall\, e \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}, \quad \alpha_1|e|^2 \leq Ae : e \leq \alpha_2|e|^2 \quad \text{et} \quad \alpha_1|e|^2 \leq Be : e \leq \alpha_2|e|^2.$$

Les inconnues mécaniques des modèles seront le champ de déplacement $u : \Omega \times [0,T_f] \to \mathbb{R}^2$, le tenseur de déformation élastique $e : \Omega \times [0,T_f] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$, le tenseur de déformation plastique $p : \Omega \times [0,T_f] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$. Nous supposons que u and ∇u sont petits. La relation entre le tenseur de déformation E et le champ de déplacement est donné par :

$$Eu := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T_f].$$

Nous supposons que le tenseur de déformations s'écrit comme la somme de tenseur de déformations élastiques et plastiques :

$$Eu \;=\; e + p \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T_f].$$

Soit $w \in H^1(0,T_f,H^1(\Omega,\mathbb{R}^2))$ représentant le déplacement appliqué au bord Dirichlet $\partial\Omega_D$. Pour tout $t \in [0,T_f]$ nous définissons l'ensemble des champs cinématiquement admissibles par

$$\begin{aligned} A_{adm}(w(t)) \;:=\; & \{(u,e,p) \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \;: \\ & Eu = e + p \quad p.p. \text{ dans } \Omega,\; u = w(t) \quad p.p. \text{ sur } \partial\Omega_D\}. \end{aligned}$$

Pour $f \in C^1([0,T_f],L^2(\Omega)^2)$, et $g \in C^1([0,T_f],L^2(\partial\Omega_N)^2)$,les forces extérieures au temps $t \in [0,T_f]$ sont exprimées par

$$\langle l(t),u\rangle := \int_\Omega f(t).u\,dx + \int_{\partial\Omega_N} g(t).u\,ds.$$

Pour $\tau > 0$, nous définissons dans la suite de ce travail le convexe d'élasticité par

$$K := \{q \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}};\, |q| \leq \tau\},$$

et $H : \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \to [0,\infty]$ la fonction support à K par

$$H(p) := \sup_{\theta\in K}\; \theta : p = \tau|p|.$$

Le potentiel de dissipation viscoplastique est donné par H_β :

$$H_\beta(p) := H(p) + \frac{\beta}{2}|p|^2,$$

où $\beta > 0$ joue le rôle d'un paramètre de régularisation viscoplastique. Nous approchons la rupture (voir Figure 2.1) par une fonction champ de phase $v : \Omega \times [0, T_f] \to [0, 1]$ qui dépend de deux paramètres :

- Nous supposons qu'une fracture n'est pas une zone de discontinuité raide mais une zone de transition diffuse entre 2 valeurs du déplacement, d'épaisseur $\varepsilon > 0$, dans laquelle v prend des valeurs proche de 0 dans la zone qui modélise la fissure. Dans tout le manuscrit ε est fixé. Les zones où $v(x)$ est plus petit qu'une valeur $\alpha \in (0, 1)$ peuvent être considérées comme des fissures généralisées. Leur largeur dépend du choix (arbitraire) de α, par ex. $\alpha = \frac{1}{2}$. Lorsque $\varepsilon \to 0$, on s'attend à ce que ces zones deviennent de plus en plus étroites et se localisent autour de surface de discontinuité de u, de dimension $N - 1$.
- Pour préserver le caractère elliptique de l'opérateur, la zone de transition diffuse est supposée être occupée par un matériau très compliant de coefficients de Lamé $(v^2 + \eta)A$, avec $\eta > 0$.

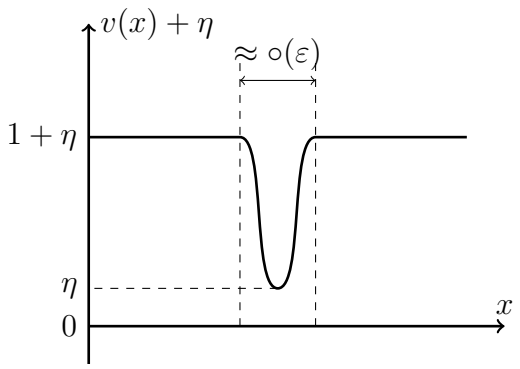

FIGURE 2.1 – Dans le modèle de la rupture généralisée, la rupture est remplacée par une bande fine d'un matériau très mou.

Dans la suite nous notons,

$$a = v^2 + \eta \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T_f].$$

Formellement, pour chaque $t \in [0, T_f]$, la déformation du matériau, la nucléation et la propagation de la rupture sont basées sur la minimisation d'une

énergie globale qui contient principalement les termes suivants :

$$\mathcal{E}_{globale} := \mathcal{E}_{el} + \mathcal{E}_P + \mathcal{E}_{KH} + \mathcal{E}_{VE} + \mathcal{E}_{VP} + \mathcal{E}_S - \langle l, . \rangle.$$

L'énergie élastique est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{el} \ : \ & L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (e, v) \longmapsto & \ \mathcal{E}_{el}(e, v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(v^2 + \eta\right) Ae : e \, dx. \end{aligned}$$

et l'énergie d'écrouissage cinématique par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{KH} \ : \ & L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \to \mathbb{R} \\ p \longmapsto & \ \mathcal{E}_{KH}(p) = \frac{1}{2} \int_\Omega Bp : p \, dx. \end{aligned}$$

L'énergie de surface est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_S \ : \ & H^1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ v \quad \longmapsto & \ \mathcal{E}_S(v) = \int_\Omega \varepsilon |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \frac{(1-v)^2}{4\varepsilon} \, dx. \end{aligned}$$

Pour $r > 2$, nous définissons l'énergie de surface modifiée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^r_S \ : \ & W^{1,r}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ v \quad \longmapsto & \ \mathcal{E}^r_S(v) = \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r} |\nabla v|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon} |1-v|^r \, dx. \end{aligned}$$

avec $r' := \dfrac{r}{r-1}$ et $\alpha := \left(\dfrac{r}{2}\right)^{r'}$. L'énergie plastique dissipée est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{PL} \ : \ & L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \to \mathbb{R} \\ \dot{p} \longmapsto & \ \mathcal{E}_{PL}(\dot{p}) = \int_\Omega H(\dot{p}) \, dx = \int_\Omega \tau |\dot{p}| \, dx, \end{aligned}$$

Pour $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, l'énergie viscoélastique est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{VE} \ : \ & H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \\ \dot{u} \longmapsto & \ \mathcal{E}_{VE}(\dot{u}) = \frac{\beta_1}{2} \int_\Omega E\dot{u} : E\dot{u} \, dx. \end{aligned}$$

et l'énergie viscoplastique

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{VP} \ : \ & L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \to \mathbb{R} \\ \dot{p} \longmapsto & \ \mathcal{E}_{VP}(\dot{p}) = \frac{\beta_2}{2} \int_\Omega \dot{p} : \dot{p} \, dx. \end{aligned}$$

Remarque 1 *Dans de nombreux modèles de plasticité, notamment pour les métaux, on considère que le seuil de plasticité ne concerne que la partie déviatorique du tenseur des contraintes. Dans notre étude, nous considérons que la fonction de seuil affecte tout le tenseur des contraintes. C'est une hypothèse forte, qui nous permet de mener l'analyse mathématique du chapitre 3. Elle n'est pas nécessaire pour la démonstration du chapitre 4. La plasticine est un matériau dont la rhéologie n'est pas très bien connue, semble-t-il : nous ne savons pas si cette hypothèse sur la fonction de seuil est pertinente dans ce cas.*

2.3 Formulation des modèles

Comme on a expliqué dans l'introduction nous construisons des modèles d'évolution continus en temps en combinant le comportement lié à la viscosité et (ou) à la plasticité avec la loi d'évolution de rupture du modèle de Larsen-Ortner-Süli (LOS) ou du modèle de Babadjian-Millot (BM).

Nous proposons maintenant 4 modèles qui combinent les ingrédients suivants.

- Modèle 1 : élasticité, plasticité, viscoélasticité et rupture.
- Modèle 2 : élasticité, plasticité, viscoplasticité et rupture.
- Modèle 3 : élasticité, plasticité, écrouissage cinématique et rupture.
- Modèle 4 : élasticité, plasticité, écrouissage cinématique, viscoplasticité et rupture (r-Laplacien).

Nous définissons une évolution pour nos modèles comme un quadruplet de fonctions $(u, v, e, p) : \Omega \times [0, T_f] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(E0) Conditions initiales : $(u(0), v(0), e(0), p(0)) = (u_0, v_0, e_0, p_0)$ avec $(u_0, e_0, p_0) \in A_{adm}(w(0))$, $0 \leq v_0 \leq 1$ dans Ω, $v_0 = 1$ sur $\partial\Omega_D$.

(E1) Pour tout $t \in [0, T_f]$, $0 \leq v(t) \leq 1$ dans Ω et $v(t) = 1$ sur $\partial\Omega_D$.

(E2) Irréversibilité : pour tout $0 \leq s \leq t \leq T_f$, $v(t) \leq v(s)$.

(E3) Compatibilité cinématique : pour $t \in [0, T_f]$,

$$(u(t), e(t), p(t)) \in A_{adm}(w(t))$$

(E4) Equation d'équilibre : pour tout $t \in [0, T_f]$,

$$\begin{cases} -\text{div}(\sigma(t)) = f(t), & \text{dans} \quad \Omega, \\ \sigma(t).\vec{n} = g(t), & \text{sur} \quad \partial\Omega_N, \\ (u(t), v(t)) = (w(t), 1), & \text{sur} \quad \partial\Omega_D. \end{cases}$$

(E5) Relations constitutives : pour $t \in [0, T_f]$,

- Modèle 1 : $\sigma(t) = (v(t)^2 + \eta)Ae(t) + \beta_1 E\dot{u}(t)$. Le premier terme représente la contrainte liée à la déformation élastique tandis que le deuxième représente la dissipation visqueuse.
- Modèles 2, 3, 4 : $\sigma(t) = (v(t)^2 + \eta)Ae(t)$. Le tenseur de contrainte est lié seulement à la déformation élastique. Nous rappelons la notation $a(t) := v(t)^2 + \eta$.

(E6) Loi d'écoulement plastique : pour p.t. $t \in [0, T_f]$,

- Modèle 1 : (Visco-Plasticité)

$$a(t)Ae(t) \in \partial H(\dot{p}(t)) \quad \text{pour } p.p. \quad x \in \Omega. \tag{2.1}$$

- Modèle 2 : (Viscoplasticité)

$$a(t)Ae(t) \in \partial H_{\beta_2}(\dot{p}(t)) \quad \text{pour } p.p. \quad x \in \Omega. \tag{2.2}$$

- Modèle 3 : (Ecrouissage cinématique linéaire)

$$a(t)Ae(t) - Bp(t) \in \partial H(\dot{p}(t)) \quad \text{pour } p.p. \quad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

- Modèle 4 : (Viscoplasticité et écrouissage cinématique linéaire)

$$a(t)Ae(t) - Bp(t) \in \partial H_{\beta_2}(\dot{p}(t)) \quad \text{pour } p.p. \quad x \in \Omega. \tag{2.4}$$

(E7) Condition de propagation de rupture : pour $t \in [0, T_f]$,

- Modèles 1, 2, 3 :

$$\mathcal{E}_{el}(e(t), v(t)) + \mathcal{E}_S(v(t)) = \inf_{v=1 \text{ sur } \partial\Omega_D, v \leq v(t)} \mathcal{E}_{el}(e(t), v) + \mathcal{E}_S(v).$$

- Modèle 4 :

$$\mathcal{E}_{el}(e(t), v(t)) + \mathcal{E}_S^r(v(t)) = \inf_{v=1 \text{ sur } \partial\Omega_D, v \leq v(t)} \mathcal{E}_{el}(e(t), v) + \mathcal{E}_S^r(v).$$

(E8) Egalité d'énergie : pour tout $T \in [0, T_f]$,

- Modèle 1 :

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{el}(e(T), v(T)) + \mathcal{E}_S(v(T)) - \langle l(T), u(T) \rangle \\ &= \mathcal{E}_{el}(e(0), v(0)) + \mathcal{E}_S(v(0)) - \langle l(0), u(0) \rangle \\ &- \beta_1 \int_0^T \| E\dot{u}(t) \|_2^2 \, dt - \tau \int_0^T \int_\Omega |\dot{p}| dx \, dt \\ &- \int_0^T \langle \dot{l}, u \rangle \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega_D} \sigma(t)\vec{n}.\dot{w}(t) \, ds \, dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

– Modèle 2 :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{el}(e(T),v(T))+\mathcal{E}_S(v(T))-\langle l(T),u(T)\rangle\\
&\quad= \mathcal{E}_{el}(e(0),v(0))+\mathcal{E}_S(v(0))-\langle l(0),u(0)\rangle\\
&\quad- \beta_2\int_0^T \| \dot{p}(t) \|_2^2\, dt-\tau\int_0^T\int_\Omega |\dot{p}|dx\, dt\\
&\quad- \int_0^T \langle \dot{l},u\rangle\, dt+\int_0^T\int_{\partial\Omega_D}\sigma(t)\vec{n}.\dot{w}(t)\, ds\, dt.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

– Modèle 3 :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{el}(e(T),v(T))+\mathcal{E}_S(v(T))+\mathcal{E}_{KH}(p(t))-\langle l(T),u(T)\rangle\\
&\quad= \mathcal{E}_{el}(e(0),v(0))+\mathcal{E}_S(v(0))+\mathcal{E}_{KH}(p(0))-\langle l(0),u(0)\rangle\\
&\quad- \tau\int_0^T\int_\Omega |\dot{p}|dx\, dt-\int_0^T \langle \dot{l},u\rangle\, dt+\int_0^T\int_{\partial\Omega_D}\sigma(t)\vec{n}.\dot{w}(t)\, ds\, dt.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

– Modèle 4 :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{el}(e(T),v(T))+\mathcal{E}_S^r(v(T))+\mathcal{E}_{KH}(p(t))-\langle l(T),u(T)\rangle\\
&\quad= \mathcal{E}_{el}(e(0),v(0))+\mathcal{E}_S^r(v(0))+\mathcal{E}_{KH}(p(0))-\langle l(0),u(0)\rangle\\
&\quad- \tau\int_0^T\int_\Omega |\dot{p}|dx\, dt-\beta_2\int_0^T \| \dot{p}(t) \|_2^2\, dt\\
&\quad- \int_0^T \langle \dot{l},u\rangle\, dt+\int_0^T\int_{\partial\Omega_D}\sigma(t)\vec{n}.\dot{w}(t)\, ds\, dt.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour simplifier, dans la suite de ce chapitre nous supposons $l \equiv 0$.

2.4 Lien des modèles avec la thermodynamique

2.4.1 Cadre thermodynamique

Dans cette section, nous montrons que nos modèles peuvent être formulés dans un cadre thermodynamique qui ressemble à celui des Matériaux Standard Généralisés de Halphen and Nguyen [42], voir aussi LeTallec [58]. Pour cela, nous introduisons pour $t \in [0, T_f]$ une densité d'énergie libre $w(E(t), v(t), p(t))$, qui dépend de $E(t) := Eu(t)$, et de $v(t), p(t)$, les deux dernières étant considérées comme les variables internes (voir [41], [42]) décrivant des phénomènes irréversibles (rupture, plasticité) qui prennent place

dans le milieu continu considéré. Nous allons introduire un potentiel d'énergie libre :

$$\mathcal{W}(E,p,v)(t) \quad = \quad \int_\Omega w(E,p,v)(t)\,dx,$$

et des forces thermodynamiques comme les opérateurs associés aux variables internes de la manière suivante :

$$T_p(t)\tilde{p} := -\frac{\partial w}{\partial p}(E,p,v)(t)\tilde{p} \quad \text{et} \quad T_v(t)\tilde{v} := -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial v}(E,p,v)(t)\tilde{v}.$$

Notons que dans notre cas, la force thermodynamique associée à la fonction champ de phase $v(t)$ est définie comme un opérateur global $H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. En accord avec le principe de conservation de la quantité de mouvement, nous rappelons que le théorème de Cauchy implique l'existence d'un tenseur de contrainte symétrique $\sigma(t)$ qui satisfait sous l'hypothèse de petites déformations l'équation d'équilibre (E4). Le tenseur de contraintes $\sigma(t)$ est composé de sa partie réversible et irréversible

$$\sigma^{rev}(t) := \frac{\partial w}{\partial E}(E(t),p(t),v(t)) \quad \text{et} \quad \sigma^{irrev}(t) := \sigma(t) - \sigma^{rev}(t). \tag{2.9}$$

On va construire un potentiel de dissipation $\phi(t) = \phi(\dot{E}(t),\dot{p}(t),\dot{v}(t))$, qui est une fonction convexe en ses variables et est minimale en $(\dot{E}(t),\dot{p}(t),\dot{v}(t)) = (0,0,0)$. Suivant Halphen et Nguyen [42] et LeTallec [58], nous faisons l'hypothèse constitutive que les forces thermodynamiques sont reliées au potentiel de dissipation par

$$(\sigma^{irrev}(t), T_p(t), T_v(t)) \in \partial\phi(\dot{E}(t),\dot{p}(t),\dot{v}(t)), \quad \forall t \in [0,T_f]. \tag{2.10}$$

Nous définissons aussi le potentiel de dissipation lié à la rupture par

$$D_{\mathrm{S}}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \xi \leq 0, \ p.p. \quad \text{dans } \Omega,\ \xi \in H^1_D(\Omega), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $H^1_D(\Omega) := \{z \in H^1(\Omega); z = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}$.

2.4.2 Preuve formelle de l'égalité d'énergie et d'une inégalité de type Clausius-Duhem

Notre objectif est de montrer que nos modèles sont cohérents avec ce cadre thermodynamique au sens où si nous supposons (2.10) et si l'équation d'équilibre (E4) est vérifiée, alors les relations (E5)-(E8) sont vérifiées et de

plus les modèles vérifient une inégalité thermodynamique de type Clausius-Duhem. Nous présentons ce résultat seulement pour le modèle 1. L'analyse est cependant valable aussi pour les modèles 2, 3 et 4 (voir la remarque ci-dessous).

Théorème 2.4.1 *Supposons que le quadruplet* (u, v, e, p) *vérifie*

$$\begin{cases} u \in C^1(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)), \\ v \in C^1(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R})), \\ e \in C^1(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})), \\ p \in C^1(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})), \end{cases}$$

et satisfait pour tout $t \in [0, T_f]$,

$$\begin{cases} (E0), (E1), (E3), \\ \dot{v}(t) \leq 0 \quad \textit{p.p. dans } \Omega \ (\textit{l'irréversibilité (E2)}), \\ (\dot{u}(t), \dot{e}(t), \dot{p}(t)) \in A_{adm}(\dot{w}(t)), \\ \dot{v}(t) \in H^1_D(\Omega). \end{cases}$$

Supposons que (E4) et (2.10) sont vérifiés pour tout $t \in [0, T_f]$ *avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1(t, Eu(t), p(t), v(t)) \ &:= \ \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v(t)^2 + \eta\right) A(Eu(t) - p(t)) : (Eu(t) - p(t))\, dx \\ &+ \ \int_\Omega \varepsilon |\nabla v(t)|^2 dx + \int_\Omega \frac{(1 - v(t))^2}{4\varepsilon}\, dx, \end{aligned}$$

et le potentiel de dissipation

$$\phi_1(t, E\dot{u}(t), \dot{p}(t), \dot{v}(t)) = \frac{1}{2}\beta_1 E\dot{u}(t) : E\dot{u}(t) + \tau|\dot{p}(t)| + D_S(\dot{v}(t)).$$

Alors (u, v, e, p) *satisfait (E5), (E6), (E7), (E8). En plus, pour tout* $t \in [0, T_f]$,

$$\mathcal{D}(t) := \int_\Omega \sigma(t) : E\dot{u}(t)\, dx - \dot{\mathcal{W}}_1(t) \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Preuve : Soit $t \in [0, T_f]$. Les relations (2.9) et (2.10) donnent (E5)

$$\sigma(t) = a(t)Ae(t) + \beta_1 E\dot{u}(t). \tag{2.12}$$

Nous déduisons aussi de (2.10) que

$$(v(t)^2 + \eta)Ae(t) \in \partial H(\dot{p}(t)). \tag{2.13}$$

ce qui prouve (E6). De (2.10), il s'ensuit que pour tout $\xi \in H^1_D(\Omega)$, $\xi \leq 0$ p.p. dans Ω

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial v}(E,p,v)(t)(\xi - \dot{v}(t)) \\ &= -\int_\Omega v(t)A(Eu(t)-p(t)) : (Eu(t)-p(t))(\xi - \dot{v}(t)) \\ &+ (2\varepsilon)^{-1}(v(t)-1)(\xi - \dot{v}(t)) + 2\varepsilon \nabla v(t) \nabla(\xi - \dot{v}(t))\, dx \leq 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

et donc nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_\Omega v(t)A(Eu(t)-p(t)) : (Eu(t)-p(t))(\dot{v}(t) - \xi) \\ &+ (2\varepsilon)^{-1}(v(t)-1)(\dot{v}(t) - \xi)\, dx + \int_\Omega 2\varepsilon \nabla v(t) \nabla(\dot{v}(t) - \xi)\, dx \leq 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Testant (2.15) avec $\xi = \dot{v}(t) + \varphi - v(t)$ où $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \leq v(t)$, et $\varphi = 1$ sur $\partial\Omega_D$, implique

$$\begin{aligned} &2\varepsilon \int_\Omega \nabla v(t) \nabla(v(t) - \varphi)\, dx + \int_\Omega v(t)Ae(t) : e(t)(v(t) - \varphi)\, dx \\ &+ (2\varepsilon)^{-1} \int_\Omega (v(t)-1)(v(t) - \varphi)\, dx \leq 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \leq v(t)$, et $\varphi = 1$ sur $\partial\Omega_D$. Nous reécrivons (2.16) comme suit :

$$\begin{aligned} &2\varepsilon \int_\Omega \nabla v(t) \nabla v(t)\, dx + \int_\Omega v(t)Ae(t) : e(t)v(t)\, dx + (2\varepsilon)^{-1} \int_\Omega (v(t)-1)v(t)\, dx \\ &\leq 2\varepsilon \int_\Omega \nabla v(t) \nabla \varphi\, dx + \int_\Omega v(t)Ae(t) : e(t)\varphi\, dx + (2\varepsilon)^{-1} \int_\Omega (v(t)-1)\varphi\, dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy mène à

$$2\varepsilon \int_\Omega \nabla v(t) \nabla \varphi\, dx \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla v(t)|^2\, dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla \varphi|^2\, dx,$$

$$\int_\Omega v(t)Ae(t) : e(t)\varphi\, dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega v^2(t)Ae(t) : e(t)\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \varphi^2 Ae(t) : e(t)\, dx.$$

Nous reécrivons

$$\begin{aligned} (v(t)-1)\varphi &= (v(t)-1)(\varphi - 1) + (v(t)-1), \\ (v(t)-1)v(t) - (v(t)-1) &= (v(t)-1)^2, \end{aligned}$$

et on obtient

$$\mathcal{E}_{el}(e(t), v(t)) + \mathcal{E}_S(v(t)) \leq \mathcal{E}_{el}(e(t), \varphi)) + \mathcal{E}_S(\varphi) \tag{2.18}$$

pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \leq v(t)$, et $\varphi = 1$ sur $\partial\Omega_D$, ce qui prouve (E7). Nous prouvons maintenant l'égalité d'énergie. Nous dérivons $\mathcal{W}_1(t, E(u(t)), p(t), v(t))$ par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{W}_1(t, E(u(t)), p(t), v(t)) &= \int_\Omega a(t)A(Eu(t) - p(t)) : (E\dot{u}(t) - \dot{p}(t))\, dx \\
+ \quad & \int_\Omega v(t)A(Eu(t) - p(t)) : (Eu(t) - p(t))\dot{v}(t) + (2\varepsilon)^{-1}(v(t) - 1)\dot{v}(t)\, dx \\
+ \quad & 2\int_\Omega \varepsilon\nabla v(t)\nabla\dot{v}(t)\, dx.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Testant l'inégalité (2.14) avec $\xi = 0$ et $\xi = 2\dot{v}(t)$ mène à

$$-\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial v}(E, p, v)(t)\dot{v}(t) = 0. \tag{2.20}$$

De (2.19) et de (2.20) nous déduisons que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{W}_1(t, Eu(t), p(t), v(t)) \\
&= \int_\Omega a(t)A(Eu(t) - p(t)) : (E\dot{u}(t) - \dot{p}(t))\, dx \\
&= \int_\Omega \sigma(t) : E\dot{u}(t)\, dx - \int_\Omega \beta_1 E\dot{u}(t) : E\dot{u}(t)\, dx \\
&- \int_\Omega a(t)A(Eu(t) - p(t)) : \dot{p}(t)\, dx.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

L'équation d'équilibre (E4) donne que

$$\int_\Omega \sigma(t) : E\dot{u}(t)\, dx = \int_{\partial\Omega_D} \sigma(t)\vec{n}.\dot{w}(t)\, dx. \tag{2.22}$$

Par la défintion du sous-différentiel, (2.13) mène à l'inégalité variationnelle : pour tout $q \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ admissible, on a

$$\tau\int_\Omega |q|\, dx \geq \tau\int_\Omega |\dot{p}(t)|\, dx + \int_\Omega a(t)A(Eu(t) - p(t)) : (q - \dot{p}(t))\, dx. \tag{2.23}$$

Testant (2.23) avec $q = 0$ et $q = 2\dot{p}(t)$ implique que

$$\int_\Omega a(t)A(Eu(t) - p(t)) : \dot{p}(t)\, dx = \tau\int_\Omega |\dot{p}(t)| dx. \tag{2.24}$$

Et donc on déduit de (2.21), (2.22), (2.24) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{W}_1(t, Eu(t), p(t), v(t)) &= -\int_\Omega \beta_1 E\dot{u}(t) : E\dot{u}(t)\,dx - \tau\int_\Omega |\dot{p}(t)|\,dx \\ &+ \int_{\partial\Omega_D} \sigma(t)\vec{n}.\dot{w}(t)\,dx. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Intégrant (2.25) sur $[0, T]$ pour tout $0 \leq T \leq T_f$ montre que l'égalité d'énergie (E8) est vérifiée. Finalement, de (2.22) et de (2.25) nous déduisons que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(t) &:= \int_\Omega \sigma(t) : E\dot{u}(t)\,dx - \dot{\mathcal{W}}_1(t) \\ &= \int_\Omega \beta_1 E\dot{u}(t) : E\dot{u}(t)\,dx + \tau\int_\Omega |\dot{p}(t)|\,dx \geqslant 0.\end{aligned}$$

□

Remarque 2 *1. L'hypothèse (2.10) est plus forte que (E7).*

2. Le théorème 2.4.1 est aussi vrai pour les modèles 2, 3 et 4 avec le choix suivant des énergies libres et de potentiels de dissipation :

– pour le modèle 2 :

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}_2(t, Eu(t), p(t), v(t)) \\ &:= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v(t)^2 + \eta\right) A(Eu(t) - p(t)) : (Eu(t) - p(t))\,dx \\ &+ \int_\Omega \varepsilon|\nabla v(t)|^2 dx + \int_\Omega \frac{(1 - v(t))^2}{4\varepsilon}\,dx.\end{aligned}$$

et

$$\phi_2(t, E\dot{u}(t), \dot{p}(t), \dot{v}(t)) = \frac{1}{2}\beta_2\dot{p}(t) : \dot{p}(t) + \tau|\dot{p}(t)| + D_S(\dot{v}(t)).$$

– pour le modèle 3 :

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}_3(t, Eu(t), p(t), v(t)) \\ &:= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v(t)^2 + \eta\right) A(Eu(t) - p(t)) : (Eu(t) - p(t))\,dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega Bp(t) : p(t)\,dx + \int_\Omega \varepsilon|\nabla v(t)|^2 dx + \int_\Omega \frac{(1 - v(t))^2}{4\varepsilon}\,dx,\end{aligned}$$

et

$$\phi_3(t, E\dot{u}(t), \dot{p}(t), \dot{v}(t)) = \tau|\dot{p}(t)| + D_S(\dot{v}(t)).$$

– *pour le modèle 4 :*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_4(t, Eu(t), p(t), v(t)) \\
&\quad := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v(t)^2 + \eta\right) A(Eu(t) - p(t)) : (Eu(t) - p(t))\, dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega Bp(t) : p(t)\, dx + \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v(t)|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}|1 - v(t)|^r\, dx,
\end{aligned}$$

et

$$\phi_4(t, E\dot{u}(t), \dot{p}(t), \dot{v}(t)) = \tau|\dot{p}(t)| + \frac{1}{2}\beta_2\dot{p}(t) : \dot{p}(t) + D_S(\dot{v}(t)).$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé 4 modèles d'évolution contenant plusieurs phénomènes dissipatifs liés à la plasticité, dissipation visqueuse et la rupture. En effet, ces modèles ont été construits en combinant le comportement plastique ou viscoplastique avec l'évolution de rupture de modèle de Larsen-Ortner-Süli et de Babadjian-Millot presentés au chapitre précedent. Un tel choix a été motivé par la possibilité d'implémenter numériquement le comportement élasto-visco-plastique avec la rupture.

Nous avons aussi répondu à la question si un tel couplage a un sens en montrant que ces modèles peuvent rentrer dans un cadre thermodynamique similaire à celui des Matériaux Standards Généralisés. En particulier, nous avons prouvé une inégalité thermodynamique de type Clausius-Duhem.

Chapitre 3

An elasto-viscoplastic evolution model with regularized fracture : Model 1

Introduction au chapitre 3

Le chapitre 3 de cette thèse a pour objectif de montrer un résultat d'existence d'une évolution continue en temps (u, v, e, p) du modèle 1, c'est-à-dire du modèle élasto-visco-plastique avec rupture régularisée utilisant la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli. Plus précisement, nous montrons (Théorème 3.3.1) qu'il existe au moins une évolution

$$(u, v, e, p) : \Omega \times [0, T_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$$

avec

$$\begin{cases} u \in W^{1,\infty}(0, T_f, H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)), \\ v \in W^{1,\infty}(0, T_f, H^1(\Omega; \mathbb{R})), \\ e \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega; \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})), \\ p \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega; \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})), \end{cases}$$

qui satisfait les conditions (H1)-(H7) du modèle défini en section 3.2.2. Ce résultat est obtenu en utilisant une méthode de semi-discrétisation en temps en divisant l'intervalle de temps $[0, T_f]$ en N_f sous-intervalles :

$$0 = t_h^0 < t_h^1 < ... < t_h^n = nh < ... < t_h^{N_f} = T_f, \text{ avec } \quad h = \frac{T_f}{N_f} = t_h^n - t_h^{n-1} \to 0.$$

On construit à chaque pas de temps t_h^n les évolutions approchées $(u_h^n, v_h^n, e_h^n, p_h^n)$ comme des solutions de deux problèmes de minimisation couplés (Proposition 3.3.2 et Proposition 3.3.4). En utilisant seulement la définition des évolutions approchées, nous dérivons un système d'une égalité et de deux inégalités

variationnelles liées à la plasticité et à la rupture (Proposition 3.3.3 et Proposition 3.3.4) qui caractérisent les solutions approchées. La première difficulté de ce travail est d'obtenir les estimations a priori (Proposition 3.3.5) en couplant convenablement ces inégalités et l'égalité variationnelles et en se servant du contrôle $\delta v_h^n := \dfrac{v_h^n - v_h^{n-1}}{h}$ et $\nabla \delta v_h^n$ de façon similaire à celle developpée dans les travaux de Larsen, Ortner, Suli [48] (Lemme 3.3.8) et d'une inégalité discrète de plasticité (Lemme 3.3.7). Une fois ces estimations obtenues, à partir des évolutions approchées, nous construisons des fonctions interpolantes constantes $(u_h^+, v_h^+, e_h^+, p_h^+)$ et linéaires par morceaux (u_h, v_h, e_h, p_h). La présence des interpolants linéaires par morceaux permet d'approcher les dérivées en temps avec $\dot{p}_h = \dfrac{p_h^n - p_h^{n-1}}{h}$, et de même pour $(\dot{u}_h, \dot{v}_h, \dot{e}_h)$. Utilisant les estimations a priori, nous obtenons alors pour ces approximations les bornes uniformes indépendantes de h, ce qui va assurer des résultats de compacité faible, dans le sens que nous pouvons trouver un quadruplet (u, v, e, p) tel que les approximations linéaires et constantes par morceaux vont converger vers ce quadruplet pour la topolgie faible-* dans un espace convenable (Section 3.3.3). Nous voulons alors prouver que le quadruplet (u, v, e, p) est un bon candidat qui va vérifier (H1)-(H7).

En réecrivant l'équation d'équilibre et les inégalités de plasticité et de rupture semi-dicrètes avec les notations des fonctions interpolantes, nous pouvons passer à la limite quand $h \to 0$ dans l'équation d'équilibre discrète (Théorème 3.3.9) et obtenir (H5) au sens faible en utilisant seulement les convergences faibles obtenues et un résultat de compacité forte pour les interpolants de rupture v qui découle des estimations a priori et du théorème d'Arzelà-Ascoli.

Cela est malheureusement insuffisant pour passer à la limite dans les lois discrètes d'écoulement limite plastique (H6) et de propagation de rupture (H7). Pour cela nous montrons un résultat de compacité forte pour les approximations élastiques e_h^+ et e_h qui vont converger vers e fortement dans $L^2(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$ (Proposition 3.3.11). Pour prouver cette convergence, nous utilisons une méthode similaire à celle utilisée par Babadjian et Mora [7], mais dans notre cas nous devrons contrôler et passer à la limite dans certains termes supplémentaires présents liés à la variable de rupture v. Ce résultat nous permet de conclure (Corollaire 3.3.12 et Corollaire 3.3.13).

Abstract

We study a model for elasto-viscoplastic deformation with fracture, in which fracture is approximated via a diffuse interface model. We show that a discretized (in time) quasistatic evolution, converges to a solution of the continuous (in time) evolution, proving existence of a solution to our model.

3.1 Introduction

This chapter deals with an elasto-visco-plastic model with regularized fracture. The model predicting fracture is based on Griffith's criterion [40] that crack path and crack growth are determined by the competition between the elastic energy and the energy dissipated to produce a crack. The variational approach to fracture mechanics and a mathematical model have been developed by Francfort and Marigo [35], based on this idea. This approach has been then adapted by Dal Maso and Toader [25] to the study of fracture problems in elasto-plastic materials with cracks in the case of planar small strain elasto-plasticity where the fracture is represented by the compact crack set $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ verifying an irrevesibility condition.

In Larsen, Ortner, Süli [48] existence and convergence results are proved for a regularized model of dynamic brittle fracture based on the Ambrosio-Tortorelli approximation. This model couples an elastodynamic equation with regularized fracture. Babadjian, Francfort, Mora [5], and Babadjian, Mora [7] study the approximation of dynamic and quasistatic evolution problems in elasto-plasticity via viscosity regularization.

The goal of this chapter is to propose a model that takes into consideration three dissipative terms : plastic flow, fracture and viscous dissipation. This is motivated by the modeling of the Earth crust considered as an elasto-visco-plastic solid in which cracks are allowed to propagate. This hypothesis is qualitatevely supported by analogue experiments of Peltzer and Tapponnier [53] that shows faults propagation in a layer of plasticine. We study from mathematical point of view a model of elasto-visco-plastic material that may account for the behaviour observed in the plasticine experiments. The main objective is to understand by which mechanisms energy can be dissipated in such a model.

In this model the fracture is obtained via Ambrosio-Tortorelli regularization. We only consider fracture via a diffuse interface model. In other words, the geometry of possible cracks is captured by a function v with values between 0 and 1, $v = 1$ in the healthy parts that do not contain cracks. The length of the cracks, a quantity that contributes to the total energy, is ap-

proximated via a functional introduced by Ambrosio and Tortorelli [1]. In other words, the continuous model is obtained coupling elasto-visco-plastic behaviour with regularized fracture evolution of the model of Larsen, Ortner and Süli [48].

A convenience of a such model is the fact, that it can be studied numerically thanks to the presence of regularized fracture. For more details, see [11], [14], [15] for the numerical studies in elastic case and [9] for the numerical studies of our models in the case of traction and plasticine experiments.

In this chapter, we propose the mathematical analysis of a such model via a semi-discrete time procedure. We approximate a continuous time evolution, via semi-discrete time evolutions obtained solving incremental minimum problems. We then prove an existence result to the continuous model when a time discretization parameter converges to zero. The main difficulty is to pass to the limit in the discrete plastic flow rule and discrete crack propagation condition. For this reasons, we prove particularly a strong compactness result for elastic strain (Proposition 3.3.11). As in [7], we prove that the discrete-time elastic strain e_h^+ converges strongly in $L^2(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$, but the presence of v in our model requires the analysis and control of some additional terms associated to v.

The chapter is organised as follows. After a short Introduction, Section 3.2 is devoted to the definitions, mathematical and mechanical settings necessary to the description of our model. The main result is then presented in Section 3.3. Firstly, we prove the existence of solutions for discrete minimum problem in Proposition 3.3.2 and Propostion 3.3.4. Then, we study the convergence of these approximate evolutions as the time step $h \to 0$. The main result of this chapter is presented as follows : There exists at least one limit evolution (u, v, e, p) that satisfies initial and irreversibility conditions, the equilibrium equation, plastic flow rule and crack propagation condition (Theorem 3.3.1).

3.2 Formulation of the model

3.2.1 Preliminaries and mathematical setting

Throughout the chapter, Ω is a bounded connected open set in $\mathbb{R}^2$ with Lipschitz boundary $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ where $\partial\Omega_D$, $\partial\Omega_N$ are disjoint open sets in $\partial\Omega$ and $\mathcal{H}^1(\partial\Omega_D) > 0$. Given $T_f > 0$, we denote by $L^p((0, T_f), X)$, $W^{k,p}((0, T_f), X)$, the Lebesgue and Sobolev spaces involving time [see [31] p. 285], where X is a Banach space. We will usually write $u(t) := u(., t)$ for $u \in W^{k,p}((0, T_f), X)$.

The set of symmetric 2×2 matrices is denoted by $\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$. For $\xi, \zeta \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$

we define the scalar product between matrices $\zeta : \xi := \sum_{ij} \zeta_{ij}\xi_{ij}$, and the associated matrix norm by $|\xi| := \sqrt{\xi : \xi}$. Let A be the fourth order tensor of Lamé coefficients. We assume that for some constants $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \infty$, they satisfy the ellipticity conditions

$$\forall\, e \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}, \quad \alpha_1 |e|^2 \leq Ae : e \leq \alpha_2 |e|^2.$$

For $e \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ and $x \in \Omega$, we define $|e|^2_{A(x)} := A(x)e : e$ and $\| e \|^2_A := \int_\Omega |e|^2_A \, dx$. We recall that the mechanical unknowns of our model are the displacement field $u : \Omega \times [0, T_f] \to \mathbb{R}^2$, the elastic strain $e : \Omega \times [0, T_f] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$, the plastic strain $p : \Omega \times [0, T_f] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$. We assume u and ∇u remain small. So that the relation bewteen the deformation tensor E and the displacement field is given by

$$Eu := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T).$$

We also assume that Eu decomposes as an elastic part and a plastic part

$$Eu \;=\; e + p.$$

We also define the set of kinematically admissible fields by

$$\begin{aligned} A_{adm} \;&:=\; \{(u, e, p) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \;: \\ Eu \;&=\; e + p \quad a.e. \text{ in } \Omega,\; u = 0 \quad a.e. \text{ on } \partial\Omega_D\}. \end{aligned}$$

We denote $H^1_D := \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2);\; u = 0 \text{ on } \partial\Omega_D\}$. For a fixed constant $\tau > 0$, we define $K := \{q \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}};\; |q| \leq \tau\}$ and $H : \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \to [0, \infty]$ the support function of K by

$$H(p) := \sup_{\theta \in K} \theta : p = \tau |p|.$$

For $\eta > 0$, the elastic energy is defined as

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{el} \;:\; L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ &(e, v) \longmapsto \mathcal{E}_{el}(e, v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(v^2 + \eta\right) Ae : e \, dx. \end{aligned}$$

In the following, we will define an evolution as a limit of time discretizations with a time step h. In fact, p and p_0 represent the plastic deformation at 2 consecutive time steps, so that $\dfrac{p - p_0}{h} \sim \dot{p}$. In the same way, u and u_0

represent displacement field at 2 consecutive time steps, so that $\dfrac{u-u_0}{h} \sim \dot{u}$. The plastic dissipated energy is defined, by

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p \,:\, & L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \to \mathbb{R} \\ (p, p_0) \longmapsto & \mathcal{E}_p(p, p_0) = \int_\Omega H(p - p_0)\, dx. \end{aligned}$$

Given $\beta > 0$, the viscoelastic energy is defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ve} \,:\, & H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \\ (u, u_0) \longmapsto & \mathcal{E}_{ve}(u, u_0) = \frac{\beta}{2h} \int_\Omega (E(u) - E(u_0)) : (E(u) - E(u_0))\, dx. \end{aligned}$$

The Griffith surface energy is approximated by the phase-field surface energy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_S \,:\, & H^1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ v \quad \longmapsto & \mathcal{E}_S(v) = \int_\Omega \varepsilon |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \frac{(1-v)^2}{4\varepsilon}\, dx. \end{aligned}$$

It is shown in [12] that in the elastic anti-plane case, where the displacement reduces to a scalar and Eu reduces to ∇u, the Ambrosio-Tortorelli functional

$$\mathcal{E}_\varepsilon(\nabla u, v) = \mathcal{E}_{el}(\nabla u, v) + \mathcal{E}_S(v),$$

Γ-converges, as $0 < \eta \ll \epsilon \to 0$, to the Griffith energy $\mathcal{G}$, where

$$\mathcal{G}(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega A |\nabla u|^2\, dx + \mathcal{H}^1(S(u)).$$

Here, $S(u)$ denotes the discontinuity set of u, and $\mathcal{H}^1$ is the 1- dimensional Hausdorff measure.

For $f \in C^1(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{R}^2))$ and $g \in C^1(0, T_f, L^2(\partial\Omega_N, \mathbb{R}^2))$,the external forces at time $t \in [0, T_f]$ with $T_f > 0$ are collected into a functional $l(t) \in (H^1_D)^*$, where $(H^1_D)^*$ denotes the dual of H^1_D :

$$\langle l(t), \varphi \rangle := \int_\Omega f(t).\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega_N} g(t).\varphi\, ds \qquad \forall \varphi \in H^1_D.$$

In the following framework, we approximate the continuous-time elasto-visco-plastic evolution via discrete-time evolutions obtained by solving incremental variational problems. Given $T_f > 0$ and a positive integer N_f, at each discrete time $t_i = ih, i = 1, ..., N_f$, with $h = \dfrac{T_f}{N_f}$, let us assume that the approximate elasto-visco-plastic evolution $(u(t_{i-1}), v(t_{i-1}), e(t_{i-1}), p(t_{i-1}))$ is known

at t_{i-1}. We then define $(u(t_i), v(t_i), e(t_i), p(t_i))$ as follows : $(u(t_i), e(t_i), p(t_i))$ is defined at time t_i as a minimizer of a deformation energy :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{def}(u, v(t_{i-1}), e, p) &= \mathcal{E}_{el}(e, v(t_{i-1}) + \mathcal{E}_{ve}(u, u(t_{i-1})) \\ &+ \mathcal{E}_p(p, p(t_{i-1})) - \langle l(t_i), u\rangle\end{aligned}$$

with $v(t_{i-1})$ fixed and among all (u, e, p) triplets satisfying the kinematic admissibility condition. Then $v(t_i)$ is determined as a minimizer of the following variational problem :

$$v(t_i) := \underset{v \leq v(t_{i-1})}{\operatorname{argmin}}\, \mathcal{E}_{el}(e(t_i), v) + \mathcal{E}_S(v),$$

In the following section, we describe a continuous time evolution of the proposed model.

3.2.2 The elasto-visco-plastic evolution with regularized fracture

We assume that the stress $\sigma = aAe + \beta E\dot{u}$ is the sum of two terms. The first term represents the stress associated to elastic deformation. It is affected by fracture via the factor $a(x, t)$. The second term represents the effect of viscous deformation. We call

$$(u, v, e, p) : \Omega \times [0, T_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$$

a continuous evolution if it satisfies the following properties :

- (H1) Initial conditions : $(u(0), v(0), e(0), p(0)) = (u_0, v_0, e_0, p_0)$ with $(u_0, e_0, p_0) \in A_{adm}$, and $v_0 \in H^1(\Omega)$ with $v_0 = 1$ on $\partial\Omega_D$ and $0 \leq v_0 \leq 1$ a.e. in Ω. We suppose also $(v_0^2 + \eta)|Ae_0| \leq \tau$.
- (H2) for every $t \in [0, T_f]$, $v(t) = 1$ on $\partial\Omega_D$, and $0 \leq v(t) \leq 1$,
- (H3) Irreversibility : for a.e. $t \in [0, T_f]$, $\dot{v}(t) \leq 0$ a.e. in Ω,
- (H4) Kinematic compatibility : for every $t \in [0, T_f]$, $v(t) = 1$ on $\partial\Omega_D$,

$$Eu(t) = e(t) + p(t) \text{ a.e. in } \Omega \quad \text{and} \quad u(t) = 0 \text{ a.e. on } \partial\Omega_D$$

- (H5) Equilibrium condition : for a.e. $t \in [0, T_f]$,

$$\begin{aligned}-\text{div}(\sigma(t)) &= f(t), \qquad \text{a.e. in} \quad \Omega \\ \sigma(t).\vec{n} &= g(t), \qquad \text{a.e. on} \quad \partial\Omega_N.\end{aligned}$$

where $\sigma(t) = a(t)Ae(t) + \beta E\dot{u}(t)$ and $a(t) = (v(t))^2 + \eta$.

– (H6) Plastic flow rule : for a.e. $t \in [0, T_f]$,

$$a(t)Ae(t) \in \partial H(\dot{p}(t)) \quad \text{for } a.e. \quad x \in \Omega.$$

– (H7) Crack propagation condition : for a.e. $t \in [0, T_f]$,

$$\mathcal{E}_{el}(e(t), v(t)) + \mathcal{E}_S(v(t)) = \inf_{v=1 \text{ on } \partial\Omega_D, v \leq v(t)} \mathcal{E}_{el}(e(t), v) + \mathcal{E}_S(v).$$

3.3 Existence result

The main result of the chapter is the existence result for the elasto-visco-plastic model with fracture.

Theorem 3.3.1 *There exists at least one solution*

$$\begin{cases} u \in W^{1,\infty}(0, T_f, H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)), \\ v \in W^{1,\infty}(0, T_f, H^1(\Omega; \mathbb{R})), \\ e \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega; \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})), \\ p \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega; \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})), \end{cases}$$

satisfying (H1)-(H7).

3.3.1 Time discretization

The proof of Theorem 3.3.1 is based on a time discretization procedure. We consider a partition of the time interval $[0, T_f]$ into N_f sub-intervals of equal length h :

$$0 = t_h^0 < t_h^1 < ... < t_h^n = nh < ... < t_h^{N_f} = T_f, \text{ with } \quad h = \frac{T_f}{N_f} = t_h^n - t_h^{n-1} \to 0.$$

We set $v_h^0 = v_0$, $u_h^0 = u_0$, $e_h^0 = e_0$, $p_h^0 = p_0$. We suppose that v_0 satisfies the crack propagation condition (H7). Note that in the whole text, $C > 0$ denotes a generic constant which is independent of the discretization parameters. For $n = 1, ..., N_f$, $N_f \geq 2$, we construct $(u_h^n, v_h^n, e_h^n, p_h^n)$ using an alternate minimization procedure. We define the deformation energy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{def}(z, v_h^{n-1}, \xi, q) &= \frac{1}{2}\int_\Omega a_h^{n-1} A\xi : \xi \, dx + \frac{1}{2h}\beta \parallel Ez - Eu_h^{n-1} \parallel_{L^2}^2 \\ &+ \tau \int_\Omega |q - p_h^{n-1}| dx - \langle l(t_n), z \rangle \\ &= \mathcal{E}_{el}(v_h^{n-1}, \xi) + \mathcal{E}_{ve}(z, u_h^{n-1}) + \mathcal{E}_p(q, p_h^{n-1}) - \langle l(t_n), z \rangle, \end{aligned}$$

with $a_h^{n-1} := [v_h^{n-1}]^2 + \eta$, $\beta > 0$, $\tau > 0$. Since $\mathcal{E}_{def}(., v_h^{n-1}, ., .)$ is strictly convex, coercive and A_{adm} is a convex set, we have

Proposition 3.3.2 *Suppose that* $(u_h^{n-1}, e_h^{n-1}, p_h^{n-1}) \in A_{adm}$. *There exists unique minimizer to the variational problem*

$$\min_{(z,\xi,q)\in A_{adm}} \mathcal{E}_{def}(z, v_h^{n-1}, \xi, q) \tag{3.1}$$

We now define (u_h^n, e_h^n, p_h^n) as a solution of (3.1) and we derive the Euler-Lagrange equation satisfied by this solution.

Proposition 3.3.3 *Let* $(u_h^n, e_h^n, p_h^n) \in A_{adm}$ *be a solution to (3.1) with*

$$\sigma_h^n := a_h^{n-1} A e_h^n + \beta \frac{E u_h^n - E u_h^{n-1}}{h} = a_h^{n-1} A e_h^n + \beta E \delta u_h^n. \tag{3.2}$$

Then, for all $n \in \{1, ..., N_f\}$ *:*

$$\begin{cases} -div(\sigma_h^n) = f(t_n), & a.e.\ in \quad \Omega, \\ \sigma_h^n.\vec{n} = g(t_n), & a.e\ on \quad \partial\Omega_N, \\ a_h^{n-1} A e_h^n \in \partial H(p_h^n - p_h^{n-1}) & a.e.\ in \quad \Omega. \end{cases}$$

Proof : Let $(z, \xi, q) \in A_{adm}$, then $(u_h^n + sz, e_h^n + s\xi, p_h^n + sq) \in A_{adm}$ is an admissible triplet for every $0 < s < 1$. We have

$$\mathcal{E}_{def}(u_h^n, v_h^{n-1}, e_h^n, p_h^n) \leq \mathcal{E}_{def}(u_h^n + sz, v_h^{n-1}, e_h^n + s\xi, p_h^n + sq),$$

hence

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ s \int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : \xi \, dx + s \int_\Omega \beta \frac{E u_h^n - E u_h^{n-1}}{h} : (\xi + q) \, dx \\ &+ \ \tau \int_\Omega |p_h^n + sq - p_h^{n-1}| - |p_h^n - p_h^{n-1}| dx - s\langle l(t_n), z\rangle + o(s). \end{aligned}$$

Let $\Psi(s) := \tau \int_\Omega |p_h^n + sq - p_h^{n-1}| dx$. Using the convexity of Ψ we have $\Psi(s) - \Psi(0) \leq s(\Psi(1) - \Psi(0))$. Dividing this inequality by s and letting s tend to zero implies that

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : \xi \, dx + \beta \int_\Omega \frac{E u_h^n - E u_h^{n-1}}{h} : (\xi + q) \, dx \\ + \ &\tau \int_\Omega |p_h^n - p_h^{n-1} + q| - |p_h^n - p_h^{n-1}| \, dx \\ \geqslant \ &< l(t_n), z > \end{aligned} \tag{3.3}$$

Testing (3.3) with $(z, \xi, q) = \pm(\phi, E\phi, 0)$ for any $\phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$, we obtain

$$\int_\Omega \sigma_h^n : E(\phi) \, dx =< l(t_n), \phi > \tag{3.4}$$

and $-\mathrm{div}(\sigma_h^n) = f(t_n)$ a.e. in Ω. Furher, picking $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$, with $\phi = 0$ on $\partial\Omega_D$ in $\pm(\phi, E\phi, 0)$ as a test function for (3.3) and integrating (3.4) by parts, we also obtain that $\sigma_h^n.\vec{n} = g(t_n)$ a.e. on $\partial\Omega_N$. Testing (3.3) with $(0, -q + p_h^n - p_h^{n-1}, q - p_h^n + p_h^{n-1})$ for any $q \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\mathrm{sym}})$, we have

$$\tau \int_\Omega |q| dx \quad \geq \quad \tau \int_\Omega |p_h^n - p_h^{n-1}| dx + \int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : (q - (p_h^n - p_h^{n-1}))\, dx,$$

so that

$$\tau|q| \geq \tau|p_h^n(x) - p_h^{n-1}(x)| + a_h^{n-1}(x) A e_h^n(x) : (q - (p_h^n(x) - p_h^{n-1}(x))) \tag{3.5}$$

for all $q \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\mathrm{sym}}$ and for a.e. $x \in \Omega$, which by definition of the subdifferential implies that

$$a_h^{n-1} A e_h^n \in \partial H(p_h^n - p_h^{n-1}) \quad a.e. \text{ in } \Omega. \tag{3.6}$$

□

Proposition 3.3.4 *For given $e_h^n \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})$ there exists an unique minimizer v_h^n to*

$$v_h^n := \underset{v \in H^1(\Omega),\, v=1 \text{ on } \partial\Omega_D,\, v \leq v_h^{n-1}}{\mathrm{argmin}} \{\mathcal{E}_{el}(e_h^n, v) + \mathcal{E}_S(v)\}. \tag{3.7}$$

Additionally, for all $n \in \{1, ..., N_f\}$, v_h^n satisfies the following variational inequality :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \int_\Omega \nabla v_h^n \nabla(v_h^n - \varphi)\, dx \quad &+ \quad \int_\Omega v_h^n A e_h^n : e_h^n (v_h^n - \varphi)\, dx \\ &+ \quad (2\varepsilon)^{-1} \int_\Omega (v_h^n - 1)(v_h^n - \varphi)\, dx \leq 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

for any $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi = 1$ on $\partial\Omega_D$ and $\varphi \leq v_h^{n-1}$. Furthermore, v_h^n satisfies the comparison principle $0 \leq v_h^n \leq v_h^{n-1}$ a.e. in Ω.

Proof : The existence and uniqueness of the solution of (3.7) follow from the strict convexity and coercivity of the functional $\mathcal{E}_{el}(e_h^n, .) + \mathcal{E}_S(.)$, and from the convexity of $\{v \in H^1(\Omega),\, v = 1 \,\mathrm{on}\, \partial\Omega_D,\, v \leq v_h^{n-1}\}$. Let φ an admissible function for (3.7), then $\psi = v_h^n + t(\varphi - v_h^n)$ with $0 < t < 1$ is an admissible function for (3.7). In fact, $\psi \in H^1(\Omega)$, $\psi = 1$ on $\partial\Omega_D$ and

$$\begin{aligned} \psi \quad &\leq \quad v_h^n + t(v_h^{n-1} - v_h^n) = v_h^n(1-t) + t v_h^{n-1} \\ &\leq \quad v_h^{n-1}(1-t) + t v_h^{n-1} = v_h^{n-1}. \end{aligned}$$

By definition of v_h^n, $\mathcal{E}_{el}(e_h^n, v_h^n) + \mathcal{E}_S(v_h^n) \leq \mathcal{E}_{el}(e_h^n, \psi) + \mathcal{E}_S(\psi)$. We obtain :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \int_\Omega \nabla v_h^n \nabla (v_h^n - \varphi)\, dx \quad &+ \quad \int_\Omega v_h^n A e_h^n : e_h^n (v_h^n - \varphi)\, dx \\ &+ \quad (2\varepsilon)^{-1} \int_\Omega (v_h^n - 1)(v_h^n - \varphi)\, dx \leq 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Testing (3.9) with $\varphi = \max(0, v_h^n)$ gives

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \int_{\{v_h^n \leq 0\}} \nabla v_h^n \nabla v_h^n\, dx \quad &+ \quad \int_{\{v_h^n \leq 0\}} (v_h^n)^2 A e_h^n : e_h^n\, dx \\ &+ \quad (2\varepsilon)^{-1} \int_{\{v_h^n \leq 0\}} (v_h^n - 1) v_h^n\, dx \leq 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

so that $v_h^n = 0$ a.e. on $\{v_h^n \leq 0\}$. It follows that $v_h^n \geqslant 0$ a.e. on Ω. □

Remark 1 *Testing (3.9) with $\varphi = v_h^{n-1}$ and with $\varphi = 2v_h^n - v_h^{n-1}$ we derive the equality*

$$\begin{aligned} &2\varepsilon \int_\Omega \nabla v_h^n \nabla (v_h^n - v_h^{n-1})\, dx + \int_\Omega v_h^n A e_h^n : e_h^n (v_h^n - v_h^{n-1})\, dx \\ + \quad &(2\varepsilon)^{-1} \int_\Omega (v_h^n - 1)(v_h^n - v_h^{n-1})\, dx = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.3.2 A priori estimates

We define for all $n \geqslant 1$,

$$\delta u_h^n := \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{h}, \quad \delta v_h^n := \frac{v_h^n - v_h^{n-1}}{h}, \quad \delta e_h^n := \frac{e_h^n - e_h^{n-1}}{h}, \quad \delta p_h^n := \frac{p_h^n - p_h^{n-1}}{h}.$$

Proposition 3.3.5 *There exists a constant $C > 0$ independent of h and n such that*

$$\max_{\{1,..N_f\}} (\|\delta u_h^n\|_{H^1}, \|\delta v_h^n\|_{H^1}, \|\delta e_h^n\|_{L^2}, \|\delta p_h^n\|_{L^2}) \leq C. \tag{3.12}$$

For the proof of Proposition 3.3.5 we need following lemma :

Lemma 3.3.6 *For all $n \geqslant 1$, we have $a_h^{n-1} A e_h^n \in K$ a.e. in Ω. Additionally, there exists a constant $C > 0$, independent on h and n such that*

$$\| A e_h^n \|_{L^\infty} \leq C. \tag{3.13}$$

Proof : Testing (3.5) with $q' = a_h^{n-1} A e_h^n(x) + p_h^n(x) - p_h^{n-1}(x)$ leads to $|a_h^{n-1} A e_h^n(x)| \leq \tau$ for a.e. $x \in \Omega$. Since $\eta \leq a_h^{n-1}(x) \leq 1 + \eta$ for all $x \in \Omega$, we have $\| A e_h^n \|_{L^\infty} \leq C$. □

Lemma 3.3.7 *For all $q \in K = \{q^* \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym};\ |q^*| \leq \tau\}$ and $n \geqslant 1$, we have*

$$a_h^{n-1} A e_h^n : \delta p_h^n \geqslant q : \delta p_h^n, \quad a.e.\ in\ \Omega. \tag{3.14}$$

Proof : By convex duality

$$a_h^{n-1} A e_h^n \in \partial H(p_h^n - p_h^{n-1}) \Longleftrightarrow p_h^n - p_h^{n-1} \in \partial H^*(a_h^{n-1} A e_h^n)$$

where $H^*(q^*) = 1_K(q^*)$ denotes the convex conjugate of H. Since $a_h^{n-1} A e_h^n \in K$ *a.e.* in Ω, we have for all $q \in K$ $a_h^{n-1} A e_h^n : \delta p_h^n \geqslant q : \delta p_h^n$ a.e. in Ω. □

Lemma 3.3.8 *For all $n \in \{1, ..., N_f\}$, there exists a constant $C > 0$ independent of h and n such that*

$$\|\delta v_h^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla \delta v_h^n\|_{L^2}^2 \leq C \|\delta e_h^n\|_{L^2}^2. \tag{3.15}$$

Proof : We proceed as in the proof of Lemma 3.4 in [48]. We write inequality (3.9) at time t_h^{n-1} :

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon \int_\Omega \nabla v_h^{n-1} \nabla (v_h^{n-1} - \varphi)\, dx + \int_\Omega v_h^{n-1} A e_h^{n-1} : e_h^{n-1} (v_h^{n-1} - \varphi)\, dx \\ + \quad & (2\varepsilon)^{-1} \int_\Omega (v_h^{n-1} - 1)(v_h^{n-1} - \varphi)\, dx \leq 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

for any $\varphi \leq v_h^{n-2}$, $\varphi - 1 \in H_D^1$. We choose $\varphi = v_h^n \leq v_h^{n-2}$ and divide (3.16) by h :

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon \int_\Omega \nabla v_h^{n-1} \nabla \delta v_h^n\, dx + \int_\Omega v_h^{n-1} A e_h^{n-1} : e_h^{n-1} \delta v_h^n\, dx \\ + \quad & (2\varepsilon)^{-1} \int_\Omega (v_h^{n-1} - 1) \delta v_h^n\, dx \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

We divide (3.11) by h and substract (3.17). Then we use the equality $a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)b$, the fact that $\delta v_h^n \leq 0$, and the Cauchy-Schwarz inequality

to obtain

$$\begin{aligned}
\|\delta v_h^n |e_h^n|_A\|_{L^2}^2 &+ (2\varepsilon)^{-1}\|\delta v_h^n\|_{L^2}^2 + (2\varepsilon)\|\nabla \delta v_h^n\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{1}{h}\int_\Omega (|e_h^{n-1}|_A^2 - |e_h^n|_A^2) v_h^{n-1}\delta v_h^n \, dx \\
&= \frac{1}{h}\int_\Omega |(e_h^{n-1} - e_h^n)|_A^2 v_h^{n-1}\delta v_h^n \, dx \\
&+ \frac{2}{h}\int_\Omega A(e_h^{n-1} - e_h^n) : e_h^n v_h^{n-1}\delta v_h^n \, dx \\
&\leq \frac{2}{h}\int_\Omega (|e_h^n|_A |\delta v_h^n|) \; (|v_h^{n-1}||(e_h^{n-1} - e_h^n)|_A) \, dx \\
&\leq 2 \parallel (\delta v_h^n)|e_h^n|_A \parallel_{L^2} \parallel v_h^{n-1}|\delta e_h^n|_A \parallel_{L^2} . \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

The result follows from the Young inequality $ab \leq a^2/2 + b^2/2$. □

We now prove Proposition 3.3.5 :

Proof : Testing (3.3) with $(z, \xi, q) = \pm(h\delta u_h^n, E(h\delta u_h^n), 0)$ where $E(h\delta u_h^n) = h(\delta e_h^n + \delta p_h^n)$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : (e_h^n - e_h^{n-1}) \, dx + \int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : (p_h^n - p_h^{n-1}) \, dx + h\beta \parallel E\delta u_h^n \parallel_{L^2}^2 \\
= \; & < l(t_n), u_h^n - u_h^{n-1} >
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : (p_h^n - p_h^{n-1}) \, dx &= < l(t_n), u_h^n - u_h^{n-1} > - h\beta \parallel E\delta u_h^n \parallel_{L^2}^2 \\
&- \int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : (e_h^n - e_h^{n-1}) \, dx \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Testing (3.3) with $(0, h\delta p_h^n, -h\delta p_h^n)$ yields

$$\int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : (p_h^n - p_h^{n-1}) \, dx \geqslant \tau \int_\Omega |p_h^n - p_h^{n-1}| \, dx. \qquad (3.20)$$

Combining (3.19) and (3.20), we get

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : (e_h^n - e_h^{n-1}) \, dx + h\beta \parallel E\delta u_h^n \parallel_{L^2}^2 + \tau \int_\Omega |p_h^n - p_h^{n-1}| \, dx \\
\leqslant \; & < l(t_n), u_h^n - u_h^{n-1} > . \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

The first term on the left-hand side can be analysed in a similar way as in [48] :

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_h^{n-1} A e_h^n : (e_h^n - e_h^{n-1})\, dx &= \mathcal{E}_{el}(e_h^n, v_h^n) - \mathcal{E}_{el}(e_h^{n-1}, v_h^{n-1}) \\ + \quad \frac{1}{2} h^2 \|(a_h^{n-1})^{1/2} |\delta e_h^n|_A\|_{L^2}^2 &- \frac{1}{2}\int_\Omega (a_h^n - a_h^{n-1}) |e_h^n|_A^2\, dx.\end{aligned}$$

Further, we observe that

$$a_h^n - a_h^{n-1} = (v_h^n)^2 - (v_h^{n-1})^2 = h(v_h^n + v_h^{n-1})\delta v_h^n = 2h v_h^n \delta v_h^n - h^2 |\delta v_h^n|^2.$$

Thanks to (3.11), we obtain

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_\Omega (a_h^n - a_h^{n-1}) |e_h^n|_A^2\, dx &= (2\varepsilon)^{-1} \int_\Omega (v_h^n - 1)(v_h^n - v_h^{n-1})\, dx \\ &+ \quad 2\varepsilon \int_\Omega \nabla v_h^n (\nabla v_h^n - \nabla v_h^{n-1})\, dx + \frac{1}{2} h^2 \|(\delta v_h^n) |e_h^n|_A\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{3.22}$$

and rewriting $v_h^n - v_h^{n-1} = (v_h^n - 1) - (v_h^{n-1} - 1)$, yields

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_\Omega (a_h^n - a_h^{n-1}) |e_h^n|_A^2\, dx &= \mathcal{E}_S(v_h^n) - \mathcal{E}_S(v_h^{n-1}) \\ + \quad h^2 \left((4\varepsilon)^{-1} \|\delta v_h^n\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla \delta v_h^n\|_{L^2}^2\right) &+ \frac{1}{2} h^2 \|\delta v_h^n |e_h^n|_A\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Summing (3.21) for $1 \le n \le N$ and using (3.22) and (3.23) we obtain

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{el}(e_h^N, v_h^N) + \mathcal{E}_S(v_h^N) + \sum_{n=1}^N h\beta \parallel E\delta u_h^n \parallel_{L^2}^2 + \sum_{n=1}^N h \int_\Omega |\delta p_h^n|\, dx \\ \le \quad &\sum_{n=1}^N < l(t_n), u_h^n - u_h^{n-1} > + \mathcal{E}_{el}(e_0, v_0) + \mathcal{E}_S(v_0),\end{aligned}$$

where $1 \le N \le N_f$. Using the Korn's inequality we obtain the following estimate

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N h\langle l(t_n), \delta u_h^n\rangle &\le (\sum_{n=1}^N h\|l(t_n)\|_{(H_D^1)^*}^2)^{1/2} (\sum_{n=1}^N h\|\nabla \delta u_h^n\|_{L^2}^2)^{1/2} \\ &\le C(\sum_{n=1}^N h\|l(t_n)\|_{(H_D^1)^*}^2)^{1/2} (\sum_{n=1}^N h\|E\delta u_h^n\|_{L^2}^2)^{1/2}\end{aligned}$$

For all $N \in \{1, ..., N_f\}$ yields

$$\|e_h^N\|_A^2 + \|v_h^N\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_h^N\|_{L^2}^2 + \sum_{n=1}^{N} h\beta \parallel E\delta u_h^n \parallel_2^2 + \sum_{n=1}^{N} h \int_\Omega |\delta p_h^n|\, dx \leq C, \quad (3.24)$$

where $C > 0$ is a constant independent of h and n. Let N_0 such that $\{\|e_h^{N_0}\|_A^2 + \|v_h^{N_0}\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_h^{N_0}\|_{L^2}^2\}$ is maximal between $1 \leq N \leq N_f$. The inequality (3.24) is true for $N = N_0$, and $N = N_f$. Thus,

$$\max_{1\leq n\leq N_f} \{\|e_h^n\|_A^2 + \|v_h^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_h^n\|_{L^2}^2\} + \sum_{n=1}^{N_f} h\beta \parallel E\delta u_h^n \parallel_2^2 + \sum_{n=1}^{N_f} h \int_\Omega |\delta p_h^n|\, dx \leq 2C. \quad (3.25)$$

Further, for all $n \in \{1, ..., N_f\}$ we have

$$\begin{aligned}
\|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |\sigma_h^n|^2\, dx = \int_\Omega \sigma_h^n : a_h^{n-1} A e_h^n\, dx + \beta \int_\Omega \sigma_h^n : E\delta u_h^n\, dx \\
&\leq C\|\sigma_h^n\|_{L^2}\|e_h^n\|_{L^2} + \beta\langle l(t_n), \delta u_h^n\rangle \\
&\leq C\|\sigma_h^n\|_{L^2}\|e_h^n\|_{L^2} + C\|l(t_n)\|_{(H_D^1)^*}\beta\|\nabla\delta u_h^n\|_{L^2} \\
&\leq C\|\sigma_h^n\|_{L^2}\|e_h^n\|_{L^2} + C\|l(t_n)\|_{(H_D^1)^*}\|\beta E\delta u_h^n\|_{L^2} \\
&\leq C\|\sigma_h^n\|_{L^2}\|e_h^n\|_{L^2} + C\|l(t_n)\|_{(H_D^1)^*}(\|\sigma_h^n\|_2 + \|e_h^n\|_{L^2}). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

We thus deduce that

$$\max_{\{1,..N_f\}} \|\sigma_h^n\|_{L^2} \leq C. \quad (3.27)$$

It follows from (3.25), (3.27) and (3.2) that

$$\max_{\{1,..N_f\}} \|E\delta u_h^n\|_{L^2} \leq C. \quad (3.28)$$

We now estimate δe_h^n :

$$\begin{aligned}
\eta\alpha_1\|\delta e_h^n\|_{L^2}^2 &\leq \int_\Omega a_h^{n-1} A\delta e_h^n : \delta e_h^n\, dx \\
&= \int_\Omega a_h^{n-1} A\delta e_h^n : E\delta u_h^n\, dx - \int_\Omega a_h^{n-1} A\delta e_h^n : \delta p_h^n\, dx \\
&\leq C\|E\delta u_h^n\|_{L^2}\|\delta e_h^n\|_{L^2} - \int_\Omega a_h^{n-1} A\delta e_h^n : \delta p_h^n\, dx
\end{aligned}$$

From Lemma 3.3.6 it follows that for $n \geqslant 2$, $a_h^{n-2} A e_h^{n-1} \in K$. This implies that $a_h^{n-1} A e_h^{n-1} \in K$ and from Lemma 3.3.7 we deduce that

$\int_\Omega a_h^{n-1} A\delta e_h^n : \delta p_h^n \, dx \geqslant 0$, and thus $\|\delta e_h^n\|_{L^2} \leq C\|E\delta u_h^n\|_{L^2}$. Since $a_h^0 A e_h^0 \in K$, we also deduce from Lemma 3.3.7 that $\int_\Omega a_h^0 A\delta e_h^1 : \delta p_h^1 \, dx \geqslant 0$, and thus $\|\delta e_h^1\|_{L^2} \leq C\|E\delta u_h^1\|_{L^2}$. By the estimate (3.28) and since $E\delta u_h^n = \delta e_h^n + \delta p_h^n$ we have

$$\max_{\{1,..N_f\}} (\|\delta e_h^n\|_{L^2}, \|\delta p_h^n\|_{L^2}) \leq C \tag{3.29}$$

Applying Lemma 3.3.8 concludes the proof of Proposition 3.3.5. □

3.3.3 Compactness results

We now define piecewise affine interpolants of the sequences $(u_h^n)_{n=0}^{N_f}$, $(v_h^n)_{n=0}^{N_f}$, $(e_h^n)_{n=0}^{N_f}$, $(p_h^n)_{n=0}^{N_f}$ by

$$\begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ a_h(t) \\ e_h(t) \\ p_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h^n \\ v_h^n \\ a_h^n \\ e_h^n \\ p_h^n \end{pmatrix} + (t - t_h^n) \begin{pmatrix} \delta u_h^n \\ \delta v_h^n \\ \delta a_h^n \\ \delta e_h^n \\ \delta p_h^n \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t \in [t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f.$$

We define backward piecewise constant interpolant $u_h^+(., t)$ by

$$u_h^+(t) = u_h^n, \quad \text{for} \quad t \in (t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f.$$

and similarly we define $v_h^+(t)$, $e_h^+(t)$, $p_h^+(t)$, $l_h^+(t)$.
We also define $u_h^+(0) = u_0$, $v_h^+(0) = v_0$, $e_h^+(0) = e_0$, $p_h^+(0) = p_0$. The forward piecewise constant interpolant $a_h^-(., t)$ is defined by

$$a_h^-(., t) = a_h^{n-1}, \quad \text{for} \quad t \in [t_h^{n-1}, t_h^n), \quad n = 1, ..., N_f.$$

Thanks to Proposition 3.3.5

$$\begin{aligned} &\|u_h\|_{W^{1,\infty}(0,T_f,H^1(\Omega,\mathbb{R}^2))} + \|v_h\|_{W^{1,\infty}(0,T_f,H^1(\Omega,\mathbb{R}))} \\ &+ \quad \|e_h\|_{W^{1,\infty}(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))} + \|p_h\|_{W^{1,\infty}(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))} \leq C \end{aligned}$$

Hence, there exists a subsequence $h_j \searrow 0$ (we just write h) and
$u \in W^{1,\infty}(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2))$, $v \in W^{1,\infty}(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}))$,
with $0 \leq v(t) \leq 1$, $v(t) = 1$ on $\partial\Omega_D$, $\dot{v}(t) \leq 0$ a.e. in Ω for a.e. $t \in (0, T_f]$,
$e \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$, $p \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$ such that

$$\begin{array}{lll} u_h,\ \dot{u}_h \rightharpoonup u,\ \dot{u} & \text{weakly* in} & L^\infty(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)), \\ v_h,\ \dot{v}_h \rightharpoonup v,\ \dot{v} & \text{weakly* in} & L^\infty(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R})), \\ e_h,\ \dot{e}_h \rightharpoonup e,\ \dot{e} & \text{weakly* in} & L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})), \\ p_h,\ \dot{p}_h \rightharpoonup p,\ \dot{p} & \text{weakly* in} & L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})). \end{array} \tag{3.30}$$

Using Arzelà-Ascoli Theorem and Proposition 3.3.5, we have for all $t \in [0, T_f]$,

$$\begin{array}{lll} u_h(t) \rightharpoonup u(t), & \text{weakly in} & H^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \\ e_h(t) \rightharpoonup e(t), & \text{weakly in} & L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}), \\ p_h(t) \rightharpoonup p(t), & \text{weakly in} & L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}), \\ v_h(t) \rightharpoonup v(t), & \text{weakly in} & H^1(\Omega, \mathbb{R}), \end{array} \tag{3.31}$$

and for all $t \in [0, T_f]$,

$$(u(t), e(t), p(t)) \in A_{adm}. \tag{3.32}$$

Thanks to the previous convergences, we also have that for a.e. $t \in [0, T_f]$,

$$(\dot{u}(t), \dot{e}(t), \dot{p}(t)) \in A_{adm}. \tag{3.33}$$

Since v_h is uniformly bounded in $W^{1,\infty}(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}))$, the Arzelà-Ascoli Theorem for metric spaces [27] implies that $v_h \longrightarrow v$ strongly in $C(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{R}))$. Since $0 \leq v_h(t) \leq 1$ a.e. in Ω, for all t, this convergence implies $a_h \longrightarrow a$ in $C(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{R}))$. On the other hand, since for all $t \in (0, T_f]$,

$$\|a_h(t) - a_h^-(t)\|_{L^2} \leq 2h\|\dot{a_h}(t)\|_{L^2}, \tag{3.34}$$
$$\|e_h(t) - e_h^+(t)\|_{L^2} \leq h\|\dot{e_h}(t)\|_{L^2}, \tag{3.35}$$
$$\|v_h(t) - v_h^+(t)\|_{L^2} \leq h\|\dot{v_h}(t)\|_{L^2}, \tag{3.36}$$

we also have that

$$a_h^- \longrightarrow a \quad \text{strongly in} \quad L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{R})) \quad \text{with} \quad a = v^2 + \eta,$$
$$e_h^+ \rightharpoonup e \quad \text{weakly* in} \quad L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})), \tag{3.37}$$
$$v_h^+ \rightharpoonup v \quad \text{weakly* in} \quad L^\infty(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R})). \tag{3.38}$$

From (3.31) and (3.35), we deduce that for all $t \in [0, T_f]$,

$$e_h^+(t) \rightharpoonup e(t), \qquad \text{weakly in} \qquad L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}), \tag{3.39}$$

3.3.4 Passage to the limit in the equilibrium condition

Theorem 3.3.9 *For a.e. $t \in [0, T_f]$,*

$$\begin{array}{ll} -div(\sigma(t)) = f(t), & \text{a.e. in } \Omega, \\ \sigma(t).\vec{n} = g(t), & \text{a.e. on } \partial\Omega_N. \end{array}$$

where $\sigma(t) = a(t)Ae(t) + \beta E\dot{u}(t)$ and $a(t) = [v(t)]^2 + \eta$.

Proof : With the previous notation, we can rewrite (3.4) as

$$\int_\Omega (a_h^-(t)Ae_h^+(t) + \beta E\dot{u}_h(t)) : E\phi\, dx =< l_h^+(t), \phi >, \forall \phi \in H_D^1\, \forall t \in (0, T_f). \tag{3.40}$$

Integrating (3.40) on fixed $[t_1, t_2] \subset [0, T_f]$ we have

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (a_h^-(t)Ae_h^+(t) + \beta E\dot{u}_h(t)) : E\phi\, dx\, dt = \int_{t_1}^{t_2} < l_h^+(t), \phi > \, dt. \tag{3.41}$$

We now pass to the limit when h goes to zero in (3.41). For any fixed $t_1, t_2 \in [0, T_f]$, $\forall \phi \in H_D^1$, we write (3.41) as :

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (a_h^-(t)Ae_h^+(t) + \beta E\dot{u}_h(t)) : E\phi\, dx\, dt - \int_{t_1}^{t_2} < l_h^+(t), \phi > \, dt \\ = & \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (a(t)Ae_h^+(t) + \beta E\dot{u}_h(t)) : E\phi\, dx - < l(t), \phi > \, dt \qquad (3.42) \\ + & \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega ((a_h^-(t) - a(t))(Ae_h^+(t) + \beta E\dot{u}_h(t)) : E\phi\, dx\, dt \\ + & \int_{t_1}^{t_2} < l_h^+(t) - l(t), \phi > \, dt \end{aligned}$$

We estimate the second term on the right-hand side of (3.42) thanks to the Cauchy-Schwarz inequality

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega ((a_h^-(t) - a(t))(Ae_h^+(t) + \beta E\dot{u}_h(t)) : E\phi\, dx\, dt \qquad (3.43) \\ & \leq \|(a_h^- - a)E\phi\|_{L^2(0,T_f,L^2)}\, \|Ae_h^+ + \beta E\dot{u}_h\|_{L^2(0,T_f,L^2)}. \end{aligned}$$

Since $(a_h^- - a) \to 0$ a.e. in $\Omega \times (0, T_f)$, $|a_h^- - a|^2 \leq 4$, $|\nabla\phi|^2 \in L^1(\Omega \times (0, T_f))$ and using Proposition 3.3.5 we obtain by the Lebesgue dominated convergence

$$\lim_{h \searrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega ((a_h^-(t) - a(t))(Ae_h^+(t) + \beta E\dot{u}_h(t)) : E\phi\, dx\, dt = 0. \tag{3.44}$$

We estimate the last term on the right-hand side of (3.42) by

$$\int_{t_1}^{t_2} < l_h^+(t) - l(t), \phi > \, dt \leq h(t_2 - t_1)\|\dot{l}\|_{C(0,T_f,(H_D^1)^*)}\|\phi\|_{H^1} \tag{3.45}$$

Using (3.30), (3.37), (3.42), (3.44), (3.45) we deduce that $\forall [t_1, t_2] \subset [0, T_f]$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (a(t)Ae(t) + \beta E\dot{u}(t)) : E\phi\, dx - < l(t), \phi > \, dt = 0. \tag{3.46}$$

□

3.3.5 Strong compactness result for the elastic strain

To pass to the limit in the discrete plastic flow rule and crack propagation condition, we need a strong compactness result for the elastic strain. We need the following lemma.

Lemma 3.3.10 *Suppose that for all $t \in [0, T_f)$, $a_h^-(t) \to a(t)$ in $L^2(\Omega)$ and $e_h^+(t) \rightharpoonup e(t)$ weakly in $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})$. Then for all $t \in [0, T_f)$, $a_h^-(t)Ae_h^+(t) \rightharpoonup a(t)Ae(t)$ weakly in $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})$.*

Proof : Let $\phi \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ a test function. We can write

$$\int_\Omega ((a_h^-(t)Ae_h^+(t) - a(t)Ae(t)) : \phi \, dx =$$
$$\int_\Omega ((a_h^-(t) - a(t))Ae_h^+(t) : \phi \, dx +$$
$$\int_\Omega a(t)(Ae_h^+(t) - Ae(t)) : \phi \, dx.$$

From Lemma 3.3.6 we deduce that for all $t \in [0, T_f)$, $\| \, Ae_h^+(t) \, \|_{L^\infty} \leq C$, so that since $a_h^-(t) \to a(t)$ in $L^2(\Omega)$ the first term on the right-hand side converges to zero using the Cauchy-Schwarz inequality. Since $e_h^+(t) \rightharpoonup e(t)$ in $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$, the second term on the right-hand converges to zero. □

Proposition 3.3.11 *The following strong convergences hold :*

$$e_h, e_h^+ \to e \qquad \textit{strongly in} \qquad L^2(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})). \tag{3.47}$$

Proof : Given $n \in \{1, ..., N_f\}$, we define $[t]_h := t_h^n$ if $t \in (t_h^{n-1}, t_h^n]$. We set $t_1 = 0$, $t_2 = [t]_h$ and $\phi = \dot{u}_h$ in (3.46) and (3.41), and substract these two relations :

$$\begin{aligned} &\int_0^{[t]_h} \int_\Omega ((a_h^-(s)Ae_h^+(s) + \beta E\dot{u}_h(s)) - (a(s)Ae(s) + \beta E\dot{u}(s))) : E\dot{u}_h(s) \, dx \, ds \\ = &\int_0^{[t]_h} < l_h^+(s) - l(s), \dot{u}_h(s) > \, ds \end{aligned} \tag{3.48}$$

We define

$$f_h(t) := \int_0^{[t]_h} \int_\Omega ((a_h^-(s)Ae_h^+(s) + \beta E\dot{u}_h(s)) - (a(s)Ae(s) + \beta E\dot{u}(s))) : E\dot{u}_h(s) \, dx \, ds.$$

Using the inequality (3.45) with $\phi = \dot{u}_h$ and thanks to Proposition 3.3.5, we have

$$\lim_{h \searrow 0} \int_0^{[t]_h} < l_h^+(s) - l(s), \dot{u}_h(s) > \, ds = 0,$$

and from (3.48) we deduce

$$\lim_{h\searrow 0} f_h(t) = 0.$$

We now estimate

$$|f_h(t)| \leq \| (a_h^- Ae_h^+ + \beta E\dot{u}_h) - (aAe + \beta E\dot{u}) \|_{L^2(0,T_f,L^2)} \| E\dot{u}_h \|_{L^2(0,T_f,L^2)} .$$

From Proposition 3.3.5 we deduce that there exists some $C > 0$ independent on h such that $|f_h(t)| \leq C$. Thanks to the Lebesgue dominated convergence

$$\lim_{h\searrow 0} \int_0^{T_f} f_h(t)\, dt = 0. \tag{3.49}$$

We rewrite $f_h(t)$ as

$$\begin{aligned} f_h(t) &= \int_0^{[t]_h} \int_\Omega ((a_h^-(s)Ae_h^+(s) - a(s)Ae(s)) : E\dot{u}_h(s)\, dx\, ds \\ &+ \beta \int_0^{[t]_h} \int_\Omega |E\dot{u}_h(s) - E\dot{u}(s)|^2\, dx\, ds \\ &+ \beta \int_0^{[t]_h} \int_\Omega (E\dot{u}_h(s) - E\dot{u}(s)) : E\dot{u}(s)\, dx\, ds. \end{aligned} \tag{3.50}$$

We define

$$g_h(t) = \beta \int_0^{[t]_h} \int_\Omega (E\dot{u}_h(s) - E\dot{u}(s)) : E\dot{u}(s)\, dx\, ds, \tag{3.51}$$

which tends to 0 since $E\dot{u}_h \rightharpoonup E\dot{u}$ weakly in $L^2(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$. Using Proposition 3.3.5 and the Lebesgue dominated convergence theorem yields

$$\lim_{h\searrow 0} \int_0^{T_f} g_h(t)\, dt = 0. \tag{3.52}$$

From (3.49), (3.50), (3.52) we deduce that

$$\begin{aligned} &\lim_{h\searrow 0} \left\{ \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega ((a_h^-(s)Ae_h^+(s) - a(s)Ae(s)) : E\dot{u}_h(s)\, dx\, ds\, dt \right. \\ &+ \left. \beta \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega |E\dot{u}_h(s) - E\dot{u}(s)|^2\, dx\, ds\, dt \right\} = 0, \end{aligned} \tag{3.53}$$

so that

$$\limsup_{h\searrow 0}\int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega((a_h^-(s)Ae_h^+(s)-a(s)Ae(s)):E\dot{u}_h(s)\,dx\,ds\,dt\le 0. \tag{3.54}$$

We now estimate the integral in (3.54). We note that

$$\begin{aligned}
I_h &:= \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega(a_h^-(s)Ae_h^+(s)-a(s)Ae(s)):E\dot{u}_h(s)\,dx\,ds\,dt.\\
&= \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega(a_h^-(s)Ae_h^+(s)-a(s)Ae(s)):(E\dot{u}_h(s)-E\dot{u}(s))\,dx\,ds\,dt\\
&+ \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega((a_h^-(s)Ae_h^+(s)-a(s)Ae(s)):E\dot{u}(s)\,dx\,ds\,dt\\
&= \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a_h^-(s)Ae_h^+(s):(E\dot{u}_h(s)-E\dot{u}(s))\,dx\,ds\,dt\\
&- \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a(s)Ae(s):(E\dot{u}_h(s)-E\dot{u}(s))\,dx\,ds\,dt\\
&+ \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega(a_h^-(s)-a(s))Ae_h^+(s):E\dot{u}(s)\,dx\,ds\,dt\\
&+ \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a(s)(Ae_h^+(s)-Ae(s)):E\dot{u}(s)\,dx\,ds\,dt\\
&= I_h^1+I_h^2+I_h^3+I_h^4.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Since $E\dot{u}_h \rightharpoonup E\dot{u}$ weakly in $L^2(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$, and $e_h^+ \rightharpoonup e$ weakly in $L^2(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$, the Lebesque dominated convergence shows that

$$I_h^2 := -\int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega(a(s)Ae(s):(E\dot{u}_h(s)-E\dot{u}(s))\,dx\,ds\,dt\to 0.$$

$$I_h^4 := \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega(a(s)(Ae_h^+(s)-Ae(s)):E\dot{u}(s)\,dx\,ds\,dt\to 0.$$

Since $(a_h^- - a)\to 0$ a.e. in $\Omega\times(0,T_f)$ and $a\in L^\infty((0,T_f)\times\Omega)$,and using Lemma 3.3.6, Proposition 3.3.5, and Lebesgue's dominated convergence theorem imply

$$I_h^3 := \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega((a_h^-(s)-a(s))Ae_h^+(s):E\dot{u}(s)\,dx\,ds\,dt\to 0.$$

We deduce that

$$\limsup_{h\searrow 0} I_h = \limsup_{h\searrow 0} I_h^1. \tag{3.56}$$

By the kinematic compatibility, $E\dot{u}_h - E\dot{u} = (\dot{e}_h - \dot{e}) + (\dot{p}_h - \dot{p})$ we have

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\searrow 0} I_h^1 &= \limsup_{h\searrow 0} \left\{ \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a_h^-(s) A e_h^+(s) : (\dot{e}_h(s) - \dot{e}(s))\, dx\, ds\, dt \right. \\
&+ \left. \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a_h^-(s) A e_h^+(s) : (\dot{p}_h(s) - \dot{p}(s))\, dx\, ds\, dt \right\}. \qquad (3.57) \\
&:= \limsup_{h\searrow 0} \left\{ K_h^1 + K_h^2 \right\}.
\end{aligned}$$

We can write

$$\begin{aligned}
K_h^1 &:= \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a_h^-(s) A e_h^+(s) : (\dot{e}_h(s) - \dot{e}(s))\, dx\, ds\, dt \\
&= -\int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega (a_h(s) - a_h^-(s)) A e_h^+(s) : (\dot{e}_h(s) - \dot{e}(s))\, dx\, ds\, dt \\
&+ \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a_h(s) A e_h^+(s) : (\dot{e}_h(s) - \dot{e}(s))\, dx\, ds\, dt. \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

From (3.34), we deduce that $(a_h^- - a_h) \to 0$ a.e. in $\Omega \times (0, T_f)$. Lemma 3.3.6, Proposition 3.3.5 and the Lebesgue's dominated convergence give

$$\int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega (a_h(s) - a_h^-(s)) A e_h^+(s) : (\dot{e}_h(s) - \dot{e}(s))\, dx\, ds\, dt \to 0, \tag{3.59}$$

so that (3.58) and (3.59) imply

$$\limsup_{h\searrow 0} K_h^1 = \limsup_{h\searrow 0} \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a_h(s) A e_h^+(s) : (\dot{e}_h(s) - \dot{e}(s))\, dx\, ds\, dt. \tag{3.60}$$

Furthermore,

$$\begin{aligned}
J_h^1 &:= \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a_h(s)Ae_h^+(s) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\,dt \\
&= \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a_h(s)(Ae_h^+(s)-Ae_h(s)) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\,dt \\
&+ \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a_h(s)A(e_h(s)-e(s)) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\,dt \\
&+ \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega (a_h(s)-a(s))Ae(s) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\,dt \\
&+ \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a(s)Ae(s) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\,dt \\
&= L_h^5+L_h^6+L_h^7+L_h^8. \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

The strong convergence $e_h - e_h^+ \to 0$ in $L^2(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$ (see (3.35)), the weak convergence $\dot{e_h} \rightharpoonup \dot{e}$ in $L^2(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$, Propostion 3.3.5 and Lebesgue convergence dominated theorem yield to

$$L_h^5 := \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a_h(s)(Ae_h^+(s)-Ae_h(s)) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\,dt \to 0, \quad (3.62)$$

$$L_h^8 := \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a(s)Ae(s) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\,dt \to 0. \quad (3.63)$$

We now estimate

$$L_h^7 := \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega (a_h(s)-a(s))Ae(s) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\,dt.$$

We have

$$\begin{aligned}
&\int_0^{[t]_h}\int_\Omega (a_h(s)-a(s))Ae(s) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds \\
&\quad \le \| (a_h-a)Ae \|_{L^2(0,T_f,L^2)} \| \dot{e_h}-\dot{e} \|_{L^2(0,T_f,L^2)} .
\end{aligned}$$

From proposition 3.3.5 we deduce that there exists some $C>0$ independent of h such that

$$\int_0^{[t]_h}\int_\Omega (a_h(s)-a(s))Ae(s) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds \le C \| (a_h-a)Ae \|_{L^2(0,T_f,L^2)}$$

Since $a_h(t) \in L^\infty(\Omega)$, $(a_h - a) \to 0$ a.e. in $\Omega \times (0, T_f)$, the Lebesgue's dominated convergence gives that

$$L_h^7 \to 0. \tag{3.64}$$

From (3.60), (3.61), (3.62), (3.63), (3.64) we deduce that

$$\limsup_{h \searrow 0} K_h^1 = \limsup_{h \searrow 0} \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a_h(s) A(e_h(s) - e(s))(\dot{e_h}(s) - \dot{e}(s))\, dx\, ds\, dt. \tag{3.65}$$

We now estimate K_h^2 :

$$\begin{aligned} K_h^2 &:= \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a_h^-(s) A e_h^+(s) : (\dot{p_h}(s) - \dot{p}(s))\, dx\, ds\, dt \qquad (3.66) \\ &= \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega (a_h^-(s) A e_h^+(s) : \dot{p_h}(s)) - (a_h^-(s) A e(s) : \dot{p}(s)))\, dx\, ds\, dt \end{aligned}$$

Using Lemma 3.3.10, we have $a_h^- A e_h^+(t) \rightharpoonup a A e(t)$ weakly in $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$. Thanks to Lemma 3.3.6, we also have that for all $t \in [0, T_f)$, $a_h^-(t) A e_h^+(t) \in K$ a.e. in Ω, with K a convex closed set. We obtain that for all $t \in [0, T_f)$, $a(t) A e(t) \in K$ a.e. in Ω. By Lemma 3.3.7, we have for all $t \in (0, T_f)$, $a_h^-(t) A e_h^+(t) : \dot{p_h}(t) \geqslant a(t) A e(t) : \dot{p_h}(t)$ a.e. in Ω. So that we have

$$\begin{aligned} K_h^2 &\geqslant \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a(s) A e(s) : \dot{p_h}(s) - a_h^-(s) A e(s) : \dot{p}(s)\, dx\, ds\, dt \\ &= \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a(s) A e(s) : (\dot{p_h}(s) - \dot{p}(s))\, dx\, ds\, dt \\ &+ \int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega (a(s) - a_h^-(s)) A e(s) : \dot{p}(s)\, dx\, ds\, dt. \qquad (3.67) \end{aligned}$$

Since $\dot{p_h} \rightharpoonup \dot{p}$ weakly in $L^2(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$,

$$\int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega a(s) A e(s) : (\dot{p_h}(s) - \dot{p}(s))\, dx\, ds\, dt \to 0. \tag{3.68}$$

Since $a_h^-(t) \in L^\infty(\Omega)$, $(a_h^- - a) \to 0$ a.e. in $\Omega \times (0, T_f)$, the Lebesgue dominated convergence gives that

$$\int_0^{T_f} \int_0^{[t]_h} \int_\Omega (a(s) - a_h^-(s)) A e(s) : \dot{p}(s)\, dx\, ds\, dt \to 0. \tag{3.69}$$

From (3.56), (3.57), (3.65), (3.67), (3.68), (3.69) we deduce that

$$\limsup_{h\searrow 0} I_h \geqslant \limsup_{h\searrow 0} \int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a_h(s)A(e_h(s)-e(s)) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\,dt. \tag{3.70}$$

Integrating by parts and using the fact that $e_h(0)=e_0$, we get

$$\begin{aligned}
&\int_0^{[t]_h}\int_\Omega a_h(s)A(e_h(s)-e(s)) : (\dot{e_h}(s)-\dot{e}(s))\,dx\,ds\\
=\ &\int_\Omega \frac{1}{2}a_h([t]_h)A(e_h([t]_h)-e([t]_h)) : (e_h([t]_h)-e([t]_h))\,dx\\
-\ &\frac{1}{2}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega \dot{a_h}(s)A(e_h(s)-e(s)) : (e_h(s)-e(s))\,dx\,ds. \qquad (3.71)
\end{aligned}$$

Since $\forall t\in(0,T_f]$ and a.e. in Ω, $\dot{a}_h(.,t)\leq 0$,

$$-\int_0^{T_f}\int_0^{[t]_h}\int_\Omega \dot{a_h}(s)A(e_h(s)-e(s)) : (e_h(s)-e(s))\,dx\,ds\,dt \geqslant 0.$$

Since $a_h(t)\geqslant\eta$ for all $t\in[0,T_f]$, using the ellipticity hypothesis $Ae:e\geqslant\alpha_A|e|^2$, we deduce from (3.70), and (3.71) that

$$\limsup_{h\searrow 0} I_h \geqslant \frac{1}{2}\eta\alpha_A \limsup_{h\searrow 0}\int_0^{T_f}\int_\Omega |e_h([t]_h)-e([t]_h)|^2\,dx\,dt. \tag{3.72}$$

By definition we have $e_h([t]_h)=e_h^+(t)$. Since $e\in W^{1,\infty}(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$, we now estimate $e(t)-e([t]_h)$ in L^2 using Cauchy-Schwarz inequality and Fubini theorem :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |e([t]_h)-e(t)|^2\,dx \leq \int_\Omega \left|\int_t^{[t]_h}\dot{e}(s)\,ds\right|^2 dx\\
\leq\ & h^{1/2}\int_\Omega\int_t^{[t]_h}|\dot{e}(s)|^2\,ds\,dx \leq Ch^{1/2}\parallel \dot{e}\parallel_{L^\infty(0,T_f,L^2)}. \qquad (3.73)
\end{aligned}$$

We define for $t\in(0,T_f]$, $e^h(t):=e([t]_h)$. From (3.73) we deduce that $e^h\to e$ strongly in $L^\infty(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$. Since $e_h([t]_h)-e([t]_h)=e_h^+(t)-e([t]_h)=e_h^+(t)-e(t)+e(t)-e([t]_h)$, we deduce from (3.54) and (3.72) that

$$\begin{aligned}
0 \geqslant\ & \limsup_{h\searrow 0} I_h \geqslant \frac{\eta\alpha_1}{2}\limsup_{h\searrow 0}\left\{\int_0^{T_f}\|e_h^+(t)-e(t)\|_{L^2}^2\,dt \right. \qquad (3.74)\\
+\ & \left. 2\int_0^{T_f}\int_\Omega (e_h^+(t)-e(t)) : (e(t)-e([t]_h))\,dx\,dt + \int_0^{T_f}\|e([t]_h)-e(t)\|_{L^2}^2\,dt\right\}.
\end{aligned}$$

Since $e^h \to e$ strongly in $L^\infty(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\rm sym}))$ and $e_h^+ \rightharpoonup e$ weakly* in $L^\infty(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\rm sym}))$, it follows that

$$\int_0^{T_f}\int_\Omega (e_h^+(t)-e(t)) : (e(t)-e([t]_h))\,dx\,dt \to 0, \tag{3.75}$$

$$\int_0^{T_f} \|e([t]_h)-e(t)\|_{L^2}^2\,dt \to 0. \tag{3.76}$$

We deduce from (3.74), (3.75), (3.76) that

$$0 \geqslant \limsup_{h\searrow 0}\int_0^{T_f} \|e_h^+(t)-e(t)\|_{L^2}^2\,dt \geqslant \liminf_{h\searrow 0}\int_0^{T_f} \|e_h^+(t)-e(t)\|_{L^2}^2\,dt \geqslant 0.$$

We conclude that

$$\lim_{h\searrow 0}\int_0^{T_f} \|e_h^+(t)-e(t)\|_{L^2}^2\,dt = 0, \tag{3.77}$$

and as a consequence of (3.35) we deduce

$$\lim_{h\searrow 0}\int_0^{T_f} \|e_h(t)-e(t)\|_{L^2}^2\,dt = 0. \tag{3.78}$$

□

We now derive the plastic flow rule and the minimality of v.

3.3.6 Passage to the limit in the plastic flow rule

Corollary 3.3.12 *For a.e. $t \in [0,T_f]$,*

$$a(t)Ae(t) \in \partial H(\dot p(t)) \quad a.e.\, in\, \Omega. \tag{3.79}$$

Proof : For all $q \in L^2([0,T_f],L^2(\Omega,K))$, we have that

$$\int_0^{T_f}\int_\Omega (a_h^-(t)Ae_h^+(t)-q) : \dot p_h(t)\,dx\,dt \geqslant 0. \tag{3.80}$$

We can rewrite

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_f}\int_\Omega (a_h^-(t)Ae_h^+(t)-q):\dot{p}_h(t)\,dx\,dt \\
= & \int_0^{T_f}\int_\Omega (a_h^-(t)-a(t))Ae_h^+(t):\dot{p}_h(t)\,dx\,dt \\
+ & \int_0^{T_f}\int_\Omega a(t)(Ae_h^+(t)-e(t)):\dot{p}_h(t)\,dx\,dt \\
+ & \int_0^{T_f}\int_\Omega (a(t)Ae(t)-q):\dot{p}_h(t)\,dx\,dt \\
=: & \; T_1+T_2+T_3
\end{aligned}$$

By Lebesgue dominated convergence theorem, Proposition 3.3.5 and Lemma 3.3.6, T_1 converges to zero. Thanks to Propostion 3.3.11, T_2 converges to zero. Since $\dot{p}_h \rightharpoonup \dot{p}$ weakly in $L^2(0,T_f,L^2)$, $T_3 \to \int_0^{T_f}\int_\Omega (a(t)Ae(t)-q):\dot{p}(t)\,dx\,dt$. We obtain

$$\int_0^{T_f}\int_\Omega (a(t)Ae(t)-q):\dot{p}(t)\,dx\,dt \geqslant 0. \tag{3.81}$$

Since $a(t)Ae(t)\in K$ a.e. in Ω for all $t\in[0,T_f)$, the inequality (3.81) gives that for a.e. $t\in[0,T_f]$, $\dot{p}(t)\in\partial 1_K(a(t)Ae(t))=\partial H^*(a(t)Ae(t))$ a.e. in Ω. And we conclude by convex duality. □

3.3.7 Passage to the limit in the crack propagation condition

Corollary 3.3.13 *For a.e. $t\in[0,T_f]$,*

$$\begin{aligned}
2\varepsilon\int_\Omega \nabla v(t)\nabla(v(t)-\varphi)\,dx \; + & \int_\Omega v(t)Ae(t):e(t)(v(t)-\varphi)\,dx \\
+ & \; (2\varepsilon)^{-1}\int_\Omega (v(t)-1)(v(t)-\varphi)\,dx \le 0,
\end{aligned} \tag{3.82}$$

for any $\varphi\in H^1(\Omega)$, $\varphi\le v(t)$ and $\varphi=1$ on $\partial\Omega_D$.

Proof : For all $t\in(0,T_f]$ we rewrite (3.8) as

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon\int_\Omega \nabla v_h^+(t)\nabla(v_h^+(t)-\varphi)\,dx+\int_\Omega v_h^+(t)Ae_h^+(t):e_h^+(t)(v_h^+(t)-\varphi)\,dx \\
+ & \; (2\varepsilon)^{-1}\int_\Omega (v_h^+(t)-1)(v_h^+(t)-\varphi)\,dx\le 0.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

for any $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \leq v_h^-(t)$ and $\varphi = 1$ on $\partial\Omega_D$. Since $v_h^+(t)$ is minimal among all $\varphi \leq v_h^-(t)$, it is minimal among $\varphi \leq v_h^+(t)$. Integrating over $[0, T_f]$, we obtain

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon \int_0^{T_f} \int_\Omega \nabla v_h^+(t) \nabla (v_h^+(t) - \varphi)\, dx\, dt \\ + & \int_0^{T_f} \int_\Omega v_h^+(t) A e_h^+(t) : e_h^+(t)(v_h^+(t) - \varphi)\, dx\, dt \\ + & (2\varepsilon)^{-1} \int_0^{T_f} \int_\Omega (v_h^+(t) - 1)(v_h^+(t) - \varphi)\, dx\, dt \leq 0. \end{aligned} \tag{3.84}$$

for any $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \leq v_h^+(t)$ and $\varphi = 1$ on $\partial\Omega_D$. Let $\alpha \in L^2(0, T_f, H^1(\Omega))$ with $\alpha(., t) \geqslant 0$ and $\alpha(., t) = 0$ on $\partial\Omega_D$ for all $t \in [0, T_f]$. Testing (3.84) with admissible test function $\varphi = v_h^+(t) - \alpha(t)$ we obtain

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon \int_0^{T_f} \int_\Omega \nabla v_h^+(t) \nabla \alpha(t)\, dx\, dt + \int_0^{T_f} \int_\Omega v_h^+(t) A e_h^+(t) : e_h^+(t) \alpha(t)\, dx\, dt \\ + & (2\varepsilon)^{-1} \int_0^{T_f} \int_\Omega (v_h^+(t) - 1)\alpha(t)\, dx\, dt \leq 0. \end{aligned} \tag{3.85}$$

for any $\alpha \in L^2(0, T_f, H^1(\Omega))$ with $\alpha(., t) \geqslant 0$ and $\alpha(., t) = 0$ on $\partial\Omega_D$ for all $t \in [0, T_f]$. Since $v_h^+ \overset{*}{\rightharpoonup} v$ in $L^\infty(0, T_f, H^1)$, $e_h^+ \to e$ strongly in $L^2(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ and $v_h^+ \to v$ a.e. in $\Omega \times (0, T_f)$ we obtain

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon \int_0^{T_f} \int_\Omega \nabla v(t) \nabla \alpha(t)\, dx\, dt + \int_0^{T_f} \int_\Omega v(t) A e(t) : e(t) \alpha(t)\, dx\, dt \\ + & (2\varepsilon)^{-1} \int_0^{T_f} \int_\Omega (v(t) - 1)\alpha(t)\, dx\, dt \leq 0. \end{aligned} \tag{3.86}$$

for any $\alpha \in L^2(0, T_f, H^1(\Omega))$ with $\alpha(., t) \geqslant 0$ and $\alpha(., t) = 0$ on $\partial\Omega_D$ for all $t \in [0, T_f]$. We set $\alpha(t) = v(t) - \varphi(t)$ with $\varphi(., t) \leq v(., t)$, $\varphi \in L^2(0, T_f, H^1(\Omega))$ and $\varphi(., t) = 1$ on $\partial\Omega_D$. □

3.4 Conclusion

In this chapter, we proved an existence result for an elasto-viscoplastic model with fracture. We studied an associated discrete time evolution model. We proved that as discretization time step converges to zero, the discrete time evolution solutions converge to limit that is a solution of continuous time elasto-visco-plastic model. In other words, the limit evolution satisfies (H1)-(H7).

Chapitre 4

Existence of solutions to an elasto-viscoplastic model with kinematic hardening and r-Laplacian fracture approximation : Model 4.

Introduction au chapitre 4

Le chapitre 4 de cette thèse est consacré au résultat d'existence d'une évolution continue en temps (u, v, e, p) du modèle 4, c'est-à-dire du modèle élasto-viscoplastique dans $\mathbb{R}^2$ avec écrouissage cinématique linéaire et rupture régularisée utilisant la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli modifiée contenant un terme avec r-croissance en $|\nabla v|$, où $r > 2$. Plus exactement, nous montrons (Theorème 4.2.1) qu'il existe au moins une évolution

$$(u, v, e, p) : \Omega \times [0, T_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$$

avec

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)), \\ v \in L^\infty(0, T_f, W^{1,r}(\Omega, \mathbb{R})), \\ e \in L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})), \\ p \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})), \end{cases}$$

qui satisfasse les conditions (1)-(6) du modèle défini en section 4.2.2. Ce résultat est obtenu en construisant à chaque temps t_h^n les évolutions approchées $(u_h^n, v_h^n, e_h^n, p_h^n)$ comme des solutions d'un seul problème de minimisation (Proposition 4.3.1). Ensuite nous dérivons des équations d'Euler-Lagrange pour

les évolutions approchées (Proposition 4.3.2). Comme dans le chapitre 3, nous obtenons les estimations a priori et construisons à partir des évolutions approchées des fonctions constantes et linéaires par morceaux (Section 4.3.2 et Proposition 4.3.3).

La difficulté principale est de passer à la limite dans la loi d'écoulement plastique et dans la loi de propagation de rupture discrètes. Nous sommes à nouveau amenés à montrer un résultat de compacité forte pour les approximations constantes et linéaires élastiques et plastiques e_h^+, $p_h^+, p_h, \dot{p}_h$ en montrant que pour chaque $t \in (0, T_f]$, ces suites sont de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ (Proposition 4.3.9 et Proposition 4.3.10). Pour obtenir ce résultat, nous utilisons le théorème de Helly généralisé et la monotonie de v_h^+. Ce résultat nous permet d'extraire une sous suite de v_h^+ tel que v_h^+ va converger vers un certain v faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour chaque $t \in [0, T_f]$ et donc fortement dans $C(\overline{\Omega})$ par injection de Sobolev (Proposition 4.3.6) Ceci permet donc le contrôle et le passage à la limite dans certains termes dûs à la présence de la rupture v dans le modèle (Lemme 4.3.7) pour chaque $t \in [0, T_f]$.

Notons que si cette extraction limite de sous-suite indépendante de t n'avait pas été possible, on pouvait juste extraire à chaque t une sous-suite qui convergera vers un v_t, mais comme l'intervalle $[0, T_f]$ n'est pas dénombrable, on ne pourrait pas utiliser l'argument diagonal de Cantor et construire v indépendamment de t. Remarquons aussi que dans le cas $r = 2$ le Lemme 4.3.7 ne peut pas être prouvé.

Une fois le candidat limite construit (u, v, e, p) en utilisant l'argument de Cauchy et de Théorème de Helly, nous montrons que l'évolution limite (u, v, e, p) va vérifier les conditions du modèle (1)-(6) (voir Proposition 4.3.10 et Section 4.3.4).

Abstract

The main result of this chapter is an existence theorem for a model describing the elasto-viscoplastic behaviour of a 2D material with linear kinematic hardening and fracture where the Griffith fracture energy is regularized using a r-Laplacian.

4.1 Introduction

We study an evolution model coupling several dissipation mechanisms that occur during material deformation : plasticity, viscoplasticity, linear kinematic hardening and fracture. Particularly, we prove an existence result for a continuous elasto-viscoplastic model with kinematic hardening and fracture, via discrete-time evolutions obtained by solving incremental variational problems. The modern variational approach to fracture was proposed by Francfort and Marigo [35]. Approximate fracture models via the Ambrosio-Tortorelli functional are studied by Francfort, Marigo, Bourdin [14]. An existence result for a quasi-static evolution of the elastic model with the Ambrosio-Tortorelli functional was proposed by A. Giacomini [37]. In our model, we combine the elasto-visco-plastic behaviour with a variational Ambrosio-Tortorelli approximation of fracture with r-Laplacian [6], [33] in $\mathbb{R}^2$. In our case, we will consider a modified Ambrosio-Tortorelli functional, for all $(e, v) \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times W^{1,r}(\Omega, \mathbb{R})$,

$$\mathcal{E}_\varepsilon(e, v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v^2 + \eta\right) Ae : e\, dx + \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}|1 - v|^r\, dx,$$

where $\alpha > 0$ is a some regularization constant and $r' = r/(r-1)$. The advantage of r-Laplacian approach is the gain of compactness on the variables v, and then (u, e, p), of sequences of approximate solutions. Babadjian, Francfort, Mora [5] studied an evolution elasto-visco-plastic model and proved that the constant approximate semi-discrete time solutions $(e_h^+)_h$, $(p_h^+)_h$ are Cauchy sequences in $L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$. This result allows passage to the limit in the discrete plastic-flow rule and proving an existence result for the continuous elasto-visco-plastic model. The presence of v in our model requires the control of some additional terms (see Lemma 4.3.7). We cannot directly use the argument based on Cauchy sequence argument and pass to the limit in the discrete plastic flow rule. As an altenative solution, we prove that for fixed $t \in (0, T_f]$, $p_h(t)$, $\dot{p}_h(t)$ are Cauchy sequences in $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$. This compactness result is proved using Helly's selection principle [50]. The inclusion

of a kinematic hardening term in the model is motivated by our numerical results [9] (see also next chapter 5). Indeed, kinematic hardening allows the translation of the yield surface and thus the elastic energy can increase after plastification, so that plastification does not prevent the appearance of cracks.

The chapter is organised as follows. After a short introduction, Section 4.2 is devoted to the definitions, mathematical and mechanical settings. This is followed by the model description. In Section 4.3, we prove the existence of solutions for discrete variational problem. Then, we study the convergence of these approximate evolutions as the time step $h \to 0$. Finally, the main result of the chapter is an existence theorem for elasto-viscoplastic model with kinematic linear hardening and fracture. There exists at least one evolution (u, v, e, p) satisfying Theorem 4.2.1.

4.2 Description of the model

4.2.1 Preliminaries and mathematical setting

Throughout the chapter, Ω is a bounded connected open set in $\mathbb{R}^2$ with Lipschitz boundary $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ where $\partial\Omega_D$, $\partial\Omega_N$ are disjoint open sets in $\partial\Omega$. Given $T_f > 0$, we denote by $L^p((0,T_f),X)$, $W^{k,p}((0,T_f),X)$, the Lebesgue and Sobolev spaces involving time [see [31] p. 285], where X is a Banach space. We note for $1 \leq p \leq \infty$ the L^p-norm by $\| \,.\, \|_p$ or $\| \,.\, \|_{L^p}$. The set of symmetric 2×2 matrices is denoted by $\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$. For $\xi, \zeta \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ we define the scalar product between matrices $\zeta : \xi := \sum_{ij} \zeta_{ij}\xi_{ij}$, and the associated matrix norm by $|\xi| := \sqrt{\xi : \xi}$. Let A be the fourth order tensor of Lamé coefficients and B a suitable symmetric-fourth order tensor. We assume that for some constants $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \infty$, they satisfy the ellipticity conditions

$$\forall\, e \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}, \quad \alpha_1|e|^2 \leq Ae : e \leq \alpha_2|e|^2 \quad \text{and} \quad \alpha_1|e|^2 \leq Be : e \leq \alpha_2|e|^2$$

We recall that the mechanical unknowns of our model are the displacement field $u : \Omega \times [0,T_f] \to \mathbb{R}^2$, the elastic strain $e : \Omega \times [0,T_f] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$, the plastic strain $p : \Omega \times [0,T_f] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$. We assume u and ∇u remain small. So that the relation bewteen the deformation tensor E and the displacement field is given by

$$Eu := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T).$$

We also assume that Eu decomposes as an elastic part and a plastic part

$$Eu \;=\; e + p.$$

For $w \in H^1(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2))$, which represents an applied boundary displacement, we define for $t \in [0, T_f]$ the set of kinematically admissible fields by

$$\begin{aligned} A_{adm}(w(t)) \;:=\; & \{(u, e, p) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \;: \\ & Eu = e + p \quad a.e. \text{ in } \Omega,\; u = w(t) \quad a.e. \text{ on } \partial\Omega_D\}. \end{aligned}$$

For a fixed constant $\tau > 0$, we define $K := \{q \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}};\, |q| \leq \tau\}$ and $H : \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \to [0, \infty]$ the support function of K by

$$H(p) := \sup_{\theta \in K} \theta : p = \tau |p|.$$

For $\eta > 0$, the elastic energy is defined as

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{el} \;:\; L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times W^{1,r}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ & (e, v) \longmapsto \mathcal{E}_{el}(e, v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(v^2 + \eta\right) Ae : e \, dx. \end{aligned}$$

In the following, we will define an evolution as a limit of time discretizations with a step h : p and p_0 represent the plastic deformation at 2 consecutive time steps, so that $\dfrac{p - p_0}{h} \sim \dot{p}$. The plastic dissipated energy is defined, by

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_p \;:\; L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \to \mathbb{R} \\ & (p, p_0) \longmapsto \mathcal{E}_p(p, p_0) = \int_\Omega H(p - p_0) \, dx, \end{aligned}$$

and the hardening energy by

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{KH} \;:\; L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \to \mathbb{R} \\ & p \longmapsto \mathcal{E}_{KH}(p) = \frac{1}{2} \int_\Omega Bp : p \, dx. \end{aligned}$$

Given $\beta > 0$, the viscoplastic energy is defined by

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{vp} \;:\; L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \to \mathbb{R} \\ & (p, p_0) \longmapsto \mathcal{E}_{vp}(p, p_0) = \frac{\beta}{2h} \int_\Omega (p - p_0) : (p - p_0) \, dx. \end{aligned}$$

For $r > 2$, and $\varepsilon > 0$, we define the phase-field surface energy

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}^r_S \;:\; W^{1,r}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ & \qquad v \quad \longmapsto \mathcal{E}^r_S(v) = \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r} |\nabla v|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon} |1 - v|^r \, dx. \end{aligned}$$

where $r' := \dfrac{r}{r-1}$ and $\alpha := \left(\dfrac{r}{2}\right)^{r'}$. In the next section we describe the evolution of the proposed model.

4.2.2 The evolution for elasto-viscoplastic model with linear kinematic hardening and fracture

Consider $w \in H^1(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2))$. We define the evolution of the model by a seeking functions

$$(u, v, e, p) : \Omega \times [0, T_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$$

that satisfy the following conditions :

1. Initial condition : $(u(0), v(0), e(0), p(0)) = (u_0, v_0, e_0, p_0)$ with $(u_0, e_0, p_0) \in A_{adm}(w(0))$, and $v_0 \in W^{1,r}(\Omega)$ with $v_0 = 1$ on $\partial\Omega_D$ and $0 \leq v_0 \leq 1$ a.e. in Ω, such that $-\text{div}\,\sigma_0 = 0$ a.e. in Ω where $\sigma_0 := (v_0^2 + \eta)Ae_0$, $\sigma_0.\vec{n} = 0$ on $\partial\Omega_N$.
2. Irreversibility condition : $0 \leq v(t) \leq v(s) \leq 1$ in Ω for every $0 \leq s \leq t \leq T_f$.
3. Kinematic compatibility : for every $t \in [0, T_f]$,
$$(u(t), e(t), p(t)) \in A_{adm}(w(t)).$$
4. Equilibrium condition : for $t \in [0, T_f]$,
$$\begin{cases} -\text{div}(\sigma(t)) = 0, & \text{a.e. in} \quad \Omega, \\ \sigma(t).\vec{n} = 0, & \text{a.e. on} \quad \partial\Omega_N, \\ (u(t), v(t)) = (w(t), 1), & \text{a.e on} \quad \partial\Omega_D. \end{cases}$$
where $\sigma(t) = (v(t)^2 + \eta)Ae(t)$ and $\vec{n}$ is outward normal to $\partial\Omega$.
5. Plastic flow rule : for a.e. $t \in [0, T_f]$,
$$\sigma(t) - Bp(t) - \beta\dot{p}(t) \in \partial H(\dot{p}(t)) \quad \text{for } a.e. \quad x \in \Omega.$$
6. Crack propagation condition : for $t \in [0, T_f]$,
$$\mathcal{E}_{el}(e(t), v(t)) + \mathcal{E}^r_S(v(t)) = \inf_{v=1 \text{ on } \partial\Omega_D, v \leq v(t)} \mathcal{E}_{el}(e(t), v) + \mathcal{E}^r_S(v).$$

The main result of the chapter is the following existence result.

Theorem 4.2.1 *There exists at least one evolution*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)), \\ v \in L^\infty(0, T_f, W^{1,r}(\Omega, \mathbb{R})), \\ e \in L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})), \\ p \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})), \end{cases}$$

that satisfies (1)-(6).

4.3 Proof of the existence theorem

4.3.1 Time discretization

The proof of Theorem 4.2.1 is based on a time discretization. It the whole chapter $C > 0$ denotes a generic constant which is independent of the discretization parameters. Let us consider a partition of the time interval $[0, T_f]$ into N_f sub-intervals of equal length h :

$$0 = t_h^0 < t_h^1 < ... < t_h^n < ... < t_h^{N_f} = T_f, \quad \text{with} \quad h = \frac{T_f}{N_f} = t_h^n - t_h^{n-1} \to 0.$$

Let $v_h^0 = v_0$, $u_h^0 = u_0$, $e_h^0 = e_0$, $p_h^0 = p_0$. We suppose that v_0 satisfies the crack propagation condtion (6). For $n = 0, ..., N_f$, we set $w_h^n := w(t_h^n)$. We also define the total energy

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{total}(z, \phi, \xi, q) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\phi^2 + \eta)A\xi : \xi \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega Bq : q \, dx \\
&+ \frac{1}{2h}\beta \parallel q - p_h^{n-1} \parallel_2^2 + \tau \int_\Omega |q - p_h^{n-1}| dx \\
&+ \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r} |\nabla \phi|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon} |1 - \phi|^r \, dx \\
&= \mathcal{E}_{el}(\phi, \xi) + \mathcal{E}_{KH}(q) + \mathcal{E}_{vp}(q, p_h^{n-1}) + \mathcal{E}_p(q, p_h^{n-1}) + \mathcal{E}_S^r(\phi)
\end{aligned}$$

Proposition 4.3.1 *Given $(u_h^{n-1}, v_h^{n-1}, e_h^{n-1}, p_h^{n-1})$ that satisfy $(u_h^{n-1}, e_h^{n-1}, p_h^{n-1}) \in A_{adm}(w_h^{n-1})$, $v_h^{n-1} \in W^{1,r}(\Omega)$, $0 \le v_h^{n-1} \le 1$, $v_h^{n-1} = 1$ on $\partial\Omega_D$. There exist a minimizer $(u_h^n, v_h^n, e_h^n, p_h^n)$ to the variational problem*

$$\min_{(z,\xi,q) \in A_{adm}(w_h^n),\, \phi \in W^{1,r}(\Omega),\, \phi \le v_h^{n-1},\, \phi = 1 \text{ on } \partial\Omega_D} \mathcal{E}_{total}(z, \phi, \xi, q). \tag{4.1}$$

Proof : Since $(w_h^n, v_h^{n-1}, Ew_h^n, 0)$ is admissible for (4.1), we have that

$$m := \inf_{(z,\xi,q) \in A_{adm}(w_h^n),\, \phi \in W^{1,r}(\Omega),\, \phi \le v_h^{n-1},\, \phi = 1 \text{ on } \partial\Omega_D} \mathcal{E}_{total}(z, \phi, \xi, q) < \infty$$

Let (u_k, v_k, e_k, p_k) be a minimizing sequence. It follows from the Poincaré inequality and the Korn inequalities that

$$\parallel u_k \parallel_{H^1} + \parallel v_k \parallel_{W^{1,r}} + \parallel e_k \parallel_{L^2} + \parallel p_k \parallel_{L^2} \le C_{n,h}.$$

Therefore can be extracted a subsequence (u_k, v_k, e_k, p_k) such that

$$\begin{aligned}
u_k &\rightharpoonup u \quad \text{in} \quad H^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \\
v_k &\rightharpoonup v \quad \text{in} \quad W^{1,r}(\Omega, \mathbb{R}), \\
e_k &\rightharpoonup e \quad \text{in} \quad L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}), \\
p_k &\rightharpoonup p \quad \text{in} \quad L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}).
\end{aligned}$$

It follows that $(u, e, p) \in A_{adm}(w_h^n)$ and since $r > 2$, $v_k \to v$ in $C^0(\overline{\Omega})$ by the Sobolev Imbedding theorem. As $v_k \leq v_h^{n-1}$ and $v_k = 1$ on $\partial\Omega_D$ for all k, we have $v \leq v_h^{n-1}$ and $v = 1$ on $\partial\Omega_D$. Furthermore, $v_k e_k \rightharpoonup ve$ weakly in $L^2(\Omega)$. By lower semicontinuity,

$$\int_\Omega v^2 Ae : e\, dx = \int_\Omega Ave : ve\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega Av_k e_k : v_k e_k\, dx,$$

and

$$\int_\Omega (v^2 + \eta) Ae : e\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega (v_k^2 + \eta) Ae_k : e_k\, dx.$$

The other terms of $\mathcal{E}_{total}$ are weakly lower semicontinuous with respect to the weak topology $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \times W^{1,r}(\Omega) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ and thus

$$\begin{aligned} m \leq \mathcal{E}_{total}(u, v, e, p) &\leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{E}_{total}(u_k, v_k, e_k, p_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mathcal{E}_{total}(u_k, v_k, e_k, p_k) = m, \end{aligned}$$

so that (u, v, e, p) is indeed a minimizer. □

We now define $(u_h^n, v_h^n, e_h^n, p_h^n)$ as one solution of (4.1) and we derive the Euler-Lagrange equation satisfied by this solution. We define for all $n \geqslant 1$,

$$\delta p_h^n := \frac{p_h^n - p_h^{n-1}}{h},$$

Proposition 4.3.2 *For $1 \leq n \leq N_f$, let $(u_h^n, v_h^n, e_h^n, p_h^n)$ be a solution of (4.1) and let*

$$\sigma_h^n := a_h^n A e_h^n$$

with $a_h^n := (v_h^n)^2 + \eta$. Then we have :

$$\begin{cases} -div(\sigma_h^n) = 0, & a.e.\ in \quad \Omega, \\ \sigma_h^n . \vec{n} = 0, & a.e.\ on \quad \partial\Omega_N, \\ \sigma_h^n - Bp_h^n - \beta\delta p_h^n \in \partial H(p_h^n - p_h^{n-1}), & a.e.\ in \quad \Omega. \end{cases}$$

Furthermore,

$$v_h^n = \underset{\phi\in W^{1,r}(\Omega),\, \phi\leq v_h^{n-1},\, \phi=1\, on\, \partial\Omega_D}{\text{argmin}} \left\{ \mathcal{E}_{el}(e_h^n, \phi) + \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r} |\nabla\phi|^r + \frac{\alpha}{r'\varepsilon} |1 - \phi|^r\, dx \right\} \quad (4.2)$$

Proof : Let $(z,\xi,q)\in A_{adm}(0)$, so that $(u_h^n+sz, e_h^n+s\xi, p_h^n+sq)\in A_{adm}(w_h^n)$ is an admissible triplet for every $0<s<1$. We have

$$\mathcal{E}_{total}(u_h^n,v_h^n,e_h^n,p_h^n)\leq \mathcal{E}_{total}(u_h^n+sz,v_h^n,e_h^n+s\xi,p_h^n+sq),$$

and thus

$$\begin{aligned} 0 &\leq s\int_\Omega a_h^n Ae_h^n:\xi\,dx + s\int_\Omega Bp_h^n:q\,dx + s\int_\Omega \beta\frac{p_h^n-p_h^{n-1}}{h}:q\,dx \\ &+ \tau\int_\Omega |p_h^n+sq-p_h^{n-1}|-|p_h^n-p_h^{n-1}|dx + o(s) \end{aligned}$$

Let $\Psi(s):=\tau\int_\Omega|p_h^n+sq-p_h^{n-1}|dx$. Using the convexity of Ψ we have $\Psi(s)-\Psi(0)\leq s(\Psi(1)-\Psi(0))$. Dividing this inequality by s and letting s tend to zero implies that for all $(z,\xi,q)\in A_{adm}(0)$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a_h^n Ae_h^n:\xi\,dx + \int_\Omega Bp_h^n:q\,dx + \int_\Omega \beta\frac{p_h^n-p_h^{n-1}}{h}:q\,dx \\ &+ \tau\int_\Omega |p_h^n-p_h^{n-1}+q|-|p_h^n-p_h^{n-1}|\,dx \\ &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Testing (4.3) with $\pm(\phi,E(\phi),0)$ for any $\phi\in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^2)$, we obtain

$$\int_\Omega \sigma_h^n:E(\phi)\,dx=0 \tag{4.4}$$

and from which we deduce that $-\mathrm{div}(\sigma_h^n)=0$ a.e. in Ω. Furher, picking $\phi\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^2)$, with $\phi=0$ on $\partial\Omega_D$ in $\pm(\phi,E\phi,0)$ as a test function for (4.3) and integrating (4.4) by parts, we also obtain that $\sigma_h^n.\vec{n}=0$ a.e. on $\partial\Omega_N$. Testing (4.3) with $(0,-q+p_h^n-p_h^{n-1},q-p_h^n+p_h^{n-1})$ for any $q\in L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times2}_{\mathrm{sym}})$, we have

$$\begin{aligned} \tau\int_\Omega|q|dx &\geq \tau\int_\Omega|p_h^n-p_h^{n-1}|dx + \\ &+\int_\Omega\left(a_h^nAe_h^n-Bp_h^n-\beta\frac{p_h^n-p_h^{n-1}}{h}\right):(q-(p_h^n-p_h^{n-1}))\,dx \end{aligned} \tag{4.5}$$

By a standard localization argument, it follows that

$$\tau|q| \geq \tau|p_h^n-p_h^{n-1}|+(a_h^nAe_h^n-Bp_h^n-\beta\delta p_h^n):(q-(p_h^n-p_h^{n-1}))\quad a.e.\,in\,\Omega$$

which by definition of the subdifferential implies that

$$a_h^nAe_h^n-Bp_h^n-\beta\delta p_h^n\in\partial H(p_h^n-p_h^{n-1})\quad a.e.\,in\,\Omega. \tag{4.6}$$

We also have

$$\mathcal{E}_{total}(u_h^n, v_h^n, e_h^n, p_h^n) \leq \mathcal{E}_{total}(u_h^n, \varphi, e_h^n, p_h^n).$$

for every $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$, $\varphi \leq v_h^{n-1}$ and $\varphi = 1$ on $\partial\Omega_D$, which implies

$$v_h^n = \underset{\varphi \in W^{1,r}(\Omega),\, \varphi \leq v_h^{n-1},\, \varphi = 1 \, on \, \partial\Omega_D}{\operatorname{argmin}} \left\{ \mathcal{E}_{el}(e_h^n, \varphi) + \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r} |\nabla\varphi|^r + \frac{\alpha}{r'\varepsilon} |1-\varphi|^r \, dx \right\}$$

□

Remark that by a truncation argument, we have $v_h^n \geqslant 0$ in Ω.

4.3.2 A priori estimates

We define piecewise affine interpolants of the sequences $(u_h^n)_{n=0}^{N_f}$, $(v_h^n)_{n=0}^{N_f}$, $(e_h^n)_{n=0}^{N_f}$, $(p_h^n)_{n=0}^{N_f}$ as follows :

$$\begin{aligned}
u_h(t) &= u_h^n + (t - t_h^n)\delta u_h^n, \quad \text{for} \quad t \in [t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f, \\
v_h(t) &= v_h^n + (t - t_h^n)\delta v_h^n, \quad \text{for} \quad t \in [t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f, \\
e_h(t) &= e_h^n + (t - t_h^n)\delta e_h^n, \quad \text{for} \quad t \in [t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f, \\
p_h(t) &= p_h^n + (t - t_h^n)\delta p_h^n, \quad \text{for} \quad t \in [t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f.
\end{aligned}$$

Remark that $u_h(0) = u_0$, $v_h(0) = v_0$, $e_h(0) = e_0$, $p_h(0) = p_0$. We also define piecewise constant interpolants

$$\begin{aligned}
u_h^+(t) &= u_h^n, \quad \text{for} \quad t \in (t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f, \\
v_h^+(t) &= v_h^n, \quad \text{for} \quad t \in (t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f, \\
a_h^+(t) &= a_h^n, \quad \text{for} \quad t \in (t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f, \\
e_h^+(t) &= e_h^n, \quad \text{for} \quad t \in (t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f, \\
p_h^+(t) &= p_h^n, \quad \text{for} \quad t \in (t_h^{n-1}, t_h^n], \quad n = 1, ..., N_f,
\end{aligned}$$

with $u_h^+(0) = u_0$, $v_h^+(0) = v_0$, $a_h^+(0) := v_0^2 + \eta$, $e_h^+(0) = e_0$, $p_h^+(0) = p_0$. We also set

$$\sigma_h^+(t) = (v_h^+(t)^2 + \eta) A e_h^+(t) \quad \text{for} \quad t \in (0, T_f],$$

with $\sigma_h^+(0) = \sigma_0$.

Proposition 4.3.3 *There exists a constant $C > 0$ independent of h, n such that*

$$\sup_{[0,T_f]} \|u_h^+(t)\|_{H^1} \leq C, \ \sup_{[0,T_f]} \|v_h^+(t)\|_{W^{1,r}} \leq C, \ \sup_{[0,T_f]} \|p_h^+(t)\|_2 \leq C,$$
$$\sup_{[0,T_f]} \|e_h^+(t)\|_2 \leq C, \ \sup_{(0,T_f]} \|\dot{p}_h(t)\|_2 \leq C.$$

Proof : Firstly, we observe that $(u_h^{n-1} + w_h^n - w_h^{n-1}, v_h^{n-1}, e_h^{n-1} + Ew_h^n - Ew_h^{n-1}, p_h^{n-1})$ is admissible for the minimisation problem (4.1), and

$$\mathcal{E}_{total}(u_h^n, v_h^n, e_h^n, p_h^n) \leq \mathcal{E}_{total}(u_h^{n-1}+w_h^n-w_h^{n-1}, v_h^{n-1}, e_h^{n-1}+Ew_h^n-Ew_h^{n-1}, p_h^{n-1}).$$

So that

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{el}(e_h^n, v_h^n) + \mathcal{E}_S^r(v_h^n) + \frac{1}{2}\int_\Omega Bp_h^n : p_h^n\, dx + \frac{\beta}{2h} \parallel p_h^n - p_h^{n-1} \parallel_2^2 + \tau \int_\Omega |p_h^n - p_h^{n-1}|\, dx \\
&\leq \mathcal{E}_{el}(e_h^{n-1} + Ew_h^n - Ew_h^{n-1}, v_h^{n-1}) + \mathcal{E}_S^r(v_h^{n-1}) + \frac{1}{2}\int_\Omega Bp_h^{n-1} : p_h^{n-1}\, dx \\
&= \mathcal{E}_{el}(e_h^{n-1}, v_h^{n-1}) + \mathcal{E}_{el}(Ew_h^n - Ew_h^{n-1}, v_h^{n-1}) \qquad (4.7)\\
&+ \int_\Omega a_h^{n-1} Ae_h^{n-1} : (Ew_h^n - Ew_h^{n-1})\, dx + \mathcal{E}_S^r(v_h^{n-1}) + \frac{1}{2}\int_\Omega Bp_h^{n-1} : p_h^{n-1}\, dx.
\end{aligned}$$

Since Ew is absolutely continuous in time with values in $L^2(\Omega; \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})$,

$$Ew_h^n - Ew_h^{n-1} = \int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} E\dot{w}(s)\, ds.$$

We now estimate,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{el}(Ew_h^n - Ew_h^{n-1}, v_h^{n-1}) \leq \mathcal{E}_{el}(Ew_h^n - Ew_h^{n-1}, 1) \\
&\leq \frac{\alpha_2}{2}(1+\eta) \left\| \int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} E\dot{w}(s)\, ds \right\|_2^2 \leq \frac{\alpha_2}{2}(1+\eta) \left(\int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} \|E\dot{w}(s)\|_2\, ds \right)^2 \\
&\leq \frac{\alpha_2}{2}(1+\eta) f(h) \int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} \|E\dot{w}(s)\|_2\, ds. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

where

$$f(h) := \max_{k\in\{1,N_f\}} \int_{t_h^{k-1}}^{t_h^k} \|E\dot{w}(s)\|_2\, ds \to 0 \quad \text{as } h \to 0, \qquad (4.9)$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a_h^{n-1} Ae_h^{n-1} : \left(\int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} E\dot{w}(s)\, ds \right) dx \\
&\leq (1+\eta) \parallel Ae_h^{n-1} \parallel_2 \int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} \parallel E\dot{w}(s) \parallel_2\, ds \qquad (4.10)\\
&\leq (1+\eta) 2\alpha_2 \sup_{\{0,..,N_f\}} \parallel e_h^n \parallel_2 \int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} \parallel E\dot{w}(s) \parallel_2\, ds
\end{aligned}$$

Thanks to (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) we obtain

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{el}(e_h^n, v_h^n) + \mathcal{E}_S^r(v_h^n) + \frac{1}{2}\int_\Omega Bp_h^n : p_h^n\, dx + \frac{\beta}{2h} \parallel p_h^n - p_h^{n-1} \parallel_2^2 + \tau \int_\Omega |p_h^n - p_h^{n-1}|\, dx \\
&\leq \mathcal{E}_{el}(e_h^{n-1}, v_h^{n-1}) + \mathcal{E}_S^r(v_h^{n-1}) + \frac{1}{2}\int_\Omega Bp_h^{n-1} : p_h^{n-1}\, dx \qquad (4.11)\\
&+ Cf(h)\int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} \|E\dot{w}(s)\|_2\, ds + (1+\eta)2\alpha_2 \sup_{\{0,..,N_f\}} \parallel e_h^n \parallel_2 \int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} \parallel E\dot{w}(s) \parallel_2\, ds.
\end{aligned}$$

Summing the inequalities (4.11) for $1 \leq n \leq N \leq N_f$ we obtain

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{el}(e_h^N, v_h^N) + \mathcal{E}_S^r(v_h^N) + \frac{1}{2}\int_\Omega Bp_h^N : p_h^N\, dx \\
&+ \frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^N h \parallel \frac{p_h^n - p_h^{n-1}}{h} \parallel_2^2 + \tau h \sum_{n=1}^N \int_\Omega |\frac{p_h^n - p_h^{n-1}}{h}|\, dx \\
&\leq \mathcal{E}_{el}(e_0, v_0) + \mathcal{E}_S^r(v_0) + \frac{1}{2}\int_\Omega Bp_0 : p_0\, dx \qquad (4.12)\\
&+ Cf(h)\int_0^{t_h^N} \|E\dot{w}(s)\|_2\, ds + (1+\eta)2\alpha_2 \sup_{\{0,..,N_f\}} \parallel e_h^n \parallel_2 \int_0^{t_h^N} \parallel E\dot{w}(s) \parallel_2\, ds.
\end{aligned}$$

From the last inequality, and from the coercivity and boundedness of the tensor A we deduce that

$$\begin{aligned}
\sup_{\{0,..,N_f\}} \parallel e_h^n \parallel_2^2 &\leq C \parallel e_0 \parallel_2^2 + \mathcal{E}_S^r(v_0) + \int_\Omega Bp_0 : p_0\, dx \\
&+ C \sup_{\{0,..,N_f\}} \parallel e_h^n \parallel_2 \int_0^{T_f} \parallel E\dot{w}(s) \parallel_2\, ds + Cf(h).
\end{aligned}$$

This last estimate, the coercivity and boundedness of the tensor B and (4.12) leads to

$$\sup_{[0,T_f]} \left\{ \|u_h^+(t)\|_{H^1},\ \|v_h^+(t)\|_{W^{1,r}},\ \|p_h^+(t)\|_2,\ \|e_h^+(t)\|_2 \right\} \leq C.$$

Furthermore, from the discrete plastic flow rule (4.6), we deduce that

$$|a_h^n A e_h^n - Bp_h^n - \beta\delta p_h^n| \leq \tau \quad a.e.\ in\ \Omega,$$

and consenquently,

$$\sup_{(0,T_f]} \|\dot{p}_h(t)\|_2 \leq C.$$

□

4.3.3 Compactness results

Our aim is to study the limit of the discrete plastic flow rule, and of the discrete variational problem for v_h^n. To this end, we show the strong compactness on the sequence of stresses $(\sigma_h^+)_h$, and the sequences of elastic and plastic strains $(e_h^+)_h$, $(p_h)_h$.

Lemma 4.3.4 *Let X a Banach space with $x, y \in X$ and $\psi : X \to \mathbb{R}$ a convex functional. If $x^* \in \partial\psi(x)$ and $y^* \in \partial\psi(y)$, then we have $\langle x^* - y^*, y - x\rangle \leq 0$.*

Proof : The definition of the subdifferentials $\partial\psi(x)$ and $\partial\psi(y)$ show that for all $z, w \in X$,

$$\psi(z) - \psi(x) \geqslant \langle x^*, z - x\rangle, \tag{4.13}$$

$$\psi(v) - \psi(y) \geqslant \langle y^*, v - y\rangle. \tag{4.14}$$

The lemma follows by adding these inequalities with $z = y$ and $v = x$. □

Let $M_f \geqslant 2$ with $M_f \neq N_f$ and consider an other partition of the time interval $[0, T_f]$ into M_f sub-intervals of equals length $l = \dfrac{T_f}{M_f} = t_l^m - t_l^{m-1} \to 0$:

$$0 = t_l^0 < t_l^1 < ... < t_l^{m-1} < t_l^m < ... < T_f.$$

In the same way we define all interpolant functions with indexes l and m.

Lemma 4.3.5 *For all $t \in (0, T_f]$ we have*

$$\beta \parallel \dot{p}_h(t) - \dot{p}_l(t) \parallel_2 \leq \parallel (\sigma_h^+(t) - Bp_h^+(t)) - (\sigma_l^+(t) - Bp_l^+(t)) \parallel_2 .$$

Proof : By the homogeneity of degree 1 of H, we have

$$\sigma_h^n - Bp_h^n - \beta\delta p_h^n \in \partial H(\delta p_h^n) \quad a.e. \text{ in } \Omega. \tag{4.15}$$

We obtain for $m = 1, ..., M_f$,

$$\sigma_l^m - Bp_l^m - \beta\delta p_l^m \in \partial H(\delta p_l^m). \tag{4.16}$$

We apply the Lemma 4.3.4 with $x^* = \sigma_l^m - Bp_l^m - \beta\delta p_l^m$, $y^* = \sigma_h^n - Bp_h^n - \beta\delta p_h^n$, $\psi = H$, $x = \delta p_l^m$, $y = \delta p_h^n$ to obtain

$$\langle(\sigma_l^m - Bp_l^m - \beta\delta p_l^m) - (\sigma_h^n - Bp_h^n - \beta\delta p_h^n), \delta p_h^n - \delta p_l^m\rangle \leq 0 \tag{4.17}$$

We deduce from (4.17) and the Cauchy-Schwarz inequality

$$\begin{aligned} &\beta \parallel \delta p_h^n - \delta p_l^m \parallel_2^2 \leq \langle(\sigma_h^n - Bp_h^n) - (\sigma_l^m - Bp_l^m), \delta p_h^n - \delta p_l^m\rangle \\ \leq\ & \parallel (\sigma_h^n - Bp_h^n) - (\sigma_l^m - Bp_l^m) \parallel_2 \parallel \delta p_h^n - \delta p_l^m \parallel_2, \end{aligned} \tag{4.18}$$

to obtain

$$\beta \parallel \delta p_h^n - \delta p_l^m \parallel_2 \leq \parallel (\sigma_h^n - Bp_h^n) - (\sigma_l^m - Bp_l^m) \parallel_2,$$

or in other words, for all $t \in (0, T_f]$

$$\beta \parallel \dot{p}_h(t) - \dot{p}_l(t) \parallel_2 \leq \parallel (\sigma_h^+(t) - Bp_h^+(t)) - (\sigma_l^+(t) - Bp_l^+(t)) \parallel_2 .$$

□

The proof of the next proposition is similar to the proof of Lemma 4.1 in [37] or of the Lemma 4.9 in [6].

Proposition 4.3.6 *There exists a subsequence (no relabeled) $h \to 0$ and a function $v : [0, T_f] \to W^{1,r}(\Omega)$ such that $v_h^+(t) \rightharpoonup v(t)$ weakly in $W^{1,r}(\Omega)$ for every $t \in [0, T_f]$. Furthermore, we have $v(0) = v_0$, $0 \leq v(s) \leq v(t) \leq 1$ for every $0 \leq t \leq s \leq T_f$ and*

$$v \in L^\infty(0, T_f, W^{1,r}(\Omega)). \tag{4.19}$$

Proof : By definition $v_h^+ : [0, T_f] \to L^1(\Omega)$ is monotone non-increasing, for every $t \in [0, T_f]$. By a generalized version of Helly's selection principle (see [50]), there exists a subsequence (no relabeled) $h \to 0$ and a map $v : [0, T_f] \to L^1(\Omega)$ such that $v_h^+(t) \rightharpoonup v(t)$ weakly in $L^1(\Omega)$ for every $t \in [0, T_f]$. By Proposition 4.3.3, for every $t \in [0, T_f]$, up to a subsequence, $v_{h_n}^+(t) \rightharpoonup w$ weakly in $W^{1,r}(\Omega)$ and so weakly in $L^1(\Omega)$. As $v_h^+(t) \rightharpoonup v(t)$ weakly in $L^1(\Omega)$ we deduce that $w = v(t)$, $v(t) \in W^{1,r}(\Omega)$ and the whole sequence $v_h^+(t) \rightharpoonup v(t)$ weakly in $W^{1,r}(\Omega)$, since the limit of $v_{h_n}^+(t)$ does not depend of the subsequence. Consequently, by the Sobolev Imbedding theorem, $v_h^+(t) \to v(t)$ strongly in $C^0(\overline{\Omega})$ for every $t \in [0, T_f]$. Since $v_h^+(t) = 1$ on $\partial\Omega_D$, $0 \leq v_h^+(t) \leq 1$ in Ω for all $t \in [0, T_f]$ and $0 \leq v_h^+(s) \leq v_h^+(t) \leq 1$ for every $0 \leq t \leq s \leq T_f$, we obtain $v(t) = 1$ on $\partial\Omega_D$, $0 \leq v(t) \leq 1$ in Ω for all $t \in [0, T_f]$ and $0 \leq v(s) \leq v(t) \leq 1$ for every $0 \leq t \leq s \leq T_f$. By lower semicontinuity, we have

$$\sup_{[0,T_f]} \parallel v(t) \parallel_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C. \tag{4.20}$$

□

In the following results, we only consider the subsequence given by the Proposition 4.3.6.

Lemma 4.3.7 *Define*

$$Y_{h,l}(t) := \| e_l^+(t)(v_l^+(t)^2 - v_h^+(t)^2) \|_2,$$
$$Q_{h,l}(t) := \int_0^t Y_{h,l}(s)\, ds.$$

Then for all $t \in [0, T_f]$, $Y_{h,l}(t) \to 0$, $Q_{h,l}(t) \to 0$ *as* $h, l \to 0$.

Proof : Let $t \in [0, T_f]$. By the Proposition 4.3.6, $v_h^+(t) \rightharpoonup v(t)$ weakly in $W^{1,r}(\Omega)$. By the Sobolev Imbedding theorem, $v_h^+(t) \to v(t)$ strongly in $C^0(\overline{\Omega})$:

$$\lim_{h\to 0}\left(\sup_{x\in\overline{\Omega}} |v_h^+(t) - v(t)|\right) = 0. \tag{4.21}$$

which implies $(v_h^+(t))_h$ is a Cauchy sequence in $C^0(\overline{\Omega})$:

$$\lim_{h,l\to 0}\left(\sup_{x\in\overline{\Omega}} |v_h^+(t) - v_l^+(t)|\right) = 0. \tag{4.22}$$

Since $v_h^+(t) \leq 1$ and $\| e_l^+(t) \|_2 \leq C$,

$$\begin{aligned}
Y_{h,l}(t)^2 &= \int_\Omega (v_l^+(t)^2 - v_h^+(t)^2)^2 e_l^+(t) : e_l^+(t)\, dx \\
&\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |v_h^+(t) - v_l^+(t)| \int_\Omega |v_h^+(t) - v_l^+(t)||(v_h^+(t) + v_l^+(t))|^2 e_l^+(t) : e_l^+(t)\, dx \\
&\leq C \sup_{x\in\overline{\Omega}} |v_h^+(t) - v_l^+(t)|.
\end{aligned}$$

with $C > 0$ independent of h and l. By (4.22) $Y_{h,l}(t) \to 0$ as $h, l \to 0$. By the Lebesgue's dominated convergence theorem, it follows that $Q_{h,l}(t) \to 0$ as $h, l \to 0$. □

Lemma 4.3.8 *For all* $t \in [0, T_f]$ *we have*

$$\begin{aligned}
\| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2 &\leq C\left(\int_0^t \| a_h^+(s)(e_h^+(s) - e_l^+(s)) \|_2\, ds + Q_{h,l}(t)\right) \\
&+ C\int_0^t \| p_h^+(s) - p_l^+(s) \|_2\, ds + C(h + l).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

with $C > 0$, *independent of* h *and* l.

Proof : We have $p_h^n - p_h^{n-1} = h\delta p_h^n$. Summation for $n = 1$ to N gives

$$p_h^N - p_0 = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_h^{n-1}}^{t_h^n} \delta p_h^n \, ds. \tag{4.24}$$

Let $t \in (t_h^{N-1}, t_h^N]$, then

$$p_h^+(t) - p_0 = \int_0^t \dot{p}_h(s)\, ds + R_h(t) \quad \text{with} \quad R_h(t) = \int_t^{t_h^N} \delta p_h^N \, ds,$$

$$\text{and } \| R_h(t) \|_2 \leq \int_t^{t_h^n} \| \delta p_h^N \|_2 \; ds \leq Ch. \tag{4.25}$$

In the same way we have for $t \in (t_l^{M-1}, t_l^M]$,

$$p_l^+(t) - p_0 = \int_0^t \dot{p}_l(s)\, ds + R_l(t) \quad \text{with} \quad R_l(t) = \int_t^{t_l^M} \delta p_l^M \, ds,$$

$$\text{and } \| R_l(t) \|_2 \leq \int_t^{t_l^m} \| \delta p_l^M \|_2 \; ds \leq Cl. \tag{4.26}$$

Let $t \in (0, T_f]$, and $m, n \geqslant 1$ such that $t \in (t_l^{m-1}, t_l^m] \cap (t_h^{n-1}, t_h^n]$. Then

$$p_h^+(t) - p_l^+(t) = \int_0^t \dot{p}_h(s) - \dot{p}_l(s)\, ds + R_h(t) - R_l(t) \tag{4.27}$$

and by the lemma 4.3.5 we deduce that

$$\| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2 \leq \int_0^t \| \dot{p}_h(s) - \dot{p}_l(s) \|_2 \; ds + C(h+l) \tag{4.28}$$

$$\leq \; C \int_0^t \| (\sigma_h^+(t) - Bp_h^+(t)) - (\sigma_l^+(t) - Bp_l^+(t)) \|_2 \; ds + C(h+l).$$

Further,

$$\begin{aligned} &\| (\sigma_h^+(t) - Bp_h^+(t)) - (\sigma_l^+(t) - Bp_l^+(t)) \|_2 \\ &\leq \; \| \sigma_h^+(t) - \sigma_l^+(t) \|_2 + C \| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2 \\ &\leq \; C \| a_h^+(t)(e_h^+(t) - e_l^+(t)) \|_2 + C \| e_l^+(t)(a_l^+(t) - a_h^+(t)) \|_2 \\ &+ \; C \| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2 \, . \end{aligned} \tag{4.29}$$

From (4.28) and (4.29) we obtain

$$\begin{aligned} \| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2 \; &\leq \; C \int_0^t \| a_h^+(s)(e_h^+(s) - e_l^+(s)) \|_2 \; ds \\ &+ \; C \int_0^t \| e_l^+(s)(a_l^+(s) - a_h^+(s)) \|_2 \; ds \\ &+ \; C \int_0^t \| p_h^+(s) - p_l^+(s) \|_2 \; ds + C(h+l). \end{aligned} \tag{4.30}$$

□

Proposition 4.3.9 *For all $t \in [0, T_f]$, $(u_h^+(t), e_h^+(t), p_h^+(t))$ is a Cauchy sequence in $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})$*

Proof : Let $t \in (0, T_f]$. Since $a_h^+(t) \geqslant \eta$ and

$$\begin{aligned} &a_h^+(t)(e_h^+(t) - e_l^+(t)) = a_h^+(t)e_h^+(t) - a_l^+(t)e_l^+(t) + e_l^+(t)(a_l^+(t) - a_h^+(t)) \\ &= \sigma_h^+(t) - \sigma_l^+(t) + e_l^+(t)(a_l^+(t) - a_h^+(t)), \end{aligned} \tag{4.31}$$

we estimate the difference $e_h^+(t) - e_l^+(t)$ as follows :

$$\begin{aligned} \eta\alpha_A \parallel e_h^+(t) - e_l^+(t) \parallel_2^2 &\leq \eta \int_\Omega A(e_h^+(t) - e_l^+(t)) : (e_h^+(t) - e_l^+(t))\, dx \\ &\leq \int_\Omega a_h^+(t) A(e_h^+(t) - e_l^+(t)) : (e_h^+(t) - e_l^+(t))\, dx. \\ &= \int_\Omega (\sigma_h^+(t) - \sigma_l^+(t)) : (e_h^+(t) - e_l^+(t))\, dx \\ &+ \int_\Omega (a_l^+(t) - a_h^+(t)) A e_l^+(t) : (e_h^+(t) - e_l^+(t))\, dx. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Applying the compatibility condition

$$E(u_h^+(t) - u_l^+(t)) = e_h^+(t) - e_l^+(t) + p_h^+(t) - p_l^+(t), \tag{4.33}$$

which leads to

$$\begin{aligned} \eta\alpha_A \parallel e_h^+(t) - e_l^+(t) \parallel_2^2 &\leq \int_\Omega (\sigma_h^+(t) - \sigma_l^+(t)) : E(u_h^+(t) - u_l^+(t))\, dx \\ &- \int_\Omega (\sigma_h^+(t) - \sigma_l^+(t)) : (p_h^+(t) - p_l^+(t))\, dx \\ &+ \int_\Omega A e_l^+(t)(a_l^+(t) - a_h^+(t)) : (e_h^+(t) - e_l^+(t))\, dx \\ &:= I_1 - I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Since $\mathrm{div}\sigma_h^+(t) = \mathrm{div}\sigma_l^+(t) = 0$ a.e in Ω, $u_h^+(t) - u_l^+(t) = w_h^+(t) - w_l^+(t)$ a.e. on $\partial\Omega_D$, and $\sigma_h^+(t).\vec{n} = \sigma_l^+(t).\vec{n} = 0$ a.e. on $\partial\Omega_N$, we have

$$I_1 = \int_\Omega (\sigma_h^+(t) - \sigma_l^+(t)) : E(w_h^+(t) - w_l^+(t))\, dx,$$

and we estimate thanks to Proposition 4.3.3,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \| \sigma_h^+(t) - \sigma_l^+(t) \|_2 \| E(w_h^+(t) - w_l^+(t)) \|_2 \\ &\leq C \| E(w_h^+(t) - w_l^+(t)) \|_2 \end{aligned}$$

Since $Ew \in H^1(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$, it is Hölder continuous with value in $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$. $(Ew_h^+)_h$ is a Cauchy sequence in $L^\infty(0, T_f; L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$, thus $\| E(w_h^+(t) - w_l^+(t)) \|_2 \leq \delta_{h,l}$ with $\delta_{h,l} \to 0$ as $h, l \to 0$. Further, we have

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega a_h^+(t) A(e_h^+(t) - e_l^+(t)) : (p_h^+(t) - p_l^+(t))\, dx \\ &\quad - \int_\Omega A e_l^+(t)(a_l^+(t) - a_h^+(t)) : (p_h^+(t) - p_l^+(t))\, dx \end{aligned}$$

Thus, we get using Proposition 4.3.3 and Lemma 4.3.8

$$\begin{aligned} &\eta \alpha_A \| e_h^+(t) - e_l^+(t) \|_2^2 \qquad (4.34) \\ &\leq \| \sigma_h^+(t) - \sigma_l^+(t) \|_2 \| E(w_h^+(t) - w_l^+(t)) \|_2 \\ &\quad + C \| e_h^+(t) - e_l^+(t) \|_2 \| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2 \\ &\quad + C \| e_l^+(t)(a_l^+(t) - a_h^+(t)) \|_2 \| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2 \\ &\quad + C \| e_l^+(t)(a_l^+(t) - a_h^+(t)) \|_2 \| e_h^+(t) - e_l^+(t) \|_2 \\ &\leq C \| E(w_h^+(t) - w_l^+(t)) \|_2 \\ &\quad + C Y_{h,l}(t)(\| e_h^+(t) - e_l^+(t) \|_2 + \| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2) \\ &\quad + C \| e_h^+(t) - e_l^+(t) \|_2 \int_0^t \| (e_h^+(s) - e_l^+(s)) \|_2 \, ds \\ &\quad + C \| e_h^+(t) - e_l^+(t) \|_2 \int_0^t \| p_h^+(s) - p_l^+(s) \|_2 \, ds \\ &\quad + C \| e_h^+(t) - e_l^+(t) \|_2 (Q_{h,l}(t) + (h + l)) \qquad (4.35) \end{aligned}$$

On the other hand, using the lemma 4.3.8 again leads to the estimate

$$\begin{aligned} \| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2^2 \leq C \| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2 \Bigg(&\int_0^t \| (e_h^+(s) - e_l^+(s)) \|_2 \, ds \\ &+ Q_{h,l}(t) + (h + l) + \int_0^t \| p_h^+(s) - p_l^+(s) \|_2 \, ds \Bigg). \quad (4.36) \end{aligned}$$

Set

$$X_{h,l}(t) = \| p_h^+(t) - p_l^+(t) \|_2 + \| e_h^+(t) - e_l^+(t) \|_2 .$$

Adding (4.35) and (4.36) yields

$$\begin{aligned}
&\eta\alpha_A \parallel e_h^+(t) - e_l^+(t) \parallel_2^2 + \parallel p_h^+(t) - p_l^+(t) \parallel_2^2 \\
&\leq CX_{h,l}(t)\left(\int_0^t X_{h,l}(s)\,ds + Y_{h,l}(t) + Q_{h,l}(t) + h + l\right) \\
&+ C \parallel E(w_h^+(t) - w_l^+(t)) \parallel_2 .
\end{aligned}$$

The Cauchy inequality $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ leads to

$$\begin{aligned}
X_{h,l}(t)^2 &\leq CX_{h,l}(t)\left(\int_0^t X_{h,l}(s)\,ds + Y_{h,l}(t) + Q_{h,l}(t) + h + l\right) \\
&+ C \parallel E(w_h^+(t) - w_l^+(t)) \parallel_2 .
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Let $(X_{h,l}^1(t))$ denotes the subsequence of $(X_{h,l}(t))$ such that for every h, l we have $(X_{h,l}^1(t))^2 \leq 2C \parallel E(w_h^+(t) - w_l^+(t)) \parallel_2$. The last inequality shows that $X_{h,l}^1(t) \longrightarrow 0$ converges to 0 as $h, l \to 0$. Let $(X_{h,l}^2(t))$ the subsequence of $(X_{h,l}(t))$ such that for every h, l we have

$$\left(X_{h,l}^2(t)\right)^2 > 2C \parallel E(w_h^+(t) - w_l^+(t)) \parallel_2 .$$

In this case, we deduce from (4.37) that

$$\begin{aligned}
&\parallel p_h^+(t) - p_l^+(t) \parallel_2 + \parallel e_h^+(t) - e_l^+(t) \parallel_2 \leq \\
&\leq C\int_0^t \parallel (e_h^+(s) - e_l^+(s)) \parallel_2 + \parallel p_h^+(s) - p_l^+(s) \parallel_2 \; ds \\
&+ C(Y_{h,l}(t) + Q_{h,l}(t) + h + l)
\end{aligned}$$

for some constant $C > 0$ independent on h, l, t. Applying the Gronwall's inequality leads to

$$\begin{aligned}
\parallel p_h^+(t) - p_l^+(t) \parallel_2 &+ \parallel e_h^+(t) - e_l^+(t) \parallel_2 \\
&\leq C\,(Y_{h,l}(t) + Q_{h,l}(t) + h + l)\,e^{CT_f}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

From (4.38) and Lemma 4.3.7 we deduce that $X_{h,l}^2(t) \longrightarrow 0$ as $h, l \to 0$. So that in fact the whole sequence $X_{h,l}(t) \longrightarrow 0$ converges to 0 as $h, l \to 0$. Finally we conclude that for fixed $t \in [0, T_f]$, $(u_h^+(t), e_h^+(t), p_h^+(t))_h$ is a Cauchy sequence in $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$. □

Proposition 4.3.10 *There exists a function $t \to (u(t), e(t), p(t))$, such that for all $t \in [0, T_f]$ the next results hold :*

$$\begin{aligned}
&(u(t), e(t), p(t)) \in A_{adm}(w(t)), \\
&u_h^+(t) \to u(t) \quad \textit{strongly in}\, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \\
&e_h^+(t) \to e(t) \quad \textit{strongly in}\, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}), \\
&p_h^+(t) \to p(t) \quad \textit{strongly in}\, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}), \\
&p_h(t) \to p(t) \quad \textit{strongly in}\, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}).
\end{aligned}$$

Furthermore, for a.e. $t \in [0, T_f]$

$$\dot{p}_h(t) \to \dot{p}(t) \quad \textit{strongly in}\, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}).$$

and

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)),\\ &e \in L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})),\\ &p \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})). \end{aligned}$$

Proof : Let $t \in [0, T_f]$. By Proposition 4.3.9 there exist $u(t) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $e(t) \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$, and $p(t) \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ such that for all $t \in [0, T_f]$ the next convergence results hold :

$$u_h^+(t) \to u(t) \quad \text{strongly in}\, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \tag{4.39}$$

$$e_h^+(t) \to e(t) \quad \text{strongly in}\, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}), \tag{4.40}$$

$$p_h^+(t) \to p(t) \quad \text{strongly in}\, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}). \tag{4.41}$$

By the compatibility condition we have for all $t \in [0, T_f]$,

$$Eu_h^+(t) = e_h^+(t) + p_h^+(t) \quad \text{and} \quad u_h^+(t) = w_h^+(t) \text{ on } \partial\Omega_D \, a.e. \, \text{in}\, \Omega.$$

The convergence results (4.39)-(4.41) imply that

$$(u(t), e(t), p(t)) \in A_{adm}(w(t)), \quad \text{for all } t \in [0, T_f].$$

On the other hand, for all $t \in (0, T_f]$,

$$\| \, p_h(t) - p_h^+(t) \, \|_2 \leq h \, \| \, \dot{p}_h(t) \, \|_2 \, . \tag{4.42}$$

Since $\dot{p}_h(t)$ is uniformly bounded in $L^2(\Omega)$, $p_h(0) = p_h^+(0) = p_0$, we deduce from (4.41) and (4.42) that for all $t \in [0, T_f]$,

$$p_h(t) \to p(t) \quad \text{strongly in}\, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}). \tag{4.43}$$

From Lemma 4.3.5 and (4.29), we deduce that

$$\| \, \dot{p}_h(t) - \dot{p}_l(t) \, \|_2 \leq \| \, a_h^+(t)(e_h^+(t) - e_l^+(t)) \, \|_2 + Y_{h,l}(t) + C \, \| \, p_h^+(t) - p_l^+(t) \, \|_2 \, .$$

Combining this last inequality, Lemma 4.3.7, and Proposition 4.3.9 we have that for all $t \in (0, T_f]$, $(\dot{p}_h(t))_h$ is a Cauchy sequence in $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$. As a consequence, there is a function $\zeta(t) \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ such that

$$\dot{p}_h(t) \to \zeta(t) \quad \text{strongly in}\, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}). \tag{4.44}$$

Due to the a priori estimate of Proposition 4.3.3

$$\sup_{(0,T_f]} \| \dot{p}_h(t) \|_{L^2} \leq C. \tag{4.45}$$

Thanks to the previous convergence result (4.44) we have

$$\sup_{(0,T_f]} \| \zeta(t) \|_{L^2} \leq C, \quad \text{and} \quad \zeta \in L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})). \tag{4.46}$$

From Proposition 4.3.3 we also deduce that

$$\|p_h\|_{W^{1,\infty}(0,T_f,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))} \leq C, \tag{4.47}$$

so that up to a subsequence, there exists $\hat{p} \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$ such that

$$p_h, \dot{p}_h \rightharpoonup \hat{p},\, \dot{\hat{p}} \quad \text{weakly* in} \quad L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})). \tag{4.48}$$

Then, by the Arzelà-Ascoli Theorem $p_h(t) \rightharpoonup \hat{p}(t)$ weakly in $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ for all $t \in [0, T_f]$. It follows from (4.43) that for all $t \in [0, T_f]$, $p(t) = \hat{p}(t)$, and

$$p \in W^{1,\infty}(0, T_f; L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})). \tag{4.49}$$

Since $\dot{p_h}(t) \to \zeta(t)$ strongly in $L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$ for all $t \in (0, T_f]$, by the Lebesgue dominated convergence theorem and Proposition 4.3.3 we deduce that

$$\dot{p}_h \rightharpoonup \zeta \quad \text{weakly* in} \quad L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})). \tag{4.50}$$

The convergence results (4.48), (4.49) and (4.50) lead to $\dot{p} = \zeta$ a.e. in $[0, T_f] \times \Omega$ which implies due to (4.44) that for a.e. $t \in [0, T_f]$

$$\dot{p}_h(t) \to \dot{p}(t) \quad \text{strongly in } L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}). \tag{4.51}$$

Furthermore, by the a priori estimates of Proposition 4.3.3 we have

$$\sup_{[0,T_f]} \| u_h^+(t) \|_{H^1} \leq C, \ \sup_{[0,T_f]} \| e_h^+(t) \|_{L^2} \leq C,$$

for some constant $C > 0$ independent on h. Thanks to the convergence (4.39)-(4.41),

$$\sup_{[0,T_f]} \| u(t) \|_{H^1} \leq C, \ \sup_{[0,T_f]} \| e(t) \|_{L^2} \leq C.$$

We conclude that

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(0, T_f, H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)), \\ &e \in L^\infty(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})), \\ &p \in W^{1,\infty}(0, T_f, L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})). \end{aligned}$$

□

4.3.4 The proof of Theorem 4.2.1

Let $t \in (0, T_f]$. The convergence result (4.40) and Proposition 4.3.6 imply that

$$\sigma_h^+(t) \to \sigma(t) \quad \text{strongly in } L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}), \tag{4.52}$$

with $\sigma(t) = (v^2(t) + \eta)Ae(t)$. Since $-\text{div}\,\sigma_h^+(t) = 0$ a.e. in Ω,

$$-\text{div}\,\sigma(t) = 0 \ a.e. \text{ in } \Omega.$$

We rewrite the discrete plastic flow rule as follows :

$$\begin{aligned} \tau \int_\Omega |q| dx \ \geq \ & \tau \int_\Omega |\dot{p}_h(t)| dx + \\ & + \int_\Omega \left(\sigma_h^+(t) - Bp_h^+(t) - \beta \dot{p}_h(t)\right) : (q - \dot{p}_h(t))\, dx. \end{aligned} \tag{4.53}$$

By the convergence results (4.41), (4.51), (4.52) we obtain for a.e $t \in [0, T_f]$

$$\begin{aligned} \tau \int_\Omega |q| dx \ \geq \ & \tau \int_\Omega |\dot{p}(t)| dx + \\ & + \int_\Omega (\sigma(t) - Bp(t) - \beta \dot{p}(t)) : (q - \dot{p}(t))\, dx, \end{aligned} \tag{4.54}$$

which implies

$$\sigma(t) - Bp(t) - \beta \dot{p}(t) \in \partial H(\dot{p}(t)) \quad \text{for } a.e. \quad x \in \Omega.$$

We now pass to the limit in the crack propagation condition. A similar treatement was used in [37] and [6]. We rewrite the problem (4.2) as follows : for every $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$, $\varphi \leq v_h^{n-1}$, $\varphi = 1$ on $\partial\Omega_D$ we have

$$\mathcal{E}_{el}(e_h^+(t), v_h^+(t)) + \mathcal{E}_S^r(v_h^+(t)) \leq \mathcal{E}_{el}(e_h^+(t), \varphi) + \mathcal{E}_S^r(\varphi) \tag{4.55}$$

Let $v \in W^{1,r}(\Omega)$, $v = 1$ on $\partial\Omega_D$, with $v \leq v(t)$ in Ω. We define

$$v_h^*(t) := \min(v, v_h^+(t)).$$

By definition $v_h^*(t) \in W^{1,r}(\Omega)$ and $v_h^*(t) \leq v_h^+(t) \leq v_h^{n-1}$ and $v_h^*(t) = 1$ on $\partial\Omega_D$, so that $v_h^*(t)$ is an admissible test function for the problem (4.55). We obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega \left(v_h^+(t)^2 + \eta\right) Ae_h^+(t) : e_h^+(t)\, dx \\ & + \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r} |\nabla v_h^+(t)|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon} \left(1 - v_h^+(t)\right)^r dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \left(v_h^*(t)^2 + \eta\right) Ae_h^+(t) : e_h^+(t)\, dx \\ & + \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r} |\nabla v_h^*(t)|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon} \left(1 - v_h^*(t)\right)^r dx. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Set $A_h := \{x \in \Omega;\, v(x) \leq v_h^+(t,x)\}$. As $v_h^+(t) \rightharpoonup v(t)$ weakly in $W^{1,r}(\Omega)$; $1_{A_h} \to 1$, and $1_{A_h^c} \to 0$ pointwise in Ω. As a consequence, by the Lebesque Dominated Convergence Theorem we get

$$\int_\Omega 1_{A_h^c}(x)\,dx \to 0. \tag{4.57}$$

We now prove that $1_{A_h}\nabla v_h^+(t) \rightharpoonup \nabla v(t)$ weakly in $L^r(\Omega)$. Let $q \in L^{r/(r-1)}(\Omega)$. Since $v_h^+(t) \rightharpoonup v(t)$ weakly in $W^{1,r}(\Omega)$, we have

$$\int_\Omega \nabla v_h^+(t) q\,dx = \int_{A_h} \nabla v_h^+(t) q\,dx + \int_{A_h^c} \nabla v_h^+(t) q\,dx \to \int_\Omega \nabla v(t) q\,dx. \tag{4.58}$$

By the Lebesque dominated convergence

$$\int_{A_h^c} \nabla v_h^+(t) q\,dx = \int_\Omega 1_{A_h^c} \nabla v_h^+(t) q\,dx \to 0,$$

which, using (4.58) yields

$$\int_\Omega 1_{A_h} \nabla v_h^+(t) q\,dx = \int_{A_h} \nabla v_h^+(t) q\,dx \to \int_\Omega \nabla v(t) q\,dx.$$

By lower semicontinuity,

$$\liminf_{h\to 0} \int_{A_h} |\nabla v_h^+(t)|^r\,dx = \liminf_{h\to 0} \int_\Omega |1_{A_h}\nabla v_h^+(t)|^r\,dx \geqslant \int_\Omega |\nabla v(t)|^r\,dx. \tag{4.59}$$

Using the same arguments, we also prove that $v_h^*(t) \rightharpoonup v$ weakly in $W^{1,r}(\Omega)$. The Sobolev Imbedding theorem implies that, $v_h^*(t) \to v$ strongly in $C^0(\overline{\Omega})$, using Proposition 4.3.6 and (4.40) we show that as $h \to 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega \left(v_h^+(t)^2 + \eta\right) Ae_h^+(t) : e_h^+(t)\,dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v(t)^2 + \eta\right) Ae(t) : e(t)\,dx,\\
&\frac{1}{2}\int_\Omega \left(v_h^*(t)^2 + \eta\right) Ae_h^+(t) : e_h^+(t)\,dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v^2 + \eta\right) Ae(t) : e(t)\,dx,\\
&\int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}\left(1 - v_h^+(t)\right)^r\,dx \to \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}\left(1 - v(t)\right)^r\,dx,\\
&\int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}\left(1 - v_h^*(t)\right)^r\,dx \to \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}\left(1 - v\right)^r\,dx,\\
&\int_{A_h} \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v|^r dx \to \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v|^r\,dx.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

The definition of $v_h^*(t)$ gives

$$\int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v_h^*(t)|^r\,dx = \int_{A_h} \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v|^r\,dx + \int_{A_h^c} \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v_h^+(t)|^r\,dx$$

From (4.56), we obtain

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v_h^+(t)^2+\eta\right) Ae_h^+(t) : e_h^+(t)\,dx \\
+ & \int_{A_h} \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v_h^+(t)|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}\left(1-v_h^+(t)\right)^r\,dx. \\
\leq & \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v_h^*(t)^2+\eta\right) Ae_h^+(t) : e_h^+(t)\,dx \\
+ & \int_{A_h} \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}\left(1-v_h^*(t)\right)^r\,dx. \qquad (4.61)
\end{aligned}$$

The previous convergence results (4.59), (4.60), and the last inequality yield to

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v(t)^2+\eta\right) Ae(t) : e(t)\,dx \\
+ & \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v(t)|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}\left(1-v(t)\right)^r\,dx. \\
\leq & \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v^2+\eta\right) Ae(t) : e(t)\,dx \\
+ & \int_\Omega \frac{\varepsilon^{r-1}}{r}|\nabla v|^r dx + \int_\Omega \frac{\alpha}{r'\varepsilon}\left(1-v\right)^r\,dx. \qquad (4.62)
\end{aligned}$$

for all $v \in W^{1,r}(\Omega)$, $v = 1$ on $\partial\Omega_D$, with $v \leq v(t)$ in Ω, which completes the proof. □

Remark 2 *The existence result is also true for $B = 0$ (i.e. without hardening).*

4.4 Conclusion

In this chapter, we studied an elasto-viscoplastic continuous evolution with kinematic hardening and fracture. We proved an existence result of an evolution to the proposed model via a study of a discrete time evolutions obtained by solving incremental variational problems.

Chapitre 5

Etude numérique 1D et 2D des modèles 1, 2 et 3

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous implémentons les évolutions des modèles 1,2 et 3. Nous approchons les évolutions continues via les évolutions semi-discrètes en temps qui sont les solutions de minimisation d'une énergie discrète. Même si une telle solution existe à chaque pas de temps, elle est caractérisée par un système d'une équation et de deux inéquations variationnelles. Un tel système est difficile à implémenter.

Pour cela, nous proposons un algorithme basé sur la minimisation alternée d'une énergie discrétisée en espace à chaque pas de temps. Le problème d'une telle approche est que nous ne pouvons pas assurer qu'un tel algorithme converge vers un minimum global de l'énergie. Nous complétons alors cet algorithme par une étape appelée backtracking qui impose une condition supplémentaire aux états discrétisés liée au fait que l'état trouvé au temps t_n est aussi admissible aux pas de temps antérieurs, une fois convenablement remis à l'échelle. Cette étape de backtracking a été proposée par B. Bourdin [11] dans le cadre des matériaux élastiques avec la rupture.

Nous étendons cette idée aux matériaux à mémoire contenant la plasticité, la viscosité, la viscoplasticité et l'écrouissage cinématique pour des chargements monotones. Tout d'abord, nous présentons l'étude numérique des modèles 1-3 sur un cas simple, celui de la traction d'une barre 1D et montrons les différents types d'évolution des modèles en fonction des paramètres mécaniques choisis. Ensuite, nous implémentons le modèle 3 dans le cadre d'une barre 2D et de l'expérience de Peltzer et Tapponnier.

5.2 Préliminaires mathématiques et numériques

Les deux propositions suivantes vont nous servir à calculer localement la déformation plastique p. Nous rappelons que l'ensemble des matrices symétriques 2×2 est noté $\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$. Pour $\xi, \zeta \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ nous définissons le produit scalaire entre les matrices $\zeta : \xi := \sum_{ij} \zeta_{ij}\xi_{ij}$, et la norme matricielle associée $|\xi| := \sqrt{\xi : \xi}$.

Proposition 5.2.1 *Soit $Y \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}$, $a \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}$, $\tau > 0$, $C > 0$ et D satisfaisant la condition suivante avec $\alpha > 0$:*

$$\forall\, e \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}, \quad \alpha|e|^2 \leq De : e$$

Soit X^* la solution du problème :

$$\min_{X\in\mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}} \left(\frac{1}{2}D(X-a) : (X-a) - (X-a) : Y + \tau|X-a| + C\right) \tag{5.1}$$

alors

$$|Y| \leq \tau \Leftrightarrow X^* = a$$

Preuve : Considérons $f(x, Y) = \dfrac{1}{2}D(x-a) : (x-a) - (x-a) : Y + \tau|x-a| + C$. Supposons que $|Y| \leq \tau$. Alors pour tout $x \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$, l'inégalité $f(x, Y) \geq f(a, Y)$ est vérifiée, car

$$\begin{aligned} f(x,Y) - f(a,Y) &= \frac{1}{2}D(x-a) : (x-a) - (x-a) : Y + \tau|x-a| \\ &\geq \frac{\alpha}{2}|x-a|^2 - |Y||x-a| + \tau|x-a| \\ &\geqslant (\tau - |Y|)|x-a| \geqslant 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on obtient $X^* = a$. Inversement, soit X^* la solution du problème (5.1). Alors $f(X^*, Y) \leq f(X^* + tz, Y)$ pour tout $z \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$, et $t \in]0, 1[$. Nous obtenons alors

$$\tau|X^* - a + z| - \tau|X^* - a| + D(X^* - a) : z - z : Y \geq 0$$

Si $X^* = a$ alors $\tau|z| \geq z : Y$ pour tout $z \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ et particulièrement pour $z = Y$ et donc $|Y| \leq \tau$. □

La formulation de la proposition 5.2.1 permet de caractériser la solution X^* en 1D.

Proposition 5.2.2 ***(Cas 1D)*** *Soit $Y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $D > 0, \tau > 0$, $C > 0$. Soit*

$$X^* := \underset{X \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{1}{2} D(X-a)^2 - (X-a)Y + \tau |X-a| + C \right) \tag{5.2}$$

Si $X^* \neq a$ alors

$$X^* - a = \frac{1}{D} \frac{Y}{|Y|} (|Y| - \tau) = \frac{1}{D} Y - \frac{\tau}{D} \frac{Y}{|Y|}.$$

Preuve : Supposons que $X^* \neq a$, $(|Y| > \tau)$. Alors $|. - a|$ est différentiable en X^* et nous dérivons l'équation d'Euler-Lagrange associée :

$$D(X^* - a) - Y + \tau \frac{(X^* - a)}{|X^* - a|} = 0$$

Nous pouvons écrire Y comme une fonction de X^* :

$$Y = (X^* - a) \left(D + \frac{\tau}{|X^* - a|} \right). \tag{5.3}$$

Il s'ensuit que

$$|Y| = |X^* - a| \left(D + \frac{\tau}{|X^* - a|} \right) = |X^* - a| D + \tau,$$

et donc nous insérons la relation $|X^* - a| = \dfrac{|Y| - \tau}{D}$ dans (5.3) pour obtenir la relation desirée pour $X^* - a$. □

5.3 Evolution semi-discrète en temps pour les modèles 1,2 et 3

Nous approchons les évolutions continues en temps des modèles construits par les évolutions semi-discrètes en temps obtenues résolvant les problèmes variationnels incrémentaux. Nous décrivons l'évolution semi-discrète du matériau comme suit : nous considérons une partition de l'intervalle $[0, T_f]$ en N_f sous-intervalles de même longueur h,

$$0 = t_h^0 < t_h^1 < ... < t_h^n < ... < t_h^{N_f} = T_f, \quad \text{avec} \quad h = \frac{T_f}{N_f} = t_h^n - t_h^{n-1} \to 0.$$

Nous définissons

$$\mathcal{B}(t_h^n) \quad := \quad \left\{ (z,q,\varphi) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega); \begin{array}{lll} z = w_h^n, & \text{sur} & \partial\Omega_D, \\ \varphi = 1, & \text{sur} & \partial\Omega_D, \\ \varphi \leq v_h^{n-1}, & \text{dans} & \Omega. \end{array} \right\}.$$

Supposons pour $n \geqslant 1$, que la solution approchée $(u_h^{n-1}, v_h^{n-1}, p_h^{n-1}) \in \mathcal{B}(t_h^{n-1})$ est connue au temps t_h^{n-1}. Nous cherchons une solution approchée (u_h^n, v_h^n, p_h^n) au temps t_h^n comme une solution du problème variationnel suivant :

$$\min_{(z,q,\varphi)\in\mathcal{B}(t_h^n)} \mathcal{E}_{totale}(z,q,\varphi,u_h^{n-1},v_h^{n-1},p_h^{n-1}), \tag{5.4}$$

où, pour chaque modèle, $\mathcal{E}_{totale}$ est définie comme suit :

1. Modèle 1 : Elasto-plasticité, viscoelasticité et rupture :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^1_{totale}(z,q,\varphi,u_h^{n-1},v_h^{n-1},p_h^{n-1}) & = & \mathcal{E}_{el}(\varphi, E(z)-q) + \mathcal{E}_p(q,p_h^{n-1}) \\ & + & \mathcal{E}_{ve}(z,u_h^{n-1}) + \mathcal{E}_S(\varphi). \end{array}$$

2. Modèle 2 : Elasto-plasticité, viscoplasticité et rupture :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^2_{totale}(z,q,\varphi,u_h^{n-1},v_h^{n-1},p_h^{n-1}) & = & \mathcal{E}_{el}(\varphi, E(z)-q) + \mathcal{E}_p(q,p_h^{n-1}) \\ & + & \mathcal{E}_{vp}(q,p_h^{n-1}) + \mathcal{E}_S(\varphi). \end{array}$$

3. Modèle 3 : Elasto-plasticité, écrouissage cinématique et rupture :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^3_{totale}(z,q,\varphi,u_h^{n-1},v_h^{n-1},p_h^{n-1}) & = & \mathcal{E}_{el}(\varphi, E(z)-q) + \mathcal{E}_p(q,p_h^{n-1}) \\ & + & \mathcal{E}_{KH}(q) + \mathcal{E}_S(\varphi). \end{array}$$

Rappelons que les énergies $\mathcal{E}_{el}$, $\mathcal{E}_{ve}$, $\mathcal{E}_p$, $\mathcal{E}_{vp}$, $\mathcal{E}_{KH}$ et $\mathcal{E}_S$ ont été définies au chapitre 3, section 3.2.1 et au chapitre 4, section 4.2.1. Nous pouvons prouver que pour $i = 1, 2, 3$ le problème variationnel

$$\min_{(z,q,\varphi)\in\mathcal{B}(t_h^n)} \mathcal{E}^i_{total}(z,q,\varphi,u_h^{n-1},v_h^{n-1},p_h^{n-1}). \tag{5.5}$$

admet au moins une solution. Si $(z_n, q_n, \varphi_n)_n$ est une suite minimisante, nous pouvons vérifier que $\| z_n \|_{H^1}$, $\| q_n \|_{L^2}$, $\| \varphi_n \|_{H^1}$ sont uniformément bornées, et donc une sous-suite converge faiblement vers un triplet (z, q, φ). La seule difficulté dans le passage à la limite dans $\mathcal{E}_{totale}$ vient du terme

$$\int_\Omega \varphi_n^2 A(Ez_n - q_n) : (Ez_n - q_n)\, dx,$$

lequel peut être réécrit

$$\int_\Omega A\varphi_n(Ez_n - q_n) : \varphi_n(Ez_n - q_n)\, dx,$$

et comme

$$\begin{array}{lll} Ez_n \rightharpoonup Ez & \text{faiblement dans} & L^2, \\ \varphi_n \rightharpoonup \varphi & \text{faiblement dans} & H^1,\ 0 \leq \varphi_n,\ \varphi \leq 1, \\ q_n \rightharpoonup q & \text{faiblement dans} & L^2, \end{array}$$

on a

$$\varphi_n(Ez_n - q_n) \rightharpoonup \varphi(Ez - q) \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2.$$

Notons aussi que $\mathcal{E}_{totale}$ n'est pas convexe à cause du terme $\varphi^2(E(z)-q)$: $(E(z) - q)$ dans l'énergie élastique. Donc le problème (5.5) peut avoir plusieurs solutions.

5.4 Un algorithme de minimisation alternée et backtracking pour les matériaux avec mémoire

Une solution (u_h^n, v_h^n, p_h^n) du problème (5.5) est caracterisée par un système d'une égalité et de deux inégalités variationnelles. Un tel système n'est pas facile à résoudre numériquement. Pour cette raison, nous proposons de résoudre le problème (5.5) à chaque pas de temps t_h^n en utilisant un algorithme de minimisation alternée. L'avantage de cette approche est que le problème (5.5) est séparement strictement convexe en chaque variable.

5.4.1 Un algorithme de minimisation alternée

En pratique, ce n'est pas exactement les problèmes variationnels que nous résolvons dans la procédure alternée, mais nous résolvons les équations d'optimalité des problèmes qui ont été discrétisés aussi en espace. Cela peut introduire les minima locaux comme illustre l'exemple suivant de la traction d'une barre 1D. Supposons que $u, v \in W^{1,\infty}(0, T_f, \Omega)$ représentent le déplacement et le traceur de rupture de la barre 1D définie par $\Omega = (0, L)$. (u_h^n, v_h^n) sont approchés en espace par des éléments finis P1. Nous considérons un modèle

Algorithme 1 Algorithme de minimisation alternée

Soient $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ des paramètres de tolérance fixés.

1. Soit $m = 0$, $v^n_{(m=0)} = v^{n-1}_h$
2. **itérer**
3. Trouver $(u^n_{(m)}, p^n_{(m)}) := \text{argmin}_{(u,p)} \mathcal{E}_{totale}(u, p, v^n_{(m-1)})$
4. Soit $l = 0$, $p^n_{(l=0)} = p^{n-1}_h$
5. **itérer**
6. $u^n_{(l)} := \text{argmin}_u \mathcal{E}_{totale}(u, p^n_{(l-1)}, v^n_{(m-1)})$
7. $p^n_{(l)} := \text{argmin}_p \mathcal{E}_{totale}(u^n_{(l)}, p, v^n_{(m-1)})$
8. **jusqu'à** $\| u^n_{(l)} - u^n_{(l-1)} \|_{H^1} \leq \delta_1$
9. Nous définissons $u^n_{(m)} := u^n_{(l)}$ et $p^n_{(m)} := p^n_{(l)}$ à convergence
10. Soit $v^n_{(m)} := \text{argmin}_v E_{totale}(u^n_{(m)}, p^n_{(m)}, v)$
11. **jusqu'à** $\| v^n_{(m)} - v^n_{(m-1)} \|_{H^1} \leq \delta_2$
12. Nous définissons $u^n_h := u^n_{(m)}$, $p^n_h := p^n_{(m)}$ et $v^n_h := v^n_{(m)}$ à convergence

simple d'évolution avec l'élasticité et la rupture seulement où l'énergie totale s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{totale}(u, v) &= \mathcal{E}_{el}(v, u') + \mathcal{E}_S(v) \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega (v^2 + \eta) \mathcal{K} (u')^2 \, dx + \int_\Omega \varepsilon (v')^2 + \frac{(1-v)^2}{4\varepsilon} \, dx, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{K} > 0$ est le module de Young fixé et où u', v' désignent les dérivées de u, v par rapport à x (variable d'espace). La barre n'a pas de fracture à $t = 0$ et donc $v(x, 0) = 1$. Elle est fixée à $x = 0$, tandis qu'une traction uniforme $u(L, t) = tL$ est appliquée à l'autre extremité. Lorsque la valeur de u' est proche d'une constante au temps t, plus précisement $u'(x, t) \sim t$, alors la condition d'optimalité d'Euler-Lagrange de la minimisation de l'énergie totale par rapport à v mène à

$$v'' - \left(\frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{\mathcal{K} t^2}{2\varepsilon} \right) v + \frac{1}{4\varepsilon^2} = 0,$$

dont la solution est

$$v(x, t) = C_1 e^{-\frac{x\sqrt{2}\sqrt{4\mathcal{K}t^2\varepsilon + 2}}{4\varepsilon}} + C_2 e^{\frac{x\sqrt{2}\sqrt{4\mathcal{K}t^2\varepsilon + 2}}{4\varepsilon}},$$

avec

$$C_1 := \frac{e^{\frac{L\sqrt{2}\sqrt{4\mathcal{K}t^2\varepsilon+2}}{4\varepsilon}} - 1}{(2\mathcal{K}t^2\varepsilon+1)\left(e^{-\frac{L\sqrt{2}\sqrt{4\mathcal{K}t^2\varepsilon+2}}{4\varepsilon}} - e^{\frac{L\sqrt{2}\sqrt{4\mathcal{K}t^2\varepsilon+2}}{4\varepsilon}}\right)},$$

et

$$C_2 := \frac{e^{-\frac{L\sqrt{2}\sqrt{4\mathcal{K}t^2\varepsilon+2}}{4\varepsilon}} - 1}{(2\mathcal{K}t^2\varepsilon+1)\left(e^{-\frac{L\sqrt{2}\sqrt{4\mathcal{K}t^2\varepsilon+2}}{4\varepsilon}} - e^{\frac{L\sqrt{2}\sqrt{4\mathcal{K}t^2\varepsilon+2}}{4\varepsilon}}\right)}.$$

Nous obtenons ces profils lors de l'implémentation en accord avec l'algorithme décrit ci-dessus jusqu'au moment où t atteint une valeur suffisamment grande pour que le terme $\int_\Omega (v^2+\eta)\mathcal{K}(u')^2\,dx$ domine $\int_\Omega \frac{(1-v)^2}{4\varepsilon}\,dx$ dans l'énergie totale, voir Figures 5.1, 5.2, 5.3 (nous utilisons les mêmes paramètres que [15]). Notons que, due à la présence des exponentielles dans l'expression de v, ces profils varient, de manière significative seulement au voisinage des extrémités $x = 0$ et $x = L$, et sont pratiquement constants ailleurs, et pour cela ne correspondent pas à l'image de la rupture généralisée comme montré à la Figure 2.1. En plus, les u, v correspondants sont seulement les minima locaux (voire les points critiques), et on peut trouver des états d'énergie totale inférieure Figure 5.4. Notons que choisissant ε plus petit n'améliore pas la situation. Cette obstacle a été observé par Bourdin [11], [12], qui a suggéré de compléter l'algorithme numérique avec une étape supplémentaire appelée backtracking. Après chaque itération en temps, nous imposons une condition supplémentaire, sur les minima globaux, dérivée de la définition (5.4) de l'évolution semi-discrète en temps. Nous étendons cette idée dans le contexte de nos modèles, où en plus la plasticité et dissipation visqueuse peuvent aussi apparaître.

5.4.2 Backtracking

Comme le chargement est monotone, si (u_h^n, p_h^n, v_h^n) est une solution de (5.4) au temps t_h^n, alors $(\frac{t_h^j}{t_h^n}u_h^n, \frac{t_h^j}{t_h^n}p_h^n, v_h^n))$ est un triplet admissible au temps $t_h^j \le t_h^n$. Et donc, nous devrions avoir l'inégalité

$$\mathcal{E}_{totale}(u_h^j, p_h^j, v_h^j) \le \mathcal{E}_{totale}(\frac{t_h^j}{t_h^n}u_h^n, \frac{t_h^j}{t_h^n}p_h^n, v_h^n). \tag{5.6}$$

Numériquement nous vérifions cette condition pour tout $t_h^j \le t_h^n$. S'il existe un j tel que cette condition n'est pas vérifiée, (u_h^j, p_h^j, v_h^j) ne peut pas être un

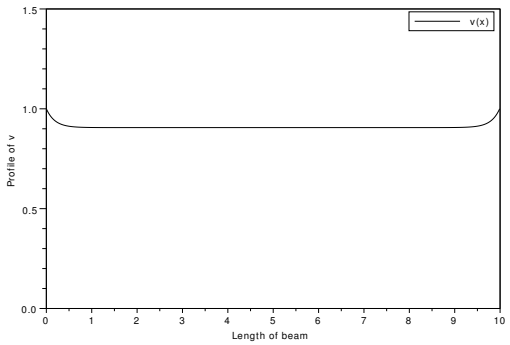

FIGURE 5.1 – Profil de $v(t,.)$ lors d'une évolution élastique avec la rupture au temps $t = 4$.

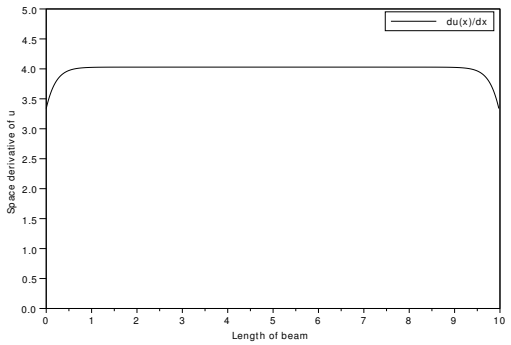

FIGURE 5.2 – Profil de $u'(t,.)$ lors d'une évolution élastique avec la rupture au temps $t = 4$.

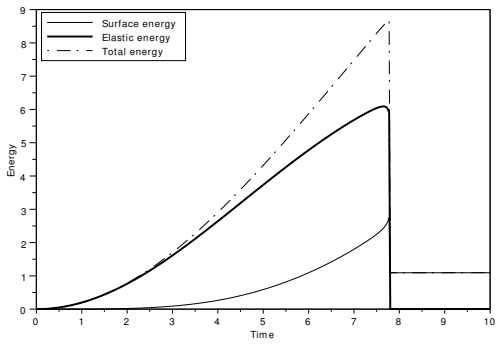

FIGURE 5.3 – Evolution de l'énergie totale, élastique et de rupture durant l'expérience de traction 1D sans backtracking

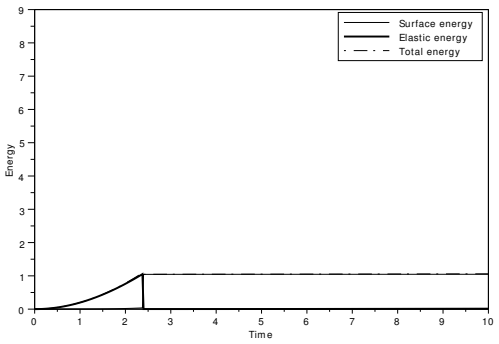

FIGURE 5.4 – Evolution de l'énergie totale, élastique et de rupture durant l'expérience de traction 1D avec backtracking

minimiseur global au temps t_h^j, et nous revenons dans les calculs numériques au temps t_h^j en recalculant (u_h^j, p_h^j, v_h^j) avec l'algorithme de minimisation alternée et avec les conditions initiales $v_{(m=0)}^j = v_h^n$ et $p_{(l=0)}^j = p_h^{j-1}$. Nous présentons le schéma de l'algorithme 1 avec Backtracking ci-dessous pour le modèle 1 seulement. Le calcul reste vrai pour les modèles 2 et 3.

Algorithme 2 Algorithme 1 avec backtracking pour Modèle 1

Soit $\delta_3 > 0$ un paramètre de tolérance fixé.

1. $n = 1$
2. **itérer**
3. Calculer (u_h^n, p_h^n, v_h^n) avec **Algorithme 1**.
4. Calculer les énergies $\mathcal{E}_{el}(v_h^n, E(u_h^n) - p_h^n)$, $\mathcal{E}_{ve}(u_h^n, u_h^{n-1})$, $\mathcal{E}_p(p_h^n, p_h^{n-1})$, $\mathcal{E}_S(v_h^n)$.
5. **for** $j = 1$ **to** $j = n - 1$
6. **if** $\mathcal{E}_{totale}(u_h^j, v_h^j, p_h^j, u_h^{j-1}, p_h^{j-1}) - \mathcal{E}_{totale}(\frac{t_h^j}{t_h^n} u_h^n, v_h^n, \frac{t_h^j}{t_h^n} p_h^n, u_h^{j-1}, p_h^{j-1}) > \delta_3$
7. **then** $n = j$,
8. on revient à 3.
9. avec $v_{(m=0)}^j = v_h^n$ et $p_{(l=0)}^j = p_h^{j-1}$
10. **end if**
11. **end for**
12. $n = n + 1$
13. **jusqu'à** $n = N_f$

5.5 Calcul numérique du tenseur plastique p

Dans l'algorithme de minimisation alternée nous sommes ramenés à calculer le tenseur plastique p à (u, v) fixés comme la solution du problème de minimisation

$$p := \text{argmin}_q \mathcal{E}_{totale}(u, q, v, u_h^{n-1}, v_h^{n-1}, p_h^{n-1}) \tag{5.7}$$

Nous expliquerons ici en détail le calcul seulement pour le modèle 1. Le même type d'argument est utilisé pour les modèles 2 et 3.

5.5.1 Calcul de p pour le Modèle 1

Considérons $S = \mathbb{R}$ dans le cas 1D et $S = \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ dans le cas 2D. Rappelons que l'énergie globale du modèle 1 s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^1_{totale}(u, q, v, u_h^{n-1}, v_h^{n-1}, p_h^{n-1}) &= \mathcal{E}_{el}(v, E(u) - q) + \mathcal{E}_p(q, p_h^{n-1}) \\ &+ \mathcal{E}_{ve}(u, u_h^{n-1}) + \mathcal{E}_S(v).\end{aligned}$$

Par un argument de localisation, nous pouvons écrire que pour presque tout $x \in \Omega$, la solution $p(x) \in S$ du problème de minimisation (5.7) vérifie

$$(v^2(x) + \eta)A(E(u) - p)(x) \in \partial H(p(x) - p^{n-1}(x)). \tag{5.8}$$

et donc pour tout $q \in S$,

$$\begin{aligned}\tau|q| &\geq \tau|p(x) - p^{n-1}(x)| \\ &+ (v^2(x) + \eta)A(E(u) - p)(x)(q - (p(x) - p^{n-1}(x))).\end{aligned} \tag{5.9}$$

En testant (5.9) avec $q - p^{n-1}(x)$ on obtient

$$\begin{aligned}\tau|q - p^{n-1}(x)| &\geq \tau|p(x) - p^{n-1}(x)| \\ &+ (v^2(x) + \eta)A(E(u) - p)(x)(q - p(x)).\end{aligned} \tag{5.10}$$

Alors, en utilisant la relation

$$\begin{aligned}A(E(u) - p)(x)(q - p(x)) &= \frac{1}{2}A(q - p(x)) : (q - p(x)) \\ &+ \frac{1}{2}A(E(u) - p) : (E(u) - p)(x) \\ &- \frac{1}{2}A(E(u)(x) - q) : (E(u)(x) - q),\end{aligned}$$

nous déduisons de (5.10) que pour presque tout $x \in \Omega$, et tout $q \in S$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(v^2(x) + \eta)A(E(u) - p)^2(x) + \tau|p(x) - p^{n-1}(x)| \\ &\leq \frac{1}{2}(v^2(x) + \eta)A(E(u)(x) - q)^2 + \tau|q - p^{n-1}(x)|.\end{aligned} \tag{5.11}$$

La relation (5.11) implique que pour presque tout $x \in \Omega$, $p(x)$ réalise le minimum de

$$\min_{q\in S}\left(\frac{1}{2}(v^2(x) + \eta)A(E(u)(x) - q)^2 + \tau|q - p^{n-1}(x)|\right) \tag{5.12}$$

Numériquement nous déterminons le tenseur plastique p comme une P0-approximation en espace en résolvant le problème (5.12) localement sur chaque triangle du maillage. Notons que pour détérminer p dans (5.12), nous ne procédons pas de la même façon en 1D et 2D. En 1D, par Proposition 5.2.2, le tenseur plastique p est calculé explicitement en fonction de u et de v. En 2D nous utiliserons une méthode de descente de gradient pour approcher p.

Cas 1D : Nous réécrivons l'énergie locale dans (5.12) comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(v^2(x)+\eta)\mathcal{K}(u'(x)-q)^2+\tau|q-p^{n-1}|(x)\\
&= \frac{1}{2}(v^2(x)+\eta)\mathcal{K}(q-p^{n-1}(x))^2+\tau|q-p^{n-1}(x)|\\
&- (v^2(x)+\eta)\mathcal{K}(q-p^{n-1}(x))(u^{'}-p^{n-1})(x)+\frac{1}{2}(v^2(x)+\eta)\mathcal{K}(u'-p^{n-1})^2(x)
\end{aligned}$$

on applique ensuite la proposition 5.2.2 avec $X = q$, $a = p^{n-1}(x)$, $Y = (v^2(x)+\eta)\mathcal{K}(u^{'}(x)-p^{n-1})(x)$, $D = (v^2(x)+\eta)\mathcal{K}$, $C = \frac{1}{2}(v^2(x)+\eta)\mathcal{K}(u'-p^{n-1})^2(x)$. Pour presque tout $x \in \Omega$, la loi d'écoulement plastique est donnée localement par

- si $|\mathcal{K}(v^2+\eta)(u^{'}-p^{n-1})(x)| \leq \tau$ alors $p(x) = p^{n-1}(x)$,
- si $|\mathcal{K}(v^2+\eta)(u^{'}-p^{n-1})(x)| > \tau$ alors

$$p(x) = u^{'}(x) - \frac{\tau}{\mathcal{K}(v^2(x)+\eta)}\frac{(u^{'}-p^{n-1})}{|(u'-p^{n-1})|}(x).$$

Cas 2D : Définissons l'enérgie locale

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^1_{loc}(p)(x) &:= \frac{1}{2}((v^n_{(m-1)})^2(x)+\eta)A(E(u^n_{(l)})(x)-p):(E(u^n_{(l)})(x)-p)\\
&+ \tau|p-p^{n-1}(x)|.
\end{aligned}$$

associée au problème de minimisation globale dans l'Algorithme 1 :

$$p^n_{(l)} := \text{argmin}_p \mathcal{E}_{totale}(u^n_{(l)}, p, v^n_{(m-1)}). \tag{5.13}$$

Appliquant la Proposition 5.2.1, la loi d'écoulement plastique est donnée localement comme suit :

- si $|A(v^2+\eta)(E(u)-p^{n-1})(x)| \leq \tau$, alors $p^n_{(l)}(x) = p^{n-1}(x)$,
- si $|A(v^2+\eta)(E(u)-p^{n-1})(x)| > \tau$, nous utilisons la méthode de descente de gradient appliquée à l'énergie locale $\mathcal{E}^1_{loc}$ décrite ci-dessous :

Algorithme 3 Méthode de déscente de gradient pour $p^n_{(l)}(x)$

Soient $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $erreur > 0$ des paramètres de tolérance fixés.

1. **Si** $|((v^n_{(m-1)})^2 + \eta)A(E(u^n_{(l)}) - p^{n-1})|(x) \leq \tau$ **alors** $p^n_{(l)}(x) = p^{n-1}(x)$
2. **sinon (Méthode de descente de gradient)**
3. Soit $k = 0$, $p^{(n,k=0)}_{(l)}(x) \neq p^{n-1}(x)$
4. **itérér**
5. $p^{n,k}_{(l)}(x) = p^{n,k-1}_{(l)}(x) - \alpha \nabla \mathcal{E}^1_{loc}(p^{n,k-1}_{(l)})(x)$
6. **si** $\mathcal{E}^1_{loc}(p^{n,k}_{(l)})(x) > \mathcal{E}^1_{loc}(p^{n,k-1}_{(l)})(x)$ **alors** $\alpha = \alpha/2$
   sinon $erreur = |\mathcal{E}^1_{loc}(p^{n,k}_{(l)})(x) - \mathcal{E}^1_{loc}(p^{n,k-1}_{(l)})(x)|$.
7. **jusqu'à** $erreur < \delta$
8. nous définissons $p^n_{(l)}(x) := p^{n,k}_{(l)}(x)$ à convergence.

5.5.2 Calcul du tenseur plastique p pour les modèles 2 et 3

– pour le modèle 2, l'énergie locale s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^2_{loc}(p)(x) &:= \frac{1}{2}((v^n_{(m-1)})^2(x) + \eta)A(E(u^n_{(l)})(x) - p) : (E(u^n_{(l)})(x) - p) \\ &+ \frac{\beta_2}{2h}|p - p^{n-1}(x)|^2 + \tau|p - p^{n-1}(x)|.\end{aligned}$$

La loi d'écoulement plastique s'écrit en 1D : pour presque tout $x \in \Omega$:
– si $|\mathcal{K}(v^2 + \eta)(u' - p^{n-1})|(x) \leq \tau$ alors $p(x) = p^{n-1}(x)$,
– si $|\mathcal{K}(v^2 + \eta)(u' - p^{n-1})|(x) > \tau$ alors

$$\begin{aligned}p(x) &= \frac{\mathcal{K}(v^2 + \eta)u' + \frac{\beta}{h}p^{n-1}}{\mathcal{K}(v^2 + \eta) + \frac{\beta}{h}}(x) \\ &- \frac{\tau}{(\mathcal{K}(v^2 + \eta) + \frac{\beta}{h})}\frac{\mathcal{K}(v^2 + \eta)(u' - p^{n-1})}{|\mathcal{K}(v^2 + \eta)(u' - p^{n-1})|}(x).\end{aligned}$$

– pour le modèle 3, l'énergie locale s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^3_{loc}(p)(x) &:= \frac{1}{2}((v^n_{(m-1)})^2(x) + \eta)A(E(u^n_{(l)})(x) - p) : (E(u^n_{(l)})(x) - p) \\ &+ \frac{1}{2}Bp : p + \tau|p - p^{n-1}(x)|.\end{aligned}$$

La loi d'écoulement plastique s'écrit en 1D : pour presque tout $x \in \Omega$
– si $|\mathcal{K}(v^2+\eta)(u^{'}-p^{n-1})-kp^{n-1}|(x) \leq \tau$ alors $p(x)=p^{n-1}(x)$,
– si $|\mathcal{K}(v^2+\eta)(u^{'}-p^{n-1})-kp^{n-1}|(x) > \tau$ alors

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\mathcal{K}(v^2+\eta)u^{'}}{\mathcal{K}(v^2+\eta)+k}(x) \\ &- \frac{\tau}{(\mathcal{K}(v^2+\eta)+k)}\frac{\mathcal{K}(v^2+\eta)(u^{'}-p^{n-1})-kp^{n-1}}{|\mathcal{K}(v^2+\eta)(u^{'}-p^{n-1})-kp^{n-1}|}(x), \end{aligned}$$

où $k>0$ est une constante d'écrouissage.

5.6 Etude numérique des phénomènes dissipatifs durant la déformation- Simulations numériques 1D et 2D

Dans cette section, nous étudions numériquement des évolutions des modèles 1-3 en fonction de leurs paramètres mécaniques pour voir si pendant une évolution plusieurs phénomènes dissipatifs peuvent être observés.

Remarque 3 *Comme nous imposons un chargement croissant durant les évolutions étudiées, nous omettons la condition d'irréversibilité* $\varphi \leq v_h^{n-1}$ *dans le calcul numérique.*

5.6.1 Expérience de traction 1D

Considérons une barre $\Omega=(0,L)$ de longueur L, de module de Young $\mathcal{K}>0$. Elle est fixée en $x=0$. On impose une condition de type Dirichlet $u(L,t)$=tL en son extrémité droite $x=L$. A chaque temps t_h^n, u_h^n, v_h^n sont approchés par des éléments finis P1, alors que p_h^n est approché par des éléments P0.

Modèle élasto-parfaitement plastique avec rupture

Si nous posons $\beta_1=0$ dans le Modèle 1 ou $\beta_2=0$ dans le Modèle 2, ces modèles se réduisent au modèle d'élasto-plasticité parfaite avec rupture numérique.

$$\min_{(z,q,\varphi)\in\mathcal{B}(t_h^n)} \mathcal{E}_{el}(v,E(z)-q)+\mathcal{E}_p(q,p_h^{n-1})+\mathcal{E}_S(\varphi). \tag{5.14}$$

Dans cet exemple, nous illustrons l'importance de l'étape de backtracking. Nous appliquons l'algorithme de minimisation alternée sans backtracking

avec le choix de paramètres suivants : $L = 10$, $\mathcal{K} = 4$, $\tau = 1.5$, pas de discrétisation en espace $\triangle x = 0.015$, pas de discrétisation en temps $h = 0.025$, $\eta = 10^{-6}$, $\varepsilon = 0.094$. Avec ce choix de paramètres, nous observons sur la figure 5.5 que si la barre est élastique ($v = 1$, $p = 0$) au temps $t = 0$, elle reste élastique jusqu'au temps $t \simeq 0.5$ quand la barre commence à se déformer plastiquement. Une fracture apparaît au temps $t \simeq 3$. Comme le chargement est monotone, si le système est sans fracture et si $p = 0$ en $t = 0$ il devrait rester en régime élastique jusqu'au moment où la contrainte atteint le seuil de plasticité ou bien la fracture apparaît. On peut facilement vérifier que s'il n'y a pas de rupture, le seuil de plasticité devrait être atteint au temps $t_p = \tau/\mathcal{K}$, tandis que s'il n'y pas de déformation plastique, la rupture devrait apparaître au temps $t_c = \sqrt{2/\mathcal{K}L}$. Avec le choix de paramètres ci-dessus, nous obtenons $t_p = 0.375$ et $t_c = 0.224$. Sur la figure 5.5 cependant, nous observons que la barre reste élastique jusqu'au temps $t \simeq 0.5$, bien au délà des temps t_p et t_c théoriques. La Figure 5.6 montre la même expérience numérique de traction avec l'étape de backtracking en plus. Nous voyons que le matériau élastique se casse au temps de simulation $t \simeq 0.25$ ce qui est proche du temps théorique $t_c = 0.224$. Changons maintenant le paramètre plastique à $\tau = 0.8$

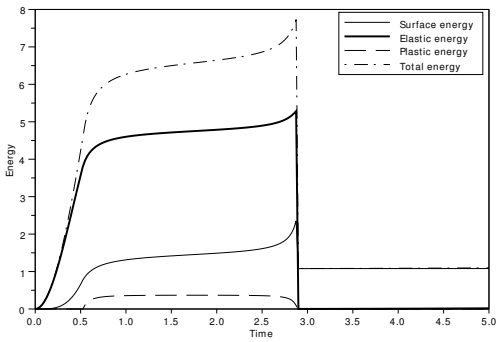

FIGURE 5.5 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique et de surface sans backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 1.5$.

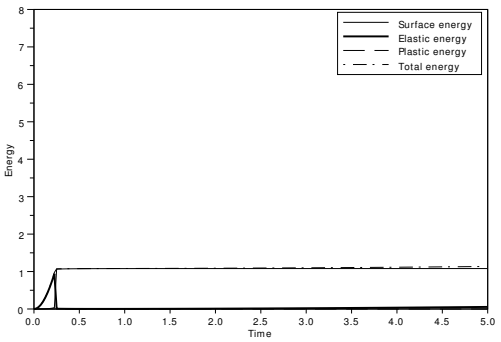

FIGURE 5.6 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 1.5$.

de sorte que le temps de plastification attendu théorique devienne $t_p = 0.2$. La Figure 5.7 montre que, comme attendu, comme $t_p < t_c$, la déformation plastique a lieu avant la rupture. Comme dans ce modèle l'énergie élastique reste constante après la plastification, aucune rupture peut apparaître après t_p. Dans la suite nous utiliserons les mêmes paramètres de discrétisation et le

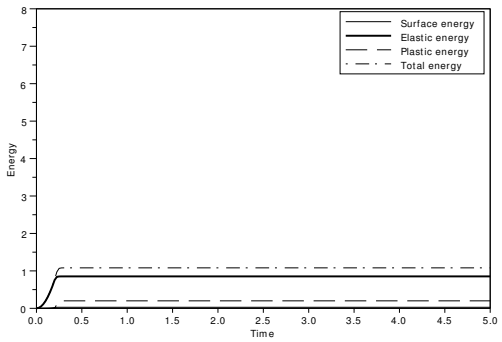

FIGURE 5.7 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 0.8$.

module de Young est choisi comme dans 5.6.1. On applique le test de traction aux modèles 1, 2, 3 pour plusieurs choix de paramètres mécaniques τ, β_1, β_2 pour avoir une idée qualitative de leur comportement. Dans tous les calculs suivants, la stratégie de backtracking est appliquée.

Modèle 1 - Modèle élasto-plastique avec viscoélasticité et rupture.

Le modèle 1 peut montrer différents mécanismes de dissipation : élasto-plasticité (Figure. 5.8), élasticité avec rupture (Figure. 5.9), viscoélasticité avec rupture (Figure. 5.10), élasto-visco-plasticité avec rupture (Figure. 5.11), elasto-visco-plasticité sans rupture (Figure. 5.12).

Modèle 2 - Modèle élasto-plastique avec viscoplasticité et rupture.

Pour ce modèle, nous ne pouvons pas exclure des régimes complexes, cependant dans toutes nos simulations numériques, nous observons seulement qu'après le régime élastique initial, soit le matériau plastifie (Figure 5.13), soit la rupture apparaît (Figure 5.14).

Modèle 3 - Modèle elasto-plastique avec écrouissage cinématique et la rupture.

Nous choisissons le paramètre d'écrouissage $k = 0.5$. Pour $\tau = 1$, la Figure 5.15 montre le régime élastique avec rupture. Pour $\tau = 0.7$, le matériau

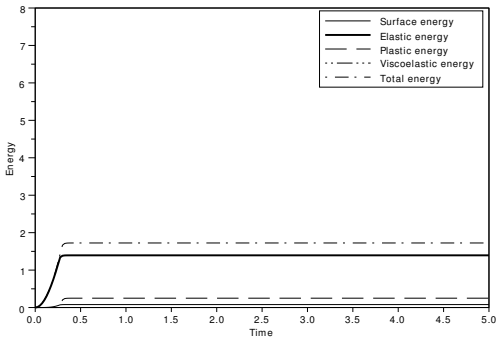

FIGURE 5.8 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique,viscoélastique et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 1$, $\beta_1 = 0.01$.

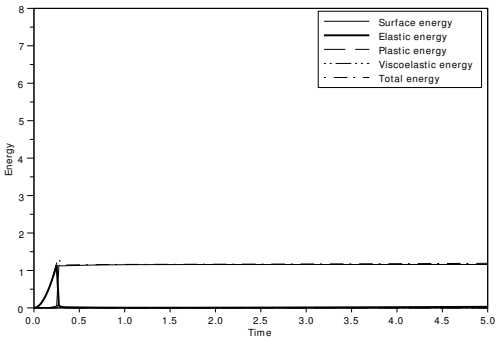

FIGURE 5.9 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique, viscoélastique et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 1.5$, $\beta_1 = 0.0001$.

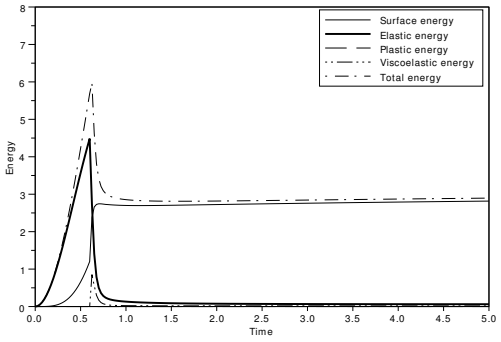

FIGURE 5.10 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique, viscoélastique et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 5$, $\beta_1 = 0.01$.

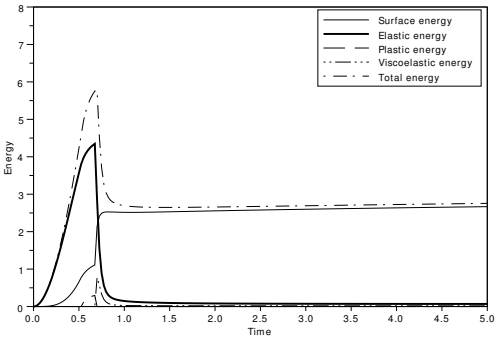

FIGURE 5.11 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique, viscoélastique et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 1.5$, $\beta_1 = 0.01$.

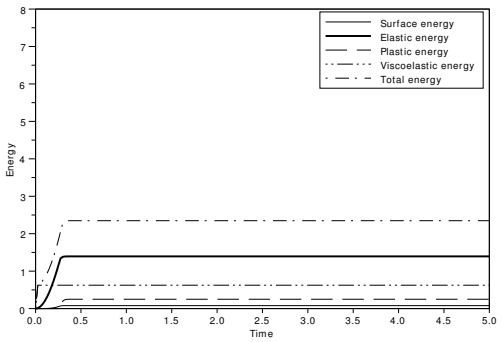

FIGURE 5.12 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique, viscoélastique et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 1$, $\beta_1 = 5$.

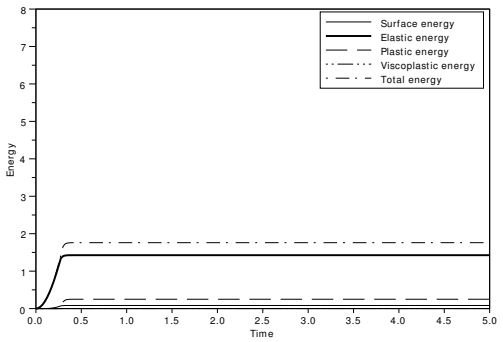

FIGURE 5.13 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique, viscoplastique et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 1$, $\beta_2 = 0.1$.

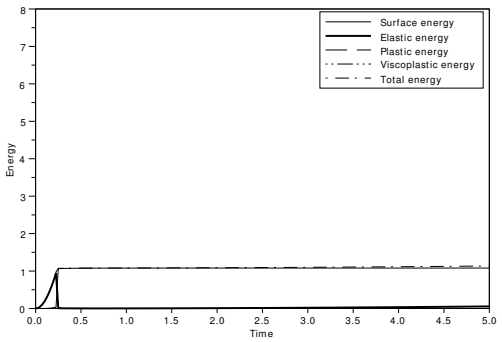

FIGURE 5.14 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique, viscoplastique et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 1$, $\beta_2 = 1$.

plastifie tout d'abord et il casse après comme le montre la Figure 5.16. En effet, l'écrouissage cinématique permet la translation de la surface de seuil de plasticité et pour cela l'énergie élastique peut augmenter après la plastification, et donc la rupture peut apparaître.

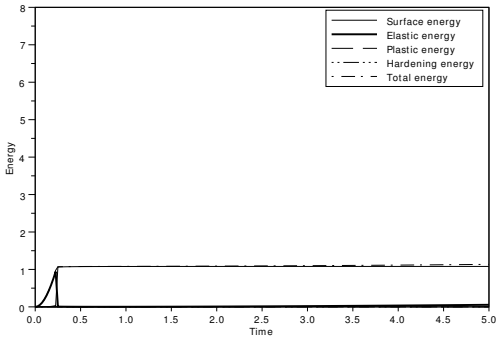

FIGURE 5.15 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique, d'écrouissage de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 1$.

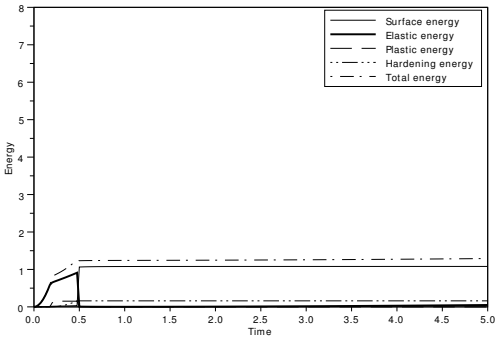

FIGURE 5.16 – Evolution des énergies totale, élastique, plastique, d'écrouissage et de surface avec backtracking durant expérience de la traction 1D, $\tau = 0.7$.

5.6.2 Expériences numériques de traction 2D - Modèle 3

Des expériences numériques de la traction 1D des modèles 1,2 et 3 nous concluons que numériquement les modèles 1 et 3 permettent des évolutions plus complexes, chacun de leur mécanisme dissipatif peut être réalisé. Ces deux modèles permettent de plastifier le matériau et après le casser durant l'évolution. Tandis que pour le modèle 3 , nous pouvons justifier de point de vue physique un tel comportement, pour le modèle 1 notre conclusion n'est basée que sur les expériences numériques. Le comportement des modèles construits dépend fortement du choix des paramètres mécaniques $(\tau, \beta_1, \beta_2, \mathcal{K})$. Dans cette section, nous illustrons le comportement du modèle 3 sur une expérience de traction 2D. Rappelons qu'à la différence du cas 1D, la minimisation de l'énergie totale par rapport à p n'est pas explicite, et que nous implémentons p avec la méthode de descente de gradient. Nous considérons une barre de longueur $L = 10$ et de section $S = 1$ (donc $\Omega = (0, L) \times (0, 1)$) qui est fixée à l'extrémité gauche en $(x, y) = (0, y)$ pour $y \in (0, S)$. Les paramètres élastiques du modèle sont $\mathcal{K} = 10$ et $\nu = 0.252$ le coefficient de Poisson. Pour $y \in (0, S)$, nous imposons au temps t_h^n un

déplacement constant en espace $t_h^n W_0 = (t_h^n U_0, 0)$ avec $U_0 > 0$ à l'extremité droite $(x, y) = (L, y)$ de la barre. Nous considérons la matrice d'écrouissage B comme matrice diagonale $B = k\mathbb{I}_2$ avec $k > 0$. Nous présentons les expériences numériques avec les paramètres suivants : $h = 0.1$, $\triangle x = 0.05$, $\varepsilon = 0.25$, $k = 100$, $\tau = 1$, $U_0 = 1$. L'évolution du modèle 3 montre qu'avec ce

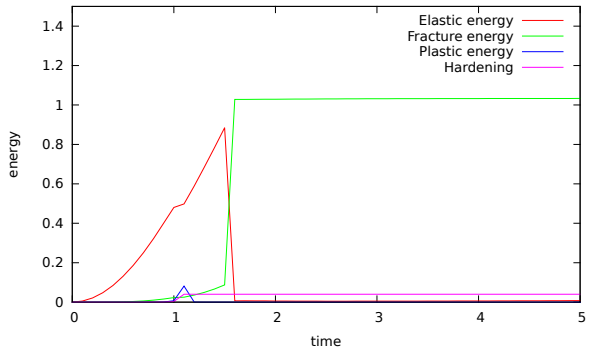

FIGURE 5.17 – Evolution des énergies élastique, plastique, d'écrouissage et de surface avec backtracking pendant l'expérience de la traction 2D.

FIGURE 5.18 – Profil de $v(t, .)$-approximation en espace de rupture au temps $t = 5$.

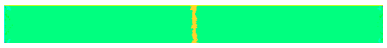

FIGURE 5.19 – Profil de la norme matricielle $|p(t, .)|$ au temps $t = 5$, ($|p(t, .)| = 0.008$ (jaune), $|p(t, .)| = 0.009$ (vert)).

choix de paramètres, le matériau est déformé plastiquement et puis une fissure apparaît. Nous reproduisons qualitativement le comportement similaire à celui de l'expérience de la traction 1D 5.6.1. Sur la Figure 5.18, la zone jaune représente la zone fracturée tandis que la zone magenta représente la zone sans rupture $v \sim 1$. La Figure 5.19 montre les zones de déformation plastique.

5.6.3 Simulation numérique 2D de l'expérience de Peltzer et Tapponnier

En utilisant le modèle 3, nous reproduisons numériquement les premières étapes de l'expérience de Peltzer et Tapponnier, voir Figure 5.20. Rappelons que, cette expérience est utlisée pour modéliser l'action de l'Inde (vu comme un poinçon) sur le Plateau Tibétain (modélisé par une couche de plasticine). Nous considérons le domaine carré $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, qui représente la couche de plasticine, voir Figure 5.21. Au temps t_h^n, le poinçon est

modelisé par un déplacement imposé $u = t_h^n U_0 = (0, t_h^n U_0)$ avec $U_0 > 0$ sur $\partial\Omega_3$. Nous imposons aussi une condition $u = 0$ sur $\partial\Omega_6$ qui modélise que le bord Nord de l'expérience est fixé et nous imposons aussi une condition de non pénétration $u.\vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega_1$ pour favoriser les mouvements horizontaux afin de s'approcher au mieux de l'expérience de Peltzer et Tapponnier. Rappelons que nous choisissons le modèle 3 pour la simulation numérique, car ce modèle nous permet d'observer plusieurs phénomènes dissipatifs lors d'une évolution : déformation plastique et rupture.

L'objectif de quelques tests numériques, que nous allons présenter, est d'étudier le comportement du modèle 3 appliqué à l'expérience de Peltzer et Tapponnier en fonctions des paramètres d'élasticité et de plasticité ($\mathcal{K}$, k, τ, μ), de rupture ε et de discrétisation en temps et en espace (h, $\triangle x$) pour avoir une idée qualitative de comportement mécanique et numérique de notre modèle. Tout d'abord, nous utilisons les paramètres suivants :$h = 0.05$, $\triangle x = 0.017$, $\varepsilon = 0.15$, $\mathcal{K} = 100$, $k = 100$, $\tau = 1$, $\nu = 0.252$, $U_0 = 1$. Sur la Figure 5.28 des énergies, nous observons que le modèle 3 permet de déformer plastiquement la couche de plasticine ($t_p \sim 0.05$) et puis une fissure se crée au temps $t_c \sim 0.25$. Plus précisement une fissure se crée au Nord du poinçon (Figures 5.22), puis elle se propage de façon symétrique (Figures 5.23), pour après se propager vers l'Est (Figures 5.24) et l'Ouest (Figures 5.25). Sur la Figure 5.26 nous montrons le profil de rupture au temps $t = 2$. Le comportement observé est en accord qualitatif avec l'expérience analogue, nous observons tout d'abord une légère déformation de la plasticine et puis une fissure apparaît. Sa géométrie est similaire à la géométrie de la rupture de la plasticine. La Figure 5.27 indique les régions de la déformation plastique au temps $t = 2$. Cette déformation n'est pas localisée le long de la rupture. Prenons maintenant dans les calculs numériques $\varepsilon = 0.085$. Une

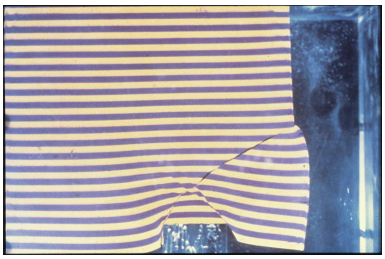

FIGURE 5.20 – Expérience de la plasticine de Tapponnier et Peltzer.

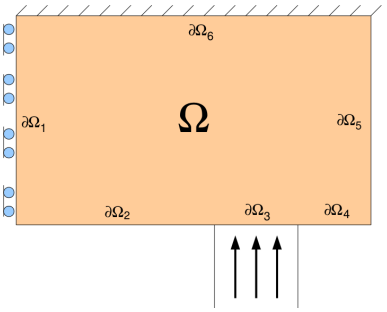

FIGURE 5.21 – Domaine Ω avec la partition du bord $\partial\Omega$.

fissure se crée au temps $t = 0.2$ au Nord du poinçon et puis et se propage

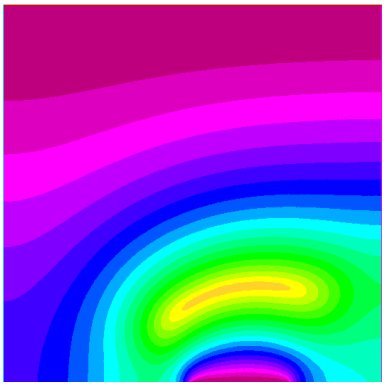

FIGURE 5.22 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.25$.

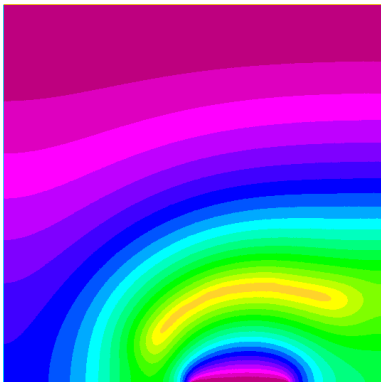

FIGURE 5.23 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.30$.

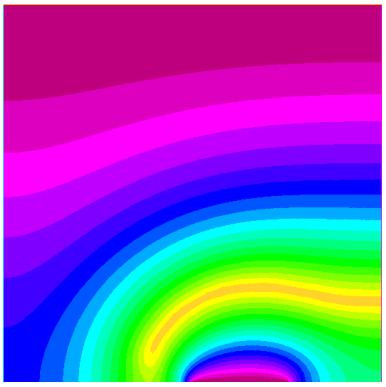

FIGURE 5.24 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.35$.

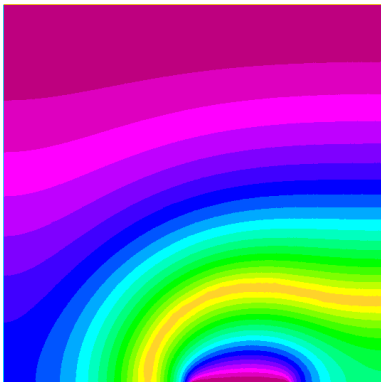

FIGURE 5.25 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.55$.

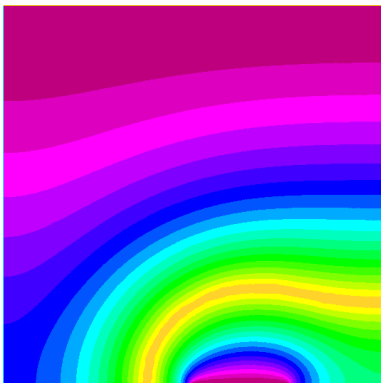

FIGURE 5.26 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 2$.

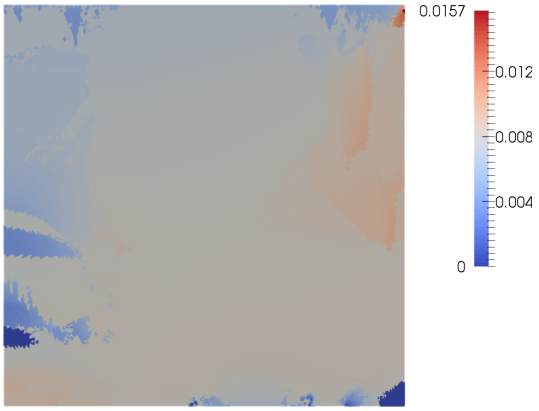

FIGURE 5.27 – Profil de la norme matricielle de tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 2$.

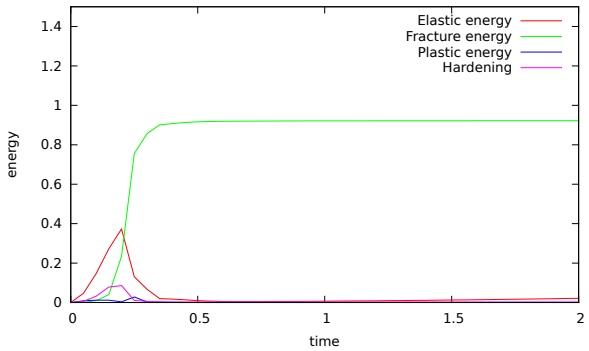

FIGURE 5.28 – Evolution des énergies élastique, plastique, d'écrouissage et de surface, $\varepsilon = 0.15$

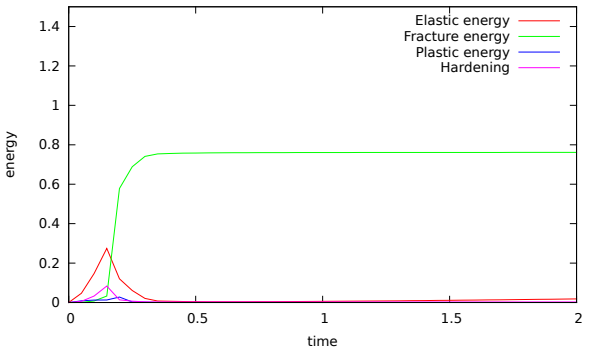

FIGURE 5.29 – Evolution des énergies élastique, plastique, d'écrouissage et de surface, $\varepsilon = 0.085$

en se refermant de 2 côtés de poinçon (Figures 5.30, 5.31, 5.32, 5.33, 5.34). Sur la figure 5.29 nous observons que le matériau se déforme plastiquement, puis une rupture apparaît. Observons aussi que la déformation plastique n'est pas très localisée le long de la fissure (Figure 5.35). Pour ce choix de ε, une rupture ne se propage pas vers l'Ouest du domain comme attendu. Nous

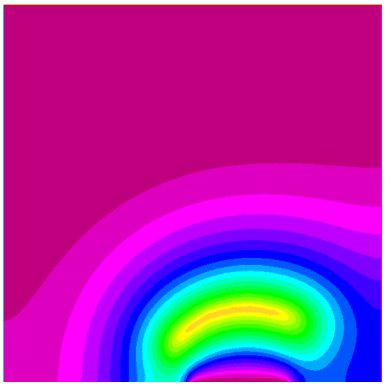

FIGURE 5.30 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.20$.

FIGURE 5.31 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.25$.

allons maintenant étudier le modèle 3 en fonctions de différents paramètres mécaniques $\mathcal{K}, k, \tau, \nu$. Pour $\varepsilon = 0.15$, nous proposons 8 expériences différentes dont nous traçons les évolutions des énergies au cours de temps. Pour ces évolutions, la rupture a la géometrie de l'expérience de la plasticine.

Pour les expériences 1 et 2 nous augmentons les valeurs de $\mathcal{K}$, ce qui permet d'augmenter les énergies d'écrouissage et de plasticité (Figures 5.37 et Figures 5.38) . Si on augemente le paramètre de seuil de plasticité $\tau = 100$, l'évolution a tendance à devenir seulement élastique avec rupture. Sur la figure 5.39, à chaque temps, l'énergie d'écrouissage et de plasticité sont principalement d'ordre $10^{-3} - 10^{-5}$. La plasticité n'est pas très localisée une fois la rupture apparue. Pour les expériences 4, 6, 7 et 8 nous observons une localisation de la déformation plastique le long de la rupture (Figures 5.45, 5.47, 5.48, 5.49). Avec le choix des paramètres donnés, dans le cadre de l'expérience 4 il y a plus de déformation plastique que dans les cas 6, 7 et 8. Il y a aussi une très légère localisation pour l'expérience 5 (Figure 5.46). Pour le choix de $\tau = 10$ dans ces expériences, nous observons sur les figures d'évolution d'énergies la présence de l'énergie plastique plus importante avant l'apparition de la rupture (Figures 5.40 - 5.44). Détaillons en particulier, le calcul numérique lors d'une évolution pour l'expérience 4. Sur les figures 5.50 - 5.55 nous traçons la déformation plastique et le profil de la rupture au cours de temps.

FIGURE 5.32 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.30$.

FIGURE 5.33 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.45$.

FIGURE 5.34 – Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 2$.

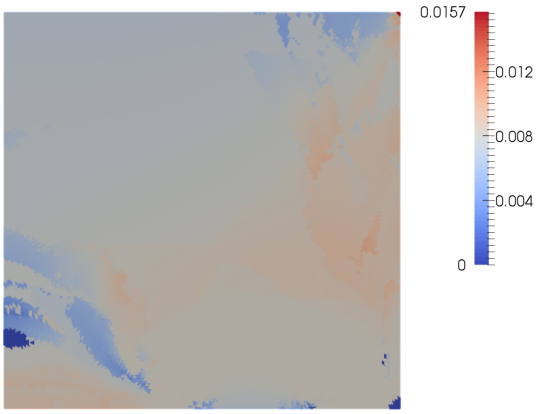

FIGURE 5.35 – Profil de la norme matricielle de tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 2$.

Nous observons une localisation de l'énergie plastique ainsi que la propagation d'une fissure avec accord de l'expérience de Tapponnier et Peltzer. Plus précisement, il y a une plastification du matériau jusqu'à $t = 0.10$ où la déformation plastique se cumule dans le matériau (Figures 5.50, 5.51), puis quand une fissure apparaît (Figures 5.53 et 5.55), le système se relâche et la déformation plastique se localise le long de la rupture (Figures 5.52, 5.54). Dans la suite de calcul numérique pour l'expérience 4 nous prenons $\varepsilon = 0.085$. Avec les paramètres choisis, une fissure apparait à $t = 0.2$, qui est plus localisée et garde sa géometrie en accord avec l'expérience de la plasticine (Figure 5.61). La déformation plastique se cumule jusqu'à $t = 0.15$ (Figures 5.56, 5.57 et 5.58) en se localisant une fois la fissure apparue (Figure 5.60). Avec les calculs numériques effectués, nous pouvons conclure que le modèle 3 est sensible aux paramètres mécaniques ainsi qu'au paramètre de la rupture ε. Pour certains choix de paramètres mécaniques, nous observons qualitativement le comportement similaire à celui de l'expérience de Peltzer et Tapponnier.

Pour tester la stabilité du calcul numérique pour la discrétisation en espace, nous prenons maintenant $\triangle x \sim 0.008$. A chaque temps, nous obtenons une erreur en valeur absolue pour chaque énergie au plus d'ordre 10^{-2}. Qualitativement, nous obtenons le comportement similaire pour $\triangle x \sim 0.017$ et pour $\triangle x \sim 0.008$ (Figure 5.62 et Figure 5.63).

Pour tester la stabilité du calcul numérique pour la discrétisation en temps, nous considérons les paramètres : $\varepsilon = 0.085$, $\triangle x = 0.017$, $h = 0.025$. Nous constatons qu'une fissure (généralisée) apparaît à $t = 0.175$ au lieu $t = 0.2$ (Figures 5.69 et 5.70) avec la géometrie de rupture similaire (Figure 5.71) que celle de la plasticine. Jusqu'à $t = 0.15$, le matériau plastifie et le lieu de plastification est similaire à celui avec $h = 0,05$. Il suffit de comparer la figure 5.56 avec la figure 5.65 ($t = 0.05$) , figure 5.57 avec 5.67 ($t = 0.1$), figure 5.58 avec figure 5.69 ($t = 0.15$). Le comportement numérique de discrétisation en temps paraît qualitativement stable. Sur la figure 5.73, nous présentons l'évolution des énergies. Nous observons les profils des énergies élastique, de rupture et d'écrouissage similaires aux profils des énergies pour $h = 0.05$ (Figure 5.62). Le profil de l'énergie plastique $\mathcal{E}_{pl}$ paraît un peu différent ce qui est lié à la définition de $\mathcal{E}_{pl}$ dont l'intégrande dépend de $|p_h^n - p_h^{n-1}|$.

	$\mathcal{K}$	τ	k	ν
Expérience 1	500	1	100	0.252
Expérience 2	750	1	100	0.252
Expérience 3	750	100	100	0.252
Expérience 4	750	10	100	0.252
Expérience 5	750	10	500	0.252
Expérience 6	750	10	200	0.252
Expérience 7	750	10	200	0.4
Expérience 8	1000	10	200	0.1

FIGURE 5.36 – Le tableau des différents paramètres mécaniques pour les expériences numériques.

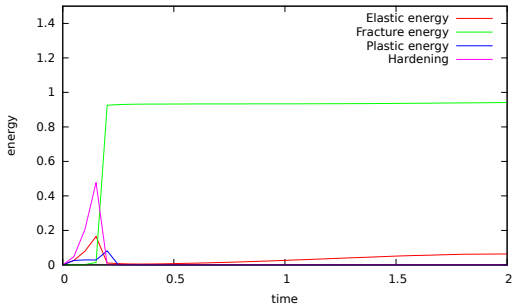

FIGURE 5.37 – Expérience 1

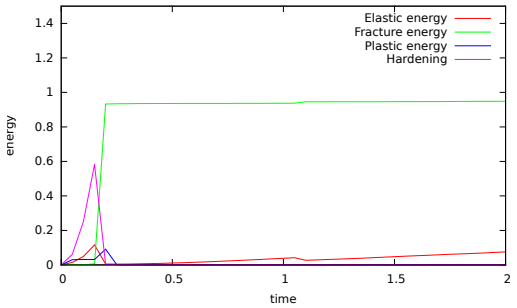

FIGURE 5.38 – Expérience 2

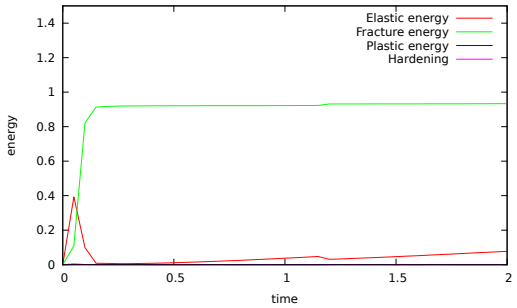

FIGURE 5.39 – Expérience 3

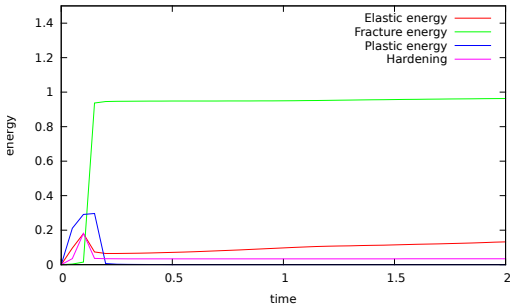

FIGURE 5.40 – Expérience 4

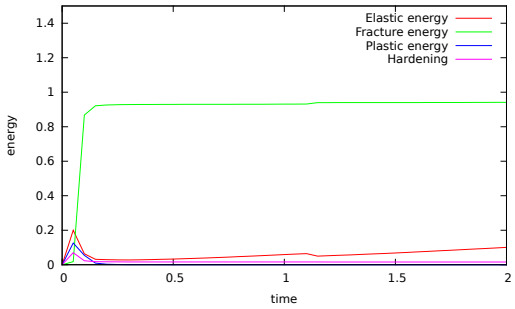

FIGURE 5.41 – Expérience 5

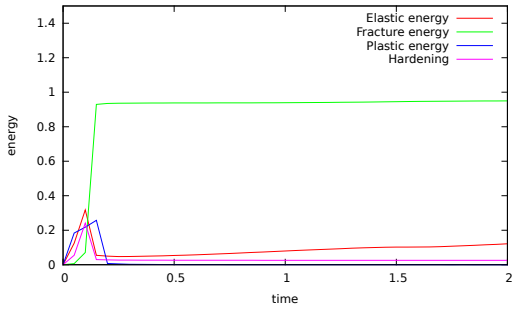

FIGURE 5.42 – Expérience 6

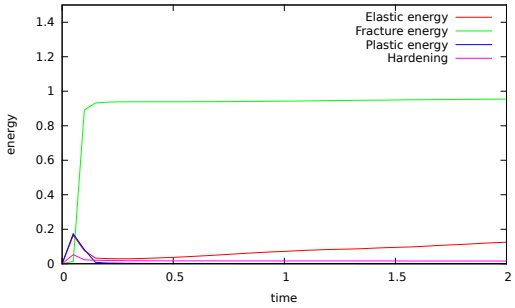

FIGURE 5.43 – Expérience 7

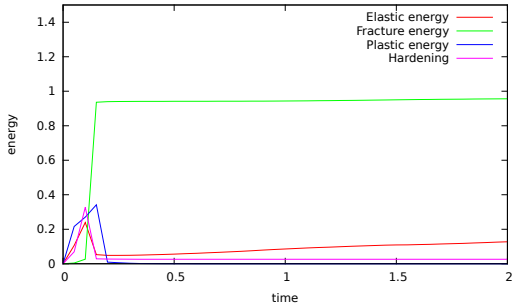

FIGURE 5.44 – Expérience 8

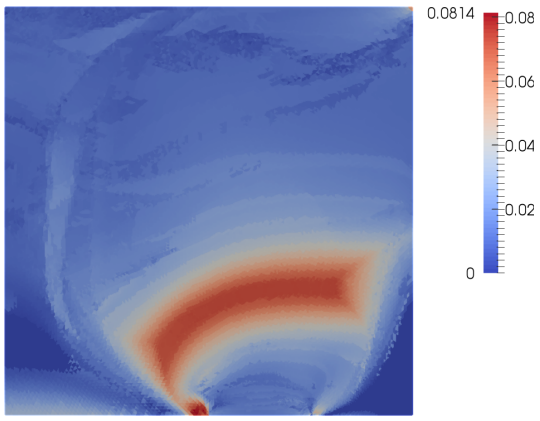

FIGURE 5.45 – Expérience 4- Profil de la norme matricielle du tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 2$.

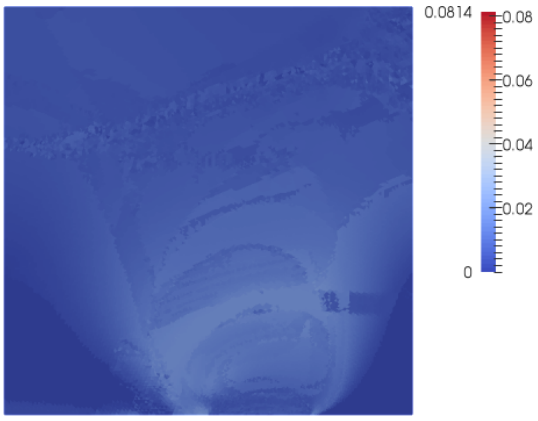

FIGURE 5.46 – Expérience 5- Profil de la norme matricielle du tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 2$.

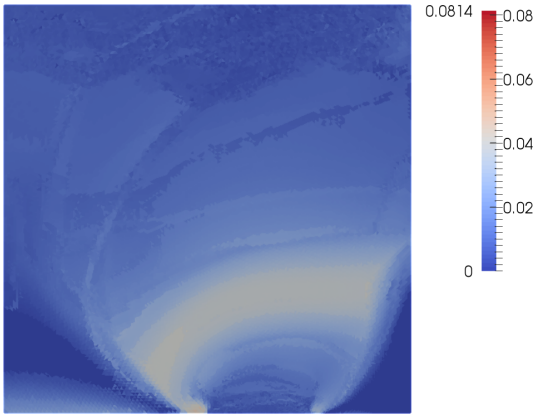

FIGURE 5.47 – Expérience 6- Profil de la norme matricielle du tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 2$.

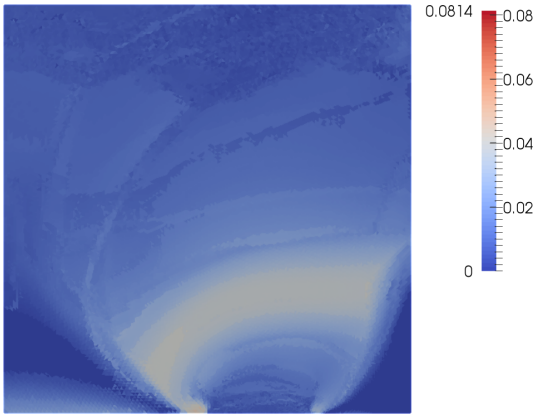

FIGURE 5.48 – Expérience 7- Profil de la norme matricielle du tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 2$.

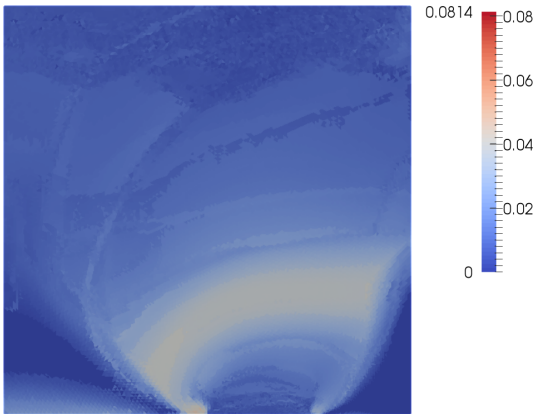

FIGURE 5.49 – Expérience 8- Profil de la norme matricielle du tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 2$.

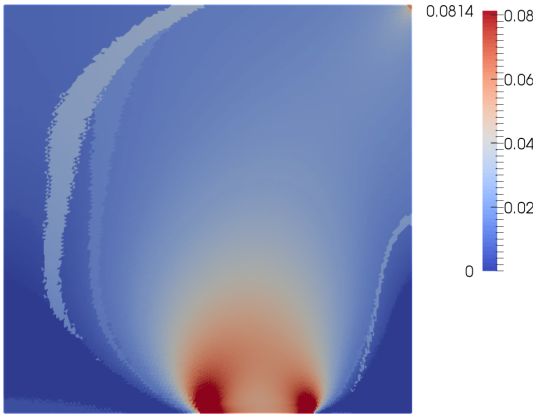

FIGURE 5.50 – Expérience 4- Profil de la norme matricielle du tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.05$.

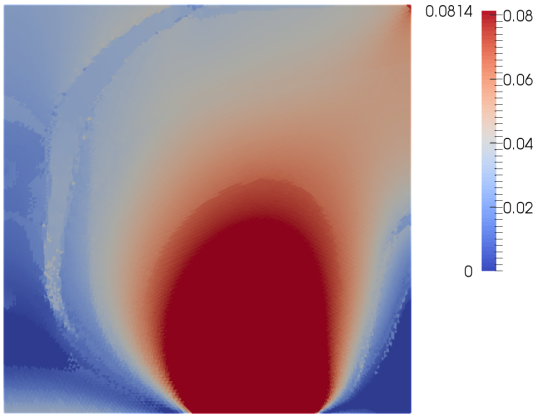

FIGURE 5.51 – Expérience 4- Profil de la norme matricielle du tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.10$.

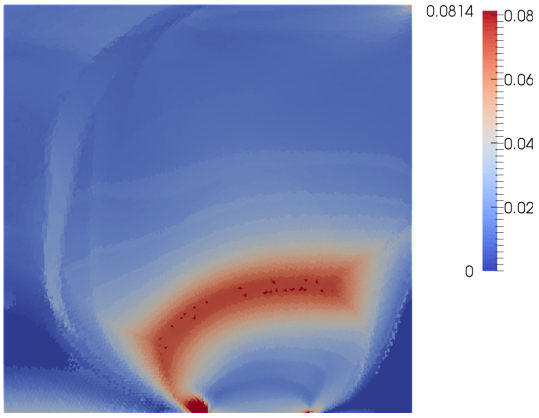

FIGURE 5.52 – Expérience 4- Profil de la norme matricielle du tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.15$.

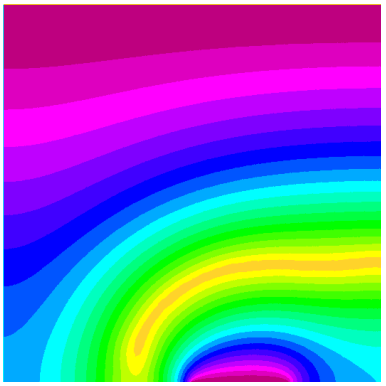

FIGURE 5.53 – Expérience 4- Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.15$.

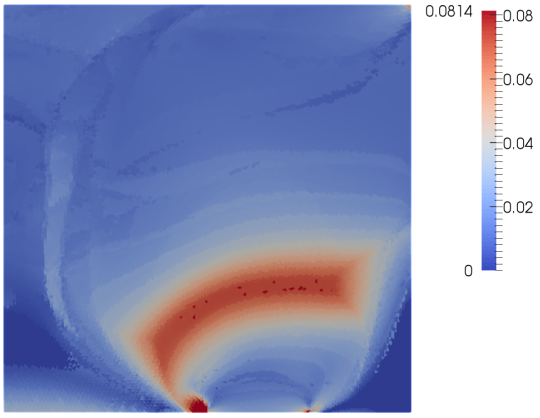

FIGURE 5.54 – Expérience 4- Profil de la norme matricielle du tenseur plastique $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.20$.

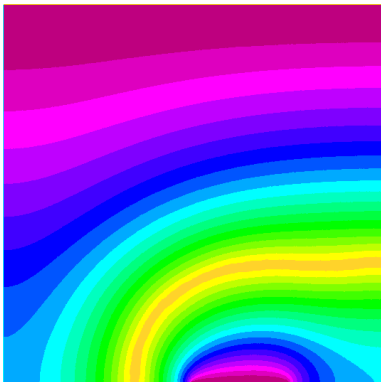

FIGURE 5.55 – Expérience 4- Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.20$.

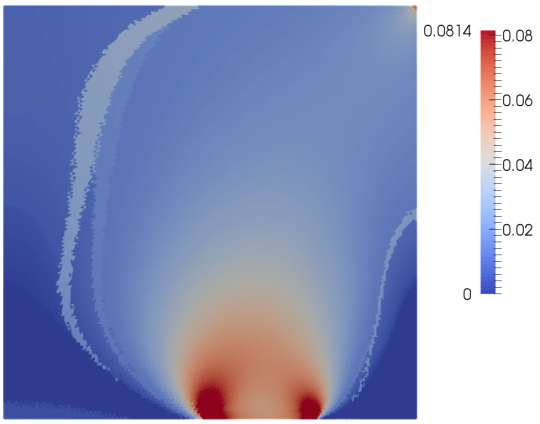

FIGURE 5.56 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.05$, $h = 0.05$, $\varepsilon = 0.085$.

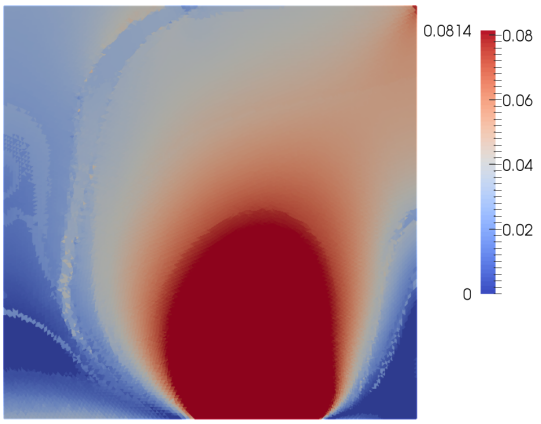

FIGURE 5.57 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.10$, $h = 0.05$, $\varepsilon = 0.085$.

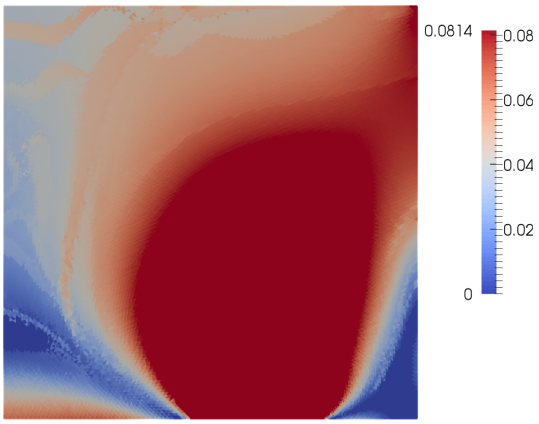

FIGURE 5.58 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.15$, $h = 0.05$, $\varepsilon = 0.085$.

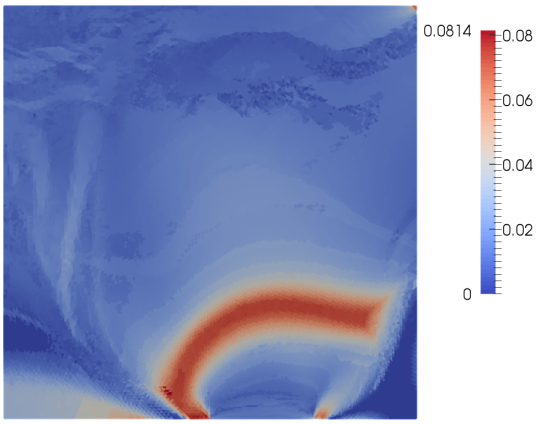

FIGURE 5.59 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 2$, $h = 0.05$, $\varepsilon = 0.085$.

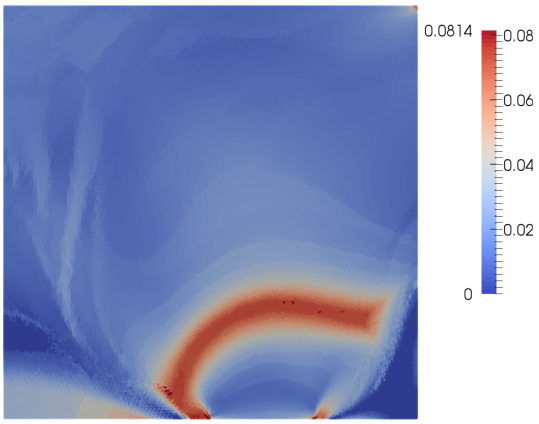

FIGURE 5.60 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.20$, $h = 0.05$, $\varepsilon = 0.085$.

FIGURE 5.61 – Expérience 4 - Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.20$, $h = 0.05$, $\varepsilon = 0.085$.

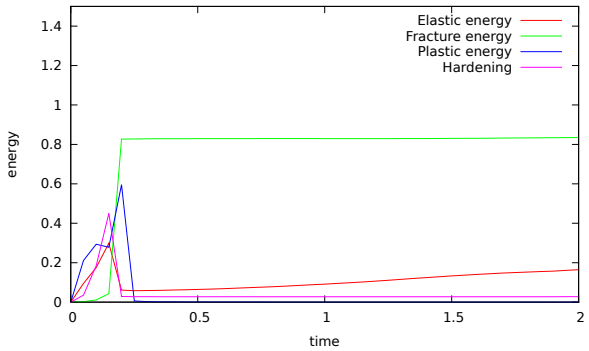

FIGURE 5.62 – Expérience 4- Energies, $\varepsilon = 0.085$, $\triangle x \sim 0.017$, $h = 0,05$.

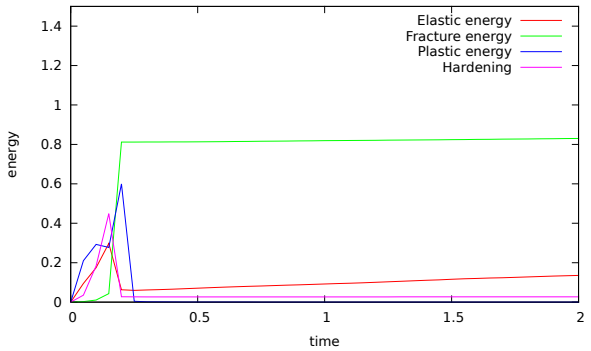

FIGURE 5.63 – Expérience 4- Energies, $\varepsilon = 0.085$, $\triangle x \sim 0.008$, $h = 0.05$.

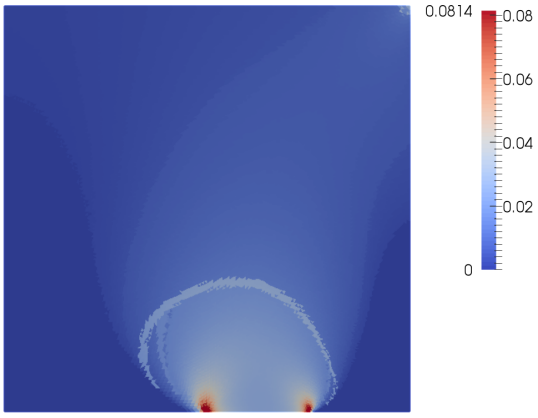

FIGURE 5.64 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.025$, $h = 0.025$.

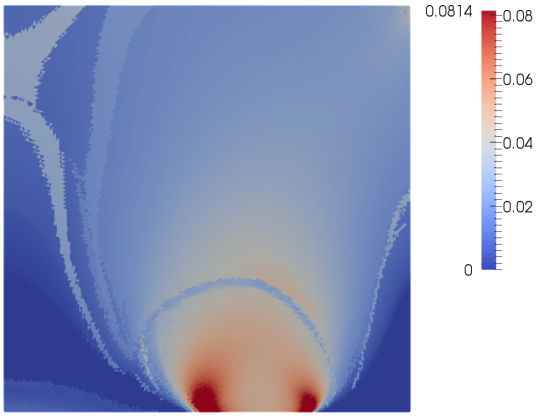

FIGURE 5.65 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.05$, $h = 0.025$.

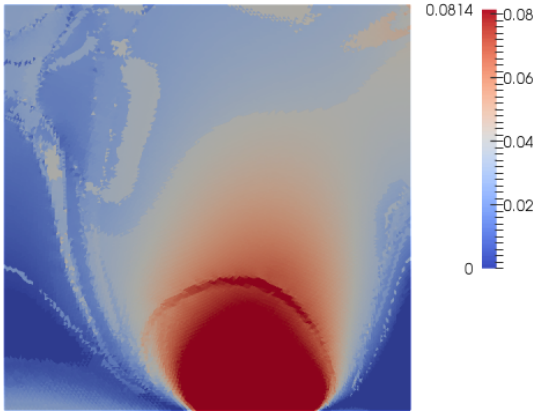

FIGURE 5.66 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.075$, $h = 0.025$.

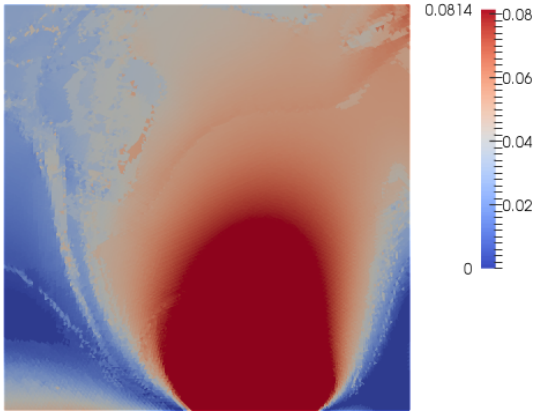

FIGURE 5.67 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.1$, $h = 0.025$.

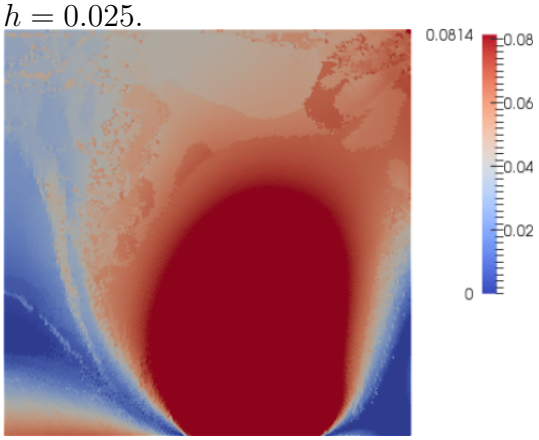

FIGURE 5.68 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.125$, $h = 0.025$.

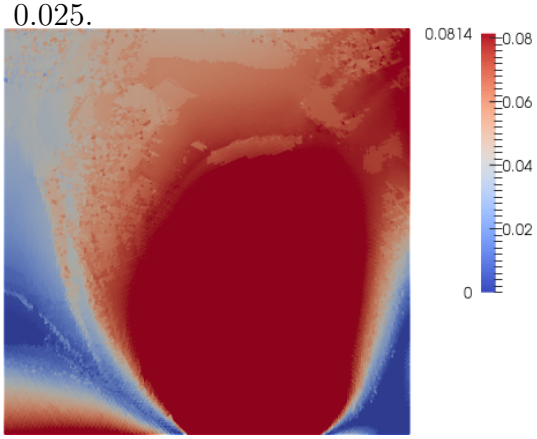

FIGURE 5.69 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.15$, $h = 0.025$.

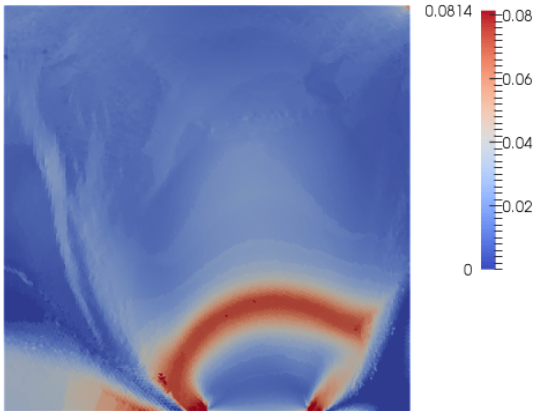

FIGURE 5.70 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 0.175$, $h = 0.025$.

FIGURE 5.71 – Expérience 4- Profil de $v(t,.)$-approximation de la rupture au temps $t = 0.175$, $h = 0.025$.

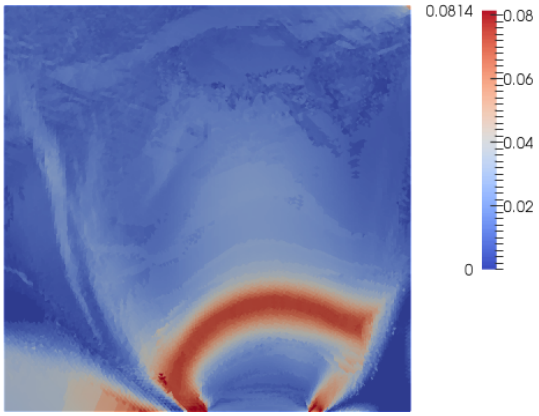

FIGURE 5.72 – Expérience 4- $|p(t,.)|$ au temps $t = 2$, $h = 0.025$.

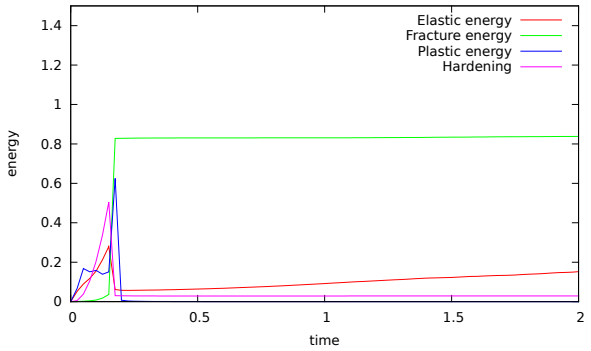

FIGURE 5.73 – Expérience 4- Energies, $\varepsilon = 0.085$, $\triangle x \sim 0.017$, $h = 0.025$.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons implémenté des modèles 1,2 et 3 en 1D sur l'expérience de la traction d'une barre 1D et le modèle 3 sur une expérience de traction 2D et de plasticine. Les modèles 1 et 3 paraissent avoir le comportement les plus complexes car ils permettent de mettre en oeuvre plusieurs mécanismes de dissipation simultanément (plasticité et rupture).

Pour le modèle 3, ceci s'explique par la possibilité de translater le convexe de plasticité. En effet, l'énergie élastique peut augmenter après la plastification et donc le mécanisme de rupture peut se déclencher. La simulation numérique du modèle 3 dans le cadre de l'expérience de plasticine nous paraît qualitativement être en bon accord avec les premières étapes de l'expérience analogue de Tapponnier et Peltzer.

Nous avons étudié le modèle 3 en fonction de différents paramètres mécaniques et nous concluons que le modèle est sensible à ces paramètres, surtout concernant de ε. Pour certain choix de paramètres (par exemple Expérience 4) nous pouvons localiser la déformation plastique le long de la rupture ce qui nous paraît aussi en bon accord avec la théorie de la rupture ductile, où l'apparition de la fissure est précédée par la déformation anélastique.

Nous avons aussi testé la robustesse des algorithmes en variant le pas de discrétisation en temps et en espace, et les calculs obtenus nous paraissent qualitativement stables.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Le travail présenté porte sur la modélisation, l'analyse et simulations numériques de matériaux solides combinant différents mécanismes de dissipation : plasticité, viscoplasticité, viscoélasticité, écrouissage cinématique linéaire et rupture.

Ce travail a été motivé par des discussions avec des géophysiciens qui s'intéressent à la modélisation de la croûte terrestre et en particulier à la modélisation de grandes failles à l'échelle du continent asiatique. Nous avons essayé de nous approcher de leurs préoccupations via une classe de modèles mathématiques et numériques qui pourraient reproduire (au moins partiellement) l'expérience de Peltzer et Tapponnier qui est un modèle analogue de localisation de failles dans la croûte terrestre.

Nos modèles sont basés seulement sur l'observation qualitative de cette expérience. Maintenant nous disposons d'outils numériques qui pourraient être utilisés pour des comparaisons quantitatives avec l'expérience de Peltzer et Tapponnier.

Tout d'abord, nous avons construit une classe de modèles d'évolution combinant plusieurs phénomènes dissipatifs et avons montré une inégalité thermodynamique de type Clausius-Duhem.

Ensuite, point de vue de l'analyse mathématique de nos 4 modèles, l'existence des évolutions a été prouvée pour le modèle d'évolution élasto-viscoplastique avec rupture (Modèle 1) et pour le modèle d'évolution élasto-viscoplastique avec écrouissage cinématique linéaire et rupture approchée utilisant le r-Laplacien (Modèle 4).

Enfin, nous avons étendu l'algorithme de backtracking aux matériaux à mémoire. Numériquement, nous avons montré que les modèles 1 et 3 paraissent avoir les comportements les plus complexes car ils permettent de mettre en oeuvre plusieurs mécanismes de dissipation simultanément (plasticité et rupture). En plus, le modèle 3 nous a permis reproduire numériquement les premières étapes de l'expérience de Tapponnier et Peltzer pour

certains choix de paramètres mécaniques.

Présentons maintenant quelques pistes que nous pourrions suivre à l'issue de cette thèse.

Perspectives de ce travail en 5 problèmes

A la fin de ce travail, j'ai envie de présenter au lecteur quelques problèmes qui restent ouverts à l'issue de cette thèse et sur lequels j'ai envie continuer à travailler. Les perspectives presentées concernent la modélisation mathématique, l'analyse des EDPs et le calcul numérique.

Modélisation et analyse mathématique

Problème 1

Il serait intéressant d'étudier un modèle d'évolution élasto-plastique avec écrouissage cinématique et rupture via un principe de minimisation et une égalité d'énergie. Cela revient à remplacer le modèle 3 par un modèle 3' : Pour $w \in H^1([0,T], H^1(\Omega))$, nous définissons l'ensemble cinématiquement admissible

$$A(w(t)) := \{(e,p) \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}) \times L^2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})\, t.q. \text{ il existe } u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \\ \text{t.q. } E(u) = e + p, \text{ et } u = w(t) \text{ sur } \partial\Omega_D\}.$$

L'évolution du modèle est définie par le triplet de fonctions $(e,p,v) : \Omega \times [0,T_f] \to \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}} \times \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $t \in [0,T]$, $(e(t),p(t)) \in A(w(t))$, $0 \le v(t) \le 1$, $v(t) = 1$ sur $\partial\Omega_D$,
- pour tout $0 \le s \le t \le T$: $v(t) \le v(s)$;
- la stabilité globale : pour tout $t \in [0,T]$, pour tout $(\xi, q) \in A(w(t))$, pout tout $z \in H^1(\Omega)$, tel que $0 \le z \le v(t)$ sur Ω, $z = 1$ sur $\partial\Omega_D$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{el}(e(t),v(t)) \;&+\; \mathcal{E}_S(v(t)) + \mathcal{E}_h(p(t)) \\ &\le\; \mathcal{E}_{el}(\xi,z) + \mathcal{E}_S(z) + \mathcal{E}_h(q) + \tau \int_\Omega |q - p(t)|\, dx \end{aligned}$$

- le principe de conservation d'énergie : pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{el}(e(t),v(t)) + \mathcal{E}_S(v(t)) + \mathcal{E}_h(p(t)) + \tau \int_0^t \int_\Omega |\dot{p}(s)|\, dx\, ds \\ =\;& \mathcal{E}_{el}(e(0),v(0)) + \mathcal{E}_S(v(0)) + \mathcal{E}_h(p(0)) \\ +\;& \int_0^t \int_\Omega (v(s)^2 + \eta) Ae(s) : E\dot{w}(s)\, dx\, ds \end{aligned}$$

Le modèle 3' rentre dans un cadre des modèles d'évolution indépendant des vitesses proposé par A. Mielke [52]. Il serait intéressant de chercher un résultat d'existence des solutions pour le modèle 3 ou pour le modèle 3'. Pour le moment, nous n'avons pas suffisamment de compacité pour la déformation élastique e ou plastique p. En effet les outils de Γ-convergence utilisés par A. Giacomini [37] dans le cas élastique ne s'appliquent pas en présence de plasticité. Nous avons essayé d'utiliser les techniques de Dal Maso-Toader [25] de passage à la limite en temps dans leur modèle élasto-plastique avec rupture et les combinées avec le travail d'A. Giacomini [37] mais sans arriver à conclure.

Problème 2

Pour prouver l'existence des solutions du modèle 2, en présence de la viscoplasticité, on pourra utiliser les mêmes techniques que dans le papier de Babadjian, Francfort et Mora [5], i.e. de montrer que les approximations élastiques constantes e_h^+ et linéaires par morceaux e_h sont de Cauchy dans $L^\infty(0,T,L^2(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}))$. Cet argument pourra nous permettre d'établir l'existence des evolutions du modèle 2. Or en présence de rupture v nous sommes amenés à résoudre un passage à la limite dans des termes supplémentaires. Pour palier ce problème, nous avons été amenés à étudier la régularité de la rupture v. En particulier, nous voulons savoir si v a plus de régularité en espace que $H^1(\Omega,\mathbb{R})$. En étudiant la régularité des solutions dans les inégalités variationnelles [38], [39], nous pouvons montrer dans le cas du modèle 1 seulement (car $e_h^n \in L^\infty(\Omega,\mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}})$) que v_h^n est localement Hölder continue en espace.

Théorème 5.7.1 *Soit v_h^n la solution de (3.8). Supposons que $\nabla v_h^{n-1} \in L^{2,\lambda_0}_{loc}(\Omega)$ avec $0<\lambda_0<2$. Alors v_h^n est localement Hölder-continue.*

La régularité de v_h^n dépend de mémoire de l'évolution semi-discrète en temps et donc on n'arrive pas à conclure sur la régularité pour le champ v limite quand le pas de discrétisation en temps converge $h \to 0$. L'autre difficulté liée à ce problème est l'extension de régularité jusqu'au bord du domaine.

Problème 3

Un autre problème de modélisation est d'introduire dans nos modèles le glissement des blocs de plasticine le long des failles. Les modèles proposés dans cette thèse sont formés en petites déformations, mais on pourrait envisager de construire une autre classe de modèles en grandes déformations ou bien des modèles à deux échelles de temps couplant structure fluide-solide. On pourrait imaginer que sur des grandes échelles de temps l'écoulement

plastique soit fluide et qu'à petite échelle le comportement élastique solide soit quasi-statique.

Etude numérique et simulations

Problème 4

Nous voulons améliorer notre code de calcul en tenant compte numériquement de la condition d'irréversibilité de rupture $v \leq v_h^{n-1}$. Bourdin dans [10], Amor dans [2] résolvent le problème d'irréversibilité en considérant le problème de minimisation dans la direction de v comme un problème de minimisation sous contrainte. Afin de simplifier le problème de minimisation suivant v, au lieu de minimiser sous contrainte, on ajoute un terme d'énergie lié à l'irréversibilité :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega v^2 (1 - v_h^{n-1})^2 \, dx. \tag{5.15}$$

Pour le moment, nous n'avons pas encore établi correctement la validité de ce modèle énergétique d'irréversibilité.

Numériquement, nous avons testé nos modèles pour différents paramètres mécaniques pour avoir une idée de leur comportement et savoir si un phénomène dissipatif domine un autre. Même dans des cas simples (traction d'une barre 1D), il n'est pas facile de comprendre la dynamique de l'évolution de manière analytique.

Il faudra aussi étudier plus en détail la stabilité des schémas numériques utilisés. Le calcul numérique pour l'expérience de la plasticine n'exclut pas d'autre régimes (élasticité et rupture seulement). Nous ne pouvons non plus assurer que pour d'autres paramètres du modèle, la géometrie des fissures soient identique, vu la sensibilité des modèles aux paramètres.

La méthode de backtracking ne donne qu'une condition nécessaire pour des minima globaux des problèmes de minimisation étudiés. Il serait intéressant de réfléchir à une autre stratégie numérique d'élimination des points critiques qui ne sont pas des minimuma globaux.

Problème 5

Un autre challenge numérique consiste à tester nos modèles sur l' expérience analogique de déformation d'une couche de sable [51], Figure 5.74. Cette expérience reproduit l'épaississement de la lithosphère terrestre, par empilement successif d'écailles le long de chevauchements (faille le long de laquelle le bloc du dessus chevauche celui du dessous). La déformation est

principalement localisée le long de ces chevauchements, les écailles entre sont peu déformées. C'est ce processus qui est à l'origine de la formation de la chaine de l'Himalaya, avec 4 chevauchements successifs qui s'activent au cours de la collision. Les codes utilisés dans la communauté géophysique ont été testés sur cette expérience classique [17]. Dans ces modèles, la localisation de la déformation est obtenue avec un comportement plastique utilisant le critère de Mohr-Coulomb. Une comparaison d'une simulation de cette expérience avec nos modèles élasto-plastiques avec rupture, serait un bon test comparatif.

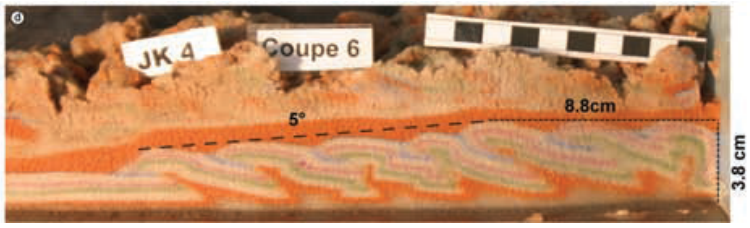

FIGURE 5.74 – Coupe montrant la déformation localisée sur des chevauchements successifs d'une couche de sable de 1,5 cm d'épaisseur après 20 cm de convergence provoquée par la traction du support sous le sable [54].

Bibliographie

[1] L. Ambrosio et V.M. Tortorelli, *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via* Γ*-convergence,* Comm. Pure Appl. Math., 1990, XLIII, 999–1036.

[2] H. Amor, *Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris via des modèles non-locaux d'endommagement : Etude théorique et mise en œuvre numérique,* Thèse de Doctorat, Université Paris Nord, 2008.

[3] G. Anzellotti and S. Luckhaus, *Dynamical evolution in elasto-perfectly plastic bodies* Appl. Math. Opt. 15, 121-140, 1987.

[4] J.-F. Babadjian, *Méthodes variationnelles pour l'étude de milieux dissipatifs : applicationen rupture, endommagement et plasticité,* Habilitation à diriger des recherches, 2013.

[5] J.-F. Babadjian, G.A. Francfort, M.G. Mora, *F Quasistatic evolution in non-associative plasticity - the cap model,* SIAM Journal on Mathematical Analysis, 44, no. 1,245-292, 2012.

[6] J.-F. Babadjian, V. Millot, *Unilateral gradient flow of the Ambosio-Tortorelli functional by minimizing movements,* To appear in Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire.

[7] J.-F. Babadjian, M.G. Mora, *Approximation of dynamic and quasi-static evolution problems in elasto-plasticity by cap models,* Preprints, 2012.

[8] Bajolet F., Replumaz A., Lainé R., *Orocline and syntaxes formation during subduction and collision,* Tectonics, 32, 1–18, 2013.

[9] E. Bonnetier, L. Jakabčin, S. Labbé, A. Replumaz, *Numerical simulation of a class of models that combine several mechanisms of dissipation : fracture, plasticity, viscous dissipation,* Journal of Computational Physics 271, 397-414, 2014,

[10] B. Bourdin, *The variational formulation of brittle fracture : numerical implementation and extensions,* in IUTAM Symposium on Discretization methods for evolving discontinuities, Springer, 381-393, 2007.

[11] B. Bourdin, *Numerical implementation of the variational formulation of brittle fracture.* Interfaces Free Bound, 9, p. 411-430, 2007.

[12] B. Bourdin, *Une formulation variationnelle en mécanique de la rupture, théorie et mise en oeuvre numérique,* Thèse de Doctorat, Université Paris Nord, 1998.

[13] B. Bourdin, C. J. Larsen, C. Richardson, *A time-discrete model for dynamical fracture based on crack regularization,* Int. J. Fracture 168(2) 2011.

[14] B. Bourdin, G. Francfort and J.J. Marigo, *Numerical experiments in revisited brittle fracture,* J. Mech. Phys. Solids 48, no. 4, P. 797-826, 2000.

[15] B. Bourdin, G. Francfort and J.J. Marigo, *The variational approach to fracture.* J. Elasticity 91, no. 1-3, 1-148, 2008.

[16] A. Braides, Γ- *convergence for beginners,* Volume 22 od oxford Lecture series in Mathematics ant its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[17] Buiter, S. J. H., et al. *The numerical sandbox : Comparison of model results for a shortening and an extension experiment,* Book Series : Geological Society Special Publication, 253, p 29-64, 2006.

[18] A. Chambolle, *An approximation result for special functions with bounded deformation,* Journal de mathématiques pures et appliquées 84, 929-954, 2004.

[19] A. Chambolle, *A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications,* Arch Ration. Mech. Anal. 167(3), 211-233, 2003

[20] A. Chambolle, A. Giacomini, M. Ponsiglione, *Crack initiation in brittle materials,* Arch. Ration. Mech. Anal. 188, p. 309-349, 2008.

[21] G. Dal Maso, A. De Simone, M. G. Mora, *Quasistatic evolution problems for linearly elastic-perfectly plastic materials,* Arch. Rational Mech. Anal. 180, 237-291, 2006.

[22] G. Dal Maso, A. De Simone, M. G. Mora, M.Morini, *A vanishing viscosity approach to quasistatic evolution in plasticity with softening,* Arch. Ration. Mech. Anal. 189 (2008), 469-544.

[23] G. Dal Maso, A. De Simone, F. Solombrino, *Quasistatic evolution for Cam-clay plasticity : A weak formulation via viscoplastic regularization and time rescaling,* Calculus of Variations and Partial Differential Equations 40, 125-181, 2011.

[24] G. Dal Maso, R. Scala ; *Quasistatic evolution in perfect plasticity as limit of dynamic processes,* Preprint, CVGMT, 2014.

[25] G. Dal Maso and R. Toader, *Quasistatic crack growth in elasto-plastic materials : the two-dimensional case,* Archive for Rational Mechanics and Analysis 196, 867–906, 2010.

[26] G. Dal Maso and R. Toader, *A model for the quasi-static growth of brittle fracture : existence and approximation results,* Arch. Rational Mech. Anal., 162, 101-135, 2002.

[27] N.Dunford and J.T.Schwartz, *Linear operators. Part I,* Wiley Classics Library. John Wiley and Sons Inc.,New York, 1988.

[28] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique,* Dunod, Paris, 1972.

[29] P. England and G. Houseman, *Extension during continental convergence, with application to the Tibetan plateau,* J. Geophys. Res. 94, 17561–17579, 1989.

[30] P. England and P. Molnar, *Active deformation of Asia : from kinematics to dynamics,* Science 278, 647–650, 1997.

[31] L. C. Evans, *Partial differential equations,* Graduate studies in Mathematics, AMS, Rhode Island, 1998.

[32] L. C. Evans and R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions,* CRC Press, Boca Raton, 1992.

[33] M. Focardi, *On the variational approximation of free discontinuity problems in the vectorial case,* Math Models Methods Appl. Sci. 11, p. 663-684 ;, 2001.

[34] G. Francfort, C. Larsen, *Existence and convergence for quasi-static evolution in brittle fracture,* Commun. Pure Appli. Math, 56(10), 1465-1500, 2003.

[35] G. Francfort and J.-J. Marigo, *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem,* J. Mech. Phys. Solids 46, 1319-1342, 1998.

[36] G. Francfort and U. Stefanelli, *Quasistatic Evolution for the Armstrong-Frederick Hardening-Plasticity Model,* Applied Maths. Res. Express, vol.2, 2013, 297-344.

[37] A. Giacomini, *Ambrosio-Tortorelli approximation of quasi-static evolution of brittle fracture,* Calculus of Variations and PDE, 22, p. 129-172.

[38] M. Giaquinta, *Remarks on the regularity of weak solutions to some variational inequality,* Math. Zeit. 177, p.15-31, 1981.

[39] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems,* Princeton university press, Princeton, New Jersey, 1983.

[40] A. Griffith, *The phenomena of rupture and flow in solids,* Philos. Trans. R. Soc.Lond. Ser A221, 133-178, 1920.

[41] M. E. Gurtin, E. Fried, L. Anand, *The mechanics and thermodynamics of continua,* Cambridge University Press, 2009.

[42] B.Halphen and Q.S. Nguyen, *Sur les matériaux standard généralisées,* J.Méca.14, 39-63, 1975.

[43] W. Han, B. Daya Reddy, *Mathematical Theory and Numerical Analysis,* Springer-Verlag New York, Inc, 1999.

[44] C. Johnson, *Existence theorems for plasticity problems,* J. Math. Pures Appl. 55, p. 431-444, 1976.

[45] P. Laborde, *Analyse mathématique de problèmes en théorie de la plasticité,* Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux 1, 1984.

[46] P. Laborde, *Analysis of the strain-stress relation in plasticity with non-associative laws,* Int. J. Engrg Sci. 25, 655–666, 1987.

[47] P. Laborde, *A non-monotone differential inclusion,* Nonlin. Anal. Theory, Math. and Appl. 11, 757–767, 1986.

[48] C. J. Larsen, *Models for dynamic fracture based on Griffith's criterion,* In IUTAM SYmp. on Variational Concepts with Applications th the Mechanics of Materials.

[49] C. J. Larsen, C. Ortner, E. Suli, *Existence of solutions to a regularized model of dynamic fracture,* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 20 , p. 1021-1048. 2010.

[50] A. Mainik, A. Mielke, *Existence results for energetic models for rate-independent systems,* Calc. Var. PDEs, 22, p. 73-99, 2005.

[51] J. Malavieille, *Modélisation expérimentale des chevauchements imbriqués : application aux chaînes de montagnes,* Bulletin de la Société Géologique de France, 26 : 129-138, 1984.

[52] A. Mielke, *Evolution of rate-independent systems,* Evolutionary equations. Handbook of Differential Equations, Vol. II (Eds. Dafermos C.M. and Feireisl E.) Elsevier/North-Holland, Amsterdam, p. 461-559, 2005.

[53] G. Peltzer and P. Tapponnier, *Formation and evolution of strike-slip faults, rifts, and basins during the India-Asia collision : An experimental approach,* Journal of geophysical research, vol. 93, no. B12, pages 15,085-15,117, 1988.

[54] Replumaz, A., et al., *East-west shortening during north-south convergence, example of the NW Himalayan syntaxis,* Australian Journal of Earth Sciences, 59(6), 845–858, 2012.

[55] P. Suquet, *Sur les équations de la plasticité : existence et régularité des solutions,* J. Mécanique 20, p.3-39, 1981.

[56] P. Suquet, *Evolution problems for a class of dissipative materials,* Quart. Appl. Math. 38, p. 391-414, 1981.

[57] P. Suquet, *Un espace fonctionnel pour les équations de plasticité,* Ann. Fac. Sc. Toulouse 1, p 77-87, 1979.

[58] P.L. Tallec, *Numerical Analasis of Viscoelastic Problems,* Masson, France, 1990.

[59] R. Temam, *Mathematical problems in plasticity,* Gautiers-Villars, Paris, 1985.