



**HAL**  
open science

# Localisation par retournement temporel de sources acoustiques supersoniques en milieu réverbérant

Guillaume Mahenc

► **To cite this version:**

Guillaume Mahenc. Localisation par retournement temporel de sources acoustiques supersoniques en milieu réverbérant. Acoustique [physics.class-ph]. Conservatoire national des arts et metiers - CNAM, 2016. Français. NNT : 2016CNAM1075 . tel-01552186

**HAL Id: tel-01552186**

**<https://theses.hal.science/tel-01552186v1>**

Submitted on 1 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale Sciences et Métiers de l'Ingénieur

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés

## **THÈSE DE DOCTORAT**

*présentée par* : **Guillaume MAHENC**

*soutenue le* : **6 décembre 2016**

*pour obtenir le grade de* : **Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**

*Discipline / Spécialité* : **Mécanique**

# **Localisation par retournement temporel de sources acoustiques supersoniques en milieu réverbérant**

### **THÈSE DIRIGÉE PAR**

M. MELON Manuel  
M. BAVU Éric

*Professeur des universités, LAUM, UMR CNRS 6613, Le Mans*  
*Maître de conférences, LMSSC, EA 3196, Paris*

### **RAPPORTEURS**

M. DE ROSNY Julien  
M. MARCHIANO Régis

*Directeur de recherche, Institut Langevin, UMR CNRS 7587, Paris*  
*Professeur des universités, IJLRA, UMR CNRS 7190, Paris*

### **EXAMINATEURS**

M. GIBIAT Vincent  
M. HAMERY Pascal  
M. HENGY Sébastien  
M. SIMON Laurent

*Professeur des universités, PHASE, EA 3028, Toulouse*  
*Docteur en acoustique, ISL, Saint-Louis*  
*Docteur en acoustique, ISL, Saint-Louis*  
*Professeur des universités, LAUM, UMR CNRS 6613, Le Mans*



C'est seulement dans la perspective de grands récits de légitimation, vue de l'esprit et/ou émancipation de l'humanité, que le remplacement partiel des enseignants par des machines peut paraître déficient, voire intolérable. Mais il est probable que ces récits ne constituent déjà plus le ressort principal de l'intérêt pour le savoir. Si ce ressort est la puissance, cet aspect de la didactique classique cesse d'être pertinent. La question, explicite ou non, posée par l'étudiant professionnel, par l'Etat ou par l'institution d'enseignement supérieur n'est plus : est-ce vrai ?, mais : à quoi ça sert ? Dans le contexte de mercantilisation du savoir, cette dernière question signifie le plus souvent : est-ce vendable ? Et dans le contexte de l'augmentation de la puissance : est-ce efficace ? Or la disposition d'une compétence performante paraît bien devoir être vendable dans les conditions précédemment décrites, et elle est efficace par définition. Ce qui cesse de l'être, c'est la compétence selon d'autres critères, comme le vrai/faux, le juste/injuste, etc., et évidemment la faible performativité en général.

Jean-François Lyotard, *Les problèmes du savoir dans les sociétés industrielles développées*

126. Quand une société plus complexe en vient à prendre conscience du temps, son travail est bien plutôt de le nier, car elle voit dans le temps non ce qui passe, mais ce qui revient. La société statique organise le temps selon son expérience immédiate de la nature, dans le modèle du temps *cyclique*.

158. Le spectacle, comme organisation sociale présente de la paralysie de l'histoire et de la mémoire, de l'abandon de l'histoire qui s'érige sur la base du temps historique, est *la fausse conscience du temps*.

174. Le moment présent est déjà celui de l'autodestruction du milieu urbain.

Guy Debord, *La société du spectacle*

La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle. Sans doute nous devons d'abord nous efforcer de soulager les souffrances humaines, mais pourquoi ? Ne pas souffrir, c'est un idéal négatif et qui serait plus sûrement atteint par l'anéantissement du monde. Si nous voulons de plus en plus affranchir l'homme des soucis matériels, c'est pour qu'il puisse employer sa liberté reconquise à l'étude et à la contemplation de la vérité.

Henri Poincaré, *La valeur de la science*

Car enfin, soit que nous veillions, soit que nous dormions, nous ne nous devons jamais laisser persuader qu'à l'évidence de notre raison. Et il est à remarquer que je dis de notre raison, et non point de notre imagination ni de nos sens : comme encore que nous voyions le soleil très clairement, nous ne devons pas juger pour cela qu'il ne soit que de la grandeur que nous le voyons ; et nous pouvons bien imaginer distinctement une tête de lion entée sur le corps d'une chèvre, sans qu'il faille conclure pour cela qu'il y ait au monde une chimère : car la raison ne nous dicte point que ce que nous voyons ou imaginons ainsi soit véritable ; mais elle nous dicte bien que toutes nos idées ou notions doivent avoir quelque fondement de vérité ; car il ne seroit pas possible que Dieu, qui est tout parfait et tout véritable, les eût mises en nous sans cela.

René Descartes, *Discours de la méthode*



## REMERCIEMENTS

**J**E remercie mes quatre directeurs de thèse, Eric, Pascal, Sébastien et Manu pour leur patience et leur abnégation à m'avoir encadré au long de ces trois palpitantes années d'une thèse riche en rebondissements acoustiques. J'adresse de chaleureux remerciements à Julien de Rosny et Régis Marchiano, qui m'ont fait l'honneur de lire avec attention mon manuscrit et de me conseiller de remanier le dernier chapitre afin de lui conférer une plus solide rigueur scientifique. Je remercie également Vincent Gibiat qui a accepté de présider le jury de ma soutenance et Laurent Simon d'en avoir fait partie.

Je remercie l'ensemble des membres des deux institutions m'ayant accueilli pour mes travaux : à Paris, le Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, dont l'équipe d'acoustique est dirigée par Alexandre Garcia, et à Saint-Louis en Alsace l'équipe Acoustique et Protection du Combattant de l'Institut Saint-Louis, dirigée par Pierre Naz, que je remercie tous deux. Un merci tout particulier à Sarah Poirée, technicienne musclée dont l'aide fut précieuse lors des expériences pioupiesques, et qui porta avec bonne humeur la double casquette de collègue et de colocataire durant ma dernière année. Sur les montages expérimentaux, je remercie vivement Laurent Gross qui a monté deux lignes de haut-parleurs avec l'habileté d'un orfèvre. Merci à Philippe Kempff pour son aide avec Linux et l'informatique en général, et pour le dévouement dont il fait preuve à l'encontre de tous ses collègues. Merci à tous les autres doctorants avec qui j'ai partagé des bureaux et des cafés (mais pas que) : Stéphanie, Pierre, Boris, Aro, Benjamin, Martin, Olivier côté parisien, Thomas, Guillaume, Johanna côté alsacien. Merci aussi au groupe de musique de l'ISL pour de chouettes moments de détente (ainsi qu'un match de rugby particulièrement endiablé), en particulier à Virginie Andrès qui m'aura de surcroît fait découvrir de chouettes paysages des Vosges. Merci à l'administration de l'ISL, à Eliane Hengy et Martine Vithu pour leur aide sur les démarches d'inscription, ainsi qu'à Myriam Starck et Laurent Blind pour leur aide sur les démarches concernant le chômage. Un grand *thank you* à Katie Smith pour ses conseils de rédaction dans la langue de Shakespeare, et pour être *so British*.

Au-delà du strict cadre de la thèse, il me faut bien remercier d'autres personnes qui ont fait ma vie durant ces trois années. Merci à ma famille : à mes parents, qui ont fait ma vie tout court, et donc sans qui rien de tout cela n'aurait été possible, et qui malgré la distance m'ont toujours aidé et toujours soutenu ; à mon frère, coloc de la première année, qui a validé son Master de physique fondamentale l'année de ma soutenance, et qui a l'âme d'un grand physicien. Merci aux copains de la licence, avec qui nous formons un noyau dur de camaraderie bucolique et néanmoins scrupuleusement scientifique, et qui sont tous docteurs ou sur le point de le devenir : Yann, Paul, Martin (Haddock's Eyes pour la vie), Benoît, Romain, Yoann, Clément M., Clément S. et Anaïs (*in the strong* jusqu'à Istanbul), Maud, ainsi que Marico, Pierre, Anastasia, et tous les autres. J'adresse mes hommages à la fondation hellénique de la cité universitaire internationale de Paris pour ses admirables soirées de musique, de danse et autres dionysies savamment orchestrées par Melina, que je remercie pour sa générosité et la grandeur de son âme. Merci également à Sandro, philologue hors-pair, pour les discussions érudites dans les piales de cité u, et à Fabricio, vraiment vraiment. *Çok teşekkür ederim* Begüm pour m'avoir fait découvrir la grande beauté de la Turquie. Un grand merci à Ô-liostère : *pandit ustad guru* Lionel, Stéphanie, YéYé, *sadiqi* Ahmed Ossama, Éric et Émile, pour m'avoir accueilli dans ce projet clavique incroyable, pour votre patience lors de mon laborieux apprentissage rythmique, pour cette session studio endiablée de juillet en pleine rédaction du manuscrit, enfin pour l'esprit ultra-créatif qui règne dans ce groupe.

Et bien sûr merci à l'Être nécessaire, par qui tout existe, et qui, en créant les lois et les problèmes scientifiques, a donné du travail aux chercheurs !



# RÉSUMÉ

ON s'intéresse à la localisation de l'axe du cône de Mach lié au déplacement supersonique d'une source acoustique en milieu réverbérant à l'aide d'un nombre limité de microphones. L'application faisant l'objet du financement doctoral est la localisation de tireurs embusqués, dans le cadre de la protection du combattant. Le principe du retournement temporel stipule que, lors de la réémission des mesures renversées dans le temps depuis leurs positions respectives, tout se passe comme si le champ de pression acoustique se propageait en remontant le temps et focalisait à l'endroit de la distribution de sources. Cette focalisation est d'autant plus efficace que les positions de capteurs ont tendance à former une surface fermée autour des sources, en vertu de la formule de Kirchhoff-Helmholtz. Dans la perspective d'une méthode physiquement et métrologiquement implémentable, on considère une distribution discrète de microphones, disposés à hauteur  $z$  constante, dans un environnement réverbérant reproduisant la géométrie d'une rue rectiligne. Le problème présente des contraintes pratiques affectant sa géométrie. On cherche à les exploiter de façon parcimonieuse. Dans une première approche, on considère une répartition régulière de 44 microphones au niveau du sol. Le déplacement supersonique est modélisé du point de vue du principe de Huygens-Fresnel comme une sommation de sources monopolaires. Cela permet une formulation analytique du problème direct pouvant être résolue par des simulations numériques simples (schémas convolutifs des termes sources par la fonction de Green du milieu avec une réverbération de type source-image) en accord avec un montage expérimental (synthèse de cône de Mach au moyen d'une ligne de haut-parleurs). La résolution du problème inverse se fait en calculant numériquement le champ rétropropagé depuis les positions des microphones jusque dans des tranches verticales disposées le long de la rue. L'utilisation d'un critère statistique spatiotemporel d'ordre 4 (kurtosis) permet de réduire la contribution des termes de sources dans le champ rétropropagé, à l'origine d'une divergence du champ de pression autour des positions de microphones. L'axe du cône de Mach peut alors être localisé avec une bonne précision angulaire. Dans une deuxième approche, on considère un front d'onde conique réel, en déplacement supersonique, du point de vue de la géométrie dynamique de l'espace-temps. Les temps d'arrivée obéissent alors à des lois de retard bien précises par rapport à leur émission depuis le point-source équivalent sur l'axe de déplacement du projectile. Notre modèle de réverbération tient compte de la finitude des murs réverbérant, ce qui s'avère nécessaire pour bien évaluer les réflexions. Une telle étude géométrique du mouvement donne lieu à des estimations de temps d'arrivée relatifs (par rapport au signal direct) qui sont comparés à des signaux de mesure (de tirs de fusil à calibre supersonique en environnement réverbérant). Elle permet de prédire un nombre considérable de pics correspondant à l'arrivée au point de mesure des signaux impulsionnels réfléchis, en tenant compte des ordres de réflexion pariétale (limités toutefois par la géométrie conique de l'onde) et de la réflexion au sol, la hauteur des microphones étant fixée à  $z = 50$  cm. On établit ainsi une modélisation du problème direct. La réverbération n'a pas un effet aussi bénéfique dans le cadre d'une source supersonique réelle que dans le cas d'une source statique, ni même que dans celui de la ligne de haut-parleurs, car la source supersonique présente des contraintes géométriques particulières dont le retournement temporel ne tient pas compte, étant donnée la différence de géométrie des ondes directe (un cône) et retournée dans le temps (une superposition d'ondes sphériques). Cependant, la focalisation autour du passage de l'axe est observée dans les tranches verticales, avec une qualité dépendant fortement de l'agencement de l'antenne de microphones : sur les 9 configurations testées expérimentalement, une seule permet la résolution du problème inverse.

## Mots clés :

retournement temporel, acoustique, réverbération, cône de Mach



# ABSTRACT

**W**E are interested into the localisation of the Mach cone — created by the supersonic motion of an acoustic source into a reverberant medium — by means of a limited amount of microphones. The application concerns sniper localisation, hence protection of the soldier. Theory of time-reversal states that when reemitting measures reversed in time from their respective positions, everything happens as if the pressure field were propagating travelling backwards in time and focused on the source distribution. This result is enhanced when the microphone distribution over space forms a closed surface surrounding the sources, according to Kirchhoff-Helmholtz formula. Aiming at a physically and technologically implementable method, we consider a discrete distribution of microphones, disposed at a constant height  $z$  in a reverberating area reproducing the geometry of a straight narrow street. The problem shows specific constraints due to its specific geometry that we aim to use sparsely. In a first approach, we consider a regular repartition of 44 microphones at  $z = 0$ . The supersonic displacement is modeled from the viewpoint of Huygens-Fresnel principle as a discrete sum of monopolar sources which allows an analytical formulation of the direct problem solvable by simple numerical simulations —convolutive schemes of the source termes by the free-field Green function with a reverberation built on image-source theory. This model is in agreement with an experimental framework, were the Mach cone is synthesized by means of a loudspeaker array. The resolution of the inverse problem is made by computing the time-reversed pressure field into vertical slices disposed along the street. The use of a fourth-order spatiotemporal statistical criterion (kurtosis) allows to reduce unwanted contribution of source term causing a divergence around microphone positions. A maximum of kurtosis is observed around the intersection between the time-reversal slice and the Mach cone axis, allowing localisation of the latter with good angular precision. In a second approach, we investigate the previous method on a real Mach cone with only 12 microphones disposed at  $z = 50$  cm in different configurations. It is necessary to adopt the point of view of dynamical space-time geometry to understand the behaviour of the times of arrival of the different image sources. It is also necessary to take into account the finiteness of the reberberating walls. Our geometrical theory of reverberation allows a modelisation of the direct problem in good agreement with experimental measurements. We show that the effect of reverberation does not enhance time-reversed focalisation as well as it does with a static source. This is mainly due to geometric constraints that are not reproduced in the time-reversed wavefront superposition. The resolution of the inverse problem strongly depends on the disposition of the microphone set : on the 9 configurations only one allows detection of the axis.

**Keywords :**

time reversal, acoustics, reverberation, Mach cone

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Résumé</b>	<b>7</b>
<b>Table des matières</b>	<b>10</b>
<b>Table des figures</b>	<b>13</b>
<b>Symboles et notations</b>	<b>14</b>
<b>Introduction</b>	<b>16</b>
<b>1 Le cône de Mach</b>	<b>22</b>
1.1 Potentiel de vitesse d'une source en mouvement . . . . .	24
1.2 Calcul du potentiel de vitesse en approximation linéaire . . . . .	28
1.3 Correction au second ordre pour la pression . . . . .	32
1.4 Phénoménologie des ondes de choc . . . . .	38
<b>2 Simulation d'un cône de Mach en champ libre au moyen d'une ligne de haut-parleurs</b>	<b>42</b>
2.1 Discrétisation du terme source . . . . .	44
2.2 Contraintes d'échantillonnage . . . . .	46
2.3 Filtrage inverse pour la synthèse de la signature acoustique . . . . .	47
2.4 Résultats expérimentaux . . . . .	50
2.5 Condition de recouvrement du support et formation du cône . . . . .	52
2.6 Propagation acoustique depuis une source linéique supersonique . . . . .	56
<b>3 Théorie géométrique de la réverbération</b>	<b>59</b>
3.1 Réverbération spéculaire entre deux murs infinis . . . . .	60
3.2 Un peu de théorie des groupes . . . . .	64
3.3 Réverbération spéculaire entre deux murs finis . . . . .	67
3.4 Étude d'une source linéique à fronts d'onde coniques . . . . .	73
3.5 Réverbération spéculaire dans une boîte . . . . .	77
3.6 Prise en compte du sol . . . . .	79
3.7 Calcul des temps d'arrivée sur des mesures de terrain . . . . .	79
<b>4 Principes du retournement temporel</b>	<b>82</b>
4.1 Théorèmes de Green et formule de Kirchhoff-Helmholtz . . . . .	83
4.2 Focalisation par retournement temporel . . . . .	84
4.3 Prise en compte de la réverbération . . . . .	86
4.4 Exemples d'utilisation . . . . .	88
<b>5 Problème inverse pour la ligne de haut-parleurs</b>	<b>90</b>
5.1 Modélisation . . . . .	91
5.2 Localisation de l'axe du cône de Mach . . . . .	95
<b>6 Retournement temporel sur des mesures de tirs à balles réelles</b>	<b>102</b>
6.1 Description des mesures . . . . .	102
6.2 Traitement des données . . . . .	104
6.3 Simulation numérique non linéaire du problème direct . . . . .	109

<b>7</b>	<b>Utilisation de la transformée de Lorentz</b>	<b>111</b>
7.1	Invariance de Lorentz de l'équation d'onde . . . . .	112
7.2	Application au retournement temporel . . . . .	115
7.3	Résumé des propriétés et ouverture . . . . .	117
	<b>Conclusion</b>	<b>120</b>
<b>A</b>	<b>Cartographie de la focalisation par retournement temporel des 33 mesures en champ de tir</b>	<b>123</b>
<b>B</b>	<b>Vers le retournement temporel non linéaire</b>	<b>129</b>
B.1	Fonctions de Green associées à des équations non linéaires . . . . .	129
B.2	Cadre théorique pour l'analyse fonctionnelle du retournement temporel non linéaire	132
B.3	Problèmes ouverts en analyse non linéaire . . . . .	135
	<b>Bibliographie</b>	<b>141</b>

# TABLE DES FIGURES

1	Différentes étapes, depuis la formation du phénomène physique, jusqu'à la résolution du problème inverse . . . . .	16
2	Génération d'un cône de Mach par un projectile supersonique . . . . .	17
3	Représentation de l'environnement numérique de rétro-propagation et des surfaces de visualisation . . . . .	19
4	Définition des notions de signal et de bruit lors de la focalisation par retournement temporel . . . . .	19
1.1	Source ponctuelle en mouvement dans un fluide compressible. (a) Source stationnaire. (b) Source en déplacement à la moitié de la vitesse du son. (c) Source en déplacement à la vitesse du son. (d) Source en déplacement à deux fois la vitesse du son. (Tiré de [von Karman, 1947, p. 374]) . . . . .	22
1.2	Le « cône de lumière » d'après [Weyl, 1922, p. 150] . . . . .	22
1.3	Représentation schématique du comportement asymptotique de la signature acoustique du cône de Mach (signal en N) . . . . .	23
1.4	Mesure de la signature acoustique du cône de Mach causé par une balle de fusil à environ Mach 2,3 . . . . .	23
1.5	Comportement du discriminant $\Delta$ en fonction du temps d'observation $t$ . . . . .	26
1.6	Système de coordonnées cylindriques pour l'étude d'un écoulement à la vitesse $U$ selon $-x$ . . . . .	28
1.7	Profil d'un projectile en coordonnées cylindriques . . . . .	30
1.8	Représentation du front d'onde (en pointillés) dans le référentiel $(x, r)$ des coordonnées cylindriques . . . . .	31
1.9	(a) Schémas des lignes caractéristiques d'un projectile de forme simple, (b) Fonction $F(y)$ initiale à $r = 0$ , (c) Fonction modifiée $F(y)$ à une distance $r_1$ . (Tiré de [Gottlieb et Ritzel, 1988]) . . . . .	37
1.10	Exemple de profil de la fonction $F(y)$ (i) lorsque le choc avant est formé et avant que le choc arrière ne se forme, (ii) dans une position intermédiaire où les deux chocs sont survenus, (iii) lorsque le signal en N est formé. (Tiré de [Whitham, 1952])	37
1.11	Les différents champs (proche, moyen, lointain) où s'appliquent différentes méthodes d'analyse du cône de Mach. (Tiré de [Gottlieb et Ritzel, 1988]) . . . . .	41
2.1	Propriétés (a) temporelles et (b) fréquentielles du signal en N que l'on cherche à obtenir pour synthétiser un cône de Mach . . . . .	42
2.2	Gros plan sur l'antenne de microphones et la ligne de haut-parleurs . . . . .	46
2.3	Mesure de pression à la position (21, 1) — correspondant à $(x = 42 \text{ cm}, y = 8.5 \text{ cm})$ — de l'émission d'un signal en N idéal . . . . .	47
2.4	Filtrage inverse pour un haut-parleur, mesuré à la position (21, 16) : comparaison entre le signal inverse (bleu) et le signal mesuré (rouge) . . . . .	47
2.5	Disposition de la ligne de haut-parleurs (vert) et de l'antenne de microphones (orange) pour la mesure du front d'onde conique synthétisé. Les points rouges représentent deux points de mesure. . . . .	48
2.6	Filtrage inverse pour un haut-parleur, effectué et mesuré à la position (21, 16) — correspondant à $(x = 42 \text{ cm}, y = 38.5 \text{ cm})$ : comparaison entre un signal en N numérique et la mesure après le filtrage inverse (a) dans le domaine temporel, (b) pour les amplitudes spectrales. . . . .	49

2.7	Comparaison entre la mesure et la simulation numérique de la superposition des signaux en N à la position (21, 16). . . . .	49
2.8	Reconstruction en champ libre du front d'onde conique visualisée à deux instants dans la grille de mesure spatiale. Haut : simulation numérique. Bas : mesure expérimentale (Pa). . . . .	51
2.9	Diagrammes de directivité pour trois distances à l'axe $r$ , mesurés pour $x$ face au milieu de la ligne de haut-parleurs. . . . .	51
2.10	Variations du coefficient $\beta$ par rapport à l'angle de mesure $\theta$ . . . . .	52
2.11	Étude du recouvrement des supports et de la formation du cône de Mach pour différentes vitesses de déplacement de source lors de l'utilisation d'une ligne de haut-parleurs . . . . .	54
2.12	Distorsion du signal en N par la ligne de haut-parleurs . . . . .	56
2.13	Comparaison entre la fonction de Whitham d'un signal en N et la distorsion causée par la propagation supersonique depuis une ligne de haut-parleurs (DCPA=1 m) . . . . .	58
3.1	Une manière de concevoir l'agencement des sources images lors de la réflexion entre deux parois parallèles. . . . .	60
3.2	Tables de la loi de composition interne et de son commutateur . . . . .	67
3.3	Différents cas de réflexion pour une source ponctuelle immobile $A$ lorsqu'elle est située en dehors du milieu réverbérant ( $B$ : point de mesure) . . . . .	70
3.4	Étude géométrique des premières réflexions d'une source linéique dont les fronts d'onde forment un cône de demi-angle $\alpha$ ( $A^0$ : élément de source responsable du signal direct, $A^{\pm 1}$ : éléments de source responsables des réflexions d'ordre $\pm 1$ , $B$ : point de mesure) . . . . .	75
3.5	Étude des réflexions sol-mur et mur-sol . . . . .	79
3.6	Détection des points sources images équivalents sur l'axe de tir et les axes images pour la formulation du problème direct . . . . .	80
3.7	Estimation des temps d'arrivée relatifs superposée aux signaux de pression mesurée. Les amplitudes et durées des N sont déterminés par la théorie asymptotique de Whitham. . . . .	80
5.1	Photo de l'environnement réverbérant expérimental avec la ligne de haut-parleurs et le quadrillage de microphones dans le sol. . . . .	91
5.2	Synthèse par simulation numérique d'un cône de Mach en champ libre. (a) : visualisation 2D du front d'onde conique dans le plan ( $z = 10$ cm). (b) : dépendance temporelle de l'onde. La ligne de source est située selon $x = 0.4$ m et $z = 0$ m constants. Elle est constituée de 801 haut-parleurs espacés régulièrement de 0.5 cm le long de l'axe. . . . .	92
5.3	Vue tridimensionnelle de l'environnement numérique montrant les murs et le sol (en bleu) ainsi que la ligne de sources (en rouge) . . . . .	93
5.4	Focalisation par retournement temporel du cône de Mach dans le plan ( $z = 0$ ). Un ensemble de 128 microphones, régulièrement espacés de 10 cm, est disposé dans le plan ( $z = 10$ cm). . . . .	93
5.5	Mesures expérimentales de pression rétro-propagée numériquement en milieu réverbérant avec $N_{refl} = 5$ jusque : (a) à 4 cm du sol où sont situés les microphones, (b) dans un voisinage de l'axe de l'ordre du centimètre . . . . .	95
5.6	Etude de l'influence du nombre de pics émergeant d'un bruit blanc $B(n)$ de 1000 échantillons sur la valeur de kurtosis $K$ du signal . . . . .	96

5.7	Comparaison entre (a) le maximum de pression quadratique et (b) le kurtosis dans une tranche verticale. La position de l'axe est donnée par le cercle noir. Lors de cette simulation numérique, 32 microphones étaient régulièrement disposés au niveau du sol. . . . .	96
5.8	Variation de l'erreur d'estimation dans 51 tranches verticales . . . . .	97
5.9	Visualisation spatiale des estimations de l'axe (a) dans les 51 tranches, (b) en gardant les $N = 10$ meilleures estimations . . . . .	98
5.10	Erreur d'estimation axiale en fonction du nombre de tranches de cake triées impliquées dans l'interpolation . . . . .	98
5.11	Erreurs d'estimation pour les données expérimentales . . . . .	99
5.12	Visualisation spatiale des estimations de l'axe (a) dans les 51 tranches, (b) en gardant les $N = 10$ meilleures estimations pour les données expérimentales . . . . .	99
6.1	Configuration de l'environnement réverbérant . . . . .	103
6.2	Exemple de troncature des premières réflexions dans les 12 canaux de mesure de la configuration 2, tir 2. En rouge : signal tronqué ; en bleu : signal non tronqué. . .	105
6.3	Focalisation par retournement temporel du champ de pression quadratique tronquée au signal direct, dans le plan horizontal moyen contenant l'axe (Les pointillés blancs indiquent la projection de la trajectoire de la balle dans le plan.) . . . . .	106
6.4	Effet des microphones ( $\times$ ) sur les tranches expérimentales de kurtosis et de pression pondérée ( $\circ$ : position de la source) dans une configuration défavorable (n° 2) . .	107
6.5	Kurtosis dans une tranche verticale au-dessus d'une ligne de microphone dans une configuration favorable (n° 6) ; les traits blancs montrent la projection de l'axe du cône de Mach dans le plan $(x, z)$ . . . . .	107
6.6	Effet de l'ajout de réverbération lors de la rétro-propagation par retournement temporel dans une tranche horizontale contenant l'axe du tir (données expérimentales de tir à balle réelle, config. 6, tir 1) . . . . .	108
6.7	Localisation de l'axe du cône de Mach par retournement temporel dans 6 tranches de cake pour la configuration n° 6, tir n° 2 . . . . .	109
6.8	Localisation de l'axe du cône de Mach par retournement temporel avec simulation non linéaire du problème direct par la théorie de Whitham ( $F_s = 44,1$ kHz) . . .	110
7.1	Influence des changements de repères galiléens sur le « cône de lumière » des fronts d'onde d'une source acoustique en mouvement . . . . .	111
7.2	Position des sources ( $\times$ ) et des 170 points de mesure sur la sphère de Lebedev ( $\circ$ )	116
7.3	Différents instants de la focalisation du cône sur la ligne de sources (champ de pression, u.a.) . . . . .	116
7.4	Différents instants de la focalisation du « cône de Mach » après transformation de Lorentz . . . . .	117
7.5	Effet de la transformée de Lorentz sur le champ de pression rétropropagé par retournement temporel dans un plan vertical contenant la trajectoire du projectile supersonique pour des données expérimentales de tir à balle réelle . . . . .	118
A.1	Cartographies des configurations n° 1 et 2 . . . . .	124
A.2	Cartographies de la configuration n° 3 (début) . . . . .	125
A.3	Cartographies des configurations n° 3 (fin), 4, 5 et 6 (début) . . . . .	126
A.4	Cartographies des configurations n° 6 (fin), 7 et 8 . . . . .	127
A.5	Cartographies de la configuration n° 9 . . . . .	128

# SYMBOLES ET NOTATIONS

- $\mathbf{v}$  : vecteur vitesse du déplacement de la source acoustique. Sa norme est notée  $v$ .
- $c$  : célérité des ondes de pression. Lorsqu'il est question d'une célérité « au repos »  $c_0$ , par exemple en (1.3),  $c$  est alors la valeur de la célérité « locale ».  $c$  fait aussi référence à la célérité de la lumière en des endroits où nulle ambiguïté n'est possible.
- $\beta$  : nombre de Mach,  $\beta = \frac{v}{c}$ . Cette notation est empruntée à la relativité restreinte. On retrouvera parfois, en référence à la littérature classique en aérodynamique, la notation  $M$ .
- $\alpha$  : demi-angle du cône de Mach lorsque  $\beta > 1$ , défini par  $\sin \alpha = \beta^{-1}$ .
- $\gamma$  : facteur de Lorentz,  $\gamma = |\beta^2 - 1|^{-1/2}$ . Cette notation est empruntée à la relativité restreinte.
- $\Gamma$  : rapport des capacités thermiques d'un gaz,  $\Gamma = c_P/c_V$ . Habituellement noté  $\gamma$ , nous avons employé la majuscule pour éviter toute confusion avec le facteur de Lorentz.
- $p$  : champ de pression acoustique. La pression statique étant notée  $p_0$ , le champ de pression total vaut  $p_0 + p$ .
- $p_{RT}$  : champ de pression acoustique lors de la rétro-propagation par retournement temporel.
- $\rho$  : champ de masse volumique acoustique. La masse volumique de l'air au repos étant notée  $\rho_0$ , le champ de masse volumique total vaut  $\rho_0 + \rho$ .
- $S$  : entropie.
- $\mathbf{u}$  : vitesse acoustique particulière : vitesse de déplacement d'un élément mésoscopique de fluide. Sa norme est notée  $u$ .
- $\phi$  : potentiel de vitesse acoustique, défini tel que  $\nabla\phi = \mathbf{u}$  (on trouve parfois la définition avec le signe moins).
- $\nabla$  : opérateur différentiel « nabla ».
- $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{r}$  : vecteurs position dans l'espace.
- $x, y, z, x_1, x_2, x_3$  : variables spatiales.
- $t, \tau$  : variables temporelles.
- $f$  : variable fréquentielle. On définit la pulsation  $\omega = 2\pi f$  et on note  $F_s$  la fréquence d'échantillonnage.
- $k$  : nombre d'onde.
- $\psi$  : variable générique pour désigner un terme de phase.
- $\theta$  : variable générique pour désigner un angle.
- $\mathcal{R}_{n,b}$  : opérateur de création de source image d'ordre  $(n, b)$ .

- $\circ$  : loi de composition interne de la structure de groupe exhibée dans l'agencement des sources image.
- $(n, b)$  : éléments du groupe  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \circ)$  caractérisant l'ordre d'une source image.
- $m$  : changement de variable pour l'ordre des sources image,  $m = 2n - b$ .
- $\square$  : opérateur d'alembertien.
- $\Delta$  : opérateur laplacien, lorsque utilisé devant une variable de champ, par exemple  $p$  ou  $\phi$ . Peu usité dans cette thèse.
- $\Delta x$  : distance entre les haut-parleurs lors de la synthèse expérimentale de cône de Mach. Peut également désigner un élément de distance plus général lors de l'étude relativiste du chapitre 7.
- $\Delta t$  : délai entre l'émission de deux signaux en  $N$  lors de la synthèse expérimentale de cône de Mach.
- $T$  : support du signal en  $N$ .
- $F(y)$  : fonction de Whitham.
- $\sigma$  : dans la fonction de Whitham,  $\sigma$  désigne la section du projectile.
- $s(t), q(t)$  : signal source.
- $Q$  : terme de source dans l'équation d'onde.
- $G$  : fonction de Green champ libre de l'équation d'onde.
- $K$  : kurtosis.



# INTRODUCTION

Le désir des fleurs brillantes de la gloire auprès des mortels ne te fera pas dire ce qui est défendu. Aie courage et élance-toi jusqu'aux sommets de la science. Va, considère de toutes tes forces le côté manifeste de chaque chose, mais, si tu as sous les yeux un objet, ne lui attribue que ce que révèlent tes yeux ; n'accorde pas à l'oreille plus de poids qu'aux explications de la parole ; ainsi pour tous les autres moyens de connaissance, suspends la confiance en tes sens et pense chaque chose dans la mesure où elle est manifeste.

Empédocle, *De la nature*

**L**E présent document représente une synthèse notre travail de doctorat sur la localisation de l'axe d'une source acoustique en déplacement supersonique dans un milieu réverbérant. Il aborde un problème inverse du point de vue de la physique et du traitement du signal : nous cherchons à comprendre comment retrouver de l'information utile, celle d'une position de source, contenue dans des données de mesure issues d'un ensemble de microphones répartis dans l'espace. Pour cela, il est nécessaire de bien comprendre le problème direct, c'est-à-dire la manière dont se comporte la nature entre un instant initial, auquel on peut associer un horizon géométrique au sens de la causalité et du transport d'information, et la position et les instants de mesure du champ de pression.

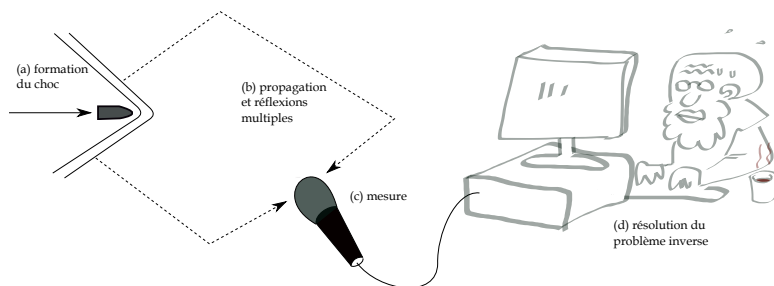
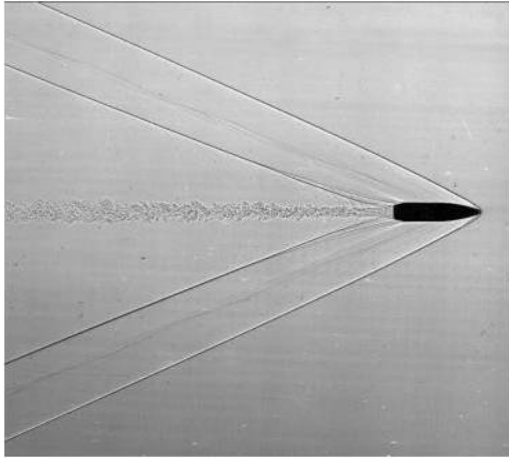


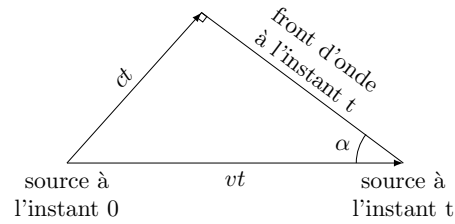
FIGURE 1 – Différentes étapes, depuis la formation du phénomène physique, jusqu'à la résolution du problème inverse

Comme cela est expliqué en figure (1), dans cette thèse nous abordons les aspects suivants :

- (a) étude de la physique des sources acoustiques supersoniques, notamment de la formation de l'onde de choc conique, le cône de Mach, qui est l'objet par lequel nous abordons le problème,
- (b) étude de la propagation de cette onde en champ libre et en présence de réverbération,
- (c) construction d'une banque de données de mesure, que ce soit par des simulations numériques construites grâce à notre modélisation du problème direct, ou par des mesures expérimentales de laboratoire ou de terrain, nécessitant plusieurs microphones, contrairement à ce que laisse préjuger l'illustration présentée figure (1),



(a) Photographie d'un cône de Mach par une méthode de « schlieren »



(b) Schéma expliquant la raison géométrique de la nature du cône

FIGURE 2 – Génération d'un cône de Mach par un projectile supersonique

(d) résolution du problème inverse, à savoir retrouver la trajectoire du projectile supersonique, au moyen d'une implémentation numérique du processus de retournement temporel.

L'état de l'art nous informe des principales caractéristiques de l'onde générée par un projectile supersonique. Il s'agit d'une onde de choc de géométrie conique, dont la pointe se forme au nez du projectile, comme on peut le voir en figure (2a), et dont le sinus du demi-angle  $\alpha$  est déterminé par le rapport entre la vitesse  $v$  de déplacement du projectile et  $c$  celle de l'information contenue dans les ondes acoustiques, comme on peut l'observer sur la figure (2b), selon la formule :

$$\sin \alpha = \frac{c}{v}. \quad (1)$$

Les aspects physiques et mathématiques entrant en jeu dans la formation et la propagation du cône de Mach sont exposés dans le **chapitre 1**. Ils sont pour la plupart issus des travaux du savant britannique Gerald Beresford Whitham (1927-2014), ayant introduit une fonction portant son nom qui permet de décrire la signature acoustique en fonction du profil du projectile. Ces développements trouvent leur fondement dans les travaux des pionniers de l'aérodynamique comme Theodore von Kármán (1881-1963). Lors de la mesure de pression du front d'onde conique par un microphone, on observe la signature acoustique de l'onde de choc, qui dépend de la forme du projectile, et dont on peut obtenir une expression analytique sous certaines approximations que nous expliciterons. Cette signature acoustique présente globalement la forme d'un N, indiquant une surpression suivie rapidement d'une dépression. La durée de cette onde de choc est de l'ordre de la centaine de micro-secondes. Dans le but de mettre en place un protocole expérimental sûr et reproductible pour effectuer des mesures en laboratoire, nous avons mis au point une méthode permettant de synthétiser un cône de Mach en champ libre au moyen d'une ligne de haut-parleurs. Notre méthodologie, avec ses contraintes, ses hypothèses et ses limites, est exposée au **chapitre 2** avec une validation expérimentale.

Comme nous nous intéressons à la localisation de l'axe du cône de Mach en présence de réverbération (typiquement, celle d'un environnement urbain), nous mettons en place au **chapitre 3** une théorie géométrique de la réverbération adaptée à notre problème, qui nous permet de développer un certain nombre d'algorithmes permettant de modéliser le problème direct avec une validation expérimentale satisfaisante. Quoique fort développée en acoustique, la théorie fréquentielle de la réverbération, qu'elle soit modale ou statistique, demeure contrainte par les relations d'incertitude de Heisenberg — et nous nous intéressons ici à des ondes très localisées en temps. Pour ces raisons,

nous présentons dans notre thèse une théorie de la réverbération dans le domaine temporel, ce qui n'enlève aucunement le caractère intrinsèquement ondulatoire des phénomènes étudiés : bien au contraire, ils sont ici dualisés dans l'espace des durées temporelles. Cette théorie est l'occasion d'exhiber une structure de groupe sur la position des sources images qui se révèle fort utile au traitement du problème inverse. Par une méthode analogue aux tirs de rayons, nous établissons un algorithme d'existence physique des réflexions en environnement borné, valable pour des sources sphériques, puis étendu au cas d'un front d'onde conique en déplacement supersonique.

Le problème inverse de la localisation de la source acoustique en mouvement supersonique est ensuite abordé du point de vue du retournement temporel. La théorie du retournement temporel est une construction mathématique qui repose sur la conception d'un champ de pression « dual » au problème direct. La propagation de ce champ est définie par l'insertion des signaux de mesure renversés dans le temps en condition aux limites, ce qui a pour effet de focaliser ce champ de pression pseudo-anticausal à la position des sources. La théorie du retournement temporel trouve des applications physiques en acoustique ultrasonore et en électromagnétique — partout où les processus sont gouvernés par des équations invariantes sous le renversement du temps et où s'appliquent un certain nombre de théorèmes ondulatoires que nous détaillerons dans le **chapitre 4**. Sous cet angle d'attaque, la résolution du problème inverse dépend de la capacité que l'on peut avoir, connaissant la géométrie du milieu (ainsi que les conditions aux limites du domaine d'étude), à rétro-propager les données dans une reproduction dans un milieu simulé numériquement, afin d'obtenir la connaissance du champ acoustique en des lieux autres que ceux des microphones, ainsi qu'en des instants antérieurs aux instants de mesure. Le lieu-instant de l'émission du signal source, qui doit être vu comme une ligne d'espace-temps, apparaît dans les données rétro-propagées comme un pic de focalisation le long de la même ligne dans le référentiel de l'espace-temps de la rétro-propagation, celle-ci s'effectuant selon un schéma anti-causal analogue au schéma causal en raison de l'invariance de l'équation d'onde de D'Alembert par renversement de la flèche du temps. La qualité du pic de focalisation au lieu-instant de l'émission dépend des approximations qui sont faites, en particulier à l'égard de la formule de Kirchhoff-Helmholtz, qui assure l'exactitude du processus de rétro-propagation par retournement temporel depuis un ensemble de mesure (microphones) formant une surface fermée autour du domaine d'étude contenant les sources. Une telle assertion ne présentant pas d'équivalent météorologique (du moins, en acoustique, il est impossible de construire une surface continue de microphones), à plus forte raison lorsque les sources en mouvement peuvent être considérées comme venant de l'infini, il paraît à la fois nécessaire et pragmatique de se restreindre à une région délimitée de l'espace ainsi qu'à un ensemble de capteurs discrétisés, le tout permettant l'usage de microphones sur des distances raisonnables. On restreint ainsi la localisation de la source une portion de sa trajectoire, dont la connaissance nous apparaîtra suffisante pour considérer avoir résolu le problème, et que l'on pourra synthétiser en laboratoire au moyen de la ligne de haut-parleurs précédemment décrite. Le problème que l'on cherche à résoudre présente une double anisotropie. D'une part, l'antenne de capteurs est disposée parallèlement au sol, entre la source et le sol. L'anisotropie est ici verticale (selon  $z$ ). D'autre part, le domaine d'étude comprend deux parois réverbérantes disposées face à face, entre lesquelles s'effectuent à la fois la propagation de la source et la mesure des signaux de pression par les microphones. Les signaux de mesure contiennent donc des échos de la signature acoustique du cône de Mach, dus à la géométrie toute particulière que nous considérons dans cette thèse : une réverbération anisotrope selon  $x$ . On considère que le déplacement de la source s'effectue à peu près selon la direction  $y$ , avec un angle déterminé lors de la résolution du problème inverse. Compte tenu de la géométrie et de la dynamique du problème, cet angle est contraint à ne pouvoir prendre que de petites valeurs. Cela confère à notre problème l'apparence d'une troisième anisotropie selon  $y$ , mais qui n'est qu'approximative. Cependant, il demeure possible de découper l'espace en tranches tenant compte de cette triple anisotropie, afin de visualiser les phénomènes dans des portions de plan.

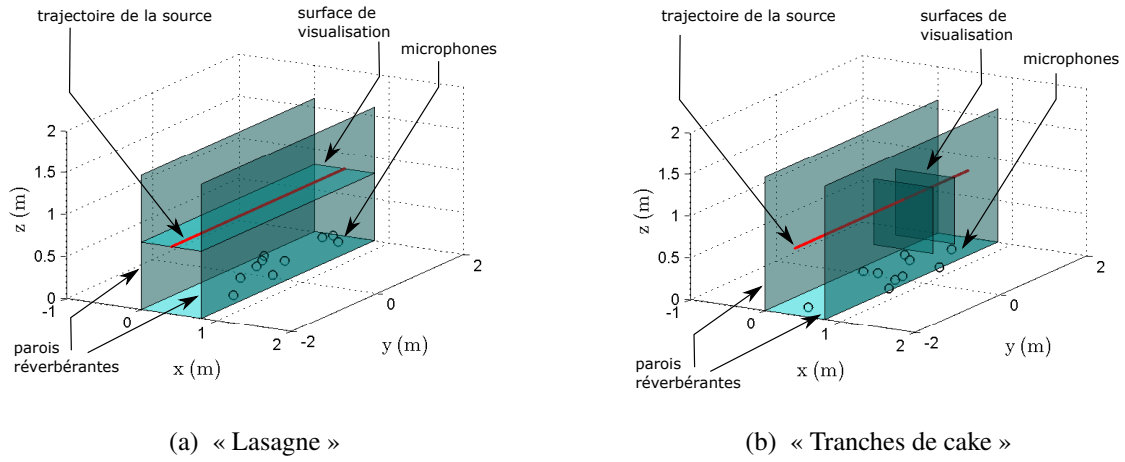


FIGURE 3 – Représentation de l’environnement numérique de rétro-propagation et des surfaces de visualisation

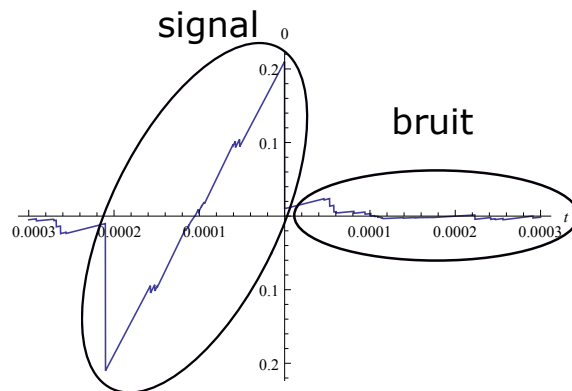


FIGURE 4 – Définition des notions de signal et de bruit lors de la focalisation par retournement temporel

On procèdera à un découpage de l'espace selon des tranches horizontales, disposées d'un point de vue culinaire en « lasagnes » (figure (3a)) afin de visualiser à  $z$  constant la focalisation du champ de pression au niveau de l'axe et du front d'onde conique. Les « tranches de cake » sont quant à elles des tranches verticales à  $y$  constant (figure (3b)). Elles intersectent l'axe du cône de Mach de manière quasi-perpendiculaire, de telle sorte que l'on peut, sous couvert de respecter certaines contraintes d'échantillonnage, observer une tache de focalisation au lieu-instant du passage de la source rétro-propagée chacune des tranches de cake. Il devient alors possible d'entreprendre une localisation de l'axe par interpolation de plusieurs estimations dans différentes tranches, ce qui ne va pas sans soulever certains problèmes adjacents, comme la présence des microphones dans les tranches, ou bien le faible rapport signal à bruit. Le rapport signal à bruit, dans ce manuscrit, est formellement défini par le rapport de l'amplitude du pic de focalisation sur l'amplitude des artefacts de rétro-propagation, comme cela est illustré en figure (4). Il exprime la qualité de la focalisation dans l'espace et dans le temps. Concrètement, nous le retrouverons dans les cartographies de pression quadratique moyenne : un signal à bruit élevé correspond à un bon contraste entre la tache de focalisation et le bruit. Cette méthode d'interpolation des tranches de cake représente l'enjeu principal de notre thèse, en ce qu'elle a permis l'obtention de premiers résultats positifs concernant la localisation de sources supersoniques en milieu réverbérant.

Parmi les difficultés rencontrées et les solutions proposées pour y pallier, la présence des microphones dans le domaine d'étude est la cause de forts niveaux dans leur voisinage, de même que leur nombre restreint par les conditions expérimentales, respectivement 44 et 12 dans les protocoles présentés ici. Ces dispositions induisent un rapport signal à bruit d'autant plus diminué que l'on s'écarte de l'exactitude mathématique de la formule de Kirchhoff-Helmholtz. Nous proposons une approche de traitement des données inspirée de l'analyse d'image, consistant à exhiber un critère statistique permettant d'augmenter le rapport signal à bruit. Le kurtosis, critère d'ordre 4, a retenu notre attention et permet d'obtenir des résultats satisfaisants tant sur les simulations numériques que sur les résultats expérimentaux. Les résultats de la localisation de la ligne de haut-parleurs émettant un cône de Mach approché sont présentés au **chapitre 5**. Dans ce cas, le fait de tenir compte de la réverbération lors du retournement temporel améliore les résultats et permet la localisation.

Une série de mesures a été effectuée en champ de tir, permettant de tester notre méthode sur des données expérimentales issues de la propagation supersonique d'une balle de fusil. Les résultats du traitement des données sont présentés au **chapitre 6**. La réverbération n'a pas un effet aussi bénéfique dans le cadre d'une source supersonique réelle que dans le cas d'une source statique, ni même que dans celui de la ligne de haut-parleurs, car la source supersonique présente des contraintes géométriques particulières dont le retournement temporel ne tient pas compte, étant donnée la différence de géométrie des ondes directe (un cône) et retournée dans le temps (une superposition d'ondes sphériques). Cependant, la focalisation autour du passage de l'axe est observée dans les tranches verticales, avec une qualité dépendant fortement de l'agencement de l'antenne de microphones : sur les 9 configurations testées expérimentalement, une seule permet la résolution du problème inverse.

Le problème de la localisation de source supersonique soulève en outre la question de localité d'une source acoustique, en particulier d'une source en mouvement, en particulier supersonique. Nous en viendrons à nous demander dans quelles mesures notre intellect peut appréhender la propagation de signaux en déplacements relatifs par rapport à un appareillage de mesure, en tant que distorsion d'un support spatio-temporel de propagation de l'information acoustique, à un vitesse bien sûr finie, mais aussi constante selon les éventuels changements de coordonnées adaptés.

Les transformations de Lorentz sont de ces changements de référentiels qui laissent invariante la vitesse de propagation de l'information contenue dans les ondes électromagnétiques. Elles ont été construites dans le but de trouver les systèmes de coordonnées qui laissent invariantes les équations de Maxwell. On peut établir entre l'électromagnétique et l'acoustique un certain parallélisme, en

constatant l'identité des équations d'onde portant respectivement sur le potentiel électromagnétique scalaire et sur le potentiel de vitesse acoustique, scalaire lui aussi :

$$\square\phi = 0. \quad (2)$$

Avant de s'intéresser aux éventuelles divergences que peuvent présenter les deux théories, notamment au sein des approximations formulées pour parvenir à l'équation (2), il convient dans un premier temps de se plonger plus en profondeur dans les conséquences pénétrantes qu'une telle analogie pourrait avoir sur notre conception de l'acoustique. Nous avons entrepris une telle analogie dans cette thèse, que nous présentons au **chapitre 7**, aussi formulons-nous différentes hypothèses que l'on retrouve en optique linéaire. Parmi elles, la conception géométrique des phénomènes physiques nous paraît être la plus fondamentale, en ce qu'elle resserre l'intuition autour de cette branche parfaitement logique qu'est la géométrie mathématique. Elle est également à la source de toute la conception ondulatoire de la lumière (en particulier depuis les travaux de Christiaan Huygens [Huyghens, 1690]), conception que l'on ne peut se permettre d'ignorer en acoustique, et dont les domaines de longueur d'onde ne conduisent pas aux mêmes approximations qu'en électromagnétique. Cependant, une double approche fondée sur la géométrie ondulatoire demeure un postulat nécessaire à l'abord de tout problème de théorie du champ et conduit, malgré l'apparente dualité de l'approche, à l'unité conceptuelle entre théorie géométrique et théorie des ondes. Elle conduit, comme nous les verrons dans cette thèse, à l'adoption de la relativité restreinte pour étudier l'acoustique des sources en mouvement. Elle sera l'outil de l'élaboration d'algorithmes de modélisation du problème direct auquel nous associons le problème inverse de localisation. Elle sera le support mathématique d'une discussion sur la relativité des phénomènes supersoniques, dans leur rapport aux phénomènes supraluminiques tels que le rayonnement Tchérékov. Nous ouvrons le débat sur la relativité des phénomènes acoustiques en démontrant l'invariance de Lorentz de l'opérateur d'alembertien sous un changement de coordonnées traduisant un déplacement supersonique, et nous appuyons cette démonstration par des simulations numériques dont la validité a été attestée tout au long de la thèse, ainsi qu'une application sur des données de mesure de cône de Mach réel. Enfin, dans le cadre des potentiels retardés, nous proposons une correction au traitement de la propagation de sources en mouvement mené par [Morse et Ingard, 1968]. Dans l'**annexe A**, nous présentons de manière exhaustive l'ensemble des cartographies issues des mesures en champ de tir de la moyenne temporelle quadratique du champ de pression rétro-propagé par retournement temporel dans des lasagnes à hauteur  $z$  constante au niveau de la trajectoire de la source, ce qui ne constitue pas une résolution du problème inverse mais permet de se faire une idée de la qualité de la focalisation.

Enfin, dans l'**annexe B**, en guise d'ouverture nous discutons de quelques aspects mathématiques sur le retournement temporel de phénomènes non linéaires, tels qu'ils nous sont apparus durant notre travail de thèse, sans pour autant que ces travaux n'eussent encore abouti à une application expérimentale.

# CHAPITRE 1

## LE CÔNE DE MACH

Les difficultés, si j'en rencontre en lisant, je n'en ronges pas mes ongles ; je les laisse là, après leur avoir fait une charge ou deux.

Montaigne, *Essais*

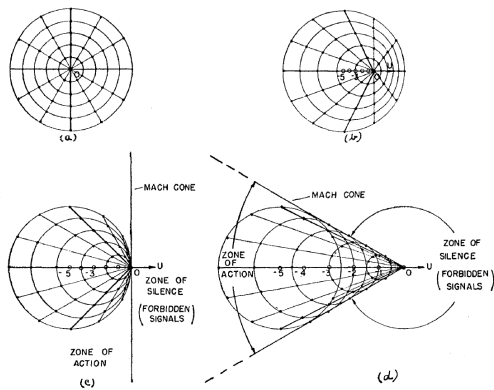


FIGURE 1.1 – Source ponctuelle en mouvement dans un fluide compressible. (a) Source stationnaire. (b) Source en déplacement à la moitié de la vitesse du son. (c) Source en déplacement à la vitesse du son. (d) Source en déplacement à deux fois la vitesse du son. (Tiré de [von Karman, 1947, p. 374])

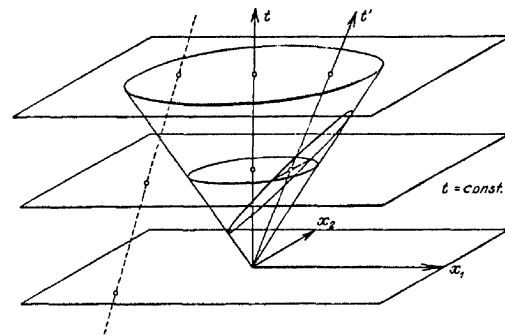


FIGURE 1.2 – Le « cône de lumière » d'après [Weyl, 1922, p. 150]

LES premières investigations sur l'onde de choc causée par un projectile supersonique concernent l'aéronautique et la balistique. Elles sont fondées sur les recherches du savant allemand Ernst Mach (1838-1916) qui a mis en évidence, par des considérations de mouvement relatif et de superposition des fronts d'onde illustrées en figure (1.1), la structure géométrique de l'onde de choc conique qui porte aujourd'hui son nom [Sterrett, 1998]. On notera en particulier les recherches en thermodynamique de [Taylor et Maccoll, 1933] ainsi que les mesures effectuées par [Maccoll, 1937] lui ayant permis d'obtenir des visualisations par strioscopie (« schlieren ») du cône de Mach comme celle reproduite en figure (2a). Une analyse calculatoire des lignes de courant générées par un corps soumis à un écoulement supersonique est menée dans [Tsien, 1938]. L'étude mathématique de la propagation de l'onde de choc causée par un projectile supersonique à une grande distance de son origine menée par [Landau, 1945] établit l'équation d'onde supersonique à partir des solutions de Riemann. Les principes de l'aérodynamique supersonique sont présentés par [von Karman, 1947], avec en particulier l'étude des différentes forces résultant de l'interaction entre l'objet en déplacement et le milieu, conduisant à la notion des grandeurs adimensionnées de portance, perpendiculaire au déplacement et de traînée parallèle au déplacement [von Karman, 1947, p. 386].

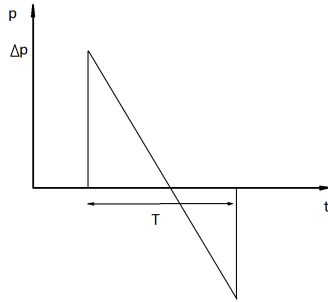


FIGURE 1.3 – Représentation schématique du comportement asymptotique de la signature acoustique du cône de Mach (signal en N)

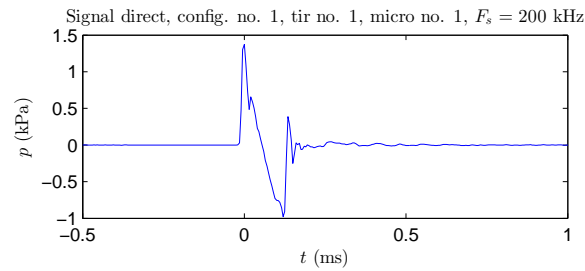


FIGURE 1.4 – Mesure de la signature acoustique du cône de Mach causé par une balle de fusil à environ Mach 2,3

Une étude mathématique fondamentale de l'allure de l'onde créée par un projectile supersonique a été entreprise dans les années 1950 par [Whitham, 1952]. Il définit la fonction de Whitham (*F-function*) qui permet de donner la forme de la signature en pression en fonction du profil de l'objet, dans l'approximation d'un objet allongé, au moyen d'une correction au second ordre faisant intervenir le théorème de Bernoulli. À de grandes distances de l'axe du cône de Mach, et pour des géométries de projectiles simples, la signature temporelle du cône de Mach présente asymptotiquement la forme d'un signal en N, comme celui représenté en figure (1.3). La transformée de Fourier d'un signal en N idéal, permettant notamment de déterminer l'amplitude et la répartition des lobes fréquentiels, est étudiée dans [Lee *et al.*, 1968]. Dans cette thèse, les signaux en N issus de mesures expérimentales sur des tirs de projectiles supersoniques ont l'allure reproduite en figure (1.4). On trouvera une revue bibliographique de l'analyse mathématique et des simulations du bang sonique dans [Gottlieb et Ritzel, 1988]. L'acoustique des instruments à feu et du traitement des signaux correspondant sont décrits dans [Freytag *et al.*, 2006, Maher, 2006]. Dans la section suivante, nous résumons de la manière la plus simple possible en termes mathématiques, selon la théorie de Whitham [Whitham, 1952, Whitham, 1974], comment le déplacement supersonique d'un objet conduit à la formation d'une onde en N par l'introduction de la fonction de Whitham  $F(\xi)$ . Partant de l'étude du potentiel de vitesse en coordonnées cylindriques, dans l'approximation linéaire due non pas à des faibles niveaux de pression mais à la forme allongée et lisse de l'objet en déplacement. On obtient une première équation sur la pression. Cette valeur de pression peut être corrigée au second ordre en  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2$  en utilisant le théorème de Bernoulli. Comme nous le verrons au cours de ce chapitre et plus tard dans cette thèse, le traitement mathématique des phénomènes aéroacoustiques est considérablement difficile et requiert des simplifications, notamment lorsque l'on cherche à résoudre les équations de propagation, et que l'on est confronté au choix du changement de système de coordonnées. Les chercheurs ont alors formulé différentes analogies entre le temps et l'espace<sup>1</sup> dans le but de simplifier les équations. Parallèlement, se développait la théorie de la relativité qui consacrait une vision géométrique unifiée du temps et de l'espace au sein d'une même structure mathématique, qui prit le nom d'espace de Minkowski. Dans ce chapitre, nous reproduirons certaines notations développées par les chercheurs en aérodynamique pour constater les similarités avec celles usées en relativité. Pour cette même raison, lorsque nous reproduirons certaines démonstrations mathématiques, nous le ferons avec le souci d'employer les notations de la relativité restreinte, sachant que la comparaison sera poursuivie aux chapitres suivants, notamment

1. Par exemple [Landau, 1945] formule une analogie temps-espace en introduisant la variable temporelle  $\tau = x/\sqrt{v^2 - c^2}$ .



au chapitre 7.

## 1.1. POTENTIEL DE VITESSE D'UNE SOURCE EN MOUVEMENT

### 1.1.1. PRINCIPE DE CAUSALITÉ ET RELATION DE RÉCIPROCITÉ

Le signal émis par une source monopolaire se propage dans un milieu matériel à une célérité finie  $c$  en respectant le principe de causalité. Ce principe, quoique répondant à l'intuition physique, va à l'encontre des équations mathématiques de la théorie des champs : celui selon lequel le signal ne peut pas se propager en remontant le temps. À une distance  $R$  de la source, on mesurera le signal après une durée de propagation égale à  $R/c$ . Cela signifie que dans le plan  $(t, R)$ , le signal émis à  $(0, 0)$  se propage de façon causale le long de la droite  $t = R/c$ , c'est-à-dire selon la droite d'équation  $t - R/c = 0$ , et non pas  $t = -R/c$  qui correspond à une propagation anticausale, c'est-à-dire remontant le temps. On peut se représenter la propagation causale selon deux dimensions de l'espace et une dimension du temps.<sup>2</sup> Ce phénomène prend la forme géométrique d'un cône, qui n'est autre que le fameux « cône de lumière » en électromagnétique, fondement de l'intuition galiléenne de l'espace-temps (voir figure (1.2)). Le principe de causalité met en emphase le caractère fondamentalement ordonné de la flèche du temps (à la différence de celles de l'espace). Il est expliqué, entre autres, par [Morse et Feshbach, 1953, p.206], qui affirment de manière tout à fait générale :

Since the wave is symmetrical with respect to reversal of the direction of time, another solution can be obtained by replacing  $t - (R/c)$  by  $t + (R/c)$  in the integrands. Up until the present, however, such advanced potentials have not turned out to be of much practical use.

Ceci est l'énonciation du principe de causalité, qui repose sur le retrait par considération empirique du terme anticausal dans la solution aux équations d'onde, retrait qui trouve sa justification dans la thermodynamique, notamment au travers du second principe, permettant d'orienter la flèche du temps et de définir l'évolution organisationnelle des phénomènes physiques grâce à la notion d'entropie. Il est important de garder en tête que l'on ne s'intéresse, en exprimant les solutions à une équation d'onde, qu'aux solutions réelles, non seulement d'un point de vue mathématique si l'on considère des espaces vectoriels réels, mais également d'un point de vue ontologique. Malgré tout, les principes de symétrie des équations d'onde ne doivent pas pour autant être négligés. En ce sens, le principe de réciprocité des fonctions de Green exprime que les fonctions de Green sont invariantes selon l'échange des variables spatiales, mais que les variables temporelles ne se substituent l'une à l'autre qu'au moyen de leur retournement temporel respectif [Morse et Feshbach, 1953, p.835] :

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 | \mathbf{r}, -t) \quad (1.1)$$

### 1.1.2. POTENTIELS RETARDÉS

On rappelle ici les grandes lignes de la théorie des potentiels retardés telle que l'expose Morse et Feshbach dans leurs *Methods for theoretical physics*. La propagation d'un signal depuis une source mobile en milieu infini est étudiée de manière légèrement différente à celle présentée

---

2. Cette opération de l'esprit revient à conférer une dimension géométrique au temps, ce qui n'a pas manqué de choquer Henri Bergson [Bergson, 1922, p. 9] : « Aucune question n'a été plus négligée par les philosophes que celle du temps ; et pourtant tous s'accordent à la déclarer capitale. C'est qu'ils commencent par mettre espace et temps sur la même ligne : alors, ayant approfondi l'un (et c'est généralement l'espace), ils s'en remettent à nous du soin de traiter semblablement l'autre. Mais nous n'aboutirons ainsi à rien. L'analogie entre le temps et l'espace est en effet toute extérieure et superficielle. Elle tient à ce que nous nous servons de l'espace pour mesurer et symboliser le temps. Si donc nous nous guidons sur elle, si nous allons chercher au temps des caractères comme ceux de l'espace, c'est à l'espace que nous nous arrêterons, à l'espace qui recouvre le temps et qui le représente à nos yeux commodément : nous n'aurons pas poussé jusqu'au temps lui-même. »

plus loin dans notre thèse. Ici le terme de source est réduit à une simple distribution de Dirac  $q_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0)$ . Le terme de potentiel est ainsi défini pour une « source en mouvement dans un milieu infini » [Morse et Feshbach, 1953, p.840] :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi} \int_{\frac{r}{c}}^{t + \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{v}t\|}{c}} \frac{d\tau \delta(\tau - t)}{\frac{v^2 t_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} + \|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0\|} \quad (1.2)$$

où a été effectué le changement de variable  $t_0 \rightarrow \tau$  avec

$$\tau = \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0\|}{c} + t_0 \quad (1.3)$$

de telle sorte que l'égalité dans le terme de Dirac revienne à résoudre en  $t_0$  l'équation

$$\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0\|}{c} + t_0 = t. \quad (1.4)$$

On remarque que ici le terme anticausal n'est pas étudié, mais il n'intervient pas du tout dans le cas subsonique, pour les raisons de causalité et de conditions initiales que voici [Morse et Feshbach, 1953, p.834] :

The source is an impulse at  $t = t_0$  located at  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ . [...] It seems reasonable to assume that  $G$  and  $\frac{\partial G}{\partial t}$  should be zero for  $t < t_0$ ; that is if an impulse occurs at  $t_0$ , *no effects of the impulse should be present at an earlier time.*

Une telle énonciation du principe de causalité n'appelle pas de remise en cause en raison de sa validité empirique. En effet, les conceptions généralement admises du temps, que ce soit en physique ou en psychologie, n'admettent pas la propagation de phénomènes remontant le temps. Les investigations théoriques sur l'anticausalité de certains phénomènes souffrent d'une absence de validation expérimentale. Cependant, considérer une condition initiale à  $t_0 \rightarrow -\infty$ , au lieu de  $t_0 = 0$ , ne viole en rien le principe de causalité. On a dans ce cas

$$\tau \sim -t_0 \frac{v}{c} + t_0 = t_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \rightarrow \begin{cases} -\infty \text{ en subsonique,} \\ +\infty \text{ en supersonique.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Le changement de signe dans la variable d'intégration lorsque le déplacement est supersonique semble aller à l'encontre du principe de causalité, car il revient à intégrer sur l'ensemble des temps futurs. Nous y reviendrons après avoir posé d'autres fondements à notre réflexion. Insistons pour conclure sur le fait que, dans le cas général, la simultanéité de la variable d'intégration avec l'instant d'observation s'exprime par la relation

$$t = \tau \Leftrightarrow \|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_0\| = c(t - t_0) \quad (1.6)$$

et que le principe de causalité entraîne  $t > t_0$ .

### 1.1.3. CALCUL DU CHANGEMENT DE VARIABLE DANS L'EXPRESSION INTÉGRALE DU POTENTIEL RETARDÉ

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le calcul du potentiel retardé (1.2) se fait par un changement de variable qui nécessite de résoudre l'équation en  $\tau$

$$t - \tau - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau\|}{c} = 0 \quad (1.7)$$

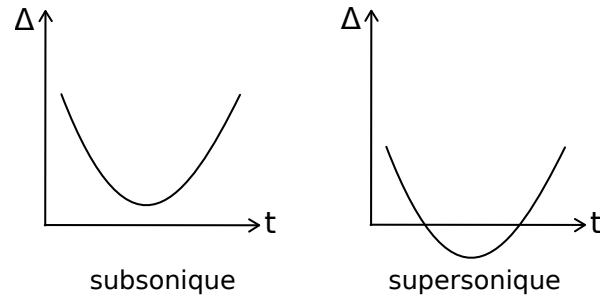


FIGURE 1.5 – Comportement du discriminant  $\Delta$  en fonction du temps d'observation  $t$ .

et que l'on exprime la solution comme une fonction de la variable  $t$ . Cependant nous allons voir que l'expression de  $\tau(t)$  est multivaluée. L'équation (1.7) implique l'équation du second degré

$$(c^2 - \mathbf{v}^2)\tau^2 - 2(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\tau + c^2t^2 - \mathbf{r}^2 = 0 \quad (1.8)$$

dont le discriminant vaut  $\Delta = 4((c^2 - \mathbf{v}^2)\mathbf{r}^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + c^2t(\mathbf{v}t - 2\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v})$ . Le signe de  $\Delta$  n'est pas trivial car  $\Delta$  est un champ spatio-temporel. Pour l'étudier, on peut écrire  $\Delta$  comme un polynôme du second degré en  $t$  (à un facteur 4 près).

$$\Delta = \mathbf{v}^2 c^2 t^2 - 2c^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} t + (c^2 - \mathbf{v}^2)\mathbf{r}^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (1.9)$$

Ce polynôme admet à son tour un discriminant

$$\Delta' = 4c^2(c^2 - \mathbf{v}^2)((\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - \mathbf{r}^2\mathbf{v}^2) \geq 0, \quad (1.10)$$

quant à lui toujours positif :

- $c^2 - \mathbf{v}^2 < 0$  car le déplacement est supersonique,
- $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 < \mathbf{r}^2\mathbf{v}^2$  en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On définit les variables, inspirées de la relativité restreinte <sup>3</sup> :

$$\beta^2 = \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} > 1, \quad (1.11)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}. \quad (1.12)$$

Enfin, les solutions à l'équation  $\Delta = 0$  pour la variable  $t$  s'écrivent

$$t_{1,2} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \pm \frac{1}{\gamma} \frac{\sqrt{\mathbf{r}^2\mathbf{v}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2}}{\mathbf{v}^2} \quad (1.13)$$

Le discriminant  $\Delta(t)$  se comporte comme décrit en figure (1.5). En subsonique, il est toujours strictement positif, donc il est toujours possible de trouver  $\tau_{1,2}(t)$  réel. En supersonique, c'est seulement en dehors des bornes  $[t_1, t_2]$  que  $\tau_{1,2}(t)$  prend des valeurs réelles. On a  $\Delta(t_{1,2}) = 0$  avec  $t_{1,2}$  qui dépendent de  $\mathbf{r}$ . Pour  $t \leq t_1$  ou  $t \geq t_2$ , on obtient que  $\Delta > 0$  donc l'équation  $t - \tau - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau\|}{c} = 0$  admet des solutions en  $\tau$ , qui peuvent alors être vues comme des fonctions de  $t$ .

3. A propos de la relativité restreinte, consulter [Weyl, 1922, § 21, pp. 69-79] ou le début de [Landau et Lifchitz, 1970], ou encore le chapitre 7.

$$\tau_{1,2}(t) = \gamma^2 \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} - t \pm \beta \sqrt{(t-t_1)(t-t_2)} \right) \quad (1.14)$$

La résolution de l'équation (1.7) permet d'expliciter le changement de variable dans l'équation (1.2), qui exprime le potentiel retardé pour une source en mouvement. Des résultats similaires se retrouvent dans [Jackson et Dowling, 1991] pour un source en mouvement à faible vitesse et dans [Garnier et Fink, 2015] pour une source supersonique. Cependant, la résolution analytique de l'équation (1.2) n'a rien d'évident si l'on en recherche une solution explicite ; de plus, comme nous l'avons remarqué plus haut, le terme source étant réduit ici à une distribution de Dirac, il est insuffisant pour décrire notre problème. L'étude des potentiels retardés pour une source mobile non ponctuelle nécessite une approche plus poussée, qu'a menée Whitham, et que nous allons exposer ensuite. Nous verrons en particulier qu'une expression analytique n'est proposée que dans le cas de l'approximation du front d'onde. Dans les deux sections suivantes, nous présentons l'analyse mathématique menée par Whitham pour résoudre les équations de propagation d'un source en mouvement supersonique, tout d'abord dans l'approximation linéaire, puis en apportant une correction non linéaire d'ordre 2 afin d'expliquer la formation des chocs.

**À propos des potentiels avancés :** L'électrodynamique relativiste a clairement établi l'existence formelle de potentiels avancés cohérents avec les équations de propagation. L'emploi de potentiels avancés ne viole pas nécessairement la causalité cependant « *at present the status of this model is that it is "an interesting idea," but it is still not fully accepted into the canon of physics* » [Fitzpatrick, 2008]. (À ce sujet voir également [Wheeler et Feynman, 1945], [Stephenson, 2000].) Formellement, la résolution de l'équation du second degré (1.8) est équivalente à exhiber l'ensemble des  $\tau$  satisfaisant au système d'équations à  $t$  fixé :

$$t - \tau = \pm \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau\|}{c} \quad (1.15)$$

où le signe (+) correspond au potentiel retardé de notre formulation causale, et le signe (−) à un potentiel avancé, donc à un point de vue anticausal. L'inclusion du potentiel avancé dans notre étude de la propagation de signaux supersoniques est motivée par les principes de la relativité restreinte qui prônent une formalisation du temps comme variable géométrique soumise à des lois de symétrie, ainsi que par la condition initiale que nous imposons à la source d'émettre le signal depuis infiniment longtemps et infiniment loin. En vertu du principe de Mach, une interaction avec l'ensemble de l'univers considéré est éventuellement à prendre en compte en terme d'accélération réciproques [Mach, 1893, pp. 216-222].

## 1.2. CALCUL DU POTENTIEL DE VITESSE EN APPROXIMATION LINÉAIRE

L'analyse de Whitham du champ créé par un projectile supersonique part de l'étude en coordonnées cylindriques du champ créé par une distribution linéique de sources, c'est-à-dire pour un projectile de forme négligeable. Ensuite, on considère la forme du projectile suffisamment fine pour rester dans le cadre de l'acoustique linéaire. Cela permet de résoudre l'équation des ondes supersonique au niveau du front d'onde en introduisant la fonction de Whitham.

### 1.2.1. POTENTIEL RETARDÉ ET TERME SOURCE

On considère le potentiel de vitesse  $\phi$  tel que la vitesse particulière s'écrive

$$\mathbf{u} = \nabla\phi. \quad (1.16)$$

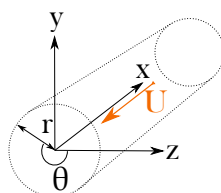


FIGURE 1.6 – Système de coordonnées cylindriques pour l'étude d'un écoulement à la vitesse  $U$  selon  $-x$

Pour une distribution linéique de source  $q(t)dx$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$  avec symétrie de révolution, comme décrit en figure (1.6), le terme de potentiel s'exprime ainsi :

$$\phi(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{q\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dx, \quad (1.17)$$

avec  $R = \sqrt{r^2 + x^2}$ . En effectuant le changement de variable  $\eta = t - \frac{R}{c}$  il est possible d'exprimer le potentiel

$$\phi(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t - \frac{r}{c}} \frac{q(\eta) d\eta}{\sqrt{(t - \eta)^2 - \frac{r^2}{c^2}}}. \quad (1.18)$$

Au voisinage de l'axe, ( $r \rightarrow 0$ ) les résultats suivants peuvent être approximés :

$$\frac{\partial\phi(r, t)}{\partial r} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{q(t)}{2\pi r}, \quad (1.19)$$

$$\phi(r, t) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{q(t)}{2\pi} \log r. \quad (1.20)$$

On peut ainsi exprimer le terme source comme la limite de la composante radiale de la vitesse :

$$q(t) = \lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r \frac{\partial\phi(r, t)}{\partial r}. \quad (1.21)$$

### 1.2.2. ÉQUATION DES ONDES EN RÉGIME SUPERSONIQUE

Dans l'approximation acoustique (petits écarts par rapport aux valeurs moyennes de vitesse, pression et masse volumique) dans un référentiel inertiel  $(x_1, x_2, x_3)$ , le potentiel de vitesse vérifie l'équation des ondes

$$\square\phi = \Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.22)$$

Dans ce référentiel, l'écart à l'équilibre ( $p = p_0, \rho = \rho_0, u = 0$ ) est donné par

$$u_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \quad (1.23)$$

$$p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (1.24)$$

$$\rho - \rho_0 = -\frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (1.25)$$

Si on considère un objet en déplacement à vitesse supersonique constante  $U > c$  selon la direction  $-x_1$  il est plus approprié d'effectuer le changement de variables

$$\begin{cases} x = x_1 + Ut, \\ y = x_2, \\ z = x_3. \end{cases} \quad (1.26)$$

Dans ce référentiel, l'écoulement est stationnaire ; il est possible de faire disparaître la variable temporelle du potentiel de vitesse en introduisant le potentiel  $\Phi(x, y, z)$  tel que

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi(x, y, z) = \Phi(x_1 + Ut, x_2, x_3). \quad (1.27)$$

L'équation des ondes s'écrit alors

$$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \quad (1.28)$$

où l'on définit  $\gamma = 1/\sqrt{\beta^2 - 1}$  avec  $\beta = v/c$  le nombre de Mach. Il est intéressant de noter que cette équation a la forme de l'équation des ondes à deux dimensions où  $x$  joue le rôle du temps. La vitesse et la perturbation en pression s'écrivent alors :

$$u = \left( U + \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right), \quad (1.29)$$

$$p - p_0 = -\rho_0 U \frac{\partial\Phi}{\partial x}. \quad (1.30)$$

De même, l'équation des ondes d'un écoulement supersonique en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\gamma^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r}. \quad (1.31)$$

Cette équation se résout, en termes de potentiel retardé :

$$\Phi(x, r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{x-\frac{r}{\gamma}} \frac{q(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - \left(\frac{r}{\gamma}\right)^2}}, & \text{si } x > \frac{r}{\gamma} \\ 0, & \text{si } x < \frac{r}{\gamma}. \end{cases} \quad (1.32)$$

A présent, nous allons étudier l'influence du profil du projectile sur la forme du potentiel de vitesses. On considère un profil de projectile tel que celui présenté en figure (1.7).

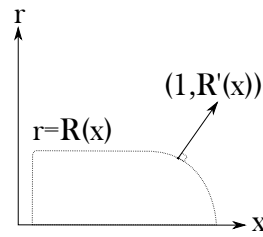


FIGURE 1.7 – Profil d'un projectile en coordonnées cylindriques

**Proposition 1.2.1**

Dans le cas où le projectile a une forme de manière suffisamment régulière pour supposer que son profil  $r = R(x)$  soit dérivable, la condition aux limites impose que, sur la surface, la vitesse normale à l'objet est nulle :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = R'(x) \left( U + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \text{ sur } r = R(x). \quad (1.33)$$

**Démonstration :** Ce résultat s'obtient en remarquant que  $R'(x)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de l'objet en  $R(x)$ . Pour satisfaire à la condition aux limites on veut que sur toute la surface le vecteur vitesse  $\nabla \Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + U, \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)$  soit parallèle au vecteur  $(1, R')$ , ou orthogonal au vecteur  $(-R', 1)$ .

$$(-R', 1) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + U, \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} = R'(x) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + U \right) \quad (1.34) \blacksquare$$

Dans le cas où l'objet est de forme allongée, la linéarisation s'obtient en considérant que :

$$R'(x) \ll 1, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \Phi}{\partial r} \ll U. \quad (1.36)$$

Au premier ordre, la condition de nullité de la vitesse normale s'écrit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = UR', \quad (1.37)$$

à laquelle vient s'ajouter la relation valable pour  $r \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \sim \frac{q(x)}{2\pi r}, \quad (1.38)$$

ce qui permet d'exprimer le terme source en fonction de la géométrie de l'objet en déplacement :

$$q(x) = U \sigma'(x) \quad (1.39)$$

avec  $\sigma(x) = \pi R^2(x)$  la surface de la section de l'objet. Le potentiel peut alors être écrit :

$$\Phi(x, r) = -\frac{U}{2\pi} \int_0^{x-\frac{r}{\gamma}} \frac{\sigma'(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - \left(\frac{r}{\gamma}\right)^2}}. \quad (1.40)$$

Remarquons que la vitesse  $U$  sort de l'intégrale car on l'a supposée constante. On peut alors caractériser les composantes du vecteur vitesse de perturbation :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{U}{2\pi} \int_0^{x-\frac{r}{\gamma}} \frac{\sigma''(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - \left(\frac{r}{\gamma}\right)^2}}, \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{U}{2\pi} \int_0^{x-\frac{r}{\gamma}} \frac{(x-\eta)\sigma''(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - \left(\frac{r}{\gamma}\right)^2}}. \quad (1.42)$$

Celles-ci font intervenir, sous forme intégrale, la dérivée seconde de la surface de section de l'objet.

### 1.2.3. INTRODUCTION DE LA FONCTION DE WHITHAM

Au voisinage du front d'onde, on peut formuler l'approximation

$$x - \frac{r}{\gamma} \ll \frac{r}{\gamma}. \quad (1.43)$$

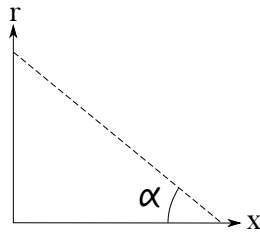


FIGURE 1.8 – Représentation du front d'onde (en pointillés) dans le référentiel  $(x, r)$  des coordonnées cylindriques

En effet, comme on peut le voir sur la figure (1.8), on constate que le front d'onde (c'est-à-dire le cône de Mach) vérifie :

$$\tan \alpha = \frac{r}{x} = \tan \arcsin \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} = \gamma. \quad (1.44)$$

Le front d'onde se situe donc autour de  $x \approx \frac{r}{\gamma}$ , d'où l'approximation de l'équation (1.43).



### Proposition 1.2.2

Au niveau du front d'onde  $x - \frac{r}{\gamma} \ll \frac{r}{\gamma}$ , le potentiel solution de l'équation des ondes supersonique (1.31) peut être approximé par

$$\Phi \sim -\frac{U}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{2r}} \int_0^{x-\frac{r}{\gamma}} \frac{\sigma'(\eta) d\eta}{\sqrt{x-\frac{r}{\gamma}-\eta}}. \quad (1.45)$$

**Démonstration :** On part de la solution déjà établie :

$$\Phi = -\frac{U}{2\pi} \int_0^{x-\frac{r}{\gamma}} \frac{\sigma'(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - \left(\frac{r}{\gamma}\right)^2}} \quad (1.46)$$

dont on va astucieusement réécrire le dénominateur, en utilisant l'identité remarquable

$$(x-\eta)^2 - \left(\frac{r}{\gamma}\right)^2 = \left(x - \frac{r}{\gamma} - \eta\right) \left(x - \frac{r}{\gamma} - \eta + \frac{2r}{\gamma}\right). \quad (1.47)$$

Remarquons qu'on a à la fois  $x - \frac{r}{\gamma} \ll \frac{r}{\gamma}$  car on est au niveau du front d'onde et, concernant la variable d'intégration,  $0 < \eta < x - \frac{r}{\gamma} \Rightarrow \eta \ll \frac{r}{\gamma}$ . Ainsi un développement au premier ordre en  $x - \frac{r}{\gamma} - \eta$  donne

$$(x-\eta)^2 - \left(\frac{r}{\gamma}\right)^2 \approx \frac{2r}{\gamma} \left(x - \frac{r}{\gamma} - \eta\right). \quad (1.48) \blacksquare$$

On introduit alors la fonction de Whitham :

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\xi \frac{\sigma'(\eta) d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}}, \quad (1.49)$$

telle qu'au voisinage du front d'onde ( $\gamma x - r \ll r$ ) les composantes de la vitesse puissent être approximées par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \sim -U \sqrt{\frac{\gamma}{2r}} F\left(x - \frac{r}{\gamma}\right), \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \sim -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{U}{\sqrt{2\gamma r}} F\left(x - \frac{r}{\gamma}\right). \quad (1.51)$$

## 1.3. CORRECTION AU SECOND ORDRE POUR LA PRESSION

Au premier ordre, la pression est donnée par la relation

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = -U \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1.52)$$

Cependant, l'acoustique linéaire ne prend pas en compte la formation de chocs. Une telle approximation est donc fondamentalement incomplète pour décrire le cône de Mach. C'est pourquoi Whitham apporte à la théorie linéaire une correction au second ordre qui permet d'expliquer la formation des chocs. La méthodologie adoptée par Whitham pour décrire l'onde de Mach se construit selon plusieurs étapes :

- résolution du cas linéaire,
- étude d'une petite perturbation du cas linéaire.

Cette méthode perturbative présente le double avantage d'être intuitive physiquement, car elle débute par une approche "naïve" à l'ordre 1, et de ne pas faire appel à des mathématiques trop compliquées, c'est-à-dire principalement des équations aux dérivées partielles linéaires et des développements limités à l'ordre 1 et 2. C'est une manière devenue "standard" pour aborder des problèmes compliqués qu'on retrouve notamment en mécanique quantique pour résoudre l'équation de Schrödinger en présence d'un terme de potentiel en faisant un développement en série des valeurs propres du Hamiltonien (à l'ordre 1 on obtient l'équation de Lippmann-Schwinger).

En ce qui nous concerne, c'est l'inverse du nombre de Mach local  $\frac{c}{u}$  qui est développé en série à l'ordre 1, plus précisément en  $O\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right)$ , pour obtenir une correction de l'ordre de  $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$  sur l'angle local du cône de Mach. Cette démarche permet de corriger la définition "naïve et géométrique" du front d'onde d'une manière, certes, toujours approchée, mais qui tienne compte de la forme du projectile par l'intermédiaire de la fonction  $F$  de Whitham, et, surtout, qui permette d'expliquer la formation des chocs.

### 1.3.1. THÉORÈME DE BERNOULLI

Les équations sur la masse volumique  $\rho$ , la vitesse  $u$ , l'enthalpie  $h$ , l'entropie  $S$ , et la pression  $p$  d'un fluide en écoulement stationnaire peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 + h \right) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla S = 0, \end{cases} \quad (1.53)$$

Considérant en plus la température  $T$  et l'identité thermodynamique différentielle

$$T dS = dh - \frac{1}{\rho} dp, \quad (1.54)$$

on se retrouve avec les deux relations :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 + h \right) = 0, \quad (1.55)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla S = 0, \quad (1.56)$$

qui établissent le théorème suivant.

#### **Théorème 1.3.1 (Théorème de Bernoulli pour un écoulement stationnaire et irrotationnel)**

*Les flux d'enthalpie totale  $\frac{1}{2}u^2 + h$  et d'entropie  $S$  sont conservés le long des lignes de courant.*

Ce théorème peut se formuler en considérant un courant uniforme et stable caractérisé par  $S = S_0, h = h_0, u = U$ , c'est-à-dire dans lequel on néglige les termes  $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$  et  $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$  dans la vitesse de perturbation, et pouvant correspondre au courant « à l'infini ». La conservation des flux donne alors

$$h + \frac{1}{2} u^2 = h_0 + \frac{1}{2} u_0^2, \quad (1.57)$$

$$S = S_0. \quad (1.58)$$

### 1.3.2. TRANSFORMATION POLYTROPIQUE

Le cas particulier qui intéresse Whitham est celui d'un "gaz polytropique" c'est-à-dire d'une transformation d'un gaz (parfait) vérifiant la relation

$$pV^n = cste \quad (1.59)$$

où  $n$  est une constante positive. Le cas où  $n = \Gamma = \frac{c_P}{c_V}$  est le rapport des capacités thermiques correspond à une transformation isentropique (ou adiabatique) et donne la loi de Laplace  $pV^\Gamma = cste$ . C'est en réalité ce qui intéresse Whitham pour aller plus loin dans ses calculs. Un certain nombre de relations sur les variables thermodynamiques peuvent être démontrées dans le cas d'une transformation polytropique. Nous les donnons ici pour  $n = \Gamma$  :

$$c^2 = \frac{\Gamma p}{\rho}, \quad (1.60)$$

$$e = \frac{1}{\Gamma - 1}, \quad (1.61)$$

$$h = \frac{c^2}{\Gamma - 1}, \quad (1.62)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2\Gamma}{\Gamma-1}}. \quad (1.63)$$

### 1.3.3. CORRECTION AU SECOND ORDRE DU TERME DE PRESSION

Une fois cette petite gymnastique thermodynamique effectuée, on est à même de comprendre et de reprendre la démarche de Whitham. L'enthalpie totale est reliée à la vitesse du son par la relation (1.62), ce qui mène Whitham à formuler ainsi le premier membre du théorème de Bernoulli :

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\Gamma - 1}{2}(u^2 - U^2) \quad (1.64)$$

$$= c_0^2 - \frac{\Gamma - 1}{2} \left( \left( U + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 - U^2 \right) \quad (1.65)$$

$$= c_0^2 - \frac{\Gamma - 1}{2} \left( 2U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right). \quad (1.66)$$

On obtient alors pour la pression :

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2\Gamma}{\Gamma-1}} = \left( 1 - \frac{\Gamma - 1}{c_0^2} \left( U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right) \right)^{\frac{\Gamma}{\Gamma-1}}, \quad (1.67)$$

puis sachant que  $c_0^2 = \Gamma \frac{p_0}{\rho_0}$  et effectuant un développement en série de l'expression ci-dessus, il est possible d'obtenir une correction au second ordre du terme de pression dans le cadre d'un écoulement supersonique :

$$\frac{p - p_0}{p_0} = - \left( U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right). \quad (1.68)$$

En effectuant des développements en  $O(\delta)$  et  $O(\delta^2 \log \frac{1}{\delta})$ , Whitham ne garde que le terme radial du second ordre dans l'expression ci-dessus, de telle sorte que sa correction s'écrit en fait :

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = -U \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2. \quad (1.69)$$

### 1.3.4. CORRECTION DE L'ANGLE DE MACH LOCAL

Dans [Whitham, 1952] l'auteur utilise le théorème de Bernoulli pour corriger la formulation intégrale du terme de potentiel. Il tient compte de la variation locale de la vitesse du son, donc de l'angle de Mach, donc du paramètre  $\gamma$ , dans la définition du front d'onde  $x = \frac{r}{\gamma}$ . Dans le cas d'un écoulement supersonique, l'équation de Bernoulli permet de relier la célérité locale du son  $c$  à la célérité "moyenne" du son  $c_0$  correspondant à une vitesse  $u = \|\mathbf{u}\| = u_0 = U$ , c'est-à-dire lorsque l'on néglige les termes  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ .

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\Gamma - 1}{2} (u^2 - u_0^2) \quad (1.70)$$

$$= c_0^2 - \frac{\Gamma - 1}{2} \left( 2u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right) \quad (1.71)$$

$$\Rightarrow c = c_0 \sqrt{1 - \frac{\Gamma - 1}{2} \beta^2 (2\chi + \chi^2 + \rho^2)} \quad (1.72)$$

en définissant les variables adimensionnées

$$\begin{cases} \chi = \frac{1}{u_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \mu = \frac{1}{u_0} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases} \quad (1.73)$$

et en notant  $\beta = \frac{u_0}{c_0}$  le nombre de Mach non perturbé. Cette équation relie la vitesse du son à la vitesse des particules de gaz parfait : elle permet d'établir une correction locale de la vitesse du son qui tient compte du mouvement local de l'air. L'angle de Mach local  $\alpha$  est donné par  $\alpha = \arcsin \frac{c}{u}$ , on définit aussi l'angle de Mach non perturbé  $\alpha_0 = \arcsin \frac{c_0}{u_0}$ . Il est possible d'effectuer un développement de Taylor de cet angle par rapport à  $c/u$  autour de  $c_0/u_0$  :

$$\arcsin \frac{c}{u} = \arcsin \frac{c_0}{u_0} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{c_0}{u_0} \right)^2}} \left( \frac{c}{u} - \frac{c_0}{u_0} \right) + o \left( \frac{c}{u} - \frac{c_0}{u_0} \right) \quad (1.74)$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha_0 + \gamma \left( \beta \frac{c}{u} - 1 \right) + O \left( \frac{c}{u} \right) \quad (1.75)$$

avec  $B = 1/\sqrt{\beta^2 - 1}$ . En utilisant la relation (1.72), on développe le rapport  $c/u$  au second ordre en  $O(\chi^2 + \mu^2)$  :

$$\frac{c}{u} = \frac{c_0}{u_0} \sqrt{\frac{1 - \frac{\Gamma - 1}{2} \beta^2 (2\chi + \chi^2 + \mu^2)}{1 + 2\chi + \chi^2 + \mu^2}} \quad (1.76)$$

$$= \frac{1}{\beta} \left( 1 - \chi - \frac{\Gamma - 1}{2} \beta^2 \chi \right) + O(\chi^2 + \mu^2) \quad (1.77)$$

Ainsi l'angle de Mach local s'exprime

$$\alpha = \alpha_0 - \left(1 + \frac{\Gamma-1}{2}\beta^2\right) \gamma \chi + O(\chi^2 + \mu^2) \quad (1.78)$$

$$= \alpha_0 - \left(1 + \frac{\Gamma-1}{2}\beta^2\right) \frac{\gamma}{u_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + O(\chi^2 + \mu^2) \quad (1.79)$$

### 1.3.5. CORRECTION DE LA CARACTÉRISTIQUE

On définit  $y_0 = x - \frac{r}{\gamma}$  la caractéristique telle que  $y_0 \ll \frac{r}{\gamma}$  corresponde au front d'onde dans la théorie linéarisée, c'est-à-dire en négligeant la forme du projectile. On définit  $y$  comme la caractéristique tenant compte des corrections en  $O(\chi^2 + \rho^2)$  établies au paragraphe précédent, c'est-à-dire tenant compte de la déformation du cône de Mach à cause du profil du projectile. De la même manière que  $y_0$  est constante le long des courbes  $\frac{dx}{dr} = \cot \mu_0 = \frac{1}{\gamma}$ ,  $y$  est constante le long des courbes  $\frac{dx}{dr} = \cot(\alpha + \theta)$  où  $\alpha$  est l'angle de Mach local calculé au paragraphe précédent et  $\theta = \arctan \frac{\frac{dr}{u_r}}{u_0 + u_x}$  l'angle de l'écoulement, qui vaut 0 pour un écoulement continu. Si l'on effectue un développement limité de  $\cot(\alpha + \theta)$  par rapport à  $\alpha + \theta$  autour de  $\alpha_0$  on obtient

$$\frac{dx}{dr} = \cot(\alpha + \theta) \quad (1.80)$$

$$= \cot(\alpha_0) \frac{1}{\sin^2 \alpha_0} (\alpha - \alpha_0 + \theta) + o(\alpha - \alpha_0 + \theta) \quad (1.81)$$

$$= \frac{1}{\gamma} - \beta^2 (\alpha - \alpha_0 + \theta) + o(\alpha - \alpha_0 + \theta) \quad (1.82)$$

avec (cf. équation (1.78)) :

$$\begin{cases} \alpha - \alpha_0 = - \left(1 + \frac{\Gamma-1}{2}\beta^2\right) \frac{\gamma}{u_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + O(\chi^2 + \mu^2) \\ \theta = \frac{1}{u_0} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + O(\chi^2 + \mu^2) \end{cases} \quad (1.83)$$

on obtient :

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma\beta^2}{u_0} \left(1 + \frac{\Gamma-1}{2}\beta^2\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\beta^2}{u_0} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + O(\chi^2 + \mu^2). \quad (1.84)$$

L'intégration des composantes du gradient de potentiel est fastidieuse, mais si l'on considère l'approximation du front d'onde  $y \ll \frac{r}{\gamma}$ , on a les équivalents

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \sim -u_0 \sqrt{\frac{\gamma}{2r}} F(y), \quad (1.85)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \sim -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1.86)$$

Dans ce cas, l'équation (1.84) se ramène à :

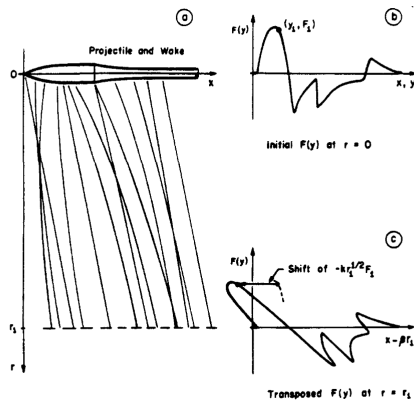


FIGURE 1.9 – (a) Schémas des lignes caractéristiques d'un projectile de forme simple, (b) Fonction  $F(y)$  initiale à  $r = 0$ , (c) Fonction modifiée  $F(y)$  à une distance  $r_1$ . (Tiré de [Gottlieb et Ritzel, 1988])

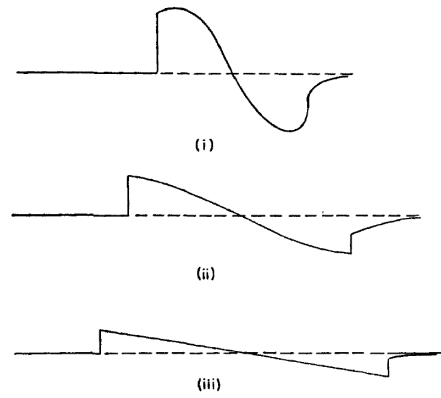


FIGURE 1.10 – Exemple de profil de la fonction  $F(y)$  (i) lorsque le choc avant est formé et avant que le choc arrière ne se forme, (ii) dans une position intermédiaire où les deux chocs sont survenus, (iii) lorsque le signal en N est formé. (Tiré de [Whitham, 1952])

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma\beta^2}{u_0} \left( 1 + \frac{\Gamma-1}{2}\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\partial\Phi}{\partial x} + O(\chi^2 + \mu^2) \quad (1.87)$$

$$= \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma\beta^4}{u_0} \frac{\Gamma+1}{2} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + O(\chi^2 + \mu^2) \quad (1.88)$$

$$y \ll r/\gamma \quad \frac{1}{\gamma} - \sqrt{\frac{\gamma^3}{2}} \beta^4 (\Gamma+1) \frac{F(y)}{2\sqrt{r}}. \quad (1.89)$$

et on obtient une définition implicite de  $y$  en tant que solution de l'équation

$$x = \frac{r}{\gamma} - kF(y)r^{1/2} + y \quad (1.90)$$

où  $k = \sqrt{\frac{\gamma^3}{2}} \beta^4 (\Gamma+1)$ . Cette approximation est valable au niveau du front d'onde et en champ lointain. Un exemple de caractéristiques ainsi que de fonctions  $F(y)$  est donné en figure (1.9). Lorsque deux caractéristiques se rencontrent, le profil de  $F(y)$  est multivalué, ce qui est contradictoire, on dit alors qu'il y a formation d'un choc, c'est-à-dire que l'on résout la contradiction en considérant que  $F(y)$  devient discontinue. Whitham explique que ce sont les parties de  $F(y)$  où la dérivée est positive qui sont responsables de la formation du choc. Ainsi, plus la fonction  $F(y)$  varie, plus le cône de Mach sera formé de nombreux chocs. Dans le cas d'un projectile allongé, ne présentant pas de discontinuité dans son profil, la fonction de Whitham ressemble à celle de la figure (1.10) : elle présente deux régions à dérivée positive, aussi on observe seulement deux chocs, l'un étant le choc « avant » (*front shock*), l'autre le choc « arrière » (*rear shock*).

### 1.3.6. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Notons l'intérêt de la relation (1.90). D'une part, elle permet d'exprimer simplement la fonction de Whitham dans la zone  $y \ll r\gamma^4$  :

$$F(y) = \frac{y - x + \frac{r}{\gamma}}{k\sqrt{r}}, \quad (1.91)$$

et d'autre part, elle permet de considérer que la variable

$$y = x - \frac{r}{\gamma} + kF(y)r^{1/2} \quad (1.92)$$

est corrigée d'une manière non négligeable par rapport aux caractéristiques de l'approximation linéaire, car en  $\sqrt{r}$  pour  $r/\gamma \gg y$ , à la théorie linéaire naïve. En réalité, c'est cette correction, faisant intervenir la fonction  $F(y)$  donc le profil du projectile, qui permet d'observer la formation des chocs. Un développement asymptotique pour de grandes valeurs de  $r$ , tenant compte de la superposition des caractéristiques au moyen d'un traitement mathématique fort complexe, permet d'obtenir la caractéristique du premier choc

$$x - \frac{r}{\gamma} \sim y_0 - \left\{ 2k \int_0^{y_0} F(y) dy \right\}^{1/2} r^{-1/4} \quad (1.93)$$

où  $y_0$  est le premier zéro de la fonction  $F(y)$ . Cette formule permet de mettre en évidence un écart à la caractéristique  $x = r/\gamma + y_0$  de l'ordre de  $r^{-1/4}$ . Par ailleurs, Whitham montre également que la force du choc, définie comme le rapport du saut de pression  $\Delta p$  à la pression atmosphérique  $p_0$ , vaut

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Gamma}{\Gamma + 1} \frac{1}{\gamma\beta^2} \left\{ 2k \int_0^{y_0} F(y) dy \right\}^{1/2} r^{-3/4}. \quad (1.94)$$

Cette formule établit que l'amplitude du choc décroît avec la distance à l'axe  $r$ , lorsque celle-ci est grande, comme  $r^{-3/4}$ , ce qui est contraire à la théorie linéaire aussi bien pour une onde sphérique (décroissance en  $r^{-1}$ ) pour une onde cylindrique (décroissance en  $r^{-1/2}$ ). Les deux équations (1.93) et (1.94) permettent de caractériser le signal en N par sa durée  $T$  et son amplitude  $\Delta p$ , que l'on retrouve en légende de la figure (1.3), dont il est possible d'obtenir les expressions génériques pour un projectile allongé de longueur  $l$  et de diamètre  $d$  (comme une balle de fusil) [Sadler *et al.*, 1998], [Maher, 2006] :

$$T(r) = \frac{1.82Mr^{\frac{1}{4}} d}{c(M^2 - 1)^{\frac{3}{8}} l^{\frac{1}{4}}}, \quad (1.95)$$

$$\frac{\Delta p(r)}{P_0} = \frac{0.53(M^2 - 1)^{\frac{1}{8}} d}{r^{\frac{3}{4}} l^{\frac{1}{4}}}. \quad (1.96)$$

## 1.4. PHÉNOMÉNOLOGIE DES ONDES DE CHOC

Dans les parties (1.2) et (1.3), on a présenté le formalisme mathématique de la propagation d'un projectile supersonique en insistant bien sur le fait que la correction non linéaire obtenue à l'aide du théorème de Bernoulli fournit une loi comportementale reliant la vitesse de l'écoulement

---

4. Concernant l'ordre de grandeur de distance auquel est effectué le développement asymptotique, Whitham parle d'au moins 100 fois le diamètre du projectile, dans le cas d'un projectile allongé.

$u$  à la vitesse de propagation  $c$  qui devient, de fait, une variable locale. Cette variabilité locale de la vitesse du son est à l'origine de la formation de l'onde de choc proprement dite. Lorsque le gradient de vitesse  $\nabla c$  devient trop important à cause de l'accumulation des fronts d'onde, on ne peut plus considérer la variation de vitesse comme continue. Cette discontinuité crée le choc. On distingue, en physique, l'étude de la formation du choc, qui est un phénomène fortement non linéaire et complexe, à celle de la propagation du choc, qui présente des non-linéarités d'amplitude plus faible, pouvant être étudiées par des méthodes de perturbation. Les deux régions de part et d'autre du choc, définies par deux vitesses  $c_1$  et  $c_2$ , vérifient des relations de conservation, analogues aux relations de continuité de la théorie linéaire, connues sous le nom de relations de Rankine-Hugoniot.

### 1.4.1. ÉQUATION DE BURGERS

L'équation de Burgers est présentée dans les ouvrages de référence [Burgers, 1974], [Whitham, 1974], [Rudenko et Soluyan, 1975], [Enflo et Hedberg, 2002]. Elle peut être mise en évidence dans de nombreux cas de l'acoustique non linéaire par les changements de variables appropriés. Elle trouve des applications variées, par exemple dans l'étude de l'interaction d'un bruit haute fréquence avec une onde non linéaire basse fréquence [Gurbatov, 1981], ou l'étude des caustiques liées aux ondes de choc des avions supersoniques [Marchiano *et al.*, 2003]. Ses propriétés en tant que système dynamique font l'objet d'approches mathématiques et informatiques [Basto *et al.*, 2007]. Nous nous intéressons ici à ses propriétés non linéaires conduisant à la formation d'ondes de choc, notamment d'ondes en N. L'équation conduisant à la formation de telles ondes de choc est, d'après Whitham, l'équation de Burgers. Il la décrit comme « l'équation la plus simple combinant à la fois des effets de propagation non linéaire et des effets diffusifs. » [Whitham, 1974] Cette équation a la forme

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (1.97)$$

où  $\nu$  est une constante qui représente, du point de vue de la mécanique des fluides, la viscosité cinématique du fluide. Il est nécessaire de préciser une condition initiale de la forme  $c(x, t = 0) = F(x)$ . La démonstration de l'établissement de l'équation (1.97) selon Whitham, ainsi qu'une discussion physico-mathématique sur les propriétés non linéaires de l'équation de Burgers, notamment dans ses rapports avec le formalisme de Green, sont présentés en annexe B. Ce que nous retiendrons ici est la propriété de l'équation de Burgers de conduire à des solutions multivaluées, comme la fonction de Whitham, et d'être à l'origine de la formation de chocs.

### 1.4.2. RELATIONS DE RANKINE-HUGONIOT

Les relations de Rankine-Hugoniot expriment les lois de conservation de part et d'autre du choc, lorsque l'on considère une onde de choc stationnaire, c'est-à-dire lorsque l'on se place dans le référentiel comobile de la source en mouvement. Les relations de Rankine-Hugoniot expriment la variation de l'enthalpie spécifique  $h = e + \frac{p}{\rho}$ , partant du premier principe de la thermodynamique [Faure, 2008, pp. 31-32] :

$$dh = V dp + \delta w_d + \delta q \quad (1.98)$$

où  $w_d$  est le travail dû aux irréversibilités mécaniques et  $\delta q$  la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur du système. Les relations de conservation s'expriment localement, de part et d'autre du choc [Faure, 2008, p. 172] :

— Conservation de la masse :

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (1.99)$$



— Conservation de la quantité de mouvement :

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (1.100)$$

— Conservation de l'énergie :

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}. \quad (1.101)$$

Sans détailler les calculs, les relations de Rankine-Hugoniot dans le cas d'un choc oblique d'angle  $\alpha$  s'expriment [Faure, 2008, p. 175] :

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \sin^2 \alpha}{\gamma M_1^2 \sin^2 \alpha - \frac{\gamma-1}{2}}, \quad (1.102)$$

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{(\gamma+1) M_1^2 \sin^2 \alpha}{2 + (\gamma-1) M_1^2 \sin^2 \alpha}, \quad (1.103)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2}. \quad (1.104)$$

Ces relations établissent le « saut » des grandeurs physiques de part et d'autre du choc, mais il faut bien garder en tête que la notion de saut est une abstraction phénoménologique due au fait que l'étude des ondes de choc demeure hors du cadre de la thermodynamique quasi-statique. Une étude réaliste de la physique des chocs, fondée sur la thermodynamique hors équilibre, par conséquent bien au-delà du cadre du présent manuscrit, n'admet pas la discontinuité des grandeurs physiques comme phénomène ontologiquement envisageable. La non-linéarité possède le statut de réalité ontologique, en tant que complexité particulière d'un phénomène physique. La discontinuité, en tant que simplification épistémologique, ne le possède pas. Cet argumentaire trouve ses fondements dans la littérature de référence concernant les ondes de choc [Courant et Friedrichs, 1948, p. 117] :

Irreversible processes are to be described by sudden jump discontinuities, occurring across certain sharply defined surfaces in the fluid. Such discontinuities, with infinite gradients in some of the quantities, replace in the mathematical idealization the narrow zones of noticeable irreversibility. In reality very considerable changes of velocity and temperature occur across such surfaces; thus the assumption of sharp discontinuities is indeed an idealization which agrees with the fact rather better than we might hope.

Bien que la notion de choc décrive une indéniable réalité physique, celle de discontinuité demeure une « idéalisation », un outil *mathématique* confortable pour décrire un phénomène dont les ordres de grandeur le situent en dehors des descriptions *physiques* actuelles. Le déplacement supersonique d'une source conduit localement, c'est-à-dire au voisinage de la source, à des phénomènes physiques intrinsèquement non linéaires qui conduisent à la formation d'une onde de choc. Cela peut être interprété comme multivaluation des solutions à l'équation de Burgers en masse volumique, dans le cadre d'un comportement fortement non linéaire, c'est-à-dire presque au contact de la surface du projectile, ou bien comme multivaluation de la fonction de Whitham  $F(y)$  lorsque deux caractéristiques se croisent, quand une méthode de caractéristiques peut être employée, c'est-à-dire en champ proche. Cette onde de choc possède un profil particulier qui se propage selon des lois quasi-linéaires, c'est-à-dire qui peuvent être étudiées par des méthodes de perturbation en champ moyen, la signature acoustique présente asymptotiquement la forme d'un signal en N en champ lointain. Les différentes zones d'analyse sont représentées en figure (1.11). La formation du choc lié au déplacement supersonique d'une source acoustique demeure phénoménologique, dans le sens où elle assure la jonction entre les deux phénomènes que sont l'écoulement subsonique sans choc et l'écoulement supersonique où l'onde de choc est présente. Elle se situe dans un domaine de la physique des fluides où les écoulements obéissent à des équations fortement non linéaires : la

résolution des équations se situe à la limite de nos capacités mathématiques actuelles. Cependant une compréhension du mécanisme de formation des chocs peut être mise en évidence par deux idées complémentaires :

1. La vision asymptotique d'une superposition infinie des fronts d'onde au niveau du nez du projectile est une vue de l'esprit gouvernée par une vision linéaire du rayonnement acoustique.
2. L'étude de l'équation de Burgers en tant que système dynamique instable conduit à la formation du choc par multivaluation de grandeurs physiques.

Dans les deux cas la formation du choc ne s'explique que par résolution selon des arguments empiriques d'une contradiction inhérente à notre compréhension actuelle de la physique du processus. C'est pourquoi nous disons que la formation du choc n'accepte pour l'instant que des justifications phénoménologiques. L'approche relativiste que nous proposerons au chapitre (7) tentera de ramener ces considérations à une conception géométrique d'un tel phénomène physique.

Nous avons présenté la théorie physique décrivant le comportement du champ de pression généré par un objet soumis à un écoulement supersonique, ou, de manière équivalente, par un objet en déplacement supersonique par rapport à un observateur. Le champ de pression est la grandeur mesurable dont nous avons besoin pour effectuer le retournement temporel. Dans le chapitre suivant, nous allons recréer en laboratoire les principales propriétés du cône de Mach sans déplacement de projectile, à l'aide d'une ligne de haut-parleurs, afin de mettre en place un protocole expérimental de résolution du problème inverse.

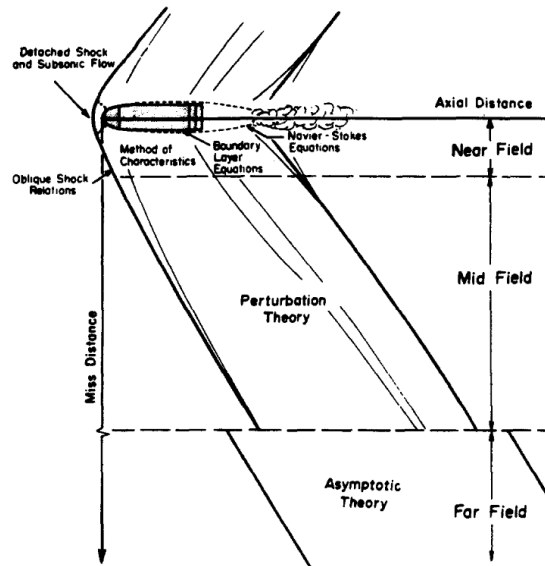


FIGURE 1.11 – Les différents champs (proche, moyen, lointain) où s'appliquent différentes méthodes d'analyse du cône de Mach. (Tiré de [Gottlieb et Ritzel, 1988])

## CHAPITRE 2

# SIMULATION D'UN CÔNE DE MACH EN CHAMP LIBRE AU MOYEN D'UNE LIGNE DE HAUT-PARLEURS

C'était un moineau. Un moineau à l'extrémité d'un fil de fer. Pendu. Avec sa petite tête inclinée et son petit bec ouvert. Il pendait à un mince fil de fer accroché à une branche. Bizarre.

Witold Gombrowicz, *Cosmos*

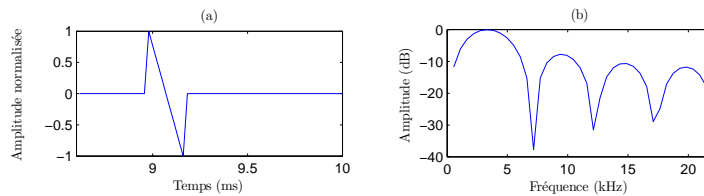


FIGURE 2.1 – Propriétés (a) temporelles et (b) fréquentielles du signal en N que l'on cherche à obtenir pour synthétiser un cône de Mach

**P**OUR résoudre le problème de la localisation de sources supersoniques en déplacement rectiligne uniforme, nous cherchons à mettre en place un environnement de travail sûr dans lequel la propagation de telles sources ne nécessite pas de tirer de projectiles. Par ailleurs, nous cherchons à contrôler suffisamment l'environnement expérimental pour y effectuer des mesures parfaitement reproductibles. Lors des simulations et des expériences présentées ici, nous utilisons comme paramètres de source ceux correspondant à une balle de fusil de calibre de type Elephant :  $d = 14.5$  mm,  $l = 64.4$  mm,  $v = 1029$  m·s<sup>-1</sup>. Cela conduit à  $M \approx 3$  and  $T = 211$   $\mu$ s à 1 m de l'axe en utilisant la formule (1.95). La signature acoustique correspondante a sa composante principale centrée autour de 3500 Hz : voir la figure (2.1). Les hypothèses sur lesquelles nous construisons notre méthode de synthèse partent des connaissances que l'on a établies sur l'onde de Mach au chapitre 1 :

- L'onde prend dans l'espace la forme d'un cône en déplacement le long de l'axe de la trajectoire, dont le demi-angle  $\alpha$  du cône vérifie  $\sin \alpha = \frac{c}{v}$  où  $c$  est la vitesse du son dans l'air et  $v$  la vitesse du projectile. On observe ainsi une symétrie de révolution de long de l'axe de la trajectoire.
- La signature acoustique d'une onde de Mach présente asymptotiquement la forme un signal en N de très courte durée  $T = 211$   $\mu$ s.
- L'onde étant localisée à la fois en temps et en espace, elle est non stationnaire dans le référentiel d'observation.
- La décroissance spatiale de l'amplitude de l'onde  $\Delta p$  en fonction de la distance  $r$  à l'axe du tir (DCPA, *Distance at Closest Point of Approach*) est proportionnelle à  $r^{-3/4}$ .
- La durée de l'onde  $T$  en fonction de la distance  $r$  à l'axe du tir est proportionnelle à  $r^{1/4}$ .

La synthèse de signaux impulsionnels par décharge électrique dans l'air est étudiée dans [Klinkowstein, 1974]. Inspirés par un tel procédé, nous avons envisagé, dans un premier temps, de synthétiser un cône de Mach au moyen d'un détonateur électrique émettant une décharge dans un tube d'hélium, gaz dans lequel la vitesse du son est d'environ  $1000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , ce qui eût permis de synthétiser une source acoustique à environ Mach 3. Cette technique fut abandonnée car la signature acoustique des impulsions ainsi générées n'était pas reproductible avec précision et il n'était pas possible de faire varier la vitesse de déplacement de la source. De plus, le tube contenant l'hélium devait être alimenté en permanence car l'interface entre l'air et l'hélium, envisagée comme une enveloppe poreuse afin de rayonner acoustiquement, laissait fuir l'hélium. Plus récemment, la propagation de signaux en N dans des milieux aléatoires a fait l'objet de la thèse [Yuldashev, 2011]. Une application de la théorie de Whitham au calcul numérique de *F-functions* est entreprise dans [Ritzel et Gottlieb, 1988] à partir d'une discrétisation du profil du projectile. Le modèle de simulation proposé par [Wunderli et Heutschi, 2000b, Wunderli et Heutschi, 2000a], construit sur une simplification de la théorie de Whitham, permet de mettre en place un dispositif expérimental de synthèse de cône de Mach en faisant un usage ingénieux de la théorie des zones de Fresnel et du principe de superposition de phase. Nous nous inspirons de cette approche pour considérer une ligne à retard conduisant à la formation d'une onde conique par superposition de fronts d'onde monopolaires. Dans le même esprit, une approche numérique pour la synthèse de front d'onde de sources acoustiques supersoniques par Wave Field Synthesis est proposée par [Ahrens et Spors, 2008].

Ce chapitre présente une manière de simuler un cône de Mach à l'aide d'un réseau linéique de hauts-parleurs. Pour cela, on utilise le principe de Huygens pour synthétiser un front d'onde de géométrie conique. Les haut-parleurs étant disposés le long de la trajectoire de la source, leur activation à des intervalles de temps suffisamment petits conduit à une superposition des fronts d'onde donnant naissance, par interférence, à un front d'onde conique. Ce principe est une conséquence géométrique des propriétés du champ acoustique, et, de manière plus générale, de tout champ physique dans lequel l'équation de d'Alembert présente un domaine de validité. Rappelons par exemple qu'en électromagnétisme, l'effet analogue au cône de Mach est le rayonnement Vavilov-Tcherenkov [Ginzburg et Tsytovich, 1979] ; cet effet est mentionné dans le cas d'ondes de gravité acoustique par [Lipovskii, 1980]. Une formulation hamiltonienne du problème de l'émission sonore par une source de masse en mouvement est proposée dans [Krasilnikov *et al.*, 1981]. En utilisant une ligne de hauts-parleurs, on peut espérer retrouver, des 5 propriétés énoncées plus haut, les trois premières, mais pas les deux dernières, à cause du fait que l'onde de Mach est un phénomène non linéaire et qu'il faut se placer dans le régime linéaire du haut-parleur pour émettre correctement le signal. On s'attend donc à observer une décroissance de l'amplitude proportionnelle à  $r^{-1/2}$  et une durée de l'onde qui ne dépend pas de sa distance à l'axe. Pour obtenir un front d'onde conique, il faut se placer dans les bons domaines de longueurs d'onde et de fréquence. Cela soulève d'une part des contraintes d'échantillonnage spatial au niveau de la ligne de haut-parleurs, et d'autre part des contraintes sur la fréquence d'échantillonnage des signaux à envoyer aux haut-parleurs. Nous étudions ces différentes contraintes puis présentons les résultats expérimentaux sur un prototype de ligne constituée de 15 haut-parleurs de petite dimension (Audax TW010I1), espacés de 4.36 cm. La réponse de chaque haut-parleur est inversée individuellement, en chambre anéchoïque, par une méthode de filtrage inverse pour émettre un signal en N. La géométrie des fronts d'onde ainsi que la signature acoustique de l'onde synthétisée sont mesurés expérimentalement et comparés avec des simulations numériques construites sur un modèle analytique simple. On observe d'inévitables artefacts de construction dus à l'échantillonnage spatio-temporel, mais également une distorsion due à la dynamique de la source, que l'on étudiera en fin de chapitre. Concernant la symétrie de révolution, nous pouvons espérer une assez bonne omnidirectivité des haut-parleurs dans le domaine de fréquence considéré (autour de 3500 Hz). La directivité de la ligne sera présentée, ainsi que la décroissance de l'intensité acoustique en fonction de la distance à l'axe. Nous prenons

également en compte le fait que le petit nombre de hauts-parleurs (15 pour la ligne présentée dans ce chapitre, et 128 cellules dans la ligne construite postérieurement) permet de reproduire seulement une portion d'axe de tir de longueur restreinte. Ceci implique que la géométrie conique ne sera reproduite de manière satisfaisante que dans une portion de l'espace bien localisée, sous la contrainte des propriétés géométriques de l'onde ainsi que de la façon dont elle se propage. On ne cherche pas à reproduire parfaitement une onde de Mach, mais seulement certaines de ses propriétés qui nous intéressent pour y tester des techniques de retournement temporel. En particulier, on ne cherche pas nécessairement à avoir un profil d'onde en N parfaitement en accord avec la théorie et les mesures d'ondes de choc réelles, mais un profil localisé en temps de manière satisfaisante. On cherche à synthétiser une signature acoustique qui minimise la traînée des hauts-parleurs et se propage avec une conicité que l'on maîtrise parfaitement. On recherche une reproductibilité de la source contrôlée et adaptée à ces différents paramètres, et non pas la reproductibilité de la réalité d'une vraie onde de Mach.

## 2.1. DISCRÉTISATION DU TERME SOURCE

Reprenant les aspects théoriques concernant le déplacement d'une source supersonique donnés par [Enflo et Hedberg, 2002, p. 168], le terme de source peut être modélisé par une distribution linéique de masse :

$$m(\mathbf{r}, t) = q(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{r}_S$  correspond à l'axe de déplacement du projectile.<sup>1</sup> Dans ce modèle, la masse du terme de source est autorisée à varier au cours du temps pour chacun des points de la trajectoire. Dans notre modèle, on considère la ligne de haut-parleurs comme une distribution discrète de sources ponctuelles. Au cours de l'expérience, chaque haut-parleur émet la signature acoustique du cône de Mach, un signal en N, ce qui correspond à une adjonction de masse.<sup>2</sup> L'émission du signal source d'un haut-parleur se fait avec un retard par rapport à son voisin : entre les deux émissions s'écoule une durée  $\Delta t$  vérifiant

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} \quad (2.2)$$

Dans l'équation (2.2),  $v$  correspond alors à la vitesse d'un projectile virtuel dont le passage au niveau d'un haut-parleur déclenche l'émission du signal en N. Appelons  $s_i(t)$  le signal émis par le haut-parleur n°  $i$ . Sous l'hypothèse de comportement linéaire des haut-parleurs, le terme source global correspondant à l'antenne tout entière conduit à discrétiser ainsi le terme source continu de l'équation (2.1) :

$$\sum_i s_i(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t_i) \approx q(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) \quad (2.3)$$

---

1. Par exemple, dans le cas d'un déplacement rectiligne uniforme à la vitesse  $\mathbf{v}$ , en l'absence de conditions initiale et finale, on a  $\mathbf{r}_S = \{\tau\mathbf{v} | \tau \in \mathbb{R}\}$ .

2. La conception avancée par Enflo et Hedberg d'un terme source de masse variable est compatible avec la nôtre car, si l'on n'injecte pas de masse au système, en revanche on lui injecte de l'énergie acoustique. Comme nous le verrons à partir du chapitre 7, un traitement relativiste en acoustique apporte un point de vue plus simple et plus élégant qu'un traitement galiléen lorsque l'on considère des sources en mouvement. En outre, il unifie le principe de conservation de la masse avec celui de conservation de l'énergie : « La Physique, avant la théorie de la relativité, reposait sur deux principes d'importance fondamentale : le principe de la conservation de l'énergie et celui de la conservation de la masse ; ces deux principes fondamentaux apparaissent comme complètement indépendants. La théorie de la relativité les réduit à un seul. » [Einstein *et al.*, 1921, p. 39]

Les haut-parleurs étant séparés d'une distance constante  $\Delta x$ , et la vitesse  $v$  de la source étant supposée constante, l'instant d'activation du haut-parleur n°  $i$ , situé à la position  $\mathbf{vt}_i$ , vérifie  $t_i = i\Delta t$  (voir aussi, plus loin, l'équation (2.17)). Chaque haut-parleur émet un signal impulsionnel de courte durée. Compte tenu du fait que chacun de ces signaux se propagent dans l'air à la vitesse  $c < v$ , il se crée alors de manière géométrique un front d'onde conique de demi-angle au sommet  $\alpha = \arcsin(c/v)$ . Soit  $s(t)$  le signal émis par un haut-parleur : il est supposé causal et à support borné. On considère l'air comme un milieu homogène, et le haut-parleur, dans son régime de fonctionnement linéaire, comme une source ponctuelle située en  $(x_0, y_0, z_0)$ , commençant à émettre le signal  $s(t)$  au temps  $t_0$ . Alors le champ de pression  $p(x, y, z, t)$  autour du haut-parleur vérifie l'équation de propagation de D'Alembert en trois dimensions

$$\square p(x, y, z, t) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)s(t - t_0) \quad (2.4)$$

où  $\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  désigne l'opérateur d'alembertien et  $\delta$  la distribution de Dirac. La fonction de Green  $G$  associée à l'équation (2.4) vérifie

$$\square G(x, y, z, t) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)\delta(t - t_0) \quad (2.5)$$

avec les conditions aux limites de Sommerfeld. Une telle fonction de Green peut s'écrire sous la forme

$$G(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r} \quad (2.6)$$

où  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$  est la distance entre la source  $(x_0, y_0, z_0)$  et le point de mesure  $(x, y, z)$ . On voit dans le terme de droite de l'équation (2.6) deux retards :  $t_0$  qui est l'instant de l'émission, responsable de la propagation supersonique virtuelle, et  $\frac{r}{c}$  qui est un retard dû à la propagation dans l'air. Pour obtenir l'équation de propagation du signal émis par le haut-parleur, il faut convoluer temporellement le membre de droite par le signal  $s(t)$ . On obtient alors dans le membre de gauche le champ de pression en un point de mesure

$$p(x, y, z, t) = G_t * s = \frac{s\left(t - t_0 - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}. \quad (2.7)$$

Pour généraliser le résultat précédent à  $N$  hauts-parleurs, il suffit de remplacer les coordonnées du point source  $(x_0, y_0, z_0)$  par un ensemble de points sources  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , puis de sommer l'ensemble des contributions. Également, il faut tenir compte du fait que chaque haut-parleur  $i$  commence à émettre le signal  $s(t)$  à l'instant respectif  $t_i$ . Le champ de pression au point quelconque  $(x, y, z, t)$  s'exprime alors

$$p(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N \frac{s\left(t - t_i - \frac{r_i}{c}\right)}{4\pi r_i} \quad (2.8)$$

où  $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$ . L'exemple le plus simple que l'on puisse donner est celui où les hauts-parleurs sont disposés selon  $(i\Delta x, 0, 0)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , et où ils émettent chacun aux instants respectifs  $t_i = \frac{i\Delta x}{v}$ . Le champ de pression s'exprime alors

$$p(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N \frac{s\left(t - \frac{i\Delta x}{v} - \frac{\sqrt{(x - i\Delta x)^2 + y^2 + z^2}}{c}\right)}{4\pi \sqrt{(x - i\Delta x)^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.9)$$

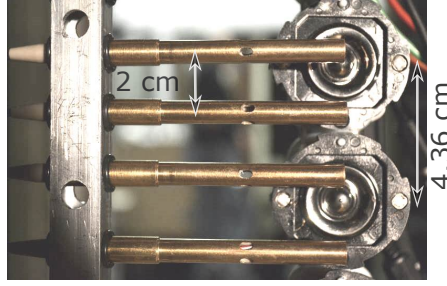


FIGURE 2.2 – Gros plan sur l'antenne de microphones et la ligne de haut-parleurs

## 2.2. CONTRAINTES D'ÉCHANTILLONNAGE

La discrétisation du terme source conduit à des contraintes d'échantillonnages spatio-temporel que nous allons résumer ici.

**Échantillonnage spatial :** Si l'on considère que le signal  $s(t)$  est échantillonné à une fréquence  $F_s$ , la plus grande fréquence  $f_{max}$  contenue dans  $s(t)$  doit respecter le critère  $f_{max} < \frac{F_s}{2}$ . La ligne de haut-parleurs est échantillonnée spatialement d'un pas constant<sup>3</sup>  $\Delta x$ , de telle sorte que le plus grand nombre d'onde admissible respecte  $k_{max} < \pi/\Delta x$ . Les signaux se propageant dans l'air à la vitesse  $c$ , leur contenu fréquentiel vérifie la relation  $f = kc/2\pi$ , de telle sorte que la fréquence maximale vérifie

$$f_{max} < \frac{c}{2\Delta x}. \quad (2.10)$$

Contraint par la taille des haut-parleurs, que l'on peut voir en figure (2.2), nous choisissons  $\Delta x = 4.36$  cm. L'équation (2.10) donne alors  $f_{max} < 3922$  Hz. Ce résultat est acceptable si l'on considère que la composante principale de la signature acoustique recherchée est centrée autour de 3500 Hz.

**Échantillonnage temporel :** L'intervalle de temps  $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = 42.4 \mu s$  entre deux émissions du signal source n'est clairement pas un intervalle d'échantillonnage spatial. Il doit vérifier  $f_{max}\Delta t < \frac{1}{2M} \approx 0.167$ . Comme l'on travaille sur des signaux numériques, il est nécessaire que toutes les durées soient exprimées en tant que multiples de l'inverse de la fréquence d'échantillonnage :  $F_s\Delta t \in \mathbb{N}$ ,  $F_sT \in \mathbb{N}$ . Ces entiers sont les durées données en nombres d'échantillons :  $\lfloor F_s\Delta t \rfloor = 2$ ,  $\lfloor F_sT \rfloor = 10$ , c'est pourquoi dans la suite nous prenons les approximations  $\Delta t = 2/F_s \approx 41.7 \mu s$  (comparé à  $42.4 \mu s$ ) et  $T = 10/F_s \approx 208 \mu s$  (valeur théorique :  $211 \mu s$ ).

**Fréquence d'échantillonnage élevée :** Les contraintes sur  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sont respectées si  $F_s$  est suffisamment élevée pour que chaque fréquence contenue dans le signal  $s(t)$  soit petite devant  $F_s$  de plusieurs fois le nombre de Mach, c'est-à-dire s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$2n[M + 1]f_{max} < F_s. \quad (2.11)$$

On a alors  $\frac{n}{F_s} < \frac{1}{2[M+1]f_{max}} \Rightarrow \frac{mv}{F_s} < \frac{c}{2f_{max}}$ . En prenant  $\Delta x = n \frac{v}{F_s}$ , on a à la fois  $\Delta x < \frac{c}{2f_{max}}$  et  $F_s\Delta t = n \in \mathbb{N}$ . En d'autres termes, l'échantillonnage spatio-temporel de la source acoustique supersonique est correctement réalisé lorsque l'énergie du signal en N devient négligeable au-delà d'une fréquence limite déterminée par la fréquence d'échantillonnage et le nombre de Mach. Les composantes hautes fréquences sont les lobes spectraux d'un sinus cardinal, dû à un fenêtrage Heaviside marquant la

3. La synthèse des termes de phase d'une antenne dont les éléments sont espacés de manière irrégulière est étudiée du point de vue de la programmation mathématique dans [Zhukov et Sizikov, 1981].

finitude du support temporel [Lee *et al.*, 1968]. Ainsi plus la fréquence d'échantillonnage est élevée, plus en hautes fréquences les lobes du sinus cardinal sont de faible amplitude ce qui permet de vérifier approximativement la condition (2.11). La valeur maximale de la fréquence d'échantillonnage des cartes son utilisées en émission était  $F_s = 48$  kHz, qui s'avère acceptable. Cependant, les mesures acoustiques ont été effectuées sur un frontal d'acquisition à 192 kHz pour une meilleure résolution en temps.

### 2.3. FILTRAGE INVERSE POUR LA SYNTHÈSE DE LA SIGNATURE ACOUSTIQUE

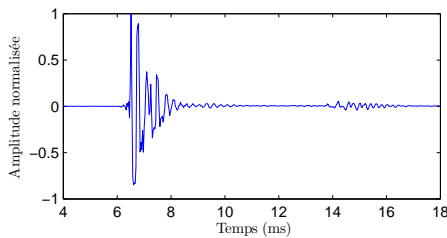


FIGURE 2.3 – Mesure de pression à la position (21, 1) — correspondant à  $(x = 42$  cm,  $y = 8.5$  cm) — de l'émission d'un signal en N idéal

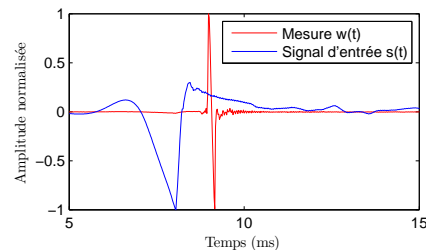


FIGURE 2.4 – Filtrage inverse pour un haut-parleur, mesuré à la position (21, 16) : comparaison entre le signal inverse (bleu) et le signal mesuré (rouge)

Jusqu'à présent, nous avons supposé que les haut-parleurs émettaient un signal correspondant à une signature acoustique en forme de N idéal. Nous n'avons pas tenu compte du fait que la réponse en fréquence des haut-parleurs n'est pas parfaitement plate et que l'émission d'un signal impulsionnel allait conduire à émettre ce signal convolué par la réponse impulsionnelle du haut-parleur, ainsi que d'éventuels effets de diffraction : voir par exemple la figure (2.3). Observe-t-on un signal en N ? Pas du tout. Heureusement, sous l'hypothèse que cette distorsion se fait de manière linéaire, il est possible de la corriger par une méthode de filtrage inverse. Appelons  $s(t)$  le signal temporel qui doit être injecté dans le haut-parleur de telle sorte que le signal de pression mesuré en un point de l'espace, que nous appellerons  $w(t)$ , soit un signal en N parfait. Sous l'hypothèse de linéarité, il existe une fonction  $h(t)$  telle que

$$w = h * s. \quad (2.12)$$

En utilisant une version simplifiée de la théorie développée par [Kirkeby et Nelson, 1999], l'inversion du système repose sur le fait qu'il est possible d'écrire la convolution comme un simple produit matriciel

$$w = Hs \quad (2.13)$$

où  $H$  est une matrice de Toeplitz contenant  $h$  dans sa première colonne. L'équation (2.13) peut être pseudo-inversée par la formule

$$s = (H^*H)^{-1}H^*w, \quad (2.14)$$

l'étoile dénotant le transposé-conjugué. La tâche principale consiste à déterminer la matrice  $H$  ou, de manière équivalente, le vecteur  $h$ , c'est-à-dire de procéder à l'apprentissage de la réponse impulsionnelle du système convolutif responsable de la distorsion. Dans ce but, nous avons employé une procédure de Welch [Oppenheim et Schaffer, 1974] consistant à enregistrer le signal de pression



mesuré par le microphone du centre de l'antenne émettant un bruit blanc de 30 secondes de durée, puis d'estimer la réponse en fréquence par densité spectrale de puissance. Le microphone (n° 21 sur une antenne de 41 micros) est disposé à une distance  $a = 38,5$  cm du haut-parleur considéré. Les mesures sont effectuées en chambre anéchoïque afin d'isoler au mieux la réponse individuelle du haut-parleur en champ libre. Malgré tout, la méthode de Kirkeby et Nelson n'est optimale qu'au point de mesure. On suppose que dans l'approximation de champ libre, le filtrage inverse est quasi-invariant par translation spatiale.

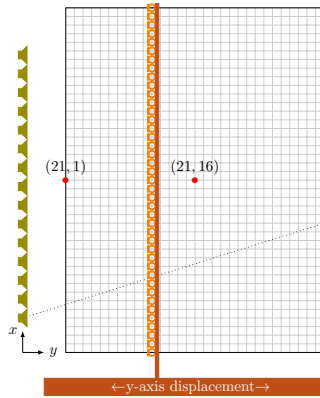


FIGURE 2.5 – Disposition de la ligne de haut-parleurs (vert) et de l'antenne de microphones (orange) pour la mesure du front d'onde conique synthétisé. Les points rouges représentent deux points de mesure.

Les résultats expérimentaux montrent que cette approximation est valable dans la région de l'espace délimitée par la grille montrée en figure (2.5), bien qu'une détérioration soit observée aux bords, sans doute à cause d'effets de diffraction. Effectuer une procédure de filtrage inverse par position de microphone aurait conduit à un protocole expérimental lourd et rébarbatif, mais surtout à l'absence d'existence physique de l'onde synthétisée, puisque chaque mesure optimisée n'aurait été valide qu'en un seul point de l'espace. En revanche, nous effectuons à chaque fois un filtrage inverse par haut-parleur, pour tenir compte de leur position respective sur la ligne et des effets de diffraction associés. On calcule donc une fonction  $h_i$  par haut-parleur et sa matrice de Toeplitz associée  $H_i$ , chacun d'eux conduisant à un signal inverse

$$s_i = (H_i^* H_i)^{-1} H_i^* w \quad (2.15)$$

Chaque signal  $s_i$  doit être décalé en temps de deux intervalles. Le premier  $\tau_i$  corrige le fait que chaque  $h_i$  est calculé pour concentrer tous les signaux en N au même endroit et au même moment, étant donné que  $H_i s_i = w$  pour tout  $i$  :

$$\tau_i = \frac{\sqrt{a^2 + (i-k)^2 \Delta x^2} - a}{c} \quad (2.16)$$

$k$  étant l'indice du haut-parleur face au microphone utilisé lors de la procédure d'apprentissage. L'introduction de  $\tau_i$  conduit à la synthèse d'une onde cylindrique. Le deuxième décalage  $t_i$  permet de passer d'une onde cylindrique à une onde conique :

$$t_i = \frac{i \Delta x}{v} \quad (2.17)$$

Les amplitudes relatives des différents signaux doivent également être corrigées d'un facteur  $\xi_i$

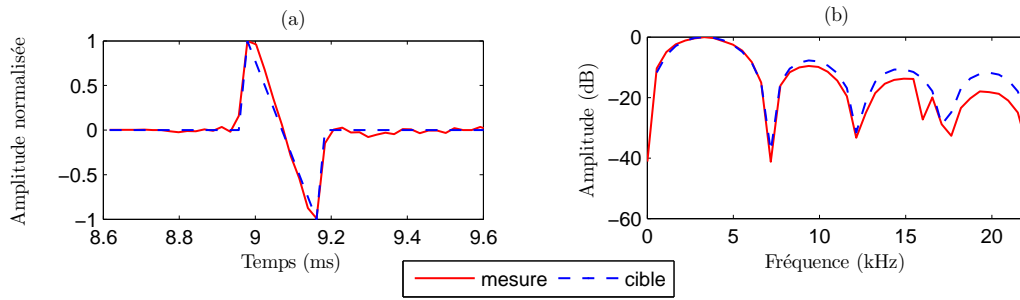


FIGURE 2.6 – Filtrage inverse pour un haut-parleur, effectué et mesuré à la position (21, 16) — correspondant à  $(x = 42 \text{ cm}, y = 38.5 \text{ cm})$  : comparaison entre un signal en N numérique et la mesure après le filtrage inverse (a) dans le domaine temporel, (b) pour les amplitudes spectrales.

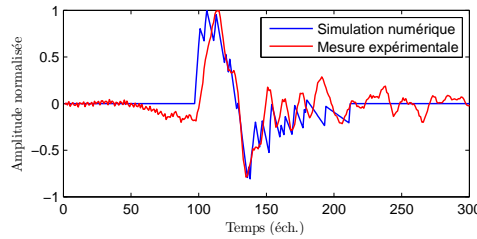


FIGURE 2.7 – Comparaison entre la mesure et la simulation numérique de la superposition des signaux en N à la position (21, 16).

prenant en compte la propagation en champ libre, selon la relation

$$\xi_i = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (i-k)^2 \Delta x^2}} \quad (2.18)$$

En conclusion, le signal  $s'_i(t)$  qui doit être envoyé au haut-parleur n°  $i$  vérifie

$$s'_i(t) = \xi_i s_i(t - t_i - \tau_i). \quad (2.19)$$

Sur la figure (2.4), on peut voir que le signal inverse est très différent d'un signal en N. Cependant, la fonction de transfert est bien inversée car le signal acoustique mesuré  $w$  a bien la forme en N voulue. En figure (2.6) sont comparés le signal en N numérique et le signal en N mesuré, en temporel et dans le domaine de Fourier. Le spectre est correctement reproduit autour de 3500 Hz qui correspond au lobe principal.

La signature acoustique du cône de Mach a été correctement reproduite pour chacun des haut-parleurs pris individuellement. Lorsque tous les signaux sont émis simultanément, la signature acoustique résultante subit une distorsion due aux décalages  $t_i$  définis dans l'équation (2.17). Cette distorsion, qui sera étudiée analytiquement au prochain chapitre, peut être prédite par des simulations numériques de la propagation de signaux en N idéaux depuis chacune des positions de haut-parleurs considérés comme des sources monopolaires omnidirectionnelles, entendu que le filtrage inverse est à présent fonctionnel. La comparaison entre cette simulation numérique et la mesure de pression correspondante est donnée en figure (2.7). Malgré ces artefacts de reconstruction, la signature acoustique de la ligne demeure de support restreint<sup>4</sup> et de forme reconnaissable. De plus, les

4. Le facteur de dilatation temporelle nécessite une analyse plus approfondie pour être explicité, voir le chapitre suivant.

simulations numériques s'accordent aux mesures expérimentales, ce qui valide l'approximation de champ libre formulée plus haut.

## 2.4. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

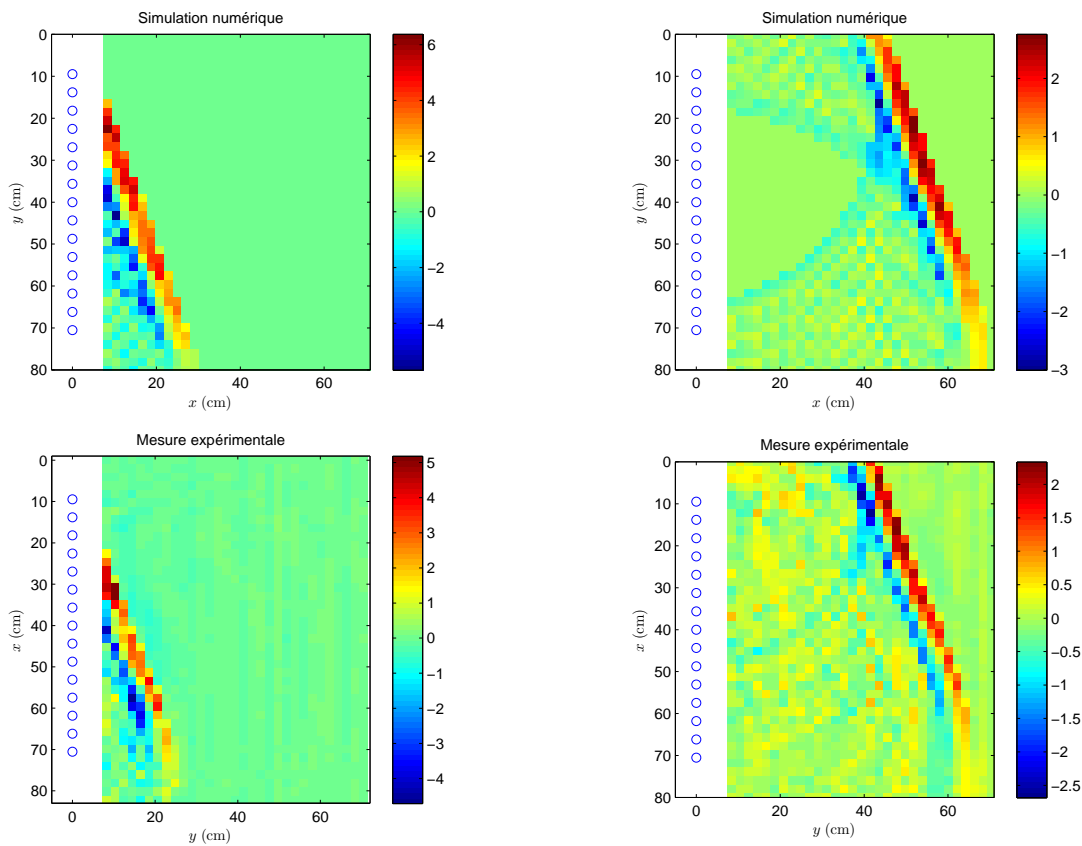
Nous cherchons à vérifier qu'il est possible de synthétiser un front d'onde conique par la méthode décrite dans les paragraphes précédents. Pour cela, nous avons effectué, dans la chambre anéchoïque du laboratoire d'acoustique du Cnam, des mesures dans différents points de l'espace à l'aide d'une antenne de 41 microphones espacés de 2 cm, montée sur un bras robotique permettant des déplacements très précis. La ligne de haut-parleurs permettant une répétabilité stricte de l'émission de l'onde, celle-ci est émise à plusieurs reprises, entre lesquelles le robot déplace l'antenne de 2 cm selon  $y$ . Ainsi on obtient un champ de pression spatio-temporel selon  $x$ ,  $y$  et  $t$ . Un schéma du dispositif expérimental est donné en figure (2.5). La ligne de haut-parleurs est constituée de 15 haut-parleurs, du modèle Audax TW010I1 présenté en figure (2.2), disposés verticalement le long de l'axe  $x$  et gérée par système de son à 16 voix.<sup>5</sup> La distance entre deux haut-parleurs,  $\Delta x = 4.36$  cm, qui doit être aussi petite que possible pour une bonne définition spatiale, est limitée par la taille des haut-parleurs. Le modèle choisi est un compromis entre la taille et la directivité : dans le domaine de fréquence du lobe principal du N, situé entre 3500 et 4000 Hz, il peut être considéré omnidirectionnel avec une bonne précision.

**Reconstruction spatio-temporelle du front d'onde conique :** La validation expérimentale de la méthode de synthèse de cône de Mach passe par l'observation du front d'onde conique dans le quadrillage spatial faisant face à la ligne de haut-parleurs tel que montré en figure (2.5). Les mesures expérimentales sont comparées à des simulations numériques de la propagation en champ libre dans lesquelles les haut-parleurs sont considérés comme des sources monopolaires omnidirectionnelles. La figure (2.8) montre la reconstruction du front d'onde conique à deux instants permettant de visualiser le déplacement de l'onde, et donc son caractère non stationnaire. Comme on pouvait le prévoir, la reconstruction n'est pas conique dans la partie inférieure droite de la grille, correspondant à la zone sous la ligne pointillée de la figure (5.3). Cet effet se retrouve à la fois sur les simulations numériques et les mesures, qui présentent une bonne adéquation. Dans les calculs de directivité et de décroissance de l'amplitude, cette zone de mauvaise reconstruction n'est pas prise en compte. Sur la figure (2.8b), on constate que l'espace après le passage de l'onde est plus bruité sur la mesure que sur la simulation. Ce bruit a donc le caractère aléatoire d'un bruit de mesure. Cependant, on remarque un bruit moins intense présent sur les simulations numériques, qui ne peut donc pas être un bruit de mesure. Il provient de la discrétisation du terme de source : les fronts d'onde sphériques qui interfèrent constructivement au niveau du front d'onde, sont supposés interférer destructivement dans le reste de l'espace. Cependant, cette annulation mutuelle n'est pas assurée analytiquement lorsque le terme de source est discrétisé. Il existe donc un bruit déterministe dû à la configuration géométrique de l'antenne.

**Symétrie de révolution :** Nous avons étudié la symétrie de révolution de la ligne en la faisant tourner autour de son axe afin d'obtenir plusieurs angles d'émission  $\theta \in \{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$ . Cette nouvelle série de mesure permet d'obtenir un champ spatio-temporel à 4 dimensions  $(x, r, \theta, t)$ . Le diagramme de directivité  $L_{x,r}(\theta)$  à  $(x, r)$  fixés se construit en calculant la moyenne quadratique

---

5. La ligne était initialement de 20 haut-parleurs qui subirent quelques désagréments au cours des expériences présentées ici, si bien qu'il n'en resta plus que 11. Dans la suite de la thèse, nous avons élargi artificiellement ce nombre à 33 en profitant de la reproductibilité des mesures pour superposer les simulations du cône de Mach depuis trois positions de ligne différentes, accolées bout à bout.



(a) Synthèse du front d'onde conique arrivant dans la zone de mesure.

(b) Synthèse du front d'onde conique sur le point de sortir de la zone de mesure.

FIGURE 2.8 – Reconstruction en champ libre du front d'onde conique visualisée à deux instants dans la grille de mesure spatiale. Haut : simulation numérique. Bas : mesure expérimentale (Pa).

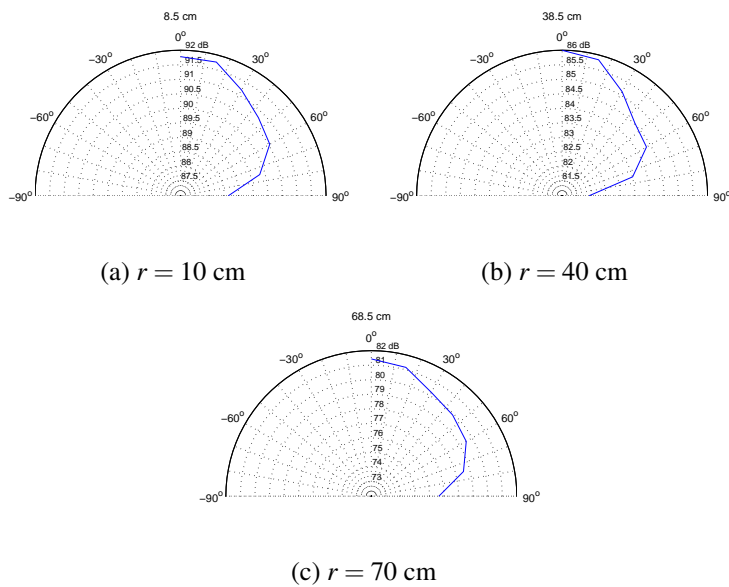


FIGURE 2.9 – Diagrammes de directivité pour trois distances à l'axe  $r$ , mesurés pour  $x$  face au milieu de la ligne de haut-parleurs.

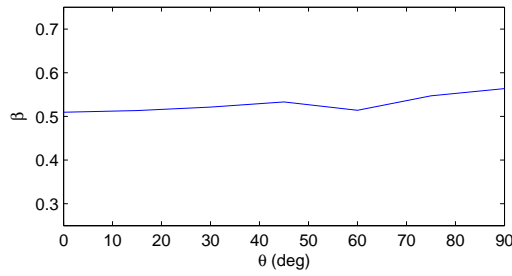


FIGURE 2.10 – Variations du coefficient  $\beta$  par rapport à l'angle de mesure  $\theta$ .

temporelle :

$$L_{x,r}(\theta) = 10 \log_{10} \left( \frac{\langle p^2(x, r, \theta, t) \rangle_t}{p_{ref}^2} \right). \quad (2.20)$$

En figure (2.9), la directivité est affichée pour  $x = 42$  cm, ce qui correspond au microphone n° 21 situé face au milieu de la ligne de haut-parleurs, et pour trois valeurs de distance à l'axe  $r$ . On constate que la directivité n'est pas parfaitement axisymétrique, car les haut-parleurs ne sont en vérité pas omnidirectionnels. On perd environ 4 dB entre  $0^\circ$  and  $90^\circ$ . La directivité varie également légèrement en fonction de  $x$  et de la distance à l'axe, ces variations étant liées à la qualité de la reconstruction du front d'onde.

**Décroissance de l'amplitude en fonction de la distance à l'axe :** La décroissance de l'amplitude de l'onde en N présente un intérêt en ce qu'elle marque une différence entre le modèle analytique non linéaire de Whitham, qui prévoit une décroissance en  $r^{-3/4}$ , et la décroissance d'une source cylindrique dans le cadre de l'acoustique linéaire où l'amplitude du champ de pression décroît comme  $r^{-1/2}$  [Morse et Ingard, 1968]. Dans ce paragraphe on calcule une estimation du coefficient  $\beta$  défini par

$$\Delta p(r, \theta) = \langle \max_t \{p(x, r, \theta, t)\}_x \rangle \sim \frac{1}{r^\beta} \quad (2.21)$$

que l'on estime pour chaque valeur de  $\theta$  en calculant le coefficient directeur de l'interpolation linéaire de  $\log(\Delta p(\log(r), \theta))$ . La figure (2.10) montre que  $\beta$  dépend peu de  $\theta$  et prend des valeurs comprises entre 0,5 et 0,55, ce qui est cohérent avec la valeur théorique correspondant à une source cylindrique en champ libre.

## 2.5. CONDITION DE RECOUVREMENT DU SUPPORT ET FORMATION DU CÔNE

Dans la perspective d'une généralisation du principe de synthèse de sources acoustiques en mouvement au moyen d'une ligne de haut-parleurs, il apparaît que la vitesse de déplacement joue un rôle déterminant. Dans le cas d'un signal à support borné, il est aisé de comprendre que le support du signal  $T$  et la vitesse de propagation  $v$  de la source sont deux paramètres à prendre en compte, notamment dans les rapports qu'ils exercent l'un sur l'autre. Considérons deux éléments consécutifs de la ligne de haut-parleurs que l'on notera  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \Delta x \frac{\mathbf{v}}{v}$ , émettant chacun le signal  $s(t)$ , de support  $T$ , avec un décalage  $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|}{v}$ . La mesure en un point  $\mathbf{r}$  du champ de pression

résultant de ces deux contributions s'écrit :

$$p(t) = s\left(t - \frac{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|}{c}\right) + s\left(t - \frac{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}\|}{c} - \Delta t\right). \quad (2.22)$$

On constate qu'au point de mesure  $\mathbf{r}$ , le « déphasage »  $\Delta\psi$ , c'est-à-dire la différence de temps d'arrivée<sup>6</sup> s'écrit :

$$\Delta\psi = \Delta t + \frac{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}\| - \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|}{c}. \quad (2.23)$$

Si l'on effectue une « approximation dipolaire »  $\Delta x \ll \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|$ , on trouve au premier ordre

$$\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\| + \frac{\Delta x}{2} \cos \theta + o\left(\frac{\Delta x}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|}\right), \quad (2.24)$$

avec

$$\theta = \arccos\left(\frac{|(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|v}\right) \quad (2.25)$$

désignant l'angle entre le vecteur vitesse  $v$  et le chemin acoustique allant de  $\mathbf{r}_i$  à  $\mathbf{r}$ . On trouve ainsi dans le cas de l'approximation dipolaire un déphasage

$$\Delta\psi = \Delta t - \frac{\Delta x}{2c} \cos \theta. \quad (2.26)$$

Le recouvrement des supports a lieu si le déphasage  $\Delta\psi$  est inférieur au support  $T$  du signal source  $s(t)$  :

$$\Delta\psi < T. \quad (2.27)$$

Si l'on considère comme fixées la distance  $\Delta x$  et la position de mesure  $\mathbf{r}$ , on trouve que la condition de recouvrement des supports (2.27) implique l'existence d'une vitesse limite  $v_{lim}$  de déplacement de la source acoustique que l'on cherche à synthétiser, définie comme

$$v_{lim} = \frac{1}{\frac{T}{\Delta x} + \frac{\cos \theta}{2c}} \quad (2.28)$$

telle que pour les vitesses  $v < v_{lim}$  il n'y aura pas de recouvrement des supports, donc, en particulier, on ne peut pas appliquer le principe de Huygens de synthèse par superposition de fronts d'onde. Bien sûr cette vitesse dépend du point de mesure mais également des positions des sources. Nous n'avons mené l'analyse que sur deux éléments de source. Un exemple d'application numérique d'une telle vitesse limite peut être menée dans le cas d'une ligne  $\Delta x = 2$  cm, pour un support  $T = 208 \mu\text{s}$ , avec  $\mathbf{r}_i = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (1030 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 0, 0)$ ,  $\mathbf{r} = (1 \text{ m}, 1 \text{ m}, 1 \text{ m})$ , auquel cas on trouve  $v_{lim} = 89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On peut vérifier par des simulations numériques que la superposition des fronts d'onde commence bien à la vitesse  $v_{lim}$  en regardant les figures (2.11a), (2.11b) et (2.11c) reproduisant la mesure de pression au point  $\mathbf{r}$  depuis une ligne de 251 haut-parleurs espacés de  $\Delta x = 2$  cm. En figure (2.11a), où la vitesse de déplacement de la source est de  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  inférieure à la vitesse limite,

6. Nous considérons un déphasage dimensionné à la valeur d'une durée car il ne peut être rapporté à une fréquence porteuse, entendu que nous considérons un signal fortement impulsif de support restreint. Par souci de rigueur, nous suggérons au lecteur soucieux d'analyse dimensionnelle de multiplier  $\Delta\psi$  par la fréquence d'échantillonnage : le déphasage adimensionné s'exprime alors en nombre d'échantillons, entendu que nous travaillons sur des données de mesure et de simulations numérisées. Cependant, c'est bien la considération des différences de durées qui nous intéresse ici.

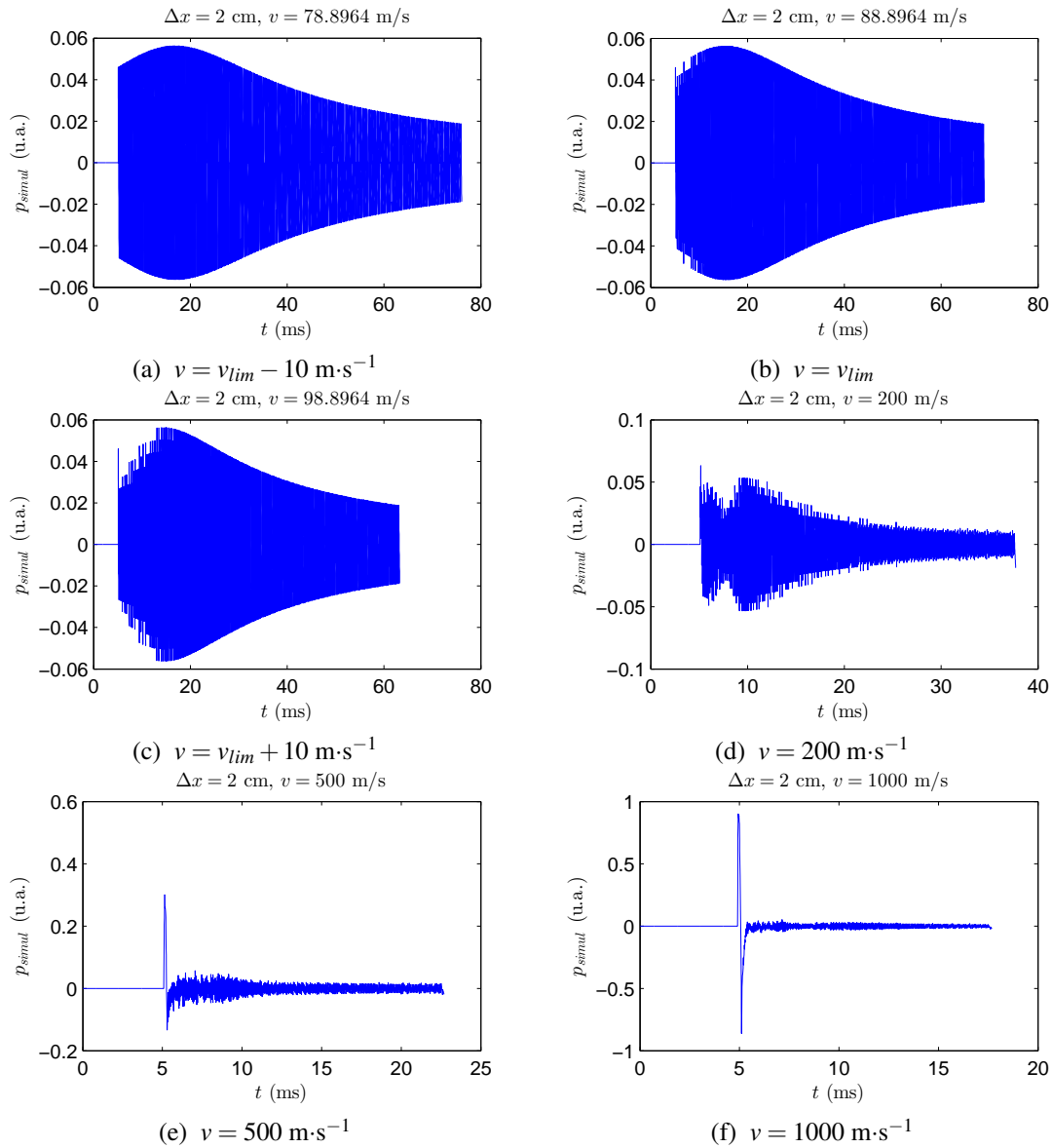


FIGURE 2.11 – Étude du recouvrement des supports et de la formation du cône de Mach pour différentes vitesses de déplacement de source lors de l'utilisation d'une ligne de haut-parleurs

on observe une séparation totale de chaque signal source, et le profil total du signal de mesure subit une déformation géométrique uniquement due à la distance plus ou moins grande de chaque haut-parleur au point de mesure, de la même manière qu'un objet nous apparaît plus ou moins grand selon qu'il est plus ou moins proche de nos yeux.

Les figures (2.11d), (2.11e) et (2.11f) montrent la signature acoustique du cône pour trois vitesses supérieures à  $v_{lim}$  : à  $v = 200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (fig. 2.11d), la signature présente un caractère très chaotique, comportement qui tend à se résorber à  $v = 500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (fig. 2.11e), où l'on remarque l'apparition d'un lobe de pression positive aux premiers temps d'arrivée, lobe qui devient un pic de surpression pour  $v = 1000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (fig. 2.11f), immédiatement suivi d'une dépression, cependant légèrement moins marquée et plus bruitée. On met ainsi en évidence le lien qui existe entre la valeur de la longueur  $T$  du support du signal et la disposition naturelle des fronts d'onde à interférer avec leurs plus proches voisins pour former un signal en forme de N seulement quand les vitesses de la source synthétisée le permettent. Cette approche par synthèse de fronts d'onde à partir de sources monopolaires immobiles permet donc de saisir une partie des phénomènes physiques intervenant lors de la formation d'un cône de Mach réel. Cependant, comme l'on se place dans l'approximation linéaire, notamment à cause du domaine de fonctionnement des haut-parleurs, on restreint notre approche à l'acoustique linéaire, ce qui n'empêche pas d'observer la formation du cône de Mach. Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 1, et comme nous le verrons plus tard au chapitre 7 lorsque nous ferons une analyse comparée entre l'aérodynamique supersonique (à partir des travaux de Théodore von Kármán) et certains principes de relativité restreinte, le régime supersonique admet l'approximation linéaire. La condition de recouvrement des supports est difficile à conceptualiser si l'on se place dans le référentiel comobile, c'est pourquoi nous consacrons un chapitre entier à la mise en place du cadre théorique nécessaire à une telle approche.

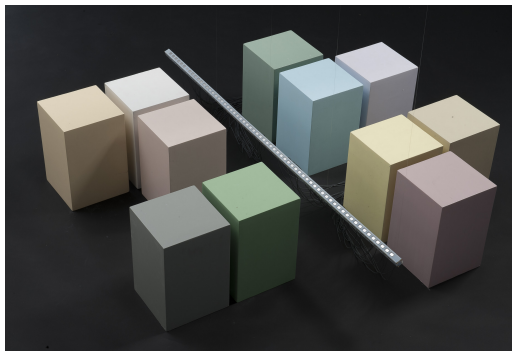
Nous avons montré dans ce chapitre qu'il est possible de synthétiser un front d'onde conique en déplacement supersonique au moyen d'une ligne de haut-parleurs, donc sans déplacement de projectile. En ce qui concerne la signature acoustique, nous avons procédé à un filtrage inverse des réponses individuelles des haut-parleurs pour que chacun émette un signal en N, correspondant au comportement asymptotique de la signature acoustique du cône de Mach associé au déplacement réel d'un projectile supersonique (voir à ce sujet le chapitre 1). Les résultats présentés dans le présent chapitre tiennent compte d'une distance  $\Delta x = 4,36 \text{ cm}$  entre les haut-parleurs, en raison du matériel disponible lors de mesures expérimentales. Cependant une deuxième ligne de haut-parleurs a été construite au cours de la thèse, avec une plus petite distance  $\Delta x = 2 \text{ cm}$ , qui permet une reconstruction plus précise du front d'onde. En effet, les paramètres déterminants dans la synthèse d'un front d'onde conique sont, d'une part, une fréquence d'échantillonnage des signaux source  $F_s$ , élevée, en raison de la durée très restreinte du support temporel du signal en N : dans ce chapitre la fréquence  $F_s = 48 \text{ kHz}$  donne des résultats satisfaisants, et d'autre part, une distance  $\Delta x$  petite, correspondant à une « fréquence d'échantillonnage spatiale » élevée, cependant cette distance est limitée par les principes physiques régissant le fonctionnement des haut-parleurs : la taille de la membrane conditionnant la bande passante du haut-parleur, il est impossible de la faire « tendre vers 0 » tout en continuant d'émettre des sons dans la gamme de fréquence souhaitée (autour de  $3500 \text{ Hz}$  dans le cas du présent chapitre). Nous avons également vu que la vitesse de déplacement de la source  $v$ , qui influe sur l'angle du cône de Mach donc sur la géométrie de l'onde, contraint le support du signal source à prendre des valeurs telles que le phénomène de recouvrement du support soit suffisamment marqué pour que la signature acoustique ait elle-même une forme de signal en N. Nous avons pour montrer cela défini une vitesse minimale nécessaire au recouvrement des supports ( $v_{lim} = 90 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  dans notre cas), mais la formation du signal en N n'apparaît de manière satisfaisante que pour des vitesses comprises entre  $500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $1000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , le recouvrement des supports donnant des signatures acoustiques dégradées pour des vitesses trop faibles. De surcroît, en raison de ce que la signature acoustique dépend fortement de la position de mesure, il apparaît



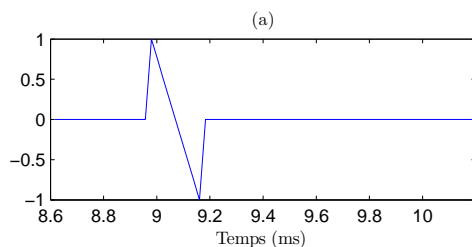
complicé d'envisager un filtrage inverse pour l'ensemble de la ligne. On peut se demander dans quelle mesure la forme du signal source joue un rôle dans la détermination de la signature acoustique du cône. C'est ce que nous allons étudier dans la section suivante.

## 2.6. PROPAGATION ACOUSTIQUE DEPUIS UNE SOURCE LINÉIQUE SUPERSONIQUE

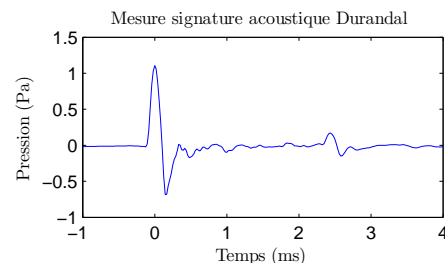
On cherche à caractériser le signal émis par la ligne de hauts-parleurs simulant un déplacement supersonique. La formation d'une onde conique de type cône de Mach est observée à la fois sur des simulations et des mesures expérimentales, pour une distance entre les haut-parleurs  $\Delta x = 4,36$  cm comme nous l'avons montré plus haut, mais aussi pour le modèle de ligne plus précis Durandal ( $\Delta x = 2$  cm) présenté en figure (2.12a). Chaque cellule de la ligne émet le signal présenté en figure (2.12c); le signal mesuré dans l'espace subit des distorsions dues à la superposition des fronts d'onde de manière non simultanée, telles que présentées en figures (2.12b) et (2.12d). On se propose ici d'étudier cette distorsion de manière analytique, en raisonnant par analogie avec la théorie linéaire de Whitham sur l'étude de la propagation de signaux depuis une source supersonique. Si l'on observe le profil de la signature acoustique de la ligne, on peut envisager de l'associer à la fonction de Whitham, définie à l'équation (1.49). En effet la démarche exposée dans le chapitre 1 semble s'appliquer ici, bien que le traitement mathématique ne soit pas rigoureusement identique : en particulier, nous ne partons pas du même terme de source, et nous ne pouvons pas formuler d'approximation d'écoulement stationnaire dans le référentiel d'observation. Il est possible de raisonner en termes d'analogie temps-espace comme Whitham le fait. Par analogie avec l'équation (1.39), on considère le terme source du champ de pression comme décrivant la dérivée d'une section



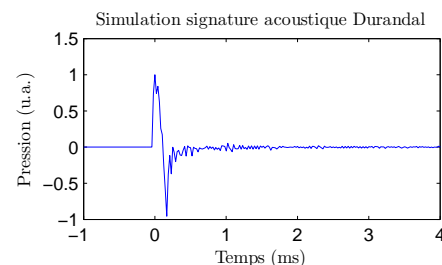
(a) Modèle de ligne de hauts-parleurs avec  $\Delta x = 2$  cm (Durandal)



(c) Signal source de chaque haut-parleur de la ligne ( $T = 2 \cdot 10^{-4}$  s)



(b) Signature acoustique de la ligne de haut-parleurs : mesure expérimentale ( $\Delta x = 2$  cm,  $v = 1030 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $F_s = 48 \text{ kHz}$ )



(d) Signature acoustique de la ligne de haut-parleurs : simulation numérique ( $\Delta x = 2$  cm,  $v = 1030 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $F_s = 48 \text{ kHz}$ )

FIGURE 2.12 – Distorsion du signal en N par la ligne de haut-parleurs

de profil de projectile, en remplaçant la variable spatiale par la variable temporelle :

$$s(t) = \sigma'(t). \quad (2.29)$$

On obtient alors, par analogie avec la proposition (1.2.2), qu'au voisinage du front d'onde le signal de pression est proportionnel à la fonction de Whitham associée au signal en N  $s(t)$  :

$$p(r,t) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} F\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (2.30)$$

où la fonction de Whitham s'exprime

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\xi \frac{s(\eta)}{\sqrt{\xi - \eta}} d\eta. \quad (2.31)$$

Il est possible de calculer l'expression analytique de cette fonction sachant que le signal source  $s(t)$ , que l'on suppose être un signal en N parfait, a pour expression

$$s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2t}{T} & \text{si } t \in [0, T], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Deux cas sont à distinguer :

1.  $\xi < T$  :

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\xi \frac{1 - \frac{2\eta}{T}}{\sqrt{\xi - \eta}} d\eta \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\xi \frac{d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}} - \frac{1}{\pi T} \int_0^\xi \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}} \quad (2.34)$$

On utilise les primitives suivantes :

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}} = -2\sqrt{\xi - \eta} + cste \Rightarrow \int_0^\xi \frac{d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}} = 2\sqrt{\xi} \quad (2.35)$$

$$\int \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}} = -2\eta\sqrt{\xi - \eta} + 2 \int \sqrt{\xi - \eta} d\eta \Rightarrow \int_0^\xi \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}} = \frac{4}{3}\xi^{3/2} \quad (2.36)$$

$$(2.37)$$

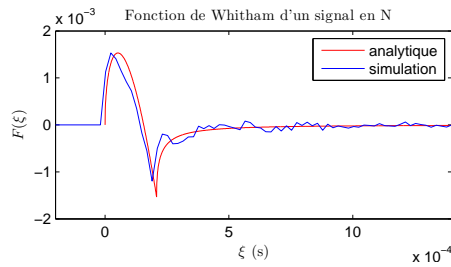
de telle sorte que

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\xi} - \frac{4}{3\pi T} \xi^{3/2} \text{ si } \xi < T. \quad (2.38)$$

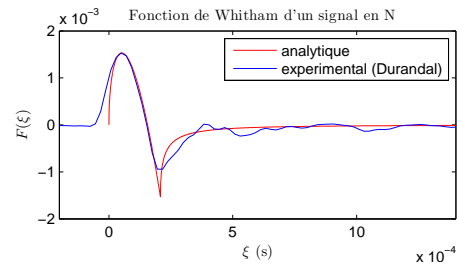
2.  $\xi > T$  : Le calcul est le même mais on intègre de 0 à  $T$ . On trouve

$$F(\xi) = -\frac{1}{\pi} \left( \sqrt{\xi - T} - \sqrt{\xi} \right) + \frac{4}{3\pi T} \left( (\xi - T)^{3/2} - \xi^{3/2} \right) + \frac{2}{\pi} \sqrt{\xi - T} \text{ si } \xi > T. \quad (2.39)$$

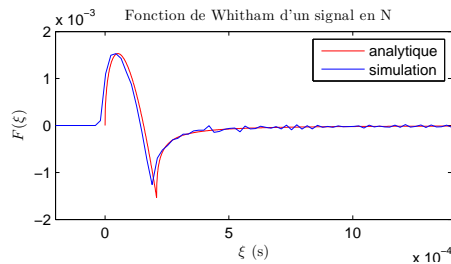
L'observation de la figure (2.13) ne laisse aucun doute quant à l'adéquation entre la signature acoustique de la ligne de haut-parleurs et la fonction de Whitham ; en tout cas dans le cas de l'exemple du signal en N qui nous intéresse. Les amplitudes ont été recalées car nous ne tenons pas compte de l'atténuation dans l'air. On constate que les profils concordent tant sur les simulations



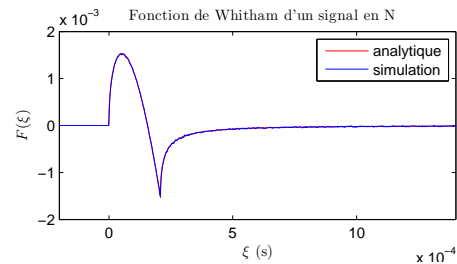
(a) Simulation numérique,  $\Delta x = 2 \text{ cm}$ ,  $F_s = 48 \text{ kHz}$



(b) Mesure expérimentale,  $\Delta x = 2 \text{ cm}$ ,  $F_s = 48 \text{ kHz}$



(c) Simulation numérique,  $\Delta x = 2 \text{ mm}$ ,  $F_s = 48 \text{ kHz}$



(d) Simulation numérique,  $\Delta x = 2 \text{ mm}$ ,  $F_s = 480 \text{ kHz}$

FIGURE 2.13 – Comparaison entre la fonction de Whitham d'un signal en N et la distorsion causée par la propagation supersonique depuis une ligne de haut-parleurs (DCPA=1 m)

numériques que sur la mesure expérimentale, et le fait d'augmenter la fréquence d'échantillonnage ou de diminuer la distance entre les sources améliore la concordance. Nous pouvons conclure que la fonction de Whitham décrit asymptotiquement (pour  $F_s = \infty$  et  $\Delta x = 0$ ) la manière dont le signal source envoyé par les haut-parleurs se déforme sous l'action de sa propre dynamique. Il est intéressant de constater, à travers cet exemple, que l'on retrouve la fonction de Whitham même lorsqu'il n'y a pas de déplacement de projectile. Cela permet, par exemple, d'envisager la ligne de haut-parleur comme un outil de synthèse de profils de pression plus sophistiqués : pour peu que l'on insère le profil géométrique d'un projectile quelconque (avion, ogive ou pomme de terre) en tant que signal source, grâce aux « analogies temps-espace » déjà mentionnées au chapitre 1, il devient possible de visualiser, dans la portion de l'espace restreinte par la finitude de la ligne, le profil de pression généré par le déplacement supersonique d'un tel objet. Malheureusement, il ne semble pour l'instant pas possible de pouvoir espérer faire de la synthèse en champ lointain, où, selon la théorie asymptotique de Whitham, la signature acoustique prend effectivement la forme d'un N, car la reconstruction n'est pas correcte pour de trop grandes distances à l'axe, en raison notamment de l'absence des non-linéarités responsables de la formation du choc. Dans la suite, notamment au chapitre 5, lorsque nous utiliserons le principe de synthèse de cône de Mach à moyen d'une ligne de haut-parleurs, nous considérerons que la signature acoustique de la ligne de haut-parleurs reproduit un N, c'est-à-dire que nous assimilerons le signal en N à sa fonction de Whitham correspondante.

### CHAPITRE 3

# THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA RÉVERBÉRATION

Les Geometres prouvent leurs  
Propositions par des Principes  
certains et incontestables.

---

Christiaan Huygens, *Traité de la  
Lumière*

La possession de quoi que ce soit de  
neuf ou de coûteux ne faisait que  
réfléter le manque de théologie et de  
géométrie d'une personne ; elle  
pouvait même jeter des doutes quant  
à l'existence de son âme.

---

J. K. Toole, *A confederacy of dunces*

**D**ANS ce chapitre, nous étudions les propriétés du champ acoustique en présence de réverbération, lorsque le domaine de longueurs d'onde considéré permet une approche géométrique. Rappelons brièvement la différence entre approche géométrique et approche ondulatoire en citant Louis de Broglie [de Broglie, 1966, p. 87] :

Si la propagation de l'onde associée à la particule peut être décrite à l'aide de l'approximation connue sous le nom d'optique géométrique, on peut assimiler les rayons de l'onde aux trajectoires des particules et l'on retrouve ainsi l'ancienne Mécanique « ponctuelle » des particules de sorte qu'on peut pratiquement se passer de faire intervenir l'onde. L'aspect ondulatoire n'intervient que quand l'optique géométrique n'est plus valable, c'est-à-dire quand la propagation de l'onde fait apparaître des phénomènes d'interférences ou de diffraction.

Cette citation, énoncée dans le contexte de l'optique, n'en demeure pas moins vraie dans le domaine de l'acoustique, discipline où s'invitent conjointement les points de vue géométrique et ondulatoire. Dans le présent chapitre, nous laissons de côté tout aspect ondulatoire : il ne sera donc pas question de diffraction ni d'interférences. Les chapitres 1 et 2 exploitent les propriétés ondulatoires du champ acoustique, que ce soit dans la manière dont se propagent les ondes de pression liées au déplacement d'une source supersonique, ou la manière dont des fronts d'onde sphériques peuvent interférer entre proches voisins pour donner un front d'onde conique. Dans le présent chapitre, ces aspects-là sont mis de côté pour mieux nous consacrer aux aspects purement géométriques. Nous considérons donc la propagation dans l'espace de signaux de pression formant des fronts d'onde de formes précises : sphériques dans un premier temps, puis coniques par la suite. Ainsi l'étude sera plus volontiers portée sur les temps d'arrivée des signaux le long des chemins acoustiques, où le parcours s'effectue à deux vitesses différentes,  $v$  et  $c$ , dans le cas des fronts d'onde conique, que sur les amplitudes et déformations desdits signaux. La réflexion s'effectue selon des parois planes parfaitement rigides, de sorte qu'une méthode de sources images peut être employée pour modéliser la réverbération, comme cela est expliqué dans [Morse et Feshbach, 1953, pp. 812-814] et [Morse et Ingard, 1968, pp. 366-371]. La seule différence avec le traitement présenté par Morse *et al.* est que nous nous plaçons dans le domaine temporel étant donné que nous cherchons à traiter le phénomène non stationnaire de la propagation d'une onde de choc liée à un déplacement

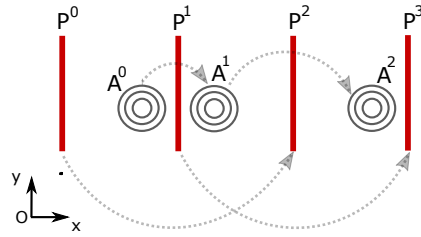


FIGURE 3.1 – Une manière de concevoir l’agencement des sources images lors de la réflexion entre deux parois parallèles.

supersonique. Le raisonnement, mené en fréquentiel dans la littérature, doit être lu en effectuant une transformée de Fourier temporelle inverse sur les objets considérés, notamment les fonctions de Green. Le présent chapitre comporte des aspects mathématiques assez techniques, que nous avons tenté d’illustrer par quelques schémas que le lecteur pressé pourra se contenter de regarder d’un coup d’œil sans s’attarder sur les démonstrations calculatoires.

### 3.1. RÉVERBÉRATION SPÉCULAIRE ENTRE DEUX MURS INFINIS

#### 3.1.1. DÉFINITION DES SOURCES IMAGES

On se place dans un référentiel cartésien  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ . On s’intéresse à la réflexion spéculaire entre deux parois orthogonales à la direction  $x$ , espacées d’une distance  $X$ . De part et d’autre des parois, on peut définir virtuellement la source image d’une source située entre les deux parois. Les réflexions de réflexions sont définies en considérant l’image d’une source image. Considérant les seuls aspects géométriques de la réflexion spéculaire, on ne tient pas compte de l’absorption par les parois ni de phénomènes de diffraction. Ainsi, pour une source située en  $(x, y, z) \in [0, X] \times \mathbb{R}^2$ , il existe une infinité de sources images aux positions  $(x_m, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et le but de cette partie est de caractériser la manière dont se comporte la suite  $x_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

##### Définition 3.1.1 (Opérateur de création de source image)

Pour  $(n, b) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1\}$ , on définit l’opérateur suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(n,b)} : [0, X] \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2nX + (-1)^b x, y, z) \end{aligned}$$

Le raisonnement est illustré par le schéma de la figure (3.1). Nommons  $P_0$  et  $P_1$  les parois de gauche et de droite entre lesquelles se situe la source  $A = A^0$ .

- La source  $A_1$  est l’image de  $A_0$  par  $P_1$ .
- La paroi  $P_2$  est l’image de  $P_0$  par  $P_1$ .
- La source  $A_2$  est l’image de  $A_1$  par  $P_2$ .
- La paroi  $P_3$  est l’image de  $P_1$  par  $P_2$ .
- ...
- La source  $A_m$  est l’image de  $A_{m-1}$  par  $P_m$ .
- La paroi  $P_{m+1}$  est l’image de  $P_{m-1}$  par  $P_m$ .

**N.-B. :** Il existe d’autres manières de créer les sources images. Celle-là est choisie pour sa simplicité. Ce qui est à la fois important et nécessaire, quelque soit la manière de procéder, c’est que :

- chaque source paire soit l'image d'une source impaire et réciproquement,
- chaque paroi paire soit l'image d'une paroi paire par une paroi impaire, et réciproquement.

On vérifie ainsi que l'application de l'opérateur  $\mathcal{R}_{(n,b)}$  à un élément de l'espace entre les murs permet d'obtenir la position de la source image d'un certain ordre. La correspondance biunivoque entre l'indice  $m$  de la réflexion et le multi-indice  $(n,b)$  est assurée par le fait que  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$  sont deux ensembles dénombrables pouvant être mis en bijection avec  $\mathbb{N}$ . Plus précisément, on a le lemme suivant dont la démonstration est évidente.

**Lemme 3.1.1**

*L'application  $f(n,b) = 2n - b$  est une bijection de  $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$  dans  $\mathbb{Z}$ .*

**Remarque 3.1.2**

*On a en particulier la relation suivante qui est une formulation explicite de  $f^{-1}$ .*

$$\forall m \in \mathbb{Z}, m = 2 \underbrace{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}_{n \in \mathbb{Z}} - \underbrace{\frac{1 - (-1)^m}{2}}_{b \in \{0,1\}}$$

Ce lemme permet d'énoncer la première propriété de la théorie de la réverbération spéculaire.

**Proposition 3.1.3**

*La source image d'ordre  $m \in \mathbb{Z}$  du point  $(x,y,z)$  est donnée par  $\mathcal{R}_{(n,b)}(x,y,z)$  avec  $m = 2n - b$ .*

**N.-B. :** Il est tout à fait possible de considérer d'autres changement d'indice, par exemple  $m = 2n + b$ , sans que cela ne modifie le problème autrement que d'une manière arbitrairement liée à notre convenance.

**3.1.2. FONCTION DE GREEN D'UNE SOURCE PONCTUELLE**

Dans la suite on utilisera la notation  $\mathbf{r} = (x,y,z)$  pour désigner un vecteur position de  $\mathbb{R}^3$  avec une correspondance indicielle évidente. On rappelle que l'équation de propagation acoustique du champ de pression  $p(\mathbf{r},t)$  en champ libre et homogène est donnée par

$$\square p = q \tag{3.1}$$

où  $\square = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  désigne l'opérateur d'alembertien et  $q(\mathbf{r},t)$  la distribution des sources acoustiques. Pour une source immobile située en  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in [0,X] \times \mathbb{R}^2$  émettant le signal  $\delta(t - t_0)$  en champ libre, c'est-à-dire en l'absence des parois, le terme de source dans l'équation de propagation est donné par

$$q(\mathbf{r},t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0). \tag{3.2}$$

La solution à l'équation (3.1) avec le terme de source (3.2) est la fonction de Green champ libre

$$G_{(0,0)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) = \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}{c}\right)}{4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}. \tag{3.3}$$

Pour la même source entre les murs réverbérants, le terme source devient

$$q(\mathbf{r},t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ b \in \{0,1\}}} \delta(\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)} \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0) \tag{3.4}$$

ce qui donne, par linéarité de l'équation de d'Alembert (3.1), que la fonction de Green en milieu réverbérant peut s'écrire comme la somme des fonctions de Green champ libre de chacune des sources image

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) = \sum_{n,b} G_{(n,b)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) \quad (3.5)$$

$$= \sum_{n,b} G_{(0,0)}(\mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) \quad (3.6)$$

$$= \sum_{n,b} \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\|} \quad (3.7)$$

qui contient la fonction de Green champ libre pour  $(n, b) = (0, 0)$  et toutes les réflexions pour  $(n, b) \neq 0$ . Lorsque la source en  $\mathbf{r}_0$  émet un signal  $s(t - t_0)$ , le champ de pression en un point  $\mathbf{r}$  s'écrit comme la convolution temporelle de la fonction de Green par le signal :

$$p(t) = \sum_{n,b} \frac{s\left(t - t_0 - \frac{\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\|}. \quad (3.8)$$

### 3.1.3. PROPAGATION DE PLUSIEURS SOURCES PONCTUELLES IMMOBILES

Lorsqu'on est en présence de plusieurs sources en milieu réverbérant, situées en  $\mathbf{r}_k$ , chacune émettant le signal  $s_k(t)$ , l'équation de propagation s'écrit

$$\square p = \sum_k \sum_{n,b} \delta(\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_k) s_k(t).$$

On a alors  $k$  fonction de Green différentes propageant le signal  $s_k(t)$  du point  $\mathbf{r}_k$  au point  $\mathbf{r}$ . Par analogie avec la formule (3.8), le champ de pression résultant s'écrit

$$p(t) = \sum_k \sum_{n,b} \frac{s_k\left(t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_k\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_k\|}. \quad (3.9)$$

On traite aussi le cas particulier où les  $k$  signaux sont identiques à un décalage temporel  $t_k$  près :

$$s_k(t) = s(t - t_k). \quad (3.10)$$

Le champ de pression propagé jusqu'à un point  $\mathbf{r}$  s'exprime alors

$$p(t) = \sum_k \sum_{n,b} \frac{s\left(t - t_k - \frac{\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_k\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_k\|}. \quad (3.11)$$

### 3.1.4. THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ EN MILIEU RÉVERBÉRANT

Le principe de réciprocité en champ libre consiste en ce que l'on peut intervertir la position de la source et celle de l'image dans la fonction de Green champ libre, celle-ci reste invariante sous une telle permutation.

$$G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t_0, t). \quad (3.12)$$

Ceci découle trivialement de l'invariance de la norme  $\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\| = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$ . On n'a pas, en revanche, invariance du noyau de Green par permutation  $t \leftrightarrow t_0$  car cela violerait le principe de causalité. Cependant, en considérant la fonction de Green causale/anticausale

$$G_{ca}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) = \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} + \frac{\delta\left(t - t_0 + \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \quad (3.13)$$

la réciprocité temporelle est assurée. Nous reviendrons plus tard sur cet aspect. La réciprocité dans les fonctions de Green est étudiée par exemple dans [Morse et Feshbach, 1953, p. 873] où ils expriment un « principe de réciprocité pour les fonctions de Green de l'équation d'onde » :

$$G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, -t, -t_0), \quad (3.14)$$

c'est-à-dire qu'en permutant les positions source/image ils permutent également les durées, mais en changeant leur signe, ce qui revient à ne rien faire si l'on regarde l'expression analytique de la fonction de Green donnée par l'équation (3.3). L'opérateur adjoint est défini formellement comme le retourné temporel du noyau de Green causal, c'est-à-dire comme la partie anticausale de l'équation (3.13) :

$$\tilde{G}_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) = G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, -t_0, -t) \quad (3.15)$$

Dans la lignée de ces considérations théoriques sur les propagateurs temporels de l'équation d'onde, nous démontrons le théorème suivant. Pour la démonstration on aura besoin d'utiliser la structure de groupe additif de l'ensemble  $\{0, 1\}$  muni de l'addition modulo 2, ainsi dans la suite on considère  $b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Théorème 3.1.4 (Réciprocité des fonctions de Green en milieu réverbérant)**

Soit  $\mathcal{E} = [0, X] \times \mathbb{R}^2$  la partie de l'espace contenue entre deux parois réverbérantes infinies. Soit  $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t)$  la fonction de Green en milieu réverbérant définie par l'équation (3.7) :

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\|}. \quad (3.16)$$

La réciprocité est assurée, autrement dit :

$$\forall(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \in \mathcal{E}^2, \forall(t_0, t) \in \mathbb{R}^2, \quad G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0, t) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, -t, -t_0). \quad (3.17)$$

**Démonstration :** La permutation  $t_0 \leftrightarrow -t$  est évidente. Pour prouver la réciprocité spatiale, on considère un couple  $(n, b)$  et on effectue le changement d'indice

$$\begin{cases} n = -(-1)^b n' \\ b = b' \end{cases} \quad (3.18)$$

qui donne

$$(x - 2nX - (-1)^b x_0)^2 = (x_0 - 2n'X - (-1)^{b'} x)^2, \quad (3.19)$$

ce qui entraîne l'égalité au niveau des normes

$$\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\| = \|\mathbf{r}_0 - \mathcal{R}_{(n',b')}\mathbf{r}\|. \quad (3.20)$$



On achève alors aisément la démonstration en effectuant la sommation

$$\sum_{n,b} \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\|} = \sum_{n',b'} \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{\|\mathbf{r}_0 - \mathcal{R}_{(n',b')}\mathbf{r}\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r}_0 - \mathcal{R}_{(n',b')}\mathbf{r}\|}. \quad (3.21) \quad \blacksquare$$

### 3.1.5. AGENCEMENT CAUSAL DES LONGUEURS DE CHEMINS ACOUSTIQUES

Le temps de vol  $t_{(n,b)}$  de la source image d'ordre  $(n,b)$  vaut, d'après l'équation (3.8) :

$$t_{(n,b)} = \frac{\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\|}{c} \quad (3.22)$$

La proposition suivante énonce un principe de causalité dans l'ordre d'arrivée des sources images.

#### Proposition 3.1.5

Pour tout point source  $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{E}$ , pour tout point de mesure  $\mathbf{r} \in \mathcal{E}$  et pour tout ordre de réflexion  $(n,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , on a les inégalités suivantes :

$$\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\| \leq \|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n+1,b)}\mathbf{r}_0\| \quad (3.23)$$

$$\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,1)}\mathbf{r}_0\| \leq \|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,0)}\mathbf{r}_0\| \quad (3.24)$$

ou, de manière équivalente, en effectuant le changement de variable  $m = 2n - b$ ,

$$\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(m)}\mathbf{r}_0\| \leq \|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(m+1)}\mathbf{r}_0\|. \quad (3.25)$$

**Démonstration :** L'agencement causal des longueurs de chemins acoustiques est évident si l'on regarde, un peu plus loin dans le chapitre, la figure (3.3d) où sont tracés différents chemins acoustiques virtuels.  $\blacksquare$

## 3.2. UN PEU DE THÉORIE DES GROUPES

Dans cette section <sup>1</sup> nous analysons plus en détail certaines propriétés algébriques de l'opérateur de création de source image. Nous considérons la distance interpariétale  $X = \frac{1}{2}$  et restreignons l'étude à la composante spatiale selon  $x$ , de sorte à ramener, sans perte de généralité, l'étude de l'opérateur de création de source image à celle de l'opérateur

$$\mathcal{R}(n,b) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n + (-1)^b x \end{array}, \quad (n,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \quad (3.26)$$

Il vient  $\mathcal{R}(0,0) = Id$ , ce qui permet de définir un élément neutre. Dans la suite nous noterons  $\mathcal{E} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme (3.26). Nous étudions l'application suivante qui établit une bijection entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{R} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{F} \\ (n,b) & \mapsto & \mathcal{R}(n,b). \end{array} \quad (3.27)$$

1. Nous utilisons comme référence en théorie des groupes et des représentations le cours de David Renard [Renard, 2010].

### 3.2.1. ÉTUDE DE LA LOI DE COMPOSITION INTERNE

La loi de composition interne  $\circ : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  définie par

$$\mathcal{R}(n, b) \circ \mathcal{R}(n', b') = \mathcal{R}(n + (-1)^b n', b + b') \quad (3.28)$$

n'est pas commutative, compte tenu de ce que

$$\mathcal{R}(n', b') \circ \mathcal{R}(n, b) = \mathcal{R}(n' + (-1)^{b'} n, b' + b). \quad (3.29)$$

Il faut donc définir l'inverse à droite et à gauche. Cependant ces deux inverses sont égaux. En effet

$$\mathcal{R}(n, b) \circ \mathcal{R}(n', b') = \mathcal{R}(0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} n' + (-1)^{b'} n = 0 \\ b' + b = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n + (-1)^b n' = 0 \\ b' + b = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{R}(n', b') \circ \mathcal{R}(n, b) = \mathcal{R}(0, 0) \quad (3.32)$$

Cela permet d'énoncer une première propriété.

#### Proposition 3.2.1

*L'inverse de la loi de composition interne  $\circ$  est unique et défini par*

$$\forall (n, b) \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{R}(n, b)^{-1} = \mathcal{R}((-1)^{b+1} n, b)$$

Cela signifie, entre autres, que l'inverse (au sens de la loi  $\circ$ ) de la réflexion d'ordre  $m = 2n - b$  est la réflexion d'ordre  $m' = (-1)^{b+1} 2n - b$ , ce qui n'a rien d'intuitif. Nous démontrons dans la foulée une deuxième propriété.

#### Proposition 3.2.2

*La loi de composition interne  $\circ$  est associative.*

**Démonstration :** On a d'une part

$$\mathcal{R}(n, b) \circ [\mathcal{R}(n', b') \circ \mathcal{R}(n'', b'')] = \mathcal{R}(n, b) \circ \mathcal{R}(n' + (-1)^{b'} n'', b' + b'') \quad (3.33)$$

$$= \mathcal{R}(n + (-1)^b [n' + (-1)^{b'} n''], b + b' + b'') \quad (3.34)$$

$$= \mathcal{R}(n + (-1)^b n' + (-1)^{b+b'} n'', b + b' + b'') \quad (3.35)$$

et d'autre part

$$[\mathcal{R}(n, b) \circ \mathcal{R}(n', b')] \circ \mathcal{R}(n'', b'') = \mathcal{R}(n + (-1)^b n', b + b') \circ \mathcal{R}(n'', b'') \quad (3.36)$$

$$= \mathcal{R}(n + (-1)^b n' + (-1)^{b+b'} n'', b + b' + b'') \quad (3.37) \quad \blacksquare$$

Finalement, nous avons démontré le théorème suivant.

#### Théorème 3.2.3

*L'ensemble  $\mathbb{Z}$  muni de la loi de composition interne  $\circ$  possède une structure de groupe.*

### 3.2.2. REPRÉSENTATION DU GROUPE $(\mathbb{Z}, \circ)$

Dans cette section, nous établissons un théorème permettant de représenter le groupe  $\mathcal{G} = (\mathbb{Z}, \circ)$  par des isomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ .

#### Théorème 3.2.4

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\rightarrow GL(\mathbb{R}^2) \\ (n, b) &\mapsto \begin{pmatrix} (-1)^b & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

est un morphisme de groupe. Si on note

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in GL(\mathbb{R}^2) \mid \exists (n, b) \in \mathcal{E}, \quad M = \begin{pmatrix} (-1)^b & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.39)$$

alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{H} \\ m &\mapsto \begin{pmatrix} (-1)^b & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

est un isomorphisme de groupes.

**Démonstration :** Cela découle des propriétés de la multiplication matricielle. On peut vérifier, en outre,

que  $\forall M = \begin{pmatrix} (-1)^b & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ , on a

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^b & (-1)^{b+1}n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}. \quad (3.41) \quad \blacksquare$$

Le théorème (3.2.4) permet de définir une représentation du groupe  $\mathcal{G}$ . Si l'on effectue la multiplication d'un élément de  $H$  par un élément de  $\mathbb{R}^2$  on obtient :

$$\begin{pmatrix} (-1)^b & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ny + (-1)^b x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Dans le membre de droite de l'équation (3.42), on observe que le premier terme est exactement de la forme de la coordonnée selon  $x$  de l'image d'ordre  $(n, b)$  si l'on prend  $y = 2X^2$ . La distance interpariétale apparaît ici comme une variable spatiale, en tant qu'elle est un degré de liberté supplémentaire du système.

### 3.2.3. ÉTUDE DU GROUPE $\mathcal{H}$

Dans cette section nous étudions le groupe  $\mathcal{H}$  en tant que sous-groupe de  $GL(\mathbb{R}^2)$ .

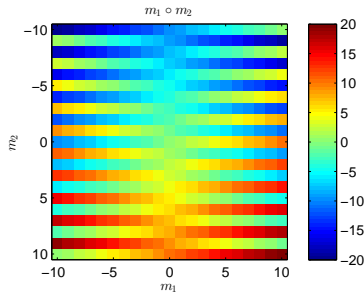
#### Proposition 3.2.5

Toute matrice  $M \in \mathcal{H}$  peut s'écrire sous la forme

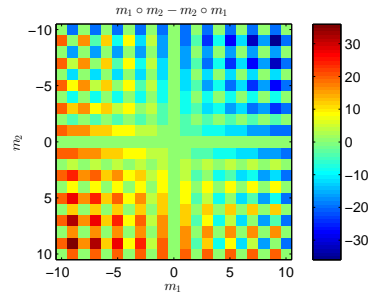
$$M = \begin{pmatrix} (-1)^b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Cela revient à décomposer  $m \in \mathbb{Z}$  sous la forme  $m = 2n - b$  selon l'isomorphisme canonique défini en proposition (3.1.3).

2. ou si l'on se restreint au sous-groupe  $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .



(a) Représentation en échelles de couleurs de la table de la loi de composition interne  $\circ$



(b) Représentation en échelles de couleurs du commutateur de la loi de composition interne  $\circ$

FIGURE 3.2 – Tables de la loi de composition interne et de son commutateur

### Proposition 3.2.6

Les racines carrées de l'unité sont de la forme  $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}$

Cela veut dire que les entiers impairs sont nilpotents d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (2n-1) \circ (2n-1) = 0 \quad (3.43)$$

ce qui n'est qu'un cas particulier de la proposition plus générale :

### Proposition 3.2.7

Si  $m$  est pair,  $\forall k \in \mathbb{Z}, m \circ k = m + k$ .  
Si  $m$  est impair,  $\forall k \in \mathbb{Z}, m \circ k = m - k$ .

La figure (3.2) illustre le comportement de loi de composition interne  $\circ$  sur l'ordre de réflexion  $m \in \mathbb{Z}$ . On y voit notamment en figure (3.2a) l'alternance entre addition et soustraction selon la parité du terme de gauche, et en figure (3.2b) on peut visualiser la non-commutativité de la loi.

## 3.3. RÉVERBÉRATION SPÉCULAIRE ENTRE DEUX MURS FINIS

### 3.3.1. ENCADREMENT DE LA NORME EUCLIDIENNE

Dans cette section, les sources sont situées dans la boîte  $\mathcal{E} = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$  et que la réflexion s'effectue toujours selon  $x$ . Nous considérons la propagation d'un signal  $s(t)$  depuis une source située en  $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{E}$  jusqu'à un point de mesure  $\mathbf{r} \in \mathcal{E}$ .

### Proposition 3.3.1

Pour tout point source  $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{E} = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z] \subset \mathbb{R}_+^3$ , et pour tout ordre de réflexion  $(n, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , on a l'encadrement suivant pour la norme euclidienne :

$$(2|n|-1)X \leq \|\mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0\| \leq \sqrt{(2|n|+1)^2 X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (3.44)$$

avec le cas particulier pour  $n = 0$  :

$$0 \leq \|\mathcal{R}_{(0,b)}\mathbf{r}_0\| \leq \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (3.45)$$

**Démonstration :** Sachant que la réflexion d'ordre  $(n, b)$  s'écrit

$$\mathcal{R}_{(n,b)}\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 2nX + (-1)^b x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

on bénéficie pour la première composante des inégalités triangulaires suivantes :

$$\begin{cases} |2nX + (-1)^b x_0| \leq |2nX| + x_0 \leq (2|n| + 1)X \\ |2nX + (-1)^b x_0| \geq ||2nX| - x_0| \geq (2|n| - 1)X \end{cases} \Rightarrow (2|n| - 1)X \leq |2nX + (-1)^b x_0| \leq (2|n| + 1)X \quad (3.47)$$

et bien sûr pour les composantes selon  $y$  et  $z$  :  $0 \leq y_0 \leq Y$ ,  $0 \leq z_0 \leq Z$ . ■

### 3.3.2. ENCADREMENT DU TEMPS DE VOL

Dans cette section, nous appliquons la proposition (3.3.1) en prenant comme point « source »  $\mathbf{r}_0$  la position d'un microphone lorsqu'il réémet le signal de mesure dans l'environnement réverbérant numérisé.<sup>3</sup>

#### Proposition 3.3.2 (Encadrement du temps de vol)

Lorsque l'image d'ordre  $(n, b)$  d'une source monopolaire située en  $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{E} = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$  émet un signal à  $t = 0$ , le temps de vol  $t_{n,b}$ , c'est-à-dire l'instant d'arrivée du signal au point de mesure  $\mathbf{r}$  (quelconque de l'espace), obéit aux inégalités

$$\frac{\max \left\{ (2|n| - 1)X - \|\mathbf{r}\|, \|\mathbf{r}\| - \sqrt{(2|n| + 1)^2 X^2 + Y^2 + Z^2} \right\}}{c} \leq t_{n,b} \leq \frac{\|\mathbf{r}\| + \sqrt{(2|n| + 1)^2 X^2 + Y^2 + Z^2}}{c}. \quad (3.51)$$

**Démonstration :** La position de l'image d'ordre  $(n, b)$  est donnée par  $\mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0)$ . Le temps de vol est, par définition,

$$t_{n,b} = \frac{\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0)\|}{c}. \quad (3.52)$$

Partons des inégalités triangulaires suivantes :

$$\left| \|\mathbf{r}\| - \|\mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0)\| \right| \leq \|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0)\| \leq \|\mathbf{r}\| + \|\mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0)\|. \quad (3.53)$$

D'après la proposition (3.3.1), celle de droite donne aisément la borne supérieure

$$\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0)\| \leq \|\mathbf{r}\| + \sqrt{(2|n| + 1)^2 X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (3.54)$$

3. L'encadrement du temps de vol permet d'améliorer la focalisation par retournement temporel. Considérons le signal de mesure  $p(\mathbf{r}_0, t)$  de support temporel causal  $t \in [0, t_f]$  auquel on applique l'opérateur de retournement temporel :

$$\mathcal{T}p(\mathbf{r}_0, t) = p(\mathbf{r}_0, t_f - t). \quad (3.48)$$

Lorsque le signal est réémis depuis la position  $\mathbf{r}_0$ , le champ acoustique obéit à l'équation

$$\square p(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)p(\mathbf{r}_0, t_f - t). \quad (3.49)$$

En présence de réverbération, il faut tenir compte des sources images :

$$\square p(\mathbf{r}, t) = \sum_{n,b} \delta(\mathbf{r} - \mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0))p(\mathbf{r}_0, t_f - t). \quad (3.50)$$

On voit dans l'équation (3.50) que bien que l'on somme sur l'ensemble des réflexions, on émet toujours, dans le terme source, le même signal  $p(\mathbf{r}_0, t_f - t)$ . La problématique est d'adapter le signal source pour chacun des ordres de réflexion.

Pour la borne inférieure, partant des deux inégalités suivantes, qui sont toujours vraies simultanément :

$$\|\mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0)\| - \|\mathbf{r}\| \geq (2|n| - 1)X - \|\mathbf{r}\|, \quad (3.55)$$

$$\|\mathbf{r}\| - \|\mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0)\| \geq \|\mathbf{r}\| - \sqrt{(2|n| + 1)^2 X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (3.56)$$

nous obtenons la minoration sur la valeur absolue

$$|\|\mathbf{r}\| - \|\mathcal{R}_{n,b}(\mathbf{r}_0)\|| \geq \max \left\{ (2|n| - 1)X - \|\mathbf{r}\|, \|\mathbf{r}\| - \sqrt{(2|n| + 1)^2 X^2 + Y^2 + Z^2} \right\} \quad (3.57)$$

qui achève la démonstration. ■

Nous ne cherchons pas à encadrer séparément chaque signal réfléchi, car cela est impossible par manque d'information : notamment en ce que l'on ne peut pas savoir dans quel ordre arrivent les différents ordres de réflexion. En revanche il est possible de ne pas trop se tromper lors du fenêtrage : pour un  $|n|$  donné : on tente d'encadrer les ordres  $(n, 0)$ ,  $(n, 1)$ ,  $(-n, 0)$ ,  $(-n, 1)$  plus les réflexions au sol, soit au total 8 signaux, et la proposition (3.3.2) nous dit qu'on ne peut pas espérer mieux. Peut-être à l'avenir sera-t-il possible d'effectuer un encadrement plus raffiné.

### 3.3.3. CONDITIONS DE RÉFLEXION QUAND LA SOURCE EST HORS LES MURS

Lorsque le milieu réverbérant est borné, et que l'on considère une source  $A$  en dehors de ce milieu, le nombre de réflexions est limité aux rayons acoustiques issus de la source directe ou des sources images qui vont entrer dans le milieu réverbérant et y vont être piégés de sorte à atteindre le point de mesure  $B$ . La réflexion d'ordre  $m$  sera présente dans le signal de mesure au point  $B$  si le chemin acoustique réel de la source réelle rebondit effectivement  $m$  fois sur les parois. On conçoit alors que la condition de réflexion dépende fortement de la trajectoire des rayons acoustiques, donc de la géométrie des fronts d'ondes, les rayons acoustiques étant les chemins orthogonaux aux fronts d'ondes. Dans le cas classique d'une source ponctuelle, omnidirectionnelle, en milieu isotrope, les fronts d'onde sont sphériques. En fonction de la position de la source et de la position du point de mesure par rapport aux positions des parois, il est possible d'envisager différentes situations.

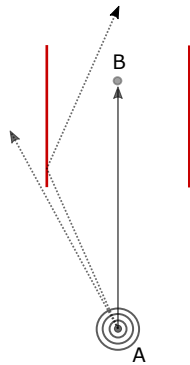
- **Cas 1 (fig. 3.3a)** : Seul le signal direct est mesuré ; les signaux réfléchis s'échappent du milieu réverbérant sans rencontrer le point de mesure.
- **Cas 2 (fig. 3.3b)** : Le signal direct n'est pas mesuré car il est masqué par une paroi, par contre des signaux réfléchis parviennent au point de mesure en étant piégés dans le milieu réverbérant, jusqu'à un ordre limité.
- **Cas 3 (fig. 3.3c)** : Le signal direct est mesuré, ainsi que des signaux réfléchis jusqu'à un ordre limité.

Une étude qualitative de tels phénomènes conduit à envisager une formulation analytique de ces conditions de mesure du signal direct et des signaux réfléchis. Nous commençons une telle étude par le lemme suivant.

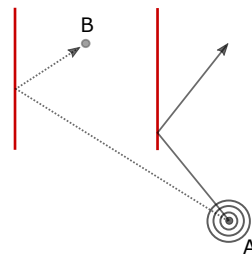
#### **Lemme 3.3.3**

*Une condition nécessaire et suffisante de mesure de la réflexion d'ordre  $m$  au point  $B$  est que le chemin acoustique entre la source image d'ordre  $m$  et le point  $B$  intercepte exactement  $|m|$  parois.*

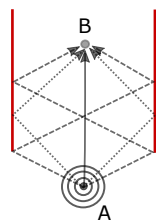
Nous en donnons une illustration sur la figure (3.3d). Ici, seul le signal direct (ordre 0) est mesuré, car le chemin acoustique direct ( $AB$ ) intercepte 0 paroi. Le chemin acoustique d'ordre 1



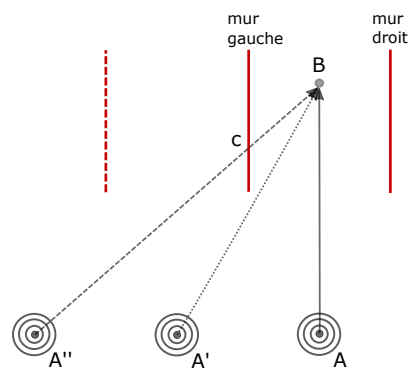
(a) Cas 1 : Seul le signal direct est mesuré ; les signaux réfléchis s'échappent du milieu réverbérant sans rencontrer le point de mesure.



(b) Cas 2 : Le signal direct n'est pas mesuré car il est masqué par une paroi, par contre des signaux réfléchis parviennent au point de mesure en étant piégés dans le milieu réverbérant, jusqu'à un ordre limité.



(c) Cas 3 : Le signal direct est mesuré, ainsi que des signaux réfléchis jusqu'à un ordre limité.



(d) Cas 1 montrant des chemins acoustiques virtuels ( $A'B$ ), ( $A''B$ ) des sources images et l'intersection avec une paroi au point C.

FIGURE 3.3 – Différents cas de réflexion pour une source ponctuelle immobile  $A$  lorsqu'elle est située en dehors du milieu réverbérant ( $B$  : point de mesure)

intercepte lui aussi 0 paroi. Le chemin acoustique d'ordre 2 intercepte 1 paroi, au point  $C$ . Les chemins acoustiques d'ordre 1 et 2 ne sont pas mesurés au point  $B$ . Dans ce qui suit, nous allons donner une formulation analytique du lemme (3.3.3). Pour cela, il nous faut définir plusieurs objets. On note  $A = (x_A, y_A, z_A)$  la position de la source et  $B = (x_B, y_B, z_B)$  la position du point de mesure. On note  $A^{(m)}$  la position de la source-image d'ordre  $m = 2n - b$ .

$$A^{(m)} = \mathcal{R}_{(n,b)}A = \begin{pmatrix} 2nX + (-1)^b x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

On note

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \{0; X\}, y \in [0, Y], z \in [0, Z]\} \quad (3.59)$$

les positions des deux parois avec la paroi de gauche pour  $x = 0$  et celle de droite pour  $x = X$ , de telle sorte que

$$\mathcal{P} = \bigcup_{(n,b)} \mathcal{R}_{(n,b)}P \quad (3.60)$$

soit l'ensemble des images des parois. En combinant les relations (3.59) et (3.60) nous obtenons aisément

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \exists m \in \mathbb{Z}, x = mX, y \in [0, Y], z \in [0, Z]\}. \quad (3.61)$$

Enfin, nous définissons le segment

$$[A^{(m)}, B] = \left\{ C \in \mathbb{R}^3 | \exists \tau \in [0, 1], C = \tau B + (1 - \tau)A^{(m)} \right\} = \begin{pmatrix} x = \tau x_B + (1 - \tau)(2nX + (-1)^b x_A) \\ y = \tau y_B + (1 - \tau)y_A \\ z = \tau z_B + (1 - \tau)z_A \end{pmatrix}_{\tau \in [0,1]} \quad (3.62)$$

Nous cherchons à caractériser l'intersection entre l'ensemble des parois-images  $\mathcal{P}$  et le chemin acoustique virtuel  $[A^{(m)}, B]$ , c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{P} \cap [A^{(m)}, B]. \quad (3.63)$$

Le lemme (3.3.3) affirme que, excepté des cas particuliers dégénérés que nous laissons de côté (par exemple si le chemin acoustique direct  $[A, B]$  est inclus dans l'ensemble  $P$ ) cet ensemble est discret et vérifie

$$\text{card} \left\{ \mathcal{P} \cap [A^{(m)}, B] \right\} = |m| \quad (3.64)$$

si et seulement si la réflexion existe physiquement. Exprimons l'intersection entre le chemin acoustique virtuel et les parois virtuelles en fonction des coordonnées de  $A$  et  $B$  :

$$\mathcal{P} \cap [A^{(m)}, B] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \exists \tau \in [0, 1], \begin{cases} x = \tau x_B + (1 - \tau)(2nX + (-1)^b x_A), \\ y = \tau y_B + (1 - \tau)y_A, \\ z = \tau z_B + (1 - \tau)z_A, \end{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = kX, \\ 0 \leq y \leq Y, \\ 0 \leq z \leq Z. \end{cases} \right\} \quad (3.65)$$

Autrement dit, caractériser l'intersection revient à trouver les différentes valeurs que peuvent prendre  $\tau$  et  $k$  dans le système



$$(x_B - 2nX + (-1)^b x_A)\tau + 2nX + (-1)^b x_A = kX, \quad (3.66)$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad (3.67)$$

$$0 \leq (y_B - y_A)\tau + y_A \leq Y, \quad (3.68)$$

$$0 \leq (z_B - z_A)\tau + z_A \leq Z, \quad (3.69)$$

$$0 \leq \tau \leq 1. \quad (3.70)$$

Ce système là est donné pour  $A$  et  $B$  quelconques, donc non nécessairement situés à l'intérieur du milieu réverbérant. Cependant, on peut se restreindre, sans perte de généralité, au cas où  $0 < x_B < X$ .

**Étude des valeurs possibles de  $\tau$ .** Étudions les contraintes (3.68)–(3.70). On obtient l'arborescence suivante pour les valeurs possibles de  $\tau$  d'après les conditions (3.68).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } y_B = y_A, \left\{ \begin{array}{l} \text{si } y_A \in [0, Y], \tau \in \mathbb{R} \\ \text{si } y_A \notin [0, Y], \tau \in \emptyset \end{array} \right. \\ \text{si } y_B > y_A, \tau \in \left[ -\frac{y_A}{y_B - y_A}, \frac{Y - y_A}{y_B - y_A} \right] \\ \text{si } y_B < y_A, \tau \in \left[ \frac{Y - y_A}{y_B - y_A}, -\frac{y_A}{y_B - y_A} \right] \end{array} \right. \quad (3.71)$$

Selon les valeurs de  $y_A$  et  $y_B$ , on obtient un ensemble de valeurs possibles pour  $\tau$ , que l'on peut appeler  $T_y$ . On a exactement la même arborescence pour  $z$  en remplaçant  $y$  par  $z$  et  $Y$  par  $Z$ , ce qui permet de définir un ensemble  $T_z$ . On a alors la contrainte suivante pour  $\tau$  :

$$\tau \in T = T_y \cap T_z \cap [0, 1]. \quad (3.72)$$

Notons que l'ensemble  $T$  ainsi défini peut être réduit à l'ensemble vide.

**Étude des valeurs possibles de  $k$ .**  $k$  peut s'exprimer en fonction de  $\tau$  :

$$k(\tau) = \tau \frac{x_B}{X} + (1 - \tau) \left( 2n + (-1)^b \frac{x_A}{X} \right), k \in \mathbb{Z} \quad (3.73)$$

La formulation continue de  $k(\tau)$  étant une fonction monotone de  $\tau$ , il suffit d'évaluer les valeurs entières de  $k$  comprises entre  $k(\tau = \min\{\tau \in T\})$  et  $k(\tau = \max\{\tau \in T\})$ . En notant  $\alpha = \lfloor \min_{\tau \in T} \{k(\tau)\} \rfloor$  et  $\beta = \lfloor \max_{\tau \in T} \{k(\tau)\} \rfloor$  il est possible de définir

$$K = \{\alpha, \alpha + 1, \dots, \beta\} \quad (3.74)$$

comme l'ensemble des valeurs possibles pour  $k$  en vertu des relations de quantification (3.66)–(3.67). Notons que  $K$  peut être réduit à l'ensemble vide, notamment si  $T$  est lui-même réduit à l'ensemble vide, ou si l'ensemble image de  $k(\tau)$  n'autorise pas de valeur entière. Nous avons donc une manière d'évaluer

$$\mathcal{P} \cap [A^{(m)}, B] = \left\{ A^{(m)} + \tau_k (B - A^{(m)}) \right\}_{k \in K}, \quad (3.75)$$

$$\text{avec } \tau_k = \frac{(k - 2n)X - (-1)^b x_A}{x_B - (2nX + (-1)^b x_A)}. \quad (3.76)$$

D'après l'équation (3.64), le lemme (3.3.3) se reformule alors ainsi :

#### **Proposition 3.3.4**

*La réflexion d'ordre  $m$  existe physiquement  $\Leftrightarrow \text{card}\{K\} = |m|$ .*

**Formulation en pseudo-code** L'algorithme (1) en pseudo-code estime si le chemin acoustique  $[A^{(m)}, B]$  a une existence physique ou pas. On peut vérifier sur les trois cas présentés en figure (3.3) que l'algorithme permet effectivement de décider si oui ou non telle source image intervient effectivement dans la mesure physique du signal. Les résultats du test de l'algorithme sont donnés dans le tableau (3.1) : l'algorithme permet de retrouver ce qu'une analyse par tracé de rayons permet d'estimer géométriquement : si le nombre de fois que le rayon acoustique intersecte l'ensemble des parois images — ce nombre étant le cardinal de l'ensemble  $K$ , qui n'est qu'une indexation des parois intersectées — est effectivement égal à l'ordre de la réflexion, un tel ordre étant indexé par le nombre  $m$  dont le signe équivaut à la duplicité droite-gauche dans l'agencement des sources images. L'algorithme (1) permet d'affiner un modèle de réverbération spéculaire entre deux parois finies. Ses limitations sont :

- condition de réflexion spéculaire, donc pour des longueurs d'onde grandes devant les aspérités des parois et petites devant les dimensions caractéristiques de la géométrie des murs ( $X, Y, Z$ );
- la propagation depuis une source ponctuelle  $A$  à une source ponctuelle  $B$ , c'est-à-dire une propagation sphérique. Les différentes géométries de sources nécessitent un traitement particulier.

### 3.4. ÉTUDE D'UN SOURCE LINÉIQUE À FRONTS D'ONDE CONIQUES

#### 3.4.1. DESCRIPTION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME

Dans la section précédente, nous avons présenté une méthode et un algorithme permettant de raffiner le modèle de réverbération spéculaire entre deux parois infinies en tenant compte de la finitude des parois (tout en continuant de négliger les effets de diffraction). En un point de mesure à l'intérieur d'un environnement urbain, nous sommes capables grâce à cet algorithme, de dire quels sont les ordres de réflexion géométriquement mesurables même si la source est en dehors du milieu. Cela est fort pratique car grâce au principe de réciprocité, le chemin acoustique du point  $A$  au point  $B$  est le même que celui du point  $B$  au point  $A$ , il n'y a que le sens de parcours qui change, et ce sens c'est la flèche du temps. L'algorithme (1) peut donc être appliqué lors de l'implémentation d'un code de retournement temporel. pour décider de quels ordres de réflexion sont à prendre en compte pour la rétro-propagation du point  $B$  jusqu'à un point  $A'$ , sachant qu'une meilleure concordance avec la géométrie des lieux donnera de meilleurs résultats. On se demande en revanche comment adapter cet algorithme au cas où, non content qu'il fonctionne sur des sources ponctuelles, la distribution de source est linéique et la géométrie du front d'onde n'est plus sphérique mais cylindrique ou conique, comme c'est le cas de l'onde de Mach.

Si l'on s'aide, pour réfléchir, de la figure (3.4), on entend que, dans le cas d'une source linéique à géométrie conique, c'est-à-dire dont les fronts d'onde sont coniques, les chemins acoustiques sont orthogonaux aux fronts d'onde. Si l'on appelle  $\alpha$  le demi-angle du cône d'onde, les chemins de propagation géométrique sont alignés avec un champ vectoriel à symétrie cylindrique formant un angle  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  par rapport à l'axe du cône, ou  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  en prenant le complémentaire comme cela est fait sur la figure. Pour un point de mesure  $B$  il existe un unique point  $A^0$  sur l'axe direct correspondant au chemin acoustique orthogonal aux fronts d'onde ; il en va de même pour les axes images, donnant les points  $A^{-1}$  et  $A^1$ .

#### 3.4.2. CARACTÉRISATION DE L'ÉLÉMENT DE L'AXE A CONTRIBUTANT À LA MESURE DU SIGNAL DIRECT EN UN POINT B

Dans cette section, on se place en champ libre et on suppose qu'on a la connaissance de l'axe du cône de Mach par la donnée d'un point  $M \in \mathbb{R}^3$  et d'un vecteur vitesse  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . On énonce et

**Data** :  $A, B, n, b, X, Y, Z$

**Result** : Existence physique

```
if  $y_B = y_A$  then
  if  $0 < y_B < Y$  then
    |  $\tau_1^y = -\infty; \tau_2^y = \infty;$ 
  else
    |  $\tau_1^y = \emptyset; \tau_2^y = \emptyset;$ 
  end
else if  $y_B > y_A$  then
  |  $\tau_1^y = \frac{-y_A}{y_B - y_A}; \tau_2^y = \frac{Y - y_A}{y_B - y_A};$ 
else
  |  $\tau_1^y = -\infty; \tau_2^y = \infty;$ 
end
if  $z_B = z_A$  then
  if  $0 < z_B < Z$  then
    |  $\tau_1^z = -\infty; \tau_2^z = \infty;$ 
  else
    |  $\tau_1^z = \emptyset; \tau_2^z = \emptyset;$ 
  end
else if  $z_B > z_A$  then
  |  $\tau_1^z = \frac{-z_A}{z_B - z_A}; \tau_2^z = \frac{Z - z_A}{z_B - z_A};$ 
else
  |  $\tau_1^z = -\infty; \tau_2^z = \infty;$ 
end
if  $(\tau_1^y = \emptyset) \cup (\tau_1^z = \emptyset)$  then
  |  $\tau_1 = \emptyset;$ 
else
  |  $\tau_1 = \max(\{\tau_1^y, \tau_1^z, 0\});$ 
end
if  $(\tau_2^y = \emptyset) \cup (\tau_2^z = \emptyset)$  then
  |  $\tau_2 = \emptyset;$ 
else
  |  $\tau_2 = \min(\{\tau_2^y, \tau_2^z, 1\});$ 
end
if  $(\tau_1 = \emptyset) \cup (\tau_2 = \emptyset)$  then
  |  $K = \emptyset$ 
else
  |  $a = \tau_1 \frac{x_B}{X} + (1 - \tau_1) (2n + (-1)^b \frac{x_A}{X});$ 
  |  $b = \tau_2 \frac{x_B}{X} + (1 - \tau_2) (2n + (-1)^b \frac{x_A}{X});$ 
  |  $\alpha = \lfloor \min(\{a, b\}) \rfloor;$ 
  |  $\beta = \lfloor \max(\{a, b\}) \rfloor;$ 
  | if  $\alpha > \beta$  then
    | |  $K = \emptyset$ 
  else
    | |  $K = \{\alpha, \alpha + 1, \dots, \beta\};$ 
  end
end
if  $|K| = |2n - b|$  then
  | Existence physique = OUI;
else
  | Existence physique = NON;
end
```

**Algorithme 1** : Algorithme en pseudo-code permettant de décider si le chemin acoustique  $[A^{(m)}, B]$  a une existence physique ou pas compte tenu du fait que les murs sont finis.

Cas	$A$	$m$	$K$	$card\{K\}$	La réflexion est-elle mesurée ?
1	$(2, -4, 2)$	-2	$\{0\}$	1	NON
		-1	$\emptyset$	0	NON
		0	$\emptyset$	0	OUI
		1	$\emptyset$	0	NON
		2	$\{1\}$	1	NON
2	$(6, -2, 2)$	-2	$\{0\}$	1	NON
		-1	$\{0\}$	1	OUI
		0	$\{1\}$	1	NON
		1	$\emptyset$	0	NON
		2	$\{1, 2\}$	2	OUI
3	$(2, -1, 2)$	-2	$\{-1, 0\}$	2	OUI
		-1	$\{0\}$	1	OUI
		0	$\emptyset$	0	OUI
		1	$\{1\}$	1	OUI
		2	$\{1, 2\}$	2	OUI

TABLE 3.1 – Test de l’algorithme (1) sur les trois cas de la figure (3.3) avec  $X = Y = Z = 4$  et  $B = (2, 3, 2)$ .

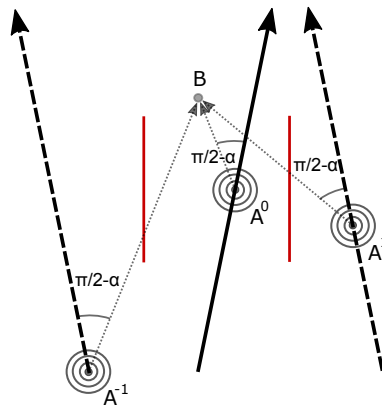


FIGURE 3.4 – Étude géométrique des premières réflexions d’une source linéique dont les fronts d’onde forment un cône de demi-angle  $\alpha$  ( $A^0$  : élément de source responsable du signal direct,  $A^{\pm 1}$  : éléments de source responsables des réflexions d’ordre  $\pm 1$ ,  $B$  : point de mesure)

démontre la propriété suivante

**Proposition 3.4.1**

Pour une onde conique de demi-angle  $\alpha$  et d'axe  $(M, \mathbf{v})$ , le point de mesure en  $B$  reçoit le chemin acoustique rectiligne depuis le point  $A = M + \tau \mathbf{v}$  vérifiant

$$\tau = \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \mathbf{v}}{v^2} - \gamma \frac{\sqrt{\overrightarrow{MB}^2 v^2 - (\overrightarrow{MB} \cdot \mathbf{v})^2}}{v^2}, \text{ avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}} \quad (3.77)$$

**Démonstration :** L'axe du cône est défini comme

$$\mathcal{C} = \{M + \tau \mathbf{v} | \tau \in \mathbb{R}\}. \quad (3.78)$$

Sur l'axe du cône, le point  $A \in \mathcal{C}$  est défini par ce que l'angle que forme le segment  $AB$  avec le vecteur  $\mathbf{v}$  vaut  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent. Cette condition peut être explicitée sur le produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{v} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\mathbf{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (3.79)$$

$$= \|\overrightarrow{AB}\| v \sin \alpha \quad (3.80)$$

L'unicité de  $A$  est assurée, par rapport à l'orientation de  $\mathbf{v}$  si l'on choisit par exemple

$$\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{v} > 0. \quad (3.81)$$

De plus l'appartenance à l'axe conduit à une autre contrainte :

$$A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists \tau \in \mathbb{R}, A = M + \tau \mathbf{v} \quad (3.82)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{v} = \overrightarrow{MB} \cdot \mathbf{v} - \tau v^2 \quad (3.83)$$

Caractériser le point  $A$  revient alors à trouver la valeur de  $\tau$  telle que soient vérifiées les équations (3.80) et (3.83). En constatant l'égalité des carrés de ces deux équations on obtient l'équation du second degré en  $\tau$  :

$$\tau^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) v^2 + \tau 2 \overrightarrow{MB} \cdot \mathbf{v} \left( 1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) + \frac{|\overrightarrow{MB} \cdot \mathbf{v}|^2}{v^2 \sin^2 \alpha} - \|\overrightarrow{MB}\|^2 = 0. \quad (3.84)$$

Nous bénéficions de relations dynamiques entre les variables, déjà définies plus haut, permettant de simplifier l'écriture :

$$\sin \alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{c}{v} \quad (3.85)$$

$$\gamma = \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad (3.86)$$

L'équation (3.84) se réécrit alors, en posant également  $\mathbf{r} = \overrightarrow{MB}$  (et  $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$ ) :

$$\tau^2 \frac{v^2}{\gamma^2} - \tau \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\gamma^2} + \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}|^2}{c^2} - r^2 = 0 \quad (3.87)$$

La suite est fort classique. Le calcul du discriminant de ce binôme donne

$$\Delta = \frac{4}{\gamma^2} (r^2 v^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2) \quad (3.88)$$

qui est toujours positif en vertu de la relation de Cauchy-Schwarz. Ainsi  $\tau$  existe toujours réellement. Il s'écrit explicitement

$$\tau = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \pm \gamma \frac{\sqrt{r^2 v^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2}}{v^2}. \quad (3.89)$$

Une formulation élégante peut être proposée en introduisant l'angle  $\mu = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ .

$$\tau = \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{v}\|} (\cos \mu \pm \gamma \sin \mu). \quad (3.90)$$

Il y a un  $\tau$  causal, et un  $\tau$  rétrograde.<sup>4</sup> On a dit plus haut (eq. (3.81)) qu'on choisissait  $A$  tel que  $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{v} > 0$ . Or, d'après la valeur de  $\tau$  qu'on vient de trouver

$$\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - \tau v^2 = \mp \gamma \sqrt{r^2 v^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2} \quad (3.91)$$

donc pour avoir  $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{v} > 0$  il faut prendre

$$\tau = \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \mathbf{v}}{v^2} - \gamma \frac{\sqrt{\overrightarrow{MB}^2 v^2 - (\overrightarrow{MB} \cdot \mathbf{v})^2}}{v^2}. \quad (3.92) \quad \blacksquare$$

### 3.4.3. APPLICATION À LA CARACTÉRISATION DES SOURCES IMAGES

Dans la sous-section précédente, on a caractérisé l'élément de l'axe qui envoie, en champ libre, un rayon acoustique en ligne droite jusqu'au point  $B$ . Rien ne nous empêche plus d'appliquer le même raisonnement à l'axe virtuel des sources images, pour déterminer les chemins acoustiques virtuels à des ordres arbitraires. Le fait de déterminer si ces chemins acoustiques seront mesurés physiquement ou non est aisé, grâce à l'algorithme (1) présenté dans la section (3.3.3). Seul le détail de la caractérisation de l'axe image nécessite de poser un petit calcul.

#### Lemme 3.4.2

*L'image d'ordre  $(n, b)$  de l'axe passant par  $M$  et dirigé par  $\mathbf{v}$  est l'axe passant par  $\mathcal{R}_{n,b}(M)$  et dirigé par  $((-1)^b v_x, v_y, v_z)$ .*

**Démonstration :**

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \mathcal{R}_{n,b}(M + \tau \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2nX + (-1)^b (M_x + \tau v_x) \\ M_y + \tau v_y \\ M_z + \tau v_z \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{n,b}(M) + \tau \begin{pmatrix} (-1)^b v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

**Remarque :** On applique l'algorithme (1) à  $\mathcal{R}_{n,b}(A)^{-1}$  et non pas simplement à  $A$  car la réflexion d'ordre  $(n, b)$  y est déjà prise en compte.

## 3.5. RÉVERBÉRATION SPÉCULAIRE DANS UNE BOÎTE

Dans cette section, nous décrivons brièvement comment il est possible d'étendre la théorie de la réverbération spéculaire entre deux murs à une configuration où le milieu est confiné entre six

4. *Backwards* est le terme employé par [Morse et Ingard, 1968, pp. 720-722].

**Data :**  $B, M, \mathbf{v}, \alpha, (n, b), (X, Y, Z)$

**Result :** Existence physique

$$N = \mathcal{R}_{n,b}(M);$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} (-1)^{b_x} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix};$$

$$\beta = \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}};$$

$$\mathbf{r} = N\hat{\mathbf{B}};$$

$$\tau = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w}^2} - \gamma \frac{\sqrt{\mathbf{w}^2 \mathbf{r}^2 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})^2}}{\mathbf{w}^2};$$

$$A = N + \tau \mathbf{w};$$

Ensuite on applique l'algorithme (1) à

$$\mathcal{R}_{n,b}(A)^{-1}, B, (n, b), (X, Y, Z)$$

Existence physique = OUI ou NON

**Algorithme 2 :** Algorithme pour décider, dans le cas d'une onde conique, si, en un point de mesure  $B$ , l'ordre de réflexion  $(n, b)$  sera mesuré.

parois parallèlement opposées l'une à l'autre. Le vecteur d'indice de réflexion  $m \in \mathbb{Z}^3$  peut être mis en bijection avec le couple  $(n, b) \in \mathbb{Z}^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ .

$$m = 2n - b \Leftrightarrow \begin{cases} m_x = 2n_x - b_x \\ m_y = 2n_y - b_y \\ m_z = 2n_z - b_z. \end{cases} \quad (3.93)$$

Nous avons vu dans la section (3.1.1) que, entre deux parois espacées d'une distance  $X$  selon  $x$ , l'opérateur de création de source image s'écrit

$$\mathcal{R}_{n,b}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2n_x X + (-1)^{b_x} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, (n, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (x, y, z) \in [0, X] \times \mathbb{R}^2. \quad (3.94)$$

Dans la boîte  $[0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$ , la conception d'un tel opérateur s'élargit aux trois directions de l'espace.

$$\mathcal{R}_{n,b}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2n_x X + (-1)^{b_x} x \\ 2n_y Y + (-1)^{b_y} y \\ 2n_z Z + (-1)^{b_z} z \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

$$= 2 \begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-1)^{b_x} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{b_y} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{b_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

$$= 2\mathcal{N} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathcal{B} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

où  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{B}$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  aux propriétés spécifiques que nous n'étudierons pas ici. Ainsi, il est possible de généraliser les théories de réverbération à des milieux plus complexes



(a) 1<sup>er</sup> cas : Le rayon (A'B) intersecte d'abord le sol image, puis la paroi réelle.

(b) 2<sup>ème</sup> cas : Le rayon (A'B) intersecte d'abord la paroi image, puis le sol réel.

FIGURE 3.5 – Étude des réflexions sol-mur et mur-sol

et de voir apparaître des structures algébriques. Dans la suite, cependant, nous nous limiterons au cas où les réflexions ne se font que selon  $x$ , gardant toutefois en tête qu'une généralisation reste possible moyennant quelques changements de notation.

### 3.6. PRISE EN COMPTE DU SOL

Nous venons de voir dans la section précédente qu'il était possible de prendre en compte des réflexions venant d'autres directions de l'espace. Un cas particulier qui nous intéresse est celui de la réflexion sur le sol. Formellement, il correspond à ne prendre en compte que la réflexion d'ordre  $m_z = -1 \Leftrightarrow (n_z, b_z) = (0, 1)$  dans l'équation (3.95). La source image par le sol de la source image d'ordre  $m_x$  doit traverser  $|m_x| + 1$  parois en comptant le sol, ou  $|m_x|$  sans compter le sol. Ainsi le lemme (3.3.3) s'applique toujours si l'on considère une source image et que l'on ne prend pas en compte l'intersection avec le sol qui doit dans tous les cas avoir lieu pour d'évidentes raisons géométriques. Cependant deux cas sont à prendre en compte : celui où le rayon rebondit d'abord sur le sol, puis contre les murs (fig. 3.5a), et celui où il rebondit d'abord contre les murs, puis sur le sol (fig. 3.5b). On comprend clairement que dans le premier cas, le lemme (3.3.3) s'applique directement, alors que dans le deuxième cas il s'applique uniquement au rayon image par rapport au sol. La manière la plus simple d'implémenter la réflexion sur le sol dans le cadre de parois finies est de créer l'image du récepteur  $B$  par rapport au sol, puis de prolonger virtuellement les parois à l'intérieur du sol, ce qui est équivalent à translater l'axe source et

### 3.7. CALCUL DES TEMPS D'ARRIVÉE SUR DES MESURES DE TERRAIN

L'environnement réverbérant montré en figure (3.6) reproduit celui construit en octobre 2014 sur le champ de tir de Baldersheim où des tirs à balles réelles ont été effectuées. La mesure du passage de la balle à travers deux écrans permet d'avoir la connaissance de l'axe. La vitesse de la balle est estimée à  $v = 750 \pm 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , c'est-à-dire avec une incertitude assez importante. La vitesse de propagation du son dans l'air est fixée à  $c = 338 \pm 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , toujours avec une incertitude assez importante car elle n'a pas fait l'objet d'une mesure spécifique lors des expériences. Les microphones sont représentés par les points noirs. La figure (3.6) illustre le fonctionnement de l'algorithme de calcul des points sources images équivalents sur l'axe du tir et les axes images lorsqu'on a la connaissance de la position de l'axe. Les traits rouges montrent les chemins acoustiques virtuels entre les points sources images équivalents et deux points de mesure correspondant aux



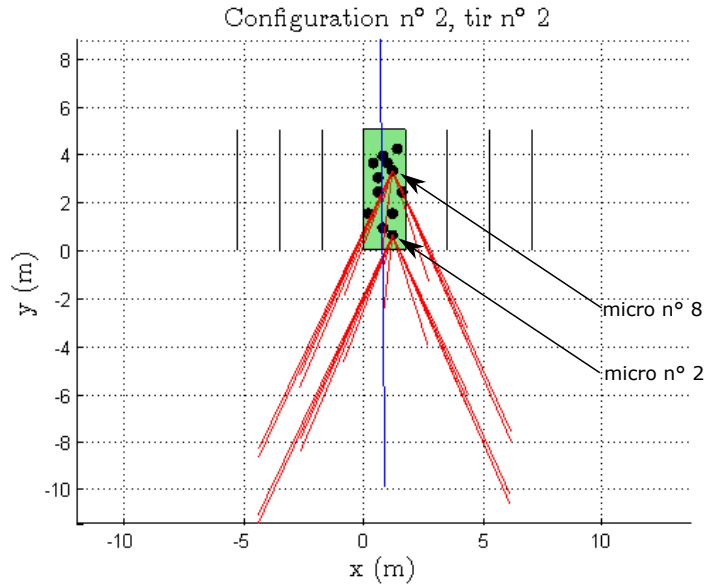


FIGURE 3.6 – Détection des points sources images équivalents sur l’axe de tir et les axes images pour la formulation du problème direct

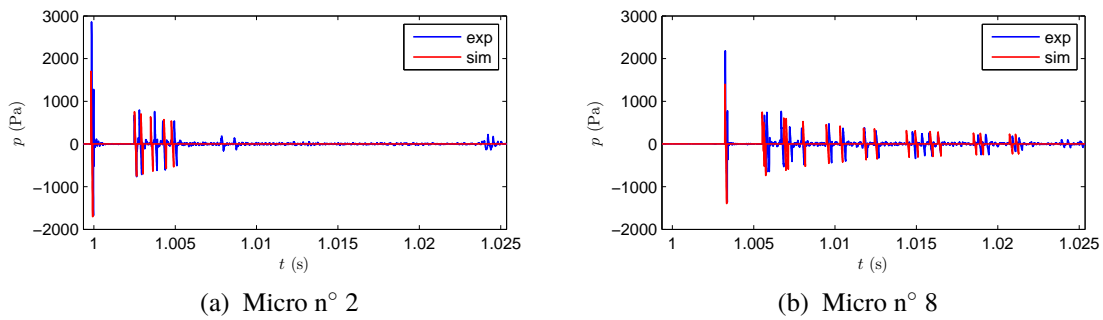


FIGURE 3.7 – Estimation des temps d’arrivée relatifs superposée aux signaux de pression mesurée. Les amplitudes et durées des N sont déterminés par la théorie asymptotique de Whitham.

positions des microphones n° 2 et 8. L'étude de l'existence des sources images permet ainsi une formulation du problème direct. On remarque que selon la position du microphone, un nombre plus ou moins important de réflexion est à prendre en compte, selon que le microphone est à l'entrée de l'environnement réverbérant (micro 2) ou en sortie (micro 8). Les rayons acoustiques images sont plus susceptibles d'intersecter les parois images dans le deuxième cas que dans le premier. Sur la figure (3.7) sont tracés en bleu les signaux de pression mesurée par les microphones n° 2 et 8 lors d'un tir. Les signaux rouges montrent une simulation numérique du problème direct dans laquelle les temps d'arrivée sont obtenus grâce au calcul de la position de la source ponctuelle équivalente (voir la proposition 3.4.1), et les propriétés de chaque N sont calculées grâce à la théorie asymptotique de Whitham présentée au chapitre 1. L'algorithme de simulation du problème ressort l'existence physique d'un plus grand nombre de réflexions ( $N_{refl}$ ) pour le micro n° 8 que pour le n° 2 : 18 contre 6, ce qui va dans le sens des explications données au paragraphe précédent. De plus on constate que chaque réflexion détectée se superpose à un des pics expérimentaux, avec une assez bonne précision compte tenu des incertitudes sur  $v$  et  $c$ , ainsi que des éventuels défauts de parallélisme des parois réverbérantes.

## CHAPITRE 4

# PRINCIPES DU RETOURNEMENT TEMPOREL

Où est-ce donc que je vous ai trouvé,  
mon Dieu, afin que je vous pusse  
connaître, puisque vous n'étiez pas  
dans ma mémoire avant que je vous  
eusse connu ?

---

Saint Augustin, *Confessions*

On peut douter, naturellement, que  
les choses se soient réellement  
passées ainsi, mais quand on ne sait  
pas, on ne sait pas.

---

Mikhaïl Boulgakov, *Le Maître et  
Marguerite*

LA théorie du retournement temporel provient de l'article fondamental [Jackson et Dowling, 1991] qui l'applique déjà, théoriquement du moins, au cas de sources acoustiques sous-marines en mouvement. Le retournement temporel est le strict équivalent de la conjugaison de phase, thématique commune à l'acoustique et à l'optique [Arnoldus, 1994]. Pour des liens entre conjugaison de phase en optique non linéaire et retournement temporel, voir [Yariv, 1978]. Au cours des années 1990 et 2000, Fink a largement contribué au développement de la théorie du retournement temporel et de ses applications à l'acoustique ultrasonore [Fink, 1992], [Fink, 1993], [Fink *et al.*, 2000], [Fink et Prada, 2001]. L'application du retournement temporel au domaine audible a été démontrée par [Bavu *et al.*, 2007], [Bavu, 2008], [Bavu et Berry, 2009]. Les applications du retournement temporel concernent les milieux réverbérants [Yon *et al.*, 2003], [Candy *et al.*, 2004], [Sundaralingam *et al.*, 2011], les milieux aléatoires [Papanicolaou *et al.*, 2001] et les milieux chaotiques [van Tiggelen, 2003]. La théorie du retournement temporel a été étendue à l'électromagnétisme notamment par [Lerosey *et al.*, 2004], [De Rosny *et al.*, 2010].

Le retournement temporel repose sur l'invariance de l'opérateur d'alembertien

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

par renversement du temps, ceci étant dû au fait qu'elle ne contient qu'une dérivée d'ordre pair dans son expression en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial^2}{\partial (-t)^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (4.2)$$

L'opérateur  $\Delta$  désigne le laplacien qui n'agit que sur les coordonnées spatiales. On remarquera que l'opérateur d'alembertien est invariant sous d'autres transformations : par exemple l'inversion des variables spatiales ( $x \rightarrow -x$ , etc.) ou encore les translations dans le temps et l'espace ( $t \rightarrow t + t_0$ , etc.), ainsi que leurs combinaisons, notamment celle utile dans le retournement temporel de signaux causaux :  $t \rightarrow t_f - t$  où  $t_f$  désigne l'instant final de la mesure du signal. De manière assez générale, l'ensemble des transformations qui laissent invariante la métrique pseudo-euclidienne

$c\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$  forme le groupe de Poincaré.<sup>1</sup> Le renversement du temps correspond à une transformation non orthochrone, de déterminant  $-1$ .

## 4.1. THÉORÈMES DE GREEN ET FORMULE DE KIRCHHOFF-HELMHOLTZ

Le principe du retournement temporel repose sur la formule de Kirchhoff-Helmholtz, qui permet de déterminer la valeur que prend un champ en n'importe quel point d'un volume fermé en connaissant uniquement la valeur du champ sur la surface fermant le volume et la fonction de Green caractérisant le milieu régi par l'équation de Helmholtz. La formule de Kirchhoff-Helmholtz découle du deuxième théorème de Green, lui-même issu du théorème de la divergence [Soriano, 2010]. Considérons un volume  $\Omega$  entouré par une surface  $\partial\Omega$ , ainsi qu'un champ vectoriel  $\vec{a}$  et deux champs scalaires  $A$  et  $B$  définis sur  $\Omega$ .

### **Théorème 4.1.1 (Théorème de la divergence)**

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \hat{n} dS = \int_{\Omega} \text{div } \vec{a} dV, \quad (4.3)$$

### **Théorème 4.1.2 (Premier théorème de Green)**

$$\oint_{\partial\Omega} A \frac{\partial B}{\partial n} dS = \int_{\Omega} (A\Delta B + \vec{\text{grad}} A \cdot \vec{\text{grad}} B) dV, \quad (4.4)$$

### **Théorème 4.1.3 (Deuxième théorème de Green)**

$$\oint_{\partial\Omega} \left( A \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial A}{\partial n} \right) dS = \int_{\Omega} (A\Delta B - B\Delta A) dV. \quad (4.5)$$

La formule de Kirchhoff-Helmholtz s'obtient en considérant qu'en l'absence de source, le champ de pression  $p(\mathbf{r}, \omega)$  vérifie l'équation de Helmholtz homogène, c'est-à-dire la transformée de Fourier de l'équation des ondes linéaire et homogène :

$$(\Delta + k^2)p = 0 \text{ sur } \Omega, \quad (4.6)$$

et en prenant pour  $B = G$  la fonction de Green du milieu de propagation, c'est-à-dire le champ vérifiant

$$(\Delta + k^2)G = \delta \text{ sur } \Omega. \quad (4.7)$$

Le membre de droite de la formule du second théorème de Green (4.1.3) donne alors  $\int_{\Omega} p\delta dV = p$ , on obtient la formule de Kirchhoff-Helmholtz fréquentielle.

### **Théorème 4.1.4 (Formule de Kirchhoff-Helmholtz fréquentielle)**

$$\forall \vec{r} \in \Omega, p(\vec{r}, \omega) = \oint_{\partial\Omega} \left( p(\vec{r}_S, \omega) \frac{\partial G(\vec{r}_S, \vec{r}, \omega)}{\partial n} - G(\vec{r}_S, \vec{r}, \omega) \frac{\partial p(\vec{r}_S, \omega)}{\partial n} \right) dS \quad (4.8)$$

La formule de Kirchhoff-Helmholtz temporelle s'obtient en effectuant une transformée de Fourier temporelle inverse. La multiplication dans le domaine de Fourier se transforme en convolution temporelle, notée  $*$ .

1. Nous ne mentionnons pas ici les transformations de Lorentz qui feront l'objet du chapitre 7.

**Théorème 4.1.5 (Formule de Kirchhoff-Helmholtz temporelle)**

$$\forall \vec{r} \in \Omega, p(\vec{r}, t) = \oint_{\partial\Omega} \left( p(\vec{r}_S, t) * \frac{\partial G(\vec{r}_S, \vec{r}, t)}{\partial n} - G(\vec{r}_S, \vec{r}, t) * \frac{\partial p(\vec{r}_S, t)}{\partial n} \right) dS \quad (4.9)$$

Parmi ses nombreuses applications autres que le retournement temporel, la formule de Kirchhoff-Helmholtz est employée à l'étude de problèmes inverses en géologie, par exemple pour la localisation de séismes [Tygel *et al.*, 2000].

**Cas général inhomogène** Le formalisme des fonctions de Green, combiné aux théorèmes intégraux de Green, permet d'exprimer la « solution complète du problème inhomogène incluant la satisfaction des conditions initiales » [Morse et Feshbach, 1953, p.837], c'est-à-dire l'équivalent de la formule de Kirchhoff-Helmholtz en présence de sources. La principale différence consiste en la prise en compte d'une intégrale volumique englobant les sources en plus de la formule de Kirchhoff-Helmholtz :

$$4\pi\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 4\pi \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) q(\mathbf{r}_0, t_0) \\ + \int_0^{t^+} dt_0 \oint dS_0 \cdot (G\nabla_0\Psi - \Psi\nabla_0 G) \\ - \frac{1}{c^2} \int dV_0 \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial t_0} \right)_{t_0=0} \Psi_0(\mathbf{r}_0) - G_{t=0} v_0(\mathbf{r}_0) \right], \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\Psi_0(\mathbf{r}_0) = \Psi(\mathbf{r}_0, 0), \quad (4.11)$$

$$v_0(\mathbf{r}_0) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0, t=0}. \quad (4.12)$$

La formule inhomogène (4.10) permet de mettre en place la théorie mathématique du retournement temporel en ce qu'elle fait intervenir la contribution des termes sources dans le premier terme du membre de droite, et la formule de Kirchhoff-Helmholtz dans le deuxième terme. À la fin du présent travail de thèse, on étudie brièvement la possibilité mathématique d'apporter une correction non linéaire à la formule de Kirchhoff-Helmholtz tout en conservant la propriété de pouvoir connaître le champ en tout point à partir des données du champ retourné temporellement sur une surface fermée : voir la section (B.3.1).

## 4.2. FOCALISATION PAR RETOURNEMENT TEMPOREL

Le retournement temporel consiste à rétro-propager des signaux de mesure de pression retournés dans le temps en les insérant comme conditions aux limites à leurs positions respectives. Cela consiste, dans le cadre d'une mise en place expérimentale, à remplacer les transducteurs de mesure (microphones) par des transducteurs d'émission (haut-parleurs) puis à mesurer le champ résultant en divers endroits et instants. Sous certaines conditions que nous allons détailler, le champ de pression se comporte alors comme si le temps se déroulait à l'envers, en raison justement de l'invariance de l'équation de D'Alembert. La compréhension rigoureuse des mécanismes physiques opérant présente des subtilités théoriques qui s'étudient par les fonctions de Green. Si on considère une source  $q(t)$  située en  $\mathbf{r}_0$  en champ libre, l'équation du champ de pression s'écrit

$$\square p(\mathbf{r}, t) = q(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.13)$$

avec comme conditions aux limites en champ libre les conditions de radiation de Sommerfeld, et se résout par convolution du terme de source par la fonction de Green champ libre du milieu

$$p(\mathbf{r}, t) = G * q(t) \quad (4.14)$$

Si l'on insère ce champ de pression renversé dans le temps comme le terme source depuis une surface fermée  $\partial \mathcal{D}$  entourant un domaine  $\mathcal{D}$  (ouvert) contenant la position de la source  $\mathbf{r}_0$ , on obtient une nouvelle équation sur le champ de pression :

$$\begin{cases} \square p_{RT}(\mathbf{r}, t) = 0 \text{ si } \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \\ p_{RT}(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, -t) \text{ si } \mathbf{r} \in \partial \mathcal{D}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Pour être rigoureusement en accord avec la formule de Kirchhoff-Helmholtz, il faut considérer des actionneurs dipolaires et monopolaires émettant respectivement le champ de pression et son gradient normal à la surface. Cependant, la prise en compte de termes seulement monopolaires est possible avec une bonne approximation. Dans leur article fondateur, [Jackson et Dowling, 1991] établissent à partir des théorèmes de Green et de la formule de Kirchhoff-Helmholtz que la fonction de Green  $G_c$  correspondant au problème conjugué (4.15) vaut (nous la donnons directement en temporel) :

$$G_{RT}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, -t) + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) \quad (4.16)$$

Le champ de pression rétro-propagée s'exprime ainsi :

$$p_{RT}(\mathbf{r}, t) = [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, -t) + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)] * q(T - t). \quad (4.17)$$

La fonction de Green du champ rétro-propagé contient la fonction de Green champ libre du problème homogène à laquelle s'ajoute cette même fonction renversée dans le temps : cela correspond à une séparation en respectivement une partie causale et une partie anticausale et admet l'interprétation physique selon laquelle le champ rétro-propagé se comporte tout d'abord comme si le temps s'écoulait à l'envers, puis, une fois la focalisation survenue à l'instant  $T$ , tout se passe comme si le temps se remettait à s'écouler à l'endroit — comme si la source émettait de nouveau son signal, alors qu'elle n'est plus là, mais virtuellement remplacée par une source acoustique rayonnante. Ceci est une conséquence du principe de conservation de l'énergie, qui, dans le problème direct, est injectée dans le milieu par transfert entre celui-ci et l'énergie interne du projectile : par exemple, dans le cas d'une balle de fusil émettant un cône de Mach, l'énergie acoustique rayonnée provient des frottements entre l'air et la surface du projectile. Cet échange énergétique produit également de la chaleur et provoque le ralentissement de la balle par diminution de son énergie cinétique. Toujours est-il que l'instant de focalisation du champ de pression au niveau de la source correspond à une accumulation de fronts d'onde au lieu-instant de focalisation, car, comme nous l'avons vu, le formalisme du retournement temporel reposant sur des propriétés ondulatoires des champs physiques, il admet une interprétation rigoureuse en terme de superposition de fronts d'ondes sphériques, selon le point de vue développé par Huygens dans le cadre de la lumière [Huyghens, 1690]. Cette accumulation déterministe de fronts d'onde, en même temps qu'elle maximise l'énergie acoustique au lieu-instant de la focalisation, sur une tache focale de l'ordre de la demi-longueur d'onde pour un signal monochromatique, correspond à une réorganisation spatio-temporelle locale de l'information contenue dans le champ de pression — du point de vue de la thermodynamique, il s'agit d'une minimisation de l'entropie en tant que quantificateur du désordre. Cette capacité à violer momentanément le second principe de la thermodynamique demeure, en ce qui nous concerne, un artifice expérimental issu d'une implémentation de principes physiques, néanmoins elle traduit une certaine capacité chez l'homme à, d'une part, exercer un contrôle sur son environnement et les lois qui le gouvernent, et d'autre part à parvenir à organiser la matière jusque

dans ses agencements ondulatoires. Ces considérations métaphysiques permettent de situer le rôle du retournement temporel dans notre entreprise de résolution d'un problème inverse compliqué : tout repose sur l'habileté dont nous serons susceptible de faire preuve pour organiser convenablement des données de mesure traduisant le désordre et la complexité qu'engendrent les processus physiques effectifs afin d'en tirer l'information que nous jugeons utile.

### 4.3. PRISE EN COMPTE DE LA RÉVERBÉRATION

Dans ce paragraphe nous étudions la focalisation par retournement temporel d'une source statique en milieu réverbérant, selon le modèle de réverbération spéculaire entre deux murs établi au chapitre 3. En particulier, nous ne considérons pas de surface fermée de microphones. Nous étudions ainsi une version approchée de la théorie du retournement temporel, où les actionneurs sont monopolaires et où les microphones ne forment pas une surface fermée. Ce cas correspond plus Le champ de pression vérifie l'équation de D'Alembert avec toutes les sources images :

$$\square p(\mathbf{r}, t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_0)) s(t). \quad (4.18)$$

L'équation (5.6) admet la solution, en terme de potentiel retardé, en un point de mesure  $\mathbf{r}_m$  où se trouve un microphone :

$$p_m(t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \frac{s\left(t - \frac{\|\mathbf{r}_m - \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_0)\|}{c}\right)}{\|\mathbf{r}_m - \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_0)\|}. \quad (4.19)$$

La rétro-propagation des signaux de mesure depuis leur position de mesure vérifie l'équation

$$\square p(\mathbf{r}, t) = \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_m)) p_m(-t) \quad (4.20)$$

qui est la somme sur toutes les réflexions et tous les microphones, incluant bien sûr les signaux directs. En utilisant l'équation (4.19) le champ rétro-propagé peut s'écrire en fonction du signal source :

$$p'(\mathbf{r}, t) = \sum_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ n, b \\ n', b'}} \frac{s\left(-t + \frac{\|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_m)\| - \|\mathbf{r}_m - \mathcal{R}_{(n',b')}(\mathbf{r}_0)\|}{c}\right)}{(4\pi)^2 \|\mathbf{r} - \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_m)\| \|\mathbf{r}_m - \mathcal{R}_{(n',b')}(\mathbf{r}_0)\|}. \quad (4.21)$$

#### 4.3.1. RECONSTRUCTION DU SIGNAL SOURCE

Le champ-rétro-propagé montre des propriétés intéressantes lorsque  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , c'est-à-dire lorsque la rétro-propagation est calculée à l'endroit de la source. Les temps de propagation du problème direct peuvent être compensés par la rétro-propagation. Cela survient lorsque se vérifie l'équation

$$\|\mathbf{r}_0 - \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_m)\| = \|\mathbf{r}_m - \mathcal{R}_{(n',b')}(\mathbf{r}_0)\|. \quad (4.22)$$

Nous avons ici affaire à un cas d'application du théorème (3.1.4) de réciprocité des fonctions de Green en milieu réverbérant. En particulier le raisonnement mené dans sa démonstration permet d'établir

$$\begin{cases} n = -(-1)^b n' \\ b = b' \end{cases} \quad (4.23)$$

On montre ainsi qu'à l'endroit de la source, les propriétés de symétrie de la géométrie du problème conduisent à l'égalité de certains chemins acoustiques du problème direct et du problème inverse, ce qui conduit à l'annulation des temps de propagation, donc à la focalisation du terme source par de multiples contributions. Un chemin acoustique peut être défini par la donnée d'un 4-uplet  $(n, b, n', b')$  qui représente de manière unique le couple de points  $\{\mathcal{R}_{(n',b')}(\mathbf{r}_0), \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_m)\}$ . A chaque  $(n, b, n', b')$  correspond une contribution dans la somme de l'équation (4.21), à savoir le chemin  $(n, b, -(-1)^b n, b)$ , ce qui conduit à l'émergence du « signal de focalisation » :

$$p_{focus}(t) = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{m,n,b} \frac{s(-t)}{\|\mathbf{r}_0 - \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_m)\|^2} \quad (4.24)$$

La convergence de la série  $\sum_n \frac{1}{\|\mathbf{r}_0 - \mathcal{R}_{(n,b)}(\mathbf{r}_m)\|^2}$  se démontre par comparaison avec la fonction

$$f_b(\eta) = \frac{1}{(2X\eta + (-1)^b x_m - x_0)^2 + (y_m - y_0)^2 + (z_m - z_0)^2} \quad (4.25)$$

Le signal de source renversé dans le temps est présent dans le champ de pression rétro-propagé, à un facteur multiplicatif dépendant :

- du nombre de réflexions prises en compte (potentiellement infinie),
- la distance interpariétale,
- la position relative de la source et du microphone.

La focalisation a lieu dans le sens où le signal source est reconstruit à sa position d'émission, renversé dans le temps. Bien sûr, d'autres contributions sont présentes dans le signal. On cherche à les comparer au signal utile  $p_{focus}(t)$ . Pour cela on définit le signal résiduel

$$p_{res}(t) = p'(\mathbf{r}_0, t) - p_{focus}(t). \quad (4.26)$$

On peut alors définir le rapport signal à bruit :

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{\max_t \{p_{focus}^2(t)\}}{\max_t \{p_{res}^2(t)\}} \right) \quad (4.27)$$

Cependant nous verrons plus tard (chapitre 5) que la pression quadratique n'est pas un indicateur efficace dans le cas de signaux impulsionnels, car quoique de grande amplitude ils sont faiblement énergétiques. L'utilisation d'un critère statistique d'ordre 4 permettra de mieux extraire l'information utile, notamment dans la localisation spatiale de taches de focalisation.

#### 4.3.2. DÉNOMBREMENT DES CHEMINS ACOUSTIQUES

Avec notre définition des chemins acoustiques, on va dénombrer ceux qui focalisent sur la position de la source et contribuent à  $p_{focus}(t)$ , et ceux qui n'y contribuent pas. On considère que l nombre de réflexions est limité à  $N_{refl}$  sur chaque paroi. Le nombre de chemins acoustiques allant d'un point à un autre est  $card\{-N_{refl}, \dots, N_{refl}\} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 2(2N_{refl} + 1)$ . Dans ce cas, le



nombre total de chemins acoustiques allant de la source aux microphones, puis revenant à la source, est égal à

$$N_{chem} = 4(2N_{refl} + 1)^2 N_{mic} = (16N_{refl}^2 + 16N_{refl} + 4)N_{mic}. \quad (4.28)$$

En outre, il y a  $2(2N_{refl} + 1)$  chemins acoustiques par microphone qui focalisent, ainsi

$$N_{focus} = 2(2N_{refl} + 1)N_{mic} \quad (4.29)$$

et le nombre de chemins acoustiques résiduels est

$$N_{res} = N_{chem} - N_{focus} = (16N_{refl}^2 + 12N_{refl} + 2)N_{mic}. \quad (4.30)$$

Le nombre de signaux résiduels croît comme  $N_{refl}^2$  alors que le nombre de chemins acoustiques focalisants croît comme  $N_{refl}$ , cependant les signaux focalisants sont parfaitement localisés en temps et en espace, tandis que les signaux résiduels s'étalent tout autour de l'instant de focalisation, causalement et anti-causalement, ainsi que spatialement autour de la position de la source. Cela conduit à l'émergence du pic de focalisation dans le bruit déterministe des chemins acoustiques résiduels.

## 4.4. EXEMPLES D'UTILISATION

### 4.4.1. LOCALISATION DE SOURCES EN MOUVEMENT

La localisation de sources en mouvement représente une autre difficulté du retournement temporel. Elle est prédite et étudiée théoriquement dans le cas de déplacements subsoniques  $v \ll c$  dès l'article fondateur de Jackson et Dowling [Jackson et Dowling, 1991].

If the medium or its boundaries are in motion, reciprocity is violated. This will degrade the performance of conjugate arrays.

Malgré ces difficultés, les auteurs démontrent, dans le cas d'un déplacement à faible vitesse ( $\beta \ll 1$ ) la focalisation du champ de pression sur la trajectoire de la source, qui subit néanmoins une distorsion assimilable à un effet Doppler. Depuis ces premières investigations théoriques, la littérature a commencé à se constituer sur le sujet. Une méthode de localisation de sources électromagnétiques en mouvement par retournement temporel a été développée par [Bahrami *et al.*, 2012]. La localisation de sources électromagnétiques derrière un écran est étudiée par [Gorji et Zakeri, 2013], [Rasekh *et al.*, 2014]. Il a été montré dans [Walker, 2009] que le retournement temporel permet de synthétiser des « ondes localisées » induisant un comportement supersonique du terme de source. Le cône de Mach retourné dans le temps est la superposition d'un cône causal et d'un cône anticausal : cette propriété est une conséquence de la conservation de l'énergie [Garnier et Fink, 2015] et trouve son équivalent dans les disciplines connexes de l'optique supraluminique, où elle soulève d'intéressantes considérations concernant la causalité [Zamboni-Rached *et al.*, 2010], [Mugnai, 2007].

### 4.4.2. LES LIMITES AU RETOURNEMENT TEMPOREL

Les comportements non linéaires et de manière assez générale la rupture de l'invariance par retournement temporel sont des difficultés soulevées par exemple dans [Tanter *et al.*, 2001] : la prise en compte de termes non linéaires dans l'équation d'onde peut conduire à la formation de chocs<sup>2</sup>, donc à la création d'entropie. La non invariance par retournement temporel n'est pas équivalente à la présence de termes non linéaires dans les équations de propagation. En présence d'absorption,

2. À propos de la formation des chocs et du rôle qu'y joue l'équation de Burgers, voir la section (1.4.1)

par exemple, les équations sont linéaires ; seuls les termes de dérivation temporelle d'ordre impair causent la non invariance par retournement temporel. Cette considération théorique peut être vérifiée à la fois par simulation numérique et expérimentations [Hallaj *et al.*, 2000]. Par ailleurs il existe des équations non linéaires qui respectent néanmoins l'invariance par retournement temporel : c'est le cas, par exemple, de l'équation de Schrödinger non linéaire qui décrit le comportement de vagues scélérates (*rogue waves*) ou de milieux tels que les condensats de Bose-Einstein. L'invariance par retournement temporel autorise théoriquement à générer du comportement non linéaire par rétro-propagation, comme cela est décrit dans [Chabchoub et Fink, 2014]. Ces propriétés très intéressantes méritent des recherches plus avancées.

## CHAPITRE 5

# PROBLÈME INVERSE POUR LA LIGNE DE HAUT-PARLEURS

Je pose deux points de départ, deux anomalies très éloignées l'une de l'autre : *a)* un moineau pendu ; *b)* l'association de la bouche de Catherette à la bouche de Léna. Ces deux problèmes se mettent à réclamer un sens. L'un pénètre l'autre en tendant vers la *totalité*. Ainsi commence un processus de suppositions, d'associations, d'investigations, quelque chose va se créer, mais c'est un embryon plutôt monstrueux, un avorton... et ce rébus obscur, incompréhensible, va exiger sa solution... chercher une Idée qui explique, qui mette de l'ordre...

---

Witold Gombrowicz, *Quelques extraits de mon journal au sujet de « Cosmos »*

**L**OCALISER l'axe du cône de Mach causé par le déplacement supersonique d'un objet dans un environnement urbain réverbérant représente un défi scientifique et technique considérable, notamment en raison des réflexions multiples sur les murs. Les techniques de localisation de tireurs sont développées par exemple par [Sallai *et al.*, 2011]. La localisation est possible en champ libre au moyen de méthodes de triangulation et de calcul du temps d'arrivée (en anglais *time of arrival (TOA)*). [Lo et Ferguson, 2012] propose une méthode de localisation d'armes à feu utilisant conjointement le bruit de bouche et l'onde de Mach en environnement urbain au moyen de techniques géométriques et en tenant compte d'effets tels que le vent ou la décélération de la balle. Cependant ses méthodes ne sont pas très robustes. Les principales caractéristiques d'une méthode acoustique de localisation d'arme à feu doivent être :

- la robustesse à un faible nombre de microphones, afin de permettre une mise en place rapide
- une vitesse de calcul élevée pour autoriser du quasi-temps réel, faute de quoi la méthode n'a aucun intérêt pratique,
- la robustesse aux conditions de terrain réelles (contraintes climatiques, géographiques, topographiques...) et toutes les incertitudes allant de pair.

Dans ce chapitre, nous exposons la première approche de la résolution d'un tel problème dans le cadre d'un modèle géométrique simple, reproduisant un espace réverbérant constitué de deux murs et d'un sol parfaitement rigide, tel qu'illustré en figure (5.1). Le travail présenté dans ce chapitre est organisé en trois étapes :

1. **Propagation directe** — Cette étape consiste à synthétiser un cône de Mach approché depuis la ligne source jusqu'à l'antenne de microphones. La résolution en champ libre de ce problème direct a été présentée théoriquement, numériquement et expérimentalement au chapitre 2 (voir notamment la figure (2.8)). La réverbération est simulée par une méthode de source-images lors des simulations, dans le cas des mesures en laboratoire il s'agit de la

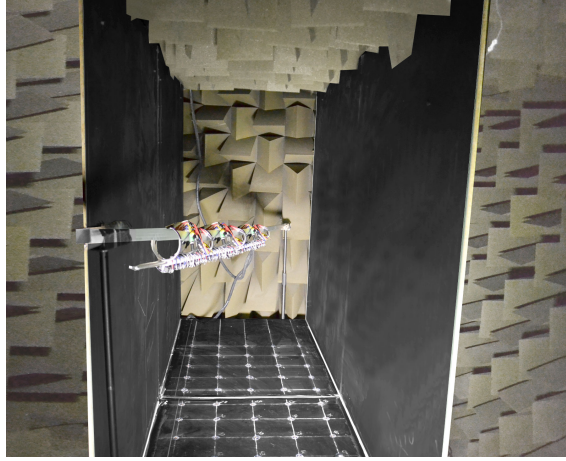


FIGURE 5.1 – Photo de l’environnement réverbérant expérimental avec la ligne de haut-parleurs et le quadrillage de microphones dans le sol.

réverbération naturelle des parois.

2. **Retournement temporel** — Les microphones sont virtuellement remplacés par des haut-parleurs émettant leur signal de mesure respectif renversé dans le temps. La propagation se fait en environnement simulé numériquement, depuis l’antenne de microphones jusqu’à un ensemble de points de contrôle disposés selon une grille verticale orthogonale à la direction de la rue (« tranche de cake ») :

$$\mathbb{M}_y = \{(n_x d, y, n_z d)\}_{1 \leq n_x \leq N_x, 1 \leq n_z \leq N_z} \quad (5.1)$$

En chacun des points d’une tranche verticale  $\mathbf{r} \in \mathbb{M}_y$  on calcule un signal de pression rétro-propagée  $p_{RT}(\mathbf{r}, t)$ . La réverbération est prise en compte numériquement par méthode de sources-images. Le nombre de réflexions intervient comme un compromis entre le temps de calcul et le réalisme physique.

3. **Localisation de l’axe** — Le problème inverse peut être résolu en calculant des signaux de pression rétro-propagée dans différentes tranches de cake. Ces signaux de pression permettent de construire un critère qui marquera par son maximum dans chaque tranche verticale  $\mathbb{M}_y$  le passage de la source. La localisation de l’axe se fait ensuite par interpolation géométrique des différents maxima de ce critère spatio-temporel.

## 5.1. MODÉLISATION

### 5.1.1. SYNTHÈSE DE CÔNE DE MACH EN CHAMP LIBRE

Nous avons présenté au chapitre 2 une ligne de haut-parleurs expérimentale permettant de synthétiser un cône de Mach en laboratoire. La géométrie conique de l’onde est reproduite par filtrage inverse, en envoyant des signaux en  $N$  régulièrement espacés par un intervalle de temps constant. Les haut-parleurs étant assimilés à des sources monopolaires ponctuelles, la création du front d’onde repose sur le principe de superposition de Huyghens. Une illustration d’un tel procédé est donnée en figure (5.2) où les résultats présentés sont obtenus par simulations numériques.

La géométrie n’est reproduite que dans une région délimitée par la ligne de haut-parleurs. Bien que la ligne puisse être arbitrairement longue dans les simulations numériques, cela représente une contrainte expérimentale non négligeable. Dans le présent chapitre, la distance entre les 33 haut-parleurs est fixée à  $\Delta x = 0.5$  cm. Pour un cône de Mach se propageant à une vitesse de  $\|\mathbf{v}\| = 1029$

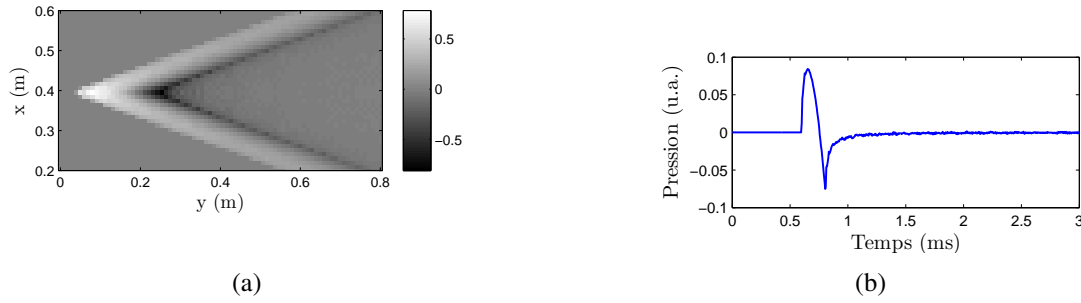


FIGURE 5.2 – Synthèse par simulation numérique d’un cône de Mach en champ libre. (a) : visualisation 2D du front d’onde conique dans le plan ( $z = 10$  cm). (b) : dépendance temporelle de l’onde. La ligne de source est située selon  $x = 0.4$  m et  $z = 0$  m constants. Elle est constituée de 801 haut-parleurs espacés régulièrement de 0.5 cm le long de l’axe.

$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , l’intervalle de temps entre deux émissions doit être  $\Delta t = \Delta x / \|\mathbf{v}\| \approx 4.9 \mu\text{s}$ . Dans le cas des expériences de laboratoire,  $\Delta x = 4.36$  cm  $\Rightarrow \Delta t \approx 42.3 \mu\text{s}$ . On définit ainsi la position des haut-parleurs :

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0 + j\mathbf{v}\Delta t, \quad j = 1, \dots, N_{\text{sources}}, \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur vitesse (supposé constant) de déplacement de la source simulée. Chaque haut-parleur émet un signal en  $N$   $s(t)$  d’une durée  $T$  étant choisie comme la durée théorique de l’onde en  $N$  à 1 m de l’axe d’un calibre donné, par exemple :  $T = 210 \mu\text{s}$ . La propagation se fait selon l’équation de D’Alembert en champ libre

$$\square p(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N_{\text{sources}}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_j) s(t + j\Delta t). \quad (5.3)$$

### 5.1.2. MODÈLE D’ENVIRONNEMENT RÉVERBÉRANT

L’environnement urbain peut être modélisé de la manière suivante :

- approximation de l’acoustique géométrique, analogue formel et rigoureux de l’optique géométrique : le phénomène du cône de Mach est considéré dans des domaines de longueurs d’onde suffisamment petites pour considérer une propagation de fronts d’onde localement plans, tels que la phase  $\phi$  vérifie l’équation d’eikonale, qui s’écrit en notation quadridimensionnelle [Landau et Lifchitz, 1970, pp. 174-175] :

$$|\nabla\phi|^2 = 0 \quad (5.4)$$

- de manière équivalente, la propagation d’ondes acoustiques peut être étudiée par les chemins acoustiques orthogonaux aux fronts d’onde ; cela autorise les méthodes en tirs de rayon ;
- on considèrera dans la suite de la thèse un environnement parfaitement réverbérant, c’est-à-dire dont les parois ont une impédance infinie ;
- cela autorise en conséquent d’employer une méthode de sources images rigoureuses pour modéliser la réverbération ;
- concernant la géométrie des lieux, on considèrera une rue formée de deux murs parfaitement parallèles et d’un sol ;

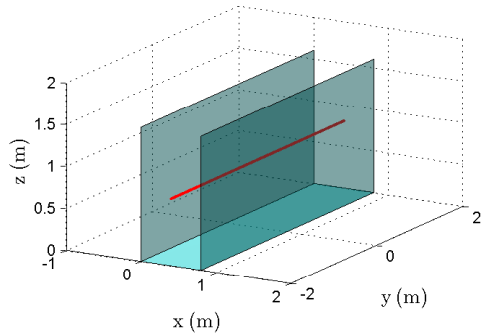


FIGURE 5.3 – Vue tridimensionnelle de l’environnement numérique montrant les murs et le sol (en bleu) ainsi que la ligne de sources (en rouge)

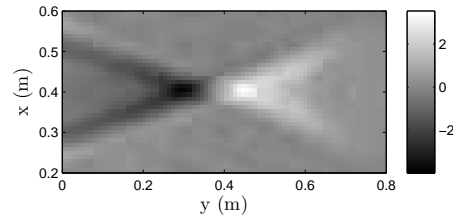


FIGURE 5.4 – Focalisation par retournement temporel du cône de Mach dans le plan ( $z = 0$ ). Un ensemble de 128 microphones, régulièrement espacés de 10 cm, est disposé dans le plan ( $z = 10$  cm).

- concernant les codes de calcul pour la propagation en environnement urbain, on n’emploiera pas de méthode de maillage ou de discrétisation du milieu de type éléments finis ou FDTD par souci d’économie du temps de calcul et dans une perspective d’implémentation ultérieure ; on considère un environnement suffisamment simple pour utiliser les solutions analytiques à l’équation de d’Alembert ;
- concernant le milieu de propagation, on fera l’hypothèse simplificatrice qu’il s’agit de l’air homogène et isotrope ;
- en conséquence, on néglige tout effet de turbulence atmosphérique, de gradient de température...

On se place dans un référentiel cartésien orthonormé  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ . Les murs sont définis par les plans  $(x = 0)$  et  $(x = X)$ , le sol par le plan  $(z = 0)$  (voir la figure (5.3)). Ces interfaces sont considérées parfaitement réfléchissantes, de telle sorte que la réflexion sur leur surface est modélisée par la méthode de source image décrite au chapitre 3. Mathématiquement, la séquence des sources images d’un point quelconque de l’espace  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  s’obtient par l’application de l’opérateur

$$\mathcal{R}_{n,b,c}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2nX + (-1)^b x \\ y \\ (-1)^c z \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$(n, b, c) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1\}^2.$$

Selon  $x$ , le nombre de sources images est formellement illimité. Dans les simulations, on le limite à un ordre  $N_{refl}$  correspondant à un enregistrement d’une durée finie  $t_f$ . Ainsi, pour une source située en  $\mathbf{r}_0$  émettant le signal source  $s(t)$ , le champ de pression à l’intérieur de la rue vérifie l’équation de D’Alembert que voici :

$$\square p(\mathbf{r}, t) = \sum_{\substack{|n| \leq N_{refl} \\ b, c \in \{0, 1\}^2}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathcal{R}_{n,b,c}(\mathbf{r}_0)) s(t). \quad (5.6)$$

En combinant les équations (5.3) et (5.6), on montre que le modèle d'onde de Mach étudié ici vérifie alors

$$\square p(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N_{sources}} \sum_{\substack{|n| \leq N_{refl} \\ b, c \in \{0,1\}^2}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathcal{R}_{n,b,c}(\mathbf{x}_j)) s(t + j\Delta t). \quad (5.7)$$

Cette équation peut être résolue en utilisant le formalisme des fonctions de Green en domaine temporel : le champ résultant en un point  $\mathbf{r}$  est la somme de chacun des  $N_{sources}$  signaux sources décalés en temps et atténués d'un facteur dépendant de leur distance au point d'observation. Le problème inverse étudié dans le présent article consiste à trouver un couple  $\{\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{v}}\}$ , caractérisant la position des sources de manière similaire à l'équation (5.2), c'est-à-dire tel que  $\forall j \in \{1, \dots, N_{sources}\}, \exists \tau \in \mathbb{R}, \mathbf{x}_j = \tilde{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{v}}\tau$ , à partir d'un ensemble de mesures du champ de pression (5.7) en différents points de l'espace — c'est-à-dire, d'un point de vue de l'acoustique expérimentale, à l'aide d'un réseau de microphones.

### 5.1.3. RETOURNEMENT TEMPOREL ENTRE DEUX MURS

Le principe physique du retournement temporel assure que les signaux de pression mesurés après s'être propagés en vérifiant l'équation (5.7) peuvent être réémis depuis leurs positions respectives de mesure retournés dans le temps afin qu'ils se rétro-propagent de manière pseudo-anticausale jusqu'à focaliser au niveau des sources [Jackson et Dowling, 1991, Fink *et al.*, 2000]. La justification d'une telle proposition vient du fait que l'équation (5.7) est une équation de propagation linéaire dans laquelle le temps n'intervient, en terme d'opérateurs différentiels, que sous la forme d'une dérivée seconde sous-entendue dans l'opérateur d'alembertien  $\square$ . Cette équation possède donc la propriété fondamentale d'invariance par retournement temporel qui prédit une focalisation physique (c'est-à-dire mesurable par des appareils de mesure) de la solution renversée dans le temps. Dans le cas de la localisation de sources, cette focalisation ne nécessite pas d'être opérée physiquement. Nous proposons de montrer qu'une simulation numérique dans un environnement virtuel mis en correspondance biunivoque avec la réalité, reproduisant sommairement ses principales caractéristiques géométriques et acoustiques, permet de localiser l'axe de la source supersonique. Le retournement temporel assure une exactitude de la rétro-propagation anticausale dans le cas non physique d'un continuum de sources formant une surface fermée autour de la zone d'étude, en vertu du théorème de Kirchhoff-Helmholtz [Jackson et Dowling, 1991]. Dans une implémentation pratique, à la fois virtuelle et expérimentale, cette surface continue et fermée est remplacée par un réseau planaire de microphones. La présence de réverbération augmente artificiellement le nombre de microphones [Ribay *et al.*, 2005]. Les principes de la localisation de sources par retournement temporel en milieu réverbérant dans le domaine fréquentiel sont expliqués dans les deux premiers chapitres de la thèse de Guillemette Ribay [Ribay, 2006, pp. 13-46]. L'inconnue du problème, le terme de source de l'équation (5.7), est remplacée dans la version renversée temporellement par les signaux de mesure à leur positions respectives, qui se comportent alors, mathématiquement et physiquement, comme un ensemble de conditions aux limites. Etant donné l'ensemble des positions des microphones  $\{\mathbf{r}_m\}_{m=1}^{N_{mic}}$ , en définissant  $p_m(t) = p(\mathbf{r}_m, t)$  l'ensemble correspondant aux solutions de l'équation (5.7), le champ de pression rétro-propagé  $p_{TR}$  obéit à l'équation de propagation

$$\square p_{TR}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{N_{mic}} \sum_{\substack{|n| \leq N_{refl} \\ b, c \in \{0,1\}^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathcal{R}_{n,b,c}(\mathbf{r}_m)) p_m(t_f - t). \quad (5.8)$$

La focalisation par retournement temporel du cône de Mach sur la ligne de sources conduit à la formation d'une double tâche focale, comme le montre la figure (5.4). Cette figure obtenue par

simulation numérique montre également que le cône strictement anticausal (pour  $y > 0.4$  m) est accompagné d'un cône causal qui, en l'absence d'absorbeur au niveau des sources, est une conséquence du principe de conservation de l'énergie [de Rosny, 2002, Bavu *et al.*, 2007, Bavu et Berry, 2009].

## 5.2. LOCALISATION DE L'AXE DU CÔNE DE MACH

### 5.2.1. DISCRIMINATION ENTRE SOURCE ET MICROPHONE

Bien que la focalisation du cône de Mach au niveau des sources conduise à la formation d'un pic de pression, sa détection est corrompue par la présence des microphones dans la zone de rétro-propagation. En cherchant à détecter un maximum de pression quadratique, on détecte en fait la divergence en  $1/r^2$  au niveau des microphones. Cet inconvénient impose l'utilisation d'un critère qui ne soit pas sensible à la divergence des microphones. La recherche de critères statistiques a mené à la conclusion que les critères d'ordre pair (2 et 4) normalisés par la moyenne quadratique permettent de s'affranchir de la divergence. Le moment d'ordre 4, aussi appelé variance temporelle normalisée de l'énergie [Ehrhardt, 2013] ou encore kurtosis [Rimoldini, 2013], a montré une meilleure robustesse que la moyenne quadratique normalisée. Cette statistique a donc été choisie comme critère de localisation dans les tranches de cake. Ce critère est défini par :

$$K(\mathbf{r}) = \frac{M_2(\mathbf{r}) - M_1^2(\mathbf{r})}{M_1^2(\mathbf{r})}, \quad (5.9)$$

avec  $M_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} p_{RT}^{2n}(\mathbf{r}, t) dt.$

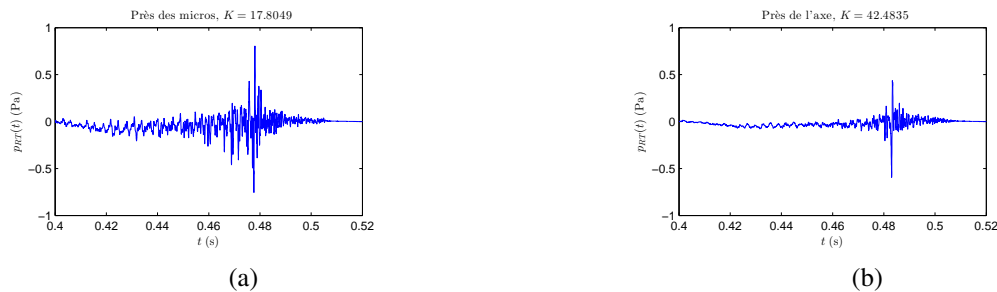


FIGURE 5.5 – Mesures expérimentales de pression rétro-propagée numériquement en milieu réverbérant avec  $N_{refl} = 5$  jusque : (a) à 4 cm du sol où sont situés les microphones, (b) dans un voisinage de l'axe de l'ordre du centimètre

En figure (5.5) on peut constater qu'au niveau des microphones, bien que la pression soit plus élevée, le kurtosis est plus faible qu'au niveau du passage de l'axe. La raison mathématique (ou simplement statistique) pour laquelle le kurtosis ne prend pas de valeurs élevées au niveau des microphones n'est pas encore totalement mise à jour. Deux hypothèses prédominent :

1. Au niveau de l'axe, le signal de pression présente un pic de focalisation plus marqué, plus resserré qu'au niveau des microphones, comme le montre la figure (5.5).
2. L'hypothèse selon laquelle la présence des microphones voisins tendrait à ajouter une diversité temporelle de fort niveau dans les signaux de mesure rétro-propagée au voisinage d'un microphone donné, réduisant ainsi le kurtosis par rapport à celui du pic de focalisation, constitue une hypothèse supplémentaire. Si l'on observe la figure (5.6), on constate qu'un bruit blanc homogène présente un kurtosis faible (entre 1 et 2 dans l'exemple présenté).



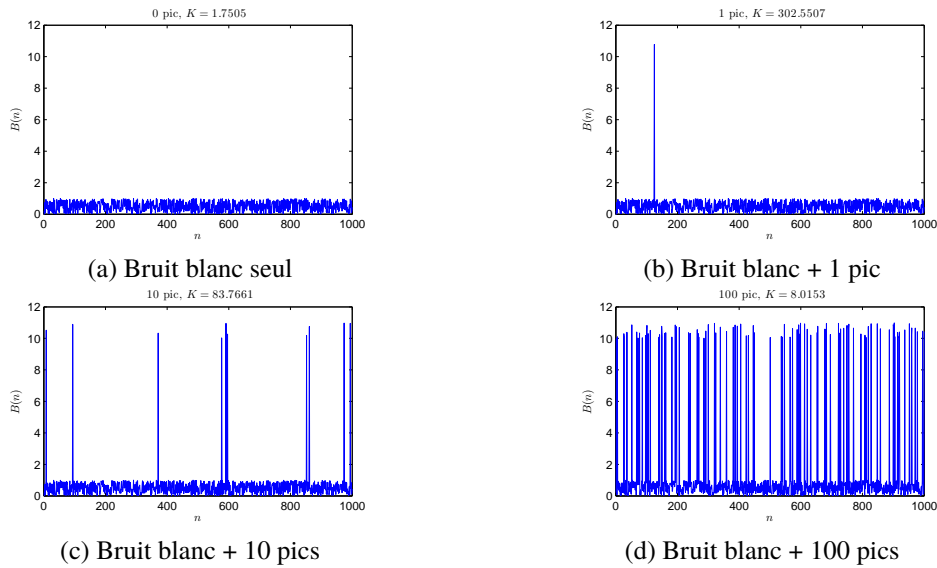


FIGURE 5.6 – Etude de l’influence du nombre de pics émergeant d’un bruit blanc  $B(n)$  de 1000 échantillons sur la valeur de kurtosis  $K$  du signal

L’insertion d’un pic dans ce processus stochastique, à un endroit quelconque, d’une amplitude 10 fois supérieure à sa variance, produit une brutale augmentation du kurtosis : le signal est très piqué. L’augmentation du nombre de pics réduit progressivement la valeur du kurtosis, le signal étant de moins en moins piqué, jusqu’à ce que la valeur s’inverse quand le signal commence à être « négativement piqué, » mais ce cas ne nous concerne pas. Cette rapide analyse permet de comprendre pourquoi le kurtosis prend une valeur élevée au niveau du pic de focalisation du champ de pression : ce n’est pas dû tant à son amplitude qu’au fait que le signal de pression présente *un seul* pic émergeant clairement du bruit constitué des signaux en  $N$  ne focalisant pas (artefacts de réverbération).

D’un point de vue technique, il est important d’être conscient du fait que le kurtosis est très sensible à la longueur du signal : par exemple le fait de rajouter des zéros va diminuer le kurtosis d’un signal piqué. La figure (5.7) montre comment, dans une tranche verticale, le kurtosis parvient à faire abstraction des forts niveaux de pression au niveau du sol et à détecter la position de l’axe du cône de Mach.

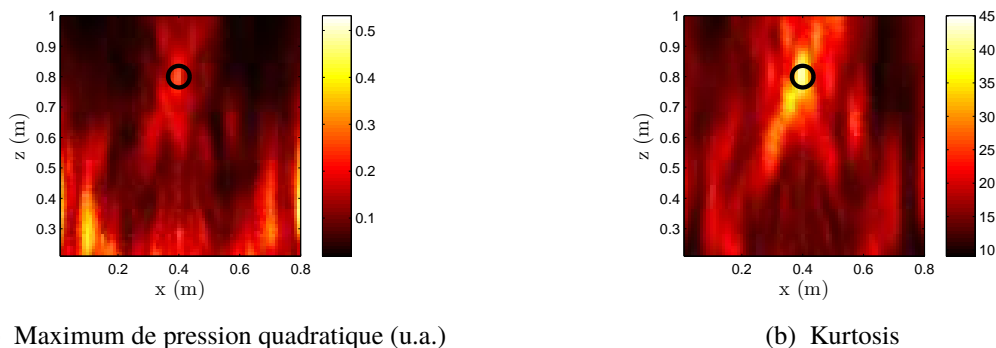


FIGURE 5.7 – Comparaison entre (a) le maximum de pression quadratique et (b) le kurtosis dans une tranche verticale. La position de l’axe est donnée par le cercle noir. Lors de cette simulation numérique, 32 microphones étaient régulièrement disposés au niveau du sol.

### 5.2.2. DÉFINITION DES ERREURS D'ESTIMATION

Comme on vient de le voir, dans chaque tranche verticale  $\mathbb{M}_y$ , le kurtosis présente un maximum au niveau du passage de la source. On peut, en utilisant les définitions (5.1) et (5.9), définir

$$\tilde{\mathbf{x}}_y = \arg \max_{\mathbf{r} \in \mathbb{M}_y} K(\mathbf{r}), \quad (5.10)$$

comme l'estimation de l'intersection entre l'axe du cône de Mach et la tranche verticale  $\mathbb{M}_y$ . La grandeur

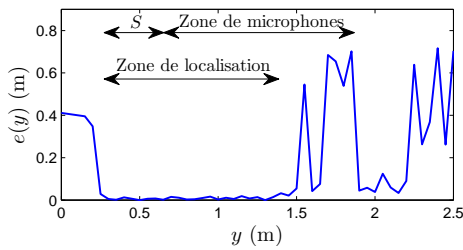
$$e(y) = \min_{\tau \in \mathbb{R}} \|\tilde{\mathbf{x}}_y - (\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\tau)\| \quad (5.11)$$

définit alors l'erreur d'estimation du passage de la source dans la tranche verticale  $\mathbb{M}_y$ . Si l'on estime le passage de la source pour plusieurs valeurs de  $y$ , il est possible d'estimer la position de l'axe par une interpolation au sens des moindres carrés. On obtient alors l'équation de l'axe estimé  $\{\tilde{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{v}}\tau \in \mathbb{R}^3 | \tau \in \mathbb{R}\}$ , à comparer à celle de l'axe  $\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\tau \in \mathbb{R}^3 | \tau \in \mathbb{R}\}$ . L'erreur d'estimation de l'axe peut être quantifiée au moyen des deux grandeurs géométriques :

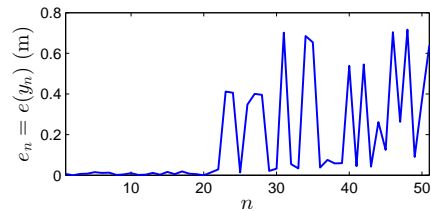
- $\theta$ , l'angle entre  $\mathbf{v}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}$ ,
- $\delta$ , la distance entre  $\mathbf{v}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}$ .

### 5.2.3. AMÉLIORATION DE LA ROBUSTESSE

Dans cette section, on estime le passage dans 51 tranches de cake pour  $0 \leq y \leq 2.5$  m. Les simulations numériques ont été effectuées pour la configuration suivante : 44 microphones sont disposés en un quadrillage au sol de 15 cm de côté, dans la zone  $67.5 \text{ cm} \leq y \leq 187.5 \text{ cm}$ . L'axe du déplacement est constitué de 806 sources monopolaires espacées de  $\Delta x = 0.5$  cm. Le nombre de réflexions est fixé à  $N_{refl} = 5$ . La ligne de source est définie  $x = 50$  cm, avec une inclinaison de  $\xi = 7^\circ = 0.12$  rad par rapport au plan que forment les microphones. La hauteur  $z$  varie entre 25 cm et 75 cm. La fréquence d'échantillonnage est fixée à  $F_s = 96$  kHz.



(a) Valeurs classées selon  $y$



(b) Valeurs classées selon  $n$ , c'est-à-dire pour des valeurs décroissantes du kurtosis maximal

FIGURE 5.8 – Variation de l'erreur d'estimation dans 51 tranches verticales

La figure (5.8a) montre l'erreur d'estimation  $e(y)$  définie par l'équation (5.11). Les erreurs d'estimation sont réparties par rapport à la zone de microphones avec un décalage  $S$ , que l'on peut interpréter géométriquement comme une conséquence de la conicité du front d'onde retourné temporellement. On se demande alors si l'on pourrait trouver une méthode qui, sur des estimations dans plusieurs tranches, parvienne à tenir majoritairement compte des meilleures, et laisse de côté les moins bonnes. Nous en proposons une qui tente de tenir compte de la variation de kurtosis selon  $y$ . Comme le montre la relation (5.10), l'estimation du passage de l'axe dans une tranche verticale nécessite de calculer le maximum du kurtosis dans la tranche verticale. Si l'on considère la suite des valeurs de maxima  $\{\max_{\mathbf{r} \in \mathbb{M}_y} K(\mathbf{r})\}_y$ , on peut la réorganiser au moyen d'un changement d'indice de telle sorte que les valeurs élevées soient au début et les valeurs faibles à la fin. En d'autres mots,

cela est équivalent à définir la suite de coordonnées de tranches de cake  $\{y_n\}$  telle que décroisse la suite du kurtosis maximal

$$k_n = \left\{ \max_{\mathbf{r} \in \mathbb{M}_{y_n}} K(\mathbf{r}) \right\}_n. \quad (5.12)$$

L'hypothèse sous-jacente à une telle technique est la suivante : étant donné qu'une valeur élevée de kurtosis correspond à une faible erreur d'estimation, la suite  $e(y)$ , une fois réorganisée au moyen du changement d'indice  $e_n = e(y_n)$ , sera globalement croissante. La figure (5.8b) montre le comportement de la suite  $e_n = e(y_n)$  dans le cas de l'exemple présenté en figure (5.8a). Même si la suite  $e_n$  n'est pas strictement croissante, les premières valeurs correspondent toutes à de faibles erreurs d'estimation. On peut alors inférer l'existence d'un entier  $N$  tel que les  $N$  plus grandes valeurs du kurtosis maximal  $k_n$  donnent toutes lieu à des estimations correctes du passage de l'axe. Au moyen d'une interpolation géométrique des  $N$  points correspondants, comme le montre la figure (5.9), on peut obtenir l'équation de l'axe avec une faible erreur d'estimation.



FIGURE 5.9 – Visualisation spatiale des estimations de l'axe (a) dans les 51 tranches, (b) en gardant les  $N = 10$  meilleures estimations

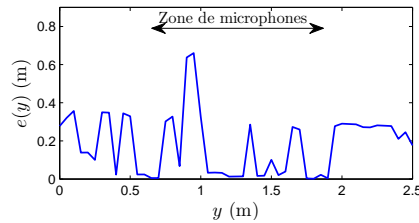
Déterminer  $N$  n'est pas trivial, car une petite valeur de  $N$  augmente la probabilité de n'avoir que de bonnes estimations, mais l'interpolation ne sera pas précise si par malchance les tranches de cake sélectionnées sont trop proches les unes des autres. En revanche, une plus grande valeur de  $N$  augmente la probabilité d'avoir les meilleures estimations suffisamment espacées pour que l'interpolation soit correcte, mais augmente également la probabilité d'effectuer l'interpolation avec des estimations incorrectes. Il existe ainsi une ou plusieurs valeurs de  $N$  constituant un compromis optimal (au sens large du terme) entre les deux situations imparfaites exposées ci-dessus. On n'a cependant pas accès à la connaissance directe de ces valeurs à moins de mettre en place un modèle mathématique complexe, chose que nous ne développons pas ici, nous contentant, en guise de première approche, d'observations empiriques sur des simulations numériques. À titre d'exemple, la figure (5.8b) autorise à prendre une valeur de  $N = 20$ . La figure (5.10) montre les erreurs d'estimation axiale  $\theta$  et  $\delta$  tracées en fonction de  $N$ . Pour des valeurs de  $N$  autour de  $N = 20$  et inférieures, l'estimation est très satisfaisante ( $\theta \leq 5^\circ$ ,  $\delta \leq 0,1$  cm). Au-delà, des erreurs entrent en compte et l'erreur augmente avec  $N$ .



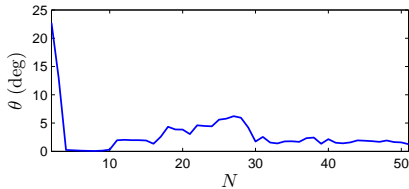
FIGURE 5.10 – Erreur d'estimation axiale en fonction du nombre de tranches de cake triées impliquées dans l'interpolation

## 5.2.4. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

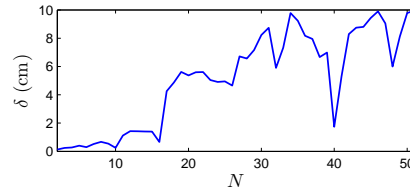
La mise en pratique de la méthode de détection d'axe nécessite d'une part d'effectuer des mesures physiques de l'onde de Mach en milieu réverbérant et d'autre part de construire un environnement virtuel reproduisant la géométrie de la rue et de l'antenne de microphones pour résoudre numériquement le problème inverse. La localisation d'axe est effectuée à l'aide de la ligne de haut-parleurs déjà présentée au chapitre 2, cette ligne étant insérée dans le milieu réverbérant présenté en figure (5.1), reproduisant celui décrit en section (5.1.2). La distance entre les haut-parleurs est de  $\Delta x = 4.36$  cm. La ligne de sources consiste en 33 haut-parleurs Audax TW010I1 pour un total de 1.50 m de longueur. Les murs sont constitués de deux tableaux de classe de  $2.40 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ . Le sol est une table de ping-pong de  $80 \text{ cm} \times 2.40 \text{ m}$  avec 44 trous percés pour accueillir 44 microphones régulièrement espacés de 15 cm à la hauteur  $z = 0$ . Tous les signaux audio émis par les haut-parleurs sont générés par trois cartes son Echo Audiofire 12, et échantillonnés à une fréquence de 96 kHz. Les 44 microphones dans le sol sont des capsules à électret  $1/4''$  KE4 Sennheiser soigneusement calibrées en phase et en amplitude. Les signaux temporels sont enregistrés par l'intermédiaire d'un système d'acquisition National Instruments PXI. Le retournement temporel est calculé à une fréquence d'échantillonnage de  $F_s = 96$  kHz en prenant en compte  $N_{refl} = 5$  réflexions sur chaque mur.



(a) Variation de l'erreur d'estimation dans les 51 tranches de cake

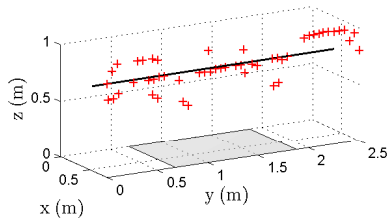


(b) Erreur angulaire

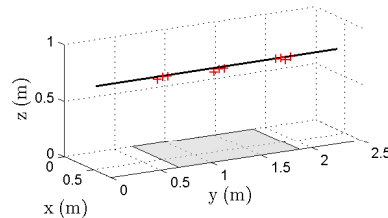


(c) Distance entre les axes

FIGURE 5.11 – Erreurs d'estimation pour les données expérimentales



(a)



(b)

FIGURE 5.12 – Visualisation spatiale des estimations de l'axe (a) dans les 51 tranches, (b) en gardant les  $N = 10$  meilleures estimations pour les données expérimentales

Les résultats expérimentaux ne sont pas aussi bons que dans le cas entièrement virtuel, cependant

l'estimation est possible avec une bonne précision, comme on peut le voir sur les différentes courbes d'erreur de la figure (5.11) ainsi que sur la figure (5.12) montrant les positions des estimations dans l'espace. On notera que la ligne de haut-parleurs expérimentale est moins précise (distance entre les haut-parleurs plus grande) et plus courte (1,5 m contre 8 m) que dans le cas virtuel. Sur la figure (5.11a) on peut constater que la variation de  $e(y)$  est très chaotique et moins prévisible que lors des simulations. Cela justifie mieux encore l'emploi de la méthode de tri améliorant la robustesse présentée dans la section (5.2.3).

**Conclusion :** Comme il a été vu dans le chapitre 2, le principe de Huygens permet de synthétiser un cône de Mach approché par superposition de fronts d'ondes monopolaires. Une méthode faisant appel aux fonctions de Green des sources images modélise la réverbération pour la propagation directe et la rétro-propagation par renversement du temps, grâce à un réseau de microphones déployé sur le sol. Un calcul numérique rétro-propage ensuite les données mesurées jusque dans des tranches verticales (« tranches de cake ») intersectant l'axe du cône de Mach. La maximisation d'un critère statistique d'ordre 4, qui permet de s'affranchir des forts niveaux acoustiques autour des microphones, détermine le point d'intersection en question. Une méthode de tri permet de garder les meilleures estimations servant à l'interpolation géométrique de l'axe. La méthode proposée présente une précision angulaire de  $1^\circ$  et une distance entre les axes de 1 cm, à la fois sur les simulations et les mesures expérimentales. Les résultats présentés ici montrent qu'il est possible d'estimer la position de l'axe du cône de Mach créé par une ligne à retard de sources monopolaires à partir de mesures acoustiques en champ réverbérant. Les principales contraintes de la méthode en cours de développement sont :

- la discrétisation de la trajectoire de la source, fondée sur le principe de Huyghens, conduisant à des contraintes d'échantillonnage spatio-temporel,
- la finitude de la ligne de sources, pouvant être évitée lors des simulations numériques en considérant une très longue ligne, mais inévitable lors de mesures en laboratoire, cependant cette limite ne pose pas de problème pour une application avec un véritable projectile,
- la discrétisation de plusieurs portions de rue (les tranches de cake  $\mathbb{M}_y$ ), conduisant à un temps de calcul d'autant plus long que le pas d'échantillonnage spatial est petit,
- la connaissance *a priori* de la géométrie de la rue, nécessaire au calcul de la propagation inverse.

Le critère de détection du maximum, ici le kurtosis, présente parfois plusieurs maxima locaux parmi lesquels celui dû au passage de la source n'apparaît pas être le principal. Cet inconvénient, dû aux approximations faites par rapport à la théorie, conduit à des erreurs d'estimation locales dans certaines tranches de cake et demeure un enjeu de taille dans la perspective d'implémentations technologiques robustes. La méthode présentée ici apporte certaines contributions théoriques et techniques :

- il est possible de simuler expérimentalement le déplacement d'une source supersonique sans tirer le moindre projectile,
- dans le cadre de l'approximation linéaire de la propagation de l'onde de Mach, le retournement temporel autorise la rétro-focalisation du champ de pression sur la position dynamique de la source,
- le pic de focalisation peut être détecté malgré la divergence en  $1/r$  du champ de pression au voisinage des microphones, au moyen de critères statistiques d'ordre élevé tels que le kurtosis,
- la réverbération améliore la précision de la rétro-focalisation au lieu d'ajouter du bruit aux mesures.

A présent qu'a été exposé l'intérêt du retournement temporel pour la localisation de sources supersoniques en milieu urbain, la robustesse à un faible nombre de capteurs nécessite des études

plus poussées. Dans le chapitre 6, nous abordons le problème de la localisation de la trajectoire d'une balle de fusil dans un environnement réverbérant similaire à celui du présent chapitre, quoique plus grand d'un facteur 2, et les contraintes expérimentales nous astreignent à seulement 12 microphones. Nous verrons que sur des mesures de terrain et avec aussi peu de capteurs, le traitement du problème inverse nécessite une approche plus poussée. En particulier, le positionnement des microphones va jouer un rôle crucial.

## CHAPITRE 6

# RETOURNEMENT TEMPOREL SUR DES MESURES DE TIRS À BALLES RÉELLES

— Flèche ou pas flèche, cela pouvait être une illusion, d'autant plus que la veille nous avions déjà cru en voir une au plafond ici, là-haut, vous vous souvenez ? Une flèche ou peut-être un râteau...  
L'auto-suggestion n'est pas exclue, *attenti* ! Mais nous, par simple curiosité, à titre d'exercice, vous voyez, nous avons décidé de regarder de plus près.

---

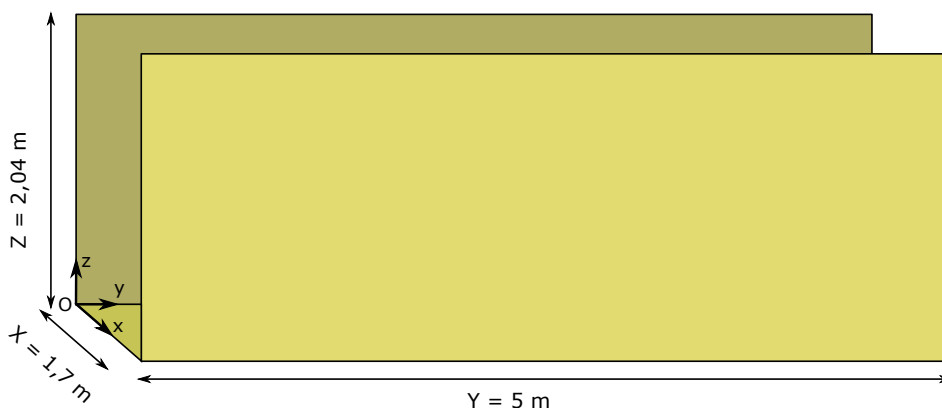
Witold Gombrowicz, *Cosmos*

**C**E chapitre résume la campagne de mesures effectuée du 28 au 30 octobre 2014 au champ de tir de Baldersheim (Haut-Rhin, Alsace) ainsi que le dépouillement et le traitement des données mesurées.

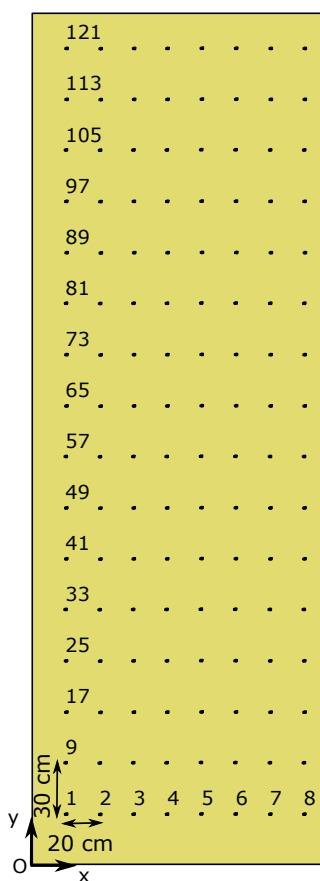
### 6.1. DESCRIPTION DES MESURES

Les mesures ont été effectuées le 30 octobre 2014. L'équipe APC de l'ISL a monté un environnement urbain réverbérant analogue à une rue de  $X = 1,75$  m de largeur,  $Y = 5$  m de longueur et  $Z = 2$  m de hauteur, que l'on peut voir en figure (6.1). Le tireur était situé à environ  $y = -95$  m du début de la rue. On a placé deux écrans à  $y = -9,85$  m et  $y = 8,78$  m. dans lesquels tirait le sniper. La trajectoire de l'axe peut ainsi être retrouvée en mesurant la position des deux trous formés par le passage de la balle de part et d'autre de l'environnement réverbérant que l'on peut voir en arrière-plan de la figure (6.1c). On note la position respective des trous  $M_1$  et  $M_2$ . On a tracé, sur le sol de l'environnement réverbérant, un quadrillage de pas  $\delta x = 20$  cm et  $\delta y = 30$  cm, permettant de référencer 128 positions au sol, comme décrit en figure (6.1b). Cependant on ne disposait que de 12 microphones dont il fallait choisir la disposition sur la grille. On a mis en place 9 configurations recensées dans le tableau (6.1).

Ce tableau permet de référencer les coordonnées  $(x, y)$  des 12 microphones pour chacune des 9 configurations. Pour la coordonnée en  $z$ , elle était constamment à  $z = 50$  cm, sauf pour la configuration 9 où les microphones  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$  sont à  $z = 20$  cm de hauteur. Pour chacune des configurations microphoniques décrites ci-dessus, le tireur a tiré trois coups, sauf pour la configuration 3 où il en a tiré 9. Cela fait un total de  $3 \times 8 + 9 = 33$  enregistrements. Pour chaque tir, on a relevé le trou formé par le passage de la balle dans chacun des deux écrans disposés de part et d'autre de l'environnement réverbérant en notant sa position par rapport à un signe "+" de référence fait avec du ruban adhésif et disposé au milieu de l'écran, dont le centre a pour coordonnées  $(x, z) = (85 \text{ cm}, 115 \text{ cm})$ .



(a) Vue de côté



(b) Vue de dessus : configuration du quadrillage de microphones



(c) Photo des microphones disposés dans l'environnement réverbérant le 30 octobre 2014.

FIGURE 6.1 – Configuration de l'environnement réverbérant



Config.	Micro.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1		31	35	53	68	74	77	81	87	93	99	102
2		14	20	38	33	59	64	75	86	93	100	111	90
3		3	19	22	33	36	48	56	62	70	85	92	103
4		28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116
5		25	33	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113
6		26	27	28	29	30	31	98	99	100	101	102	103
7		70	77	78	79	84	85	86	87	88	93	94	95
8		36	43	44	45	51	52	86	87	88	93	94	95
9		36	43	44	45	51	52	86	87	88	93	94	95

TABLE 6.1 – Configurations des microphones sur le quadrillage de mesure

## 6.2. TRAITEMENT DES DONNÉES

### 6.2.1. TRONCATURE DES SIGNAUX DIRECTS

Compte tenu de la géométrie du problème, le signal direct apparaît bien séparément des premières réflexions. Il est alors possible de l'isoler manuellement sur chacun des canaux de mesure, comme cela est illustré en figure (6.2), puis d'effectuer la rétro-propagation des signaux renversés temporellement en l'absence de réverbération. Pour tronquer les premières réflexions, après un fenêtrage temporel par méthodes énergétique et géométrique, on a supprimé, pour chaque canal, le signal 0,3 ms (60 échantillons à  $F_s = 200$  kHz) après le maximum de pression positive.

### 6.2.2. FOCALISATION DES SIGNAUX TRONQUÉS

En tronquant les signaux directs on peut ramener l'étude du problème à un équivalent en champ libre : on peut alors effectuer une rétro-propagation sans tenir compte des sources images, dans le plan moyen contenant l'axe, à savoir le plan à

$$z = \frac{(M_1 + M_2) \cdot e_z}{2} \quad (6.1)$$

et observer selon quelles configurations on observe ou pas la focalisation du champ de pression au niveau de l'axe. Sur les 33 mesures nous en présentons 6 significatives en figure (6.3) ; la totalité des cartographies est donnée en annexe A. En particulier, nous remarquons que la configuration n° 4 où les microphones sont alignés parallèlement aux parois réverbérantes ne permet pas la focalisation du champ de pression, en revanche la configuration n° 6 où les microphones forment deux lignes perpendiculaires aux parois permet la focalisation au niveau de leur coordonnée  $y$  respective, quoique cette tache présente un certain étalement. De plus nous verrons dans le paragraphe suivant que la localisation de l'axe selon  $z$  présente des difficultés en raison de la présence des microphones dans le champ rétro-propagé, problème déjà rencontré lors des mesures en laboratoires (chapitre 5) que nous étions parvenu à résoudre en employant un critère de kurtosis qui se révélera inefficace ici. Pour mettre en place une technique de localisation de l'axe, il nous faut à présent étudier la focalisation dans les tranches de cake verticales, qui contiennent les microphones à  $z = 50$  cm.

### 6.2.3. EFFET DES MICROPHONES

Nous avons montré au chapitre 5 que le kurtosis était insensible à la présence des microphones. L'efficacité de l'utilisation de ce critère a permis de détecter avec succès l'axe du cône de Mach lors

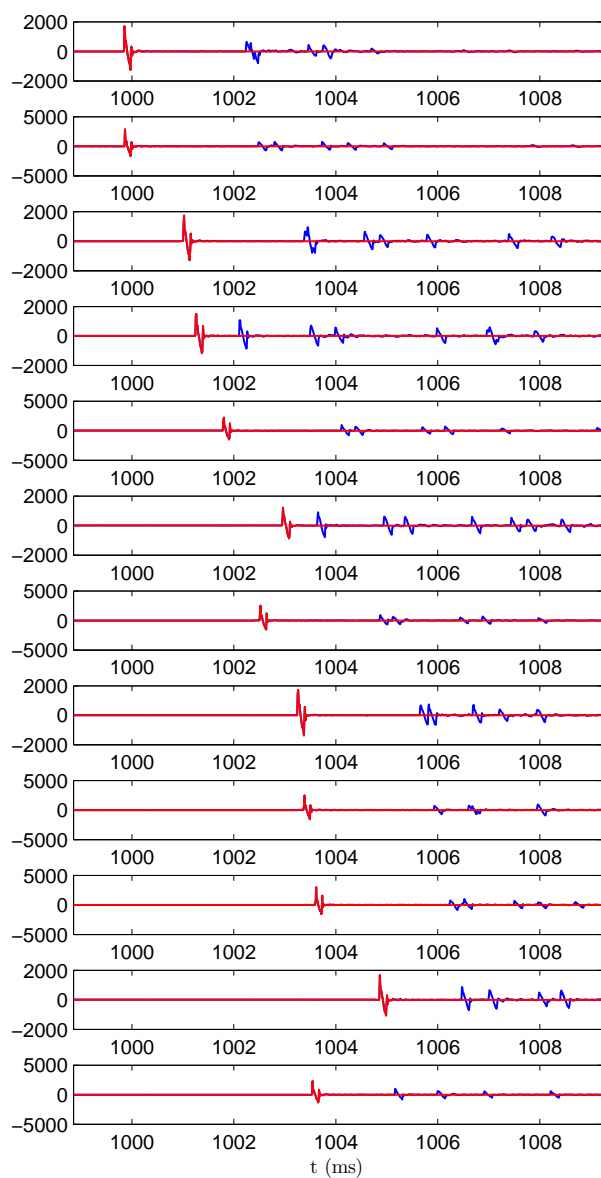
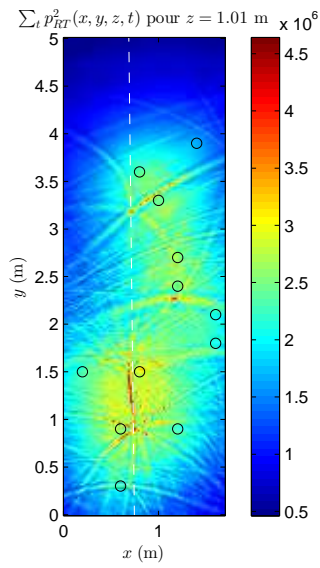
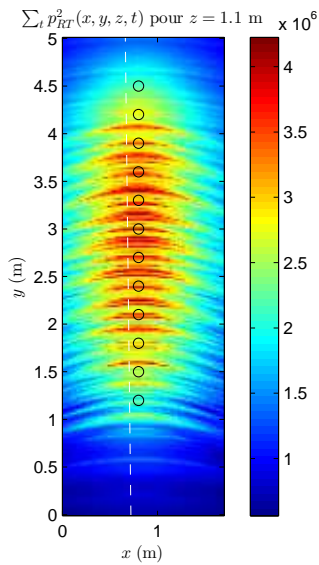


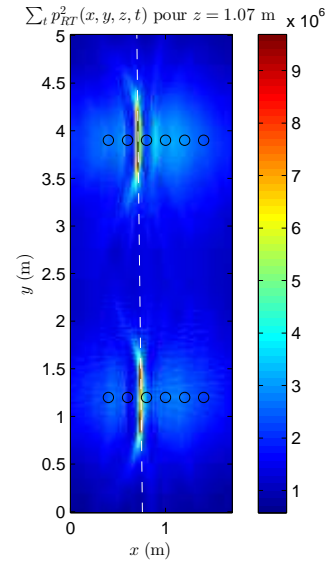
FIGURE 6.2 – Exemple de troncature des premières réflexions dans les 12 canaux de mesure de la configuration 2, tir 2. En rouge : signal tronqué ; en bleu : signal non tronqué.



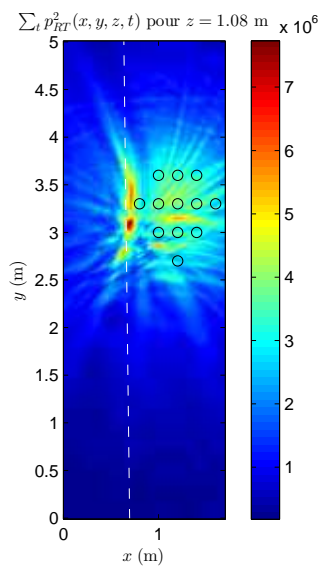
(a) Config. 3, tir 1 : configuration donnant une tache de focalisation allongée



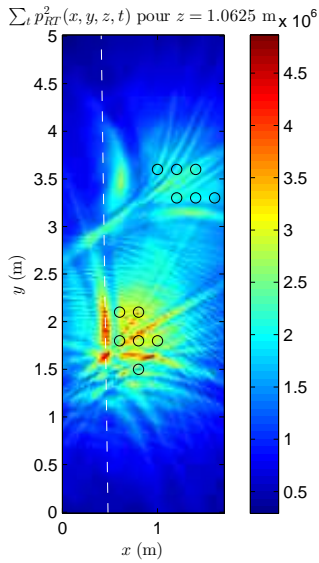
(b) Config. 4, tir 1 : configuration ne fonctionnant pas



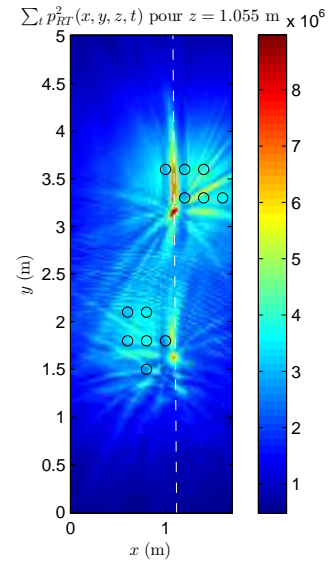
(c) Config. 6, tir 1 : configuration donnant deux taches de focalisation



(d) Config. 7, tir 1 : configuration donnant un seul point de focalisation



(e) Config. 8, tir 2 : influence de la position de l'axe sur le champ de pression quadratique pour deux tirs dans une même configuration



(f) Config. 8, tir 3 : influence de la position de l'axe sur le champ de pression quadratique pour deux tirs dans une même configuration

FIGURE 6.3 – Focalisation par retournement temporel du champ de pression quadratique tronquée au signal direct, dans le plan horizontal moyen contenant l'axe (Les pointillés blancs indiquent la projection de la trajectoire de la balle dans le plan.)

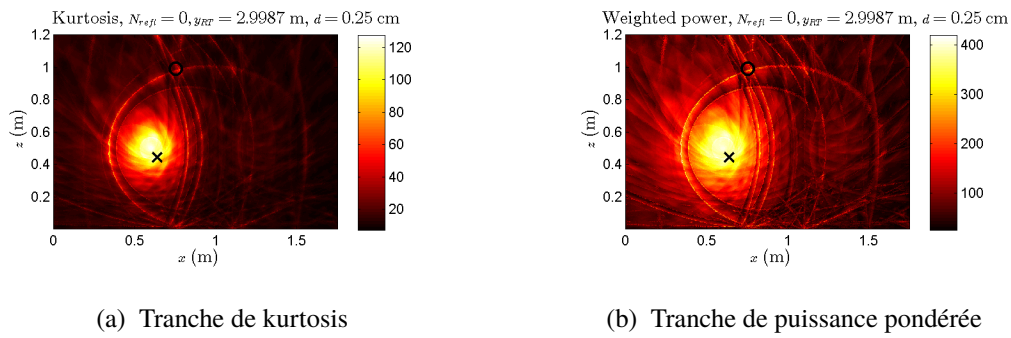


FIGURE 6.4 – Effet des microphones ( $\times$ ) sur les tranches expérimentales de kurtosis et de pression pondérée ( $\circ$  : position de la source) dans une configuration défavorable (n° 2)

d'expériences de laboratoire où la source supersonique était synthétisée au moyen d'une ligne de haut-parleurs. Dans le cas d'expériences de terrain, la présence des microphones est fortement présente sur les tranches de kurtosis, comme le montre la figure (6.4a). Autour du micro le kurtosis prend des valeurs proches de 120, alors que le pic de focalisation a un kurtosis deux fois moins élevé (autour de 50). Il convient d'étudier, parmi les 9 configurations testées expérimentalement, lesquelles pourraient être meilleurs candidats à une interpolation permettant de retrouver l'axe du tir. Il apparaît que c'est la configuration n° 6, présentant deux lignes de micros perpendiculaires aux parois et espacées d'environ 3 m l'une de l'autre, qui offre le plus avantageusement cette possibilité. L'alignement des microphones conduit à ce que, dans des tranches verticales environnantes, la multiplicité des divergences du champ de pression dues aux termes sources conduise à une multiplicité de pics dans les signaux de pression voisins des microphones, diminuant ainsi le kurtosis là où la pression diverge, comme nous avons déjà pu le voir dans la section (5.2.1). Bien que cela ne soit pas suffisant pour diminuer le kurtosis dans le très proche voisinage des positions de microphones, cela permet, si l'on considère une tranche de cake commençant au-dessus de la zone de microphones — ceux-ci étant situés à  $z = 50$  cm, il est possible de commencer la tranche à  $z = 60$  cm —, de visualiser la tache de focalisation, comme c'était le cas au chapitre 5 avec la ligne de haut-parleurs et les 44 microphones, et comme cela est fait en figure (6.5). Ainsi il est possible, dans la configuration 6, et seulement dans celle-ci parmi les 9 que nous avons testées, d'effectuer une interpolation par deux points passant chacun au-dessus des deux zones de microphones, pour estimer l'axe.

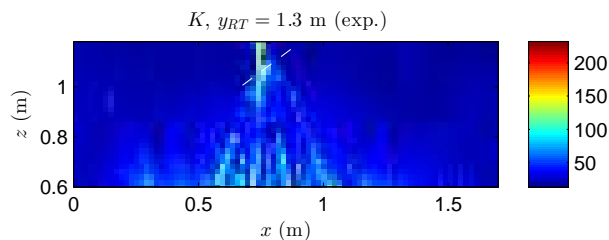
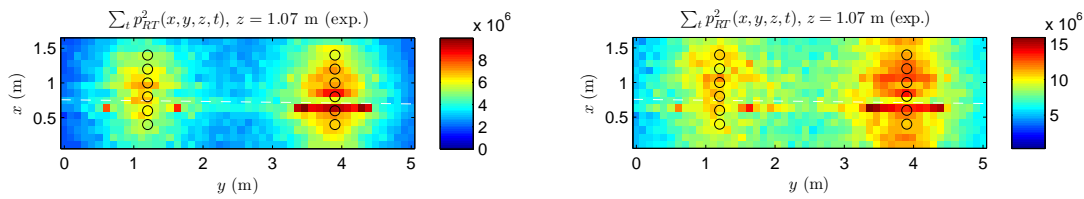


FIGURE 6.5 – Kurtosis dans une tranche verticale au-dessus d'une ligne de microphone dans une configuration favorable (n° 6) ; les traits blancs montrent la projection de l'axe du cône de Mach dans le plan  $(x, z)$ .

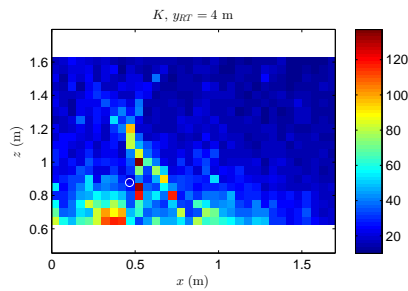


(a)  $m = 0$  (signaux de mesure non tronqués)      (b)  $m = \{-2, \dots, 2\}$  (signaux de mesure non tronqués)

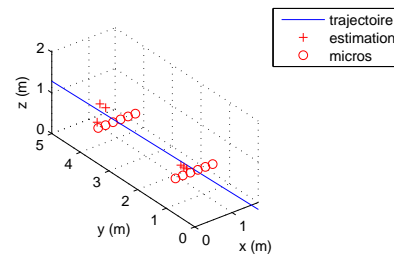
FIGURE 6.6 – Effet de l’ajout de réverbération lors de la rétro-propagation par retournement temporel dans une tranche horizontale contenant l’axe du tir (données expérimentales de tir à balle réelle, config. 6, tir 1)

#### 6.2.4. EFFET DE LA RÉVERBÉRATION

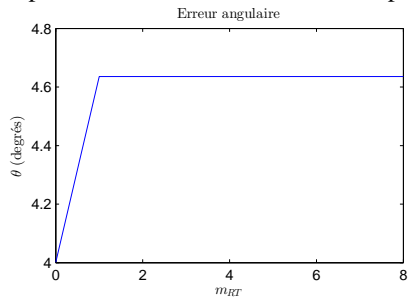
Comme nous l’avons exposé au chapitre 3, la réflexion d’un front d’onde conique en déplacement supersonique sur des parois de taille finie n’est pas un phénomène intuitif, même dans l’approximation géométrique qui permet pourtant de modéliser précisément les temps d’arrivée. La source sphérique équivalente, sur l’axe de déplacement, se trouve de plus en plus en amont au fur et à mesure qu’augmente l’ordre de réflexion ; ainsi l’ordre des réflexions est nécessairement limité :  $m = 6$  semble être un majorant très acceptable concernant les résultats du présent chapitre. La principale difficulté dans le traitement du problème inverse en présence de réverbération réside dans la différence de géométrie des fronts d’onde entre le problème direct et le problème inverse : le front d’onde direct a la forme d’un cône en déplacement supersonique, tandis que le problème inverse compte sur le principe de Huygens (effet fondamentalement ondulatoire s’il en est) de reconstruction approximative du champ rétro-propagé par superposition des fronts d’onde sphérique issus des positions des microphones. Or, ceux-ci étant situés à l’intérieur de l’environnement réverbérant, leur nombre de sources images n’est physiquement pas limité — du moins pas d’un point de vue strictement géométrique. Une considération « standard » du retournement temporel consisterait à dire : la présence de réverbération améliore la reconstruction du champ car elle augmente virtuellement le nombre de microphones. Ceci est généralement vrai, mais nous nous trouvons dans une situation délicate : si l’on augmente la réverbération lors de la rétro-propagation (en augmentant le nombre de sources images) on s’expose à introduire dans le milieu réverbérant autant de signaux directs issus de ces sources images ne participant pas à la focalisation ; et quand bien même leur amplitude serait atténuée par la longueur du chemin acoustique virtuel, ils n’en demeurent pas moins des artefacts indésirables. Voir en illustration la figure (6.6) où l’insertion de sources images diminue le rapport signal à bruit, et la figure (6.7) montrant que la localisation est possible par interpolation dans des tranches de cake, mais que la prise en compte des réflexions lors de la rétro-propagation ne diminue pas l’erreur d’estimation de l’axe. Ce qu’il conviendrait alors de faire serait de ne tenir compte que des ordres de réflexion existant physiquement dans chaque signal de mesure, et de fenêtrer adéquatement les signaux des sources images, selon la méthode d’encadrement du temps de vol des sources images que nous avons présentée au paragraphe (3.3.2). Outre qu’une telle méthode souffre des incertitudes déjà discutées, liées à la largeur des bornes d’intégration, elle repose sur une propriété que nous n’avons démontrée que dans le cas d’une source statique. Ainsi, bien que nous ayons envisagé différents moyens de prendre en compte la réverbération pour améliorer la focalisation par retournement temporel d’une source supersonique en milieu réverbérant, nous ne sommes pas parvenus à mettre en place une méthode robuste et efficace fonctionnant sur des tirs à balles réelles, c’est-à-dire avec une géométrie s’étendant par-delà les limites de l’environnement



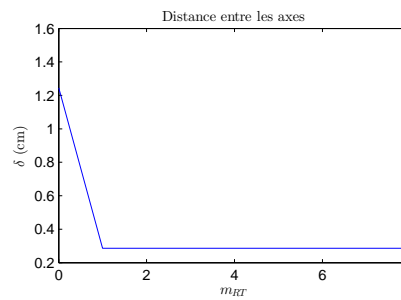
(a) Exemple de tranche verticale de kurtosis pour  $m = 8$



(b) Configuration géométrique



(c) Erreur angulaire en fonction du nombre de réflexions



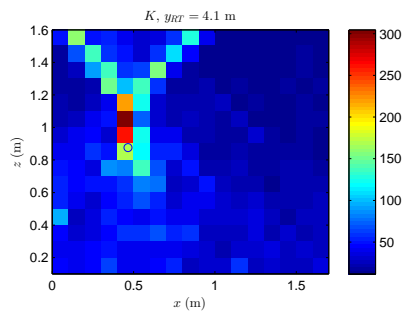
(d) Distance entre les axes en fonction du nombre de réflexions

FIGURE 6.7 – Localisation de l’axe du cône de Mach par retournement temporel dans 6 tranches de cake pour la configuration n° 6, tir n° 2

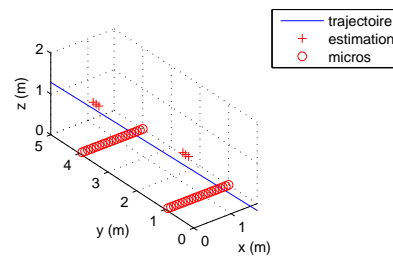
réverbérant. En construisant la théorie géométrique de la réverbération, nous sommes cependant parvenus à modéliser correctement la physique du problème direct, qui, dans la configuration du présent chapitre, relève plus de la géométrie que de la physique des ondes. Ces considérations géométriques nécessitent une délicatesse toute particulière lorsque l’on s’intéresse au problème inverse, que l’on tente de résoudre par la technique ondulatoire du retournement temporel.

### 6.3. SIMULATION NUMÉRIQUE NON LINÉAIRE DU PROBLÈME DIRECT

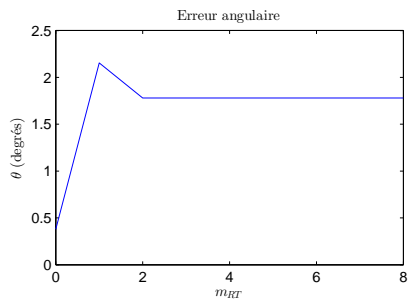
Pour aller plus loin, nous proposons de modéliser le problème direct par des simulations numériques tenant compte à la fois des aspects géométriques de la réverbération du cône de Mach sur les parois finies, tel que cela a été exposé au chapitre 3, ainsi que du comportement non linéaire de la décroissance de l’amplitude et du support de la signature acoustique, tel que le prédit la théorie asymptotique de Whitham présentée au chapitre 1. Il est alors possible d’appliquer la méthode d’interpolation présentée au chapitre 5, comme on peut le voir en figure (6.8). Pour la configuration des microphones nous nous inspirons de la configuration n° 6 en augmentant le nombre de microphones de 12 à 44 et en les mettant à  $z = 0$ . On constate que l’interpolation est possible dans ce cas avec une précision correcte. L’estimation est plus précise que dans le cas expérimental de la figure (6.7) à 12 microphones. On constate également que la prise en compte de la réverbération améliore la précision de l’estimation de l’axe n’a pas d’influence significative sur la précision de la localisation.



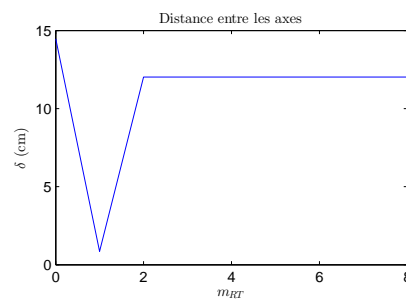
(a) Exemple de tranche verticale de kurtosis pour  $m_{RT} = 8$



(b) Configuration géométrique



(c) Erreur angulaire en fonction du nombre de ré-



(d) Distance entre les axes en fonction du nombre de réflexions

FIGURE 6.8 – Localisation de l'axe du cône de Mach par retournement temporel avec simulation non linéaire du problème direct par la théorie de Whitham ( $F_s = 44,1$  kHz)

## CHAPITRE 7

# UTILISATION DE LA TRANSFORMÉE DE LORENTZ

Faites la ligne et jamais le point ! La vitesse transforme le point en ligne ! Soyez rapide, même sur place !

---

Deleuze et Gattari, *Mille plateaux*

La forme Une immobile étant déployée par le sujet sachant autour de ce qui est présent-là, le matériau plongé de l'extérieur dans cet élément en repos, voilà qui est aussi peu l'accomplissement de ce qui se trouve exigé, savoir la richesse jaillissant de soi des figures et leurs différences se déterminant elles-mêmes, que [le seraient] des lubies arbitraires concernant le contenu.

---

Hegel, *Phénoménologie de l'esprit*

**S**UR la figure (7.1), on peut observer la distorsion spatio-temporelle causée par le déplacement d'une source sur l'équivalent acoustique du cône de lumière, qui se construit en considérant les surfaces isophases lors de la propagation du signal source. On retrouve la figure (1.1) en regardant les cônes de lumière en écrasant les fronts d'onde dans le plan  $(x, r)$ . Dans le cas supersonique, cette transformation donne lieu à une discontinuité. On explique alors le cône de Mach comme une discontinuité au sein de notre conception galiléenne de la stratification temporelle de l'espace. Dans ce chapitre, on présente un formalisme plus adapté à l'étude du signal créé par une source supersonique en partant d'une analogie avec les principes de la relativité restreinte, notamment en ce qui concerne les potentiels de Liénard-Wiechert. Bien que cela nécessite de

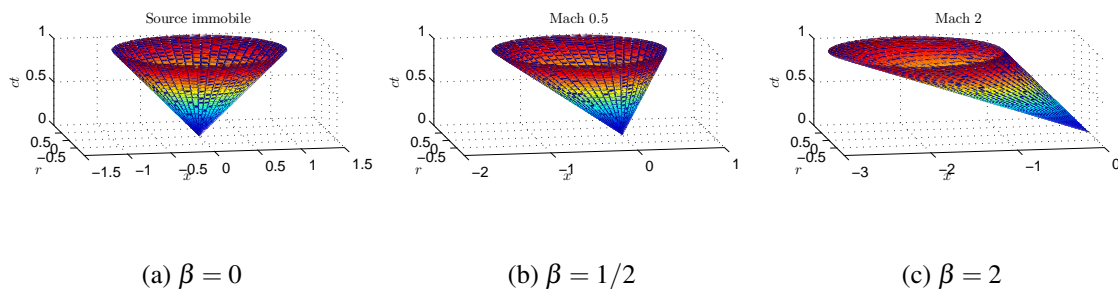


FIGURE 7.1 – Influence des changements de repères galiléens sur le « cône de lumière » des fronts d'onde d'une source acoustique en mouvement



prendre quelques précautions, il est tout à fait possible de traiter selon le formalisme relativiste de Lorentz des phénomènes dans lesquels les équations de Maxwell n'apparaissent pas et qui ne sont pas relativistes au sens de la relativité traditionnelle, mais qui sont invariants par changement de repère lors d'application de la transformation de Lorentz, comme c'est le cas pour la propagation d'ondes acoustiques dans un champ matériel. On peut consulter le cours de Landau et Lifchitz [Landau et Lifchitz, 1970] pour plus d'informations sur le champ relativiste électromagnétique, sans pour autant qu'une formalisation abstraite des principes relativistes d'une théorie mathématique des champs n'y soit proposée. Les potentiels retardés en électromagnétique supraluminique (formellement équivalente à l'acoustique supersonique) sont étudiés par exemple dans [Ardavan *et al.*, 2008] pour des charges supraluminiques en rotation. Une étude historico-philosophique de l'influence des conceptions de Mach sur la pensée d'Einstein est menée dans [Sterrett, 1998]. Cependant, dans sa formulation physico-mathématique l'article fondateur de Henri Poincaré [Poincaré, 1906] demeure la référence historique incontournable de l'étude du rayonnement de sources électromagnétiques par le formalisme de Lorentz à travers l'exemple de l'électron.

## 7.1. INVARIANCE DE LORENTZ DE L'ÉQUATION D'ONDE

### 7.1.1. CAS SUBSONIQUE

D'une façon tout à fait générale, il est expliqué dans [Morse et Feshbach, 1953, p. 98] que l'équation d'onde, ou l'équation de D'Alembert, qui est « l'équation d'onde pour des ondes se propageant à la vitesse de la lumière,  $c$ , » possède la propriété mathématique d'être un invariant de Lorentz. L'équation de D'Alembert est également l'équation régissant la propagation des sources acoustiques lorsque l'on tient compte de la finitude de la vitesse du son : elle est donc également un invariant de Lorentz en prenant pour vitesse de propagation  $c$  la vitesse du son, c'est-à-dire la vitesse de propagation de l'information du champ considéré. L'opérateur d'alembertien dans un repère  $(x, y, z, t)$  s'exprime :

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (7.1)$$

On considère un second repère  $(x', y', z', t')$  en déplacement uniforme à la vitesse  $v$  selon  $x$  par rapport au premier, auquel il est relié par une transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} x' = \gamma_{sub}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma_{sub} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \gamma_{sub}(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma_{sub} \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \end{cases} \quad (7.2)$$

qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{sub} & -\beta\gamma_{sub} & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_{sub} & \gamma_{sub} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{sub} & \beta\gamma_{sub} & 0 & 0 \\ \beta\gamma_{sub} & \gamma_{sub} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

où la matrice de passage est de déterminant égal à 1. Dans le second repère, le d'alembertien

s'exprime

$$\square' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y'^2}}_{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial z'^2}}_{\frac{\partial^2}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \quad (7.4)$$

On a, en outre, d'une part :

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.5)$$

$$= \gamma_{sub} \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{sub} \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.6)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \gamma_{sub}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \gamma_{sub} \frac{v}{c^2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma_{sub}^2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \quad (7.7)$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.8)$$

$$= \gamma_{sub} v \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{sub} \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.9)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = (\gamma_{sub} v)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{sub}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma_{sub}^2 v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \quad (7.10)$$

de telle sorte que

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \underbrace{\gamma_{sub}^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{\gamma_{sub}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\gamma_{sub}^2}{c^2} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}_{-\gamma_{sub}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (7.11)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (7.12)$$

On démontre ainsi l'égalité au sens strict des expressions de  $\square$  et  $\square'$  dans les deux repères.

$$\square' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (7.13)$$

L'invariance de l'opérateur d'alembertien sous un changement de coordonnées lorentzien signifie que si un champ  $\phi$  est solution de l'équation d'onde  $\square\phi$  dans le repère  $(x, y, z, t)$  alors il est solution de la même équation dans le repère  $(x', y', z', t')$ . Si l'on sait résoudre l'équation  $\square\phi = 0$  dans un repère, alors on sait la résoudre dans tous les repères en translation rectiligne uniforme en faisant un changement de coordonnées lorentzien. Il est alors possible de considérer la classe d'équivalence des repères invariants par transformation de Lorentz d'une façon analogue à celle selon laquelle tous les repères reliés entre eux par un changement de coordonnées galiléen laissent invariante l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$ . Cependant, cette dernière est physiquement inexacte car elle suppose une propagation instantanée de l'information, c'est-à-dire une célérité  $c$  infinie.

On peut démontrer que l'équation d'onde est invariante par retournement temporel dans les deux repères lorsque les coordonnées sont reliées entre elles par une transformation de Lorentz, alors que ce n'est pas le cas en considérant un changement de coordonnées galiléen :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (7.14)$$

Si l'on mène la même analyse que plus haut, on trouve :

$$\square' = \frac{1}{\gamma_{sub}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}. \quad (7.15)$$

On constate alors non seulement la présence d'un terme  $\gamma_{sub}^{-2}$  devant la dérivée seconde en  $x$ , mais également la présence d'un terme croisé qui ne se simplifie pas comme dans le traitement lorentzien. Ce terme croisé contient une dérivée temporelle d'ordre impair, ce qui fait que le noyau de l'opérateur (7.15) n'est pas invariant par retournement temporel. Pour trouver son invariant à partir de sa fonction de Green  $G$  (que nous ne nous amuserons pas à calculer ici) il faut également effectuer une inversion des variables spatiales en vertu de la relation (1.1).

### 7.1.2. CAS SUPERSONIQUE

Dans le cas d'un déplacement supersonique, il est possible d'obtenir exactement les mêmes résultats d'invariance de Lorentz de l'opérateur d'alembertien qu'au paragraphe précédent en considérant le changement de coordonnées

$$\begin{cases} x' = \gamma_{sup}(\beta x - ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma_{sup}(\beta t - \frac{x}{c}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\gamma_{sup}(\beta x' + ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = -\gamma_{sup}(\beta t' + \frac{x'}{c}) \end{cases} \quad (7.16)$$

avec  $\gamma_{sup} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$ . On peut écrire le changement de coordonnées sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{sup}\beta & -\gamma_{sup} & 0 & 0 \\ -\gamma_{sup} & \gamma_{sup}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_{sup}\beta & -\gamma_{sup} & 0 & 0 \\ -\gamma_{sup} & -\gamma_{sup}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

où la matrice de passage est de déterminant égal à 1. La différence entre la transformée de Lorentz subsonique (7.3) et la transformée supersonique (7.17) est que, dans la seconde, on effectue en quelque sorte une substitution entre  $x$  et  $t$  ; c'est cette même substitution qui est remarquée par Whitham dans son traitement de « l'équation des ondes supersoniques » pour un écoulement stationnaire, comme nous l'avons reporté dans l'équation (1.28) où «  $x$  joue le rôle du temps ». Si l'on considère le changement galiléen (7.14) on constate que le d'alembertien s'exprime

$$\square' = -\gamma_{sup}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \quad (7.18)$$

et l'on constate bien que le passage à l'équation (1.28) avec une analogie temps-espace ne peut se faire correctement que sous l'hypothèse que l'écoulement est parfaitement stationnaire,

autrement dit que les dérivées temporelles s'annulent. Dans un cas général, l'interversion du temps et de l'espace ne redonne pas une équation d'onde. La seule manière de retomber sur une équation de D'Alembert est de corriger le changement de variables pour en faire une transformée de Lorentz.

### 7.1.3. INTÉRÊT DE LA TRANSFORMÉE DE LORENTZ

La transformée de Lorentz donne un cadre mathématique plus confortable et plus général que le changement de repère galiléen de Whitham car elle exhibe les repères invariants de l'équation de D'Alembert, équation fondamentale pour l'étude des sources en mouvement, notamment, en ce qui nous concerne, en raison de son invariance par retournement temporel. En particulier, la transformation de Lorentz laisse invariant le cône de Minkowski  $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ . Cela signifie qu'elle laisse invariante la propagation de fronts d'onde sphériques : une onde sphérique dans le repère comobile est toujours une onde sphérique dans le repère d'observation si l'on fait une transformation de Lorentz. Ainsi, l'application de la transformation de Lorentz supersonique fait « disparaître » le cône de Mach en l'incorporant dans la structure même du changement de variables.

## 7.2. APPLICATION AU RETOURNEMENT TEMPOREL

Nous avons établi à l'équation (7.13) que l'opérateur d'alembertien est un opérateur différentiel invariant par transformation de Lorentz :

$$\mathcal{L}\square = \square \quad (7.19)$$

Par ailleurs il est un résultat classiquement établi en théorie du champ que ce même opérateur d'alembertien est invariant par retournement temporel :

$$\mathcal{T}\square = \square \quad (7.20)$$

Ces deux propriétés permettent de démontrer le théorème suivant :

### **Théorème 7.2.1**

*Du point de vue d'un système de coordonnées cartésien orthonormé, les actions respectives de la transformée de Lorentz  $\mathcal{L}$  et de l'opérateur de retournement temporel  $\mathcal{T}$  sur l'opérateur d'alembertien  $\square$  commutent et le laissent invariant dans son action d'opérateur différentiel :*

$$\mathcal{T}\mathcal{L}\square = \mathcal{L}\mathcal{T}\square = \square \quad (7.21)$$

*et ce, aussi bien dans le cas de repères en déplacement relatifs à une vitesse subsonique qu'à une vitesse supersonique. En particulier, la propagation d'une onde à symétrie sphérique dans un repère comobile est toujours à symétrie sphérique par transformation de Lorentz. Le retournement temporel d'une source en mouvement rectiligne uniforme par rapport au repère d'observation conduit à la focalisation du champ rétro-propagé sur la position mobile de la source dans le repère d'observation ou bien, de manière équivalente, à la focalisation statique de la source dans son propre repère comobile. En théorie de l'électromagnétisme, ces propriétés sont vraies par analogie entre les équations d'onde sur les potentiels scalaires acoustique et électrique, pour des changements de repères indifféremment subluminiques ou supraluminiques.*

Une conséquence principale de ce théorème est la focalisation d'un signal supersonique rétro-propagé par retournement temporel. Dans ce qui suit nous allons mener une expérience de pensée que nous illustrerons par les simulations numériques correspondantes. On considère une ligne de haut-parleurs qui émet un signal supersonique par synthèse de fronts d'onde, comme nous

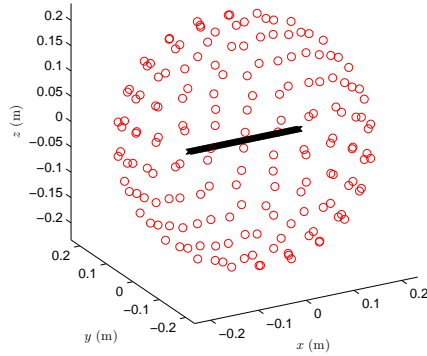
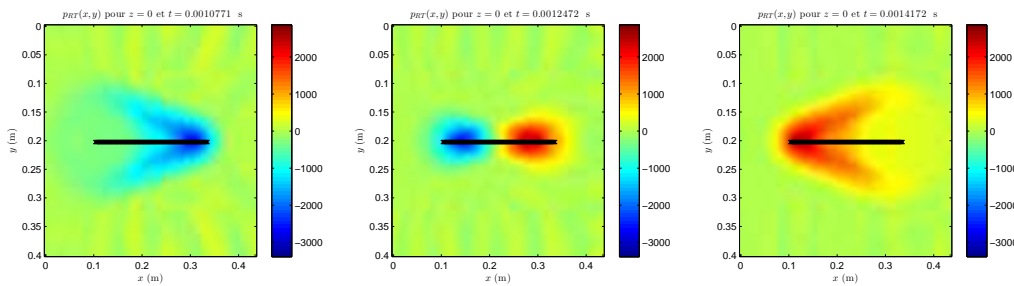


FIGURE 7.2 – Position des sources (×) et des 170 points de mesure sur la sphère de Lebedev (○)

l'avons décrite au chapitre 2. Pour les simulations numériques nous avons pris  $F_s = 882$  kHz,  $v = 1030$  m·s<sup>-1</sup>,  $c = 340$  m·s<sup>-1</sup>, une distance inter-source de  $\Delta x = v/F_s = 1,2$  mm, et une ligne de 200 haut-parleurs alignés selon  $x$ . L'onde conique se propage en champ libre jusqu'à être mesurée par des microphones virtuels situés sur une sphère de Lebedev<sup>1</sup> à 170 points représentée en figure (7.2).



(a) Arrivée du cône sur la ligne de sources (b) Déplacement du cône selon  $-x$  (c) Sortie du cône de la ligne de sources

FIGURE 7.3 – Différents instants de la focalisation du cône sur la ligne de sources (champ de pression, u.a.)

On rétro-propage ensuite, par retournement temporel, les signaux de mesure jusque dans une portion de plan horizontal située à l'intérieur de la sphère, à  $z = 0$ , constituée de  $87 \times 80$  points selon  $(x, y)$ , régulièrement espacés de  $d = 5$  mm, ce qui nous permet d'afficher des images du champ rétro-propagé, ainsi que d'exporter des vidéos qu'il est malheureusement impossible de représenter ici. De manière tout à fait classique, le champ rétro-propagé a la forme d'un cône causal-anticausal se propageant selon  $-x$ , comme on peut le voir en figure (7.3).

Si l'on effectue la transformation de Lorentz du champ rétro-propagé, on devrait observer la focalisation du signal sur une tâche (qui, théoriquement, est réduite à un point) à un instant donné. L'implémentation de la transformation de Lorentz d'un champ spatio-temporel échantillonné  $p(n_x, n_y, n_z, n_t)$  requiert quelque délicatesse. Pour simplifier nous dirons que si l'on considère les signaux échantillonnés à la même fréquence  $F$  et au même nombre d'onde  $K = 1/d$ , le changement

1. La sphère de Lebedev minimise l'erreur de reconstruction du champ décomposé sur la base des harmoniques sphériques, voir par exemple la thèse de notre collègue [Lobréau, 2015].

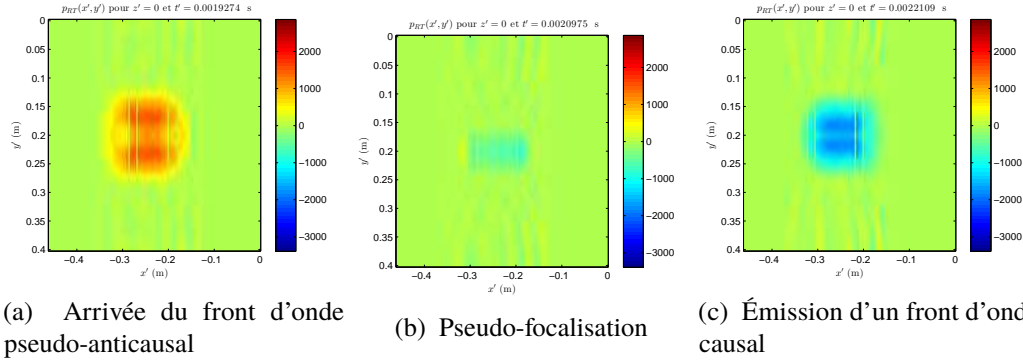


FIGURE 7.4 – Différents instants de la focalisation du « cône de Mach » après transformation de Lorentz

d'indice à effectuer sur  $n_x$  et  $n_t$  est de la forme :

$$\begin{cases} n'_x = \frac{\gamma}{F} (\beta F n_x - c K n_t) \\ n'_t = \frac{\gamma}{K} \left( \beta K n_t - \frac{F n_x}{c} \right) \end{cases} \quad (7.22)$$

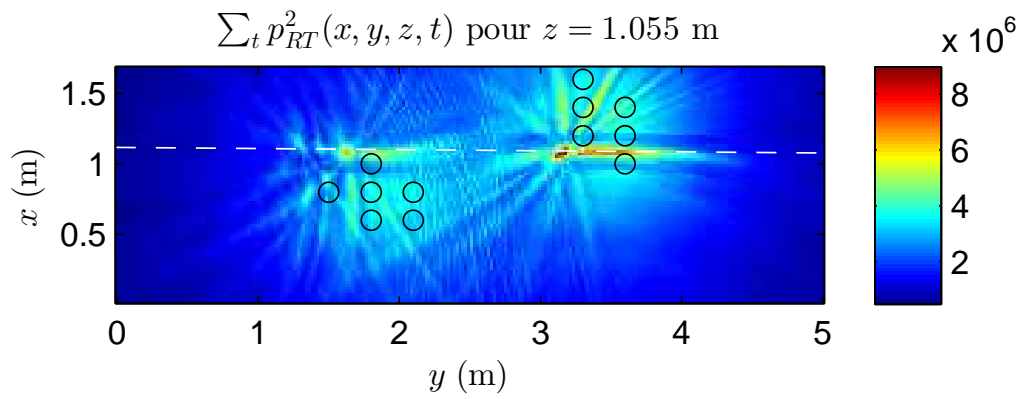
où l'on doit prendre des valeurs entières, ce qui conduit à des imprécisions supplémentaires. On observe sur la figure (7.4) que la transformation de Lorentz échantillonnée sur le cône de Mach renversé dans le temps conduit à la focalisation d'un signal sur une tache qui présente un certain étalement spatial mais qui ne se déplace pas dans le nouveau repère. Ainsi on réduit la focalisation dynamique à une focalisation statique grâce à la transformation de Lorentz.

Sur la figure (7.5) on peut voir l'effet de la transformée de Lorentz selon  $y$  sur des données expérimentales du chapitre (6) : on observe que « la ligne se transforme en point ». Cet effet n'est pas visible sur toutes les configurations, et ce pour deux raisons principales. Tout d'abord, compte tenu du nombre restreint de microphones, l'agencement spatio-temporel des données n'autorise pas une bonne résolution : le champ de Lorentz contient beaucoup de zéros par manque de données, il est « parcimonieux ». Deuxièmement, en raison du caractère indéterminé de la trajectoire du projectile, nous ne connaissons ni la vitesse ni la direction avec précision, ainsi le changement de repère n'est qu'approximatif. On peut néanmoins voir là une validation expérimentale des arguments théoriques énoncés dans le présent chapitre sur l'invariance de Lorentz du champ acoustique produit par une source supersonique en déplacement. Cela ouvre des perspectives à la fois théoriques et expérimentales sur le retournement temporel de sources en mouvement, par exemple en mettant en place une technique permettant de trouver la transformation de Lorentz optimale au sens de la focalisation, dont les paramètres donneraient la trajectoire de la source.

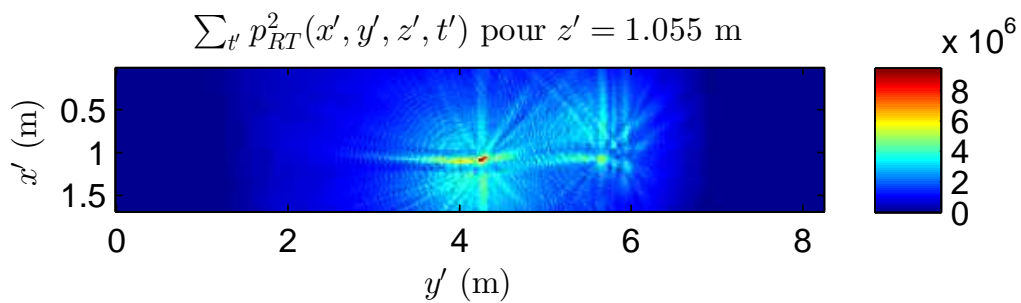
### 7.3. RÉSUMÉ DES PROPRIÉTÉS ET OUVERTURE

Nous avons justifié la pertinence de l'utilisation de la transformée de Lorentz pour traiter des problèmes ondulatoires en acoustique. Les propriétés suivantes résument l'ensemble des travaux exposés dans le présent chapitre.

- Le formalisme de la transformation de Lorentz ne peut être appliqué que dans le cadre de l'approximation linéaire de la propagation d'une petite perturbation (cette propriété est d'ailleurs vraie également en électromagnétisme) afin de pouvoir considérer une célérité de propagation de ces petites perturbations. Par ailleurs, il faut considérer que la mesure est effectuée à une distance à l'axe suffisamment lointaine pour que les frottements de l'air



(a) Conf. n° 8, tir n° 3



(b) Conf. n° 8, tir n° 3, transformée de Lorentz

FIGURE 7.5 – Effet de la transformée de Lorentz sur le champ de pression rétropropagé par retournement temporel dans un plan vertical contenant la trajectoire du projectile supersonique pour des données expérimentales de tir à balle réelle

contre le projectile soient négligeables.

- Lors d'une transformation de Lorentz entre deux repères en déplacement relatif supersonique, on remplace  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  par  $\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}$  afin que les temps et les distances soient réels dans les deux repères. On peut alors définir le facteur de Lorentz généralisé  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{|1 - \beta^2|}}$ .
- Toujours dans ce cas, on change le signe de la métrique pour que la notion d'intervalle de genre temps et espace soit cohérente avec les transformations subsoniques.

En guise d'ouverture, nous suggérons bien sûr l'étude de la propagation d'ondes suivant des équations de propagation quasi-linéaire, pour mettre en place une théorie des perturbations dans le contexte de l'acoustique non linéaire, et voir ce qui en ressort au niveau de l'hypothèse d'invariance de Lorentz de la célérité. En particulier, comme nous avons vu que Whitham mène toute son étude en considérant des changements de repères galiléens et en considérant une « célérité locale »  $c$  comme la perturbation d'une « célérité au repos »  $c_0$ . Nous nous demandons alors s'il est possible de reprendre l'étude en cherchant les bases locales laissant invariante la célérité. Cela implique alors d'étendre l'analogie à la relativité générale en considérant les grandeurs physiques comme des variétés pseudo-riemanniennes qui se courbent sous l'action des masses.



# CONCLUSION

Abandonner l'étude c'est se délivrer  
des soucis.

Car en quoi diffèrent

oui et non ?

En quoi diffèrent

bien et mal ?

On doit redouter cette étude que les  
hommes redoutent,

Car toute étude est interminable.

---

Lao Tseu, *Tao Tö King*

**N**OTRE thèse était de démontrer la possibilité de localiser une source acoustique supersonique en milieu réverbérant au moyen d'un ensemble de microphones, en utilisant le retournement temporel dans une modélisation numérique de l'environnement. Nous avons mené l'étude sur le cas simple d'un environnement en forme de rue rectiligne : deux murs parallèles et un sol que nous avons supposé parfaitement réfléchissants. Déjà, ce cas simple a soulevé bon nombre de difficultés.

En ce qui concerne la résolution du problème inverse, nous avons montré que le retournement temporel permet de localiser la trajectoire d'un projectile supersonique à partir d'un nombre restreint de mesures du cône de Mach. Les expériences de laboratoire où le cône de Mach de vitesse Mach 3 est synthétisé par une ligne de haut-parleurs ont été fructueuses pour 44 microphones. Dans ce cas la prise en compte de la réverbération s'est avérée non nécessaire à la localisation des taches focales, ainsi que l'usage d'un critère de kurtosis spatio-temporel pour pallier le faible rapport signal à bruit. Lors de mesures expérimentales où le cône de Mach était généré par une balle de fusil à Mach 2,3 la localisation a été possible mais des différences sont à expliciter entre les deux méthodes. Dans le cas d'un vrai cône de Mach, la signature acoustique est beaucoup plus courte que celle de la synthèse par haut-parleurs, qui est d'autant plus distordue que les conditions d'échantillonnage spatio-temporel sont défavorables. Ainsi dans le cas réel il est possible de tronquer avec précision le signal direct et effectuer la rétro-propagation en champ libre, ce qui n'est pas possible en laboratoire. Cependant, en laboratoire, l'intégralité des haut-parleurs étant situés dans le milieu réverbérant, la prise en compte de la réverbération améliore la résolution, selon les résultats classiques du retournement temporel. En revanche, dans le cas du tir à balles réelles, la trajectoire provient de bien au-dehors du milieu réverbérant, où sont situés les microphones. Si le retournement temporel à 12 microphones autorise la focalisation au niveau de la trajectoire de la source, en revanche il peine à reproduire avec précision le front d'onde conique. Si la prise en compte de la réverbération augmente l'amplitude du pic de focalisation, elle rajoute en contrepartie dans le milieu des artefacts dus principalement à la réémission des signaux directs par les sources images. Ces raisons permettent d'expliquer du moins en partie pourquoi nous n'observons pas d'amélioration significative de la focalisation lors de la prise en compte de la réverbération. La notion de source image, qui contribue classiquement au retournement temporel, mène ici à des positions de source équivalentes sur l'axe qui sont de plus en plus en amont de la trajectoire, au point qu'elles se retrouvent hors de l'espace réverbérant. Ainsi l'ordre des réflexions physiquement présentes dans les signaux de mesure est nécessairement limité par la géométrie du problème, et la prise en compte de la réverbération lors de la rétro-propagation à une efficacité limitée en proportion. Faute d'une densité de capteurs importante dans une direction à peu près perpendiculaire à l'axe, permettant une focalisation des signaux directs et des quelques réflexions présentes avec un bon rapport signal à bruit, la localisation de la source échoue. Ainsi, dans le cas des mesures de terrain, la disposition des microphones joue un rôle crucial : sur les neuf configurations testées, seule une d'entre elles autorise l'interpolation : celle où les microphones

sont disposés en deux rangées de 6 chacune, perpendiculaires aux parois de la rue. Nous avons proposé, à la fin du chapitre 6, une configuration avec deux rangées de 22 microphones situées de part et d'autre de l'environnement réverbérant. Les simulations numériques du problème inverse ont montré une amélioration de la qualité de la localisation de l'axe.

Une autre difficulté concerne la dynamique de la source, qui se déplace plus vite que l'information. La conception du déplacement supersonique conduisant au cône de Mach s'interprète ainsi en terme de théorie de l'information, dans le sens où le champ de pression est un champ d'information potentiellement mesurable : la célérité des ondes est la vitesse de déplacement de la perturbation du champ de pression autour de sa valeur d'équilibre thermodynamique, dans une gamme d'amplitudes permettant ce que l'on appelle l'approximation acoustique, perturbation qui, se propageant jusqu'aux microphones, fournit des données informationnelles sur une réalité physique causalement antérieure, dont on mesure l'effet selon le biais d'une certaine représentation phénoménologique.<sup>2</sup> Lorsqu'un objet se déplace plus vite que cette célérité, on observe la formation du cône de Mach, qui peut être vu comme une discontinuité spatio-temporelle dans le champ de pression due à une superposition indéfinie de fronts d'onde ne parvenant pas à se propager « dans l'ordre » tout en respectant le principe de causalité. L'ordre causal étant remis en cause, mais demeurant inviolable, il s'ensuit un entassement des fronts d'onde. On en conclut que la formation du choc est une conséquence du principe de causalité. Elle met nécessairement l'étude d'un tel phénomène dans le cadre de la physique non linéaire, car cette superposition indéfinie de fronts d'onde ne trouve pas de sens concret en acoustique linéaire, entendu qu'à partir d'un certain nombre de fronts d'onde superposés « linéairement, » nous nous retrouverons hors du cadre de l'approximation linéaire. Pour ces raisons nous avons commencé à construire un cadre qui permette d'entreprendre l'étude de tels phénomènes, c'est-à-dire un cadre géométrique dans lequel les questions de causalité soient primordiales. Il se trouve qu'un cadre existe déjà en électromagnétisme depuis le début du XX<sup>ème</sup> siècle : il s'agit de la relativité restreinte. Il permet de traiter le cas de sources en mouvement à une vitesse proche de la célérité de l'information électromagnétique communément appelée vitesse de la lumière. Proche, mais cependant pas trop, car le même problème de divergence apparaît, rendant impossible la conceptualisation d'un déplacement de charge à la vitesse de la lumière. Nous avons établi que le traitement des phénomènes ondulatoires dans le cas de sources en mouvement accepte en acoustique un traitement relativiste tout aussi bien qu'en électromagnétisme. Cette piste enrichissante est à explorer, aussi bien pour des applications de toutes sortes que pour une meilleure compréhension des phénomènes acoustiques.

Cette thèse ouvre des perspectives sur la localisation de sources en mouvement par retournement temporel. Nous avons démontré la validité de l'approche à l'aide de simulations numériques mais surtout par des expériences de laboratoire et de terrain, qui viennent corroborer les intuitions théoriques déjà présentes dans la littérature. D'autres protocoles expérimentaux peuvent être mis en place, sur des sources de nature diverses, qu'elles soient en mouvement supersonique ou pas. Par

---

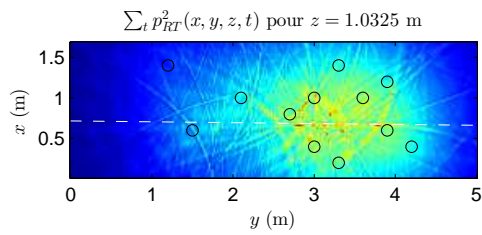
2. Dans notre cas, il s'agit de la représentation que l'on peut se faire du champ de pression, qu'elle soit auditive, visuelle (sur un écran d'ordinateur par exemple) ou encore purement mentale, comme cela doit être le cas pour se représenter la dynamique du cône de Mach. On effectue alors la synthèse d'intuitions dont les fondements empiriques sont de natures diverses, mais qui décrivent la même réalité naturelle. Par exemple, lorsque l'on assiste à un feu d'artifice, on perçoit d'abord l'émission lumineuse de l'explosion avant d'entendre la détonation. Cependant, notre capacité de synthèse intuitive nous permet de saisir la réalité de l'existence d'un phénomène plus général dont les deux manifestations visuelle et auditive ne sont que deux représentations, donc au final deux biais cognitifs. Le but de notre propos n'est pas de trancher sur l'existence des phénomènes au-delà des sens mais de percevoir différentes manières de les analyser. De surcroît, le fait que l'impulsion lumineuse nous parvienne avant la détonation sonore permet d'appréhender le concept de finitude nécessaire des phénomènes physiques. Si le son arrive après, c'est qu'il met plus de temps à se propager. S'il met du temps à se propager, il n'y a pas de raison que la lumière n'en mette pas elle aussi. Ainsi l'intégralité de notre perception est soumise à un concept de causalité très général, qui se manifeste selon différentes « stratifications » ontologiques, c'est-à-dire que notre appréhension de la réalité est soumise à différents types de biais dont aucun n'est absolu.

ailleurs, la disposition des microphones lorsque ceux-ci sont en nombre restreint demeure un critère important à la mise en place d'un dispositif expérimental parcimonieux. Du point de vue théorique, nous avons entrepris l'analyse du retournement temporel dans le cas de phénomènes non linéaires par un élagage qui ne demande qu'à être continué tant sur le plan théorique que sur des validations (ou infirmations) expérimentales.

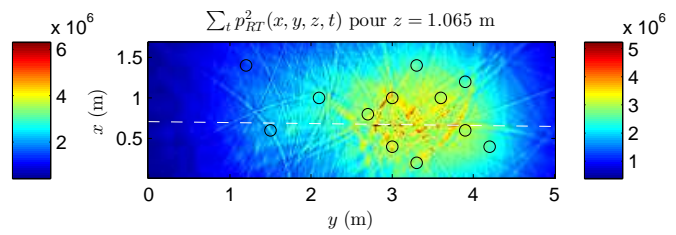
## ANNEXE A

# CARTOGRAPHIE DE LA FOCALISATION PAR RETOURNEMENT TEMPOREL DES 33 MESURES EN CHAMP DE TIR

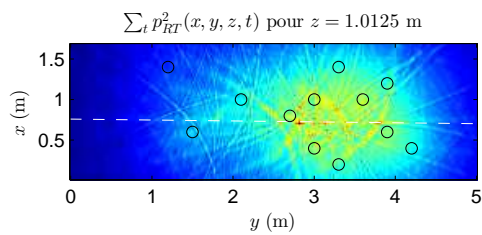
**D**ANS cette annexe, nous présentons les 33 cartographies  $\sum_t p_{RT}^2(x, y, z, t)$  à hauteur du passage de la balle pour chaque mesure de la campagne de Baldersheim. Remarque concernant la réverbération : Dans les signaux de mesure, les réflexions ont été tronquées, de telle sorte que ce n'est que la mesure du signal direct qui est rétropropagée, selon un schéma de propagation en champ libre. Ainsi nous ne tenons pas compte de la réverbération. En effet, nous avons montré que lors du traitement du problème inverse de ces mesures, la prise en compte de la réverbération lors du retournement temporel n'améliorait pas la qualité de la focalisation. Une étude plus poussée doit être entreprise si l'on veut pouvoir en tenir compte.



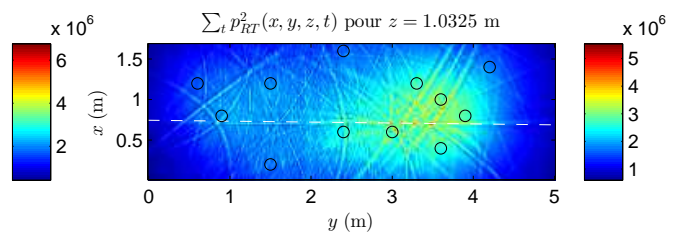
(a) Conf. n° 1, tir n° 1



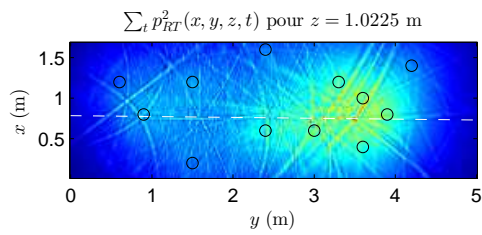
(b) Conf. n° 1, tir n° 2



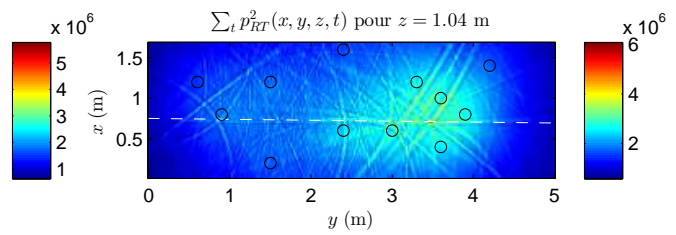
(c) Conf. n° 1, tir n° 3



(d) Conf. n° 2, tir n° 1

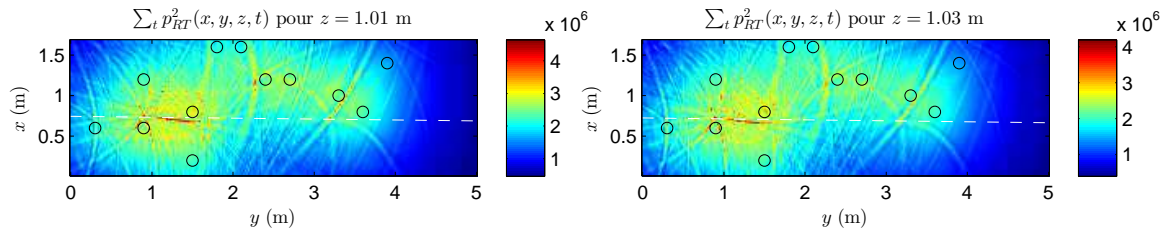


(e) Conf. n° 2, tir n° 2



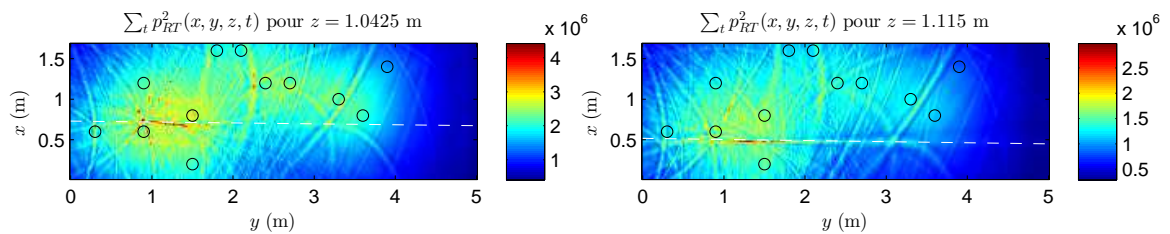
(f) Conf. n° 2, tir n° 3

FIGURE A.1 – Cartographies des configurations n° 1 et 2



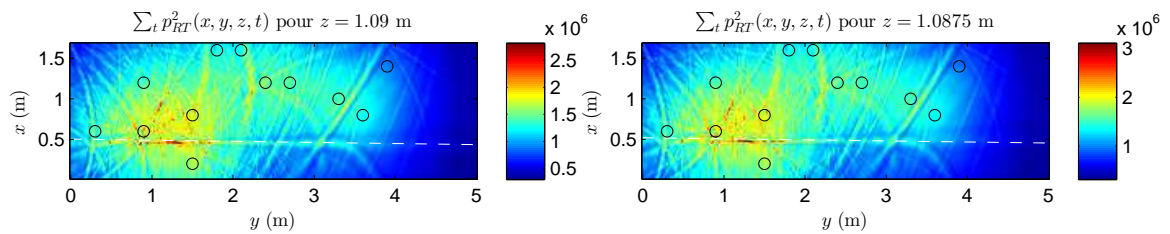
(a) Conf. n° 3, tir n° 1

(b) Conf. n° 3, tir n° 2



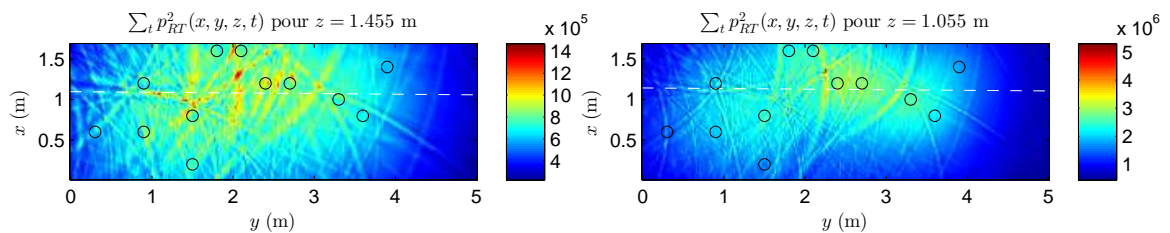
(c) Conf. n° 3, tir n° 3

(d) Conf. n° 3, tir n° 4



(e) Conf. n° 3, tir n° 5

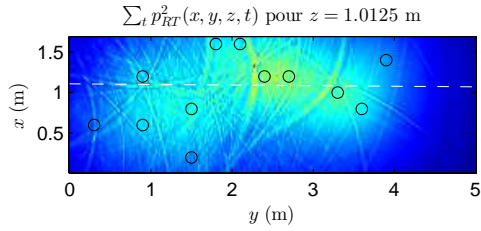
(f) Conf. n° 3, tir n° 6



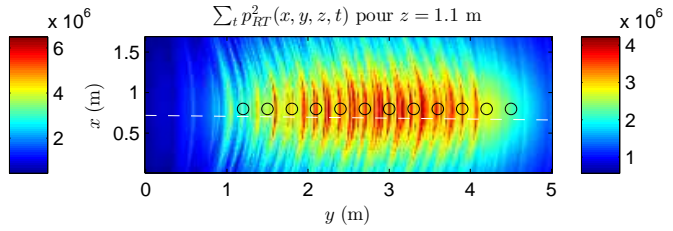
(g) Conf. n° 3, tir n° 7

(h) Conf. n° 3, tir n° 8

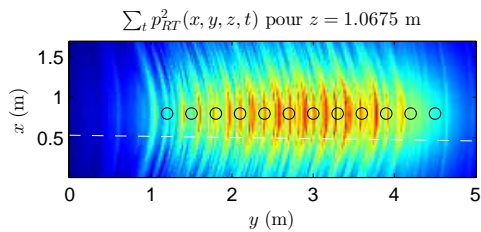
FIGURE A.2 – Cartographies de la configuration n° 3 (début)



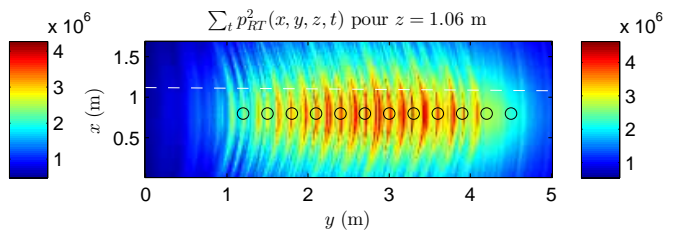
(a) Conf. n° 3, tir n° 9



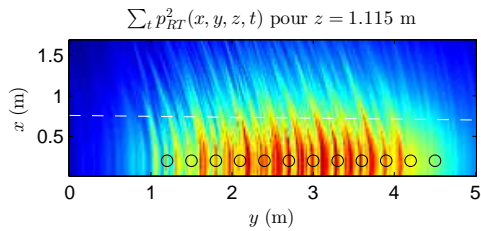
(b) Conf. n° 4, tir n° 1



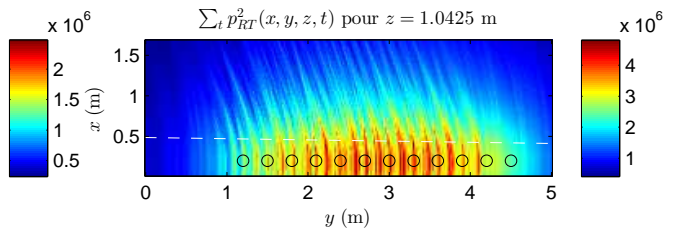
(c) Conf. n° 4, tir n° 2



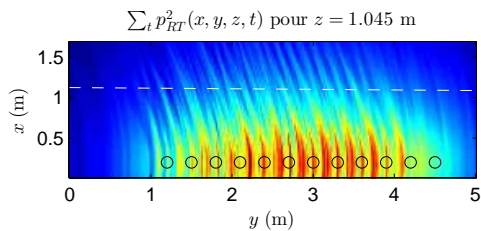
(d) Conf. n° 4, tir n° 3



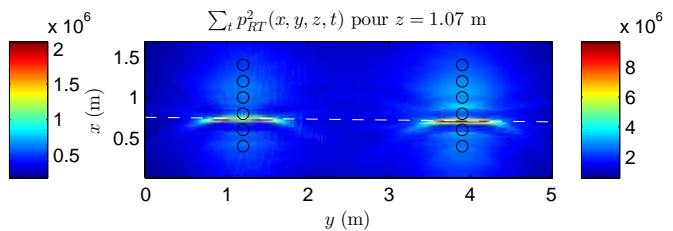
(e) Conf. n° 5, tir n° 1



(f) Conf. n° 5, tir n° 2

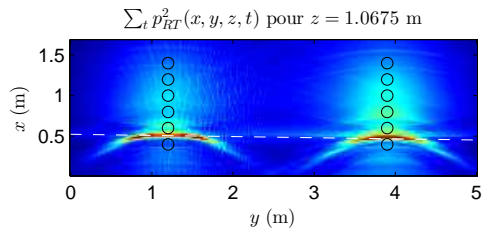


(g) Conf. n° 5, tir n° 3

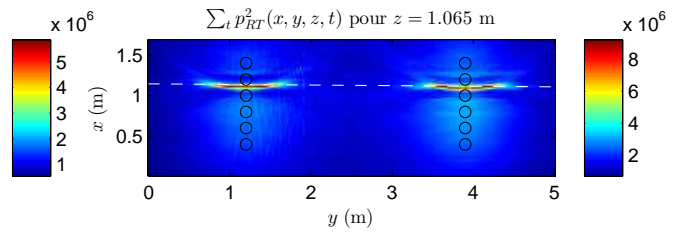


(h) Conf. n° 6, tir n° 1

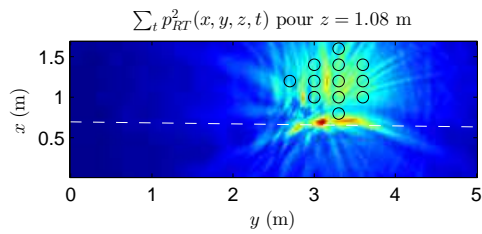
FIGURE A.3 – Cartographies des configurations n° 3 (fin), 4, 5 et 6 (début)



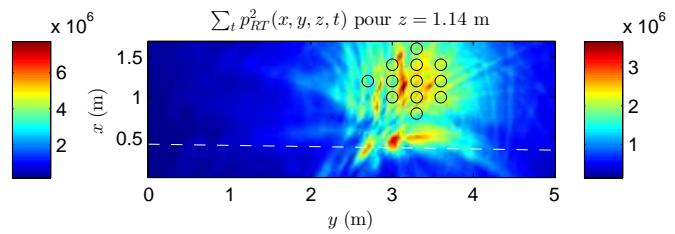
(a) Conf. n° 6, tir n° 2



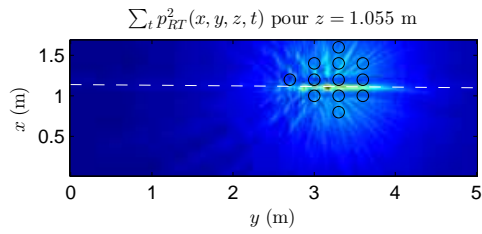
(b) Conf. n° 6, tir n° 3



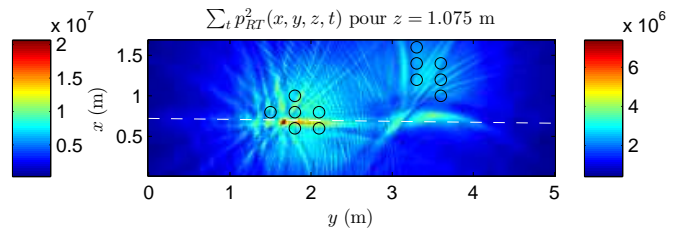
(c) Conf. n° 7, tir n° 1



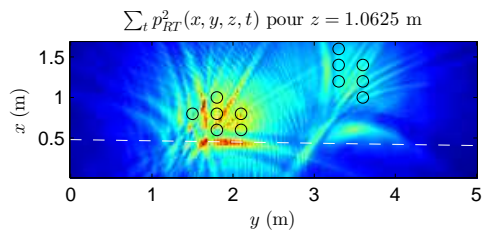
(d) Conf. n° 7, tir n° 2



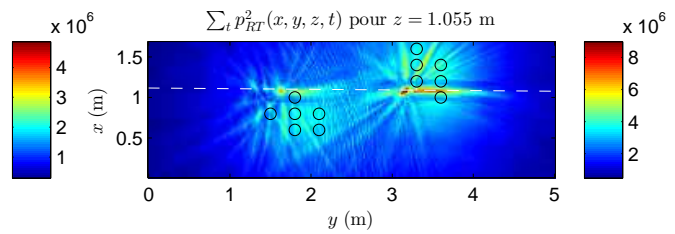
(e) Conf. n° 8, tir n° 3



(f) Conf. n° 8, tir n° 1



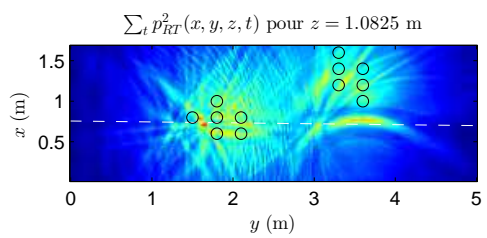
(g) Conf. n° 8, tir n° 2



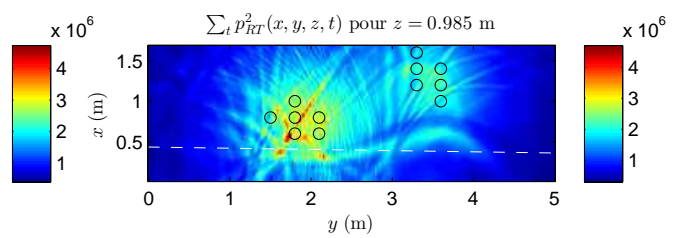
(h) Conf. n° 8, tir n° 3

FIGURE A.4 – Cartographies des configurations n° 6 (fin), 7 et 8

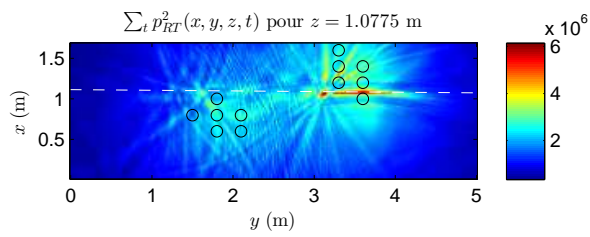




(a) Conf. n° 9, tir n° 1



(b) Conf. n° 9, tir n° 2



(c) Conf. n° 9, tir n° 3

FIGURE A.5 – Cartographies de la configuration n° 9

## ANNEXE B

# VERS LE RETOURNEMENT TEMPOREL NON LINÉAIRE

Dans beaucoup de branches de la Physique, de nombreux phénomènes peuvent être considérés comme régis par des équations linéaires ou du moins très approximativement linéaires dont le maniement est relativement facile. Mais il nous paraît très peu probable que la véritable nature du monde microphysique et, en particulier, la structure des unités (photons ou particules matérielles) qui le composent puissent être représentées par des équations linéaires ou même très faiblement non linéaires.

---

Louis de Broglie, *Les idées qui me guident dans mes recherches*

**C**e chapitre regroupe différentes considérations théoriques sur la résolution de problèmes inverses non linéaires, en particulier dans une présentation du formalisme de Green-Volterra, reposant sur un développement du terme source en séries convolutives faiblement non linéaires tel que l'ont récemment présenté [Roze et Hélie, 2014] et dans la description d'un cadre fonctionnel pour l'analyse du retournement temporel d'équations aux dérivées partielles non linéaires compatible avec le formalisme de Green-Volterra. Egalement, la problématique de la formule de Kirchhoff-Helmholtz dans le cadre d'une perturbation non linéaire est abordée.

## B.1. FONCTIONS DE GREEN ASSOCIÉES À DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

Dans cette partie, afin de mieux comprendre le comportement des problèmes non linéaires, on présentera certaines démarches permettant de mettre en évidence un formalisme élargissant celui de Green aux équations non linéaires, en particulier le formalisme de Green-Volterra développé récemment par Roze et Hélie [Roze et Hélie, 2014].

### B.1.1. FORMALISME DE GREEN-VOLTERRA

Le formalisme développé par Roze et Hélie considère des problèmes de la forme

$$L_{x,t}[u] = f + K_{x,t}[u, f] \quad (\text{B.1})$$

où  $L_{x,t}$  est un opérateur différentiel linéaire en l'inconnue fonctionnelle  $u$ ,  $K_{x,t}$  est un opérateur non linéaire prenant pour argument  $u$  et un terme de source  $f$ . Roze et Hélie considèrent des conditions aux bords nulles et des conditions initiales nulles ("*Dirichlet boundary conditions and*

zero initial conditions"). Autrement dit, la dynamique du système ne provient que du terme de source  $f$ . Il est important de souligner dès maintenant cet aspect car il réapparaîtra plus tard.

L'équation (B.1) est un problème non linéaire à deux variables  $x$  et  $t$  définies respectivement sur les ensembles  $\Omega$  et  $\mathcal{T}$ . Il est possible d'exprimer le terme non linéaire comme une somme infinie de la forme

$$K_{x,t}[u, f] = \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q \geq 2}} K_{x,t}^{p,q}[\underbrace{u, \dots, u}_p, \underbrace{f, \dots, f}_q] \quad (\text{B.2})$$

où chaque  $K_{x,t}^{p,q}$  est un opérateur différentiel multilinéaire. La méthode de Green-Volterra pour résoudre le problème est de trouver une suite infinie de noyaux  $\{g_n\}$  permettant d'écrire la solution de B.1 sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega^n \times \mathcal{T}^n} g_n(x, t; \vec{\xi}, \vec{\tau}) f(\xi_1, \tau_1) \dots f(\xi_n, \tau_n) d\vec{\xi} d\vec{\tau} \quad (\text{B.3})$$

où pour chaque  $n$ ,  $\vec{\xi}$  est le vecteur de composantes  $(\xi_i)$ . Ces noyaux sont à comparer au noyau de Green associé au cas linéaire, qui est le cas particulier  $n = 1$ . Roze et Hélié ont montré que ces noyaux sont définis par le schéma

$$g_n(x, t; \vec{\xi}, \vec{\tau}) = \int_{\Omega \times \mathcal{T}} g_1(x, t; y, \theta) r_n(y, \theta; \vec{\xi}, \vec{\tau}) dy d\theta, \quad (\text{B.4})$$

où  $g_1$  est la fonction de Green associée au problème linéaire  $L_{x,t}[u] = f$ , et avec  $r_n$  faisant intervenir les noyaux  $g_1, \dots, g_n$  par la relation

$$r_n(x, t, \vec{\xi}, \vec{\tau}) = \sum_{\substack{(p,q) \in [0,n]_{\mathbb{N}}^2 \\ 2 \leq p+q \leq n}} \sum_{\substack{m \in (\mathbb{N}^*)^p \\ m_1 + \dots + m_p = n-q}} K_{x,t}^{p,q}[g_{m_1}(x, t; \sigma_m^1(\vec{\xi}), \sigma_m^1(\vec{\tau})), \dots, g_{m_p}(x, t; \sigma_m^p(\vec{\xi}), \sigma_m^p(\vec{\tau})), \\ \delta_{x,t}^1(\xi_{n-p+1}, \tau_{n-q+1}), \dots, \delta_{x,t}^1(\xi_n, \tau_n)] \quad (\text{B.5})$$

et  $r_1(x, t, \xi_1, \tau_1) = \delta_{x,t}^1(\xi_1, \tau_1)$ . L'expression extrêmement lourde de  $r_n$  fait intervenir des troncatures des vecteurs  $\vec{\xi}$  et  $\vec{\tau}$  sur des sous-ensembles de dimension  $m_j$  au moyen des opérateurs  $\sigma_m^j$  définis par

$$\sigma_m^j(\vec{\xi}) = (\xi_{m_1 + \dots + m_{j-1} + 1}, \dots, \xi_{m_1 + \dots + m_j}). \quad (\text{B.6})$$

La construction des  $r_n$  passe par l'étude des propriétés des séries de Volterra, notamment la mise en cascade de plusieurs séries, technique permettant de calculer les termes d'un système annulateur conduisant à la résolution de l'équation non linéaire. Tout comme un système linéaire est décrit par une fonction de Green, un système non linéaire peut être décrit par une série de noyaux  $\{g_n\}$ , indépendants du terme de source et des conditions initiales, tels que la solution au problème soit la sommation de chacun des noyaux d'ordre  $n$  multiconvolué par le produit tensoriel du terme de source.

### B.1.2. EXEMPLE POUR $n = 2$

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer le formalisme présenté au paragraphe précédent par un exemple très simple d'équation aux dérivées partielles non linéaire contenant un terme d'ordre 2 et un terme de source, du style :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f. \quad (\text{B.7})$$

Dans ce cas précis, le terme linéaire s'écrit

$$L_{x,t}[u] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{B.8})$$

et le terme non linéaire est restreint à

$$K_{x,t}[u, f] = K_{x,t}[u] = K_{x,t}^{2,0}[u, u] \quad (\text{B.9})$$

avec

$$K_{x,t}^{2,0}[a, b] = -a \frac{\partial b}{\partial x}. \quad (\text{B.10})$$

$g_1$  est la fonction de Green de l'équation  $\frac{\partial u}{\partial t} = f$ , c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} g_1(x, t; \xi, \tau) = \delta_{x,t}(\xi, \tau) = \delta(\xi - x) \delta(\tau - t). \quad (\text{B.11})$$

Calculons ensuite  $r_1$  et  $r_2$ .

$$r_1(x, t; \xi_1, \tau_1) = \delta_{x,t}(\xi_1, \tau_1), \quad (\text{B.12})$$

$$r_2(x, t; \vec{\xi}, \vec{\tau}) = K_{x,t}^{2,0}[g_1(x, t; \xi_1, \tau_1), g_1(x, t; \xi_2, \tau_2)] \quad (\text{B.13})$$

$$= -g_1(x, t; \xi_1, \tau_1) \frac{\partial}{\partial x} g_1(x, t; \xi_2, \tau_2). \quad (\text{B.14})$$

On peut à présent exprimer  $g_2$ , noyau de Green-Volterra associé au terme non linéaire, en fonction de seulement  $g_1$ , associé au terme linéaire :

$$g_2(x, t; \vec{\xi}, \vec{\tau}) = \int_{\Omega \times \mathcal{T}} g_1(x, t; y, \theta) r_2(y, \theta; \vec{\xi}, \vec{\tau}) dy d\theta \quad (\text{B.15})$$

$$= - \int_{\Omega \times \mathcal{T}} g_1(x, t; y, \theta) g_1(y, \theta; \xi_1, \tau_1) \frac{\partial}{\partial x} g_1(y, \theta; \xi_2, \tau_2) dy d\theta. \quad (\text{B.16})$$

La solution de l'équation (B.7) s'écrit :

$$u(x, t) = \int g_1(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int g_2(x, t; \vec{\xi}, \vec{\tau}) f(\xi_1, \tau_1) f(\xi_2, \tau_2) d\xi_1 d\xi_2 d\tau_1 d\tau_2. \quad (\text{B.17})$$

Il est possible de remplacer l'expression de  $g_2$  par (B.16) pour montrer que  $u$  peut s'exprimer comme des sommes de combinaisons non linéaires de seulement  $g_1$ . Dans le cas étudié, le noyau de Green-Volterra d'ordre 2 s'exprime uniquement à l'aide d'intégrales ou de dérivées de la distribution de Dirac temporelle et spatiale.

### B.1.3. EXTENSION AUX PROBLÈMES 4D

Le formalisme de Green-Volterra est présenté pour une équation à deux variables, une spatiale et une temporelle. Pour étendre un tel formalisme à des équations à quatre dimensions de la forme

$$L_{x,y,z,t}[u] = f + K_{x,y,z,t}[u, f], \quad (\text{B.18})$$

il suffit d'effectuer le produit tensoriel des états  $x, t$  avec les états  $y, z$ . La solution à l'équation (B.18) s'écrit

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega^n \times \mathcal{F}^n} g_n(\vec{x}, t; \vec{\xi}, \vec{\tau}) f(\vec{\xi}_1, \tau_1) \dots f(\vec{\xi}_n, \tau_n) d\vec{\xi} d\vec{\tau} \quad (\text{B.19})$$

où, dans chaque membre de la somme, la double flèche sur  $\vec{\xi}$  indique qu'il s'agit d'un vecteur à  $3n$  composantes, 3 composantes spatiales pour chacun des  $n$  indices de convolution. Toutes les relations présentées en deux dimensions s'adaptent de la même manière. Comme expliqué à la fin de la première partie, l'adaptation de la formule de Kirchhoff-Helmholtz à des problèmes non linéaires est au cœur de la problématique du retournement temporel non linéaire. Le formalisme de Green-Volterra est une piste à explorer.

## B.2. CADRE THÉORIQUE POUR L'ANALYSE FONCTIONNELLE DU RETOURNEMENT TEMPOREL NON LINÉAIRE

Dans cette partie, on propose un cadre théorique pour étudier l'effet du retournement temporel sur des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles quelconques, c'est-à-dire pas forcément linéaires ni forcément invariantes par retournement temporel.

### B.2.1. STRUCTURES ALGÈBRIQUES UTILISÉES

Soit  $(\mathcal{F}, +, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé de fonctions  $C^\infty$  à décroissance suffisamment rapide sur laquelle on ne s'attardera pas. Pour simplifier les notations, on considère des fonctions de  $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\}$ , avec une variable notée  $x$  et une variable notée  $t$ , et c'est cette variable qu'on appelle le temps et qu'on cherche à inverser. On considère un ensemble  $\mathcal{E} \subset \{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}\}$  d'opérateurs différentiels non forcément linéaires, contenant l'ensemble des opérateurs intégro-différentiels linéaires, muni d'une structure d'algèbre  $\mathcal{A} = (\mathcal{E}, +, \cdot)$  non associative et non commutative. On notera  $ab = a \cdot b$ . Notons  $0_{\mathcal{F}}$  la fonction nulle de  $\mathcal{F}$ .  $\mathcal{A}$  contient un élément nul  $0_{\mathcal{A}}$  tel que  $\forall f \in \mathcal{F}, 0_{\mathcal{A}} f = 0_{\mathcal{F}}$ , qui correspond à l'équation différentielle triviale  $0 \times f = 0$ . Pour tout  $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$ , le noyau de  $\mathcal{D}$  est noté  $\ker \mathcal{D} = \{f \in \mathcal{F}, \mathcal{D}f = 0_{\mathcal{F}}\}$ . En virant les constantes dans les expressions des EDP, on peut considérer une algèbre telle que  $\forall \mathcal{D} \in \mathcal{A}, 0_{\mathcal{F}} \in \ker \mathcal{D}$ , ce qui veut dire que la fonction nulle annule n'importe quelle EDP, et donc que le noyau de n'importe quelle EDP est non vide. Par distributivité de  $\mathcal{A}$  on a

$$\forall (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \in \mathcal{E}^2, \forall f \in \mathcal{F}, (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)f = \mathcal{D}_1 f + \mathcal{D}_2 f, \quad (\text{B.20})$$

mais comme on considère des opérateurs différentiels pas forcément linéaires on a

$$\exists \mathcal{D} \in \mathcal{E}, \exists (f_1, f_2) \in \mathcal{F}, \mathcal{D}(f_1 + f_2) \neq \mathcal{D}f_1 + \mathcal{D}f_2. \quad (\text{B.21})$$

### B.2.2. DÉFINITION ALGÈBRIQUE DU RETOURNEMENT TEMPOREL

#### Définition B.2.1 (*Retournement temporel d'une fonction*)

$\forall f \in \mathcal{F}$ , on note  $f^* \in \mathcal{F}$  la fonction telle que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, f^*(x, t) = f(x, -t). \quad (\text{B.22})$$

L'opération de retournement temporel définit un automorphisme de  $\mathcal{F}$ , ce qui permet de démontrer très facilement le théorème suivant.

### Théorème B.2.1

Soit  $\mathcal{D} \in \mathcal{E}$ . Il existe un unique élément de  $\mathcal{E}$ , noté  $\mathcal{D}^*$ , qui vérifie

$$\forall f \in \mathcal{F}, \mathcal{D}f = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}^*f^* = 0. \quad (\text{B.23})$$

Démonstration : Il existe une bijection  $\psi \in \mathcal{E}$  telle que  $\forall f \in \mathcal{F}, f^* = \psi f \Leftrightarrow f = \psi^{-1}f^*$ .  $\psi \in \mathcal{E}$  car elle peut s'écrire sous la forme d'un opérateur intégro-différentiel linéaire :

$$\psi f = F^{-1}\overline{Ff} \quad (\text{B.24})$$

où  $F$  désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable  $t$ . Si l'on définit  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}\psi^{-1}$ , on a bien que  $\mathcal{D}^* \in \mathcal{E}$  et  $\forall f \in \mathcal{F}, \mathcal{D}f = \mathcal{D}\psi^{-1}f^* = \mathcal{D}^*f^* = 0$ .

### Définition B.2.2 (Opérateur différentiel adjoint au retournement temporel)

$\forall \mathcal{D} \in \mathcal{E}$ , on note  $\mathcal{D}^* \in \mathcal{E}$  l'opérateur différentiel tel que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \mathcal{D}f = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}^*f^* = 0. \quad (\text{B.25})$$

Cette définition est équivalente à :

$$\forall f \in \mathcal{F}, \mathcal{D}f^* = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}^*f = 0, \quad (\text{B.26})$$

et aussi à

$$\forall f \in \mathcal{F}, f \in \ker \mathcal{D} \Leftrightarrow f^* \in \ker \mathcal{D}^*, \quad (\text{B.27})$$

### Définition B.2.3 (Invariance par retournement temporel)

On dit que  $\mathcal{D}$  est invariant par retournement temporel si  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$ . On dit que  $\mathcal{D}$  est anti-invariant par retournement temporel si  $\mathcal{D}^* = -\mathcal{D}$ .

Dans les deux cas (si  $\mathcal{D}$  est invariant ou anti-invariant), on a  $\forall f \in \mathcal{F}, \mathcal{D}f = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}f^* = 0$ , ce qui veut dire que si  $f$  annule  $\mathcal{D}$  alors  $f^*$  annule aussi  $\mathcal{D}$ . Il est alors possible de définir l'invariance par retournement temporel au sens large, à savoir :  $\exists K \in \mathbb{C}, K \neq 0, \mathcal{D}^* = K\mathcal{D}$ . Si on munit  $\mathcal{F}$  d'une structure d'algèbre, la définition peut être prise avec  $K \in \mathcal{F}$ .

### B.2.3. EXEMPLE D'APPLICATION : LES SÉRIES DE GREEN-VOLTERRA

Avant d'aller plus loin, nous allons préciser à types quels opérateurs différentiels nous nous intéressons et illustrer nos propos par un exemple. Nous nous inspirons du formalisme de Roze et Hélie [Roze et Hélie, 2014] pour considérer des opérateurs différentiels de la forme

$$\mathcal{D}f = \sum_p K_p[f, \dots, f] \quad (\text{B.28})$$

ou  $\forall p, K_p$  est un opérateur différentiel  $p$ -linéaire. Cela signifie qu'il peut s'écrire sous la forme

$$K_p[f_1, \dots, f_p] = \prod_{i=1}^p K_p^{(i)}[f_i], \quad (\text{B.29})$$

avec  $\forall i, K_p^{(i)}$  un opérateur différentiel linéaire. Si l'on retourne la variable  $f_i$  dans le temps, on effectue le changement de variable  $t' = -t$ , ce qui a pour conséquence, avec un opérateur linéaire, de faire sortir un certain nombre de fois le coefficient  $dt/dt' = -1$ . Ce qui permet de dire :

$$\forall (p, i), \exists \alpha_{pi}, K_p^{(i)}[f_i^*] = (-1)^{\alpha_{pi}} K_p^{(i)}[f_i]. \quad (\text{B.30})$$

Ce qui donne sur l'opérateur  $\mathcal{D}$  tout entier, en notant  $\alpha'_p = \sum_i \alpha_{pi}$  :

$$\mathcal{D}f^* = \sum_p (-1)^{\alpha'_p} K_p[f, \dots, f]. \quad (\text{B.31})$$

Selon la parité de  $\alpha'_p$ , on a 1 ou  $-1$  en facteur de chaque  $K_p$ , ce qui permet d'extraire une partie de  $\mathcal{D}$  (celle avec les 1 en facteurs) invariante par retournement temporel et une qui s'oppose à elle-même par retournement temporel :

$$\mathcal{D}f^* = \sum_{\alpha'_p \text{ pair}} K_p[f, \dots, f] - \sum_{\alpha'_p \text{ impair}} K_p[f, \dots, f] = \mathcal{D}^* f. \quad (\text{B.32})$$

#### B.2.4. THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION

Cet exemple permet de mettre en évidence l'existence de l'opérateur  $\mathcal{D}^*$  dans un cas particulier (qui est celui qui nous intéresse). Si l'on se place dans un espace où les  $\mathcal{D}^*$  sont définis pour tout  $\mathcal{D}$ , et où l'on peut mettre en évidence la propriété  $\mathcal{D}^{**} = \mathcal{D}$  (qui n'est pas évidente), on peut énoncer les théorèmes suivants :

##### **Théorème B.2.2**

Pour tout opérateur  $\mathcal{D}$  tel que  $\mathcal{D}^{**} = \mathcal{D}$ , l'opérateur  $\mathcal{D} + \mathcal{D}^*$  est invariant par retournement temporel, et  $(\mathcal{D} - \mathcal{D}^*)^* = -(\mathcal{D} - \mathcal{D}^*)$ .

##### **Théorème B.2.3**

N'importe quel opérateur  $\mathcal{D}$  tel que  $\mathcal{D}^{**} = \mathcal{D}$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2, \quad (\text{B.33})$$

avec  $\mathcal{D}_1 = \frac{\mathcal{D} + \mathcal{D}^*}{2}$  invariant par retournement temporel et  $\mathcal{D}_2 = \frac{\mathcal{D} - \mathcal{D}^*}{2}$  vérifiant  $\mathcal{D}_2^* = -\mathcal{D}_2$ .

On cherche à se placer dans le cadre confortable où toutes ces propriétés sont vérifiées. On peut alors écrire

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2, \quad (\text{B.34})$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2. \quad (\text{B.35})$$

Si on considère une solution à l'équation  $\mathcal{D}f = 0$  que l'on retourne dans le temps, puis que l'on propage à travers le même système  $\mathcal{D}$ , on a alors affaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\mathcal{D}f^* = \mathcal{D}_1 f^* + \mathcal{D}_2 f^* = \mathcal{D}^* f^* + 2\mathcal{D}_2 f^* = \mathcal{D}f + 2\mathcal{D}_2 f^* = 2\mathcal{D}_2 f^*, \quad (\text{B.36})$$

ce qui signifie que  $f^*$  n'est pas solution de  $\mathcal{D}$  (car elle est solution de  $\mathcal{D}^*$ ) et qu'en l'injectant dans le système  $\mathcal{D}$ , les contributions non invariantes par retournement temporel s'ajoutent. Il est d'ailleurs possible de caractériser l'opérateur  $\mathcal{D}^*$  auquel on applique  $f$  :

$$\mathcal{D}^* f = -2\mathcal{D}_2 f. \quad (\text{B.37})$$

## B.3. PROBLÈMES OUVERTS EN ANALYSE NON LINÉAIRE

### B.3.1. CORRECTION NON LINÉAIRE DE L'ÉQUATION DE KIRCHHOFF-HELMHOLTZ

Dans ce paragraphe, nous émettrons l'hypothèse qu'à l'équation de Helmholtz vient s'ajouter un terme non linéaire que nous noterons, en toute généralité,  $K_{nl}$ , pour en étudier les conséquences dans la formule de Kirchhoff-Helmholtz. Si l'on considère un champ  $A$  vérifiant

$$\Delta A + K^2 A + K_{nl}[A] = 0 \quad (\text{B.38})$$

et que l'on suppose l'existence d'un fonction  $G$  vérifiant

$$\Delta G + K^2 G + K_{nl}[G] = \delta, \quad (\text{B.39})$$

on se rend vite compte que la formule de K.-H. fait intervenir un terme supplémentaire :

$$\oint_{\partial\Omega} \left( A \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial A}{\partial n} \right) dS = A + \int_{\Omega} (GK_{nl}[A] - AK_{nl}[G]) dV. \quad (\text{B.40})$$

La formule de K.-H. perd alors tout son intérêt car le champ  $A$  ne s'exprime plus uniquement en fonction du champ au bord, à cause du terme non linéaire qui est intégré sur tout le volume. Cette contrainte disparaît, par exemple, si le terme non linéaire est le divergent d'un potentiel vectoriel, autrement dit s'il existe un champ vectoriel  $\vec{a}_{nl}$  tel que

$$GK_{nl}[A] - AK_{nl}[G] = \text{div } \vec{a}_{nl}. \quad (\text{B.41})$$

Dans ce cas très particulier, le théorème de la divergence s'applique et le champ  $A$  peut s'écrire en tout point de  $\Omega$  en fonction des champs  $A$ ,  $G$  et  $\vec{a}_{nl}$  au bord :

$$A = \oint_{\partial\Omega} \left( A \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial A}{\partial n} \right) dS - \oint_{\partial\Omega} \vec{a}_{nl} \cdot \hat{n} dS. \quad (\text{B.42})$$

Cependant, les hypothèses formulées ci-dessus ne s'appuient pas, pour l'instant, sur une argumentation suffisamment solide pour être poussée plus loin. La démarche adoptée permet cependant une première incursion dans le retournement temporel non linéaire et apporte les éléments d'une des problématiques qu'une telle ambition pourrait soulever : adapter la formule de K.-H. au cas où l'équation régissant la propagation de l'onde dans le milieu présente un terme non linéaire.

### B.3.2. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE BURGERS PAR GREEN-VOLTERRA

#### Formulation du problème

Il est également possible de résoudre l'équation de Burgers en utilisant le formalisme de Green-Volterra<sup>1</sup>, donc en se plaçant dans l'approximation d'un régime faiblement non-linéaire. L'opérateur linéaire est  $L_{x,t} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , qui n'est autre que l'opérateur différentiel de l'équation de la chaleur. La fonction de Green associée à cet opérateur linéaire est la fonction de Green de la chaleur, notée  $G$  et définie ci-dessus. L'opérateur non linéaire de l'équation de Burgers est  $K_{x,t}[c] = K_{x,t}^{2,0}[c, c]$  avec  $K_{x,t}^{2,0}[a, b] = -a \frac{\partial b}{\partial x}$ , qui a été étudié en exemple plus haut. L'équation de Burgers, du moins telle qu'elle est définie par Whitham pour étudier les ondes de choc, ne possède pas de terme de source. Sa dynamique est causée par un profil de vitesse initial non nul. Tel qu'il est présenté plus haut, le

1. Développé récemment par [Roze et Hélie, 2014] ; pour plus de détails le lecteur est invité à se reporter dans le présent manuscrit au paragraphe (B.1)



formalisme de Green-Volterra considère des problèmes aux conditions initiales nulles et avec terme de source. Il conviendrait de montrer proprement qu'il est possible d'invertir terme de source et conditions initiales en utilisant la théorie des distributions, voilà un nouveau défi pour l'auteur. Dans la suite, en attendant, le problème sera traité de manière instinctive. Pour un profil de vitesse initial  $c(x, t = 0) = F(x)$ , on considère un terme de source de la forme  $f(x, t) = F(x)\delta(t)$ . Sous de telles hypothèses, la solution de l'équation de Burgers peut s'écrire :

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \eta, t) F(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(x - \eta_1, x - \eta_2, t) F(\eta_1) F(\eta_2) d\eta_1 d\eta_2, \quad (\text{B.43})$$

avec

$$G_2(x - \eta_1, x - \eta_2, t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \eta, t) G(\eta - \eta_1, t) \frac{\partial}{\partial x} G(\eta - \eta_2, t) d\eta, \quad (\text{B.44})$$

ce qui peut donner de manière encore plus explicite :

$$\begin{aligned} c(x, t) = & (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4vt}} F(\eta) d\eta \\ & + \frac{(4\pi)^{-3/2}}{2v} t^{-1/2} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(x-\eta)^2 + (\eta-\eta_1)^2 + (\eta-\eta_2)^2}{4vt}} (\eta - \eta_2) F(\eta_1) F(\eta_2) d\eta d\eta_1 d\eta_2. \end{aligned}$$

Le caractère inachevé d'une telle étude réside en ce qu'elle nécessite une comparaison avec la solution obtenue par transformée de Cole-Hopf dans l'approximation du régime faiblement non linéaire.

# BIBLIOGRAPHIE

- [Ahrens et Spors, 2008] AHRENS, J. et SPORS, S. (2008). Reproduction of virtual sound sources moving at supersonic speeds in wave field synthesis. *In Audio Engineering Society 125th Convention*.
- [Ardavan *et al.*, 2008] ARDAVAN, H., ARDAVAN, A., SINGLETON, J., FASEL, J. et SCHMIDT, A. (2008). Fundamental role of the retarded potential in the electrodynamics of superluminal sources. *The Journal of the Optical Society of America, A*, 25(3):543–557. <http://arxiv.org/pdf/0709.1283.pdf>.
- [Arnoldus, 1994] ARNOLDUS, H. F. (1994). Optical phase conjugation. *Condensed Matter News*, 3(2):9–16.
- [Bahrami *et al.*, 2012] BAHRAMI, S., CHELDAVI, A. et ABDOLALI, A. (2012). Moving target tracking using time reversal method. *Progress In Electromagnetics Research M*, 25:39–52.
- [Basto *et al.*, 2007] BASTO, M., SEMIAO, V. et CALHEIROS, F. (2007). Dynamics in spectral solutions of burgers equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205(1):296–304.
- [Bavu, 2008] BAVU, E. (2008). *Le puits à retournement temporel dans le domaine audible : un outil de focalisation et d'imagerie à haute résolution de sources sonores et vibratoires*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Bavu et Berry, 2009] BAVU, E. et BERRY, A. (2009). High-resolution imaging of sound sources in free field using a numerical time-reversal sink. *Acta Acustica united with Acustica*, 95(4):595–606.
- [Bavu *et al.*, 2007] BAVU, E., BESNAINOU, C., GIBIAT, V., de ROSNY, J. et FINK, M. (2007). Subwavelength sound focusing using a time-reversal acoustic sink. *Acta Acustica United with Acustica*, 93(5):706–715.
- [Bergson, 1922] BERGSON, H. (1922). *Durée et simultanéité. À propos de la théorie d'Einstein*. Presses universitaires de France. Disponible en ligne à l'adresse : <http://dx.doi.org/doi:10.1522/c1a.beh.dur>.
- [Burgers, 1974] BURGERS, J. M. (1974). *The nonlinear diffusion equation*. Springer.
- [Candy *et al.*, 2004] CANDY, J. V., MEYER, A. W., POGGIO, A. J. et GUIDRY, B. L. (2004). Time-reversal processing for an acoustic communications experiment in a highly reverberant environment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(4):1621.
- [Chabchoub et Fink, 2014] CHABCHOUB, A. et FINK, M. (2014). Time-Reversal Generation of Rogue Waves. *Physical Review Letters*, 112(12):124101.
- [Courant et Friedrichs, 1948] COURANT, R. et FRIEDRICHS, K. (1948). *Supersonic flow and shock waves*, volume 1. Interscience.
- [de Broglie, 1966] de BROGLIE, L. (1966). *Certitudes et incertitudes de la Science*. Albin Michel.
- [De Rosny *et al.*, 2010] DE ROSNY, J., LEROSEY, G. et FINK, M. (2010). Theory of electromagnetic time-reversal mirrors. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 58(10):3139–3149.
- [de Rosny, 2002] de ROSNY, J. ; FINK, M. (2002). Overcoming the diffraction limit in wave physics using a time-reversal mirror and a novel acoustic sink. *Physical Review Letters*, 89.
- [Ehrhardt, 2013] EHRHARDT, L. (2013). *Temporal domain modelization of acoustical propagation (in French)*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Einstein *et al.*, 1921] EINSTEIN, A., ROUVIÈRE, J. et BOREL, E. (1921). *La théorie de la relativité restreinte et généralisée mise à la portée de tout le monde*. Gauthier-Villars.

- [Enflo et Hedberg, 2002] ENFLO, B. O. et HEDBERG, C. M. (2002). *Theory of nonlinear acoustics in fluids*. Kluwer Academic Publishers. pp. 167-173.
- [Faure, 2008] FAURE, T. (2008). *Dynamique des fluides appliquée : Applications à l'aérodynamique*. Dunod.
- [Fink, 1992] FINK, M. (1992). Time reversal of ultrasonic fields. I. basic principles. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5):555–566.
- [Fink, 1993] FINK, M. (1993). Time-reversal mirrors. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 26(9):1333.
- [Fink et al., 2000] FINK, M., CASSEREAU, D., DERODE, A., PRADA, C., ROUX, P., TANTER, M., THOMAS, J.-I. et WU, F. (2000). Time-reversed acoustics. *Reports on progress in Physics*, 63(12):1933.
- [Fink et Prada, 2001] FINK, M. et PRADA, C. (2001). Acoustic time-reversal mirrors. *Inverse Problems*, 17(1):R1–R38.
- [Fitzpatrick, 2008] FITZPATRICK, R. (2008). *Maxwell's Equations and the Principles of Electromagnetism*, chapitre 4. Time-dependent Maxwell equations : Advanced potentials ?, pages 142–144. Jones & Bartlett Publishers. Disponible en ligne : <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/node51.html>.
- [Freytag et al., 2006] FREYTAG, J. C., BEGAULT, D. R. et PELTIER, C. A. (2006). The acoustics of gunfire. *In Inter-Noise*.
- [Garnier et Fink, 2015] GARNIER, J. et FINK, M. (2015). Super-resolution in time-reversal focusing on a moving source. *Wave Motion*, 53:80–93.
- [Ginzburg et Tsytoich, 1979] GINZBURG, V. L. et TSYTOVICH, V. (1979). Several problems of the theory of transition radiation and transition scattering. *Physics Reports*, 49(1):1–89.
- [Gorji et Zakeri, 2013] GORJI, A. et ZAKERI, B. (2013). An improved time-reversal-based target localization for through-wall microwave imaging. *Journal of Electrical and Computer Engineering Innovations*, 1(2):89–97.
- [Gottlieb et Ritzel, 1988] GOTTLIEB, J. J. et RITZEL, D. V. (1988). Analytical study of sonic boom from supersonic projectiles. *Progress in Aerospace Sciences*, 25(2):131–188.
- [Gurbatov, 1981] GURBATOV, S. (1981). Transformation of the statistical characteristics of noise in interaction with a strong regular wave. *Soviet Physics Acoustics*, 27(6):475–480.
- [Hallaj et al., 2000] HALLAJ, I. M., CLEVELAND, R. O., BARBONE, P. E., KARGL, S. G. et ROY, R. A. (2000). Amplitude degradation of time-reversed pulses in nonlinear absorbing thermoviscous fluids. *Ultrasonics*, 38(9):885–889.
- [Huyghens, 1690] HUYGHENS, C. (1690). *Traité de la lumière : où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la reflexion, & dans la refraction, et particulièrement dans l'etrange refraction du cristal d'Islande*. Gressner Schramm.
- [Jackson et Dowling, 1991] JACKSON, D. R. et DOWLING, D. R. (1991). Phase conjugation in underwater acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(1):171–181.
- [Kirkeby et Nelson, 1999] KIRKEBY, O. et NELSON, P. A. (1999). Digital filter design for inversion problems in sound reproduction. *Journal of the Audio Engineering Society*, 47(7/8):583–595.
- [Klinkowstein, 1974] KLINKOWSTEIN (1974). A study of acoustic radiation from an electrical spark discharge in the air. Mémoire de D.E.A., MIT.
- [Krasilnikov et al., 1981] KRASILNIKOV, V., PAVLOV, V. et TREBLER, P. (1981). Hamiltonian approach to problems in sound radiation by moving mass sources. *Soviet Physics Acoustics*, 27(4):301–304.

- [Landau et Lifchitz, 1970] LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. (1970). *Théorie du champ*. Éditions Mir, Moscou.
- [Landau, 1945] LANDAU, L. D. (1945). On shock waves at large distances from the place of their origin. *J. Phys. USSR*, 9(6):496–500.
- [Lee et al., 1968] LEE, J. S., PETERSON, H. et MCCOY JR, C. (1968). Energy spectral density of the sonic boom. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 44(1):299–300.
- [Lerosey et al., 2004] LEROSEY, G., DE ROSNY, J., TOURIN, A., DERODE, A., MONTALDO, G. et FINK, M. (2004). Time reversal of electromagnetic waves. *Physical review letters*, 92(19):193904.
- [Lipovskii, 1980] LIPOVSKII, V. (1980). Cerenkov radiation of acoustic-gravity waves by horizontally moving sources. I. *Radiofizika*, 23(2):159–168.
- [Lo et Ferguson, 2012] LO, K. W. et FERGUSON, B. G. (2012). Localization of small arms fire using acoustic measurements of muzzle blast and/or ballistic shock wave arrivals. *The Journal of the Acoustical Society of America*.
- [Lobréau, 2015] LOBRÉAU, S. (2015). *Imagerie et caractérisation instationnaire de sources acoustiques en milieu réverbérant et bruité par renversement temporel et séparation de ccham sur antenne hémisphérique double couche*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers.
- [Maccoll, 1937] MACCOLL, J. W. (1937). The conical shock wave formed by a cone moving at a high speed. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 159(898):459–472.
- [Mach, 1893] MACH, E. (1893). *The science of mechanics, a critical and historical account of its development*. The Open Court Publishing Co. traduction anglaise de Thomas J. McCormack, 4<sup>ème</sup> éd. (1919).
- [Maher, 2006] MAHER, R. C. (2006). Modeling and signal processing of acoustic gunshot recordings. In *Digital Signal Processing Workshop, 12th-Signal Processing Education Workshop, 4th*, pages 257–261. IEEE.
- [Marchiano et al., 2003] MARCHIANO, R., COULOUVRAT, F. et GRENON, R. (2003). Numerical simulation of shock wave focusing at fold caustics, with application to sonic boom. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(4):1758–1771.
- [Morse et Feshbach, 1953] MORSE, P. M. et FESHBACH, H. (1953). *Methods of theoretical physics*. Mc Graw-Hill.
- [Morse et Ingard, 1968] MORSE, P. M. et INGARD, K. U. (1968). *Theoretical acoustics*. Princeton university press.
- [Mugnai, 2007] MUGNAI, D. (2007). Superluminal propagation : Light cone and minkowski space-time. *Physics Letters A*, 364:435–437.
- [Oppenheim et Schafer, 1974] OPPENHEIM, A. V. et SCHAFER, R. W. (1974). *Digital Signal Processing*. Prentice Hall.
- [Papanicolaou et al., 2001] PAPANICOLAOU, G., RYZHIK, L. et SOLNA, K. (2001). The parabolic approximation and time reversal in a random medium. *Preprint*.
- [Poincaré, 1906] POINCARÉ, H. (1906). Sur la dynamique de l'électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 21(1):129–175.
- [Rasekh et al., 2014] RASEKH, P., RAZAVIAN, M., TORKI, A. et SAFIAN, R. (2014). Through the wall imaging based on time reversal independent component analysis. In *2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI)*, pages 1117–1118.

- [Renard, 2010] RENARD, D. (2010). *Groupes et représentations*. Les éditions de l'école polytechnique.
- [Ribay, 2006] RIBAY, G. (2006). *Localisation de source en milieu réverbérant par Retournement Temporel*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot-Paris VII.
- [Ribay et al., 2005] RIBAY, G., de ROSNY, J. et FINK, M. (2005). Time reversal of noise sources in a reverberation room. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(5):2866–2872.
- [Rimoldini, 2013] RIMOLDINI, L. (2013). Weighted skewness and kurtosis unbiased by sample size. *arXiv preprint*, (1304.6564).
- [Ritzel et Gottlieb, 1988] RITZEL, D. V. et GOTTLIEB, J. J. (1988). Numerical evaluation of whitam's f-function for supersonic projectiles. *AIAA journal*, 26(2):244–247.
- [Roze et Hélie, 2014] ROZE, D. et HÉLIE, T. (2014). Introducing a Green-Volterra series formalism to solve weakly nonlinear boundary problems : Application to Kirchhoff's string. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7):2073 – 2086.
- [Rudenko et Soluyan, 1975] RUDENKO, O. et SOLUYAN, S. (1975). *Theoretical Foundations of Non-linear Acoustics (Consultants Bureau, New York, 1977)*. Studies in Soviet Science. Translation from Russian by Robert T. Beyer (1977).
- [Sadler et al., 1998] SADLER, B. M., PHAM, T. et SADLER, L. C. (1998). Optimal and wavelet-based shock wave detection and estimation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104(2):955–963.
- [Sallai et al., 2011] SALLAI, J., LÉDECZI, A. et VÖLGYESI, P. (2011). Acoustic shooter localization with a minimal number of single-channel wireless sensor nodes. *In Proceedings of the 9th ACM Conference on Embedded Networked Sensor Systems*, pages 96–107. ACM.
- [Soriano, 2010] SORIANO, G. (2010). *Diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses*.
- [Stephenson, 2000] STEPHENSON, L. M. (2000). The relevance of advanced potential solutions of Maxwell's equations for special and general relativity. *Physics Essays*, 13(1):138–142. Disponible en ligne : [http://www.theoryofeverything.co.uk/advanced\\_potentials/paper2.html](http://www.theoryofeverything.co.uk/advanced_potentials/paper2.html).
- [Sterrett, 1998] STERRETT, S. G. (1998). Sounds like light : Einstein's special theory of relativity and Mach's work in acoustics and aerodynamics. *Studies In History and Philosophy of Science Part B : Studies In History and Philosophy of Modern Physics*, 29(1):1–35.
- [Sundaralingam et al., 2011] SUNDARALINGAM, P., FUSCO, V., ZELENCHUK, D. et APPLEBY, R. (2011). Detection of an object in a reverberant environment using direct and differential time reversal. *In 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*. IEEE.
- [Tanter et al., 2001] TANTER, M., THOMAS, J.-L., COULOUVRAT, F. et FINK, M. (2001). Breaking of time reversal invariance in nonlinear acoustics. *Physical Review E*, 64(1).
- [Taylor et Maccoll, 1933] TAYLOR, G. et MACCOLL, J. (1933). The air pressure on a cone moving at high speeds. i. *In Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 139, pages 278–297. The Royal Society.
- [Tsien, 1938] TSIEN, H.-S. (1938). Supersonic flow over an inclined body of revolution. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 5(12):480–483.
- [Tygel et al., 2000] TYGEL, M., SCHLEICHER, J., SANTOS, L. et HUBRAL, P. (2000). An asymptotic inverse to the kirchhoff-helmholtz integral. *Inverse Problems*, 16(2):425.
- [van Tiggelen, 2003] van TIGGELEN, B. (2003). Green function retrieval and time reversal in a disordered world. *Physical review letters*, 91(24):243904.

- [von Karman, 1947] VON KARMAN, T. (1947). Supersonic aerodynamics-principles and applications. *The Tenth Wright Brothers Lecture*, 14(7).
- [Walker, 2009] WALKER, S. C. (2009). Using time-reversal to generate generalized transversely localized transient waves (X-waves). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(3): 1549–1557.
- [Weyl, 1922] WEYL, H. (1922). *Space–time–matter*. Dutton.
- [Wheeler et Feynman, 1945] WHEELER, J. A. et FEYNMAN, R. P. (1945). Interaction with the absorber as the mechanism of radiation. *Reviews of Modern Physics*, 17(2-3):157.
- [Whitham, 1952] WHITHAM, G. (1952). The flow pattern of a supersonic projectile. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 5(3):301–348.
- [Whitham, 1974] WHITHAM, G. B. (1974). *Linear and nonlinear waves*, volume 42. John Wiley & Sons.
- [Wunderli et Heutschi, 2000a] WUNDERLI, J. M. et HEUTSCHI, K. (2000a). Shielding effect for sonic boom of projectiles. *Acta Acustica united with Acustica*, 87(1):91–100.
- [Wunderli et Heutschi, 2000b] WUNDERLI, J. M. et HEUTSCHI, K. (2000b). Simulation model for sonic boom of projectiles. *Acta Acustica united with Acustica*, 87(1):86–90.
- [Yariv, 1978] YARIV, A. (1978). Phase conjugate optics and real-time holography. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 14(9):650–660.
- [Yon et al., 2003] YON, S., TANTER, M. et FINK, M. (2003). Sound focusing in rooms : The time-reversal approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(3):1533–1543.
- [Yuldashev, 2011] YULDASHEV, P. (2011). *Propagation d'ondes de choc dans les milieux aléatoires avec des inhomogénéités distribuées dans l'espace ou dans une couche mince*. Thèse de doctorat, Ecully, Ecole centrale de Lyon.
- [Zamboni-Rached et al., 2010] ZAMBONI-RACHED, M., RECAMI, E. et BESIERIS, I. M. (2010). Cherenkov radiation versus x-shaped localized waves. *The Journal of the Optical Society of America, A*, 27(4):928–934.
- [Zhukov et Sizikov, 1981] ZHUKOV, V. et SIZIKOV, V. (1981). Mathematical programming in the phase synthesis of an array. *Soviet Physics Acoustics*, 27(3):202–205.







**Résumé :**

On s'intéresse à la localisation de l'axe du cône de Mach lié au déplacement supersonique d'une source acoustique en milieu réverbérant à l'aide d'un nombre limité de microphones. L'application faisant l'objet du financement doctoral est la localisation de tireurs embusqués, dans le cadre de la protection du combattant. Le principe du retournement temporel stipule que, lors de la réémission des mesures renversées dans le temps depuis leurs positions respectives, tout se passe comme si le champ de pression acoustique se propageait en remontant le temps et focalisait à l'endroit de la distribution de sources. Cette focalisation est d'autant plus efficace que les positions de capteurs ont tendance à former une surface fermée autour des sources. On considère une distribution discrète de microphones à hauteur constante dans une rue rectiligne. Dans une première approche, le déplacement supersonique est modélisé selon le principe de Huygens-Fresnel comme une sommation de sources monopolaires. Cela permet une formulation analytique du problème direct pouvant être résolue par des simulations numériques simples en accord avec un montage expérimental de synthèse de cône de Mach au moyen d'une ligne de haut-parleurs. La résolution du problème inverse se fait en calculant numériquement le champ rétropropagé depuis les positions des microphones jusque dans des tranches verticales disposées le long de la rue. L'utilisation d'un critère statistique d'ordre supérieur permet de réduire la contribution des termes de sources dans le champ rétropropagé, à l'origine d'une divergence du champ de pression autour des positions de microphones. L'axe du cône de Mach peut alors être localisé avec une bonne précision angulaire. Dans une deuxième approche, on considère un front d'onde conique réel en déplacement supersonique. Les temps d'arrivée obéissent à des lois de retard bien précises. Notre modèle de réverbération permet de prédire la plupart des pics correspondant à l'arrivée au point de mesure des signaux impulsifs réfléchis. La réverbération n'a pas un effet aussi bénéfique dans le cadre d'une source supersonique réelle que dans le cas d'une source statique, ni même que dans celui de la ligne de haut-parleurs, car la source supersonique présente des contraintes géométriques particulières dont le retournement temporel ne tient pas compte, étant donnée la différence de géométrie des ondes directe (un cône) et retournée dans le temps (une superposition d'ondes sphériques). Cependant, la focalisation autour du passage de l'axe est observée dans les tranches horizontales, avec une qualité dépendant fortement de l'agencement de l'antenne de microphones.

**Mots clés :**

retournement temporel, acoustique, réverbération, cône de Mach

**Abstract :**

We are interested into the localisation of the Mach cone — created by the supersonic motion of an acoustic source into a reverberant medium — by means of a limited amount of microphones. The application concerns sniper localisation, hence protection of the soldier. Theory of time-reversal states that when reemitting measures reversed in time from their respective positions, everything happens as if the pressure field were propagating travelling backwards in time and focused on the source distribution. This result is enhanced when the microphone distribution over space forms a closed surface surrounding the sources, according to Kirchhoff-Helmholtz formula. Aiming at a physically and technologically implementable method, we consider a discrete distribution of microphones, disposed at a constant height in a reverberating area reproducing the geometry of a straight narrow street. The problem shows specific constraints due to its specific geometry that we aim to use sparsely. In a first approach, we consider the supersonic displacement from the viewpoint of Huygens-Fresnel principle as a discrete sum of monopolar sources, which allows an analytical formulation of the direct problem solvable by simple numerical simulations. This model is in agreement with an experimental framework, where the Mach cone is synthesized by means of a loudspeaker array. The resolution of the inverse problem is made by computing the time-reversed pressure field into vertical slices disposed along the street. The use of a fourth-order spatiotemporal statistical criterion (kurtosis) allows to reduce unwanted contribution of source term causing a divergence around microphone positions. A maximum of kurtosis is observed around the intersection between the time-reversal slice and the Mach cone axis, allowing localisation of the latter with good angular precision. In a second approach, we investigate the previous method on a real Mach cone. It is necessary to adopt the point of view of dynamical space-time geometry to understand the behaviour of the times of arrival of the different image sources. It is also necessary to take into account the finiteness of the reverberating walls. Our geometrical theory of reverberation allows a modelisation of the direct problem in good agreement with experimental measurements. We show that the effect of reverberation does not enhance time-reversed focalisation as well as it does with a static source. This is mainly due to geometric constraints that are not reproduced in the time-reversed wavefront superposition. The resolution of the inverse problem strongly depends on the disposition of the microphone set : on the 9 configurations, only one allows detection of the axis.

**Keywords :**

time reversal, acoustics, reverberation, Mach cone