HAL
open science

Une étude didactique des praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace, en France et au Viêt-Nam

Minh Dung Tang

To cite this version:

Minh Dung Tang. Une étude didactique des praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace, en France et au Viêt-Nam. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université de Grenoble, 2014. Français. NNT : 2014GRENM033 . tel-01552637

HAL Id: tel-01552637

https://theses.hal.science/tel-01552637v1

Submitted on 3 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques - Informatique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

TĂNG Minh Dũng

Thèse dirigée par **Hamid CHAACHOUA**

préparée au sein du **Laboratoire d'Informatique de Grenoble**
dans **l'École Doctorale Mathématiques, Science et Technologies de l'information, Informatique**

Une étude didactique des praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace, en France et au Viêt-Nam

Thèse soutenue publiquement le **3 Octobre 2014**,
devant le jury composé de :

M. Hamid CHAACHOUA
Maître de Conférence, Université Joseph Fourier, Directeur de thèse
M. Jean-Luc DORIER
Professeur des Universités, Université de Genève, Rapporteur
Mme LÊ THỊ Hoài Châu
Professeur, Université Pédagogique d'Ho Chi Minh ville, Rapportrice
Mme Jana TRGALOVA
Maître de Conférence, Université Claude Bernard Lyon 1, Examinatrice
Mme Annie BESSOT
Invitée
Mme Claude COMITI
Invitée

Remerciements

Que les mots ne peuvent suffire à s'exprimer…

Je voudrais consacrer les premiers mots de cette thèse aux immenses et sincères remerciements pour les aides de Hamid Chaachoua. Il a accepté de diriger la thèse avant même que j'arrive en France et que je le rencontre. Efficace et gentil, il m'a accompagné tout au long de mes trois années de thèse, du premier jour au dernier jour en France. Sans lui, je n'aurais pas bénéficié de moments significatifs dans mon cheminement professionnel.
Mes profonds remerciements vont aussi à Annie Bessot et Claude Comiti qui ont régulièrement participé à la progression de mon étude. Les séances de travail à quatre ont enrichi mes connaissances sur la méthodologie de recherche et sur les outils théoriques de la didactique des mathématiques. Leurs riches expériences, leurs idées précieuses m'ont permis de mettre en lumière plusieurs problèmes dans ma thèse. Leur relecture détaillée et leur correction minutieuse de la thèse m'ont permis d'en améliorer la présentation sur le plan scientifique et linguistique. Leurs encouragements réguliers m'ont beaucoup aidé à traverser les moments d'éloignement de ma famille.

C'est pour moi un grand honneur que Jean-Luc Dorier et Le Thi Hoai Chau aient accordé du temps pour rapporter sur ma thèse. Leurs remarques pertinentes, leurs questions intéressantes m'ont aidé à améliorer la valeur et les apports de la thèse. Qu'ils veuillent bien recevoir ici mes chaleureux remerciements.
Toute ma gratitude revient également à Jana Trgalova qui a accepté de présider le jury.

Je voudrais remercier les membres de l'équipe MeTAH et aussi les amis vietnamiens de Grenoble qui m'ont accueilli dans une ambiance amicale, qui m'ont toujours encouragé, qui ont été à mes côtés aux moments agréables et aussi difficiles. Grâce à eux, la dureté du travail d'un doctorant, surtout d'un doctorant étranger en France, a été beaucoup atténuée. Particulièrement, je n'oublierai jamais mon compagnon de bureau Reinaldo, les apports en statistiques de Nadine, l'assistance pour mon expérimentation en France de Nathalie, les aides administratives de Pierre, Zilora, Hamm, les conseils pour ma présentation orale de soutenance de Cyrille, Isabelle, Patricia, Vanda, Viviane, les soutiens en informatique de Jacky, les promenades sur la Bastille avec Thanh, les visites dans les vide-greniers avec Thao, les discussions amicales avec Su, les aides de préparation du pot de Ha, Lam, Phuong, Thao, Thanh, Thong et Tuan,… Cela restera toujours de beaux souvenirs de ma vie.

J'adresse ma reconnaissance au Ministre de l'Education et de la Formation du Viêt-Nam qui a financé mon étude en France et permis la réalisation de cette thèse.
Je remercie aussi les encouragements spirituels des collèges du Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Université pédagogique d'Ho Chi Minh ville.

Enfin, je pense très affectueusement à mon père et ma mère qui m'ont toujours soutenu malgré la distance. Je remercie ma petite sœur qui m'a remplacé, pendant mon absence au Viêt-Nam, pour s'occuper de mes parents.

Table des matières

Introduction **1**

Cadre théorique *2*
Rapport institutionnel et rapport personnel 2
Praxéologie 3

Principaux choix méthodologiques *5*
Analyse institutionnelle comparative des praxéologies dans les manuels 5
Etude expérimentale sur une praxéologie personnelle de l'élève 8

Organigramme de la thèse *8*

PARTIE I Problématique de la représentation en perspective **11**

Chapitre 1 Travaux de références **13**

1.1 Représentation en perspective *13*
1.1.1 Définitions 13
1.1.2 Choix de la perspective dans l'enseignement de la Géométrie de l'espace: quelques références aux travaux de didacticiens Français 18

1.2 Deux approches de la projection cylindrique du point de vue théorique *20*
1.2.1 Projection cylindrique : première approche 20
1.2.2 Projection cylindrique : deuxième approche 20
1.2.3 Lien entre les deux approches 21

1.3 Problème de la représentation plane *23*
1.3.1 Mobilisation des propriétés de la perspective 23
1.3.2 Points de vue de construction effective/évoquée 25
1.3.3 Méthode directe, indirecte, de l' « observateur-projeteur » 28
1.3.4 Dessin prototypique 29

1.4 Conclusion *31*

Chapitre 2 Enquête sur les traces de l'évolution de l'enseignement de la représentation en perspective **33**

2.1 En France *33*
2.1.1 Etude des programmes 33
2.1.2 Etude des manuels du groupe 1 35
2.1.3 Etude des manuels du groupe 2 39

2.2 Au Viêt-Nam *48*

2.3 Conclusion *49*

Conclusion de la partie I : objets de notre recherche 51

PARTIE II Analyse institutionnelle comparative de l'objet « représentation en perspective » entre la France et le Viêt-Nam 55

Chapitre 3 Analyse de l'enseignement de la représentation en perspective dans les programmes actuels 57

3.1 En France 57
3.1.1 Etude du programme 57
3.1.2 Etude des manuels et des livres du professeur 59

3.2 Au Viêt-Nam 65
3.2.1 Etude du programme 65
3.2.2 Etude des manuels et des livres du professeur 68

3.3 Conclusion 76

Chapitre 4 Analyse des praxéologies de représentation en perspective 78

4.1 Praxéologies de référence épistémologiques 79
4.1.1 Type de tâches 1 79
4.1.2 Type de tâches 2 84
4.1.3 Type de tâches 3 85
4.1.4 Type de tâches 4 85
4.1.5 Type de tâches 5 86
4.1.6 Type de tâches 6 88
4.1.7 Type de tâches 7 89
4.1.8 Type de tâches 8 90
4.1.9 Récapitulation des praxéologies de référence épistémologiques et questions 91

4.2 Retour à l'institution professionnelle 93
4.2.1 Type de tâches 4 93
4.2.2 Type de tâches 5 94
4.2.3 Type de tâches 6 94
4.2.4 Commentaires sur les praxéologies de l'observation 94

4.3 Praxéologie institutionnelle : le cas de la France 95
4.3.1 Type de tâches 4 95
4.3.2 Type de tâches 5 100
4.3.3 Type de tâches 6 102
4.3.4 Type de tâches 7 104
4.3.5 Type de tâches 8 106
4.3.6 Autres types de tâches 107
4.3.7 Commentaires sur les praxéologies institutionnelles françaises 107

4.4 Praxéologie institutionnelle : le cas du Viêt-Nam 113
4.4.1 Type de tâches 1 113
4.4.2 Type de tâches 2 114
4.4.3 Type de tâches 3 115
4.4.4 Type de tâches 4 116
4.4.5 Type de tâches 5 123
4.4.6 Type de tâches 6 124
4.4.7 Type de tâches 7 125

4.4.8 Type de tâches 8 127
4.4.9 Commentaires sur les praxéologies institutionnelles vietnamiennes 128

4.5 Conclusion 133

Chapitre 5 Analyse des choix des règles de représentation du dessin en perspective dans les manuels : dessins prototypiques 137

5.1 Grille d'analyse des règles de représentation du dessin 137
5.1.1 Règles de conservation et de non-conservation 137
5.1.2 Règles de représentation de la troisième dimension 138
5.1.3 Règles pour un dessin « bien informé » 138

5.2 Règles de représentation du dessin : Cas de la France 140
5.2.1 Règles de représentation explicites du dessin 140
5.2.2 Règles de représentation implicites du dessin 144

5.3 Règles de représentation du dessin : Cas du Viêt-Nam 150
5.3.1 Règles de représentation explicites du dessin 150
5.3.2 Règles de représentation implicites du dessin 153

5.4 Conclusion 156

Conclusion de la partie II : hypothèse de recherche et nouvelle question 159

PARTIE III Etude expérimentale du rapport personnel de l'élève à l'objet « représentation en perspective » 163

Chapitre 6 Analyse *a priori* de la situation expérimentale 167

6.1 Choix du questionnaire 167

6.2 Analyse a priori de chacune des questions 171
6.2.1 Question 1 171
6.2.2 Question 2 173
6.2.3 Question 3 177

6.3 Synthèse de l'analyse a priori 181

Chapitre 7 Analyse *a posteriori* 183

7.1 Analyse globale 184

7.2 Les dessins 1.3, 2.1, 2.4 et 3.4 sont-ils prototypiques ? 187
7.2.1 Analyse des acceptations/refus 187
7.2.2 Analyse des justifications 188
7.2.3 Synthèse 189

7.3 Analyse des réponses aux dessins à pointillés non-prototypiques (dessins 1.2, 2.3 et 3.2) 190
7.3.1 Analyse des acceptations/refus 190
7.3.2 Analyse des justifications 191
7.3.3 Synthèse 194

7.4 Analyse des réponses des dessins non-prototypiques sans pointillés 195
7.4.1 Analyse des acceptations/refus 195
7.4.2 Analyse des justifications 197
7.4.3 Synthèse 203

7.5 Conclusion 203

Conclusion 205

Principaux résultats de la thèse 205

Apports, limites et perspectives 209

Bibliographie 211

Annexe 217

Introduction

La géométrie de l'espace a une importance mathématique indéniable dans différents métiers, mais aussi dans l'enseignement des mathématiques et celui d'autres disciplines scientifiques ou technologiques. L'étude des objets de l'espace se fait fréquemment à l'aide d'une représentation en perspective.

> L'habileté spatiale nécessite une certaine maîtrise de la représentation de l'espace.
> (Audibert, 1992, p. 49)

Traditionnellement, le début de l'enseignement de la géométrie de l'espace est articulé avec l'étude des solides puis avec la représentation en perspective. Cette dernière est considérée comme une représentation sémiotique au sens de Duval (Duval, 1993 et 1994) permettant d'appréhender les objets de l'espace et de fait, elle joue un rôle important dans la conceptualisation des notions mathématiques et dans la résolution des problèmes de la géométrie de l'espace (Parzysz, 1991) (Chaachoua, 1997). Mais, l'utilisation de ces représentations ne va pas de soi et peut même être source de difficultés pour les élèves. En effet, la représentation des objets géométriques de l'espace, de dimension trois, par des dessins sur une feuille de papier, de dimension deux, se fait par une ou plusieurs projections. De ce fait, dans le cas d'une seule projection, il y a forcément perte d'informations. D'où la nécessité de faire appel à des codes pour la lecture et l'écriture de ces représentations (Bkouche et Soufflet, 1983). Plusieurs travaux (Parzysz, 1991) (Chaachoua, 1998) ont souligné le besoin de prise en charge de l'enseignement et l'apprentissage de la représentation en perspective.

Tout d'abord, l'existence de l'objet « représentation en perspective » dans l'enseignement ne signifie ni que cet objet soit mathématique ni qu'il soit objet d'enseignement - au sens où on le définit et/ou on étudie ses propriétés. D'où les deux questions :

Q1) La représentation en perspective est-elle un objet de savoir mathématique ? Si oui, comment peut-elle être définie ?
Q2) La représentation en perspective est-elle ou a-t-elle été un objet d'enseignement ?

Dans la partie I, nous conduirons une analyse épistémologique (Chapitre 1) et mènerons une enquête sur les traces de l'évolution de l'enseignement (Chapitre 2) de cette notion afin de mettre en évidence la présence de l'objet « représentation en perspective », et sous quelle forme, en mathématiques (Q1) et dans l'enseignement des mathématiques (Q2).

Ensuite, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'enseignement actuel dans deux systèmes éducatifs: Français et Vietnamien. D'où la troisième question :

Q3) La représentation en perspective est-elle présente dans l'enseignement actuel en France et au Viêt-Nam ? Où et comment ?

On peut supposer que des systèmes éducatifs différents ont des intentions d'enseigner et des manières d'approcher différentes pour cette notion. D'où la quatrième question :

Q4) Quels sont les effets des choix de deux systèmes d'enseignement français et vietnamien sur l'apprentissage des élèves ?

Les questions Q3 et Q4 sont au cœur de notre recherche. En nous plaçant dans le domaine de la didactique des mathématiques, nous présentons dans la suite les choix théoriques et méthodologiques pour y répondre.

Cadre théorique

Notre travail s'appuie essentiellement sur les outils de la théorie anthropologique du didactique : *rapport institutionnel*, *rapport personnel* et *praxéologie*. Nous présentons ci-dessous une synthèse de ces outils.

Rapport institutionnel et rapport personnel

Pour notre étude, nous nous intéressons d'abord aux notions de « rapport institutionnel » et de « rapport personnel » de la théorie anthropologique du didactique.

> Un objet existe dès lors qu'une personne X ou une institution I reconnaît cet objet comme un *existant* (pour elle). Plus précisément, on dira que l'objet O *existe pour X* (respectivement, *pour I*) s'il existe un objet, que je note R(X,O) (resp. $R_I(O)$), que j'appelle *rapport personnel de X à O* (resp. *rapport institutionnel de I à O*).
>
> (Chevallard, 1992, p. 86)

Dans notre cas, l'objet O est la « représentation en perspective », les institutions concernées sont celles de l'enseignement de la Géométrie de l'espace en France et au Viêt-Nam. Ainsi, nous centrons notre étude didactique sur les rapports institutionnel (partie II) et personnel (partie III) à l'objet « représentation en perspective ».

> Le problème central en didactique est donc celui de l'étude du rapport institutionnel, de ses conditions et de ses effets. L'étude du rapport personnel est un problème pratiquement fondamental, mais épistémologiquement second, de la didactique.
>
> (Chevallard, 1989, p. 93)

Notons que le rapport institutionnel dépend de la position du sujet dans l'institution.

> Etant donné alors un objet institutionnel O, il existe – contrairement à ce que j'ai feint de dire jusqu'ici -, non un rapport institutionnel unique $R_I(O)$, mais, pour chaque position p au sein de I, un rapport institutionnel à O *pour les sujets de I en position p*. Je note ce rapport $R_I(p,O)$.
>
> (Chevallard, 1992, p. 90)

Nous nous limitons au cas de l'élève, c'est-à-dire, nous n'étudions le rapport institutionnel à l'objet « représentation en perspective » qu'en position d'élève et le rapport personnel de l'élève à cet objet.

Praxéologie

a) Notion de praxéologie

Du point de vue méthodologique, la praxéologie est introduite par Chevallard et Bosch (1999) comme un outil efficace pour décrire le rapport institutionnel. Nous l'appelons, dans notre travail, « **praxéologie institutionnelle** ».

> Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permettre la description et l'étude des conditions de réalisation. Les derniers développements de la théorisation viennent combler ce manque. La notion clé qui apparaît alors est celle d'organisation praxéologique ou praxéologie.
>
> (*Op. cité*, p. 85)

D'où l'hypothèse de travail : L'étude du rapport institutionnel peut être effectuée par l'analyse praxéologique. La théorie anthropologique du didactique considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique τ, justifié par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. En bref, elle part du postulat que toute activité humaine met en œuvre une organisation que Chevallard (1999) note [T/τ/θ/Θ] et nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. Le mot de praxéologie souligne la structure de l'organisation [T/τ/θ/Θ] : le grec praxis, qui signifie « pratique », renvoie au bloc practico-technique (ou praxique) [T/τ], et le grec logos, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au bloc technologico-théorique [θ/Θ].

Ces notions permettent de redéfinir certaines notions courantes : on peut considérer que le bloc [T/τ] représente ce que l'on désigne habituellement par savoir-faire ou praxis, et que le bloc [θ/Θ] représente ce que l'on désigne usuellement par savoir (au sens restreint) ou logos. Chevallard (1999) désigne alors une praxéologie [T/τ/θ/Θ] tout entière comme étant une organisation de savoir.

Ce modèle de la praxéologie constitue une brique élémentaire. Ces briques élémentaires viendront en général s'amalgamer pour constituer des praxéologies locales dans lesquelles on aura plusieurs savoir-faire justifiés par le même savoir, des praxéologies régionales où la même théorie justifiera plusieurs technologies, qui à leur tour justifieront plusieurs blocs type de tâches/technique ; des praxéologies globales enfin qui comprendront plusieurs théories.

> Le tout, noté [T/τ/θ/Θ], constitue une praxéologie ponctuelle. Ce qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, T.
> […] On ne rencontre en fait que rarement des praxéologies ponctuelles. Généralement, en une institution I donnée une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à autant de types de tâches T_{ij}. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations locales, [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$], centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisation régionales, [$T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta$], formées autour d'une théorie Θ. (Au-delà, on nommera organisation globale le complexe praxéologique [$T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k$] obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k).
>
> (Chevallard, 1999, pp. 228, 229)

Ces niveaux permettent d'évaluer la portée d'influence des éléments de technologie et de théorie.

Pour décrire les praxéologies nous nous référons au cadre de référence T4TEL[1] développé par Chaachoua (2010), Chaachoua et al. (2013).
- Un type de tâches est décrit par un verbe d'action, un complément et des variables. Le verbe d'action permet de définir le genre de tâches (par exemples : calculer, déterminer, montrer,…). Le complément précise sur quoi porte le verbe d'action. Les variables peuvent prendre différentes valeurs et sont de différentes natures : didactique, institutionnelle, cognitive...
- Une technique est décrite par une liste de types de tâches.
- Une technologie est caractérisée par un ensemble d'énoncés qui peuvent avoir différents statuts : définition, théorème, propriétés, théorème-en-acte, règle du contrat didactique… Les statuts théorème-en-acte et règle du contrat didactique permettent de justifier les techniques personnelles.

b) Praxéologie institutionnelle et praxéologie personnelle

Comme nous l'avons dit plus haut, la praxéologie a été introduite pour modéliser le rapport institutionnel : elle sera désignée dans la suite par « **praxéologie institutionnelle** ». Chaachoua (2010) a proposé une extension de la notion de praxéologie comme modélisation de pratiques institutionnelles à la modélisation des pratiques d'un élève en tant que sujet d'une institution en la désignant par « **praxéologie personnelle** » que nous présentons de façon synthétique.

> Face à une tâche donnée t, l'institution attend d'un élève la mise en place d'une technique qui relève d'une organisation mathématique institutionnelle associée à la tâche t. La non conformité du rapport personnel à t se traduit par la mise en œuvre d'une technique soit scientifiquement valide mais non adéquate institutionnellement soit scientifiquement non valide
>
> (Croset et Chaachoua, soumis)

Ces techniques se distinguent des techniques institutionnelles et, dans certains cas, le décalage entre la technique τ de l'élève et la technique attendue par l'institution peut s'expliquer comme si, pour l'élève, la tâche t relevait d'un type de tâches différent de celui de l'institution.

Chaachoua (2010) désigne par *praxéologie personnelle* le quadruplet d'organisation praxéologique de l'activité d'un sujet institutionnel constitué de quatre composantes.
- Un type de tâches personnel est l'ensemble des tâches que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une technique.
- Une technique personnelle utilisée par l'élève permet de résoudre un seul type de tâches personnel. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non.
- Une technologie personnelle, explicite ou non, gouverne et légitime l'utilisation de praxis personnelles. Souvent un simple déficit technologique institutionnel peut être à même d'expliquer des techniques personnelles erronées. Mais il est parfois des situations où une

[1] Ce cadre de référence a été développé depuis les travaux de Chaachoua (2010) comme élargissement modèle praxéologique aux praxéologies personnelles et son adaptation pour le rendre calculable dans un environnement informatique (Chaachoua et al., 2013). Le nom T4TEL est une dénomination récente qui fera objet d'une publication en cours.

technologie qui avait sa légitimité pour répondre à certains types de tâches se trouve être généralisée et utilisée par des élèves en dehors de la portée de la technique qu'elle légitimait.

> Soulignons qu'une technologie, qu'elle soit personnelle ou institutionnelle, ne se réduit pas à un ensemble de théorèmes ou de règles mathématiques. C'est un discours qui permet de justifier, de produire, de contrôler et d'adapter une technique. Elle est constituée de plusieurs ingrédients qui peuvent relever des mathématiques, des règles du contrat didactiques ou institutionnelles… Les technologies personnelles peuvent contenir des ingrédients non conformes aux attentes institutionnelles.
>
> (Croset et Chaachoua, soumis)

- Une théorie personnelle qui, à son tour, à l'instar du modèle institutionnel, justifie la technologie personnelle.

Principaux choix méthodologiques

Le cadre théorique ci-dessus nous permet de préciser les choix méthodologiques pour répondre aux questions Q3 et Q4.

Analyse institutionnelle comparative des praxéologies dans les manuels

La question Q3 est liée à une analyse institutionnelle relativement à l'objet de savoir « représentation en perspective ». D'abord, nous cherchons à construire un modèle épistémologique : praxéologies de référence. Ensuite, nous les appliquons à une analyse comparative des praxéologies institutionnelles françaises et vietnamiennes. Les matériaux de cette analyse sont des programmes et des manuels actuels.

Nous expliquons par la suite la nécessité et les apports des choix méthodologiques : « praxéologie de référence », « analyse institutionnelle comparative », « analyse des manuels » dans notre recherche.

a) Praxéologie de référence

Du point de vue de la transposition didactique, Bosch et Gascón (2005) parlent de la nécessité de l'ajout d'un modèle épistémologique « praxéologie de référence » permettant de caractériser et analyser des praxéologies à enseigner.

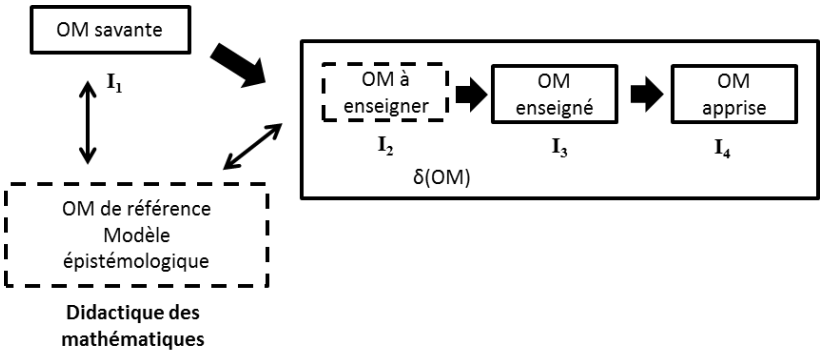


Figure 1. Schéma des processus didactiques (Op. cité, p. 117)

> L'OM[2] à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum de mathématiques. La base empirique pour élaborer ce modèle se trouve dans les documents curriculaires (programmes officiels) et dans les manuels. Son influence sur δ(OM)[3] est centrale bien que ni le professeur ni l'institution scolaire de dispose explicitement de ce modèle mais uniquement de matériaux praxéologiques plus ou moins bien articulés entre eux.
> Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM de référence dont la description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subir pour cela de permanents remaniement.
>
> (Op. cité, p.117)

Notre travail se limite aux « OM de référence » et « OM à enseigner » dans le schéma de la Figure 1. Les praxéologies de référence nous serviront à l'élaboration d'une grille d'analyse pour caractériser et comparer les praxéologies des deux institutions française et vietnamienne. La construction de ce modèle de référence se base sur :

- l'analyse épistémologique concernant le savoir « représentation en perspective » (Chapitre 1),
- l'enquête des traces de l'évolution de l'enseignement de l'objet « représentation en perspective » (chapitre 2),
- l'analyse de la partie « Cours », des parties « activités », « exercices » et celle des dessins en perspective dans ces parties dans les manuels français et vietnamiens actuels (chapitre 3, 4, 5).

Notons que l'analyse des praxéologies d'une institution peut venir compléter les praxéologies de référence. A son tour, cet ajout peut être utilisé pour analyser les praxéologies d'une autre institution. Ainsi, notre méthodologie s'inscrit dans l'aller-retour entre praxéologies de référence et praxéologies institutionnelles.

Les praxéologies de référence décrivent les techniques possibles de résolution d'un type de tâches lié à la représentation en perspective ainsi que les technologies/théories qui les engendrent et les justifient.

Dans la praxéologie de référence, nous allons spécifier les « variables de type de tâches » qui modélisent des choix possibles pour chacun des types de tâches que nous allons étudier. Nous décrirons, ensuite les techniques et les technologies. C'est en nous appuyant sur ces praxéologies de référence que nous analyserons les activités et les exercices des manuels des deux pays, France et Viêt-Nam, afin de caractériser les praxéologies institutionnelles.

[2] Organisation mathématique.
[3] Organisation didactique associée à l'organisation mathématique (OM) locale relativement complète.

b) Analyse institutionnelle comparative

L'analyse institutionnelle comparative a été déjà utilisée dans plusieurs thèses en cotutelle des doctorants vietnamiens en France. A partir de ces travaux, Bessot et Comiti (2013) ont dégagé les apports fondamentaux d'une analyse didactique comparative suivants :

> 1. Dénaturalisation du regard sur le fonctionnement scolaire d'une institution didactique (*cf.* Tran Luong 2006)
> 2. Nécessité de la prise en compte de niveaux de détermination plus élevés que celui du domaine (*cf.* Le Van 2001)
> 3. Importance de l'étude des rapports institutionnels pour l'évaluation des praxéologies mathématiques (*cf.* Nguyen 2006)
> 4. Recherche de conditions et contraintes essentielles à l'existence d'une séquence d'enseignement sur un thème donné (ingénierie didactique) pour enrichir le questionnement sur l'autre système et faire émerger du générique (*cf.* Le Thai Bao 2007)
>
> (Op. cité, p.74)

La comparaison institutionnelle peut se faire selon deux axes : synchronique et diachronique. Pour le premier nous nous appuyons sur les programmes actuels de l'école primaire, du collège, du lycée dans les deux institutions française et vietnamienne. Cela nous permet de

> - mettre en évidence et caractériser les productions différentes et similaires de la transposition didactique d'un même objet de savoir […] ;
> - questionner les ressemblances et dissemblances institutionnelles en termes de conditions et de contraintes ;
> - initier un répertoire de praxéologies existantes et envisager leurs développements possibles.
>
> (Tran Luong, 2006, p. 7)

Une partie de l'analyse diachronique sera abordée dans l'enquête des traces de l'évolution de l'enseignement de la représentation en perspective (Chapitre 2).

c) Analyse des manuels

L'étude du rapport institutionnel peut être faite selon plusieurs manières :

> Pour déterminer le rapport institutionnel aux objets de certaines organisations mathématiques, on peut procéder à l'analyse des programmes, des manuels et/ou à des observations dans une classe sous les contraintes relative à son fonctionnement interne.
>
> (Chaachoua et Comiti, 2010, p. 773)

Dans notre étude, nous nous intéressons particulièrement aux analyses des programmes et des manuels actuels.

L'analyse du programme nous aide, d'une part, à préciser les moments de présence de l'objet « représentation en perspective » dans le processus d'enseignement, d'autre part, à montrer des contraintes, les différentes manières d'approcher l'enseignement de ce savoir et son évolution curriculum possible.

> Dans les programmes, l'institution définit les objets à enseigner, ses attentes en termes d'exigences et de recommandations, les finalités et les enjeux de l'enseignement.
>
> (*Ibid.*, p. 773)

L'analyse du manuel est considérée comme un complément méthodologique de la précédente.

> Pour accéder à ce rapport institutionnel, l'analyse des manuels est nécessaire et complémentaire de l'analyse des programmes. En particulier, lorsque l'accès au fonctionnement effectif dans une classe n'est pas jugée nécessaire, ou n'est pas accessible, Teresa Assude (1996) a considéré un manuel comme un texte de savoir, en supposant que « le texte du savoir est assez représentatif d'une " moyenne pondérée à plusieurs contraintes " du rapport institutionnel aux objets de savoir mathématiques présents dans les différents systèmes didactiques qui réalisent effectivement ce texte de savoir » (p.50).
>
> (*Ibid.*, p. 773)

Etude expérimentale sur une praxéologie personnelle de l'élève

La question Q4 est liée à une recherche sur les praxéologies personnelles. Dans notre étude, nous nous limiterons au choix d'un type de tâches existant dans les institutions observées, et nous étudierons les praxéologies personnelles des élèves correspondantes au travers d'une expérimentation (Chapitre 7).

La construction d'un modèle de référence des praxéologies (Chapitre 4) participe à construction de l'analyse *a priori* (Chapitre 6) et à la confrontation des praxéologies personnelles de l'élève aux praxéologies institutionnelles dans l'expérimentation (Chapitre 7).

Organigramme de la thèse

La structure de ce manuscrit est présentée dans l'organigramme suivant (Figure 2).

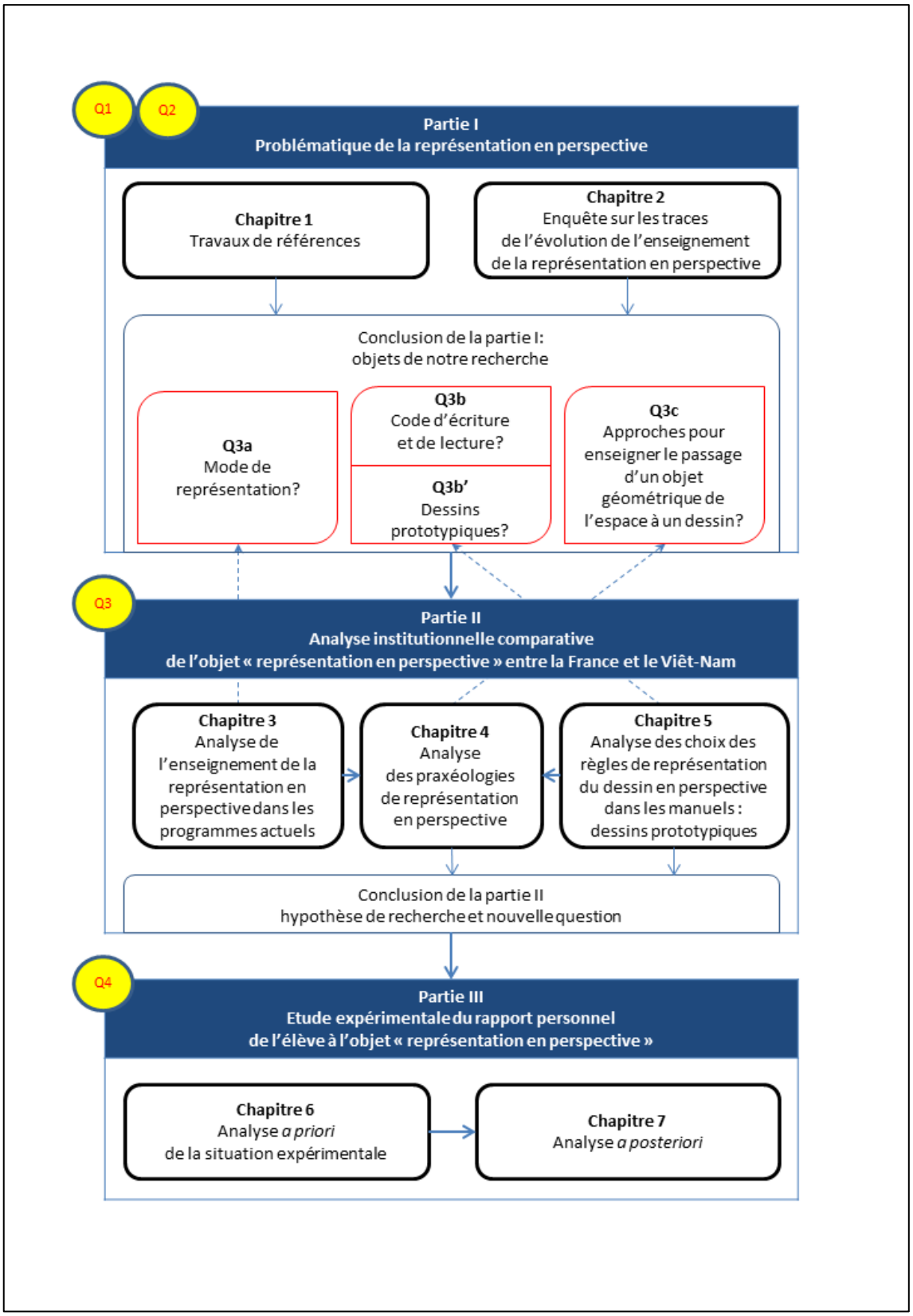


Figure 2. Organigramme de la thèse

PARTIE I

Problématique de la représentation en perspective

Chapitre 1
Travaux de références

Nous présenterons, dans ce premier chapitre, une synthèse de quelques principaux résultats de recherches, concernant la représentation en perspective, auxquels nous nous référons dans la thèse. Le contenu de ce chapitre a pour objectifs de :
- dégager les caractéristiques épistémologiques de la représentation en perspective,
- repérer les types de problèmes rencontrés lors de la représentation plane des objets de l'espace dans l'enseignement de la Géométrie de l'espace.

1.1 Représentation en perspective

Nous commencerons par la consultation des définitions des notions relatives à la représentation en perspective au niveau de la noosphère, puis nous étudierons les processus qui permettent d'obtenir une représentation en perspective. Cela nous conduira à des questions sur l'enseignement de ce savoir. Pour cela, nous nous appuyons sur des travaux de didactique des mathématiques portant sur la représentation en géométrie de l'espace ainsi que sur des dictionnaires de mathématiques destinés aux enseignants…

1.1.1 Définitions

Dans l'histoire, la représentation de l'espace apparaît assez tôt en raison de l'exigence de la communication, par exemple dans les peintures, les dessins de construction d'un château, d'une cathédrale,… Au début, elle n'est pas théorisée par des règles mathématiques mais se base sur l'observation avec l'intention de «conserver » le mieux possible ce qu'on voit, ou ce qu'on imagine, sur une surface matérielle.

> On trouve au Moyen-Age des représentations de villes en perspective axonométrique (venue de l'Orient) ; au seizième siècle les militaires représentent les fortifications par des plans cavaliers encore mal structurés ; ceux-ci donneront son nom, plus tard, à la perspective cavalière. Il semble que les premiers utilisateurs de représentations planes aient d'abord cherché à représenter ce qu'ils savaient, sans avoir les moyens théoriques de s'assurer de la cohérence de leur dessin ; leur seul contrôle étant celui de l'interprétation : le dessin est-il suffisamment proche de la réalité pour être compris ?
>
> (Bautier et al., 1988, pp. 129, 130)

Plus tard, on la définit grâce à la notion de projection. La représentation peut être effectuée selon plusieurs manières différentes. Chacune se caractérise par une projection et par un nombre de dessins différents. Par exemple, Audibert (1992) présente six principales représentations de l'espace :

- la perspective linéaire[4],

> La perspective linéaire (notée PL en abrégé) d'un objet est un dessin obtenu comme projection conique de cet objet sur un plan.
>
> (*Op. cité,* p. 51)

- la perspective cavalière,

> La perspective cavalière (notée PC en abrégé) d'un objet est un dessin obtenu en projetant cet objet sur un plan selon une projection cylindrique oblique ; la direction de la projection n'est ni perpendiculaire ni, bien entendu, parallèle au plan de projection.
>
> (*Ibid.,* p. 50)

- la perspective axonométrique,

> La perspective axonométrique (notée PA en abrégé) d'un objet est un dessin obtenu en projetant orthogonalement cet objet sur un plan.
>
> (*Ibid.,* p. 50)

- les vues de dessin technique,

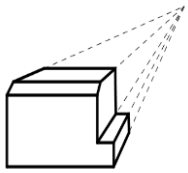
> Les vues d'un objet sont six dessins obtenus en projetant orthogonalement cet objet sur six plans constituant les faces d'un cube et en développant ensuite ce cube sur un plan.
>
> (*Ibid.,* p.50)

- l'épure de géométrie descriptive,

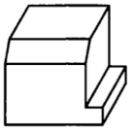
> L'épure de géométrie descriptive d'un objet est constituée de deux dessins obtenus en projetant orthogonalement cet objet sur deux plans perpendiculaires qui sont ensuite développés sur un même plan. Des lettres sont utilisées pour coordonner les deux dessins.
>
> (*Ibid.,* p. 50)

- l'épure de géométrie cotée,

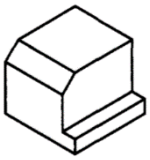
> L'épure de géométrie cotée d'un objet est un dessin obtenu en projetant orthogonalement cet objet sur un plan. Les cotes de certains points de l'objet sont indiquées sur le dessin.
>
> (*Ibid.,* p.50)



Perspective linéaire

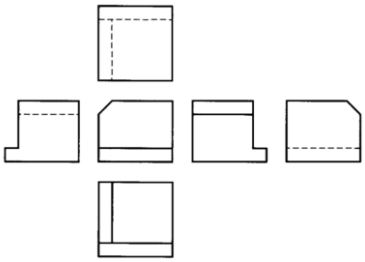


Perspective cavalière

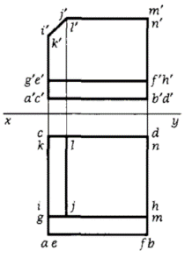


Perspective axonométrique

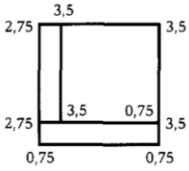
[4] On l'appelle aussi « perspective conique », « perspective centrale », « perspective vraie » ou « perspective à point de fuite ».



Vues de dessin technique



Epure de géométrie descriptive



Epure de géométrie cotée

Figure 3. Exemples de la représentation d'un objet de l'espace selon différentes manières[5]

Il existe bien sûr d'autres modes de représentation, par exemple la perspective curviligne qui permet de représenter un objet sur une surface sphérique.

Dans notre recherche – une étude didactique, nous nous intéressons exclusivement à des représentations en perspective sur une surface plane.

> Il existe plusieurs représentations d'un objet de l'espace sur un plan. Cependant, en conclusion de l'expérimentation sur la représentation de l'espace, AUDIBERT D. (1985) peut affirmer que l'élève a besoin d'une représentation de l'espace constituée par un dessin dans lequel les trois dimensions principales longueur, largeur et hauteur sont représentées par trois directions distinctes ; il a besoin d'une perspective.
>
> (Audibert et Keita, 1988, p. 109, 110)

Cette citation montre que le dessin d'une représentation en perspective doit s'attacher aux trois directions de l'objet de l'espace. Pour mettre en évidence cette notion, examinons les définitions de la notion « perspective » dans les dictionnaires, surtout ceux destinés aux enseignants de mathématiques.
Dans le dictionnaire « Dico de mathématiques : collège et CM2 »,

> La perspective est la recherche d'une manière de rendre compte, sur une surface plate, du relief des objets selon leur position et leur éloignement, et de la profondeur de l'espace qui les contient. Il s'agit donc de donner le sentiment que ce qui est représenté sur cette surface plate correspond à ce que l'on voit en réalité. [...] La perspective est donc un mode de représentation qui déforme la réalité des objets et de l'espace pour mieux donner le sentiment... qu'elle est fidèle à la réalité. C'est un art de l'illusion, qui pose de nombreuses questions aux peintres, aux dessinateurs, et aux praticiens des mathématiques.
>
> (Baruk, 2008, pp. 530, 531)

Selon le « Dictionnaire du professeur des écoles : enseignement des mathématiques », la perspective est un « ensemble des conventions permettant de représenter sur une feuille de papier une figure de l'espace à trois dimensions » (Corrieu, 1999, p. 108).

[5] Nous reprenons les dessins extraits d'Audibert (1992, pp. 50, 51), sauf pour le premier, où nous en créons un nouveau pour mieux différencier le dessin en perspective linéaire de celui en perspective cavalière.

Ces deux citations montrent l'existence de deux conceptions sur l'objet d'entrée de la perspective : d'après (Baruk, 2008), il s'agit d'un objet physique alors que, selon Corrieu (1999), il s'agit d'un objet géométrique de l'espace.
Nous considérerons, dans notre étude, la perspective comme un processus de transformation d'un objet à trois dimensions en un objet à deux dimensions situé sur une surface matérielle (une feuille de papier, un tableau, un écran,...). Cet objet à trois dimensions peut être soit un objet physique comme pour (Baruk, 2008), soit un objet géométrique de l'espace comme pour Corrieu (1999).
Pour comprendre et analyser les processus en jeu nous allons nous appuyer sur le schéma de Chaachoua (1998, p. 40) qui considère 4 types d'objets : Objet géométrique de l'espace, Objet physique, Objet géométrique du plan et Dessin (Figure 4).

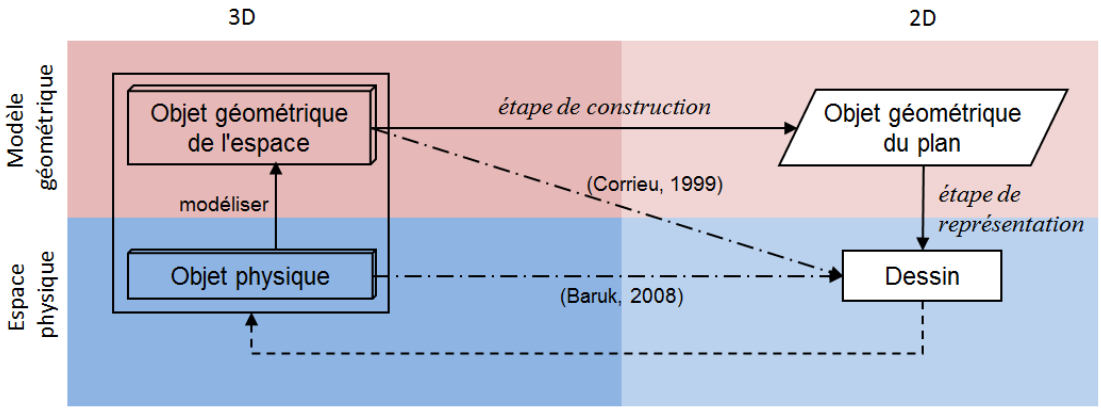


Figure 4. Représentation en perspective

Le processus de transformation selon Corrieu peut être interprété par deux étapes :

- le passage de l'objet géométrique de l'espace vers l'objet géométrique du plan : qu'on appellera étape de construction
- le passage de l'objet géométrique du plan vers le dessin : qu'on appellera étape de représentation.

Pour le processus de transformation selon Baruk, il faut ajouter une étape de modélisation qui permet de passer de l'objet physique à l'objet géométrique de l'espace.

<u>Etape de construction</u>

Il s'agit de transformer l'objet géométrique de l'espace en un objet géométrique du plan selon certaines règles mathématiques. C'est le domaine des projections. Une perspective d'un objet géométrique de l'espace est son image par une projection[6], ses propriétés sont celles de la projection. Le Tableau 1 présente la correspondance des perspectives par rapport aux projections.

[6] Voir la classification des projections dans l'Annexe 1.

Perspective	Projection
Perspective linéaire	Projection conique (centrale)
Perspective cavalière	Projection cylindrique oblique[7]
Perspective axonométrique	Projection cylindrique orthogonale[8]
Perspective cylindrique (parallèle)	Projection cylindrique (parallèle)[9]

Tableau 1. Correspondance des perspectives par rapport aux projections

Ce passage de trois dimensions à deux dimensions provoque nécessairement une perte d'information.

Etape de représentation

Il s'agit de représenter, avec les contraintes géométriques issues de la construction de l'étape de construction, l'objet géométrique du plan par un dessin sur un support matériel (papier, écran d'ordinateur par exemple). Pour compenser les informations perdues dans la première étape et pouvoir revenir au signifié du dessin, l'objet à trois dimensions, on a besoin de codes d'écriture et de lecture.

> Une situation spatiale apparaît ainsi à travers une représentation qui la transforme en figure plane, ceci nécessite l'explication d'un code, code d'écriture et code de lecture.
>
> (Bkouche et Soufflet, 1983, p. 16)

En plus, avec une perspective donnée, il y a plusieurs dessins possibles correspondant aux différentes valeurs de paramètres de la projection. Parmi eux, on a alors besoin de sélectionner des dessins qui sont capables de suggérer correctement l'objet de l'espace, ce qui conduit aux choix des paramètres de la projection.

> […] le but de toute perspective est de faire en sorte que la vision d'une image à deux dimensions corresponde à la vision de l'objet qu'elle représente afin de pouvoir substituer l'image à l'objet.
>
> (Bonafé, 1988, p. 153)

De l'étude précédente, nous retenons deux questions concernant les choix de l'enseignement relatifs à la représentation des objets de l'espace :

Q3a) Q*uel(s) mode (s) de représentation est (sont) choisi(s) dans l'enseignement ?*

Q3b) *Quels sont les codes d'écriture et de lecture mobilisés dans l'enseignement ?*

Ces deux questions seront traitées dans la partie 2 de la thèse. Néanmoins, dans le prochain paragraphe nous allons aborder la question 1 à partir de certains travaux français.

[7] On l'appelle brièvement « projection oblique ».
[8] On l'appelle brièvement « projection orthogonale ».
[9] Elle regroupe deux projections : projection cylindrique oblique et projection cylindrique orthogonale. Autrement dit, ces deux projections sont des cas particuliers de la projection cylindrique.

1.1.2 Choix de la perspective dans l'enseignement de la Géométrie de l'espace: quelques références aux travaux de didacticiens Français

Il s'agit ici de répondre à la question Q3a, sur les modes de représentation choisis dans l'enseignement, en analysant les choix en termes d'avantages et d'inconvénients. Comme nous l'avons vu en 1.1.1, on peut représenter un objet géométrique de l'espace en utilisant plusieurs dessins en même temps, par exemple, les vues du dessin technique ou l'épure de la géométrie descriptive. Pourtant, il est difficile de « synthétiser » des vues différentes pour reconnaître l'objet de l'espace. C'est pourquoi on privilégie dans l'enseignement des perspectives à un seul dessin plutôt que celles qui mobilisent plusieurs vues.

> Le fait qu'un seul dessin représente un seul objet facilite la lecture du dessin. Cette situation permet d'aborder plus aisément l'apprentissage de la représentation car elle évite les difficultés de coordination entre les différents dessins inhérentes aux vues et à la géométrie descriptive.
>
> (Audibert, 1992, p. 52)

Parmi les perspectives, la perspective linéaire donne le dessin le plus proche de la réalité. Elle est beaucoup utilisée dans l'art. En effet, son apparition est liée à l'innovation de la peinture.

> En particulier grâce aux nouvelles méthodes de la perspective linéaire, les artistes étaient désormais capables de donner de la « profondeur » à leurs fresques et à leurs bas-reliefs.
>
> (Thuillier, 1984, p. 1384)

Toutefois, attachée à la projection conique, elle ne conserve, en général, ni le parallélisme, ni le rapport – propriétés importantes sur lesquelles les élèves travaillent régulièrement. Par ailleurs, elle convient moins aux élèves à cause de sa complexité et de sa difficulté pour la réalisation du dessin.

> [Perspective conique] C'est la perspective qui donne l'image la plus réelle, mais son exécution est très délicate.
>
> (Adrait et al., 2002, p. 19)

Il semble qu'une perspective acceptable dans l'enseignement doit satisfaire au moins deux conditions : la visualisation et la conservation la plus nombreuse possible des propriétés géométriques de l'objet de l'espace représenté.

> Représenter en deux dimensions un objet tridimensionnel soulève en effet un problème de taille : l'idéal serait de pouvoir le représenter tel qu'il se présente habituellement au regard (préservation du voir), tout en conservant sur la représentation l'ensemble de ses propriétés (préservation du savoir).
>
> (Parzysz, 1991, p. 216)

Cependant, il est difficile d'assurer entièrement ces deux conditions en même temps. Il est donc plus faisable d'éliminer partiellement l'aspect du voir et l'aspect du savoir d'une perspective afin d'accéder à un statut d'équilibre du « conflit voir / savoir ».
Pour Parzysz (1991), la perspective parallèle est, du point de vue épistémologique, une bonne solution remplaçant de la perspective linéaire.

> La raison de ce choix [de perspective parallèle] pour les dessins de géométrie, outre la facilité d'exécution, doit être cherchée dans le fait que la perspective parallèle réalise un compromis acceptable entre le voir et le savoir (transfert de propriétés).
>
> (*Ibid.*, p. 219)

En effet, pour l'aspect du savoir, toutes les propriétés affines sont conservées à travers la perspective parallèle. Pour l'aspect du voir, la « similarité » de la perspective parallèle et de la perspective linéaire dans quelques conditions spécifiques permet d'assurer la suggestion de l'objet de l'espace à partir du dessin.

> Il faut enfin remarquer que, en chaque point, l'application affine tangente à une projection centrale est une projection parallèle ; cela veut dire que si l'on s'intéresse à des objets vus sous un angle petit (correspondant par exemple au champ de la fovéa) les différences entre les représentations en perspective conique et en perspective parallèle ne seront pas perçues par l'œil. Cela contribue à expliquer pourquoi les dessins en perspective cavalière sont, malgré l'abstraction signalée plus haut, souvent directement interprétables. Par contre, si l'œil balaie un champ plus large, les différences deviennent perceptibles, du moins pour des objets tels que cubes ou polyèdres familiers.
>
> (Bautier et al., 1988, p. 129)

Cependant, Audibert et Keita (1988) constatent que c'est la perspective cavalière qui est utilisée pour les dessins de représentation dans l'enseignement en France.

> Mais on constate dans l'enseignement des mathématiques que la quasi-totalité des dessins représentant des objets de l'espace utilisent une perspective bien précise : la perspective cavalière.
>
> (*Op. cité,* p. 110)

De plus, Audibert (1992) affirme la possibilité de son enseignement dès le début de secondaire.

> […] si on souhaite que les élèves apprennent à dessiner, si on veut qu'ils réalisent eux-mêmes des représentations, donnons la priorité à un apprentissage de la PC [perspective cavalière] [...]. Cet apprentissage peut être entrepris de façon efficace et sans faire appel au concept de projection dès 11 ans.
>
> (*Op. cité*, pp. 52-53)

Ceci est expliqué par la caractéristique « naturelle » de ses règles de représentation.

> Si la PC [perspective cavalière] s'adapte bien aux démarches de nos élèves, c'est parce qu'elle fait intervenir des règles de dessin déjà bien enracinées dans leurs connaissances.
>
> (Audibert et Keita, 1988, p. 111)

Ces règles se caractérisent par la conservation des verticales[10], la conservation du milieu, la représentation en vraie grandeur de la face avant.
Dix ans après, Bonafé et Sauter (1998) partagent cette idée et l'expliquent par la satisfaction de deux conditions mentionnées ci-dessus.

[10] « les verticales restent verticales » (Audibert et Keita, 1988, p. 112)

> Notre enseignement privilégie la perspective cavalière, qui est un des procédés codifiés de représentations de l'espace […]. Ce choix présente comme avantages une assez bonne restitution de la vision de l'objet, la conservation du parallélisme ainsi que celle des proportions dans chaque direction de l'espace.
>
> (*Op. cité*, p. 5)

En bref, bien que la perspective parallèle soit, sur le plan épistémologique, convenable, c'est la perspective cavalière – un de ses cas particuliers – qui est privilégiée dans l'enseignement.

1.2 Deux approches de la projection cylindrique du point de vue théorique

Dans la section 1.1.2, nous avons vu que la perspective parallèle est un choix convenable pour l'enseignement de la Géométrie de l'espace. Plus particulièrement, c'est la perspective cavalière – un de ses cas particuliers – qui est privilégiée par le système éducatif français. Dans cette section, nous étudierons ces perspectives d'un point de vue théorique, en mettant l'accent sur leur première étape – étape de construction où interviennent les projections. Les résultats de recherche cités ici proviennent des publications d'Audibert (1990) – « La perspective cavalière », et du Groupe de Géométrie de Bordeaux (1991) – « Point de départ en Géométrie de l'espace ». A partir de ces ouvrages, nous déterminons deux manières d'approcher la projection cylindrique.

1.2.1 Projection cylindrique : première approche

Dans la première approche, la projection cylindrique est une « application » ainsi définie :

> Etant donné dans l'espace à trois dimensions un plan P et une droite D non-parallèle à P, on appelle projection cylindrique sur le plan de projection P selon la direction de la droite D, l'application qui à tout point M de l'espace fait correspondre le point M' de P tel que M' et M appartient à une droite de direction D.
>
> (Audibert, 1990, p. 66)

La règle de projection permet de passer d'un objet géométrique de l'espace à un objet géométrique du plan en construisant la projection de chacun de ses points lorsqu'on connait les deux paramètres de projection : *plan de projection* et *direction de projection* et la position relative de l'objet par rapport ces paramètres.

Notation : à partir de maintenant, nous appellerons cette première approche de la projection cylindrique ainsi que de la perspective cylindrique : **« approche par projection »**.

1.2.2 Projection cylindrique : deuxième approche

Résumons tout d'abord l'approche de la projection cylindrique oblique présentée par le Groupe de Géométrie de Bordeaux (1991) en géométrie analytique : elle se caractérise par une détermination de la direction de projection à partir de la donnée du couple (α, k) des deux paramètres « angle de fuite » et « rapport de réduction ». Nous l'élargirons ensuite pour atteindre une nouvelle approche de la projection cylindrique.

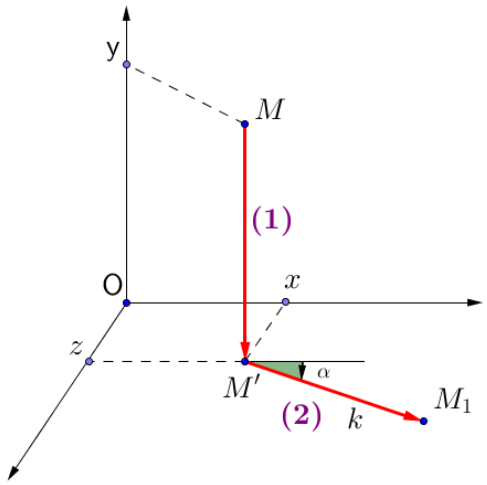
D'abord, on «place» le point M à projeter dans un repère de l'espace: $Oxyz$. Soient (x, y, z) les coordonnées de M. En considérant Oxz comme le plan contenant l'image

de projection M_1 selon la projection cylindrique oblique caractérisée par le couple (α, k) donné, nous avons besoin de déterminer la coordonnée du point $M_1(x_1, z_1)$. Ce processus[11] se compose de deux étapes :

- Premièrement, déterminer le point $M'(x, z)$. d'intersection du plan (Oxy) par une droite passant par M' et parallèle à Oy.
- Deuxièmement, dans le plan (Oxz), construire une demi-droite issue de M' et faisant un angle α avec Ox. Puis, sur cette demi-droite, déterminer un point M_1 tel que $\overline{M'M_1} = ky$.

A partir de ces opérations, on établit les formules permettant de passer d'un point $M(x, y, z)$ de l'espace à un point $M_1(x_1, z_1)$ du plan de dessin dans les repères ci-dessus:

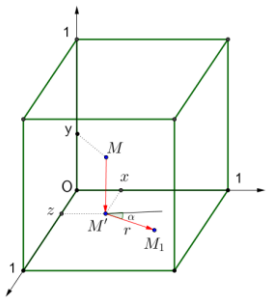
$$\begin{cases} x_1 = x + ky\cos\alpha \\ z_1 = z + ky\sin\alpha \end{cases}$$



Ainsi, on peut déterminer l'image de projection cylindrique oblique quand on connait les paramètres α – « angle de fuite »[12], k – « rapport de réduction »[13] et la position de l'objet géométrique de l'espace par rapport au repère Oxyz.

Dans le cas d'une projection cylindrique oblique, le rapport de réduction est positif. Si k est égal à 0, on obtient une projection cylindrique orthogonale.

Notation : pour simplifier la description de la projection cylindrique selon cette deuxième approche, on peut convertir le problème de détermination de l'image d'un point quelconque à celui d'un cube de côté 1, « posé » en O, dont trois arêtes sont sur les trois axes du repère Oxyz[14]. C'est pourquoi nous appellerons désormais cette deuxième approche de la projection cylindrique ainsi que de la perspective cylindrique : **« approche par cube de référence »**.



1.2.3 Lien entre les deux approches

Les deux approches sont mathématiquement équivalentes, au sens qu'on peut transférer les paramètres de la projection cylindrique dans la première approche (le plan et la direction de projection) à ceux de la deuxième approche (l'angle de fuite et le rapport de réduction) et inversement.

En effet, le Groupe de Géométrie de Bordeaux (1991) propose une manière de déterminer la direction de projection à partir de l'angle de fuite et du rapport de réduction.

> Comment passe-t-on (dans l'espace) du point M à son représentant M_1 ?
> Si M_1 est un point de coordonnées(a, b), M_1 sert à représenter tous les points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que:

[11] Une présentation plus détaillée de ce processus peut être consulté dans le document du Groupe de Géométrie de Bordeaux (1991, p. 9).
[12] C'est un angle orienté.
[13] Malgré le nom « rapport de réduction », mathématiquement, il peut être supérieur à 1.
[14] Voir le schéma dans la Figure 9.

$$\begin{cases} x + ky\cos\alpha = a \\ z + ky\sin\alpha = b \end{cases}$$

En prenant y comme paramètre réel on a:

$$M \begin{cases} x = a - ky\cos\alpha \\ y = y \\ z = b - ky\sin\alpha \end{cases}$$

Où l'on reconnaît un système d'équations paramétriques d'une droite Δ dirigée par le vecteur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} k\cos\alpha \\ -1 \\ k\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Tout comme ses parallèles, cette droite Δ est représentée par un point (M_1).
On dit que c'est une droite «de bout».
Une perspective cavalière [du point de vue de la deuxième approche][15] est donc une Projection Oblique [du point de vue de la première approche][16]

(*Op. cité*, p. 11)

D'autre part, si on choisit le plan de projection (P) (de la première approche) confondu avec le plan de représentation en vraie grandeur (Oxz) (de la deuxième approche), on a les relations suivantes :

- le rapport de réduction k est égal à la tangente de l'angle θ de la direction de projection avec Oy,
- l'angle de fuite α est égal à l'angle orienté de l'axe Ox avec la droite d'intersection du plan de projection (P) et du plan parallèle à d, orthogonal à (P).

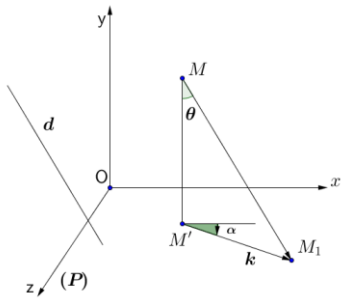


Figure 5. Lien entre deux approches de la projection cylindrique

Par conséquent, avec les choix convenables pour les paramètres de la projection cylindrique, on obtient un même objet géométrique du plan.

> Dans le cas général, nous disons sommairement, que perspective cavalière [du point de vue de la deuxième approche][17] et projection oblique [du point de vue de la première approche][18] fournissent le même dessin.
>
> (Audibert, 1990, p. 73)

Dans la première approche, les paramètres de la projection cylindrique : plan et direction de projection, sont de nature géométrique ; tandis que dans la deuxième, ils expriment des mesures.

Comment cette différence influe-t-elle dans la pratique de représentation, en d'autres termes, comment influe-t-elle dans la deuxième étape de la représentation en perspective – étape de représentation ? Laquelle de ces deux approches est-elle choisie dans l'enseignement ?

[15] C'est nous qui rajoutons des crochets.
[16] C'est nous qui rajoutons des crochets.
[17] C'est nous qui rajoutons des crochets.
[18] C'est nous qui rajoutons des crochets.

Audibert (1990) précise que ce choix (de la perspective cavalière, cas de la France) dépend du niveau d'enseignement.

> La perspective cavalière peut tout d'abord être obtenue comme l'aboutissement de certaines règles de dessin [selon la deuxième approche]. […] Cette procédure est à la portée des élèves débutant dans le premier cycle (6ème, 5ème). Elle leur donne un outil leur permettant d'agir immédiatement et rigoureusement.
> La perspective cavalière peut, en second lieu, être définie par une projection cylindrique oblique [selon la première approche]. C'est alors un concept qui est introduit. Il permet une grande rigueur mathématique et des échanges efficaces entre personnes qui le maîtrisent. Mais, il semble complètement inadapté pour nos élèves de l'enseignement obligatoire (ceux ayant moins de 16 ans). Il peut, au mieux, être abordé utilement par nos élèves de classes scientifiques en fin de second cycle. Mais son accès est grandement facilité par une introduction préalable de la perspective cavalière au moyen des règles de traçage [selon la deuxième approche]. L'apprentissage de la PC dans l'enseignement secondaire ne doit faire intervenir le concept de projection cylindrique oblique qu'avec beaucoup de prudence.
>
> (*Ibid.,* p. 80)

Il apparaît donc que la première approche n'attirera pas beaucoup l'intérêt des noosphères, surtout pour les jeunes élèves.

1.3 Problème de la représentation plane

Nous aborderons dans cette section ce qui concerne l'étape de représentation. Par ailleurs, nous nous intéresserons aussi à d'autres manières non-mathématiques permettant de passer d'un objet géométrique de l'espace à un dessin.

1.3.1 Mobilisation des propriétés de la perspective

La projection cylindrique, quelle que soit son approche, permet théoriquement d'obtenir la représentation d'un objet géométrique de l'espace en construisant l'image de chacun de ses points. Toutefois, ceci est dans la pratique impossible en raison du grand nombre de points à représenter. Nous devons donc passer par la mobilisation de certaines propriétés de l'objet afin de nous ramener à un choix réduit de points comme dans le cas de la géométrie plane et comme le précise Chaachoua (1999).

> Dans les problèmes de construction en géométrie plane, toutes les données sont ramenées aux points, puisqu'une droite est remplacée par deux points, qu'un cercle l'est par deux points, également, l'un représentant le centre et l'autre un point du cercle. De même, l'objet à construire est remplacé par des points. Ainsi le principe de base d'un problème de construction [procédé de tracé sur une feuille de papier] peut se résumer en la recherche d'un point à partir des points donnés […]
>
> (*Op. cité,* p. 325)

La représentation en perspective cylindrique de tout objet de l'espace[19] peut donc être remplacée par celle de certains de ses points que l'on joint de manière à obtenir le dessin de la représentation plane de l'objet. Le choix des points de l'objet géométrique de l'espace et la manière de joindre leurs images en projection cylindrique dépendent les propriétés de la projection. Destainville (1996) a relevé quelques-unes des règles les plus utilisées : pour la projection cylindrique p selon la direction d sur le plan π, on a :

> P0: L'application p n'est pas bijective [...]
> P1: Trois points alignés sont représentés par trois points alignés.
> P2: Si une droite a pour direction d, elle est représentée par un point.
> Sinon elle est représentée par une droite.
> P3: Deux droites parallèles dont la direction n'est pas d sont représentées par deux droites parallèles.
> P4: Si (MN) // (PQ), (la direction n'étant pas d) et si les représentations respectives sont m, n, p et q alors $\frac{\overline{mn}}{\overline{pq}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}}$.
> *Cas particulier:* le milieu de [MN] a pour image le milieu de [mn]. [...]
> P5: k étant un réel et $\vec{u}$ un vecteur : $p(k\vec{u}) = kp(\vec{u})$. [...]
> P6: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs : $p(\vec{u} + \vec{v}) = p(\vec{u} + \vec{v})$ [...]
> P7: Le barycentre d'un système de points a pour représentation le barycentre des représentations des points affectés des mêmes coefficients. [...]
> P8: La représentation d'un cercle est une ellipse.
>
> (*Op. cité,* pp. 50-51)

Il reste maintenant à résoudre le problème : *combien de points de l'objet géométrique de l'espace faut-il choisir pour suffire aux besoins de la représentation ? Lesquels ?*

Nous distinguons trois types de points situés sur l'objet géométrique de l'espace :

- premièrement, les points permettant de définir l'objet géométrique de l'espace à représenter ;
- deuxièmement, les points dont l'image de projection permet de déterminer celle d'une composante de l'objet de l'espace ;
- troisièmement, les points de tangence de la surface de l'objet de l'espace par des droites parallèles à la direction de projection.

Nous les appellerons respectivement « **points de type I, II, III** ».

Prenons un exemple de la représentation d'un cône de révolution pour illustrer ces trois types de points. (*cf.* Figure 6)

- En premier lieu, sont de type I les points S – le sommet, O – le centre de la base, M_1 – un point sur le cercle de base qui permettent de déterminer un cône de révolution dans l'espace.
- En deuxième lieu, on sait que le disque de base est représenté par une ellipse. Pour déterminer une ellipse, on a besoin de cinq points. Alors, sur le disque de base du cône, on choisit cinq points : M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Ce sont des points de type II.
- En troisième lieu, pour représenter les deux génératrices extérieures, on a besoin de déterminer leurs deux extrémités. Or l'une est le point S' représentant le sommet S. Les autres

[19] Nous ne nous intéressons qu'aux objets de base de l'enseignement de la Géométrie de l'espace comme le prisme, la pyramide, cône, cylindre, sphère et aux objets formés à partir de ces objets.

sont l'image des points A, B appartenant au disque de base et étant points de tangence du cône par les droites parallèles à la direction de projection. Ce sont des points de type III.
En outre, on peut utiliser des points mentionnés dans les trois cas ci-dessus pour faire naître d'autres points qui sont nécessaires pour la représentation. En effet, dans l'exemple ci-dessus, les points A', B' sont des points de tangence de l'ellipse représentant la base par des droites passant par le sommet.

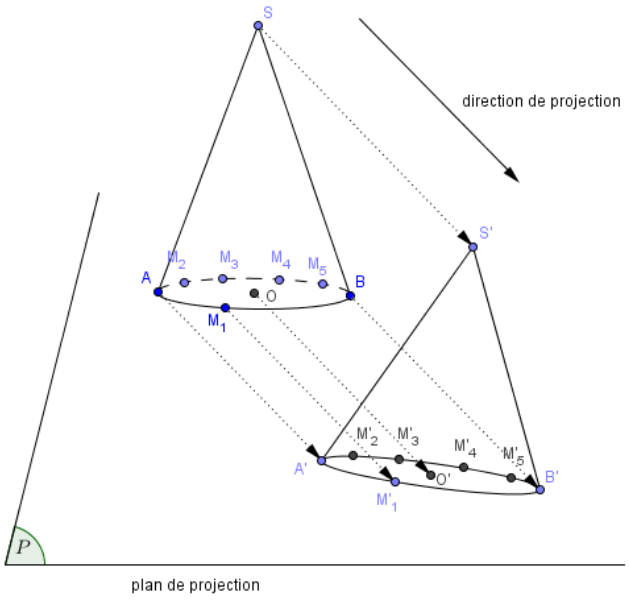


Figure 6. Représentation d'un cône de révolution à travers ses points

En bref, les propriétés de la projection permettent d'abaisser le nombre de points à représenter. Toutefois, *est-on capable de les construire tous effectivement dans la pratique ?* La section 1.3.2 suivante va donner la réponse à cette question.

1.3.2 Points de vue de construction effective/évoquée

Nous avons vu que, du point de vue mathématique, les deux approches de la projection cylindrique sont équivalentes. Néanmoins, elles ont des caractéristiques différentes dans l'étape de représentation. C'est ce que nous nous proposons d'étudier ici.

Comme nous l'avons dit plus haut, le passage de l'objet géométrique de l'espace à l'objet géométrique du plan se traduit nécessairement par une perte d'informations qui se répercute par conséquent au niveau même de la représentation (sur le dessin). Ceci rend difficile de rendre compte sur le dessin de certaines propriétés et relations entre des objets de l'espace contrairement au cas de la géométrie plane. Par exemple, examinons la représentation en perspective d'un cône de révolution par une projection cylindrique oblique. On sait qu'en général, la projection ne conserve pas le disque de base du cône. Il est alors nécessaire de le représenter par une ellipse. Dans la pratique, il est très rare qu'on calcule les paramètres de cette ellipse. Une ellipse arbitraire est acceptée, c'est-à-dire qu'on ne peut préciser les dimensions de cette ellipse.

Chaachoua (1999) modélise ce phénomène par la notion de « règles d'usage » et l'utilise pour distinguer deux types de constructions : effective et évoquée, dans le procédé de tracé sur une feuille de papier.

> Une règle d'usage est une pratique qui a le statut d'une convention : elle donne le droit de représenter un objet géométrique de façon arbitraire. […] Nous proposons de dire qu'une construction est effective lorsqu'on peut la réaliser, au niveau du tracé, sans aucune règle d'usage. Dans le cas contraire, nous disons qu'elle est évoquée.
>
> (*Op. cité,* p. 336)

Décrivons maintenant la représentation plane selon les deux approches de la projection cylindrique. Puisque le dessin peut être obtenu à partir de certains points (voir la section 1.3.1), nous n'abordons ici que le processus de détermination de ces points.

Dans le cas de la première approche (Figure 7), on choisit d'abord certains points, puis on les représente de manière arbitraire sur le plan matériel. Le choix de ces premiers points doit garantir qu'on peut en déduire suffisamment de points permettant de former le dessin. Pour les points restants, on détermine leurs relations par rapport aux premiers points. Ces relations expriment des propriétés géométriques de natures diverses (affines, métriques, topologique,...). Ces propriétés seront transférées de l'espace au plan. Les propriétés de la projection permettent de déterminer le résultat de ces transferts. Quelques-unes sont conservées, par exemple, les propriétés affines, les propriétés métriques sur le plan parallèle au plan de projection ; d'autres sont déformées. Certaines propriétés conservées contribueront à la construction des nouveaux points (construction effective). Toutefois, il existe des points qu'on doit tracer de manière arbitraire (construction évoquée), c'est notamment le cas lorsque la propriété géométrique n'est pas conservée.

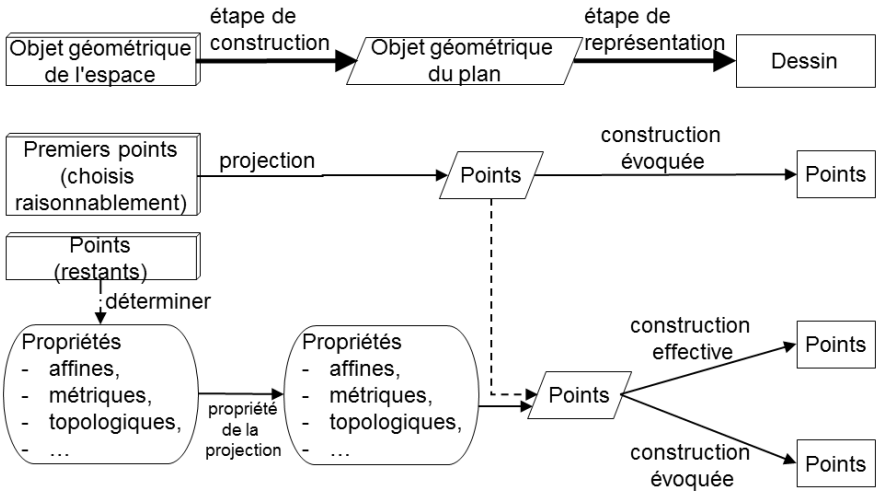


Figure 7. Représentation plane selon la première approche de la projection cylindrique du point de vue mathématique

Pour la deuxième approche, le Groupe de Géométrie de Bordeaux (1991, p. 9) fournit une formule de transformation des coordonnées d'un point de l'espace $M(x, y, z)$ à celle d'un point du plan $M_1(x_1, z_1)$:

$$\begin{cases} x_1 = x + ky\cos\alpha \\ z_1 = z + ky\sin\alpha \end{cases}$$

Donc, du point de vue analytique on peut effectuer la représentation comme suit (Figure 8).

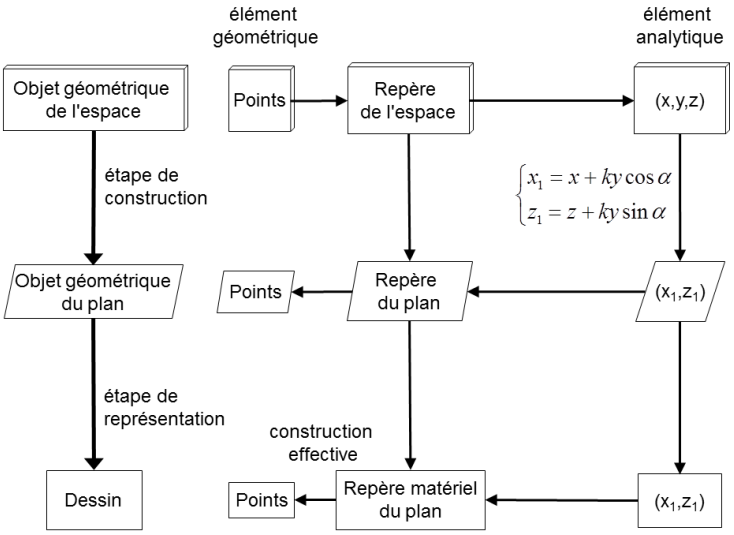


Figure 8. Représentation plane selon la deuxième approche de la projection cylindrique du point de vue analytique

D'abord, on établit les coordonnées du point M à représenter par rapport à un repère de l'espace (x, y, z). Puis, on en déduit les coordonnées (x_1, z_1) du représentant M1 de M dans le plan. On choisit ensuite un repère matériel du plan, par exemple deux bords de la feuille de dessin (ou du tableau,...) : le bord inférieur et le bord latéral gauche, enfin, on précise la position du point qui correspond au couple (x_1, z_1).

Par ailleurs, les règles de traçage d'Audibert (1990) nous fournissent encore un processus en trois étapes pour faire le dessin d'un objet géométrique de l'espace du point de vue affine-métrique (Figure 9).

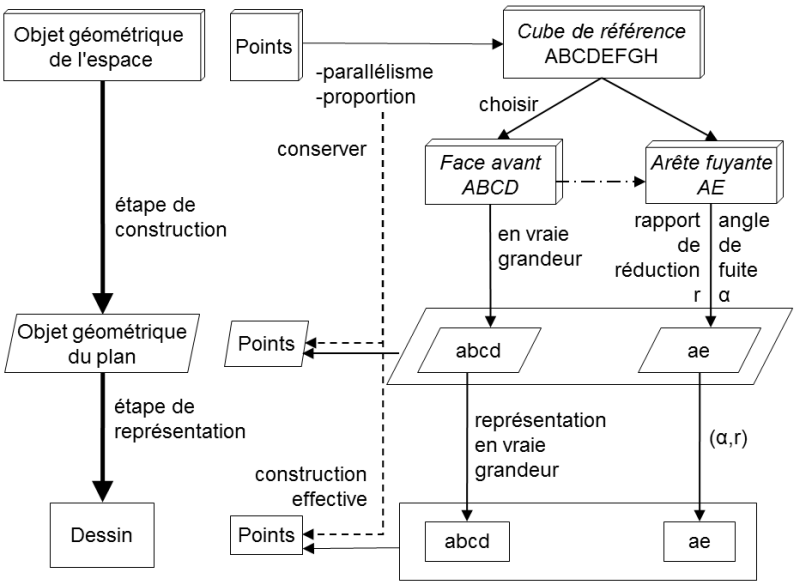


Figure 9. Représentation plane selon la deuxième approche de la projection cylindrique du point de vue affine-métrique

- Première étape. La représentation d'un objet géométrique de l'espace est repérée par celle d'un cube de référence.

> Tout objet de l'espace est parfaitement repéré grâce à un cube de référence. Puisque nous utilisons une représentation qui conserve le parallélisme et les proportions, nous nous contentons de représenter un cube ABCDEFGH.
>
> (Audibert, 1990, p. 69)

Ainsi, le cube de référence, plus précisément, les trois arêtes issues d'un même sommet du cube de référence, joue ici en même temps le rôle d'un objet géométrique de l'espace à représenter et celui d'un repère de l'espace

> Le trièdre AB, AE, AD est direct. (L'espace est orienté selon la règle des trois doigts de la main droite : pouce, index, majeur donnant le sens direct).
>
> (*Ibid.,* p. 69)

On exprime la position des points de l'espace par des relations de parallélisme et de proportionnalité par rapport à ce repère.
- Deuxième étape. On cherche à représenter le cube de référence dans l'espace dans le plan. D'abord, « nous choisissons une face du cube comme face avant » (*Ibid.*, p. 69) et la représentons en vraie grandeur. Puis, on détermine la représentation de l'arête fuyante dans le plan en utilisant deux paramètres : l'angle de fuite et le rapport de réduction.
- Troisième étape. On fait le dessin de l'objet de l'espace à l'aide de la représentation du cube de référence et de la règle de la conservation du parallélisme et des proportions selon les directions parallèles aux arêtes du cube.

> Tout point de l'espace, repéré par rapport au cube de référence, est alors parfaitement représenté par un point grâce aux règles de conservation du parallélisme et des proportions.
>
> (*Ibid.,* p. 70)

Ainsi, le recours à un cube de référence fournit un environnement écologique favorable pour les constructions effectives. En résumé, bien que les deux approches de la perspective cylindrique par projection et par cube de référence soient mathématiquement équivalentes, elles ne conservent pas ce statut dans la pratique. De trois schémas des Figure 7, Figure 8 et Figure 9, il semble que la deuxième approche favorise davantage les constructions effectives que la première.

1.3.3 Méthode directe, indirecte, de l' « observateur-projeteur »

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié la méthode mathématique de représentation en perspective à travers la notion de projection. Dans cette section, nous nous intéressons à d'autres méthodes, non-mathématiques, qui permettent de passer d'un objet de l'espace à un dessin.

Deforge (1981) parle d'une autre méthode pour la représentation en perspective, c'est l'observation.

> La justification la plus directe de la représentation géométrale d'un corps consiste à dire que c'est le dessin de ce que voit un observateur (ou de ce qu'il pourrait voir) en regardant le corps bien en face, d'un seul œil, de telle façon que son regard

> reste toujours perpendiculaire à la face observée […]. Cette méthode, aussi directe soit-elle, ne se fonde pas pour autant sur une vision primitive ou naïve de la réalité. Nous savons que la transcription dessinée des perceptions visuelles passe toujours par une médiation intellectuelle qui les modifie peu ou prou.
>
> (*Op. cité,* p. 202)

Dans l' « analyse des situations de formation à la lecture des graphismes techniques » de la formation professionnelle, Bessot et al. (1992) abordent aussi l'approche par observation et par projection, respectivement sous les noms « méthode directe », « méthode indirecte », et introduisent une nouvelle approche : la méthode de « l'observateur projecteur ».

> Ces méthodes [de « l'observateur projeteur »][20] sont des compromis qui posent le problème de la viabilité de la méthode indirecte dans l'enseignement professionnel de base. « […] nous verrons que des auteurs ont introduit dans leur système explicatif un observateur ou un ''projecteur'' pour répondre à la question de savoir ''qui projette'' » (Deforge, 1981, pp.202-203).
>
> (*Op. cité*, p. 94)

Ainsi, on peut voir que la projection n'est pas l'unique chemin pour passer d'un objet géométrique à un dessin. Cela nous conduit à la question suivante.

Q3c) Quelle(s) approche(s) pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin est (sont) choisie(s) ? Pour quelles raisons ? Existe-t-il parfois des utilisations mixtes? Si oui, comment ? Si non, qu'est-ce qui justifie l'approche retenue ?

1.3.4 Dessin prototypique

A partir d'un même objet géométrique de l'espace et de la même perspective, on peut obtenir divers dessins de représentation correspondant aux choix différents des paramètres de projection. Toutefois, certains parmi eux sont « préférés », car ils suggèrent mieux l'objet de l'espace que d'autres. Ce phénomène est traduit par certains chercheurs par la notion de « typicalité » :

> La typicalité est une propriété des éléments d'une catégorie qui correspond à l'idée que certains éléments (sous-catégories, exemplaires) constituent des meilleurs exemples que d'autres de leur catégorie.
>
> (Cordier, 1991, p. 47)

Ou encore par la notion de « forme prototypique »

> Partant d'une courte expérimentation de construction de figures géométriques à partir de consignes orales, nous avons tenté d'illustrer l'existence, en mémoire à long terme chez les élèves, de formes organisées, désignées en l'occurrence par le terme de formes prototypiques. Mobilisées rapidement lors de la lecture ou de l'écoute de la consigne, ces formes servent de patron de comparaison et orientent la saisie des indices.
>
> (Noirfalise, 1991, p. 57)

[20] C'est nous qui rajoutons des crochets.

Dans notre recherche, nous choisirons le nom « dessin prototypique » pour indiquer ces dessins.
En traduisant bien les informations de l'objet de l'espace, il nous semble qu'ils contiennent des codes d'écriture et de lecture auxquels nous nous intéressons dans la question Q3b. De plus, ils peuvent être considérés comme une manière de passer de l'objet géométrique de l'espace au dessin (Q3c). La question qui se pose ici est alors :

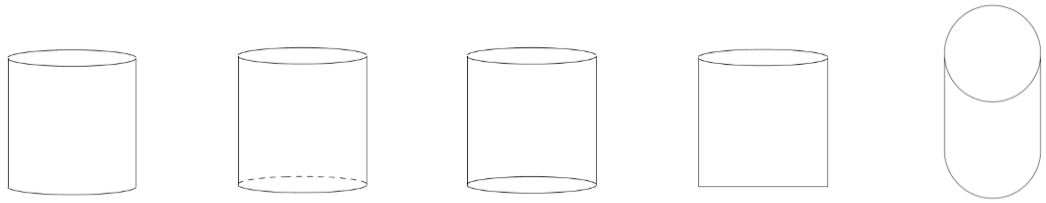
Q3b') Dans l'enseignement de la représentation en perspective, quels dessins prototypiques peut-on rencontrer ?

La détermination des dessins prototypiques dans l'enseignement nous demande de répondre d'abord à la question méthodologique : *Comment peut-on identifier les dessins prototypiques ?*

Nous présentons ici une recherche de Pais et al. (1991) afin de donner un exemple sur les dessins prototypiques du cylindre de révolution et aussi pour mettre en lumière la manière de les étudier.
D'abord, les auteurs analysent une collection des dessins vus dans les manuels scolaires selon les critères : l'équilibre des figures, l'usage de pointillés, le tracé des ellipses, la perspective utilisée et les règles de représentations. Ils explorent quelques caractéristiques fréquentes de ces dessins :

> Les éléments d'équilibre sont les suivantes : il y a deux génératrices représentées par deux segments verticaux de même longueur et symétriques par rapport à l'axe de symétrie du cylindre. Les axes des ellipses sont toujours aussi parallèles aux bords de la page. Trois sur quatre des dessins présentent ces conditions. […]
> En ce qui concerne l'usage des pointillés dans la représentation du cylindre, on peut observer d'abord que 75% des dessins utilisent ce type de trait. L'usage le plus fréquent en est fait pour dessiner un arc d'ellipse représentant la partie cachée du cercle de base inférieure. […]
> La quasi-totalité des représentations est réalisée selon une perspective cavalière avec un angle de fuite de 90°. Le rapport de réduction entre les axes des ellipses est approximativement égal à ½.
>
> (*Op. cité,* pp. 75, 76)

Ensuite, ils analysent des dessins du cylindre de révolution faits par les élèves avant l'enseignement de la représentation et distinguent les cinq types de dessins suivants :



> Parmi les dessins réalisés par les élèves, on observe l'existence de cinq représentations différentes : les trois qui ressemblent à celles rencontrées dans les manuels scolaires et deux autres qui montrent quelques difficultés des élèves. La première consiste dans la représentation du cercle de base inférieure par un segment horizontal. Il s'agit, pour la seconde, de la représentation du cercle de

> base supérieure par in cercle tracé au compas. Il nous faut prendre en compte ces deux représentations spontanées non prévues par les manuels.
>
> (*Ibid.,* p. 80)

Ainsi, l'article de Pais et al. (1991) a indiqué que l'étude des dessins prototypiques peut être faite par deux analyses parallèles; l'un, sur les dessins de représentation fournis par les manuels ; l'autre, sur les produits des élèves.

1.4 Conclusion

Les travaux de référence étudiés dans ce chapitre nous amènent à nous intéresser aux problèmes suivants de l'enseignement de la représentation en perspective.

Au premier lieu, nous avons constaté plusieurs types de perspectives permettant de représenter un objet de l'espace. D'où la première question :

Q3a) Q*uel(s) mode(s) de représentation est (sont) choisi(s) dans l'enseignement ?*

Le passage d'un objet de trois dimensions en deux dimensions provoque toujours une perte d'informations. Le problème de la lecture est donc celui des savoirs (géométriques ou non) implicites ou explicites présents dans l'enseignement qui permettent d'interpréter le dessin comme renvoyant non pas à un objet géométrique du plan mais à un objet géométrique de l'espace (prise en compte de la troisième dimension). Cela nous a conduit à la question sur les codes d'écriture et de lecture qui renseignent sur les informations perdues.

Q3b) *Quels sont les codes d'écriture et de lecture mobilisés dans l'enseignement ?*

Au deuxième lieu, il existe au moins trois approches pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin sur un plan matériel, ces approches générant des praxéologies aussi bien mathématiques que didactiques.

Premièrement, c'est l'approche par « **observation** ». En regardant (ou s'imaginant) un objet de l'espace, on redessine ce qu'on voit (ou ce qu'on pense qu'on voit) sur un plan matériel. On obtient donc un dessin de représentation de l'objet de l'espace.

Deuxièmement, c'est l'approche par « **dessin prototypique** ». On peut identifier le dessin de représentation d'un objet géométrique de l'espace à son dessin prototypique parce que le dessin prototypique représente clairement l'objet de l'espace. Ceci nous a conduit à reformuler la question Q3b sous la forme suivante :

Q3b') Dans l'enseignement de la représentation en perspective, quels dessins prototypiques peut-on rencontrer ?

Troisièmement, c'est l'approche par « **projection** ». Une projection définit une perspective. Un objet géométrique de l'espace est transformé en un objet géométrique du plan de projection, qui lui-même peut être associé à un dessin. Parmi les perspectives, on privilégie dans l'enseignement la perspective cylindrique parce qu'elle assure une bonne position d'équilibre entre « voir » et « savoir ».

On peut considérer dans le processus de représentation en perspective cylindrique deux étapes de construction et de représentation. Dans la première, le point capital est la projection cylindrique pour laquelle il y a deux approches mathématiques : « approche par projection », caractérisée par le plan et la direction de projection, et « approche par cube de référence » caractérisée par l'angle de duite et le rapport de réduction. Du point de vue mathématique, ces approches sont équivalentes ; cependant, la pratique de représentation (étape de représentation) propose des différences notables en ce qui concerne la construction (effective/évoquée) et la lecture du dessin en tant que représentant d'un objet géométrique de l'espace.

Ces constatations nous conduisent à la question :

Q3c) Quelle(s) approche(s) pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin est (sont) choisie(s) ? Pour quelles raisons ? Existe-t-il parfois des utilisations mixtes? Si oui, comment ? Si non, qu'est-ce qui justifie l'approche retenue ?

Chapitre 2
Enquête sur les traces de l'évolution de l'enseignement de la représentation en perspective

La synthèse des travaux de recherche sur la représentation en perspective du Chapitre 1 a mis en évidence plusieurs approches pour enseigner le passage d'un objet de l'espace à un dessin. En particulier, pour l'approche par projection, nous avons étudié deux approches mathématiques possibles de la projection cylindrique : par projection et par cube de référence.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de faire une enquête sur les traces, dans l'enseignement, des mode(s) de représentation choisi(s) (Q3a), des dessins prototypiques (Q3b') et des différentes approches retenues pour enseigner le passage d'un objet géométrique à un dessin (Q3c), afin de mettre en évidence différentes manières possibles d'introduire le savoir sur la représentation en perspective dans l'environnement scolaire. Cette enquête a pour but de fournir une vue plus riche et plus large que celle de la section 1.1.2 sur la manière dont on a enseigné dans le passé et dont on enseigne actuellement la représentation plane, non seulement en France, mais aussi dans d'autres pays. Notre enquête porte sur des documents scolaires de France et du Viêt-Nam.

Notre enquête comporte deux études :
- étude des programmes, pour mettre en évidence le moment de l'introduction de la représentation en perspective (ce qui nous permet de déterminer l'ensemble des manuels à consulter), les changements éventuels de l'enseignement de ce contenu, et les perspectives à enseigner (Q3a) ;
- étude de la partie « cours » des manuels étudiés, pour chercher des renseignements sur la manière de dessiner, pour relever les contraintes imposées aux dessins (Q3b'), et pour explorer les différentes manières possibles de présentation de la notion de perspective (Q3c).

2.1 En France

2.1.1 Etude des programmes

Nous avons consulté les programmes à partir de l'année 1965. Au collège, dans les programmes de 1968 et de 1977-1978, le problème de la représentation des objets géométriques de l'espace est absent. Au lycée, dans les programmes de 1965 et de 1968-1969,

nous constatons la présence de la notion de projection. En effet, le programme 1965 demande d'enseigner :

> Projection sur un plan parallèlement à une direction de droite ; projection d'un point, d'une droite, d'un segment ; projection de deux droites parallèles.
> Projection orthogonale sur un plan.
> Projection orthogonale d'un angle droit.
> (Bulletin officiel de l'Education nationale, 1965, III)

Dans le programme de 1968-1969 de la section T, bien qu'on propose l'enseignement de la « projection de l'espace sur un plan, parallèlement à une direction donnée de droite », la représentation plane n'est pas abordée.

En France, on commence à enseigner officiellement la représentation des objets géométriques de l'espace à partir du programme de 1973 en seconde des sections C et T. A ce moment, deux manières de représenter sont proposées : perspective cavalière et géométrie descriptive.

> Représentation de droite et de plan en perspective cavalière et en géométrie descriptive. (On remarquera que, bien que les instruments de dessin utilisés soient le té, l'équerre, la règle graduée, seules des propriétés affines interviennent dans les dessins envisagés.)
> (Bulletin officiel de l'Education nationale, n°25 du 21 juin 1973)

Ces représentations se retrouvent dans les programmes de 1981 et de 1986 sous forme de thèmes à titre indicatif. Elles sont approchées par les projections qui y sont aussi abordées.

> Projection ; projections orthogonales. […]
> Représentation d'un solide par des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires bien choisis.
> Représentation par perspective cavalière.
> (Bulletin officiel de l'Education nationale, spécial n°1 du 5 février 1987)

Une question naît ici, *pourquoi a-t-on besoin de deux représentations dans une même classe ?*

A partir de 1985, on introduit la représentation des objets de l'espace au collège et depuis lors, la structure de cet enseignement est assez stable dans les programmes (1996, 2004, 2008 et suivants). La représentation est centrée sur la perspective cavalière et associée aux solides : parallélépipède rectangle (en sixième), prisme droit, cylindre de révolution (en cinquième), pyramide, cône de révolution (en quatrième), sphère (en troisième)[21]. L'enseignement de ce savoir évolue en raison de la différence des connaissances acquises par un élève de sixième et un élève de seconde.
En continuité avec ce que l'élève a appris dans le programme du collège 1985, celui du lycée 1990 (en seconde) rappelle la nécessité de représentation des objets de l'espace. Les projections sont aussi présentes dans ce programme.

[21] Les programmes 1985 de quatrième et de troisième prennent un ordre inverse : on enseigne la sphère en quatrième et puis, la pyramide et le cône de révolution en troisième.

Les activités exploiteront conjointement des maquettes des objets étudiés et des représentations de ces objets, effectuées, selon des problèmes posés, à main levée ou à l'aide des instruments de dessin.
[…] Projection sur un plan selon une direction de droite.
[…] Projection orthogonale sur un plan.
(Bulletin officiel d'Education nationale, n°20 du 17 mai 1990)

Comment enseigne-t-on, en collège, la représentation en perspective cavalière ? Il est incontestable qu'on rejette l'approche par projection parce que ce savoir n'existe pas à ce niveau d'enseignement.
Cependant, dans les programmes suivants du lycée (2000, 2009), nous ne trouvons pas davantage d'existence de la projection. Il est donc nécessaire qu'on « invente » une manière d'approcher la représentation en perspective cavalière sans notion de projection.
En nous appuyant sur cette évolution des programmes, nous distinguons pour nos analyses deux groupes de manuels (Figure 10):
- groupe 1 : des manuels de seconde conformes aux programmes 1973, 1981 et 1986. Ce sont les manuels de la période de la réforme des mathématiques modernes où la représentation plane (en perspective cavalière et en géométrie descriptive) est présentée par la projection cylindrique ;
- groupe 2 : des manuels du collège (6e, 5e, 4e et 3e) conformes aux différents programmes depuis 1985 et des manuels de seconde conformes aux programmes à partir de 1990. Ce sont les manuels d'après la réforme des mathématiques modernes où la représentation plane, plus exactement la perspective cavalière, n'est pas forcément associée à la projection cylindrique.

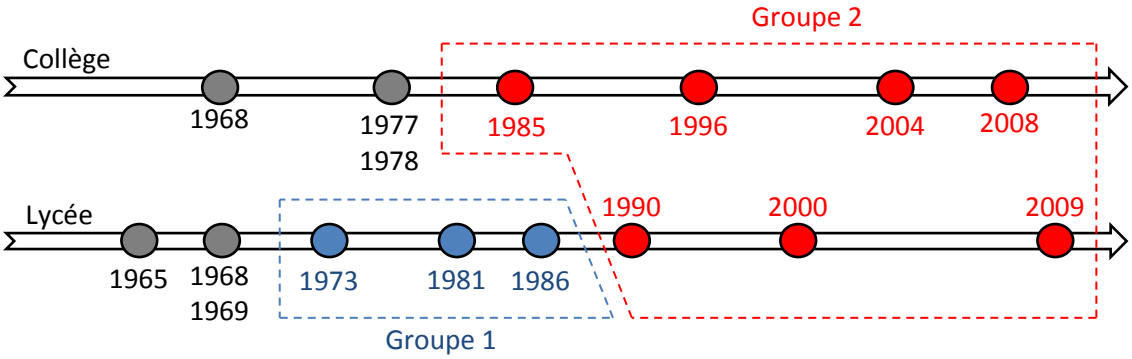


Figure 10. Deux groupes de manuels pour l'enquête

2.1.2 Etude des manuels du groupe 1

Pour les manuels du groupe 1, deux types de représentations sont abordés : les épures de géométrie descriptive et la perspective cavalière.

Les épures de géométrie descriptive : regardons leur définition dans un manuel de Géométrie en seconde.

a/ L'espace étant rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, Oz, on appelle, par convention,
plan horizontal le plan xOy,
plan frontal yOz,
ligne de terre la droite y'Oy.

> Soit m la projection d'un point M sur le plan xOy et m' la projection de M sur le plan yOz.
> M est parfaitement déterminé par le couple (m,m') ; en effet, soit K la projection de M sur (Oy) ;
> l'abscisse de M est $x = \overline{Km}$,
> l'ordonnée de M est $y = \overline{OK}$,
> la cote de M est $z = \overline{Km'}$.
> b/ Epure d'un point. Epure d'une droite
> On imagine que le plan xOy est rabattu sur le plan yOz par rotation autour de la ligne de terre. Ox et Oz deviennent alors des demi-droites opposées et on obtient une figure plane ; l'ensemble (m, m') est l'épure du point M.
> Si une droite D n'est perpendiculaire ni au plan horizontal (droite verticale) ni au plan frontal (droite de bout), elle se projette suivant deux droites d et d' qui constituent son épure.
> Tout objet de l'espace peut être ainsi représenté par deux projections qu'on nomme vue de dessus et vue de face.
> Ces principes sont à la base du dessin industriel.
>
> (Audirac et Richerme, 1981, p. 209)

La perspective cavalière : nous donnons ici sa définition dans un manuel de Mathématiques de seconde.

> Projetons un solide $\mathcal{S}$ sur un plan $\mathcal{P}$ parallèlement à une direction de droite d non orthogonale à $\mathcal{P}$. L'image $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ est une figure plane de $\mathcal{P}$ appelée perspective cavalière de $\mathcal{S}$.
>
> (Gautier et al., 1987, p. 310)

Ces deux représentations sont donc définies par une projection. Pour la première, c'est la projection cylindrique orthogonale et pour la deuxième, la projection cylindrique oblique.

Pour la question sur l'apparition simultanée des deux modes de représentation, nous pensons que la réponse se trouve dans l'objectif de lecture d'un dessin. En effet, la perspective cavalière donne un dessin proche de ce qu'on voit, mais elle ne permet ni de préciser la position de l'objet représenté ni celle de ses composants dans l'espace ; tandis que la géométrie descriptive peut le faire, mais elle représente l'objet de l'espace par deux de ses vues, d'où beaucoup de difficulté pour le percevoir. La citation d'un manuel de Mathématiques de seconde ci-dessous explique clairement l'objectif d'usage de chacun de ces modes de représentation.

> La perspective cavalière est un mode de représentation qui donne l'illusion visuelle des figures étudiées. C'est celui que nous avons utilisé pour illustrer certains raisonnements sur l'espace. Cependant il est insuffisant pour réaliser des déterminations précises d'éléments des figures.
> La géométrie descriptive, créée par Monge, permet de représenter les figures de l'espace par un dessin plan, appelé épure, et de déterminer avec précision les éléments de ces figures par des constructions graphiques.
>
> (Condamine et al., p. 339)

Ainsi, les deux représentations sont complémentaires et permettent de surmonter les inconvénients de l'une par les points forts de l'autre.

Dans la suite, nous nous intéressons aux contraintes pesant sur les caractéristiques de la perspective cavalière, plus concrètement, sur les paramètres du plan et la direction de projection.

Pour le plan de projection, l'étude des manuels montre que les auteurs ont fait des choix didactiques différents. Par exemple, dans la citation ci-dessus, il n'y a aucune contrainte pour le plan de projection. C'est-à-dire qu'on peut choisir librement la position relative du plan de projection par rapport à l'objet à représenter. Or, d'autres manuels demandent que ce plan soit parallèle à une face de l'objet à représenter.

> Dans la pratique, si l'objet représenté possède des faces planes, on choisit comme plan P de projection un plan parallèle à l'une des faces.
>
> (Martinet et al., 1986, p. 305)

Certains manuels de seconde expliquent l'avantage de ce choix : il apporte davantage d'information : la face parallèle au plan de projection est représentée en vraie grandeur.

> Une figure $\mathcal{F}$ parallèle au plan de projection est donc projetée en vraie grandeur. Son image $\mathcal{F}'$ est déduite de $\mathcal{F}$ par une translation.
>
> (Proteau et al., 1981, p. 355)

Cette contrainte nous conduit à la question : *pour un solide concret, à quelle face le plan de projection est-il parallèle ?*

Quant à la direction de projection, outre la condition de non-orthogonalité dans la définition, nous trouvons la proposition supplémentaire suivante dans quelques manuels de seconde :

> De plus, on suppose que le solide est placé de façon qu'aucune de ses faces ne soit parallèle à d ; on évite ainsi qu'une face ne se projette suivant un segment.
>
> (Gautier et al., 1987, p. 310)

En éliminant des dessins « dégénérés » qui causent souvent une grande perte d'information, cette contrainte favorise la reconstitution d'un objet géométrique de l'espace à partir d'un dessin.

En plus des règles de la projection pour passer d'un objet de trois dimensions à un objet de deux dimensions, certains manuels introduisent d'autres règles, sous forme de propriétés de la perspective cavalière, comme le montre l'extrait suivant.

> ● **Propriétés affines**
>
> La perspective cavalière étant une projection cylindrique (*cf.* chap. 10, § 10), elle vérifie les propriétés suivantes.
>
> **P_1** La perspective cavalière (f) de toute figure (F) contenue dans un plan parallèle au tableau est réduite de (F) par translation. […]
>
> **P_2** La perspective cavalière de droites parallèles, n'ayant pas la direction de projection, se compose de droites parallèles.
>
> **P_3** Pour tout couple de bipoints parallèles (A,B), (C,D), et leurs images (a,b), (c,d) :
>
> $$\frac{\overline{cd}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$
>
> […]

● **Propriétés métriques**

A ces propriétés de géométrie affine s'ajoutent des particularisations métriques, utilisées dans le dessin technique :

D_2 Les perspectives cavalières des droites perpendiculaires au tableau sont des parallèles appelées **fuyantes**.

La direction des fuyantes peut être quelconque. Toutefois, le dessin technique se fait généralement en utilisant des équerres : c'est pourquoi on emploie fréquemment une inclinaison des fuyantes sur les horizontales du tableau, de 30°, 45° ou 60°.

L'angle des fuyantes avec l'horizontale est appelé angle des fuyantes et désigné par α.

On le mesure, à partir d'une demi-droite horizontale orientée vers la droite, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (*cf.* fig. *2-a, 2-b, 2-c*)

D_3 On appelle rapport de réduction le nombre *k*, constant, tel que pour tout segment [M, N] perpendiculaire au tableau et son image [m, n] :

$$mn = k.MN$$

[…]

En dessin technique on donne à *k* l'une des valeurs suivantes :

$$0{,}2\ ;\ \ 0{,}4\ ;\ \ 0{,}5\ ;\ \ 0{,}6\ ;\ \ 0{,}8\ ;\ \ 1.$$

(Condamine et al., 1973, pp. 340, 341)

Dans cet extrait, nous relevons une présentation des propriétés en deux catégories : affines et métriques.

- Propriétés affines : conservation des objets parallèles au plan de dessin, du parallélisme, des proportions ;
- Propriétés métriques : utilisation des deux paramètres « inclinaison » et « rapport de réduction » qui permettent de tracer des fuyantes.

Ici, l'apparition des caractéristiques de l'approche par cube de référence, sous forme de propriétés métriques, améliore les constructions effectives. Elles s'accompagnent de quelques contraintes supplémentaires :

- pour l' « inclinaison des fuyantes », on a tendance à s'intéresser à trois valeurs particulières: 30°, 45°, 60° du fait de l'usage fréquente des équerres dans un dessin technique ;
- pour le « rapport de réduction », on préfère ne pas le choisir supérieur à 1 afin de favoriser la lecture du dessin.

Ces contraintes proviennent de la visualisation de l'œil. Elles ont pour objectif d'assurer que le dessin est proche ce qu'on observe.

La valeur est en général choisie de façon à respecter l'illusion visuelle de la figure (*cf.* fig. *2-a, 2-b, 2-c*)

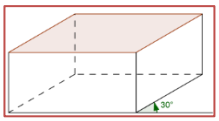
[…]EXEMPLE

Les figures ci-dessous représentent un parallélépipède rectangle (F) sont la face horizontale ABCD est un carré (pour faire percevoir la valeur de k).

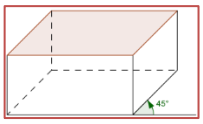
La figure 2-a $(\alpha = 30°, k = 0{,}6)$ donne l'impression que (F) est vue de droite, de dessus.

La figure 2-b $(\alpha = 45°, k = 0{,}5)$ donne l'impression que (F) est vue légèrement de droite et de dessus.

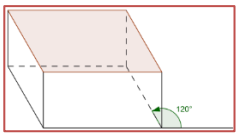
La figure 2-c $(\alpha = 120°, k = 0{,}6)$ donne l'impression que (F) est vue très légèrement de gauche et de dessus.



k=0,6
Fig. 2-a



k=0,5
Fig. 2-b



k=0,6
Fig. 2-c

(Condamine et al., 1973, p. 342)

En résumé, on peut dire que l'enseignement de la perspective cavalière indique ici un mélange entre le point de vue mathématique de la projection cylindrique avec les deux approches (par projection et par cube de référence) et le point de vue de l'observation.

2.1.3 Etude des manuels du groupe 2

La représentation en perspective cavalière dans les manuels du groupe 2 est présentée en relation avec l'étude des solides usuels selon une certaine progression par niveau scolaire. Pour cette raison, nous présentons notre analyse par niveau scolaire afin de mettre en lumière les caractéristiques de la représentation de chaque solide.

a) En sixième

La perspective cavalière est, d'abord, définie comme une méthode permettant de représenter un objet géométrique de l'espace sur une surface plane.

> La perspective cavalière est une technique de dessin utilisée pour représenter sur une surface plane, des solides.
>
> (Brault et al., 2009, p. 221)

Elle est associée au parallélépipède rectangle, et on trouve plusieurs manières de la présenter. Nous citons les trois les plus utilisées.

- Présenter des règles de représentation des faces du parallélépipède rectangle.

> Dans un dessin en perspective cavalière d'un pavé droit :
> - deux des faces sont représentées par des rectangles,
> - les quatre autres faces sont représentées par des parallélogrammes,
> - les arêtes « cachées » sont tracées en pointillés.
>
> (Malaval et Barra, 1991, p. 242)

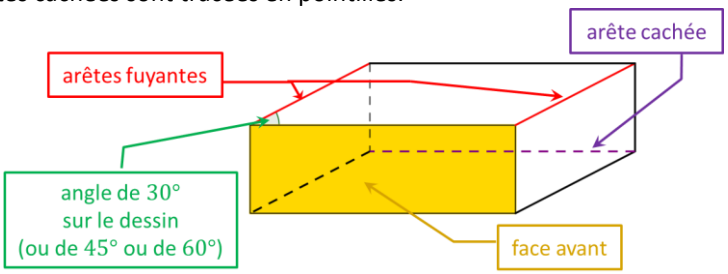
- Présenter des règles de conservation : des faces avant, arrière et des arêtes parallèles, égales.

> Dans une représentation en perspective cavalière :
> - les droites parallèles du solide sont représentées par des droites parallèles,
> - les segments parallèles et de même longueur du solide sont représentés par des segments parallèles et de même longueur,
> - les arêtes cachées sont représentées en pointillés,
> - les faces avant et arrière ne sont pas déformées par la perspective.
>
> (Jacob et al., 2009, p. 252)

- Présenter les règles de conservation des faces avant, arrière, du parallélisme et la règle de représentation des fuyantes.

> Dans le dessin en perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle (à l'échelle 1) :
> - les faces avant et arrière sont des rectangles et elles gardent leurs dimensions ;

- les arêtes qui sont parallèles dans la réalité sont représentées par des segments parallèles ;
- les dimensions des arêtes fuyantes sont réduites par rapport aux dimensions réelles ;
- les arêtes cachées sont tracées en pointillés.



(Gisèle Chapiron, Mante, Mulet-Marquis, & Pérotin, 2009, p. 191)

Ces trois manuels présentent donc la perspective cavalière par des règles de représentation. L'enseignement de la perspective cavalière à travers la notion de projection n'est plus au programme.

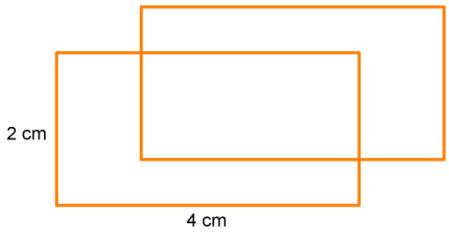
Une analyse plus approfondie des règles de représentation nous montre que la liste des règles de représentation n'est pas la même selon les manuels. Parmi elles, la règle de conservation du parallélisme est la plus essentielle, et bien sûr, la plus répandue. En effet, elle permet même de caractériser la perspective cavalière.

> La perspective cavalière est une façon de dessiner des solides qui exige, si deux droites sont parallèles, qu'elles soient dessinées parallèles.
>
> (Bareil et Zehren, 1994, p. 154)

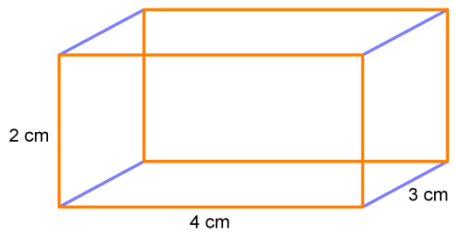
D'autre part, cette liste indique aussi un mélange entre règles mathématiques, par exemple conservation du parallélisme, et les conventions, par exemple, règle des pointillés – code d'écriture qui donne l'impression de la troisième dimension de l'espace.

Outre des règles de représentation, nous trouvons aussi, dans les manuels, des renseignements détaillés pour dessiner un parallélépipède rectangle. En consultant la partie « Méthode » des manuels, nous trouvons que la représentation peut se faire en s'y prenant dans un ordre différent.
- On dessine d'abord les faces, puis on les joint par des segments parallèles.

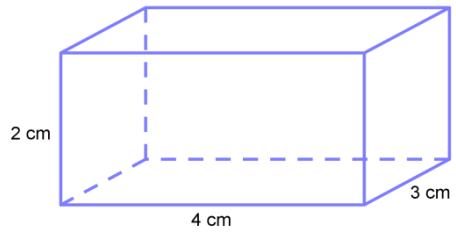
> Représenter en perspective cavalière un parallélépipède rectangle de dimension 4 cm, 2cm et 3 cm.
> Solution



On trace deux rectangles identiques correspondant aux faces parallèles avant et arrière, en les décalant l'un par rapport à l'autre. On trace par exemple, les deux faces de dimension 4 cm et 2 cm aux bonnes dimensions.



On trace ensuite les quatre arêtes manquantes en joignant les sommets deux à deux. Les arêtes de longueur 3cm sont représentées par des segments parallèles et de même longueur mais qui ne mesurent pas 3cm sur le dessin.

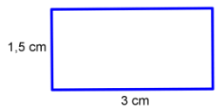
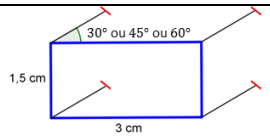
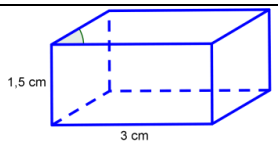


On transforme les traits pleins des arêtes cachées en pointillés.

(Jacob et al., 2009, p. 254)

- On dessine d'abord une face avant, puis des fuyantes et enfin, la face arrière.

Exemple : dessiner à l'échelle 1 en perspective cavalière un pavé droit dont les mesures sont 3 cm, 1,5 cm et 2,5 cm.

		
On trace tout d'abord la « face avant » qui n'est pas déformée. Par exemple un rectangle de 1,5 cm sur 3cm	On trace les fuyantes qui font un angle de 30°, 45° ou 60° avec la face avant. Elles sont parallèles. Dans la réalité elles mesurent 2,5 cm, sur le dessin elles mesurent 1,25 cm (2,5 : 2 =1,25)	On trace les autres arêtes. Attention : les arêtes invisibles sont en pointillé.

(Chapiron et al., 1996, p. 172)

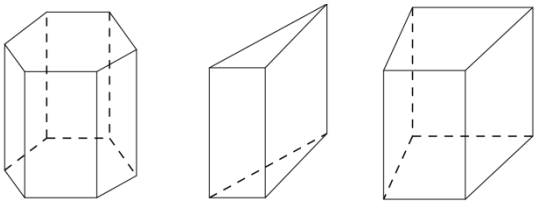
Cette manière implique l'approche par cube de référence de la projection cylindrique oblique. De plus, nous constatons des préférences sur les caractéristiques de la perspective cavalière : angle de fuite (30°, 45°, 60°) et rapport de réduction (inférieur à 1 : en d'autres mots, les fuyantes sont réduites).

b) En cinquième

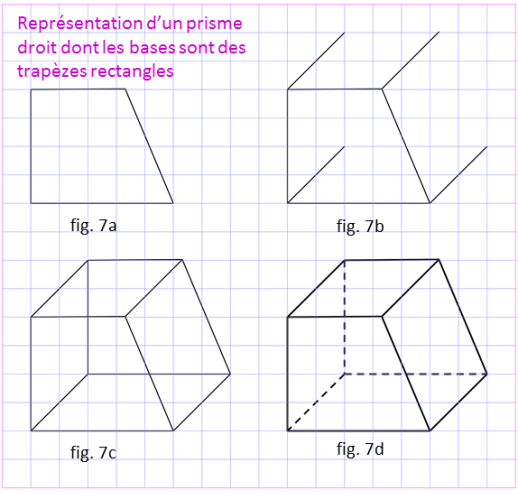
L'enseignement de la représentation en perspective cavalière en cinquième est associé au prisme droit et au cylindre de révolution. Basé sur les positions du solide, il y a, pour chacun d'eux, deux représentations possibles. Examinons la représentation du prisme droit dans un manuel.

Voici deux représentations possibles. Noter la conservation du parallélisme.

a) Le prisme repose sur une base et la face avant est une des faces latérales.



b) Le prisme repose sur une face latérale et la face avant est une des bases.



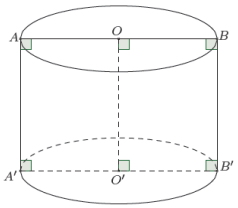
- On représente cette base à une certaine échelle (fig. 7a)
- D'un même côté, en oblique, à partir de chaque sommet de la base, on trace des segments parallèles et de même longueur pour représenter les arêtes latérales (fig. 7b).
  C'est ce que l'on appelle des fuyantes ; leur longueur est plus petite que celle qu'elles devraient avoir si on les représentait à l'échelle.
  Elles peuvent être dirigées vers le haut et à droite (c'est le cas de la fig. 7b), vers le bas et à droite, vers le haut et à gauche, vers le bas et à gauche.
- On trace la seconde base (fig. 7c).
- On repasse en gras en ce qui est vu et on note ce qui est caché à l'aide de lignes de tirets (fig. 7d).

(Fauvergue et al., 1987, p. 165)

Dans le cas (a), la face avant est une face latérale et elle est représentée par un rectangle. Dans le cas (b), la face avant est une base, sa représentation conserve donc la forme de trapèze rectangle. Les fuyantes sont réduites et orientées par les directions : à droite, à gauche, en haut, en bas.

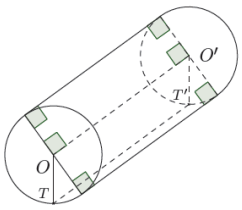
Comme dans le cas du prisme droit, il existe deux manières de représenter un cylindre de révolution dans un manuel.

Cylindre reposant sur une base



Dans cette représentation :
- les cercles de base deviennent des ellipses que l'on trace à la main,
- les longueurs AB et OO' sont respectivement égales au diamètre d'un disque de base et à la hauteur du cylindre.

Cylindre reposant sur une génératrice



Dans cette représentation :
- les disques de base sont en vraie grandeur,
- la longueur des génératrices est réduite,
- TT' est la génératrice au contact du bureau.»

(Pierre et al., 1995, p. 136)

Pour le « cylindre reposant sur une base »,
- les deux bases sont déformées, on les représente par des « ellipses ». C'est une nouvelle règle de représentation qui n'était pas explicitée en sixième. Sa présence résout le problème de représentation des solides de révolution, plus exactement, de leurs bases. Cette déformation conduit à un changement de longueur des diamètres des deux disques de base du cylindre. Ce sont uniquement les diamètres AB, A'B' joignant les deux extrémités les plus éloignées des ellipses qui conservent leurs longueurs ;
- la longueur des génératrices et celle du segment joignant les deux centres des disques de base sont conservées ;
- les diamètres AB, A'B' et les deux génératrices extérieures AA', BB' du dessin forment un rectangle. Il représente une coupe formée par le cylindre de révolution et un plan « frontal » contenant l'axe du cylindre. De plus, cette coupe rectangulaire conserve ses propriétés métriques.
Pour le « cylindre reposant sur une génératrice »,
- les disques de base ne sont pas déformés et sont représentés par des cercles. Ces cercles donnent l'impression que les bases du cylindre sont frontales par rapport à l'observateur ;
- les génératrices et le segment joignant les deux centres des disques, dans ce cas, sont des fuyantes. Ils sont réduits dans la représentation.

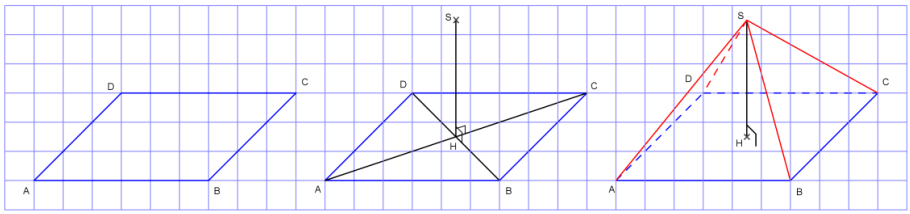
En bref, la représentation du prisme droit et du cylindre de révolution est bien liée au choix de la position du solide. Il est donc probable qu'il y a ici l'intervention du point de vue de l'observateur. Ce choix décide la représentation des bases et les génératrices extérieures, de ce qui est conservé, non-conservé. D'autre part, les renseignements de représentation sont toujours attachés à des dessins illustrés. Il est possible que ces dessins deviennent des dessins prototypiques pour l'élève.

c) En quatrième

Dans cette classe apparaissent des renseignements sur la représentation de la pyramide et du cône de révolution.

Pour les pyramides, on s'intéresse essentiellement à la représentation des pyramides régulières. Examinons l'extrait d'un manuel.

> Représenter une pyramide en perspective cavalière
> - On dessine d'abord la base. Les côtés parallèles sont représentés par des segments parallèles. Les côtés vus de face sont tracés en vraie grandeur (1).
> - On trace la hauteur verticale en vraie grandeur. Sans consigne, on choisit la place du sommet (2).
> - On achève la construction en traçant les arêtes latérales et en mettant en pointillés les parties cachées (3).
> Exemple
> Représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière à base ABCDS carrée telle que AB=3cm et la hauteur SH mesure 2cm.



(1) On dessine d'abord la base carrée. Les côtés [AB] et [CD] vus de face sont dessinés en vraie grandeur.	(2) La pyramide est régulière donc on détermine le centre H du carré, puis on trace la hauteur [SH] verticale et en vraie grandeur.	(3) On trace les arêtes latérales et on met en pointillés les arêtes cachées. On gomme les diagonales du carré.

(Audren et al., 2007, p. 251)

Selon cette citation, le parallélisme des côtés de la base est conservé. Les longueurs des côtés de base horizontaux sont conservées sur le dessin. La hauteur de la pyramide est aussi conservée et elle est tracée verticalement. De plus, nous constatons ici l'introduction de l'étude des propriétés du solide pour sa représentation. En effet, la hauteur de la pyramide est déterminée grâce au centre de la base.

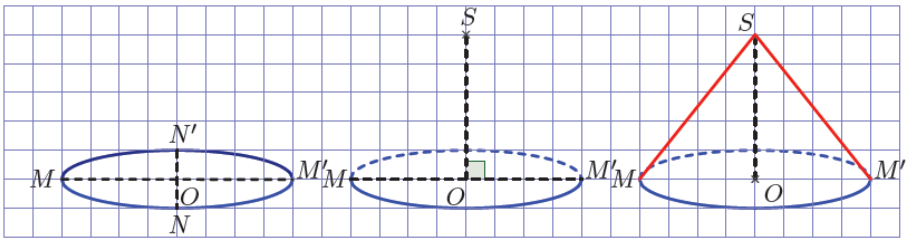
Pour le cône de révolution, il semble que les auteurs ont tendance à représenter un cône de révolution reposant sur sa base.

Représenter un cône de révolution en perspective cavalière

- On représente d'abord le disque de base en perspective par un ovale: le diamètre MM' vu de face est dessiné en vraie grandeur, le diamètre [NN'] vu de côté est le plus petit (1).
- On trace la hauteur [OS] verticale et en vraie grandeur (2).
- On achève la construction en traçant les deux génératrices [SM] et [SM'] et en mettant en pointillés les parties cachées (3).

Exemple

Représentation en perspective cavalière d'un cône de révolution dont le rayon de la base est 2cm et la hauteur 2,5cm.



(1) On dessine d'abord le disque de base. Le diamètre [MM'] vu de face est dessiné en vraie grandeur.	(2) Le sommet S est à la verticale du point O. La hauteur [OS] est tracée en vraie grandeur.	(3) On trace les génératrices [SM] et [SM'] vue de face et on met en pointillés les parties cachées.

(Audren et al., 2007, p. 252)

Dans cette citation, on peut trouver des éléments déformés et non-déformés dans une représentation d'un cône de révolution.

- Comme dans le cas du cylindre de révolution, le disque de base est déformé et est représenté par un « ovale ». Les longueurs des diamètres sont aussi changées (réduites), sauf le diamètre MM' situé en face de l'observateur. C'est le diamètre qui joint les deux extrémités les plus éloignées de l'ovale.
- La hauteur du cône est conservée. D'ailleurs, elle est représentée verticale (selon les renseignements donnés) et perpendiculaire au diamètre MM' (dans le dessin d'illustration).

Contrairement au point de vue mathématique, les deux génératrices « extérieures » du dessin sont des segments qui joignent le sommet S et deux bouts d'extrémité M, M' de l'ovale. Elles vont donc couper l'ovale alors que d'un point de vue mathématique, elles devraient être

tangentes à l'ovale. Il est possible que les auteurs veuillent éviter d'aborder la notion de « tangente à un ovale » à ce niveau de classe et qu'ils estiment que ce choix ne crée pas de grandes différences entre leur dessin et le dessin des mathématiciens. D'où, sur le dessin, un triangle isocèle qui suggère une coupe verticale passant par le sommet du cône. D'ailleurs, les éléments non-déformés (le diamètre MM' et la hauteur SO), précisés dans les renseignements donnés sur le dessin, permettent d'affirmer la conservation de forme et de dimension (à l'échelle) de cette coupe triangulaire.

d) En troisième

L'enseignement de la perspective cavalière en troisième concerne la représentation des sphères. Les manuels de cette classe proposent deux façons différentes de représenter la sphère.

- Première façon, on représente la sphère par un cercle (Figure 11).
- Deuxième façon, on représente la sphère par un « cercle déformé légèrement » (Figure 12).

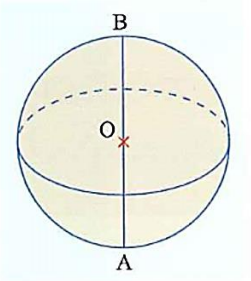


Figure 11. Dessin de la sphère extrait de (Lanoëlle et al. 1999, p. 258)

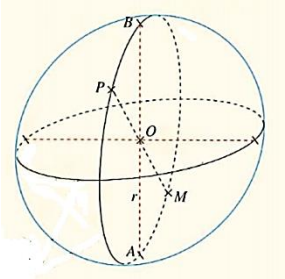


Figure 12. Dessin de la sphère extrait de (Serra et al., 1999, p. 261)

Bien que la première ne soit pas cohérente du point de vue mathématique de la perspective cavalière, où l'image de la projection d'une sphère est une ellipse, la plupart des manuels la proposent. Probablement parce qu'elle donne une l'impression plus « sphérique » que la deuxième.

Par ailleurs, nous trouvons régulièrement, sur les dessins, des « ellipses » représentant des grands cercles de la sphère.

> Comment dessiner une sphère sur une feuille de papier ?
> Si l'on se contente de dessiner une sphère comme sur la figure 1 ci-dessous, cela ne vas pas, car c'est déjà ainsi que l'on représente un cercle. Pour dessiner une sphère de centre O sur une feuille de papier, tout en rendant compte du fait que c'est une figure de l'espace, on procède comme indiqué sur la figure 2.
> Expliquer la présence des pointillés sur la figure 2

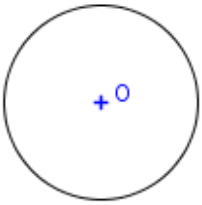


Figure 1

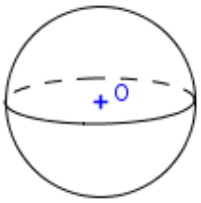


Figure 2
(Barra et al., 1992, p. 111)

C'est un « code d'écriture » qui donne l'intuition de la troisième dimension. Pourtant, elle cause des problèmes de cohérence mathématique lors qu'on représente les pôles de sphères terrestres.

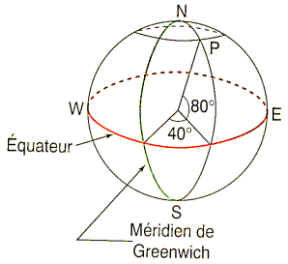


Figure 13. Dessin de la sphère terrestre extrait de (Chapiron et al., 1999, p. 225)

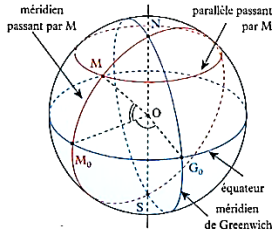


Figure 14. Dessin de la sphère terrestre extrait de (Gérald et al., 2003, p. 210)

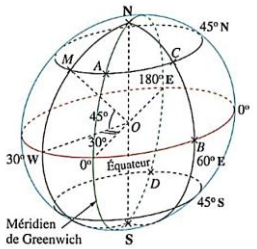


Figure 15. Dessin de la sphère terrestre extrait de (Serra et al., 1999, p. 260)

Dans la Figure 14 (la sphère terrestre est représentée par un cercle) et la Figure 15 (la sphère terrestre est représentée par une ellipse), les pôles N et S sont situés à l'intérieur de la courbe extérieure. Pourtant dans la Figure 13, les pôles sont situés sur le cercle. Cela donne l'idée que N est le point le plus haut, et S, le plus bas, de la sphère ; mais c'est du point de vue mathématique en conflit avec la représentation des équateurs par des ellipses.

e) En seconde

Au collège, les élèves ont acquis des connaissances sur la représentation en perspective cavalière de différents solides. Au lycée, il s'agit de mettre en place un système de règles de représentation communes pour tous les solides rencontrés précédemment par les élèves. Nous examinons certains manuels afin de mettre en évidence les règles proposées.

Manuel « Indice 2004 »

La perspective cavalière (*cf.* Activité 2, p.280) est un mode de représentation d'un objet de l'espace par une figure plane.

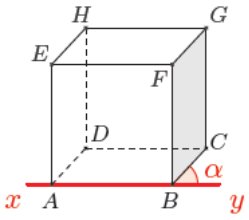
● Les faces situées dans un plan vertical perpendiculaire aux rayons visuels, appelé plan frontal, sont représentées en vraie grandeur.

● Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles. Sur ces droites, deux segments de même longueur sont représentés par des segments de même longueur.

● Une droite perpendiculaire au plan frontal est représentée par une droite faisant un angle α avec (xy) (c'est l'angle de fuite).

● Toute longueur sur cette droite est multipliée par un coefficient k; $(0 < k < 1)$ appelé coefficient de perspective.

● Les lignes cachées sont tracées en pointillés.



(Gauthier et al., 2004, p. 254)

Dans la citation, aucun mot n'évoque la projection, mais on peut trouver les caractéristiques de l'approche par cube de référence de la projection cylindrique oblique dans la présence du « plan frontal » dont tous les objets sont conservés, et du couple « angle de fuite », « coefficient de perspective », qui permet de tracer les fuyantes.

Manuel « Odyssée 2010 »

> La représentation plane d'un solide en perspective cavalière doit respecter les règles suivantes :
> ● une droite de l'espace est représentée par une droite (et donc trois point alignés dans l'espace sont représentés par trois point alignés);
> ● deux droites parallèles dans l'espace sont représentées par deux droites parallèles;
> ● le milieu d'un segment de l'espace est représenté au milieu du segment dessiné et, plus généralement, la représentation conserve sur un segment les proportions de longueur;
> ● les éléments visibles d'un solide sont dessinés en traits pleins, les éléments cachés en pointillés;
> ● dans un plan vu de face, la figure représentée est en vraie grandeur (mêmes longueurs et même forme).
>
> (Brisoux et al., 2010, p. 234)

Ce manuel choisit de présenter seulement la règle de représentation en vraie grandeur des objets du plan frontal, le couple (angle de fuite, rapport de réduction) est absent. Mais on y aborde la règle de conservation des proportions de longueur.

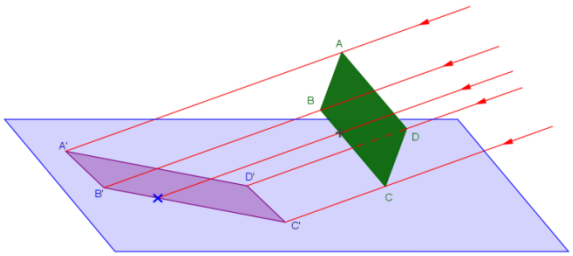
Manuel « Déclic 2010 »

> La représentation d'un objet en trois dimensions par une figure plane (en deux dimensions) est une opération délicate. En mathématiques, on utilise la perspective cavalière, dont voici les propriétés principales.
> Propriétés**.** Dans la perspective cavalière:
> ● deux droites parallèles dans la réalité sont représentées par les droites parallèles;
> ● les milieux des segments et les rapports de longueurs sont conservés;
> ● les longueurs et les angles ne sont généralement pas conservés;
> ● par convention, les arêtes cachées sont représentées en pointillés.
>
> (Beltramone et al., 2010, p. 202)

Pour ce manuel, on peut constater que toutes les caractéristiques de l'approche par cube de référence ont disparu. Seules les propriétés de la projection sont présentes. Il nous semble que l'absence de la règle de représentation en vraie grandeur des objets frontaux élargit l'ensemble des dessins autorisés. Par exemple, un dessin du parallélépipède rectangle dont toutes les faces sont strictement des parallélogrammes est « légitime ». En outre, ce manuel distingue bien les règles mathématiques comme la conservation du parallélisme, du rapport, et les conventions (usage des pointillés).

Manuel de l'IREM de Poitiers 2004

> Plusieurs méthodes sont mises en œuvre pour représenter les objets de l'espace. En mathématiques, on utilise souvent la perspective cavalière.
> Elle correspond à l'ombre sur un plan d'un objet éclairé par le Soleil, c'est-à-dire par une source lumineuse suffisamment éloignée pour que l'on puisse considérer que les rayons qu'elle émet sont parallèles.



Outre des conventions de dessin destinées à en faciliter l'interprétation (les arêtes cachées sont représentées en traits pointillés par exemple), la représentation en perspective cavalière obéit à certaines règles. En particulier :

C1 : des droites de l'espace sont représentées par des droites.

C2 : des droites parallèles dans l'espace sont représentées par des droites parallèles.

C3 : l'ordre des points sur une droite et les rapports de distances entre ces points sont conservés.

C4 : toute figure contenue dans un plan parallèle au plan de projection est représentée en vraie grandeur.

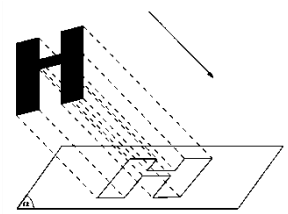
(Thiénard et al., 2004, p. 209)

La perspective cavalière est expliquée comme le résultat de l'utilisation d'une projection (approche par projection de la projection cylindrique) mais dans le monde physique : « ombre sur un plan d'un objet éclairé par le Soleil ». Ainsi, ce manuel veut reprendre l'approche de la perspective des manuels du groupe 1 ; bien sûr, une définition précise de la projection cylindrique oblique n'est pas abordée ici. Par ailleurs, comme le précédent, ce manuel sépare clairement les règles mathématiques et les conventions.

2.2 Au Viêt-Nam

L'examen les trois programmes de mathématiques les plus proches (1990, 2000, 2006) montre que le contenu de la représentation en perspective n'a pas évolué. La représentation en perspective est officiellement introduite en classe 11 et par la projection parallèle.

Généralement, pour avoir un dessin de représentation d'une figure H dans l'espace, on la projette parallèlement sur un plan α selon une direction donnée, puis on prend son image par projection, H' ou une figure semblable (figure 2.30).



(Tran et al., 1990, p. 55)

Outre l'explication de l'étape de construction par la projection parallèle, le manuel 1990 parle aussi de l'étape de représentation avec deux exigences pour le dessin de représentation. Premièrement, le dessin doit respecter certaines conservations qui proviennent de la projection, comme celles de l'alignement, du parallélisme, du rapport.

Le dessin de représentation doit être correct. C'est la demande la plus importante pour un dessin. […] Pour avoir un dessin correct, il est nécessaire de s'intéresser aux conservations suivantes :

- L'alignement et l'ordre des points sur une droite.
- Le parallélisme des droites et des segments.

> - Le rapport des segments de même direction.
> En résumé, les propriétés qui ne sont pas modifiées par la projection parallèle sont conservées sur le dessin de représentation.
>
> (Tran et al., 1990, pp. 55, 56)

Deuxièmement, le dessin doit être capable de représenter les trois dimensions de l'objet dans l'espace.

> Le dessin de représentation doit être en relief. Cette demande a pour objectif de favoriser l'aperçu de l'objet de l'espace. Pour la satisfaire, il est nécessaire de choisir de manière convenable la direction et le plan de projection afin que les éléments de l'objet réel soient bien en évidence. Par exemple, si nous choisissons un carré pour représenter un cube, ce dessin de représentation est correct mais pas en relief. Dans ce cas, nous avons choisi le plan parallèle à deux faces du cube comme plan de projection et une arête de l'autre face non parallèle au plan de projection comme direction de projection. Les images des projections des quatre faces du cube sont les quatre côtés du carré, le dessin n'est donc pas en relief.
>
> (Tran et al., 1990, p. 56)

Ainsi, c'est l'exigence de la suggestion de l'objet de l'espace qui conduit à certains choix de paramètres de la projection.

2.3 Conclusion

L'enquête sur les traces de l'enseignement de la représentation en perspective dans les programmes et les manuels des deux pays (France et Viêt-Nam) a mis en lumière des réponses aux questions posées au début du chapitre, concernant le choix des modes de représentation plane (Q3a), le moment et la manière de les introduire (Q3c) et les caractéristiques d'un dessin prototypique (Q3b').

Pour les modes de représentation plane, nous en constatons trois : épures de la géométrie descriptive, perspective cavalière, perspective cylindrique. Le premier apporte la précision de la position de l'objet dans l'espace, le deuxième et le troisième donnent une perception de la troisième dimension de l'espace.

En ce qui concerne l'introduction de la représentation plane, nous trouvons des traces de trois approches pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin.
La première est l'**approche par projection**. On peut constater sa présence dans les manuels correspondant aux programmes de 1973, 1981 et 1986 en France ainsi que dans les programmes 1990, 2000 et 2006 au Viêt-Nam. On enseigne d'abord la projection cylindrique, puis on l'utilise pour définir les épures de la géométrie descriptive (liée à la projection orthogonale) et la perspective cavalière (liée à la projection oblique). Afin d'améliorer les constructions effectives, les manuels fournissent les propriétés de la perspective. Elles sont différenciées en propriétés affines et propriétés métriques dans lesquelles nous retrouvons les traces de l'approche par cube de référence : conservation de tout ce qui est parallèle au plan de dessin et couple de l'angle de fuite et du rapport de réduction permettant la détermination des segments orthogonaux au plan de dessin.
Dans la deuxième approche, la représentation d'un objet de l'espace est accessible grâce aux règles de représentation qui traduisent les propriétés géométriques de l'objet en propriétés

spatiales du dessin. Ces « règles de traduction » résultent des propriétés de la projection cylindrique oblique. Nous l'appellerons désormais : **approche par « règles de représentation »**. Elle est utilisée dans les manuels français à partir de 1985 et associée à la perspective cavalière. Toutefois, la liste de ces règles est différente selon les manuels. En effet, certains présentent certaines caractéristiques de l'approche par cube de référence de la projection cylindrique : règle de représentation en vraie grandeur, angle de fuite, rapport de réduction, tandis que d'autres ne les abordent pas.
Troisièmement, nous notons, dans certains manuels, des renseignements détaillés sur le dessin des solides usuels : parallélépipède rectangle (en sixième), prisme droit, cylindre (en cinquième), pyramide régulière, cône de révolution (en quatrième). Nous les considérons comme des traces de l'**approche par dessin prototypique**.

Voici quelques caractéristiques, liées à la représentation en vraie grandeur, d'un dessin prototypique. Nous les avons mises en évidence en étudiant les règles de représentation et les étapes du dessin :
- représentation de deux faces opposées pour un parallélépipède rectangle,
- représentation d'une face latérale ou de deux bases pour un prisme droit,
- coupe verticale passant par l'axe ou deux bases pour un cylindre de révolution,
- représentation de deux arêtes opposées et de la hauteur pour une pyramide régulière,
- coupe verticale passant par l'axe pour un cône de révolution.

L'angle de fuite prend en général l'une des valeurs : 30°, 45°ou 60°. Quant au rapport de réduction, il est défini par une valeur toujours inférieure à 1.

En conclusion, l'enquête présentée dans ce chapitre a montré la complexité de l'enseignement de la représentation en perspective : divers choix du mode de représentation, entrelacement des approches pour enseigner le passage d'un objet de l'espace à un dessin, contraintes pour un « bon » dessin (caractéristiques d'un dessin prototypique) qui ne sont pas issues de la théorie des projections. Confronté à cette complexité, chaque système éducatif fait son propre choix. Ceci nous conduit à effectuer une recherche comparative sur l'enseignement de la représentation en perspective dans les deux pays étudiés : la France et le Viêt-Nam.

Conclusion de la partie I : objets de notre recherche

Les études précédentes ont montré que de nombreux choix sont possibles pour l'enseignement de la représentation en perspective. D'où la nécessité d'une étude sur les choix actuels des deux institutions auxquelles nous nous intéressons (enseignement français et enseignement vietnamien) relatifs à l'enseignement de l'objet : « représentation d'un objet géométrique de l'espace ».

Choix de la perspective

Du point de vue théorique (cf. la section 1.1.1), plusieurs types de perspectives permettent de représenter un objet géométrique de l'espace. Chacune a ses points forts et ses inconvénients. A partir d'une enquête sur les traces de l'évolution de l'enseignement de la représentation en perspective (*cf.* le Chapitre 2), nous allons montrer que les deux institutions ont fait des choix différents. D'où notre première question par rapport aux programmes actuels :

Q3a) Q*uel(s) mode(s) de représentation est (sont) choisi(s) dans l'enseignement actuel ?*

Choix des dessins prototypiques

On a constaté la présence de dessins prototypiques comme une réponse à la perte d'informations lors du passage de trois dimensions à deux dimensions (*cf.* la section 1.3.4). D'où la question :

Q3b') Dans l'enseignement de la représentation en perspective, quels dessins prototypiques peut-on rencontrer ?

L'exploitation des dessins prototypiques dans les institutions française et vietnamienne nous permettra de mettre en lumière le rapport institutionnel à l'objet « représentation en perspective », et de formuler des règles de contrat didactique concernant cet objet.

Choix de l'approche :

La synthèse des résultats des chapitres 1 et 2 nous conduit aux quatre approches possibles pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin (Figure 16):

- approche par projection,
- approche par observation,
- approche par dessin prototypique,
- approche par règles de représentation.

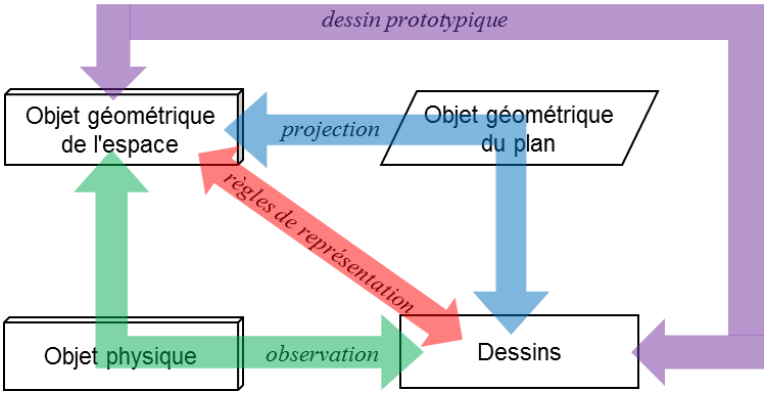


Figure 16. Approches pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin

Cela nous conduit à la question : *Quelles sont les significations épistémologiques et didactiques de ces approches ?*

Nous considérons deux grandes catégories de significations :

- « **transformation** » : le dessin résulte d'une transformation, soit d'une transformation mathématique (« **projection** ») associée à des codages pour la troisième dimension (comme des pointillés), soit d'une perception visuelle possible (« **observation** ») d'un objet physique associée à un objet géométrique de l'espace ;
- « **dessin prototypique – règles de représentation** » : le dessin prototypique est un dessin particulier résultant d'une restriction de l'ensemble des dessins possibles d'un objet physique/géométrique de l'espace. Cette restriction résulte des règles de représentation du dessin : c'est une création didactique. Ce dessin permet de reconnaître immédiatement un objet de l'espace sans faire référence aux « transformation » de cet objet.

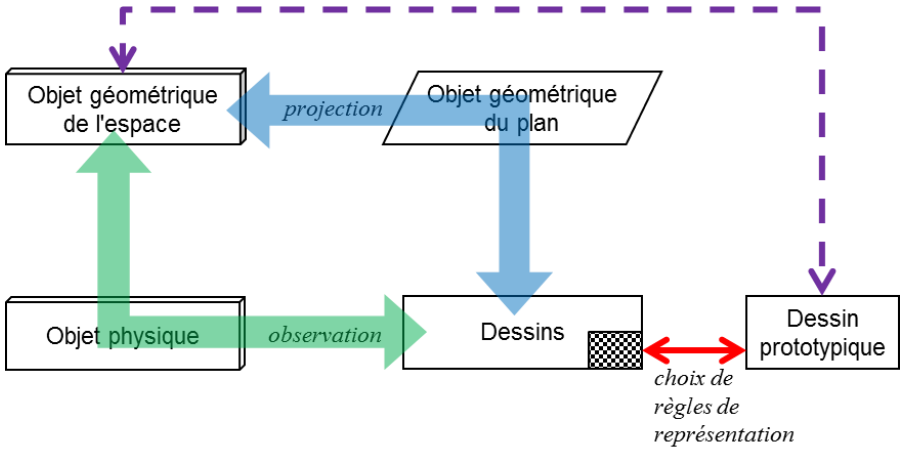


Figure 17. Significations épistémologiques et didactiques du passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin

D'où la question Q3c :

Q3c) Quelles approches pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin sont choisies actuellement ? Pour quelles raisons ? Existe-t-il parfois des utilisations mixtes? Si oui, comment ? Sinon, qu'est-ce qui justifie l'approche retenue ?

Afin de répondre aux trois questions ci-dessus, nous allons conduire, dans la partie II, une analyse institutionnelle de l'objet « représentation en perspective » en France et au Viêt-Nam. Cette étude comparative nous permettra de mettre en évidence les choix spécifiques de chaque institution.

PARTIE II

Analyse institutionnelle comparative de l'objet « représentation en perspective » entre la France et le Viêt-Nam

Chapitre 3
Analyse de l'enseignement de la représentation en perspective dans les programmes actuels

Le Chapitre 2 nous a fourni une vue globale sur les possibilités de l'enseignement officiel de la représentation en perspective. Ce chapitre se centrera sur l'enseignement de cet objet dans les programmes actuels en France et au Viêt-Nam. Nous retenons ici les résultats du Chapitre 2 quant aux modes de représentation choisis (Q3a), aux caractéristiques des dessins (Q3b') et aux approches pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin (Q3c). La limitation de notre étude aux programmes actuels nous permettra, dans ce chapitre, d'approfondir les choix de chaque institution et notamment, d'explorer leur traduction tout au long du cursus scolaire.

Comme dans le Chapitre 2, nous commencerons par l'étude des programmes, puis, de la partie « cours » des manuels de deux pays. En outre, nous complèterons les études institutionnelles par des analyses de « livres du professeur » pour clarifier les intentions d'enseignement des institutions et les compléments possibles dans la pratique d'enseignement.

3.1 En France

3.1.1 Etude du programme

L'enseignement de la représentation en perspective en France concerne les classes de sixième, cinquième, quatrième, troisième et seconde. Les analyses de cette sous-section se basent sur les deux documents suivants présentant le programme actuel :

- au collège : bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008,
- au lycée : bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009.

a) Au collège

Au collège, on a choisi la représentation en perspective cavalière dès la classe de sixième. Elle est considérée comme un objectif important de l'étude de la géométrie de l'espace de cette classe.

> A l'école élémentaire les élèves ont déjà travaillé sur des solides droits de l'espace (description, construction, patron). Cette étude est poursuivie en 6e en mettant l'accent sur un aspect nouveau : la représentation en perspective cavalière, dont certaines caractéristiques sont précisées aux élèves.
>
> (Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008, p. 17)

C'est un outil pour développer la vision dans l'espace – un des objectifs essentiels de l'enseignement de la géométrie de l'espace :

> L'objectif est toujours d'apprendre à voir dans l'espace, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et la réalisation de patrons.
>
> (*Ibid.,* p. 31)

C'est également un outil pour étudier des solides et leurs propriétés.

> Reconnaître un parallélépipède rectangle de dimensions données à partir […] d'un dessin le représentant en perspective cavalière.
> Reconnaître dans une représentation en perspective cavalière du parallélépipède rectangle les arêtes de même longueur, les angles droits, les arêtes, les faces parallèles ou perpendiculaires.
>
> (*Ibid.,* p. 17)

Les programmes proposent de travailler le passage de l'objet à ses représentations et réciproquement. Ce travail doit s'appuyer sur la manipulation des solides.

> Même si les compétences attendues ne concernent que le parallélépipède rectangle, les travaux portent sur différents objets de l'espace et s'appuient sur l'étude de solides amenant à passer de l'objet à ses représentations et inversement.
>
> (*Ibid.,* p. 17)

Quant à la méthode de passage d'un objet de l'espace à un dessin, nous constatons l'existence de règles de représentation abordées sous le nom de « conventions ».

> Etre familiarisé avec des représentations de l'espace, notamment avec l'utilisation de conventions usuelles pour les traitements permis par ces représentations.
>
> (*Ibid.,* p. 10)

Pour chaque classe du collège, l'enseignement de la géométrie de l'espace vise à l'étude d'un groupe de solides (Tableau 2).

Classe	**Solide**	
	Polyèdre	**Solide de révolution**
6e	Parallélépipède rectangle	
5e	Prisme droit	Cylindre de révolution
4e	Pyramide	Cône de révolution
3e		Sphère

Tableau 2. Liste de solides étudiés dans le programme français actuel selon le niveau de classes

La rubrique de la représentation en perspective - partie indispensable de cet enseignement - est clairement influencée par ces étapes de présentation : les objets à représenter, à chaque niveau, respectent cette progression[22]. Le parallélépipède rectangle, en tant que premier solide enseigné dans le programme du collège, favorisera l'approche par cube de référence de la projection cylindrique. En effet, les notions de l'angle de fuite et du rapport de réduction seront travaillées sur des segments orthogonaux au plan de dessin.

[22] Voir les « capacités exigées » de chaque classe dans l'Annexe 2.

b) Au lycée

En seconde, la représentation en perspective est une capacité nécessaire pour apprendre d'autres contenus de Géométrie de l'espace. Nous constatons, dans cette classe, l'apparition du nouveau terme : « perspective parallèle ».

> Les élèves doivent être capables de représenter en perspective parallèle (dite aussi cavalière) une configuration simple et d'effectuer des constructions sur une telle figure.
>
> (Bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009, p. 7)

Comment expliquer l'ajout de ce nouveau terme ?

Notons qu'en seconde, on reprend l'étude des solides introduits au collège. Parmi eux, on a étudié la sphère en classe de troisième sans préciser la perspective adoptée pour sa représentation. Mathématiquement, il y a deux tendances comme nous l'avons vu dans la section 2.1.3 : représenter la sphère par une ellipse avec la perspective cavalière, ou par un cercle avec la perspective axonométrique. Il est clair que la deuxième est plus favorable pour la lecture, car plus proche de ce qu'on voit quand on regarde une sphère. Il est donc fort probable que les manuels de troisième choisissent la deuxième. Afin d'expliquer aussi bien la perspective cavalière pour les solides en sixième, cinquième, quatrième que le perspective axonométrique pour la sphère en troisième, il est nécessaire de regrouper les deux perspectives en une seule : la perspective parallèle.

En bref, la représentation en perspective est étudiée dans les classes de collège et de lycée et est associée à l'étude des solides.

3.1.2 Etude des manuels et des livres du professeur

En France, il existe plusieurs manuels respectant le programme officiel. Les analyses suivantes représentent une synthèse effectuée à partir de l'étude de diverses séries de manuels :

- en sixième : Déclic 2009, Myriade 2009, Nouveau prisme 2009, Phare 2009, Sésamath 2009, Triangle 2009, Transmath 2009, Zénius 2009, Zéphir 2009;
- en cinquième : Déclic 2010, Myriade 2010, Nouveau prisme 2010, Phare 2010, Sésamath 2010, Triangle 2010, Transmath 2010, Zénius 2010;
- en quatrième : Myriade 2011, Nouveau prisme 2011, Phare 2011, Sésamath 2011, Triangle 2011, Transmath 2011, Zénius 2011;
- en troisème : Myriade 2012, Phare 2012, Sésamath 2012, Triangle 2012, Transmath 2012, Zénius 2012;
- en seconde : Déclic 2010, Hyperbole 2010, Math'x 2010, Odyssée 2010, Repère 2010, Transmath 2010.

Dans cette analyse nous nous limitons à la partie cours des manuels et aux livres des professeurs. Au vu des résultats de l'enquête sur les traces de l'enseignement de la section 2.1, nous nous intéressons plus particulièrement à la liste des règles de représentation en perspective présentées aux élèves et aux renseignements détaillés sur la représentation d'un solide.

a) En sixième

Les manuels de sixième présentent la perspective cavalière comme une technique pour représenter des solides. L'introduction de ce savoir est assurée par les règles de représentation comme le montrent les extraits suivants.

Transmath 6e

> La perspective cavalière est un procédé qui permet de représenter un solide sur une feuille de papier, tout en rendant « visibles » les parties cachées. Pour cela, on respecte les règles suivantes.
> Règles. – Les arêtes parallèles sur le solide sont représentées par des segments parallèles.
> - Les faces qu'un observateur a face à lui (face avant et arrière) sont représentées en vraie grandeur (ou à l'échelle) ; les arêtes qui relient ces faces sont réduites.
> - Les arêtes qu'un observateur ne voit pas sont représentées en pointillés.
>
> (Malaval et al., 2013, p. 260)

Déclic 6e

> En mathématiques, on utilise la perspective cavalière pour représenter les solides, comme un parallélépipède rectangle.
> - Les arêtes cachées dans la réalité sur un solide plein sont en pointillés.
> - Les arêtes parallèles et de même longueur dans la réalité restent parallèles et de même longueur sur le dessin.
> - Deux faces opposées sont parallèles dans la réalité. Elles sont superposables sur le dessin : […]
> - Les faces avant et arrière ne sont pas déformées et sont représentées par des rectangles.
> - Les autres faces sont déformées et représentées par des parallélogrammes.
>
> (Beltramone et al., 2009a, p. 230)

Dans les citations ci-dessus, on définit la perspective cavalière comme une technique ou un procédé pour représenter un solide par un dessin sur une surface plane matérielle. Les élèves comprennent cette technique grâce aux règles de représentation. Les deux manuels ci-dessus adoptent les trois règles suivantes :
- conservation du parallélisme,
- représentation en vraie grandeur les faces avant et arrière,
- représentation en pointillés des arêtes cachées.

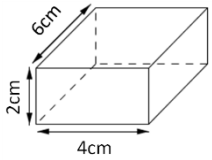
Mais d'autres règles sont présentes dans l'un ou l'autre des deux manuels : par exemple, réduction des fuyantes dans le manuel Transmath 6e, conservation de l'égalité dans le manuel Déclic 6e,…

A côté de la présentation des règles de la perspective cavalière, nous notons que dans presque tous les manuels français de sixième, les règles de représentation sont illustrées par le dessin d'un parallélépipède rectangle.

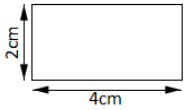
Dans certains manuels, on donne de plus à l'élève des renseignements détaillés pour la représentation d'un parallélépipède rectangle. C'est le cas du manuel Zéphir 6e.

Enoncé
Représente en perspective cavalière un pavé droit dont les dimensions sont 2cm×4cm×6cm.

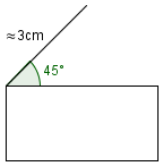
Solution



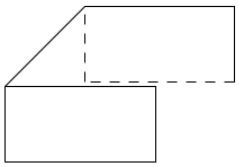
Méthode



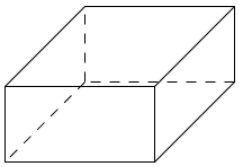
→ On dessine un rectangle représentant la face avant.



→ On trace l'une des 4 arêtes perpendiculaires à cette face.



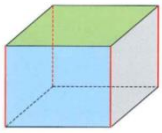
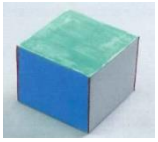
→ On dessine la face arrière en mettant en pointillés les arêtes cachées.



→ On termine en traçant les arêtes reliant les faces avant et arrière.
(Lafon et Annicchiarico, 2009, p. 265)

Dans la citation, nous nous intéressons aux deux informations « 3 cm » et « 45° » concernant la construction de la fuyante. *D'où viennent-elles, alors qu'elles sont absentes dans la liste des règles de représentation au sein de la partie de « cours » de ce manuel ?* Il est évident que leur existence permet les constructions effectives ; en plus, il est fort probable qu'elles ont été sélectionnées afin de permettre un « meilleur dessin » de l'objet à représenter.

En outre, nous notons que certains manuels relèvent la différence entre un dessin représentant un objet et une image de cet objet reçue par l'observation (une photo). Examinons l'activité et sa solution ci-dessous, présentées dans le manuel et le livre du professeur Déclic 6e.

Amélia a fabriqué une boîte et l'a prise en photo. Son professeur a fait au tableau une « représentation » de cette boîte.  Dessin du professeur  Photo de la boite d'Amélia	Commentaires. Le but de cette activité est de montrer la façon de procéder pour représenter en perspective cavalière un pavé droit. Elle fait apparaître la conservation des longueurs et la transformation des sur faces rectangulaires en parallélogrammes. On pourra également mettre en évidence la conservation du parallélisme dans ce type de représentation.
1. Combien d'arêtes rouges vois-tu sur le dessin ? sur la photo ?	1. Sur le dessin, on voit quatre arêtes rouges. On n'en voit que trois sur la photo. L'arête cachée est dessinée en pointillés.
2. Compare la longueur des arêtes	2. Sur le dessin, les quatre arêtes

rouges sur le dessin, puis sur la photo. 3. Quel est le nom du quadrilatère colorié en vert dans la réalité ? sur le dessin ? sur la photo (décalque son contour avant de répondre) ? 4. Quel est le nom du quadrilatère colorié en bleu dans la réalité ? sur le dessin ? sur la photo ? (Beltramone et al., 2009a, p. 229)	rouges sont de même longueur. Sur la photo, la longueur change et dépend de la position dans l'espace de celle-ci. 3. et 4. Dans la réalité, les quadrilatères vert et bleu sont des rectangles, sur le dessin ce sont des parallélogrammes, sur la photo ce sont des quadrilatères quelconques. La perspective cavalière conserve le parallélisme, mais ne conserve pas les longueurs. (Beltramone et al., 2009b, p. 120)

Cette activité permet d'indiquer les différences entre la représentation d'un dessin en perspective cavalière et une image photographique (perspective linéaire) :

- à propos de la longueur des arêtes parallèles du parallélépipède rectangle, on trouve des segments de longueur égale sur le dessin mais inégale sur la photo ;
- à propos des faces rectangulaires du parallélépipède, on voit des parallélogrammes sur le dessin, mais des quadrilatères dont les côtés ne sont pas parallèles deux à deux sur la photo.

On peut déduire de l'étude de ces différences que les auteurs de ce manuel souhaitent empêcher l'usage de l'observation pour la représentation en perspective cavalière d'un objet de l'espace et de ses propriétés géométriques. Néanmoins, la référence à l'observation reste nécessaire pour introduire la règle des pointillés.

b) En cinquième

La représentation en perspective en cinquième se centre sur son application à deux solides : prisme droit et cylindre de révolution en s'appuyant sur les règles de représentation étudiées en sixième. Nous nous intéressons à la représentation des bases du cylindre – des disques, qui sont de nouveaux objets de l'espace dont la règle de représentation était absente dans la classe précédente.

Il y a deux possibilités de représentation d'un cylindre de révolution. Considérons le dessin suivant dans le manuel Transmath 5e :

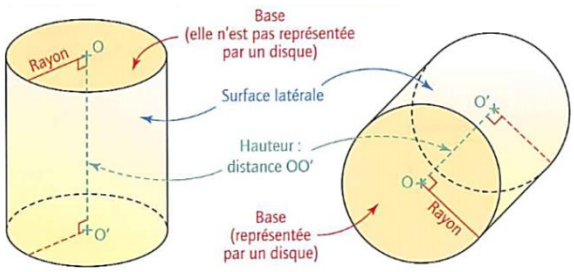


Figure 18. Dessins de représentation en perspective cavalière d'un cylindre de révolution extrait de (Malaval et al., 2010, p. 268)

Cette représentation des bases s'appuie sur une nouvelle règle concernant la représentation des cercles. Nous la trouvons explicitée dans le manuel Phare 5e :

> Un cercle est représenté par un cercle ou par un ovale, par exemple les bases de ce cylindre.
>
> (Brault et al., 2010, p. 243)

Néanmoins, l'existence de cette règle de représentation n'est pas présentée de la même façon dans tous les manuels. Certains ne l'explicitent pas et ne donnent que le dessin représentant un cylindre de révolution ; d'autres se limitent au cas de la déformation du cercle en un ovale, par exemple, le manuel Nouveau prisme 5e :

> Les disques de base ont été déformés par la perspective. Ils sont représentés par des « ovales » appelés ellipses.
>
> (Jacob et al., 2010, p. 269)

En outre, nous ne trouvons pas, dans les manuels actuels, d'explications sur la représentation des génératrices du cylindre de révolution. Il est fort probable que les manuels pensent que les dessins d'illustration peuvent les remplacer.

c) En quatrième

Dans la partie « cours » des manuels, il est rare que la représentation en perspective soit présentée, seuls les dessins de représentation de la pyramide et du cône de révolution sont exposés. Une des raisons possibles est que, les règles de représentation en perspective cavalière ayant été enseignées dans les classes précédentes, ce contenu ne s'inscrit pas dans le programme de la classe de quatrième.

d) En troisième

L'objet d'étude de cette classe est la sphère. Pour ce solide, il est impossible d'appliquer les règles de représentation connues des élèves. Dans les manuels, on ne donne que sa représentation : un cercle. Mathématiquement, cette représentation n'est pas le résultat de la perspective cavalière comme dans les classes précédentes, mais celui de la perspective axonométrique. Ce choix didactique de la représentation manifeste un privilège de la perception directe du dessin, c'est le sens inverse du schéma de la Figure 4 : la forme « circulaire » du dessin de représentation suggère bien la propriété « sphérique » de la sphère.

Par ailleurs, sur le dessin d'une sphère, nous trouvons régulièrement des « ovales » représentant des grands cercles. Il est fort probable que c'est une règle implicite qui permet de distinguer le dessin d'un cercle et celui d'une sphère.

e) En seconde

On présente, dans cette classe, la perspective cavalière et on l'approche par des règles de représentation. Comme pour la classe de sixième, la liste de ces règles est différente selon les manuels. Nous n'aborderons, dans cette sous-section, que les points des manuels de seconde qui sont différents de ceux des manuels de sixième.

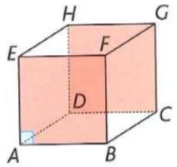
Globalement, l'enseignement de ce contenu est plus riche en seconde qu'au collège.

Premièrement, bien que la projection cylindrique ne soit jamais abordée, on présente explicitement les caractéristiques de l'approche par cube de référence de la projection cylindrique. Voici par exemple la liste des règles de représentation figurant dans le manuel Repères 2de.

1. Règles de construction

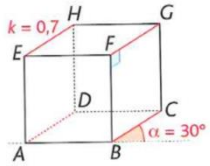
La perspective cavalière permet de représenter un objet en trois dimensions sur une surface à deux dimensions (feuille de papier, tableau noir, etc.) En voici les principes :

Règle 1 : Les lignes et arêtes cachées sont représentées en trait plein.



Règle 2 : Les éléments situés dans un plan frontal (c'est-à-dire un plan perpendiculaire au regard de l'observateur) sont représentés en vraie grandeur, non déformés : les distances et les angles sur la représentation sont les mêmes que sur l'objet lui-même.

Règle 3



- Les droites perpendiculaires au plan frontal, appelées fuyantes, sont représentées par des droites parallèles entre elles, formant un angle donné avec l'horizontale, appelé angle de fuite (généralement entre 30° et 60°).
- Les longueurs représentées dans la direction des fuyantes ne sont pas les longueurs réelles : on les multiplie par un coefficient de perspective donné (souvent 0,7 ou 0,5).

2. Propriétés de conservation

Propriétés

- Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.
- Des droites concourantes sont représentées par des droites concourantes.
- Des points alignés sont représentés par des points alignés.
- Les milieux de segments sont conservés

(Choquer-Raoult et al., 2010, p. 212)

Ces « règles de construction » nous renvoient au schéma de la Figure 9 du chapitre I de la première partie : Représentation plane selon l'approche par cube de référence du point de vue affine-métrique. En effet, on retrouve ses caractéristiques comme le plan de représentation en vraie grandeur, l'angle de fuite et le rapport de réduction (appelé ici « coefficient de perspective »). Les autres règles de représentation, par exemple la conservation du parallélisme, de la concourante, de l'alignement, du milieu, sont considérées comme propriétés de cette construction. En outre, la citation ci-dessus nous indique que l'institution peut intégrer aux règles de représentation des contraintes dans le but d'obtenir un « bon dessin ». Par exemple, on recommande une valeur entre 30° et 60° pour l'angle de fuite, et entre 0,5 et 0,7 pour le rapport de réduction.

L'enseignement est plus riche en seconde qu'au collège pour une deuxième raison : on ajoute les règles de représentation de nouveaux objets dont la représentation n'a pas été abordée au collège. Citons ici la règle de conservation du milieu (plus généralement, la conservation des proportions de longueur) dans le manuel Odyssée 2de :

> Le milieu d'un segment de l'espace est représenté au milieu du segment dessiné et, plus généralement, la représentation conserve sur un segment les proportions de longueur ;
>
> (Brisoux et al., 2010, p. 234)

On trouve également la convention de représentation d'un plan :

> Un plan est illimité ; il n'a pas de côtés. Pour le représenter, il a fallu instaurer des conventions de représentation.
>
>
>
> Comme les faces d'un pavé sont représentées en perspective cavalière par des parallélogrammes, il a été convenu de représenter un plan par un parallélogramme.
>
> (*Ibid.,* p.234)

Il semble qu'on ait envie d'élargir l'étude aux objets « hors solide ».

Troisièmement, on donne des recommandations pour la lecture des dessins :

> Les propriétés ci-dessus sont des implications. Leur réciproque n'est pas nécessairement vraie. Par exemple, on a vu que si deux droites sont parallèles dans l'espace, leurs représentations sont aussi parallèles. Par contre si deux droites sont parallèles sur une représentation, on ne peut pas conclure quant à leur position dans l'espace.
>
> (*Ibid.,* p.234)

Cette citation insiste sur le fait que les règles de représentation ne sont effectives que dans le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin, pas dans le sens réciproque. Ce qui signifie que l'affirmation d'une propriété géométrique d'un objet à partir de son dessin exige d'autres éléments.

En résumé, l'institution « Enseignement de la représentation en perspective en France » privilégie la perspective cavalière et l'introduit essentiellement par les règles de représentation qui impliquent l'approche par cube de référence de la projection cylindrique.

3.2 Au Viêt-Nam

3.2.1 Etude du programme

Nous considérons essentiellement, dans cette sous-section, le document « Programme de l'éducation générale de Mathématiques » qui accompagne l'arrêté n°16/2006/QD-BGDDT du 5 mai 2006 du Ministre de l'Education et de la Formation pour donner un aperçu sur l'enseignement de la représentation en perspective au Viêt-Nam.

Au Viêt-Nam, il n'y a qu'un programme de Mathématiques pour les classes de l'école primaire et du collège, alors qu'il en existe deux au lycée : le programme standard et le programme avancé. La plupart des intitulés du programme avancé et du programme standard sont identiques afin d'assurer une organisation cohérente des savoirs mathématiques ; mais « on ajoute, par rapport au programme standard, 20% du temps et du contenu d'enseignement (nombre de savoirs et niveau de difficulté) dans chaque matière. » (Khu et al., 2007, p. 4)

Présentons, tout d'abord, les contenus d'enseignement de la Géométrie de l'espace selon le programme standard. Ils permettent de préciser la place et le rôle de l'enseignement de la représentation en perspective.

Classe[23]	Contenu de la géométrie de l'espace
5	Présenter le parallélépipède rectangle ; le cube ; le cylindre de révolution ; la sphère.
8	Prisme droit. Parallélépipède rectangle. Pyramide régulière, tronc de la pyramide régulière. Aire latérale, aire totale, volume de ces solides.
9	Cylindre de révolution, cône de révolution, sphère ; développement d'un cylindre de révolution, d'un cône de révolution ; aire et volume ce ces solides.
11	2. Droite et plan dans l'espace. Position relative de deux droites dans l'espace. Droite et plan parallèles. Parallélisme de deux plans. Prisme et parallélépipède. **Projection parallèle. Représentation d'un solide.**[24] 3. Vecteur et calcul vectoriel dans l'espace. Orthogonalité de deux droites. Droite orthogonale à un plan. **Projection orthogonale.**[25] Théorème des « trois droites orthogonales ». Angle entre droite et plan. Angle entre deux plans. Orthogonalité de deux plans. Distance (d'un point à une droite, à un plan, entre une droite et un plan parallèles, entre deux plans parallèles, entre deux droites non coplanaires). Prisme droit, parallélépipède rectangle, cube. Pyramide, pyramide régulière, tronc de la pyramide régulière.
12	1. Polyèdre. Polyèdre régulier. Volume d'un polyèdre. 2. Sphère, cylindre, cône et leur intersection. Surface de révolution. Aire d'une sphère. Aire latérale, aire totale d'un cylindre de révolution, d'un cône de révolution.

Tableau 3. Contenu d'enseignement de la Géométrie de l'espace au Viêt-Nam

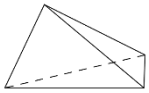
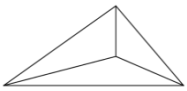
On voit dans le Tableau 3 qu'on enseigne la Géométrie de l'espace à partir des classes 5, 8 et 9, en étudiant des solides. De plus la représentation en perspective est officiellement enseignée en classe 11. Dans les contenus de Géométrie de l'espace de cette classe, nous constatons l'apparition des savoirs : « projection parallèle » et « projection orthogonale ». Il semble donc que l'institution vietnamienne choisit la « méthode de projection » pour enseigner la représentation plane.

Dans le programme de la classe 11[26], la représentation en perspective est envisagée à deux moments différents.

- Premier moment : c'est le début de la Géométrie de l'espace, dans le sujet de « Généralisation de la droite et du plan ». La compétence demandée est de « représenter certaines figures spatiales simples » (*Ibid.,* p.172). Les objets à représenter sont des polyèdres, comme pyramide, parallélépipède, prisme, tronc de pyramide, et des polygones particuliers,

[23] Au Viêt-Nam, le libellé des classes est différent de celui de la France : les classes 1, 2, 3, 4, 5 correspondent aux classes CP, CE1, CE2, CM1, CM2 de l'école primaire française, les classes 6, 7, 8, 9 correspondent aux classes 6e, 5e, 4e, 3e du collège français et les classes 10, 11, 12 correspondent aux classes 2nd, 1ère, Terminale du lycée français.
[24] C'est nous qui mettons le texte en gras.
[25] C'est nous qui mettons le texte en gras.
[26] Voir l'Annexe 2.

comme les parallélogrammes, trapèze isocèle, trapèze droit, losange, rectangle, carré. Le programme s'intéresse aussi à la perception d'un objet de l'espace. Par exemple, on exige le codage de la troisième dimension : des pointillés.

> Exemple. Lequel parmi ces deux dessins ci-dessous représente « mieux » un tétraèdre ?
>
> 
> Figure 1
>
> 
> Figure 2
>
> (*Ibid.*, p. 172)

- Deuxième moment : quand l'élève a fini d'étudier le parallélisme dans l'espace, plus précisément dans le sujet « Projection parallèle. Dessin de représentation d'une figure spatiale ». On introduit, à ce moment, la projection parallèle et le fait que le dessin est défini comme image de la figure spatiale par cette projection. L'approche par projection parallèle permet d'examiner des cas « dégénérés » du dessin.

> Exemple. Déterminer l'image par projection parallèle d'une droite dans les cas suivants :
> - droite parallèle à la direction de projection.
> - droite non-parallèle à la direction de projection.
>
> (*Ibid.,* 174)

En outre, il est notable que l'institution vietnamienne s'intéresse beaucoup à la représentation des objets plans. On la trouve à plusieurs reprises dans le programme.

> Construire l'image par projection parallèle d'un point, d'un segment, d'un triangle, d'un cercle.
> […] Exemple. Est-ce que l'image par projection d'un parallélogramme est un parallélogramme ?
> Exemple. Faire un dessin qui représente un triangle équilatéral, un trapèze droit, un parallélogramme, d'un losange.
>
> (*Ibid.,* p. 174)

Il est possible que la représentation des objets plans soit considérée comme une base pour la représentation des objets en trois dimensions plus tard.

Dans la classe 12, où sont introduits des solides de révolution, nous ne trouvons pas d'indications concernant leur représentation. Il semble donc que l'institution ne s'intéresse pas à la représentation de ces solides, ou qu'elle pense que l'enseignement « Projection parallèle. Dessin de représentation d'une figure spatiale » ci-dessus est suffisant.

Mais de quelle manière introduire alors la représentation en perspective dans le premier moment où on apprend à l'élève à « représenter certaines figures spatiales simples », *alors que la projection n'est pas encore enseignée à ce moment ?* L'étude des manuels et de livres du professeur dans la sous-section suivante répondra à cette question.

3.2.2 Etude des manuels et des livres du professeur

a) En classe 8

Dessiner n'est pas un enjeu pour cette classe, pourtant l'étude de solides à travers leurs dessins est pratiquée.

> Le programme ne demande pas aux élèves de représenter des figures spatiales, mais d'observer des maquettes, ce qui exige la « lecture » de dessins.
>
> (Phan et al., 2004b, p. 109)

Dans le manuel de Mathématiques 8 (tome 2), nous trouvons certaines des règles de représentation sous forme de description d'un dessin en perspective :

La figure 95 nous donne le dessin d'un prisme droit. […]

> Attention
> - BCFE est un rectangle, on le représente régulièrement sur une surface plane par un parallélogramme.
> - Les arêtes parallèles sont représentées par des segments parallèles.
> - Il est possible de ne pas représenter des arêtes orthogonales par des segments perpendiculaires (par exemple, EB et EF).

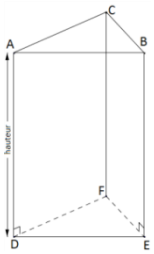


Figure 95

(Phan et al., 2004a, p. 107)

On aborde ici une règle de conservation du parallélisme et deux règles de déformation du rectangle et de l'angle droit. D'ailleurs, le dessin d'illustration implique encore la règle des pointillés pour la représentation des arêtes cachées.

Bien qu'on ne demande pas officiellement dans le manuel de dessiner, nous trouvons, dans la partie de « pratique mathématique » à la fin du livre du professeur, des renseignements pour dessiner un solide géométrique. Examinons le cas du cube:

> Dessiner un cube selon les quatre étapes de la figure 97.

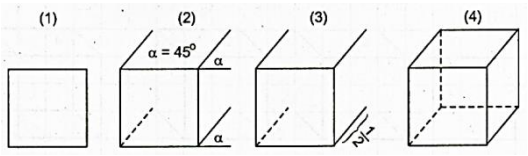


Figure 97

(Phan et al., 2004b, p. 138)

Dans cette citation, nous distinguons quatre étapes de représentation d'un cube :
- à l'étape (1), on représente une face du cube par un carré, en d'autres termes, c'est une représentation en vraie grandeur.
- à l'étape (2), la direction des fuyantes est déterminée par un angle α (α=45°) par rapport aux arêtes horizontales de la face carrée. Cela implique la notion de l'angle de fuite.

- à l'étape (3), la longueur de fuyantes est déterminée par la valeur ½ : elle est réduite de moitié. Cela implique la notion du rapport de réduction.
- à l'étape (4), on termine le dessin en joignant les sommets des fuyantes.
On peut dire ainsi que ces étapes de dessin impliquent l'approche par cube de référence de la projection cylindrique.

En bref, nous notons une réticence de l'institution vietnamienne en classe 8 quant à l'objet « représentation en perspective ». Le programme de Mathématiques 8 ne le contient pas ; pourtant, l'étude des objets de l'espace ne peut pas s'en passer. C'est pourquoi on ne parle que de quelques règles de représentation dans le manuel nécessaires pour permettre la lecture d'un dessin. De plus, puisque l'élève est amené à faire des dessins dans sa pratique mathématique, on donne des renseignements permettant de dessiner, mais seulement dans le livre du professeur. On l'a vu, les étapes du dessin sont très détaillées et s'adaptent au but d'obtenir le « meilleur dessin possible » d'un solide.

b) En classe 9

Comme en classe 8, la représentation en perspective n'est pas présente dans le programme de la classe 9. Toutefois, la nécessité de savoir dessiner et lire un dessin est présente dans le livre du professeur.

> Le programme ne demande pas à l'élève de représentation en perspective, mais il lui est nécessaire de savoir dessiner, observer une maquette, « lire » un dessin.
>
> (Phan et al., 2005, p. 135)

Contrairement à la classe 8, nous ne trouvons, dans le manuel de Mathématiques 9 pas de règles de représentation correspondant aux solides de révolution, et dans le livre du professeur de cette classe, pas de description des étapes du dessin. Ainsi, *comment l'élève peut-il réaliser ou lire le dessin d'un solide de révolution?* Il est probable que les dessins d'illustration du cylindre, du cône et de la sphère du manuel sont l'unique base pour effectuer ces types de tâches.

c) En classe 11

C'est dans cette classe que la représentation en perspective est indiquée comme un savoir important de l'enseignement de la Géométrie de l'espace, comme le montrent la citation ci-dessous.

> Une nouvelle difficulté des élèves pour l'étude de la Géométrie de l'espace est de représenter des figures spatiales simples sur une surface plane et de lire des dessins de représentation pour s'imaginer des objets réels dans l'espace. Les enseignants doivent accorder une grande importance à la représentation des figures spatiales.
>
> (Tran et al., 2007b, p. 8)

De plus, elle est considérée comme une exigence permanente pour les élèves et les enseignants dès les premiers enseignements de géométrie de l'espace et qui doit s'inscrire dans la durée.

> Une difficulté de l'élève lors de l'étude de la géométrie de l'espace est de représenter une figure spatiale sur un plan. Dès les premières heures, les

> enseignants doivent habituer les élèves à représenter. […] Une bonne représentation n'est pas le résultat d'une ou deux heures d'étude, mais un processus qui se prolonge sur toute l'année scolaire. L'étude de la représentation à partir des premiers moments favorise celle de la géométrie de l'espace. Nous n'hésitons pas à demander aux élèves de dessiner des figures dont ils ne connaissent pas la définition exacte, comme le parallélépipède, le cube, la pyramide,…
>
> (Doan et al., 2007b, p. 43)

Dans la première leçon de la partie de Géométrie de l'espace (leçon 1 du chapitre 2 « Droite et plan dans l'espace. Parallélisme »), la représentation en perspective est abordée à travers les règles de représentation. Ces règles sont proches dans les deux manuels des deux programmes standard et avancé.

> Afin de faire le dessin de représentation d'une figure dans l'espace, on se base sur les règles suivantes.
> - Le dessin de représentation d'une droite est une droite, celui d'un segment est un segment.
> - Le dessin de représentation de deux droites parallèles est deux droites parallèles, celui de deux droites sécantes est deux droites sécantes.
> - Le dessin de représentation doit conserver la relation d'incidence entre un point et une droite.
> - On utilise un trait continu pour représenter les lignes vues et des pointillés pour représenter les lignes cachées.
> D'autres règles seront exposées plus tard.
>
> (Tran et al., 2007a, p. 41)

Ensuite, l'élève apprend la définition officielle de la représentation dans la dernière leçon[27] du même chapitre. Notons que c'est le moment où les élèves ont terminé l'étude de la relation de parallélisme dans l'espace, ce qui favorise le fait de définir un dessin de représentation en perspective parallèle :

> Le dessin de représentation d'une figure $\mathscr{H}$ dans l'espace est l'image de la projection parallèle de la figure $\mathscr{H}$ sur un plan selon une direction ou son dessin d'homothétie.
>
> (Tran et al., 2007a, p. 74)

Cette définition donnée dans le manuel montre qu'au Viêt-Nam, on privilégie la perspective parallèle pour représenter des objets de l'espace et que, de plus, on l'introduit à l'aide de la notion de projection parallèle. Le livre du professeur affirme ainsi ce choix parmi d'autres perspectives :

> Il y a plusieurs manières pour représenter une figure spatiale sur le plan dont le principe est de représenter des éléments : point, droite, plan de l'espace de trois dimensions et leurs relations sur un plan – espace de deux dimensions, telles qu'on peut concevoir quelques propriétés de la figure spatiale. Normalement, afin de représenter une figure spatiale, on la projette sur un plan grâce à une projection linéaire ou une projection parallèle. Notamment, on peut prendre une projection

[27] Voir l'Annexe 3.

> orthogonale (c'est une projection parallèle particulière) et on projette l'objet de trois dimensions sur plusieurs plans de projection pour avoir des dessins techniques. Les images faites par des appareils photos ou des dessins de l'Architecture sont formés par la théorie de la projection linéaire. Dans le programme du lycée, on se restreint à considérer les dessins de représentation de la projection parallèle.
>
> (Tran et al., 2007b, p. 76)

Dans les manuels standard et avancé, la projection parallèle est explicitement présentée selon l' « approche par projection », avec ses deux caractéristiques : plan et direction de projection.

> Soit le plan (α) et la droite Δ coupant (α).
> Pour chaque point M dans l'espace, la droite passant par M et parallèle à Δ va couper (α) en M'. Le point M' est appelé *image de projection parallèle* du point M sur le plan (α) selon la direction de la droite Δ, ou en bref, selon la direction Δ (f. 2.61).
> Le plan (α) est appelé *plan de projection*. La direction Δ est appelée *direction de projection*.
> L'application qui, à chaque point M dans l'espace, fait correspondre son image M' dans le plan (α) est appelé *projection parallèle sur (α) selon la direction Δ*.
>
> (Tran et al., 2007a, p. 72)

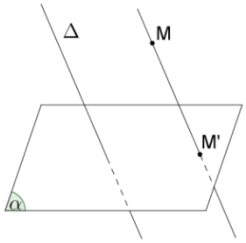


Figure 2.61

Cette approche va conduire, comme nous l'avons indiqué dans 1.3.2, à des constructions évoquées. L'institution vietnamienne en a conscience ; par conséquent, elle propose d'accepter des « règles d'usage » dans la représentation :

> Par ailleurs, il est nécessaire de distinguer des problèmes de représentation et ceux de construction (déterminer le point d'intersection, la droite d'intersection, la section d'un polyèdre et un plan, etc…). Par exemple, soient un droite *a* qui coupe un plan (α). Du point de vue de la construction, le point d'intersection de la droite *a* et le plan (α) est absolument déterminé. Néanmoins, du point de vue de la représentation, le point d'intersection A est placé de manière arbitraire sur la droite *a*. C'est pourquoi on peut choisir de manière arbitraire la position du point A la plus pratique et satisfaisant l'exigence d'avoir un « bon » dessin.
>
> (Tran et al., 2007b, p. 76)

Néanmoins, la représentation doit être cohérente avec les propriétés de la perspective. Les manuels standard et avancé présentent explicitement des propriétés de conservation de la projection parallèle.

> La projection parallèle est représentée assez complètement dans le manuel. Outre la définition, on présente clairement les trois non-déformations : l'alignement, le parallélisme, le rapport de longueur de deux segments de même direction.
>
> (Tran et al., 2007b, p. 63)

Du point de vue du contrat didactique, nous pouvons parler, dans l'institution vietnamienne de l'enseignement de la représentation en perspective en classe 11, d'une règle relative à la construction évoquée :

L'élève et l'enseignant ont le droit d'utiliser des règles d'usage dans la représentation en perspective mais la représentation doit être cohérente avec les propriétés de la perspective.

L'autorisation des règles d'usage et la demande de respect des propriétés de la perspective dans ce contrat didactique peuvent créer un « statut précaire » dans le processus de représentation. *Pour une construction de représentation, faut-il faire une « construction évoquée » ou une « construction effective » ?*

Examinons l'activité ci-dessous dans le manuel de Géométrie 11 (série standard) pour illustrer cette règle de contrat didactique et en montrer la complexité :

> Soient (α) et (β) deux plans parallèles. La droite *a* coupe (α) et (β) en A et en C. La droite *b* parallèle à *a* coupe (α) et (β) en B et en D.
> La figure 2.72 qui illustre le contenu ci-dessus est-elle vraie ou fausse ?

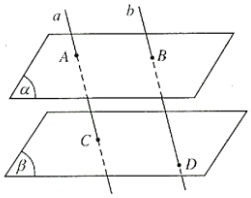
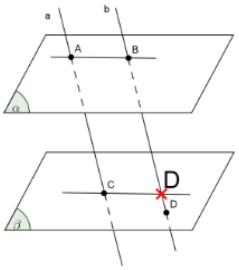


Figure 2.72

(Tran et al., 2007a, p. 75)

Pour résoudre cette activité, on place arbitrairement les points A, B et C, mais en respectant des règles de représentation-type (Chaachoua, 1998) à savoir : un plan est représenté par un parallélogramme et un point du plan est représenté par un point à l'intérieur du parallélogramme. En revanche, les propriétés d'incidences et les règles de la perspective parallèle permettent de construire le point D en construction effective. .

En effet, les plans (α), (β) sont parallèles et (AB), (CD) sont deux droites d'intersection du plan formé par deux droites *a*, *b* et les plans (α), (β) , on en déduit que (AB) et (CD) sont parallèles. Par conséquent, la représentation du point D se base sur la propriété de conservation du parallélisme. Donc, la figure 2.72 est fausse et le dessin exact est celui ci-contre.



Parce que le parallélisme des droites (AB) et (CD) est absent de l'énoncé, on connait seulement son existence grâce aux raisonnements, il existe la possibilité : quelques informations de l'objet à représenter sont « cachées » au début de la représentation, par exemple, dans l'énoncé. Ces informations peuvent jouer un rôle décisif dans le choix de la construction « évoquée/effective ».

> […] il est nécessaire d'entrainer les élèves à raisonner lors de la représentation pour avoir un dessin exact.
>
> (Doan et al., 2007b, p. 77)

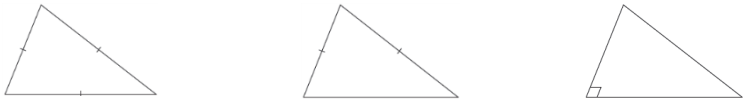
Outre les propriétés de conservation, l'institution s'intéresse aussi aux propriétés de non-conservation (dans le cas général).

> Par ailleurs, il est nécessaire d'indiquer que la longueur du segment, la grandeur de l'angle et le rapport de longueur de deux segments qui n'ont pas la même direction ne sont pas conservés par projection parallèle.
>
> (Tran et al., 2007b, p. 63)

Les propriétés de non-conservation sont explicitement présentées dans les deux manuels standard et avancé quand on parle de la représentation des objets de deux dimensions.

Dessin de représentation des figures usuelles

• Triangle. Il est toujours possible de considérer un triangle comme un dessin de représentation d'un triangle donné de forme quelconque (il peut-être régulier, isocèle, rectangle, etc. …) (figure 2.69).



a) b) c)

Figure 2.69

• Parallélogramme. Il est toujours possible de considérer un parallélogramme comme un dessin de représentation d'un parallélogramme donné quelconque (un parallélogramme, un carré, un losange, un rectangle…) (figure 2.70).

a) b) c) d)

Figure 2.70

• Trapèze. Il est toujours possible de considérer un trapèze comme un dessin de représentation d'un trapèze donné quelconque, pourvu que le rapport de longueur des deux bases du dessin de représentation soit égal à celui du trapèze initial.

• Cercle. On prend régulièrement une ellipse pour représenter un cercle (figure 2.71). (Manuel de Géométrie de la classe 11, Série standard, pp. 74-75)

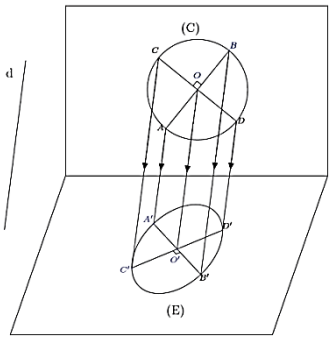
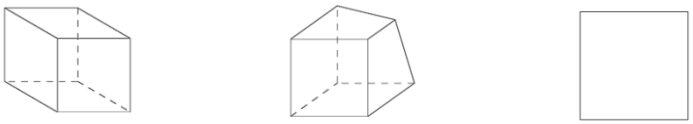


Figure 2.71

(Tran et al., 2007a, pp. 74,75)

Néanmoins, les propriétés de non-conservation peuvent faire apparaître des dessins « dégénérés » où quelques arêtes sont confondues, ou quelques faces représentées par un segment. *Quel est le comportement de l'institution vietnamienne en ce qui concerne les dessins « dégénérés » ?* Examinons l'activité suivante dans le manuel de Géométrie 11 (série standard) :

Parmi les figures 2.68, lesquelles représentent un cube ?



a) b) c)

Figure 2.68

(Tran et al., 2007a, p. 74)

Voici la solution proposée dans le livre du professeur :

> Les figures a et c sont des dessins de représentation d'un cube. La figure b n'est pas un dessin de représentation d'un cube parce qu'il y a au moins une face qui n'est pas représentée par un parallélogramme.
>
> (Tran et al., 2007b, p. 76)

Attirons l'attention ici sur le cas du dessin c. Du point de vue mathématique, ce dessin est accepté comme représentation plane d'un cube comme résultat d'une projection dont le plan est parallèle à une face du cube et dont la direction est parallèle aux fuyantes. Mais*, qu'est qui se passe dans la pratique de représentation ?* Observons l'intention de cette activité :

> L'activité 3 a pour objectif de présenter quelques dessins de représentation du cube. A partir de cette activité, il faut insister sur la demande de perception visuelle et de facilité d'imagination d'un dessin.
>
> (*Ibid.*, p.76)

Il est donc prévu que l'enseignant va indiquer à l'élève de ne pas faire de dessins « dégénérés » parce qu'il est difficile de concevoir un cube en manquant d'information sur ses faces.

Ainsi, les noosphériens vietnamiens, d'une part, agréent que les dessins « dégénérés » sont un résultat possible de la projection, par exemple, dans la propriété de conservation du parallélisme, on reconnait la possibilité du cas des droites confondues :

> La projection parallèle transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles ou confondues.
>
> (Tran et al., 2007a, p. 73)

Par ailleurs, ils recommandent aux élèves d' « éviter » de faire des dessins de telle sorte[28].

En bref, la représentation en perspective à la classe 11 est enseignée dans deux périodes. Au début de l'enseignement de la Géométrie de l'espace, elle est comprise à travers des règles de représentation. Après avoir maîtrisé le parallélisme dans l'espace, l'élève l'apprend en étudiant la théorie de la projection parallèle. Du point de vue mathématique, l'institution vietnamienne met en évidence l'étape de construction[29]. Pour la pratique de représentation (étape de représentation[30]), l'analyse des manuels a permis de mettre en évidence des règles du contrat didactique qui autorisent les règles d'usage en respectant les propriétés de la perspective. Dans le cas où une propriété n'est pas conservée (en général) par la perspective, elle relève des contraintes du choix de la direction de projection afin d'éviter des cas « dégénérés » du dessin.

d) En classe 12

A côté des polyèdres que les élèves ont étudiés en classe 11, on aborde, en classe 12, les solides de révolution : cylindre de révolution, cône de révolution et sphère. Dans les manuels, seule la représentation de la sphère est expliquée.

[28] Voir la section 4.4.4.
[29] Voir la Figure 4 (à la page 16) de la section 1.1.1.
[30] Voir la Figure 4 (à la page 16) de la section 1.1.1.

On prend régulièrement la projection orthogonale pour représenter la sphère. Le dessin de représentation de la sphère est alors un cercle.
Pour que le dessin suggère bien une sphère, on ajoute régulièrement au dessin des lignes de représentation de quelques cercles sur la sphère.

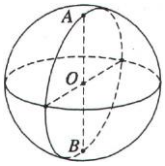


Figure 2.16
(Tran et al., 2008a, p. 42)

Afin de créer une figure familière à ce qu'on voit dans la réalité, on prend la perspective axonométrique pour représenter la sphère :

> Lors de la représentation d'une sphère, nous choisissons la projection orthogonale ; nous admettons ainsi qu'un cercle représente la sphère. Si nous prenons la projection parallèle, nous admettons, dans le cas général, que c'est une ellipse.
> (Tran et al., 2008b, p. 51)

De plus, pour donner l'impression de la troisième dimension, on ajoute au dessin des ellipses qui représentent de grands cercles de la sphère.

> Dans le cas où le dessin de représentation de la sphère est un cercle, on ajoute quelques lignes qui représentent des méridiens et des parallèles[31] de la sphère afin de créer l'impression « sphérique » du dessin.
> (*Ibid.,* p. 51)

Sur les dessins de la sphère dans le manuel, par exemple la figure 2.16 de la première citation, nous pouvons voir que l'équateur de la sphère est représenté par une ellipse ; c'est-à-dire la direction de projection n'est pas parallèle au plan contenant l'équateur. En conséquence, les deux pôles ne sont pas situés sur le cercle représentant la sphère.

> Afin de préciser la représentation des méridiens et des parallèles de la sphère sur le dessin, nous avons besoin de déterminer celle de l'axe de la sphère, autrement dit, il faut déterminer celle de deux pôles de la sphère. Il est fréquent que les élèves ne connaissent pas le lien entre la représentation de deux pôles et celle de l'équateur qui est situé sur le plan orthogonal à l'axe de la sphère.
> (*Ibid.,* p. 51)

Pour le cylindre et le cône de révolution, leurs dessins de représentation sont présents dans les manuels, mais aucune explication n'est donnée. Il semble que le contenu de la représentation en perspective enseigné à la classe 11 est considéré comme suffisant pour les représenter.

En résumé, l'institution vietnamienne privilégie la perspective parallèle pour la représentation plane des objets. Nous avons constaté, dans les documents scolaires, plusieurs manières d'introduire le contenu de la représentation en perspective : renseignements détaillés pour dessiner, règles de représentation et projection parallèle.

---

[31] Le manuel de Géométrie 12 (série standard) définit les notions concernant la sphère terres : « méridien », « parallèle », « pôle », comme suit :
« Nous pouvons considérer que la sphère est un solide de révolution qui est formé par la rotation d'un demi-cercle autour un axe contenant son diamètre. La ligne d'intersection entre la sphère et des demi-plans donc le bord est l'axe de la sphère est appelée *méridien* de la sphère, la ligne d'intersection, s'il existe, entre la sphère et des plans orthogonaux à l'axe est appelée *parallèle* de la sphère. Les points d'intersection de la sphère et l'axe sont appelés *pôles* de la sphère. » (Tran et al., 2008a, p. 43)

3.3 Conclusion

L'étude des documents scolaires actuels des deux pays, France et Viêt-Nam, nous a permis d'identifier des caractéristiques propres à chaque institution, et différentes entre elles, de l'enseignement de la représentation en perspective dans chaque institution. Les résultats d'analyse nous permettent de préciser les choix de perspectives (Q3a).

En France, on s'oriente vers la perspective cavalière, alors qu'au Viêt-Nam, c'est vers la perspective parallèle. Ce choix permet à l'institution vietnamienne d'expliquer évidemment la représentation de la sphère par un cercle. Il semble qu'au Viêt-Nam l'approche retenue pour l'enseignement soit plus mathématique qu'en France : autrement dit tout doit y être clarifié par des justifications mathématiques en référence à la notion de projection.

Les choix des deux institutions se situent dans la « famille » des perspectives cylindriques, C'est dans ce contexte que se situe leur approche. En France, les noosphériens adoptent implicitement l' « approche par cube de référence » ; alors qu'au Viêt-Nam, on adopte explicitement l' « approche par projection ». Ceci peut être expliqué par l'organisation du contenu de la Géométrie de l'espace et les intentions d'enseignement de chaque pays.

En France, l'enseignement de la Géométrie de l'espace est attaché aux solides, surtout au collège. Il est remarquable que dans l'ordre de présentation des solides, les propriétés géométriques « particulières », comme le parallélisme, l'orthogonalité, l'égalité, diminuent de classe en classe. En sixième, où on introduit la représentation en perspective, l'élève travaille sur le parallélépipède rectangle. Les propriétés métrique de ce solide, particulièrement l'orthogonalité des fuyantes au plan frontal, favorisent les notions d'angle de fuite et de rapport de réduction. Elles permettent des constructions effectives au moment même où l'élève se familiarise avec la représentation plane des objets de l'espace.

Au Viêt-Nam, l'introduction officielle de la représentation en perspective a lieu assez tard (en classe 11). Le programme de Géométrie de l'espace est structuré autour des propriétés géométriques, d'abord, les propriétés affines, par exemple le parallélisme, puis les propriétés métriques, par exemple, l'orthogonalité. Au moment de l'introduction de la perspective, les propriétés métriques ne sont pas encore abordées. Dans cette structure de programme d'enseignement, et avec l'intention de présenter strictement les savoirs mathématiques enseignés, il est compréhensible que l'institution vietnamienne privilégie l' « approche par projection ». Cette approche favorise la perception de la troisième dimension, mais elle conduit à davantage de constructions évoquées. Dans l'institution vietnamienne existe un contrat didactique selon lequel on a le droit de réaliser des représentations arbitraires pourvu qu'elles respectent les propriétés de la perspective. Selon Chaachoua (1997) les deux types de problèmes, de construction effective et de construction évoquée, ne peuvent pas coexister dans une même institution puisque chacun d'eux nécessite un contrat didactique différent par rapport aux productions d'élèves. En France, les problèmes de construction évoquée étaient proposés avant la réforme des mathématiques modernes et les manuels explicitaient les règles d'usage comme par exemple considérer de façon arbitraire l'intersection de deux plans. Ces problèmes ont disparu après la réforme des mathématiques modernes au profit des problèmes de construction effectives où ces règles d'usages ne sont plus « autorisées ».

Dans ce chapitre, nous avons analysé la partie « cours » des manuels actuels français et vietnamiens au sujet des choix d'enseignements de la représentation en perspective. Les résultats de ces analyses nous permettent d'identifier des éléments potentiels du bloc technologie/théorie (logos) des deux institutions étudiées. Dans le chapitre suivant, nous allons conduire une analyse praxéologique afin de caractériser, dans chaque institution, le rapport institutionnel à l'objet « représentation en perspective ».

Chapitre 4
Analyse des praxéologies de représentation en perspective

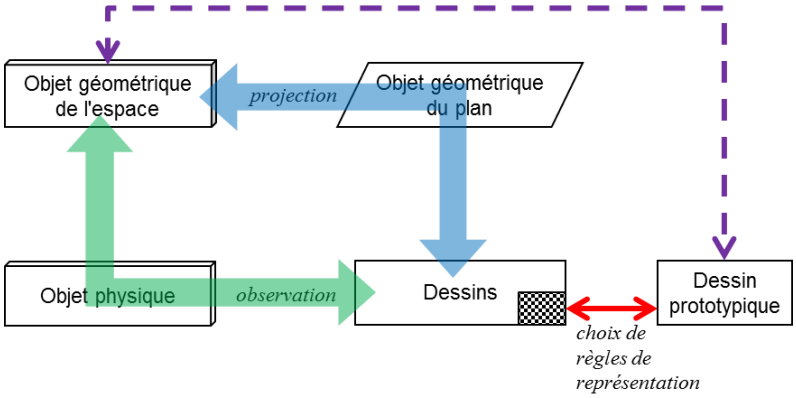
Dans le Chapitre 3, nous avons exploré, principalement dans la partie « cours », des choix didactiques pour l'enseignement de la perspective (Q3a) et nous avons caractérisé les choix des deux institutions étudiées pour l'enseignement du passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin. Dans ce chapitre, nous proposons une étude plus approfondie de l'enseignement de ce passage à travers l'analyse des activités mathématiques proposées à l'élève (Q3c). Concrètement, nous nous intéressons à la question : *Quelles sont les approches mobilisées pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin, dans les activités et les exercices relatifs à la représentation en perspective ?*

Pour cela nous nous appuyons sur le modèle praxéologique de la théorie anthropologique du didactique. En effet, les types de tâches nous permettent de situer la représentation en perspective dans l'enseignement de la Géométrie de l'espace et son intervention dans la résolution des problèmes spatiaux. Les techniques et les technologies préciseront l'approche utilisée.

Nous allons d'abord rechercher les praxéologies de référence qui décrivent toutes les techniques possibles de résolution d'un type de tâches lié à la représentation en perspective ainsi que les technologies/théories qui les engendrent et les justifient.

Dans la praxéologie de référence nous allons spécifier les « variables de type de tâches » qui modélisent des choix possibles pour chacun des types de tâches que nous allons étudier. Nous décrirons, ensuite les techniques et les technologies. C'est en nous appuyant sur ces praxéologies de référence que nous analyserons les activités et les exercices des manuels des deux pays, France et Viêt-Nam, afin de caractériser les praxéologies institutionnelles.

Pour construire le modèle de référence, nous nous appuyons sur le point de vue épistémologique et didactique basé sur les deux catégories de significations épistémologiques et didactiques synthétisées dans la Figure 17 (introduite dans la conclusion de la partie I).



Significations épistémologiques et didactiques du passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin

4.1 Praxéologies de référence épistémologiques

4.1.1 Type de tâches 1

Soit le type de tâches « Déterminer la transformée d'*un objet géométrique de l'espace* par une *projection cylindrique* donnée » que nous noterons $T^{objE,PC}{}_{1_tr}$. Par exemple, « Soit ABCDEFGH un cube. Déterminer l'image du segment [CD] par la projection de direction (AG) sur le plan (EFGH) ».

Dans ce type de tâches, nous considérons deux variables : « objet géométrique de l'espace » (objE) et « projection cylindrique » (PC). Ces deux variables peuvent être instanciées en des valeurs :

- pour les objets géométriques de l'espace, nous ne nous intéressons qu'à des objets de base de la Géométrie de l'espace : point (pt), droite (d), demi-droite (1/2d), segment (seg), polygone (polyg), cercle (cer), polyèdre (Polyè), cylindre de révolution (CyR), cône de révolution (CoR), sphère (Sp).
- pour la projection cylindrique, elle peut être donnée par des paramètres de l'approche par « projection » (PC1), comme le plan et la direction de projection (P, d); ou de l'approche par « cube de référence » (PC2), comme l'angle de fuite et le rapport de réduction (α, r).

Nous présentons d'abord le cas où l' « objet géométrique de l'espace » est un point. Nous le considérons ici comme la praxéologie de base, parce que comme nous l'avons exposé dans la section 1.3.1, la détermination de la transformée d'un objet géométrique de l'espace peut être ramenée à celle de ses certains points.

$T^{pt,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un point A par une projection cylindrique donnée (d,P).	$T^{pt,PC2}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un point A par une projection cylindrique donnée (α,r).
$\tau^{pt,PC1}{}_{1_tr}$: - Construire une droite d' passant par le point A et parallèle à la direction de projection d. - Déterminer le point d'intersection A' de la droite d' et du plan de projection (P). A' est le transformé du point A par la projection.	$\tau^{pt,PC2}{}_{1_tr}$: - Repérer le point A par rapport à un cube de référence muni un repère orthonormé (Rxyz): + construire une droite d orthogonale au plan (Rxz) ; + repérer le point d'intersection A' de la droite d et du plan (Rxz) : A'(x,z) ;

	+ déterminer la mesure $\overline{A'A}$; - Dans un plan muni un repère orthonormé (Ox'z'), + déterminer un point $A_1(x,z)$; + construire une demi-droite A_1t qui fait un angle α avec l'axe Ox' ; + déterminer, sur A_1t, un point A_2 de sorte que $\overline{A_1A_2} = r.\ \overline{A'A}$. Le point A_2 est le transformé du point A par la transformation donnée.
θ_{PC1} : Définition de la projection cylindrique selon « approche par projection »	θ_{PC2} : Définition de la projection cylindrique selon « approche par cube de référence ».
Θ_{tr} : Transformation affine.	

Tableau 4. Praxéologies de référence [$T^{pt,PC1}_{1_tr}$, $\tau^{pt,PC1}_{1_tr}$, θ_{PC1}, Θ_{tr}] et [$T^{pt,PC2}_{1_tr}$, $\tau^{pt,PC2}_{1_tr}$, θ_{PC2}, Θ_{tr}]

Plus généralement, nous décrivons la praxéologie correspondant au type de tâches $T^{objE,PC}_{1_tr}$ comme suit :

$T^{objE,PC}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un objet géométrique de l'espace par une projection cylindrique donnée.
$\tau^{objE,PC}_{1_tr}$: - Déterminer les points du type I, II, III[32] situés sur l'objet géométrique de l'espace. - Déterminerles transformés de ces points ($T^{pt,PC1}_{1_tr}$, $T^{pt,PC2}_{1_tr}$). - A l'aide des propriétés de la projection cylindrique, les joindre.
θ_{PC} : Définition et propriétés de la projection cylindrique.
Θ_{PC} : Transformation affine.

Tableau 5. Praxéologie de référence [$T^{objE,PC}_{1_tr}$, $\tau^{objE,PC}_{1_tr}$, θ_{PC}, Θ_{tr}]

Dans la suite nous allons présenter des praxéologies instanciées de base qui sont des sous-types de tâches de $T^{objE,PC}_{1_tr}$.

$T^{seg,PC1}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un segment AB par une projection cylindrique donnée (d,P)	$T^{seg,PC2}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un segment AB par une projection cylindrique donnée (α,r).
$\tau^{seg,PC1}_{1_tr}$: - Examiner la position relative du segment AB par rapport à la direction de projection d. - Si AB est parallèle à d, le transformé est le point d'intersection de la droite AB et du plan de projection (P). - Sinon, déterminer les transformés A' et B' des points A, B par la projection donnée ($T^{pt,PC1}_{1_tr}$). Le transformé du segment AB est le segment A'B'.	$\tau^{seg,PC2}_{1_tr}$: - Examiner la position relative du segment AB par rapport à un cube de référence muni un repère orthonormé (Rxyz) : + l'angle θ_1 que fait l'axe Ry par rapport à AB ; + l'angle α_1 que fait l'axe Rx par rapport au plan contenant AB et orthogonal au plan (Rxz). - Si $\tan\theta_1$=r et α_1=α, déterminer le transformé du point A (ou B) par la transformation donnée ($T^{pt,PC2}_{1_tr}$). C'est le transformé du segment AB. - Sinon, déterminer les transformés A', B' de 2 points A, B par la transformation donnée ($T^{pt,PC2}_{1_tr}$). Le segment A'B' est le transformé du segment AB.

[32] Voir la section 1.3.1.

θ_{PC1} : - Propriété de l'alignement des points sur un segment. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par projection » - Propriétés de la conservation de l'alignement et de l'ordre des points alignés de la projection cylindrique.	θ_{PC2} : - Propriété de l'alignement des points sur un segment. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par cube de référence ». - Propriétés de la conservation de l'alignement et de l'ordre des points alignés de la projection cylindrique.
Θ_{tr} : Transformation affine.	
Pareillement, on a 2 praxéologies : $T^{d,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer la transformée d'une droite par une projection cylindrique donnée (d, P). $T^{1/2d,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer la transformée d'une demi-droite par une projection cylindrique donnée (d, P).	Pareillement, on a 2 praxéologies : $T^{d,PC2}{}_{1_tr}$: Déterminer la transformée d'une droite par une projection cylindrique donnée (α, r). $T^{1/2d,PC2}{}_{1_tr}$: Déterminer la transformée d'une demi-droite par une projection cylindrique donnée (α, r).

Tableau 6. Praxéologies de référence [$T^{seg,PC1}{}_{1_tr}$, $\tau^{seg,PC1}{}_{1_tr}$, θ_{PC1}, Θ_{tr}] et [$T^{seg,PC2}{}_{1_tr}$, $\tau^{seg,PC2}{}_{1_tr}$, θ_{PC2}, Θ_{tr}]

$T^{polyg,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un polygone par une projection cylindrique donnée (d,P).	$T^{polyg,PC2}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un polygone par une projection cylindrique donnée (α,r).
$\tau^{polyg,PC1}{}_{1_tr}$: - Examiner la position relative du plan (P_1) contenant le polygone par rapport à la direction de projection d. - Si d est parallèle au plan (P_1), déterminer les transformés des côtés du polygone par la projection donnée ($T^{seg,PC1}{}_{1_tr}$). Ce sont des segments situés sur une même droite. Le transformé du polygone donné est un segment formé par ces segments. - Sinon, déterminer les transformés des côtés du polygone par la projection donnée ($T^{seg,PC1}{}_{1_tr}$). Ce sont des segments qui ne sont pas situés sur une même droite. Le transformé du polygone donné est un polygone formé par ces segments.	$\tau^{polyg,PC2}{}_{1_tr}$: - Examiner la position relative entre le plan (P_1) contenant Ry, de sorte que (Rx,(P_1))= α et le plan (P_2) contenant le polygone donné. - Si (P_1) et (P_2) sont parallèles (ou confondus), déterminer les transformés des côtés du polygone par la transformation donnée ($T^{seg,PC2}{}_{1_tr}$). Ce sont des segments situés sur une même droite. Le transformé du polygone donné est un segment formé par ces segments. - Sinon, + construire une droite d'intersection d_1 de (P_1) et de (P_2) ; + si $\tan\theta_1$=r avec θ_1=(Ry,d_1), déterminer les transformés des côtés du polygone par la transformation donnée ($T^{seg,PC2}{}_{1_tr}$). Ce sont des segments situés sur une même droite. Le transformé du polygone donné est un segment formé par ces derniers. + sinon, déterminer les transformées des côtés du polygone par la transformation donnée ($T^{seg,PC2}{}_{1_tr}$). Ce sont des segments qui ne sont pas situés sur une même droite. Le transformé du polygone donné est un polygone formé par ces derniers.

θ_{PC1} : - Définition et propriétés d'un segment et d'un polygone. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par projection ». - Propriétés de conservation de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés de la projection cylindrique.	θ_{PC2} : - Définition et propriétés d'un segment et d'un polygone. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par cube de référence ». - Propriétés de conservation de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés de la projection cylindrique.
Θ_{tr} : Transformation affine.	

Tableau 7. Praxéologies de référence [$T^{polyg,PC1}{}_{1_tr}$, $\tau^{polyg,PC1}{}_{1_tr}$, θ_{PC1}, Θ_{tr}] et [$T^{polyg,PC2}{}_{1_tr}$, $\tau^{polyg,PC2}{}_{1_tr}$, θ_{PC2}, Θ_{tr}]

$T^{cer,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un cercle (I, R) par une projection cylindrique donnée (d, P).	$T^{cer,PC2}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un cercle (I, R) par une projection cylindrique donnée (α, r).
$\tau^{cer,PC1}{}_{1_tr}$: - Examiner la position relative de la direction de projection d par rapport au plan (P_1) contenant le cercle. - Si d est parallèle au plan (P_1), + construire, dans le plan (P_1), une droite d_1 passant par le centre I du cercle et orthogonale à d ; + déterminer 2 points d'intersection A, B de d_1 et du cercle ; + déterminer les transformés A', B' des points A, B par la projection donnée ($T^{pt,PC1}{}_{1_tr}$). Le transformé du cercle est le segment A'B'. - Sinon, + choisir cinq points sur le cercle ; + déterminer les transformés de ces cinq points par la projection donnée ($T^{pt,PC1}{}_{1_tr}$). Le transformé du cercle est une ellipse (ou un cercle) passant par les transformés des points.	$\tau^{cer,PC2}{}_{1_tr}$: - Examiner la position relative entre le plan (P_1) contenant Ry, de sorte que (Rx, (P_1))= α et le plan (P_2) contenant le cercle donné. - Si (P_1) et (P_2) sont parallèles (ou confondus), + construire, dans le plan (P_2), une droite d_1 passant par le centre I du cercle de sorte que $\tan\theta_1$=r, avec θ_1=(Ry,d_1) ; + construire, dans le plan (P_1), une droite d_2 passant par le centre I du cercle et orthogonale à d_1 ; + déterminer 2 points d'intersection A, B de d_2 et du cercle ; + déterminer les transformés A', B' des points A, B par la transformation donnée ($T^{pt,PC2}{}_{1_tr}$). Le transformé du cercle est le segment A'B'. - Sinon, + Construire une droite d'intersection d_3 de (P_1) et de (P_2). + si $\tan\theta_2$=r avec θ_2=(Ry,d_3), * construire, dans le plan (P_2), la droite d_4 passant par le centre I et orthogonale à d_3 ; * construire les points d'intersection A, B du cercle et de la droite d_4. * déterminer les transformés A', B' des points A, B par la transformation donnée ($T^{pt,PC2}{}_{1_tr}$). Le transformé du cercle est le segment A'B'. + sinon, * choisir cinq points sur le cercle ; * déterminer les transformés de ces cinq points par la projection donnée ($T^{pt,PC2}{}_{1_tr}$). La transformée du cercle est une ellipse (ou un cercle) passant par ces transformés.

θ_{PC1} : - Définition et propriétés d'un cercle. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par projection » - Propriété de non-conservation d'un cercle de la projection cylindrique.	θ_{PC2} : - Définition et propriétés d'un cercle. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par cube de référence ». - Propriété de non-conservation d'un cercle de la projection cylindrique.
Θ_{tr} : Transformation affine.	

Tableau 8. Praxéologies de référence [$T^{cer,PC1}{}_{1_tr}$, $\tau^{cer,PC1}{}_{1_tr}$, θ_{PC1}, Θ_{tr}] et [$T^{cer,PC2}{}_{1_tr}$, $\tau^{cer,PC2}{}_{1_tr}$, θ_{PC2}, Θ_{tr}]

$T^{Polyè,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un polyèdre par une projection cylindrique donnée (d, P).	$T^{Polyè,PC2}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un polyèdre par projection cylindrique donnée (α, r).
$\tau^{Polyè,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer les transformées des faces du polyèdre par la projection donnée ($T^{polyg,PC1}{}_{1_tr}$). Le transformé du polyèdre en est formée.	$\tau^{Polyè,PC2}{}_{1_tr}$: Déterminer les transformées des faces du polyèdre par la transformation donnée ($T^{polyg,PC2}{}_{1_tr}$). Le transformé du polyèdre en est formée.
θ_{PC1} : - Définition et propriétés d'un segment, d'un polygone et d'un polyèdre. - Propriété de l'alignement des points sur un segment. - Définition de la projection cylindrique selon approche par « projection ». - Propriétés de conservation de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés de la projection cylindrique.	θ_{PC2} : - Définition et propriétés d'un segment, d'un polygone et d'un polyèdre. - Propriété de l'alignement des points sur un segment. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par cube de référence ». - Propriétés de conservation de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés de la projection cylindrique.
Θ_{tr} : Transformation affine.	

Tableau 9. Praxéologies de référence [$T^{Polyè,PC1}{}_{1_tr}$, $\tau^{Polyè,PC1}{}_{1_tr}$, θ_{PC1}, Θ_{tr}] et [$T^{Polyè,PC2}{}_{1_tr}$, $\tau^{Polyè,PC2}{}_{1_tr}$, θ_{PC2}, Θ_{tr}]

$T^{CyR,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un cylindre de révolution par une projection cylindrique donnée (d,P).
$\tau^{CyR,PC1}{}_{1_tr}$: - Examiner la position relative de la direction de projection d par rapport à l'axe et aux deux bases du cylindre de révolution. - Déterminer les transformés des deux cercles de bases par la projection donnée ($T^{cer,PC1}{}_{1_tr}$). - Si d est parallèle à l'axe du cylindre, les transformés sont confondus. Le transformé du cylindre est une ellipse (ou un cercle). - Si d est parallèle aux bases du cylindre, les transformés sont deux segments. Le transformé du cylindre est un polygone formé par ces deux segments. - Sinon, les transformés sont deux ellipses (ou deux cercles). Le transformé du cylindre est formée de ces deux ellipses (ou deux cercles) et des deux segments de tangentes communs extérieurs.
θ_{PC1} : - Définition et propriétés d'un cylindre de révolution. - Propriété de l'alignement des points sur un segment. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par projection ». - Propriétés de la conservation de l'alignement et de l'ordre des points alignés de la projection cylindrique. - Propriété de non-conservation d'un cercle de la projection cylindrique.
Θ_{tr} : Transformation affine.

Tableau 10. Praxéologie de référence [$T^{CyR,PC1}{}_{1_tr}$, $\tau^{CyR,PC1}{}_{1_tr}$, θ_{PC1}, Θ_{tr}]

$T^{CoR,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un cône de révolution par une projection cylindrique donnée (d,P).
$\tau^{CoR,PC1}{}_{1_tr}$: - Examiner la position relative de la direction de projection d par rapport à l'axe et à la base du cône de révolution. - Déterminer le transformé du cercle de base ($T^{cer,PC1}{}_{1_tr}$) et du sommet du cône de révolution ($T^{pt,PC1}{}_{1_tr}$). - Si d est parallèle à la base du cône, la transformée de la base est un segment et le transformé du cône est un triangle formé de ce segment et la transformée du sommet. - Sinon, + calculer l'angle θ que font l'axe du cône et la direction de projection d ; + si l'angle θ est inférieur ou égal à celui fait par l'axe du cône et les génératrices, la transformée de la base est une ellipse (ou un cercle) et la transformée du cône est formée de cette ellipse (ou de ce cercle). + sinon, la transformée de la base est une ellipse (ou un cercle) et le transformé du cône est formée de cette ellipse (ou de ce cercle) et deux segments de tangentes provenant de la transformée du sommet.
θ_{PC1} : - Définition et propriétés d'un cône de révolution. - Propriété de l'alignement des points sur un segment. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par projection ». - Propriétés de la conservation de l'alignement et de l'ordre des points alignés de la projection cylindrique. - Propriété de non-conservation d'un cercle de la projection cylindrique.
Θ_{tr} : Transformation affine.

Tableau 11. Praxéologie de référence [$T^{CoR,PC1}{}_{1_tr}$, $\tau^{CoR,PC1}{}_{1_tr}$, θ_{PC1} , Θ_{tr}]

$T^{Sp,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer la transformée d'une sphère par une projection cylindrique donnée (d,P).
$\tau^{Sp,PC1}{}_{1_tr}$: - Déterminer le grand cercle qui est la section de la sphère et du plan passant par le centre de la sphère et orthogonal à la direction de projection d. - Déterminer le transformé du cercle par la projection. Si d est orthogonale au plan (P), c'est un cercle. Sinon, c'est une ellipse. La transformée de la sphère en est formée.
θ_{PC1} : - Définition et propriétés d'une sphère. - Définition de la projection cylindrique selon « approche par projection ». - Propriété de non-conservation d'un cercle de la projection cylindrique.
Θ_{tr} : Transformation affine.

Tableau 12. Praxéologie de référence [$T^{Sp,PC1}{}_{1_tr}$, $\tau^{Sp,PC1}{}_{1_tr}$, θ_{PC1} , Θ_{tr}]

4.1.2 Type de tâches 2

Soit le type de tâches « Déterminer les transformées possibles[33] d'un *objet géométrique de l'espace* par projection cylindrique» que nous noterons $T^{objE}{}_{s_tr}$. Par exemple, « Quelles sont, par projection cylindrique, les images possibles d'un parallélogramme ? ».

[33] Les transformées seront groupées selon le nombre des composants parce qu'il permet d'établir des différentes descriptions sur l'objet géométrique du plan.

Dans ce type de tâches, nous nous intéressons, pour la variable « objet géométrique de l'espace » (objE), à des objets de base de la Géométrie de l'espace comme dans le type de tâches 1.

$T^{objE}{}_{s_tr}$: Déterminer les transformés possibles d'un objet géométrique de l'espace par projection cylindrique.
$\tau^{objE}{}_{s_tr}$: - Déterminer des paramètres de la projection qui causent des cas « dégénérés ». Par exemple, le parallélisme de la direction de projection et des composants de l'objet géométrique de l'espace. - Examiner respectivement chaque « type » de paramètres, puis déterminer le transformé de l'objet géométrique de l'espace par la projection cylindrique choisie ($T^{objE,PC}{}_{1_tr}$).
θ_{PC} : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné. - Définition et propriétés de la projection cylindrique.
Θ_{tr} : Transformation affine.

Tableau 13. Praxéologie de référence [$T^{objE}{}_{s_tr}$, $\tau^{objE}{}_{s_tr}$, θ_{PC} , Θ_{tr}]

4.1.3 Type de tâches 3

Soit le type de tâches « Etudier l'existence d'une transformation d'un *objet géométrique de l'espace* donné en un *objet géométrique du plan* donné »[34] noté $T^{objE_objP}{}_{tr}$. Par exemple, « Est-il possible que l'image de projection d'un carré soit un segment ? ».

Les variables de ce type de tâches sont « objet géométrique de l'espace » (objE) et « objet géométrique du plan » (objP). Pour la première, nous n'abordons que les valeurs mentionnées dans le type de tâches 1. Pour la deuxième, ce sont des points, des segments, des droites, des demi-droites, des cercles, des ellipses, des polygones, et même des objets qui les combinent.

$T^{objE_objP}{}_{tr}$: Etudier l'existence d'une transformation d'un objet géométrique de l'espace donné en un objet géométrique du plan donné.
$\tau^{objE_objP}{}_{tr}$: - Déterminer les transformés possibles de l'objet géométrique de l'espace ($T^{objE}{}_{s_tr}$). - Identifier les propriétés géométriques (alignement, parallélisme, relation sécante, relation d'incidence, égalités, orthogonalité, barycentre,…) des composants de l'objet géométrique de l'espace donné et celles des composants de l'objet géométrique du plan donné. - Etudier les conservations et les non-conservations des propriétés entre eux. - Conclure par l'existence ou non-existence d'une transformation.
θ_{PC} : - Définition et propriétés géométriques des objets donnés. - Définition de la projection cylindrique. - Propriétés de conservation et non-conservation des propriétés géométriques par la projection cylindrique.
Θ_{tr} : Transformation affine.

Tableau 14. Praxéologie de référence [$T^{objE_objP}{}_{tr}$, $\tau^{objE_objP}{}_{tr}$, θ_{PC} , Θ_{tr}]

4.1.4 Type de tâches 4

Soit le type de tâches « Dessiner un *objet géométrique de l'espace* ». Par exemple, « Représenter en perspective cavalière une pyramide » noté $T^{objE}{}_{De}$.

[34] Un dessin peut être attaché à l'énoncé ou non.

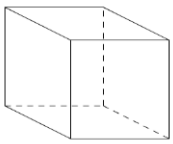
La variable de ce type de tâches est « objet géométrique de l'espace » (objE). Elle prend les valeurs que nous avons présentées dans le type de tâches 1.

T^{objE}_{De} : Dessiner un objet géométrique de l'espace.		
$\tau^{objE}_{De_PC}$: - Sélectionner, parmi les transformés possibles de l'objet géométrique de l'espace ($T^{objE}_{s_tr}$), une figure qui suggère bien l'objet à représenter. - Etudier les propriétés des transformés des composants. - Représenter, en utilisant des codages de la troisième dimension, les transformés sur une surface plane matérielle selon les propriétés ci-dessus.	$\tau^{objE}_{De_R}$: - Etudier les propriétés géométriques de l'objet géométrique de l'espace donné. - Les traduire en propriétés spatiales du dessin en se basant sur les règles conventionnelles de représentation. - Représenter, en utilisant des codages de la troisième dimension, l'objet géométrique de l'espace donné selon les propriétés ci-dessus.	$\tau^{objE}_{De_D}$: Suivre une liste d'étapes de description pour faire un dessin prototypique. Cette liste est différente selon les objets géométriques de l'espace. Nous détaillons ici le cas du cube : - Tracer un carré dont un côté est horizontal. - Tracer, issu des quatre sommets du carré, des segments qui font un angle 45° par rapport à l'horizontale. Leur longueur est égale à la moitié des côtés du carré. - Joindre les extrémités des segments pour avoir un carré. - Utiliser des pointillés pour représenter les trois segments inférieurs issus de même sommet au-dessous.
θ_{PC} : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné. - Définition et propriétés de la projection cylindrique. - Le dessin doit suggérer correctement l'objet géométrique de l'espace. - Codages de la troisième dimension.	θ_R : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné. - Règles de représentation. - Le dessin doit suggérer correctement l'objet géométrique de l'espace.	θ_D : Caractéristiques du dessin prototypique de l'objet géométrique de l'espace.
Θ_{tr} : Transformation affine.	Θ_{PC} : Projection cylindrique.	Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 15. Praxéologies de référence [T^{objE}_{De}, $\tau^{objE}_{De_PC}$, θ_{PC}, Θ_{tr}], [T^{objE}_{De}, $\tau^{objE}_{De_R}$, θ_R, Θ_{PC}] et [T^{objE}_{De}, $\tau^{objE}_{De_D}$, θ_D, Θ_R]

4.1.5 Type de tâches 5

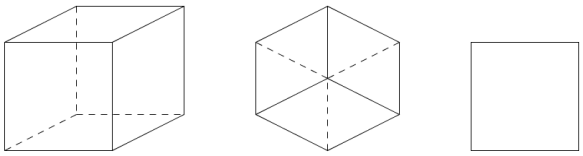
Soit le type de tâches « Associer un *dessin* donné à un *objet géométrique de l'espace donné* » noté $T^{objE,D}_{AsDO}$. Par exemple, « Est-ce que la figure ci-contre est la représentation en perspective cavalière d'un cube ? »



Pour ce type de tâches, il y a deux variables :

- la variable « objet géométrique de l'espace » (objE) qui prend les valeurs que nous avons présentées dans le types de tâches 1.

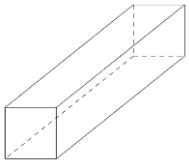
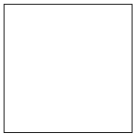
- la variable « dessin » (D). Nous regardons si le dessin proposé est prototypique (Dp)[35] ou non. Par exemple, « Parmi les dessins suivants, lesquels représentent un cube ? ». Seul le premier dessin est prototypique, au sens qu'il est régulièrement présent dans les manuels.



$T^{objE,D}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace.		
$\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$: - Etudier l'existence d'une projection cylindrique d'un (de l') objet géométrique de l'espace en l'objet géométrique du plan identifié par le dessin donné. ($T^{objE_objP}_{tr}$) - Examiner l'utilisation des codages de la troisième dimension sur le dessin donné.	$\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$: - Identifier les propriétés géométriques de l' (des) objet(s) géométrique(s) de l'espace et les propriétés spatiales du dessin. - Etudier le respect des règles de représentation entre l' (les) objet(s) géométrique(s) et le dessin.	$\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$: Référer les caractéristiques du dessin donné à celles du dessin prototypique de l' (des) objet(s) géométrique(s) de l'espace.
θ_{PC} : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné. - Définition et propriétés de la projection cylindrique. - Codages de la troisième dimension.	θ_R : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné. - Règles de représentation.	θ_D : Caractéristiques du dessin prototypiques de l' (des) objet(s) géométrique(s) de l'espace.
Θ_{tr} : Transformation affine	Θ_{PC} : Projection cylindrique.	Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 16. Praxéologie de référence [$T^{objE,D}_{AsDO}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$, θ_{PC} , Θ_{tr}], [$T^{objE,D}_{AsDO}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$, θ_R , Θ_{PC}] et [$T^{objE,D}_{AsDO}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$, θ_D , Θ_R]

Il est possible que les techniques différentes de ce type de tâches $T^{objE,D}_{AsDO}$ donnent des différents résultats, surtout dans le cas des dessins non-prototypiques.

Exemples / **Techniques**	Parmi les dessins suivants, lequel (lesquels) représente un cube ?	
		
	Réponses possibles	
$\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$	**Oui**, parce qu'une projection cylindrique, dont le plan est parallèle à une face du cube et la direction fait un angle très petit par rapport à cette face, peut fournir ce dessin.	**Oui**, parce qu'une projection cylindrique, dont le plan est parallèle à une face du cube et la direction est parallèle aux arêtes orthogonales à cette face, peut donner ce dessin.

[35] Dans le cas où l'objet géométrique de l'espace est un solide formé d'autres solides. Nous considérons si ces solides de composant sont prototypiques.

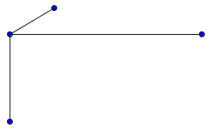
$\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$	**Oui**, parce que ce dessin respecte des règles de conservation des propriétés du cube.	**Non**, parce que les fuyantes parallèles ne sont pas représentées par des segments parallèles.
$\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$	**Non**, parce que les fuyantes dans le dessin sont trop longues.	**Non**, parce qu'il n'y a pas des fuyantes sur le dessin.

Tableau 17. Exemple des différents résultats possibles en appliquant des techniques $\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$ du type de tâches $T^{objE,D}_{AsDO}$

Ainsi, il semble que ce type de tâches ouvre la possibilité d'examiner différents points de vue sur un dessin : par transformation (projection cylindrique), par règles de représentation, par dessins prototypiques.

4.1.6 Type de tâches 6

Soit le type de tâches « Compléter le dessin d'un *objet géométrique de l'espace* » que nous notons T^{objE}_{Comp}. Par exemple, « Ajouter les arêtes manquantes sur le dessin du parallélépipède rectangle ci-contre ».



Pour ce type de tâches, il y a deux variables :

- la variable « objet géométrique de l'espace » (objE) qui prend les mêmes valeurs que celle du type de tâches 1.
- la variable « dessin » (D). Nous regardons si le dessin proposé fournit assez d'information à compléter (Dc) ou non. Dans le cas où le dessin ne fournit pas assez d'information, il y a plus d'un résultat possible.

$T^{objE,D}_{Comp}$: Compléter le dessin d'un objet géométrique de l'espace.		
$\tau^{objE,D}_{Comp_PC}$: - Déterminer des composants de l'objet géométrique de l'espace représentés sur le dessin et la projection cylindrique qui les donne [$T^{objE,D}_{AsDO}$/ $\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$]. - Déterminer les composants qui ne sont pas encore représentés sur le dessin. - Dessiner, selon la projection ci-dessus, des composants manquants [T^{objE}_{De}/ $\tau^{objE}_{De_PC}$].	$\tau^{objE,D}_{Comp_R}$: - Déterminer, en se basant sur les règles de représentation, des composants de l'objet géométrique de l'espace représentés sur le dessin [$T^{objE,D}_{AsDO}$/ $\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$]. - Déterminer les composants qui ne sont pas encore représentés sur le dessin. - Dessiner, en utilisant des règles de représentation, des composants manquants [T^{objE}_{De}/ $\tau^{objE}_{De_R}$].	$\tau^{objE,D}_{Comp_D}$: - Faire référence le dessin donné aux dessins prototypiques de l'objet géométrique de l'espace donné pour déterminer des composants de l'objet géométrique de l'espace représentés sur le dessin [$T^{objE,D}_{AsDO}$/ $\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$]. - Déterminer les composants qui ne sont pas encore représentés sur le dessin. - Ajouter des composants manquants pour avoir un dessin prototypique complet [T^{objE}_{De}/ $\tau^{objE}_{De_D}$].
θ_{PC} : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné. - Définition et propriétés de la projection cylindrique. - Codages de la troisième dimension.	θ_R : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné. - Règles de représentation.	θ_D : Caractéristiques du dessin prototypique de l'objet géométrique de l'espace.

Θ_{tr} : Transformation affine.	Θ_{PC} : Projection cylindrique.	Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 18. Praxéologies de référence [$T^{objE,D}_{Comp}$, $\tau^{objE,D}_{Comp_PC}$, θ_{PC} , Θ_{tr}], [$T^{objE,D}_{Comp}$, $\tau^{objE,D}_{Comp_R}$, θ_R , Θ_{PC}] et [$T^{objE,D}_{Comp}$, $\tau^{objE,D}_{Comp_D}$, θ_D , Θ_R]

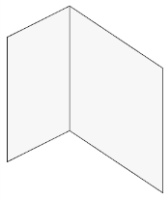
Selon la description de la praxéologie du type de tâches $T^{objE,D}_{Comp}$ dans le Tableau 18, la technique de ce type de tâches est constituée de deux types de tâches $T^{objE,D}_{AsDO}$ et T^{objE}_{De} .

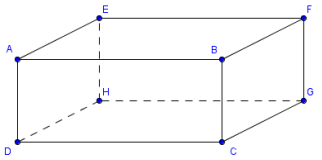
4.1.7 Type de tâches 7

Soit le type de tâches « Etudier une *propriété* des *objets géométriques de l'espace* représentés dans un *dessin* » notée $T^{P,objS,D}_{EtP}$.

Ce type de tâches possède trois variables : « propriété » (P), « dessin » (D) et « rapport de l'objet géométrique de l'espace au solide » (objS). Pour la variable « propriété », les valeurs sont : alignement, parallélisme, relation d'incidence, égalités, orthogonalité, barycentre,… Pour la variable « dessin », nous examinons s'il est prototypique ou non. Enfin, pour la variable « rapport de l'objet géométrique de l'espace au solide », nous prenons en compte trois valeurs concernant le rôle du solide dans le dessin :

- « solide – en lui-même » (SLm). Les objets géométriques de l'espace à étudier sont des parties du solide représenté dans le dessin (sommets, arêtes, faces,…).
- « solide – organisateur » (SOrg). Les objets géométriques de l'espace à étudier sont construits de composants du solide représenté dans le dessin ou de tels objets eux-mêmes. Par exemple, deux points « sur un solide », c'est-à-dire ils peuvent être situés sur une arête ou une face du solide, permettent de construire une droite ; et avec trois points on peut obtenir la représentation d'un plan en les joignant. Dans ce cas, l'élément de solide permet de générer, d'organiser des objets de l'espace et leurs propriétés. Tous les objets à étudier sont définis grâce au solide ;
- « autre » (Aut). Un (des) objet(s) à étudier n'est (sont) pas « mis » sur le solide, c'est-à-dire il(s) est (sont) déconnecté(s) du solide représenté dans le dessin, ou bien qu'il n'y a pas de solide dans le dessin, par exemple, deux plans sécants comme le dessin ci-contre.



$T^{P,objS,D}_{EtP}$: Etudier une propriété des objets géométriques de l'espace représentés sur un dessin.	Par exemple, « Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle. Est-ce que les faces ADHE et BCGF sont parallèles ? » 
$\tau^{P,objS,D}_{EtP}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux objets géométriques donnés dans l'énoncé. - Identifier les relations spatiales entre les composants repérés sur le dessin. - Interpréter ces relations en termes de propriétés géométriques des objets de l'espace donnés. - Démontrer ces propriétés géométriques.	- C'est le dessin prototypique d'un parallélépipède rectangle. Les parallélogrammes ADHE et BCGF sur le dessin correspondent aux faces demandées dans l'énoncé. - La dénomination des sommets sur le dessin montre que les faces ADHE et BCGF sont opposées. - Or on sait que dans un parallélépipède rectangle, les faces opposées sont parallèles, les faces ADHE et BCGF sont donc parallèles. *Remarque : le dessin organise la dénomination des composants d'un objet géométrique.*

$\theta_{P,D}$: - Propriétés des objets géométriques de l'espace. - Théorèmes. - Connaissances de dessins prototypiques d'objets géométriques de l'espace.	- Propriétés d'un parallélépipède rectangle. - Théorèmes. - Connaissances de dessins prototypiques du parallélépipède rectangle.
Θ_R : Règles de représentation.	Règles de représentation d'un parallélépipède rectangle

Tableau 19. Praxéologie de référence [$T^{P,objS,D}_{EtP}$, $\tau^{P,objS,D}_{EtP}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] et son exemple

4.1.8 Type de tâches 8

Soit le type de tâches « Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant une *propriété* géométrique donnée à l'aide d'un *dessin* » noté $T^{P,objS,D}_{IdO}$.

Ce type de tâches possède trois variables : « propriété » (P), « dessin » (D) et « rapport de l'objet géométrique de l'espace au solide » (objS). Leurs valeurs sont identiques à celles du type de tâches 7. Pourtant, il est possible que l'objet géométrique à identifier ne soit pas présent sur le dessin. Dans ce cas, on a besoin d'élargir la liste des objets géométriques de l'espace en en construisant de nouveaux à partir des objets disponibles.

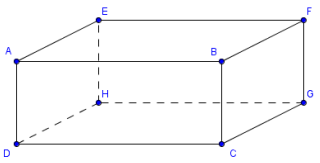
$T^{P,objS,D}_{IdO}$: Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant une propriété géométrique donnée à l'aide d'un dessin.	Par exemple, « Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle. Chercher les faces du parallélépipède parallèles à la face ADHE? ». 
$\tau^{P,objS,D}_{IdO}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux objets géométriques à examiner. - Chercher, parmi ces composants, ceux qui vérifient, sur le dessin, la propriété imposée dans l'énoncé [$T^{P,objS,D}_{EtP}$ / $\tau^{P,objS,D}_{EtP}$]. - Si l'on ne les trouve pas, il est nécessaire d'élargir la liste des objets à examiner en en créant de nouveaux à partir des objets disponibles.	- Sur le dessin, on examine les faces : ABCD, ABFE, EFGH, BFGC. - Parmi ces faces, BFGH est parallèle à ADHE.
$\theta_{P,D}$: - Propriétés des objets géométriques de l'espace. - Théorèmes. - Connaissances de dessins prototypiques d'objets géométriques de l'espace.	- Propriétés géométriques du parallélépipède rectangle. - Théorèmes. - Connaissances de dessins prototypiques du parallélépipède rectangle.
Θ_R : Règles de représentation.	Règles de représentation d'un parallélépipède rectangle

Tableau 20. Praxéologie de référence [$T^{P,objS,D}_{IdO}$, $\tau^{P,objS,D}_{IdO}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] et son exemple

4.1.9 Récapitulation des praxéologies de référence épistémologiques et questions

Nous récapitulons les praxéologies de référence épistémologiques concernant la représentation en perspective dans le Tableau 21 suivant.

	Type de tâches		Technique	Technologie	Théorie
1	Déterminer le tranformé d'un objet géométrique de l'espace par une transformation donnée.	$T^{objE,PC}_{1_tr}$	$\tau^{objE,PC}_{1_tr}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
2	Déterminer les tranformés possibles d'un objet géométrique de l'espace.	$T^{objE}_{s_tr}$	$\tau^{objE}_{s_tr}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
3	Etudier l'existence d'une transformation d'un objet géométrique de l'espace donné en un objet géométrique du plan donné.	$T^{objE_objP}_{tr}$	$\tau^{objE_objP}_{tr}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
4	Dessiner un objet géométrique de l'espace ».	T^{objE}_{De}	$\tau^{objE}_{De_PC}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
			$\tau^{objE}_{De_R}$	θ_{R}	Θ_{PC}
			$\tau^{objE}_{De_D}$	θ_{D}	Θ_{R}
5	Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace donné.	$T^{objE,D}_{AsDO}$	$\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
			$\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$	θ_{R}	Θ_{PC}
			$\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$	θ_{D}	Θ_{R}
6	Compléter le dessin d'un objet géométrique de l'espace.	$T^{objE,D}_{Comp}$	$\tau^{objE,D}_{Comp_PC}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
			$\tau^{objE,D}_{Comp_R}$	θ_{R}	Θ_{PC}
			$\tau^{objE,D}_{Comp_D}$	θ_{D}	Θ_{R}
7	Etudier une propriété des objets géométriques de l'espace représentés dans un dessin.	$T^{P,objS,D}_{EtP}$	$\tau^{P,objS,D}_{EtP}$	$\theta_{P,D}$	Θ_{R}
8	Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant une propriété géométrique donnée à l'aide du dessin.	$T^{P,objS,D}_{IdO}$	$\tau^{P,objS,D}_{IdO}$	$\theta_{P,D}$	Θ_{R}

Tableau 21[36]. Praxéologies de référence épistémologiques concernant la représentation en perspective

[36] Légende du Tableau 22 :

- Les mots rouges sont des variables du type de tâches.
- Les flèches signifient l'intervention d'un type de tâches dans une technique.
- Les exposants signifient les variables de types de tâches :

objE : objet géométrique de l'espace
objP : objet géométrique du plan
objS : rapport de l'objet géométrique de l'espace au solide
PC : projection cylindrique
P : propriété
D : dessin

- Les indices signifient des éléments principaux de praxéologies:

tr : transformée (pour T, τ)
transformation affine (pour Θ)
De : dessiner
Comp : compléter
AsDO : associer un dessin à un(des) objet(s)
EtP : étudier une propriété
IdO : identifier un objet
PC : projection cylindrique
R : règles de représentation
D : dessin prototypique
P : propriété

Nous dégageons, à partir du tableau 21, des commentaires pour chaque niveau de praxéologie ainsi que des questions concernant la transposition didactique des institutions d'enseignement de la Géométrie de l'espace.

Les praxéologies ponctuelles qui ont une seule technique sont associées aux types de tâches 1, 2, 3, 7, 8 ($T^{objE,PC}_{1_tr}$, $T^{objE}_{s_tr}$, $T^{objE_objP}_{tr}$, $T^{P,objS,D}_{EtP}$, $T^{P,objS,D}_{IdO}$).

Les praxéologies associées aux types de tâches 4, 5, 6 (T^{objE}_{De}, $T^{objE,D}_{AsDO}$, $T^{objE,D}_{Comp}$) sont des praxéologies complexes, chacune possédant plusieurs techniques. Plus précisément, chaque type de tâches peut être réalisé à l'aide de trois techniques se basant soit sur la projection cylindrique ($\tau^{objE}_{De_PC}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$, $\tau^{objE,D}_{Comp_PC}$), soit sur les règles de représentation ($\tau^{objE}_{De_R}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$, $\tau^{objE,D}_{Comp_R}$), soit sur les dessins prototypiques ($\tau^{objE}_{De_D}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$, $\tau^{objE,D}_{Comp_D}$). La diversité des techniques attachées à un type de tâches peut conduire à des questions sur le choix de l'institution de l'enseignement de la Géométrie de l'espace que nous allons présenter dans la suite.

Au niveau des technologies, nous pouvons grouper les praxéologies ponctuelles selon les cinq praxéologies locales (Tableau 22).

Praxéologie locale			Technologie	Technique	Type de tâches	
1	Praxéologie locale de « projection cylindrique »	PL_{PC}	θ_{PC}	$\tau^{objE,PC}_{1_tr}$	$T^{objE,PC}_{1_tr}$	1
				$\tau^{objE}_{s_tr}$	$T^{objE}_{s_tr}$	2
				$\tau^{objE_objP}_{tr}$	$T^{objE_objP}_{tr}$	3
				$\tau^{objE}_{De_PC}$	T^{objE}_{De}	4
				$\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$	$T^{objE,D}_{AsDO}$	5
				$\tau^{objE,D}_{Comp_PC}$	$T^{objE,D}_{Comp}$	6
2	Praxéologie locale de « règles de représentation »	PL_R	θ_R	$\tau^{objE}_{De_R}$	T^{objE}_{De}	4
				$\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$	$T^{objE,D}_{AsDO}$	5
				$\tau^{objE,D}_{Comp_R}$	$T^{objE,D}_{Comp}$	6
3	Praxéologie locale de « dessins prototypiques »	PL_D	θ_D	$\tau^{objE}_{De_D}$	T^{objE}_{De}	4
				$\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$	$T^{objE,D}_{AsDO}$	5
				$\tau^{objE,D}_{Comp_D}$	$T^{objE,D}_{Comp}$	6
4	Praxéologie locale de « propriété-dessin »	$PL_{P,D}$	$\theta_{P,D}$	$\tau^{P,objS,D}_{EtP}$	$T^{P,D}_{EtP}$	7
				$\tau^{P,objS,D}_{IdO}$	$T^{P,D}_{IdO}$	8

Tableau 22. Praxéologies locales de référence épistémologiques

A partir du Tableau 22, on peut voir que certains types de tâches (T^{objE}_{De}, $T^{objE,D}_{AsDO}$, $T^{objE,D}_{Comp}$) peuvent être attachés à plusieurs praxéologies locales (PL_{PC}, PL_R, PL_D). Cela nous conduit aux questions suivantes sur l'enseignement de la représentation en perspective.

Quelles praxéologies locales sont construites dans une institution ? Plus précisément, quelles techniques l'institution choisit-elle pour résoudre les types de tâches T^{objE}_{De}, $T^{objE,D}_{AsDO}$, $T^{objE,D}_{Comp}$? Y a-t-il priorité d'une technique par rapport aux autres ?

Peuvent-elles coexister ? Certaines sont-elles exclues de l'évolution curriculaire ? Autrement dit, y a-t-il remplacement d'une technique par une autre ? Si oui, lesquelles sont retenues? Lesquelles sont rejetées ? Quelle en est la raison ?

Au niveau des théories, du point du vue dynamique, nous constatons des transformations d'une technologie en une théorie (Tableau 23).

Théorie	Technologie	Praxéologie locale		
Θ_{tr}	θ_{PC}	PL_{PC}	Praxéologie locale de « projection cylindrique »	1
Θ_{PC}	θ_{R}	PL_{R}	Praxéologie locale de « règles de représentation »	2
Θ_{R}	θ_{D}	PL_{D}	Praxéologie locale de « dessins prototypiques »	3
	$\theta_{P,D}$	$PL_{P,D}$	Praxéologie locale de « propriété-dessin »	4

Tableau 23[37]. Transformation d'une technologie en une théorie dans les praxéologies de référence épistémologiques

En premier lieu, la projection cylindrique est une technologie (θ_{PC}) dans la praxéologie locale PL_{PC}, qui devient la théorie (Θ_{PC}) dans la praxéologie locale PL_R.
En deuxième lieu, les règles de représentation sont une technologie (θ_R) dans la praxéologie locale PL_R, mais deviennent la théorie (Θ_R) dans les praxéologies locales PL_D et $PL_{P,D}$.
Pour ces deux transformations les éléments technologie/théorie « se chevauchent » : dans la praxéologie locale PL_{PC}, la transformation affine, en tant que théorie (Θ_{tr}), justifie la projection cylindrique, technologie (θ_{PC}) ; dans la praxéologie locale PL_R , la projection cylindrique, en tant que théorie (Θ_{PC}), justifie les règles de représentation, technologie (θ_R) ; enfin, à leur tour, les règles de représentation, en tant que théorie (Θ_R), justifient les technologies concernant les dessins de représentation (θ_D et $\theta_{P,D}$). Cela nous conduit à la question : *Comment élabore-t-on le bloc de technologie/théorie (logos) des praxéologies liées à la représentation en perspective dans l'enseignement ? Par exemple, les règles de représentation sont-elles expliquées comme propriétés de la projection cylindrique ?*

4.2 Retour à l'institution professionnelle

Du point de vue épistémologique, les praxéologies de référence décrites dans la section 4.1 permettent de prévoir la présence de trois approches possibles pour enseigner le passage d'un objet géométrique à un dessin : « projection », « règles de représentation » et « dessin prototypique ». Néanmoins, il est indispensable de rendre compte l'intervention de l'approche « d'observation », comme une approche primitive et naïve provenant de la réalité. Parmi les 8 types de tâches mentionnés ci-dessus, elle peut être présente dans les types de tâches 4, 5, 6.

4.2.1 Type de tâches 4

T^{objE}_{De} : Dessiner un objet géométrique de l'espace.
$\tau^{objE}_{De_Obs}$:[38] - Identifier un objet physique à partir de l'objet géométrique de l'espace donné. - Choisir un angle de vue de sorte qu'on puisse bien voir cet objet physique. - Prendre des traces[39], en utilisant des codages de la troisième dimension, pour redessiner, sur une surface plane matérielle, ce qu'on pense voir en regardant l'objet physique.
θ_{Obs} : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné.

[37] Les flèches continues signifient la transformation d'une technologie en une théorie. Les flèches en pointillés signifient la justification d'une technologie par une théorie.
[38] Sa portée est des solides.
[39] Pour prendre des traces, il existe des techniques qui se basent sur un découpage en éléments de nature géométrique : point, segment, polygone,…

- Le dessin est une image d'observation de l'objet physique. - Le dessin doit suggérer correctement l'objet géométrique de l'espace. - Répertoire des formes et vocabulaires usuels (cube, cône de révolution, cylindre de révolution,…). - Codages de la troisième dimension.

Tableau 24. Praxéologie [T^{objE}_{De} , $\tau^{objE}_{De_Obs}$, θ_{Obs}]

4.2.2 Type de tâches 5

$T^{objE,D}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace donné.
$\tau^{objE,D}_{AsDO_Obs}$: - Identifier la nature d'un objet physique à partir du dessin donné. - Chercher un angle de vue de sorte qu'on puisse voir l'objet physique comme dans le dessin donné, avec des codages de la troisième dimension. - Identifier l'objet géométrique à partir de l'objet physique.
θ_{Obs} : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné. - Le dessin est une image d'observation de l'objet physique. - Répertoire des formes et vocabulaires usuels (cube, cône de révolution, cylindre de révolution,…). - Codages de la troisième dimension.

Tableau 25. Praxéologie [$T^{objE,D}_{AsDO_Obs}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_Obs}$, θ_{Obs}]

4.2.3 Type de tâches 6

$T^{objE,D}_{Comp}$: Compléter le dessin d'un objet géométrique de l'espace.
$\tau^{objE,D}_{Comp_Obs}$: - Déterminer des composants de l'objet physique lié à l'objet géométrique de l'espace représentés sur le dessin [$T^{objE,D}_{AsDO}$/ $\tau^{objE,D}_{AsDO_Obs}$]. - Déterminer les composants qui ne sont pas encore représentés sur le dessin. - Dessiner des composants manquants selon ce qu'on pense observer sur l'objet physique [T^{objE}_{De}/ $\tau^{objE}_{De_Obs}$].
θ_{Obs} : - Définition et propriétés de l'objet géométrique de l'espace donné. - Le dessin est une image d'observation de l'objet physique. - Répertoire des formes et vocabulaires usuels (cube, cône de révolution, cylindre de révolution,…). - Codages de la troisième dimension.

Tableau 26. Praxéologie [$T^{objE,D}_{Comp}$, $\tau^{objE,D}_{Comp_Obs}$, θ_{Obs}]

4.2.4 Commentaires sur les praxéologies de l'observation

Les nouvelles praxéologies ponctuelles ci-dessus peuvent être groupées autour d'une praxéologie locale caractérisée par la technologie de l'observation θ_{Obs}. Nous l'appellerons désormais « praxéologie locale d'observation PL_{Obs} ». Cette praxéologie locale complète les praxéologies de référence de la section 4.1 . En effet l'institution professionnelle nécessite, comme nous l'avons vu dans la section 1.3.3, des savoirs qui sont spécifiques comme ici autour les praxéologies d'observation PL_{Obs}. On peut considérer les praxéologies de référence épistémologique de la section 4.1 comme « méthodes indirectes », et les praxéologies de cette section 4.2 comme « méthodes directes ». On peut dire que la praxéologie locale d'observation PL_{Obs} est une création didactique, au sens où l'on fait appel à une « méthode » autre que mathématiques pour transmettre un savoir mathématique « difficile à expliquer » - dans ce cas, la représentation en perspective.

Cela nous conduit à l'étude de l'intervention de l'observation dans l'enseignement de la représentation en perspective, et surtout de ses interactions éventuelles avec les autres praxéologies locales PL_{PO}, PL_R rattachés aux types de tâches 4, 5 et 6.

Cet ajout nous permet de compléter une grille d'analyse des praxéologies qui sera appliquée à l'étude des praxéologies institutionnelles française et vietnamienne présentées dans la suite de ce chapitre.

4.3 Praxéologie institutionnelle : le cas de la France

En France, pour un même programme, il existe plusieurs séries de manuels. Dans notre étude, nous avons choisi, pour chaque classe, deux manuels représentatifs. Ce choix de manuels se base sur leur degré d'utilisation dans l'enseignement :

- ce sont des ouvrages de grands éditeurs, par exemple Hachette, Hatier, Nathan,…
- il existe des versions antérieures de ces séries de manuels correspondant aux anciens programmes ;
- il existe une série de manuels pour toutes les classes de l'école primaire ou du collège et du lycée.

Le Tableau 27 présente les manuels français utilisés correspondant au programme actuel pour notre analyse praxéologique.

Niveau	Série de manuels	Programme
Ecole primaire (CP, CE1, CE2, CM1, CM2)	Euro Maths Pour comprendre les mathématiques	2008
Collège (de 6e à 3e)	Transmath Triangle	2008
Lycée (2nd)	Transmath Déclic	2009

Tableau 27. Manuels français utilisés dans l'analyse praxéologique

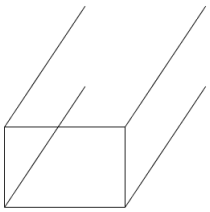
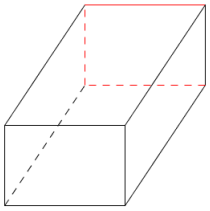
En France, on n'enseigne pas la projection (approche par projection de la perspective cavalière), par conséquent, les types de tâches 1, 2, 3 concernant les transformations par projection n'existent pas dans les manuels. Nous n'aborderons donc, par la suite, que les types de tâches 4, 5, 6, 7, 8.

4.3.1 Type de tâches 4

En France, les objets géométriques exigés dans le type de tâches T^{objE}_{De} « Dessiner un objet géométrique de l'espace » sont associés aux solides étudiés au niveau scolaire considéré. Nous présentons les praxéologies institutionnelles françaises concernant ce type de tâches.

En classe de sixième on rencontre le type de tâches T^{PaR}_{De} « Dessiner un parallélépipède rectangle ». Dans la partie « savoir-faire » du manuel Transmath 6e, nous trouvons la solution attendue:

> Enoncé.
> Représenter en perspective cavalière un parallélépipède rectangle de dimensions 3 cm, 2 cm et 1,5 cm, la face avant étant celle de 2 cm sur 1,5cm.
> Solution.

		
On trace un rectangle en vraie grandeur de 2 cm sur 1,5 cm.	On représente les quatre arêtes de longueur 3 cm en réalité par quatre segments parallèles de longueur réduite.	On rejoint les quatre extrémités obtenues pour former la face arrière. On met en pointillés les arêtes cachées.

(Malaval et al., 2009, p. 234)

Les étapes de représentation ci-dessus peuvent être considérées comme une application des règles de représentation d'un solide en perspective cavalière énoncées auparavant dans le manuel.

> La perspective cavalière est un procédé qui permet de représenter un solide sur une feuille de papier, tout en rendant « visibles » les parties cachées :
> - les arêtes parallèles sur le solide sont représentées par des segments parallèles ;
> - **les faces** qu'**un observateur a face à lui** (faces avant et arrière) sont représentées **en vraie grandeur** ; les arêtes qui relient ces faces sont réduites ;
> - **les arêtes qu'un observateur ne voit pas sont représentées en pointillés**.
>
> (Malaval et al., 2009, p. 232)

De même, dans la partie dite « connaissances »[40] du manuel Triangle 6e, nous avons relevé des règles de représentation en perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle : représentation en vraie grandeur des faces avant/arrière, conservation du parallélisme, réduction des fuyants, des pointillés pour les arêtes cachées.

L'étude de cette partie nous a permis d'identifier la praxéologie institutionnelle [T^{PaR}_{De}, $\tau^{PaR}_{De_R}$, θ_R] qui est une instanciation de la praxéologie du type de tâches T^{PaR}_{De} (Tableau 28) :

T^{PaR}_{De} : Dessiner un parallélépipède rectangle.
$\tau^{PaR}_{De_R}$: - Choisir une face frontale. Tracer un rectangle selon les dimensions de la face frontale. - Tracer, à partir des sommets du rectangle, des segments dont la longueur est inférieure à celle des fuyantes dans la réalité. - Joindre les extrémités des segments pour former un rectangle. - Utiliser des pointillés pour représenter les arêtes cachées.
θ_R : - Définition et propriétés d'un parallélépipède rectangle. - Règles de représentation.

Tableau 28. Praxéologie institutionnelle française [T^{PaR}_{De}, $\tau^{PaR}_{De_R}$, θ_R] en sixième

En cinquième, sont introduits les types de tâches attachés aux deux solides : le prisme droit (Tableau 29) et le cylindre de révolution (Tableau 30).

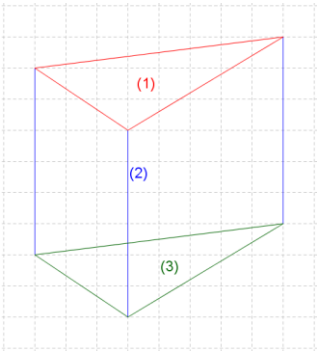
[40] Nous l'avons déjà présentée dans la section 2.1.3.

De même qu'en 6e, une solution attendue de la représentation en perspective d'un prisme droit est présentée dans le manuel Transmath 5e.

Enoncé.

Dessiner à main levée en perspective cavalière, sur papier quadrillé, un prisme droit à base triangulaire posé sur une base et avec une arête latérale en premier plan.

Solution



(1) On dessin un triangle disposé comme ci-contre avec un sommet au premier plan.
(2) On trace trois segments parallèles, de même longueur et « verticaux », à partir des sommets du triangle.
(3) On joint les extrémités des segments tracés afin d'obtenir un triangle : ses côtés sont deux à deux parallèles à ceux du triangle (1) (et de même longueur).

(Malaval et al., 2010, p. 270)

Dans le manuel Triangle 5e, le problème de la représentation du prisme droit n'est pas présent dans la partie de « connaissance ». Cependant, on trouve ce type de tâches dans la partie « activité » et « exercice » où il y a deux cas de représentation des bases. Regardons l'activité ci-dessous où on propose deux représentations différentes du prisme droit.

Dessiner, à main levée, en perspective cavalière, un prisme droit de base triangulaire dans les deux cas suivants :

a) La face avant est l'une des bases du prisme.

b) La face avant est l'une des faces latérales du prisme.

(Chapiron et al., 2010, p. 189)

Ainsi, il est évident que la représentation du prisme droit, plus exactement, de sa base, dépend du choix de la face avant. Si c'est une base du prisme, elle est représentée en vraie grandeur ; sinon, elle est déformée.

Ces constatations nous permettent de décrire la praxéologie du type de tâches T^{PrD}_{De} « Dessiner un prisme droit » comme suit :

T^{PrD}_{De} : Dessiner un prisme droit.
$\tau^{PrD}_{De_R}$: - Si une base du prisme droit est choisie comme face avant, + Tracer un polygone en vraie grandeur par rapport la base. + Tracer, à partir des sommets du polygone, des segments obliques, parallèles, de même longueur. + Rejoindre les extrémités de ces segments. - Sinon, + Tracer un polygone de même nombre de côtés mais déformé par rapport la base. + Tracer, à partir des sommets du polygone, des segments verticaux, parallèles, de même longueur. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées.
θ_R : - Définition et propriétés d'un prisme droit. - Règles de représentation.

Tableau 29. Praxéologie institutionnelle française [T^{PrD}_{De}, $\tau^{PrD}_{De_R}$, θ_R] en cinquième

Dans le cas du cylindre de révolution, il nous semble que la technique de sa représentation n'est pas bien expliquée dans la partie « Cours ». Nous ne trouvons, dans le manuel Transmath 5e, que deux exemples de représentation en perspective cavalière de ce solide. Ils sont accompagnés d'une explication de représentation de la base : l'une est « représentée par un disque », et l'autre est « déformée en ovale[41] ». Cependant, *comment expliquer la représentation des génératrices du cylindre sans avoir des règles de représentation la concernant?* Il est fort probable que les dessins dans les exemples mentionnés les impliquent. Tout cela nous permet de supposer que la praxéologie du type de tâches T^{CyR}_{De} « Dessiner un cylindre de révolution » est construite à base de « dessin prototypique » (Tableau 30).

T^{CyR}_{De} : Dessiner un cylindre de révolution.
$\tau^{CyR}_{De_D}$: - Si une base du cylindre est choisie comme face avant, + Tracer deux cercles dont le rayon est égal à celui des bases du cylindre. + Tracer deux tangentes communes extérieures obliques de ces deux cercles. - Sinon, + Tracer deux ovales. + Tracer deux tangentes communes extérieures verticales de ces deux ovales. - Utiliser des pointillés pour la partie cachée des bases.
θ_D : Caractéristiques du dessin prototypique du cylindre de révolution.
Θ_R : Règles de représentation *(incomplètes).*

Tableau 30. Praxéologie institutionnelle française [T^{CyR}_{De} , $\tau^{CyR}_{De_D}$, θ_D , Θ_R] en cinquième

En quatrième, où l'on travaille sur la pyramide et le cône de révolution, le problème de représentation en perspective n'est pas explicité dans le programme. Dans les manuels, on ne trouve aucune explicitation des règles de représentation de ces deux solides. Dans les deux manuels consultés, nous constatons seulement une activité et un exercice appartenant à ce type de tâches dans le manuel Triangle 4e. *Comment l'élève les résout-il ?* Dans le livre du professeur de Triangle 4e, on demande à l'enseignant d'expliquer la déformation de la base dans la représentation en perspective de ces deux solides.

> Les élèves cherchent souvent à représenter la base d'une pyramide ou d'un cône sans la déformer. Or il est important que les élèves apprennent à représenter correctement des pyramides ou des cônes puisqu'ils seront amenés à utiliser ces schémas pour résoudre des problèmes de géométrie de l'espace.
>
> (Chapiron et al., 2011, p. 96)

Il est ainsi clair que l'enseignement de certaines règles de déformation dans la représentation, comme ici pour la base de la pyramide et celle du cône de révolution sont à la charge de l'enseignant.

Dans le cas de la pyramide, le manuel Triangle 4e ne s'intéresse qu'aux pyramides à base carrée. Ainsi, ces nouvelles règles et celles de la classe de sixième sont suffisantes pour représenter une pyramide. Nous décrivons la praxéologie institutionnelle du type de tâches T^{Py}_{De} « Dessiner une pyramide à base carrée » (Tableau 31) comme suit.

[41] Voir la Figure 18 à la page 62.

T^{Py}_{De} : Dessiner une pyramide à base carrée.
$\tau^{Py}_{De_R}$: - Tracer un parallélogramme. - Tracer, à partir des sommets du parallélogramme, des segments se rejoignant en un même point. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées.
θ_R : - Définition et propriétés de la pyramide à base carrée. - Règles de représentation.

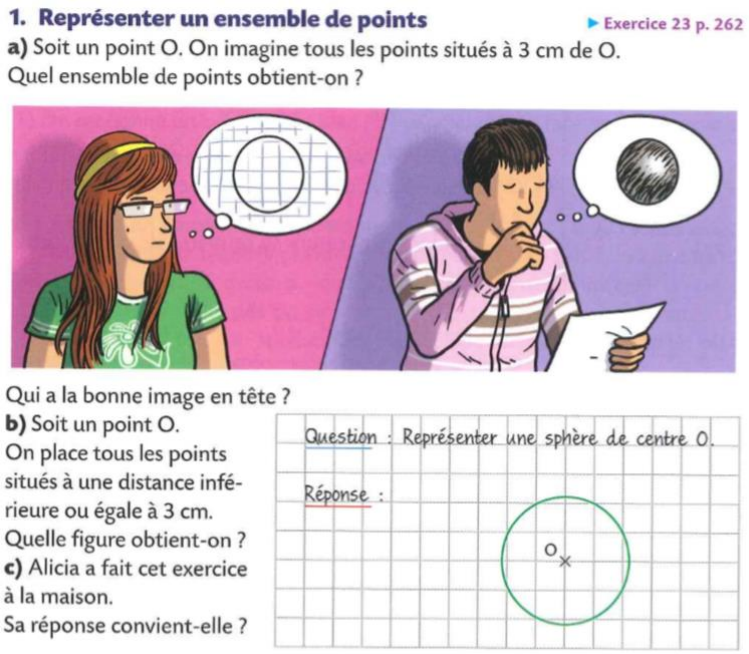
Tableau 31. Praxéologie institutionnelle française [T^{Py}_{De}, $\tau^{Py}_{De_R}$, θ_R] en cinquième

Dans le cas du cône de révolution, l'absence de règles pour la représentation des génératrices renforce la prééminence d'une praxéologie institutionnelle du type de tâches T^{CoR}_{De} « Dessiner un cône de révolution » qui s'appuie sur les dessins prototypiques de ce solide (Tableau 32).

T^{CoR}_{De} : Dessiner un cône de révolution.
$\tau^{CoR}_{De_D}$: - Tracer un ovale « horizontal ». - Choisir un point sur l'axe vertical passant par le centre de l'ovale. - Tracer deux tangentes de l'ovale passant par le point ci-dessus - Utiliser des pointillés pour la partie de l'ovale cachée.
θ_D : Caractéristique du dessin prototypique d'un cône de révolution.
Θ_R : Règles de représentation *(incomplètes).*

Tableau 32. Praxéologie institutionnelle française [T^{CoR}_{De}, $\tau^{CoR}_{De_D}$, θ_D, Θ_R] en quatrième

En troisième, bien que la représentation de la sphère soit abordée dans le programme, aucune règle la concernant n'est fournie dans la partie « cours » des deux manuels. Dans la partie « activité » du manuel Triangle 3e, nous relevons l'activité suivante qui fournit une représentation de la sphère.


1. Représenter un ensemble de points ▶ Exercice 23 p. 262

a) Soit un point O. On imagine tous les points situés à 3 cm de O.
Quel ensemble de points obtient-on ?

Qui a la bonne image en tête ?

b) Soit un point O.
On place tous les points situés à une distance inférieure ou égale à 3 cm.
Quelle figure obtient-on ?

c) Alicia a fait cet exercice à la maison.
Sa réponse convient-elle ?

(Chapiron et al., 2012, p. 253)

Nous décrivons alors la praxéologie du type de tâches T^{Sp}_{De} « Dessiner une sphère » comme suit (Tableau 33) :

T^{Sp}_{De} : Dessiner une sphère.
$\tau^{Sp}_{De_D}$: Tracer un cercle.
θ_D : Caractéristique du dessin prototypique d'une sphère.

Tableau 33. Praxéologie institutionnelle française [T^{Sp}_{De}, $\tau^{Sp}_{De_D}$, θ_D] en troisième

Outre les dessins de solides, l'institution française propose le type de tâches : dessiner des objets à deux dimensions (section d'un solide par un plan).
Dans le manuel Transmath 3e, trois exercices demandent de tracer la section d'un cube par un plan parallèle à une arête ou à une face. Leur résolution est basée sur la traduction du parallélisme entre les côtés de la section et les arêtes du cube. Nous la modélisons par la praxéologie suivante (Tableau 34)

T^{secCu}_{De} : Dessiner la section d'un cube par un plan parallèle à une arête ou à une face.
$\tau^{secCu}_{De_R}$: - Déterminer les arêtes du cube parallèles aux côtés du polygone de section. - Tracer les côtés du polygone de section parallèles à ces arêtes sur le dessin. - Utiliser des pointillés pour les côtés cachés.
θ_R : - Définition et propriétés de la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête ou à une face. - Règles de représentation.

Tableau 34. Praxéologie institutionnelle française [$T^{secPolyè}_{De}$, $\tau^{sec}_{De_R}$, θ_R] en troisième

Il y a aussi, dans les deux manuels, la demande de représentation de la section d'une sphère par un plan. Aucune règle de représentation n'est présente pour ce fait. Il est ainsi obligatoire de se baser sur ses dessins prototypiques pour la représenter en perspective.

T^{secSp}_{De} : Dessiner la section d'une sphère et d'un plan.
$\tau^{secSp}_{De_D}$: - Tracer un ovale, inférieure du parallélogramme représentant le plan et du cercle représentant la sphère, qui est tangente au cercle en deux points. - Utiliser des pointillés pour la partie de l'ovale caché.
θ_D : Caractéristiques du dessin prototypique de la section d'une sphère par un plan.

Tableau 35. Praxéologie institutionnelle française [T^{secSp}_{De}, $\tau^{secSp}_{De_D}$, θ_D] en troisième

4.3.2 Type de tâches 5

Contrairement au type de tâche T^{objE}_{De}, l'élève a déjà rencontré, à partir des classes primaires, ce type de tâches où les « objets géométriques de l'espace » sont des solides : cube, parallélépipède rectangle, prisme droit, cylindre, cône, sphère. Ces solides sont donnés dans l'énoncé sous forme des photographies ou d'images d'objet réel. La tâche de l'élève est de déterminer le dessin de représentation en perspective d'un solide à l'aide de l'observation. Examinons l'activité suivante extraite du livre du professeur d'Euro Maths du CP 2008 qui explique comment examiner un dessin.

> Un élève vient au tableau montrer comment placer le solide pour qu'on puisse le « voir » comme sur la représentation.
>
> (Peltier et al., 2011, p. 165)

Cela nous conduit à la description suivante (Tableau 36) :

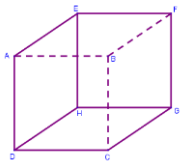
$T^{Sol,Dp}{}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à un solide donné.
$\tau^{Sol,Dp}{}_{AsDO_Obs}$: - Chercher un angle de vue de sorte qu'on puisse voir le solide comme dans le dessin donné, avec les pointillés représentant des parties cachées.
θ_{Obs} : - Le dessin est une image d'observation de l'objet physique. - Codages de la troisième dimension. - Répertoire des formes et vocabulaires usuels (cube, cône de révolution, cylindre de révolution,…).

Tableau 36. Praxéologie institutionnelle française [$T^{Sol,Dp}{}_{AsDO}$, $\tau^{Sol,Dp}{}_{AsDO_Obs}$, θ_{Obs}] à l'école primaire

Au collège (de la 6e à la 3e) et au lycée (2nde), les valeurs de la variable « objets géométriques de l'espace » de ce type de tâches $T^{objE,D}{}_{AsDO}$ sont identiques à celles du type de tâches $T^{objE}{}_{De}$. Pour la variable « dessin », nous observons que la plupart des dessins proposés sont prototypiques. Il y a très peu dessins non-prototypique, comme par exemple :

- l'exercice 7c page 194 dans le manuel Triangle 6e :

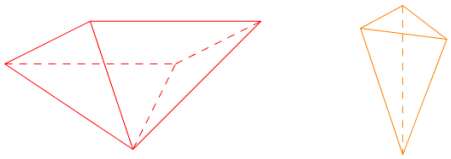
Pour chaque dessin, indiquer s'il correspond à une perspective cavalière d'un cube.
Si ce n'est pas le cas, expliquer ce qui ne convient pas.



(Chapiron et al., 2009, p. 194)

- l'exercice 16a, c page 187 dans le manuel Triangle 4e :

Repérer quelles sont les pyramides parmi les solides suivants. Préciser si leur base est un triangle, un quadrilatère ou un autre polygone et trouver le nombre de faces latérales, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de chaque pyramide.



a) c)

(Chapiron et al., 2011a, p. 187)

Pour les polyèdres, les règles de représentation fournies dans la partie « cours » des manuels en sixième permettent de résoudre ce type de tâches en examinant leur respect dans les dessins proposés. Nous décrivons les praxéologies institutionnelles comme suit :

$T^{PaR,D}{}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à un parallélépipède rectangle.
$\tau^{PaR,D}{}_{AsDO_R}$: Examiner sur le dessin : - s'il y a deux faces représentées par des rectangles en vraie grandeur, - si les segments joints deux rectangles sont parallèles et réduits par rapport à leur dimension réelle, - si les arêtes cachées sont représentées par des pointillés et les arêtes vues sont représentées par des traits continus.
θ_{R} : - Définition et propriétés d'un parallélépipède rectangle. - Règles de représentation.

Tableau 37. Praxéologie institutionnelle française [$T^{PaR,D}{}_{AsDO}$, $\tau^{PaR,D}{}_{AsDO_R}$, θ_{R}] en sixième

$T^{PrD,D}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à un prisme droit.
$\tau^{PrD,D}_{AsDO_R}$: - Déterminer, sur le dessin, deux polygones de base. - Examiner, sur le dessin : + si les arêtes de deux polygones de bases sont, deux à deux, parallèles et de même longueur, + si les segments rejoints les deux bases sont parallèles et de même longueur, + si les arêtes cachées sont représentées par des pointillés et les arêtes vues sont représentées par des traits continus.
θ_R : - Définition et propriétés d'un prisme droit. - Règles de représentation.

Tableau 38. Praxéologie institutionnelle française [$T^{PrD,D}_{AsDO}$, $\tau^{PrD,D}_{AsDO_R}$, θ_R] en cinquième

$T^{Py,D}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à une pyramide.
$\tau^{Py,D}_{AsDO_R}$: - Déterminer, sur le dessin, le polygone de base. - Examiner, sur le dessin : + si les segments issus de sommets du polygone de base se coupent en un point, + si les arêtes cachées sont représentées par des pointillés et les arêtes vues sont représentées par des traits continus.
θ_R : - Définition et propriétés d'une pyramide. - Règles de représentation.

Tableau 39. Praxéologie institutionnelle française [$T^{Py,D}_{AsDO}$, $\tau^{Py,D}_{AsDO_R}$, θ_R] en quatrième

Quant aux solides de révolution, nous ne trouvons que le type de tâches $T^{CyR,Dp}_{AsDO}$ « Associer un dessin donné à un cylindre de révolution » dans les deux manuels. L'absence des règles de représentation, surtout de celles concernant la représentation des tangentes, et la similarité des dessins du cylindre nous permet de croire que la technique de ce type de tâches se base sur la référence à un dessin prototypique. Nous décrivons sa praxéologie institutionnelle dans le Tableau 40.

$T^{CyR,Dp}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à un cylindre de révolution.
$\tau^{CyR,Dp}_{AsDO_D}$: Examiner sur le dessin : - s'il y a deux ellipses (ou deux cercles) dont le diamètre le plus grand est égale à celui de la base du cylindre. - si deux tangentes « rejointes » deux ellipses ont la longueur égale à la hauteur du cylindre et perpendiculaires aux diamètres le plus grands des ellipses. - si les parties cachées sont représentées par des pointillés et les parties vues sont représentées par des traits continus.
θ_D : Caractéristiques du dessin prototypique d'un cylindre de révolution.

Tableau 40. Praxéologie institutionnelle française [$T^{CyR,Dp}_{AsDO}$, $\tau^{CyR,Dp}_{AsDO_D}$, θ_D] en cinquième

4.3.3 Type de tâches 6

Le type de tâches $T^{objE,D}_{Comp}$ « Compléter le dessin d'un objet géométrique de l'espace » apparaît dans les classes du collège. Les valeurs de la variable « objet géométrique de l'espace » sont des solides : parallélépipède rectangle, prisme droit, pyramide et cylindre de révolution.

Pour les polyèdres, l'application des règles, surtout celle de conservation, permet de reconnaître les composants du solide déjà représentés, et d'ajouter les composants manquants.

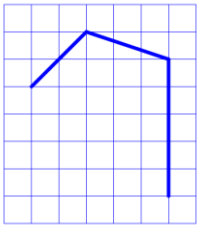
Pour le type de tâches $T^{PaR,D}_{Comp}$ « Compléter le dessin d'un parallélépipède rectangle », les manuels donnent toujours assez informations pour qu'il soit possible de compléter : celles de la face frontale (des éléments d'orthogonalité : soit un rectangle, soit deux segments perpendiculaires) et celles des arêtes/faces latérales. La praxéologie institutionnelle correspondante est décrite comme suit (Tableau 41):

$T^{PaR,Dc}_{Comp}$: Compléter le dessin d'un parallélépipède rectangle.
$\tau^{PaR,Dc}_{Comp_R}$: - Reconnaître, sur le dessin, une face frontale du parallélépipède rectangle par sa forme rectangulaire, ou ses arêtes par l'orthogonalité. - Ajouter des arêtes parallèles aux arêtes données sur le dessin. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées.
θ_R : - Définition et propriétés d'un parallélépipède rectangle. - Règles de représentation.

Tableau 41. Praxéologie institutionnelle française [$T^{PaR,Dc}_{Comp}$, $\tau^{PaR,Dc}_{Comp_R}$, θ_R] en sixième

Pour le type de tâches $T^{PrD,D}_{Comp}$ « Compléter le dessin d'un prisme droit », les manuels donnent suffisamment d'informations pour compléter le prisme droit : celle de bases (polygone) et celle d'arêtes/face latérales, sauf l'exercice 34 à la page 275 du manuel Transmath 5e :

Reproduire deux fois ce dessin et compléter de façon à obtenir deux représentations en perspective cavalière d'un prisme droit à base triangulaire.



(Malaval et al., 2010, p. 275)

Le Tableau 42 présente la praxéologie de ce type de tâches.

$T^{PrD,D}_{Comp}$: Compléter le dessin d'un prisme droit.
$\tau^{PrD,D}_{Comp_R}$: - Déterminer, en se basant sur l'élément de polygone, la base du prisme droit, + s'il y a un (des) polygone(s), le considérer (ou un parmi eux, avec priorité au polygone qui n'est pas parallélogramme) comme base du prisme droit ; + s'il n'y en a pas, choisir certains segments sur le dessin comme côtés d'une base triangulaire et dessiner cette base. - Ajouter les arêtes parallèles à l' (aux) arête(s) frontale(s) données sur le dessin. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées.
θ_R : - Définition et propriétés d'un prisme droit. - Règles de représentation.

Tableau 42. Praxéologie institutionnelle française [$T^{PrD,D}_{Comp}$, $\tau^{PrD,D}_{Comp_R}$, θ_R] en cinquième

Pour le type de tâches $T^{Py,D}_{Comp}$ « Compléter le dessin d'une pyramide », nous trouvons un seul exercice dans le manuel Triangle 4e où on donne un triangle, la représentation de la base doit

satisfaire la demande de l'énoncé (triangulaire ou rectangulaire). Dans le manuel Transmath 4e, ce type de tâches est proposé sur un dessin de représentation en perspective disponible d'un parallélépipède rectangle. Autrement dit, la base est déjà formée par des points coplanaires sur une face du parallélépipède. Nous décrivons la praxéologie institutionnelle de ce type de tâches dans le Tableau 43.

$T^{Py,Dc}_{Comp}$: Compléter le dessin d'une pyramide.
$\tau^{Py,Dc}_{Comp_R}$: - Si c'est un quadrilatère qui est donné, joindre les sommets des segments dans le dessin donné. - Sinon, reconnaître, sur le dessin, la base (ou ses arêtes) de la pyramide. Elle est formée des points coplanaires et ce n'est pas le triangle. Puis, dessiner, si nécessaire, les côtés de la base en appliquant les règles de représentation pour traduire ses propriétés géométriques en propriétés spatiales du dessin. - Ajouter les arêtes latérales manquantes sur le dessin. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées.
θ_R : - Définition et propriétés d'une pyramide. - Règles de représentation.

Tableau 43. Praxéologie institutionnelle française [$T^{Py,Dc}_{Comp}$, $\tau^{Py,Dc}_{Comp_R}$, θ_R] en quatrième

Le type de tâches T^{CyR}_{Comp} « Compléter le dessin d'un cylindre de révolution » apparaît seulement dans le manuel Transmath 5e. Dans toutes les tâches de ce type de tâches, on donne la représentation d'une base (cercle ou ellipse) et le centre de l'autre base. Ainsi, la représentation des génératrices extérieures est ici obligatoire. En l'absence des règles de représentation, il est impératif de se servir des dessins prototypiques de ce solide pour résoudre ce type de tâches (Tableau 44).

$T^{CyR,Dc}_{Comp}$: Compléter le dessin d'un cylindre de révolution.
$\tau^{CyR,Dc}_{Comp_D}$: - Reconnaître, sur le dessin, une base du cylindre représentée par un cercle (ou une ellipse). - Ajouter l'autre base en traçant un cercle (ou une ellipse), et les tangentes les joignant : - Utiliser des pointillés pour la partie cachée du cercle (ou de l'ellipse).
θ_D : Caractéristiques du dessin prototypique d'un cylindre de révolution.
Θ_R : Règles de représentation *(incomplètes).*

Tableau 44. Praxéologie institutionnelle française [$T^{CyR,Dc}_{Comp}$, $\tau^{CyR,Dc}_{Comp_D}$, θ_D, Θ_R] en cinquième

4.3.4 Type de tâches 7

En France, la variable « dessin » du type de tâches $T^{P,objS,D}_{EtP}$ « Etudier la propriété des objets géométriques de l'espace représentés dans un dessin » prend toujours la valeur de « dessin prototypique » (Dp).

Au collège, les « objets géométriques de l'espace » à étudier sont des parties (sommet, face, arête) du parallélépipède rectangle ou du prisme droit, en d'autres termes, c'est la valeur « solide – lui-même » (SLm). Quant à la variable « propriété » (P), l'élève travaille sur l'incidence entre sommets/arêtes/faces, le parallélisme entre deux arêtes, deux faces, l'orthogonalité entre deux arêtes de même face, deux faces, l'égalité des arêtes.

La technique de ce type de tâches à ce niveau fait appel :
- à une « image » d'un objet réel

> En perspective cavalière, les angles droits de l'objet réel ne sont pas tous représentés par des angles droits. Ainsi, pour reconnaître des arêtes perpendiculaires, il est nécessaire d'imaginer l'objet réel.
>
> (Chapiron et al., 2009, p. 192)

- à des animations à visionner. Ces éléments informatiques apportent plusieurs représentations en perspective d'un même objet et contribuent à former une image mentale « dynamique ».

> L'usage d'outils informatiques permet une visualisation de différentes représentations d'un même objet de l'espace.
>
> (Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008, p.18)

Nous modélisons la praxéologie de ce type de tâches en collège dans le Tableau 45 ci-dessous.

$T^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$: Etudier une propriété des points/arêtes/faces d'un parallélépipède rectangle/prisme droit représentés(es) dans un dessin.
$\tau^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux points/arêtes/faces du parallélépipède rectangle/prisme droit donnés(es) dans l'énoncé. - Identifier, à l'aide d'un objet réel ou d'une animation à visionner, les relations spatiales entre les points/arêtes/faces repérés(es) sur le dessin. - Interpréter ces relations en termes de propriétés géométriques.

$\theta_{P,D}$: - Propriétés géométriques d'un parallélépipède rectangle/prisme droit. - Connaissances de dessins prototypiques d'un parallélépipède rectangle/prisme droit. - Représentation des propriétés spatiales du parallélépipède rectangle/prisme droit de l'animation à visionner. - Propriétés spatiales de l'objet imaginaire provenant du dessin.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 45. Praxéologie institutionnelle française [$T^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$, $\tau^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] en collège

En seconde, les propriétés géométriques à étudier sont les positions relatives des droites et des plans :

- deux droites coplanaires, non-coplanaires, sécantes, parallèles,
- deux plans sécants, parallèles,
- plan et droite sécants, parallèles,
- plan contenant une droite.

Ainsi, l'orthogonalité n'est plus abordée.

A ce niveau, les activités et les exercices s'orientent vers la valeur de « solide – organisateur » (SOrg) pour la variable « objet géométrique de l'espace »[42].

$T^{P,SOrg,Dp}{}_{EtP}$: Etudier une position relative entre droites et plans représentés dans un dessin.
$\tau^{P,SOrg,Dp}{}_{EtP}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux droites et aux plans donnés dans l'énoncé. - Identifier, à l'aide d'un objet mathématique, les relations spatiales entre les composants repérés sur le dessin.

[42] Voir l'Annexe 4.

- Interpréter ces relations en termes de positions relatives des droites et des plans donnés. - Démontrer ces propriétés géométriques.
$\theta_{P,D}$: - Propriétés des objets géométriques de l'espace donnés. - Définition et théorèmes du parallélisme, de l'orthogonalité. - Connaissances de dessins prototypiques d'objets géométriques de l'espace. - Propriétés spatiales de l'objet mathématique provenant du dessin.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 46. Praxéologie institutionnelle française [$T^{P,SOrg,D}{}_{EtP}$, $\tau^{P,SOrg,D}{}_{EtP}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] en seconde

4.3.5 Type de tâches 8

Le choix des valeurs de la variable « propriété », d' « objet géométrique de l'espace » [43] et de « dessin » du type de tâches $T^{P,objS,D}{}_{IdO}$ « Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant une propriété géométrique donnée à l'aide d'un dessin » ressemble à celui du type de tâches $T^{P,objS,D}{}_{EtP}$. Nous présentons ci-dessous les deux praxéologies de ce type de tâches correspondant au collège (de 6e à 3e) et au lycée (2nd).

- Au collège :

$T^{P,SLm,Dp}{}_{IdO}$: Identifier des arêtes/faces égales/parallèles d'un parallélépipède rectangle/prisme droit à l'aide du dessin.
$\tau^{P,SLm,Dp}{}_{IdO}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux arêtes/faces à étudier du parallélépipède rectangle/prisme droit. - Chercher, parmi ces composants, ceux qui vérifient, sur le dessin, l'égalité/le parallélisme/l'orthogonalité [$T^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$/ $\tau^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$].
$\theta_{P,D}$: - Propriétés géométriques d'un parallélépipède rectangle/prisme droit. - Connaissances de dessins prototypiques d'un parallélépipède rectangle/prisme droit. - Représentation des propriétés spatiales du parallélépipède rectangle/prisme droit de l'animation à visionner. - Propriétés spatiales de l'objet mathématique provenant du dessin.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 47. Praxéologie institutionnelle française [$T^{P,SLm,Dp}{}_{IdO}$, $\tau^{P,SLm,Dp}{}_{IdO}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] en collège

- Au lycée (2nd) :

$T^{P,SOrg,Dp}{}_{IdO}$: Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant (ou non) la relation d'incidence (ou le parallélisme) à l'aide du dessin.
$\tau^{P,SOrg,Dp}{}_{IdO}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux objets géométriques de l'espace à étudier. - Chercher, parmi les composants à étudier, ceux qui satisfont la relation d'incidence (ou le parallélisme) [$T^{P,SOrg,Dp}{}_{EtP}$ / $\tau^{P,SOrg,Dp}{}_{EtP}$]. - Si l'on ne les trouve pas, il est nécessaire d'élargir la liste des objets géométrique de l'espace à examiner en en créant des nouveaux à partir des objets disponibles.
$\theta_{P,D}$: - Propriétés des objets géométriques de l'espace donnés. - Définition et théorèmes du parallélisme, de l'orthogonalité. - Connaissances de dessins prototypiques d'objets géométriques de l'espace. - Propriétés spatiales de l'objet mathématique provenant du dessin.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 48. Praxéologie institutionnelle française [$T^{P,SOrg,Dp}{}_{IdO}$, $\tau^{P,SOrg,Dp}{}_{IdO}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] en seconde

[43] Voir l'Annexe 4.

En seconde, $T^{P,SOrg,Dp}{}_{IdO}$ peut intervenir dans d'autres types de tâches. Par exemple,
- déterminer l'intersection de deux plans

> L'intersection de deux plans sécants est une droite. Il suffit donc de trouver deux points communs à ces deux plans pour obtenir la droite entière.
>
> (Beltramone et al., 2010, p. 245)
>
> Pour trouver l'intersection de deux plans sécants, il suffit de trouver deux points communs à ces deux plans.
>
> (Barra et al., 2010, p. 175)

- démontrer que deux plans sont parallèles

> Pour démontrer que deux plans sont parallèles avec le théorème 4, il suffit de prouver que deux droites sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
>
> (Barra et al., 2010, p. 173)

- démontrer que deux droites sont parallèles

> Pour démontrer que deux droites de l'espace sont parallèles, une méthode consiste à utiliser une troisième droite parallèle aux précédentes.
>
> (Barra et al., 2010, p. 174)

- démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

> Pour démontrer qu'une droite d est parallèle à un plan P, une méthode consiste à trouver une droite du plan P parallèle à d (théorème 3).
>
> (Barra et al., 2010, p. 174)

4.3.6 Autres types de tâches

L'analyse des praxéologies institutionnelles dans les manuels français révèle certains types de tâches relatives à la représentation en perspective dans l'environnement informatique[44]. En effet, nous trouvons des activités sur le logiciel Géospace qui demandent à l'élève de créer automatiquement un dessin et de conjecturer les propriétés de l'objet géométrique de l'espace. L'étude des praxéologies de ces types de tâches peut conduire à des problèmes sur l'usage, la place et le rôle de l'environnement informatique dans l'enseignement de la représentation en perspective. Néanmoins, nous ne les étudions pas dans notre thèse où nous nous limitons au cas de l'environ papier-crayon.

4.3.7 Commentaires sur les praxéologies institutionnelles françaises

Afin d'avoir une vue globale sur les praxéologies institutionnelles françaises, nous les récapitulons dans le Tableau 49. Ce tableau nous permet de formuler, en les comparant aux praxéologies de référence, les commentaires suivants.

L'absence de l'enseignement de la projection cylindrique en France explique trois constats :
- Les praxéologies liées aux types de tâches de l'étude des transformées d'une projection ($T^{objE,PC}{}_{1_tr}$, $T^{objE}{}_{s_tr}$, $T^{objE_objP}{}_{tr}$) sont absentes.

[44] Voir l'Annexe 5.

- De plus, cette absence empêche l'utilisation, pour la résolution des types de tâches (T^{objE}_{De}, $T^{objE,D}_{AsDO}$, $T^{objE,D}_{Comp}$), des techniques s'appuyant sur la projection ($\tau^{objE}_{De_PC}$, $\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$, $\tau^{objE,D}_{Comp_PC}$).

- Il n'existe pas de lien entre la technologie de règles de représentation (θ_R) et la théorie de la projection cylindrique (Θ_{PC}).

Au niveau des types de tâches, on peut noter que, sauf pour le type de tâches $T^{objE,D}_{AsDO}$ « Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace » abordé à l'école primaire, les autres types de tâches sont abordés à partir de la classe 6e du collège. Les types de tâches concernant la représentation en perspective sont essentiellement abordés au collège et en classe de seconde au lycée.
Par ailleurs, on peut s'apercevoir que la variable « objet géométrique de l'espace » des types de tâches « étudier la représentation en perspective » (T^{objE}_{De} , $T^{objE,D}_{AsDO}$, $T^{objE,D}_{Comp}$) prend toujours pour les solides les valeurs : cube, parallélépipède rectangle, prisme droit, pyramide, cylindre, cône de révolution, sphère ou des objets les concernant, comme des sections. Autrement dit, l'élève ne travaille que sur des dessins toujours liés à un solide.
Pour les types de tâches explorer un dessin ($T^{P,objS,D}_{EtP}$, $T^{P,objS,D}_{IdO}$), les propriétés géométriques sont bien attachées, au collège, au parallélépipède rectangle et au prisme droit. Ces solides favorisent l'illustration de l'incidence, du parallélisme et de l'orthogonalité, sur leurs sommets, leurs arêtes, leurs faces. Au lycée, les propriétés à étudier ne se posent plus sur les parties de solides ; en d'autres termes, on a élargi les objets de l'étude de propriétés. Néanmoins, la liste des propriétés est réduite, on ne s'intéresse qu'aux positions relatives des points, des droites, des plans ; on ne travaille plus avec l'orthogonalité. Une raison possible de ce choix, est que la séparation entre l'étude des propriétés géométriques et les solides mentionnés, en d'autres termes le choix de la valeur de « solide – organisateur » pour la variable « objet géométrique de l'espace », cause des difficultés pour identifier les relations spatiales sur le dessin. En effet, mathématiquement, l'orthogonalité n'est pas généralement conservée dans la représentation en perspective.

Au niveau des techniques, nous trouvons un changement de technique pour le type de tâches $T^{objE,D}_{AsDO}$ « Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace ». A l'école primaire, il est résolu par l'observation ($\tau^{Sol,Dp}_{AsDO_Obs}$) en liaison avec le but de formation d'images mentales au travers des objets physiques.

> Plusieurs activités de dénombrement de ces éléments sur de « vrais » solides (et non sur des représentations planes) sont proposées avant le travail dans le fichier. Elles permettent aux élèves de construire les images mentales de ces solides nécessaires pour pouvoir interpréter leurs représentations planes (photographies ou dessins en perspective cavalière). On comprendra donc que le travail sur les solides ne peut se faire sans la présence de matériel.
>
> (Peltier et al., 2011, p. 164)

Au collège, on considère la technique de règles de représentation, pour les polyèdres, et celle de dessins prototypiques, pour les solides de révolution. Ainsi, il est clair qu'il y a un passage des observations à un entrelacement de règles de représentation et de dessins prototypiques.

Au niveau des technologies, nous constatons la présence unique de la praxéologie locale d'observation (PL_{Obs}) à l'école primaire. Mais au collège, dominent deux praxéologies locales de règles de représentation (PL_R) pour les polyèdres et de dessin prototypiques (PL_D) pour les solides de révolution. Pour la première (PL_R), sa technologie (θ_R) – règles de représentation – est présentée explicitement dans la partie « cours » des manuels. Pour la deuxième (PL_D), nous pouvons considérer les dessins d'illustration du cylindre, du cône de révolution, de la sphère et sa section par un plan dans la partie « cours » comme sa technologie (θ_D). Au niveau théorique, pour les praxéologies [$T^{CyR}{}_{De}$, $\tau^{CyR}{}_{De_D}$, θ_D , Θ_R], [$T^{CoR}{}_{De}$, $\tau^{CoR}{}_{De_D}$, θ_D , Θ_R], [$T^{CyR,Dp}{}_{AsDO}$, $\tau^{CyR,Dp}{}_{AsDO_D}$, θ_D , Θ_R], [$T^{CyR,Dc}{}_{Comp}$, $\tau^{CyR,Dc}{}_{Comp_D}$, θ_D , Θ_R], il n'est pas exact que toutes les caractéristiques du dessin prototypique (θ_D) sont justifiées par les règles de représentation dans les manuels, on l'a vu par exemple pour la représentation des génératrices extérieures du cylindre et du cône de révolution.

Praxéologie de référence		Praxéologie institutionnelle française									
		CP, CE1, CE2, CM1, CM2	6e	5e		4e		3e			2nd
1	$T^{objE,PC}_{1_tr}$										
	$\tau^{objE,PC}_{1_tr}$										
	θ_{PC}										
	Θ_{tr}										
2	$T^{objE}_{s_tr}$										
	$\tau^{objE}_{s_tr}$										
	θ_{PC}										
	Θ_{tr}										
3	$T^{objE_objP}_{tr}$										
	$\tau^{objE_objP}_{tr}$										
	θ_{PC}										
	Θ_{tr}										
4	T^{objE}_{De}		T^{PaR}_{De}	T^{PrD}_{De}	T^{CyR}_{De}	T^{Py}_{De}	T^{CoR}_{De}	T^{Sp}_{De}	T^{secCu}_{De}	T^{secSp}_{De}	
	$\tau^{objE}_{De_PC}$ $\tau^{objE}_{De_R}$ $\tau^{objE}_{De_D}$ $\tau^{objE}_{De_Obs}$		$\tau^{PaR}_{De_R}$	$\tau^{PrD}_{De_R}$	$\tau^{CyR}_{De_D}$	$\tau^{Py}_{De_R}$	$\tau^{CoR}_{De_D}$	$\tau^{Sp}_{De_D}$	$\tau^{secCu}_{De_R}$	$\tau^{secSp}_{De_D}$	
	θ_{PC} θ_R θ_D θ_{Obs}		θ_R	θ_R	θ_D	θ_R	θ_D	θ_D	θ_R	θ_D	
	Θ_{tr} Θ_{PC} Θ_R				Θ_R		Θ_R				
5	$T^{objE,D}_{AsDO}$	$T^{Sol,Dp}_{AsDO}$	$T^{PaR,D}_{AsDO}$	$T^{PrD,D}_{AsDO}$	$T^{CyR,Dp}_{AsDO}$	$T^{Py,D}_{AsDO}$					
	$\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$ $\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$		$\tau^{PaR,D}_{AsDO_R}$	$\tau^{PrD,D}_{AsDO_R}$		$\tau^{Py,D}_{AsDO_R}$					

	$\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$ $\tau^{objE,D}_{AsDO_Obs}$	$\tau^{Sol,Dp}_{AsDO_Obs}$			$\tau^{CyR,Dp}_{AsDO_D}$			
	θ_{PC} θ_{R} θ_{D} θ_{Obs}	θ_{Obs}	θ_{R}	θ_{R}	θ_{D}	θ_{R}		
	Θ_{tr} Θ_{PC} Θ_{R}							
6	T^{objE}_{Comp}		T^{PaR}_{Comp}	T^{PrD}_{Comp}	T^{CyR}_{Comp}	T^{Py}_{Comp}		T^{PaR}_{Comp}
	$\tau^{objE}_{Comp_PC}$ $\tau^{objE}_{Comp_R}$ $\tau^{objE}_{Comp_D}$ $\tau^{objE}_{Comp_Obs}$		$\tau^{PaR}_{Comp_R}$	$\tau^{PrD}_{Comp_R}$	$\tau^{CyR}_{Comp_D}$	$\tau^{Py}_{Comp_R}$		$\tau^{PaR}_{Comp_R}$
	θ_{PC} θ_{R} θ_{D} θ_{Obs}		θ_{R}	θ_{R}	θ_{D}	θ_{R}		θ_{R}
	Θ_{tr} Θ_{PC} Θ_{R}				Θ_{R}			
7	$T^{P,objS,D}_{EtP}$		$T^{P,SLm,Dp}_{EtP}$	$T^{P,SLm,Dp}_{EtP}$			$T^{P,SLm,Dp}_{EtP}$	$T^{P,SOrg,Dp}_{EtP}$
	$\tau^{P,objS,D}_{EtP}$		$\tau^{P,SLm,Dp}_{EtP}$	$\tau^{P,SLm,Dp}_{EtP}$			$\tau^{P,SLm,Dp}_{EtP}$	$\tau^{P,SOrg,Dp}_{EtP}$
	$\theta_{P,D}$		$\theta_{P,D}$	$\theta_{P,D}$			$\theta_{P,D}$	$\theta_{P,D}$
	Θ_{R}		Θ_{R}	Θ_{R}			Θ_{R}	Θ_{R}
8	$T^{P,objS,D}_{IdO}$		$T^{P,SLm,Dp}_{IdO}$	$T^{P,SLm,Dp}_{IdO}$				$T^{P,Sorg,Dp}_{IdO}$
	$\tau^{P,objS,D}_{IdO}$		$\tau^{P,SLm,Dp}_{IdO}$	$\tau^{P,SLm,Dp}_{IdO}$				$\tau^{P,SOrg,Dp}_{IdO}$
	$\theta_{P,D}$		$\theta_{P,D}$	$\theta_{P,D}$				$\theta_{P,D}$
	Θ_{R}		Θ_{R}	Θ_{R}				Θ_{R}

Tableau 49. Praxéologies institutionnelles françaises

4.4 Praxéologie institutionnelle : le cas du Viêt-Nam

Au Viêt-Nam, dans le programme actuel, il y a seulement une série de manuels pour les classes de 1 à 9 et deux séries de manuels (standard et avancé) pour les classes 10, 11, 12. L'analyse praxéologique suivante se base sur l'ensemble de ces manuels.

4.4.1 Type de tâches 1

Le type de tâches $T^{objE,PC}{}_{1_tr}$ « Déterminer la transformée d'un objet géométrique de l'espace par une transformation donnée » n'apparaît que dans le manuel de Géométrie 11, série avancée, à la leçon 5 du chapitre 2 où la projection est enseignée. Les variables du type de tâches prennent des valeurs suivantes :

- pour la variable « projection cylindrique » : plan (P) et direction d de la projection ;
- pour la variable « objet géométrique de l'espace » : point, droite. Regardons les trois questions suivantes dans la partie de « cours » :

> **?1** Pour un point M qui appartient au plan de projection (P), quelle est son image de projection parallèle ?
> **?2** Soit la droite a parallèle à la direction l, quelle est l'image de projection parallèle de a (ou une partie d'elle) ?
> **?3** Dans le cas où la droite a appartient au plan de projection (P), quelle est l'image de projection parallèle de a ?
>
> (Doan et al., 2007a, pp. 69, 70)

Dans les questions citées, on s'intéresse aux positions particulières entre les objets de l'espace (point, droite) et aux paramètres de projection (plan et direction de projection). C'est l'occasion de faire mobiliser à l'élève la définition de la projection parallèle et sa propriété de conservation de l'alignement. Nous présentons ci-dessous deux praxéologies institutionnelles correspondant à ce type de tâches, dans le Tableau 50 (cas du point) et le Tableau 51 (cas de la droite).

$T^{pt,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer le transformé d'un point par une projection parallèle (d, P).
$\tau^{pt,PC1}{}_{1_tr}$: - Construire une droite d' passant par le point donné et parallèle à la direction de projection d. - Déterminer le point d'intersection de la droite d' et du plan de projection (P). C'est le transformé du point donné par la projection.
θ_{PC} : Définition de la projection parallèle.

Tableau 50. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{pt,PC1}{}_{1_tr}$, $\tau^{pt,PC1}{}_{1_tr}$, θ_{PC}] à la classe 11 (chapitre 2, leçon 5)

$T^{d,PC1}{}_{1_tr}$: Déterminer la transformée d'une droite par une projection parallèle (d, P).
$\tau^{d,PC1}{}_{1_tr}$: - Examiner la position relative de la droite par rapport à la direction de projection d. - Si la droite est parallèle à d, la transformée est réduite au point d'intersection de la droite et du plan de projection (P). - Sinon, déterminer les transformés de deux points sur la droite par la projection [$T^{pt,PC1}{}_{1_tr}$/$\tau^{pt,PC1}{}_{1_tr}$]. La transformée de d est la droite passant par ces transformés. .
θ_{PC} : - Propriété de l'alignement des points sur une droite. - Définition et propriété de conservation de l'alignement de la projection parallèle.

Tableau 51. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{d,PC1}{}_{1_tr}$, $\tau^{d,PC1}{}_{1_tr}$, θ_{PC}] à la classe 11 (chapitre 2, leçon 5)

Dans le programme, bien que la résolution des types de tâches $T^{\Delta,PC1}{}_{1_tr}$ « Déterminer le transformé d'un triangle par une projection parallèle (d, P) » et $T^{cer,PC1}{}_{1_tr}$ « Déterminer le transformé d'un cercle par une projection parallèle (d, P) » soit exigée, nous ne les trouvons ni dans les manuels ni dans les livres du professeur. La construction des images par projection d'un triangle, d'un cercle demandent une précision détaillée de la position des objets géométriques, du plan et de la direction de projection dans l'espace. Ainsi, il semble que les manuels ne s'intéressent pas à la complexité de construction et ne se concentrent que sur la nature des transformés.

4.4.2 Type de tâches 2

Le type de tâches $T^{objE}{}_{s_tr}$ « Déterminer les transformées possibles d'un objet géométrique de l'espace » n'est exigé que dans le manuel de Géométrie 11, série avancée, quand l'élève a appris la projection parallèle. La variable « objet géométrique de l'espace » prend des valeurs suivantes : parallélogramme, trapèze, losange, rectangle, carré. On ne considère donc que des polygones particuliers, pas des solides. Nous citons les questions rencontrées dans le manuel autour de ce type de tâches.

> **?5** Quel est le dessin de représentation d'un parallélogramme ?
> **?6** Quel est le dessin de représentation d'un trapèze ?
> **?7** Quels sont les dessins de représentation d'un losange, d'un rectangle, d'un carré ?
>
> (Doan et al., 2007a, p. 72)

Dans la citation ci-dessus, bien que « le dessin de représentation » soit demandé, l'objectif des questions n'est pas d'obtenir un dessin, mais la nature les transformés de l'objet géométrique de l'espace. Ce que confirme le livre du professeur où aucun dessin de représentation n'est donné.

> **?5** Le dessin de représentation d'un parallélogramme est généralement un parallélogramme (en particulier, un segment).
> **?6** Le dessin de représentation d'un trapèze est généralement un trapèze (en particulier, un segment).
> **?7** Le dessin de représentation d'un losange, d'un rectangle, d'un carré est généralement un parallélogramme (en particulier, un segment).
>
> (Doan et al., 2007b, p. 65)

En plus, ces réponses manifestent une approche rigoureuse sur l'aspect mathématique : on parle même des cas dégénérés du transformé. Elles seront la base pour reconnaître des dessins « dégénérés » (type de tâches 5), par exemple, un carré est mathématiquement le dessin de la représentation d'un cube.

Les constatations ci-dessus nous permettent de modéliser les éléments de technique et de technologie de ce type de tâches comme suit (Tableau 52):

$T^{polygP}{}_{s_tr}$: Déterminer les images de projection parallèle possibles d'un polygone particulier.
$\tau^{polygP}{}_{s_tr}$: - Examiner deux positions relatives entre la direction de projection d et le plan (P_1) contenant le polygone.

- Si d est parallèle au plan (P_1), le transformé du polygone est un segment. - Sinon, le transformé du polygone est un autre polygone. Traduire, en basant sur les propriétés de conservation et de non-conservation de la projection, les propriétés géométriques du polygone particulier donné en celles du transformé.
θ_{PC} : - Définition et propriétés géométriques du polygone particulier donné. - Définition et propriétés de conservation, de non-conservation de la projection parallèle.

Tableau 52. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{polygP}{}_{s_tr}$, $\tau^{polygP}{}_{s_tr}$, θ_{PC}] à la classe 11 (chapitre 2, leçon 5)

4.4.3 Type de tâches 3

Comme pour les types de tâches $T^{objE,PC}{}_{1_tr}$, $T^{objE}{}_{s_tr}$, le type de tâches $T^{objE_objP}{}_{tr}$ « Etudier l'existence d'une transformation d'un objet géométrique de l'espace donné en un objet géométrique du plan donné » est associé à l'enseignement de la projection parallèle. Pour ce type de tâches, nous ne constatons que deux activités. Toutes les deux sont présentes dans le manuel de Géométrie 11, série standard et l' « objet géométrique de l'espace » est un objet de deux dimensions, plus exactement, on se limite à des polygones particuliers.

$\triangle_1$ Est-il possible que l'image de projection parallèle d'un carré soit un parallélogramme ?

$\triangle_2$ Est-il possible que la figure 2.67 soit image de projection parallèle d'un hexagone régulier ? Pourquoi ?

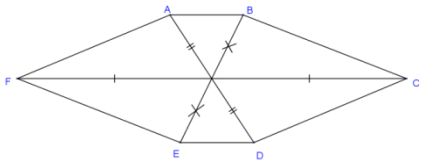


Figure 2.67

(Tran et al, 2007a, p. 73)

La solution attendue de ces activités dans le livre du professeur montre l'exploitation des propriétés de la projection parallèle.

> Activité 1. L'image de projection parallèle d'un carré est un parallélogramme.
> Activité 2. La figure 2.67 ne présente pas un hexagone régulier parce que AD n'est pas parallèle à BC.
>
> (*Ibid.*, p. 76)

Dans ces deux activités, il est impératif de mobiliser la conservation du parallélisme. En particulier, la deuxième l'utilise pour rejeter la figure donnée. Notons que la première montre un exemple de la non-conservation de l'orthogonalité (des côtés d'un carré) de la projection parallèle.

Nous modélisons la praxéologie institutionnelle correspondante comme suit (Tableau 53).

$T^{polygP_polyg}{}_{tr}$: Etudier l'existence d'une projection parallèle d'un polygone particulier en un polygone.
$\tau^{polygP_polyg}{}_{tr}$: - Identifier les propriétés géométriques (le parallélisme, l'égalité des côtés, l'angle droit) du polygone particulier donné et de son image de projection proposée dans l'énoncé. - Etudier la conservation de l'alignement, du parallélisme et les non-conservations des éléments de grandeur (l'égalité des côtés, des angles, l'angle droit) entre eux. - Conclure par l'existence ou non-existence d'une projection.

θ_{PC} : - Définition et propriétés géométriques des polygones donnés. - Définition et propriétés de conservation, de non-conservation de la projection parallèle.

Tableau 53. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{polygP_polyg}{}_{tr}$, $\tau^{polygP_polyg}{}_{tr}$, θ_{PC}] à la classe 11 (chapitre 2, leçon 5)

4.4.4 Type de tâches 4

Le type de tâches $T^{objE}{}_{De}$ « Dessiner un objet géométrique de l'espace » est toujours attaché à l'enseignement de la Géométrie de l'espace au collège et au lycée. Pourtant, pour chaque classe, on choisit des valeurs différentes pour la variable « objet géométrique de l'espace » et on propose des techniques différentes pour résoudre ce type de tâches.

Le programme du collège n'exige pas la représentation en perspective des solides, nous trouvons, dans la partie de « pratique mathématique » du livre du professeur de la classe 8, des renseignements pour dessiner certains polyèdres. Ainsi, bien que ce type de tâches ne soit pas explicité dans le manuel, il est toujours présent dans la pratique d'enseignement, par exemple, *comment l'élève peut-il recopier sur son cahier des dessins représentés au tableau par le professeur ?* Ces renseignements nous permettent d'affirmer ou non l'approche «dessin prototypique » pour ce type de tâches en classe 8. Intéressons-nous maintenant aux praxéologies de ce type de tâches modélisées à partir de ces renseignements.
D'abord, examinons les renseignements trouvés dans la figure d'illustration pour le cas du parallélépipède rectangle
- sur papier quadrillé

Dessiner un parallélépipède rectangle selon les dimensions données sur le papier quadrillé (f. 103).

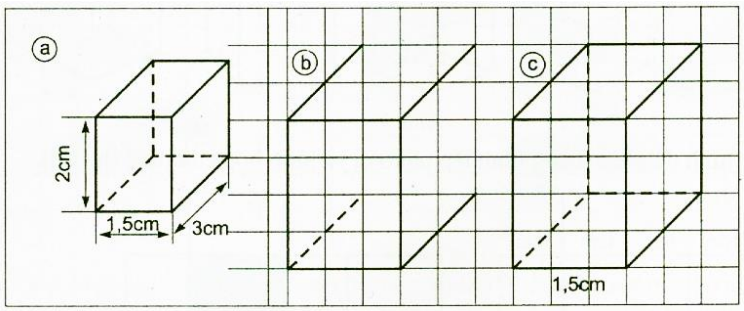


Figure 103

(Phan et al., 2004b, p. 140)

- sur papier non-quadrillé

Dessiner avec les dimensions données et l'angle de vue donnée (f. 101)

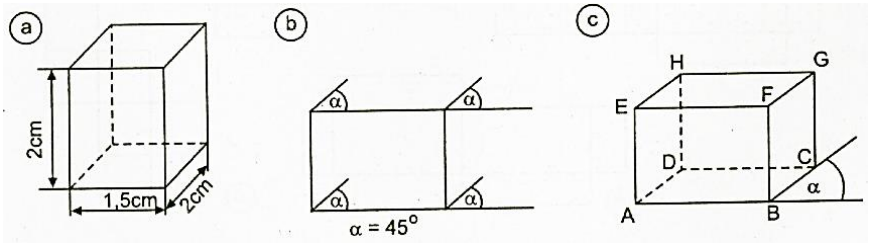
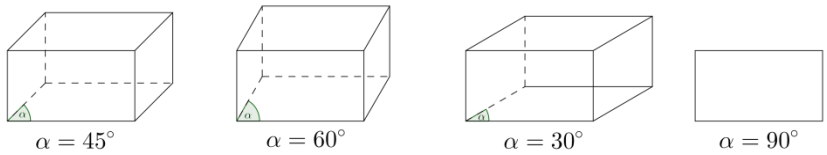


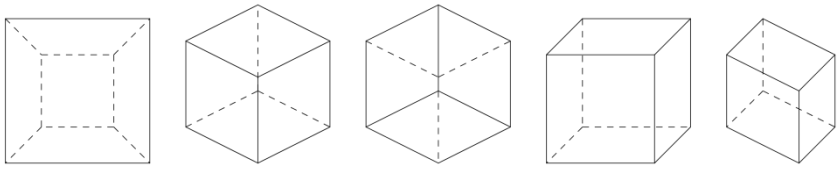
Figure 101

(*Ibid.*, p. 139)

Le livre du professeur insiste sur le choix de l' « angle de vue » α, pour avoir un « bon » dessin.

> Il est nécessaire de choisir « angle de vue » α tel que le dessin suggère mieux l'objet représenté (dans la figure 98, on prend des angles de vue 45°, 60°, 30° et 90°).
>
> 
>
>
> Figure 98
>
> (Phan et al., 2004b, p. 139)

Dans cette citation, nous pensons que le cas α=90° n'est pas accepté en raison de l'absence des autres faces du parallélépipède. En effet, nous verrons, dans la citation suivante, la demande d'évitement du cas où les arêtes sont confondues (deuxième et troisième dessins).

> Ce sont des angles de vue d'un cube. Parmi ces dessins, certains sont inacceptables ! (figure 99).
>
> 
>
> Figure 99
>
> (*Ibid.*, p. 139)

En suivant ces renseignements détaillés, l'élève obtiendra le dessin de représentation « le plus clair possible » du parallélépipède. Nous modélisons la praxéologie institutionnelle du type de tâches T^{PaR}_{De} « Dessiner un parallélépipède rectangle » comme suit (Tableau 54) :

T^{PaR}_{De} : Dessiner un parallélépipède rectangle.
$\tau^{PaR}_{De_D}$: - Tracer un rectangle selon les dimensions données. - Si on dispose d'un papier quadrillé, tracer des segments, issus des sommets du rectangle, dont l'extrémité finale est un point d'intersection du quadrillage et est décalée de même manière. Si on travaille sur un papier non-quadrillé, tracer des segments égaux, issus des sommets du rectangle, qui fait un même angle par rapport l'horizontal. - Relier les extrémités des segments. - Utiliser des pointillés pour représenter les arêtes cachées.
θ_D : Caractéristique du dessin prototypique d'un parallélépipède rectangle.
Θ_R : Règles de représentation[45].

Tableau 54. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [T^{PaR}_{De} , $\tau^{PaR}_{De_D}$, θ_D , Θ_R] à la classe 8

De la même manière, nous trouvons dans le livre du professeur des descriptions détaillées pour dessiner un prisme droit en trois étapes :

> Présenter la façon de dessiner un prisme droit à base triangulaire (voir l'annexe) selon les étapes suivantes :
> a) Présenter aux élèves le dessin disponible : ABC.DEF (figure 95 du manuel).

[45] Voir les règles de représentation à la classe 8 dans la section 3.2.2.

b) Dessiner la base triangulaire (montrer la différence entre le dessin d'un triangle en géométrie plane et en géométrie de l'espace).
c) Dessiner les faces latérales en traçant des lignes parallèles issues des sommets du polygone de base.
d) Dessiner la face de dessus et utiliser des pointillés pour clarifier le dessin.
[…] Annexe
Les étapes pour dessiner un prisme droit à base triangulaire (figure 105)

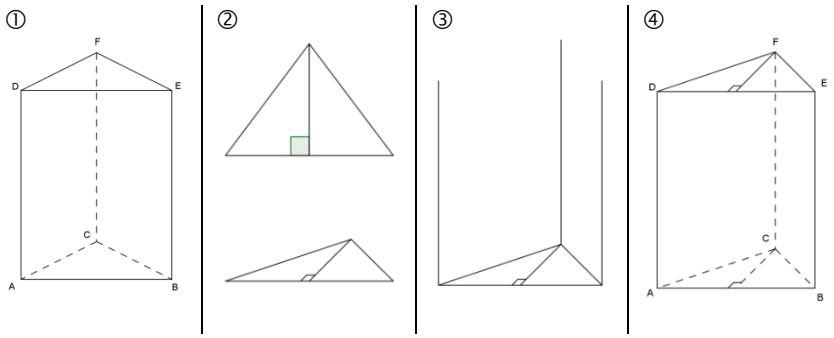


Figure 105

(Phan et al., 2004b, pp. 120, 141)

Dans la citation, nous nous intéressons à l'étape numérotée de (2) de la représentation de la base triangulaire du prisme droit. Par rapport au dessin de représentation du triangle et de sa hauteur dans le plan, le dessin du triangle dans l'espace est plus « plat » et sa hauteur ne fait plus un angle droit avec le côté horizontal. Cette description n'est pas explicitée, elle est seulement donnée par le dessin.
Le Tableau 55 présente la praxéologie institutionnelle du type de tâches T^{PrD}_{De} « Dessiner un prisme droit ».

T^{PrD}_{De} : Dessiner un prisme droit.
$\tau^{PrD}_{De_D}$: - Tracer un polygone de même nombre de côtés que la base du prisme droit. - Tracer, à partir des sommets du polygone, des segments parallèles, de même longueur et perpendiculaires à une arête de base. - Relier les extrémités des segments. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées.
θ_D : Caractéristiques du dessin prototypique d'un prisme droit.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 55. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [T^{PrD}_{De}, $\tau^{PrD}_{De_D}$, θ_D, Θ_R] à la classe 8

Pour une pyramide régulière à base carrée, ses étapes de représentation sont présentées dans le manuel, sous forme des figures,

Exécuter les étapes pour dessiner une pyramide régulière selon les flèches de la figure 128.

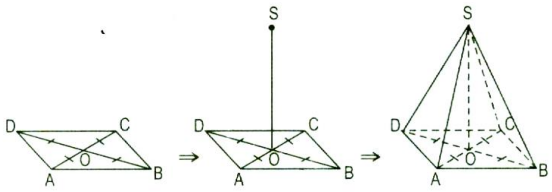


Figure 128

(Phan et al., 2004a, p. 123)

et dans le livre du professeur, sous forme des renseignements détaillés.

> Présenter la façon de dessiner une pyramide régulière dont la base est un quadrilatère (voir l'Annexe).
> a) Présenter un dessin disponible.
> b) Dessiner la base carrée (montrer à l'élève la différence entre le dessin d'un carré de la géométrie plane et de la géométrie de l'espace).
> c) Dessiner le point d'intersection de deux diagonales de la base et la hauteur.
> d) Dessiner le sommet S et relier le sommet aux sommets du carré de base.
> […] Annexe
> Dessiner la pyramide régulière dont la base est un quadrilatère (a=1,4cm ; h=2,0cm) (f. 110).

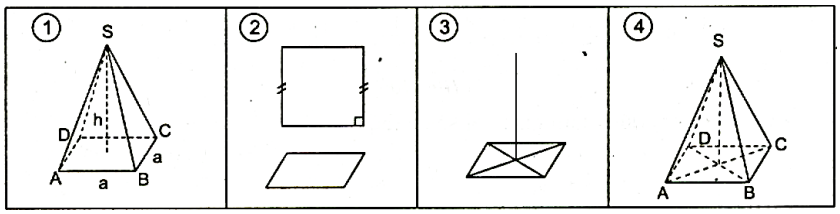


Figure 110

(Phan et al., 2004b, pp. 125, 142)

En nous basant sur les deux citations ci-dessus, nous déduisons la praxéologie institutionnelle suivante (Tableau 56) :

T^{PyR}_{De} : Dessiner une pyramide régulière à base carrée.
τ^{PyR}_{De} : - Tracer un parallélogramme. - Tracer le point d'intersection de deux diagonales du parallélogramme. - Tracer, issu du point d'intersection, un segment perpendiculaire à deux arêtes parallèles de base. - Relier l'extrémité du haut du segment et les sommets du parallélogramme. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées.
θ_D : Caractéristiques du dessin prototypique d'une pyramide.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 56. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [T^{PyR}_{De}, τ^{PyR}_{De}, θ_D, Θ_R] à la classe 8

En classe 9, où on enseigne des solides de révolution, la demande de dessiner ces solides ne figure ni dans le manuel ni même dans le livre du professeur. Le type de tâches T^{objE}_{De} a donc totalement disparu dans cette classe.

Par contre, en classes 11 et 12, le type de tâches T^{objE}_{De} est régulièrement présent lors de l'enseignement de la Géométrie de l'espace.

> Pour la Géométrie de l'espace, il est nécessaire de considérer régulièrement la représentation en perspective dans l'enseignement des théorèmes, des exercices.
>
> (Tran et al., 2007b, p. 76)

Dès la première leçon, le type de tâches T^{objE}_{De} est proposé avec les « objets géométriques de l'espace » : pyramide et prisme. Au début de l'enseignement de la Géométrie de l'espace, on a

fourni des règles de représentation[46]. Cela nous permet d'exposer la praxéologie de T^{objE}_{De} concernant ces polyèdres comme suit (Tableau 57) :

$T^{Polyè}_{De}$: Dessiner un polyèdre.
$\tau^{Polyè}_{De_R}$: - Identifier les propriétés géométriques du polyèdre donné. - Les traduire, à l'aide des règles de représentation, en propriétés spatiales du dessin. - Représenter ces propriétés spatiales. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées.
θ_R : - Définition et propriétés géométriques du polyèdre donné. - Règles de représentation.
Θ_{PC} (quand la projection parallèle est enseignée à la leçon 5 du chapitre 2) : Définition et propriétés de la projection parallèle.

Tableau 57. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{Polyè}_{De}$, $\tau^{Polyè}_{De_R}$, θ_R, Θ_{PC}] à la classe 11 (chapitre 2, leçon 1)

Quand la projection parallèle est enseignée, ces règles de représentation sont expliquées comme la conséquence de la projection. En d'autres termes, la technologie de règles de représentation θ_R est justifiée par la théorie de la projection parallèle Θ_{PC}.

> Dans la leçon §1 de ce chapitre, nous avons proposé certaines règle de représentation une figure spatiale sur un plan. Ces règles-là sont basées sur la définition suivante
> Définition. Le dessin de représentation d'une figure $\mathscr{H}$ dans l'espace est l'image de projection parallèle de la figure $\mathscr{H}$ sur un plan à une similitude près.
> Ainsi, afin d'avoir un vrai dessin de représentation, on doit appliquer les propriétés citées de la projection parallèle.
>
> (Doan et al., 2007a, p. 71)

A l'aide de la projection parallèle, à partir de la leçon 5, on obtient une base théorique pour représenter en perspective. Autrement dit, le type de tâches T^{objP}_{De} « Dessiner un objet géométrique de l'espace » remplace, désormais, la technique de règles de représentation par celle de projection.

> Dans cette leçon §5, il est nécessaire d'indiquer à l'élève deux applications de la projection parallèle : représentation en perspective d'un objet géométrique de l'espace et résolution d'un problème mathématique.
>
> (Doan et al., 2007b, p. 63)

Lors de l'utilisation d'une technique de projection, le livre du professeur Géométrie 11 exige de choisir des paramètres de la projection de manière convenable pour éviter les dessins « dégénérés ».

> Il est indispensable de montrer aux élèves qu'il est possible qu'une figure spatiale a des divers dessins de représentation (parce qu'on peut projeter sur un plan selon diverses directions ou projeter sur divers plans). Toutefois, pour une figure $\mathscr{H}$, il est nécessaire de choisir un « bon » dessin de représentation de $\mathscr{H}$ en prenant une direction de projection convenable (par exemple, **la direction de projection n'est**

[46] Voir la section 3.2.2.

pas parallèle à une arête ou une face de la figure[47] $\mathscr{H}$). Par exemple, dans la représentation d'un parallélépipède ou d'un tétraèdre, il ne faut pas de choisir la direction de projection parallèle à une arête ou une diagonale, ou parallèle à une face ou une face diagonale.

(Doan et al., 2007b, p. 63)

Les « objets géométriques de l'espace » de ce type de tâches se composent :
- d'objets plans (Tableau 58),

Représenter des objets géométriques plans simples, par exemple : un triangle, un parallélogramme, un cercle et certains éléments y concernant, par exemple : la droite des milieux d'un triangle, la hauteur d'un triangle isocèle issue d'un sommet, deux diamètres perpendiculaires d'un cercle, un triangle équilatéral inscrit dans un cercle.

(Tran et al., 2007b, p. 75)

T^{objP}_{De} : Dessiner un objet plan.
$\tau^{objP}_{De_PC}$: - Choisir une projection parallèle dont la direction n'est pas parallèle au plan contenant l'objet plan. - Etudier, en utilisant des propriétés de conservation, de non-conservation de la projection, les propriétés géométriques des images de projection des composants de l'objet plan. - Représenter les images selon les propriétés au-dessus.
θ_{PC} : - Définition et propriétés de l'objet plan donné. - Définition et propriétés de la projection parallèle.

Tableau 58. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [T^{objP}_{De}, $\tau^{objP}_{De_PC}$, θ_{PC}] à la classe 11 (chapitre 2, leçon 5)

- de polyèdres (Tableau 59),

Représenter de manière vraie et bonne des objets géométriques de l'espace simple, par exemple : un cube, un tétraèdre, une pyramide, un prisme, un parallélépipède.

(Tran et al., 2007b, p. 75)

$T^{Polyè}_{De}$: Dessiner un polyèdre.
$\tau^{Polyè}_{De_PC}$: - Choisir une projection parallèle dont la direction n'est parallèle ni aux arêtes ni aux faces du polyèdre. - Dessiner chaque faces du polyèdre selon cette projection [T^{objP}_{De} / $\tau^{objP}_{De_PC}$]. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées.
θ_{PC} : - Définition et propriétés du polyèdre donné. - Définition et propriétés de la projection parallèle. - Codage de la troisième dimension.

Tableau 59. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{Polyè}_{De}$, $\tau^{Polyè}_{De_PC}$, θ_{PC}] à la classe 11 (chapitre 2, leçon 5)

- solides de révolution (à la classe 12): sphère (Tableau 60), cylindre de révolution (Tableau 61) et cône de révolution (Tableau 62).

[47] C'est nous qui mettons en gras.

Pour la sphère, le livre du professeur présente assez bien sa représentation en perspective. D'abord, c'est l'usage de la projection orthogonale,

> Pour la représentation d'une sphère, on choisit la projection orthogonale et le dessin de représentation de la sphère est un cercle. Si l'on prend la projection parallèle, le dessin de représentation est généralement une ellipse.
>
> (Tran et al., 2008, p. 51)

Puis l'usage de la représentation un (des) parallèle(s) pour créer l'impression de la troisième dimension.

> Dans le dessin de représentation d'une sphère (un cercle), on ajoute régulièrement certains méridiens et parallèles afin de créer l'impression d'une forme « sphérique ».
>
> (Tran et al., 2008b, p. 51)

T^{Sp}_{De} : Dessiner une sphère.
$\tau^{Sp}_{De_PC}$: - Choisir une projection orthogonale et déterminer l'image de projection de la sphère : un cercle. - Dessiner un cercle pour représenter la sphère. - Ajouter des ellipses pour représenter des parallèles de la sphère. - Utiliser des pointillés pour les parties cachées des parallèles.
θ_{PC} : - Définition et propriétés d'une sphère. - Définition et propriétés de la projection orthogonale. - Codage de la troisième dimension.

Tableau 60. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [T^{Sp}_{De}, $\tau^{Sp}_{De_PC}$, θ_{PC}] à la classe 12

Pour le cylindre et le cône de révolution, leur représentation en perspective se base sur les savoirs de la classe 11. Concrètement, c'est le choix de la projection parallèle qui assure un dessin non-dégénéré et la propriété de non-conservation du cercle. Pourtant, nous ne trouvons pas d'explications sur la représentation des génératrices. Il est possible qu'elles soient complétées par des dessins d'illustration de ces deux solides dans les manuels.

T^{CyR}_{De} : Dessiner un cylindre de révolution.
$\tau^{CyR}_{De_PC}$: - Choisir une projection parallèle dont la direction n'est parallèle ni aux bases ni aux génératrices du cylindre. - Déterminer l'image de projection de deux bases du cylindre et les dessiner. Ce sont des ellipses. - Déterminer l'image de projection de deux génératrices extérieures et les dessiner. Ce sont deux tangentes « extérieures » des ellipses.
θ_{PC} : - Définition et propriétés d'un cylindre de révolution. - Définition et propriétés de la projection parallèle. - Codage de la troisième dimension.

Tableau 61. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [T^{CyR}_{De}, $\tau^{CyR}_{De_PC}$, θ_{PC}] à la classe 12

T^{CoR}_{De} : Dessiner un cône de révolution.
$\tau^{CoR}_{De_PC}$: - Choisir une projection parallèle dont la direction n'est parallèle ni aux bases ni aux génératrices du cylindre. - Déterminer l'image de projection de la base du cône et la dessiner. C'est une ellipse. - Déterminer l'image de projection de deux génératrices extérieures et les dessiner. Ce sont deux tangentes « extérieures » de l'ellipse.
θ_{PC} : - Définition et propriétés d'un cône de révolution. - Définition et propriétés de la projection parallèle. - Codage de la troisième dimension.

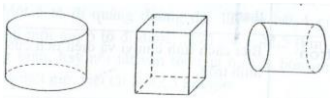
Tableau 62. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [T^{CoR}_{De} , $\tau^{CoR}_{De_PC}$, θ_{PC}] à la classe 12

4.4.5 Type de tâches 5

Le type de tâches $T^{objE,D}_{AsDO}$ « Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace donné » apparaît assez tôt, dès la classe 5, avec les « objets géométriques de l'espace » : cube, parallélépipède rectangle, cylindre de révolution, sphère.

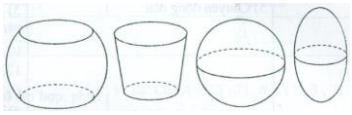
- Reconnaître le parallélépipède rectangle et le cube, et leurs caractéristiques.
- Reconnaître le cylindre.

Exemple. Parmi les dessins suivants, lesquels sont les cylindres ?



- Reconnaître la sphère.

Exemple. Parmi les dessins suivants, lesquels sont les sphères ?



(Programme de l'éducation générale de Mathématiques, pp.86-87)

Dans cette classe, la considération d'un dessin se base sur l'observation. Les dessins proposés sont toujours prototypiques.

$T^{sol,Dp}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à un solide donné.
$\tau^{sol,Dp}_{AsDO_Obs}$: - Identifier la nature d'un solide réel à partir du dessin donné. - Chercher un angle de vue de sorte qu'on puisse voir le solide comme dans le dessin donné, où les pointillés représentent des parties cachées. - Identifier l'objet géométrique à partir du solide réel.
θ_{Obs} : - Description du solide. - Le dessin est une image d'observation d'un solide réel. - Codages de la troisième dimension. - Répertoire des formes et vocabulaires usuels (cube, cône de révolution, cylindre de révolution,…).

Tableau 63. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{sol,Dp}_{AsDO}$, $\tau^{sol,Dp}_{AsDO_Obs}$, θ_{Obs}] à la classe 5

En classe 11, la projection parallèle est enseignée dans la leçon 5, et nous constatons plusieurs activités du type de tâches $T^{objE,D}_{AsDO}$ dans le manuel. Les tableaux suivants

présentent le choix des valeurs de la variable « dessin » du type de tâche $T^{objE,D}_{AsDO}$ dans les manuels Géométrie 11 standard et avancé.

Manuel / Dessin	Géométrie 11 standard	Géométrie 11 avancé
prototypique	cube triangles particuliers parallélogrammes particuliers	tétraèdre régulier
non-prototypique	cube	tétraèdre

Tableau 64. Valeurs de la variable « dessin » du type de tâches $T^{objE,D}_{AsDO}$ dans les manuels de Géométrie 11

En nous basant sur la praxéologie de référence du type de tâches $T^{polygP_polyg}_{tr}$ « Etudier l'existence d'une transformation d'un objet géométrique de l'espace donné en un objet géométrique du plan donné », les praxéologies institutionnelles de $T^{objE,D}_{AsDO}$ dans la leçon 5 de la classe 11 peuvent être exprimées comme suit (Tableau 65 et Tableau 66):

$T^{Polyè,D}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à un polyèdre donné.
$\tau^{Polyè,D}_{AsDO_PC}$: - Etudier l'existence d'une projection parallèle des faces du polyèdre en polygones de composant du dessin donné. [$T^{polygP_polyg}_{tr}$ / $\tau^{polygP_polyg}_{tr}$] - Examiner l'utilisation des codages de la troisième dimension sur le dessin donné.
θ_{PC} : - Définition et propriétés du polyèdre donné. - Définition et propriétés de la projection parallèle. - Codages de la troisième dimension.

Tableau 65. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{Polyè,D}_{AsDO}$, $\tau^{Polyè,D}_{AsDO_PC}$, θ_{PC}] à la classe 11 (chapitre 2, leçon 5)

$T^{polygP,D}_{AsDO}$: Associer un dessin donné à un polygone donné.
$\tau^{polyg,D}_{AsDO_PC}$: Etudier l'existence d'une projection parallèle du polygone donné en polygone identifié par le dessin donné. [$T^{polygP_polyg}_{tr}$ / $\tau^{polygP_polyg}_{tr}$]
θ_{PC} : - Définition et propriétés du polygone donné. - Définition et propriétés de la projection parallèle.

Tableau 66. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{PolygP,D}_{AsDO}$, $\tau^{PolygP,D}_{AsDO_PC}$, θ_{PC}] à la classe 11 (chapitre 2, leçon 5)

4.4.6 Type de tâches 6

On ne trouve le type de tâches $T^{objE,D}_{Comp}$ « Compléter le dessin d'un objet géométrique de l'espace » que dans le manuel de Mathématiques 8. L' « objet géométrique de l'espace » à compléter est :

- un parallélépipède rectangle (Tableau 67)

$T^{PaR,Dc}_{Comp}$: Compléter le dessin d'un parallélépipède rectangle.
$\tau^{PaR,Dc}_{Comp_R}$: - Déterminer, sur le dessin, les arêtes du parallélépipède selon trois directions. - Ajouter de nouvelles arêtes parallèles aux arêtes données sur le dessin. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées
θ_R : - Définition et propriétés d'un parallélépipède rectangle. - Règles de représentation d'un prisme droit (le parallélépipède rectangle est un cas particulier).

- Codage de la troisième dimension.

Tableau 67. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{PaR,Dc}_{Comp}$, $\tau^{PaR,Dc}_{Comp_R}$, θ_R] à la classe 8

- un prisme droit à base triangulaire (Tableau 68)

$T^{PrD,Dc}_{Comp}$: Compléter le dessin d'un prisme droit à base triangulaire.
$\tau^{PrD,Dc}_{Comp_R}$: - Déterminer, sur le dessin, la base triangulaire du prisme. - Ajouter de nouvelles arêtes parallèles aux arêtes données sur le dessin. - Utiliser des pointillés pour les arêtes cachées
θ_R : - Définition et propriétés d'un prisme droit. - Règles de représentation d'un prisme droit. - Codage de la troisième dimension.

Tableau 68. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{PrD,Dc}_{Comp}$, $\tau^{PrD,Dc}_{Comp_R}$, θ_R] à la classe 8

Notons que toutes les informations à compléter sont fournies dans le dessin proposé (Dc).

4.4.7 Type de tâches 7

Au Viêt-Nam, le dessin correspondant au type de tâches $T^{P,objS,D}_{EtP}$ « Etudier la propriété des objets géométriques de l'espace représentés dans un dessin » est toujours prototypique (Dp).

Ce type de tâches $T^{P,objS,D}_{EtP}$ apparaît à partir de la classe 8. Les « propriétés » à étudier dans cette classe sont principalement associées aux arêtes, aux faces du parallélépipède rectangle, du prisme droit, en d'autres termes la plupart des activités et des exercices prend la valeur de « solide – lui-même » pour la variable « objet géométrique de l'espace »[48] :

- un point appartenant à un segment dans une face, ou à une arête,
- une arête située sur une face,
- deux arêtes coplanaires, sécantes, parallèles,
- une arête parallèle à une face,
- deux faces parallèles,
- deux arêtes orthogonales,
- une arête orthogonale à une face,
- deux faces orthogonales.

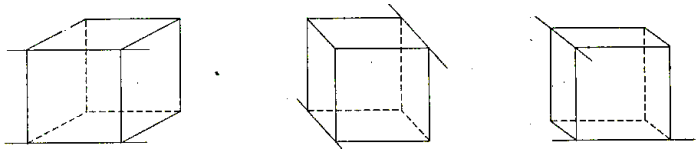
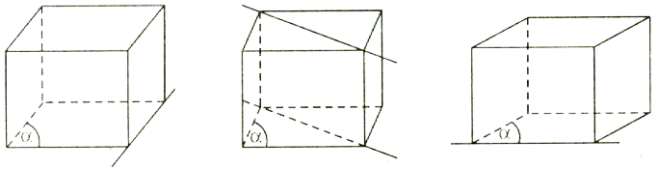
$T^{P,SLm,Dp}_{EtP}$: Etudier la propriété des points/arêtes/faces d'un parallélépipède rectangle/prisme droit représentés(es) dans un dessin.
$\tau^{P,SLm,Dp}_{EtP}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux points/arêtes/faces du parallélépipède rectangle/prisme droit donnés(es) dans l'énoncé. - Identifier, à l'aide d'une maquette, les relations spatiales entre les points/arêtes/faces repérés(es) sur le dessin. - Interpréter ces relations en termes de propriétés géométriques. - Démontrer ces propriétés géométriques.
$\theta_{P,D}$: - Définition et propriétés géométriques d'un parallélépipède rectangle/prisme droit. - Définition du parallélisme, de l'orthogonalité. - Connaissances de dessins prototypiques d'un parallélépipède rectangle/prisme droit. - Propriétés spatiales des arêtes, des faces sur la maquette d'un parallélépipède

[48] Voir l'Annexe 4.

rectangle/prisme droit.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 69. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$, $\tau^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] à la classe 8

Dans le technique $\tau^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$, nous notons la présence des maquettes comme une aide utile pour identifier les relations spatiales entre des composants sur le dessin.

> Dans la boîte des outils d'enseignement du chapitre IV, il y a : un parallélépipède rectangle et un cube en plastique, et les baguettes de plastique vertes, rouges, violettes, jaunes,… (f.74, 75). L'enseignant les utilise pour former des notions :
>
> 
>
> Figure 74
>
> 
>
> Figure 75
>
> - Sommets, arêtes, faces,…
> - Deux droites parallèles.
> - Droite parallèle à un plan.
> - Deux plans parallèles.
> - Deux droites sécantes.
> - Deux droites non-sécantes.
>
> (Phan et al., 2004b, p. 133)

Ce type de tâches $T^{P,objS,D}{}_{EtP}$ est repris dans les classe 11 et 12. Dans ces classes, il intervient principalement dans la technique du type de tâches $T^{P,objS,D}{}_{IdO}$ « Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant une propriété géométrique donnée à l'aide du dessin » que nous analyserons après. Ici, la variable « objet géométrique de l'espace » prend essentiellement deux valeurs : « solide – organisateur » (SOrg) [49] et « autre » (Aut). Pour les « propriétés », c'est pareil qu'en classe 8 : l'incidence, le parallélisme, l'intersection, l'orthogonalité.

$T^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{EtP}$: Etudier l'incidence/le parallélisme/l'intersection/l'orthogonalité de points/droites/plans représentés(es) dans un dessin.
$\tau^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{EtP}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux points/droites/plans donnés(es) dans l'énoncé. - Identifier, à l'aide d'un objet mathématique, les relations spatiales entre les composants repérés sur le dessin. - Interpréter ces relations en termes d'incidence/de parallélisme/ d'intersection/d'orthogonalité des points/droites/plans donnés(es). - Démontrer ces propriétés géométriques.
$\theta_{P,D}$: - Définition et propriétés des objets géométriques de l'espace donnés.

[49] Voir l'Annexe 4.

- Définition et théorèmes du parallélisme, de l'orthogonalité. - Connaissances de dessins prototypiques d'objets géométriques de l'espace. - Propriétés spatiales de l'objet mathématique provenant du dessin.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 70. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{P,SOrg/Aut,Dp}_{EtP}$, $\tau^{P,SOrg/Aut,Dp}_{EtP}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] en lycée

4.4.8 Type de tâches 8

Le type de tâches $T^{P,objS,D}_{IdO}$ « Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant une propriété géométrique donnée à l'aide du dessin » se rattache toujours aux dessins prototypiques (Dp).

Ce type de tâches $T^{P,objS,D}_{IdO}$ commence à apparaître en classe 8. Comme pour le type de tâches $T^{P,objS,D}_{EtP}$, il considère les « propriétés » (P) du parallélisme et de l'orthogonalité des arêtes, des faces du parallélépipède rectangle ou du prisme droit (valeur de « solide – lui-même » (SLm) pour la variable « objet géométrique de l'espace » (objS)). En outre, il aborde encore l'égalité des arêtes.

$T^{P,SLm,Dp}_{IdO}$: Identifier des arêtes/faces égales/parallèles/orthogonales d'un parallélépipède rectangle/prisme droit à l'aide du dessin.
$\tau^{P,SLm,Dp}_{IdO}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux arêtes/faces à étudier du parallélépipède rectangle/prisme droit. - Chercher, parmi ces composants, ceux qui vérifient, sur le dessin, l'égalité/le parallélisme/l'orthogonalité [$T^{P,SLm,Dp}_{EtP}$/ $\tau^{P,SLm,Dp}_{EtP}$].
$\theta_{P,D}$: - Propriétés géométriques d'un parallélépipède rectangle/prisme droit. - Définition du parallélisme, de l'orthogonalité. - Connaissances de dessins prototypiques d'un parallélépipède rectangle/prisme droit. - Propriétés spatiales des arêtes, des faces sur la maquette d'un parallélépipède rectangle/prisme droit.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 71. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{P,SLm,Dp}_{IdO}$, $\tau^{P,SLm,Dp}_{IdO}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] à la classe 8

En classes 11 et 12, ce type de tâches fait partie des techniques des autres types de tâches. Par exemple,

> Pour chercher le point d'intersection d'une droite et d'un plan, on a besoin de chercher le point d'intersection de cette droite et d'une droite appartenant au plan.
>
> (Tran et al., 2007a, p. 51)

La « propriété » (P) à reconnaître dans $T^{P,objS,D}_{IdO}$ est plurielle : l'incidence, le parallélisme, l'orthogonalité entre points, droites, plans. Dans ces relations géométriques entre deux objets, on connaît déjà toujours un objet, le problème étant de chercher le deuxième objet à l'aide du dessin. La variable « objet géométrique de l'espace » (objS) prend principalement deux valeurs de « solide – organisateur » (SOrg) et « autre » (Aut). Pourtant, l'utilisation de la valeur d' « autre » est de moins en moins fréquente dans les exercices[50]. Nous décrivons la praxéologie concernant $T^{P,objS,D}_{IdO}$ en lycée comme suit :

[50] Voir l'Annexe 4.

$T^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{IdO}$: Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant la relation d'incidence (ou le parallélisme, l'orthogonalité) à l'aide du dessin.
$\tau^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{IdO}$: - Faire correspondre des composants du dessin aux objets géométriques de l'espace à étudier. - Chercher, parmi les composants à étudier, ceux qui, sur le dessin, satisfont la relation d'incidence (ou le parallélisme, l'orthogonalité) [$T^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{EtP}$ / $\tau^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{EtP}$].
$\theta_{P,D}$: - Propriétés des objets géométriques de l'espace donnés. - Définition et théorèmes du parallélisme, de l'orthogonalité. - Connaissances de dessins prototypiques d'objets géométriques de l'espace. - Propriétés spatiales de l'objet mathématique provenant du dessin.
Θ_R : Règles de représentation.

Tableau 72. Praxéologie institutionnelle vietnamienne [$T^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{IdO}$, $\tau^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{IdO}$, $\theta_{P,D}$, Θ_R] en lycée

4.4.9 Commentaires sur les praxéologies institutionnelles vietnamiennes

Nous résumons d'abord les praxéologies institutionnelles vietnamiennes en grandes classes dans le Tableau 73. De ce tableau, nous dégageons des commentaires suivants.

Globalement, nous pouvons remarquer qu'au Viêt-Nam, les huit types de tâches sont abordés, mais à différents moments.

Au niveau des types de tâches, l'apparition de la projection parallèle permet d'introduire des types de tâches sur les figures transformées ($T^{objE,tr}{}_{1_tr}$, $T^{objE}{}_{s_tr}$, $T^{objE_objP}{}_{tr}$). Les valeurs choisies de la variable « objets géométrique de l'espace » sont alors des objets de moins de trois dimensions : point, droite, polygone.

Une autre remarque, c'est que l'institution vietnamienne s'intéresse à tous les cas possibles des figures transformées, même aux cas « dégénérés ». Cette intention apparaît lors de l'étude du type de tâches $T^{polygP}{}_{s_tr}$ « Etudier l'existence d'une transformation d'un objet géométrique de l'espace donné en un objet géométrique du plan donné » et dans le choix de la position relative de l'objet géométrique de l'espace par rapport à la direction de projection dans le type de tâches $T^{objE,PC}{}_{1_tr}$ « Déterminer la transformée d'un objet géométrique de l'espace par une projection cylindrique donnée ». Par exemple, regardons l'activité suivante ($T^{d,PC}{}_{1_tr}$) : parmi les deux positions de la droite proposées, la première conduit au fait que la transformée est réduite à un point.

> Exemple. Déterminer l'image de projection parallèle d'une droite dans les cas suivants :
> - La droite parallèle à la direction de projection.
> - La droite non-parallèle à la direction de projection.
>
> (Programme de l'éducation générale de Mathématiques, pp.174-175)

Les dessins « dégénérés » peuvent devenir des dessins non-prototypiques dans le type de tâches $T^{objE,D}{}_{AsDO}$ « Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace ». Dans ce cas, une technique basée sur la projection est nécessaire pour que ces dessins soient « légaux ».

Pour les types de tâches étudier la représentation en perspective ($T^{objE}{}_{De}$, $T^{objE,D}{}_{AsDO}$, $T^{objE,D}{}_{Comp}$), la variable « objet géométrique de l'espace » prend pour valeurs des objets de trois dimensions, et même de deux dimensions. Pour le type de tâches $T^{objE}{}_{De}$ « Dessiner un objet géométrique de l'espace », dessiner les objets de deux dimensions sert de base aux dessins d'objets de trois dimensions. Prenons un exemple : le type de tâches « Dessiner une pyramide

dont la base est un polygone particulier » (T^{Py}_{De}) fait appelaux types de tâches « Dessiner un polygone particulier » (T^{objP}_{De}).
Pour les types de tâches d'exploration d'un dessin ($T^{P,objS,D}_{EtP}$, $T^{P,objS,D}_{IdO}$) , au collège, l'élève travaille sur les propriétés des éléments (sommet, arête, face) du parallélépipède rectangle et du prisme droit, tandis qu'au lycée, l'élève étudie et identifie des objets géométriques de l'espace qui n'en sont pas . Il est ainsi probable que l'élève rencontre plus de difficultés pour identifier les relations spatiales entre des composants repérés sur le dessin, surtout dans le cas de l'orthogonalité où il n'y a pas, en général, de conservations dans le passage de l'objet géométrique de l'espace au dessin.

Au niveau des techniques, nous constatons le changement de technique pour deux types de tâches T^{objE}_{De} « Dessiner un objet géométrique de l'espace » et $T^{objE,D}_{AsDO}$ « Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace ». Au début, le premier (T^{PaR}_{De}, T^{PrD}_{De}, T^{PyR}_{De}) est résolu par la technique de dessin prototypique ($\tau^{PaR}_{De_D}$, $\tau^{PrD}_{De_D}$, $\tau^{PyR}_{De_D}$), le deuxième ($T^{Sol,Dp}_{AsDO}$) par celle d'observation ($\tau^{Sol,Dp}_{AsDO_Obs}$). Mais, en classe 11, les deux utilisent les techniques de règles de représentation, puis à la fin, ceux de projection.

Au niveau des technologies, on peut noter deux ruptures de praxéologie locale. La première fois, il s'agit du passage de la praxéologie locale d'observation aux praxéologies locales de dessin prototypique et de règle de représentation lorsqu'on passe de l'école primaire au collège. La deuxième fois, en fin de premier semestre de la classe 11, l'apparition de la projection parallèle permet le passage de la praxéologie locale de règles de représentation à celle de projection.

Praxéologie de référence		Praxéologie institutionnelle vietnamienne																		
		5	8			9	11						12							
							de §1 à §5 (chapitre 2)		à partir de §5 (chapitre 2)											
							standard	avancé	standard		avancé		standard				avancé			
1	$T^{objE,PC}_{1_tr}$										$T^{pt,PC1}_{1_tr}$	$T^{d,PC1}_{1_tr}$								
	$\tau^{objE,PC}_{1_tr}$										$\tau^{pt,PC1}_{1_tr}$	$\tau^{d,PC1}_{1_tr}$								
	θ_{PC}										θ_{PC}	θ_{PC}								
	Θ_{tr}																			
2	$T^{objE}_{s_tr}$										$T^{polygP}_{s_tr}$									
	$\tau^{objE}_{s_tr}$										$\tau^{polygP}_{s_tr}$									
	θ_{PC}										θ_{PC}									
	Θ_{tr}																			
3	$T^{objE_objP}_{tr}$								$T^{polygP_polyg}_{tr}$											
	$\tau^{objE_objP}_{tr}$								$\tau^{polygP_polyg}_{tr}$											
	θ_{PC}								θ_{PC}											
	Θ_{tr}																			
4	T^{objE}_{De}		T^{PaR}_{De}	T^{PrD}_{De}	T^{PyR}_{De}		$T^{Polyè}_{De}$	$T^{Polyè}_{De}$	T^{objP}_{De}	$T^{Polyè}_{De}$	T^{objP}_{De}	$T^{Polyè}_{De}$	$T^{Polyè}_{De}$	T^{Sp}_{De}	T^{CyR}_{De}	T^{CoR}_{De}	$T^{Polyè}_{De}$	T^{Sp}_{De}	T^{CyR}_{De}	T^{CoR}_{De}
	$\tau^{objE}_{De_PC}$ $\tau^{objE}_{De_R}$ $\tau^{objE}_{De_D}$ $\tau^{objE}_{De_Obs}$		$\tau^{PaR}_{De_D}$	$\tau^{PrD}_{De_D}$	$\tau^{PyR}_{De_D}$		$\tau^{Polyè}_{De_R}$	$\tau^{Polyè}_{De_R}$	$\tau^{objP}_{De_PC}$	$\tau^{Polyè}_{De_PC}$	$\tau^{objP}_{De_PC}$	$\tau^{Polyè}_{De_PC}$	$\tau^{Polyè}_{De_PC}$	$\tau^{Sp}_{De_PC}$	$\tau^{CyR}_{De_PC}$	$\tau^{CoR}_{De_PC}$	$\tau^{Polyè}_{De_PC}$	$\tau^{Sp}_{De_PC}$	$\tau^{CyR}_{De_PC}$	$\tau^{CoR}_{De_PC}$
	θ_{PC} θ_R θ_D θ_{Obs}		θ_D	θ_D	θ_D		θ_R	θ_R	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}
	Θ_{tr} Θ_{PC} Θ_R		Θ_R	Θ_R	Θ_R		Θ_{PC}	Θ_{PC}												
5	$T^{objE,D}_{AsDO}$	$T^{Sol,Dp}_{AsDO}$							$T^{polygP,D}_{AsDO}$	$T^{Polyè,D}_{AsDO}$	$T^{Polyè,D}_{AsDO}$									
	$\tau^{objE,D}_{AsDO_PC}$ $\tau^{objE,D}_{AsDO_R}$ $\tau^{objE,D}_{AsDO_D}$ $\tau^{objE,D}_{AsDO_Obs}$	$\tau^{Sol,Dp}_{AsDO_Obs}$							$\tau^{polyg,D}_{AsDO_PC}$	$\tau^{Polyè,D}_{AsDO_PC}$	$\tau^{Polyè,D}_{AsDO_PC}$									
	θ_{PC} θ_R θ_D θ_{Obs}	θ_{Obs}							θ_{PC}	θ_{PC}	θ_{PC}									
	Θ_{tr} Θ_{PC} Θ_R																			
6	T^{objE}_{Comp}		T^{PaR}_{Comp}	T^{PrD}_{Comp}																
	$\tau^{objE}_{Comp_PC}$ $\tau^{objE}_{Comp_R}$ $\tau^{objE}_{Comp_D}$ $\tau^{objE}_{Comp_Obs}$		$\tau^{PaR}_{Comp_R}$	$\tau^{PrD}_{Comp_R}$																
	θ_{PC} θ_R θ_D θ_{Obs}		θ_R	θ_R																
	Θ_{tr} Θ_{PC}																			

	Θ_R										
7	$T^{P,objS,D}{}_{EtP}$		$T^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$			$T^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{EtP}$					
	$\tau^{P,objS,D}{}_{EtP}$		$\tau^{P,SLm,Dp}{}_{EtP}$			$\tau^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{EtP}$					
	$\theta_{P,D}$		$\theta_{P,D}$			$\theta_{P,D}$					
	Θ_R		Θ_R			Θ_R					
8	$T^{P,objS,D}{}_{IdO}$		$T^{P,SLm,Dp}{}_{IdO}$			$T^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{IdO}$					
	$\tau^{P,objS,D}{}_{IdO}$		$\tau^{P,SLm,Dp}{}_{IdO}$			$\tau^{P,SOrg/Aut,Dp}{}_{IdO}$					
	$\theta_{P,D}$		$\theta_{P,D}$			$\theta_{P,D}$					
	Θ_R		Θ_R			Θ_R					

Tableau 73. Praxéologies institutionnelles vietnamiennes

4.5 Conclusion

Nous consacrons la conclusion de ce chapitre à une étude comparative des praxéologies de deux institutions française et vietnamienne afin de mettre en lumière les choix sur le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin, notamment, son évolution curriculaire (Q3c).

Récapitulons d'abord les praxéologies institutionnelles des deux institutions dans le Tableau 74 afin de favoriser cette comparaison. Ce tableau décrit la disposition de cinq praxéologies locales :

- Praxéologie locale de projection (PL_{PC}), correspondant à l'approche de projection,
- Praxéologie locale de règles de représentation (PL_{R}), correspondant à l'approche de règles de représentation,
- Praxéologie locale de dessin prototypique (PL_{D}), correspondant à l'approche de dessin prototypique,
- Praxéologie locale d'observation (PL_{Obs}), correspondant à l'approche d'observation
- Praxéologie locale de propriété-dessin ($PL_{P,D}$),

et les huit types de tâches qui s'y rattachent :

- Type de tâches 1 « Déterminer la transformée d'un objet géométrique de l'espace par une projection cylindrique donnée » ($T^{objE,PC}{}_{1_tr}$),
- Type de tâches 2 « Déterminer les transformées possibles d'un objet géométrique de l'espace par projection cylindrique » ($T^{objE}{}_{s_tr}$),
- Type de tâches 3 « Etudier l'existence d'une transformation d'un objet géométrique de l'espace donné en un objet géométrique du plan donné » ($T^{objE_objP}{}_{tr}$),
- Type de tâches 4 « Dessiner un objet géométrique de l'espace » ($T^{objE}{}_{De}$),
- Type de tâches 5 « Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace donné » ($T^{objE,D}{}_{AsDO}$),
- Type de tâches 6 « Compléter le dessin d'un objet géométrique de l'espace » ($T^{objE}{}_{Comp}$),
- Type de tâches 7 « Etudier une propriété des objets géométriques de l'espace représentés dans un dessin » ($T^{P,objS,D}{}_{EtP}$),
- Type de tâches 8 « Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant une propriété géométrique donnée à l'aide du dessin » ($T^{P,objS,D}{}_{IdO}$).

Ensuite, en nous basant sur ce tableau, notre analyse se fait selon deux niveaux consécutifs : premièrement, celui des praxéologie locale et deuxièmement, celui des types de tâches afin de mettre en évidence les points communs et les points différents de l'enseignement de la représentation en perspective dans ces deux institutions.

Globalement, on peut noter que l'enseignement de la perspective en France est continu avec la présence des praxéologies dans tous les classes du CP jusqu'à seconde ; tandis qu'au Viêt-Nam, il arrive assez tard et est discontinu. En effet, les praxéologies institutionnelles vietnamiennes n'apparaissent que dans les classes 5, 8, 11 et 12. Nous pensons que c'est la conséquence de l'organisation de l'enseignement de la Géométrie dans les deux institutions d'enseignement. En France, on enseigne la Géométrie du plan et de l'espace en même temps ; au Viêt-Nam, elles sont séparées, l'élève vietnamien étudie la Géométrie de l'espace à la fin de chaque niveau de classe.

En France					Niveau de classes			Au Viêt-Nam				
Praxéologie locale								*Praxéologie locale*				
$PL_{P,D}$	PL_{Obs}	PL_D	PL_R	PL_{PC}				PL_{PC}	PL_R	PL_D	PL_{Obs}	$PL_{P,D}$
Type de tâches								*Type de tâches*				
						Lycée	12	$T^{Polyè/Sp/CyR/CoR}_{De}$				$T^{P,SOrg/Aut,Dp}_{EtP}$ $T^{P,SOrg/Aut,Dp}_{IdO}$
							11	$T^{pt/d,PC1}_{1_tr}$ $T^{polygP}_{s\ tr}$ $T^{polygP_polyg}_{tr}$ $T^{objP/Polyè}_{De}$ $T^{polygP/Polyè,D}_{AsDO}$				
									$T^{Polyè}_{De}$			
$T^{P,SOrg,Dp}_{EtP}$ $T^{P,Sorg,Dp}_{IdO}$			T^{PaR}_{Comp}		2^{de}							
$T^{P,SLm,Dp}_{EtP}$		$T^{Sp/secSp}_{De}$	T^{secCu}_{De}		3^{e}	Collège	9					
		T^{CoR}_{De}	T^{Py}_{De} $T^{Py,D}_{AsDO}$ T^{Py}_{Comp}		4^{e}		8		$T^{PaR/PrD}_{Comp}$	$T^{PaR/PrD/PyR}_{De}$		$T^{P,SLm,Dp}_{EtP}$ $T^{P,SLm,Dp}_{IdO}$
$T^{P,SLm,Dp}_{EtP}$ $T^{P,SLm,Dp}_{IdO}$		T^{CyR}_{De} $T^{CyR,Dp}_{AsDO}$ T^{CyR}_{Comp}	T^{PrD}_{De} $T^{PrD,D}_{AsDO}$ T^{PrD}_{Comp}		5^{e}							
			T^{PaR}_{De} $T^{PaR,D}_{AsDO}$ T^{PaR}_{Comp}		6^{e}							
	$T^{Sol,Dp}_{AsDO}$				CM2	Ecole primaire	5				$T^{Sol,Dp}_{AsDO}$	
					CM1							
					CE2							
					CE1							
					CP							

Tableau 74. Distribution des praxéologies locales PL_{tr} , PL_R , PL_D , PL_{Obs}, PL_{PD} et ses types de tâches en France et au Viêt-Nam

A propos des praxéologies locales, nous trouvons les mêmes évolutions qu'au niveau de l'école primaire et du collège dans les deux institutions, mais une grande différence au lycée. En effet, dans les deux pays,

- la praxéologie locale de l'observation (PL_{Obs}) n'est présente qu'à l'école primaire ;
- les praxéologies locales de règles de représentation (PL_R), de dessin prototypique (PL_D) et de propriété-dessin ($PL_{P,D}$) coexistent au collège ;
- tandis que les praxéologies locales PL_R et $PL_{P,D}$ sont encore proposées au lycée, la praxéologie locale PL_D est disparue.

Au Viêt-Nam, nous constatons, en fin de premier semestre de la classe 11, l'apparition de la praxéologie de projection (PL_{PC}) et la disparition de la praxéologie locale PL_R. Il est ainsi évident que les institutions manifestent des intentions différentes concernant le dessin de représentation. Il semble que l'institution vietnamienne adopte un point de vue d'enseignement plus strictement mathématique (l'approche par projection) que l'institution française (approche par les règles de représentation et celles des dessins prototypiques).

Suite à l'étude des évolutions des praxéologies locales, nous étudions ensuite plus profondément les types de tâches rattachés à chaque praxéologie locale.

Dans les deux institutions, la praxéologie locale d'observation (PL_{Obs}) n'est attachée qu'au type de tâches 5 « Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace donné » ($T^{Sol,Dp}{}_{AsDO}$) à l'école primaire. Revenant à l'étude du Chapitre 3, on peut voir que les systèmes éducatifs n'ont pas l'intention d'enseigner officiellement la représentation en perspective au primaire; l'approche par observation a pour objectif d'aider l'élève à se familiariser avec les solides usuels rencontrés dans la réalité.

La praxéologie locale de dessin prototypique (PL_D) est présente, dans les deux institutions, au collège. Néanmoins, il y a une différence de structure de types de tâches qui y sont attachés. En France, on peut trouver les trois types de tâches pour étudier la représentation en perspective ($T^{objE}{}_{De}$, $T^{objE,D}{}_{AsDO}$, $T^{objE,D}{}_{Comp}$) alors qu'au Viêt-Nam, il n'y a que le type de tâches demandant de dessiner ($T^{objE}{}_{De}$). De plus, l'objet géométrique de l'espace en France concerne des solides de révolution, comme le cylindre, le cône de révolution, la sphère ; au Viêt-Nam, ce sont des polyèdres, comme le parallélépipède rectangle, le prisme droit, la pyramide régulière.

Pour la praxéologie locale de règles de représentation (PL_R), on trouve les trois types de tâches d'étude de la représentation en perspective ($T^{objE}{}_{De}$, $T^{objE,D}{}_{AsDO}$, $T^{objE}{}_{Comp}$) dans les deux institutions. Ces types de tâches s'appliquent au même objet géométrique de l'espace : les polyèdres.

Pour la praxéologie locale de projection (PL_{PC}) qui n'est présente qu'au Viêt-Nam, elle permet de proposer des types de tâches sur les figures transformées ($T^{objE,PC1}{}_{1_tr}$, $T^{objE}{}_{s_tr}$, $T^{objP_objE}{}_{tr}$) et en plus, de renouveler la technique de résolution par projection pour les types de tâches « Dessiner un objet géométrique de l'espace » ($T^{objE}{}_{De}$) et « Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace » ($T^{objE,D}{}_{AsDO}$).

Pour la praxéologie de propriété-dessin ($PL_{P,D}$), ses types de tâches d'exploration d'un dessin ($T^{P,objS,D}{}_{EtP}$ et $T^{P,objS,D}{}_{IdO}$) sont enseignés de la même manière dans les deux pays. En étudiant les valeurs de la variable « objet géométrique de l'espace » (objS), nous constatons une diminution du rôle du solide : l'élève travaille, au collège, sur les parties du parallélépipède rectangle ou du prisme droit (SLm), mais au lycée, sur les objets géométriques « nés » du solide (SOrg) ou isolés au solide (Aut).

A partir des analyses ci-dessus, nous nous intéressons particulièrement aux trois types de tâches 4, 5, 6 qui étudient la représentation en perspective. Parce que l'analyse de leur technique/technologie indique des ruptures de techniques pour enseigner le passage d'un objet géométrique à un dessin selon le niveau de classes et la nature du solide (Tableau 75).

France / Viêt-Nam		Niveau de classes		
		Ecole primaire	Collège	Lycée
Nature du solide	Polyèdre	5 / 5	4 5 6 / 4 6	6 / 4 4 5
	Solide de révolution	5 / 5	4 5 6	/ 4

Tableau 75[51]. Distribution des types de tâches 4, 5, 6 selon niveau de classes et nature du solide en France et au Viêt-Nam

La première rupture, au moment du passage de l'école primaire au collège, consiste à passer des techniques d'observation à celles des règles de représentation et de dessin prototypique. Elle est présente dans les deux institutions, mais se déroule de manières différentes. En France, la mobilisation des techniques dépend de la nature du solide : les techniques de règles de représentation se rattachent aux polyèdres, et celles de dessin prototypique aux solides de révolution. Au Viêt-Nam, cela dépend du type de tâches : les techniques de règles de représentation résolvent le type de tâches 6, et celles de dessin prototypique le type de tâches 4.

La deuxième n'est présente qu'au Viêt-Nam en classe 11. C'est le passage de l'approche de règles de représentation à celle de projection.

Les analyses praxéologiques de ce chapitre ont montré une présence répandue des praxéologies locales de règles de représentation (PL_R) et de dessin prototypique (PL_D) dans les deux institutions. Afin de mettre en évidence leur technique et leur technologie nous proposons, dans le chapitre suivant, des études sur les règles de représentation dans la praxéologie de règles de représentation et sur les caractéristiques de dessins prototypiques dans la praxéologie de dessin prototypique.

[51] Légende de couleur du Tableau 75 :
vert (4 5 6): techniques d'observation
violet (4 5 6) : techniques de dessin prototypique
rouge (4 5 6) : techniques de règles de représentation
bleu (4 5 6) : techniques de projection

Chapitre 5
Analyse des choix des règles de représentation du dessin en perspective dans les manuels : dessins prototypiques

L'objectif de ce chapitre est de répondre à la question « *Quelles sont les règles de représentation du dessin en perspective dans les manuels, surtout celles qui conduisent à des dessins prototypiques ? ».* Cela nous permettra d'identifier des éléments de technique et de technologie des praxéologies locales de règles de représentation, de dessin prototypique. De plus, il nous aide aussi à mettre en lumière des codes d'écriture et de lecture (Q3b) dans les dessins prototypiques (Q3b').

Dans ce but, nous construisons, d'abord, une grille d'analyse pour déterminer des règles de représentation explicites et même implicites du dessin ; puis nous la faisons fonctionner dans l'analyse des manuels français et vietnamiens.

5.1 Grille d'analyse des règles de représentation du dessin

A partir de l'enquête sur les traces de l'enseignement de la représentation en perspective (Chapitre 2), nous proposons de regrouper les règles de représentation selon trois critères : conservation ou non, troisième dimension, dessin bien informé.

5.1.1 Règles de conservation et de non-conservation

Ces règles sont des conséquences mathématiques de la projection parallèle[52]. Nous les détaillons dans le Tableau 76 ci-après.

Règles de conservation	Règles de non-conservation
- alignement et ordre de trois points alignés, - nature des objets à une dimension (par exemple, un segment est représenté par un segment), - parallélisme, - relation de concourrance, - relation d'incidence, - proportion des segments de même direction, milieu et égalité des segments	- orthogonalité : deux droites orthogonales peuvent être représentées par deux droites non perpendiculaires, - nature des objets à deux dimensions (par exemple, un rectangle est représenté par un parallélogramme), - la mesure.

[52] cas général.

comme cas particuliers, - barycentres, - nature des objets frontaux (par exemple, la face frontale rectangulaire d'un parallélépipède rectangle est représentée par un rectangle).	

Tableau 76. Liste des règles de conservation et non-conservation

5.1.2 Règles de représentation de la troisième dimension

Ces règles sont des conventions, autrement dit des codes d'écriture, qui donnent l'illusion perceptive de la profondeur au dessin plan (la troisième dimension de l'espace). Nous relevons au moins les deux règles suivantes :

- représentation en pointillés des parties cachées de l'objet de l'espace,
- représentation de la profondeur d'une sphère par une « ellipse » représentant un grand cercle (équateur dans le cas de la sphère terrestre).

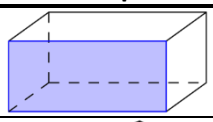
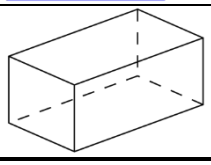
5.1.3 Règles pour un dessin « bien informé »

Ce sont des conséquences de pratiques institutionnelles qui visent à représenter le maximum de propriétés de l'objet géométrique de l'espace et favorisent la lecture géométrique d'un dessin. En d'autres mots, ce sont les règles du dessin prototypique. Toutefois, il est rare qu'elles soient explicitement énoncées. Donc, *comment les explorer ?* Nous reprenons le point de vue méthodologique de l'article de Pais et al. (1991) comme notre hypothèse de travail pour l'étude des dessins prototypique :

Hypothèse de travail (sur l'étude des dessins prototypiques)

Les caractéristiques du dessin prototypique peuvent être explorées par l'étude des *choix répétés* d'une classe de dessins d'un solide fournis par des manuels.

De la consultation des dessins en perspective dans plusieurs manuels, nous sélectionnons certains solides représentatifs et en déduisons des catégories de dessins (Tableau 77 ci-après). Selon l'hypothèse de travail, nous choisissons les solides dont la fréquence d'apparition dans les manuels est élevée. Cela permet de formuler des caractéristiques des dessins prototypiques de solides comme résultant de leur stabilité dans les manuels. Quant aux catégories de dessins, nous nous centrerons sur la partie du dessin qui assure la conservation de propriétés géométriques de l'objet de l'espace et par là qui permet de limiter la perte d'information dans le passage de l'objet de l'espace à un dessin: cela favorise, dans certains cas, la lecture d'un dessin.

Solide	Catégorie de dessins	Exemple
Parallélépipède rectangle	**PaF** : au moins une face est représentée par un rectangle.	
	PaR [cas restant] : toutes les faces sont représentées par des « stricts » parallélogrammes.	

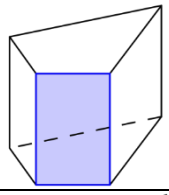
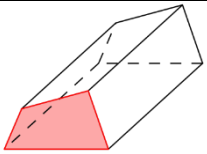
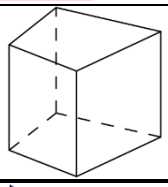
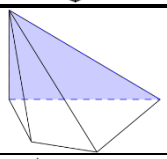
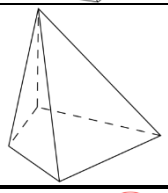
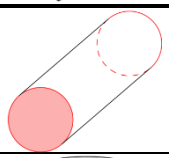
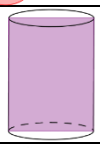
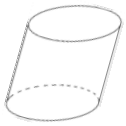
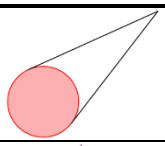
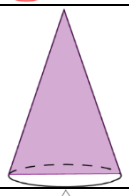
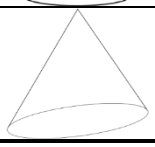
Prisme droit (sauf parallélépipède rectangle)	**PrF** : une face latérale est représentée par un rectangle.	
	PrB : toutes les faces latérales sont des stricts parallélogrammes et les deux côtés en bas des deux bases sont horizontaux.	
	PrR [cas restant] : toutes les faces latérales sont représentées par des stricts parallélogrammes et les deux côtés en base des deux bases ne sont pas horizontaux.	
Pyramide dont la hauteur est aussi une arête latérale	**PyF** : une face latérale qui contient la hauteur est représentée par un triangle rectangle.	
	PyR [cas restant] : deux faces latérales qui contiennent la hauteur ne sont pas représentées par des triangles rectangles.	
Cylindre de révolution	**CyB** : les bases sont représentées par des disques.	
	CyC : les bases sont représentées par des ellipses et les 2 génératrices extérieures permettent de former une coupe rectangulaire.	
	CyR [cas restant]: les bases sont représentées par des ellipses et les deux génératrices extérieures ne permettent pas de former une coupe rectangulaire.	
Cône de révolution	**CoB** : la base est représentée par un disque.	
	CoC : la base est représentée par une ellipse et les deux génératrices extérieures permettent de former une coupe en forme de triangle isocèle.	
	CoR [cas restant] : la base est représentée par une ellipse et les deux génératrices extérieures ne sont pas égales.	

Tableau 77. Catégories de dessins de certains solides

En outre, le dessin devant être capable de donner l'illusion d'un objet de trois dimensions, il donne aussi l'illusion d'un « angle de vue », cet angle de vue devenant l'une des règles implicites d'un dessin prototypique.
Pour déterminer cet « angle de vue », nous étudierons la direction des fuyantes dans les dessins de catégorie PaF (droite au-dessus, gauche au-dessus, droite au-dessous, gauche au-dessous) et leur longueur dans les dessins de catégorie PaF du cube (réduction ou agrandissement).

5.2 Règles de représentation du dessin : Cas de la France

Dans cette section, nous utilisons la grille d'analyse de la section précédente (section 5.1) pour l'étude des manuels des classes de 6e, 5e, 4e, 3e et 2de de l'enseignement français. En France, plusieurs séries de manuels concernent chaque niveau scolaire. Nous avons choisi les plus représentatifs et avons retenu pour chaque classe un groupe de 6 manuels (Tableau 78).

Classe	Manuels					
6e	Myriade 2009	Phare 2009	Sésamath 2009	Triangle 2009	Transmath 2009	Zénius 2009
5e	Myriade 2010	Phare 2010	Sésamath 2010	Triangle 2010	Transmath 2010	Zénius 2010
4e	Myriade 2011	Phare 2011	Sésamath 2011	Triangle 2011	Transmath 2011	Zénius 2011
3e	Myriade 2012	Phare 2012	Sésamath 2012	Triangle 2012	Transmath 2012	Zénius 2012
2nd	Déclic 2010	Hyperbole 2010	Math'x 2010	Odyssée 2010	Repère 2010	Transmath 2010

Tableau 78. Manuels français utilisés dans l'analyse des règles de représentation du dessin en perspective

Nous présentons les résultats obtenus à partir de la grille d'analyse en deux parties : tout d'abord des règles explicites, c'est-à-dire celles qui sont écrites dans les manuels ci-dessus, puis des règles implicites issues de l'étude des dessins de représentation.

5.2.1 Règles de représentation explicites du dessin

Nous récapitulons d'abord les règles de représentation explicites du dessin dans le Tableau 79[53]. De ce tableau, nous dégageons les remarques suivantes.

D'une manière générale, la présentation de ces règles se concentre dans les manuels de sixième et de seconde. En cinquième et en quatrième, en dehors de la règle de non-conservation du cercle, on ne rappelle que certaines des règles présentée en sixième. L'enseignement de règles du dessin en perspective concerne essentiellement les débuts du collège et du lycée.

Il existe une certaine ressemblance entre les groupes de règles présentes dans les classes de sixième et de seconde.
Le groupe des règles de la troisième dimension se réduit à l'usage du codage des pointillés ; celui des règle pour un dessin « bien informé » aux valeurs de la longueur et de l'angle de fuite des fuyantes.

[53] Voir le tableau plus détaillés dans l'Annexe 6.

Néanmoins, la liste des règles de conservation et de non-conservation, s'enrichit en classe de seconde comparativement à la classe de sixième : on ajoute, en seconde, les règles de conservation de l'alignement (de la droite), de la relation de concourrance, et on généralise la règle de conservation de l'égalité du collège à celle de la proportionnalité en seconde. Cet élargissement résulte de besoins liés en particulier au changement des objets géométriques de l'espace étudiés.

Manuels / Règles	6e	5e	4e	3e	2de
Règle de conservation					
de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés					5/6 manuels
de la nature des objets à une dimension					1/6 manuels : droite
du parallélisme	6/6 manuels	2/6 manuels	1/6 manuels		6/6 manuels
de la relation de concourrance					2/6 manuels
de la relation d'incidence					
de la proportion des segments de même direction	2/6 manuels : égalité	2/6 manuels : égalité	1/6 manuels : égalité		6/6 manuels : milieu 3/6 manuel : proportion
de la nature des objets frontaux	6/6 manuels				5/6 manuels
Règle de non-conservation					
de l'orthogonalité					2/6 manuels
de la nature des objets à deux dimensions	1/6 manuels : carré	2/6 manuels : cercle 1/6 manuels : rectangle	1/6 manuels : segments égaux		3/6 manuels : rectangle
de la mesure	2/6 manuels : longueur de fuyantes 2/6 manuels : angle droit	1/6 manuels : angle droit	1/6 manuels : angle droit		4/6 manuels : longueur 4/6 manuels : angle droit

Règle de représentation de la troisième dimension					
règle des pointillés	5/6 manuels				6/6 manuels
règle de représentation de la profondeur d'une sphère					
Règle pour un dessin « bien informé »	4/6 manuels: réduction de fuyantes 1/6 manuels : angle de fuite 30°, 45°, 60°				2/6 manuel : réduction de fuyantes 1/6 manuel : angle de fuite entre 30° et 60°

Tableau 79. Règles de représentation explicites du dessin dans les manuels français

5.2.2 Règles de représentation implicites du dessin

Nous présentons ici une statistique[54] des dessins de solides usuels selon les classes en nous appuyant sur les catégories de dessins du Tableau 77 et celles concernant la direction des fuyantes.

a) Parallélépipède rectangle

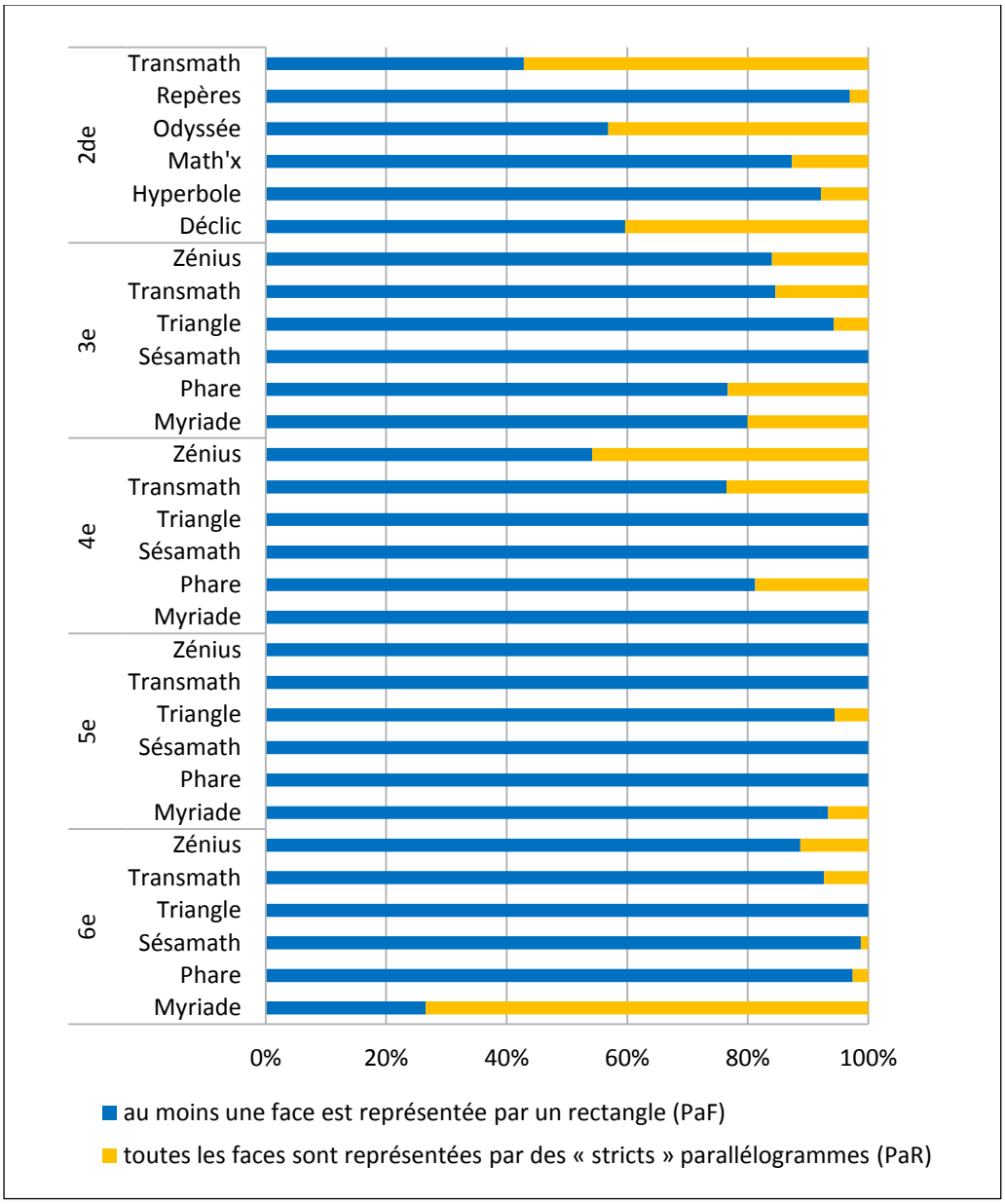


Figure 19. Graphique à barres empilées du pourcentage des catégories de dessin du parallélépipède rectangle dans les manuels français

A partir du diagramme de la Figure 19, on peut remarquer : sauf pour la première bande (Transmath 2de) et la dernière bande (Myriade 6e), les données de la catégorie PaF sont majoritaires quel que soit le niveau d'études et l'éditeur de l'ouvrage.

[54] Voir les tableaux de données dans l'Annexe 7.

A total, 85,3% (en moyenne) des dessins sont de cette catégorie. La représentation en vraie grandeur d'une face (deux faces opposées) du parallélépipède rectangle est donc privilégiée et par là-même la règle de conservation des propriétés d'objets frontaux.

D'autre part, les représentations de catégorie PaR sont plus présents dans la classe de seconde (en moyenne 27,4%) que dans les classes de sixième (en moyenne 16%), de cinquième (en moyenne 2,1%), de quatrième (en moyenne 14,7%) et de troisième (en moyenne 13,4%). Il est possible que l'augmentation d'angles de vue différents ait pour but de renforcer la vision dans l'espace.

b) Prisme droit (sauf parallélépipède rectangle)

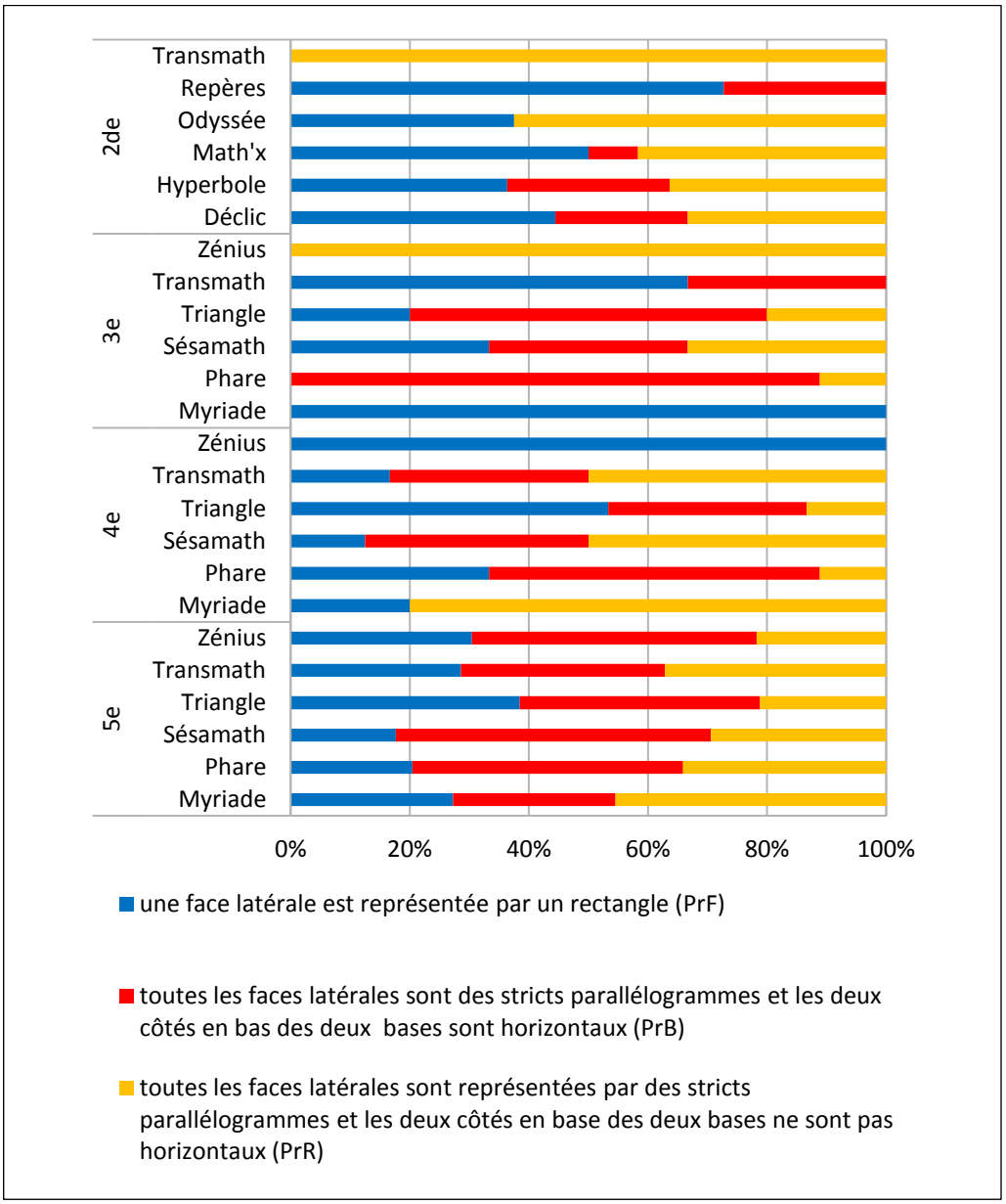


Figure 20. Graphique à barres empilées du pourcentage des catégories de dessin du prisme droit (sauf parallélépipède rectangle) dans les manuels français

Dans le diagramme de la Figure 20, il y a 9/24 bandes qui n'ont qu'une ou deux couleurs (Myriade 4e, Zénius 4e, Myriade 3e, Phare 3e, Transmath 3e, Zénius 3e, Odyssée 2de,

Repères 2de, Transmath 2de). Cela montre qu'il existe des choix didactiques différents entre les auteurs des ouvrages pour ce solide.

c) Pyramide dont la hauteur est aussi une arête latérale

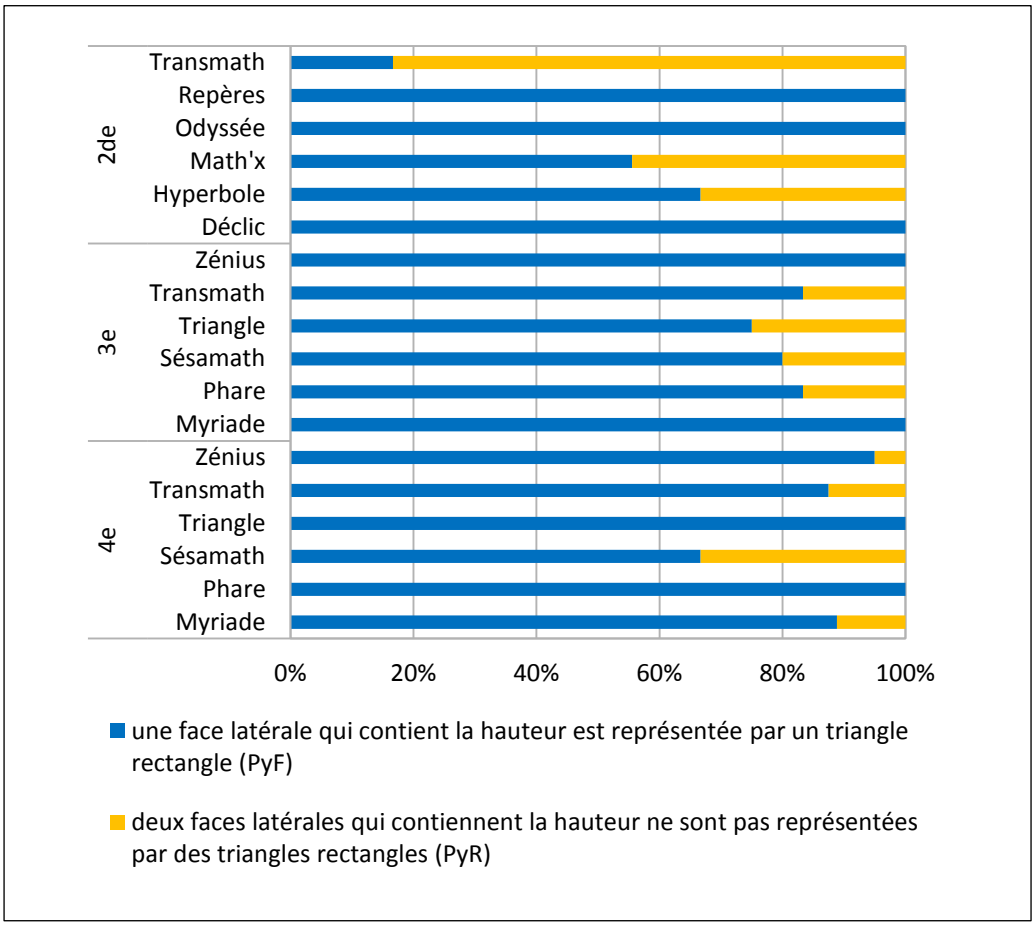


Figure 21. Graphique à barres empilées du pourcentage des catégories de dessin de la pyramide (dont la hauteur est aussi une arête latérale) dans les manuels français

On peut observer, sur le diagramme de la Figure 21, que les auteurs des manuels adoptent de manière majoritaire la catégorie PyF (en moyenne 83,3%) : la représentation en vraie grandeur d'une face latérale dans les dessins des pyramides dont la hauteur est aussi une arête est privilégiée. Par rapport aux dessins de catégorie PyR où les deux faces contenant la hauteur de la pyramide sont non-droites, ceux de catégorie PyF apportent plus d'information sur le solide : l'orthogonalité entre la hauteur et un côté de la base.

d) Cylindre de révolution

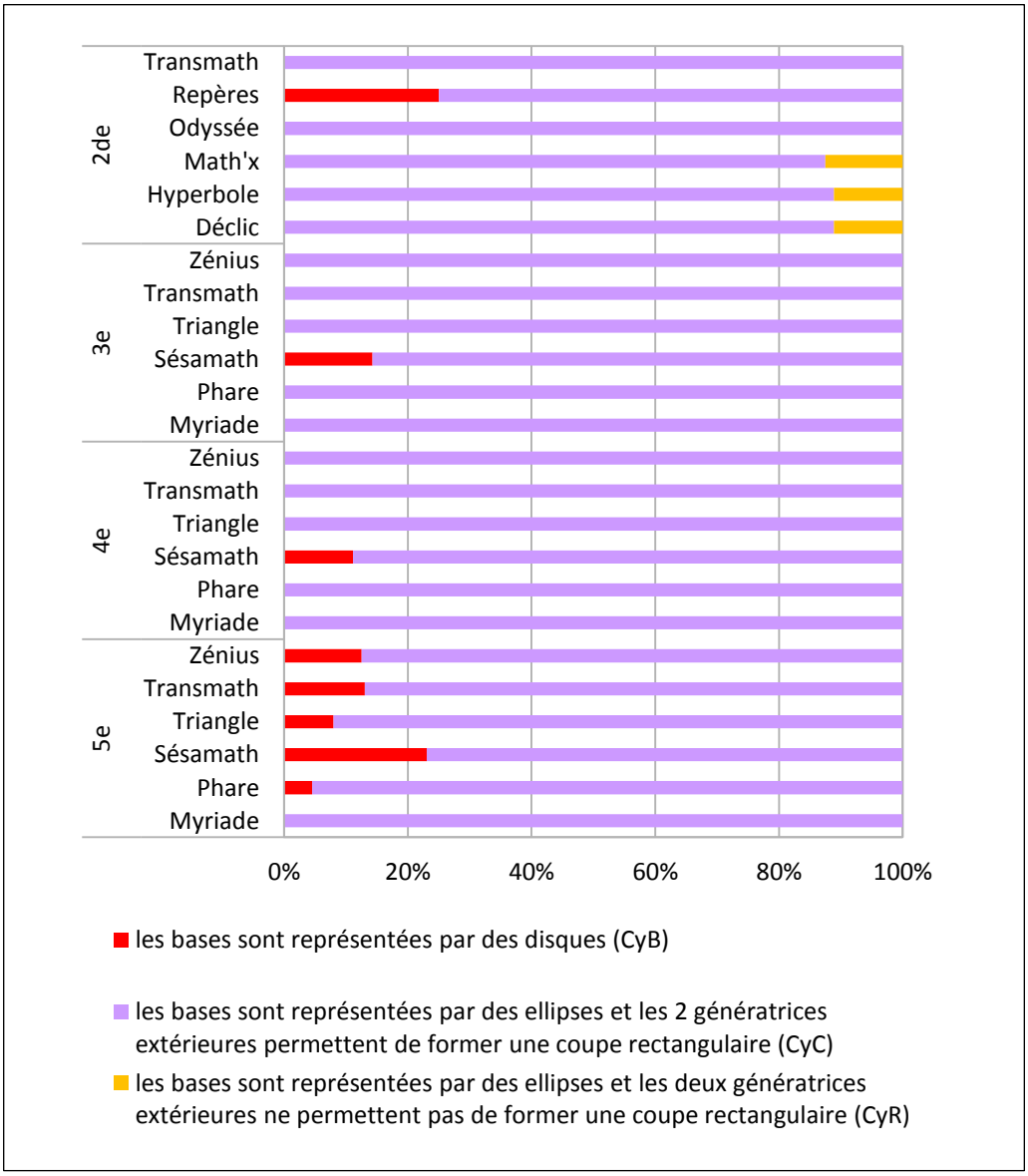
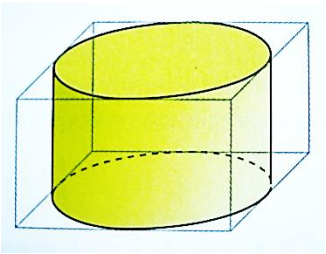


Figure 22. Graphique à barres empilées du pourcentage des catégories de dessin du cylindre de révolution dans les manuels français

Sur le diagramme de la Figure 22, on peut voir que la quasi-totalité des manuels utilise essentiellement les représentations des catégories de CyC (en moyenne 93,9%). Le nombre des dessins de catégorie CyR sont très faible : un seul dessin pour chaque livre : Math'x, Hyperbole, Déclic de seconde. Ces dessins apparaissent dans le cas où le cylindre de révolution est inscrit dans un parallélépipède rectangle. Par exemple, examinons le dessin de la page 268 du manuel Math'x de 2nd (2010) suivant :



Du point de vue mathématique, le parallélépipède rectangle est représenté avec un angle de fuite approximative de 45°. Le dessin du cylindre de révolution inscrit dans le parallélépipède est contraint par ce paramètre : on ne peut pas le représenter comme un dessin de la catégorie CyC qui correspond à un angle de fuite de 90°.

Pour de tels dessins, les grands axes des ellipses représentant les bases du cylindre de révolution ne sont pas perpendiculaires aux deux segments représentant des génératrices. Cela donne l'impression que les deux bases sont « inclinées » par rapport aux génératrices, le dessin suggère mal le cylindre de révolution.

Donc, nous pouvons dire, pour le cylindre de révolution, qu'on privilégie la représentation dont la coupe vertical est en vraie grandeur.

e) Cône de révolution

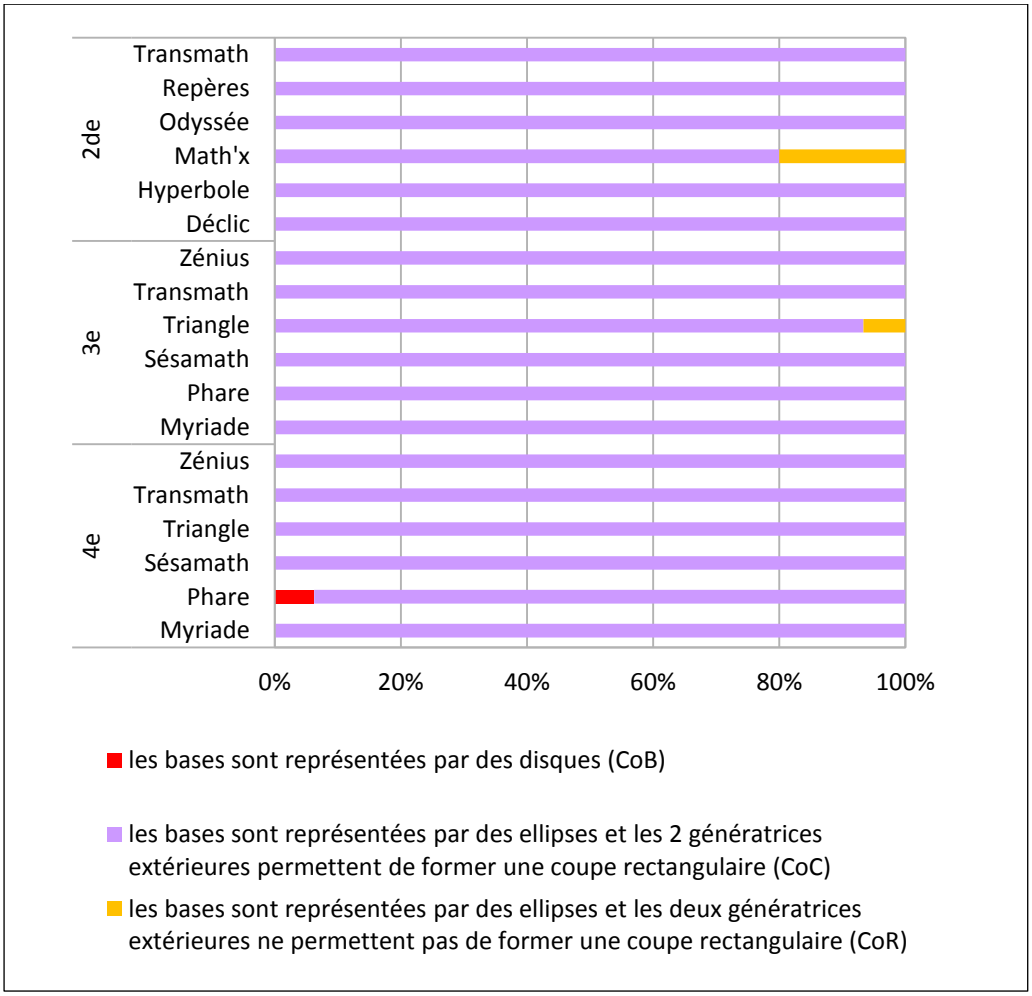
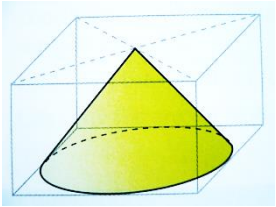


Figure 23. Graphique à barres empilées du pourcentage des catégories de dessin du cône de révolution dans les manuels français

La prédominance de la catégorie CoC dans le diagramme de la Figure 23 (en moyenne 98,2%) nous emmène au constat : la coupe verticale doit être représentée en vraie grandeur. Pour ce solide, les autres catégories CoB et CoR sont minoritaires.

A propos de la catégorie CoR, les dessins de cette catégorie apparaissent seulement une fois dans les manuels : Triangle de 3e et Math'x de 2de lorsque le cône de révolution est inscrit dans un parallélépipède rectangle. Pour exemple, le dessin dans le manuel Math'x de 2nd à la page 268 :



Mathématiquement, la représentation du cône de révolution dans le dessin ci-contre doit respecter le même paramètre d'angle de fuite que celui du parallélépipède rectangle : approximativement 45°. On ne peut pas le représenter en prenant l'angle de fuite de 90° comme dans les dessins de la catégorie CoC.

Néanmoins, pour ce dessin, on n'a pas l'impression que la hauteur du cône soit orthogonale à la base, le grand axe de l'ellipse n'étant pas perpendiculaire au segment joignant le sommet et le centre de l'ellipse. Ce dessin suggère mal un cône de révolution. Cela peut expliquer partiellement la minorité de cette catégorie.

f) Direction des fuyantes dans les dessins de catégorie PaF

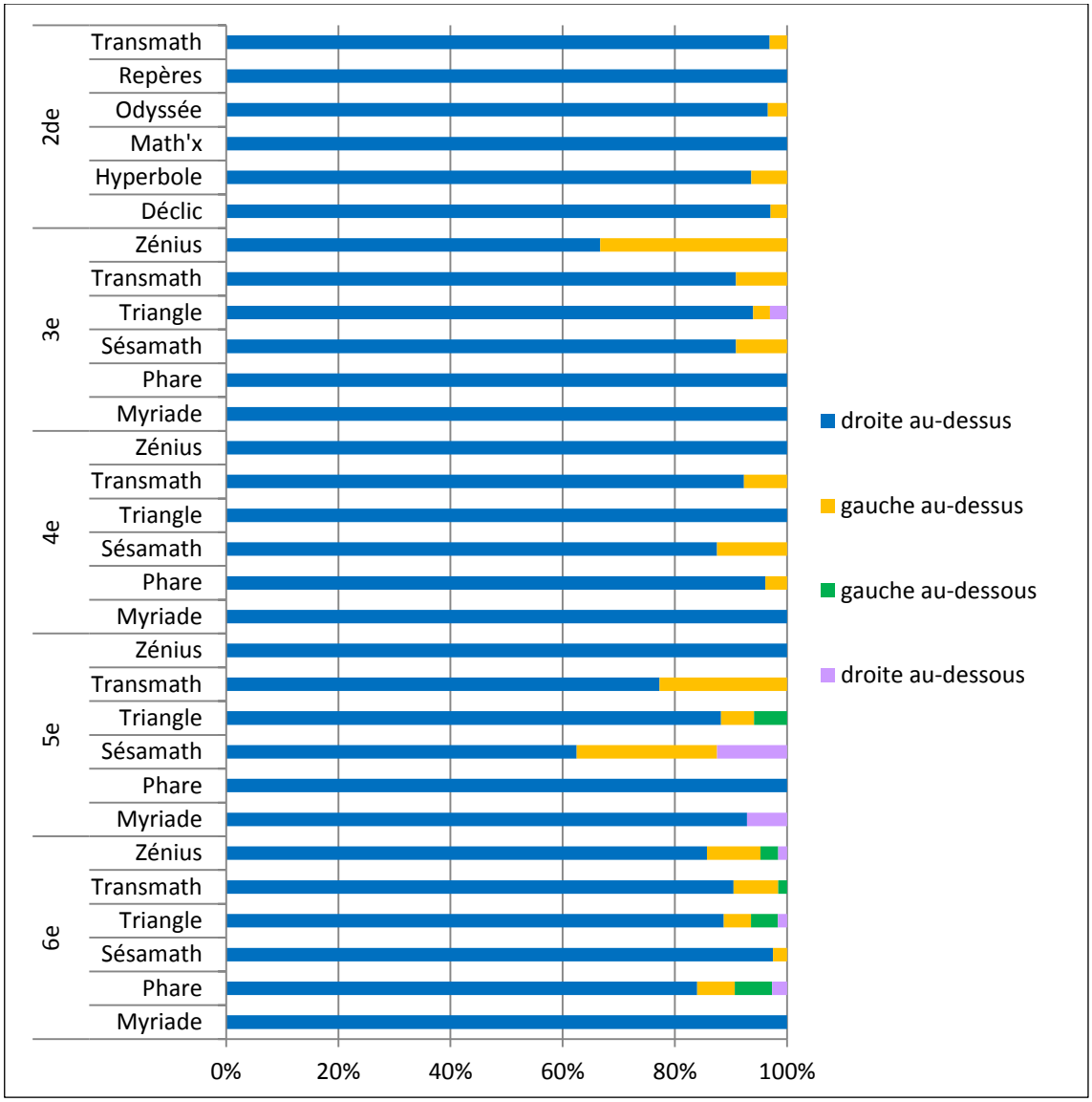


Figure 24. Graphique à barres empilées du pourcentage des choix de direction des fuyantes dans les dessins de catégorie PaF

Du diagramme de la Figure 24, nous trouvons que l'institution française privilégie largement les fuyantes de direction droite au-dessus (en moyenne 92,3%).

5.3 Règles de représentation du dessin : Cas du Viêt-Nam

Nous appliquons, dans cette section, la grille d'analyse de la section 5.1 à l'analyse de la partie Géométrie de l'espace des manuels des classes 8, 9, 11, 12.

5.3.1 Règles de représentation explicites du dessin

L'analyse du Tableau 80 nous permet de faire les constats suivants sur la composition et la disposition du système des règles de représentation du dessin dans les manuels vietnamiens.

L'enseignement explicite des règles de représentation se fait essentiellement en classe 11. En classe 12, on ajoute seulement celles concernant la sphère : représenter la sphère par un cercle et ajouter des ellipses qui apportent l'illusion de la troisième dimension.

Quant à la composition de la liste des règles de représentation, pour le groupe des règles de conservation, les propriétés de conservation, résultant de la projection, sont bien présentes, mais, nous ne trouvons pas celles des objets frontaux. C'est la conséquence de l'approche par projection où la représentation en vraie grandeur n'est pas abordée.

Pour les règles de non-conservation, au moment de leur présentation, on n'a pas encore enseigné les propriétés métriques dans l'espace : on parle alors de déformation des objets à deux dimensions, comme celle des rectangles qui « se déforme » en parallélogramme. Cela implique la non-conservation de la longueur des segments et de l'angle dans l'espace.

Pour lareprésentation de la troisième dimension, les deux règles déjà repérées en France sont présentes : des pointillés pour les parties cachées et des ellipses de la sphère.

Pour les règles d'un dessin « bien informé », seule la règle de représentation de la sphère par un cercle par projection orthogonale est abordée. Cela est à l'origine des la nécessité de règles implicites dans la représentation des autres solides : c'est ce que nous allons étudier dans la sous-section 5.3.2 suivante.

Manuels / Règles	8	9	11		12	
			standard	avancée	standard	avancée
Règle de conservation						
de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés			"Cours §5/Théorème 1a", p.72			
de la nature des objets à une dimension			"Cours §1", p.45 : droite, segment " Cours §5/Théorème 1b", p.73 : droite, demi-droite, segment	"Cours §1", p.41: droit, segment "Cours §5/Propriété 1", p.69 : droite "Cours§5/Corollaire", p.70 : demi-droite, segment		
du parallélisme	"Cours", p.107		" Cours §5/Théorème 1c", p.73	"Cours §1", p.42 "Cours §5/Propriété 2", p.70		
de la relation de concourrance			"Cours §1", p.45	"Cours §1", p.42		
de la relation d'incidence			"Cours §1", p.45	"Cours §1", p.42		
de la proportion des segments de même direction			" Cours §5/Théorème 1d", p.73	"Cours §5/Propriété 2", p.71		
de la nature des objets frontaux						
Règle de non-conservation						
de l'orthogonalité	"Cours", p.107					
de la nature des objets à deux dimensions	"Cours", p.107 : rectangle		" Cours §5/Attention", p.72 : droite " Cours §5", p.74 : triangle de forme quelconque [55] " Cours §5", p.74 : parallélogramme de forme quelconque [56]	" Cours §5", p.73 : cercle		

[55] par exemple : triangle latéral, triangle isocèle, triangle droit,…

			“ Cours §5”, p.75 : trapèze de forme quelconque [57] “ Cours §5”, p.75 : cercle			
de la mesure						
Règle de représentation de la troisième dimension						
règle des pointillés			“Cours §1”, p.45	“Cours §1”, p.42		
règle de représentation de la profondeur d'une sphère					“Cours”, p.42	
Règle pour un dessin « bien informé »					“Cours”, p.42 : représenter la sphère par un cercle	

Tableau 80. Règles de représentation explicites du dessin dans les manuels vietnamiens

[56] par exemple : carré, rectangle, losange,…
[57] par exemple : trapèze droit, trapèze isocèle

5.3.2 Règles de représentation implicites du dessin

Les données du Tableau 81 permettent de dégager les remarques suivantes.

Premièrement, quoique la règle de conservation des objets frontaux ne soit pas abordée dans les manuels, les éléments en vraie grandeur sont très fréquents dans les dessins de tous les solides examinés et pour toutes les classes 8, 9, 11, 12.

En effet, le pourcentage des dessins de catégorie PaF (semblable à PrF+PrB, CyB+CyC, PyF, CoB+CoC) est bien supérieur à celui des dessins de catégories PaR (semblable à PrR, CyR, PyR, CoR). Autrement dit, les dessins où une face ou une coupe verticale est représentée en vraie grandeur sont majoritaires.

De plus, les pourcentages des catégories PaR, PrR, CyR, PyR, CoR diminuent du collège au Lycée. Cette tendance est particulièrement claire quand nous examinons le passage du collège (classes 8 et 9) au lycée (classe 11 et 12). Cela montre que l'institution vietnamienne privilégie le choix de la représentation en vraie grandeur d'une face (de deux faces opposées) ou d'une coupe verticale du solide.

Deuxièmement, pour les solides de révolution (cylindre de révolution, cône de révolution), les pourcentages de dessins de catégories CyB et CoB sont toujours de 0% et celui des dessins de catégories CyC et CoC majoritaire, c'est-à-dire la base du'un solide de révolution n'est jamais représentée en vraie grandeur.

En outre, les catégories CyR (aucun dessin) et CoR (seulement un dessin dans le manuel de la classe 9) sont minoritaire : est-ce du à la non-efficacité pour la suggestion l'objet représenté ?

Le Tableau 82 et le Tableau 83 nous fournissent des informations sur le choix de la direction et de la longueur des fuyantes. A partir des données de ces tableaux, nous constatons que :

- pour la direction, la catégorie « droite, au-dessus » est la plus fréquente
- pour la longueur, seule la catégorie « réduction » est présente (100%).

L'institution vietnamienne privilégie donc implicitement ces deux catégories.

Manuels / Catégories	8	9	11 (standard)	11 (avancée)	12 (standard)	12 (avancée)
Nombre des dessins du parallélépipède rectangle	**33**	**3**	**7**	**7**	**10**	**11**
PaF	26 (78,8%)	2 (66,7%)	6 (85,7%)	7 (100%)	10 (100%)	11 (100%)
PaR	7 (21,2%)	1 (33,3%)	1 (14,3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Nombre des dessins du prisme droit (sauf parallélépipède rectangle)	**26**	**0**	**2**	**2**	**3**	**1**
PrF	14 (53,8%)	0	2 (100%)	2 (100%)	2 (66,7%)	1 (100%)
PrB	1 (3,8%)	0	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
PrR	11 (42,3%)	0	0 (0%)	0 (0%)	1 (33,3%)	0 (0%)
Nombre des dessins de la pyramide (la hauteur est aussi une arête latérale)			**5**	**4**	**1**	**0**
PyF			4 (80%)	4 (100%)	1 (100%)	0
PyR			1 (20%)	0 (0%)	0 (0%)	0
Nombre des dessins du cylindre de révolution		**37**			**5**	**6**
CyB		0 (0%)			0 (0%)	0 (0%)
CyC		37 (100%)			5 (100%)	6 (100%)
CyR		0 (0%)			0 (0%)	0 (0%)

Nombre des dessins du cône de révolution		**19**			**5**	**4**
CoB		0 (0%)			0 (0%)	0 (0%)
CoC		18 (94,7%)			5 (100%)	4 (100%)
CoR		1 (5,3%)			0 (0%)	0 (0%)

Tableau 81. Pourcentage des catégories de dessin de certains solides dans les manuels vietnamiens

Classes / Catégories	8	9	11 (standard)	11 (avancée)	12 (standard)	12 (avancée)
Nombre des dessins du parallélépipède rectangle de la catégorie PaF	**26**	**2**	**6**	**7**	**10**	**11**
Gauche, au-dessus	2 (7,7%)	0 (0%)	1 (16,7%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Droite, au-dessus	23 (88,5%)	2 (100%)	4 (66,7%)	6 (85,7%)	10 (100%)	11 (100%)
Droite, au-dessous	1 (3,8%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Gauche, au-dessous	0 (0%)	0 (0%)	1 (16,7%)	1 (14,3%)	0 (0%)	0 (0%)

Tableau 82. Pourcentage des choix de direction des fuyantes dans les dessins de catégorie PaF de manuels vietnamiens

Classes / Catégories	8	9	11 (standard)	11 (avancée)	12 (standard)	12 (avancée)
Nombre des dessins du cube de la catégorie PaF	**4**	**0**	**5**	**3**	**6**	**10**
Réduction	4 (100%)	0	5 (100%)	3 (100%)	6 (100%)	10 (100%)
Agrandissement	0 (0%)	0	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)

Tableau 83. Pourcentage des choix de longueur des fuyantes dans les dessins de catégorie PaF du cube de manuels vietnamiens

5.4 Conclusion

L'usage de la grille d'analyse construite dans la section 5.1 pour étudier des règles de représentation du dessin dans les deux institutions française et vietnamienne nous a permis de mettre en évidence des technologies possibles dans le modèle de référence (praxéologie de référence) dans le Chapitre 4 : liste des règles de représentation (θ_R) et caractéristiques de dessins prototypiques (θ_D) – cela fournit également des éléments de réponse à la question Q3b'.

Nous résumons ci-dessous ces résultats que nous considérons comme des choix, ressemblants ou différents, de chaque institution.

Nous présentons, d'abord, la liste des règles de représentation explicites du dessin des deux pays (Tableau 84).

Pays / Règles	France	Viêt-Nam
Règle de conservation		
de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés	oui	oui
de la nature des objets à une dimension	oui	oui
du parallélisme	oui	oui
de la relation de concourrance	oui	oui
de la relation d'incidence	non	oui
de la proportion des segments de même direction	oui	oui
de la nature des objets frontaux	oui	non
Règle de non-conservation		
de l'orthogonalité	oui	oui
de la nature des objets à deux dimensions	oui : - segments égaux, - carré, - rectangle, - cercle.	oui : - droite, - triangle particulier, - parallélogramme particulier, - cercle.
de la mesure	oui : - longueur de fuyantes, - angle droit.	non
Règle de représentation de la troisième dimension		
règle des pointillés	oui	oui
règle de représentation de la profondeur d'une sphère	non	oui
Règle pour un dessin « bien informé »	oui : - réduction de fuyantes, - angle de fuite.	oui : - représenter la sphère par un cercle.

Tableau 84. ègles de représentation explicites du dessin de la France et du Viêt-Nam

Les différences dans la liste des règles de représentation explicites de deux pays nous montrent des choix différents de chaque institution pour la représentation en perspective.

• L'une de ces différences concerne les règles de conservation, tout particulièrement celles des objets frontaux : présente en France, absente au Viêt-Nam. On peut l'expliquer par le choix au

Viêt-Nam de l'approche de la projection cylindrique alors qu'en France, c'est celui de l'approche par cube de référence.

• Parmi les règles de non-conservation, en France, la non-conservation de la mesure est enseignée au début de la Géométrie de l'espace (en sixième pour la représentation des fuyantes du parallélépipède rectangle. Au Viêt-Nam, cette règle est absente : la représentation en perspective prend place dans le chapitre du parallélisme et seules des propriétés affines sont abordées - des propriétés métriques ne seront abordées qu'après. Ainsi, l'influence de l'organisation de la Géométrie de l'espace est rendue manifeste ici.

• Les règles de représentation de la troisième dimension et les règles pour un dessin « bien informé », sont particulièrement présentes pour la représentation de la sphère au Viêt-Nam, tandis qu'en France, elles restent implicites.

Cependant, dans les manuels français, des contraintes sur le rapport de réduction et l'angle de fuite sont explicitées, alors qu'elles sont absentes des manuels vietnamiens en raison du choix de l'approche par projection.

Quant aux règles de représentation implicites, l'étude des dessins de solides dans les manuels atteste de la large prédominance des dessins avec pointillés. Par exemple, un carré n'est pas le dessin d'un cube.

Ensuite, nous donnons, dans le Tableau 85, les dessins privilégiés de certains solides dans les deux pays. Nous appelons ces dessins, *dessins prototypiques*.

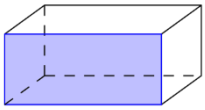
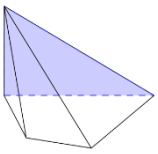
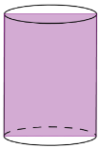
Solide	**Parallélépipède rectangle**	**Pyramide dont la hauteur est aussi une arête latérale**	**Cylindre de révolution**	**Cône de révolution**
Dessin				
Catégorie de dessin	**PaF** : au moins une face est représentée par un rectangle.	**PyF** : une face latérale qui contient la hauteur est représentée par un triangle rectangle.	**CyC** : les bases sont représentées par des ellipses et les 2 génératrices extérieures permettent de former une coupe rectangulaire.	**CoC** : la base est représentée par une ellipse et les deux génératrices extérieures permettent de former une coupe en forme de triangle isocèle.

Tableau 85. Dessins prototypiques dans les manuels des deux pays France et Viêt-Nam

Pour le dessin du parallélépipède rectangle de catégorie PaF, les fuyantes sont, en priorité, orientées vers la droite au-dessus. En outre, contrairement à la France, la réduction des fuyantes n'est pas présentée comme une règle dans les manuels vietnamiens, mais elle est implicite dans tous les dessins du cube de catégorie PaF.

Les dessins prototypiques mentionnés ci-dessus nous permettent d'énoncer certaines règles de représentation spécifiques à certains solides dans les deux institutions française et vietnamienne.

• Pour le cube :

- deux carrés égaux et 4 parallélogrammes pour les 6 faces du cube,
- des segments parallèles et égaux pour les arêtes opposées du cube,
- des fuyantes parallèles, de même longueur et orientées vers à droite au-dessus pour la profondeur,
- des fuyantes plus courtes que les côtés du carré,
- des pointillés pour les arêtes cachées du cube.

• Pour la pyramide dont la hauteur est aussi une arête latérale :

- des triangles de même sommet pour les faces latérales et un quadrilatère pour la base de la pyramide,
- un triangle rectangle pour une face latérale contenant la hauteur de la pyramide,
- des pointillés pour les arêtes cachées de la pyramide.

• Pour le cylindre de révolution :

- deux ellipses égales pour deux bases du cylindre,
- deux segments de tangente de deux ellipses, parallèles et égaux, pour les génératrices du cylindre,
- un rectangle formé de deux segments de tangente pour la coupe verticale du cylindre,
- des pointillés pour les parties cachées des bases du cylindre.

• Pour le cône de révolution :

- une ellipse pour la base du cône,
- deux segments qui sont tangents à l'ellipse, égaux, issus d'un même point pour les génératrices du cône,
- un triangle isocèle formé de deux segments tangents pour la coupe verticale du cône,
- des pointillés pour les parties cachées de la base du cône.

Ces règles de représentation des dessins prototypiques des deux institutions observées conduisent à formuler à des hypothèses de recherche sur le rapport personnel des élèves à l'objet « représentation en perspective » dans la conclusion de cette partie II.

Conclusion de la partie II : hypothèse de recherche et nouvelle question

Nous résumons, d'abord, les résultats d'analyse des chapitres de cette partie II afin de répondre aux trois questions de départ présentées dans la conclusion de la partie I. Ces résultats prennent en compte la perspective comparatiste des deux institutions française et vietnamienne. Ces résultats ouvrent de nouvelles questions et des hypothèses que nous étudierons dans la partie suivante de la thèse.

Pour la question Q3a concernant le choix du mode de représentation dans l'enseignement, les analyses du Chapitre 3 montrent que les deux pays choisissent des perspectives cylindriques différentes : en France, une perspective cavalière, au Viêt-Nam une perspective parallèle.
Chaque pays prend une approche mathématique différente, cohérente avec l'organisation des contenus de la Géométrie de l'espace et conforme à leurs intentions d'enseignement : l'approche par cube de référence dans les manuels français, l'approche par projection (projection parallèle) dans les manuels vietnamiens utilisent (officiellement).

La question Q3b' concerne les caractéristiques du dessin prototypique. L'analyse des dessins dans les manuels (Chapitre 5) permet de formuler, en France et au Viêt-Nam, certaines règles implicites du contrat didactique de la représentation en perspective :
- la règle sur l'existence du codage de la troisième dimension pour les dessins d'un objet à trois dimensions :

R.3D : Les dessins d'un objet à trois dimensions doivent comporter des pointillés.

- les règles sur la représentation des génératrices du cylindre et du cône de révolution :

R.CyC : Pour le cylindre de révolution dont les bases sont représentées par des ellipses, les deux génératrices extérieures permettent de former une coupe rectangulaire. *R.CoC : Pour le cône de révolution dont la base est représentée par une ellipse, les deux génératrices extérieures sont égales.*

- la règle sur la longueur des fuyantes (implicite dans l'institution vietnamienne, explicitée au début du collège en France) :

R.CuF : Les fuyantes dans le dessin du cube sont plus courtes que les arêtes frontales.

La question Q3c concerne le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin. Au vu des analyses praxéologiques du Chapitre 4, l'évolution curriculaire en France et au Viêt-Nam différe quant aux quatre praxéologies locales suivantes:
- d'observation,

- de dessin prototypique,
- de règles de représentation,
- de projection.

Nous récapitulons l'évolution curriculaire des éléments techniques-technologiques de ces praxéologies dans le schéma de la Figure 25 suivante.

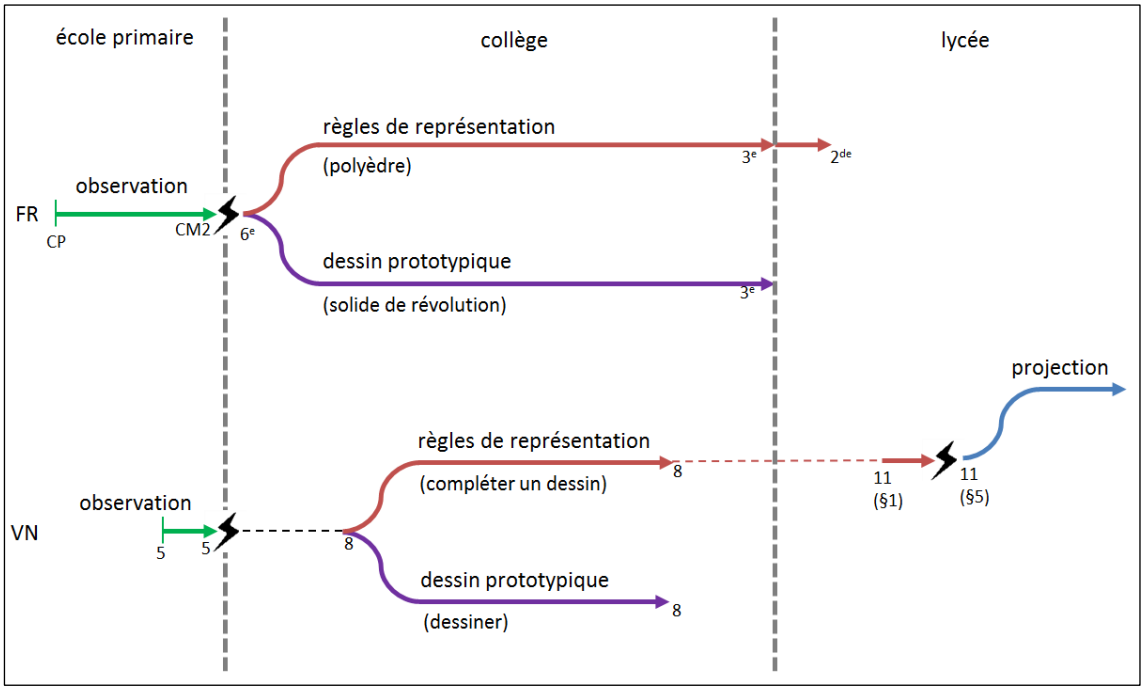


Figure 25. Evolution des éléments techniques-technologiques dans les praxéologies de passage d'un objet géométrique dans l'espace à un dessin en France et au Viêt-Nam

En France, on commence, à l'école primaire, par l'observation de solides matériels en CP. Puis au collège, on introduit des règles de représentation et de façon répétée des dessins respectant ces règles, c'est-à-dire des dessins prototypiques. L'usage de ces deux éléments techniques-technologiques dépend de la nature du solide : polyèdre (pour la première) ou solide de révolution (pour la deuxième). Au lycée, nous trouvons encore des types de tâche mobilisant pour l'accomplir et la justifier des règles de représentation.

Au Viêt-Nam, l'observation de solides est présente dès la classe 5 à l'école primaire. Puis, en classe 8[58] du collège comme en France, règles de représentation et dessin prototypique sont co-présents. Contrairement à l'institution française, ces éléments techniques-technologiques dépendent du type de tâches : « compléter le dessin d'un objet géométrique de l'espace » pour la première, et « dessiner un objet géométrique de l'espace » pour la deuxième. Au début de la classe 11[59] au lycée, seules les règles de représentation se maintiennent. A ce niveau on introduit explicitement la projection parallèle qui sera attendue jusqu'en fin de la classe 12[60] pour accomplir et justifier les types de tâches.

[58] A la classe 8, l'élève ne travaille que sur les polyèdres.
[59] A la classe 11, l'élève ne travaille que sur les polyèdres.
[60] A la classe 12, on ajoute les solides de révolution.

Le Chapitre 4 a mis en évidence des ruptures et même des entrelacements de praxéologies dans le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin dans l'évolution curriculaire en France et au Viêt-Nam.

Cela nous conduit à nous interroger sur le rapport personnel des élèves français et vietnamien à l'objet « représentation en perspective » dans ce contexte, plus concrètement,

Q4') Quelles sont les praxéologies personnelles des élèves, pour le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin, présentes à la fin du processus d'enseignement de la représentation en perspective dans les deux institutions? Quelles sont en particulier les technologies personnelles?

Dans la partie suivante, nous allons présenter un dispositif expérimental pour mettre à l'épreuve les hypothèses relatives aux règles implicites du contrat didactique de la représentation en perspective posées dans cette partie et pour caractériser les praxéologies personnelles des élèves pour le passage d'un objet de l'espace à un dessin.

PARTIE III

Etude expérimentale du rapport personnel de l'élève à l'objet « représentation en perspective »

Dans cette partie, nous allons concevoir une expérimentation dont les observables permettent l'étude conjointe du rapport institutionnel à l'objet « représentation en perspective » et du rapport personnel des élèves français et vietnamiens à cet objet. Plus précisément, notre travail a pour objectifs de :

1- valider l'existence de règles implicites du contrat didactique de la représentation en perspective (Q3b')
- portant sur la troisième dimension

R.3D : Les dessins d'un objet à trois dimensions doivent comporter des pointillés.

- spécifiques à certains solides

Règles implicites spécifiques \ Institutions		française	vietnamienne
R.CuF	*Les fuyantes dans le dessin du cube sont plus courtes que les arêtes frontales.*	explicite	oui
R.CyC	*Pour le cylindre de révolution dont les bases sont représentées par des ellipses, les deux génératrices extérieures permettent de former une coupe rectangulaire.*	oui	oui
R.CoC	*Pour le cône de révolution dont la base est représentée par une ellipse, les deux génératrices extérieures sont égales.*	oui	oui

Tableau 86. Règles implicites spécifiques à certains solides du contrat didactique de la représentation

2- chercher des éléments de réponse à la question de recherche :

Q4') Quelles sont les praxéologies personnelles des élèves, pour le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin, présentes à la fin du processus d'enseignement de la représentation en perspective dans les deux institutions? Quelles sont en particulier les technologies/théories personnelles ?

Notre expérimentation prendra la forme d'un questionnaire individuel commun aux deux pays et composé d'une même série de questions. Elle se déroulera à la fin du processus de l'enseignement secondaire de la géométrie de l'espace et donc de la représentation en perspective : classe de seconde en France et classe 12 au Viêt-Nam.

Chapitre 6
Analyse *a priori* de la situation expérimentale

6.1 Choix du questionnaire

Pour étudier le rapport personnel de l'élève à l'objet « représentation en perspective », nous retenons ici le point de vue méthodologique présenté dans sa thèse par Le Van (2001) sur l'intérêt de provoquer des perturbations au sein du rapport institutionnel à un objet de savoir.

> En effet, les situations habituelles ne suffissent pas pour obtenir des observables relatifs au rapport de ces sujets à un objet de savoir, car dans de telles situations, les sujets n'exposent que ce qui est négocié explicitement dans la classe entre l'enseigné et l'enseignant.
> Les problèmes inhabituels provoquent une perturbation dans le système de référence du sujet.
>
> (*Op. cité*, p.230)

Comment créer des perturbations concernant la représentation en perspective ?

Nous organisons notre expérimentation autour du type de tâches 5 « Associer un *dessin* donné à un *objet géométrique de l'espace* donné » pour les raisons suivantes.
Premièrement, ce type de tâches est présent dans les manuels des deux pays. Cela assure la compréhension de ce qui est demandé et de ce qu'il faut faire (praxis).
Deuxièmement, la demande d'une justification vise à rendre explicite les éléments technologiques/théoriques personnels (logos) des élèves observés.
Troisièmement, on peut jouer sur les valeurs des variables de ce type de tâches en particulier sur la variable « dessin » : la valeur « dessins non-prototypiques » permet de construire des situations inhabituelles. C'est la raison le plus importante du choix de ce type de tâches.

Remarque. Bien que le types de tâches 4 « Dessiner un *objet géométrique de l'espace* » et 6 « Compléter le dessin d'un *objet géométrique de l'espace* » satisfassent les deux premières conditions, la construction de situations inhabituelles autour de ces types de tâche ne peut se faire, ce qui n'est pas l'objet de notre étude.

Pour les questions de notre expérimentation, nous avons donc choisi un énoncé du type de tâches 5 proche de ceux présents dans les manuels: « *Parmi les dessins suivants, lesquels sont dessins de représentation de [l'objet géométrique de l'espace] ? Justifier toutes vos réponses* », mais les dessins proposés sont inhabituels.
La réponse à ces questions se compose de deux parties : acceptation/refus et justification.

La demande de justification est indispensable *pour rendre explicite des discours technologiques/théoriques* concernant le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin.

Nous avons joué sur des valeurs des deux variables « objet géométrique de l'espace » et « dessin » du type de tâches 5.

Pour la variable « objet géométrique de l'espace », nous avons choisis trois solides : cube (question 1), cylindre de révolution (question 2) et cône de révolution (question 2).
D'une part, ce sont des solides familiers dans les deux institutions (France et Viêt-Nam).
D'autre part, ce sont les solides concernés par les règles de contrat didactique que nous avons formulées comme hypothèses (R.CuF, R.CyC, R.CoC).
Enfin, on peut considérer ces solides comme des représentants de deux groupes de solides : polyèdre et solide de révolution. En particulier, les choix du cylindre et du cône de révolution permettent de concevoir plusieurs dessins non-prototypiques d'un solide de révolution.

Pour la variable « dessin », nous envisageons principalement deux valeurs possibles : « dessin prototypique » et « dessin non-prototypique » (Tableau 87).

a) Les dessins 1.3, 2.1, 2.4 et 3.4 sont prototypiques. Leur présence met l'élève dans une situation habituelle et permet de vérifier que les dessins proposés sont bien prototypiques dans l'institution observée.
- Les dessins 2.4, 3.4 sont privilégiés dans les manuels français et vietnamiens (*cf.* la section 5.4). Nous prévoyons donc un accord massif pour ces dessins.
- Le dessin 1.3 du cube respecte bien la règle explicite (France) ou implicite[61] (Viêt-Nam) R.CuF. Cependant, le rapport habituel entre les fuyantes et les arêtes frontales est compris entre 0,5 et 0,7 pour les représentations prototypiques, comme l'explicite le manuel Repère 2de 2010 (*cf.* la section 3.1.2). Ici le rapport entre les fuyantes et les arêtes frontales est beaucoup plus petit puisqu'il est de 0,2.
- Le dessin 2.1 est proche du dessin 2.4. La différence est que ses bases sont représentées par des cercles. Ce dessin est présent dans les manuels français (*cf.* la section 3.1.2). Dans les manuels vietnamiens, bien qu'il soit absent, on présente une règle de représentation des cercles dans l'espace :

> Le dessin de projection parallèle d'un cercle est une ellipse ou un cercle, ou en particulier un segment.
>
> (Doan et al., 2007a, p. 73)

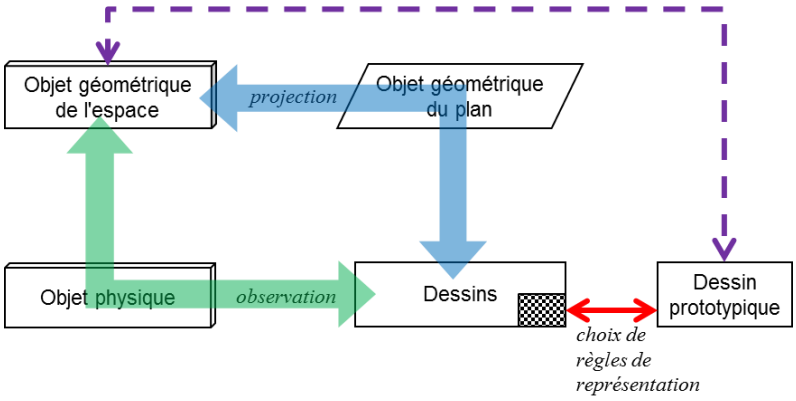
Quel effet peut avoir cette modification du dessin prototypique du cube (dessin 1.3) et du cylindre de révolution (dessin 2.1) ?

b) Pour les dessins non-prototypiques, sa présence met l'élève dans une situation inhabituelle. Regardons maintenant nos choix pour les dessins non-prototypiques. Ce sont :
- des dessins non-prototypiques enfreignant les règles implicites R.CuF (dessin 1.2), R.CyC (dessin 2.3), R.CoC (dessin 3.2). Le refus de ces dessins *permet la validation de ces règles.*

[61] on va vérifier à l'aide du dessin 1.2.

- des dessins non-prototypiques sans pointillés, c'est-à-dire sans codage de la troisième dimension (dessins 1.1, 1.4, 2.2, 2.5, 2.6, 3.1, 3.3, 3.5, 3.6). Ils enfreignent la règle implicite R.3D. Le refus de ces dessins *permet la validation de cette règle.* De plus, tous ces dessins, sauf les dessins 1.4 et 3.6, peuvent être interprétés comme des représentations d'objet du plan (carré, triangle, cercle,…). *Quelle peuvent être les justifications pour accepter de tels dessins comme dessin pour représenter un objet de l'espace ?*

Reprenons le schéma de la Figure 17 « Significations épistémologiques et didactiques du passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin ».



Significations épistémologiques et didactiques du passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin

En nous appuyant sur ce schéma, nous considérons deux grandes catégories de justifications qui sont des candidats pour les éléments technologiques/théoriques personnelles des élèves autour du type de tâches 5 :
- « transformation » : qui se décompose en deux sous-catégories fondamentales différentes : « projection » et « observation »,
- « dessin prototypique 3D - règles de représentation ».

Remarque. Dans une justification, plus d'une catégorie peuvent intervenir. Par exemple, on peut trouver une justification mixte « observation » et « projection » comme signalée dans la section 1.3.3 : méthode de l' « observateur-projecteur ».

En outre, en raison de l'absence des pointillés, les dessins 1.1, 1.4, 2.2, 2.5, 2.6, 3.1, 3.3, 3.5, 3.6 peuvent être considérés comme dessins prototypiques d'une figure plane (par exemple, un triangle, un carré, un cercle,…). Nous appelons les justifications s'appuyant sur la lecture de ces dessins comme dessin d'une figure plane : « dessin prototypique 2D ».

L'analyse *a priori* suivante formule des observables possibles pour ces catégories épistémologiques.

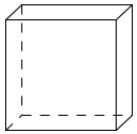
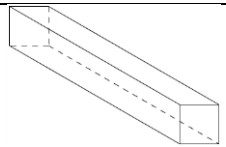
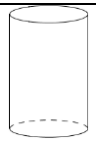
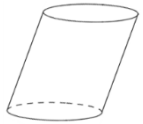
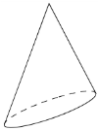
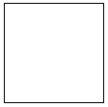
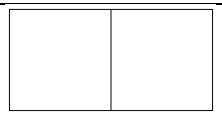
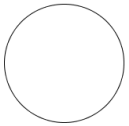
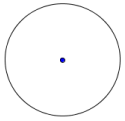
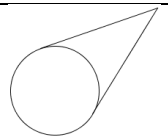
Dessin		prototypique	non-prototypique
avec pointillés	cube	 Dessin 1.3	 Dessin 1.2
	cylindre de révolution	 Dessin 2.4 Dessin 2.1	 Dessin 2.3
	cône de révolution	Dessin 3.4	 Dessin 3.2
sans pointillés	cube		 Dessin 1.1  Dessin 1.4
	cylindre de révolution		Dessin 2.2  Dessin 2.5 Dessin 2.6
	cône de révolution		Dessin 3.1  Dessin 3.3 Dessin 3.5  Dessin 3.6

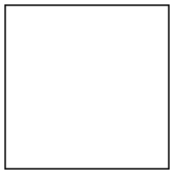
Tableau 87. Dessins proposés aux élèves dans le questionnaire

6.2 Analyse *a priori* de chacune des questions

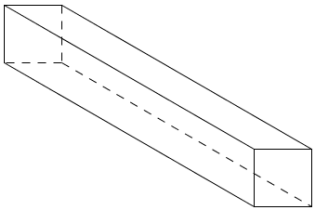
6.2.1 Question 1

a) Texte de la question

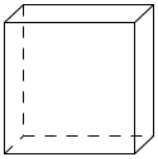
Parmi les dessins suivants, lesquels sont des dessins de représentation d'un cube ? Justifier toutes vos réponses.



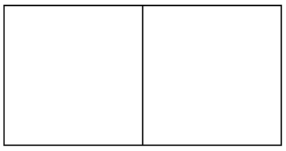
Dessin 1.1



Dessin 1.2



Dessin 1.3



Dessin 1.4

b) Point de vue mathématique sur les dessins proposés

Tous les dessins proposés sont des images d'une projection cylindrique.
Nous présentons ci-après un plan de projection et une direction d'une projection cylindrique pouvant produire chacun des dessins non-prototypiques 1.1, 1.2 et 1.4.

Nous considérons pour ces trois dessins un plan de projection parallèle à une face du cube : ce choix est en cohérence avec l'existence dans chacun des dessins d'un carré comme représentant d'une face du cube.

Pour le dessin 1.1, nous considérons une direction de projection parallèle à une arête du cube. Le dessin de représentation dans ce cas est un carré. Dans l'institution française, c'est un dessin inhabituel. Dans l'institution vietnamienne, ce dessin est présent en classe 11 comme image d'un cube (activité 3, page 74 du manuel de Géométrie 11, série standard)[62]. Sa proposition en classe 12, moment de notre expérimentation, peut contribuer à l'évaluation de la conformité du rapport personnel de l'élève au rapport institutionnel : *des éléments technologiques de la catégorie « projection » interviennent-ils pour juger ce dessin ?*

Le dessin 1.2 *est un dessin qu'*Audibert (1990, p. 77) *propose pour vérifier une propriété qualitative de la perspective cavalière : « elle ne doit pas choquer l'œil ».* Une direction de projection « presque » parallèle à la face frontale apportera l'allongement des fuyantes sur le dessin d'un cube. Bien que ce dessin soit l'image possible de la projection mentionnée, il enfreint la règle R.CuF « *Les fuyantes dans le dessin du cube sont plus courtes que les arêtes frontales ». Le refus de ce dessin chez les élèves vietnamiens conduira donc à la validation de cette règle implicite.*

[62] Voir l'Annexe 3.

Pour le dessin 1.4, la direction de projection est parallèle à la diagonale de la face qui n'est pas parallèle au plan de projection. Ce choix donne une représentation inhabituelle du cube pour les élèves de deux pays : deux carrés de même côté accolés.

Remarque. Le dessin 1.3 est un dessin prototypique dans les institutions française et vietnamienne. Il est à l'évidence l'image d'une projection cylindrique oblique.

c) Réponses possibles pour les dessins non-prototypiques

Catégorie de justification	Acceptation	
	Oui	**Non**
Dessin 1.1		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cube dont le plan est parallèle à une face et la direction est parallèle aux arêtes orthogonales à cette face.	Le dessin est l'image de la projection d'un autre solide (une pyramide à base carrée par exemple).
		Aucune projection d'un cube ne peut donner ce dessin.
Observation	C'est la vision d'un cube quand on se place bien devant une face du cube et en étant proche.	Cela peut être la vision d'un autre objet (une pyramide à base carrée vue de dessous par exemple).
		Aucune observation d'un cube ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation		En référence à un dessin prototypique d'un cube, le dessin 1.1 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin prototypique 2D		C'est le dessin prototypique d'un carré.
Dessin 1.2		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cube dont le plan est parallèle à une face et la direction est presque parallèle à cette face.	Le dessin est l'image de projection d'un parallélépipède rectangle.
		Aucune projection d'un cube ne peut donner ce dessin.
Observation	La longueur de segment dépend de l'angle de vue, alors c'est la vision possible d'un cube avec un angle de vue convenable.	Cela peut être la vision d'un parallélépipède rectangle.
		Aucune observation d'un cube ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation	En référence à un dessin prototypique d'un cube, le dessin 1.1 satisfait à certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).	C'est le dessin prototypique d'un parallélépipède rectangle.
		En référence à un dessin prototypique d'un cube, le dessin 1.2 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).

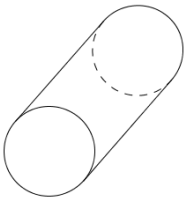
Dessin 1.3		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cube dont le plan est parallèle à une face et la direction n'est pas orthogonale à cette face.	
Observation	C'est la vision quand on se place devant une face d'un cube mais en haut et à droite.	
Dessin prototypique 3D – règles de représentation	En référence à un dessin prototypique d'un cube, le dessin 1.3 satisfait à toutes les règles de représentation (*cf.* la section 5.4).	C'est le dessin prototypique d'un parallélépipède rectangle.
		En référence à un dessin prototypique d'un cube, les fuyantes sont trop courtes par rapport aux arêtes frontales.
Dessin 1.4		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cube dont le plan est parallèle à une face et la direction est parallèle à la diagonale de la face orthogonale à cette face.	C'est l'image de projection d'un (des) autre(s) solide(s) (par exemple, deux cubes comme dans le dessin 1.1).
		Aucune projection d'un cube ne donne ce dessin.
Observation	C'est la vision en se plaçant devant une arête verticale et proche du cube.	Cela peut être la vision d'un autre objet (par exemple, deux cubes comme dans le dessin 1.1).
		Aucune observation d'un cube ne peut donner ce dessin (deux carrés).
Dessin prototypique 3D – règles de représentation		En référence à un dessin prototypique d'un cube, le dessin 1.4 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin prototypique 2D		C'est le dessin prototypique de deux carrés de même côté ou un rectangle.

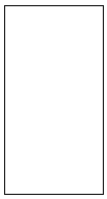
Tableau 88. Observables des réponses oui/non dans la question 1

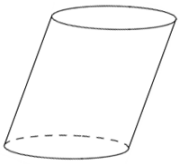
6.2.2 Question 2

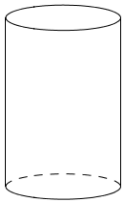
a) Texte de la question

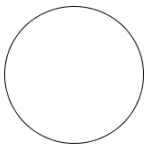
Parmi les dessins suivants, lesquels sont des dessins de représentation d'un cylindre de révolution ? Justifier toutes vos réponses.


Dessin 2.1


Dessin 2.2


Dessin 2.3


Dessin 2.4


Dessin 2.5

Dessin 2.6

b) Point de vue mathématique sur les dessins proposés

Le Tableau 89 présente des dessins proposés selon la combinaison de deux paramètres de la projection cylindrique : plan et direction de projection. Les valeurs intéressantes sont « parallèle aux bases du cylindre », « parallèle à l'axe du cylindre », « ni parallèle aux bases ni parallèle à l'axe ».

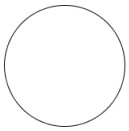
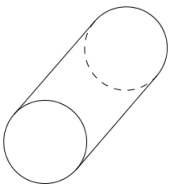
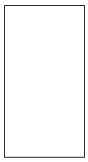
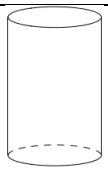
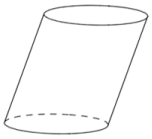
Plan \ Direction	parallèle aux bases du cylindre	parallèle à l'axe du cylindre	ni parallèle aux bases ni parallèle à l'axe
parallèle aux bases du cylindre		 Dessin 2.5	 Dessin 2.1
parallèle à l'axe du cylindre	 Dessin 2.2		 Dessin 2.4
ni parallèle aux bases ni parallèle à l'axe		Dessin 2.6	 Dessin 2.3

Tableau 89[63]. Répartition des dessins proposés du cylindre de révolution selon le plan et la direction de projection

[63] Les cellules grises signifient l'inexistence de la projection.

Si l'on choisit, pour la direction de projection, la valeur « parallèle à la base du cylindre », le changement de valeurs du plan de projection : « parallèle à l'axe du cylindre », « ni parallèle aux bases ni parallèle à l'axe », modifie les dimensions du rectangle représentant le cylindre de révolution. Cependant, comme la question posée n'aborde pas la mesure, nous considérons le même dessin 2.2 pour les deux cas.

Bien que le dessin 2.3 puisse être considéré comme résultant d'une projection, il ne respecte pas la règle R.CyC « *Pour le cylindre de révolution dont les bases sont représentées par des ellipses, les deux génératrices extérieures permettent de former une coupe rectangulaire* ». Le refus de ce dessin nous permet alors de valider cette règle du contrat didactique.

c) Réponses possibles pour les dessins non-prototypiques

Catégorie de justification	Acceptation	
	Oui	**Non**
Dessin 2.1		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cylindre de révolution dont le plan est parallèle aux bases et la direction n'est pas parallèle à l'axe.	Le dessin est l'image de projection d'un autre solide (un cylindre oblique par exemple).
		Aucune projection d'un cylindre de révolution ne donne ce dessin.
Observation	C'est la vision d'un cylindre de révolution en se plaçant devant une de ses bases et à droite.	Cela peut être la vision d'un autre objet (un cylindre oblique par exemple).
		Aucune observation d'un cylindre de révolution ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation	En référence au dessin prototypique d'un cylindre de révolution, le dessin 2.1 satisfait des règles de représentation (*cf.* la section 5.4).	C'est le dessin prototypique d'un autre objet (un cylindre oblique par exemple).
		En référence au dessin prototypique d'un cylindre de révolution, le dessin 2.1 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin 2.2		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cylindre de révolution dont le plan est parallèle à l'axe et la direction est parallèle aux bases.	Le dessin est l'image de projection d'un autre objet (un parallélépipède rectangle par exemple).
		Aucune projection d'un cylindre de révolution ne peut donner ce dessin.
Observation	C'est la vision en se plaçant devant la face latérale et proche d'un cylindre de révolution.	Cela peut être la vision d'un autre objet (un parallélépipède rectangle par exemple).
		Aucune observation d'un cylindre de révolution ne peut donner ce dessin;

Dessin prototypique 3D – règles de représentation		En référence à un dessin prototypique d'un cylindre de révolution, le dessin 2.2 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin prototypique 2D		C'est le dessin prototypique d'un rectangle.
Dessin 2.3		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cylindre de révolution dont le plan et la direction n'est pas parallèle aux bases, ni à l'axe.	Le dessin est l'image de projection d'un cylindre oblique.
		Aucune projection d'un cylindre de révolution ne donne ce dessin.
Observation	C'est la vision possible d'un cylindre de révolution avec un point de vue convenable.	Cela peut être la vision d'un cylindre oblique.
		Aucune observation d'un cylindre de révolution ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation	En référence au dessin prototypique d'un cylindre de révolution, le dessin 2.3 satisfait à certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).	C'est le dessin prototypique d'un cylindre oblique.
		En référence au dessin prototypique d'un cylindre de révolution, le dessin 2.3 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin 2.4		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cylindre de révolution dont le plan est parallèle à la coupe verticale et la direction n'est pas parallèle aux bases.	
Observation	C'est la vision quand on se place devant d'un cylindre de révolution mais en haut.	
Dessin prototypique 3D – règles de représentation	En référence à un dessin prototypique d'un cylindre de révolution, le dessin 2.4 satisfait à toutes les règles de représentation (*cf.* la section 5.4).	
Dessin 2.5		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cylindre de révolution dont le plan est parallèle aux bases et la direction est parallèle à l'axe.	Le dessin est l'image de projection d'un autre objet (une sphère par exemple).
		Aucune projection d'un cylindre de révolution ne peut donner ce dessin.

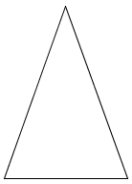
Observation	C'est la vision en se plaçant devant une base et proche d'un cylindre de révolution.	Cela peut être la vision d'un autre objet (une sphère par exemple).
		Aucune observation d'un cylindre de révolution ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation		C'est le dessin prototypique d'une sphère.
		En référence à un dessin prototypique d'un cylindre de révolution, le dessin 2.5 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin prototypique 2D		C'est le dessin prototypique d'un cercle.
Dessin 2.6		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cylindre de révolution dont le plan n'est pas parallèle aux bases ni à l'axe et la direction est parallèle à l'axe.	Le dessin est l'image de projection d'un autre objet (un cercle par exemple).
		Aucune projection d'un cylindre de révolution ne peut donner ce dessin.
Observation	C'est la vision possible d'un cylindre de révolution avec un point de vue convenable.	Cela peut être la vision d'un autre objet (un cercle par exemple).
		Aucune observation d'un cylindre de révolution ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation		C'est le dessin prototypique d'un cercle.
		En référence au dessin de prototypique d'un cylindre de révolution, le dessin 2.6 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin prototypique 2D		C'est le dessin prototypique d'une ellipse.

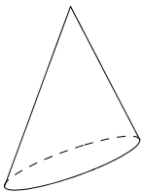
Tableau 90. Observables des réponses oui/non dans la question 2

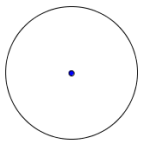
6.2.3 Question 3

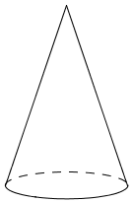
a) Texte de la question

Parmi les dessins suivants, lesquels sont des dessins de représentation d'un cône de révolution ? Justifier toutes vos réponses.

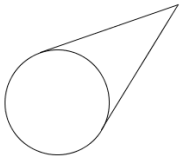

Dessin 3.1


Dessin 3.2


Dessin 3.3


Dessin 3.4

Dessin 3.5


Dessin 3.6

b) Point de vue mathématique sur les dessins proposés

Pareillement le cas du cylindre de révolution (question 2), tous les dessins du cône de révolution proposés dans la question 3 sont des images d'une projection cylindrique. Nous présentons le choix du plan et de la direction de projection dans le Tableau 91.

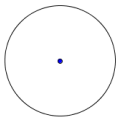
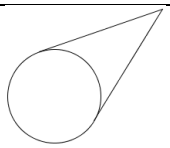
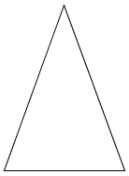
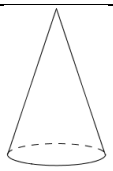
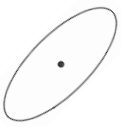
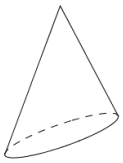
Direction / Plan	parallèle à la base du cône	parallèle à l'axe du cône	ni parallèle à la base ni parallèle à l'axe
parallèle à la base du cône		 Dessin 3.3	 Dessin 3.6
parallèle à l'axe du cône	 Dessin 3.1		 Dessin 3.4
ni parallèle à la base ni parallèle à l'axe		 Dessin 3.5	 Dessin 3.2

Tableau 91[64]. Répartition des dessins proposés du cône de révolution selon le plan et la direction de projection

Si l'on choisit, pour la direction de projection, la valeur « parallèle à la base du cylindre », le changement de valeurs du plan de projection : « parallèle à l'axe du cylindre », « non parallèle aux base ni parallèle à l'axe », modifie les dimensions du rectangle représentant le cylindre de révolution. Cependant, comme la question posée n'aborde pas la mesure, nous considérons le même dessin 2.2 pour les deux cas.

[64] Les cellules grises signifient l'inexistence de la projection.

Si l'on exclut le problème de la mesure, pour la direction de projection parallèle à la base du cône, le dessin 3.1 peut représenter deux cas pour le plan de projection: « parallèle à l'axe du cône » et « ni parallèle à la base ni parallèle à l'axe du cône ».

Dans le dessin 3.2, la représentation de deux génératrices extérieures n'est pas égale. Le refus de ce dessin des élèves nous permet de valider la règle du contrat didactique R.CoC « *Pour le cône de révolution dont la base est représentée par une ellipse, les deux génératrices extérieures sont égales ».*

c) Réponses possibles pour les dessins non-prototypiques

Catégorie de justification	Acceptation	
	Oui	**Non**
Dessin 3.1		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cône de révolution dont le plan est parallèle à l'axe et la direction est parallèle à la base.	Le dessin est l'image de projection d'un autre objet (un prisme à base triangulaire par exemple).
		Aucune projection d'un cône de révolution ne peut donner ce dessin.
Observation	C'est la vision en se plaçant devant la face latérale et proche d'un cône de révolution.	Cela peut être la vision d'un autre objet (un prisme à base triangulaire par exemple).
		Aucune observation d'un cône de révolution ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation		En référence à un dessin prototypique d'un cône de révolution, le dessin 3.1 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin prototypique 2D		C'est le dessin prototypique d'un triangle (objet géométrique du plan).
Dessin 3.2		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cône de révolution dont le plan et la direction n'est pas parallèle à la base, ni à l'axe.	Le dessin est l'image de projection d'un cône oblique.
		Aucune projection d'un cône de révolution ne donne ce dessin.
Observation	C'est la vision possible d'un cylindre de révolution avec un point de vue convenable.	Cela peut être la vision d'un cône oblique.
		Aucune observation d'un cône de révolution ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation	En référence au dessin prototypique d'un cône de révolution, le dessin 3.2 satisfait des règles de représentation (*cf.* la section 5.4).	C'est le dessin prototypique d'un cône oblique.
		En référence au dessin prototypique d'un cône de révolution, le dessin 3.2 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).

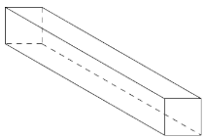
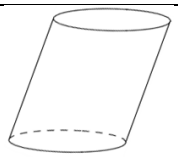
Dessin 3.3		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cône de révolution dont le plan est parallèle à la base et la direction est parallèle à l'axe.	Le dessin est l'image de projection d'un autre objet (une sphère par exemple).
		Aucune projection d'un cylindre de révolution ne peut donner ce dessin.
Observation	C'est la vision en se plaçant devant la base et proche d'un cône de révolution.	Cela peut être la vision d'un autre objet (une sphère par exemple).
		Aucune observation d'un cône de révolution ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation		En référence à un dessin prototypique d'un cône de révolution, le dessin 3.3 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin prototypique 2D		C'est le dessin prototypique d'un cercle.
Dessin 3.4		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cône de révolution dont le plan est parallèle à la coupe verticale et la direction n'est pas parallèle à la base.	
Observation	C'est la vision quand on se place devant d'un cône de révolution mais en haut.	
Dessin prototypique 3D – règles de représentation	En référence à un dessin prototypique d'un cône de révolution, le dessin 3.4 satisfait à toutes les règles de représentation (*cf.* la section 5.4).	
Dessin 3.5		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cône de révolution dont le plan n'est pas parallèle à la base ni à l'axe et la direction est parallèle à l'axe.	Le dessin est l'image de projection d'un autre objet (un cercle par exemple).
		Aucune projection d'un cône de révolution ne peut donner ce dessin.
Observation	C'est la vision possible d'un cône de révolution avec un point de vue convenable.	Cela peut être la vision d'un autre objet (un cercle par exemple).
		Aucune observation d'un cône de révolution ne peut donner ce dessin.

Dessin prototypique 3D – règles de représentation		En référence au dessin de prototypique d'un cône de révolution, le dessin 3.5 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin prototypique 2D		C'est le dessin prototypique d'une ellipse.
Dessin 3.6		
Projection	Le dessin résulte de la projection d'un cône de révolution dont le plan est parallèle à la base et la direction n'est pas parallèle à l'axe.	Le dessin est l'image de projection d'un autre objet (un cercle par exemple).
		Aucune projection d'un cône de révolution ne donne ce dessin.
Observation	C'est la vision possible d'un cylindre de révolution avec un point de vue convenable.	Cela peut être la vision d'un autre objet (un cercle par exemple).
		Aucune observation d'un cône de révolution ne peut donner ce dessin.
Dessin prototypique 3D – règles de représentation	En référence au dessin prototypique d'un cône de révolution, le dessin 3.6 satisfait des règles de représentation (*cf.* la section 5.4).	En référence au dessin prototypique d'un cône de révolution, le dessin 3.6 enfreint certaines règles de représentation (*cf.* la section 5.4).
Dessin prototypique 2D		C'est le dessin d'un cercle et ses deux tangentes.

Tableau 92. Observables des réponses oui/non dans la question 3

6.3 Synthèse de l'analyse *a priori*

La réponse « non » pour les dessins 1.2, 2.3, 3.2 est corrélée avec la validation de l'hypothèse sur les règles implicites du contrat didactique R.CuF, R.CyC, R.CoC (Tableau 93).

Hypothèse de recherche : 3 règles implicites du contrat didactique de la représentation	Mise à l'épreuvre par les dessins	Observables validant l'hypothèse de recherche
R.CuF: Les fuyantes dans le dessin du cube sont plus courtes que les arêtes frontales.	 Dessin 1.2	Majorité des réponses « non » dans l'expérimentation au Viêt-Nam[65].
R.CyC : Pour le cylindre de révolution dont les bases sont représentées par des ellipses, les deux génératrices extérieures permettent de former une coupe rectangulaire.	 Dessin 2.4	Majorité des réponses « non » dans l'expérimentation au Viêt-Nam et en France.

[65] Dans l'institution française, cette règle R.CuF est explicite : on peut prévoir aussi une majorité des réponses « non » dans l'expérimentation.

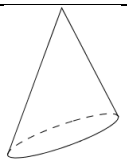
R.CoC : Pour le cône de révolution dont la base est représentée par une ellipse, les deux génératrices extérieures sont égales.	 Dessin 3.4	Majorité des réponses « non » dans l'expérimentation au Viêt-Nam et en France.

Tableau 93. Hypothèse de recherche et observables les validant

La réponse « non » pour les dessins non-prototypiques sans pointillés est corrélée avec la validation de la règle implicite du contrat didactique R.3D « Les dessins d'un objet à trois dimensions doivent comporter des pointillés ».

L'étude des justifications classées en catégories épistémologiques « projection », « observation », « dessin prototypique 3D - règles de représentation » et « dessin prototypique 2D » nourrissent l'analyse des praxéologies personnelles des élèves relativement au passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin basée sur les réponses.
Les arguments des réponses « non » pour les dessins non-prototypiques signifient le non respect des règles du dessin prototypique (« dessin prototypique 3D - règles de représentation » ou « dessin prototypique 2D »).
La réponse « oui » pour les dessins sans pointillés ne peut être que justifiée par des arguments transformation « observation » ou « projection » d'un objet de l'espace. Les justifications « projection » sont cohérentes avec l'intention de l'institution vietnamienne. *Quels dessins favorisent les justifications « projection » ?*

La mise à l'épreuve (confirmation ou rejet) des hypothèses et la détermination des praxéologies personnelles des élèves s'appuieront sur la confrontation de l'analyse *a priori* et de l'analyse *a posteriori* basée sur les observables dans les réponses d'élèves : c'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 7
Analyse *a posteriori*

Dispositif expérimental

Nous avons proposé le questionnaire[66] à 76 élèves français en seconde de 3 lycées à Pertuis, Thonon-les-Bains, Vizille, et à 637 élèves vietnamiens de la classe 12 de 8 lycées à Ho Chi Minh ville. Tous ces lycées vietnamiens suivent le programme de mathématiques standard[67]. Nous présentons, dans le Tableau 94, la répartition des élèves de chaque lycée selon les groupes.

Pays	Lycée	Nombre d'élèves	
France	Lycée Val de Durance	24	76
	Lycée de la Versoie	29	
	Lycée Polyvalent et Professionnel Portes de l'Oisans	23	
Viêt-Nam	Lycée Go Vap	78	637
	Lycée Le Hong Phong	82	
	Lycée Luong The Vinh	89	
	Lycée d'Application	133	
	Lycée Nguyen Du	88	
	Lycée Nguyen Huu Canh	37	
	Lycée Tran Nhan Tong	47	
	Lycée Truong Chinh	83	

Tableau 94. Répartition de nombre d'élèves qui participent l'expérimentation

Le questionnaire a été passé à la fin du processus d'enseignement de la Géométrie de l'espace : en France, fin de l'année scolaire de la classe de seconde ; au Viêt-Nam, fin du premier semestre de la classe 12.

Recueil des données

D'abord, toutes les fiches de réponse des élèves ont été numérotées. Chaque numéro correspond à un triplet d'informations d'un élève : nationalité (française ou vietnamienne), lycée (un parmi onze lycées du Tableau 94). Ensuite, la réponse pour chaque dessin est codée en deux parties :

1- « *acceptation/refus* » selon quatre possibilités : *oui* (notée « **O** »), *non* (notée « **N** »), *oui et non en même temps* (notée « **ON** »), *pas de réponse* (notée « **PR** »);

[66] Voir le fiche de questionnaire dans l'Annexe 8.

[67] Au Viêt-Nam, il y a deux séries de manuels de mathématiques : standard et avancé. Néanmoins, après quelques années scolaires, presque tous les lycées choisissent la série de manuels standard.

2- « *justification* », outre les 4 catégories de justification mentionnées dans l'analyse *a priori*, « *projection* » (notée « **JProj** »), « *observation* » (notée « **JObs** »), « *dessin prototypique – règles de représentation* » (notée « **JD-R** »), « dessin prototypique 2D » (notée « **JD2** ») nous avons complété par deux autres possibilités :
« *hors catégories* » (notée « **HorsCat** ») – justifications non classable dans les trois catégories ci-dessus,
« sans justification » (notée « **SansJ** ») : soit l'élève n'écrit rien, soit il répète l'acceptation/refus (par exemple, pour le dessin 1.1, l'élève coche « non » et justifie « ce n'est pas un cube »), soit il écrit « je ne sais pas ».

A partir de ces codages, nous avons pu traiter toutes les données recueillies dans l'expérimentation à l'aide des outils Excel et R[68].

7.1 Analyse globale

L'ensemble des réponses des élèves français et vietnamien pour chaque dessin est récapitulé dans le tableau de l'annexe 9. En observant les données dans ce tableau, nous choisissons de négliger en raison de la faiblesse de leurs effectifs :

- pour l'acceptation/refus : « oui et non » (ON), « pas de réponse » (PR),
- pour la justification : « hors catégories »[69].

De plus, nous ne prenons pas en compte les réponses « sans justification » (SansJ) parce qu'elles ne sont pas interprétables.
Cela permet de se centrer (voir la zone d'encadrement) dans les analyses qui suivent, sur les données des réponses « oui » (O), « non » (N), et des justifications « projection » (JProj), « observation » (JObs), « dessin prototypique – règles de représentation » (JD-R), « dessin prototypique 2D » (JD2).

De ce tableau, nous retirons les constats globaux ci-dessus pour chaque catégorie de justifications.

• Premièrement, la catégorie de justifications « projection » est totalement absente en France. Ce n'est pas étonnant puisque dans les manuels français, on ne présente pas la perspective cavalière par projection.
Au Viêt-Nam, elle est bien présente mais minoritaire pour tous les dessins (Tableau 95 ci-après). Sa présence peut être expliquée par l'enseignement de la projection comme l'atteste l'existence d'un chapitre qui lui est consacré dans les manuels vietnamiens (chapitre 2, leçon 5).
Le Tableau 95 montre que l'effectif des justifications « projection » des dessins 2.2, 2.5, 3.1, 3.3 est plus élevé que les autres : ce sont des dessins non-prototypiques sans pointillés. Nous reviendrons sur le cas de ces dessins plus loin (*cf.* la section 7.4.2). Pour ces mêmes dessins, la proportion de réponse « oui » est majoritaire (respectivement : 33 sur 40, 27 sur 36, 33 sur 41, 36 sur 44).

> Elève n°139 (au Viêt-Nam) coche « oui » pour le dessin 2.2 et justifie « Quand le rayon de projection est parallèle aux bases »

[68] Voir le site http://www.r-project.org
[69] Nous allons les examiner, si nécessaire, pour mettre en évidence les raisons de choix « oui », « non » des élèves.

Elève n°319 (au Viêt-Nam) coche « oui » pour le dessin 2.5 et justifie « Projeter un cylindre de révolution sur un plan parallèle aux bases »
Elève n°130 (au Viêt-Nam) coche « oui » pour le dessin 3.1 et justifie « Projeter un cône sur un plan perpendiculaire à la base par la projection orthogonale on obtient 3.1 »
Elève n°158 (au Viêt-Nam) coche « oui » pour le dessin 3.1 et justifie « Projeter de dessus ou de dessous selon la direction verticale »

Il semble que ces dessins favorisent les justifications « projection ».

• Deuxièmement, considérons les deux catégories de justifications suivantes :
- « transformation » (notée « **JTr** »). Elle se compose de deux catégories de justifications : « projection » (JProj) et « observation » (JObs).
- « dessin prototypique » (noté « **JDp** »). Elle se compose de deux catégories de justifications : « dessin prototypique 3D – règles de représentation » (JD-R) et « dessin prototypique 2D » (JD2) (seulement pour les dessins non-prototypiques sans pointillés : 1.1, 1.4, 2.2, 2.5, 2.6, 3.1, 3.3, 3.5, 3.6).
Sauf dans le cas des dessins 2.5, 3.3 (France), les effectifs des justifications « dessin prototypique » sont supérieurs à ceux des justifications « transformation » pour tous les autres les dessins proposés (Tableau 96 ci-après).
Nous analyserons plus profondément ces deux catégories de justification plus tard.

Justification	Dessin															
	Cube				Cylindre de révolution						Cône de révolution					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	*2.2*	2.3	2.4	*2.5*	2.6	*3.1*	3.2	*3.3*	3.4	3.5	3.6
JProj	26	3	7	22	12	***40***	7	6	***36***	23	***41***	4	***44***	0	29	8

Tableau 95. Effectif des justifications « projection » des élèves vietnamiens

Pays	Justification	Dessin															
		Cube				Cylindre de révolution						Cône de révolution					
		1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	*2.2*	2.3	2.4	*2.5*	2.6	*3.1*	3.2	*3.3*	3.4	3.5	3.6
France	JTr	33	0	6	13	7	24	1	10	***44***	19	22	3	***52***	12	28	14
	JDp	***56***	***73***	***66***	***52***	***65***	***49***	***63***	***57***	37	***53***	***58***	***65***	21	***57***	***37***	***44***
Viêt-Nam	JTr	189	40	96	115	158	200	68	87	227	120	184	73	290	87	140	194
	JDp	***451***	***541***	***466***	***459***	***365***	***359***	***438***	***395***	***386***	***424***	***379***	***402***	***296***	***376***	***372***	***280***

Tableau 96. Effectif des justifications « transformation » et « dessin prototypique » des élèves français et vietnamien

7.2 Les dessins 1.3, 2.1, 2.4 et 3.4 sont-ils prototypiques ?

7.2.1 Analyse des acceptations/refus

Comme nous l'avons dit dans l'analyse *a priori* (*cf.* la section 6.1), les dessins 1.3 (cube), 2.4 (cylindre de révolution) et 3.4 (cône de révolution) nous apportent une occasion de vérifier que les dessins proposés sont bien prototypiques dans les institutions observées.

Le Tableau 97 ci-après présente les effectifs et les proportions de l'acceptation/refus (« oui », « non ») des réponses des élèves français et vietnamiens pour ces dessins.

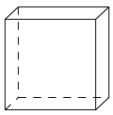
Pays	**Acceptation/Refus** effectif (proportion)	**Dessin**			
		Cube	**Cylindre de révolution**		**Cône de révolution**
		 Dessin 1.3	Dessin 2.1	Dessin 2.4	Dessin 3.4
France	non	30[70] (0,41)[71]	4 (0,05)	0 (0)	1 (0,01)
	oui	***44 (0,59)***	***71 (0,95)***	***74 (1)***	***72 (0,99)***
Viêt-Nam	non	165 (0,26)	63 (0,10)	13 (0,02)	15 (0,02)
	oui	***463 (0,74)***	***569 (0,90)***	***620 (0,98)***	***616 (0,98)***

Tableau 97. Répartition des acceptations/refus d'élèves français et vietnamiens pour les dessins 1.3, 2.1, 2.4 et 3.4

Dans le Tableau 97, la proportion de réponses « oui » des dessins 1.3, 2.1, 2.4 et 3.4 sont majoritaires (plus de 0,5) : concrètement, pour les élèves français : 0,59 ; 0,95 ; 1 ; 0,99 et pour les élèves vietnamiens : 0,74 ; 0,90 ; 0,98 et 0,98.

Pour les dessins 2.4 et 3.4, la haute proportion d'acceptation nous permet d'affirmer qu'ils sont prototypiques pour les élèves de deux pays[72].

Pour le dessin 2.1, malgré qu'il soit peu présent dans les manuels français et soit absent dans les manuels vietnamiens, il est accepté comme dessin prototypique par les élèves de deux pays[73].

Pour le dessin 1.3, nous ne pouvons affirmer que ce dessin est prototypique pour les élèves vietnamiens[74].

[70] effectif.
[71] proportion par rapport au total des réponses « oui » et « non ».
[72] Les intervalles de confiance à 95% des proportions d'acceptation des dessins 2.4, 3.4 sont, en France, (0,94 ; 1) et (0,92 ; 1), au Viêt-Nam, (0,96 ; 0,99) et (0,96 ; 0,99).
[73] L'intervalle de confiance à 95% de la proportion d'acceptation du dessin 2.1 est, en France, (0,86 ; 0,98) et au Viêt-Nam, (0,87 ; 0,92).

7.2.2 Analyse des justifications

Nous récapitulons d'abord la répartition de deux catégories de justifications « transformation » (JTr), « dessin prototypique » (JDp) par rapport aux acceptations/refus dans le Tableau 98.

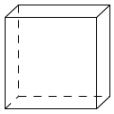
Pays	Réponse		Dessin			
	Acceptation/Refus	Justification	 1.3	2.1	2.4	3.4
France	Non	JTr	0	***2***	0	0
		JDp	***28***	1	***0***	***0***
	Oui	JTr	6	5	10	10
		JDp	***37***	***63***	***56***	***56***
Viêt-Nam	Non	JTr	3	10	0	0
		JDp	***146***	***37***	***0***	***0***
	Oui	JTr	91	147	86	86
		JDp	***317***	***327***	***395***	***376***

Tableau 98. Répartition de deux catégories de justifications « transformation », « dessin prototypique » par rapport aux acceptation/refus des élèves français et vietnamien pour les dessins 1.3, 2.1, 2.4, 3.4

Ce tableau montre que dans les deux pays les justifications « dessin prototypique » (plus précisément, justifications « dessin prototypique 3D – règles de représentation ») sont majoritaire pour les dessins 1.3, 2.1, 2.4, 3.4, sauf le cas du dessin 2.1 en France (mais la différence est négligeable : 2 justifications « transformation » contre 1 justification « dessin prototypique »).

Dans la suite, nous choisissons d'étudier en détail les justifications pour les deux dessins 1.3 et 2.1 pour mettre en lumière

- pourquoi il y a un nombre non-négligeable d'élèves qui refusent le dessin prototypique 1.3 (en France, 0,39 et au Viêt-Nam, 0,26),
- ce qui permet aux élèves d'accepter le dessin 2.1 malgré sa différence au dessin prototypique 2.4.

a) Pour le dessin 1.3

Dans la justification de refus, 28 d'élèves français sur 30 (soit 0,93), 146 d'élèves vietnamiens sur 165 (soit 0,88) justifient que le dessin 1.3 est un parallélépipède rectangle et/ou que les arêtes sur le dessin du cube ne sont pas « égales » (JD-R).

> Elève n°686 (en France): « Cette figure est aussi un parallélépipède rectangle. Toutes les arêtes ne sont pas la même longueur »
>
> Elève n°299 (au Viêt-Nam) : « Parce qu'il est nécessaire que toutes les arêtes du cube soient égales. Le dessin ci-contre représente un parallélépipède rectangle »

Ces justifications concernent la valeur du rapport de réduction des fuyantes. Un rapport « convenable » va donner l'illusion que les arêtes du cube sont égales. Il semble que pour ces

[74] L'intervalle de confiance à 95% de la proportion d'acceptation du dessin 1.3 au Viêt-Nam est (0,70 ; 0,77).

élèves, la longueur des fuyantes soit trop petite par rapport à celui des arêtes frontales. Autrement dit, pour ces élèves, le dessin 1.3 est en rupture de contrat par rapport à une autre règle implicite de la représentation du cube :

Dans le dessin d'un cube, les fuyantes ne doivent pas être « trop petites » par rapport aux arêtes frontales.

b) Pour le dessin 2.1

Les justifications principales de l'acceptation sont :

- « observation » (JObs) : 5 élèves français sur 71 (soit 0,07), 137 sur 569 (soit 0,24) avance l'angle de vue et/ou pensent à un objet physique,

> Elève n°694 (en France) : « Cylindre vu de face en perspective cavalière »
> Elève n°673 (en France) : « sa fait un rouleau »
> Elève n°110 (au Viêt-Nam) : « Un cylindre de révolution vu de dessus »
> Elève n°185 (au Viêt-Nam) : « Un tube plastique, regarder de manière inclinée »

- « dessin prototypique 3D – règles de représentation » (JD-R): 63 élèves français sur 71 (soit 0,89), 327 élèves vietnamiens sur 569 (soit 0,57) acceptent la représentation des bases du cylindre par des cercles.

> Elève n°685 (en France) : « Car la base est un cercle »
> Elève n°10 (au Viêt-Nam) : « Parce qu'il a 2 bases qui sont 2 disques égaux »

De plus, nous constatons d'autres règles concernant la représentation des génératrices (parallèles, égales).

> Elève n°664 (en France) : « Oui c'est un cylindre, les deux cercles sont de même diamètre, les cotés du cylindre sont parallèles »
> Elève n°7 (au Viêt-Nam) : « Parce qu'il a 2 bases qui sont des disques, 2 génératrices parallèles et égales »

Outre ces deux catégories, au Viêt-Nam, 10 élèves considèrent le dessin 2.1 comme une image par projection (JProj).

> Elève n°508 (au Viêt-Nam) : « Parce que c'est l'image de projection selon un angle incliné »

7.2.3 Synthèse

Les deux analyses sur l'acceptation/refus et sur les justifications nous permettent d'affirmer que les dessins 2.1, 2.4, 3.4 sont les dessins prototypiques pour les élèves français et vietnamiens. Pour le dessin 1.3, un rapport de réduction pas trop petit pourrait apporter un dessin prototypique du cube pour eux.

Comme attendu, les justifications de ces 4 dessins se basent le plus fréquemment sur « dessin prototypique 3D – règles de représentation ».

7.3 Analyse des réponses aux dessins à pointillés non-prototypiques (dessins 1.2, 2.3 et 3.2)

7.3.1 Analyse des acceptations/refus

Nous présentons ci-dessous l'effectif et la proportion de l'acceptation/refus (« oui », « non ») des élèves français et vietnamiens pour les dessins enfreignant les trois règles implicites du contrat didactique de la représentation en perspective (tout en respectant la règle des pointillés R.3D) : dessin 1.2 (R.CuF), dessin 2.3 (R.CyC), dessin 3.2 (R.CoC).

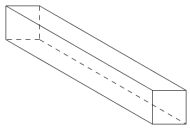
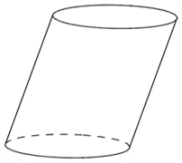
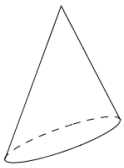
Pays	**Acceptation/Refus** effectif (proportion)	**Dessin non-prototypique**		
		Cube	**Cylindre de révolution**	**Cône de révolution**
		 Dessin 1.2	 Dessin 2.3	 Dessin 3.2
France	**non**	***71***[75] ***(0,95)***[76]	***51*** ***(0,74)***	***57*** ***(0,78)***
	oui	4 (0,05)	18 (0,26)	16 (0,22)
Viêt-Nam	**non**	***360*** ***(0,57)***	***276*** ***(0,44)***	***330*** ***(0,53)***
	oui	275 (0,43)	346 (0,56)	296 (0,47)

Tableau 99. Répartition des acceptations/refus d'élèves français et vietnamiens pour les dessins 1.2, 2.3 et 3.2

Examinons les refus de ces trois dessins (réponse « non ») qui résultent des règles R.CuF, R.CyC, R.CoC.

Le Tableau 99 montre que la proportion de refus pour les dessins 1.2, 2.3, 3.2 des élèves français est majoritaire, autrement dit supérieure à 0,5 (respectivement : 0,95 ; 0,74 ; 0,78). Par contre, celle des élèves vietnamiens est approximativement égale à 0,5 (respectivement : 0,57 ; 0,44 ; 0,53). Ainsi, nous ne pouvons affirmer les règles R.CyC et R.CoC que pour les élèves français[77].

La haute proportion de refus du dessin 1.2 des élèves français peut être expliquée par la présence explicite de la contrainte « le rapport de réduction est inférieur à 1 » dans les manuels. Nous examinerons cette présence dans l'analyse des justifications du dessin 1.2 (*cf.* la section 7.3.2).

La grande différence de proportion de refus entre les élèves français et vietnamien dans le Tableau 99 nous conduit à la question « Y *a-t-il une différence significative de proportion de*

[75] effectif.
[76] proportion par rapport au total des réponses « oui » et « non ».
[77] Les intervalles de confiance à 95% des proportions d'acceptation des dessins 2.3 et 3.2 en France sont (0,62 ; 0,83) et (0,67 ; 0,87).

refus du dessin 1.2 (réciproquement, dessins 2.3 et 3.2) entre les élèves français et vietnamiens ? ».
Pour ce fait, nous reformulons, pour chaque dessin,
- l'hypothèse nulle H_o : « La proportion de refus des élèves français et vietnamiens est égale »,
- la contre hypothèse H_1 : « La proportion de refus des élèves français et vietnamiens est différente ».
Le test χ^2 de ces données sur R[78] nous donne les résultats p= $4{,}3\times10^{-10}$ (dessin 2.1), p=$5{,}7\times10^{-06}$ (dessin 2.3), p=$6{,}3\times10^{-05}$ (dessin 3.2). Ces p-valeurs inférieures à 0,01 nous permettent le rejet de H_o et l'affirmation indirecte de H_1.
En d'autres mots, il y a une différence significative de proportion de refus des dessins 1.2, 2.3, 3.2 entre les élèves français et vietnamiens.

Afin d'étudier les arguments de refus des élèves français pour les dessins 1.2, 2.3, 3.2 et chercher des explications à la différence significative ci-dessus, il est nécessaire d'examiner les justifications des acceptations/refus de ces trois dessins.

7.3.2 Analyse des justifications

Nous récapitulons les données de réponse « oui »/« non » selon 2 catégories de justifications « transformation » (JTr), « dessin prototypique » (JDp) dans le Tableau 100.

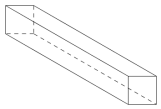
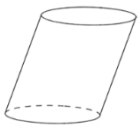
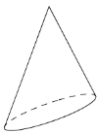
Pays	Réponse		Dessin		
	Acceptation/Refus	Justification	 1.2	 2.3	 3.2
France	Non	JTr	0	0	1
		JDp	***68***	***49***	***51***
	Oui	JTr	0	1	2
		JDp	***4***	***12***	***12***
Viêt-Nam	Non	JTr	9	11	18
		JDp	***315***	***207***	***243***
	Oui	JTr	31	55	53
		JDp	***226***	***227***	***158***

Tableau 100. Répartition de deux catégories de justifications « transformation », « dessin prototypique » par rapport aux acceptations/refus des élèves français et vietnamien pour les dessins 1.2, 2.3, 3.2

En France et au Viêt-Nam, les justifications « dessin prototypique » (plus précisément, « dessin prototypique 3D – règles de représentation ») sont en nombre supérieur aux justifications « transformation » que ce soit la réponse « oui » ou « non ».
Pour les réponses « oui », ces dessins semblent, pour les élèves, relativement proches des dessins prototypiques, en d'autres mots, ils s'adaptent bien à l'ensemble des règles du dessin prototypique, comme le montrent les analyses ci-après.

Nous proposons d'examiner les arguments fréquents pour mettre en évidence la raison de l'acceptation et du refus des élèves pour ces dessins.

[78] Voir le traitement de données par R dans l'Annexe 10.

a) Dessin 1.2

Les arguments du refus du dessin 1.2 se basent essentiellement (en France, 68 sur 71, soit 0,96 ; au Viêt-Nam, 315 sur 360, soit 0,88) sur la ressemblance par rapport au dessin prototypique d'un parallélépipède rectangle et/ou la représentation des fuyantes trop longue par rapport celle des arêtes frontales (JD-R).

> Elève n°645 (en France) : « Car c'est un pavé droit »
> Elève n°656 (en France) : « Car les arrêtes en profondeurs sont plus grandes que celles de face en vraie grandeur »
> Elève n°12 (au Viêt-Nam) : « C'est un parallélépipède avec la longueur des arêtes très différentes »

Les 226 réponses « oui » justifiées par « dessin prototypique 3D - règles de représentation » (JD-R) des élèves vietnamiens peuvent permettre d'expliquer la différence entre les réponses des élèves français et vietnamien, car cela représente aussi une proportion relativement importante de réponses par rapport au total des réponses examinées (0,35). Ces élèves ne s'intéressent pas à la longueur « anormale » des fuyantes, ils avancent des règles que doivent vérifier un dessin prototypique du cube dont les plus fréquentes sont :

- la présence de 6 faces,

> Elève n°7 (au Viêt-Nam) : « C'est un cube, parce que le dessin ci-contre a 6 faces »

- le parallélisme des arêtes,

> Elève n°46 (au Viêt-Nam) : « Il y a des arêtes latérales parallèles, les bases sont des parallélogrammes »

- la présence des codages de la troisième dimension (pointillés).

> Elève n°66 (au Viêt-Nam) : « Il y a des arêtes latérales parallèles, les bases sont des parallélogrammes »

Les règles du dessin prototypique d'un cube jouent un rôle important dans la lecture du dessin 1.2 : la proportion de la justification « dessin prototypique 3D – règles de représentation » sur le total des réponses examinées (« oui », « non ») est, en France, 72 sur 75 (soit 0,96) et au Viêt-Nam, 541 sur 635 (soit 0,85).

Néanmoins, elles conduisent à proportions différentes de réponses « oui »/ « non » entre les deux pays : en France, 4 sur 68 (soit 0,06); au Viêt-Nam, 226 sur 315 (soit 0,72). Il est fort probable que la présentation explicite du rapport de réduction inférieur à 1 en France a orienté les élèves français vers les réponses « non ». Au Viêt-Nam, cette présentation n'est pas abordée en raison de l'approche par projection de la perspective parallèle, cela diminue l'influence de la règle R.CuF dans la lecture d'un dessin des élèves vietnamiens.

b) Dessin 2.3

• *Pour les refus*, 49 élèves français sur 51 (soit 0,96) et 207 élèves vietnamiens sur 276 (soit 0,75) justifient, selon la catégorie « dessin prototypique 3D – règles de représentation » (JD-R), que le dessin 2.3 ne représente pas un cylindre « vertical ».

> Elève n°640 (en France) : « Non car le "cylindre" est penché »
> Elève n°16 (au Viêt-Nam) : « Parce que c'est un cylindre incliné »

et/ou que les « bases » ne sont pas orthogonales à l'axe du cylindre (ou aux génératrices).

Elève n°677 (en France) : « L'axe de révolution n'est pas perpendiculaire aux deux faces circulaires »

Elève n°101 (au Viêt-Nam) : « Parce que les génératrices ne sont pas perpendiculaire aux bases »

On peut comprendre les « bases » ici comme les diamètres les plus longs des ellipses représentant les bases du cylindre.

Elève n°410 (au Viêt-Nam) : « 2 diamètres et 2 arêtes latérales ne forment pas un rectangle »

• *Pour les acceptations*, nous constatons un nombre non négligeable (12 élèves français sur 18, soit 0,67 et 227 élèves vietnamiens sur 346, soit 0,66) de justifications par « dessin prototypique 3D – règles de représentation » (JD-R). Elles sont principalement liées à la représentation des bases qui suggère les disques.

Elève n°692 (en France) : « Il a deux faces rondes »

Elève n°10 (au Viêt-Nam) : « Parce que ses bases sont des disques égaux »

Ainsi, on peut dire que pour ces élèves, la représentation des bases du cylindre de révolution par des ellipses est la plus importante.

De plus, nous trouvons, dans les justifications « hors-catégories », 1 élève français et 47 élèves vietnamiens qui acceptent l'inclinaison du dessin de représentation. C'est-à-dire la représentation « inclinée » n'enfreint pas les règles de leur dessin prototypique du cylindre de révolution.

Elève n°692 (en France) : « Un cylindre même si il est de travers »

Elève n°12 (au Viêt-Nam) : « Un cylindre incliné avec des arêtes inclinée »

En outre, le dessin 2.3 est aussi accepté selon la catégorie « observation » (JObs) par 1 élève français sur 18 (soit 0,28), 48 élèves vietnamiens sur 346 (soit 0,14) parce qu' « une direction de vue inclinée peut donner ce dessin »,

Elève n°642 (en France) : « Oui c'est un cylindre de révolution vu de diagonale »

Elève n°291 (au Viêt-Nam) : « Un cylindre de révolution vu de manière inclinée »

ou qu'ils trouvent que le dessin proposé ressemble à un objet matériel.

Elève n°544 (au Viêt-Nam) : « Parce qu'il ressemble à une boîte de lait »

• *En résumé,* les règles de représentation du dessin prototypique d'un cylindre de révolution sont l'outil le plus fréquent pour la lecture du dessin 2.3 : la proportion de justification « dessin prototypique 3D – règles de représentation » sur le total des réponses examinées (« oui », « non ») est, en France, 61 sur 69 (soit 0,88) et au Viêt-Nam, 434 sur 622 (soit 0,70).

Cependant, la proportion de réponses « oui »/ « non » justifiées par cette catégorie entre deux pays est différente : en France, 12 sur 49 (soit 0,24) ; au Viêt-Nam, 227 sur 207 (soit 1,10). On peut dire que pour les élèves français, le dessin 2.3 est moins proche du dessin prototypique que pour les élèves vietnamiens. Cela peut être expliqué par la présence de la praxéologie $[T^{CyR,Dp}_{AsDO}, \tau^{CyR,Dp}_{AsDO_D}, \theta_D]$ dans les manuels français de cinquième, tandis qu'elle est absente dans les manuels vietnamiens (voir le Tableau 74 à la page 134).

c) Dessin 3.2

• *Pour les refus du dessin 3.2,* 51 élèves français sur 57 (soit 0,89), 243 élèves vietnamiens sur 330 (soit 0,74) avancent des justifications « dessin prototypique 3D – règles de

représentation » (JD-R). La plupart de ces justifications abordent l'inégalité de la représentation des génératrices.

> Elève n°691 (en France) : « Ce n'est pas un cône de révolution car le triangle n'est pas isocèle »
> Elève n°7 (au Viêt-Nam) : « Parce que c'est un cône, mais il n'est pas un cône de révolution. Parce que ses génératrices ne sont pas égales »

• *Pour les réponses « oui »,* le dessin 3.2 est principalement justifié selon deux catégories :
- « observation » (2 élèves français sur 16, soit 0,13 ; 51 élèves vietnamiens sur 296, soit 0,17). Les élèves relèvent la direction de vue qui donne le dessin,

> Elève n°707 (en France) : « vu de coté »
> Elève n°278 (au Viêt-Nam) : « Regarder de manière inclinée »

ou font référence à un objet matériel (seulement les élèves vietnamiens).

> Elève n°504 (au Viêt-Nam) : « C'est un cône de révolution parce qu'il a la forme d'un chapeau vietnamien »

- « dessin prototypique 3D – règles de représentation » (12 élèves français sur 16, soit 0,75 ; 158 élèves vietnamiens sur 296, soit 0,53). Les élèves ne s'intéressent pas à la condition de l'égalité des génératrices sur le dessin, mais aux 2 composants du dessin : une ellipse représentant la base et un triangle représente la face latérale du cône.

> Elève n°691 (en France) : « C'est un cône de révolution car elle a 3 côtés et une base »
> Elève n°21 (au Viêt-Nam) : « Il se compose d'une face de base qui est un disque, d'une face latérale qui est un triangle »

• *En résumé*, comme les dessins 1.2, 2.3, le dessin 3.2 est principalement considéré par rapport aux règles de représentation du dessin prototypique du cône de révolution : la proportion de la justification « dessin prototypique 3D – règles de représentation » sur le total des réponses examinées (« oui », « non ») est, en France, 63 sur 73 (soit 0,86) et au Viêt-Nam, 401 sur 626 (soit 0,64).
La proportion de réponses « oui »/ « non » justifiées par cette catégorie entre les deux pays est différente : en France, 12 sur 51 (soit 0,24) ; au Viêt-Nam, 158 sur 243 (soit 0,65). Il semble que le dessin 3.2 est, pour les élèves vietnamiens, plus proche du dessin prototypique du cylindre de révolution que pour les élèves français.

7.3.3 Synthèse

Les analyses sur les acceptations/refus nous permettent de valider l'existence les règles implicites du contrat didactique R.CyC, R.CoC dans le cas de la France.
Les arguments utilisés pour les trois dessins 1.2, 2.3, 3.2 sont principalement « dessin prototypique 3D – règles de représentation ».
Toutefois, l'effet des règles de représentation du dessin prototypique n'est pas le même pour les élèves de deux pays : très fort pour les élèves français - pour tous les dessins, les refus sont très nombreux par rapport aux acceptations ; moins fort pour les élèves vietnamiens - particulièrement, pour le dessin 2.3, plus d'acceptation que de refus. Il est probable que des choix différents des deux institutions (comme la contrainte du rapport de réduction k<1, la présence de la praxéologie locale « dessins prototypique »,…) aient conduit à cette dissemblance des comportements des élèves.

7.4 Analyse des réponses des dessins non-prototypiques sans pointillés

7.4.1 Analyse des acceptations/refus

Le Tableau 101 ci-après présente l'effectif et la proportion des réponses des élèves français et vietnamiens pour les dessins qui enfreignent la règle R.3D (dessins non-prototypiques sans pointillés).

Dans ce tableau, nous mettons en avant (caractère gras) la proportion de réponses « non » parce qu'elle indique l'influence de cette règle.

D'un point de vue global, nous trouvons que :
- pour les élèves français, la proportion de refus supérieure à 0,5 concerne 6 dessins sur 9 : dessins 1.1, 1.4, 2.2, 2.6, 3.1, 3.5.
- pour les élèves vietnamiens, la proportion de refus supérieure à 0,5 concerne 7 dessins sur 9 : dessins 1.1, 1.4, 2.2, 2.5, 2.6, 3.1, 3.5.

La proportion du total des refus par rapport à la somme des réponses « oui » et « non » examinées en France et au Viêt-Nam sont respectivement égales à 0,64 et 0,65. Elles sont donc approximativement égales et sont supérieures à 0,5[79].

En faisant référence aux proportions de refus pour chaque dessin, ceci dans chaque pays, nous dégageons du Tableau 101 ci-après les deux constats suivants.

- Dans les deux pays les proportions de refus des dessins 1.4, 2.6, 3.5 sont beaucoup plus élevées (plus de 0,8) que celle des autres ; celles des dessins 3.3, 3.6 sont les plus faibles (en France, 0,29 et 0,28 ; au Viêt-Nam 0,47 et 0,35).
- Les dessins 1.4 et 3.6 sont de même type : non-prototypique, sans pointillé, et a deux composants (les autres n'en ont qu'un). Néanmoins, le comportement des élèves français et vietnamien est très différent : la proportion de refus est très élevé pour le dessin 1.4 (en France, 0,90 ; au Viêt-Nam, 0,83) mais elle est faible pour le dessin 3.6 (en France, 0,28 ; au Viêt-Nam, 0,35).

Dans la suite, nous allons analyser les justifications des élèves pour comprendre les raisons de leur réponse « oui », « non ».

[79] Les intervalles de confiance à 95% des proportions de refus des dessins non prototypiques sans pointillés en France et au Viêt-Nam sont (0,60 ; 0,67) et (0,64 ; 0,66).

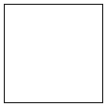
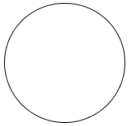
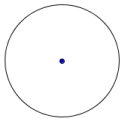
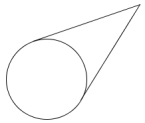
Pays	Acceptation/Refus effectif (proportion)	Dessin non-prototypique sans pointillés								
		Cube		Cylindre de révolution			Cône de révolution			
		 Dessin 1.1	Dessin 1.4	Dessin 2.2	 Dessin 2.5	Dessin 2.6	Dessin 3.1	 Dessin 3.3	Dessin 3.5	 Dessin 3.6
France	**Non**	***36 (0,52)***	***65 (0,90)***	***49 (0,68)***	***29 (0,43)***	***73 (0,97)***	***47 (0,66)***	***21 (0,29)***	***70 (0,93)***	***20 (0,28)***
	Oui	33 (0,48)	7 (0,10)	23 (0,32)	39 (0,57)	2 (0,03)	24 (0,34)	51 (0,71)	5 (0,07)	52 (0,72)
Viêt-Nam	**Non**	***406 (0,65)***	***519 (0,83)***	***387 (0,62)***	***364 (0,59)***	***553 (0,88)***	***384 (0,62)***	***286 (0,47)***	***516 (0,83)***	***215 (0,35)***
	Oui	217 (0,35)	109 (0,17)	233 (0,38)	254 (0,41)	75 (0,12)	236 (0,38)	326 (0,53)	104 (0,17)	407 (0,65)

Tableau 101. Répartition des acceptations/refus d'élèves français et vietnamiens pour les dessins non-prototypiques sans pointillés

7.4.2 Analyse des justifications

a) Liens entre les catégories de justifications et l'acceptation/refus

Nous présentons d'abord les tableaux croisés de 2 catégories de justifications « transformation » (JTr), « dessin prototypique » (JDp) et de l'acceptation/refus des dessins non-prototypiques sans pointillés en France et au Viêt-Nam.

Justification	Refus	Acceptation
JTr	55 (0,14)	***168 (0,79)***
JDp	***341 (0,86)***	45 (0,21)
Total	396	213

Tableau 102. Tableau croisé de justifications et de l'acceptation/refus des dessins non-prototypiques sans pointillés en France

Justification	Refus	Acceptation
JTr	283 (0,09)	***1302 (0,80)***
JDp	***3043 (0,91)***	320 (0,20)
Total	2226	1622

Tableau 103. Tableau croisé de justifications et de l'acceptation/refus des dessins non-prototypiques sans pointillés au Viêt-Nam

Ces tableaux attestent que le refus et l'acceptation ne s'appuient pas sur la même catégorie de justifications dans l'un et l'autre des deux pays :

- l'acceptation s'appuie majoritairement sur des justifications « transformation » (JTr) (en France, 0,79 ; au Viêt-Nam, 0,80),
- le refus s'appuie majoritairement sur des justifications « dessin prototypique » (JTr) (en France, 0,86 ; au Viêt-Nam, 0,91).

Ces constatations se vérifient-elles pour tous les dessins non-prototypiques sans pointillés ?

• *Pour le refus,* le Tableau 102 ci-après montre clairement que l'effectif des justifications « dessin prototypique » (JDp) est toujours beaucoup plus élevé que celui des justifications « transformation » (JTr) quelque soit le dessin.

Pays	Justification	Dessin non-prototypique sans pointillés								
		Cube		Cylindre de révolution			Cône de révolution			
		1.1	1.4	2.2	2.5	2.6	3.1	3.3	3.5	3.6
France	JTr	0	5	1	0	18	0	2	25	4
	JDp	***51***	***51***	***45***	***30***	***53***	***51***	***18***	***35***	***7***
Viêt-Nam	JTr	4	39	21	12	73	10	11	84	29
	JDp	***443***	***444***	***342***	***339***	***409***	***356***	***257***	***337***	***116***

Tableau 104. Répartition de deux catégories de justifications « transformation », « dessin prototypique » dans les réponses « non » des élèves français et vietnamien pour les dessins non-prototypiques sans pointillés

• *Pour l'acceptation*, dans le Tableau 103 ci-après, l'effectif des justifications « transformation » (JTr) est plus élevé que celui des justifications « dessin prototypique » (JDp), sauf dans le cas du dessin 3.6 (France).

Pays	Justification	Dessin non-prototypique sans pointillés								
		Cube		Cylindre de révolution			Cône de révolution			
		1.1	1.4	2.2	2.5	2.6	3.1	3.3	3.5	3.6
France	JTr	***27***	***6***	***21***	***37***	***1***	***19***	***47***	***3***	7
	JDp	0	0	0	2	0	3	2	2	***36***
Viêt-Nam	JTr	***174***	***68***	***170***	***201***	***44***	***166***	***263***	***53***	***163***
	JDp	1	14	12	37	14	18	34	29	161

Tableau 105. Répartition de deux catégories de justifications « transformation », « dessin prototypique » dans les réponses « oui » des élèves français et vietnamien pour les dessins non-prototypiques sans pointillés

Examinons maintenant les justifications de l'acceptation du dessin 3.6 pour comprendre sa différence par rapport aux autres.

En France, les arguments de l'acceptation se basent sur la présence complète des composants du cône de représentation (JD-R) : un disque représentant la base et un triangle (ou 2 segments) représentant la face latérale.

> Elève n°640 (en France) : « Oui car on peut voir que le cercle est bon et que le triangle aussi »

Au Viêt-Nam, à côté de cet argument (JD-R),

> Elève n°303 (au Viêt-Nam) : « Il satisfait des conditions d'un cône. La base : disques. Les faces latérales : égales, triangles isocèles »

les élèves écrivent que c'est la vison obtenue par une direction de vue en face de la base et incliné par rapport le cône de révolution (JObs).

> Elève n°24 (au Viêt-Nam) : « C'est l'angle de vue incliné de dessous d'un cône de révolution »

Cela conduit au fait que les effectifs de justification « transformation » et « dessin prototypique » sont approximativement égaux (163 contre 161).

Nous analysons maintenant en détail les justifications « dessin prototypique » du refus et « transformation » de l'acceptation des dessins non-prototypique sans pointillés.

b) Analyse des justifications « dessin prototypique » du refus

Nous présentons, dans le Tableau 106 ci-après, l'effectif des deux sous-catégories de « dessin prototypique » : « dessin prototypique 3D – règles de représentation » (JD-R) et « dessin prototypique 2D » (JD2) et leur proportion (JD-R/JD2) pour chaque dessin non-prototypique sans pointillés. La comparaison des proportions nous conduit aux remarques suivantes.

En France, les justifications « dessin prototypique 3D – règles de représentation » (JD-R) sont toujours plus fréquentes que les justifications « dessin prototypique 2D » (JD2) alors qu'au Viêt-Nam, la situation n'est la même que pour 3 dessins sur 9 : dessins 1.1, 3.5, 3.6. Parmi ces trois dessins*, la proportion JD-R/JD2 du dessin 3.6 est la plus élevée* (en France, 6 ; au Viêt-Nam, 4,8). Cela montre que le refus de ce dessin se réfère aux règles de représentation d'un objet géométrique de l'espace (et non d'objet du plan) plus que les autres. Par exemple, la base doit être représentée par une ellipse,

> Elève n°652 (en France) : « le cône devrait avoir la face en ellipse, pas un disque »

Elève n°339 (au Viêt-Nam) : « Le dessin de représentation d'un disque dans l'espace doit être une ellipse »

ou il n'y a pas de pointillés.

Elève n°666 (en France) : « Il n'y a pas des pointillés »

Elève n°27 (au Viêt-Nam) : « Parce qu'il n'a pas des parties cachées »

Le dessin 3.6 a deux composants, tandis que les dessins 1.1 et 3.5 n'ont qu'un composant. *Les dessins ayant plus d'un composant favorisent-ils les justifications « dessin prototypique 3D - règles de représentation » ?*

Pour le groupe des dessins 2.2, 3.1, la proportion JD-R/JD2 est, en France, proche de 1 (respectivement, 1,05 et 1,04) mais au Viêt-Nam, proche de 0,5 (respectivement, 0,53 et 0,40). En d'autres mots, au Viêt-Nam, les justifications « dessin prototypique 2D » (JD2) sont approximativement 2 fois plus fréquentes que les justifications « dessin prototypique 3D – règles de représentation » (JD-R) tandis qu'en France, elles sont quasi équivalentes. Ainsi, il semble que le refus des élèves vietnamiens de ces dessins se réfère principalement à des dessins plans.

Elève n°561 (au Viêt-Nam) justifie le refus du dessin 2.2 : « Parce qu'il n'est un rectangle normal »

Elève n°29 (au Viêt-Nam) justifie le refus du dessin 3.1 : « Un triangle normal »

Pour le groupe des dessins 2.5 et 3.3, la proportion JD-R/JD2 pour les élèves vietnamiens est similaire à celle des dessins 2.2, 3.1 (proche de 0,5).

Pourtant, en France, la proportion JD-R/JD2 des dessins 2.5, 3.3 est éloignée de 1 (respectivement, 1,31 et 1,57) : par rapport aux dessins 2.2 et 3.1, il y a un déplacement des arguments de refus des élèves français vers le « dessin prototypique 3D – règles de représentation » (JD-R).

La différence des justifications entre les deux pays peut être expliquée par la présence des dessins de catégorie CyB, CoB du cône de révolution, où les bases sont représentées par des disques, dans les manuels français (*cf.* la Figure 22 à la page 147 et la Figure 23 à la page 148) tandis que ces catégories de dessins sont absentes dans les manuels vietnamiens (*cf.* le Tableau 81).

Elève n°644 (en France) justifie le refus du dessin 2.5 : « C'est un cercle sans face latérales »

Elève n°666 (en France) justifie le refus du dessin 3.3 : « Il n'y a pas de triangle »

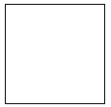
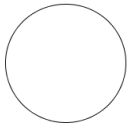
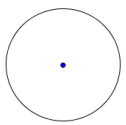
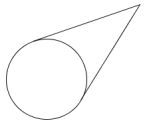
Pays	Justification	Dessin non-prototypique sans pointillés								
		Cube		Cylindre de révolution			Cône de révolution			
		 Dessin 1.1	Dessin 1.4	Dessin 2.2	 Dessin 2.5	Dessin 2.6	Dessin 3.1	 Dessin 3.3	Dessin 3.5	 Dessin 3.6
France	JD-R	29	33	23	17	37	26	11	24	6
	JD2	22	18	22	13	16	25	7	11	1
	JD-R/JD2	***1,32***	***1,83***	***1,05***	***1,31***	***2,31***	***1,04***	***1,57***	***2,18***	***6***
Viêt-Nam	JD-R	238	219	119	101	199	102	93	198	96
	JD2	205	225	223	238	210	254	164	139	20
	JD-R/JD2	***1,16***	***0,97***	***0,53***	***0,42***	***0,95***	***0,40***	***0,57***	***1,42***	***4,8***

Tableau 106. Répartition de deux catégories de justifications « dessin prototypique 3D – règles de représentation », « dessin prototypique 2D » dans les réponses « non » des élèves français et vietnamien pour les dessins non-prototypique sans pointillés

c) *Analyse des justifications « transformation » de l'acceptation*

Rappelons que toutes les justifications « transformation » des élèves français sont de catégorie « observation » (JObs). Nous nous centrerons donc à l'analyse des justifications « transformation » de l'acceptation seulement au Viêt-Nam.

Dans l'institution vietnamienne, la projection est explicitement présentée dans les manuels (*cf.* Chapitre 3). Cela explique l'apparition de justifications « projection » (JProj) dans les réponses des élèves vietnamiens (Tableau 107 ci-après).

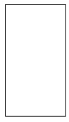
Réponse	**Dessin non-prototypique sans pointillés**							
	Cube		Cylindre de révolution			Cône de révolution		
	1.1	1.4	 2.2	2.5	2.6	3.1	3.3	3.5
JProj	***24***	13	**33**	**27**	7	**33**	**36**	13
JObs	150	55	137	174	37	133	227	40
JProj/JObs	0,16	0,24	***0,24***	0,16	0,19	***0,25***	0,16	0,33

Tableau 107. Répartition de deux catégories de justifications « projection », « observation » dans les réponses « oui » des élèves vietnamiens pour les dessins non-prototypiques sans pointillés

La comparaison les données dans le Tableau 107 nous permet de dégager deux remarques.

• *En premier lieu*, les justifications « observation » (JObs) sont toujours prédominantes. Notons que dans quelques lycées, la leçon « Projection parallèle. Dessin de représentation d'une figure spatiale » n'a pas été enseignée : cela concerne 341 élèves sur les 637 élèves participant à notre expérimentation ; cependant leurs enseignants leur ont demandé d'étudier cette leçon à la maison. D'où la question :

Comment la présence du cours « Projection parallèle. Dessin de représentation d'une figure spatiale » influe-t-elle sur les justifications « transformation » ?

Un tableau complet des réponses des 296 élèves vietnamiens ayant eu un cours sur « Projection parallèle. Dessin de représentation d'une figure spatiale » est fourni en annexe[80]. Nous extrayons de ce tableau l'effectif des justifications « projection » (JProj) et « observation » (JObs) pour étudier leur rapport (Tableau 108 ci-après).

[80] Voir l'Annexe 9.

Réponse	Dessin non-prototypique sans pointillés							
	Cube		Cylindre de révolution			Cône de révolution		
	1.1	1.4	2.2	2.5	2.6	3.1	3.3	3.5
JProj	***21***	12	***28***	***21***	5	***23***	***24***	10
JObs	82	28	58	82	14	57	101	14
JProj/JObs	0,26	0,43	0,48	0,26	0,36	0,40	0,24	0,71

Tableau 108. Répartition de deux catégories de justifications « projection », « observation » dans les réponses « oui » des élèves vietnamiens qui ont passé le cours de « projection parallèle » pour les dessins non-prototypiques sans pointillés

Les proportions JProj/JObs dans le Tableau 108 sont toujours inférieures à 1, plus précisément, inférieures à 0,5 (sauf celle du dessin 3.5). Autrement dit, malgré le cours sur la projection parallèle, l'acceptation des élèves vietnamiens se base sur la catégorie « observation ».

• *En deuxième lieu*, l'effectif des acceptations justifiées par « projection » (JProj) varie selon les dessins non-prototypiques sans pointillés. D'où la question :

Comment les caractéristiques des dessins proposés influent-elles sur la catégorie de justifications « transformation » ?

Les 4 dessins 1.1, 2.2, 2.5, 3.1, 3.3 attirent plus de réponses « oui » justifiées par « projection » que les autres[81]. Ces dessins ont deux caractéristiques communes : un seul composant et des éléments en vraie grandeur. Il semble que ces caractéristiques favorisent l'exploitation de 2 paramètres de la projection - plan et/ou direction de projection, comme l'illustrent les exemples de réponses suivantes.

> Elève n°319 (Viêt-Nam) justifie l'acceptation du dessin 1.1 : « Projeter le cube sur un plan parallèle à n'importe quelle face du cube, on obtient le dessin ci-contre »
> Elève n°130 (Viêt-Nam) justifie l'acceptation du dessin 2.2 : « Un cylindre est projeté sur un plan perpendiculaire aux bases (disques) par la projection parallèle »
> Elève n°139 (Viêt-Nam) justifie l'acceptation du dessin 2.5 : « Quand la direction de projection est parallèle à la face latérale »
> Elève n°130 Viêt-Nam) justifie l'acceptation du dessin 3.1 : « Projeter un cône sur un plan perpendiculaire à la base par la projection orthogonale on obtient 3.1 »
> Elève n°194 (Viêt-Nam) justifie l'acceptation du dessin 3.3 : « Le dessin de représentation d'un cône de révolution quand le plan de projection est parallèle à la face de la base »

Ensuite, parmi ces 4 dessins, les dessins 2.2 et 3.1 ont une proportion JProj/JObs supérieure aux autres (respectivement, 0,24 et 0,25). Autrement dit, ces dessins donnent plus de place aux arguments « projection » que les dessins 1.1, 2.5, 3.3. Outre les deux caractéristiques un seul composant, éléments en vraie grandeur, les dessins 2.2 et 3.1 peuvent être considérés comme « coupe verticale » du cylindre et du cône de révolution. *Les « coupes verticales » favorisent-elles les réponses « oui » justifiées par « projection » ?*

[81] Pour le dessin 3.6, il y a seulement 4 réponses « oui » justifiées par « projection ».

7.4.3 Synthèse

Le grand nombre de refus pour les dessins non-prototypiques sans pointillés nous permettent de valider l'existence de la règle R.3D dans les deux pays. Les arguments du refus basent principalement sur les dessins prototypiques.
En France, les élèves se réfèrent davantage aux dessins prototypiques de l'objet de l'espace que ceux de l'objet du plan. Par contre, au Viêt-Nam, les élèves donnent la priorité aux dessins prototypiques de l'objet du plan.

Pour les acceptations, les élèves de deux pays font appel à l'observation.

En outre, il semble que les dessins pouvant être lus comme une « coupe verticale » du cylindre ou du cône de révolution peuvent favoriser la mobilisation de la notion de « projection » dans la lecture de ce dessin.

7.5 Conclusion

L'analyse des réponses des élèves français et vietnamien lors du questionnaire nous permet de valider la règle implicite commune suivante pour les solides dans les deux institutions française et vietnamienne :

R.3D : Les dessins d'un objet à trois dimensions doivent comporter des pointillés.

Quant aux règles implicites spécifiques pour la représentation en perspective des solides (cube, cylindre et cône de révolution), nous ne confirmons l'existence des règles R.CyC, R.CoC qu'en France.

R.CyC : Pour le cylindre de révolution dont les bases sont représentées par des ellipses, les deux génératrices extérieures permettent de former une coupe rectangulaire. *R.CoC : Pour le cône de révolution dont la base est représentée par une ellipse, les deux génératrices extérieures sont égales.*

A propos des praxéologies personnelles (Q4'), l'étude des justifications des élèves français et vietnamiens dans ce chapitre montre la nature des arguments pour l'acceptation/refus par rapport à l'évolution institutionnelle des praxéologies (*cf.* la Figure 25 à la page 160).

• Premièrement, les arguments se basant sur les règles de représentation du dessin prototypique sont les plus fréquents, surtout dans le cas du refus.
Ceci peut s'expliquer par la présence continue de ces dessins dans l'enseignement de la Géométrie de l'espace sur une longue durée au collège (en France), au collège-lycée (au Viêt-Nam).
Pour le refus des dessins sans pointillés comme pouvant représenter des objets de l'espace, il semble que les élèves français se réfèrent plus aux dessins prototypiques d'un objet de l'espace que les élèves vietnamiens.

• Deuxièmement, bien que le moment de l'expérimentation se situe à la fin de l'enseignement de la Géométrie de l'espace, nous trouvons beaucoup d'arguments « observation », surtout dans les acceptations. Cela montre la trace « persistante » des praxéologies d'observation du primaire.

• Troisièmement, bien que les praxéologies de projection soient abordées à la fin de l'enseignement de la représentation en perspective au Viêt-Nam, les arguments « projection » sont très rares dans les justifications des élèves vietnamiens.

Il est possible que cela résulte de l'absence d'une praxéologie de projection attachée au type de tâches « Associer un *dessin* donné à un *objet géométrique de l'espace* ».

Toutefois, l'analyse des réponses fait apparaitre que certains dessins peuvent favoriser le passage d'un solide à sa représentation par projection : par exemple, les « coupes verticales » du cylindre et du cône de révolution (dessins 2.2, 3.1). *De tels dessins pourraient-ils être candidats dans la conception d'une ingénierie didactique portant sur le passage d'un objet de l'espace à sa représentation en perspective ?*

Conclusion

Le premier objectif de cette recherche était d'étudier l'enseignement actuel de la représentation en perspective en France et au Viêt-Nam. Pour ce faire, nous avons mené une analyse comparative entre la France et le Viêt-Nam permettant de caractériser et d'identifier les attentes, les choix institutionnels relatifs à l'objet « représentation en perspective », de comprendre les raisons et les contraintes qui pèsent sur ces choix. Il s'agissait d'élaborer des grilles d'analyse sur :
- les modes de représentation et leurs approches mathématiques,
- les praxéologies relatives à l'objet « représentation en perspective »,
- les règles de représentation du dessin en perspective.

En les faisant fonctionner pour l'étude des programmes et des manuels français et vietnamiens, nous avons mis en évidence les points spécifiques de l'enseignement de la représentation en perspective en France et au Viêt-Nam à travers leurs ressemblances et leurs dissemblances institutionnelles.

Le deuxième objectif était d'étudier les effets des choix de chaque institution sur le rapport personnel des élèves. Un questionnaire sur un type de tâches de la lecture d'un dessin a montré les règles implicites de la représentation en perspective et a mis en lumière les difficultés du passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin pour les élèves des deux pays.

Ci-après, nous récapitulons les principaux résultats de notre travail sur ces deux objectifs et proposons quelques nouvelles directions de recherche suites de la thèse.

Principaux résultats de la thèse

Choix de l'enseignement de la représentation en perspective en France et au Viêt-Nam

a) Choix de la perspective et de son approche mathématique

Les deux institutions s'orientent vers une perspective assurant un équilibre entre le « vu » et le « su », comme l'a déjà souligné Parzysz pour la France (Parzysz, 1991). Cependant, elles font des choix différents, en particulier sur l'approche mathématique de la perspective en raison d'organisations différentes des contenus de la Géométrie de l'espace.

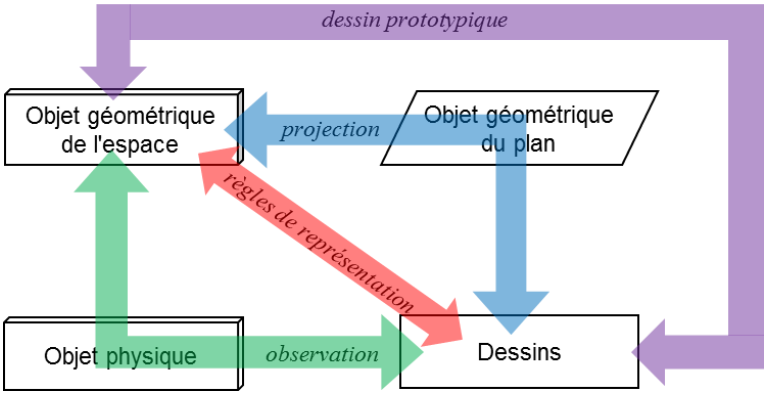
En France, la Géométrie de l'espace est officiellement enseignée à partir de la sixième et s'étend jusqu'en seconde. Elle est organisée autour des solides : parallélépipède rectangle (en 6e), prisme droit, cylindre de révolution (en 5e), pyramide, cône de révolution (en 5e), sphère (en 3e). Dans ce contexte, le système français opte pour la *perspective cavalière* et pour

l'approche mathématique par cube de référence avec les caractéristiques : angle de fuite et rapport de réduction.

Au Viêt-Nam, la représentation en perspective est officiellement introduite en classe 11. Le contenu de la Géométrie de l'espace de cette classe s'organise selon les relations spatiales : parallélisme et orthogonalité. La perspective introduite est la *perspective parallèle* et est expliquée par la projection parallèle (à la fin de l'enseignement du parallélisme dans l'espace) avec deux caractéristiques : plan et direction de projection.

b) Choix de l'approche pour enseigner le passage d'un objet géométrie de l'espace à un dessin

A partir d'une synthèse des travaux des didacticiens français et d'une enquête sur les traces de l'évolution de l'enseignement de la représentation en perspective, nous avons repéré quatre approches possibles pour enseigner le passage d'un objet géométrie de l'espace à un dessin : « projection cylindrique », « observation », « règles de représentation », « dessins prototypiques ».



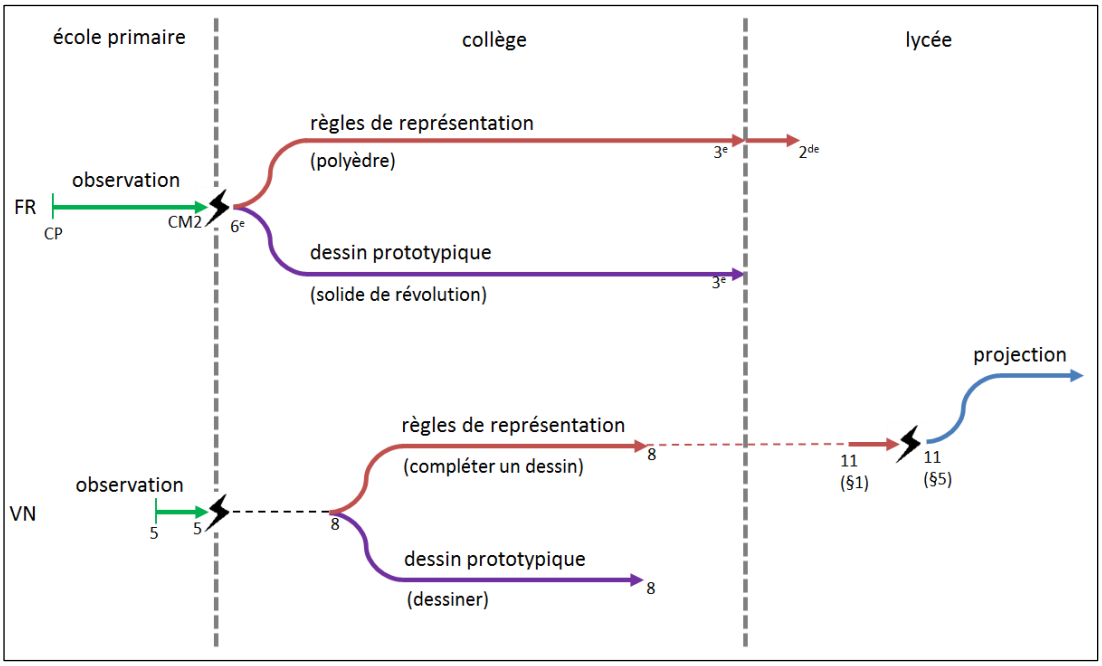
Approches pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin

Nous avons caractérisé ces approches par quatre praxéologies locales de référence qui s'organisent autour de 6 types de tâches :

- type de tâches 1 « Déterminer la transformée d'un objet géométrique de l'espace par une projection cylindrique donnée »,
- type de tâches 2 « Déterminer les transformées possibles d'un objet géométrique de l'espace par projection cylindrique »,
- type de tâches 3 « Etudier l'existence d'une transformation d'un objet géométrique de l'espace donné en un objet géométrique du plan donné »,
- type de tâches 4 « Dessiner un objet géométrique de l'espace »,
- type de tâches 5 « Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace donné »,
- type de tâches 6 « Compléter le dessin d'un objet géométrique de l'espace ».

Les trois premiers types de tâches n'existent pas en France en raison de l'absence de la projection. Pour les trois derniers, nous constatons une ressemblance entre les deux institutions française et vietnamienne au niveau de l'école primaire et du collège. En effet, les deux opèrent un changement de praxéologies locales : d' « observation » à « règles de représentation » et « dessins prototypique ». Toutefois, au lycée, alors que l'institution française (en seconde) se limite à l'usage des praxéologies locales du collège, l'institution

vietnamienne cherche à introduire une praxéologie locale « projection » (à la fin de premier semestre en classe 11).



Evolution des éléments techniques-technologiques dans les praxéologies de passage d'un objet géométrique dans l'espace à un dessin en France et au Viêt-Nam

c) Choix du système des règles de représentation du dessin en perspective

Pour notre étude nous avons construit une grille d'analyse des règles de représentation du dessin en perspective avec trois groupes de règles :

- règles de conservation et de non-conservation. Elles ont pour origine des propriétés de la projection parallèle ;
- règles de représentation de la troisième dimension. Ce sont des conventions qui visent à donner l'illusion de la troisième dimension ;
- règles pour un dessin « bien informé ». Elles sont des conséquences de pratiques institutionnelles visant à favoriser le passage d'un dessin à l'objet géométrique de l'espace.

Pour les deux premiers groupes, il n'y a peu de différences entre les deux institutions sauf en ce qui concerne la règle de conservation de la nature des objets frontaux qui est présente en France en raison de l'approche par cube de référence, mais absente au Viêt-Nam.

A la différence des deux groupes précédents, les règles du troisième groupe sont le plus souvent *implicites* dans les institutions. Elles conduisent aux dessins prototypiques.

L'étude des dessins de certains solides présents dans les manuels de deux pays, nous a permis de formuler les règles implicites du contrat didactique de la représentation en perspective sur - la présence des pointillés dans les dessins de représentation des solides, - la réduction des fuyantes du cube, - la représentation des génératrices du cylindre et du cône de révolution.

Rapport personnel des élèves français et vietnamien à l'objet « représentation en perspective »

a) Règles implicites de représentation du dessin en perspective

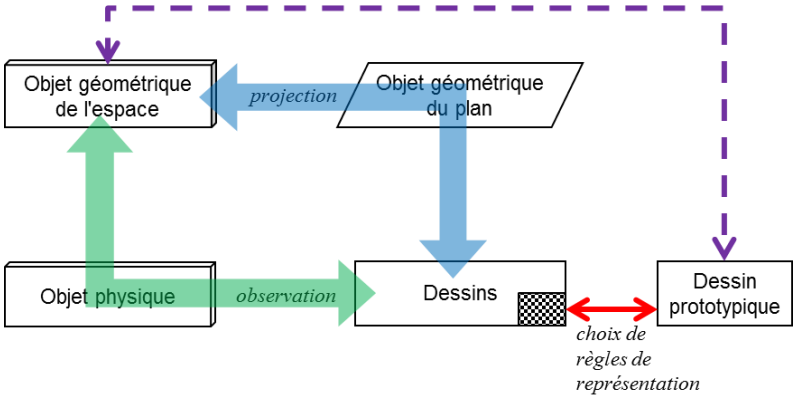
Un questionnaire a été conçu à propos d'un type de tâches habituel « Associer un *dessin* donné à un *objet géométrique de l'espace* » dans les deux institutions ; mais certains des dessins choisis sont non-prototypiques. Cette perturbation au sein du rapport institutionnel nous a permis de vérifier le fonctionnement des règles implicites de représentation du dessin suivantes.

- Pour les deux institutions française et vietnamienne, la règle sur le codage de la troisième dimension : « *Les dessins d'un objet à trois dimensions doivent comporter des pointillés* » ;
- Pour l'institution française, deux règles sur l'équilibre des génératrices du cylindre et du cône de révolution : « *Pour le cylindre de révolution dont les bases sont représentées par des ellipses, les deux génératrices extérieures permettent de former une coupe rectangulaire* » et « *Pour le cône de révolution dont la base est représentée par une ellipse, les deux génératrices extérieures sont égales* ».

b) Passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin

En considérant les justifications des acceptations/refus des élèves, nous trouvons une forte présence des règles de représentation du dessin prototypique.

Ces règles de représentations incarnées dans les dessins prototypiques font l'économie non seulement du traitement mathématique du passage de l'objet à un dessin mais aussi de toute transformation de l'objet, le dessin prototypique étant « l'étiquette du solide »



Significations épistémologiques et didactiques du passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin

Le logos des praxéologies personnelles des élèves pour le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin, et ce dans les deux pays, semble donc majoritairement se réduire à un simple étiquetage d'un objet par un dessin reposant sur des règles implicites du contrat didactique de la représentation.

En outre, quand ce passage (de l'objet au dessin) ne se réduit pas à cet étiquetage, il est prioritairement pris en charge par des justifications basées sur l'observation d'un objet matériel lié à l'objet géométrique. Ces praxéologies personnelles sont les traces historiques de la praxéologie locale « observation » de l'école primaire. Elles conduisent à des acceptations

de dessins « dégénérés » ou dessins sans pointillés, le refus s'appuyant majoritairement sur les praxéologies « dessins prototypiques ».

Par ailleurs, bien que la projection parallèle soit enseignée au Viêt-Nam, très peu d'élèves justifie ou explique leur réponse par des arguments s'appuyant sur la « projection ». Néanmoins, les dessins « coupe verticale » du cylindre ou du cône de révolution semblent favoriser la projection comme logos possible lors de la lecture d'un tel dessin. *Le type de tâches 5 ne devient-il pas un autre type de tâches de lecture pour l'élève quand le dessin est sans pointillés (type de tâches personnel)?*

Apports, limites et perspectives

a) Apport au projet Ontoprax de l'équipe MeTAH

Un modèle de représentation informatique des praxéologies (de référence, institutionnelles et personnelles) est développé dans l'équipe MeTAH : projet Ontoprax. Ce modèle s'appuie sur l'approche ontologique[82] qui doit répondre aux conditions suivantes : constituer une référence pour une communauté de praticiens (chercheurs, enseignants…), viser à être complète et cohérente, être calculable et interopérable (compatible avec différents type de logiciels), être manipulable par des humains, fournir des services à des EIAH (indexation des ressources, analyse de curricula, diagnostic,…). Cela a conduit l'équipe MeTAH à une formalisation du modèle praxéologique par l'introduction des notions de variables, de relations entre type de tâches et sous-type de tâches, et à la description des techniques et des technologies (cadre de référence T4TEL).

Cette thèse contribue au développement d'une ontologie de praxéologies concernant la représentation en perspective dans l'enseignement de la géométrie de l'espace.

b) Une étude sur le rapport institutionnel pour l'enseignant et sur la formation des enseignants

Un de nos choix méthodologiques a été de limiter l'étude du rapport institutionnel à celui pour la position élève et du rapport personnel de l'élève.
Dans l'avenir, il serait important de compléter notre étude par une étude du même type pour l'enseignant.
De même quel rapport institutionnel concernant ce savoir dans les institutions de formation des enseignants actuelles en France et au Viêt-Nam ? Comment notre étude peut-elle modifier ce rapport ?

c) Une étude sur le rôle du dessin dans la résolution des problèmes de la Géométrie de l'espace

Notre étude a mis en lumière le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin. Nous pouvons la considérer comme le point de départ d'une autre étude, celle du rôle du dessin dans la résolution des problèmes de la Géométrie de l'espace.
Cette étude pourrait s'appuyer sur une approche praxéologique où l'on approfondirait les types de tâches « Etudier une *propriété* des *objets géométriques de l'espace* représentés dans

[82] L'ontologie fournit une description des concepts et relations partagés par une communauté d'acteurs, humains ou logiciels, au sujet d'un univers donné.

un *dessin* »[83] et « Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant une *propriété* géométrique donnée à l'aide d'un *dessin* »[84] afin d'explorer l'intervention du dessin dans le processus de résolution.

d) Une étude de la représentation en perspective dans l'environnement informatique

L'analyse des praxéologies dans les manuels français a montré une tendance à introduire des types de tâches relatifs à l'exploitation d'un objet géométrique de l'espace à l'aide des logiciels de géométrie dynamique (par exemple, Géospace).

Cela ouvre le champ à de nouvelles études concernant la représentation en perspective dans l'environnement informatique, par exemple :

- construire une grille d'analyse permettant de comparer les choix de représentation en perspective selon les différents logiciels de géométriques dynamiques comme Géospace, Cabri 3D, GeoGebra,… *Comment les différents choix de représentation des logiciels influencent-ils les praxéologies personnelles des élèves ?*
- étudier les apports des représentations dans l'environnement informatique pour la résolution d'un problème de la Géométrie de l'espace. *Quelles sont les nouvelles techniques et technologies (au sens praxéologique) provenant de l'usage des logiciels de géométrie dynamique ?*

[83] Type de tâches 7 dans notre étude.
[84] Type de tâches 8 dans notre étude.

Bibliographie

Adrait, R., Sommier, D., et Battail, J.-P. (2002). *Guide du constructeur en bâtiment*. Paris: Hachette technique.

Audibert, G. (1990). *La Perspective cavalière*. Paris: APMEP.

Audibert, G. (1992). L'espace en géométrie. *Topologie structurale*, (18), 49–62.

Audibert, G., et Keita, B. (1988). La perspective cavalière et la représentation de l'espace. Dans *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 109–125). Grenoble: La Pensée Sauvage éditions Grenoble.

Baracs, J. J. (1992). Le développement de la perception spatiale à l'aide des projections. *Topologie structurale*, (19), 47–70.

Baruk, S. (2008). *Dico de mathématiques : collège et CM2*. Paris: Seuil jeunesse.

Bautier, T., Boudarel, J., Colmez, F., et Parzysz, B. (1988). Géométrie et espace. Représentation plane des figures de l'espace. Dans *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 127–147). Grenoble: Pensée sauvage éditions Grenoble.

Bessot, A., et Comiti, C. (2013). Apport des études comparatives internationales aux recherches en didactique des mathématiques. Le cas de la France et du Viêt Nam. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *33*(1), 45–77.

Bessot, A., Deprez, S., Eberhard, M., et Gomas, B. (1992). Le sens des graphismes techniques dans la formation professionnelle de base pour les travailleurs du bâtiment: une approche didactique. *Education permanente*, (111), 87–105.

Bkouche, R., et Soufflet, M. (1983). Axiomatique, formalisme et théorie. *Enseignement de La Géométrie. Bulletin Inter-IREM*, (23), 3–24.

Bonafé, F. (1988). Quelques hypothèses et résultats sur l'enseignement de la géométrie de l'espace à partir de la représentation en perspective cavalière. *Bulletin de l'APMEP*, *363*, 151–164.

Bonafé, F., et Sauter, M. (1998). Enseigner la géométrie dans l'espace. *Repères IREM*, (33), 5–18.

Bosch, M., et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107–122). Paris: La pensée sauvage, éditions.

Chaachoua, H. (1997). *Fonction du dessin dans l'enseignement de la Géométrie dans l'espace. Etude d'un cas: la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier (Grenoble I), Grenoble.

Chaachoua, H. (1998). Géométrie dans l'espace. Le point sur la lecture des dessins pour les élèves en fin de collège. *Petit x*, (48), 37–68.

Chaachoua, H. (1999). Ecologie des problèmes de construction dans l'espace. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(3), 323–356.

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves* (Habilitation à Diriger des Recherches). Grenoble: Université Joseph Fourier (Grenoble I).

Chaachoua, H., et Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. Dans *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 771–789). Montpellier: IUFM de l'académie de Montpellier.

Chaachoua, H., Ferraton, G., et Desmoulins, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. Dans *Evolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société (à paraître)*. Toulouse.

Chevallard, Y. (1989). *Note de synthèse – Aspect d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire* (Habilitation à diriger des recherches).

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221–266.

Chevallard, Y., et Bosch, M. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux oftensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 77–124.

Cordier, F., et Cordier, J. (1991). L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *11*(1), 45–64.

Corrieu, L. (1999). *Dictionnaire du professeur des écoles : enseignement des mathématiques*. Paris: Vuibert.

Deforge, Y. (1981). *Le graphisme technique: son histoire et son enseignement* (Vol. 4). Seyssel: Champ Vallon.

Destainville, B. (1996). *Enseigner la géométrie dans l'espace au collège et au lycée*. Paris: APMEP.

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continue ou rupture cognitive? *Petit x*, (31), 37–61.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure. *Repères IREM*, (17), 121–138.

Groupe de Géométrie de Bordeaux. (1991). Point de départ en géométrie de l'espace. Université Bordeaux 1.

Khu, Q. A., Pham, K. B., Nguyen, H. C., Van, N. C., Nguyen, H. D., Tran, V. H., … Vu, V. Y. (2007). *Document de formation continue des enseignants : exercer le programme, les manuels de la classe 11 en Mathématiques*. Maison d'Edition de l'éducation.

Le Van, T. (2001). *Etude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-Nam* (Thèse de doctorat en co-tutelle). Université Joseph Fourier (Grenoble I), Grenoble.

Noirfalise, R. (1991). Figures prégnantes en géométrie? *Repères IREM*, (2), 51–58.

Pais, L.-C., Naudeillo, J., et Pelouzet, B. (1991). La représentation des corps ronds. *Repères IREM*, (4), 74–83.

Parzysz, B. (1991). Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *11*(2.3), 211–240.

Tang, M. D. (2013). Représentation en perspective : des choix de l'institution d'enseignement de la géométrie dans l'espace au Viêt-Nam. Dans *Quelques avancées significatives dans la recherche en didactique des mathématiques*. Ho Chi Minh ville: Université Pédagogique d'Ho Chi Minh ville et Université Joseph Fourier.

Thuillier, P. (1984). Espace et perspective au quattrocento. *Recherche (La) Paris*, (160), 1384–1398.

Tran Luong, C. K. (2006). *La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée: Une étude comparative entre la France et le VietNam*. Université Joseph Fourier (Grenoble I), Grenoble.

Manuels et livres du professeur français

Audirac, J.-L., et Richerme, A. (1981). *Maths 2e Geometrie*. Paris: Magnard.

Audren, H., Cecconi, S., Goff, E. L., et Riou, E. (2007). *Maths 4e*. Paris: Bréal.

Bareil, H., et Zehren, C. (1994). *Mathematique 6e*. Paris: Hachette.

Barra, R., Barros, J.-M., Bénizeau, P., Liorit, K., Morin, J., Nivaud, D., et Ricomet, V. (2010). *Transmath 2de*. Paris: Nathan.

Barra, R., Borion, G., Jardonet, M., Lampin, M., et Malaval, J. (1992). *Transmath 4e*. Paris: Nathan.

Beltramone, J.-P., Candeloro, A., Henry, F., Paulou, F., et Tabourin, D. (2009a). *Déclic : Maths 6e*. Paris: Hachette éducation.

Beltramone, J.-P., Candeloro, A., Henry, F., Paulou, F., et Tabourin, D. (2009b). *Déclic : Maths 6e (Livre du professeur)*. Paris: Hachette éducation.

Beltramone, J.-P., Labrosse, J., Truchan, A., Brun, V., Sidokpohou, O., Talamoni, C., … Rousseau, P. (2010). *Déclic : Mathématiques 2de*. Paris: Hachette Education Technique.

Brault, R., Daro, I., Ferrero, C., Perbos-Raimbourg, D., et Telmon, C. (2009). *Phare : Mathématiques 6e*. Paris: Hachette Education.

Brault, R., Daro, I., Ferrero, C., Perbos-Raimbourg, D., et Telmon, C. (2010). *Phare : Mathématiques 5e*. Paris: Hachette Education.

Brisoux, F., Bruker, C., Monka, Y., et Sigward, E. (2010). *Odyssée : Mathématiques 2de*. Paris: Hatier.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., et Pérotin, C. (1996). *Triangle : Mathématiques 6e*. Paris: Hatier.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., et Pérotin, C. (1999). *Triangle : Mathématiques 3e*. Paris: Hatier.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., et Pérotin, C. (2009). *Triangle : Mathématiques 6e*. Paris: Hatier.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., et Pérotin, C. (2010). *Triangle : Mathematiques 5e*. Paris: Hatier.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., et Pérotin, C. (2011a). *Triangle : Mathématiques 4e*. Paris: Hatier.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., et Pérotin, C. (2011b). *Triangle : Mathématiques 4e - Livre du professeur*. Paris: Hatier.

Chapiron, G., Michel Mante, René Mulet-Marquis, et Catherine Pérotin. (2012). *Triangle : Mathematiques 3e*. Paris: Hatier Scolaire.

Choquer-Raoult, A., Cocault, M., Hanouch, B., et Joffrédo, T. (2010). *Repères : Maths 2de*. Paris: Hachette éducation.

Condamine, M., Polle, R., Clopeau, G.-H., et Cluzel, R. (1973). *P. Vissio, Mathématique seconde C.D.T.* Paris: Librairie Delagrave.

Fauvergue, P., Curel, P., Rieu, R., et Sarnette, A. (1987). *Mistral : Mathématiques 5e*. Paris: Casteilla.

Gauthier, R., Mison, G., Guichard, Y., Poncy, M., et Russier, M.-C. (2004). *Indice : Maths seconde*. Paris: Bordas.

Gautier, C., Gerll, D., Thiercé, C., et Warusfel, A. (1987). *Mathématique 2e*. Paris: Hachette.

Gérald, N., Jacob, N., Riou, E., Courivaud, C., Dodard, A., et Roncin, P. (2003). *Trapèze : mathématiques 3e*. Rosny: Bréal.

Jacob, N., Sitbon, A., et Vissio, J. (2009). *Nouveau prisme : Maths 6e*. Paris: Belin.

Jacob, N., Sitbon, A., Vissio, J., et Xoual, I. (2010). *Nouveau prisme : Math 5e*. Paris: Belin.

Lafon, M., et Annicchiarico, F. (2009). *Zéphyr : Maths 6* (2009th ed.). Paris: Bordas.

Lanoëlle, A., Nassiet, F., Perrinaud, J.-C., Porté, D., et Rivoallan, L. (1999). *Dimathème 3e*. Paris: Didier.

Malaval, et Barra. (1991). *Transmath : Maths 6e*. Nathan.

Malaval, J., Bourgeat, F., Brustel, A., Carlod, V., Jacquemound, D., Keller, A., … Verdier, F. (2013). *Transmath 6e*. Paris: Nathan.

Malaval, J., Courbon, D., Carlod, V., Fundakowski, M., Maze, M., Métais, M.-F., … Fuigredo, F. (2009). *Transmath 6e*. Paris: Nathan.

Malaval, J., Courbon, D., Carlod, V., Fundakowski, M., Maze, M., Plantiveau, A., … Wallon, P. (2010). *Transmath 5e*. Paris: Nathan.

Martinet, J., Barbançon, G., Koch, B., Girault, P., et Schmitt, J.-D. (1986). *Mathématiques 2e*. Paris: Casteilla.

Peltier, M.-L., Briand, J., Ngono, B., et Vergnes, D. (2011). *Euro maths CP - Livre du professeur*. Paris: Hatier.

Pierre, C., Paul, F., Renne, R., et Andre, S. (1995). *Mathématiques alpha : Math 5e*. Paris: Hatier.

Proteau, R., Spérandio, D., et Wigdorowicz, B. (1981). *Mathématiques 2nde*. Paris: Bordas.

Serra, E., Barberi, D., Christine, C., Elian, E., Michèle, G., et Cathy, P. (1999). *Math 3e*. Paris: Larousse-Bordas.

Thiénard, J.-C., Cheymol, M., Combrade, M., et Bonneval, L.-M. (2004). *Mathématiques Seconde*. Rosny-sous-Bois: Bréal.

Manuels et livres du professeur vietnamiens

Doan, Q., Van, N. C., Pham, K. B., et Ta, M. (2007a). *Géométrie 11 (avancé)*. Maison d'Edition de l'Education.

Doan, Q., Van, N. C., Pham, K. B., et Ta, M. (2007b). *Géométrie 11 (avancé) - Livre du professeur*. Maison d'Edition de l'Education.

Phan, D. C., Ton, T., Nguyen, H. D., Le, V. H., Truong, C. T., et Nguyen, H. T. (2004a). *Mathématiques 8 (Tome 2)*. Maison d'Edition de l'Education.

Phan, D. C., Ton, T., Nguyen, H. D., Le, V. H., Truong, C. T., et Nguyen, H. T. (2004b). *Mathématiques 8 (Tome 2) - Livre du professeur*. Maison d'Edition de l'Education.

Phan, D. C., Ton, T., Nguyen, H. D., Pham, G. D., Truong, C. T., et Nguyen, D. T. T. (2005). *Mathématiques 9 (Tome 2) - Livre du professeur*. Maison d'Edition de l'Education.

Tran, V. H., Nguyen, M. H., et Cam, D. L. (1990). *Géométrie 11*. Maison d'Edition de l'Education.

Tran, V. H., Nguyen, M. H., Khu, Q. A., Nguyen, H. T., et Phan, V. V. (2007a). *Géométrie 11*. Maison d'Edition de l'Education.

Tran, V. H., Nguyen, M. H., Khu, Q. A., Nguyen, H. T., et Phan, V. V. (2007b). *Géométrie 11 - Livre du professeur*. Maison d'Edition de l'Education.

Tran, V. H., Nguyen, M. H., Khu, Q. A., et Tran, D. H. (2008a). *Géométrie 12*. Maison d'Edition de l'Education.

Tran, V. H., Nguyen, M. H., Khu, Q. A., et Tran, D. H. (2008b). *Géométrie 12 - Livre du professeur*. Maison d'Edition de l'Education.

Annexe

Annexe 1. Classification des projections **1**

Annexe 2. Extrait des programmes français et vietnamiens sur l'enseignement de la représentation en perspective **3**

En France *3*

Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008 3

Bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009 4

Au Viêt-Nam *5*

Classe 11 5

Annexe 3. Extrait du manuel de Géométrie 11 ..... **9**

Série standard *9*

Série avancée *13*

Annexe 4. Distribution des types de tâches 7 et 8 selon la variable d' « objet géométrique de l'espace » **19**

Dans les manuels français *19*

Dans les manuels vietnamiens *19*

Annexe 5. Quelques praxéologies institutionnelles françaises concernant la représentation en perspective dans l'environnement informatique **21**

Annexe 6. Règles de représentation explicites dans les manuels français **23**

Annexe 7. Statistique des dessins de solides usuels dans les manuels français **31**

Parallélépipède rectangle *31*

Prisme droit (sauf parallélépipède rectangle) *31*

Pyramide dont la hauteur est aussi une arête latérale *32*

Cylindre de révolution *32*

Cône de révolution *33*

Direction des fuyantes dans le dessin de catégorie PaF *33*

Annexe 8. Questionnaire d'expérimentation **35**

QUESTION 1 ..... *35*

QUESTION 2 ..... *36*

QUESTION 3 ..... *37*

Annexe 9. Données des réponses d'élèves **39**

Annexe 10. Traitement de données sur R **45**

Annexe 1. Classification des projections

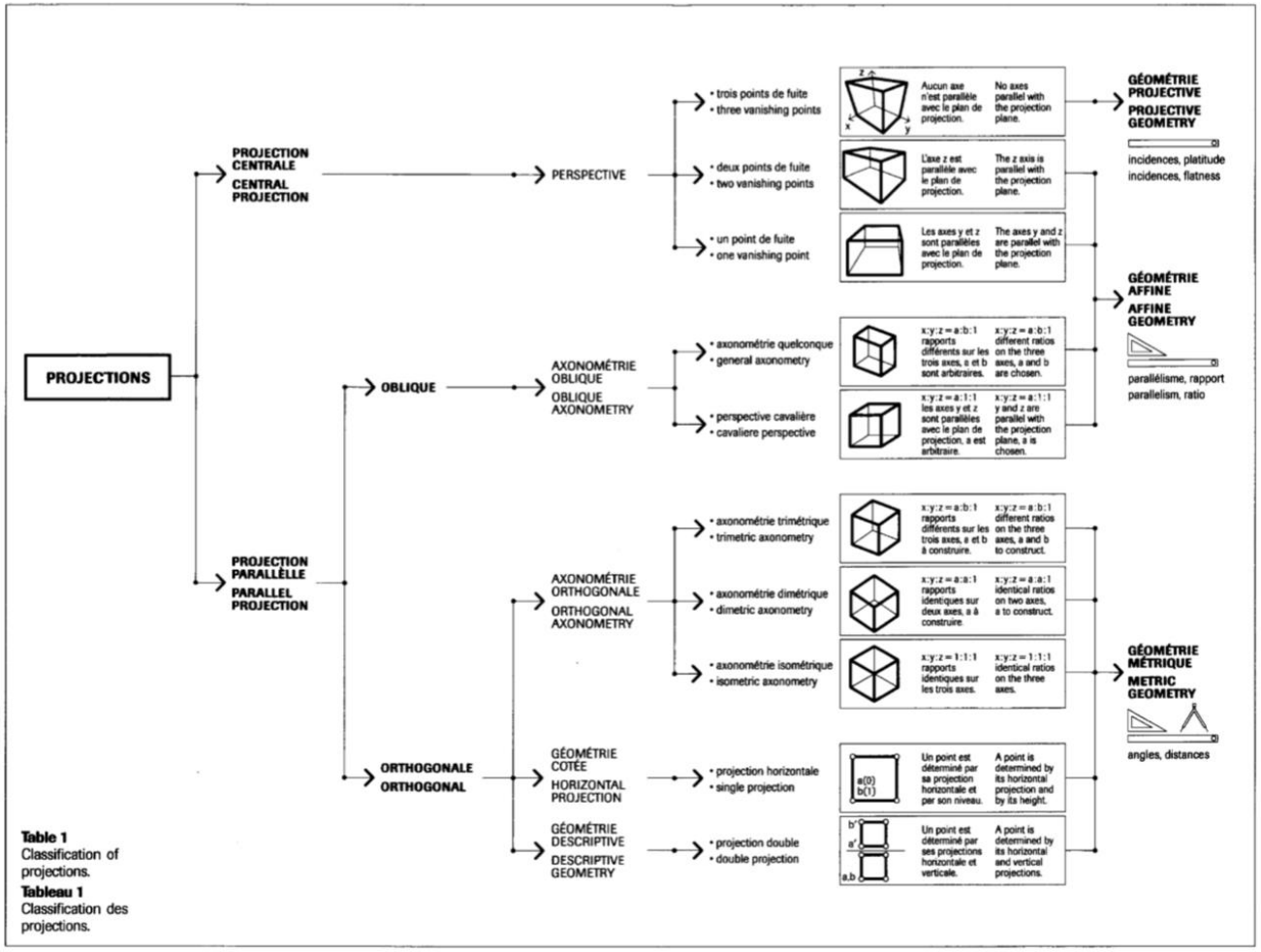


Table 1
Classification of projections.
Tableau 1
Classification des projections.

Extrait de (Baracs, 1992, p. 48)

Annexe 2. Extrait des programmes français et vietnamiens sur l'enseignement de la représentation en perspective

En France

Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008

Classe de sixième

Connaissances	Capacités	Commentaires
[…] 3.3 Parallélépipède rectangle : patrons, représentation en perspective	[…] - Reconnaître un parallélépipède rectangle de dimensions données à partir […] d'un dessin le représentant en perspective cavalière - Reconnaître dans une représentation en perspective cavalière du parallélépipède rectangle les arêtes de même longueur, les angles droits, les arêtes, les faces parallèles ou perpendiculaires. […]	A l'école élémentaire les élèves ont déjà travaillé sur des solides droits de l'espace (description, construction, patron). Cette étude est poursuivie en 6e en mettant l'accent sur un aspect nouveau : la représentation en perspective cavalière, dont certaines caractéristiques sont précisées aux élèves. […] Même si les compétences attendues ne concernent que le parallélépipède rectangle, les travaux portent sur différents objets de l'espace et s'appuient sur l'étude de solides amenant à passer de l'objet à ses représentations et inversement.

Classe de cinquième

Connaissances	Capacités	Commentaires
[…] 3.3 Prismes droits, cylindre de révolution	[…] -Dessiner à main levée une représentation en perspective cavalière de ces deux solides. - Reconnaître dans une représentation en perspective cavalière d'un prisme droit les arêtes de même longueur, les angles droits, les arêtes, les faces parallèles ou perpendiculaires.	Comme en classe de sixième, l'objectif est d'entretenir et d'approfondir les acquis : représenter, décrire et construire des solides de l'espace, en particulier à l'aide de patrons. Passer de l'objet à ses représentations (et inversement) constitue encore l'essentiel du travail. […]

Classe de quatrième

Connaissances	Capacités	Commentaires
[…] 3.2 Configuration dans l'espace Pyramide et cône de révolution.	[…]	[…] Les activités sur les pyramides exploitent des situations simples. L'objet est toujours d'apprendre à voir dans l'espace, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et la réalisation de patrons. Ces travaux permettent de

		consolider les images mentales relatives à des situations de perpendicularité.

Classe de troisième

Connaissances	Capacités	Commentaires
[…] 3.2 Configuration dans l'espace Problème de sections planes de solides.	[…]	[…] Les élèves sont également confrontés au problème de représentation d'objet à 3 dimensions, ainsi qu'à celle de la représentation en vraie grandeur d'une partie de ces objets dans un plan (par exemple : section plane, polygone déterminé par des points de l'objet…)
Sphère, centre, rayon Sections planes d'une sphère.	[…] - Représenter la sphère et certains de ses grands cercles.	[…] Aucune difficulté n'est soulevée sur ces représentations. Le rapprochement est fait avec les connaissances que les élèves ont déjà de la sphère terrestre, notamment pour le repérage sur la sphère à l'aide des méridiens et les parallèles.

Bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009

Classe de seconde

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Géométrie de l'espace Les solides usuels étudiés au collège : parallélépipède rectangle, pyramides, cône et cylindre de révolution, sphère. […]	Manipuler, construire, représenter en perspective des solides.	[…]

Au Viêt-Nam

Classe 11

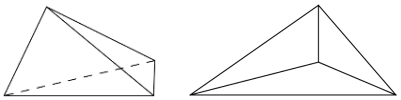
Sujet	Exigence	Annotation
VII. DROITE ET PLAN DANS L'ESPACE. PARALLELISME		
1. Généralisation de la droite et du plan Début de la géométrie de l'espace. Propriétés admises. Trois façons de détermination d'un plan. Pyramide et tétraèdre.	*A propose de connaissances :* […] *A propose de compétences :* - Représenter certaines figures spatiales simples. […]	*Exemple.* Représenter d'une pyramide dont la base est un quadrilatère. Indiquer son sommet, ses arêtes latérales, ses arêtes de base, ses faces latérales, sa base de cette pyramide. *Exemple.* Informer le dessin de représentation d'un triangle ; d'un parallélogramme ; d'un rectangle ; d'un losange ; d'un carré ; d'un trapèze isocèle ; d'un trapèze droit. *Exemple.* Lequel parmi ces deux dessins ci-dessous présente « mieux » le tétraèdre ?  Figure 1 Figure 2
2. Deux droites non-coplanaires et deux droites parallèles Position relative entre deux droites. Deux droites parallèles	[…]	[…]
3. Droite et plan parallèles	*A propose de connaissances :*[…] *A propose de compétence :*[…] - Représenter une droite parallèle à un plan ; […]	[…]
4. Deux plans parallèles. Prisme et parallélépipède	*A propose de connaissances :*[…] *A propose de compétence :*[…] - Représenter un parallélépipède, un prisme, une pyramide dont la base est un triangle, un quadrilatère. […]	*Exemple.* Représenter un prisme dont la base est un carré. *Exemple.* Représenter un tronc de pyramide dont la base est un triangle équilatéral. Indiquer, sur le dessin, sa base, ses faces latérales, ses arêtes de base, ses arêtes latérales.
5. Projection parallèle. Dessin de représentation d'une figure spatiale	*A propose de connaissances :* Connaître - La notion de la projection parallèle ; - La notion du dessin de représentation d'une	*Exemple.* Déterminer l'image de projection parallèle d'une droite dans les cas suivants : - La droite parallèle à la direction de projection. - La droite non-parallèle à la direction de projection.

	figure spatiale. *A propose de compétence :* - Déterminer la direction de projection, le plan de projection dans une projection parallèle. Construire l'image de projection parallèle d'un point, d'un segment, d'un triangle, d'un cercle. - Faire le dessin de représentation d'une figure spatiale.	*Exemple.* Est-ce que l'image de projection d'un parallélépipède est un parallélépipède ? *Exemple.* Faire le dessin de représentation d'un triangle équilatéral, d'un trapèze droit, d'un parallélogramme, d'un losange.
VIII. VECTEUR DANS L'ESPACE. ORTHOGONALITE		
1. Vecteur dans l'espace Vecteur. Somme, différence de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un nombre. Condition pour trois vecteurs coplanaire. Produit scalaire de deux vecteurs.	[…]	[…]
2. Deux droites orthogonales Vecteur directeur d'une droite. Angle entre deux droites.	[…]	[…]
3. Droite orthogonale à un plan Droite orthogonale à un plan. Vecteur normal d'un plan. Projection orthogonale. Théorème de « trois droites orthogonales ». Angle entre droite et plan.	*A propose de connaissances :* Connaître […] - La notion de la projection orthogonale […] *A propose de compétence :*[…] - Déterminer l'image de projection orthogonale d'un point, d'une droite, d'un triangle. […]	*Exemple.* Est-ce que l'image de projection orthogonale de deux angles égaux est deux angles égaux ?
4. Deux plans orthogonaux Angle entre deux plans, deux plans orthogonaux. Prisme droit, parallélépipède rectangle, cube. Pyramide régulière et tronc de pyramide régulière	[…]	[…]
5. Distance Distance d'un point à une	[…]	[…]

droite, à un plan. Distance entre deux droites, entre une droite et un plan parallèles, entre deux plans parallèles.		

(Programme de l'éducation générale de Mathématiques, accompagné l'arrêt n°16/2006/QD-BGDDT du 5 mai 2006 du Ministre de l'Education et de la Formation du Viêt-Nam, pp. 171-178)

Annexe 3. Extrait du manuel de Géométrie 11

Série standard

§5. PROJECTION PARALLELE.
DESSIN DE REPRESENTATION D'UNE FIGURE SPATIALE

I. PROJECTION PARALLELE

Soit le plan (α) et la droite Δ coupant (α).
Pour chaque point M dans l'espace, la droite passant par M et parallèle à Δ va couper (α) en M'. Le point M' est appelé *image de projection parallèle* du point M sur le plan (α) selon la direction de la droite Δ, ou en bref, selon la direction Δ (f. 2.61).
Le plan (α) est appelé *plan de projection*. La direction Δ est appelée *direction de projection*.

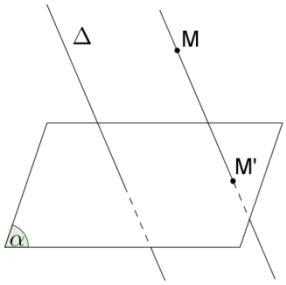


Figure 2.61

L'application qui, à chaque point M dans l'espace, fait correspondre son image M' dans le plan (α) est appelé *projection parallèle sur (α) selon la direction Δ*.

Si $\mathscr{H}$ est une figure quelconque, l'ensemble $\mathscr{H}'$ des images M' de tous les points M appartenant à $\mathscr{H}'$ est appelé image de $\mathscr{H}$ par la projection parallèle ci-dessus.

Attention. Si une droite a la direction confondue à la direction de projection, l'image de cette droite est un point. Dans les parties ultérieures, on ne considère que l'image des droites dont la direction n'est pas confondue à celle de projection.

II. PROPRIETES DE LA PROJECTION PARALLELE

Théorème 1

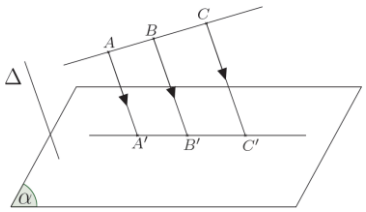


Figure 2.62

a) La projection parallèle transforme trois points alignés en trois points alignés et elle ne change pas leur ordre (f. 2.62).

b) La projection parallèle transforme une droite en droite, une demi-droite en demi-droite, un segment en segment.

c) La projection parallèle transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles ou confondues (f. 2.63 et f. 2. 64).

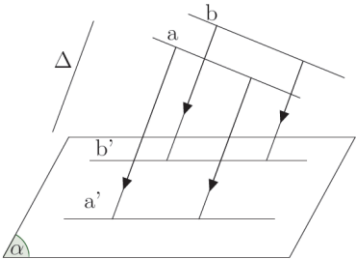


Figure 2.63

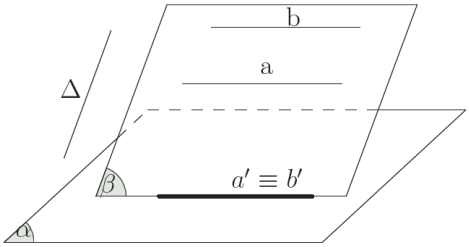
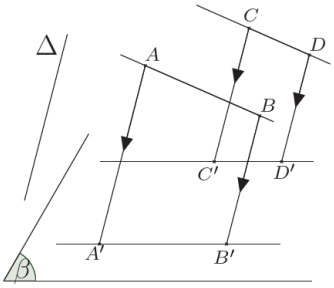


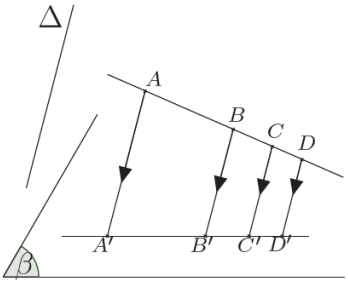
Figure 2.64

d) La projection parallèle ne change pas le rapport de longueur de deux segments situés sur deux droites parallèles ou sur une même droite (f. 2.65 et f. 2.66).



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Figure 2.65



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Figure 2.66

△1 Est-il possible que l'image de projection parallèle d'un carré soit un parallélogramme ?

△2 Est-il possible que la figure 2.67 soit image de projection parallèle d'un hexagone régulier ? Pourquoi ?

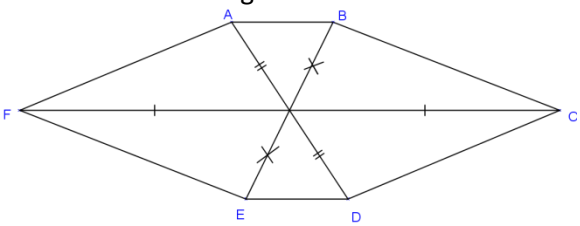


Figure 2.67

III. DESSIN DE REPRESENTATION D'UNE FIGURE DE L'ESPACE DANS LE PLAN

Le dessin de représentation d'une figure $\mathscr{H}$ dans l'espace est l'image de la projection parallèle de la figure $\mathscr{H}$ sur un plan selon une direction à une similitude près.

△3 Parmi les figures 2.68, lesquelles représentent un cube ?

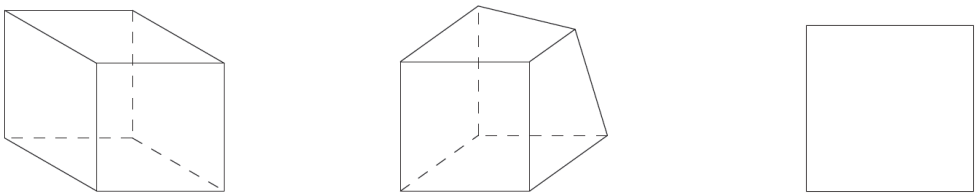
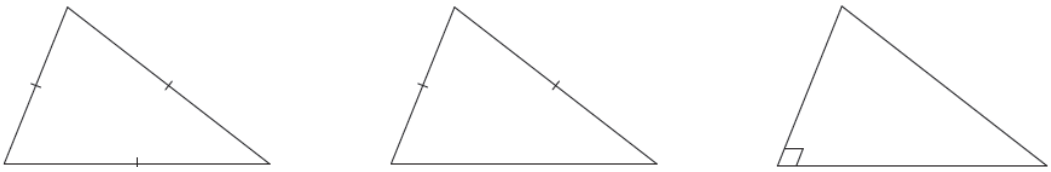

a) b) c)

Figure 2.68

Dessin de représentation des figures usuelles

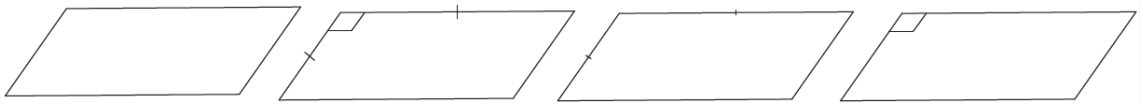
• *Triangle*. Il est toujours possible de considérer un triangle comme un dessin de représentation d'un triangle donné de forme quelconque (peut-être un triangle régulier, un triangle isocèle, un triangle droit, etc. …) (f. 2.69).



a) b) c)

Figure 2.69

• *Parallélogramme*. Il est toujours possible de considérer un parallélogramme comme un dessin de représentation d'un parallélogramme donné quelconque (peut-être un parallélogramme, un carré, un losange, un rectangle…) (f. 2.70).



a) b) c) d)

Figure 2.70

• *Trapèze*. Il est toujours possible de considérer un trapèze comme un dessin de représentation d'un trapèze donné quelconque, pourvu que le rapport de longueur des deux bases du dessin de représentation soit égal à celui du trapèze initial.

• *Cercle*. On prend régulièrement une ellipse pour représenter un cercle (f. 2.71).

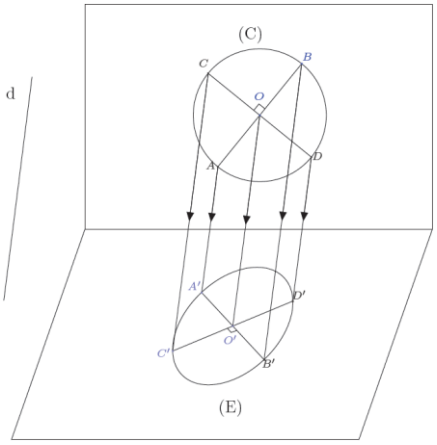


Figure 2.71

△ 4 Quels triangles les figures 2. 69a, 2. 69b, 2. 69c représentent-elles ?

△ 5 Quels parallélogrammes (parallélogramme, losange, carré, rectangle) les figures 2.70a, 2.70b, 2.70c, 2.70d représentent-elles ?

△ 6 Soient (α) et (β) deux plans parallèles. La droite *a* coupe (α) et (β) en A et en C. La droite b parallèle à *a* coupe (α) et (β) en B et en D.
La figure 2.72 qui illustre le contenu ci-dessus est-elle vraie ou fausse ?

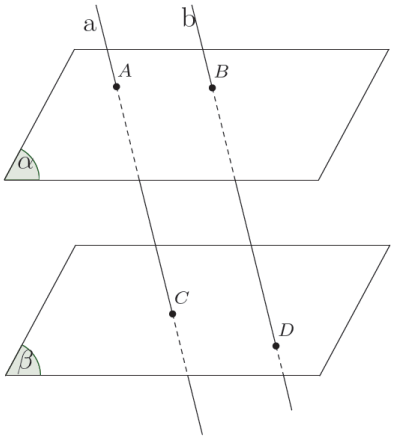


Figure 2.72

Texte supplémentaire

Représentation d'un pentagone régulier

Il est possible de considérer un triangle quelconque comme un dessin de représentation d'un triangle particulier. Il est possible de considérer un parallélogramme comme un dessin de représentation d'un carré. Quel est le dessin de représentation d'un pentagone régulier ?

Soient ABCDE un pentagone régulier avec les diagonales AC et BD sécantes en M (f. 2.73). Les deux triangles ABC et BMC sont homothétiques (deux triangles isocèles avec l'angle de base C commun).

On a $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$. (1)

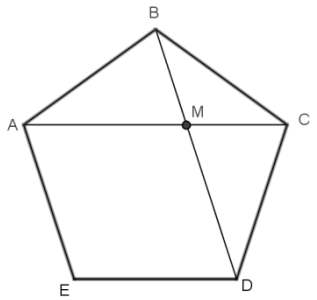


Figure 2.73

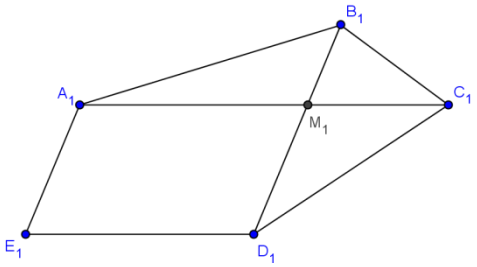


Figure 2.74

Par ailleurs, le quadrilatère *AMDE* est un losange alors *AM=AE=BC*, donc $(1) \Leftrightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{AM}{MC}$

Avec *AM=a*, *MC=x*, on a

$$\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \\ x = \frac{a}{2}\left(-\sqrt{5}-1\right) \quad (rejeté) \end{array}\right.$$

On déduit $\frac{MC}{AM} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx \frac{2}{3}$ et $\frac{BM}{MD} \approx \frac{2}{3}$.

Ces rapports sont conservés dans le dessin de représentation. Afin de construire le dessin de représentation, on dessin un parallélogramme $A_1M_1D_1E_1$ quelconque qui joue le rôle du dessin de représentation du losange AMDE (f. 2.74). Puis on allonge le côté A_1M_1 une longueur $M_1C_1 = \frac{2}{3} M_1A_1$ et le côté D_1M_1 une longueur $M_1B_1 = \frac{2}{3} M_1D_1$.

En joignant dans l'ordre les points A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 on admet le dessin de représentation d'un pentagone régulier.

Série avancée

§5. PROJECTION PARALLELE

1. Définition de la projection parallèle

Dans l'espace, soient un plan (P) et une droite *l* sécante à (P). Pour chaque point M dans l'espace, dessiner une droite passant par M et parallèle ou confondue à *l*. Cette droite coupe (P) en point M' (f. 73).

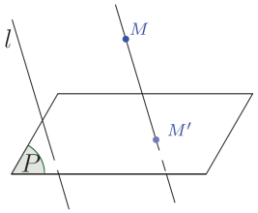


Figure 73

> L'application qui, à tout point M de l'espace, fait correspondre le point M' du plan (P) de façon ci-dessus est appelée ***projection parallèle sur le plan (P) selon la direction l***.

Le plan (P) est appelé ***plan de projection***, la droite *l* est appelée ***direction de projection*** ; le point M' est appelé ***figure de projection parallèle*** (ou ***image***) ***du point*** M par la projection ci-dessus.

Soit la figure $\mathscr{H}$. L'ensemble $\mathscr{H}'$ qui se compose des points de projection parallèle de tous les points appartenant à $\mathscr{H}$ est appelée ***figure de projection parallèle*** (ou ***image***) de la figure $\mathscr{H}$ par la projection ci-dessus.

L'ombre sur la terre plane d'un objet est image de projection parallèle de cet objet sur la terre (les rayons de soleil sont considérés comme parallèles).

?1 *Pour un point M qui appartient au plan de projection (P), quelle est son image de projection parallèle ?*

?2 *Soit la droite a parallèle à la direction l, quelle est l'image de projection parallèle de a (ou une partie d'elle) ?*

2. Propriétés

Pour les propriétés ci-dessous de la projection parallèle selon la direction l, nous examinons seulement l'image de projection parallèle *des segments et des droites qui ne sont pas parallèles ou confondues à l*.

Propriété 1

L'image de projection parallèle d'une droite est une droite.

Démonstration (f. 74)

Soit la projection parallèle sur le plan (P) selon la direction *l*. La droite *a* n'est pas parallèle ni confondue à *l*. Notons M un point quelconque appartenant à *a* et M' son image de projection parallèle. Parce que MM' est parallèle (ou confondu) à *l*, M' se situe sur le plan (Q) passant par *a* et parallèle à *l* (ou contenant *l*). Par ailleurs, M' se situe sur le plan (P). Donc, M' se situe sur la droite d'intersection *a'* des deux plans (P) et (Q).

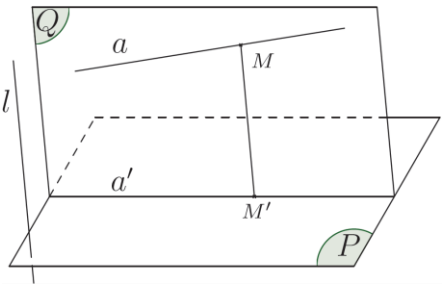


Figure 74

Inversement, il est facile de démontrer que chaque point M' de *a'* est l'image d'un point M de *a*. Donc, l'image de *a* est la droite *a'*.

?3 Dans le cas où la droite *a* appartient au plan de projection (P), quelle est l'image de projection parallèle de *a* ?

?4 Soit la droite *a* sécante au plan de projection (P) en A, est-ce que l'image de projection parallèle de *a* passe par le point A ?

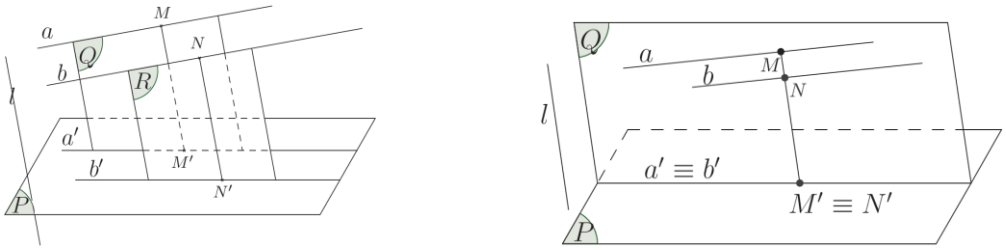
COROLLAIRE

L'image de projection parallèle d'un segment est un segment, celle d'une demi-droite est une demi-droite.

A partir de la démonstration de la propriété 1, on trouve que l'image de projection parallèle de la droite a est la droite d'intersection du plan de projection (P) et (Q), avec (Q) le plan passant par a et parallèle à l ou contenant l. On a donc

Propriété 2 (f. 75)

L'image de projection parallèle de deux droites parallèles est deux droites parallèles ou confondues.



a) b)

Figure 75

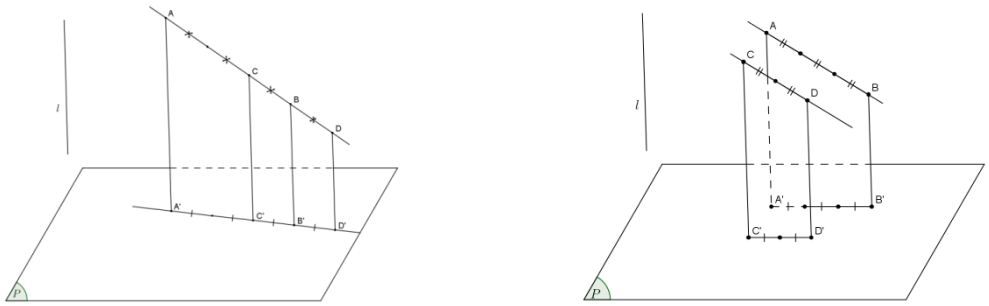
Propriété 3

La projection parallèle ne modifie pas le rapport des longueurs de deux segments situés sur deux droites parallèles (ou confondues).

La propriété 3 signifie : Si AB et CD sont deux segments situés sur deux droites parallèles (ou confondues) et leur image de projection parallèle sur le plan (P) est A'B' et C'D', alors

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$

La figure 76 illustre cette propriété.



a) b)

Figure 76

3. Dessin de représentation d'une figure spatiale

Dans la leçon §1 de ce chapitre, nous avons proposé certaines règle de représentation une figure spatiale sur un plan. Ces règles-là sont basées sur la définition suivante

DEFINITION

Le dessin de représentation d'une figure $\mathscr{H}$ dans l'espace est l'image de projection parallèle de la figure $\mathscr{H}$ sur un plan à une similitude près.

Ainsi, afin d'avoir un vrai dessin de représentation, on doit appliquer les propriétés citées de la projection parallèle. Donc, outre des règles présentées (déduites à partir des propriétés 1 et 2), on a besoin de la règle suivante (déduite à partir de la propriété 3) :

Si dans la figure $\mathscr{H}$, il y a deux segments situés sur deux droites parallèles (ou confondues), ils sont représentés par deux segments se situés sur deux droites parallèles (ou confondues), en plus, le rapport de longueur de ces deux segments est égal à celui de deux segments correspondants dans la figure $\mathscr{H}$.

?5 Quel est le dessin de représentation d'un parallélogramme ?

☞ ATTENTION

La projection parallèle ne conserve pas en générale le rapport de deux segments qui ne se situe pas sur deux droites parallèles (ou sur une même droite) et la mesure d'un angle. En conséquence, si la figure $\mathscr{H}$ a deux segments qui ne se situent pas sur deux droites parallèles, il n'est pas obligatoire de conserver son rapport dans le dessin de représentation. De même manière, il n'est pas obligatoire de conserver la mesure de l'angle de la figure $\mathscr{H}$ dans le dessin de représentation.

?6 Quel est le dessin de représentation d'un trapèze ?

?7 Quels sont les dessins de représentation d'un losange, d'un rectangle, d'un carré ?

?8 Est-il possible de considérer un triangle quelconque comme un dessin de représentation d'un triangle isocèle, d'un triangle droit, d'un triangle équilatéral ? (f. 77)

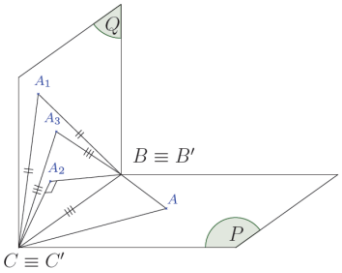


Figure 77

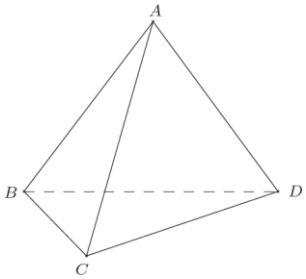


Figure 78

?9 Est-il possible que la figure 78 représente un tétraèdre régulier ?

Dessin de représentation d'un cercle

On peut démontrer que :

Le dessin de projection parallèle d'un cercle est une ellipse ou un cercle, ou en particulier un segment.

C'est pourquoi on utilise régulièrement l'ellipse pour représenter un cercle, le centre de l'ellipse représente celui du cercle (f. 79, f. 80).

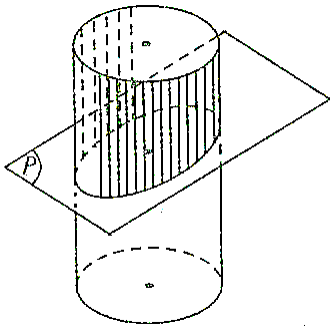


Figure 79

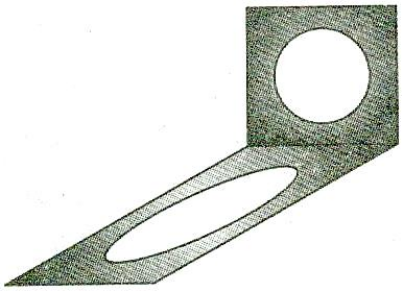


Figure 80

1 Supposons que le triangle ABC est un dessin de représentation d'un triangle équilatéral. Construire le dessin de représentation du centre de ce triangle équilatéral.

2 Donnant une ellipse qui est le dessin de représentation d'un cercle. Représenter les figures suivantes :

a) Une corde et un diamètre perpendiculaire à cette corde.

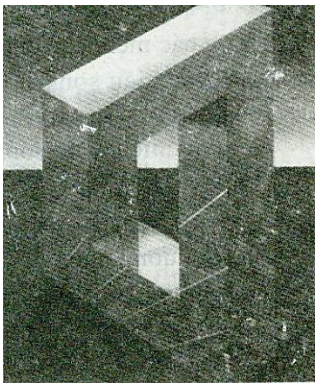
b) Deux diamètres perpendiculaires du cercle.

c) Un triangle régulier inscrit du cercle.

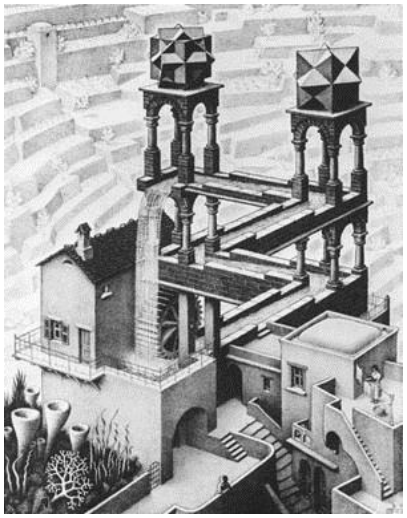
S'amuser un peu !

Est-ce que cette figure est un dessin de représentation d'un objet spatial ?

Picture d'Escher (M. C. Escher) ►



"Mouvement perpétuel" : Est-ce que l'eau coule perpétuellement comme ça ?



Picture d'Escher (M. C. Escher)

Questions et exercices

40. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

a) Il est possible que l'image de projection parallèle de deux droites non coplanaires soit confondue.

b) Il est possible que l'image de projection parallèle de deux droites non coplanaires soit sécante.

c) Il est possible que l'image de projection parallèle de deux droites non coplanaires soit sécante.

d) Il est possible que l'image de projection parallèle de deux droites non coplanaires soit sécante, confondue, parallèle.

41. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

a) Il est possible que l'image de projection parallèle de deux droites sécantes soit parallèle.

b) Il est possible que l'image de projection parallèle de deux droites sécantes soit sécante.

c) Il est possible que l'image de projection parallèle de deux droites sécantes soit confondue.

d) Il est possible qu'une droite soit parallèle à son image de projection parallèle.

e) Une droite coupe toujours son image de projection parallèle.

f) Il est possible qu'une droite soit confondue avec son image de projection prallèle.

42. Le triangle A'B'C' est image de projection parallèle du triangle ABC. Démontrer que le centre de gravité du triangle A'B'C' est image de projection parallèle du centre de gravité du triangle ABC.

43. Faire le dessin de représentation d'un quadrilatère et son centre de gravité.

44. Faire le dessin de représentation d'un triangle droit qui est inscrit dans un cercle.

45. Faire le dessin de représentation d'un carré inscrit dans un cercle.

46. Faire le dessin de représentation d'un hexagone régulier.

47. Soit $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ un parallélépipède. Dessiner le point I sur la diagonale B_1D et le point J sur la diagonale AC tels que IJ // BC_1. Calculer le rapport de longueur $\frac{ID}{IB_1}$.

Annexe 4. Distribution des types de tâches 7 et 8 selon la variable d' « objet géométrique de l'espace »

Dans les manuels français

Manuels \ V. objS		Type de tâches 7				Type de tâches 8			
		SLm	SOrg	Aut	Total	SLm	SOrg	Aut	Total
6e	Transmath	1			**1**	9			**9**
		100%			*100%*	*100%*			*100%*
	Triangle	25			**25**	8			**8**
		100%			*100%*	*100%*			*100%*
5e	Transmath				**0**	7			**7**
						100%			*100%*
	Triangle	19			**19**	12			**12**
		100%			*100%*	*100%*			*100%*
4e	Transmath				**0**				**0**
	Triangle	6			**6**				**0**
		100%			*100%*				
3e	Transmath	1			**1**				**0**
		100%			*100%*				
	Triangle	12			**12**	5			**5**
		100%			*100%*	*100%*			*100%*
2de	Transmath	6	14		**20**	2	29		**31**
		30%	*70%*		*100%*	*6,45%*	*93,55%*		*100%*
	Déclic		14	7	**21**		14	4	**18**
			66,67%	*33,33%*	*100%*		*77,78%*	*22,22%*	*100%*

Dans les manuels vietnamiens

Manuels \ V. objS		Type de tâches 7				Type de tâches 8			
		SLm	SOrg	Aut	Total	SLm	SOrg	Aut	Total
8	Maths	10	2		**12**	23	1		**24**
		83,33%	*16,67%*		*100%*	*95,83%*	*4,17%*		*100%*
9	Maths				**0**				**0**
11 §1	Géométrie standard	1	3	2	**6**		30	14	**44**
		16,67%	*50%*	*33,33*	*100%*		*68,18%*	*31,82%*	*100%*
	Géométrie avancée	1	7		**8**		15	7	**22**
		12,5%	*87,5%*		*100%*		*68,18%*	*31,82%*	*100%*
11 §5	Géométrie standard	3	19	4	**26**	7	71	17	**95**
		11,54%	*73,08%*	*15,38%*	*100%*	*7,37%*	*74,74%*	*17,89%*	*100%*
	Géométrie avancée	1	33		**34**	2	36	1	**39**
		2,94%	*97,06%*		*100%*	*5,13%*	*92,31%*	*2,56%*	*100%*
12	Géométrie standard				**0**		13		**13**
							100%		*100%*
	Géométrie avancée				**0**	1	18	1	**20**
						5%	*90%*	*5%*	*100%*

Annexe 5. Quelques praxéologies institutionnelles françaises concernant la représentation en perspective dans l'environnement informatique

$T^{Polyè}{}_{Dei}$: Faire apparaître un polyèdre avec Géospace.
$\tau^{Polyè}{}_{Dei}$: - Etudier les propriétés du polyèdre donné. - Construire des sommets du polyèdre en prenant les commandes « Créer→Point ». - Faire apparaître le polyèdre en prenant la commande « Créer→Solide→Polyèdre convexe→Défini par ses sommets ». - Visualiser les arêtes cachées : + dans la boîte des styles, prendre l'icône « O » (Opaque), + prendre l'icône .
θ_{Comm} : - Propriétés du polyèdre donné. - Utilité des commandes de Géospace.

$T^{sec}{}_{Dei}$: Faire apparaître la section d'un polyèdre par un plan avec Géospace.
$\tau^{objE}{}_{Dei}$: - Faire apparaître le polyèdre en utilisant un fichier disponible. - Construire le plan en prenant les commandes « Créer→Plan ». - Faire apparaître la section en prenant la commande « Créer → Ligne → Polygone convexe → Section d'un polyèdre par un plan ».
θ_{Comm} : - Propriétés du polyèdre donné et du plan donné. - Utilité des commandes de Géospace.

$T^{dInt}{}_{Dei}$: Faire apparaître la droite d'intersection de deux plans sécants avec Géospace.
$\tau^{sec}{}_{Dei}$: - Construire les plans en prenant les commandes « Créer→Plan ». - Faire apparaître la droite d'intersection en prenant la commande « Créer → Ligne →Droite(s) →Intersection de deux plans ».
θ_{Comm} : - Propriétés de deux plans donnés. - Utilité des commandes de Géospace.

$T^{ptInt}{}_{Dei}$: Faire apparaître le point d'intersection d'une droite et d'un plan avec Géospace.
$\tau^{ptInt}{}_{Dei}$: - Construire la droite en prenant les commandes « Créer→Ligne→Droite(s) ». - Construire le plan en prenant les commandes « Créer→Plan ». - Faire apparaître le point d'intersection en prenant la commande « Créer →Point →Intersection droite-plan ».
θ_{Comm} : - Propriétés de la droite donnée et du plan donné. - Utilité des commandes de Géospace.

T^{polyg}_{ENa} : Etudier la nature d'un polygone avec Geospace.
τ^{polyg}_{ENa} : - Faire apparaître en vraie grandeur le polygone en prenant l'icône plan isolé. - Etudier les propriétés géométriques du polygone représenté sur le « plan isolé ».
θ_{Comm} : - Propriétés du polygone donné. - Utilité des commandes de Géospace.

T^{sec}_{ENa} : Etudier la nature de la section d'un solide par un plan avec Geospace.
τ^{sec}_{ENa} : - Faire apparaître la section (T^{sec}_{Dei}). - Etudier les propriétés géométriques du polygone de section (T^{polyg}_{ENa}).
θ_{Comm} : - Propriétés du polyèdre donné et du plan donné. - Utilité des commandes de Géospace.

$T^{Polyè}_{ENa}$: Etudier la nature d'un polyèdre avec Geospace.
$\tau^{Polyè}_{ENa}$: - Faire apparaître le solide ($T^{Polyè}_{Dei}$). - Créer le patron de ce solide en prenant la commande « Créer→Solide→Patron d'un polyèdre ». - Faire apparaître en vrai grandeur le patron en prenant l'icône plan isolé. - Etudier les propriétés géométriques des faces du polyèdre représentées dans le plan « isolé ».
θ_{Comm} : - Propriétés du polyèdre donné. - Utilité des commandes de Géospace.

T^{pts}_{EAl} : Etudier l'alignement de 3 points avec Geospace.
τ^{pts}_{EAl} : - Tourner la figure telle que deux points sont confondus. - Observer la position du troisième point. Si trois points sont confondus, on peut dire qu'ils sont alignés.
θ_{Dei} : - Propriétés de trois points alignés. - Manière de représenter des objets du logiciel Geospace.

$T^{pt,d}_{EAp}$: Etudier l'incidence d'un point à une droite avec Geospace.
$\tau^{pt,d}_{EAp}$: Tourner la figure et observer, en même temps, si le point est situé sur la droite. Si oui, il appartient à la droite.
θ_{Dei} : Manière de représenter des objets du logiciel Geospace.

$T^{pt,P}_{EApp}$: Etudier l'incidence d'un point à un plan avec Geospace.
$\tau^{pt\in d}_{Conj}$: - Visualiser des figures planes extraites à partir du plan donné en prenant l'icône plan isolé. - Examiner si le point apparaît encore sur l'écran. Si oui, il appartient au plan.
θ_{Comm} : Utilité des commandes de Géospace.

Annexe 6. Règles de représentation explicites dans les manuels français

Classe de sixième						
Manuels / Règles	**Myriade 2009**	**Phare 2009**	**Sésamath 2009**	**Triangle 2009**	**Transmath 2009**	**Zénius 2009**
Règle de conservation						
de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés						
de la nature des objets à une dimension						
du parallélisme	“Cours”, p.225	“Cours”, p.221	“Méthode”, p.140	“Connaissances”, p.191	“Cours”, p.232 “Savoir-faire”, p.234	“J’apprends la leçon”, p.234
de la relation de concourrance						
de la relation d'incidence						
de la proportion des segments de même direction		“Cours”, p.221 : égalité	“Méthode”, p.140 : égalité			
de la nature des objets frontaux	“Cours”, p.225	“Cours”, p.221	“Méthode”, p.140	“Connaissances”, p.191	“Cours”, p.232 “Savoir-faire”, p.234	“J’apprends la leçon”, p.234
Règle de non-conservation						
de l’orthogonalité						
de la nature des objets à deux		“Cours”, p.221: carré				

dimensions						
de la mesure	“Cours”, p.225: longueur, angle droit	“Cours”, p.221: angle droit	“Méthode”, p.140: longueur de fuyante			
Règle de représentation de la troisième dimension						
règle des pointillés		“Cours”, p.221	“Méthode”, p.140	“Connaissances”, p.191	“Cours”, p.232 “Savoir-faire”, p.234	“J’apprends la leçon”, p.234
règle de représentation de la profondeur d'une sphère						
Règle pour un dessin « bien informé »	“Cours”, p.225: réduction de fuyantes			“Connaissances”, p.191: réduction de fuyantes, angle de fuite (30°,45°,60°)	« Cours », p.232 et « Savoir-faire », p.234: réduction de fuyantes	“J’apprends la leçon”, p.234 : réduction de fuyantes

Classe de cinquième						
Manuels / **Règles**	**Myriade 2010**	**Phare 2010**	**Sésamath 2010**	**Triangle 2010**	**Transmath 2010**	**Zénius 2010**
Règle de conservation						
de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés						
de la nature des objets à une dimension						
du parallélisme		“Savoir-faire”, p.245			“Savoir-faire”, p.270	

de la relation de concourrance						
de la relation d'incidence						
de la proportion des segments de même direction		“Savoir-faire”, p.245: égalité			“Savoir-faire”, p.270: égalité	
de la nature des objets frontaux						
Règle de non-conservation						
de l’orthogonalité						
de la nature des objets à deux dimensions		“Cours”, p.243: cercle			“Cours”, p.268: disque de base	“J’apprends la leçon”, p.252 : rectangle
de la mesure		“Cours”, p.243: angle droit				
Règle de représentation de la troisième dimension						
règle des pointillés						
règle de représentation de la profondeur d'une sphère						
Règle pour un dessin « bien informé »						

Classe de quatrième						
Manuels / **Règles**	**Myriade 2011**	**Phare 2011**	**Sésamath 2011**	**Triangle 2011**	**Transmath 2011**	**Zénius 2011**
Règle de conservation						
de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés						
de la nature des objets à une dimension						
du parallélisme		“Cours”, p.183				
de la relation de concourrance						
de la relation d'incidence						
de la proportion des segments de même direction		“Cours”, p.183: égalité				
de la nature des objets frontaux						
Règle de non-conservation						
de l’orthogonalité						
de la nature des objets à deux dimensions		“Cours”, p.183: segments égaux				
de la mesure		“Cours”, p.183: angle droit				

Règle de représentation de la troisième dimension						
règle des pointillés						
règle de représentation de la profondeur d'une sphère						
Règle pour un dessin « bien informé »						

Classe de troisième						
Manuels / **Règles**	**Myriade 2012**	**Phare 2012**	**Sésamath 2012**	**Triangle 2012**	**Transmath 2012**	**Zénius 2012**
Règle de conservation						
de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés						
de la nature des objets à une dimension						
du parallélisme						
de la relation de concourrance						
de la relation d'incidence						
de la proportion des segments de même direction						
de la nature des objets frontaux						

Règle de non-conservation						
de l'orthogonalité						
de la nature des objets à deux dimensions						
de la mesure						
Règle de représentation de la troisième dimension						
règle des pointillés						
règle de représentation de la profondeur d'une sphère						
Règle pour un dessin « bien informé »						

Classe de seconde						
Manuels / **Règles**	**Déclic 2010**	**Hyperbole 2010**	**Math'x 2010**	**Odyssée 2010**	**Repère 2010**	**Transmath 2010**
Règle de conservation						
de l'alignement et de l'ordre de trois points alignés		"Le cours", p.24	"Cours", p.270	"Cours", p.234	"Cours", p.212: alignement	"Cours", p.168
de la nature des objets à une dimension				"Cours", p.234: droite		
du parallélisme	"Cours", p.242	"Le cours", p.24	"Cours", p.270	"Cours", p.234	"Cours", p.212	"Cours", p.168
de la relation de					"Cours", p.212	"Cours", p.168

concourrance						
de la relation d'incidence						
de la proportion des segments de même direction	“Cours”, p.242: milieu, proportion	“Le cours”, p.24: milieu	“Cours”, p.270: milieu, proportion	“Cours”, p.234: milieu, proportion	“Cours”, p.212: millieu	“Cours”, p.168: milieu
de la nature des objets frontaux		“Le cours”, p.24	“Cours”, p.270	“Cours”, p.234	“Cours”, p.212	“Cours”, p.168
Règle de non-conservation						
de l’ orthogonalité					“Cours”, p.212	“Cours”, p.168
de la nature des objets à deux dimensions		“Le cours”, p.24: rectangle		“Cours”, p.234: rectangle	“Application”, p.213: rectangle	
de la mesure	“Cours”, p.242: Longueur, angle	“Le cours”, p.24: angle de fuite, coefficient de réduction	“Cours”, p.270: angle de fuite		“Cours”, p.212: angle de fuite, coefficient de perspective “Application”, p.213: angle droit	“Cours”, p.168: Distance dans le plan de profil
Règle de représentation de la troisième dimension						
règle des pointillés	“Cours”, p.242	“Le cours”, p.24	“Cours”, p.270	“Cours”, p.234	“Cours”, p.212	“Cours”, p.168
règle de représentation de la profondeur d'une sphère						
Règle pour un dessin « bien informé »			“Cours”, p.270: $0<k<1$		“Cours”, p.212: $30°\leq\alpha\leq60°$, $0,5\leq r\leq0,7$	

Annexe 7. Statistique des dessins de solides usuels dans les manuels français

Parallélépipède rectangle

Classes	Manuels	Nombre du dessin	Catégories			
			PaF		PaR	
			Effectif	%	Effectif	%
6e	Myriade	49	13	26,5	36	73,5
	Phare	77	75	97,4	2	2,6
	Sésamath	80	79	98,8	1	1,3
	Triangle	62	62	100	0	0
	Transmath	68	63	92,6	5	7,4
	Zénius	71	63	88,7	8	11,3
5e	Myriade	15	14	93,3	1	6,7
	Phare	9	9	100	0	0
	Sésamath	8	8	100	0	0
	Triangle	18	17	94,4	1	5,6
	Transmath	22	22	100	0	0
	Zénius	7	7	100	0	0
4e	Myriade	21	21	100	0	0
	Phare	32	26	81,3	6	18,8
	Sésamath	16	16	100	0	0
	Triangle	12	12	100	0	0
	Transmath	17	13	76,5	4	23,5
	Zénius	24	13	54,2	11	45,8
3e	Myriade	15	12	80	3	20
	Phare	30	23	76,7	7	23,3
	Sésamath	22	22	100	0	0
	Triangle	35	33	94,3	2	5,7
	Transmath	52	44	84,6	8	15,4
	Zénius	25	21	84	4	16
2de	Déclic	57	34	59,6	23	40,4
	Hyperbole	51	47	92,2	4	7,8
	Math'x	79	69	87,3	10	12,7
	Odyssée	51	29	56,9	22	43,1
	Repères	33	32	97	1	3
	Transmath	35	15	42,9	20	57,1

Prisme droit (sauf parallélépipède rectangle)

Classes	Manuels	Nombre du dessin	Catégories					
			PrF		PrB		PrR	
			Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
5e	Myriade	33	9	27,3	9	27,3	15	45,5
	Phare	44	9	20,5	20	45,5	15	34,1
	Sésamath	34	6	17,6	18	52,9	10	29,4
	Triangle	52	20	38,5	21	40,4	11	21,2
	Transmath	35	10	28,6	12	34,3	13	37,1
	Zénius	46	14	30,4	22	47,8	10	21,7
4e	Myriade	5	1	20	0	0	4	80
	Phare	9	3	33,3	5	55,6	1	11,1
	Sésamath	8	1	12,5	3	37,5	4	50
	Triangle	15	8	53,3	5	33,3	2	13,3
	Transmath	6	1	16,7	2	33,3	3	50
	Zénius	4	4	100	0	0	0	0

3e	Myriade	1	1	100	0	0	0	0
	Phare	9	0	0	8	88,9	1	11,1
	Sésamath	3	1	33,3	1	33,3	1	33,3
	Triangle	10	2	20	6	60	2	20
	Transmath	3	2	66,7	1	33,3	0	0
	Zénius	1	0	0	0	0	1	100
2de	Déclic	9	4	44,4	2	22,2	3	33,3
	Hyperbole	11	4	36,4	3	27,3	4	36,4
	Math'x	12	6	50	1	8,3	5	41,7
	Odyssée	8	3	37,5	0	0	5	62,5
	Repères	11	8	72,7	3	27,3	0	0
	Transmath	5	0	0	0	0	5	100

Pyramide dont la hauteur est aussi une arête latérale

Classes	Manuels	Nombre de dessin	Catégories			
			PyF		PyR	
			Effectif	%	Effectif	%
4e	Myriade	9	8	88,9	1	11,1
	Phare	16	16	100	0	0
	Sésamath	12	8	66,7	4	33,3
	Triangle	11	11	100	0	0
	Transmath	8	7	87,5	1	12,5
	Zénius	20	19	95	1	5
3e	Myriade	2	2	100	0	0
	Phare	6	5	83,3	1	16,7
	Sésamath	5	4	80	1	20
	Triangle	4	3	75	1	25
	Transmath	6	5	83,3	1	16,7
	Zénius	7	7	100	0	0
2de	Déclic	5	5	100	0	0
	Hyperbole	3	2	66,7	1	33,3
	Math'x	9	5	55,6	4	44,4
	Odyssée	3	3	100	0	0
	Repères	4	4	100	0	0
	Transmath	6	1	16,7	5	83,3

Cylindre de révolution

Classes	Manuels	Nombre du dessin	Catégories					
			CyB		CyC		CyR	
			Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
5e	Myriade	28	0	0	28	100	0	0
	Phare	22	1	4,5	21	95,5	0	0
	Sésamath	13	3	23,1	10	76,9	0	0
	Triangle	25	2	8	23	92	0	0
	Transmath	23	3	13	20	87	0	0
	Zénius	24	3	12,5	21	87,5	0	0
4e	Myriade	14	0	0	14	100	0	0
	Phare	4	0	0	4	100	0	0
	Sésamath	9	1	11,1	8	88,9	0	0
	Triangle	5	0	0	5	100	0	0
	Transmath	4	0	0	4	100	0	0
	Zénius	7	0	0	7	100	0	0
3e	Myriade	16	0	0	16	100	0	0
	Phare	14	0	0	14	100	0	0
	Sésamath	7	1	14,3	6	85,7	0	0

	Triangle	15	0	0	15	100	0	0
	Transmath	16	0	0	16	100	0	0
	Zénius	12	0	0	12	100	0	0
2de	Déclic	9	0	0	8	88,9	1	11,1
	Hyperbole	9	0	0	8	88,9	1	11,1
	Math'x	8	0	0	7	87,5	1	12,5
	Odyssée	5	0	0	5	100	0	0
	Repères	4	1	25	3	75	0	0
	Transmath	4	0	0	4	100	0	0

Cône de révolution

Classes	Manuels	Nombre de dessin	Catégories					
			CoB		CoC		CoR	
			Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
4e	Myriade	38	0	0	38	100	0	0
	Phare	16	1	6,3	15	93,8	0	0
	Sésamath	21	0	0	21	100	0	0
	Triangle	12	0	0	12	100	0	0
	Transmath	12	0	0	12	100	0	0
	Zénius	22	0	0	22	100	0	0
3e	Myriade	27	0	0	27	100	0	0
	Phare	12	0	0	12	100	0	0
	Sésamath	11	0	0	11	100	0	0
	Triangle	15	0	0	14	93,3	1	6,7
	Transmath	15	0	0	15	100	0	0
	Zénius	12	0	0	12	100	0	0
2de	Déclic	6	0	0	6	100	0	0
	Hyperbole	6	0	0	6	100	0	0
	Math'x	5	0	0	4	80	1	20
	Odyssée	5	0	0	5	100	0	0
	Repères	1	0	0	1	100	0	0
	Transmath	3	0	0	3	100	0	0

Direction des fuyantes dans le dessin de catégorie PaF

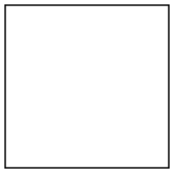
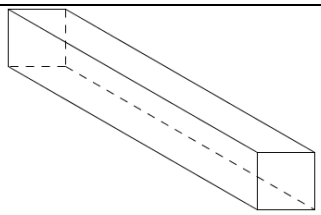
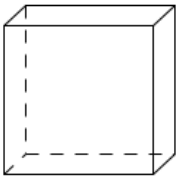
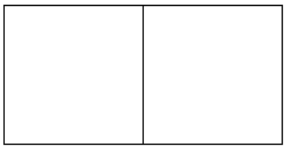
Classes	Manuels	Nb. de dessin	Catégories							
			droite au-dessus		gauche au-dessus		gauche au-dessous		droite au-dessous	
			Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%
6e	Myriade	13	13	100	0	0	0	0	0	0
	Phare	75	63	84	5	6,7	5	6,7	2	2,7
	Sésamath	79	77	97,5	2	2,5	0	0	0	0
	Triangle	62	55	88,7	3	4,8	3	4,8	1	1,6
	Transmath	63	57	90,5	5	7,9	1	1,6	0	0
	Zénius	63	54	85,7	6	9,5	2	3,2	1	1,6
5e	Myriade	14	13	92,9	0	0	0	0	1	7,1
	Phare	9	9	100	0	0	0	0	0	0
	Sésamath	8	5	62,5	2	25	0	0	1	12,5
	Triangle	17	15	88,2	1	5,9	1	5,9	0	0
	Transmath	22	17	77,3	5	22,7	0	0	0	0
	Zénius	7	7	100	0	0	0	0	0	0
4e	Myriade	21	21	100	0	0	0	0	0	0
	Phare	26	25	96,2	1	3,8	0	0	0	0
	Sésamath	16	14	87,5	2	12,5	0	0	0	0
	Triangle	12	12	100	0	0	0	0	0	0
	Transmath	13	12	92,3	1	7,7	0	0	0	0

	Zénius	13	13	100	0	0	0	0	0	0
3e	Myriade	12	12	100	0	0	0	0	0	0
	Phare	23	23	100	0	0	0	0	0	0
	Sésamath	22	20	90,9	2	9,1	0	0	0	0
	Triangle	33	31	93,9	1	3	0	0	1	3
	Transmath	44	40	90,9	4	9,1	0	0	0	0
	Zénius	21	14	66,7	7	33,3	0	0	0	0
2nd	Déclic	34	33	97,1	1	2,9	0	0	0	0
	Hyperbole	47	44	93,6	3	6,4	0	0	0	0
	Math'x	69	69	100	0	0	0	0	0	0
	Odyssée	29	28	96,6	1	3,4	0	0	0	0
	Repères	15	15	100	0	0	0	0	0	0
	Transmath	32	31	96,9	1	3,1	0	0	0	0

Annexe 8. Questionnaire d'expérimentation

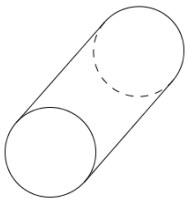
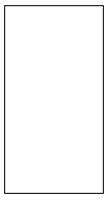
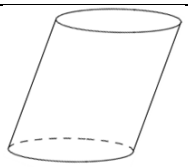
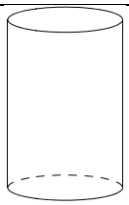
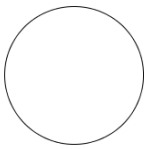
QUESTION 1

Parmi les dessins suivants, lesquels sont dessins de représentation d'un cube ? Justifier toutes vos réponses.

Dessin	Justification
 Dessin 1.1	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 1.2	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 1.3	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 1.4	☐ Oui ☐ Non ....

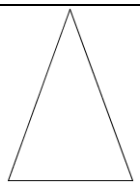
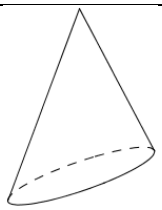
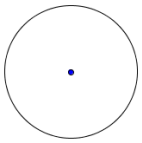
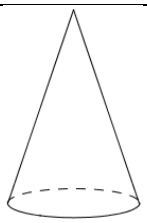
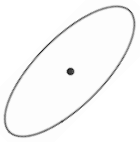
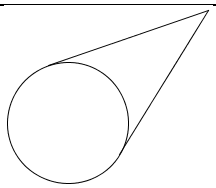
QUESTION 2

Parmi les dessins suivants, lesquels sont des dessins de représentation d'un cylindre de révolution ? Justifier toutes vos réponses.

Dessin	Justification
 Dessin 2.1	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 2.2	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 2.3	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 2.4	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 2.5	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 2.6	☐ Oui ☐ Non ....

QUESTION 3

Parmi les dessins suivants, lesquels sont des dessins de représentation d'un cône de révolution ? Justifier toutes vos réponses.

Dessin	Justification
 Dessin 3.1	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 3.2	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 3.3	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 3.4	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 3.5	☐ Oui ☐ Non ....
 Dessin 3.6	☐ Oui ☐ Non ....

Annexe 9. Données des réponses d'élèves

Pays	France					Viêt-Nam				
Dessin 1.3										
Réponse	**N(30)**	**O(44)**	**ON(1)**	**PR(1)**	**Total (76)**	**N(165)**	**O(463)**	**ON(6)**	**PR(3)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	0	7	0	0	**7**
JObs	0	6	0	0	**6**	3	84	2	0	**89**
JD-R	28	37	1	0	**66**	146	317	3	0	**466**
HorsCat	1	0	0	1	**2**	5	1	0	0	**6**
SansJ	1	1	0	0	**2**	11	55	2	3	**71**
Dessin 2.1										
Réponse	**N(4)**	**O(71)**	**ON(1)**	**PR(0)**	**Total (76)**	**N(63)**	**O(569)**	**ON(4)**	**PR(1)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	2	10	0	0	**12**
JObs	2	5	0	0	**7**	8	137	1	0	**146**
JD-R	1	63	1	0	**65**	37	327	1	0	**365**
HorsCat	0	1	0	0	**1**	4	3	2	0	**9**
SansJ	1	2	0	0	**3**	12	97	0	1	**110**
Dessin 2.4										
Réponse	**N(0)**	**O(74)**	**ON(2)**	**PR(0)**	**Total (76)**	**N(13)**	**O(620)**	**ON(2)**	**PR(2)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	0	6	0	0	**6**
JObs	0	10	0	0	**10**	0	80	1	0	**81**
JD-R	0	56	1	0	**57**	0	395	0	0	**395**
HorsCat	0	1	1	0	**2**	13	2	1	0	**16**
SansJ	0	7	0	0	**7**	0	140	0	2	**142**
Dessin 3.4										
Réponse	**N(1)**	**O(72)**	**ON(2)**	**PR(1)**	**Total (76)**	**N(15)**	**O(616)**	**ON(3)**	**PR(3)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	**0**
JObs	0	10	2	0	**12**	0	86	1	0	**87**
JD-R	0	56	0	1	**57**	0	376	0	0	**376**
HorsCat	1	1	0	0	**2**	13	1	0	0	**14**
SansJ	0	6	0	0	**6**	2	155	2	3	**162**
Dessin 1.2										
Réponse	**N(71)**	**O(4)**	**ON(1)**	**PR(0)**	**Total (76)**	**N(360)**	**O(275)**	**ON(0)**	**PR(2)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	0	3	0	0	**3**
JObs	0	0	0	0	**0**	9	28	0	0	**37**
JD-R	68	4	1	0	**73**	315	226	0	0	**541**
HorsCat	0	0	0	0	**0**	8	1	0	0	**9**
SansJ	3	0	0	0	**3**	28	18	0	2	**48**
Dessin 2.3										
Réponse	**N(51)**	**O(18)**	**ON(3)**	**PR(4)**	**Total (76)**	**N(276)**	**O(346)**	**ON(3)**	**PR(12)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	0	7	0	0	**7**
JObs	0	1	0	0	**1**	11	48	1	1	**61**
JD-R	49	12	2	0	**63**	207	227	2	2	**438**
HorsCat	2	2	0	0	**4**	11	2	0	0	**13**
SansJ	0	3	1	4	**8**	50	62	0	9	**121**
Dessin 3.2										
Réponse	**N(57)**	**O(16)**	**ON(2)**	**PR(1)**	**Total (76)**	**N(330)**	**O(296)**	**ON(3)**	**PR(8)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	2	2	0	0	**4**
JObs	1	2	0	0	**3**	16	51	2	0	**69**
JD-R	51	12	2	0	**65**	243	158	1	0	**402**
HorsCat	3	1	0	0	**4**	13	14	0	0	**27**
SansJ	2	1	0	1	**4**	56	71	0	8	**135**
Dessin 1.1										
Réponse	**N(36)**	**O(33)**	**ON(6)**	**PR(1)**	**Total (76)**	**N(406)**	**O(217)**	**ON(10)**	**PR(4)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	1	24	1	0	**26**
JObs	0	27	5	1	**33**	3	150	6	4	**163**
JD-R	29	0	2	0	**31**	238	1	1	0	**240**

JD2	22		3	0	**25**	205		3	3	**211**
HorsCat	0	6	0	0	**6**	2	42	1	0	**45**
SansJ	0	0	0	0	**0**	12	7	1	0	**20**
Dessin 1.4										
Réponse	**N(65)**	**O(7)**	**ON(2)**	**PR(2)**	**Total (76)**	**N(519)**	**O(109)**	**ON(5)**	**PR(4)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	9	13	0	0	**22**
JObs	5	6	2	0	**13**	30	55	5	3	**93**
JD-R	33	0	0	1	**34**	219	14	0	0	**233**
JD2	18		0	0	**18**	225		0	1	**226**
HorsCat	3	1	0	0	**4**	4	23	0	0	**27**
SansJ	6	0	0	1	**7**	49	6	0	1	**56**
Dessin 2.2										
Réponse	**N(49)**	**O(23)**	**ON(3)**	**PR(1)**	**Total (76)**	**N(387)**	**O(233)**	**ON(10)**	**PR(7)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	7	33	0	0	**40**
JObs	1	21	2	0	**24**	14	137	8	1	**160**
JD-R	23	0	1	1	**25**	119	12	2	0	**133**
JD2	22		1	1	**24**	223		3	0	**226**
HorsCat	2	1	0	0	**3**	16	42	1	1	**60**
SansJ	4	1	0	0	**5**	29	14	0	5	**48**
Dessin 2.5										
Réponse	**N(29)**	**O(39)**	**ON(6)**	**PR(2)**	**Total (76)**	**N(364)**	**O(254)**	**ON(12)**	**PR(7)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	6	27	2	1	**36**
JObs	0	37	5	2	**44**	6	174	8	3	**191**
JD-R	17	2	1	0	**20**	101	37	2	0	**140**
JD2	13		3	1	**17**	238		5	3	**246**
HorsCat	1	0	1	0	**2**	4	3	2	0	**9**
SansJ	0	0	0	0	**0**	26	17	0	3	**46**
Dessin 2.6										
Réponse	**N(73)**	**O(2)**	**ON(1)**	**PR(0)**	**Total (76)**	**N(553)**	**O(75)**	**ON(1)**	**PR(8)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	15	7	0	1	**23**
JObs	18	1	0	0	**19**	58	37	1	1	**97**
JD-R	37	0	0	0	**37**	199	14	0	0	**213**
JD2	16		0	0	**16**	210		0	1	**211**
HorsCat	0	1	0	0	**1**	7	11	0	0	**18**
SansJ	4	0	1	0	**5**	84	6	0	6	**96**
Dessin 3.1										
Réponse	**N(47)**	**O(24)**	**ON(4)**	**PR(1)**	**Total (76)**	**N(384)**	**O(236)**	**ON(7)**	**PR(10)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	7	33	0	1	**41**
JObs	0	19	3	0	**22**	3	133	6	1	**143**
JD-R	26	3	2	0	**31**	102	18	0	0	**120**
JD2	25		2	0	**27**	254		3	2	**259**
HorsCat	1	1	0	0	**2**	8	36	0	1	**45**
SansJ	1	1	0	1	**3**	27	19	1	7	**54**
Dessin 3.3										
Réponse	**N(21)**	**O(51)**	**ON(3)**	**PR(1)**	**Total (76)**	**N(286)**	**O(326)**	**ON(15)**	**PR(10)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	6	36	2	0	**44**
JObs	2	47	2	1	**52**	5	227	10	4	**246**
JD-R	11	2	1	0	**14**	93	34	1	0	**128**
JD2	7		0	0	**7**	164		2	2	**168**
HorsCat	0	0	0	0	**0**	1	0	0	0	**1**
SansJ	1	2	0	0	**3**	27	32	2	6	**67**
Dessin 3.5										
Réponse	**N(70)**	**O(5)**	**ON(0)**	**PR(1)**	**Total (76)**	**N(516)**	**O(104)**	**ON(5)**	**PR(12)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	15	13	1	0	**29**
JObs	25	3	0	0	**28**	69	40	1	1	**111**
JD-R	24	2	0	0	**26**	198	29	1	1	**229**
JD2	11		0	0	**11**	139		2	2	**143**
HorsCat	3	0	0	0	**3**	10	6	1	0	**17**
SansJ	7	0	0	1	**8**	100	16	1	10	**127**

Dessin 3.6										
Réponse	**N(20)**	**O(52)**	**ON(3)**	**PR(1)**	**Total (76)**	**N(215)**	**O(407)**	**ON(6)**	**PR(9)**	**Total (637)**
JProj	0	0	0	0	**0**	4	4	0	0	**8**
JObs	4	7	3	0	**14**	25	159	2	0	**186**
JD-R	6	36	1	0	**43**	96	161	2	1	**260**
JD2	1		0	0	**1**	20		0	0	**20**
HorsCat	5	2	0	0	**7**	18	1	0	0	**19**
SansJ	4	7	0	1	**12**	52	83	2	8	**145**

Elèves vietnamiens ayant eu un cours sur « Projection parallèle. Dessin de représentation d'une figure spatiale »					
Dessin 1.3					
Réponse	**N(92)**	**O(201)**	**ON(1)**	**PR(2)**	**Total (296)**
JProj	0	5	0	0	**5**
JObs	2	45	0	0	**47**
JD-R	82	119	0	0	**201**
HorsCat	1	1	0	0	**2**
SansJ	7	32	1	2	**42**
Dessin 2.1					
Réponse	**N(29)**	**O(265)**	**ON(1)**	**PR(1)**	**Total (296)**
JProj	2	4	0	0	**6**
JObs	3	70	0	0	**73**
JD-R	20	141	1	0	**162**
HorsCat	1	1	0	0	**2**
SansJ	3	52	0	1	**56**
Dessin 2.4					
Réponse	**N(4)**	**O(291)**	**ON(0)**	**PR(1)**	**Total (296)**
JProj	0	2	0	0	**2**
JObs	0	39	0	0	**39**
JD-R	0	173	0	0	**173**
HorsCat	4	0	0	0	**4**
SansJ	0	78	0	1	**79**
Dessin 3.4					
Réponse	**N(4)**	**O(291)**	**ON(0)**	**PR(1)**	**Total (296)**
JProj	0	0	0	0	**0**
JObs	0	36	0	0	**36**
JD-R	0	177	0	0	**177**
HorsCat	4	0	0	0	**4**
SansJ	0	79	0	1	**80**
Dessin 1.2					
Réponse	**N(199)**	**O(96)**	**ON(0)**	**PR(1)**	**Total (296)**
JProj	0	3	0	0	**3**
JObs	4	14	0	0	**18**
JD-R	173	72	0	0	**245**
HorsCat	2	1	0	0	**3**
SansJ	20	7	0	1	**28**
Dessin 2.3					
Réponse	**N(151)**	**O(136)**	**ON(1)**	**PR(8)**	**Total (296)**
JProj	0	2	0	0	**2**
JObs	3	16	0	0	**19**
JD-R	113	94	1	1	**209**
HorsCat	6	2	0	0	**8**
SansJ	32	22	0	7	**61**
Dessin 3.2					
Réponse	**N(177)**	**O(112)**	**ON(2)**	**PR(5)**	**Total (296)**
JProj	2	1	0	0	**3**
JObs	8	17	1	0	**26**
JD-R	119	61	1	0	**181**

HorsCat	9	6	0	0	**15**
SansJ	39	27	0	5	**71**
Dessin 1.1					
Réponse	**N(168)**	**O(120)**	**ON(5)**	**PR(3)**	**Total (296)**
JProj	1	21	1	0	**23**
JObs	3	82	3	3	**91**
JD-R	110	1	1	0	**112**
JD2	71		0	2	**73**
HorsCat	0	18	0	0	**18**
SansJ	8	5	1	0	**14**
Dessin 1.4					
Réponse	**N(232)**	**O(59)**	**ON(3)**	**PR(2)**	**Total (296)**
JProj	7	12	0	0	**19**
JObs	15	28	3	2	**48**
JD-R	97	5	0	0	**102**
JD2	91		0	0	**91**
HorsCat	2	11	0	0	**13**
SansJ	26	5	0	0	**31**
Dessin 2.2					
Réponse	**N(169)**	**O(120)**	**ON(5)**	**PR(2)**	**Total (296)**
JProj	6	28	0	0	**34**
JObs	10	58	4	0	**72**
JD-R	57	4	1	0	**62**
JD2	85		2	0	**87**
HorsCat	9	22	0	0	**31**
SansJ	14	12	0	2	**28**
Dessin 2.5					
Réponse	**N(157)**	**O(131)**	**ON(5)**	**PR(3)**	**Total (296)**
JProj	5	21	2	1	**29**
JObs	3	82	3	1	**89**
JD-R	52	15	1	0	**68**
JD2	92		2	1	**95**
HorsCat	2	2	0	0	**4**
SansJ	11	13	0	1	**25**
Dessin 2.6					
Réponse	**N(257)**	**O(32)**	**ON(1)**	**PR(6)**	**Total (296)**
JProj	12	5	0	1	**18**
JObs	30	14	1	1	**46**
JD-R	91	3	0	0	**94**
JD2	86		0	1	**87**
HorsCat	2	6	0	0	**8**
SansJ	49	4	0	4	**57**
Dessin 3.1					
Réponse	**N(168)**	**O(118)**	**ON(5)**	**PR(5)**	**Total (296)**
JProj	6	23	0	1	**30**
JObs	1	57	4	1	**63**
JD-R	55	10	0	0	**65**
JD2	96		2	1	**99**
HorsCat	6	16	0	0	**22**
SansJ	14	15	1	3	**33**
Dessin 3.3					
Réponse	**N(128)**	**O(158)**	**ON(7)**	**PR(3)**	**Total (296)**
JProj	5	24	2	0	**31**
JObs	3	101	4	1	**109**
JD-R	49	11	0	0	**60**
JD2	68		0	1	**69**
HorsCat	1	0	0	0	**1**
SansJ	8	25	1	2	**36**

Dessin 3.5					
Réponse	**N(247)**	**O(41)**	**ON(3)**	**PR(5)**	**Total (296)**
JProj	13	10	1	0	**24**
JObs	36	14	1	1	**52**
JD-R	92	8	0	1	**101**
JD2	55		1	0	**56**
HorsCat	2	2	1	0	**5**
SansJ	57	7	0	4	**68**
Dessin 3.6					
Réponse	**N(94)**	**O(195)**	**ON(3)**	**PR(4)**	**Total (296)**
JProj	4	3	0	0	**7**
JObs	11	76	1	0	**88**
JD-R	45	69	1	0	**115**
JD2	7		0	0	**7**
HorsCat	9	0	0	0	**9**
SansJ	18	47	1	4	**70**

Annexe 10. Traitement de données sur R

```
> # Test d'hypothese de la difference de proportion de refus
> # Dessin 1.2 (R.CuF)
> # entre France et VietNam
> NON<-c(71,360)
> total<-c(71+4,360+275)
> prop.test(NON,total)

2-sample test for equality of proportions with continuity correction

data:  NON out of total
X-squared = 38.9726, df = 1, p-value = 4.298e-10
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 0.3084767 0.4509983
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.9466667 0.5669291
```

```
> # Test d'hypothese de la difference de proportion de refus
> # Dessin 2.3 (R.CyC)
> # entre France et VietNam
> NON<-c(51,276)
> total<-c(51+18,276+346)
> prop.test(NON,total)

2-sample test for equality of proportions with continuity correction

data:  NON out of total
X-squared = 20.5727, df = 1, p-value = 5.741e-06
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 0.1766291 0.4141720
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.7391304 0.4437299
```

```
> # Test d'hypothese de la difference de proportion de refus
> # Dessin 3.2 (R.CoC)
> # entre France et VietNam
> NON<-c(57,330)
> total<-c(57+16,330+296)
> prop.test(NON,total)

2-sample test for equality of proportions with continuity correction

data:  NON out of total
X-squared = 16.0118, df = 1, p-value = 6.295e-05
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 0.1433752 0.3639555
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.7808219 0.5271565
```

Résumé

La représentation en perspective s'appuie sur plusieurs choix pour l'enseignement : mode de représentation, code d'écriture et de lecture pour combler la perte d'information dans le passage de trois dimensions à deux dimensions, approche pour enseigner le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin. Notre étude questionne ces choix dans les deux systèmes éducatifs français et vietnamien et leurs effets sur l'apprentissage des élèves.

En nous plaçant dans le cadre de la Théorie anthropologique du didactique, nous avons étudié les rapports institutionnel et personnel d'élèves français et vietnamien à l'objet « représentation en perspective ».

Pour le premier (rapport institutionnel), nous avons caractérisé les modes de représentation et leurs approches mathématiques, puis nous avons élaboré les praxéologies de référence relatives à l'objet « représentation en perspective ». Les technologies et théories de ces praxéologies s'appuient sur les règles de représentation du dessin en perspective (règles de conservation et de non conservation, règles de la troisième dimension, règles pour un dessin « bien informé ») que nous avons explicitées. Ensuite, nous avons utilisé ce modèle de référence pour l'analyse des programmes et des manuels ce qui nous a permis de mettre en évidence les points spécifiques de l'enseignement de la représentation en perspective en France et au Viêt-Nam. Enfin, nous avons formulé des hypothèses sur les règles implicites du contrat didactique, en tant que constituants des technologies des praxéologies personnelles de la représentation en perspective. Ces règles portent sur la troisième dimension et sont spécifiques à certains solides.

Pour le deuxième (rapport personnel), nous avons fait passer aux élèves un questionnaire sur un type de tâches concernant la lecture d'un dessin. Ce questionnaire permet de mettre à l'épreuve les hypothèses précédentes et de mettre en lumière les praxéologies personnelles du passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin (technologie/théorie personnelle).

Mots clés : Théorie anthropologique du didactique, rapport institutionnel, rapport personnel, praxéologie de référence, praxéologie institutionnelle, praxéologie personnelle, analyse comparative, Géométrie de l'espace, représentation en perspective, dessin prototypique.