



HAL
open science

Variétés projectives convexes de volume fini

Stéphane Marseglia

► **To cite this version:**

Stéphane Marseglia. Variétés projectives convexes de volume fini. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Strasbourg, 2017. Français. NNT : 2017STRAD019 . tel-01556266v2

HAL Id: tel-01556266

<https://theses.hal.science/tel-01556266v2>

Submitted on 26 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

présentée pour obtenir le grade de docteur de
l'Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Stéphane Marseglia

Variétés projectives convexes de volume fini

Soutenue le 13 juillet 2017
devant la commission d'examen

Olivier Guichard, directeur de thèse
Thierry Barbot, rapporteur
Constantin Vernicos, rapporteur
Gye-Seon Lee, examinateur
Athanasios Papadopoulos, examinateur

www-irma.u-strasbg.fr



Variétés projectives convexes de volume fini

Stéphane Marseglia

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex

Thèse de doctorat sous la direction de

Olivier Guichard

À mes grands-parents ...

Remerciements

Je commence par remercier Olivier GUICHARD, le chef d'orchestre de cette thèse, sans qui tout ce travail n'aurait jamais vu le jour. Merci de m'avoir fait découvrir ce sujet passionnant et fascinant, dès le mémoire de Master, puis tout au long de notre collaboration. Merci pour tes précieux enseignements, pour ta patience et ta bienveillance. La force tranquille qui s'en dégage m'a permis de travailler avec détermination et sérénité. Merci enfin pour ta disponibilité quotidienne en fin de thèse.

Je remercie sincèrement Thierry BARBOT et Constantin VERNICOS, mes rapporteurs, d'avoir accepté la tâche ingrate mais indispensable de relire et évaluer ma thèse. Les nombreuses questions et remarques qui ont suivi attestent du zèle et de la rigueur employés à cette relecture.

Je remercie aussi chaleureusement Gye-Seon LEE et Athanase PAPADOPOULOS de me faire l'honneur de compléter mon jury.

Je remercie, en supplément, Ludovic MARQUIS pour les explications éclairantes apportées de vive voix ou par échanges de mails. Je sais que tu aurais volontiers pris part à mon jury si ton calendrier l'avait permis. J'ai pris beaucoup de plaisir à lire tes articles ainsi que ceux écrits avec ton camarade Mickaël CRAMPON – que je n'aurai finalement jamais rencontré, mais qui m'aura laissé toute l'inspiration nécessaire dans mon bureau, qui fut le sien auparavant !

Je voudrais ensuite remercier le réseau GEAR qui m'a permis de participer à d'excellentes conférences de recherche dans le Michigan et en Californie. Je remercie de même le projet CURVE pour une conférence organisée à Jussieu, le GDR Platon qui m'a permis de donner un exposé en tant que jeune chercheur et les laboratoires de Karlsruhe, Heidelberg et Strasbourg pour l'organisation du désormais traditionnel Geometry Day. Ces conférences m'ont permis de rencontrer des mathématicien-ne-s de toutes origines et des individus formidables qui sont devenus des amis géomètres.

Je remercie tout le personnel administratif et enseignant de l'IRMA et de l'UFR de Math-Info. Leur obligeance et leur efficacité m'ont souvent fait gagner un temps précieux. Je pense en particulier à Fabienne GROSS, responsable administrative omnipotente, et Rémy DEBALME, immuable responsable de la L1.

Remerciements

J'aimerais exprimer ma gratitude aux enseignant·e·s qui ont marqué mon parcours scolaire et mon apprentissage des mathématiques : Bernard ALTSCHUH professeur du Gymnase qui m'apprit que les mathématiques, comme le bouddhisme, sont une philosophie, Philippe PISTER infatigable professeur de Sup3 du Lycée Kléber, Claudine MIT-SCHI mère supérieure bienveillante du Magistère de mathématiques, Alexandru OANCEA professeur attentionné qui encadra avec gentillesse mon mémoire de Magistère, Pierre PY maestro des groupes de Lie qui, via son cours de M2, me décida à faire un doctorat.

Mercis affectueux à Florian, mon ex-coloc de la rue de Zurich, et Amaury, mon compagnon de math depuis maintenant 10 ans.

Avec eux je remercie ma « famille mathématique », doctorants, magistériens, agrégatifs : Alicia, Amandine, Antoine, Arthur, Charlotte, Claire, Elena, Greg, Guillaume, Jérémy, Jérôme, Laura, Laurianne, Leïla, Mohammad, Nicolas, Olivier, Philippe, Pierre, Ranine, Romain, Simon, Vincent, Yvan. Sans oublier les « pièces rapportées » Agathe, Alexandra, Claire, Élise, Émilie, Jeanne, Leïla, Marie-Lise, qui apportent un peu de douceur dans ce monde de matheux.

En espérant n'oublier personne, je salue également les autres doctorant·e·s que j'ai cotoyé·e·s durant mon séjour : Alexander, Alix, Anderson, Arnaud, Audrey, Auguste, Christoph, Clément, Conrad, Cuong, Dima, Firat, Francesca, Frédéric, Guillaume, Jean-Baptiste, Kien, Lorenzo, Lukas, Nassima, Philippe, Romain, Shanshan, Sonia, Valeria.

Je remercie et je félicite en particulier Audrey et Romain pour l'organisation du séminaire des doctorants, si régulier et dynamique.

Je pense aussi à celles et ceux qui, comme moi, ont fait l'expérience de l'enseignement du Calcul formel, des ordinateurs qui plantent, des multiples sessions d'examens à organiser et des étudiants passionnés : Antoine, Christoph, Conrad, Elena, Pierre, Ranine.

Last but not least, une pensée toute particulière à l'équipage du bureau 116 : Amandine, Nicolas, Pierre et enfin Ranine, THE BEST ! Vous avez tous participé à la production de cette thèse, par votre proximité, vos réflexions, votre humour, vos tracas, vos goûts musicaux, vos mots-croisés, vos rires, vos pleurs, ou tout simplement votre silence.

Avant de tourner la page Université, je tiens à remercier le SUAPS qui organise la pratique sportive à l'Unistra. J'ai pu débiter en danse de couples, puis me perfectionner lors des cours de Cathy et des bals du vendredi. Quelques doctorants m'ont même suivi sur la piste. Le SUAPS m'a aussi permis de chausser mes premiers skis lors de sorties à La Bresse pour réussir, plus tard, à suivre Élodie et Sarah dans les Alpes. Enfin, j'y ai rencontré des coéquipiers formidables lors des sessions de handball dirigées par Benoît. Les succès en championnat universitaire, remporté avec les filles et avec les garçons, resteront des vifs souvenirs, tout comme les soirées qui ont suivi.

Bien que les mathématiques m'occupent le plus clair de mon temps, je me sais

entouré de toute une troupe d'amis et complices qui ne partagent pas cette passion. Je voudrais ici leur rendre hommage car ils me tirent de ma rêverie mathématique et me ramènent sans ménagement à la réalité.

Ils ont certes tous tenté le sempiternel :

« Dis-moi ton sujet de thèse pour voir. Tu dois bien pouvoir donner les idées.

– Hmm... Pas vraiment en fait. »

Mais reviennent rapidement à des propos plus concrets et non moins intéressants.

Que ce soit les « Ostwaldois » qui certains me supportent depuis plus de 20 ans, les « Sturmiens » que j'ai toujours l'impression d'avoir quittés la veille, ou les « Glandballeurs » dont les discussions dérapent sans prévenir, merci d'être vous-mêmes et souvent plus encore.

J'aimerais enfin exprimer ma reconnaissance à ceux qui ont plus particulièrement assuré le soutien affectif de ce travail, à savoir ma famille ainsi que les proches de toujours, encourageants, bienveillants avant l'heure. En particulier mon père qui, je le sais, est très fier de mon parcours, ma mère, plus difficile à impressionner, mais tout autant ravie, ma petite soeur dont le quotidien est bien plus concret et mouvementé, et mes grands-parents à qui je dédie cet ouvrage. Le cocon où j'ai grandi m'a offert le cadre idéal pour devenir l'homme que je suis aujourd'hui.

Merci Élodie – pour le passé, le présent et le futur.

Table des matières

Introduction	1
1 Variétés projectives convexes	9
1.1 Convexes projectifs	9
1.1.1 Métrique de Hilbert	10
1.1.2 Volume de Busemann	10
1.2 Isométries projectives	11
1.3 Ensemble limite et sous-groupes élémentaires	13
1.4 Décomposition du quotient	14
1.4.1 Parties fine et épaisse	14
1.4.2 Volume fini	15
1.4.3 Horopointes	16
2 Adhérence de Zariski des holonomies de variétés projectives strictement convexes de volume fini	19
2.1 Caractérisation de l'ellipsoïde	19
2.2 Sous-groupe engendré par deux groupes paraboliques maximaux	21
2.3 Sous-groupe engendré par tous les groupes paraboliques maximaux	27
3 Fermeture des structures projectives strictement convexes de volume fini	31
3.1 Variété des représentations	31
3.1.1 Premiers résultats	32
3.2 Représentation limite ρ_∞	33
3.2.1 Représentation limite fidèle et discrète	33
3.2.2 Représentation limite irréductible	34
3.3 Existence d'un convexe limite	38
3.3.1 Distance de Hausdorff	38
3.3.2 Parties convexes de la sphère	38
3.3.3 Convexe limite Ω_∞	39
3.4 Pointes de la variété limite	41

Table des matières

3.4.1	Sous-groupes cuspidaux	41
3.4.2	Pointes hyperboliques	42
3.5	Finitude du volume de la variété limite	44
3.6	Stricte convexité du convexe limite	48
A	Double d'une variété à bord	51
A.1	Revêtement du double	53
A.2	Groupe fondamental du double	58
	Bibliographie	61

Introduction

Ma thèse est consacrée à l'étude des variétés projectives strictement convexes de volume fini. Dans un premier temps, j'ai étudié l'adhérence de Zariski des holonomies de variétés projectives strictement convexes de volume fini. Je me suis ensuite intéressé à l'espace des modules des structures projectives strictement convexes de volume fini. J'ai, en particulier, montré que cet espace est un fermé de l'espace des représentations.

Contexte

Une *variété projective réelle proprement convexe* est le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ d'un ouvert proprement convexe Ω de l'espace projectif \mathbb{RP}^{n-1} par un sous-groupe discret sans torsion Γ de $SL_n(\mathbb{R})$ qui préserve Ω . Être *proprement convexe* signifie qu'il existe une carte affine de \mathbb{RP}^{n-1} dans laquelle Ω est relativement compact. On dit que la variété $\Gamma \backslash \Omega$ est *strictement convexe* lorsque Ω est un ouvert strictement convexe, c'est-à-dire que le bord $\partial\Omega$ de Ω ne contient aucun segment non trivial. Le convexe Ω peut être muni d'une métrique (dite de Hilbert) et d'une mesure (dite de Busemann) laissées invariantes par les transformations projectives qui préservent Ω .

Lorsque le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est compact, on dit que Ω est un *convexe divisible*. Ces variétés ont été étudiées par de nombreux auteurs, on citera par exemple [Ben60, Vey70, VK67], ou plus récemment [SM02, Ben00, Ben04, Ben03, Ben05, Ben06, Ben08]. Le résultat suivant de Benoist résume bien la situation dans ce cas précis.

Théorème ([Ben04], théorème 1.1 et proposition 2.5) *Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de $SL_n(\mathbb{R})$ qui divise un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{RP}^{n-1} . Alors les quatre assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'ouvert Ω est strictement convexe ;*
- (ii) *le bord $\partial\Omega$ est de classe C^1 ;*
- (iii) *le groupe Ω est hyperbolique ;*
- (iv) *l'espace (Ω, d_Ω) est Gromov-hyperbolique.*

Nous nous intéressons plutôt ici au cas où le quotient est non compact et de volume fini ; on dit parfois que Ω est *quasi-divisible*. On citera Marquis qui s'est intéressé au sujet dans [Mar12a], et en particulier au cas des surfaces projectives (i.e. $n = 3$) dans

[Mar12b, Mar10].

Notons que cette situation est un cas particulier de la notion plus générale de *finitude géométrique* – notion introduite, dans le cas des géométries de Hilbert, par Crampon et Marquis dans leur article [CM14].

L'exemple introductif indispensable de convexe divisible ou quasi-divisible est l'ellipsoïde. On considère la forme quadratique de signature $(1, n - 1)$ sur \mathbb{R}^n

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$$

On note \mathcal{E} et on appelle *ellipsoïde* la projection sur \mathbb{RP}^{n-1} du cône $\{x \in \mathbb{R}^n | q(x) > 0\}$. Plus généralement, on appelle *ellipsoïde* toute image de \mathcal{E} par un élément de $SL_n(\mathbb{R})$. Un ellipsoïde est un ouvert projectif strictement convexe. Son groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\mathcal{E}) = \{g \in SL_n(\mathbb{R}) | g\mathcal{E} = \mathcal{E}\}$ n'est autre que $SO(q)$, lui-même conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ dans $SL_n(\mathbb{R})$.

Muni de la distance de Hilbert $d_{\mathcal{E}}$, un ellipsoïde est isométrique à l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n . L'espace métrique $(\mathcal{E}, d_{\mathcal{E}})$ est précisément le modèle projectif de l'espace hyperbolique appelé aussi *modèle de Beltrami-Klein*. En particulier, l'ouvert convexe \mathcal{E} est *homogène*, c'est-à-dire que $\text{Aut}(\mathcal{E})$ agit transitivement sur \mathcal{E} . On trouvera de nombreuses caractérisations de la géométrie hyperbolique parmi les géométries de Hilbert dans [Guo14].

L'ellipsoïde est un convexe divisible : il est divisé par tous les réseaux cocompacts de $SO(q)$. C'est aussi un convexe quasi-divisible comme illustré sur la figure 1 empruntée à [Mar12a].

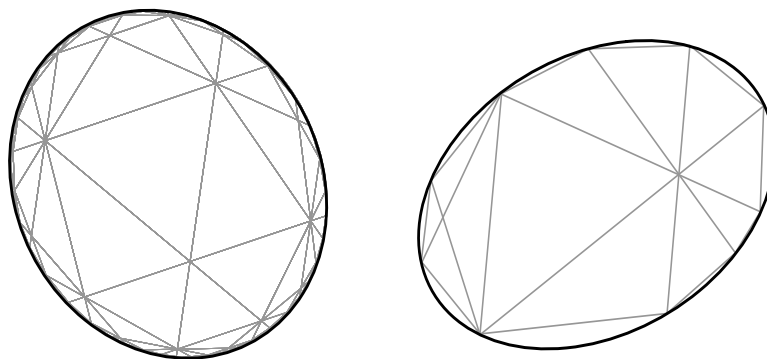


FIGURE 1 – Un ellipsoïde divisible (à gauche) et un quasi-divisible (à droite)

L'objet principal de cette thèse étant les variétés projectives strictement convexes de volume fini en dimension quelconque, le théorème suivant de Marquis montre qu'il en existe en toute dimension pour lesquelles l'ouvert Ω n'est **pas** un ellipsoïde :

Théorème ([Mar12a], théorème p.4) *En toute dimension $n \geq 3$, il existe un couple (Ω_n, Γ_n) où Ω_n est un ouvert proprement convexe strictement convexe de \mathbb{RP}^{n-1} et Γ_n un sous-groupe discret de $SL_n(\mathbb{R})$ qui préserve Ω_n et tel que :*

- le quotient $\Gamma_n \backslash \Omega_n$ est de volume fini ;
- le quotient $\Gamma_n \backslash \Omega_n$ n'est pas compact ;
- le groupe Γ_n est d'indice fini dans $\text{Aut}(\Omega_n)$; en particulier, l'ouvert proprement convexe Ω_n n'est pas homogène.

De plus, l'ouvert Ω_n est Gromov-hyperbolique et le groupe Γ_n est Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$.

Motivations et présentation des résultats

Mon intérêt s'est d'abord porté sur l'adhérence de Zariski du groupe d'holonomie d'une variété projective strictement convexe de volume fini.

Yves Benoist justifie l'intérêt de l'adhérence de Zariski en introduction de son cours *Sous-groupes discrets des groupes de Lie* donné à Luminy en 1997 lors de l'*European Summer School in Group Theory* :

« Le concept qui me semble le plus utile pour l'étude d'un groupe linéaire Γ est la notion d'adhérence de Zariski. C'est-à-dire le plus petit sous-groupe algébrique contenant Γ . L'efficacité de cette notion tient en ce que, d'une part elle conserve certaines propriétés du groupe Γ et d'autre part on peut lui appliquer les techniques de groupes algébriques. [...] Donc, pour étudier un groupe linéaire Γ [...], on le considère comme sous-groupe Zariski dense de... son adhérence de Zariski. »

On généralise dans cette thèse les théorèmes suivants (respectivement de Benoist et Marquis) au cas de variétés de volume fini et de dimension quelconque :

Théorème ([Ben00], théorème 3.6) *Soit Γ un sous-groupe discret de $SL_n(\mathbb{R})$ qui divise un ouvert strictement convexe Ω de $\mathbb{R}P^{n-1}$. Si Ω n'est pas un ellipsoïde, alors Γ est Zariski dense dans $SL_n(\mathbb{R})$.*

Théorème ([Mar12b], corollaire 3.5) *Soit Γ un sous-groupe discret de $SL_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{R}P^2$. Si $\Gamma \backslash \Omega$ est de volume fini et Ω n'est pas un triangle, alors l'adhérence de Zariski de Γ est $SL_3(\mathbb{R})$ ou un conjugué de $SO_{1,2}(\mathbb{R})$.*

On considère ici un ouvert projectif strictement convexe Ω et un sous-groupe discret sans torsion $\Gamma < SL_n(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et tel que l'action de Γ sur Ω soit libre et de covolume fini. Les points cuspidaux (notés $p \in \partial\Omega$) sont des points fixes de transformations paraboliques et interviennent dans la définition des pointes d'une variété projective convexe. On note $\Gamma_p = \text{Stab}_\Gamma(p)$ le sous-groupe parabolique (maximal) de Γ fixant un point cuspidal p .

Proposition 2.6 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ est une variété projective strictement convexe de volume fini. Soient $p, p' \in \partial\Omega$ deux points cuspidaux distincts. Alors $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle^z}$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ ou bien $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle^z} = SL_n(\mathbb{R})$.*

Le théorème suivant et son corollaire décrivent l'adhérence de Zariski de Γ .

Théorème 2.1 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ une variété projective strictement convexe de volume fini. Supposons que pour toute paire (p, p') de points cuspidaux de $\partial\Omega$ le sous-groupe $\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle$ ne soit pas Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$. Alors l'adhérence de Zariski du groupe Γ est conjuguée à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.*

Corollaire 2.2 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ une variété projective strictement convexe de volume fini. Alors Γ est Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$ ou bien l'adhérence de Zariski de Γ est conjuguée au groupe $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ (i.e. Ω est un ellipsoïde).*

Remarque – M. Crampon et L. Marquis ont démontré un résultat analogue dans [CM14] (théorème 7.28) :

Théorème (Crampon, Marquis) *Soit Ω un ouvert strictement convexe à bord C^1 , soit Γ un sous-groupe discret et irréductible de $\text{Aut}(\Omega)$. Si l'ensemble limite Λ_Γ contient un point parabolique uniformément borné, alors l'adhérence de Zariski de Γ est soit $SL_n(\mathbb{R})$ soit conjuguée à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.*

On peut démontrer le corollaire 2.2 avec ce théorème, mais sa démonstration est basée sur un lemme de Benoist sur les groupes algébriques et leurs représentations, tandis que la notre découle d'un résultat géométrique de [CLT15a] sur les pointes de $\Gamma \backslash \Omega$.

La démonstration du théorème 2.1 fait intervenir deux résultats clés. Le premier décrit l'adhérence de Zariski de Γ lorsque Ω est un ellipsoïde.

Lemme 2.3 *Soient $\Omega \subset \mathbb{RP}^{n-1}$ un ouvert strictement convexe et $\Gamma < SL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret sans torsion qui préserve Ω . On suppose que le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est une variété projective strictement convexe. Alors le groupe $\bar{\Gamma}^z$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ si et seulement si Ω est un ellipsoïde.*

Le second permet d'étudier simultanément tous les groupes cuspidaux.

Théorème 2.10 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ une variété projective strictement convexe de volume fini. On suppose que Γ n'est pas Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une forme quadratique q de signature $(1, n-1)$ telle que, pour tout point cuspidal p , on ait $\bar{\Gamma}_p^z \subset SO(q)$. Dans ce cas, tous les points cuspidaux appartiennent au bord $\partial\mathcal{E} = \mathbb{P}(q=0)$ de l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \mathbb{P}(q>0)$. De plus, $\bar{\Gamma}^z = SO(q)$ et $\Omega = \mathcal{E}$.*

Dans un second temps, je me suis intéressé à l'espace des modules des structures projectives strictement convexes de volume fini. On traite le cas de variétés de volume fini et de dimension quelconque, après que Marquis s'est déjà intéressé au cas des surfaces projectives convexes de volume fini :

Théorème ([Mar10]) *On se donne une surface S qui est l'intérieur d'une surface compacte à bord. On suppose que S est de caractéristique d'Euler strictement négative. L'espace des modules des structures projectives proprement convexes de volume fini sur la surface S s'identifie à l'une des composantes connexes de l'espace des représentations du groupe fondamental de S dans $SL_3(\mathbb{R})$ dont l'holonomie des lacets élémentaires est parabolique, à conjugaison près.*

Dans le cas de variétés projectives convexes **compactes**, il existe un résultat plus général :

Théorème ([Kos68], [Ben05]) *Soit Γ un groupe de type fini, on note \mathcal{F}_Γ l'ensemble des représentations fidèles et discrètes $\rho : \Gamma \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un ouvert proprement convexe Ω divisible par $\rho(\Gamma)$.*

(Koszul) L'ensemble \mathcal{F}_Γ est une partie ouverte de $\text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$.

(Benoist) Si Γ ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini, alors \mathcal{F}_Γ est une partie fermée de $\text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$.

On considère ici les représentations fidèles et discrètes $\rho : \Gamma \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ d'un groupe Γ pour lesquelles il existe un ouvert Ω_ρ préservé par $\rho(\Gamma)$ tel que le quotient $\rho(\Gamma) \backslash \Omega_\rho$ soit une variété projective strictement convexe de volume fini. On note $\beta_\Gamma \subset \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$ l'ensemble de ces représentations. Le principal résultat obtenu affirme que β_Γ est un fermé de l'espace des représentations.

Théorème 3.1 *Soient Γ un groupe et $n \geq 4$. L'ensemble β_Γ est une partie fermée de $\text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$.*

Si l'on remplace « variété » par « orbivariété » dans la définition de β_Γ , le groupe Γ peut avoir de la torsion et l'action de $\rho(\Gamma)$ sur Ω_ρ n'est plus nécessairement libre, mais le théorème 3.1 reste vrai. C'est le résultat un peu plus général du théorème 3.3 ci-dessous.

Théorème 3.3 *Soit Γ un groupe et soit $\beta_\Gamma^{\text{orb}}$ l'ensemble des représentations $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$ fidèles et discrètes telles qu'il existe un ouvert strictement convexe $\Omega_\rho \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ préservé par $\rho(\Gamma)$ et sur lequel l'action de $\rho(\Gamma)$ est de covolume fini. Alors $\beta_\Gamma^{\text{orb}}$ est une partie fermée de $\text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$.*

Remarque – Cooper, Long et Tillmann ont récemment étudié l'ouverture de β_Γ en imposant des conditions sur l'holonomie des bouts des variétés projectives strictement convexes considérées (voir [CLT15b]).

Pour démontrer le théorème 3.1 on se donne une suite de représentations $\rho_k \in \beta_\Gamma$ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, pour tout k , on dispose d'un ouvert strictement convexe $\Omega_k \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ qui est $\rho_k(\Gamma)$ -invariant et tel que le quotient $\Omega_k / \rho_k(\Gamma)$ est un variété de volume fini. Le but est de montrer que la représentation ρ_∞ appartient à β_Γ .

Une famille de sous-groupes de Γ , appelés *groupes cuspidaux*, joue un rôle récurrent dans cette partie. Ce sont les sous-groupes $\Pi < \Gamma$ pour lesquelles les représentations $\rho \in \beta_\Gamma$ définissent un sous-groupe parabolique maximal $\rho(\Pi)$ correspondant à une pointe de la variété $\rho(\Gamma) \backslash \Omega_\rho$. De façon équivalente, lorsque $n \geq 4$, un groupe cuspidal est un sous-groupe $\Pi < \Gamma$ isomorphe à \mathbb{Z}^{n-2} et maximal pour cette propriété.

On commence par étudier la représentation limite ρ_∞ .

Proposition 3.6 *Soient Γ un groupe et $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Alors la représentation limite ρ_∞ est fidèle, discrète et irréductible.*

On montre ensuite qu'il existe un ouvert projectif proprement convexe Ω_∞ qui est préservé par $\rho_\infty(\Gamma)$. Ce convexe est obtenu à partir de la suite des convexes Ω_k associés aux représentations ρ_k .

Proposition 3.17 *Soient Γ un groupe et $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Il existe un ouvert proprement convexe (non vide) de \mathbb{RP}^{n-1} , noté Ω_∞ , qui est préservé par le groupe $\Gamma_\infty = \rho_\infty(\Gamma)$.*

D'après le théorème 0.5 de [CLT15a], les pointes des variétés $M_k = \rho_k(\Gamma) \backslash \Omega_k$ sont toutes hyperboliques. On en déduit que les limites de ces pointes sont des pointes hyperboliques de la variété $M_\infty = \rho_\infty(\Gamma) \backslash \Omega_\infty$.

Proposition 3.21 *Soient Γ un groupe et $\Pi < \Gamma$ un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^{n-2} . Soit $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Alors le groupe $\rho_\infty(\Pi)$ est conjugué dans $SL_n(\mathbb{R})$ à un sous-groupe de $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.*

On montre également que l'action de $\rho_\infty(\Gamma)$ sur Ω_∞ est de covolume fini. Pour cela, on retire les pointes de M_∞ qui sont des limites de pointes de M_k . Sachant que ces pointes sont de volume fini, car hyperboliques, il suffit de montrer que la variété à bord obtenue est compacte.

On montre enfin que le convexe limite Ω_∞ est strictement convexe et à bord C^1 . Toutes les conditions sont alors vérifiées pour affirmer que la représentation limite ρ_∞ appartient à β_Γ , ce qui achève la preuve du théorème 3.1.

En parallèle des représentations projectives, je me suis également intéressé au double d'une variété à bord. L'étude du double s'est révélée nécessaire pour montrer que la variété limite, étudiée dans la partie précédente, était de volume fini. On considère une variété à bord N ayant un nombre fini de composantes de bord. L'objectif est de construire le revêtement universel du double de N ainsi que son groupe fondamental.

Définition Soit une variété à bord N ayant un nombre fini de composantes de bord. Le *double de N* , noté \overline{N}^d , est construit en collant deux copies de N le long de leur bord :

$$\overline{N}^d = (N \times \{0\}) \cup_h (N \times \{1\}) \quad \text{où } h : \partial N \rightarrow \partial N \text{ est l'application identité.}$$

Le théorème suivant permet de construire \mathcal{N} , une variété contractile qui est le revêtement universel de \overline{N}^d .

Théorème A.1 *Soit N une n -variété à bord ayant un nombre fini de composantes de bord. On note \tilde{N} le revêtement universel de N . En recollant une infinité de copies de \tilde{N} le long de leurs composantes de bord on peut construire une n -variété \mathcal{N} qui est le revêtement universel de \overline{N}^d .*

De plus, si on suppose que le revêtement universel \tilde{N} de N est contractile et que les composantes de bord de \tilde{N} sont contractiles, alors \mathcal{N} est une variété contractile.

Le second théorème permet de construire le groupe fondamental de \overline{N}^d . Il est construit à l'aide du groupe fondamental de N et des composantes de bord du revêtement universel de N .

Théorème A.2 *Soit N une n -variété à bord ayant un nombre fini de composantes de bord. On note $\mathcal{C} = \pi_0(\partial\tilde{N})$ et on définit le groupe $\Sigma = \langle \{\sigma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{C}} \mid \sigma_\Lambda^2 = 1 \rangle$. On note Σ_d le sous-groupe d'indice deux de Σ engendré par les éléments de la forme $\sigma_\Lambda \sigma_{\Lambda'}$, pour tous $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{C}$.*

Alors le groupe fondamental de \overline{N}^d est isomorphe au produit semi-direct $\Sigma_d \rtimes_\phi \pi_1 N$, où ϕ est l'action de $\pi_1 N$ sur Σ_d induite par l'action naturelle de $\pi_1 N$ sur \mathcal{C} .

Chapitre 1

Variétés projectives convexes

1.1 Convexes projectifs

Dans ce texte, \mathbb{RP}^{n-1} désigne l'espace projectif réel de dimension $n - 1$, c'est-à-dire l'ensemble des droites de \mathbb{R}^n passant par l'origine.

Définitions Une partie C de \mathbb{RP}^{n-1} est dite *convexe* si l'intersection de toute droite projective avec C est connexe ou vide.

Une *carte affine* de \mathbb{RP}^{n-1} est le complémentaire d'un hyperplan projectif.

Un ouvert convexe Ω de \mathbb{RP}^{n-1} est *proprement convexe* lorsque son adhérence $\overline{\Omega}$ est contenue dans une carte affine.

Un ouvert Ω est *strictement convexe* lorsqu'il est proprement convexe et que son bord $\partial\Omega$ ne contient aucun segment non trivial.

Remarque – On peut également considérer la sphère \mathbb{S}^{n-1} qui est l'ensemble des demi-droites de \mathbb{R}^n passant par l'origine. Si Ω est un ouvert proprement convexe de \mathbb{RP}^{n-1} , le revêtement à deux feuillets $\pi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ fournit deux copies de Ω qui sont les deux composantes connexes de $\pi^{-1}(\Omega)$. L'adhérence de chaque composante est alors contenue dans un hémisphère; on en choisit une que l'on note également Ω .

Définition Soit A une partie de \mathbb{S}^{n-1} , le *cône de A* est défini comme le demi-cône vectoriel $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}_+ A \subset \mathbb{R}^n$.

En notant $(\mathbb{R}^n)^*$ l'espace dual de \mathbb{R}^n , on peut de plus définir le *cône dual de A* par

$$\mathcal{C}^*(A) = \{\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \forall v \in \overline{A}, \varphi(v) > 0\}$$

Définition Une *orbivariété projective convexe* est le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ d'un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{RP}^{n-1} par un sous-groupe discret Γ de $SL_n(\mathbb{R})$ qui préserve Ω .

On parle de *variété projective convexe* lorsque le groupe Γ est sans-torsion.

Si de plus l'ouvert Ω est strictement convexe, on parle de *variété projective strictement convexe*.

1.1.1 Métrique de Hilbert

Tout ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{RP}^{n-1} peut être muni d'une *métrique de Hilbert* notée d_Ω et définie comme suit. Pour tout $p, q \in \Omega$, on note D une droite projective passant par p et q (elle est unique si $p \neq q$) et $a, b \in \partial\Omega$ les extrémités du segment $D \cap \bar{\Omega}$. On pose alors $d_\Omega(p, q) = |\log[a, p, q, b]|$, où

$$[a, p, q, b] := \frac{\|a - q\| \|b - p\|}{\|a - p\| \|b - q\|}$$

est le birapport entre ces quatre points et $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur une carte affine contenant l'adhérence $\bar{\Omega}$. Cette définition ne dépend ni du choix de la carte affine, ni de la norme $\|\cdot\|$.

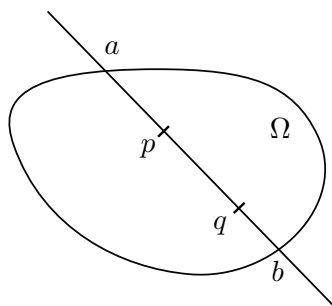


FIGURE 1.1 – Métrique de Hilbert

Fait Les éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ préservent le birapport. En conséquence, tout sous-groupe $\Gamma < SL_n(\mathbb{R})$ qui préserve Ω est un sous-groupe de $\text{Isom}(\Omega, d_\Omega)$, le groupe des isométries de (Ω, d_Ω) .

Conséquence Soit $\Gamma \backslash \Omega$ une variété projective convexe. La métrique d_Ω définie sur l'ouvert Ω passe au quotient et permet de définir une métrique sur M :

$$\forall x, y \in M, \quad d_M(x, y) = \inf \left\{ d_\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \left| \begin{array}{l} q(\tilde{x}) = x \\ q(\tilde{y}) = y \\ \tilde{x}, \tilde{y} \in \Omega \end{array} \right. \right\}$$

où $q : \Omega \rightarrow M$ est l'application de passage au quotient.

1.1.2 Volume de Busemann

La métrique de Hilbert sur Ω est de Finsler avec

$$\forall x \in \Omega, \forall v \in T_x\Omega, \quad F_\Omega(x, v) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\|v^+ - x\|} + \frac{1}{\|v^- - x\|} \right) \|v\|$$

où $v^+, v^- \in \partial\Omega$ sont les points d'intersection de la droite définie par x et v avec $\partial\Omega$. Cette métrique définit une mesure sur Ω , absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, appelée *volume de Busemann* et notée \mathbf{vol}_Ω .

Pour plus de détails sur la structure finslérienne d'un ouvert proprement convexe de \mathbb{RP}^{n-1} on pourra consulter le paragraphe 1.1.3 de [Mar12a].

Pour construire le volume de Busemann, on se place dans une carte affine \mathbb{A} contenant l'adhérence $\overline{\Omega}$ et munie d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$. On note $B_x^1 = \{v \in T_x\Omega : F_\Omega(x, v) < 1\}$ la boule unité de l'espace tangent à Ω en x , λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{A} et $v_n = \lambda(\{v \in \mathbb{A} : \|v\| < 1\})$ le volume de la boule unité euclidienne en dimension n . Pour tout borélien $\mathcal{A} \subset \Omega \subset \mathbb{A}$ on pose

$$\mathbf{vol}_\Omega(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{v_n}{\lambda(B_x^1)} d\lambda(x)$$

A nouveau, cette définition ne dépend ni du choix de la norme euclidienne, ni de la carte affine.

Fait Ce volume \mathbf{vol}_Ω est invariant par $\text{Isom}(\Omega, d_\Omega)$.

Conséquence Comme la métrique d_Ω , le volume \mathbf{vol}_Ω passe au quotient et permet de définir une notion de volume sur toute variété projective proprement convexe $\Gamma \backslash \Omega$: pour tout $\mathcal{A} \subset \Omega$, si $q : \Omega \rightarrow M$ restreinte à \mathcal{A} est injective, on pose $\mathbf{vol}_M(q(\mathcal{A})) = \mathbf{vol}_\Omega(\mathcal{A})$.

Définition On dira qu'une variété projective convexe $\Gamma \backslash \Omega$ est de *volume fini* lorsqu'elle est de volume fini pour la mesure \mathbf{vol}_M , i.e. lorsque $\mathbf{vol}_M(M) < +\infty$.

1.2 Isométries projectives

Définition Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{RP}^{n-1} . On appelle *isométrie projective* de Ω tout élément de l'ensemble

$$\text{Aut}(\Omega) = \{g \in SL_n(\mathbb{R}) \mid g\Omega = \Omega\}$$

Remarque – On a vu en 1.1 que tout élément de $SL_n(\mathbb{R})$ qui préserve Ω conserve la métrique d_Ω , d'où le choix du terme *isométrie*.

Définition Soit Ω un ouvert projectif proprement convexe. Pour tout $g \in \text{Aut}(\Omega)$ on appelle *longueur de translation* de g le réel

$$\tau_\Omega(g) = \inf_{x \in \Omega} d_\Omega(x, gx)$$

Définition Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{RP}^{n-1} et $g \in \text{Aut}(\Omega)$. On dit que l'élément g est :

- *elliptique* si $\tau_\Omega(g) = 0$ et cet infimum est atteint ;
- *parabolique* si $\tau_\Omega(g) = 0$ et cet infimum n'est pas atteint ;
- *hyperbolique* si $\tau_\Omega(g) > 0$ et cet infimum est atteint ;
- *quasi-hyperbolique* si $\tau_\Omega(g) > 0$ et cet infimum n'est pas atteint.

On peut trouver une classification générale des isométries projectives dans la partie 2 de [CLT15a]. On se restreint ici au cas où l'ouvert projectif Ω est **strictement convexe**. On a alors le théorème de classification suivant :

Théorème 1.1 ([CM14], théorème 3.3, p.2314) *Soient Ω un ouvert projectif strictement convexe et $g \in \text{Aut}(\Omega)$. On est dans l'un des trois cas exclusifs suivants :*

- *g est elliptique.*
- *g est hyperbolique ; il a exactement deux points fixes $p^+, p^- \in \partial\Omega$, l'un attractif et l'autre répulsif : la suite $(g^i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de $\overline{\Omega} \setminus \{p^-\}$ vers p^+ et la suite $(g^{-i})_{i \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de $\overline{\Omega} \setminus \{p^+\}$ vers p^- .*
- *g est parabolique ; il a exactement un point fixe $p \in \partial\Omega$ et préserve toute horosphère basée en p (voir définition en 1.4.3). Les suites $(g^i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(g^{-i})_{i \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément sur les compacts de $\overline{\Omega} \setminus \{p\}$ vers p .*

En particulier, g n'est pas quasi-hyperbolique.

Remarque – La démonstration de ce théorème comporte deux étapes importantes. On montre d'abord que tout $g \in \text{Aut}(\Omega)$ possède au moins un point fixe dans $\overline{\Omega}$. C'est une conséquence du théorème du point fixe de Brouwer ou bien du lemme 3.2 de [Ben05]. Puis on distingue quatre cas exclusifs :

- g possède au moins un point fixe dans Ω et $g \neq \text{id}$; alors g est elliptique.
- g possède au moins trois points fixes dans $\partial\Omega$; alors $g = \text{id}$.
- g possède exactement deux points fixes dans $\partial\Omega$; alors g est hyperbolique.
- g possède exactement un point fixe dans $\partial\Omega$; alors g est parabolique.

Le cas qui nous intéresse dans cette thèse est celui d'un ouvert Ω strictement convexe et d'un sous-groupe discret $\Gamma < \text{Aut}(\Omega)$ sans torsion. La proposition suivante et le théorème 1.1 affirment qu'un tel groupe Γ n'est composé que d'éléments hyperboliques et d'éléments paraboliques.

Proposition 1.2 *Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{RP}^{n-1} et Γ un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\Omega)$. Le groupe Γ est sans torsion si et seulement si Γ ne contient aucun élément elliptique.*

Démonstration. On va montrer qu'un élément $\gamma \in \Gamma$ est elliptique si et seulement s'il est d'ordre fini. Soit $\gamma \in \Gamma$ un élément elliptique. D'après la remarque ci-dessus, γ fixe un point $p \in \Omega$. L'étude des éléments elliptiques fournie par [CLT15a] (lemme 2.2, p.195) permet d'affirmer que le sous-groupe $G = \langle \gamma \rangle$ est conjugué dans $SL_n(\mathbb{R})$ à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. Or Γ est discret et $O_n(\mathbb{R})$ est compact, ainsi G est un groupe

fini. En particulier, l'élément γ est d'ordre fini.

Soit $\gamma \in \Gamma$ un élément non trivial d'ordre fini $w \geq 2$. Alors le sous-groupe $G = \langle \gamma \rangle$ de Γ est fini, donc compact. Par un « argument de barycentre », le lemme 2.1 de [Mar14] permet d'affirmer que G fixe un point de Ω . En particulier, γ est elliptique. \square

1.3 Ensemble limite et sous-groupes élémentaires

Définition Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{RP}^{n-1} et G un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\Omega)$. On dit que le groupe G est un *groupe élémentaire* s'il existe un point $p \in \overline{\Omega}$ qui est fixé par tous les éléments de G .

Pour plus de détails, on pourra consulter la partie 4 de [CLT15a] consacrée à l'étude des sous-groupes élémentaires.

Définition Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{RP}^{n-1} et G un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\Omega)$. On dit que le groupe G est

- *elliptique* si tout élément non trivial de G est elliptique ;
- *hyperbolique* si tout élément non trivial de G est hyperbolique ;
- *parabolique* si tout élément non trivial de Γ est parabolique.

Si de plus Γ est un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\Omega)$ tel que $G < \Gamma$, on dit que G est un *sous-groupe parabolique maximal* de Γ si G est parabolique et vérifie la propriété de maximalité suivante :

$$\forall G' < \Gamma \text{ parabolique, } G < G' \Rightarrow G = G'$$

Faits On reprend les notations de la définition ci-dessus.

- Dans un groupe elliptique, tous les éléments fixent le même point $p \in \Omega$.
- Dans un groupe hyperbolique, tous les éléments fixent les mêmes points $p, q \in \partial\Omega$.
- Dans un groupe parabolique, tous les éléments fixent le même point $p \in \partial\Omega$.

En particulier, tout groupe elliptique, hyperbolique ou parabolique est un groupe élémentaire.

Définition Soient Ω un ouvert projectif **strictement** convexe et $\Gamma < SL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret qui préserve Ω . Soit de plus $x \in \Omega$. On note $\overline{\Gamma \cdot x}$ l'adhérence de $\Gamma \cdot x$ dans \mathbb{RP}^{n-1} et on définit le sous-ensemble de $\partial\Omega$ suivant

$$\Lambda_\Gamma^x = \overline{\Gamma \cdot x} \setminus \Gamma \cdot x \subseteq \partial\Omega$$

Comme Ω est strictement convexe, cette définition ne dépend pas du choix de $x \in \Omega$. On note alors cet ensemble Λ_Γ et on le nomme *ensemble limite* de Γ .

Cette notion d'ensemble limite a été introduite et étudiée par Guivarc'h dans [Gui90] pour un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{R})$ agissant sur son espace symétrique. On pourra également consulter [Ben97].

Faits Soit $\Gamma < SL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret qui préserve un ouvert strictement convexe Ω .

- Γ est un sous-groupe élémentaire si et seulement si son ensemble limite Λ_Γ est fini.
- Dans ce cas, le cardinal de Λ_Γ vaut 0, 1 ou 2, et le groupe Γ est respectivement elliptique, parabolique ou hyperbolique.
- Si Λ_Γ est infini, alors c'est le plus petit fermé Γ -invariant de $\partial\Omega$.
- Pour $n \geq 3$, si Γ est un sous-groupe élémentaire, alors le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est de volume infini.

Fait Soit $\Gamma < SL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret qui préserve un ouvert strictement convexe Ω et dont l'action sur Ω est de **covolume fini**. Alors on a l'égalité $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$. Cela signifie qu'il n'existe pas de fermé propre de $\partial\Omega$ préservé par Γ ; on dit que l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est *minimale*.

1.4 Décomposition du quotient

Cette section reprend les notations et les explications de Crampon et Marquis issues de [CM14]. On y définit et étudie différentes parties d'une variété projective **strictement** convexe $M = \Gamma \backslash \Omega$, où Ω désigne un ouvert projectif strictement convexe et Γ un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\Omega)$.

Le théorème suivant est également démontré chez Cooper, Long et Tillmann ([CLT15a], théorème 0.1, p.183). Il permet de définir la notion de *constante de Margulis* pour les variétés projectives convexes.

Théorème 1.3 ([CM13], théorème 1, p.2) *En toute dimension m , il existe une constante $\varepsilon_m > 0$ et un entier i_m , tels que, pour tout ouvert proprement convexe $\Omega \subset \mathbb{RP}^m$, pour tout sous-groupe discret Γ de $\text{Aut}(\Omega)$, pour tout point $x \in \Omega$, le groupe Γ_{ε_m} engendré par l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid d_\Omega(x, \gamma x) < \varepsilon_m\}$ est virtuellement nilpotent. De plus, on peut trouver un sous-groupe nilpotent de Γ_{ε_m} d'indice inférieur ou égal à i_m .*

Définition Une telle constante ε_m est appelée *constante de Margulis*.

1.4.1 Parties fine et épaisse

Dans cette section, on fixe la dimension m et une constante de Margulis $\varepsilon = \varepsilon_m > 0$.

Notation Soient Ω un ouvert projectif **strictement** convexe et G un sous-groupe (quelconque) de $\text{Aut}(\Omega)$. Soit $x \in \Omega$. On note

- $G_\varepsilon(x)$ le sous-groupe de G engendré par $\{\gamma \in G \mid d_\Omega(x, \gamma x) < \varepsilon\}$;
- $\Omega_\varepsilon(G) = \{x \in \Omega \mid G_\varepsilon(x) \text{ est infini}\}$;
- $\Omega_\varepsilon^c(G) = \{x \in \Omega \mid G_\varepsilon(x) \text{ est infini et parabolique}\} \subseteq \Omega_\varepsilon(G)$.

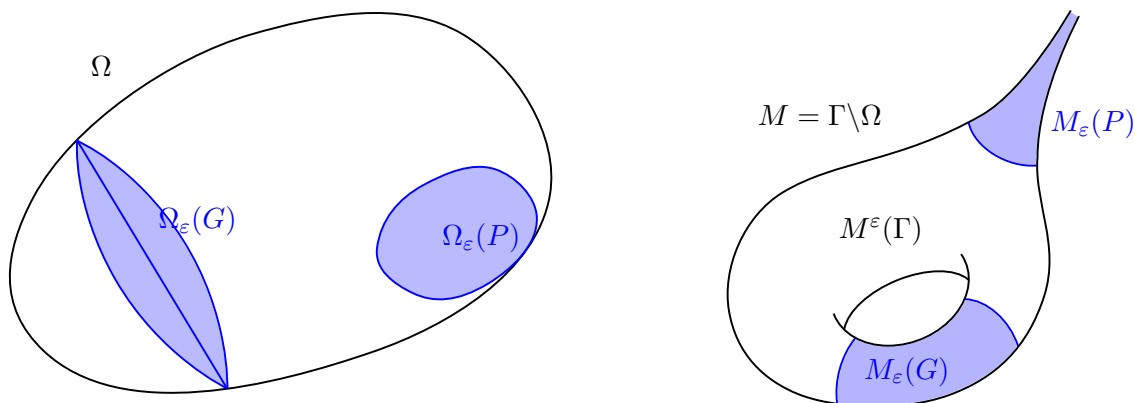


FIGURE 1.2 – Décomposition du quotient

Fait Pour tous $\gamma \in G$ et $x \in \Omega$, on a $G_\varepsilon(\gamma x) = \gamma G_\varepsilon(x) \gamma^{-1}$. Donc $G \Omega_\varepsilon(G) = \Omega_\varepsilon(G)$ et $G \Omega_\varepsilon^c(G) = \Omega_\varepsilon^c(G)$. Ainsi, les quotients de la définition suivante sont bien définis.

Définition Avec les notations ci-dessus, en notant $M = G \backslash \Omega$, on appelle

- *partie fine* de M , le quotient $M_\varepsilon(G) = G \backslash \Omega_\varepsilon(G) \subset M$.
- *partie épaisse* de M , le complémentaire de $M_\varepsilon(G)$ dans M ; c'est le quotient $M^\varepsilon(G) = G \backslash (\Omega \setminus \Omega_\varepsilon(G))$.
- *partie cuspidale* de M , le quotient $M_\varepsilon^c(G) = G \backslash \Omega_\varepsilon^c(G) \subset M_\varepsilon(G)$; ses composantes connexes sont les *pointes* de M .
- *partie non cuspidale* de M , le complémentaire de $M_\varepsilon^c(G)$ dans M .

Remarque – Ces définitions de parties fine et épaisse coïncident avec les définitions usuelles donnée par le rayon d'injectivité. Plus précisément,

$$M_\varepsilon(G) = \left\{ x \in M \mid \text{inj}(x) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \quad \text{et} \quad M^\varepsilon(G) = \left\{ x \in M \mid \text{inj}(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

Faits ([CM14], lemme 6.2)

Soit $M = \Gamma \backslash \Omega$ une variété projective strictement convexe.

- Les composantes connexes de la partie fine sont de la forme $M_\varepsilon(G)$, pour G un sous-groupe virtuellement nilpotent maximal de Γ .
- En particulier, les composantes connexes de la partie cuspidale (i.e. les pointes) sont de la forme $M_\varepsilon(P)$, pour P un sous-groupe parabolique maximal de Γ .
- Les composantes connexes de la partie fine qui ne sont pas des pointes sont des *tubes* de la forme $M_\varepsilon(G)$, pour G un sous-groupe hyperbolique maximal de Γ . Un tube est simplement le voisinage (dans le quotient) d'une petite géodésique fermée.

1.4.2 Volume fini

Dans le cas où une variété projective convexe est strictement convexe, on a une caractérisation utile de la finitude du volume. On utilisera cette caractérisation pour

montrer qu'une variété projective strictement convexe de volume fini possède un nombre fini de pointes (théorème 3.4).

Théorème 1.4 ([CLT15a], théorème 0.8, p.185) *Une variété projective strictement convexe est de volume fini si et seulement si sa partie épaisse est compacte.*

Ce théorème est une conséquence de la décomposition fine-épaisse et du théorème suivant de Benzécri.

Théorème 1.5 ([Ben60], théorème 2, p.309) *On note \mathfrak{C}_* l'ensemble des couples (K, p) , où K est un compact proprement convexe d'intérieur non vide et p un point de l'intérieur de K .*

Alors l'action de $SL_n(\mathbb{R})$ sur \mathfrak{C}_ est cocompacte.*

1.4.3 Horopointes

Définition Pour tous $p \in \partial\Omega$ et $x \in \Omega$ on note r_x^p le rayon géodésique issu de x et d'extrémité p . On définit la *fonction de Busemann* (cf. [Bus55]) associée à p par

$$B_p : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \lim_{t \rightarrow +\infty} t - d_\Omega(y, r_x^p(t))$$

On appelle *horoboule centrée en p passant par x* le sous-ensemble de Ω défini par $\mathcal{H}_p^x = \{y \in \Omega \mid B_p(x, y) > 0\}$. On appelle *horosphère* et on note $\partial\mathcal{H}$ le bord d'une horoboule \mathcal{H} ; c'est une hypersurface $\{y \in \Omega \mid B_p(x, y) = 0\}$.

Définition Soit $M = \Gamma \backslash \Omega$ une variété projective **strictement** convexe et soit $\mathcal{P} = M_\varepsilon(P) = P \backslash \Omega_\varepsilon(P)$ une pointe de M , où $P < \Gamma$ est un sous-groupe parabolique fixant un point $p \in \partial\Omega$. On appelle *horopointe* associée à \mathcal{P} tout quotient $P \backslash \mathcal{H} \subset \mathcal{P}$, où $\mathcal{H} \subset \Omega_\varepsilon(P)$ est une horoboule centrée en p .

Remarque – Soit \mathcal{P} une pointe de M comme dans la définition ci-dessus. On peut lui associer une famille à un paramètre d'horopointes $P \backslash \mathcal{H}_p^{x(t)}$ (voir figure 1.3), avec $x : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \Omega$ est un rayon géodésique d'extrémité p et telle que

$$\forall t, t' > 0, \quad t < t' \Rightarrow \mathcal{H}_p^{x(t')} \subset \mathcal{H}_p^{x(t)} \quad \text{et} \quad d_H \left(\partial\mathcal{H}_p^{x(t)}, \partial\mathcal{H}_p^{x(t')} \right) = |t' - t|$$

où d_H est la distance de Hausdorff pour l'espace (Ω, d_Ω) (voir paragraphe 3.3.1).

Définition Soit $M = \Gamma \backslash \Omega$ une variété projective **strictement** convexe et soit $\mathcal{P} = M_\varepsilon(P)$ une pointe de M , où $P < \Gamma$ est un sous-groupe parabolique maximal fixant un point $p \in \partial\Omega$. On dit que \mathcal{P} est une *pointe hyperbolique* s'il existe un ellipsoïde \mathcal{E}_1 inclus dans $\Omega_\varepsilon(P)$ et préservé par P .

Cette définition équivaut à dire que le sous-groupe parabolique P est conjugué dans $SL_n(\mathbb{R})$ à un sous-groupe de $SO_{1, n-1}(\mathbb{R})$.

Dans ce cas, il existe un ellipsoïde \mathcal{E}_2 de $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ qui contient le convexe Ω et tel que

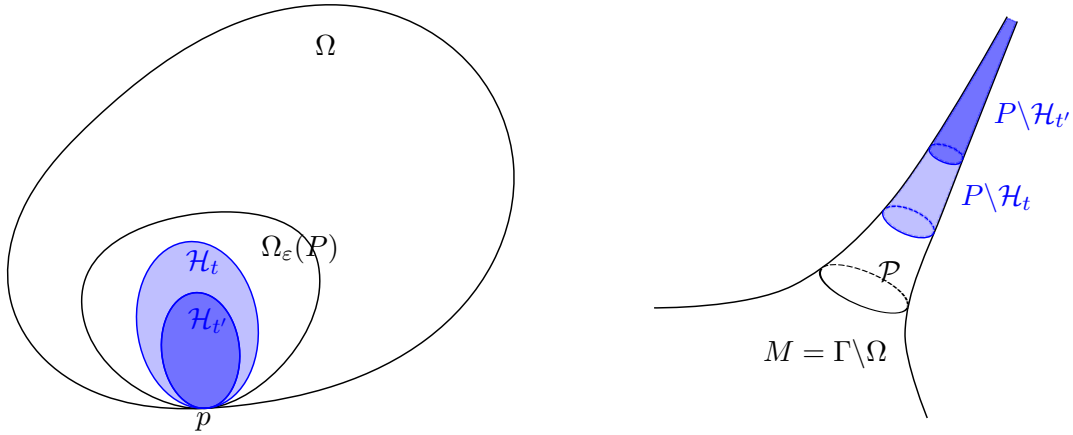


FIGURE 1.3 – Deux horosphères de \mathcal{P}

- \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont préservés par P ;
- \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont tangents à $\partial\Omega$ en p .

Fait Pour $n \geq 4$, une pointe \mathcal{P} et une horopointe associée $P \setminus \mathcal{H}$ sont topologiquement identiques car l'ouvert $\Omega_\varepsilon(P)$ qui définit \mathcal{P} se rétracte sur l'horoboule \mathcal{H} qui définit $P \setminus \mathcal{H}$. La pointe \mathcal{P} est un produit $(S^1)^{n-2} \times \mathbb{R}_+^*$ d'un tore par une demi-droite ouverte et son horopointe $P \setminus \mathcal{H}$ est un produit $(S^1)^{n-2} \times \mathbb{R}_+$.

Dans certaines situations, comme par exemple dans la partie 3.5, on préférera travailler avec des horopointes plutôt que des pointes.

Remarque – Dans [CLT15a], les auteurs donnent une définition plus générale de « pointe ». Notre définition de « pointe », donnée au paragraphe 1.4.1, correspond à leur définition de « pointe de rang maximal ». Avec nos hypothèses, c'est-à-dire dans le cas d'une variété projective strictement convexe de volume fini, le théorème 0.4 de [CLT15a] affirme que toutes les pointes sont de rang maximal.

Chapitre 2

Adhérence de Zariski des holonomies de variétés projectives strictement convexes de volume fini

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'adhérence de Zariski du groupe d'holonomie d'une variété projective strictement convexe de volume fini.

On considère un ouvert projectif strictement convexe Ω et un sous-groupe discret sans torsion $\Gamma < SL_n(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et tel que l'action de Γ sur Ω soit libre et de covolume fini. On rappelle que les points cuspidaux (notés $p \in \partial\Omega$) sont des points fixes de transformations paraboliques et interviennent dans la définition des pointes d'une variété projective convexe. On note $\Gamma_p = \text{Stab}_\Gamma(p)$ le sous-groupe parabolique (maximal) de Γ fixant un point cuspidal p .

Les principaux résultats obtenus sont le théorème suivant et son corollaire :

Théorème 2.1 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ une variété projective strictement convexe de volume fini. Supposons que pour toute paire (p, p') de points cuspidaux de $\partial\Omega$ le sous-groupe $\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle$ ne soit pas Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$. Alors l'adhérence de Zariski du groupe Γ est conjuguée à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.*

Corollaire 2.2 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ une variété projective strictement convexe de volume fini. Alors Γ est Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$ ou bien l'adhérence de Zariski de Γ est conjuguée au groupe $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ (i.e. Ω est un ellipsoïde).*

2.1 Caractérisation de l'ellipsoïde

Soit $\Gamma \backslash \Omega$ est une variété projective strictement convexe de volume fini. On donne une condition nécessaire et suffisante sur l'adhérence de Zariski de Γ pour que Ω soit un ellipsoïde.

Lemme 2.3 Soient $\Omega \subset \mathbb{RP}^{n-1}$ un ouvert strictement convexe et $\Gamma < SL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret sans torsion qui préserve Ω . On suppose que le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est une variété projective strictement convexe de volume fini. Alors le groupe $\overline{\Gamma}^z$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ si et seulement si Ω est un ellipsoïde.

Démonstration. $\boxed{\implies}$ Si $\overline{\Gamma}^z$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$, alors il existe une forme quadratique q de signature $(1, n-1)$ laissée invariante par $\overline{\Gamma}^z$. Ainsi l'ouvert Ω et l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \mathbb{P}(q > 0)$ sont deux convexes Γ -invariants. On commence par montrer que l'intersection $\partial\mathcal{E} \cap \partial\Omega$ est non vide. Soient $x_0 \in \Omega$ et $\gamma \in \Gamma$ un élément hyperbolique. On note $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^k x_0 \in \partial\Omega$ le point attractif de γ . Alors x est la droite de \mathbb{R}^n stable par γ associée à sa valeur propre λ de plus grand module. On note $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre directeur de $\mathbb{R}x$. Alors $q(\gamma v) = q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$. Or $q(\gamma v) = q(v)$ car $\gamma \in SO(q)$. Donc $q(v) = 0$ car $|\lambda| > 1$, i.e. $x \in \mathbb{P}(q = 0) = \partial\mathcal{E}$. Ce qui montre que $\partial\mathcal{E} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

Montrons ensuite que $\mathcal{E} = \Omega$. L'intersection $\partial\mathcal{E} \cap \partial\Omega$ est un fermé non vide Γ -invariant de $\partial\Omega$, donc il contient l'ensemble limite Λ_Γ . Or $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$, donc $\partial\mathcal{E} \cap \partial\Omega = \partial\Omega$, i.e. $\partial\Omega \subseteq \partial\mathcal{E}$. Comme les adhérences $\overline{\Omega}$ et $\overline{\mathcal{E}}$ sont des convexes compacts d'intérieur non vide de \mathbb{R}^n , elles sont égales à l'enveloppe convexe de leur bord. On a donc l'inclusion $\Omega \subseteq \mathcal{E}$. Supposons que cette inclusion soit stricte. Dans ce cas, on peut choisir $y \in \Omega$ et $z \in \mathcal{E} \setminus \Omega$. On note ω l'intersection du segment $[y, z]$ avec le bord $\partial\Omega$. Alors $\omega \in \mathcal{E}$ car $[y, z] \subset \mathcal{E}$ par convexité, et $\omega \in \partial\Omega$. Ceci contredit l'égalité $\partial\mathcal{E} \cap \partial\Omega = \partial\Omega$. On conclut donc que les convexes Ω et \mathcal{E} sont égaux.

$\boxed{\impliedby}$ Si $\Omega \subset \mathbb{RP}^{n-1}$ est un ellipsoïde, il est de la forme $\mathbb{P}(q < 0)$, où q est une forme quadratique de signature $(1, n-1)$. Soit γ un élément de Γ , alors γ préserve $\Omega = \mathbb{P}(q < 0)$. Montrons que $\gamma \in SO(q)$.

On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n dans laquelle la forme quadratique q est de la forme $q = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$. Il existe des réels α_{ij} (pour $1 \leq i, j \leq n$) tels que la forme $q \circ \gamma$ s'écrive $\sum_{i \leq j} \alpha_{ij} x_i x_j$. On définit le polynôme $P = q \circ \gamma - \alpha_{11} q$, il est de la forme

$$P(x) = x_1 R(x_2, \dots, x_n) + T(x_2, \dots, x_n)$$

où R et T sont des polynômes homogènes en $n-1$ variables réelles. On va montrer que P est nul sur \mathbb{R}^n .

Soit W l'ensemble des $w \in \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe une droite affine $D(w)$ passant par w , qui intersecte l'axe $\mathbb{R}e_1$ en un point et la conique $\{q = 0\}$ en deux points. Cet ensemble W contient l'ouvert $\{w \in \mathbb{R}^n \mid q(w) < 0\}$. En effet, si $q(w) < 0$, en choisissant un point v de l'axe $\mathbb{R}e_1$ suffisamment loin de l'origine, alors la droite affine passant par v et w intersecte la conique $\{q = 0\}$ en exactement deux points. Soit $w \in W$, on note v le point d'intersection de $D(w)$ et de l'axe $\mathbb{R}e_1$. Alors $d = w - v$ est un vecteur directeur de $D(w)$ et une paramétrisation de cette droite affine est donnée par

$$D(w) = \{v + td \mid t \in \mathbb{R}\}$$

On définit la fonction réelle $f(t) = P(v + td)$. Elle vérifie $f(0) = 0$ car $v \in \mathbb{R}e_1$

et $P(v) = 0$ d'après la forme de P donnée ci-dessus. De plus, comme γ préserve la quadrique $\{q = 0\}$, P s'annule aux deux points d'intersections de $D(w)$ avec $\{q = 0\}$. Donc il existe $t_1 \neq t_2 \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0$. En notant B_q la forme bilinéaire associée à q , on peut écrire

$$\begin{aligned} f(t) &= q(\gamma v + t\gamma d) - q(v + td) \\ &= t^2 [q(\gamma d) - q(d)] + 2t [B_q(\gamma v, \gamma d) - B_q(v, d)] + [q(\gamma e_1) - q(d)] \end{aligned}$$

On constate que f est un polynôme du second degré à trois racines distinctes $0, t_1, t_2$, donc $f \equiv 0$, et ainsi $P|_{D(w)} \equiv 0$. Or l'ensemble W contient l'ouvert $\{q < 0\}$, donc le polynôme P est nul sur cet ouvert. D'où finalement $P \equiv 0$, i.e. $q \circ \gamma = \alpha_{11}q$. Comme γ est un élément de $SL_n(\mathbb{R})$, on a de plus que $\alpha_{11} = 1$. On a donc montré que $\Gamma < SO(q)$, i.e. que Γ est conjugué à un sous-groupe de $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.

Pour conclure que $\bar{\Gamma}^z$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$, on applique le lemme 2.4 pour obtenir que Γ est irréductible, puis le lemme 2.5 pour conclure. \square

Lemme 2.4 ([Mar12a], lemme 5.3, p.29) *Soit Γ un sous-groupe de $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$. Si Γ n'est pas irréductible, alors l'ensemble limite de Γ est inclus dans un hyperplan de $\partial\mathbb{H}$.*

Lemme 2.5 ([BdlH04], proposition 1, p.1359) *Tout sous-groupe discret et irréductible de $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ est Zariski-dense dans $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.*

2.2 Sous-groupe engendré par deux groupes paraboliques maximaux

Soient $\Gamma \backslash \Omega$ est une variété projective strictement convexe de volume fini et $p, p' \in \partial\Omega$ deux points cuspidaux distincts. On étudie l'adhérence de Zariski du groupe $\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle$ engendré par les deux groupes paraboliques maximaux Γ_p et $\Gamma_{p'}$.

Proposition 2.6 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ est une variété projective strictement convexe de volume fini. Soient $p, p' \in \partial\Omega$ deux points cuspidaux distincts. On note respectivement \mathfrak{h}_p et \mathfrak{h}'_p les algèbres de Lie de $\bar{\Gamma}_p^z$ et $\bar{\Gamma}_{p'}^z$. Pour tous $x, y, \lambda \in \mathbb{R}^{n-2}$, on note $\chi(x)$ et $\xi(\lambda, y)$ les matrices*

$$\chi(x) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t x & 0 \\ & \ddots & x \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \xi(\lambda, y) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \lambda_1 y_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \lambda_{n-2} y_{n-2} & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_1^{-1} y_1 & \dots & \lambda_{n-2}^{-1} y_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$$

Alors il existe une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de \mathbb{R}^n dans laquelle les éléments de \mathfrak{h}_p sont de la forme $\chi(x)$ et les éléments de \mathfrak{h}'_p sont de la forme $\xi(\lambda, y)$.

De plus, si tous les coefficients λ_i valent 1, alors $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle^z}$ est conjugu   à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$; sinon on a $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle^z} = SL_n(\mathbb{R})$.

Algèbre de Lie de $\overline{\Gamma_p^z}$ Soient $p \in \partial\Omega$ un point cuspidal et $\Gamma_p < \Gamma$ le groupe parabolique maximal associé, on note $W = \overline{\Gamma_p^z}$. Afin de démontrer la proposition 2.6, on va montrer que l'algèbre de Lie de W , notée \mathfrak{h}_p , est l'ensemble

$$\mathfrak{h}_p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t_u & 0 \\ & \ddots & u \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ où } u \in \mathbb{R}^{n-2} \right\} \quad (2.1)$$

Ce resultat est expliqué au début de la preuve du théorème 9.1 de [CLT15a]. L'hypothèse de récurrence qu'ils démontrent est la suivante : (pour $n = \dim W = \dim \partial\overline{\Omega}$)

Il existe des coordonnées paraboliques pour Ω centrées en p telles que $\partial\overline{\Omega}$ est le graphe de la fonction convexe $f : U \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{\langle u, u \rangle}{2}$, où $U = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, et les éléments de W sont définis sur toute la carte affine et de la forme $S_u : \lambda e_1 + x \mapsto x + u + \langle u, x \rangle e_1 + \frac{\langle u, u \rangle}{2} e_1 + \lambda e_1$ paramétrés par $u \in U$. Chaque S_u est alors la restriction d'une unique transformation projective.

Pour montrer que les éléments de \mathfrak{h}_p sont de la forme (2.1) avec nos notations, il faut remplacer n par $n - 2$ dans cette hypothèse de récurrence.

On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n telle que $A = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v_n = 1\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ soit une bonne carte affine pour Ω .

Les  l ments S_u sont paramétrés par $u \in U = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) \simeq \mathbb{R}^{n-2}$ et sont définis sur $\mathbb{R}e_1 \oplus U$ par

$$\forall v = \lambda e_1 + x \in \mathbb{R}e_1 \oplus U, \quad S_u(v) = x + u + \langle u, x \rangle e_1 + \frac{\langle u, u \rangle}{2} e_1 + \lambda e_1 \in \mathbb{R}e_1 \oplus U$$

Les S_u induisent des applications affines T_u sur la carte affine A

$$\forall \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \in A, \quad T_u \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_u(v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne en écriture matricielle (dans la base \mathcal{B}) :

$$[T_u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & t_u & \frac{\langle u, u \rangle}{2} \\ & I_{n-2} & u \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

On a ainsi

$$W = \overline{\Gamma}_p^z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & {}^t u & \frac{u^2}{2} \\ & I_{n-2} & u \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ où } u \in \mathbb{R}^{n-2} \right\}$$

En passant à l'algèbre de Lie, on obtient finalement la forme (2.1).

Démonstration de la proposition 2.6. Considérons deux points cuspidaux p et p' de Ω et deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ « associées à p et p' ». Cela signifie que l'on choisit d'une part $e_1 = e'_1$ et $e_n = e'_n$ tels que $p = \mathbb{R}e_1$, $p' = \mathbb{R}e_n$ et que l'on choisit d'autre part e_2, \dots, e_{n-1} appartenant à H l'hyperplan d'appui à Ω en p et e'_2, \dots, e'_{n-1} appartenant à H' l'hyperplan d'appui à Ω en p' (voir figure 2.1).

De cette façon, les éléments de \mathfrak{h}_p sont de la forme $\chi(u)$ dans \mathcal{B} et ceux de \mathfrak{h}'_p sont de la forme ${}^t\chi(v)$ dans \mathcal{B}' , pour $u, v \in \mathbb{R}^{n-2}$.

Soit B la matrice de passage de (e_2, \dots, e_{n-1}) à (e'_2, \dots, e'_{n-1}) . La décomposition de B en valeurs singulières s'écrit $B = U.D.V$, avec $U, V \in O(n-2)$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$.

On note

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & D & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & U & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & V & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & B & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Soit $\tilde{\mathcal{B}}$ la base de \mathbb{R}^n telle que la matrice \mathbf{U} soit la matrice de passage de \mathcal{B} à $\tilde{\mathcal{B}}$. Alors la matrice de passage de \mathcal{B}' à $\tilde{\mathcal{B}}$ est

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & {}^tV.D^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\chi(u)$ un élément de \mathfrak{h}_p , son écriture dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ est

$${}^t\mathbf{U} \cdot \begin{pmatrix} 0 & {}^t u & 0 \\ & 0 & u \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & {}^t u U & 0 \\ & 0 & {}^t U u \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \chi({}^t\mathbf{U}u).$$

Soit ${}^t\chi(v)$ un élément de \mathfrak{h}'_p , son écriture dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ est

$$\mathbf{W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ v & 0 & \\ 0 & {}^t v & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ D.Vv & 0 & \\ 0 & {}^t v {}^tV.D^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D} \cdot {}^t\chi(\mathbf{V}v) \cdot \mathbf{D}^{-1}.$$

Ainsi, dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$, les éléments de \mathfrak{h}_p sont de la forme $\chi(x)$ et les éléments de \mathfrak{h}'_p

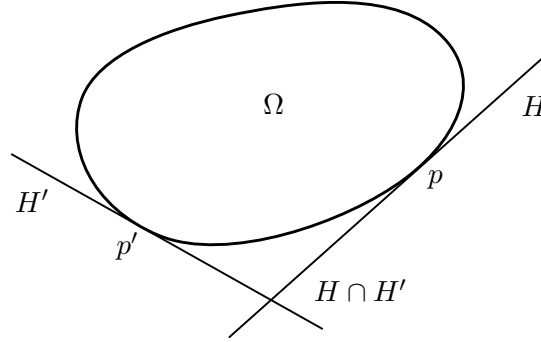


FIGURE 2.1

sont de la forme $\xi(\lambda, y)$, avec $x, y, \lambda \in \mathbb{R}^{n-2}$.

Les lemmes 2.7 et 2.8 suivants achèvent la preuve de cette proposition. \square

Lemme 2.7 *Avec les notations de la proposition 2.6, si tous les coefficients λ_i valent 1, alors $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle^z}$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration de la proposition 2.6. On va déterminer l'algèbre de Lie engendrée par \mathfrak{h}_p et $\mathfrak{h}_{p'}$. On se place dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$. On note $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ et, pour $1 \leq i \leq n-2$, on note $e_i = {}^t(0 \dots 1 \dots 0)$ le vecteur de \mathbb{R}^{n-2} ayant un 1 en i -ième position. On note également $\mathcal{A}_{n-2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille $n-2$.

Soient

$$\chi(v) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t v & 0 \\ & \ddots & v \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_p \quad \text{et} \quad {}^t \chi(w) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ w & \ddots & \\ 0 & {}^t w & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_{p'}$$

Alors leur commutateur est

$$[\chi(v), {}^t \chi(w)] = \begin{pmatrix} {}^t v w & & 0 \\ & v {}^t w - w {}^t v & \\ 0 & & -{}^t v w \end{pmatrix}$$

En sommant on peut obtenir toutes les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & A_0 & \\ 0 & & -\alpha \end{pmatrix}$ où

$\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_0 \in \mathcal{A}_{n-2}(\mathbb{R})$. En effet, ${}^t v w \in \mathbb{R}$ et toute matrice antisymétrique peut être obtenue comme somme de $v {}^t w - w {}^t v$ avec $v, w \in \mathbb{R}^{n-2}$. Plus précisément, on obtient tout élément de base $E_{i,j} - E_{j,i}$ de $A_0 \in \mathcal{A}_{n-2}(\mathbb{R})$ en choisissant $v = e_i$ et $w = e_j$ dans la différence $v {}^t w - w {}^t v$.

On peut ensuite calculer les commutateurs $[\chi(v), A]$ et $[{}^t\chi(w), A]$:

$$[\chi(v), A] = \begin{pmatrix} 0 & {}^tv(A_0 - \alpha I_{n-2}) & 0 \\ \vdots & 0 & -(A_0 - \alpha I_{n-2})v \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_p$$

$$[{}^t\chi(w), A] = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ (\alpha I_{n-2} - A_0)w & 0 & \vdots \\ 0 & {}^tw(A_0 + \alpha I_{n-2}) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_{p'}$$

Notons \mathfrak{g} la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & {}^tv & 0 \\ w & A_0 & v \\ 0 & {}^tw & -\alpha \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R} \\ v, w \in \mathbb{R}^{n-2} \\ A_0 \in \mathcal{A}_{n-2}(\mathbb{R}) \end{array} \right. \right\}$$

Les calculs de $[\chi(v), A]$ et $[{}^t\chi(w), A]$ ci-dessus montrent que l'algèbre de Lie $\langle \mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p'} \rangle$ est égale à \mathfrak{g} . En effet, $\langle \mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p'} \rangle \subseteq \mathfrak{g}$ car $\mathfrak{h}_p \subseteq \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}_{p'} \subseteq \mathfrak{g}$. Réciproquement, toute matrice de \mathfrak{g} peut être obtenue par sommes et commutateurs d'éléments de \mathfrak{h}_p et $\mathfrak{h}_{p'}$.

Dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$, on note $Q = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & -I_{n-2} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'une forme quadratique de signature $(1, n-1)$. Alors tout élément $X \in \langle \mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p'} \rangle$ vérifie la relation $Q.X.Q = -{}^tX$, donc $\langle \mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p'} \rangle \subseteq \mathfrak{so}(Q)$. De plus, $\dim(\langle \mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p'} \rangle) = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(\mathfrak{so}(Q))$. Ainsi $\langle \mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p'} \rangle = \mathfrak{so}(Q) \simeq \mathfrak{so}(1, n-1)$. \square

Lemme 2.8 Avec les notations de la proposition 2.6, si au moins un des coefficients λ_i est différent de 1, alors $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle}^Z = SL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration de la proposition 2.6. On va montrer que l'on peut obtenir une base complète de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ à l'aide de sommes et commutateurs d'éléments de \mathfrak{h}_p et $\mathfrak{h}_{p'}$. On note $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ et $H_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j}$. Dans ce qui suit, on fabrique progressivement la base $\{E_{i,j} \mid i \neq j\} \cup \{H_{1,j} \mid 2 \leq j \leq n\}$ de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

Quitte à permuter les éléments de la base $\tilde{\mathcal{B}}$, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 1$. Pour $1 \leq i \leq n-2$ on note $e_i = {}^t(0 \dots 1 \dots 0)$ le vecteur de \mathbb{R}^{n-2} ayant un 1 en i -ème position. On note $X = \chi(e_1) \in \mathfrak{h}_p$ et $Y = \xi(\lambda, e_1) \in \mathfrak{h}_{p'}$.

Le calcul permet alors d'obtenir les éléments $E_{1,n}, E_{n,1}, H_{1,n}$, puis $E_{1,2}, E_{2,1}, E_{n,2}, E_{2,n}, H_{1,2}$:

$$\mathbf{E}_{1,n} = \frac{\lambda_1}{3(\lambda_1^2 - 1)} [X, [X, [X, Y]]] \quad , \quad \mathbf{E}_{n,1} = \frac{\lambda_1}{3(\lambda_1^2 - 1)} [Y, [Y, [X, Y]]] \quad , \quad \mathbf{H}_{1,n} = [E_{1,n}, E_{n,1}].$$

puis

$$\mathbf{E}_{1,2} = \frac{-\lambda_1}{3(\lambda_1^2 - 1)} \left([X, [X, Y]] - \frac{\lambda_1^2 - 2}{\lambda_1} X \right) \quad , \quad \mathbf{E}_{2,n} = \frac{\lambda_1}{3(\lambda_1^2 - 1)} \left([X, [X, Y]] + \frac{2\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1} X \right)$$

$$\mathbf{E}_{2,1} = \frac{1}{3(\lambda_1^2 - 1)} \left([Y, [X, Y]] - \frac{\lambda_1^2 - 2}{\lambda_1} Y \right) \quad , \quad \mathbf{E}_{n,2} = \frac{-\lambda_1^2}{3(\lambda_1^2 - 1)} \left([Y, [X, Y]] - \frac{2\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1} Y \right)$$

En choisissant $X = \chi(e_{j-1})$ et $Y = \xi(\lambda, e_{j-1})$, on obtient ensuite les $E_{2,j}$ et $E_{j,2}$ pour tout $j \geq 3$:

$$\mathbf{E}_{2,j} = [E_{2,1}, X] \quad , \quad \mathbf{E}_{j,2} = [Y, E_{1,2}]$$

Enfin, on obtient les $E_{i,j}$ pour tous $i, j \neq 2$ tels que $i \neq j$, puis les $H_{1,k}$ pour tout $k \geq 3$:

$$\mathbf{E}_{i,j} = [E_{i,2}, E_{2,j}] \quad , \quad \mathbf{H}_{1,k} = [E_{1,k}, E_{k,1}]$$

Toutes ces matrices élémentaires obtenues forment une base de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\langle \mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p'} \rangle = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. \square

Pour alléger les notations, on note $G_{p,p'}$ l'adhérence de Zariski du groupe $\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle$, où $p, p' \in \partial\Omega$ sont deux points cuspidaux. On appelle *ellisph re* le bord d'un ellipsoïde. La démonstration du lemme 9.1 de [CLT15a] souligne l'existence, pour tout point cuspidal p , d'une famille d'ellipsoïdes tangents à Ω et H en p , où H est l'hyperplan d'appui de p .

Plus précisément, pour tout point cuspidal $p \in \partial\Omega$, il existe une famille $\mathfrak{Ell}_p = \{\mathcal{E}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ d'ellipsoïdes tangents à Ω et H en p . De plus, la famille d'ellisph res $\partial\mathcal{E}_t$ privées du point p est un feuilletage de $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \setminus H$ dont chaque feuille $\mathcal{E}_t \setminus \{p\}$ est invariante par $\overline{\Gamma_p}^z$.

Lemme 2.9 *Soient $p, p' \in \partial\Omega$ deux points cuspidaux distincts. On note $\mathfrak{Ell}_p = \{\mathcal{E}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ (respectivement $\mathfrak{Ell}_{p'} = \{\mathcal{E}'_s\}_{s \in \mathbb{R}}$) la famille d'ellipsoïdes tangents à Ω et H en p (respectivement tangents à Ω et H' en p'). L'adhérence de Zariski de $\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle$ est conjuguée à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe des réels t_0 et s_0 tels que $\mathcal{E}'_{s_0} = \mathcal{E}_{t_0}$.*

Démonstration. \implies Si $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle}^z$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$, alors $\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle$ préserve un ellipsoïde $\mathcal{E} = \mathbb{P}(q > 0)$, où q est une forme quadratique non dégénérée de signature $(1, n-1)$. En particulier, Γ_p et $\Gamma_{p'}$ préservent \mathcal{E} , d'où $\mathcal{E} \in \mathfrak{Ell}_p \cap \mathfrak{Ell}_{p'}$.

\impliedby Par hypothèse, il existe un ellipsoïde \mathcal{E}_0 appartenant aux deux familles $\{\mathcal{E}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ et $\{\mathcal{E}'_s\}_{s \in \mathbb{R}}$. Cet \mathcal{E}_0 est unique car l'ensemble $\{\partial\mathcal{E}_t \setminus \{p\}\}_{t \in \mathbb{R}}$ d'ellisph res  point es est un feuilletage de $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \setminus H$. De plus, Γ_p stabilise tous les $\partial\mathcal{E}_t$ et $\Gamma_{p'}$ stabilise tous les $\partial\mathcal{E}'_s$. Par unicité, \mathcal{E}_0 est donc préservé par $\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle$. Ainsi, $\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle$ préserve l'ellipsoïde \mathcal{E}_0 et $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle}^z$ est un sous-groupe de $SO(q)$, où q est une forme quadratique de signature $(1, n-1)$ telle que $\mathbb{P}(q > 0) = \mathcal{E}_0$. On en conclut que $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle}^z$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ par la proposition 2.6. \square

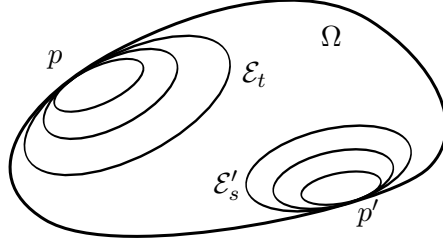


FIGURE 2.2

2.3 Sous-groupe engendré par tous les groupes paraboliques maximaux

On démontre le théorème principal de ce chapitre ; le théorème suivant est un point clé de sa démonstration.

Théorème 2.10 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ une variété projective strictement convexe de volume fini. Supposons que pour toute paire (p, p') de points cuspidaux distincts de $\partial\Omega$ le sous-groupe $\langle \overline{\Gamma_p}, \overline{\Gamma_{p'}} \rangle^z$ soit conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$. Alors il existe une forme quadratique q de signature $(1, n-1)$ telle que $\overline{\Gamma_p}^z < SO(q)$ pour tout point cuspidal p . Dans ce cas, tous les points cuspidaux appartiennent au bord $\partial\mathcal{E} = \mathbb{P}(q=0)$ de l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \mathbb{P}(q>0)$. De plus, $\overline{\Gamma}^z = SO(q)$ et $\Omega = \mathcal{E}$.*

Démonstration. Soient p et p' deux points cuspidaux. Par hypothèse, le sous-groupe $G_{p,p'}$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$. Donc il existe une forme quadratique q de signature $(1, n-1)$ telle que $G_{p,p'} = SO(q)$. Le lemme 2.9 garantit l'existence d'un ellipsoïde $\mathcal{E}_1 \in \mathfrak{Ell}_p \cap \mathfrak{Ell}_{p'}$ tel que $\mathcal{E}_1 = \mathbb{P}(q > 0)$. Soit $p'' \in \partial\Omega$ un troisième point cuspidal. On veut montrer que $\overline{\Gamma_{p''}}^z < SO(q)$ et $p'' \in \partial\mathcal{E}_1$.

Par hypothèse, $G_{p,p''}$ et $G_{p',p''}$ sont conjugués à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$. Ainsi (lemme 2.9) il existe un ellipsoïde \mathcal{E}_2 invariant par $G_{p,p''}$ et un ellipsoïde \mathcal{E}_3 invariant par $G_{p',p''}$ tels que

$$\mathcal{E}_2 \in \mathfrak{Ell}_p \cap \mathfrak{Ell}_{p''} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3 \in \mathfrak{Ell}_{p'} \cap \mathfrak{Ell}_{p''}$$

Alors trois configurations sont envisageables ; seule la première n'entraîne pas de contradiction :

- Si $p'' \in \partial\mathcal{E}_1$, alors \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_1 sont deux ellipsoïdes de \mathfrak{Ell}_p contenant p et p'' , donc $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$ (de même $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1$). Ainsi, $G_{p,p''} = SO(q)$ et $\overline{\Gamma_{p''}}^z < SO(q)$.
- Si $p'' \in \mathcal{E}_1$, alors $\mathcal{E}_2 \subsetneq \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_3 \subsetneq \mathcal{E}_1$. Dans ce cas, \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_3 sont de part et d'autre de H'' , l'hyperplan d'appui à Ω en p'' (figure 2.3). Ceci est impossible car p, p', p'' sont trois points sur le bord du convexe Ω .
- Si $p'' \notin \overline{\mathcal{E}_1}$, alors $\mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_2$, d'où $p' \in \mathcal{E}_2$. Dans ce cas, \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_3 sont de part et d'autre de H' , l'hyperplan d'appui à Ω en p' ; ce qui est à nouveau impossible.

Ainsi, les ellipsoïdes $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ ne sont qu'un seul et même ellipsoïde, noté \mathcal{E} , et tout point cuspidal appartient à $\partial\mathcal{E}$.

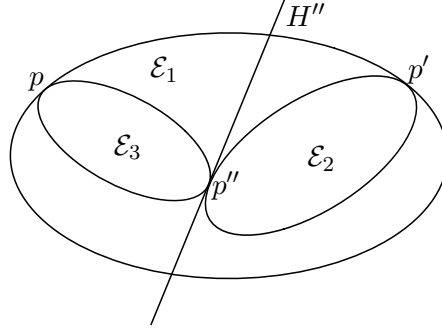


FIGURE 2.3 – Une configuration impossible

Pour achever la preuve, montrons que $\overline{\Gamma}^z = SO(q)$ et $\Omega = \mathcal{E}$. On vient de montrer l'existence d'une forme quadratique q de signature $(1, n - 1)$ telle que $\overline{\Gamma}_p^z < SO(q)$ pour tout point cuspidal p . Soient p et p' deux points cuspidaux, alors $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle}^z = SO(q)$ car, par hypothèse, $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle}^z$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$. Soit $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma\Gamma_p\gamma^{-1} = \Gamma_{\gamma p}$ et $\gamma\Gamma_{p'}\gamma^{-1} = \Gamma_{\gamma p'}$. Ainsi, $\gamma \langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle \gamma^{-1} = \langle \Gamma_{\gamma p}, \Gamma_{\gamma p'} \rangle$, d'où $\gamma SO(q)\gamma^{-1} = SO(q)$ en passant à l'adhérence de Zariski. Ceci signifie que γ appartient au normalisateur de $SO(q)$ dans $SL_n(\mathbb{R})$, qui est $SO(q)$ lui-même (lemme 2.11). On conclut que $\Gamma = SO(q)$ et que Ω est un ellipsoïde (lemme 2.3). \square

Lemme 2.11 *Soit q une forme quadratique non-dégénérée sur \mathbb{R}^n . Alors $SO(q)$ est son propre normalisateur dans $SL_n(\mathbb{R})$, i.e.*

$$\text{Norm}_{SL_n(\mathbb{R})}(SO(q)) = SO(q)$$

Pour la démonstration, on applique le lemme suivant :

Lemme 2.12 *Soit q une forme quadratique non-dégénérée sur \mathbb{R}^n . Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $SO(q)$ agit transitivement sur l'ensemble de niveau $q^{-1}(\{t\}) \subset \mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $q(x) = q(y) \neq 0$. On définit une isométrie $h : (\mathbb{R}x, q) \rightarrow (\mathbb{R}y, q)$ par $h(x) = y$. Par théorème de Witt, h se prolonge en une isométrie \tilde{h} de (\mathbb{R}^n, q) , i.e. $\tilde{h} \in O(q)$. Quitte à composer \tilde{h} (  gauche) par un élément de $O(q) \setminus SO(q)$ qui fixe y , on peut supposer $\tilde{h} \in SO(q)$. \square

Démonstration du lemme 2.11. L'inclusion $SO(q) \subseteq \text{Norm}_{SL_n(\mathbb{R})}(SO(q))$ est évidente, montrons l'inclusion réciproque.

Soit $g \in \text{Norm}_{SL_n(\mathbb{R})}(SO(q))$. Alors $SO(q \circ g) = gSO(q)g^{-1} = SO(q)$; on pose $q' = q \circ g$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $q'(x)q(x) \neq 0$ (x existe car sinon le polynôme $q'q$ est nul sur \mathbb{R}^n). Posons $\lambda = \frac{q'(x)}{q(x)}$ et $t = q(x)$. Le lemme 2.12 implique que le polynôme $q' - \lambda q$ est nul sur l'ensemble de niveau $q^{-1}(\{t\})$. Par homogénéité, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ on a $y \in q^{-1}(\{\alpha t\}) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}}y \in q^{-1}(\{t\})$, donc $q' - \lambda q$ est nul sur l'ouvert $q^{-1}(\mathbb{R}_+^*t)$. Par conséquent, $q' - \lambda q$ est le polynôme nul, i.e. $q' = \lambda q$.

Ainsi, dans les deux cas, on a $q \circ g = \lambda q$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Or le déterminant de g vaut 1, donc $\lambda = 1$. D'où, $q \circ g = q$, i.e. $g \in SO(q)$, ce qui achève la démonstration. \square

On peut à présent achever la preuve du théorème principal de ce chapitre :

Théorème 2.1 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ une variété projective strictement convexe de volume fini. Supposons que pour toute paire (p, p') de points cuspidaux de $\partial\Omega$ le sous-groupe $\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle$ ne soit pas Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$. Alors l'adhérence de Zariski du groupe Γ est conjuguée à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. D'après les lemmes 2.7 et 2.8, pour tous points cuspidaux p et p' , le sous-groupe $\overline{\langle \Gamma_p, \Gamma_{p'} \rangle}^z$ est conjugué à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$. Le théorème 2.10 permet de conclure. \square

La démonstration du corollaire 2.2 est immédiate.

Corollaire 2.2 *Soit $\Gamma \backslash \Omega$ une variété projective strictement convexe de volume fini. Alors Γ est Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$ ou bien l'adhérence de Zariski de Γ est conjuguée au groupe $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$ (i.e. Ω est un ellipsoïde).*

Chapitre 3

Fermeture des structures projectives strictement convexes de volume fini

Ce chapitre est consacré à l'espace des déformations des structures projectives strictement convexes de volume fini.

On s'intéresse précisément aux représentations fidèles et discrètes $\rho : \Gamma \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ d'un groupe Γ pour lesquelles il existe un ouvert Ω_ρ préservé par $\rho(\Gamma)$ tel que le quotient $\rho(\Gamma)\backslash\Omega_\rho$ est une variété projective strictement convexe de volume fini. On note $\beta_\Gamma \subset \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$ l'ensemble de ces représentations.

Le théorème principal obtenu est le suivant :

Théorème 3.1 *Soit Γ un groupe. L'ensemble β_Γ est une partie fermée de $\text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$.*

3.1 Variété des représentations

Fixons un groupe Γ . Lorsque β_Γ est non vide, cela implique en particulier que $\rho(\Gamma)$ est sans torsion, de type fini et ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent non trivial (propositions 3.2, 3.4 et 3.5).

L'ensemble β_Γ est invariant par conjugaison. Pour démontrer notre résultat principal (théorème 3.1), il s'agit de montrer que β_Γ est un sous-ensemble fermé de la variété des représentations $\text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$.

Notation Pour cela on se donne une suite de représentations $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \beta_\Gamma$ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dispose d'un ouvert strictement convexe $\Omega_k \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ qui est $\rho_k(\Gamma)$ -invariant et tel que le quotient $M_k = \rho_k(\Gamma)\backslash\Omega_k$ est une variété projective convexe de volume fini.

Pour alléger les notations, on notera $\Gamma_k = \rho_k(\Gamma)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\Gamma_\infty = \rho_\infty(\Gamma)$.

Le but est bien-sûr de montrer que la représentation ρ_∞ appartient à β_Γ .

3.1.1 Premiers résultats

Proposition 3.2 *Si β_Γ est non vide, alors Γ est un groupe sans torsion.*

Démonstration. Supposons que Γ ait de la torsion. Soit $\rho \in \beta_\Gamma$. Alors $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{R})$ avec de la torsion et le quotient $\rho(\Gamma)\backslash\Omega_\rho$ est une orbivariété avec un ou plusieurs points singuliers. Ceci contredit que ce quotient est une variété projective. \square

Si l'on remplace « variété » par « orbivariété » dans la définition de β_Γ , le groupe Γ peut avoir de la torsion, mais le théorème 3.1 reste vrai.

Théorème 3.3 (corollaire au théorème 3.1) *Soit Γ un groupe et soit $\beta_\Gamma^{\text{orb}}$ l'ensemble des représentations $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$ fidèles et discrètes telles qu'il existe un ouvert strictement convexe $\Omega_\rho \subset \mathbb{RP}^{n-1}$ préservé par $\rho(\Gamma)$ et sur lequel l'action de $\rho(\Gamma)$ est de covolume fini. Alors $\beta_\Gamma^{\text{orb}}$ est une partie fermée de $\text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$.*

Démonstration. Soit $\{\rho_k\}_k$ est une suite de β_Γ qui converge vers une représentation $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. D'après le lemme de Selberg, il existe un sous-groupe $\Gamma' < \Gamma$ d'indice fini et sans torsion. Les représentations $\rho_k|_{\Gamma'}$ appartiennent à β_Γ et convergent vers $\rho_\infty|_{\Gamma'}$ qui appartient aussi à β_Γ , d'après le théorème 3.1. Il existe ainsi un ouvert strictement convexe $\Omega_\infty \subset \mathbb{RP}^{n-1}$, qui est $\rho_\infty(\Gamma')$ -invariant et tel que $\rho_\infty(\Gamma')\backslash\Omega_\infty$ soit une variété projective strictement convexe de volume fini. Comme Γ' est d'indice fini dans Γ , on a l'égalité des ensembles limites $\Lambda_{\rho_\infty(\Gamma)} = \Lambda_{\rho_\infty(\Gamma')}$. Or $\Lambda_{\rho_\infty(\Gamma')} = \partial\Omega_\infty$, donc le convexe Ω_∞ est $\rho_\infty(\Gamma)$ -invariant et le quotient $\rho_\infty(\Gamma)\backslash\Omega_\infty$ est une orbivariété projective strictement convexe. Son volume est fini car on a la surjection $\rho_\infty(\Gamma')\backslash\Omega_\infty \rightarrow \rho_\infty(\Gamma)\backslash\Omega_\infty$ qui est une isométrie locale. \square

Proposition 3.4 *Si β_Γ est non vide, alors Γ est de présentation finie. Pour tout $\rho \in \beta_\Gamma$, la variété $M_\rho = \rho(\Gamma)\backslash\Omega_\rho$ possède un nombre fini de pointes.*

Démonstration. Soit $\rho \in \beta_\Gamma$. Alors la partie épaisse de M_ρ , notée M_ρ^ε , est une variété compacte (théorème 1.4). Si M_ρ^ε a du bord, elle a un nombre fini de composantes de bord, par compacité. Or, dans la décomposition fine-épaisse (paragraphe 1.4.1), chaque pointe correspond à une composante de bord de M_ρ^ε et chaque tube correspond à deux composantes de bord. Ainsi la variété M_ρ possède un nombre fini de pointes et de tubes. On note N_ρ la partie non cuspidale de M_ρ (paragraphe 1.4.1). C'est la réunion de la partie épaisse et des éventuels tubes de M_ρ . Comme il y a un nombre fini de tubes et que chaque tube est compact, la variété N_ρ est compacte. Ainsi le groupe fondamental $\pi_1(N_\rho)$ est de présentation finie, par compacité (voir, par exemple, [Hat02], corollaire A.12, p.529). Si M_ρ n'a pas de pointe, alors $M_\rho = N_\rho$ et on conclut. Sinon, on a tout

de même $\pi_1(M_\rho) = \pi_1(N_\rho)$ car N_ρ est un rétracte par déformation de M_ρ (chaque composante de bord de N_ρ provient d'une pointe de M_ρ). \square

Proposition 3.5 *Si β_Γ est non vide, alors Γ ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent non trivial.*

Démonstration. Soient $\rho \in \beta_\Gamma$ et N un sous-groupe distingué nilpotent non-trivial de Γ . Alors $\rho(N)$ est un sous-groupe distingué dans $\rho(\Gamma)$ et élémentaire. En effet, $\rho(N)$ est nilpotent donc contient un élément central non-trivial $\eta \in \rho(N)$. Comme Ω_ρ est strictement convexe, η fixe un ou deux points de $\partial\Omega$. Comme η est central, tout élément $\gamma \in N$ fixe ou échange ces points fixes. Ainsi il existe un sous-groupe N_0 d'indice 1 ou 2 dans $\rho(N)$ qui fixe un de ces points fixes x de η ; N_0 est donc élémentaire. Pour tout $\gamma \in \rho(N)$ non-trivial, il existe $k \geq 1$ tel que $\gamma^k \in N_0$ et donc $\gamma^k x = x$. Or γ n'est pas elliptique car $\rho(\Gamma)$ est sans torsion, donc γ est soit parabolique, soit hyperbolique. Alors γ et γ^k ont les mêmes points fixes, donc $\gamma x = x$ et ainsi $\rho(N)$ est élémentaire.

Or $\rho(N)$ est distingué, donc les groupes $\rho(N)$ et $\rho(\Gamma)$ ont même ensemble limite. En effet, $\Lambda_{\rho(N)}$ est inclus dans $\Lambda_{\rho(\Gamma)}$ et est $\rho(\Gamma)$ -invariant car, pour tout $\gamma \in \rho(\Gamma)$, on a $\gamma \Lambda_{\rho(N)} = \Lambda_{\gamma \rho(N) \gamma^{-1}} = \Lambda_{\rho(N)}$. Or $\Lambda_{\rho(\Gamma)}$ est le plus petit fermé $\rho(\Gamma)$ -invariant, donc $\Lambda_{\rho(N)} = \Lambda_{\rho(\Gamma)}$.

Un groupe étant élémentaire si et seulement si son ensemble limite est fini, on déduit de cela que $\rho(\Gamma)$ est aussi élémentaire. Ceci est en contradiction avec la finitude du volume du quotient $\rho(\Gamma) \backslash \Omega_\rho$ (voir faits page 14). \square

3.2 Représentation limite ρ_∞

Proposition 3.6 *Soient Γ un groupe et $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Alors la représentation limite ρ_∞ est fidèle, discrète et irréductible.*

3.2.1 Représentation limite fidèle et discrète

On commence par montrer que la représentation ρ_∞ est fidèle et discrète (proposition 3.8). On déduit cela du lemme suivant de Goldman et Millson.

Lemme 3.7 ([GM87], lemme 1.1, p.499) *Soit Γ un groupe sans torsion n'admettant pas de sous-groupe distingué nilpotent non trivial. Soit G un groupe de Lie linéaire. Alors l'ensemble des représentations fidèles et discrètes de Γ dans G est un fermé de $\text{Hom}(\Gamma, G)$.*

Proposition 3.8 *Avec les hypothèses de la proposition 3.6, la représentation ρ_∞ est fidèle et discrète.*

Démonstration. D'après la proposition 3.5, Γ n'admet pas de sous-groupe distingué nilpotent non trivial. On applique le lemme 3.7 avec $G = SL_n(\mathbb{R})$. \square

3.2.2 Représentation limite irréductible

On montre ensuite que la représentation limite ρ_∞ est irréductible (proposition 3.9). C'est un résultat déterminant pour la suite de notre raisonnement.

Définition Soit G un groupe. On dit qu'une représentation $\rho : G \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ est *irréductible* si $\{0\}$ et \mathbb{R}^n sont les seuls sous-espaces de \mathbb{R}^n laissés stables par $\rho(G)$.

On dit qu'une représentation $\rho : G \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ est *semisimple* si elle est somme directe de représentations irréductibles. On appelle alors *longueur* de ρ ce nombre de représentations irréductibles.

Proposition 3.9 *Avec les hypothèses de la proposition 3.6, la représentation ρ_∞ est irréductible.*

Plan de la preuve La démonstration de l'irréductibilité de ρ_∞ se fait en plusieurs étapes successives. On commence par se ramener à une représentation semisimple ρ_∞^{ss} (proposition 3.10), On note $H = \overline{\rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)}^z$ l'adhérence de Zariski de $\rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)$, H_0 la composante connexe de l'identité de H et G le groupe dérivé $[H_0, H_0]$.

On applique la proposition 3.11 au groupe semisimple G et à la représentation $\tau : G \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$. On obtient que la représentation τ est irréductible (lemme 3.16) en invoquant un argument de dimension cohomologique qui permet d'éliminer le cas d'égalité dans la proposition 3.11. On en déduit l'irréductibilité de ρ_∞^{ss} et donc celle de ρ_∞ .

La proposition suivante justifie l'existence d'une représentation semisimple ρ_∞^{ss} dans l'adhérence de la classe de conjugaison de ρ_∞ dans $SL_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.10 *En toute dimension $n \geq 1$ et pour toute suite de représentations $\rho_i : \Gamma \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une représentation ρ_∞ , il existe une sous-suite $\{\rho_{i_p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ et une suite $\{\tilde{\rho}_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ de conjugués de ρ_{i_p} dans $SL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une représentation semisimple $\tilde{\rho}_\infty$.*

De plus, si la représentation ρ_∞ n'est pas irréductible, alors $\tilde{\rho}_\infty$ ne l'est pas non plus.

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n = 1$, alors ρ_∞ est irréductible et il suffit de choisir $\tilde{\rho}_i = \rho_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\tilde{\rho}_\infty = \rho_\infty$.

Supposons que le résultat est vrai pour toute dimension $d \leq n-1$ et montrons le résultat au rang n . Soit donc une suite $\rho_i : \Gamma \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une représentation ρ_∞ . Si ρ_∞ est irréductible, il suffit de choisir $\tilde{\rho}_i = \rho_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\tilde{\rho}_\infty = \rho_\infty$. Sinon, soit V_1 un sous-espace stable pour ρ_∞ de dimension $1 \leq d \leq n-1$ tel que ρ_∞^1 , la restriction de ρ_∞ à V_1 , soit irréductible. Alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, la matrice $\rho_\infty(\gamma)$ s'écrit par blocs

$$\rho_\infty(\gamma) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xleftarrow{d} & \xleftarrow{n-d} \\ \xrightarrow{d} & \xrightarrow{n-d} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} \rho_\infty^1(\gamma) & & & \\ \hline & 0 & & c_\infty(\gamma) \\ \hline & & & \rho_\infty^2(\gamma) \end{array} \right) \end{array}$$

3.2. Représentation limite ρ_∞

Comme Γ est de type fini (proposition 3.4), on se donne une famille génératrice $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$. On choisit de plus une métrique $d_{SL_n(\mathbb{R})}$ sur $SL_n(\mathbb{R})$. On va montrer que, quitte à conjuguer, la suite des ρ_i converge vers une représentation ρ_∞^\sharp , où

$$\rho_\infty^\sharp(\gamma) = \begin{pmatrix} \rho_\infty^1(\gamma) & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \rho_\infty^2(\gamma) \end{pmatrix} \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma$$

Pour tout $p \geq 1$, il existe $t_p > 0$ tel que, pour tout générateur γ , on a

$$d_{SL_n(\mathbb{R})}(\rho_\infty^\sharp(\gamma), g_{t_p} \rho_\infty(\gamma) g_{t_p}^{-1}) < \frac{1}{p}$$

avec

$$g_{t_p} = \begin{pmatrix} t_p I_d & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & I_{n-d} \end{pmatrix} (t_p)^{-\frac{d}{n}} \in SL_n(\mathbb{R})$$

Par ailleurs, ρ_k converge vers ρ_∞ , donc il existe un rang i_p , tel que, pour tout $i \geq i_p$ et pour tout générateur γ de Γ , on a

$$d_{SL_n(\mathbb{R})}(g_{t_p} \rho_\infty(\gamma) g_{t_p}^{-1}, g_{t_p} \rho_i(\gamma) g_{t_p}^{-1}) < \frac{1}{p}$$

En posant $\rho_p^\sharp = g_{t_p} \rho_{i_p} g_{t_p}^{-1}$ pour tout p , on obtient que $\rho_p^\sharp \rightarrow \rho_\infty^\sharp$.

Si la sous-représentation ρ_∞^2 est irréductible, alors ρ_∞^\sharp est semisimple et on choisit $\tilde{\rho}_i = \rho_i^\sharp$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\tilde{\rho}_\infty = \rho_\infty^\sharp$. Sinon, on applique l'hypothèse de récurrence à la suite constante égale à $\rho_\infty^2 : \Gamma \rightarrow SL_{n-d}(\mathbb{R})$, i.e. il existe une suite de représentations $\tilde{\rho}_i^2 : \Gamma \rightarrow SL_{n-d}(\mathbb{R})$ conjuguées à ρ_∞^2 dans $SL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une représentation semisimple $\tilde{\rho}_\infty^2$. On note $\tilde{\rho}_i^2 = k_i \rho_\infty^2 k_i^{-1}$ ces conjugués, avec $k_i \in SL_{n-d}(\mathbb{R})$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; on note également, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$h_i = \begin{pmatrix} I_d & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & k_i \end{pmatrix} \in SL_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}_\infty = \begin{pmatrix} \rho_\infty^1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \tilde{\rho}_\infty^2 \end{pmatrix}$$

Alors la suite des conjugués $\tilde{\rho}_p = (h_p g_p) \rho_{i_p} (h_p g_p)^{-1}$ converge vers $\tilde{\rho}_\infty$ qui est semisimple. De plus, cette construction implique que $\tilde{\rho}_\infty$ n'est pas irréductible dès lors que ρ_∞ n'est pas irréductible. \square

Définition On dit que $g \in GL_n(\mathbb{R})$ est *positivement semiproximal* si son rayon spectral $\lambda_1(g)$ est valeur propre de g .

Une représentation ρ d'un groupe G dans $GL_n(\mathbb{R})$ est dite *positivement Γ -semiproximale*, avec Γ un sous-groupe de G , si tout $\gamma \in \Gamma$ a une image $\rho(\gamma)$ qui est positivement semiproximale.

Définition ([Ser71], 1.2 et 1.8) Soient G un groupe de Lie réel et Δ un sous-groupe discret de G . On appelle *dimension cohomologique* de Δ et on note $\text{cd}(\Delta)$ la borne supérieure des entiers q tels que $H^q(\Delta, M) \neq 0$ pour au moins un Δ -module M .

On appelle *dimension cohomologique virtuelle* de Δ et on note $\text{vcd}(\Delta)$ la borne inférieure des $\text{cd}(\Delta')$ parmi les sous-groupes $\Delta' < \Delta$ d'indice fini.

Remarque ([Ser71], p.99) – Soit Δ un groupe discret comme ci-dessus.

- i) On a $\text{vcd}(\Delta) = 0$ si et seulement si Δ est fini.
- ii) Si Δ' est un sous-groupe de Δ , on a $\text{vcd}(\Delta') \leq \text{vcd}(\Delta)$ et il y a égalité si l'indice $[\Delta' : \Delta]$ est fini.
- iii) Si Δ est sans torsion, on a $\text{vcd}(\Delta) = \text{cd}(\Delta)$. Par contre, si Δ a de la torsion, on a $\text{cd}(\Delta) = \infty$, alors que $\text{vcd}(\Delta)$ peut être fini.

Proposition 3.11 ([Ben05], proposition 6.4, p.28) *Soient G un groupe semisimple connexe et Δ un sous-groupe discret, de type fini et Zariski dense de G . Soient (V, ρ) une représentation réelle de G de noyau fini et t la longueur de V . On décompose (V, ρ) en une somme directe de représentations irréductibles : $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_t$, $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_t$. On suppose que ρ est positivement Δ -semiproximale.*

Alors on a l'inégalité $\text{vcd}(\Delta) \leq \dim V - t$.

Le cas d'égalité se produit si et seulement si Δ préserve un produit $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_t$ d'ouverts proprement convexes Ω_i de $\mathbb{P}(V_i)$ et le quotient $\Delta \backslash (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_t)$ est compact.

L'objectif est d'appliquer cette proposition 3.11 au groupe $G = [H_0, H_0]$, où $H = \overline{\rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)^Z}$, à Δ un sous-groupe bien choisi de $\rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)$ (lemme 3.13), ainsi qu'à la représentation $\tau : G \hookrightarrow SL_n(\mathbb{R})$

Lemme 3.12 *Avec les notations précédentes, le groupe G contient un sous-groupe $P \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$.*

Démonstration. Le groupe H est réductif car la représentation ρ_∞^{ss} est semisimple. On peut donc décomposer H_0 en un presque produit $H_0 = GZ$, où G est le sous-groupe semisimple défini ci-dessus et Z est le centre de H_0 .

Choisissons Π un sous-groupe cuspidal de Γ (voir définition en 3.4.1) et notons $P = \rho_\infty^{\text{ss}}(\Pi)$. Pour tout $\gamma \in \Pi$, l'élément $\rho_\infty^{\text{ss}}(\gamma)$ est unipotent (i.e. $(\rho_\infty^{\text{ss}}(\gamma) - \text{id})^n = 0$) car, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k^{\text{ss}}(\gamma)$ est unipotent et cette propriété passe à la limite. Pour montrer que P est un sous-groupe de G , il suffit de montrer que $U = \overline{\rho_\infty^{\text{ss}}(\langle \gamma \rangle)^Z}$ est un sous-groupe de G pour tout $\gamma \in \Pi$.

U est un sous-groupe unipotent abélien connexe de H . On note pr_Z la projection

$$\text{pr}_Z : U \rightarrow H_0/G \simeq Z/(Z \cap G)$$

Alors $\text{pr}_Z(U)$ est un sous-groupe unipotent et distingué de Z car $Z/(Z \cap G)$ est abélien. Il est donc trivial car le radical unipotent de Z est trivial (car H est réductif et donc son centre aussi). On a montré que $U < G$. \square

Lemme 3.13 *Avec les notations précédentes, il existe un sous-groupe discret Δ de type fini et Zariski dense de G tel que*

$$\mathbb{Z}^{n-2} < \Delta < G \cap \rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)$$

Démonstration. Le groupe $G \cap \rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)$ est discret donc dénombrable. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note B_i la boule ouverte de $M_n(\mathbb{R})$ centrée en 0 et de rayon i . On définit alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, les fermés de Zariski

$$F_i = \overline{B_i \cap G \cap \rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)}^Z < G$$

Les F_i forment une suite croissante (pour l'inclusion) de fermés de $SL_n(\mathbb{R})$ pour la topologie de Zariski. Or, $SL_n(\mathbb{R})$ est un espace topologique noetherien pour cette topologie, donc la suite des F_i est stationnaire, i.e. il existe un rang i_0 tel que, pour tout $i \geq i_0$, on ait $F_i = F_{i_0}$. En particulier, tout élément $g \in G \cap \rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)$ appartient à F_{i_0} , donc $G \cap \rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma) \subseteq F_{i_0}$. Mais $\overline{G \cap \rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)}^Z = G$ et $F_{i_0} < G$, donc $F_{i_0} = G$. On note Δ le sous-groupe

$$\Delta = \langle B_{i_0} \cap G \cap \rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma), P \rangle$$

où $P \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$ est le sous-groupe du lemme précédent. On vient de montrer que Δ est Zariski dense dans G . De plus, Δ contient $\rho_\infty^{\text{ss}}(\Pi) \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$ et Δ est discret et de type fini par construction, donc il satisfait aux conditions de l'énoncé. \square

Lemme 3.14 *Avec les notations précédentes, la représentation $\tau : G \hookrightarrow SL_n(\mathbb{R})$ est positivement Δ -semiproximale.*

Démonstration. Pour tout k , le groupe $\rho_k^{\text{ss}}(\Gamma)$ préserve le cône ouvert proprement convexe $\mathcal{C}(\Omega_k)$ de \mathbb{R}^n . D'après le lemme 3.15 ci-dessous, tous les éléments de $\rho_k^{\text{ss}}(\Gamma)$ sont positivement semiproximaux (pour tout k). Par passage à la limite, il en est de même des éléments de $\rho_\infty^{\text{ss}}(\Gamma)$ et donc des éléments de Δ , car être positivement semiproximal est une condition fermée. \square

Lemme 3.15 ([Ben05], lemme 3.2, p.11) *Soit Γ un sous-semigroupe de $GL(V)$ qui préserve un cône ouvert proprement convexe C de V . Alors tout élément de Γ est positivement semiproximal.*

Lemme 3.16 *Avec les notations précédentes, la représentation $\tau : G \hookrightarrow SL_n(\mathbb{R})$ est irréductible.*

Démonstration. On peut appliquer la proposition 3.11 de Benoist à G , Δ et τ . On en déduit l'inégalité $\text{vcd}(\Delta) \leq n-t$. Par construction, Δ contient un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^{n-2} , donc $\text{vcd}(\Delta) \geq n-2$ et ainsi $1 \leq t \leq 2$. Si $t = 2$, on est dans le cas d'égalité de la proposition 3.11. Ce qui est impossible car le revêtement $\mathbb{Z}^{n-2} \backslash \Delta$ est infini. En effet, $\overline{\mathbb{Z}^{n-2}}^Z = \mathbb{R}^{n-2}$ et $\overline{\Delta}^Z = G$ est semisimple. Finalement $t = 1$ et τ est irréductible. \square

L'irréductibilité de $\tau : G \hookrightarrow SL_n(\mathbb{R})$ entraîne l'irréductibilité du groupe G . Ainsi, \mathbb{R}^n est un G -module simple et donc aussi un Δ -module simple. On en déduit l'irréductibilité de ρ_∞^{ss} , ce qui démontre le théorème.

3.3 Existence d'un convexe limite

On montre ici qu'il existe un ouvert projectif proprement convexe laissé invariant par le groupe $\rho_\infty(\Gamma)$.

Théorème 3.17 *Soient Γ un groupe et $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Il existe un ouvert proprement convexe (non vide) de \mathbb{RP}^{n-1} , noté Ω_∞ , qui est préservé par le groupe $\Gamma_\infty = \rho_\infty(\Gamma)$.*

On montrera dans la partie 3.5 que le quotient $\Gamma_\infty \backslash \Omega_\infty$ est de volume fini, puis dans la partie 3.6 que Ω_∞ est strictement convexe.

3.3.1 Distance de Hausdorff

Définition (cf. figure 3.1) Soient (E, d) un espace métrique et $X, Y \subset E$ des parties non vides de E . Leur *distance de Hausdorff*, notée d_H , est définie par

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y) ; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\}$$

De façon équivalente,

$$d_H(X, Y) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid X \subseteq Y_\varepsilon, Y \subseteq X_\varepsilon \}$$

avec

$$X_\varepsilon := \bigcup_{x \in X} \{z \in E \mid d(z, x) \leq \varepsilon\} = \{z \in E \mid d(z, X) \leq \varepsilon\}$$

Remarque – En général, $d_H(X, Y) = \varepsilon$ n'implique pas que $X \subseteq Y_\varepsilon$ et $Y \subseteq X_\varepsilon$. Un contre-exemple classique est $E = \mathbb{R}$, $d = |\cdot|$, $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $Y = \{\frac{-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

La proposition suivante est classique.

Proposition 3.18 *On note $F(E)$ l'ensemble des compacts non vides de E . Alors*

- i) d_H définit une métrique sur $F(E)$;*
- ii) si (E, d) est complet, alors $(F(E), d_H)$ est complet ;*
- iii) si (E, d) est compact, alors $(F(E), d_H)$ est compact ;*
- iv) la topologie de $F(E)$ ne dépend que de celle de E (et pas de la métrique d).*

3.3.2 Parties convexes de la sphère

Distance sur \mathbb{S}^{n-1} : Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit-scalaire sur \mathbb{R}^n . On note \mathbb{S}^{n-1} l'ensemble des demi-droites de \mathbb{R}^n passant par l'origine. On peut plonger \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R}^n en

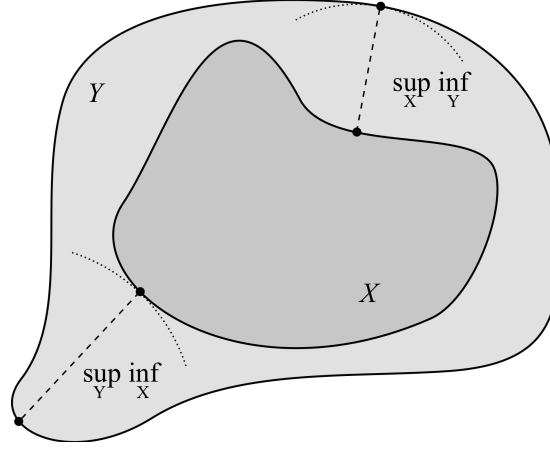


FIGURE 3.1 – Distance de Hausdorff

l'identifiant naturellement à l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^n de norme 1. On définit, pour tous $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$d_S(x, y) = \text{Arccos}(\langle x, y \rangle)$$

d_S définit alors une distance sur la sphère \mathbb{S}^{n-1} .

On note $\pi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ le revêtement à deux feuillets de \mathbb{RP}^{n-1} . Pour tout k , l'ouvert Ω_k est proprement convexe, donc l'ouvert $\pi^{-1}(\Omega_k)$ a deux composantes connexes, chacune étant difféomorphe à Ω_k , dont l'adhérence est contenue dans un hémisphère de \mathbb{S}^{n-1} . Pour tout k , on choisit une de ces deux composantes et on la note également $\Omega_k \subset \mathbb{S}^{n-1}$. Alors, pour tout k , l'adhérence $\overline{\Omega_k}$ est un compact convexe de \mathbb{S}^{n-1} .

On munit l'ensemble $F(\mathbb{S}^{n-1})$ des compacts non vides de (\mathbb{S}^{n-1}, d_S) de la métrique de Hausdorff d_H . Alors $(F(\mathbb{S}^{n-1}), d_H)$ est compact et l'ensemble des convexes fermés de \mathbb{S}^{n-1} est un sous-espace fermé de $F(\mathbb{S}^{n-1})$. Quitte à extraire, on peut donc supposer que la suite des $\overline{\Omega_k}$ converge vers un convexe fermé non vide K_∞ .

3.3.3 Convexe limite Ω_∞

Lemme 3.19 Soient Γ un groupe et $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Soit $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts proprement convexes de \mathbb{RP}^{n-1} tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Ω_k est préservé par $\rho_k(\Gamma)$ et tels que la suite des $\overline{\Omega_k}$ converge vers un convexe fermé non vide K_∞ . Alors K_∞ est Γ_∞ -invariant.

Démonstration. ([CG93], lemme 1, p.659) Soient $\kappa \in K_\infty$ et $\gamma \in \Gamma$ quelconques, montrons que $\rho_\infty(\gamma)\kappa \in K_\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(\rho_k(\gamma))_k$ converge uniformément vers $\rho_\infty(\gamma)$ sur \mathbb{S}^{n-1} , donc il existe un rang k_1 tel que, pour tout $k \geq k_1$, $d_S(\rho_\infty(\gamma)x, \rho_k(\gamma)x) < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

En fait, la suite $(\rho_k(\gamma))_k$ est uniformément C -lipschitzienne à partir d'un certain rang

k_2 . C'est-à-dire que, pour tous $k \geq k_2$ et $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$, $d_S(\rho_k(\gamma)x, \rho_k(\gamma)y) \leq C d_S(x, y)$. Ajoutons que K_∞ est la limite de Hausdorff des $\overline{\Omega_k}$. Donc il existe une suite $x_k \in \overline{\Omega_k}$ qui converge vers κ . Autrement dit, il existe un rang k_3 tel que, pour tout $k \geq k_3$, $d_S(\kappa, x_k) < \frac{\varepsilon}{C}$.

Ainsi, pour tout $k \geq \max(k_1, k_2, k_3)$, on a

$$\begin{aligned} d_S(\rho_\infty(\gamma)\kappa, \rho_k(\gamma)x_k) &\leq d_S(\rho_\infty(\gamma)\kappa, \rho_k(\gamma)\kappa) + d_S(\rho_k(\gamma)\kappa, \rho_k(\gamma)x_k) \\ &\leq \varepsilon + C \frac{\varepsilon}{C} = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi $\rho_\infty(\gamma)\kappa$ est la limite des $\rho_k(\gamma)x_k \in \overline{\Omega_k}$, donc $\rho_\infty(\gamma)\kappa \in K_\infty$. \square

Lemme 3.20 *Soient Γ un groupe et $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Soit $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts proprement convexes de \mathbb{RP}^{n-1} tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Ω_k est préservé par $\rho_k(\Gamma)$ et tels que la suite des fermés $\overline{\Omega_k}$ converge vers un convexe fermé non vide K_∞ . Alors K_∞ est d'intérieur non vide et proprement convexe.*

Démonstration. Commençons par montrer que K_∞ est d'intérieur non vide. On a vu que K_∞ est préservé par Γ_∞ . Donc le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\mathcal{C}(K_\infty))$ engendré par le cône de K_∞ est un sous-espace (de dimension au moins 1) qui est également préservé par Γ_∞ . Or ρ_∞ est irréductible (proposition 3.6), donc $\text{Vect}(\mathcal{C}(K_\infty))$ est l'espace \mathbb{R}^n tout entier. En particulier, comme K_∞ est convexe, K_∞ est d'intérieur non vide.

Supposons que K_∞ ne soit pas proprement convexe. Alors K_∞ est tout de même inclus dans un hémisphère fermé de \mathbb{S}^{n-1} , noté \mathfrak{dS} , car c'est une limite de fermés $\overline{\Omega_k}$ proprement convexes. De plus, K_∞ contient deux points antipodaux x et $-x$, et donc $\mathcal{C}(K_\infty)$ contient la droite vectorielle $D = \mathbb{R}x$. La présence de points antipodaux implique que le cône dual $\mathcal{C}^*(K_\infty)$ est vide car $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ pour tout $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$. Étudions plutôt le cône dual fermé

$$\overline{\mathcal{C}^*(K_\infty)} = \{\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \forall v \in K_\infty, \varphi(v) \geq 0\}$$

Pour tout $\varphi \in \overline{\mathcal{C}^*(K_\infty)}$, on a $\varphi(x) = \varphi(-x) = 0$. Ceci montre que $\overline{\mathcal{C}^*(K_\infty)}$ est inclus dans le sous-espace D^\perp de $(\mathbb{R}^n)^*$, où

$$D^\perp = \{\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \forall x \in D, \varphi(x) = 0\}$$

Ainsi

$$\dim \text{Vect}(\overline{\mathcal{C}^*(K_\infty)}) \leq \dim D^\perp = n - 1$$

et $\dim \text{Vect}(\overline{\mathcal{C}^*(K_\infty)}) \geq 1$ car $\overline{\mathcal{C}^*(K_\infty)} \supseteq \overline{\mathcal{C}^*(\mathfrak{dS})} \neq \emptyset$. De plus, le cône dual $\overline{\mathcal{C}^*(K_\infty)}$ est préservé par le groupe transposé ${}^t\Gamma_\infty$, donc le sous-espace $\text{Vect}(\overline{\mathcal{C}^*(K_\infty)})$ l'est aussi. Or la représentation transposée ${}^t\rho_\infty$ est irréductible car ρ_∞ est irréductible. Contradiction. \square

Fin de la démonstration du théorème 3.17. On définit Ω_∞ comme l'intérieur de K_∞ .

D'après les lemmes 3.19 et 3.20, c'est un ouvert proprement convexe non vide qui est préservé par Γ_∞ , ce qui démontre le théorème 3.17.

Dans toute la suite, on notera M_∞ le quotient $\Gamma_\infty \backslash \Omega_\infty$. □

3.4 Pointes de la variété limite

On montre dans cette partie que les pointes de M_∞ sont hyperboliques.

Proposition 3.21 *Soit $n \geq 4$ et soient Γ un groupe et $\Pi < \Gamma$ un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^{n-2} . Soit $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Alors le groupe $\rho_\infty(\Pi)$ est conjugué dans $SL_n(\mathbb{R})$ à un sous-groupe de $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.*

3.4.1 Sous-groupes cuspidaux

Soient $\rho \in \beta_\Gamma$ et $M_\rho = \rho(\Gamma) \backslash \Omega_\rho$ la variété projective strictement convexe de volume fini associée. Si M_ρ n'est pas compacte, alors elle possède un nombre fini de pointes (proposition 3.4). On a vu dans le paragraphe 1.4.3 que les pointes de M_ρ sont de la forme $P \backslash \mathcal{H}$, où \mathcal{H} est une horoboule de Ω_ρ basée en un point parabolique $p \in \partial\Omega_\rho$ et $P < \rho(\Gamma)$ un sous-groupe parabolique maximal.

Comme les représentations $\rho \in \beta_\Gamma$ sont fidèles, la topologie des variétés M_ρ ne dépend que du groupe Γ .

Définition On appelle *groupe cuspidal* un sous-groupe $\Pi < \Gamma$ tel que, pour toute $\rho \in \beta_\Gamma$, $\rho(\Pi)$ soit un sous-groupe parabolique maximal de $\rho(\Gamma)$ correspondant à une pointe de M_ρ .

De façon équivalente, lorsque $n \geq 4$, un groupe cuspidal est un sous-groupe $\Pi < \Gamma$ isomorphe à \mathbb{Z}^{n-2} et maximal pour cette propriété.

Notation Pour un groupe Γ fixé, on note $\mathcal{F}(\Gamma)$ l'ensemble des groupes cuspidaux de Γ .

On note $r = r(\Gamma)$ le cardinal fini de l'ensemble $\mathcal{F}(\Gamma)/\Gamma$. Lorsque $n \geq 4$, r est aussi égal au nombre de pointes que possèdent les variétés M_ρ , pour $\rho \in \beta_\Gamma$.

À chaque pointe \mathcal{P}_i ($1 \leq i \leq r$) de M_ρ correspond (à conjugaison près) un unique groupe cuspidal noté $\Pi_i \in \mathcal{F}(\Gamma)$. En choisissant de plus une horoboule \mathcal{H}_i incluse dans $\Omega_\varepsilon(\rho(\Pi_i))$, on peut écrire une horopointe associée à \mathcal{P}_i sous la forme $\rho(\Pi_i) \backslash \mathcal{H}_i$.

Dans toute la suite, on fixe une famille finie de groupes cuspidaux $\{\Pi_i\}_{1 \leq i \leq r}$ de Γ , de sorte que chaque Π_i soit un représentant d'une classe de conjugaison de $\mathcal{F}(\Gamma)$.

3.4.2 Pointes hyperboliques

On note $\sigma \in \text{Hom}(\mathbb{R}^{n-2}, SL_n(\mathbb{R}))$ la représentation définie par

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^{n-2} &\longrightarrow SL_n(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & {}^t u & \frac{|u|^2}{2} \\ & I_{n-2} & u \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{où } |u|^2 = {}^t u u) \end{aligned}$$

Soit Π un sous-groupe cuspidal de Γ (voir paragraphe 3.4.1). Pour tout k , le sous-groupe $\rho_k(\Pi)$ de Γ_k est un groupe parabolique maximal associé à une pointe de la variété $M_k = \Gamma_k \backslash \Omega_k$.

La démonstration du lemme 9.1 de [CLT15a] décrit explicitement les éléments de $\rho_k(\Pi)$. Elle nous dit que, dans une base adaptée, les éléments de $\rho_k(\Pi)$ sont de la forme $\sigma(u)$, pour $u \in \mathbb{Z}^{n-2}$. Dans la suite on identifie Π à \mathbb{Z}^{n-2} .

Fixons une base de \mathbb{R}^n . Pour tout $u \in \Pi \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$, les éléments $\rho_k(u)$ sont des conjugués $\mathbf{A}_k \sigma(u) \mathbf{A}_k^{-1}$ de $\sigma(u)$ par une matrice de changement de base \mathbf{A}_k . On peut décomposer \mathbf{A}_k en un produit $\mathbf{A}_k = O_k T_k$, où O_k est orthogonale et T_k triangulaire par blocs. Par compacité, on peut supposer que les O_k convergent ; comme ρ_k converge, on peut supposer que $\rho_k(u) = T_k \sigma(u) T_k^{-1}$, quitte à conjuguer par O_k^{-1} . De plus, quitte à multiplier par un multiple de l'identité, on peut « normaliser » les matrices T_k . Pour tout k , les matrices T_k triangulaires par blocs sont alors notées

$$T_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & {}^t w_k & \lambda_k \\ & A_k & v_k \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, le produit $\rho_k(u) = T_k \sigma(u) T_k^{-1}$ s'écrit

$$\rho_k(u) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_k {}^t u A_k^{-1} & {}^t (w_k - \alpha_k A_k^{-1} v_k) u + \alpha_k \frac{|u|^2}{2} \\ & I_{n-2} & A_k u \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Plusieurs simplifications sont possibles ; pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- on peut supposer $\lambda_k = 0$ car $T_k \sigma(u) T_k^{-1}$ est indépendant de λ_k ;
- on peut supposer $v_k = 0$ quitte à remplacer w_k par $w_k - \alpha_k A_k^{-1} v_k$.

On obtient alors

$$\rho_k(u) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_k {}^t u A_k^{-1} & {}^t w_k u + \alpha_k \frac{|u|^2}{2} \\ & I_{n-2} & A_k u \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Or, pour tout u , $\rho_k(u)$ converge vers $\rho_\infty(u)$. On a donc

$$\rho_\infty(u) = \begin{pmatrix} 1 & {}^t u A_0 & {}^t u w_\infty + \alpha_\infty \frac{|u|^2}{2} \\ & I_{n-2} & A_\infty u \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où $A_0, A_\infty, \alpha_\infty, w_\infty$ sont les limites respectives de $\alpha_k A_k^{-1}, A_k, \alpha_k, w_k$.
En particulier, on a $A_\infty A_0 = A_0 A_\infty = \alpha_\infty I_{n-2}$.

Remarque – Le terme ${}^t w_k u - \alpha_k \frac{|u|^2}{2}$ de $\rho_k(u)$ est un « polynôme en u », notons-le $P_k(u)$. Ce terme converge pour tout u , en particulier $P_k(u) + P_k(-u) = \alpha_k |u|^2$ converge pour tout u . On en déduit que α_k converge (vers α_∞) et donc que w_k converge (vers w_∞).

Lemme 3.22 *Avec ces notations, la limite α_∞ de la suite α_k est non nulle.*

Démonstration. Supposons que $\alpha_\infty = 0$, on va aboutir à une contradiction en invoquant le fait que Ω_∞ est proprement convexe (lemme 3.20). On se place dans la carte affine

$$\mathbb{A} = \{[x] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \mid x_n \neq 0\} \simeq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 1\}$$

Soit $x = \begin{pmatrix} a \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ un point de $\mathbb{A} \cap \Omega_\infty$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{n-2}$) et \mathcal{W}_x l'orbite de x sous

l'action de $\rho_\infty(\mathbb{Z}^{n-2})$. Les $\rho_\infty(u)$ sont alors des translations et les éléments de \mathcal{W}_x sont de la forme

$$\rho_\infty(u) \begin{pmatrix} a \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + {}^t(A_0 y + w_\infty)u \\ y + A_\infty u \\ 1 \end{pmatrix}$$

De plus, l'enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{W}_x) \subset \mathbb{A} \cap \Omega_\infty$ est égale à l'orbite $\rho_\infty(\mathbb{R}^{n-2})x$ car l'application ψ_x définie par

$$\begin{aligned} \psi_x : \mathbb{R}^{n-2} &\longrightarrow \mathbb{A} \simeq \mathbb{R}^{n-1} \\ u &\longmapsto \begin{pmatrix} a + {}^t(A_0 y + w_\infty)u \\ y + A_\infty u \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est affine, donc

$$\text{Conv}(\mathcal{W}_x) = \text{Conv}(\psi_x(\mathbb{Z}^{n-2})) = \psi_x(\text{Conv}(\mathbb{Z}^{n-2})) = \psi_x(\mathbb{R}^{n-2}) = \rho_\infty(\mathbb{R}^{n-2})x$$

Or $\rho_\infty(\mathbb{R}^{n-2})x$ est un sous-espace affine de \mathbb{A} , donc $\mathbb{A} \cap \Omega_\infty$ contient une droite affine, sauf si $\mathcal{W}_x = \{x\}$. Comme Ω_∞ est proprement convexe, on a $\mathcal{W}_x = \{x\}$ pour tout $x \in \mathbb{A} \cap \Omega_\infty$. D'où $\rho_\infty(\mathbb{Z}^{n-2}) = \{\text{id}\}$, ce qui est impossible par injectivité de ρ_∞ . \square

Lemme 3.23 *Il existe une forme quadratique q_∞ de signature $(1, n-1)$ telle que $\rho_\infty(\Pi)$ est un sous-groupe de $SO(q_\infty)$.*

Démonstration. On a vu précédemment (lemme 3.20) que Ω_∞ est un ouvert proprement convexe en raison de l'irréductibilité de ρ_∞ . Ainsi le lemme 3.22 implique que $\alpha_\infty \neq 0$. En particulier, on a $A_\infty \in GL_{n-2}(\mathbb{R})$ car $A_\infty A_0 = A_0 A_\infty = \alpha_\infty I_{n-2}$. L'égalité 3.1 donne la forme des éléments $\rho_\infty(u)$. Par le calcul, on vérifie que $\rho_\infty(u) \in SO(Q_\infty)$, où Q_∞ est la matrice symétrique de signature $(1, n-1)$ donnée par

$$Q_\infty = {}^t T_\infty^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -I_{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_\infty^{-1} \quad \text{et} \quad T_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k$$

□

Proposition 3.24 *Les pointes de M_∞ associées aux groupes $\rho_\infty(\Pi_i)$ sont des pointes hyperboliques (pour $1 \leq i \leq r$).*

Démonstration. C'est la conséquence de l'étude de cette section. Les pointes de M_k sont données par la famille de sous-groupes paraboliques $\{\rho_k(\Pi_i)\}_{1 \leq i \leq r}$. Les pointes de M_∞ qui proviennent des pointes de M_k sont donc données par la famille de sous-groupes $\{\rho_\infty(\Pi_i)\}_{1 \leq i \leq r}$. Le lemme 3.23 permet de conclure. □

3.5 Finitude du volume de la variété limite

Théorème 3.25 *Soient Γ un groupe et $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Il existe un ouvert proprement convexe (non vide) de \mathbb{RP}^{n-1} , noté Ω_∞ , qui est préservé par le groupe $\Gamma_\infty = \rho_\infty(\Gamma)$ et tel que le quotient $M_\infty = \Gamma_\infty \backslash \Omega_\infty$ soit une variété projective proprement convexe de volume fini.*

L'existence d'un convexe limite Γ_∞ -invariant est donnée par le théorème 3.17, il reste à montrer que le quotient M_∞ est de volume fini.

Dans cette partie, on travaillera avec des horopointes plutôt qu'avec des pointes. On veut y montrer que la variété limite M_∞ est de volume fini, i.e. que sa partie non cuspidale est compacte et que ses pointes \mathcal{P} sont de volume fini. Or, pour toute horopointe $\mathfrak{P} = P \backslash \mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}$, la partie $\mathcal{P} \backslash \mathfrak{P}$ de \mathcal{P} est compacte, donc il suffit de montrer que M_∞ privée des horopointes est compacte et que toute horopointe est de volume fini.

Plan de la preuve : Pour tout k , on note N_k la variété compacte à bord obtenue en retirant à M_k des horopointes $\mathfrak{P}_1^{(k)}, \dots, \mathfrak{P}_r^{(k)}$ associées respectivement à ses pointes $\mathcal{P}_1^{(k)}, \dots, \mathcal{P}_r^{(k)}$. Une telle variété N_k étant compacte, on applique la proposition 3.28 à son double $\overline{N_k}^d$ qui est une variété fermée. On en déduit que les dimensions cohomologiques

de $\pi_1(\overline{N_k^d})$ et $\pi_1(\overline{N_\infty^d})$ valent $n - 1$ (lemmes 3.29 et 3.30). On note ensuite N_∞ la variété à bord obtenue en retirant à M_∞ des horopointes associées aux pointes qui sont des limites de pointes de M_k . Pour montrer que N_∞ est compacte (lemme 3.31), on applique la proposition 3.28 au double $\overline{N_\infty^d}$ de N_∞ . On conclut que M_∞ est de volume fini car elle est la réunion d'une partie compacte N_∞ et d'un nombre fini de pointes hyperboliques de volume fini (lemme 3.32).

Définition Soit π un groupe et $m \geq 1$ un entier. Un espace V est un *espace d'Eilenberg-MacLane de type $K(\pi, m)$* si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- i) V est connexe non-vide ;
- ii) son m -ième groupe d'homotopie $\pi_m(V)$ est isomorphe à π ;
- iii) tous ses autres groupes d'homotopie sont triviaux.

Si $m = 1$, les conditions i) et iii) équivalent à dire que le revêtement universel \tilde{V} de V est contractile.

On ne considèrera ici que des espaces $K(\pi, 1)$.

Notation On reprend la notation Π_1, \dots, Π_r des groupes cuspidaux introduite au paragraphe 3.4.1. On note, pour tout k , $\mathcal{P}_1^{(k)}, \dots, \mathcal{P}_r^{(k)}$ les pointes de M_k . On note, pour tout $1 \leq i \leq r$, $\mathfrak{P}_i^{(k)}$ une horopointe associée à $\mathcal{P}_i^{(k)}$, i.e. il existe une horoboule $\mathcal{H}_i^{(k)}$ de Ω_k préservée par $\rho_k(\Pi_i)$ telle que

$$\mathfrak{P}_i^{(k)} = \rho_k(\Pi_i) \backslash \mathcal{H}_i^{(k)} \subseteq \mathcal{P}_i^{(k)}$$

On note alors N_k la variété obtenue en retirant à M_k ces horopointes $\mathfrak{P}_i^{(k)}$:

$$N_k = M_k \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^r \mathfrak{P}_i^{(k)} \right)$$

C'est une variété à bord de dimension $n - 1$ ayant r composantes de bord. De plus, N_k est compacte car la variété M_k est de volume fini.

Notation On note $\mathcal{P}_1^\infty, \dots, \mathcal{P}_r^\infty$ les pointes de M_∞ qui sont associées aux groupes $\rho_\infty(\Pi_1), \dots, \rho_\infty(\Pi_r)$ respectivement. On note, pour tout $1 \leq i \leq r$, \mathfrak{P}_i^∞ une horopointe associée à \mathcal{P}_i^∞ , i.e. il existe une horoboule \mathcal{H}_i^∞ de Ω_∞ préservée par $\rho_\infty(\Pi_i)$ telle que

$$\mathfrak{P}_i^\infty = \rho_\infty(\Pi_i) \backslash \mathcal{H}_i^\infty \subseteq \mathcal{P}_i^\infty$$

On note alors N_∞ la variété obtenue en retirant à M_∞ ces horopointes \mathfrak{P}_i^∞ :

$$N_\infty = M_\infty \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^r \mathfrak{P}_i^\infty \right)$$

Lemme 3.26 *Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le revêtement universel \tilde{N}_k de N_k est contractile.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ω_k est le revêtement universel de M_k . Les pointes de M_k étant disjointes, le revêtement universel de N_k s'identifie à

$$\tilde{N}_k = \Omega_k \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^r \Gamma_k \cdot \mathcal{H}_i^{(k)} \right)$$

Comme Ω_k est contractile, il suffit pour conclure de trouver une rétraction $R : \Omega_k \rightarrow \tilde{N}_k$. Pour cela, rappelons qu'une horoboule \mathcal{H} s'identifie au produit $\partial\mathcal{H} \times \mathbb{R}_+^*$ via l'application suivante :

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{H} \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (m, t) &\longmapsto r_m^p(t) \end{aligned}$$

où p est le centre de l'horoboule \mathcal{H} et r_m^p est le rayon géodésique issu de m et d'extrémité p . Cette identification est équivariante par rapport aux sous-groupes paraboliques de Γ_k qui préservent \mathcal{H} .

On définit une rétraction $R : \Omega_k \rightarrow \tilde{N}_k$ comme suit, pour tout $x \in \Omega_k$:

- si $x \in \tilde{N}_k$, on pose $R(x) = x$;
- sinon $x \in \bigsqcup_{i=1}^r \Gamma_k \cdot \mathcal{H}_i^{(k)}$, i.e. il existe i et $\gamma \in \Gamma_k$ tels que $x \in \gamma \cdot \mathcal{H}_i^{(k)}$ et $x = \gamma r_m^p(t)$ avec $(m, t) \in \partial\mathcal{H}_i^{(k)} \times \mathbb{R}_+^*$, on pose alors $R(x) = \gamma r_m^p(0) \in \partial\tilde{N}_k$.

Cette application R est continue. □

Lemme 3.27 *Avec les mêmes hypothèses, les composantes de bord de \tilde{N}_k sont contractiles.*

Démonstration. Les composantes de bord de \tilde{N}_k apparaissent en retirant des horoboules $\mathcal{H} \simeq \partial\mathcal{H} \times \mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_+^*$ à Ω_k . Ainsi ces composantes de bord sont toutes des \mathbb{R}^{n-2} , donc sont contractiles. □

Les lemmes 3.26 et 3.27 permettent d'appliquer le théorème A.1 en annexe à la variété à bord N_k . Ce théorème nous permet de construire \mathcal{N}_k , une variété contractile qui est le revêtement universel de \overline{N}_k^d , le **double** de N_k .

Théorème A.1 *Soit N une n -variété à bord ayant un nombre fini de composantes de bord. On sait construire une n -variété \mathcal{N} qui est le revêtement universel de \overline{N}^d .*

De plus, si on suppose que le revêtement universel \tilde{N} de N est contractile et que les composantes de bord de \tilde{N} sont contractiles, alors \mathcal{N} est une variété contractile.

Proposition 3.28 ([Bro82], proposition 8.1(a), p.210) *Soit V une variété de dimension d (avec ou sans bord) qui est un espace $K(\pi, 1)$. Alors $\text{cd}(\pi) \leq d$.*

De plus, $\text{cd}(\pi) = d$ si et seulement si V est compact sans bord.

Lemme 3.29 *Pour tout k , la dimension cohomologique de $\pi_1(\overline{N}_k^d)$ vaut $n - 1$.*

Démonstration. On veut appliquer le cas d'égalité de la proposition 3.28 pour $V = \overline{N}_k^d$. La variété sans bord \overline{N}_k^d est un $K(\pi_1(\overline{N}_k^d), 1)$ de dimension $n - 1$ car son revêtement

universel \mathcal{N}_k est contractile. De plus, elle est compacte car elle provient de la variété M_k de volume fini à laquelle on a retiré ses pointes. \square

Théorème A.2 *Soit N une n -variété à bord ayant un nombre fini de composantes de bord. On note $\mathcal{C} = \pi_0(\partial\tilde{N})$ et on définit le groupe $\Sigma = \langle \{\sigma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{C}} \mid \sigma_\Lambda^2 = 1 \rangle$. On note Σ_d le sous-groupe d'indice deux de Σ engendré par les éléments de la forme $\sigma_\Lambda \sigma_{\Lambda'}$, pour tous $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{C}$.*

Alors le groupe fondamental de \overline{N}^d est isomorphe au produit semi-direct $\Sigma_d \rtimes_\phi \pi_1 N$, où ϕ est l'action de $\pi_1 N$ sur Σ_d induite par l'action naturelle de $\pi_1 N$ sur \mathcal{C} .

Lemme 3.30 *La dimension cohomologique de $\pi_1(\overline{N}_\infty^d)$ vaut $n - 1$.*

Démonstration. On sait que $\text{cd}(\pi_1(\overline{N}_k^d)) = n - 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (lemme 3.29). En fait, les groupes fondamentaux $\pi_1(\overline{N}_k^d)$ et $\pi_1(\overline{N}_\infty^d)$ ne dépendent que du groupe Γ et de sa famille de sous-groupes cuspidaux $\mathcal{F}(\Gamma)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\pi_1(\overline{N}_k^d) \simeq \pi_1(\overline{N}_\infty^d)$ et on conclut, d'après le lemme 3.29, que $\text{vcd}(\pi_1(\overline{N}_\infty^d)) = n - 1$.

On a en effet une bijection entre l'ensemble \mathcal{C} des composantes de bord de \tilde{N}_k et la famille $\mathcal{F}(\Gamma)$. Explicitement, à $\Pi \in \mathcal{F}(\Gamma)$, on associe l'unique composante de bord de \tilde{N}_k qui est préservée par Π ; réciproquement, on associe à $\Lambda \in \pi_0(\partial\tilde{N}_k)$ le groupe $\text{Stab}_\Gamma(\Lambda)$.

Le théorème A.2 implique que le groupe fondamental $\pi_1(\overline{N}_k^d)$ ne dépend que de $\mathcal{C} \simeq \mathcal{F}(\Gamma)$ et de $\pi_1 N_k \simeq \Gamma$

$$\pi_1(\overline{N}_k^d) \simeq \Sigma_d \rtimes_\phi \pi_1(N_k)$$

\square

Lemme 3.31 *La variété à bord N_∞ est compacte.*

Démonstration. Il suffit de montrer que son double \overline{N}_∞^d est compact. Pour cela on applique le cas d'égalité de la proposition 3.28 à $V = \overline{N}_\infty^d$. Le lemme 3.26 permet d'affirmer que \overline{N}_∞^d est un $K(\pi_1(\overline{N}_\infty^d), 1)$ et le lemme 3.30 montre que $\text{cd}(\pi_1(\overline{N}_\infty^d)) = n - 1 = \dim(\overline{N}_k^d)$. \square

Lemme 3.32 *Les horopointes \mathfrak{P}_i^∞ (retirées à M_∞ pour obtenir N_∞) sont de volume fini.*

Démonstration. C'est le corollaire 7.16 de [CM14]. On en rappelle la preuve pour la commodité du lecteur.

Soit $\mathfrak{P} = P \setminus \mathcal{H}$ une telle horopointe de M_∞ et soit \mathcal{P} la pointe associée à \mathfrak{P} . On va montrer que \mathfrak{P} est de volume fini. On a vu à la proposition 3.24 que \mathcal{P} est une pointe hyperbolique. En particulier, il existe un ellipsoïde \mathcal{E}_1 préservé par P , tangent à $\partial\Omega$ en p (point fixé par P) et inclus dans l'horoboule \mathcal{H} . Quitte à choisir l'horoboule \mathcal{H} plus petite, on peut se donner une horoboule \mathcal{H}_1 de \mathcal{E}_1 centrée en p et contenant \mathcal{H} (voir figure 3.2). On a donc l'inclusion $P \setminus \mathcal{H} \subseteq P \setminus \mathcal{H}_1$ et l'inégalité $\text{vol}_\Omega \leq \text{vol}_{\mathcal{E}_1}$. D'où

$$\text{vol}_\Omega(P \setminus \mathcal{H}) \leq \text{vol}_{\mathcal{E}_1}(P \setminus \mathcal{H}_1) < +\infty$$

□

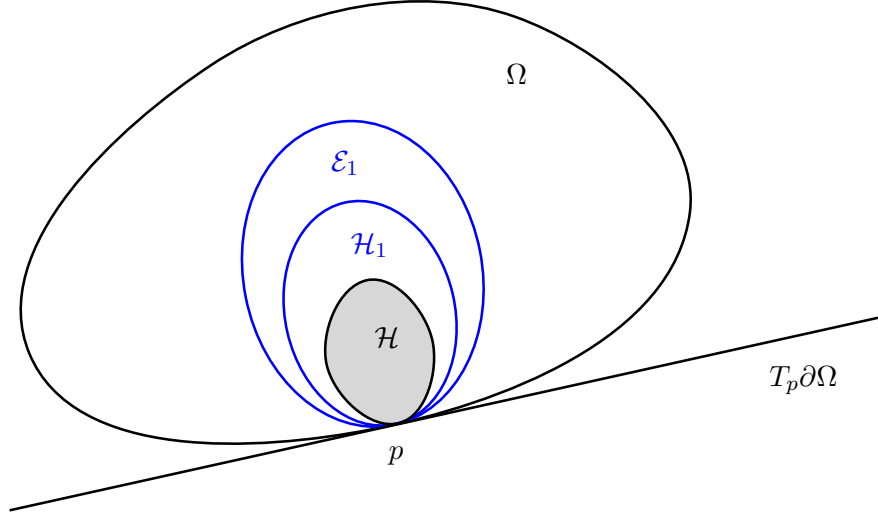


FIGURE 3.2 – Horopointe associée à une pointe hyperbolique

3.6 Stricte convexité du convexe limite

Théorème 3.33 *Soient Γ un groupe et $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de β_Γ qui converge vers $\rho_\infty \in \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$. Il existe un ouvert strictement convexe et à bord C^1 de \mathbb{RP}^{n-1} , noté Ω_∞ , qui est préservé par le groupe $\Gamma_\infty = \rho_\infty(\Gamma)$ et tel que le quotient $M_\infty = \Gamma_\infty \backslash \Omega_\infty$ soit une variété projective strictement convexe de volume fini.*

L'existence d'un ouvert limite Ω_∞ proprement convexe et Γ_∞ -invariant est donnée par le théorème 3.17. Le fait que le quotient $\Gamma_\infty \backslash \Omega_\infty$ soit de volume fini est donné par le théorème 3.25. Il reste à montrer que l'ouvert Ω_∞ est strictement convexe.

On définit ci-dessous la notion de « groupe relativement hyperbolique », introduite par Gromov dans [Gro87]. Les deux définitions suivantes sont dues à Bowditch [Bow12].

Définition Soit X un espace de longueur qui est complet, localement compact et hyperbolique. Soit G un groupe qui agit sur X par isométries.

On dit que $y \in \partial X$ est un *point limite conique* s'il existe un point $x \in X$ et une suite $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G tels que $g_i x \rightarrow y$ et les points $g_i x$ restent à distance bornée du rayon géodésique issu de x et d'extrémité y .

On dit que $p \in \partial X$ est un *point parabolique borné* si p est le point fixe d'un sous-groupe parabolique de G et le quotient $\text{Stab}_G(p) \backslash (\partial X \setminus p)$ est compact.

Définition Soient G un groupe et \mathcal{G} une famille de sous-groupes infinis de type fini. On dit que G est *hyperbolique relativement à \mathcal{G}* si les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) Il existe un espace de longueur X sur lequel G agit proprement discontinument par isométries.
- (ii) X est complet, localement compact et hyperbolique.
- (iii) Tout point du bord de X est soit un point limite conique, soit un point parabolique borné.
- (iv) Les éléments de \mathcal{G} sont précisément les stabilisateurs $\text{Stab}_G(p)$ d'un point parabolique borné.

Le théorème suivant de Cooper, Long et Tillmann permet de montrer que l'ouvert Ω_∞ est strictement convexe et que $\partial\Omega_\infty$ est de classe C^1 (proposition 3.35).

Théorème 3.34 ([CLT15a], théorème 11.6, p.248) *Soit $M = \Gamma_0 \backslash \Omega$ une variété projective convexe (complète) de volume fini. On note $\mathcal{F}(\Gamma_0)$ la famille des sous-groupes*

$$\mathcal{F}(\Gamma_0) = \{ \gamma(\pi_1 c)\gamma^{-1} \mid c \in \pi_0(\partial N), \gamma \in \Gamma_0 \}$$

Si M est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte N et si l'holonomie de chaque composante de bord de N est parabolique, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) (Ω, d_Ω) est δ -hyperbolique ;
- (ii) Ω est strictement convexe ;
- (iii) Γ_0 est hyperbolique relativement à la famille $\mathcal{F}(\Gamma_0)$;
- (iv) $\partial\Omega$ est de classe C^1 .

Proposition 3.35 *L'ouvert Ω_∞ est strictement convexe et son bord est de classe C^1 .*

Démonstration. Les variétés projectives strictement convexes $M_k = \Gamma_k \backslash \Omega_k$ sont de volume fini, donc elles vérifient les hypothèses du théorème 3.34. Ainsi, comme les Ω_k sont strictement convexes, on obtient que $\pi_1 M_k$ est hyperbolique relativement à la collection de sous-groupes paraboliques maximaux $\{\rho_k(\Pi_1), \dots, \rho_k(\Pi_r)\}$, où $\{\Pi_1, \dots, \Pi_r\} = \mathcal{F}(\Gamma)/\Gamma$ est l'ensemble des représentants des classes de conjugaison des groupes cuspidaux.

Comme $\Gamma \simeq \pi_1 M_k$, on peut s'affranchir des indices k et affirmer que le groupe Γ est hyperbolique relativement à la collection de sous-groupes $\{\Pi_1, \dots, \Pi_r\}$. En passant à la représentation ρ_∞ , on obtient que $\pi_1 M_\infty$ est aussi relativement hyperbolique. Comme M_∞ est de volume fini (théorème 3.25), elle vérifie aussi les hypothèses du théorème 3.34. On peut conclure que Ω_∞ est strictement convexe. \square

Annexe A

Double d'une variété à bord

L'objectif de cette annexe est de démontrer les théorèmes A.1 et A.2 ci-dessous. Il s'agit de deux résultats concernant le double d'une variété à bord. On construit, sous certaines hypothèses, le revêtement universel de ce double ainsi que son groupe fondamental.

Soit N une variété à bord ayant un nombre fini de composantes de bord. On note $\partial\tilde{N}$ le bord de \tilde{N} et \mathcal{C} l'ensemble des composantes connexes de $\partial\tilde{N}$.

Définition Le *double de N* , noté \overline{N}^d , est construit en collant deux copies de N le long de leur bord :

$$\overline{N}^d = (N \times \{0\}) \cup_h (N \times \{1\}) \quad \text{où } h : \partial N \rightarrow \partial N \text{ est l'application identité.}$$

Fait Le double \overline{N}^d d'une variété à bord N peut aussi être obtenu en prenant le bord de la variété $N \times [0, 1]$. De cette façon, on voit que \overline{N}^d est une variété sans bord.

Notation On définit le groupe

$$\Sigma = \langle \{\sigma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{C}} \mid \sigma_\Lambda^2 = 1 \rangle$$

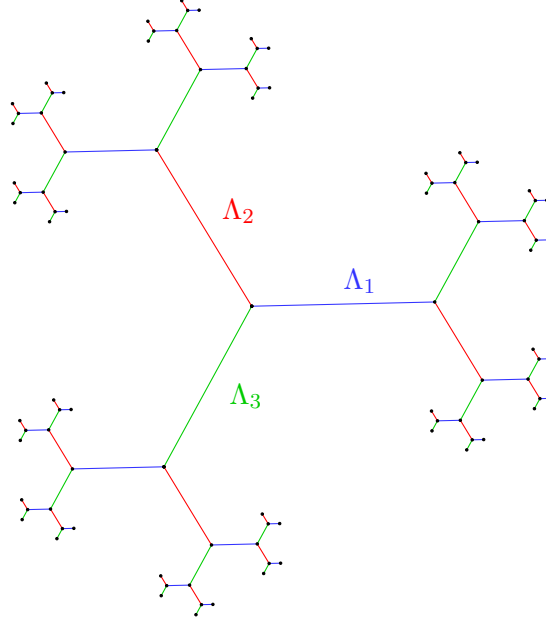
On note \mathcal{G} le graphe de Cayley de Σ par rapport à la partie génératrice $\{\sigma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{C}}$.

Ce graphe \mathcal{G} est un arbre dont toutes les arêtes sont indexées par un élément Λ de \mathcal{C} . Plus précisément, pour tout sommet s fixé, cette indexation des arêtes définit une bijection entre l'ensemble des voisins de s et l'ensemble \mathcal{C} .

On note S l'ensemble des sommets de \mathcal{G} , A l'ensemble des arêtes de \mathcal{G} et π la projection $A \rightarrow \mathcal{C}$.

Pour tous s, s' deux sommets voisins de S , on note $[s, s'] \in A$ l'arête de \mathcal{G} qui relie ces deux sommets.

On choisit comme sommet de référence $s_0 \in S$ celui qui correspond à l'élément neutre de Σ .


 FIGURE A.1 – Arbre \mathcal{G} pour $\mathcal{C} = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$

Définition On définit ensuite une relation \sim sur $\tilde{N} \times S$ comme suit :
 pour tous $(m, s), (m', s') \in \tilde{N} \times S$,

$$(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow \begin{cases} m = m' \text{ appartient à une même composante de bord } \Lambda \\ [s, s'] \in A \text{ et } \pi([s, s']) = \Lambda \\ \text{ou bien } (m, s) = (m', s') \end{cases}$$

Lemme A.0 *La relation \sim est une relation d'équivalence sur $\tilde{N} \times S$ et les classes d'équivalence sont compactes.*

Démonstration. La réflexivité et la symétrie sont évidentes par définition (car les arêtes de \mathcal{G} ne sont pas orientées). Soient $(m, s), (m', s'), (m'', s'') \in \tilde{N} \times S$ tels que $(m, s) \sim (m', s')$ et $(m', s') \sim (m'', s'')$. Si $(m, s) = (m', s')$ ou $(m', s') = (m'', s'')$, la transitivité est évidente. Sinon $m = m' = m''$ appartiennent à une même composante de bord Λ et $\pi([s, s']) = \Lambda = \pi([s', s''])$. Donc $[s, s']$ et $[s', s'']$ sont deux arêtes de \mathcal{G} indexées par le même élément Λ de \mathcal{C} . Cela n'est possible que si $[s, s'] = [s', s'']$ et donc $s = s''$. Ainsi $(m, s) \sim (m'', s'')$ et la relation est transitive.

Les classes d'équivalence sont composées de un ou deux points, donc elles sont compactes. \square

Notation On note \mathcal{N} le quotient de $\tilde{N} \times S$ par \sim muni de la topologie quotient. Il est obtenu en recollant une infinité de copies de \tilde{N} le long de leurs composantes de bord.

Dans la suite, on montrera que \mathcal{N} est un revêtement de \overline{N}^d . Pour cela, on partitionne l'ensemble S des sommets de \mathcal{G} en deux parties S_0 et S_1 , où S_0 (respectivement S_1) est l'ensemble des sommets à distance paire (respectivement impaire) du sommet s_0 . On note $p : \tilde{N} \rightarrow N$ est le revêtement universel de N et on définit l'application

$$p_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} = (\tilde{N} \times S) / \sim \longrightarrow \overline{N}^d = (N \times \{0\}) \cup_{\partial N} (N \times \{1\})$$

$$(m, s) \longmapsto \begin{cases} (p(m), 0) & \text{si } s \in S_0 \\ (p(m), 1) & \text{si } s \in S_1 \end{cases}$$

On peut à présent énoncer les deux principaux théorèmes de cette annexe. Leurs démonstrations font l'objet des sections A.1 et A.2 respectivement.

Théorème A.1 *Soit N une n -variété à bord ayant un nombre fini de composantes de bord.*

Avec les notations précédentes, \mathcal{N} est une n -variété sans bord et $p_{\mathcal{N}}$ est le revêtement universel de \overline{N}^d .

De plus, si on suppose que le revêtement universel \tilde{N} est contractile et que les composantes de bord de \tilde{N} sont contractiles, alors \mathcal{N} est une variété contractile.

Théorème A.2 *On note Σ_d le sous-groupe d'indice deux de Σ engendré par les éléments de la forme $\sigma_{\Lambda}\sigma_{\Lambda'}$, pour tous $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{C}$.*

Le groupe fondamental de \overline{N}^d est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{G}_d = \Sigma_d \rtimes_{\phi} \pi_1 N$, où ϕ est l'action de $\pi_1 N$ sur Σ_d induite par l'action de $\pi_1 N$ sur \mathcal{C} .

A.1 Revêtement du double

Proposition A.3 *L'ensemble quotient $\mathcal{N} = (\tilde{N} \times S) / \sim$ possède une structure de variété sans bord.*

Démonstration. On note $q : \tilde{N} \times S \rightarrow \mathcal{N}$ l'application de passage au quotient.

Soit $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas de la variété à bord \tilde{N} . Les U_i sont des ouverts de \tilde{N} et les $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ des homéomorphismes, où les $V_i = \varphi_i(U_i)$ sont des ouverts du demi-espace $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$. On note $\partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ le bord de \mathbb{R}_+^n . On partitionne les indices i en deux sous-ensembles :

$$I = \{i \mid V_i \cap \partial\mathbb{R}_+^n = \emptyset\} \quad \text{et} \quad J = \{j \mid V_j \cap \partial\mathbb{R}_+^n \neq \emptyset\}$$

Avec ces notations le bord de \tilde{N} s'écrit

$$\begin{aligned} \partial\tilde{N} &= \{x \in \tilde{N} \mid \exists j \in J : x \in U_j, \varphi_j(x) = (0, x_2, \dots, x_n)\} \\ &= \bigcup_{j \in J} \varphi_j^{-1}(V_j \cap \partial\mathbb{R}_+^n) \end{aligned}$$

On va construire explicitement un atlas pour $\mathcal{N} = (\tilde{N} \times S)/\sim$, comme illustré sur la figure A.2b.

Pour tout $i \in I$ et pour tout $s \in S$ on pose

$$U_i^s = q(U_i \times \{s\}) \subset \mathcal{N} \quad \text{et} \quad \varphi_i^s : \begin{array}{ccc} U_i^s & \longrightarrow & V_i^s = V_i \\ (m, s) & \longmapsto & \varphi_i(m) \end{array}$$

Les U_i^s sont des ouverts de \mathcal{N} car les U_i sont des ouverts de \tilde{N} et S est discret. En fait les U_i^s sont homéomorphes aux ouverts U_i . Les applications φ_i^s sont des homéomorphismes. Pour tout $j \in J$ et pour tout $s \in S$ on pose

$$U_j^s = q(U_j \times \{s\} \cup U_j \times \{s'\})$$

où $s' \in S$ est l'unique sommet tel que $\pi([s, s']) = \Lambda$ avec $U_j \cap \Lambda \neq \emptyset$. On a alors égalité entre U_j^s et $U_j^{s'}$. On pose de plus

$$\varphi_j^s : \begin{array}{ccc} U_j^s & \longrightarrow & V_j^s = V_j \cup \zeta_1(V_j) \\ (m, s'') & \longmapsto & \begin{cases} \varphi_j(m) & \text{si } s'' = s \\ \zeta_1(\varphi_j(m)) & \text{si } s'' = s' \end{cases} \end{array}$$

où $\zeta_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la réflexion $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$. En particulier, avec ces notations, on a $V_j^s = V_j^{s'}$ et $\varphi_j^{s'} = \zeta_1 \circ \varphi_j^s$.

Les U_j^s sont des ouverts car $U_j \times \{s\}$ et $U_j \times \{s'\}$ sont des ouverts de $\tilde{N} \times S$. Les φ_j^s sont bien définies car lorsque $(m, s) \sim (m, s')$, on a $m \in \partial\tilde{N}$ et $\varphi_j(m) = (0, m_2, \dots, m_n) = \zeta_1(\varphi_j(m))$.

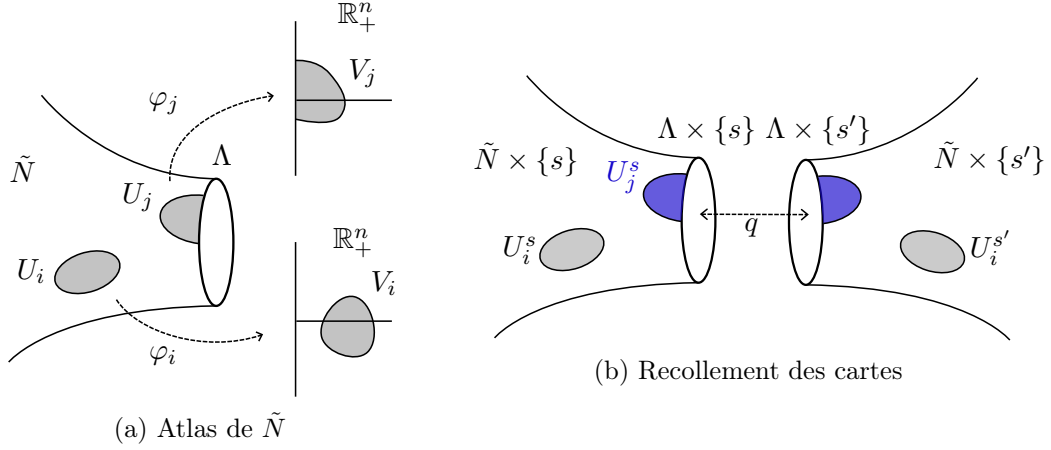
Donnons ensuite les applications de changement de cartes. Soient $s, s' \in S$ et $i, j \in I \cup J$ tels que $U_i^s \cap U_j^{s'} \neq \emptyset$. Alors soit $s = s'$, soit les sommets s et s' sont voisins ; dans les deux cas on peut supposer que $s = s'$ car, si $j \in J$, on a $U_j^s = U_j^{s'}$. L'application de changement de carte

$$\varphi_j^s \circ (\varphi_i^s)^{-1} : \varphi_i^s(U_i^s \cap U_j^s) \longrightarrow \varphi_j^s(U_i^s \cap U_j^s)$$

est alors égale à $\varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1}$. Finalement, l'ensemble $\{(U_i^s, \varphi_i^s) \mid i \in I \cup J, s \in S\}$ est un atlas pour \mathcal{N} .

De plus, la variété \mathcal{N} est sans bord car tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . □

On montre à présent que \mathcal{N} est un revêtement de \overline{N}^d . Pour cela, on partitionne l'ensemble S des sommets de \mathcal{G} en deux parties S_0 et S_1 , où S_0 (respectivement S_1) est l'ensemble des sommets à distance paire (respectivement impaire) du sommet s_0 . On rappelle également que le double \overline{N}^d est construit en collant deux copies de N le long


 FIGURE A.2 – Construction d'un atlas pour \mathcal{N}

du bord : $\overline{N}^d = N \times \{0\} \cup_{\partial N} N \times \{1\}$. On définit l'application

$$p_{\times} : \tilde{N} \times S \longrightarrow \overline{N}^d$$

$$(m, s) \longmapsto \begin{cases} (p(m), 0) & \text{si } s \in S_0 \\ (p(m), 1) & \text{si } s \in S_1 \end{cases}$$

où $p : \tilde{N} \rightarrow N$ est le revêtement universel de N .

Lemme A.4 *L'application p_{\times} passe au quotient et induit une unique application $p_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \overline{N}^d$.*

Démonstration. Soient $(m, s), (m', s')$ dans $\tilde{N} \times S$ tels que $(m, s) \sim (m', s')$, en particulier $m = m'$ appartient à une composante de bord $\Lambda \subset \partial \tilde{N}$. Alors $p_{\times}(m, s) = (p(m), \epsilon)$ et $p_{\times}(m', s') = (p(m), \epsilon')$ sont un seul et même point de \overline{N}^d car $p(m) \in \partial N$. Le théorème de factorisation permet de conclure. \square

Proposition A.5 *L'application $p_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \overline{N}^d$ est un revêtement de \overline{N}^d .*

Démonstration. Soit $x \in \overline{N}^d$. Si $x \notin \partial N \subset \overline{N}^d$, alors x est à l'intérieur de $N \times \{0\}$ ou de $N \times \{1\}$ dans \overline{N}^d . Il existe $U \ni x$ un ouvert trivialisant pour le revêtement $p : \tilde{N} \rightarrow N$ et on note $\bigsqcup_i O_i = p^{-1}(U)$. Alors U est aussi un ouvert trivialisant pour $p_{\mathcal{N}}$ car on a

$$p_{\mathcal{N}}^{-1}(U) = \bigsqcup_{s \in S_{\epsilon}} (\bigsqcup_i O_i \times \{s\}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \epsilon = 0 & \text{si } x \in N \times \{0\} \\ \epsilon = 1 & \text{si } x \in N \times \{1\} \end{cases}$$

Si $x \in \partial N \subset \overline{N}^d$, alors x appartient à une composante de bord $\Lambda \subset \partial N$ et on peut choisir un ouvert \mathcal{O} de N contenant x . Alors $U = (\mathcal{O} \times \{0\}) \cup (\mathcal{O} \times \{1\}) \subset \overline{N}^d$ est un

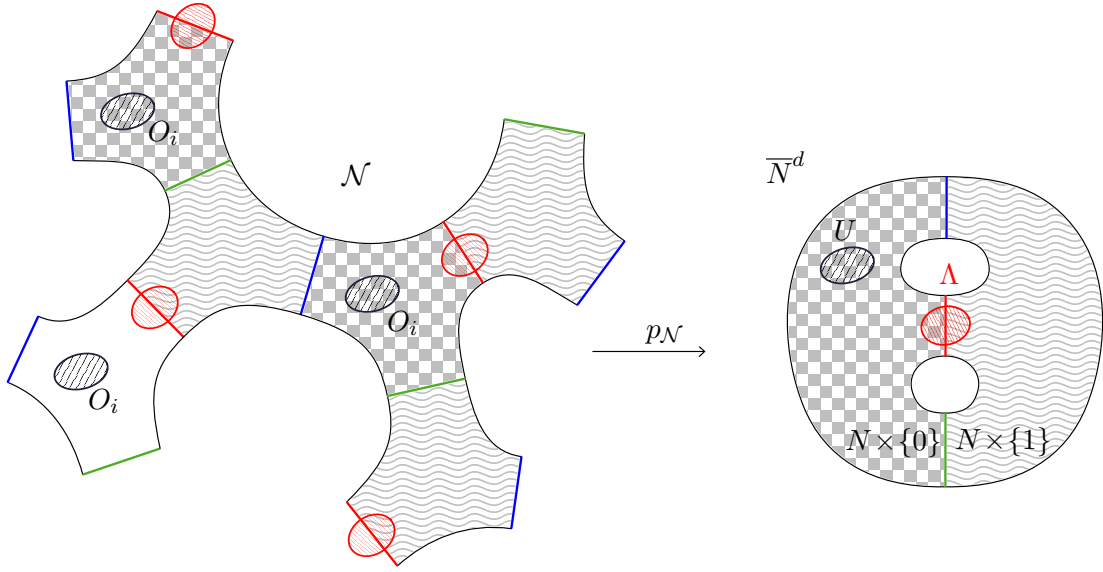


FIGURE A.3 – Revêtement de \bar{N}^d

ouvert trivialisant pour $p_{\mathcal{N}}$ car on a

$$p_{\mathcal{N}}^{-1}(U) = \bigcup_{s \in S} (\mathcal{O} \times \{s\})$$

□

Proposition A.6 *La variété \mathcal{N} est simplement connexe.*

Démonstration. Soit $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$ un lacet de \mathcal{N} , montrons qu'il est homotope à un point. La variété \mathcal{N} est construite en recollant des copies de \tilde{N} le long de composantes de bord. Le lacet λ étant compact, il intersecte un nombre fini de copies de \tilde{N} dans \mathcal{N} ; on note A la réunion de ces copies. A est une partie connexe par arcs de \mathcal{N} qui contient λ . Pour achever la preuve, il suffit de montrer que A est simplement connexe.

Pour cela on montre par récurrence sur $r \geq 1$ l'affirmation suivante :

« Soit A une partie connexe de \mathcal{N} obtenue comme réunion de r copies voisines de \tilde{N} dans \mathcal{N} . Alors cette partie A est simplement connexe. »

Si $r = 1$, $\pi_1(A)$ est trivial car A n'est composée que d'une seule copie de \tilde{N} .

Supposons l'affirmation vraie au rang $r \geq 1$. Soit A une partie connexe de \mathcal{N} obtenue comme réunion de $r + 1$ copies voisines de \tilde{N} dans \mathcal{N} . Notons A_1, \dots, A_{r+1} ces copies. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $A \setminus A_1$ est encore connexe par arcs. On note Λ_1 la composante de bord de \tilde{N} qui joint A_1 à $A_2 \cup \dots \cup A_{r+1}$. On applique le théorème de Seifert-van Kampen à A vue comme la réunion de A_1 et $A_2 \cup \dots \cup A_{r+1}$ le long de

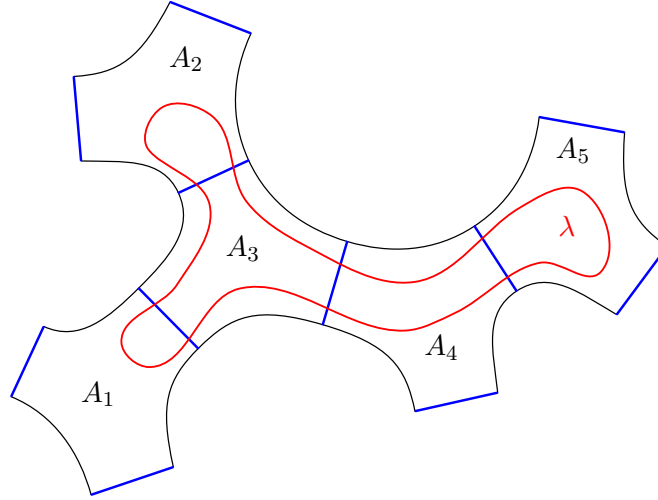


FIGURE A.4 – Simple connexité de \mathcal{N}

A₁. On obtient

$$\pi_1(A) = \pi_1(A_1) \underset{\pi_1(\Lambda_1)}{*} \pi_1(A_2 \cup \dots \cup A_{r+1})$$

Or $\pi_1(A_1)$ et $\pi_1(A_2 \cup \dots \cup A_{r+1})$ sont triviaux par hypothèse de récurrence. Ainsi, $\pi_1(A)$ est trivial et on a démontré l'affirmation au rang $r + 1$. \square

La proposition suivante est une conséquence directe des propositions A.5 et A.6.

Proposition A.7 *La variété \mathcal{N} est le revêtement universel de \overline{N}^d .*

La dernière proposition de cette section affirme que, sous certaines hypothèses sur \tilde{N} et ses composantes de bord, la variété \mathcal{N} est contractile.

Proposition A.8 *Si \tilde{N} est contractile et que les composantes de bord de \tilde{N} sont contractiles, alors \mathcal{N} est contractile.*

Démonstration. Comme \mathcal{N} est un CW-complexe, d'après le théorème de Whitehead ([Hat02], théorème 4.5, p.346), il suffit de vérifier que tous ses groupes d'homotopie sont triviaux. Soit $k \geq 2$, pour montrer que $\pi_k(\mathcal{N})$ est trivial, on va montrer que toute application continue $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathcal{N}$ est homotope à une application constante. L'image $f(\mathbb{S}^k)$ est une partie compacte de \mathcal{N} , donc elle intersecte un nombre fini A_1, \dots, A_r de copies de \tilde{N} dans \mathcal{N} ; on note A la réunion de ces copies. Pour achever la preuve, il suffit de montrer que A est contractile.

Pour cela on applique le lemme A.9 à deux copies voisines A_i, A_j pour obtenir que leur réunion $A_i \cup A_j$ est contractile (car leur intersection est une composante de bord de \tilde{N} , donc est contractile). Puis on applique à nouveau le lemme A.9 de proche en proche aux autres copies voisines qui composent A . \square

Lemme A.9 *Soit $X = A \cup B$ un CW-complexe qui est la réunion de deux sous-complexes A et B contractiles dont l'intersection $A \cap B$ est contractile. Alors X est contractile.*

Démonstration. B est contractile, donc X/B et X sont homotopiquement équivalents. L'inclusion $A \rightarrow X$ envoie $A \cap B$ dans B , donc induit une injection continue $i : A/(A \cap B) \hookrightarrow X/B$. Comme $X = A \cup B$, i est une bijection. De plus, i envoie les fermés sur des fermés, donc i est un homéomorphisme. Par ailleurs, A et $A/(A \cap B)$ sont homotopiquement équivalents car $A \cap B$ est contractile. Finalement $A/(A \cap B)$ est contractile (car A l'est) et X aussi par l'homéomorphisme i . \square

A.2 Groupe fondamental du double

On commence par définir un groupe \mathbb{G} , sous-groupe du produit libre $\Sigma * \pi_1 N$.

Définition On définit le groupe $\mathbb{G} = \Sigma \rtimes_{\phi} \pi_1 N$ comme le produit semi-direct extérieur de Σ par $\pi_1 N$ relativement à l'action $\phi : \pi_1 N \rightarrow \text{Aut}(\Sigma)$, où cette action ϕ de $\pi_1 N$ sur Σ est définie par

$$\forall \gamma \in \pi_1 N, \forall \sigma = \sigma_{\Lambda_1} \dots \sigma_{\Lambda_r} \in \Sigma, \quad \phi(\gamma)(\sigma) = \gamma \sigma \gamma^{-1} = \sigma_{\gamma \Lambda_1} \dots \sigma_{\gamma \Lambda_r}$$

En particulier Σ est un sous-groupe normal de \mathbb{G} et les groupes \mathbb{G}/Σ et $\pi_1 N$ sont isomorphes. De plus, tout élément $g \in \mathbb{G}$ s'écrit de façon unique comme un produit $g = \sigma \gamma$, où $\sigma \in \Sigma$ et $\gamma \in \pi_1 N$.

Remarque – \mathbb{G} est le groupe des mots en $\gamma \in \pi_1 N$ et $\sigma \in \Sigma$ dans lequel les mots de la forme $\gamma \sigma_{\Lambda} \gamma^{-1} \sigma_{\gamma \Lambda}^{-1}$ sont triviaux ; i.e. pour tous $\gamma \in \pi_1 N$ et $\sigma_{\Lambda} \in \Sigma$ on a les relations $\gamma \sigma_{\Lambda} \gamma^{-1} = \sigma_{\gamma \Lambda}$ dans \mathbb{G} .

On définit à présent les actions de \mathbb{G} sur les ensembles S , \tilde{N} et \mathcal{N} .

Action de \mathbb{G} sur S : Tout élément de $\pi_1 N$ induit une bijection de \mathcal{C} et Σ est en bijection avec S . On a donc des actions naturelles de $\pi_1 N$ et Σ sur S . On vérifie plus loin que ces deux actions induisent une action de \mathbb{G} sur S , pour cela décrivons l'action de $\pi_1 N$. Le sommet s_0 est laissé fixe par tous les éléments de $\pi_1 N$. Pour tout autre sommet $s \in S$, il existe un unique chemin injectif dans \mathcal{G} allant de s_0 à s (car \mathcal{G} est un arbre). Toutes les arêtes de \mathcal{G} sont indexées par des éléments de \mathcal{C} . On peut donc faire agir tout $\gamma \in \pi_1 N$ sur les arêtes qui composent le chemin précédent. On obtient alors un nouveau chemin partant de s_0 . Le sommet où aboutit ce nouveau chemin est par définition le sommet image de s sous l'action de γ .

On explicite ensuite l'action de Σ ; il suffit de définir l'action des σ_{Λ} . Pour tout $s \in S$, on note $\omega(s)$ le mot en $\Lambda \in \mathcal{C}$ représentant le chemin injectif sur \mathcal{G} allant de s_0 à s . En fait ω définit une bijection entre l'ensemble des sommets S et l'ensemble des mots

réduits en $\Lambda \in \mathcal{C}$. On partitionne S en deux sous-ensembles :

$$S_{\Lambda}^{+} = \{s \in S \mid \omega(s) \text{ commence par la lettre } \Lambda\} \quad \text{et} \quad S_{\Lambda}^{-} = S \setminus S_{\Lambda}^{+}$$

Pour tout $s \in S_{\Lambda}^{+}$, $\omega(s)$ s'écrit $\Lambda\omega_0$ et on pose $\omega(\sigma_{\Lambda}s) = \omega_0$. Pour tout $s \in S_{\Lambda}^{-}$, on pose $\omega(\sigma_{\Lambda}s) = \Lambda\omega(s)$. De cette façon, les involutions σ_{Λ} préservent le graphe \mathcal{G} et agissent comme des « symétries du graphe ».

Vérifions maintenant que ces actions de $\pi_1 N$ et Σ sont compatibles avec les relations qui définissent le groupe \mathbb{G} . Soient $\gamma \in \pi_1 N$, $\Lambda \in \mathcal{C}$, $s \in S$ fixés, montrons que $\sigma_{\gamma\Lambda}s = (\gamma\sigma_{\Lambda}\gamma^{-1})s$. On note $\omega(s) = \Lambda_1\Lambda_2 \dots \Lambda_r$. Si dans un premier cas $\gamma^{-1}s \in S_{\Lambda}^{+}$, i.e. si $\omega(\gamma^{-1}s)$ est de la forme $\Lambda\omega_0$, alors $\omega(\sigma_{\Lambda}\gamma^{-1}s) = \omega_0 = (\gamma^{-1}\Lambda_2) \dots (\gamma^{-1}\Lambda_r)$, et donc $\omega(\gamma\sigma_{\Lambda}\gamma^{-1}s) = \Lambda_2 \dots \Lambda_r$. D'autre part $\omega(\sigma_{\gamma\Lambda}s) = \Lambda_2 \dots \Lambda_r$ car $\gamma\Lambda = \Lambda_1$ par hypothèse. Si dans un second cas $\gamma^{-1}s \in S_{\Lambda}^{-}$, alors $\omega(\sigma_{\Lambda}\gamma^{-1}s) = \Lambda(\gamma^{-1}\Lambda_1)(\gamma^{-1}\Lambda_2) \dots (\gamma^{-1}\Lambda_r)$, et donc $\omega(\gamma\sigma_{\Lambda}\gamma^{-1}s) = (\gamma\Lambda)\Lambda_1\Lambda_2 \dots \Lambda_r$. D'autre part $\omega(\sigma_{\gamma\Lambda}s) = (\gamma\Lambda)\Lambda_1\Lambda_2 \dots \Lambda_r$ car $\gamma\Lambda \neq \Lambda_1$ par hypothèse.

Action de \mathbb{G} sur \tilde{N} : L'action de Σ est triviale et $\pi_1 N$ agit naturellement sur \tilde{N} .

Action de \mathbb{G} sur \mathcal{N} : On vient de définir les actions de \mathbb{G} sur \tilde{N} et S , donc \mathbb{G} agit sur $\tilde{N} \times S$. Vérifions que cette action est compatible avec la relation d'équivalence \sim . Supposons que $(m, s) \sim (m', s')$ dans $\tilde{N} \times S$. Soit $(m, s) = (m', s')$ et il n'y a rien à vérifier, soit $m = m' \in \Lambda$ et $[s, s'] \in A$ avec $\pi([s, s']) = \Lambda$. Alors, pour tout $\gamma \in \pi_1 N$, on a $\gamma m = \gamma m' \in \gamma\Lambda$ et $\gamma[s, s'] = [\gamma s, \gamma s'] \in A$ avec $\pi([\gamma s, \gamma s']) = \gamma\Lambda$ car la projection $\pi : A \rightarrow \mathcal{C}$ est $\pi_1 N$ -équivariante.

Pour tout $\sigma \in \Sigma$, on a $\sigma m = \sigma m' \in \sigma\Lambda = \Lambda$ car σ agit trivialement sur \tilde{N} . De plus, σ ne modifie pas le marquage des arêtes de \mathcal{G} , donc $\pi([\sigma s, \sigma s']) = \Lambda$.

Proposition A.10 *L'action de Σ sur S est simplement transitive.*

Démonstration. En fait les ensembles S et Σ sont en bijection. À tout $s \in S$ tel que $\omega(s) = \Lambda_1 \dots \Lambda_r$ on associe l'élément $\sigma = \sigma_{\Lambda_1} \dots \sigma_{\Lambda_r} \in \Sigma$ et réciproquement.

Pour montrer que l'action de Σ sur S est simplement transitive, il suffit, pour tout $s \in S$, de trouver un unique $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma s_0 = s$. Cet unique élément est précisément $\sigma = f(s)$, en notant f la bijection entre S et Σ . \square

On a vu ci-dessus comment le groupe \mathbb{G} agit sur la variété \mathcal{N} . On étudie maintenant un sous-groupe \mathbb{G}_d de \mathbb{G} et on montre qu'il est isomorphe au groupe $\pi_1(\overline{N}^d)$.

Définition On pose

$$\Sigma_d = \langle \sigma_{\Lambda}\sigma_{\Lambda'} \mid \Lambda, \Lambda' \in \mathcal{C} \rangle$$

C'est un sous-groupe d'indice deux de Σ . Il est en bijection avec $\{s \in S \mid d_{\mathcal{G}}(s, s_0) \in 2\mathbb{N}\}$ l'ensemble des sommets qui sont à distance paire du sommet de référence s_0 .

On définit ensuite $\mathbb{G}_d = \Sigma_d \rtimes_{\phi} \pi_1 N$ comme le produit semi-direct extérieur de Σ_d par $\pi_1 N$ relativement à l'action $\phi : \pi_1 N \rightarrow \text{Aut}(\Sigma_d)$ définie par

$$\forall \gamma \in \pi_1 N, \forall \Lambda, \Lambda' \in \mathcal{C}, \quad \phi(\gamma)(\sigma_{\Lambda} \sigma_{\Lambda'}) = \sigma_{\gamma \Lambda} \sigma_{\gamma \Lambda'}$$

Remarque – \mathbb{G}_d est un sous-groupe d'indice deux de \mathbb{G} . Ses éléments vérifient des relations similaires à celles du groupe \mathbb{G} , à savoir

$$\forall \gamma \in \pi_1 N, \forall \sigma_{\Lambda}, \sigma_{\Lambda'} \in \Sigma : \quad \gamma \sigma_{\Lambda} \sigma_{\Lambda'} \gamma^{-1} = \sigma_{\gamma \Lambda} \sigma_{\gamma \Lambda'}$$

La proposition suivante affirme que \mathbb{G}_d préserve les fibres du revêtement $p_{\mathcal{N}}$.

Proposition A.11 *L'application de revêtement $p_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \overline{N}^d$ est \mathbb{G}_d -invariante.*

Démonstration. Comme le groupe \mathbb{G}_d préserve les classes d'équivalence de \sim , il suffit de montrer que l'application $p_{\times} : \tilde{N} \times S \rightarrow \overline{N}^d$ est \mathbb{G}_d -invariante. Soient $(m, s) \in \tilde{N} \times S$ et $g \in \mathbb{G}_d$, on a $s \in S_{\epsilon}$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$. Alors $g(m, s) = (gm, gs)$ et $gs \in S_{\epsilon}$ car la distance de gs à s_0 a la même parité que celle de s à s_0 . De plus, $p(gm) = p(m)$ car \mathbb{G}_d préserve les fibres du revêtement $p : \tilde{N} \rightarrow N$. Ainsi $p_{\times}(g(m, s)) = (p(m), \epsilon) = p_{\times}(m, s)$. \square

Proposition A.12 *L'action de \mathbb{G}_d sur chaque fibre de $p_{\mathcal{N}}$ est simplement transitive.*

Démonstration. Fixons un point x_0 de \overline{N}^d . Le sous-ensemble $p_{\mathcal{N}}^{-1}(\{x_0\})$ de \mathcal{N} s'écrit aussi comme le produit cartésien $p^{-1}(\{x_0\}) \times S_0 \subset \tilde{N} \times S$ si l'on considère x_0 comme un point de N . Or l'action de $\pi_1 N$ est simplement transitive sur la fibre $p^{-1}(\{x_0\})$. De plus, l'action de Σ_d est simplement transitive sur S_0 et triviale sur \tilde{N} , car Σ agit simplement transitivement sur S (cf. proposition A.10).

Soient (\overline{x}_0, s_0) et (\overline{x}, s) dans $p^{-1}(\{x_0\}) \times S_0$. D'après ce qui précède, il existe un unique $\gamma \in \pi_1 N$ tel que $\gamma \overline{x}_0 = \overline{x}$. De plus, il existe un unique $\sigma \in \Sigma_d$ tel que $\sigma s_0 = s$. On pose $g = \sigma \gamma$, c'est l'unique élément de \mathbb{G}_d vérifiant $g(\overline{x}_0, s_0) = (\overline{x}, s)$ (car l'écriture d'un élément de \mathbb{G}_d sous la forme $\sigma \gamma$ est unique). \square

L'unicité du revêtement universel ainsi que les propositions A.11 et A.12 impliquent le résultat suivant qui achève la démonstration du théorème A.2.

Proposition A.13 *Les groupes \mathbb{G}_d et $\pi_1(\overline{N}^d)$ sont isomorphes.*

Bibliographie


- [BdlH04] Yves Benoist and Pierre de la Harpe. Adhérence de Zariski des groupes de Coxeter. *Compos. Math.*, 140(5) :1357–1366, 2004.
- [Ben60] Jean-Paul Benzécri. Sur les variétés localement affines et localement projectives. *Bull. Soc. Math. France*, 88 :229–332, 1960.
- [Ben97] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. *Geom. Funct. Anal.*, 7(1) :1–47, 1997.
- [Ben00] Yves Benoist. Automorphismes des cônes convexes. *Invent. Math.*, 141(1) :149–193, 2000.
- [Ben03] Yves Benoist. Convexes divisibles. II. *Duke Math. J.*, 120(1) :97–120, 2003.
- [Ben04] Yves Benoist. Convexes divisibles. I. pages 339–374, 2004.
- [Ben05] Yves Benoist. Convexes divisibles. III. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(5) :793–832, 2005.
- [Ben06] Yves Benoist. Convexes divisibles. IV. Structure du bord en dimension 3. *Invent. Math.*, 164(2) :249–278, 2006.
- [Ben08] Yves Benoist. A survey on divisible convex sets. In *Geometry, analysis and topology of discrete groups*, volume 6 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 1–18. Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [Bow12] B. H. Bowditch. Relatively hyperbolic groups. *Internat. J. Algebra Comput.*, 22(3) :1250016, 66, 2012.
- [Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [Bus55] Herbert Busemann. *The geometry of geodesics*. Academic Press Inc., New York, N. Y., 1955.
- [CG93] Suhyoung Choi and William M. Goldman. Convex real projective structures on closed surfaces are closed. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118(2) :657–661, 1993.
- [CLT15a] D. Cooper, D. D. Long, and S. Tillmann. On convex projective manifolds and cusps. *Adv. Math.*, 277 :181–251, 2015.
- [CLT15b] Daryl Cooper, Darren Long, and Stephan Tillmann. Deforming convex projective manifolds. *arXiv preprint arXiv :1511.06206*, 2015.

-
- [CM13] Mickaël Crampon and Ludovic Marquis. Un lemme de Kazhdan-Margulis-Zassenhaus pour les géométries de Hilbert. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 20(2) :363–376, 2013.
- [CM14] Mickaël Crampon and Ludovic Marquis. Finitude géométrique en géométrie de Hilbert. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 64(6) :2299–2377, 2014.
- [GM87] W. M. Goldman and J. J. Millson. Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space. *Invent. Math.*, 88(3) :495–520, 1987.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [Gui90] Yves Guivarc’h. Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(3) :483–512, 1990.
- [Guo14] Ren Guo. Characterizations of hyperbolic geometry among Hilbert geometries. In *Handbook of Hilbert geometry*, volume 22 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 147–158. Eur. Math. Soc., Zürich, 2014.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Kos68] J.-L. Koszul. Déformations de connexions localement plates. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 18(fasc. 1) :103–114, 1968.
- [Mar10] Ludovic Marquis. Espace des modules marqués des surfaces projectives convexes de volume fini. *Geom. Topol.*, 14(4) :2103–2149, 2010.
- [Mar12a] Ludovic Marquis. Exemples de variétés projectives strictement convexes de volume fini en dimension quelconque. *Enseign. Math. (2)*, 58(1-2) :3–47, 2012.
- [Mar12b] Ludovic Marquis. Surface projective convexe de volume fini. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 62(1) :325–392, 2012.
- [Mar14] Ludovic Marquis. Around groups in Hilbert geometry. In *Handbook of Hilbert geometry*, volume 22 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 207–261. Eur. Math. Soc., Zürich, 2014.
- [Ser71] Jean-Pierre Serre. Cohomologie des groupes discrets. pages 77–169. *Ann. of Math. Studies*, No. 70, 1971.
- [SM02] Edith Socié-Méthou. Caractérisation des ellipsoïdes par leurs groupes d’automorphismes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(4) :537–548, 2002.
- [Vey70] Jacques Vey. Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 24 :641–665, 1970.
- [VK67] È. B. Vinberg and V. G. Kac. Quasi-homogeneous cones. *Mat. Zametki*, 1 :347–354, 1967.
-

Cette thèse est consacrée à l'étude des variétés projectives strictement convexes de volume fini. Une telle variété est le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ d'un ouvert proprement convexe Ω de l'espace projectif \mathbb{RP}^{n-1} par un sous-groupe discret sans torsion Γ de $SL_n(\mathbb{R})$ qui préserve Ω .

Dans un premier temps, on étudie l'adhérence de Zariski des holonomies de variétés projectives strictement convexes de volume fini. Pour une telle variété $\Gamma \backslash \Omega$, on montre que, soit Γ est Zariski-dense dans $SL_n(\mathbb{R})$, soit l'adhérence de Zariski de Γ est conjuguée à $SO_{1,n-1}(\mathbb{R})$.

On s'intéresse ensuite à l'espace des modules des structures projectives strictement convexes de volume fini. On considère les représentations fidèles et discrètes $\rho : \Gamma \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ d'un groupe Γ pour lesquelles il existe un ouvert Ω_ρ préservé par $\rho(\Gamma)$ tel que le quotient $\rho(\Gamma) \backslash \Omega_\rho$ soit une variété projective strictement convexe de volume fini. On note $\beta_\Gamma \subset \text{Hom}(\Gamma, SL_n(\mathbb{R}))$ l'ensemble de ces représentations. En particulier, on montre que β_Γ est un fermé de l'espace des représentations.



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



Institut de Recherche
Mathématique Avancée

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg et CNRS
7 Rue René Descartes
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29
Fax 03 68 85 03 28
www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.unistra.fr

ISSN 0755-3390

IRMA 2017/002

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01556266>