



HAL
open science

Correspondances de Simpson p -adique et modulo p

Daxin Xu

► **To cite this version:**

Daxin Xu. Correspondances de Simpson p -adique et modulo p . Géométrie algébrique [math.AG]. Université Paris Saclay (COMUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLS133 . tel-01557497

HAL Id: tel-01557497

<https://theses.hal.science/tel-01557497>

Submitted on 6 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
de
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : Université Paris-Sud

Laboratoire d'accueil : Laboratoire Alexander Grothendieck (ERL 9216 CNRS)

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Daxin XU

Correspondances de Simpson p -adique et modulo p^n

Date de soutenance : 19 juin 2017

Après avis des rapporteurs :

ARTHUR OGUS (UNIVERSITÉ DE CALIFORNIE À BERKELEY)

TAKESHI TSUJI (UNIVERSITÉ DE TOKYO)

Jury de soutenance :

CHRISTOPHE BREUIL	(UNIVERSITÉ PARIS-SUD)	Président
AHMED ABBES	(INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES)	Directeur de thèse
OLIVIER BRINON	(UNIVERSITÉ DE BORDEAUX)	Invité
MICHEL GROS	(UNIVERSITÉ DE RENNES 1)	Examineur
ARTHUR OGUS	(UNIVERSITÉ DE CALIFORNIE À BERKELEY)	Rapporteur
TAKESHI TSUJI	(UNIVERSITÉ DE TOKYO)	Rapporteur



Titre : Correspondances de Simpson p -adique et modulo p^n

Résumé

Cette thèse est consacrée à deux variantes arithmétiques de la correspondance de Simpson.

Dans la première partie, on compare la correspondance de Simpson p -adique à un analogue p -adique de la correspondance de Narasimhan–Seshadri pour les courbes sur des corps p -adiques dû à Deninger et Werner. Narasimhan et Seshadri ont établi une correspondance entre les fibrés vectoriels stables de degré zéro et les représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental topologique pour une courbe complexe propre et lisse. Soit X une courbe propre plat p -adique à fibre géométrique générique lisse et connexe. Par transport parallèle, Deninger et Werner ont associé fonctoriellement à chaque fibré vectoriel sur X dont la réduction est fortement semi-stable de degré 0 une représentation p -adique du groupe fondamental de la fibre géométrique générique de X . Ils se sont posés quelques questions : leur foncteur est-il pleinement fidèle ? la cohomologie des systèmes locaux fournis par leur foncteur admet-elle une filtration de Hodge-Tate ? et enfin, leur construction est-elle compatible avec la correspondance de Simpson p -adique développée par Faltings ? On répond positivement à ces questions.

La seconde partie est consacrée à la construction d'un relèvement de la transformée de Cartier d'Ogus–Vologodsky modulo p^n . Soient W l'anneau des vecteurs de Witt d'un corps parfait de caractéristique $p > 0$, \mathfrak{X} un schéma formel lisse sur W , \mathfrak{X}' le changement de base de \mathfrak{X} par l'endomorphisme de Frobenius de W , \mathfrak{X}'_2 la réduction modulo p^2 de \mathfrak{X}' et X la fibre spéciale de \mathfrak{X} . On relève la transformée de Cartier d'Ogus–Vologodsky définie par \mathfrak{X}'_2 . Plus précisément, on construit un foncteur de la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -modules de p^n -torsion à p -connexion intégrable dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules de p^n -torsion à connexion intégrable, chacune étant soumise à des conditions de nilpotence appropriées. S'il existe un relèvement $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ du morphisme de Frobenius relatif de X , notre foncteur est compatible avec une construction "locale" de Shiho définie par F . Comme application de la transformée de Cartier modulo p^n , on donne une nouvelle interprétation des modules de Fontaine relatifs introduits par Faltings et du calcul de leur cohomologie.

Mots-clefs : théorie de Hodge p -adique, cohomologie cristalline, cohomologie p -adique, géométrie algébrique arithmétique.

Title : p -adic and modulo p^n Simpson's correspondences

Abstract

This thesis is devoted to two arithmetic variants of Simpson's correspondence.

In the first part, I compare the p -adic Simpson correspondence with a p -adic analogue of the Narasimhan–Seshadri's correspondence for curves over p -adic fields due to Deninger and Werner. Narasimhan and Seshadri established a correspondence between stable bundles of degree zero and irreducible unitary representations of the topological fundamental group for a complex smooth proper curve. Let X be a p -adic flat proper curve with smooth and connected geometric generic fiber. Using parallel transport, Deninger and Werner associated functorially to every vector bundle on X whose reduction is strongly semi-stable of degree 0 a p -adic representation of the fundamental group of the geometric generic fiber of X . They asked several questions about this functor: Is their functor fully faithful? Does the cohomology of the local systems produced by this functor admit a Hodge-Tate filtration? Is their construction compatible with the p -adic Simpson correspondence developed by Faltings? We answer positively these questions.

The second part is devoted to the construction of a lifting of the Cartier transform of Ogus-Vologodsky modulo p^n . Let W be the ring of the Witt vectors of a perfect field of characteristic p , \mathfrak{X} a smooth formal scheme over W , \mathfrak{X}' the base change of \mathfrak{X} by the Frobenius morphism of W , \mathfrak{X}'_2 the reduction modulo p^2 of \mathfrak{X}' and X the special fiber of \mathfrak{X} . We lift the Cartier transform of Ogus-Vologodsky defined by \mathfrak{X}'_2 modulo p^n . More precisely, we construct a functor from the category of p^n -torsion $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -modules with integrable p -connection to the category of p^n -torsion $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules with integrable connection, each subject to suitable nilpotence conditions. If there exists a lifting $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ of the relative Frobenius morphism of X , our functor is compatible with a functor constructed by Shiho from F . As an application, we give a new interpretation of Faltings' relative Fontaine modules and of the computation of their cohomology.

Key-words : p -adic Hodge theory, crystalline cohomology, p -adic cohomology, arithmetic algebraic geometry.

Remerciements.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Ahmed Abbas pour avoir accepté de diriger ma thèse et pour m'avoir proposé des sujets passionnants. Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans les suggestions pertinentes qu'il m'a faites, sa générosité dans la partage de ses connaissances et de ses idées mathématiques et la patience qu'il a montrée pendant nos discussions. Ses nombreuses remarques et critiques instructives sur les versions préliminaires de ce texte ont beaucoup amélioré la structure de l'exposition, la rigueur des démonstrations, ainsi que la qualité de la langue. C'est une grande chance et un honneur de pouvoir faire mes études et travaux de recherche en mathématiques avec lui.

Je remercie sincèrement Arthur Ogus et Takeshi Tsuji d'avoir accompli l'ardu travail de rapporteurs et d'avoir effectué un long voyage pour participer à ma soutenance. Leurs commentaires et suggestions, grâce auxquelles j'ai pu améliorer cette thèse, m'ont été précieux.

Je suis extrêmement honoré d'avoir Christophe Breuil, Olivier Brinon, Jean-Marc Fontaine et Michel Gros dans le jury de ma thèse. Je tiens à remercier particulièrement Michel Gros pour ses nombreux commentaires sur cette thèse.

Je suis reconnaissant envers Bhargav Bhatt, Dennis Gaitsgory et Yichao Tian pour les discussions et les remarques sur mes articles.

Je tiens à remercier Huayi Chen et Qingchun Tian de m'avoir encouragé à poursuivre mes études en France. J'ai apprécié le charme et le professionnalisme de tous mes professeurs à l'École normale supérieure et à l'Université Paris-Sud. Je remercie particulièrement mes tuteurs à l'ÉNS : Lie Fu et Olivier Wittenberg.

Je remercie tous les membres de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, où j'ai effectué mon travail de thèse. J'ai eu de nombreuses conversations agréables pendant les déjeuners avec Piotr Achinger, Ildar Gaisin, Quentin Guignard, Yang Lan, Jie Lin, Jun Nian, Conglin Qiu et Jinbo Ren.

Je remercie tous mes amis à Paris avec qui j'ai partagé mathématiques et bons moments : Xiaohua Ai, Louis-Gabriel Bonicoli, Yang Cao, Huan Chen, Rui Chen, Yiwen Ding, Lie Fu, Ziyang Gao, Weikun He, Haoyu Hu, Zhizhong Huang, Fangzhou Jin, Yang Lan, Huajie Li, Xinyi Li, Yongqi Liang, Jie Lin, Shen Lin, Chunhui Liu, Linyuan Liu, Shinan Liu, Ze Le, Wenhao Ou, Yi Pan, Zicheng Qian, Teng Qin, Jinbo Ren, Ruoci Sun, Li Tang, Haoran Wang, Hua Wang, Shanwen Wang, Xiaozong Wang, Yilin Wang, Hao Wu, Shengquan Xiang, Junyi Xie, Songyan Xie, Disheng Xu, Cong Xue, Ruotao Yang, Lizao Ye, Yimu Yin, Hongjie Yu, Yue Yu, Yeping Zhang, Zhiyuan Zhang, Zihui Zhao, Hui Zhu et Jialiang Zou.

J'exprime ma reconnaissance du fond du cœur à mes parents pour leur soutien constant. Enfin, merci à Shanshan Lu et Horton pour ces beaux moments passés ensemble.

Table des matières

Résumé	3
Remerciements	5
Table des matières	9
Introduction générale	9
1. Transport parallèle et correspondance de Simpson p -adique	12
2. Relèvement de la transformée de Cartier d’Ogus–Vologodsky modulo p^n	15
Bibliographie	23
Chapitre 1. Transport parallèle et correspondance de Simpson p -adique	25
1. Introduction	27
2. Notations et préliminaires	31
3. Représentations à coefficients dans les modules de type α -fini	36
4. Compléments de géométrie rigide	43
5. Rappel sur les courbes	44
6. Correspondance de Deninger-Werner	48
7. Topos annelé de Faltings	51
8. Correspondance de Deninger-Werner via le topos annelé de Faltings	61
9. Un énoncé de descente pour les fibrés vectoriels de Deninger-Werner	70
10. Fibrés vectoriels et représentations de Weil-Tate	75
11. Correspondance de Simpson p -adique pour les représentations de Weil-Tate	82
12. Faisceaux de α -modules	85
13. Déformations des faisceaux de α -modules	95
14. Déformations des représentations et déformations des α -modules de Faltings	100
15. Appendice I. Compléments d’algèbre homologique	103
16. Appendice II. Admissibilité des fibrés vectoriels de Deninger-Werner : une démonstration simplifiée, d’après Tsuji	105
Bibliographie	111
Chapitre 2. Lifting the Cartier transform of Ogus–Vologodsky modulo p^n	113
1. Introduction	115
2. Notations and conventions	122
3. Blow-ups and dilatations	123
4. Hopf algebras and groupoids	127
5. Connections and stratifications	133
6. Local constructions of Shiho	140
7. Oyama topoi	144
8. Crystals in Oyama topoi	152
9. Cartier transform of Ogus–Vologodsky	162
10. Prelude on rings of differential operators	170

11. Comparison with the Cartier transform of Ogus–Vologodsky	178
12. Fontaine modules	188
13. The Fontaine module structure on the crystalline cohomology of a Fontaine module	199
Bibliography	207

Introduction générale

Au début des années 90, Simpson [24] a construit des équivalences de catégories entre la catégorie des représentations linéaires de dimension finie (à valeurs complexes) du groupe fondamental topologique d'une variété complexe projective et lisse X , celle des fibrés à connexion intégrable sur X et celle des fibrés de Higgs semi-stables de classes de Chern nulles sur X . Sa théorie est un analogue non-abélien de la théorie de Hodge.

Récemment, inspiré par ces travaux, Faltings a développé une théorie analogue pour les systèmes locaux p -adiques sur les variétés définies sur des corps p -adiques [12], appelée *correspondance de Simpson p -adique*. Simultanément, Ogus et Vologodsky ont établi un analogue de la correspondance de Simpson pour les modules à connexion intégrable en caractéristique positive [20], appelée *transformée de Cartier*. Cette thèse porte sur ces deux variantes arithmétiques des résultats de Simpson. Dans la première partie [I], je compare la correspondance de Simpson p -adique à un analogue p -adique de la correspondance de Narasimhan et Seshadri pour les courbes sur des corps p -adiques dû à Deninger et Werner [8]. La seconde partie [II] est consacrée à la construction d'un relèvement de la transformée de Cartier modulo p^n .

0.1. Narasimhan et Seshadri [19] ont établi en 1965 une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental topologique d'une surface de Riemann compacte X de genre ≥ 2 et l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels stables de degré 0 sur X . Deninger et Werner ont développé récemment un analogue partiel pour les courbes p -adiques [8]. Leur construction est basée sur la notion de fibré vectoriel *fortement semi-stable* sur une courbe en caractéristique $p > 0$. Rappelons qu'un fibré vectoriel sur une courbe X propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique p est dit *fortement semi-stable* si ses images inverses par toutes les puissances entières du Frobenius absolu de X sont semi-stables.

Soient K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0 de corps résiduel une clôture algébrique d'un corps fini \mathbb{F}_p , \bar{K} une clôture algébrique de K , \mathfrak{C} le complété p -adique de \bar{K} . On note \mathcal{O}_K (resp. $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, resp. \mathfrak{o}) l'anneau de valuation de K (resp. \bar{K} , resp. \mathfrak{C}). Soient C une \bar{K} -courbe propre et lisse, \bar{x} un point géométrique de C , $\pi_1(C, \bar{x})$ le groupe fondamental étale de C en \bar{x} et $\check{C} = C \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$. On dit qu'un fibré vectoriel \mathcal{F} sur \check{C} est de *Deninger-Werner* s'il s'étend en un fibré vectoriel sur un modèle semi-stable de \check{C} sur \mathfrak{o} dont la réduction est fortement semi-stable de degré 0 ([8] Définition 6). On note $\mathfrak{W}_C^{\text{DW}}$ la catégorie de ces fibrés et $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ la catégorie des \mathfrak{C} -représentations continues p -adiques de $\pi_1(C, \bar{x})$ sur des \mathfrak{C} -espaces vectoriels de dimension finie. Par transport parallèle, Deninger et Werner ont construit un foncteur :

$$(0.1.1) \quad \mathbb{V} : \mathfrak{W}_C^{\text{DW}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x})).$$

Inspirés par le cas complexe, ils ont posé quelques questions concernant ce foncteur :

- (i) est-il pleinement fidèle ?
- (ii) est-il compatible avec la correspondance de Simpson p -adique introduite par Faltings [12] ?
- (iii) la cohomologie des systèmes locaux fournis par ce foncteur admet-elle une filtration de Hodge-Tate ?

Dans la première partie, on répond à ces questions de manière positive.

0.2. Dans [20], Ogus et Vologodsky ont établi un analogue de la correspondance de Simpson pour les modules à connexion intégrable en caractéristique positive, ainsi qu'une extension des résultats de Deligne et Illusie exposés ci-après au cas de la cohomologie de de Rham avec coefficients.

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, W l'anneau des vecteurs de Witt sur k , X un schéma lisse sur k et X' le changement de base de X par le morphisme de Frobenius de k . On pose $W_2 = W/p^2 W$ et on désigne par $F_{X/k} : X \rightarrow X'$ le morphisme de Frobenius relatif de X . Deligne et Illusie [6] ont démontré les résultats suivants :

- (i) s'il existe des W_2 -schémas lisses \tilde{X} et \tilde{X}' et un W_2 -morphisme $\tilde{F} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ qui relève $F_{X/k}$, alors \tilde{F} induit un quasi-isomorphisme :

$$(0.2.1) \quad \bigoplus_{i \geq 0} \Omega_{X'/k}^i[-i] \xrightarrow{\sim} F_{X/k*}(\Omega_{X/k}^\bullet, d),$$

où $\Omega_{X/k}^\bullet$ désigne le complexe de de Rham de X sur k ;

- (ii) si on suppose seulement l'existence d'un relèvement lisse \tilde{X}' de X' sur W_2 , alors il existe un isomorphisme dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{X'}$ -modules $D^b(\mathcal{O}_{X'})$

$$(0.2.2) \quad \bigoplus_{i=1}^{p-1} \Omega_{X'/k}^i[-i] \xrightarrow{\sim} F_{X/k*}(\tau_{<p}(\Omega_{X/k}^\bullet, d)),$$

où $\tau_{<p}$ désigne le tronqué d'un complexe en degrés $< p$.

On suppose qu'il existe un relèvement lisse \tilde{X}' de X' sur W_2 comme dans le cas (ii). Le résultat principal d'Ogus–Vologodsky est la construction d'un foncteur appelé *transformée de Cartier*, de la catégorie $\text{HIG}(X'/k)$ des modules de Higgs sur X'/k dans la catégorie $\text{MIC}(X/k)$ des \mathcal{O}_X -modules à connexion intégrable relative à k , chacune étant soumise à des conditions de nilpotence appropriées.

La relation entre la correspondance de Simpson p -adique développée par Faltings [12] et la transformée de Cartier n'est pas encore comprise. La première difficulté est de relever la transformée de Cartier modulo p^n . Shiho [23] a construit un relèvement "local" de la transformée de Cartier modulo p^n sous l'hypothèse d'existence d'un relèvement du morphisme de Frobenius relatif modulo p^{n+1} comme dans le cas (i) ci-dessus. Dans [21], Oyama a donné une nouvelle construction de la transformée de Cartier d'Ogus–Vologodsky comme l'image inverse d'un morphisme de topos. Son travail est inspiré par l'approche de Tsuji pour la correspondance de Simpson p -adique ([2] IV).

Dans la seconde partie de cette thèse, intitulée *Lifting the Cartier transform of Ogus–Vologodsky modulo p^n* , on utilise les topos d'Oyama pour "recoller" le foncteur de Shiho et obtenir un relèvement de la transformée de Cartier modulo p^n sous l'hypothèse que X se relève en un schéma formel lisse sur W . Plus précisément, soient \mathfrak{X} un schéma formel lisse sur W , \mathfrak{X}' le changement de base de \mathfrak{X} par le morphisme de Frobenius de W , \mathfrak{X}'_2 la réduction modulo p^2 de \mathfrak{X}' et X la fibre spéciale de \mathfrak{X} . On relève la transformée de Cartier d'Ogus–Vologodsky définie par \mathfrak{X}'_2 . On construit un foncteur de la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -modules de p^n -torsion à p -connexion intégrable dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules de p^n -torsion à connexion intégrable, chacune étant soumise à des conditions de nilpotence appropriées. S'il existe un relèvement $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ du morphisme de Frobenius relatif de X , notre foncteur est compatible avec le foncteur de Shiho induit par F . Comme application de la transformée de Cartier modulo p^n , on donne une nouvelle interprétation des modules de Fontaine relatifs introduits par Faltings [10] et du calcul de leur cohomologie.

1. Transport parallèle et correspondance de Simpson p -adique

1.1. Soient K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0 de corps résiduel une clôture algébrique d'un corps fini \mathbb{F}_p , \bar{K} une clôture algébrique de K , \mathfrak{C} le complété p -adique de \bar{K} . On note \mathcal{O}_K (resp. $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, resp. \mathfrak{o}) l'anneau de valuation de K (resp. \bar{K} , resp. \mathfrak{C}). On pose $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et on note s (resp. η) le point fermé (resp. générique) de S et $\bar{\eta}$ le point géométrique de S associé à \bar{K} .

Soient X une S -courbe plate et propre à fibre générique lisse et géométriquement connexe et \bar{x} un point géométrique de $X_{\bar{\eta}}$. On dit qu'un fibré vectoriel \mathcal{F} sur $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{o}$ est de *Deninger–Werner* si l'image inverse de \mathcal{F} sur la normalisation de chaque composante irréductible de X_s est fortement semi-stable de degré 0. À un tel fibré \mathcal{F} , Deninger et Werner [8] associent une représentation p -adique du groupe fondamental étale $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ définie comme suit.

Pour tout entier $n \geq 1$, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe un morphisme propre $\varphi : X' \rightarrow X$ tel que φ_{η} soit étale fini, que X' soit une S -courbe semi-stable et que l'image inverse de $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}/p^n \mathcal{F}$ par la réduction modulo p^n de φ soit triviale. Le "transport parallèle" permet alors de construire une représentation de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ sur la fibre de \mathcal{F}_n en \bar{x} . Par passage à la limite projective, on obtient une \mathfrak{o} -représentation continue p -adique de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$.

1.2. Soient C une \bar{K} -courbe propre, lisse et connexe, $\check{C} = C \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$ et \bar{x} un point géométrique de C . On dit qu'un fibré vectoriel F sur \check{C} est de *Deninger–Werner* si, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe un S -modèle propre et plat X de C et un fibré vectoriel de Deninger–Werner \mathcal{F} sur $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{o}$ de fibre générique F . On note $\mathfrak{V}_C^{\text{DW}}$ la catégorie de tels fibrés et $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ la catégorie des \mathfrak{C} -représentations continues p -adiques de $\pi_1(C, \bar{x})$ sur des \mathfrak{C} -espaces vectoriels de dimension finie. La construction de Deninger–Werner

induit alors un foncteur

$$(1.2.1) \quad \mathbb{V} : \mathfrak{R}_C^{\text{DW}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{e}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x})).$$

Le but de la première partie de cette thèse est de comparer ce foncteur à la correspondance de Simpson p -adique et de répondre aux questions de Deninger et Werner énoncées dans (0.1).

1.3. La construction de Faltings, appelée classiquement *correspondance de Simpson p -adique*, utilise sa théorie des extensions presque-étales et prolonge ses travaux en théorie de Hodge p -adique, en particulier ceux qui concernent la décomposition de Hodge-Tate pour une variété propre et lisse sur un corps p -adique [9, 11]. L'objet principal d'étude est la notion de *représentation généralisée*, qui étend celle de représentation p -adique du groupe fondamental géométrique. Ce sont, en termes simplifiés, des représentations semi-linéaires p -adiques continues du groupe fondamental géométrique dans des modules sur un certain anneau p -adique muni d'une action continue du groupe fondamental géométrique. Faltings construit un foncteur de la catégorie de ces représentations dans la catégories des fibrés de Higgs [12]. Rappelons que si X est un schéma lisse de type fini sur un corps F , un fibré de Higgs sur X est un couple (M, θ) formé d'un fibré vectoriel M sur X et d'un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\theta : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/F}^1$, appelé *champ de Higgs*, tel que $\theta \wedge \theta = 0$.

1.4. Nous utiliserons la variante développée par Abbes et Gros [2], qui s'applique à une classe de représentations généralisées vérifiant une condition d'admissibilité à la Fontaine, dites de *Dolbeault*. Nous introduisons dans le même esprit une autre condition d'admissibilité, plus forte que celle de Dolbeault, que nous qualifions de *Weil-Tate*. Elle correspond aux fibrés de Higgs à champ de Higgs nul dans la correspondance de Simpson p -adique.

Par ailleurs, en s'inspirant de la construction de Deninger-Werner, nous associons à certaines représentations généralisées, qualifiées de *potentiellement libres de type fini*, des représentations continues p -adiques du groupe fondamental géométrique. Les fibrés vectoriels de Deninger-Werner définissent naturellement des représentations généralisées potentiellement libres de type fini, et on retrouve ainsi le foncteur de Deninger-Werner. Les représentations généralisées de Weil-Tate sont aussi potentiellement libres de type fini. Le principal problème est de comparer ces deux sous-catégories. Notre principal résultat est que les représentations généralisées fournies par les fibrés vectoriels de Deninger-Werner sont de Weil-Tate. Ce résultat nous permet de répondre aux trois questions posées par Deninger et Werner.

1.5. Pour définir la notion de représentation généralisée, on a besoin du *topos de Faltings*. Soit X un S -schéma de type fini à réduction semi-stable tel que $X_{\bar{\eta}}$ soit connexe. On désigne par E la catégorie des morphismes de schémas $V \rightarrow U$ au-dessus du morphisme canonique $X_{\bar{\eta}} \rightarrow X$ tels que le morphisme $U \rightarrow X$ soit étale et que le morphisme $V \rightarrow U_{\bar{\eta}}$ soit fini étale. On équipe E de la *topologie co-évanescence* engendrée par les recouvrements $\{(V_i \rightarrow U_i) \rightarrow (V \rightarrow U)\}_{i \in I}$ des deux types suivants :

- (v) $U_i = U$ pour tout $i \in I$, et $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ est un recouvrement.
- (c) $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ est un recouvrement et $V_i = U_i \times_U V$ pour tout $i \in I$.

Le site E ainsi défini est appelé *site de Faltings de X* . On désigne par \tilde{E} et l'on appelle *topos de Faltings de X* , le topos des faisceaux d'ensembles sur E .

Pour tout schéma Y , on note $\mathbf{\hat{E}t}_{/Y}$ (resp. $\mathbf{\hat{E}t}_{f/Y}$) la catégorie des schémas étales (resp. finis et étales) au-dessus de Y munie de la topologie étale, et $Y_{\text{ét}}$ (resp. $Y_{\text{fét}}$) le topos des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{\hat{E}t}_{/Y}$ (resp. $\mathbf{\hat{E}t}_{f/Y}$). Les foncteurs

$$(1.5.1) \quad \mathbf{\hat{E}t}_{f/X_{\bar{\eta}}} \rightarrow E \quad V \mapsto (V \rightarrow X)$$

$$(1.5.2) \quad \mathbf{\hat{E}t}_{/X} \rightarrow E \quad U \mapsto (U_{\bar{\eta}} \rightarrow U)$$

sont continus et exacts à gauches. Ils définissent donc deux morphismes de topos

$$(1.5.3) \quad \beta : \tilde{E} \rightarrow X_{\bar{\eta}, \text{fét}},$$

$$(1.5.4) \quad \sigma : \tilde{E} \rightarrow X_{\text{ét}}.$$

Pour chaque objet $(V \rightarrow U)$ de E , on note \overline{U}^V la clôture intégrale de $\overline{U} = U \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ dans V . On désigne par $\overline{\mathcal{B}}$ le préfaisceau d'anneaux sur E défini pour tout $(V \rightarrow U) \in \mathbf{Ob}(E)$ par

$$(1.5.5) \quad \overline{\mathcal{B}}(V \rightarrow U) = \Gamma(\overline{U}^V, \mathcal{O}_{\overline{U}^V}).$$

En fait, celui-ci est un faisceau sur E ([2] III.8.16). Les représentations généralisées sont essentiellement les $\overline{\mathcal{B}}$ -modules de \tilde{E} . Cependant, pour tenir compte de la topologie p -adique, nous travaillons avec le système projectif des anneaux $\overline{\mathcal{B}}_n = \overline{\mathcal{B}}/p^n \overline{\mathcal{B}}$, $n \geq 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $\overline{\mathcal{B}}_n$ est un objet de la fibre spéciale \tilde{E}_s de \tilde{E} , c'est-à-dire du sous-topos fermé de \tilde{E} complémentaire de l'ouvert $\sigma^*(X_\eta)$. Celui-ci s'insère dans un diagramme commutatif à isomorphisme canonique près

$$(1.5.6) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{E}_s & \xrightarrow{\delta} & \tilde{E} \\ \sigma_s \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X_{s,\text{ét}} & \xrightarrow{a} & X_{\text{ét}} \end{array}$$

où a est l'injection canonique, δ est le plongement canonique et σ_s est induit par σ ([I] 7.11).

1.6. Les systèmes projectifs d'objets de \tilde{E}_s indexés par l'ensemble ordonné des entiers naturels \mathbb{N} , forment un topos que l'on note $\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$. On le munit de l'anneau $\check{\mathcal{B}} = (\overline{\mathcal{B}}_n)_{n \geq 1}$ de $\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$. On dit qu'un $\check{\mathcal{B}}$ -module $(M_n)_{n \geq 1}$ est *adique* si, pour tout entier $i \geq 1$, le morphisme $M_{i+1} \otimes_{\overline{\mathcal{B}}_{i+1}} \overline{\mathcal{B}}_i \rightarrow M_i$, déduit du morphisme de transition $M_{i+1} \rightarrow M_i$, est un isomorphisme. On note $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$ la catégorie des $\check{\mathcal{B}}$ -modules à isogénie près.

On pose $C = X_{\overline{\eta}}$ et $\check{C} = C \otimes_{\overline{K}} \mathfrak{C}$. L'image inverse associée au morphisme β (1.5.3) induit un foncteur

$$(1.6.1) \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \overline{x})) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}).$$

Si X est propre sur S , d'après le principal théorème de comparaison de Faltings (cf. [11] Theorem 8, [1] 2.4.16), celui-ci est pleinement fidèle. Par ailleurs, l'image inverse associée au morphisme σ (1.5.4) induit un foncteur

$$(1.6.2) \quad \mathbf{Vect}_{\check{C}} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}),$$

où la source désigne la catégorie des fibrés vectoriels sur \check{C} .

On dit qu'un fibré vectoriel sur \check{C} et une \mathfrak{C} -représentation continue V de $\pi_1(C, \overline{x})$ sont $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associés si leurs images par les foncteurs (1.6.2) et (1.6.1) dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$ sont isomorphes.

1.7. Soient C une courbe propre et lisse sur \overline{K} , \overline{x} un point géométrique de C et $\check{C} = C \otimes_{\overline{K}} \mathfrak{C}$. On dit qu'un fibré vectoriel F sur \check{C} est de *Weil-Tate* si, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe un S -modèle semi-stable X de C et une \mathfrak{C} -représentation continue V de $\pi_1(C, \overline{x})$ tels que F et V soient $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associés dans le topos annelé de Faltings relatif à X . On définit symétriquement la notion de \mathfrak{C} -représentation continue de Weil-Tate de $\pi_1(C, \overline{x})$. On note $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}}$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C, \overline{x}))$) la catégorie de ces fibrés (resp. \mathfrak{C} -représentations). On montre le résultat suivant :

Théorème 1.8 ([I] 10.19). *Il existe des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre*

$$(1.8.1) \quad \mathcal{V} : \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C, \overline{x})) \quad \text{et} \quad \mathcal{T} : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C, \overline{x})) \rightarrow \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}}.$$

Le foncteur \mathcal{V} est construit par la méthode de Deninger-Werner via le topos de Faltings ([I] § 8). Le foncteur \mathcal{T} est induit par le foncteur image directe du morphisme σ (1.5.4) et le foncteur image inverse du morphisme β (1.5.3).

Notre principal résultat est le suivant.

Théorème 1.9 ([I] 14.5, 14.6). (i) *Tout fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{C} est de Weil-Tate.*
(ii) *La restriction du foncteur \mathcal{V} à la catégorie $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}}$ s'identifie au foncteur \mathbb{V} (1.2.1).*

La condition de Deninger-Werner peut se voir comme une condition d’admissibilité à la Fontaine. Elle présente toutefois des différences notables avec la condition d’admissibilité de Weil-Tate. D’une part, le fibré est trivialisé par une courbe semi-stable au-dessus de X qui est finie et étale au-dessus de C , mais qui n’est a priori pas finie au dessus de X . D’autre part, on a besoin d’une infinité de tels revêtements, un pour chaque réduction modulo p^n , $n \geq 1$. La première difficulté peut être surmontée grâce à un résultat de Raynaud sur le quotient d’une courbe semi-stable par un groupe fini [22]. La seconde difficulté est plus sérieuse. On la surmonte grâce à la théorie des déformations des presque-modules dans le sens de Faltings ([I] 13.7).

1.10. D’après 1.8 et 1.9, on en déduit la pleine fidélité du foncteur de Deninger-Werner \mathbb{V} (1.2.1). On démontre que pour qu’une \mathfrak{C} -représentation continue V de $\pi_1(C, \bar{x})$ soit de Weil-Tate, il faut et il suffit que son image, par le foncteur (1.6.1), soit de Dolbeault et que le fibré de Higgs associé par la correspondance de Simpson p -adique soit muni du champ de Higgs nul ([I] 11.7). De plus, le fibré vectoriel sous-jacent à ce fibré de Higgs est donné par $\mathcal{S}(V)$ (1.8.1). Cela signifie que l’équivalence de catégories \mathcal{S} (1.8.1) n’est autre que la correspondance de Simpson p -adique pour les fibrés de Higgs à champ de Higgs nul. La condition d’admissibilité de Weil-Tate nous permet de construire une filtration de Hodge-Tate pour la cohomologie galoisienne des représentations de Weil-Tate ([I] 11.8).

2. Relèvement de la transformée de Cartier d’Ogus–Vologodsky modulo p^n

2.1. Commençons par rappeler un cas particulier de la transformée de Cartier d’Ogus–Vologodsky [20]. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, W l’anneau des vecteurs de Witt de k , X un schéma lisse sur k et X' le changement de base de X par le morphisme de Frobenius de k . On suppose qu’il existe un relèvement lisse \tilde{X}' de X' sur W_2 .

Soit ℓ un entier ≥ 0 . On dit qu’un module de Higgs (M, θ) sur X/k est *nilpotent de niveau $\leq \ell$* s’il existe une filtration croissante N_\bullet de M telle que $N_0 = 0$, $N_{\ell+1} = M$ et que $\theta(N_i) \subset N_{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1$ pour tout i . On dit qu’un \mathcal{O}_X -module M à connexion intégrable ∇ est *nilpotent de niveau $\leq \ell$* si sa p -courbure est nilpotente de niveau $\leq \ell$ (en tant que champ de F-Higgs) (cf. [16] 5.6). On désigne par $\text{MIC}_\ell(X/k)$ (resp. $\text{HIG}_\ell(X'/k)$) la catégorie des \mathcal{O}_X -modules à connexion intégrable nilpotents de niveau $\leq \ell$ (resp. modules de Higgs sur X'/k nilpotents de niveau $\leq \ell$). La transformée de Cartier induit une équivalence de catégories ([20] Thm. 2.8)

$$(2.1.1) \quad C_{\tilde{X}'}^{-1} : \text{HIG}_{p-1}(X'/k) \xrightarrow{\sim} \text{MIC}_{p-1}(X/k).$$

Considérant les $\mathcal{O}_{X'}$ -modules comme des modules de Higgs sur X'/k muni du champ de Higgs nul, l’équivalence précédente permet de retrouver la descente de Cartier ([16] 5.1).

Soient (M', θ) un module de Higgs nilpotent sur X'/k de niveau $\ell < p$ et $(M, \nabla) = C_{\tilde{X}'}^{-1}(M', \theta)$. Le morphisme θ s’insère dans un complexe, appelé *le complexe de Dolbeault de (M', θ)* dans ([24] p. 24 et [2] I.2.3) ou *le complexe de Higgs de (M', θ)* dans ([20] p. 2),

$$M' \xrightarrow{\theta} M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^1 \xrightarrow{\wedge \theta} M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^2 \xrightarrow{\wedge \theta} \dots$$

Il existe alors un isomorphisme dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}_{X'})$ des $\mathcal{O}_{X'}$ -modules ([20] 2.27)

$$(2.1.2) \quad \tau_{< p-\ell}(M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^\bullet) \xrightarrow{\sim} F_{X/k*}(\tau_{< p-\ell}(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet)),$$

où $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet$ désigne le complexe de de Rham de (M, ∇) .

2.2. La construction locale de Shiho du relèvement de la transformée de Cartier modulo p^n repose sur la notion de λ -connexion introduite par Deligne. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme lisse de schémas, M un \mathcal{O}_X -module et $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Une λ -connexion sur M relative à S est un morphisme $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ -linéaire $\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ tel que $\nabla(xm) = x\nabla(m) + \lambda m \otimes d(x)$ pour toutes les sections locales x de \mathcal{O}_X et m de M . Classiquement, les 1-connexions sont appelées connexions. L’intégrabilité des λ -connexions est définie de la même manière que pour les connexions. Les 0-connexions intégrables ne sont autre que les

champs de Higgs. On note $\text{MIC}(X/S)$ (resp. $\lambda\text{-MIC}(X/S)$) la catégorie des \mathcal{O}_X -modules à connexion (resp. λ -connexion) intégrable relative à S .

2.3. Dans la suite, si nous utilisons une lettre gothique \mathfrak{X} pour désigner un W -schéma formel adique, la lettre romaine correspondante T désignera sa fibre spéciale. Soient \mathfrak{X} un schéma formel lisse sur W et n un entier ≥ 1 . On désigne par $\sigma : W \rightarrow W$ l'automorphisme de Frobenius de W , par \mathfrak{X}' le changement de base de \mathfrak{X} par σ et par \mathfrak{X}_m la réduction \mathfrak{X} modulo p^m pour tout entier $m \geq 1$. Dans [23], Shiho a construit un relèvement "local" de la transformée de Cartier d'Ogus–Vologodsky modulo p^n sous l'hypothèse qu'il existe un W_{n+1} -relèvement $F_{n+1} : \mathfrak{X}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{X}'_{n+1}$ du morphisme de Frobenius relatif $F_{X/k} : X \rightarrow X'$.

L'image du morphisme canonique $dF_{n+1} : F_{n+1}^*(\Omega_{\mathfrak{X}_{n+1}/W_{n+1}}^1)$ est contenue dans $p\Omega_{\mathfrak{X}_{n+1}/W_{n+1}}^1$. Divisant par p , ce morphisme induit un morphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -linéaire

$$dF_{n+1}/p : F_n^*(\Omega_{\mathfrak{X}'_n/W_n}^1) \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}_n/W_n}^1.$$

Shiho a défini un foncteur ([23] 2.5)

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} \Phi_n : p\text{-MIC}(\mathfrak{X}'_n/W_n) &\rightarrow \text{MIC}(\mathfrak{X}_n/W_n) \\ (M', \nabla') &\mapsto (F_n^*(M'), \nabla) \end{aligned}$$

où $\nabla : F_n^*(M') \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}_n/W_n}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} F_n^*(M')$ est la connexion intégrable définie pour toutes les sections locales f de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ et e de M' par

$$(2.3.2) \quad \nabla(fF_n^*(e)) = f(\text{id} \otimes \frac{dF_{n+1}}{p})(F_n^*(\nabla'(e))) + df \otimes (F_n^*(e)).$$

Shiho a démontré que le foncteur Φ_n induit une équivalence de catégories entre les sous-catégories pleines de $p\text{-MIC}(\mathfrak{X}'_n/W_n)$ et de $\text{MIC}(\mathfrak{X}_n/W_n)$ formées d'objets quasi-nilpotents ([23] Thm. 3.1). Lorsque $n = 1$, Ogus et Vologodsky ont prouvé que le foncteur Φ_1 est compatible avec leur transformée de Cartier $C_{\mathfrak{X}_2}^{-1}$ (2.1) définie par \mathfrak{X}'_2 ([20] Thm. 2.11; [23] 1.12).

2.4. Soit (T, A) un topos annelé. On appelle *A-algèbre de Hopf* la donnée d'un anneau B de T muni de cinq homomorphismes

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} B, \quad B \xrightarrow{\delta} B \otimes_A B, \quad B \xrightarrow{\pi} A, \quad B \xrightarrow{\sigma} B,$$

où le produit tensoriel $B \otimes_A B$ est pris à gauche (resp. droite) pour la structure d' A -algèbre de B définie par d_2 (resp. d_1), satisfaisant aux conditions de compatibilité pour les coalgèbres (cf. [4] II 1.1.2, [II] 4.2).

Une *B-stratification sur un A-module M* est un isomorphisme B -linéaire

$$(2.4.1) \quad \varepsilon : B \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A B$$

où le produit tensoriel est pris à gauche (resp. droite) pour la structure d' A -algèbre de B définie par d_2 (resp. d_1), vérifiant $\pi^*(\varepsilon) = \text{id}_M$ et une condition de cocycle (cf. [II] 5.5).

2.5. L'exemple principal d'algèbre de Hopf est donné par l'enveloppe à puissances divisées de l'immersion diagonale. Soient \mathfrak{X} un schéma formel lisse sur W , \mathfrak{X}^2 le produit de deux copies de \mathfrak{X} sur W . Pour tout $n \geq 1$, on note $P_{\mathfrak{X}_n}$ l'enveloppe à puissances divisées de l'immersion diagonale $\mathfrak{X}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n^2$ compatible avec la PD-structure canonique sur (W_n, pW_n) . Les schémas $\{P_{\mathfrak{X}_n}\}_{n \geq 1}$ forment un système inductif adique et on note $P_{\mathfrak{X}}$ le W -schéma formel adique associé. La $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -bigèbre $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ de $\mathfrak{X}_{\text{zar}}$ est naturellement munie d'une structure de *$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbre de Hopf formelle* (i.e. pour tout $n \geq 1$, une structure de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -algèbre de Hopf sur $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}}$, qui sont compatibles) (cf. [II] 4.8, 5.15).

Une connexion intégrable quasi-nilpotente relative à W sur un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module M (cf. [II] 5.3) est équivalente à une $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}}$ -stratification sur M ([5] 4.12). Suivant Shiho [23], on donne ci-dessous une description analogue pour les p -connexions; l'algèbre de Hopf associée est construite par dilatation (certain sous-ensemble ouvert distingué de l'éclatement admissible) en géométrie formelle.

2.6. On définit par éclatement un \mathfrak{X}^2 -schéma formel adique $R_{\mathfrak{X}}$ vérifiant les propriétés suivantes ([II] 3.12) :

- (i) le morphisme canonique $R_{\mathfrak{X},1} \rightarrow X^2$ se factorise à travers l'immersion diagonale $X \rightarrow X^2$;
- (ii) pour tout W-schéma formel adique \mathfrak{Y} et tous W-morphismes $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ et $g : Y \rightarrow X$ qui s'insèrent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

il existe un unique W-morphisme $f' : \mathfrak{Y} \rightarrow R_{\mathfrak{X}}$ qui relève f .

Le morphisme d'espaces topologiques sous-jacents $|R_{\mathfrak{X}}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$ se factorise à travers l'immersion diagonale (cf. [II] 3.7). On désigne abusivement par $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ l'image directe de $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ via le morphisme induit $R_{\mathfrak{X},\text{zar}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{zar}}$. Utilisant la propriété universelle de $R_{\mathfrak{X}}$, on montre que $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ est naturellement munie d'une structure de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbre de Hopf formelle (cf. [II] 4.12).

L'immersion diagonale $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ induit une immersion fermée $\iota : \mathfrak{X} \rightarrow R_{\mathfrak{X}}$. Pour tout $n \geq 1$, on désigne par $T_{\mathfrak{X},n}$ l'enveloppe à puissances divisées de ι_n compatible avec la PD-structure canonique sur (W_n, pW_n) . Les schémas $\{T_{\mathfrak{X},n}\}_{n \geq 1}$ forment un système inductif adique et on note $T_{\mathfrak{X}}$ le W-schéma formel adique associé. D'après la propriété universelle de l'enveloppe à puissances divisées, la structure d'algèbre de Hopf formelle sur $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ s'étend en une structure de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbre de Hopf formelle sur la $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -bigèbre $\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}}}$ de $\mathfrak{X}_{\text{zar}}$ ([II] 5.20).

Dans ([36] Prop. 2.9), Shiho a montré que pour tout $n \geq 1$ et tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},n}$ -module M , une $\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}}}$ -stratification sur M est équivalente à une p -connexion intégrable quasi-nilpotente sur M (cf. [II] 5.22).

2.7. En fait, on a besoin d'une quatrième algèbre de Hopf qui a été introduite d'abord par Oyama, qu'on construit aussi par éclatement admissible. Pour tout k -schéma Y , on note \underline{Y} le sous-schéma fermé de Y défini par l'idéal de \mathcal{O}_Y formé des sections de \mathcal{O}_Y dont la p -ième puissance est nulle. Dans ([II] 3.12, 4.10), on construit un \mathfrak{X}^2 -schéma formel adique $Q_{\mathfrak{X}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) le morphisme canonique $Q_{\mathfrak{X},1} \rightarrow X^2$ se factorise à travers l'immersion diagonale $X \rightarrow X^2$;
- (ii) pour tout W-schéma formel adique \mathfrak{Y} et tous W-morphismes $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ et $g : \underline{Y} \rightarrow X$ qui s'insèrent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{Y} & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

il existe un unique W-morphisme $f' : \mathfrak{Y} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$ qui relève f .

Utilisant la propriété universelle de $Q_{\mathfrak{X}}$, on montre que le faisceau structural de $Q_{\mathfrak{X}}$ induit une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbre de Hopf formelle $\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}$ de $\mathfrak{X}_{\text{zar}}$ (cf. [II] 4.12).

Soient $P_{\mathfrak{X}}$ le \mathfrak{X}^2 -schéma formel défini dans 2.5, $\iota : \mathfrak{X} \rightarrow P_{\mathfrak{X}}$ le morphisme canonique qui relève l'immersion diagonale $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^2$, \mathcal{I} le PD-idéal de $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ défini par ι_1 . Pour toute section locale x de \mathcal{I} , on a $x^p = p!x^{[p]} = 0$. On en déduit une immersion fermée $\underline{P_{\mathfrak{X}}} \rightarrow X$ au-dessus \mathfrak{X}^2 . D'après la propriété universelle de $Q_{\mathfrak{X}}$, on obtient un \mathfrak{X}^2 -morphisme $P_{\mathfrak{X}} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$. Celui-ci induit un homomorphisme d'algèbres de Hopf formelles $\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}} \rightarrow \mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ (cf. [II] 5.17).

2.8. Supposons qu'il existe un relèvement $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ du morphisme de Frobenius relatif $F_{X/k}$ de X . Par propriétés universelles, le morphisme $F^2 : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}'^2$ induit des morphismes $\psi : Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$ ([II] 6.9) et $\varphi : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow T_{\mathfrak{X}'}$ ([II] 6.11) au-dessus de F^2 qui s'insère dans un diagramme commutatif ([II] (6.12.1))

(2.8.1)

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\varphi} & T_{\mathfrak{X}'} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \varpi \\ Q_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\psi} & R_{\mathfrak{X}'} \end{array}$$

où les morphismes caoniques $\varpi : T_{\mathfrak{X}'} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$ (2.6) et $\lambda : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$ (2.7) sont indépendants de F . De plus, ψ et φ induisent des homomorphismes des algèbres de Hopf formelles $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}'}} \rightarrow F_*(\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}})$, $\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}'}} \rightarrow F_*(\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}})$. Le diagramme ci-dessus induit un diagramme commutatif ([II] (6.12.2))

$$(2.8.2) \quad \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}'}}\text{-modules munis} \\ \text{d'une } \mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}'}}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\psi_n^*} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}\text{-modules munis} \\ \text{d'une } \mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \\ \varpi_n^* \downarrow & & \downarrow \lambda_n^* \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}'}}\text{-modules munis} \\ \text{d'une } \mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}'}}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\varphi_n^*} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}\text{-modules munis} \\ \text{d'une } \mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \end{array}$$

Shiho a montré que le foncteur φ_n^* est compatible avec le foncteur Φ_n défini par F (2.3), via l'équivalence entre la connexion (resp. p -connexion) intégrable quasi-nilpotente et la $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ -stratification (resp. $\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}}}$ -stratification).

On va montrer que le foncteur ψ_n^* est induit par le foncteur image inverse d'un morphisme de topos annelés défini par Oyama (0.2) qui ne dépend pas des relèvements du morphisme de Frobenius relatif. Mais l'identification avec ψ_n^* en dépend.

2.9. Soit X un schéma sur k . Suivant Oyama [21], nous définissons deux catégories \mathcal{E} et $\underline{\mathcal{E}}$ associées à X comme suit. Un objet de \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) est un triple (U, \mathfrak{X}, u) constitué d'un sous-schéma ouvert U de X , d'un W -schéma formel \mathfrak{X} et d'un k -morphisme affine $u : T \rightarrow U$ (resp. $u : \underline{T} \rightarrow U$). Les morphismes sont définis de manière naturelle (cf. [II] 7.1). On désigne par \mathcal{E}' la catégorie d'Oyama associée au k -schéma X' .

Soit (U, \mathfrak{X}, u) un objet de $\underline{\mathcal{E}}$. Le morphisme de Frobenius relatif $F_{T/k} : T \rightarrow T'$ de T se factorise à travers un k -morphisme $f_{X/k} : T \rightarrow \underline{T}'$. On a un diagramme commutatif

$$(2.9.1) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{u} & \underline{T} & \hookrightarrow & T \\ F_{U/k} \downarrow & & F_{\underline{T}/k} \downarrow & \swarrow f_{T/k} & \downarrow F_{T/k} \\ U' & \xleftarrow{u'} & \underline{T}' & \hookrightarrow & T' \end{array}$$

où les flèches verticales désignent les morphismes de Frobenius relatifs. Le triple $(U', \mathfrak{X}, u' \circ f_{T/k})$ est alors un objet de \mathcal{E}' . On obtient ainsi un foncteur

$$(2.9.2) \quad \rho : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}', \quad (U, \mathfrak{X}, u) \mapsto (U', \mathfrak{X}, u' \circ f_{T/k}).$$

On dit qu'une famille de morphismes $\{(U_i, \mathfrak{X}_i, u_i) \rightarrow (U, \mathfrak{X}, u)\}_{i \in I}$ de $\underline{\mathcal{E}}$ est un *recouvrement de Zariski* si l'on a

$$U = \cup_{i \in I} U_i, \quad \text{et} \quad T_i \xrightarrow{\sim} T \times_U U_i, \quad \forall i \in I.$$

On dit qu'une famille de morphismes $\{(U_i, \mathfrak{X}_i, u_i) \rightarrow (U, \mathfrak{X}, u)\}_{i \in I}$ de $\underline{\mathcal{E}}$ est un *recouvrement de Zariski* si son image par ρ (2.9.2) est un recouvrement de Zariski de \mathcal{E}' . Ces recouvrements forment une pré-topologie sur \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). On désigne par $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}$) le topos des faisceaux d'ensembles sur \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). Le foncteur ρ est pleinement fidèle, continu et cocontinu ([II] 7.20). Il induit donc un morphisme de topos

$$(2.9.3) \quad C_{X/W} : \tilde{\underline{\mathcal{E}}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}'}$$

tel que le foncteur image inverse soit induit par la composition avec ρ .

2.10. Pour tout objet (U, \mathfrak{X}, u) de \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) et tout sous-schéma ouvert V de U , on désigne par \mathfrak{X}_V le sous-schéma formel ouvert de \mathfrak{X} associé au sous-schéma ouvert $T \times_{u, U} V$ (resp. $T \times_{u' \circ f_{T/k}, U'} V'$ (2.9.2)) de T . Pour tout faisceau \mathcal{F} de $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}$), le foncteur contravariant $V \mapsto \mathcal{F}(V, \mathfrak{X}_V)$ définit un faisceau de U_{zar} qu'on désigne par $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{X}, u)}$.

2.11. Soit n un entier ≥ 1 . Le foncteur contravariant $(U, \mathfrak{X}, u) \mapsto \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n})$ définit un faisceau d'anneaux sur \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) qu'on désigne par $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$). Par définition, on a $C_{X/W}^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}) = \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$.

Pour tout objet (U, \mathfrak{T}, u) de \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), on considère $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ comme un faisceau sur T (resp. \underline{T}). On a

$$(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n})_{(U,\mathfrak{T},u)} = u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}) \quad (\text{resp. } (\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n})_{(U,\mathfrak{T},u)} = u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})).$$

Un $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -module (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}$ -module) \mathcal{F} est équivalent aux données suivantes ([II] 8.4) :

- (i) pour tout objet (U, \mathfrak{T}, u) de \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), un $u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})$ -module $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}$ de U_{zar} ;
- (ii) pour tout morphisme $f : (U_1, \mathfrak{T}_1, u_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ de \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), un morphisme $u_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{1,n}})$ -linéaire

$$c_f : u_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{1,n}}) \otimes_{(u_{2*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{2,n}}))|_{U_1}} (\mathcal{F}_{(U_2,\mathfrak{T}_2)})|_{U_1} \rightarrow \mathcal{F}_{(U_1,\mathfrak{T}_1)},$$

satisfaisant à une condition de cocycle pour la composition des morphismes comme dans ([4] 5.1).

Suivant ([4] 6.1), on dit que \mathcal{F} est un *cristal* si c_f est un isomorphisme pour tout morphisme f et que \mathcal{F} est *quasi-cohérent* si $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}$ est un $u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})$ -module quasi-cohérent de U_{zar} pour tout objet (U, \mathfrak{T}, u) . On désigne par $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n})$) la catégorie des cristaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -modules (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}$ -modules). On utilise la notation $\mathcal{C}^{\text{qcoh}}(-)$ pour désigner la sous-catégorie pleine des cristaux quasi-cohérents.

Pour tout objet (U, \mathfrak{T}, u) de \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), le foncteur u_* induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -modules quasi-cohérents de $\mathfrak{T}_{n,\text{zar}}$ la catégorie des $u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})$ -modules quasi-cohérents de U_{zar} ([II] 8.7). Si \mathcal{F} est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -module (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}$ -module) quasi-cohérent, pour tout objet (U, \mathfrak{T}, u) , on peut considérer également $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}$ comme un $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -module quasi-cohérent de $\mathfrak{T}_{n,\text{zar}}$.

Proposition 2.12 ([II] 8.18). *Soient \mathfrak{X} un W -schéma formel lisse, X sa fibre spéciale et n un entier ≥ 1 . Il existe une équivalence canonique de catégories entre la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n})$) et la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules avec $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ -stratification (resp. $\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}$ -stratification) (2.4, 2.6, 2.7).*

Théorème 2.13 ([II] 8.13). *Soit X un schéma lisse sur k . Alors, pour tout $n \geq 1$, les foncteurs image directe et image inverse du morphisme $C_{X/W}$ (2.9.3) induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre*

$$(2.13.1) \quad \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}) \rightleftarrows \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}).$$

Le théorème est démontré par la descente fppf pour les modules quasi-cohérents.

On appelle *transformée de Cartier modulo p^n* l'équivalence de catégories $C_{X/W}^*$ (2.13.1).

Supposons qu'il existe un W -schéma formel lisse \mathfrak{X} avec la fibre spéciale X . Lorsque $n = 1$, Oyama a démontré 2.13 et le fait que le foncteur image inverse $C_{X/W}^*$ est compatible à la transformée de Cartier $C_{\mathfrak{X}'_2}^{-1}$ d'Ogus–Vologodsky définie par le relèvement \mathfrak{X}'_2 de X' (2.1) (cf. [21] section 1.5). Dans ([II] § 11), on redémontre ce résultat par une méthode différente.

Proposition 2.14 ([II] 8.21). *Soient \mathfrak{X} un W -schéma formel lisse, X sa fibre spéciale, $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ un relèvement du morphisme de Frobenius relatif $F_{X/k}$ de X et ψ_n^* le foncteur défini par F dans (2.8.2). Alors, le diagramme (2.12)*

$$(2.14.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}) & \xrightarrow{C_{X/W}^*} & \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}) \\ \mu \downarrow \wr & & \wr \downarrow \nu \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules quasi-cohérents} \\ \text{munis d'une } \mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}'}}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\psi_n^*} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules quasi-cohérents} \\ \text{munis d'une } \mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \end{array}$$

est commutatif à un isomorphisme fonctoriel près. C'est-à-dire, pour chaque cristal de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}$ -modules quasi-cohérent \mathcal{M} , on a un isomorphisme fonctoriel :

$$(2.14.2) \quad \eta_F : \psi_n^*(\mu(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \nu(C_{X/W}^*(\mathcal{M})).$$

Dans le diagramme (2.14.1), les foncteurs verticaux dépendent du modèle \mathfrak{X} et le foncteur ψ_n^* dépend du relèvement F du morphisme de Frobenius relatif, tandis que le foncteur $C_{X/W}^*$ dépend uniquement de X . L'isomorphisme η_F dépend aussi de F .

D'après (2.8.2), l'équivalence de catégories $C_{X/W}^*$ est compatible avec le foncteur Φ_n défini par F (2.3.1).

2.15. Dans [13], Fontaine et Laffaille ont introduit la notion de *module de Fontaine* pour étudier les représentations galoisiennes p -adiques. Elle est inspirée des travaux de Mazur ([17], [18]) et d'Ogus ([4], § 8) sur la conjecture de Katz. Soit $\sigma : W \rightarrow W$ l'endomorphisme de Frobenius et $K_0 = W[\frac{1}{p}]$. Un module de Fontaine est un triple $(M, M^\bullet, \varphi^\bullet)$ composé d'un W -module de longueur finie M , d'une filtration décroissante $\{M^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tel que $M^0 = M$, $M^p = 0$ et de morphismes W -linéaires

$$(2.15.1) \quad \varphi^i : W \otimes_{\sigma, W} M^i \rightarrow M \quad 0 \leq i \leq p-1$$

tels que $\varphi^i|_{M^{i+1}} = p\varphi^{i+1}$ et que $\sum_{i=0}^{p-1} \varphi^i(M^i) = M$. Les morphismes $\{\varphi^\bullet\}$ sont appelés *morphismes de Frobenius divisés*. Le résultat principal de Fontaine–Laffaille est la construction d'un foncteur pleinement fidèle et exact de la catégorie des modules de Fontaine de longueur $\leq p-2$ dans la catégorie des \mathbb{Z}_p -représentations de torsion du groupe de Galois G_{K_0} de K_0 ([25] Thm. 2). Son image essentielle est constituée des représentations cristallines de torsion de G_{K_0} à poids de Hodge-Tate dans l'intervalle $[0, p-2]$ (cf. [5] 3.1.3.3).

Fontaine et Messing montrent qu'il existe une structure naturelle de module de Fontaine sur la cohomologie cristalline d'un schéma propre et lisse \mathcal{X} sur W de dimension relative $\leq p-1$ ([14] II.2.7). Ils en déduisent la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham de \mathcal{X}_n/W_n .

2.16. Une généralisation des modules de Fontaine dans le cadre relatif a été proposée par Faltings dans [10]. Les modules de Fontaine relatifs peuvent être considérés comme un analogue des variations de structures de Hodge sur les W -schémas formels lisses.

Soient $\mathfrak{X} = \text{Spf}(R)$ un schéma formel affine et lisse sur W , X sa fibre spéciale et $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ un σ -relèvement du morphisme de Frobenius absolu F_X de X . Une *module de Fontaine sur \mathfrak{X} par rapport à F* est un quadruple $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi_F^\bullet)$ composé d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent de torsion, d'une connexion intégrable ∇ sur M , d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée M^\bullet sur M de longueur au plus $p-1$ vérifiant la transversalité de Griffiths, et d'une famille de morphismes de Frobenius divisés $\{\varphi_F^\bullet\}$ relatifs à F définis comme dans (2.15.1) vérifiant une condition de compatibilité entre $\{\varphi_F^\bullet\}$ et ∇ ([10] 2.c, 2.d).

En utilisant la connexion, Faltings recolle les catégories des modules de Fontaine par rapport à différents relèvements de Frobenius par une *formule de Taylor* (voir [10] Thm 2.3). En recollant les données locales, il définit les modules de Fontaine sur un W -schéma formel lisse, même s'il n'existe pas de relèvement de F_X .

Si \mathfrak{X} est le complété p -adique d'un schéma propre et lisse \mathcal{X} sur W , Faltings a associé à chaque module de Fontaine de longueur $\leq p-2$ sur \mathfrak{X} une représentation du groupe fondamental étale de \mathcal{X}_{K_0} . De plus, Faltings a généralisé le résultat de Fontaine–Messing pour la cohomologie cristalline d'un module de Fontaine relatif.

2.17. Comme application de leur transformée de Cartier [20], Ogus et Vologodsky ont proposé une interprétation des modules de Fontaine de p -torsion sur \mathfrak{X} ([20], 4.16). Un module de Fontaine de p -torsion est un triple (M, ∇, M^\bullet) comme dans 2.16 tel que $pM = 0$ muni d'un isomorphisme horizontal (2.1.1)

$$(2.17.1) \quad \phi : C_{\mathfrak{X}_2}^{-1}(\pi^*(\text{Gr}(M), \kappa)) \xrightarrow{\sim} (M, \nabla),$$

où κ est le champ de Higgs sur $\text{Gr}(M)$ induit par ∇ et la transversalité de Griffiths, et $\pi : X' \rightarrow X$ est le changement de base du morphisme de Frobenius de k à X . Étant donné un σ -relèvement $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ de F_X , un tel morphisme ϕ est équivalent à une famille de morphismes de Frobenius divisés relatifs à F (2.16) (cf. [11] 12.16).

Par transversalité de Griffiths, le complexe de de Rham $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet$ est muni d'une filtration décroissante

$$(2.17.2) \quad F^i(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^q) = M^{i-q} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^q.$$

Soient ℓ la longueur de la filtration M^\bullet (i.e. $M^0 = M$, $M^{\ell+1} = 0$) et d la dimension relative de \mathfrak{X} sur W . Supposons que $d + \ell < p$. Comparant les complexes de de Rham et de Dolbeault (2.1.2), Ogus et Vologodsky ont redémontré les résultats suivants de Faltings :

(i) Pour tous $i \leq p - 2$ et m , le morphisme canonique $\mathbb{H}^m(F^{i+1}(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet)) \rightarrow \mathbb{H}^m(F^i(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet))$ est injectif. L’isomorphisme ϕ (2.17.1) induit une famille de morphismes de Frobenius divisés sur $(\mathbb{H}^m(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet), \{\mathbb{H}^m(F^i)\}_{i \leq p-1})$ qui en font un module de Fontaine sur W .

(ii) La suite spectrale d’hyper-cohomologie du complexe filtré de de Rham $(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet, F^\bullet)$ dégénère en E_1 .

2.18. Utilisant la transformée de Cartier modulo p^n , on redéfinit les modules de Fontaine sur \mathfrak{X} à la manière d’Ogus–Vologodsky ([II] 12.7). La formule de Taylor utilisée par Faltings pour recoller les données relatives aux différents relèvements de F_X est naturellement encodée dans le topos d’Oyama ([II] 12.18). Suivant la stratégie de Faltings, on démontre des analogues des résultats précédents (2.17(i-ii)) sur la cohomologie cristalline d’un module de Fontaine de p^n -torsion ([II] 13.1). Ces résultats peuvent être considérés comme une généralisation partielle de (2.1.2) pour les modules de Fontaine de p^n -torsion. Cependant, on ne sait pas comment généraliser le résultat d’Ogus–Vologodsky sur la comparaison des complexes (2.1.2) pour la transformée de Cartier modulo p^n .

Bibliographie

- [I] D. Xu, *Transport parallèle et correspondance de Simpson p -adique*, Chapitre I de cette thèse, à paraître dans Forum of Mathematics, Sigma.
- [II] D. Xu, *Lifting the Cartier transform of Ogus–Vologodsky modulo p^n* , Chapitre II de cette thèse.
- [1] A. Abbes, M. Gros, *La suite spectrale de Hodge–Tate*, prépublication (2015), arXiv :1509.03617.
- [2] A. Abbes, M. Gros, T. Tsuji, *The p -adic Simpson correspondence*, Annals of Mathematics Studies, Vol. 193 (2016).
- [3] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Lecture Notes in Mathematics, vol. 407 Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [4] P. Berthelot, A. Ogus, *Notes on Crystalline Cohomology*, (MN-21), Princeton University Press, 2015.
- [5] C. Breuil, W. Messing. *Torsion étale and crystalline cohomologies* Astérisque 279 (2002), 81-124.
- [6] P. Deligne, L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Invent. Math. 89, 247-270 (1987).
- [7] C. Deninger, A. Werner. *Vector bundles and p -adic representations I*, preprint (2003), arXiv :0309.273.
- [8] C. Deninger, A. Werner. *Vector bundles on p -adic curves and parallel transport*, Ann. Scient. E.N.S. Vol. 38. No. 4 (2005), 553-597.
- [9] G. Faltings, *p -adic Hodge theory*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 255-299.
- [10] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p -adic Galois representations*, in Proc. 1st JAMI conference (ed. J.I. Igusa), pp. 25-81, John Hopkins (1989).
- [11] G. Faltings, *Almost étale extensions*, in Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques. II, Astérisque 279 (2002), 185-270.
- [12] G. Faltings, *A p -adic Simpson correspondence*, Adv. Math. 198 (2005), 847-862.
- [13] J.-M. Fontaine, G. Laffaille, *Construction de représentations p -adiques*, Ann. Scient. E.N.S. Vol. 15. No. 4 (1982), 547–608.
- [14] J.-M. Fontaine, W. Messing, *p -adic periods and p -adic étale cohomology*, Contemporary Math. 67, (1987), 179-207.
- [15] K.Kato. *On p -adic Vanishing Cycles (Application of ideas of Fontaine–Messing)*, Adv. Studies in Pure Math. 10, 1987, 207-251.
- [16] N. Katz. *Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin*. Pub. Math. IHÉS 39 (1970) : 175-232.
- [17] B. Mazur, *Frobenius and the Hodge filtration*, Bull. Amer. Math. Soc. 78, (1972), 653-667.
- [18] B. Mazur, *Frobenius and the Hodge filtration-estimates*, Ann. of Math. 98, (1973), 58-95.
- [19] M.S. Narasimhan, C.S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. 82 (1965), 540-567.
- [20] A. Ogus, V. Vologodsky, *Nonabelian Hodge theory in characteristic p* , Pub. Math. IHÉS 106.1 (2007), 1-138.
- [21] H. Oyama, *PD Higgs crystals and Higgs cohomology in characteristic p* , preprint
- [22] M. Raynaud, *p -groupes et réduction semi-stable des courbes*, in The Grothendieck Festschrift, vol. III, eds P. Cartier et al., Progress in Mathematics, vol. 88 (Birkhäuser, Basel, 1990), 179-197.
- [23] A. Shiho, *Notes on generalizations of local Ogus–Vologodsky correspondence*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), 793–875.
- [24] C. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Pub. Math. IHÉS, 75 (1992), 5-95.
- [25] N. Wach, *Représentations cristallines de torsion*, Compositio Math. 108 (1997), 185–240.

Transport parallèle et correspondance de Simpson p -adique¹

Résumé

Deninger et Werner ont développé un analogue pour les courbes p -adiques de la correspondance classique de Narasimhan et Seshadri entre les fibrés vectoriels stables de degré zéro et les représentations unitaires du groupe fondamental topologique pour une courbe complexe propre et lisse. Par transport parallèle, ils ont associé fonctoriellement à chaque fibré vectoriel sur une courbe p -adique dont la réduction est fortement semi-stable de degré 0 une représentation p -adique du groupe fondamental de la courbe. Ils se sont posés quelques questions : leur foncteur est-il pleinement fidèle ? la cohomologie des systèmes locaux fournis par celui-ci admet-elle une filtration de Hodge-Tate ? leur construction est-elle compatible à la correspondance de Simpson p -adique développée par Faltings ? Nous répondons à ces questions dans cet article.

Contents

1. Introduction	27
2. Notations et préliminaires	31
3. Représentations à coefficients dans les modules de type α -fini	36
4. Compléments de géométrie rigide	43
5. Rappel sur les courbes	44
6. Correspondance de Deninger-Werner	48
7. Topos annelé de Faltings	51
8. Correspondance de Deninger-Werner via le topos annelé de Faltings	61
9. Un énoncé de descente pour les fibrés vectoriels de Deninger-Werner	70
10. Fibrés vectoriels et représentations de Weil-Tate	75
11. Correspondance de Simpson p -adique pour les représentations de Weil-Tate	82
12. Faisceaux de α -modules	85
13. Déformations des faisceaux de α -modules	95
14. Déformations des représentations et déformations des α -modules de Faltings	100
15. Appendice I. Compléments d'algèbre homologique	103
16. Appendice II. Admissibilité des fibrés vectoriels de Deninger-Werner : une démonstration simplifiée, d'après Tsuji	105

1. À paraître dans Forum of Mathematics, Sigma.

1. Introduction

1.1. Narasimhan et Seshadri [38] ont établi en 1965 une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental topologique d'une surface de Riemann compacte X de genre ≥ 2 et l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels stables de degré 0 sur X . Deninger et Werner ont développé récemment un analogue partiel pour les courbes p -adiques [14]. Leur construction est basée sur la notion de fibré vectoriel *fortement semi-stable* sur une courbe en caractéristique $p > 0$. Rappelons qu'un fibré vectoriel sur une courbe C propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique p est dit *fortement semi-stable* si ses images inverses par toutes les puissances entières du Frobenius absolu de C sont semi-stables.

1.2. Soient K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0 de corps résiduel une clôture algébrique d'un corps fini \mathbb{F}_p , \bar{K} une clôture algébrique de K , \mathfrak{C} le complété p -adique de \bar{K} . On note \mathcal{O}_K (resp. $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, resp. \mathfrak{o}) l'anneau de valuation de K (resp. \bar{K} , resp. \mathfrak{C}). On pose $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et on note s (resp. η) le point fermé (resp. générique) de S et $\bar{\eta}$ le point géométrique de S associé à \bar{K} .

Soient X une S -courbe plate et propre à fibre générique lisse et géométriquement connexe et \bar{x} un point géométrique de $X_{\bar{\eta}}$. On dit qu'un fibré vectoriel \mathcal{F} sur $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{o}$ est de *Deninger-Werner* si l'image inverse de \mathcal{F} sur la normalisation de chaque composante irréductible de X_s est fortement semi-stable de degré 0. À un tel fibré \mathcal{F} , Deninger et Werner associent une représentation du groupe fondamental étale $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ définie comme suit.

Pour tout entier $n \geq 1$, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe un morphisme propre $\varphi : X' \rightarrow X$ tel que φ_{η} soit étale fini, que X' soit une S -courbe semi-stable et que l'image réciproque de $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}/p^n \mathcal{F}$ par la réduction modulo p^n de φ soit triviale (6.2). Le "transport parallèle" permet alors de construire une représentation de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ sur la fibre de \mathcal{F}_n en \bar{x} (cf. 6.9). Par passage à la limite projective, on obtient une \mathfrak{o} -représentation continue p -adique de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$.

1.3. Soient C une \bar{K} -courbe propre, lisse et connexe, $\check{C} = C \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$ et \bar{x} un point géométrique de C . On dit qu'un fibré vectoriel F sur \check{C} est de *Deninger-Werner* si, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe un S -modèle propre et plat X de C et un fibré vectoriel de Deninger-Werner \mathcal{F} sur $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{o}$ de fibre générique F . On note $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}}$ la catégorie de tels fibrés et $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ la catégorie des \mathfrak{C} -représentations continues p -adiques de $\pi_1(C, \bar{x})$ sur des \mathfrak{C} -espaces vectoriels de dimension finie (cf. 3.18). La construction de Deninger-Werner induit alors un foncteur (6.14.1)

$$(1.3.1) \quad \mathbb{V} : \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x})).$$

Inspirés par le cas complexe, Deninger et Werner ont posé quelques questions concernant ce foncteur : est-il pleinement fidèle ? la cohomologie des systèmes locaux fournis par celui-ci admet-elle une filtration de Hodge-Tate ? leur construction est-elle compatible à la correspondance de Simpson p -adique développée par Faltings [23] ? Le but de cet article est de répondre à ces questions.

1.4. Simultanément, Faltings a développé une correspondance pour les systèmes locaux p -adiques sur les variétés définies sur des corps p -adiques, inspiré par les travaux de Simpson dans le cas complexe. Rappelons que ce dernier a étendu le résultat de Narasimhan et Seshadri aux représentations linéaires quelconques du groupe fondamental topologique d'une variété complexe projective et lisse. Pour ce faire, on a besoin de la notion de *fibré de Higgs* : si X est un schéma lisse de type fini sur un corps F , un fibré de Higgs sur X est un couple (M, θ) formé d'un fibré vectoriel M sur X et d'un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\theta : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/F}^1$ tel que $\theta \wedge \theta = 0$ (cf. 2.10). Le résultat principal de Simpson [45] établit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations linéaires de dimension finie (à valeurs complexes) du groupe fondamental topologique d'une variété complexe projective et lisse X et celle des fibrés de Higgs semi-stables de classes de Chern nulles sur X .

1.5. La construction de Faltings, appelée classiquement *correspondance de Simpson p -adique*, utilise sa théorie des extensions presque-étales et prolonge ses travaux en théorie de Hodge p -adique, en particulier ceux qui concernent la décomposition de Hodge-Tate pour une variété propre et lisse sur un corps p -adique.

L'objet principal d'étude est la notion de *représentation généralisée*, qui étend celle de représentation p -adique du groupe fondamental géométrique. Ce sont, en termes simplifiés, des représentations semi-linéaires p -adiques continues du groupe fondamental géométrique dans des modules sur un certain anneau p -adique muni d'une action continue du groupe fondamental géométrique. Faltings construit un foncteur de la catégorie de ces représentations dans la catégories des fibrés de Higgs [23]. Nous utiliserons la variante développée par Abbes et Gros [4], qui s'applique à une classe de représentations généralisées vérifiant une condition d'admissibilité à la Fontaine, dites de *Dolbeault*. Nous introduisons dans le même esprit une autre condition d'admissibilité, plus forte que celle de Dolbeault, que nous qualifions de *Weil-Tate*. Elle correspond aux fibrés de Higgs à champ de Higgs nul dans la correspondance de Simpson p -adique.

Par ailleurs, en s'inspirant de la construction de Deninger-Werner, nous associons à certaines représentations généralisées, qualifiées de *potentiellement libres de type fini*, des représentations continues p -adiques du groupe fondamental géométrique. Les fibrés vectoriels de Deninger-Werner définissent naturellement des représentations généralisées potentiellement libres de type fini, et on retrouve ainsi le foncteur de Deninger-Werner. Les représentations généralisées de Weil-Tate sont aussi potentiellement libres de type fini. La principale question est de comparer ces deux sous-catégories. Notre principal résultat est que les représentations généralisées fournies par les fibrés vectoriels de Deninger-Werner sont de Weil-Tate. Ce résultat nous permet de répondre aux trois questions de Deninger et Werner.

1.6. Pour définir la notion de représentation généralisée, nous avons besoin du *topos de Faltings*. Soit X un S -schéma de type fini à réduction semi-stable tel que $X_{\bar{\eta}}$ soit connexe. On désigne par E la catégorie des morphismes de schémas $V \rightarrow U$ au-dessus du morphisme canonique $X_{\bar{\eta}} \rightarrow X$ tels que le morphisme $U \rightarrow X$ soit étale et que le morphisme $V \rightarrow U_{\bar{\eta}}$ soit fini étale (7.1). On équipe E de la *topologie co-évanescence* engendrée par les recouvrements $\{(V_i \rightarrow U_i) \rightarrow (V \rightarrow U)\}_{i \in I}$ des deux types suivants :

- (v) $U_i = U$ pour tout $i \in I$, et $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ est un recouvrement.
- (c) $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ est un recouvrement et $V_i = U_i \times_U V$ pour tout $i \in I$.

Le site E ainsi défini est appelé *site de Faltings de X* . On désigne par \tilde{E} et l'on appelle *topos de Faltings de X* , le topos des faisceaux d'ensembles sur E .

Pour tout schéma Y , on note $\mathbf{\hat{E}t}_{/Y}$ (resp. $\mathbf{\hat{E}t}_{f/Y}$) la catégorie des schémas étales (resp. finis et étales) au-dessus de Y munie de la topologie étale, et $Y_{\text{ét}}$ (resp. $Y_{\text{fét}}$) le topos des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{\hat{E}t}_{/Y}$ (resp. $\mathbf{\hat{E}t}_{f/Y}$). Les foncteurs

$$(1.6.1) \quad \mathbf{\hat{E}t}_{f/X_{\bar{\eta}}} \rightarrow E \quad V \mapsto (V \rightarrow X)$$

$$(1.6.2) \quad \mathbf{\hat{E}t}_{/X} \rightarrow E \quad U \mapsto (U_{\bar{\eta}} \rightarrow U)$$

sont continus et exacts à gauches. Ils définissent donc deux morphismes de topos

$$(1.6.3) \quad \beta : \tilde{E} \rightarrow X_{\bar{\eta}, \text{fét}},$$

$$(1.6.4) \quad \sigma : \tilde{E} \rightarrow X_{\text{ét}}.$$

Pour chaque objet $(V \rightarrow U)$ de E , on note \bar{U}^V la clôture intégrale de $\bar{U} = U \otimes_{\mathcal{O}_K} \bar{\mathcal{O}_K}$ dans V . On désigne par $\bar{\mathcal{B}}$ le préfaisceau d'anneaux sur E défini pour tout $(V \rightarrow U) \in \mathbf{Ob}(E)$ par

$$(1.6.5) \quad \bar{\mathcal{B}}(V \rightarrow U) = \Gamma(\bar{U}^V, \mathcal{O}_{\bar{U}^V}).$$

En fait, celui-ci est un faisceau sur E ([4] III.8.16). Les représentations généralisées sont essentiellement les $\bar{\mathcal{B}}$ -modules de \tilde{E} . Cependant, pour tenir compte de la topologie p -adique, nous travaillons avec le système projectif des anneaux $\bar{\mathcal{B}}_n = \bar{\mathcal{B}}/p^n \bar{\mathcal{B}}$, $n \geq 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $\bar{\mathcal{B}}_n$ est un objet de la fibre spéciale \tilde{E}_s de \tilde{E} , c'est-à-dire du sous-topos fermé de \tilde{E} complémentaire de l'ouvert $\sigma^*(X_{\bar{\eta}})$ (7.10). Celui-ci s'insère dans un diagramme commutatif à isomorphisme

canonique près

$$(1.6.6) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{E}_s & \xrightarrow{\delta} & \tilde{E} \\ \sigma_s \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X_{s,\text{ét}} & \xrightarrow{a} & X_{\text{ét}} \end{array}$$

où a est l'injection canonique, δ est le plongement canonique et σ_s est induit par σ .

Les systèmes projectifs d'objets de \tilde{E}_s indexés par l'ensemble ordonné des entiers naturels \mathbb{N} , forment un topos que l'on note $\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$. On le munit de l'anneau $\check{\mathcal{B}} = (\overline{\mathcal{B}}_n)_{n \geq 1}$ de $\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$. On dit qu'un $\check{\mathcal{B}}$ -module $(M_n)_{n \geq 1}$ est *adique* si, pour tout entier $i \geq 1$, le morphisme $M_{i+1} \otimes_{\overline{\mathcal{B}}_{i+1}} \overline{\mathcal{B}}_i \rightarrow M_i$, déduit du morphisme de transition $M_{i+1} \rightarrow M_i$, est un isomorphisme.

On note $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$ la catégorie des $\check{\mathcal{B}}$ -modules à isogénie près (2.16). Si X est propre sur S , d'après le principal théorème de comparaison de Faltings (7.19) (cf. [22] Theorem 8, [3] 2.4.16), l'image réciproque associée au morphisme β induit un foncteur pleinement fidèle (8.8)

$$(1.6.7) \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}).$$

1.7. Supposons que X soit une S -courbe semi-stable et posons $C = X_{\bar{\eta}}$. Soient \bar{x} un point géométrique de C et $n \geq 1$ un entier. Si X' est une S -courbe semi-stable, $(\tilde{E}', \overline{\mathcal{B}}')$ le topos annelé de Faltings associé à X' et $\varphi : X' \rightarrow X$ un S -morphisme propre, alors φ induit par functorialité un morphisme de topos annelés $\Phi_n : (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) \rightarrow (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n)$. On dit qu'un $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module M_n est *potentiellement libre de type fini* s'il est de type fini et si, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe un S -morphisme propre $\varphi : X' \rightarrow X$ tel que X' soit une S -courbe semi-stable, φ_n soit fini étale et qu'avec les notations précédentes $\Phi_n^*(M_n)$ soit un $\overline{\mathcal{B}}'_n$ -module libre. Par "transport parallèle", on associe à tout $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module potentiellement libre de type fini une représentation de $\pi_1(C, \bar{x})$ (8.10).

On dit qu'un $\check{\mathcal{B}}$ -module $M = (M_n)_{n \geq 1}$ est *potentiellement libre de type fini* s'il est adique de type fini et si, pour tout entier $n \geq 1$, M_n est potentiellement libre de type fini. On désigne par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$ la catégorie des $\check{\mathcal{B}}$ -modules potentiellement libres de type fini à isogénie près. La construction précédente induit un foncteur (8.14.1)

$$(1.7.1) \quad \mathscr{W} : \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x})).$$

Celui-ci généralise le foncteur \mathbb{V} (1.3.1). En effet, notons $\mathbf{Vect}_{\mathfrak{C}}$ la catégorie des fibrés vectoriels sur $\check{C} = C \otimes_{\overline{K}} \mathfrak{C}$. L'image réciproque associée au morphisme σ induit un foncteur (cf. (5.14.2) et (7.12.4))

$$(1.7.2) \quad \mathbf{Vect}_{\mathfrak{C}} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}).$$

La restriction de ce dernier à $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}}$ se factorise à travers $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$. Le foncteur \mathscr{W} induit alors le foncteur \mathbb{V} (8.21).

Par ailleurs, le foncteur (1.6.7) se factorise à travers la sous-catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$ de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$. Le composé de ce dernier et de \mathscr{W} est isomorphe au foncteur identique (8.17(ii)).

On dit qu'un fibré vectoriel sur \check{C} et une \mathfrak{C} -représentation continue V de $\pi_1(C, \bar{x})$ sont $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associés si leurs images par les foncteurs (1.7.2) et (1.6.7) dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$ sont isomorphes (cf. 10.2).

1.8. Soient C une courbe propre et lisse sur \overline{K} , \bar{x} un point géométrique de C et $\check{C} = C \otimes_{\overline{K}} \mathfrak{C}$. On dit qu'un fibré vectoriel F sur \check{C} est de *Weil-Tate* si, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe un S -modèle semi-stable X de C et une \mathfrak{C} -représentation continue V de $\pi_1(C, \bar{x})$ tels que F et V soient $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associés dans le topos annelé de Faltings relatif à X . On définit symétriquement la notion de \mathfrak{C} -représentation continue

de Weil-Tate de $\pi_1(C, \bar{x})$. On note $\mathfrak{V}_C^{\text{WT}}$ (resp. $\mathbf{Rep}_e^{\text{WT}}(\pi_1(C, \bar{x}))$) la catégorie de tels fibrés (resp. telles \mathfrak{C} -représentations). On montre le résultat suivant :

Théorème 1.9 (cf. 10.19). *Il existe des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre*

$$(1.9.1) \quad \mathcal{V} : \mathfrak{V}_C^{\text{WT}} \rightarrow \mathbf{Rep}_e^{\text{WT}}(\pi_1(C, \bar{x})) \quad \text{et} \quad \mathcal{T} : \mathbf{Rep}_e^{\text{WT}}(\pi_1(C, \bar{x})) \rightarrow \mathfrak{V}_C^{\text{WT}}.$$

La restriction du foncteur (1.7.2) à $\mathfrak{V}_C^{\text{WT}}$ se factorise à travers $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\overset{\sim}{\mathcal{B}})$. Le foncteur \mathcal{V} est défini par la composition de ce dernier et \mathcal{W} (1.7.1) (cf. (10.8.1)). D'autre part, le foncteur \mathcal{T} est induit par le foncteur (1.6.7) et le foncteur image directe du morphisme σ (1.6.4) (cf. (10.11.1)).

Notre principal résultat est le suivant.

Théorème 1.10 (cf. 14.5). *Tout fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{C} est de Weil-Tate.*

La condition de Deninger-Werner peut se voir comme une condition d'admissibilité à la Fontaine. Elle présente toutefois des différences notables avec la condition d'admissibilité de Weil-Tate. D'une part, le fibré de Deninger-Werner est trivialisé par une courbe semi-stable au-dessus de X qui est finie et étale au-dessus de C , mais qui n'est a priori pas finie au dessus de X . D'autre part, on a besoin d'une infinité de tels revêtements, un pour chaque réduction modulo p^n , $n \geq 1$. La première difficulté peut être surmontée grâce à un résultat de Raynaud sur le quotient d'une courbe semi-stable par un groupe fini (5.11(iii) cf. aussi [40]). La seconde difficulté est plus sérieuse. On la surmonte grâce à la théorie des déformations des presque-modules dans le sens de Faltings (13.7).

Proposition 1.11 (cf. 14.6). *La restriction du foncteur \mathcal{V} à $\mathfrak{V}_C^{\text{DW}}$ s'identifie au foncteur \mathbb{V} .*

On en déduit la pleine fidélité du foncteur de Deninger-Werner (1.3.1).

1.12. On démontre que pour qu'une \mathfrak{C} -représentation continue V de $\pi_1(C, \bar{x})$ soit de Weil-Tate, il faut et il suffit que son image, par le foncteur (1.6.7), soit de Dolbeault et que le fibré de Higgs associé par la correspondance de Simpson p -adique soit muni du champ de Higgs nul (cf. 11.7). De plus, le fibré vectoriel sous-jacent à ce fibré de Higgs est donné par $\mathcal{T}(V)$ (1.9.1). Cela signifie que l'équivalence de catégories \mathcal{T} (1.9.1) n'est autre que la correspondance de Simpson p -adique pour les fibrés de Higgs à champ de Higgs nul. Dans 11.8, on démontre l'existence d'une filtration de Hodge-Tate pour la cohomologie des représentations de Weil-Tate.

1.13. Il est utile de noter que Faltings mentionne dans le premier paragraphe de la section 5 de [23] qu'on peut généraliser la construction de Deninger et Werner pour certaines fibrés de Higgs en comparant les déformations des vraies représentations et celles des représentations généralisées.

1.14. Après avoir fixé les notations générales dans la section 2, nous développons dans les sections 3 à 5 quelques préliminaires utiles pour la suite de cet article. La section 3 est consacré à rappeler et étudier les *presque-algèbres* et les *presque-modules* développés par Faltings dans son approche de la théorie de Hodge p -adique. Pour alléger, nous avons choisi dans cet article de substituer au préfixe presque le préfixe α suggéré par le *almost* anglais. Dans la section 4, nous rappelons la fidélité du foncteur GAGA pour les modules cohérents sur un \mathfrak{C} -schéma de type fini. La section 5 contient des rappels et des compléments sur les courbes relatives. Dans la section 6, nous rappelons les résultats de Deninger et Werner. Suivant ([4] III et VI), nous présentons le topos annelé de Faltings dans la section 7. Ensuite, nous rappelons le principal théorème de comparaison de Faltings et nous donnons quelques corollaires. Nous finissons cette section par la description du topos annelé de Faltings associé à un trait (7.26). Dans la section 8, nous présentons la construction du foncteur \mathcal{W} (1.7.1) et ses propriétés. Nous établissons un résultat de descente galoisienne pour le topos de Faltings dans la section 9. Grâce à ce résultat, nous démontrons une variante modulo p^n du théorème 1.10 (cf. 9.11). Dans la section 10, nous introduisons les notions de fibré vectoriel de Weil-Tate et de \mathfrak{C} -représentation continue de Weil-Tate. Nous construisons les foncteurs \mathcal{V} et \mathcal{T} (1.9.1) et nous démontrons le théorème 1.9. Dans la section 11, nous comparons la correspondance de Simpson p -adique et la correspondance \mathcal{T} (1.9.1). Dans la section 12, nous rappelons la notion de *faisceaux de α -modules* suivant ([3] 1.4). Nous développons

ensuite une théorie de déformations des faisceaux de α -modules suivant l'approche d'Illusie [29] dans la section 13. Nous étudions la relation entre les déformations des représentations du groupe fondamental et les déformations des α - $\overline{\mathcal{B}}$ -modules et nous démontrons le théorème 1.10 dans la section 14.

Remerciement. Ce travail fait partie de ma thèse préparée à l'université Paris-Sud. Je remercie profondément mon directeur de thèse Ahmed Abbes pour les nombreuses discussions, ainsi que pour ses commentaires et suggestions sur des versions préliminaires de ce texte. Je remercie Bhargav Bhatt de m'avoir signalé une erreur dans une version préliminaire de cet article. Je remercie également Michel Gros, Takeshi Tsuji et un rapporteur anonyme pour leurs commentaires et suggestions. Ce travail a bénéficié du soutien du programme ANR Théorie de Hodge p -adique et Développements (ThéHopadD) ANR-11-BS01-005.

2. Notations et préliminaires

2.1. Dans cet article, p désigne un nombre premier, K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0 dont le corps résiduel k est une clôture algébrique de \mathbb{F}_p et \overline{K} une clôture algébrique de K . On note \mathcal{O}_K l'anneau de valuation de K et $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de \mathcal{O}_K dans \overline{K} . On désigne par \mathfrak{o} le séparé complété p -adique de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, par \mathfrak{C} son corps des fractions, par \mathfrak{m} son idéal maximal et par v la valuation de \mathfrak{o} normalisée par $v(p) = 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\mathfrak{o}_n = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n \mathcal{O}_{\overline{K}}$.

On choisit un système compatible (γ_n) de racines n -ièmes de p dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Pour tout nombre rationnel $r > 0$, on pose $p^r = (\gamma_n)^{rn}$ où n est un entier > 0 tel que rn soit entier.

On pose $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$, $\overline{S} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, $\check{S} = \text{Spec}(\mathfrak{o})$, $\mathcal{S} = \text{Spf}(\mathfrak{o})$ et pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \text{Spec}(\mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K)$. On note η (resp. s) le point générique (resp. fermé) de S et $\overline{\eta}$ (resp. $\check{\eta}$) le point géométrique générique correspondant à \overline{K} (resp. \mathfrak{C}). Pour tous S -schémas X et S' , on pose $X_{S'} = X \times_S S'$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$(2.1.1) \quad X_n = X \times_S S_n, \quad \overline{X} = X \times_S \overline{S}, \quad \check{X} = X \times_S \check{S}.$$

Pour tout morphisme de S -schémas $\pi : Y \rightarrow X$, on pose $\pi_n = \pi \times_S S_n$. Pour tout \mathcal{O}_X -module M sur un S -schéma X , on note M_n le \mathcal{O}_{X_n} -module $M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_n}$ sur X_n .

Si T est un trait (i.e. le spectre d'un anneau de valuation discrète) et τ son point générique, on dit que (T, τ) est un *trait génériquement pointé* (ou simplement *trait* lorsqu'il n'y a aucun risque d'ambiguïté). Si (T, τ) et (T', τ') sont deux traits génériquement pointés, un morphisme $(T', \tau') \rightarrow (T, \tau)$ est un morphisme $T' \rightarrow T$ qui envoie τ' à τ . On dit qu'un tel morphisme est fini si le morphisme sous-jacent $T' \rightarrow T$ est fini.

2.2. On désigne par **E**ns la catégorie des ensembles que l'on considère ainsi comme un topos (ponctuel) et on le note aussi **Pt** ([6] IV 2.2). On désigne par **Ab** la catégorie des groupes abéliens.

2.3. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne et M, N deux objets de \mathcal{A} . On désigne par $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ sa catégorie dérivée. On note abusivement M le complexe concentré en degré 0 de valeur M . Pour tout entier i , on pose ([49] 10.7.1)

$$(2.3.1) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, N) = \text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(M, N[i]),$$

où $[i]$ désigne le décalage de degré i .

Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact entre catégories abéliennes. Il s'étend en un foncteur de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ dans $\mathbf{D}(\mathcal{A}')$. En vertu de (2.3.1), il induit, pour tous objets M et N de \mathcal{A} et tout entier i , un morphisme canonique

$$(2.3.2) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}'}^i(F(M), F(N)).$$

Pour tous objets M et N de \mathcal{A} , le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N)$ classe les extensions de M par N dans \mathcal{A} (cf. [50] 13.27.6).

2.4. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne ayant suffisamment d'injectifs et M un objet de \mathcal{A} . Le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est exact à gauche. On désigne par

$$(2.4.1) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab} \quad \forall i \geq 0$$

les foncteurs dérivés à droite de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -)$. On pose $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, -) = 0$ pour $i < 0$. Cette définition est compatible avec (2.3.1) (cf. [49] 10.7.4 et 10.7.5).

2.5. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et E une suite spectrale dans \mathcal{A}

$$(2.5.1) \quad E_2^{i,j} \Rightarrow E^{i+j}$$

telle que $E_2^{i,j} = 0$ si $i < 0$ ou $j < 0$. Les termes de bas degré fournissent une suite exacte ([36] Appendix B)

$$(2.5.2) \quad 0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1},$$

où $E_1^2 = \text{Ker}(E^2 \rightarrow E_2^{0,2})$. Soient E' une autre suite spectrale

$$(2.5.3) \quad E_2'^{i,j} \Rightarrow E'^{i+j}$$

telle que $E_2'^{i,j} = 0$ si $i < 0$ ou $j < 0$, et $u : E \rightarrow E'$ un morphisme de suites spectrales ([18] 0.11.1.2). On a alors un diagramme commutatif

$$(2.5.4) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_2^{1,0} & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & E_2^{0,1} & \longrightarrow & E_2^{2,0} & \longrightarrow & E_1^2 & \longrightarrow & E_2^{1,1} \\ & & \downarrow u_2^{1,0} & & \downarrow u^1 & & \downarrow u_2^{0,1} & & \downarrow u_2^{2,0} & & \downarrow u_1^2 & & \downarrow u_2^{1,1} \\ 0 & \longrightarrow & E_2'^{1,0} & \longrightarrow & E'^1 & \longrightarrow & E_2'^{0,1} & \longrightarrow & E_2'^{2,0} & \longrightarrow & E_1'^2 & \longrightarrow & E_2'^{1,1} \end{array}$$

Lemme 2.6. *Conservons les notations de 2.5 et supposons que les morphismes $u_2^{i,j}$ sont des isomorphismes pour $i + j \leq 1$ et sont des monomorphismes pour $i + j = 2$. Alors, le morphisme $u^n : E^n \rightarrow E'^n$ est un isomorphisme si $n = 0, 1$, et est un monomorphisme si $n = 2$.*

Preuve. Il est clair que u^0 est un isomorphisme. D'après (2.5.4), le lemme des cinq et le lemme du serpent, on déduit que le morphisme u^1 est un isomorphisme et que le morphisme u_1^2 est un monomorphisme. Par suite, on en déduit un diagramme commutatif

$$(2.6.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1^2 & \longrightarrow & E^2 & \longrightarrow & E_2^{0,2} \\ & & \downarrow u_1^2 & & \downarrow u^2 & & \downarrow u_2^{0,2} \\ 0 & \longrightarrow & E_1'^2 & \longrightarrow & E'^2 & \longrightarrow & E_2'^{0,2}, \end{array}$$

d'où l'injectivité de u^2 .

2.7. Pour tout schéma X , on note $\text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ le groupe des classes d'isomorphismes de \mathcal{O}_X -modules inversibles. Soit $f : X \rightarrow T$ un morphisme propre de schémas. On désigne par $\text{Pic}_{X/T}$ le foncteur de Picard relatif de X au-dessus de T , défini pour tout T -schéma T' par

$$(2.7.1) \quad \text{Pic}_{X/T}(T') = H^0(T', R_{\text{fppf}}^1 f'_*(\mathbb{G}_m)),$$

où $f' : X \times_T T' \rightarrow T'$ est la projection canonique et \mathbb{G}_m est le faisceau fppf qui à chaque schéma Y associe le groupe $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^*)$ (cf. [39] 1.2). Soit t un point de T . D'après (2.7.1), on a $\text{Pic}_{X/T}(t) = \text{Pic}_{X_t/t}(t)$. Le foncteur $\text{Pic}_{X_t/t}$ est représentable par un schéma en groupes localement de type fini (cf. [39] 1.5.2). Il possède un plus petit sous-groupe ouvert connexe, sa composante neutre $\text{Pic}_{X_t/t}^0$ ([11] VI_A, 2). On définit le sous-foncteur $\text{Pic}_{X/T}^0$ de $\text{Pic}_{X/T}$ comme suit : pour tout T -schéma T' , $\text{Pic}_{X/T}^0(T')$ est le sous-groupe de $\text{Pic}_{X/T}(T')$ formé des éléments qui pour chaque point t de T' induisent par functorialité un élément de $\text{Pic}_{X_t/t}^0(t)$.

2.8. Soit X un schéma. On dit qu'un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent F est un *fibré vectoriel* sur X s'il est localement libre de type fini. On désigne par Vect_X la sous-catégorie pleine de la catégorie des \mathcal{O}_X -modules formée des fibrés vectoriels.

2.9. Soit (\mathcal{T}, A) un topos annelé. On désigne par $\mathbf{Mod}(\mathcal{T}, A)$ la catégorie des A -modules de \mathcal{T} . On dit qu'un A -module M de \mathcal{T} est localement projectif de type fini si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites (cf. [4] III.2.8) :

- (i) M est de type fini et le foncteur $\mathcal{H}om_A(M, \cdot)$ est exact ;
- (ii) M est de type fini et tout épimorphisme de A -modules $N \rightarrow M$ admet localement une section ;
- (iii) M est localement facteur direct d'un A -module libre de type fini.

On désigne par $\mathbf{LL}^{\text{tf}}(\mathcal{T}, A)$ (resp. $\mathbf{LP}^{\text{tf}}(\mathcal{T}, A)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}(\mathcal{T}, A)$ formée des A -modules localement libres (resp. localement projectifs) de type fini de \mathcal{T} .

Un A -module localement projectif de type fini est plat en vertu de (iii). Soient M' et M'' deux A -modules localement projectifs de type fini. D'après (iii), le A -module $\mathcal{H}om_A(M', M'')$ est aussi localement projectif de type fini. Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathbf{Mod}(\mathcal{T}, A)$. On en déduit que, pour tout $i \geq 1$, le foncteur $\mathcal{E}xt_A^i(M, -)$ est nul. Le module M est donc aussi localement projectif de type fini.

Étant donné un A -module localement projectif de type fini M , la suite spectrale qui relie les Ext locaux et globaux ([6] V 6.1) induit, pour tout A -module N et tout entier $i \geq 0$, un isomorphisme

$$(2.9.1) \quad \text{Ext}_A^i(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^i(\mathcal{T}, \mathcal{H}om_A(M, N)).$$

2.10. Soient (\mathcal{T}, A) un topos annelé et E un A -module de \mathcal{T} . Un A -module de Higgs à coefficients dans E est un couple (M, θ) formé d'un A -module M de \mathcal{T} et d'un morphisme A -linéaire $\theta : M \rightarrow M \otimes_A E$ tel que $\theta \wedge \theta = 0$.

2.11. Soit \mathcal{T} un topos. Les systèmes projectifs d'objets de \mathcal{T} indexés par l'ensemble ordonné des entiers naturels \mathbb{N} , forment un topos que l'on note $\mathcal{T}^{\mathbb{N}^\circ}$ (cf. [4] VI.7.1). Le foncteur

$$(2.11.1) \quad \lambda^* : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^{\mathbb{N}^\circ}$$

qui à un objet F associe le foncteur constant $\mathbb{N}^\circ \rightarrow \mathcal{T}$ de valeur F est exact à gauche. Il admet pour adjoint à droite le foncteur

$$(2.11.2) \quad \lambda_* : \mathcal{T}^{\mathbb{N}^\circ} \rightarrow \mathcal{T}$$

qui à un foncteur $\mathbb{N}^\circ \rightarrow \mathcal{T}$ associe sa limite projective ([4] III.7.4). Le couple (λ_*, λ^*) définit donc un morphisme de topos

$$(2.11.3) \quad \lambda : \mathcal{T}^{\mathbb{N}^\circ} \rightarrow \mathcal{T}.$$

Étant donné un anneau $\check{A} = (A_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{T}^{\mathbb{N}^\circ}$, on dit qu'un \check{A} -module $M = (M_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{T}^{\mathbb{N}^\circ}$ est *adique* si pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i \leq j$, le morphisme $M_j \otimes_{A_j} A_i \rightarrow M_i$ déduit du morphisme de transition $M_j \rightarrow M_i$ est un isomorphisme.

2.12. Étant donné un morphisme de topos $\gamma : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_3$ et un groupe abélien \mathcal{F} de \mathcal{T}_3 , on définit, pour tout entier $i \geq 0$, un morphisme

$$(2.12.1) \quad \gamma^* : \mathbf{H}^i(\mathcal{T}_3, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}^i(\mathcal{T}_1, \gamma^*(\mathcal{F}))$$

comme le composé

$$(2.12.2) \quad \mathbf{H}^i(\mathcal{T}_3, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}^i(\mathcal{T}_3, \gamma_* \gamma^*(\mathcal{F})) \rightarrow \mathbf{H}^i(\mathcal{T}_1, \gamma^*(\mathcal{F})),$$

où la première flèche est induite par le morphisme d'adjonction $\text{id} \rightarrow \gamma_* \gamma^*$ et la seconde flèche est induite par la suite spectrale de Cartan-Leray.

Supposons que γ soit le composé de deux morphismes de topos $\mathcal{T}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{T}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{T}_3$. Alors, pour tout entier $i \geq 0$ et tout faisceau abélien \mathcal{F} de \mathcal{T}_3 , le morphisme composé

$$(2.12.3) \quad \mathbf{H}^i(\mathcal{T}_3, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta^*} \mathbf{H}^i(\mathcal{T}_2, \beta^*(\mathcal{F})) \rightarrow \mathbf{H}^i(\mathcal{T}_2, \alpha_* \gamma^*(\mathcal{F})) \rightarrow \mathbf{H}^i(\mathcal{T}_1, \gamma^*(\mathcal{F})),$$

où la deuxième flèche est induite par le morphisme d'adjonction $\beta^* \rightarrow \alpha_* \alpha^* \beta^*$ et la troisième flèche est induite par la suite spectrale de Cartan-Leray, s'identifie au morphisme (2.12.1). En effet, si on note, pour $i = 1, 2, 3$, $\Gamma_i : \mathcal{T}_i \rightarrow \mathbf{Ab}$ le foncteur "sections globales", le morphisme composé (2.12.3) est induit par le morphisme composé de la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$:

$$(2.12.4) \quad \mathbf{R}\Gamma_3 \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}\Gamma_3 \mathbf{R}\beta_* \beta^* \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}\Gamma_2 \mathbf{R}\alpha_* \alpha^* \beta^* \mathcal{F} = \mathbf{R}\Gamma_1 \alpha^* \beta^* \mathcal{F}.$$

Celui-ci s'identifie au morphisme induit par adjonction

$$(2.12.5) \quad R\Gamma_3 \mathcal{F} \rightarrow R\Gamma_3 R\gamma_* \gamma^* \mathcal{F} = R\Gamma_1 \alpha^* \beta^* \mathcal{F},$$

qui fournit le morphisme (2.12.1).

2.13. Pour tout schéma X , on note $\mathbf{\hat{E}t}/X$ (resp. $X_{\text{ét}}$) le site (resp. topos) étale de X . On désigne par $\mathbf{\hat{E}t}_{\text{coh}}/X$ (resp. $\mathbf{\hat{E}t}_{\text{scoh}}/X$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\hat{E}t}/X$ formée des schémas étales de présentation finie sur X (resp. étales, séparés et de présentation finie sur X), munie de la topologie induite par celle de $\mathbf{\hat{E}t}/X$. Si X est quasi-séparé, le foncteur de restriction de $X_{\text{ét}}$ dans le topos des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{\hat{E}t}_{\text{coh}}/X$ (resp. $\mathbf{\hat{E}t}_{\text{scoh}}/X$) est une équivalence de catégories ([6] VII 3.1 et 3.2).

On désigne par X_{zar} le topos de Zariski de X et par

$$(2.13.1) \quad u_X : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{zar}}$$

le morphisme canonique ([6] VII 4.2.2). Si F est un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent de X_{zar} , on note encore F le faisceau de $X_{\text{ét}}$ défini pour tout X -schéma étale X' par ([6] VII 2 c), cf. aussi [4] III.2.9)

$$(2.13.2) \quad F(X') = \Gamma(X', F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}).$$

On désigne par $\mathbf{\hat{E}t}_f/X$ le site fini étale de X , c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\hat{E}t}/X$ formée des schémas étales et finis sur X , munie de la topologie induite par celle de $\mathbf{\hat{E}t}/X$. On note $X_{\text{fét}}$ le topos fini étale de X , c'est-à-dire le topos des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{\hat{E}t}_f/X$. Le foncteur d'injection canonique $\mathbf{\hat{E}t}_f/X \rightarrow \mathbf{\hat{E}t}/X$ est continu. Il induit donc un morphisme de topos que l'on note

$$(2.13.3) \quad \rho_X : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{fét}}.$$

2.14. Soient X un schéma connexe, \bar{x} un point géométrique de X . On désigne par $\pi_1(X, \bar{x})$ le groupe fondamental de X en \bar{x} et par $\mathbf{HB}_{\pi_1(X, \bar{x})}$ le topos classifiant du groupe pro-fini $\pi_1(X, \bar{x})$, c'est-à-dire la catégorie des ensembles discrets munis d'une action continue à gauche de $\pi_1(X, \bar{x})$ ([6] IV 2.7). Le foncteur fibre en \bar{x}

$$(2.14.1) \quad \omega_{\bar{x}} : \mathbf{\hat{E}t}_f/X \rightarrow \mathbf{HB}_{\pi_1(X, \bar{x})}$$

qui à tout revêtement étale Y de X associe l'ensemble des points géométriques de Y au-dessus de \bar{x} , induit une équivalence de catégories ([4] VI.9.8)

$$(2.14.2) \quad \mu_{\bar{x}} : \mathbf{HB}_{\pi_1(X, \bar{x})} \xrightarrow{\sim} X_{\text{fét}}.$$

Le foncteur $\omega_{\bar{x}}$ est pro-représentable par un système projectif $(X_i, \bar{x}_i, \phi_{ij})_{i \in I}$ de revêtements étales galoisiens pointés de X , indexé par un ensemble ordonné filtrant I , où \bar{x}_i est un point géométrique de X_i au-dessus de \bar{x} et $\phi_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ ($i \geq j$) est un épimorphisme qui envoie \bar{x}_i sur \bar{x}_j . Il est appelé *pro-objet universel galoisien* de X en \bar{x} . Le foncteur

$$(2.14.3) \quad \nu_{\bar{x}} : X_{\text{fét}} \rightarrow \mathbf{HB}_{\pi_1(X, \bar{x})} \quad F \mapsto \varinjlim_{i \in I} F(X_i),$$

est une équivalence de catégories, quasi-inverse de $\mu_{\bar{x}}$ ([4] VI.9.8).

Lemme 2.15. *Soient X un schéma quasi-compact, quasi-séparé et connexe et \mathbb{L} un faisceau abélien de torsion de $X_{\text{fét}}$. Le morphisme canonique*

$$(2.15.1) \quad \rho_X^* : H^i(X_{\text{fét}}, \mathbb{L}) \rightarrow H^i(X_{\text{ét}}, \rho_X^*(\mathbb{L})).$$

est un isomorphisme si $i = 0, 1$, et est un monomorphisme si $i = 2$.

Preuve. Le morphisme d'adjonction $\text{id} \rightarrow \rho_{X*} \rho_X^*$ est un isomorphisme ([4] VI.9.18), d'où la proposition pour $i = 0$. Montrons-là pour $i = 1$. Les topos $X_{\text{ét}}$ et $X_{\text{fét}}$ sont cohérents ([4] VI.9.12). Par ([4] VI.9.20) et ([6] VI 5.1), on peut se borner au cas où $\rho_X^*(\mathbb{L})$ est un faisceau abélien localement constant et constructible, i.e. représentable par un schéma en groupes fini et étale G sur X . Le faisceau $R^1 \rho_{X*}(\rho_X^*(\mathbb{L}))$ de $X_{\text{fét}}$ est le faisceau sur $\mathbf{\hat{E}t}_f/X$ associé au préfaisceau défini par $Y \mapsto H^1(Y_{\text{ét}}, \rho_X^*(\mathbb{L}))$. La catégorie des $\rho_X^*(\mathbb{L})$ -torseurs

sur $Y_{\text{ét}}$ est équivalente à la catégorie des G_Y -fibrés principaux homogènes sur Y pour la topologie étale, où $G_Y = G \times_X Y$ ([6] VII 2 b)). Tout G_Y -fibré principal homogène sur Y est trivialisé par un revêtement étale de Y . Le faisceau $R^1 \rho_{X*}(\rho_X^*(\mathbb{L}))$ est donc trivial.

On a une suite spectrale

$$(2.15.2) \quad H^i(X_{\text{fét}}, R^j \rho_{X*}(\rho_X^*(\mathbb{L}))) \Rightarrow H^{i+j}(X_{\text{ét}}, \rho_X^*(\mathbb{L})).$$

On en déduit un isomorphisme

$$H^1(X_{\text{fét}}, \rho_{X*}(\rho_X^*(\mathbb{L}))) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{\text{ét}}, \rho_X^*(\mathbb{L})).$$

La proposition pour $i = 1$ résulte de ce dernier et de l'isomorphisme $\text{id} \xrightarrow{\sim} \rho_{X*}(\rho_X^*)$. Comme $R^1 \rho_{X*}(\rho_X^*(\mathbb{L}))$ est nul, on en déduit par (2.5.2) une suite exacte

$$(2.15.3) \quad 0 \rightarrow H^2(X_{\text{fét}}, \rho_{X*}(\rho_X^*(\mathbb{L}))) \rightarrow H^2(X_{\text{ét}}, \rho_X^*(\mathbb{L})) \rightarrow H^0(X_{\text{fét}}, R^2 \rho_{X*}(\rho_X^*(\mathbb{L}))).$$

La proposition pour $i = 2$ résulte alors de ce dernier et de l'isomorphisme $\text{id} \xrightarrow{\sim} \rho_{X*}(\rho_X^*)$.

2.16. Si \mathcal{C} est une catégorie additive, on désigne par $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ et l'on appelle *catégorie des objets de \mathcal{C} à isogénie près* ([4] III.6.1), la catégorie ayant mêmes objets que \mathcal{C} , et telle que l'ensemble des morphismes soit donné, pour tous $M, N \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, par

$$(2.16.1) \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}}(M, N) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

On désigne par

$$(2.16.2) \quad \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}, \quad M \mapsto M_{\mathbb{Q}},$$

le foncteur canonique. Deux objets de \mathcal{C} sont dits *isogènes* s'ils sont isomorphes dans la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$. Si \mathcal{C} est une catégorie abélienne, la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ est abélienne et le foncteur canonique (2.16.2) est exact ([4] III.6.1.4). Tout foncteur additif (resp. exact) entre catégories additives (resp. abéliennes) $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ induit un foncteur additif (resp. exact) $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{C}'_{\mathbb{Q}}$ compatible aux foncteurs canoniques (2.16.2) ([4] III.6.1.5).

La famille des isogénies de \mathcal{C} permet un calcul de fractions bilatère ([29] I 1.4.2). La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ s'identifie à la catégorie localisée par rapport aux isogénies et le foncteur (2.16.2) est le foncteur de localisation (cf. [4] III.6.1).

2.17. Soit (\mathcal{T}, A) un topos annelé. On désigne par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}, A)$ la catégorie des A -modules de \mathcal{T} à isogénie près (2.16) dont les objets sont appelés les $A_{\mathbb{Q}}$ -modules. Étant donné deux $A_{\mathbb{Q}}$ -modules M et N , on note $\text{Hom}_{A_{\mathbb{Q}}}(M, N)$ le groupe des morphismes de M dans N dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}, A)$. Rappelons que la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}, A)$ a suffisamment d'injectifs ([4] III.6.1.6) et reprenons les notations de (2.4) pour cette catégorie. Pour tout entier $i \geq 0$ et tous $A_{\mathbb{Q}}$ -modules M et N , on pose $\text{Ext}_{A_{\mathbb{Q}}}^i(M, N) = \text{Ext}_{\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}, A)}^i(M, N)$ qui est un \mathbb{Q} -espace vectoriel. En particulier, pour tout entier $i \geq 0$ et tout $A_{\mathbb{Q}}$ -module N , on pose

$$(2.17.1) \quad H^i(\mathcal{T}, N) = \text{Ext}_{A_{\mathbb{Q}}}^i(A_{\mathbb{Q}}, N).$$

On note $\mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}}$ la catégorie des \mathbb{Q} -espaces vectoriels. Le foncteur canonique $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}}$ induit une équivalence de catégories $\mathbf{Ab}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}}$. Étant donné un A -module M de \mathcal{T} , on a un diagramme commutatif

$$(2.17.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}(\mathcal{T}, A) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(M, -)} & \mathbf{Ab} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}, A) & \xrightarrow{\text{Hom}_{A_{\mathbb{Q}}}(M_{\mathbb{Q}}, -)} & \mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}}, \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs canoniques. Ceux-ci sont exacts et transforment les objets injectifs en des objets injectifs ([4] III.6.1.6). Pour tout entier $i \geq 0$ et tous A -modules M et N , on en déduit par la suite spectrale de Cartan-Leray un isomorphisme

$$(2.17.3) \quad \text{Ext}_A^i(M, N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{A_{\mathbb{Q}}}^i(M_{\mathbb{Q}}, N_{\mathbb{Q}}).$$

En particulier, pour tout entier $i \geq 0$ et tout A -module N , on a un isomorphisme

$$(2.17.4) \quad H^i(\mathcal{T}, N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq H^i(\mathcal{T}, N_{\mathbb{Q}}).$$

2.18. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne, $\text{End}(\text{id}_{\mathcal{A}})$ l'anneau des endomorphismes du foncteur identique de \mathcal{A} et $\varphi : \mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(\text{id}_{\mathcal{A}})$ un homomorphisme. Pour tout objet M de \mathcal{A} et tout $\gamma \in \mathfrak{o}$, on note $\mu_{\gamma}(M)$ l'endomorphisme de M défini par $\varphi(\gamma)$. En particulier, pour tous objets M et N de \mathcal{A} , $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ est muni d'une structure de \mathfrak{o} -module.

On dit qu'un objet M de \mathcal{A} est α -nul s'il est annulé par tout élément de \mathfrak{m} , i.e. si $\mu_{\gamma}(M) = 0$ pour tout $\gamma \in \mathfrak{m}$. Pour toute suite exacte $0 \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0$, pour que M soit α -nul, il faut et il suffit que M'' et M' soient α -nuls. On appelle catégorie des α -objets de \mathcal{A} et l'on note $\alpha\text{-}\mathcal{A}$ le quotient de la catégorie \mathcal{A} par la sous-catégorie épaisse formée des objets α -nuls ([24] III §1; cf. aussi [3] 1.4.2). On note

$$(2.18.1) \quad \alpha : \mathcal{A} \rightarrow \alpha\text{-}\mathcal{A}, \quad M \mapsto \alpha(M)$$

le foncteur canonique; on notera aussi M^{α} au lieu de $\alpha(M)$ lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion. La catégorie $\alpha\text{-}\mathcal{A}$ est abélienne et le foncteur α est exact ([24] III §1 prop. 1). On dit qu'un morphisme f de \mathcal{A} est un α -isomorphisme (resp. α -monomorphisme, resp. α -épimorphisme) si $\alpha(f)$ est un isomorphisme (resp. monomorphisme, resp. épimorphisme), autrement dit si son noyau et son conoyau (resp. son noyau, resp. son conoyau) sont α -nuls.

La famille des α -isomorphismes de \mathcal{A} permet un calcul de fractions bilatère ([29] I 1.4.2). La catégorie $\alpha\text{-}\mathcal{A}$ s'identifie à la catégorie localisée par rapport aux α -isomorphismes et α (2.18.1) est le foncteur canonique (de localisation).

Lemme 2.19 ([3] 1.4.3). *Les hypothèses étant celles de 2.18, soient, de plus, $f : M \rightarrow N$ un morphisme de \mathcal{A} , $\gamma \in \mathfrak{o}$ tels que le noyau et le conoyau de f soient annulés par γ . Alors, il existe un morphisme $g : N \rightarrow M$ de \mathcal{A} tel que $g \circ f = \mu_{\gamma^2}(M)$ et $f \circ g = \mu_{\gamma^2}(N)$.*

2.20. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne tensorielle autrement dit, \mathcal{A} est une catégorie abélienne munie d'un foncteur bi-additif $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et d'un objet unité A , vérifiant certaines conditions ([12] 1.15), et soit $\varphi : \mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(A)$ un homomorphisme. On a un homomorphisme canonique $\text{End}(A) \rightarrow \text{End}(\text{id}_{\mathcal{A}})$. On peut donc définir la catégorie $\alpha\text{-}\mathcal{A}$ suivant 2.18. Le produit tensoriel induit un bi-foncteur

$$(2.20.1) \quad \alpha\text{-}\mathcal{A} \times \alpha\text{-}\mathcal{A} \rightarrow \alpha\text{-}\mathcal{A}, \quad (M, N) \mapsto M \otimes N,$$

qui fait de $\alpha\text{-}\mathcal{A}$ une catégorie abélienne tensorielle, dont A^{α} est un objet unité (cf. [3] 1.4.4). Le foncteur α induit un homomorphisme $\text{End}(A) \rightarrow \text{End}(A^{\alpha})$. Par suite, pour tous objets M et N de $\alpha\text{-}\mathcal{A}$, $\text{Hom}_{\alpha\text{-}\mathcal{A}}(M, N)$ est canoniquement muni d'une structure de $\text{End}(A)$ -module.

3. Représentations à coefficients dans les modules de type α -fini

3.1. Rappelons que \mathfrak{o} désigne le séparé complété p -adique de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et \mathfrak{m} son idéal maximal et que l'on a $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ et $v(\mathfrak{m}) = \mathbb{Q}_{>0}$ (2.1). Pour tout nombre réel $r \geq 0$, on note I_r l'idéal de \mathfrak{o} formé des éléments $x \in \mathfrak{o}$ tels que $v(x) > r$.

On note $\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})$ la catégorie des \mathfrak{o} -modules. Prenant pour $\varphi : \mathfrak{o} \xrightarrow{\sim} \text{End}(\text{id}_{\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})})$ l'isomorphisme canonique, on considère les notions introduites dans (2.18) pour la catégorie $\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})$. Considérons le foncteur

$$(3.1.1) \quad \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}) \quad M \mapsto M_{\sharp} = \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, M).$$

Pour tout \mathfrak{o} -module M , on a des α -isomorphismes (2.18) canoniques fonctoriels ([4] V.2.4)

$$(3.1.2) \quad M \rightarrow M_{\sharp}, \quad x \mapsto (m \in \mathfrak{m} \mapsto mx),$$

$$(3.1.3) \quad \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} M \rightarrow M.$$

Proposition 3.2 ([4] V.2.5 et 2.6). *Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de \mathfrak{o} -module.*

(i) *Pour que f soit un α -isomorphisme, il faut et il suffit que le morphisme induit $f_{\sharp} : M_{\sharp} \rightarrow N_{\sharp}$ soit un isomorphisme.*

(ii) Pour que f soit un α -isomorphisme, il faut et il suffit que le morphisme induit $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} M \rightarrow \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} N$ soit un isomorphisme.

(iii) Pour tout entier $i \geq 0$, le foncteur $\text{Ext}_{\mathfrak{o}}^i(\mathfrak{m}, -)$ envoie les α -isomorphismes sur des isomorphismes.

(iv) Le foncteur (3.1.1) envoie les α -monomorphismes sur des monomorphismes.

Remarque 3.3. Le \mathfrak{o} -module \mathfrak{m} n'est pas projectif. En effet, le \mathfrak{o} -module \mathfrak{m} est plat et on a $\mathfrak{m} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (p^{1/n})$, où $p^{1/n}$ est une racine n -ième de p dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ (2.1). Mais le système projectif $(\text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}, (p^{1/n})))_{n \geq 1}$ ne vérifie pas la condition de Mittag-Leffler. L'assertion résulte alors de ([41] 3.1.3).

3.4. Suivant ([43] 2.2), pour tous \mathfrak{o} -modules M et N et tout $\gamma \in \mathfrak{m}$, on dit que M et N sont γ -équivalents et on note $M \approx_{\gamma} N$, s'il existe deux \mathfrak{o} -morphisms $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow M$ tels que $f \circ g = \gamma \text{id}_N$ et $g \circ f = \gamma \text{id}_M$. On dit que M et N sont α -équivalents et on note $M \approx N$ si M et N sont γ -équivalents pour tout $\gamma \in \mathfrak{m}$.

On dit qu'un \mathfrak{o} -module M est de *type α -fini* si, pour tout $\gamma \in \mathfrak{m}$, il existe un \mathfrak{o} -module de type fini N tel que $M \approx_{\gamma} N$. Pour tout entier $n \geq 1$, on dit qu'un \mathfrak{o}_n -module M est de *type α -fini* s'il est de type α -fini en tant que \mathfrak{o} -module.

On dit qu'une suite de \mathfrak{o} -modules est α -exacte si ses groupes de cohomologie sont α -nuls (cf. [3] 1.5.2).

Remarque 3.5. (i) D'après 2.19, deux \mathfrak{o} -modules α -isomorphes sont α -équivalents. La réciproque n'est pas vraie. En effet, pour tout nombre réel $r > 0$, on a alors $I_r \approx \mathfrak{o}$ (3.1). Si $r \notin \mathbb{Q}_{>0}$, \mathfrak{o} et I_r ne sont pas α -isomorphes (cf. [3] 1.8.4).

(ii) La notion de *type α -fini* introduite dans 3.4 est compatible avec la définition générale introduite dans 12.28 (cf. [3] 1.5.3 et 1.8.5(ii)).

Théorème 3.6 ([43] 2.5). *Pour tout \mathfrak{o} -module de type α -fini M , il existe une unique suite décroissante de nombres réels positifs $(r_i)_{i \geq 1}$, tendant vers 0, et un unique entier $n \geq 0$ tels que*

$$(3.6.1) \quad M \approx \mathfrak{o}^n \oplus (\oplus_{i \geq 1} \mathfrak{o}/I_{r_i}).$$

Lemme 3.7 ([3] 1.5.13 et 1.8.7). *Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite α -exacte de \mathfrak{o} -modules. Pour que M soit de type α -fini, il faut et il suffit que M' et M'' le soient.*

Proposition 3.8. *Soit M un \mathfrak{o} -module de type α -fini.*

(i) *Il existe un sous- \mathfrak{o} -module libre de type fini M° de M tel que M/M° soit annulé par une puissance de p .*

(ii) *Les sous-modules $(p^n M^\circ)_{n \geq 1}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie p -adique de M .*

(iii) *La topologie p -adique de M est séparée et complète.*

(iv) *Soit N un sous-module de M . La topologie p -adique de N est induite par la topologie p -adique de M .*

Preuve. (i) D'après 3.6, le \mathfrak{o} -module M est α -équivalent à un \mathfrak{o} -module $N = \mathfrak{o}^n \oplus (\oplus_{i \geq 1} \mathfrak{o}/I_{r_i})$ avec $(r_i)_{i \geq 1}$ tendant vers 0. Notons N° le sous- \mathfrak{o} -module \mathfrak{o}^n de N . Choisissons un élément γ de \mathfrak{m} . Il existe des morphismes de \mathfrak{o} -modules $f : N \rightarrow M$ et $g : M \rightarrow N$ tels que $g \circ f = \gamma \text{id}_N$ et $f \circ g = \gamma \text{id}_M$. La restriction de f à N° est donc injective. On prend pour M° le sous- \mathfrak{o} -module libre de type fini $f(N^\circ)$ de M . On a alors $g(M^\circ) = \gamma N^\circ \subset N^\circ$. Les morphismes f et g induisent une γ -équivalence entre M/M° et N/N° :

$$(3.8.1) \quad \bar{f} : N/N^\circ \rightarrow M/M^\circ \quad \bar{g} : M/M^\circ \rightarrow N/N^\circ.$$

Comme $N/N^\circ \cong \oplus_{i \geq 1} \mathfrak{o}/I_{r_i}$ est annulé par une puissance de p , il en est de même de M/M° .

(ii) En vertu de (i), il existe un entier $m \geq 1$ tel que $p^m(M/M^\circ) = 0$. On en déduit que $p^m M \subset M^\circ \subset M$. Les systèmes fondamentaux $(p^n M^\circ)_{n \geq 1}$ et $(p^n M)_{n \geq 1}$ de voisinages de 0 sont alors équivalents.

(iii) On a un isomorphisme canonique $M^\circ \xrightarrow{\sim} \widehat{M^\circ} = \varprojlim M^\circ/p^n M^\circ$. En vertu de (ii), $\widehat{M} = \varprojlim M/p^n M^\circ$ est le séparé complété p -adique de M . Pour tout entier $n \geq 1$, on a une suite exacte

$$(3.8.2) \quad 0 \rightarrow M^\circ/p^n M^\circ \rightarrow M/p^n M^\circ \rightarrow M/M^\circ \rightarrow 0.$$

Le système projectif $(M^\circ/p^n M^\circ)_{n \geq 1}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler. La limite projective induit donc une suite exacte

$$(3.8.3) \quad 0 \rightarrow \widehat{M^\circ} \rightarrow \widehat{M} \rightarrow M/M^\circ \rightarrow 0$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$(3.8.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M^\circ & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/M^\circ \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{M^\circ} & \longrightarrow & \widehat{M} & \longrightarrow & M/M^\circ \longrightarrow 0 \end{array}$$

On en déduit que le morphisme canonique $M \rightarrow \widehat{M}$ est un isomorphisme ; d'où l'assertion.

(iv) En vertu de 3.7, N est de type α -fini. Il existe un sous- \mathfrak{o} -module libre de type fini N° de N vérifiant la condition (i). On peut supposer de plus que $N^\circ \subset M^\circ$. Soit $N_{\text{sat}}^\circ = \{x \in M^\circ \mid p^n x \in N^\circ \text{ pour un entier } n \geq 1\}$ la saturation de N° dans M° . On a alors $(p^n M^\circ) \cap N_{\text{sat}}^\circ = p^n N_{\text{sat}}^\circ$ pour tout $n \geq 1$. Comme p n'est pas un diviseur de zéro dans $M^\circ/N_{\text{sat}}^\circ$, $M^\circ/N_{\text{sat}}^\circ$ est \mathfrak{o} -plat ([2] 1.9.12). On en déduit que N_{sat}° est de type fini ([2] 1.9.14). Il existe donc un entier $l \geq 1$ tel que $p^l N_{\text{sat}}^\circ \subset N^\circ$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(p^n M^\circ) \cap N^\circ = (p^n M^\circ \cap N_{\text{sat}}^\circ) \cap N^\circ = (p^n N_{\text{sat}}^\circ) \cap N^\circ = p^n N_{\text{sat}}^\circ.$$

On en déduit que

$$p^n N^\circ \subset (p^n M^\circ) \cap N^\circ \subset p^{n-l} N^\circ.$$

L'assertion s'ensuit compte tenu de (ii).

Lemme 3.9 ([3] 1.8.11). *Soit M un \mathfrak{o} -module tel que M/pM soit de type α -fini. Alors, le \mathfrak{o} -module $\widehat{M} = \varprojlim M/p^n M$ est de type α -fini.*

Lemme 3.10. (i) *Soit $(M_n)_{n \geq 1}$ un système projectif de \mathfrak{o} -modules α -nuls. Alors, les \mathfrak{o} -modules $\varprojlim M_n$ et $R^1 \varprojlim M_n$ sont α -nuls.*

(ii) *Soient $(M_n)_{n \geq 1}$ et $(N_n)_{n \geq 1}$ deux systèmes projectifs de \mathfrak{o} -modules et $(f_n : M_n \rightarrow N_n)_{n \geq 1}$ un système projectif des α -isomorphismes. Alors, le foncteur limite projective induit des α -isomorphismes $\varprojlim M_n \rightarrow \varprojlim N_n$ et $R^1 \varprojlim M_n \rightarrow R^1 \varprojlim N_n$.*

L'assertion (i) est démontrée dans ([27] 2.4.2) et l'assertion (ii) résulte de (i).

Définition 3.11 ([4] V.6.1). Soient R une \mathfrak{o} -algèbre et M un R -module. On dit que M est α -plat si il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (i) Pour tout R -module N et tout entier $i \geq 1$, $\text{Tor}_i^R(M, N)$ est un \mathfrak{o} -module α -nul.
- (ii) Pour tout R -module N , $\text{Tor}_1^R(M, N)$ est un \mathfrak{o} -module α -nul.
- (iii) Pour tout morphisme R -linéaire injectif $f : N_1 \rightarrow N_2$, le noyau de $\text{id}_M \otimes f : M \otimes_R N_1 \rightarrow M \otimes_R N_2$ est un \mathfrak{o} -module α -nul.

Lemme 3.12. *Soient R une \mathfrak{o} -algèbre et M un R -module α -plat. Alors, le R -module $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} M$ est plat. En particulier, pour tout \mathfrak{o} -module α -plat N , $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} N$ est sans torsion.*

Preuve. En vertu de 3.2(ii), pour tout \mathfrak{o} -module α -nul N , $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} N$ est nul. La R -platitude de $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} M$ résulte alors de la \mathfrak{o} -platitude de \mathfrak{m} . On sait qu'un \mathfrak{o} -module est plat si et seulement s'il est sans torsion ([10] chap. VI §3.6 lem.1) ; d'où la deuxième assertion.

Proposition 3.13. *Soient M et N deux \mathfrak{o}_n -modules (2.1) (resp. \mathfrak{o} -modules) α -équivalents. Alors, la α -platitude de M est équivalente à celle de N .*

Preuve. Supposons que M soit α -plat. Soit $f : N_1 \rightarrow N_2$ un morphisme injectif de \mathfrak{o}_n -modules. Pour tout $\gamma \in \mathfrak{m}$, il existe des morphismes \mathfrak{o} -linéaires $g : M \rightarrow N$ et $h : N \rightarrow M$ tels que $g \circ h = \gamma \text{id}_N$ et $h \circ g = \gamma \text{id}_M$.

On a alors un diagramme commutatif

$$(3.13.1) \quad \begin{array}{ccc} N \otimes_{\mathfrak{o}_n} N_1 & \xrightarrow{h \otimes \text{id}_{N_1}} & M \otimes_{\mathfrak{o}_n} N_1 \\ \text{id}_N \otimes f \downarrow & & \downarrow \text{id}_M \otimes f \\ N \otimes_{\mathfrak{o}_n} N_2 & \xrightarrow{h \otimes \text{id}_{N_2}} & M \otimes_{\mathfrak{o}_n} N_2 \end{array}$$

Comme $\text{Ker}(M \otimes_{\mathfrak{o}_n} N_1 \rightarrow M \otimes_{\mathfrak{o}_n} N_2)$ est α -nul et $g \circ h = \gamma \text{id}_N$, on en déduit que $\text{Ker}(N \otimes_{\mathfrak{o}_n} N_1 \rightarrow N \otimes_{\mathfrak{o}_n} N_2)$ est annulé par l'idéal $\gamma \mathfrak{m}$ de \mathfrak{o} . La α -platitude de N s'ensuit compte tenu du fait que $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. La démonstration pour les \mathfrak{o} -modules est similaire.

Corollaire 3.14. *Soient n un entier ≥ 1 et M un \mathfrak{o}_n -module (resp. \mathfrak{o} -module) de type α -fini. Pour que M soit α -plat, il faut et il suffit qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $M \approx \mathfrak{o}_n^m$ (resp. $M \approx \mathfrak{o}^m$).*

Preuve. Comme $p^n M = 0$, d'après 3.6, il existe une suite décroissante de nombres réels $(r_i)_{i \geq 1}$ tendant vers 0 tels que $r_i \leq n$ et que $M \approx \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{o}/I_{r_i}$. Le \mathfrak{o} -module \mathfrak{o}/I_r est α -isomorphe à \mathfrak{o}_n . Soit r un nombre réel tel que $0 < r < n$. Il est clair que \mathfrak{o}/I_r n'est pas un \mathfrak{o}_n -module α -plat. L'assertion pour les \mathfrak{o}_n -modules s'ensuit. La démonstration pour les \mathfrak{o} -modules est similaire.

Lemme 3.15. *Soit $(M_n)_{n \geq 1}$ un système projectif de \mathfrak{o} -modules tel que, pour tout entier $n \geq 1$, M_n soit un \mathfrak{o}_n -module α -plat de type α -fini et que le morphisme canonique $M_{n+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \rightarrow M_n$ soit un α -isomorphisme.*

On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $N_n = \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} M_n$, $\widehat{M} = \varprojlim M_n$ et $\widehat{N} = \varprojlim N_n$. Alors :

- (i) *On a un α -isomorphisme canonique $\widehat{N} \rightarrow \widehat{M}$.*
- (ii) *L'homomorphisme canonique $\widehat{N}/p^n \widehat{N} \rightarrow N_n$ est un isomorphisme.*
- (iii) *Les \mathfrak{o} -modules \widehat{N} et \widehat{M} sont α -plats de type α -fini.*

Preuve. (i) Pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme canonique $N_n \rightarrow M_n$ est un α -isomorphisme (3.1.3). En vertu de 3.10(ii), la limite projective induit un α -isomorphisme canonique $\widehat{N} \rightarrow \widehat{M}$.

(ii) D'après 3.2(ii), le α -isomorphisme $M_{n+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \rightarrow M_n$ induit un isomorphisme $N_{n+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \xrightarrow{\sim} N_n$. On notera que, pour tout entier $n \geq 1$, N_n est un \mathfrak{o}_n -module plat (3.12). Pour tous entiers $m, n \geq 1$, appliquant le foncteur $N_{m+n} \otimes_{\mathfrak{o}_{m+n}} -$ à la suite exacte $0 \rightarrow \mathfrak{o}_m \xrightarrow{p^n} \mathfrak{o}_{m+n} \rightarrow \mathfrak{o}_n \rightarrow 0$, on en déduit une suite exacte :

$$(3.15.1) \quad 0 \rightarrow N_m \xrightarrow{p^n} N_{m+n} \rightarrow N_n \rightarrow 0.$$

Le système projectif $(N_m)_{m \geq 1}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler. On en déduit une suite exacte

$$(3.15.2) \quad 0 \longrightarrow \widehat{N} \xrightarrow{p^n} \widehat{N} \longrightarrow N_n \longrightarrow 0,$$

d'où l'assertion.

(iii) En vertu de (i) et 3.14, il suffit de démontrer l'assertion pour \widehat{N} . La α -finitude de \widehat{N} résulte de (ii) et 3.9. D'après 3.6, \widehat{N} est α -équivalent à un \mathfrak{o} -module $\mathfrak{o}^m \oplus (\bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{o}/I_{r_i})$ avec $(r_i)_{i \geq 1}$ tendant vers 0. On en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\widehat{N}/p^n \widehat{N} \approx \mathfrak{o}_n^m \oplus (\bigoplus_{i \geq 1} (\mathfrak{o}/I_{r_i})/p^n (\mathfrak{o}/I_{r_i}))$. D'autre part, on notera qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, $N_n \approx \mathfrak{o}_n^l$ (3.14). En vertu de (ii), pour tout entier $i \geq 1$, on a donc $r_i = 0$; d'où la α -platitude de \widehat{N} .

Remarque 3.16. Sous les hypothèses de 3.15, la topologie p -adique de \widehat{N} est la limite projective des topologies discrètes sur les N_n .

3.17. Soient V un \mathfrak{C} -espace vectoriel de dimension finie, V° un sous- \mathfrak{o} -module libre de type fini de V qui l'engendre sur \mathfrak{C} . On appelle *topologie p -adique sur V* l'unique topologie compatible avec sa structure de groupe additif pour laquelle les sous-groupes $(p^n V^\circ)_{n \geq 1}$ forment un système fondamental de voisinages de 0. Cette topologie ne dépend pas du choix de V° (cf. [4] II.2.2). On notera que tout morphisme \mathfrak{C} -linéaire de \mathfrak{C} -espaces vectoriels de dimension finie est continu pour la topologie p -adique.

3.18. Dans la suite de cette section, on se donne un groupe profini G . Pour tout entier $n \geq 1$, on munit l'anneau $\mathfrak{o}_n = \mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o}$ (resp. \mathfrak{o} , resp. \mathfrak{C}) de la topologie discrète (resp. de la topologie p -adique, resp. de la topologie p -adique (3.17)) et de l'action triviale de G .

Soit n un entier ≥ 1 . Par \mathfrak{o}_n -représentation de G , on sous-entend un \mathfrak{o}_n -module M muni de la topologie discrète et d'une action continue et \mathfrak{o}_n -linéaire de G . Un morphisme de \mathfrak{o}_n -représentations de G est une application \mathfrak{o}_n -linéaire et G -équivariante. On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(G)$ la catégorie des \mathfrak{o}_n -représentations de G .

On note \mathfrak{o} le système projectif d'anneaux $(\mathfrak{o}_n)_{n \geq 1}$. On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ la catégorie des systèmes projectifs de $\mathfrak{o}[G]$ -modules discrets $(V_n)_{n \geq 1}$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$, $p^n V_n = 0$. Il est clair que les catégories $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(G)$ et $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ sont abéliennes.

Par \mathfrak{o} -représentation continue de G , on sous-entend un \mathfrak{o} -module de type α -fini muni de la topologie p -adique et d'une action \mathfrak{o} -linéaire continue de G . Par \mathfrak{C} -représentation continue, on sous-entend un \mathfrak{C} -espace vectoriel de dimension finie muni de la topologie p -adique (3.17) et d'une action \mathfrak{C} -linéaire continue de G . Un morphisme de \mathfrak{o} -représentations (resp. \mathfrak{C} -représentations) continues de G est une application \mathfrak{o} -linéaire et G -équivariante. Une telle application est continue pour la topologie p -adique (cf. 3.17). On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(G)$) la catégorie des \mathfrak{o} -représentations (resp. \mathfrak{C} -représentations) continues de G .

Lemme 3.19. Soient V un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)$ et W un sous- \mathfrak{o} -module de V stable par G . Alors, W (resp. V/W) est un \mathfrak{o} -module de type α -fini et la restriction de l'action de G sur W (resp. V/W) est continue pour la topologie p -adique.

Preuve. La α -finitude de W et V/W résulte de 3.7. La continuité de l'action de G pour la topologie p -adique de W s'ensuit compte tenu 3.8(iv). Soit $\pi : V \rightarrow V/W$ la projection. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\pi(p^n V) = p^n(V/W)$. On en déduit la continuité de l'action de G sur V/W .

Proposition 3.20. La catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)$ est abélienne.

Preuve. Cette catégorie est clairement additive. Soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ un morphisme de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)$. D'après 3.19, on définit $\text{Ker}(f)$ (resp. $\text{Coker}(f)$) par le \mathfrak{o} -module $\text{Ker}(V_1 \rightarrow V_2)$ (resp. $\text{Coker}(V_1 \rightarrow V_2)$) muni de la topologie p -adique et de l'action de G induite par V_1 (resp. V_2). Il est clair que le morphisme canonique $\text{Coim}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ est un isomorphisme.

3.21. Soit n un entier ≥ 1 . On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{lft}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(G)$ formée des \mathfrak{o}_n -représentations dont le \mathfrak{o}_n -module sous-jacent est libre de type fini, par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)$ formée des \mathfrak{o} -représentations continues dont le \mathfrak{o} -module sous-jacent est libre de type fini.

On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ formée des systèmes projectifs $(V_n)_{n \geq 1}$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$, V_n soit un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{lft}}(G)$ et que le morphisme canonique $V_{n+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \xrightarrow{\sim} V_n$ soit un isomorphisme de \mathfrak{o}_n -représentations de G .

Le foncteur limite projective induit une équivalence de catégories

$$(3.21.1) \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G).$$

En effet, le foncteur $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G)$, défini par $V \mapsto (V/p^n V)_{n \geq 1}$ est un quasi-inverse de (3.21.1). Pour tout objet V de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G)$, on note $V[\frac{1}{p}]$ la \mathfrak{C} -représentation continue associée. Le foncteur canonique $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(G)$ induit une équivalence de catégories :

$$(3.21.2) \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(G),$$

où la source désigne la catégorie des objets de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{lft}}(G)$ à isogénie près (cf. [13] prop. 22).

3.22. Prenant pour φ l'un des homomorphismes canoniques $\mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(\text{id}_{\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(G)})$, $\mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(\text{id}_{\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)})$ ou $\mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(\text{id}_{\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)})$, on peut considérer les notions introduites dans 2.18 pour les catégories abéliennes $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(G)$, $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ et $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)$. Un morphisme de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(G)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)$) est un α -isomorphisme si et seulement s'il induit un α -isomorphisme sur les modules sous-jacents. Un morphisme $(f_n)_{n \geq 1}$ de

$\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ est un α -isomorphisme si et seulement si, pour tout entier $n \geq 1$, f_n est un α -isomorphisme de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(G)$.

3.23. Soit n un entier ≥ 1 . On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{ptf}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(G)$ formée des \mathfrak{o}_n -représentations dont le \mathfrak{o}_n -module sous-jacent est α -plat de type α -fini (3.14), et par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)$ formée des \mathfrak{o} -représentations continues de G dont le \mathfrak{o} -module sous-jacent est α -plat de type α -fini.

On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ formée des systèmes projectifs de représentations $(V_n)_{n \geq 1}$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$, V_n soit un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{ptf}}(G)$ et que le morphisme canonique $V_{n+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \rightarrow V_n$ soit un α -isomorphisme (3.22).

En munissant \mathfrak{m} de l'action triviale de G , d'après 3.15 et 3.16, le foncteur limite projective induit un foncteur

$$(3.23.1) \quad F_1 : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G) \quad (V_n)_{n \geq 1} \mapsto \varprojlim \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V_n.$$

D'autre part, on a un foncteur

$$(3.23.2) \quad F_2 : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G) \quad V \mapsto (V/p^n V)_{n \geq 1}.$$

En vertu de 3.8(i)-(ii), on a un foncteur canonique

$$(3.23.3) \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{c}}^{\text{cont}}(G) \quad V \mapsto V\left[\frac{1}{p}\right].$$

On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)_{\mathbb{Q}}$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)_{\mathbb{Q}}$) la catégorie des objets de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)$) à isogénie près.

Lemme 3.24. (i) *Le foncteur F_1 envoie les α -isomorphismes sur des isomorphismes.*

(ii) *Soit $(V_n)_{n \geq 1}$ un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$F_2(F_1((V_n)_{n \geq 1})) \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V_n)_{n \geq 1}$$

et un α -isomorphisme canonique $(\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V_n)_{n \geq 1} \rightarrow (V_n)_{n \geq 1}$.

Preuve. L'assertion (i) résulte de 3.2(ii) et l'assertion (ii) résulte de (3.1.3) et 3.15(ii).

Lemme 3.25. *Soit V un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)$. On munit $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V$ de la topologie p -adique et de l'action canonique de G . Alors :*

(i) *On a un isomorphisme canonique fonctoriel $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V \xrightarrow{\sim} F_1(F_2(V))$.*

(ii) *Le α -isomorphisme canonique $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V \rightarrow V$ est injectif.*

Preuve. (i) D'après 3.8(iii), on a un isomorphisme canonique et fonctoriel de \mathfrak{o} -représentations continues $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V} \simeq \varprojlim \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} (V/p^n V)$; d'où l'assertion.

(ii) Le noyau du morphisme $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V \rightarrow V$ est α -nul. La proposition résulte du fait que le \mathfrak{o} -module $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V$ n'a pas de torsion (3.12).

Corollaire 3.26. *Les foncteurs F_1 et F_2 induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre*

$$(3.26.1) \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)_{\mathbb{Q}}, \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)_{\mathbb{Q}}.$$

Preuve. En vertu de 2.19, tout α -isomorphisme est une isogénie. L'assertion résulte alors de 3.24 et 3.25.

Proposition 3.27. *Le foncteur canonique (3.23.3) induit une équivalence de catégories*

$$(3.27.1) \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{c}}^{\text{cont}}(G).$$

Preuve. L'essentielle surjectivité résulte de (3.21.2). Soient V_1 et V_2 deux objets de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(G)$. Il suffit de démontrer que le morphisme canonique

$$(3.27.2) \quad \text{Hom}_G(V_1, V_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \text{Hom}_G\left(V_1\left[\frac{1}{p}\right], V_2\left[\frac{1}{p}\right]\right)$$

est un isomorphisme. D'après 3.25(ii), on a une suite exacte de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{cont}}(G)$

$$(3.27.3) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V_2 \rightarrow V_2 \rightarrow k \otimes_{\mathfrak{o}} V_2 \rightarrow 0.$$

On en déduit une suite exacte

$$(3.27.4) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_G(V_1, \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V_2) \rightarrow \text{Hom}_G(V_1, V_2) \rightarrow \text{Hom}_G(V_1, k \otimes_{\mathfrak{o}} V_2).$$

Comme $k \otimes_{\mathfrak{o}} V_2$ est α -nul, on a des isomorphismes $(\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V_2)[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} V_2[\frac{1}{p}]$ et $\text{Hom}_G(V_1, \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} V_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(V_1, V_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. D'après 3.12, on peut donc se ramener au cas où V_2 est sans torsion.

On note $V_{1,\text{tor}}$ le sous-module de torsion de V_1 et on le munit de la topologie p -adique et de l'action continue de G induite par V_1 (3.20). On a alors des isomorphismes

$$(3.27.5) \quad \text{Hom}_G(V_1/V_{1,\text{tor}}, V_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(V_1, V_2)$$

et $V_1[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} (V_1/V_{1,\text{tor}})[\frac{1}{p}]$. On peut donc se ramener au cas où V_1 est sans torsion.

Comme V_1 et V_2 sont isogènes à des \mathfrak{o} -modules libres de type fini (3.14), on a un isomorphisme canonique

$$(3.27.6) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(V_1, V_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(V_1[\frac{1}{p}], V_2[\frac{1}{p}]).$$

On en déduit l'injectivité de (3.27.2). Étant donnée une application \mathfrak{C} -linéaire et G -équivariante $f : V_1[\frac{1}{p}] \rightarrow V_2[\frac{1}{p}]$, il existe une application \mathfrak{o} -linéaire $g : V_1 \rightarrow V_2$ telle que $g[\frac{1}{p}] = f$. Comme les actions de G sur \mathfrak{o} et \mathfrak{C} sont triviales et les \mathfrak{o} -modules sous-jacents à V_1 et V_2 n'ont pas de torsion, l'application g est G -équivariante; d'où la surjectivité de (3.27.2).

Lemme 3.28. *Soient X un schéma connexe, \bar{x} un point géométrique de X . Pour tout entier $n \geq 1$, on note encore \mathfrak{o}_n le faisceau d'anneaux constant de $X_{\text{fét}}$ de valeur \mathfrak{o}_n et on note $\check{\mathfrak{o}}$ l'anneau $(\mathfrak{o}_n)_{n \geq 1}$ de $X_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}$.*

(i) *Pour qu'un \mathfrak{o}_n -module \mathbb{L} de $X_{\text{fét}}$ soit localement libre de type fini, il faut et il suffit que sa fibre $\mathbb{L}_{\bar{x}}$ en \bar{x} soit un \mathfrak{o}_n -module libre de type fini.*

(ii) *Pour qu'un $\check{\mathfrak{o}}$ -module $\mathbb{L} = (\mathbb{L}_n)_{n \geq 1}$ soit localement libre de type fini, il faut et il suffit que \mathbb{L} soit adique et que pour tout entier $n \geq 1$, le \mathfrak{o}_n -module \mathbb{L}_n soit localement libre de type fini.*

Preuve. L'assertion (i) est démontrée dans ([4] III.2.11). En calquant la démonstration de ([4] III.7.19, 7.20), on vérifie l'assertion (ii).

3.29. Conservons les notations de 3.28 et reprenons de plus celles de 3.21 pour $G = \pi_1(X, \bar{x})$. Soit n un entier ≥ 1 . La restriction du foncteur $\mu_{\bar{x}} : \mathbf{B}_{\pi_1(X, \bar{x})} \xrightarrow{\sim} X_{\text{fét}}$ (2.14.2) à la sous-catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(\pi_1(X, \bar{x}))$ de $\mathbf{B}_{\pi_1(X, \bar{x})}$ induit une équivalence de catégories :

$$(3.29.1) \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(\pi_1(X, \bar{x})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n).$$

D'après 3.28(i), celle-ci induit une équivalence de catégories (2.9, 3.21)

$$(3.29.2) \quad \mu_{\bar{x}} : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{ltf}}(\pi_1(X, \bar{x})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{LL}^{\text{tf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n).$$

D'après (3.21.1) et 3.28(ii), les foncteurs (3.29.2) induisent une équivalence de catégories

$$(3.29.3) \quad \check{\mu}_{\bar{x}} : \mathbf{Rep}_{\check{\mathfrak{o}}}^{\text{ltf}}(\pi_1(X, \bar{x})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{LL}^{\text{tf}}(X_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}, \check{\mathfrak{o}}).$$

On désigne par $\mathbf{LL}_{\mathbb{Q}}^{\text{tf}}(X_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}, \check{\mathfrak{o}})$ la catégorie des $\check{\mathfrak{o}}$ -modules localement libres de type fini de $X_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}$ à isogénie près. D'après (3.21.2), le foncteur (3.29.3) induit une équivalence de catégories

$$(3.29.4) \quad \check{\mu}_{\bar{x}, \mathbb{Q}} : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(X, \bar{x})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{LL}_{\mathbb{Q}}^{\text{tf}}(X_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}, \check{\mathfrak{o}}).$$

3.30. Soient W un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ltf}}(\pi_1(X, \bar{x}))$ et V une \mathfrak{C} -représentation continue de $\pi_1(X, \bar{x})$. Pour tout entier $i \geq 0$, on désigne par $\mathbf{H}_{\text{cont}}^i(\pi_1(X, \bar{x}), W)$ (resp. $\mathbf{H}_{\text{cont}}^i(\pi_1(X, \bar{x}), V)$) le groupe de cohomologie continue de $\pi_1(X, \bar{x})$ à valeurs dans W (resp. V) (cf. [47] §2 ou [4] II.3.8).

Posons $\mathbb{L} = \check{\mu}_{\bar{x}}(W)$ (3.29.3). D'après (3.29.1), ([4] II.3.10 et III.7.11), on a un isomorphisme canonique

$$(3.30.1) \quad \mathbf{H}_{\text{cont}}^i(\pi_1(X, \bar{x}), W) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^i(X_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}, \mathbb{L}).$$

4. Compléments de géométrie rigide

4.1. Soient $\mathcal{S} = \mathrm{Spf}(\mathfrak{o})$ et \mathfrak{X} un \mathcal{S} -schéma formel de présentation finie. Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module \mathcal{F} , on pose

$$(4.1.1) \quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{p}\right] = \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$

Celui-ci est canoniquement isomorphe à la clôture rigide de \mathcal{F} ([2] 2.10.1, [4] III.6.15). On note $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -modules cohérents et $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules cohérents à isogénie près. Alors le foncteur canonique

$$(4.1.2) \quad \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \rightarrow \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]), \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}\left[\frac{1}{p}\right],$$

induit une équivalence de catégories ([4] III.6.16)

$$(4.1.3) \quad \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]).$$

4.2. On désigne par $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ l'espace rigide cohérent associé à \mathfrak{X} ([2] 4.1.6) et par $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ le topos admissible de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ ([2] 4.4.1). On pose $\Theta = \mathcal{S}^{\mathrm{rig}}$. Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module \mathcal{F} , on peut lui associer un faisceau $\mathcal{F}^{\mathrm{rig}}$ de $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ ([2] 4.7.4). Le faisceau $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})^{\mathrm{rig}}$ est un anneau de $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ que l'on note $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ ([2] 4.7.5). On a un morphisme canonique de topos annelés ([2] (4.7.5.1))

$$(4.2.1) \quad \varrho_{\mathfrak{X}} : (\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \rightarrow (\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]).$$

Celui-ci induit un morphisme canonique de topos annelés ([2] (4.7.5.2))

$$(4.2.2) \quad \rho_{\mathfrak{X}} : (\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \rightarrow (\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}).$$

Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent \mathcal{F} , on a un isomorphisme canonique ([2] 4.7.25)

$$(4.2.3) \quad \rho_{\mathfrak{X}}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{\mathrm{rig}}.$$

4.3. Soit V un \mathfrak{C} -schéma séparé de type fini. On peut lui associer un Θ -espace rigide quasi-séparé V^{an} ([2] 7.4.12). On désigne par $V_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{an}}$ le topos admissible de V^{an} ([2] 7.3.4) et $\mathcal{O}_{V^{\mathrm{an}}}$ l'anneau structural de V^{an} ([2] 7.3.8). On a un morphisme de topos annelés (le morphisme de GAGA [2] (7.6.2.4)) :

$$(4.3.1) \quad \Phi_V : (V_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \rightarrow (V_{\mathrm{zar}}, \mathcal{O}_V).$$

Si F est un \mathcal{O}_V -module, on pose $F^{\mathrm{an}} = \Phi_V^*(F)$ (l'image réciproque étant pris au sens des modules). L'anneau $\mathcal{O}_{V^{\mathrm{an}}}$ est cohérent (cf. [2] 7.3.10 et 7.3.11). On désigne par $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_V)$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{V^{\mathrm{an}}})$) la catégorie des \mathcal{O}_V -modules (resp. $\mathcal{O}_{V^{\mathrm{an}}}$ -modules) cohérents ([2] 7.3.10).

4.4. Soient X un \check{S} -schéma séparé et de présentation finie (2.1), \widehat{X} le schéma formel complété p -adique de X et $V = X \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{C}$. On a un Θ -morphisme canonique ([2] 7.4.12.2)

$$(4.4.1) \quad \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \rightarrow V^{\mathrm{an}}$$

Si X est propre sur \check{S} , celui-ci est un isomorphisme et par suite V^{an} est cohérent ([2] 7.4.14). Soient \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent et $\widehat{\mathcal{F}}$ son complété p -adique. On a un isomorphisme fonctoriel ([2] 7.6.7)

$$(4.4.2) \quad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}|_V)^{\mathrm{an}}|_{\widehat{X}^{\mathrm{rig}}}.$$

Proposition 4.5. *Soient V un \mathfrak{C} -schéma séparé de type fini et F un \mathcal{O}_V -module cohérent. Si $F^{\mathrm{an}} = 0$, F est également nul.*

Preuve. Le support de F est un sous-ensemble fermé de V . Comme chaque sous-ensemble fermé de V a un point fermé, il suffit de démontrer que, pour tout point fermé P de V , F_P est nul.

Soient P un \mathfrak{C} -point de V et $Q : \Theta \rightarrow V^{\text{an}}$ le morphisme d'espaces rigides associé ([2] 7.4.12). D'après ([2] 7.4.12.3), il existe un \tilde{S} -schéma X séparé de présentation finie et de fibre générique V tel que Q se factorise en un morphisme $\Theta \rightarrow \widehat{X}^{\text{rig}}$ que l'on note encore Q , suivi du morphisme canonique $\widehat{X}^{\text{rig}} \rightarrow V^{\text{an}}$ (4.4.1). D'après ([2] 3.3.12 et 4.1.20), il existe un unique point rigide $\mathcal{Q} : \mathcal{S} \rightarrow \widehat{X}$ ([2] 3.3.1) tel que $Q = \mathcal{Q}^{\text{rig}}$.

Pour démontrer que F_P est nul, on peut se ramener au cas où $X = \text{Spec}(A)$ est affine. On note \widehat{A} le complété p -adique de A et on pose $B = A[\frac{1}{p}]$, $B' = \widehat{A}[\frac{1}{p}]$ et $f : B \rightarrow B'$ le morphisme canonique. Le point rigide \mathcal{Q} de \widehat{X} correspond à un idéal maximal \mathfrak{q} de B' (cf. [2] 3.3.2). D'après ([2] 1.12.11(i)), $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ est l'idéal maximal de B correspondant au point fermé P .

Il existe un \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F} tel que $\mathcal{F} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{C} \simeq F$ ([2] 2.6.23). En vertu de (4.4.2), on a un isomorphisme $\widehat{\mathcal{F}}^{\text{rig}} \xrightarrow{\sim} F^{\text{an}}|_{\widehat{X}^{\text{rig}}}$. On en déduit que $\widehat{\mathcal{F}}^{\text{rig}} = 0$. Il existe un A -module cohérent M tel que \mathcal{F} soit isomorphe au \mathcal{O}_X -module associé à M . Notons \widehat{M} le complété p -adique de M . D'après ([2] 1.12.16), le couple (A, pA) vérifie la condition de Krull ([2] 1.8.25) et on a alors un isomorphisme

$$(4.5.1) \quad M \otimes_A \widehat{A} \xrightarrow{\sim} \widehat{M}.$$

D'après ([2] 4.8.24), le B' -module $\widehat{M}[\frac{1}{p}]$ est nul. On en déduit que

$$(4.5.2) \quad (M[\frac{1}{p}])_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} B'_{\mathfrak{q}} \simeq (\widehat{M}[\frac{1}{p}])_{\mathfrak{q}}$$

est nul. D'après ([2] 1.12.17), le morphisme canonique $A \rightarrow \widehat{A}$ est plat. Il en est même du morphisme local $B_{\mathfrak{p}} \rightarrow B'_{\mathfrak{q}}$. En vertu de ([16] 6.6.1), $B'_{\mathfrak{q}}$ est fidèlement plat sur $B_{\mathfrak{p}}$. Le $B_{\mathfrak{p}}$ -module $(M[\frac{1}{p}])_{\mathfrak{p}} \simeq F_P$ est alors nul, d'où la proposition.

Corollaire 4.6. *Sous les hypothèses de 4.5, le foncteur*

$$(4.6.1) \quad \Phi_V^* : \mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_V) \rightarrow \mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{V^{\text{an}}}) \quad F \mapsto F^{\text{an}}$$

est exact et fidèle.

Preuve. Cela résulte de 4.5 et ([2] 7.6.8).

Proposition 4.7. *Soient V un schéma séparé de type fini sur \mathfrak{C} et F un \mathcal{O}_X -module cohérent. Pour que F soit plat, il faut et il suffit que F^{an} soit un $\mathcal{O}_{V^{\text{an}}}$ -module plat.*

Preuve. Si F est plat, c'est alors un fibré vectoriel sur V . On en déduit que F^{an} est localement libre de type fini et est plat.

Supposons que F^{an} soit plat. Soient U un ouvert de V , F_U la restriction de F à U et $F_U^{\text{an}} = \Phi_U^*(F)$ (4.6.1). Le $\mathcal{O}_{U^{\text{an}}}$ -module F_U^{an} s'identifie à la restriction de F^{an} sur U^{an} . Comme $U_{\text{ad}}^{\text{an}}$ a suffisamment de points ([2] 7.3.14), F_U^{an} est un $\mathcal{O}_{U^{\text{an}}}$ -module plat. Comme le foncteur Φ_U^* (4.6.1) est exact et fidèle, on en déduit que le foncteur

$$(4.7.1) \quad F_U \otimes_{\mathcal{O}_U} - : \mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_U) \rightarrow \mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_U)$$

est exact. La proposition s'ensuit compte tenu de ([2] 1.3.17).

5. Rappel sur les courbes

5.1. Dans cet article, *une courbe sur un corps F* est un schéma séparé de type fini et *géométriquement connexe* sur F de dimension 1. Une courbe propre sur un corps algébriquement clos est dite *semi-stable* si elle est réduite et a pour seules singularités des points doubles ordinaires. On notera que cette définition est moins restrictive que la définition classique puisqu'on n'impose aucune condition sur l'intersection avec les composantes rationnelles.

5.2. Soient $T = \text{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation R de hauteur 1, de corps des fractions F , et \overline{F} une clôture algébrique de F . On note τ (resp. t) le point générique (resp. fermé) de T et $\overline{\tau}$ le point géométrique générique correspondant à \overline{F} .

Une T -courbe est un T -schéma plat, séparé, de présentation finie et de dimension relative 1 dont la fibre générique est une courbe lisse sur F . Une T -courbe $f : X \rightarrow T$ est propre (resp. régulière, resp. normale) si f est propre (resp. X est régulier, resp. X est normal). D'après ([33] § 4 3.8), toute T -courbe est irréductible et réduite. D'après la factorisation de Stein ([18] 4.3.1), la fibre spéciale d'une T -courbe propre est géométriquement connexe et est donc une t -courbe propre (5.1). On dit qu'une T -courbe X_1 domine une autre T -courbe X_2 s'il existe un T -morphisme dominant de X_1 dans X_2 .

On dit qu'une T -courbe est *semi-stable* si elle est propre et si sa fibre spéciale géométrique est une courbe semi-stable. On dit qu'une T -courbe X est *cohomologiquement plate en dimension 0* si elle est propre et si le faisceau \mathcal{O}_X est cohomologiquement plat sur T en dimension 0, i.e. si le morphisme structural $\lambda : X \rightarrow T$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} \lambda_*(\mathcal{O}_X)$ universellement ([18] 7.8.1). On notera qu'une T -courbe propre à fibres géométriquement réduites (en particulier une T -courbe semi-stable) est cohomologiquement plate en dimension 0 (cf. [18] 7.8.6).

Une T -courbe propre X est appelée *modèle* (resp. T -modèle) de sa fibre générique (resp. de sa fibre géométrique générique). Soit C une courbe propre et lisse sur \overline{F} . On dit qu'un T -modèle X_1 de C domine un autre T -modèle X_2 de C , s'il existe un T -morphisme de X_1 dans X_2 induisant un isomorphisme entre les fibres génériques.

5.3. Pour toute T -courbe semi-stable X , le foncteur de Picard relatif $\text{Pic}_{X/T}^0$ (2.7) est représentable par un T -schéma semi-abélien (cf. [8] 9.4.1). Si $T = \check{S}$ (2.1), on a $\text{Pic}(\check{S}) = 0$ et donc un isomorphisme canonique $\text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}_{X/\check{S}}(\check{S})$ (cf. [8] 8.1 Prop.4).

Définition 5.4. Soient (T, τ) comme dans 5.2 et X une T -courbe propre.

(i) On appelle τ -revêtement de X la donnée d'un T -morphisme propre de présentation finie de T -courbes $\varphi : Y \rightarrow X$ tel que le morphisme $\varphi_\tau : Y_\tau \rightarrow X_\tau$ soit un revêtement étale.

(ii) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un τ -revêtement. Si la T -courbe propre Y est cohomologiquement plate en dimension 0 (resp. a des fibres géométriquement réduites, resp. est semi-stable, resp. est régulière), on dit que $\varphi : Y \rightarrow X$ est un τ -revêtement cohomologiquement plat en dimension 0 (resp. à fibres géométriquement réduites, resp. semi-stable, resp. régulier) et en abrégé un τ -revêtement c.p.d.0.

(iii) On dit qu'un τ -revêtement $\varphi : Y \rightarrow X$ est fini si le morphisme sous-jacent $Y \rightarrow X$ est fini.

(iv) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un τ -revêtement. Si $\varphi_\tau : Y_\tau \rightarrow X_\tau$ est un revêtement étale et galoisien de groupe des automorphismes G et si l'action de G sur Y_τ s'étend en une X -action sur Y , on dit que $\varphi : Y \rightarrow X$ est un τ -revêtement galoisien.

Soient $\varphi_1 : Y_1 \rightarrow X$ et $\varphi_2 : Y_2 \rightarrow X$ deux τ -revêtements de X . Un morphisme de φ_1 dans φ_2 est un X -morphisme $\pi : Y_1 \rightarrow Y_2$. On notera alors que Y_1 domine Y_2 et on dira que φ_1 domine φ_2 . Supposons de plus, que φ_1 et φ_2 soient galoisiens. Alors, le morphisme $\pi_\tau : Y_{1,\tau} \rightarrow Y_{2,\tau}$ est un revêtement galoisien. Notons $u : \text{Aut}(Y_{1,\tau}/X_\tau) \rightarrow \text{Aut}(Y_{2,\tau}/X_\tau)$ l'homomorphisme induit par π_τ . On dit que π est *équivalent* s'il est u -équivalent.

Théorème 5.5 (Grothendieck; cf. [1] pour $g(C) \geq 2$ et [33] § 10.2 pour $g(C) = 1$). Pour toute \overline{K} -courbe propre et lisse C (2.1), il existe un trait S' fini sur S tel que C admette un S' -modèle semi-stable.

5.6. Soit X une S -courbe propre. Une désingularisation de X est un modèle régulier de X_η dominant X . On sait qu'il existe une désingularisation de X (cf. [33] § 8 3.44). Si le genre de X_η est ≥ 1 , grâce au critère de contraction de Castelnuovo (cf. [33] § 9 3.21), on peut construire une désingularisation minimale Y de X unique à isomorphisme près, c'est-à-dire que toute désingularisation $Y' \rightarrow X$ se factorise d'une façon unique à travers Y . D'après ([33] § 9 3.13), tout η -automorphisme de X_η s'étend en un S -automorphisme de la désingularisation minimale de X .

Proposition 5.7 ([34] 2.7 et 2.8). *Soit X une S -courbe propre. Il existe un trait S' fini sur S tel que $X_{S'}$ soit dominé par un S' -modèle semi-stable et régulier X' de $X_{\bar{\eta}}$. Si le genre de X_{η} est ≥ 1 , on peut trouver S' de sorte que X' soit la désingularisation minimale de $X_{S'}$.*

Corollaire 5.8. *Soient C une \bar{K} -courbe propre et lisse, X_1 et X_2 deux S -modèles de C . Il existe un trait S' fini sur S et un S' -modèle X_3 semi-stable et régulier de C dominant $X_{1,S'}$ et $X_{2,S'}$.*

Preuve. Il existe un S -modèle X de C dominant X_1 et X_2 ([13] prop. 20). L'assertion résulte alors de 5.7.

5.9. On dit qu'un S -schéma X a une *réduction semi-stable* si, localement pour la topologie étale, X est isomorphe à un S -schéma de la forme

$$(5.9.1) \quad \text{Spec}(\mathcal{O}_K[t_1, \dots, t_m]/(t_1 \dots t_n - \pi)),$$

où π est une uniformisante de \mathcal{O}_K , m et n sont des entiers vérifiant $m \geq n \geq 1$. On notera qu'une S -courbe propre admet une réduction semi-stable si et seulement si elle est semi-stable et régulière (cf. [42] 1.6).

5.10. Soit X une S -courbe à fibres géométriquement réduites. D'après ([33] § 4 1.18), pour tout trait S' fini sur S , le schéma $X_{S'}$ est normal. On en déduit par passage à la limite projective que le schéma $\bar{X} = X \times_S \bar{S}$ (2.1.1) est normal.

Proposition 5.11. *Soit X une S -courbe propre.*

(i) *Étant donné un nombre fini de η -revêtements (resp. η -revêtements galoisiens) $\varphi_i : Y_i \rightarrow X$, il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) , un η' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $\varphi : Y \rightarrow X_{S'}$ et pour chaque φ_i , un morphisme (resp. un morphisme équivariant) de φ dans $\varphi_i \times_S S'$.*

(ii) *Pour tout η -revêtement fini (resp. fini et galoisien) $\varphi : Y \rightarrow X$, il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) tel que $\varphi \times_S S'$ soit dominé par un η' -revêtement fini, à fibres géométriquement réduites (resp. fini, galoisien, à fibres géométriquement réduites) de $X_{S'}$.*

(iii) *Pour tout η -revêtement $\varphi : Y \rightarrow X$, il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) , un S' -modèle semi-stable X' de $X_{\bar{\eta}}$ dominant $X_{S'}$ et un η' -revêtement semi-stable, régulier, fini et galoisien $\varphi' : Y' \rightarrow X'$ qui s'insère dans un diagramme commutatif*

$$(5.11.1) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\varphi'} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{S'} & \xrightarrow{\varphi_{S'}} & X_{S'} \end{array}$$

Preuve. (i) Si le genre de X_{η} est nul, $X_{\bar{\eta}}$ n'admet aucun revêtement étale non-trivial. Dans ce cas, l'énoncé (i) résulte de 5.7 appliqué aux produits des Y_i au-dessus de X . Pour $g(X_{\eta}) \geq 1$, cela résulte de 5.7 et des propriétés de la désingularisation minimale, appliquées au produit des Y_i au-dessus de X (cf. [13] Thm. 12 et [14] Thm. 4).

(ii) D'après ([20] Thm. 2.0), il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) tel que la normalisation Y' de $Y_{S'}$ ait une fibre spéciale géométriquement réduite. Comme Y est excellent, Y' est fini sur Y . Supposons de plus que $\varphi : Y \rightarrow X$ soit galoisien. Comme Y' est la clôture intégrale de Y dans $Y \times_S \eta'$, l'action de $\text{Aut}(Y_{\eta}/X_{\eta})$ sur Y s'étend en une action sur Y' , i.e. $Y' \rightarrow X_{S'}$ est aussi un η' -revêtement galoisien.

(iii) D'après (i), quitte à remplacer K par une extension finie, φ est dominé par un η -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $Y' \rightarrow X$. Notons $G = \text{Aut}(Y'_{\eta}/X_{\eta})$. L'action de G sur Y'_{η} s'étend en une X -action sur Y' . Comme Y' est projective ([32] Thm. 2.8), le quotient Y'/G existe ([15] V.1); notons le X' . Calquant la démonstration de ([34] 3.8) (cf. aussi [40] Prop. 5), on vérifie que X' est un modèle semi-stable de X_{η} dominant X . Le morphisme $Y' \rightarrow X'$ est donc un η -revêtement semi-stable, régulier, fini et galoisien. Comme

le diagramme

$$(5.11.2) \quad \begin{array}{ccc} Y'_\eta & \longrightarrow & X'_\eta \\ \parallel & & \parallel \\ Y_\eta & \longrightarrow & X_\eta, \end{array}$$

est commutatif, il en est de même de (5.11.1) en vertu de ([17] 7.2.2.1).

Corollaire 5.12. *Soit X une \bar{S} -courbe propre.*

(i) *Étant donné un nombre fini de $\bar{\eta}$ -revêtements de X , il existe un $\bar{\eta}$ -revêtement semi-stable et galoisien de X qui les domine tous.*

(ii) *Tout $\bar{\eta}$ -revêtement $\varphi : Y \rightarrow X$ fini et galoisien est dominé par un $\bar{\eta}$ -revêtement fini, galoisien et à fibres géométriquement réduites.*

Preuve. D'après la théorie de la descente ([19] 8.8.3 et 8.10.5), quitte à remplacer S par une extension finie, tout $\bar{\eta}$ -revêtement (resp. $\bar{\eta}$ -revêtement fini, resp. $\bar{\eta}$ -revêtement fini et galoisien) de X se descend en un η -revêtement (resp. η -revêtement fini, resp. η -revêtement fini et galoisien). Le corollaire résulte alors de 5.11.

5.13. Soit X une \check{S} -courbe projective et de présentation fini. L'anneau \mathfrak{o} est universellement cohérent ([2] 1.12.15). Par suite, l'anneau \mathcal{O}_X est cohérent. On note $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X)$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{X_\eta})$ (2.1)) la catégorie des \mathcal{O}_X -modules (resp. \mathcal{O}_{X_η} -modules) cohérents et $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie de \mathcal{O}_X -modules cohérents à isogénie près. D'après ([2] 2.6.23), tout \mathcal{O}_{X_η} -module cohérent se prolonge en un \mathcal{O}_X -module cohérent. Étant donné deux objets \mathcal{F} et \mathcal{F}' de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X)$, on a un isomorphisme

$$(5.13.1) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_\eta}}(\mathcal{F}_\eta, \mathcal{F}'_\eta).$$

Celui-ci implique que \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont isogènes dans $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X)$ si et seulement si leurs fibres génériques sont isomorphes sur X_η . Le foncteur canonique $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{X_\eta})$ induit alors une équivalence de catégories

$$(5.13.2) \quad \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{X_\eta}).$$

5.14. Conservons les notations de 5.13. On pose $\mathcal{S} = \mathrm{Spf}(\mathfrak{o})$ et on note \mathfrak{X} le schéma formel complété p -adique de X qui est propre et de présentation finie sur \mathcal{S} . En particulier, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est cohérent ([2] 2.8.1). Pour tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} , on note $\widehat{\mathcal{F}}$ son complété p -adique. On note $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules cohérents. Comme X est projectif et de présentation finie sur \check{S} , le foncteur

$$(5.14.1) \quad \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}), \quad \mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$$

induit une équivalence de catégories ([2] 2.13.8).

Choisissons des quasi-inverses de (4.1.3) et (5.14.1). On désigne par $J_{\mathfrak{X}}$ le foncteur composé de l'équivalence de catégories (5.13.2) et des quasi-inverses de (4.1.3), (5.14.1)

$$(5.14.2) \quad J_{\mathfrak{X}} : \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{X_\eta}).$$

Lemme 5.15. *Conservons les notations de 5.14. Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module localement projectif de type fini \mathcal{F} (2.9), $J_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F})$ (5.14.2) est un fibré vectoriel sur X_η .*

Preuve. Posons $F = J_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F})$. On désigne par $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ l'espace rigide cohérent associé au schéma formel \mathfrak{X} (4.2) et X_η^{an} l'espace rigide quasi-séparé associé au \mathbb{C} -schéma propre X_η (4.3). On a un isomorphisme $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} X_\eta^{\mathrm{an}}$ (4.4) et un morphisme de topos annelés $\varrho_{\mathfrak{X}} : (\mathfrak{X}_{\mathrm{rig}}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \rightarrow (\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ (4.2.1). En vertu de (4.2.3) et (4.4.2), on a un isomorphisme

$$(5.15.1) \quad \varrho_{\mathfrak{X}}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} F^{\mathrm{an}}.$$

Le $\mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}^{\text{an}}}$ -module F^{an} est alors localement projectif de type fini. Par suite, c'est un $\mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}^{\text{an}}}$ -module plat (2.9). D'après 4.7, F est plat. Le lemme s'ensuit.

Lemme 5.16. *Conservons les notations de 5.14.*

(i) *Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module \mathcal{H} , on a un isomorphisme canonique*

$$(5.16.1) \quad \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{H}[\frac{1}{p}]) \simeq \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

(ii) *Soient \mathcal{F} un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module cohérent et $F = j_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F})$. Pour tout entier $i \geq 0$, on a un isomorphisme canonique*

$$(5.16.2) \quad H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) \simeq H^i(X_{\bar{\eta}}, F).$$

Preuve. (i) Par platitude de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ sur \mathfrak{o} , il suffit de démontrer l'isomorphisme (5.16.1) pour les ouverts affines. Dans ce cas, cela résulte de ([2] 2.10.5).

(ii) Il existe un \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F} tel que $\mathcal{F} \simeq \widehat{\mathcal{F}}[\frac{1}{p}]$ et que $F \simeq \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$. D'après ([2] 2.13.2), on a un isomorphisme canonique

$$(5.16.3) \quad H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{F}}).$$

On déduit par (i) un isomorphisme $H^i(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{F}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$. Par platitude, on a un isomorphisme canonique

$$(5.16.4) \quad H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq H^i(X_{\bar{\eta}}, F).$$

L'assertion s'ensuit.

6. Correspondance de Deninger-Werner

On rappelle que le corps résiduel k de \mathcal{O}_K est une clôture algébrique de \mathbb{F}_p (2.1).

Définition 6.1. (i) Soient C une courbe propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique p et $\text{Fr}_C : C \rightarrow C$ le Frobenius absolu de C . On dit qu'un fibré vectoriel F sur C est *fortement semi-stable* si $(\text{Fr}_C^n)^*(F)$ est un fibré vectoriel semi-stable pour tout entier $n \geq 0$.

(ii) Soient C une courbe propre sur un corps algébriquement clos de caractéristique p et $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ la normalisation du sous-schéma réduit sous-jacent à C . On dit qu'un fibré vectoriel F sur C est *fortement semi-stable de degré 0* si $\pi^*(F)$ est fortement semi-stable de degré 0 sur chaque composante irréductible de \tilde{C} .

On notera qu'un fibré vectoriel semi-stable sur une courbe propre et lisse de genre $g \geq 2$ sur un corps de caractéristique p n'est pas nécessairement fortement semi-stable (cf. [26]).

Théorème 6.2 ([14] Thm. 16, Thm. 17 et [48] 2.4). *Soient X une \bar{S} -courbe propre, $\check{X} = X \times_{\bar{S}} \check{S}$ (2.1) et \mathcal{F} un fibré vectoriel sur \check{X} . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La fibre spéciale \mathcal{F}_s de \mathcal{F} est fortement semi-stable de degré 0 sur X_s .*

(ii) *Pour tout $n \geq 1$, il existe un $\bar{\eta}$ -revêtement $\varphi : X' \rightarrow X$ (5.4) tel que $\varphi_n^*(\mathcal{F}_n)$ soit libre de type fini, où \mathcal{F}_n (resp. φ_n) est la réduction modulo p^n de \mathcal{F} (resp. φ) (2.1.1).*

(iii) *Il existe un entier $n \geq 1$ et un $\bar{\eta}$ -revêtement $\varphi : X' \rightarrow X$ tels que $\varphi_n^*(\mathcal{F}_n)$ soit libre de type fini.*

Définition 6.3. Conservons les notations de 6.2. On appelle *fibré vectoriel de Deninger-Werner* sur \check{X} tout fibré vectoriel sur \check{X} vérifiant les conditions équivalentes de 6.2. On désigne par $\mathfrak{V}_{\check{X}}^{\text{DW}}$ la sous-catégorie pleine de $\text{Vect}_{\check{X}}$ (2.8) formée des fibrés vectoriels de Deninger-Werner.

Proposition 6.4. *Soit X une \bar{S} -courbe semi-stable. Un fibré en droites sur \check{X} est de Deninger-Werner si et seulement si sa classe appartient à $\text{Pic}_{\check{X}/\bar{S}}^0(\check{S})$ (2.7).*

Preuve. D'après ([14] Thm. 12), la catégorie $\mathfrak{V}_{\check{X}}^{\text{DW}}$ contient tous les fibrés en droites dont les classes sont dans $\text{Pic}_{\check{X}/\bar{S}}^0(\check{S})$. Inversement, pour tout fibré en droites $L \in \mathfrak{V}_{\check{X}}^{\text{DW}}$, l'image inverse de la fibre spéciale L_s sur

la normalisation de chaque composante irréductible de X_s est de degré 0. D'après ([14] Thm.13), la fibre générique $L_{\bar{\eta}}$ de L est donc aussi de degré 0. Ceci implique que $L \in \text{Pic}_{\check{X}/\check{S}}^0(\check{S})$ en vertu de ([8] 9.1.13).

Proposition 6.5. *Soient X une \bar{S} -courbe propre et lisse, n un entier ≥ 1 et L un fibré en droites dont la classe appartient à $\text{Pic}_{\check{X}/\check{S}}^0(\check{S})$. Alors, il existe un $\bar{\eta}$ -revêtement fini, galoisien et à fibres géométriquement réduites de X trivialisant L_n .*

Preuve. Quitte à remplacer K par une extension finie, il existe une S -courbe propre et lisse Y telle que $X \simeq \bar{Y}$ et un point $x \in Y(S)$. On sait que $\text{Pic}_{Y/S}^0$ est un schéma abélien sur S ([8] 9.4.4). La classe de L est contenue dans $\text{Pic}_{Y/S}^0(\check{S})$. On a un morphisme de S -schémas

$$(6.5.1) \quad j_x : Y \rightarrow \text{Pic}_{Y/S}^0$$

défini, pour tout S -schéma T , par

$$(6.5.2) \quad Y(T) \rightarrow \text{Pic}_{Y/S}^0(T) \quad y \mapsto [\mathcal{O}_{Y_T}(y - x)].$$

Notons $A = (\text{Pic}_{Y/S}^0)^\vee$ le schéma abélien dual de $\text{Pic}_{Y/S}^0$ et considérons le morphisme d'Albanese défini par $x \in Y(S)$,

$$(6.5.3) \quad \varphi_x : Y \xrightarrow{j_x} \text{Pic}_{Y/S}^0 \xrightarrow{\Phi} A,$$

où Φ est la polarisation canonique ([35] 2.6.4). D'après ([35] 2.7.9), le morphisme

$$(6.5.4) \quad A^\vee \simeq \text{Pic}_{A/S}^0 \xrightarrow{\varphi_x^*} \text{Pic}_{Y/S}^0 \simeq A^\vee,$$

induit par φ_x , s'identifie à $-\text{id}_{A^\vee}$. Il existe donc un fibré en droites L' sur $\check{A} = A \times_S \check{S}$ dont la classe appartient à $\text{Pic}_{A/S}^0(\check{S})$ tel que $\varphi_x^*(L') \simeq L$. Par descente ([19] 8.8.3), le groupe $\text{Pic}_{A/S}(k) \simeq \text{Pic}_{A_s/k}(k)$ est de torsion. Il existe un entier N tel que

$$(6.5.5) \quad N^*[L'_s] = 0 \quad \text{dans } \text{Pic}_{A/S}^0(k),$$

où on a encore noté $N : \text{Pic}_{A/S}^0 \rightarrow \text{Pic}_{A/S}^0$ le morphisme de la multiplication par N . Le groupe

$$\text{Ker}(\text{Pic}_{A/S}^0(\mathfrak{o}_n) \rightarrow \text{Pic}_{A/S}^0(k))$$

est de p^n -torsion en vertu de ([46] 2.4). On a donc

$$(6.5.6) \quad (p^n N)^*[L'_n] = 0 \quad \text{dans } \text{Pic}_{A/S}^0(\mathfrak{o}_n).$$

On désigne par $Y^{(n)}$ le T -schéma défini par le diagramme cartésien

$$(6.5.7) \quad \begin{array}{ccc} Y^{(n)} & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow p^n N \\ Y & \xrightarrow{\varphi_x} & A \end{array}$$

En vertu de (6.5.6), l'image réciproque de L_n par $Y_n^{(n)} \rightarrow Y_n$ est triviale. D'après la théorie du corps de classes géométrique ([44] VI 11), $Y_n^{(n)}$ est géométriquement connexe et est un revêtement étale et galoisien de Y_n . D'après (6.5.7), l'action du groupe $\text{Aut}(Y_n^{(n)}/Y_n)$ s'étend en une Y -action sur $Y^{(n)}$. Le morphisme $Y^{(n)} \rightarrow Y$ est donc un η -revêtement fini et galoisien. La proposition résulte alors de 5.12(ii).

6.6. Soient X une \bar{S} -courbe propre, \bar{x} un $\bar{\eta}$ -point de $X_{\bar{\eta}}$ et n un entier ≥ 1 . On se propose de construire un foncteur de $\mathfrak{R}_X^{\text{DW}}$ dans $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{ltf}}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}))$ (3.21). Soit \mathcal{F} un fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{X} . Comme X est propre, le $\bar{\eta}$ -point \bar{x} se prolonge en une section $\bar{S} \rightarrow X$ que l'on note encore (abusivement) \bar{x} .

On note $\bar{x}_n : \bar{S}_n \rightarrow X_n$ la réduction modulo p^n de \bar{x} . On définit le \mathfrak{o}_n -module sous-jacent à la représentation associée à \mathcal{F} par

$$(6.6.1) \quad \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) = \Gamma(\bar{S}_n, \bar{x}_n^*(\mathcal{F}_n)),$$

qui est un \mathfrak{o}_n -module libre de type fini.

D'après 5.12(i), il existe un $\bar{\eta}$ -revêtement c.p.d.0 et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X$ de groupe des automorphismes G tel que $\varphi_n^*(\mathcal{F}_n)$ soit libre de type fini. Soit $(C_i, \bar{y}_i)_{i \in I}$ un revêtement universel galoisien de $(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ (2.14). Choisissons un point géométrique $\bar{y} \in X'_{\bar{\eta}}(\bar{\eta})$ au-dessus de \bar{x} . Il existe $i \in I$ et un épimorphisme

$$\xi_i : C_i \rightarrow X'_{\bar{\eta}} \quad \bar{y}_i \mapsto \bar{y}.$$

Celui-ci induit un épimorphisme

$$\xi_i : \text{Aut}(C_i/X_{\bar{\eta}}) \rightarrow G$$

défini pour tout $\sigma \in \text{Aut}(C_i/X_{\bar{\eta}})$, par $\xi_i(\sigma)(\bar{y}) = \xi_i \circ \sigma(\bar{y}_i)$. Le composé des homomorphismes

$$(6.6.2) \quad \xi_{\bar{y}} : \pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}) \twoheadrightarrow \text{Aut}(C_i/X_{\bar{\eta}})^{\text{op}} \xrightarrow{\xi_i} G^{\text{op}}$$

est indépendant du choix de $i \in I$ mais dépend du choix de \bar{y} au-dessus de \bar{x} . En effet, soient \bar{y} et \bar{y}' deux $\bar{\eta}$ -points de $X'_{\bar{\eta}}$ au-dessus de \bar{x} . Il existe un élément $h \in G$ tel que $h(\bar{y}) = \bar{y}'$. D'après ([13] Thm.13 (19)), les homomorphismes $\xi_{\bar{y}}, \xi_{\bar{y}'} : \pi_1(C, \bar{x}) \rightarrow G^{\text{op}}$ sont reliés par :

$$(6.6.3) \quad \xi_{\bar{y}'}(\gamma) = h \xi_{\bar{y}}(\gamma) h^{-1}, \quad \forall \gamma \in \pi_1(C, \bar{x}).$$

6.7. Conservons les hypothèses et notations de 6.6. On construit une action $\rho_{n, \mathcal{F}}$ de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ sur $\mathbb{V}_n(\mathcal{F})$. L'action de G sur $X'_{\bar{\eta}}$ s'étend en une X -action sur X' . Tout $g \in G$ induit donc un automorphisme

$$(6.7.1) \quad g_n^* : \Gamma(X'_n, \varphi_n^*(\mathcal{F}_n)) \rightarrow \Gamma(X'_n, \varphi_n^*(\mathcal{F}_n)).$$

Le $\bar{\eta}$ -point \bar{y} se prolonge en un \bar{S} -point de X' au-dessus de $\bar{x} \in X(\bar{S})$ que l'on note encore (abusivement) \bar{y} . Comme le morphisme structural $\lambda : X' \rightarrow \bar{S}$ vérifie $\lambda_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_{\bar{S}}$ universellement, le morphisme $\bar{y}_n : \bar{S}_n \rightarrow X'_n$ déduit de \bar{y} induit un isomorphisme :

$$(6.7.2) \quad \bar{y}_n^* : \Gamma(X'_n, \varphi_n^*(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\bar{S}_n, \bar{y}_n^*(\varphi_n^*(\mathcal{F}_n))) = \mathbb{V}_n(\mathcal{F}).$$

Pour tout $\gamma \in \pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$, posant $g = \xi_{\bar{y}}(\gamma)$, on définit un automorphisme $\rho_{n, \mathcal{F}}(\gamma)$ de $\mathbb{V}_n(\mathcal{F})$ par

$$(6.7.3) \quad \rho_{n, \mathcal{F}}(\gamma) : \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) \xrightarrow{(\bar{y}_n^*)^{-1}} \Gamma(X'_n, \varphi_n^*(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{g_n^*} \Gamma(X'_n, \varphi_n^*(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{\bar{y}_n^*} \mathbb{V}_n(\mathcal{F}).$$

On notera que $\rho_{n, \mathcal{F}}$ est l'homomorphisme composé

$$(6.7.4) \quad \rho_{n, \mathcal{F}} : \pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}) \xrightarrow{\xi_{\bar{y}}} G^{\text{op}} \rightarrow \text{Aut}_{\mathfrak{o}_n} \Gamma(X'_n, \varphi_n^*(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow[\sim]{\bar{y}_n^*} \text{Aut}_{\mathfrak{o}_n} \mathbb{V}_n(\mathcal{F}).$$

On définit la \mathfrak{o}_n -représentation de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ associée à \mathcal{F} par $(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}), \rho_{n, \mathcal{F}})$ que l'on note encore $\mathbb{V}_n(\mathcal{F})$.

Proposition 6.8 ([13] Thm. 13). *Sous les hypothèses de 6.6, la \mathfrak{o}_n -représentation $\mathbb{V}_n(\mathcal{F})$ de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ est indépendante des choix du $\bar{\eta}$ -revêtement c.p.d.0 (5.4(ii)) et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X$ et du point \bar{y} de $X'_{\bar{\eta}}$ au-dessus de \bar{x} , à isomorphisme près.*

6.9. Conservons les hypothèses et notations de 6.6. Étant donné un morphisme $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ de $\mathfrak{D}_X^{\text{DW}}$ et un entier $n \geq 1$, il existe un $\bar{\eta}$ -revêtement c.p.d.0 et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X$ trivialisant \mathcal{F}_n et \mathcal{F}'_n (cf. 5.12(i)). L'isomorphisme (6.7.2) est clairement fonctoriel en \mathcal{F} . D'après 6.8, le morphisme f induit un morphisme de \mathfrak{o}_n -représentations de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$

$$(6.9.1) \quad \mathbb{V}_n(f) : \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{V}_n(\mathcal{F}').$$

La correspondance $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{V}_n(\mathcal{F})$ définit ainsi un foncteur qu'on note (3.21)

$$(6.9.2) \quad \mathbb{V}_n : \mathfrak{D}_X^{\text{DW}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{ltf}}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})).$$

Proposition 6.10 ([13] Thm. 14 et 16). (i) *Les foncteurs $\{\mathbb{V}_n\}_{n \geq 1}$ (6.9.2) sont compatibles entre eux et définissent un foncteur \mathfrak{o} -linéaire et exact (3.21)*

$$(6.10.1) \quad \mathbb{V} : \mathfrak{V}_{\check{X}}^{\text{DW}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ltf}}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})),$$

qui commute aux produits tensoriels, aux passages aux duaux et aux homomorphismes internes. On le notera aussi $\mathbb{V}_{\check{X}}$ pour signifier que la construction dépend de X .

(ii) *Pour tout morphisme dominant $f : X' \rightarrow X$ de \bar{S} -modèles de $X_{\bar{\eta}}$, l'image inverse d'un fibré vectoriel de Deninger-Werner sur X par f est de Deninger-Werner sur X' . De plus, on a un isomorphisme de foncteurs*

$$(6.10.2) \quad \mathbb{V}_{\check{X}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}_{\check{X}'} \circ f^*$$

6.11. Dans la suite de cette section, on fixe une courbe propre et lisse C sur \bar{K} , \bar{x} un $\bar{\eta}$ -point de C et on pose $\check{C} = C \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$.

Définition 6.12. (i) On dit qu'un fibré vectoriel F sur \check{C} est *de Deninger-Werner* s'il existe un \bar{S} -modèle X de C et un fibré vectoriel de Deninger-Werner \mathcal{F} sur \check{X} muni d'un isomorphisme $F \simeq \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$. On désigne par $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}}$ la sous-catégorie pleine de $\text{Vect}_{\check{C}}$ formée des fibrés vectoriels de Deninger-Werner.

(ii) On dit qu'un fibré vectoriel F sur \check{C} est *potentiellement de Deninger-Werner* s'il existe un revêtement étale et connexe $\pi : C' \rightarrow C$ tel que, posant $\check{\pi} = \pi \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$, $\check{\pi}^*(F)$ soit de Deninger-Werner sur $\check{C}' = C' \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$. On désigne par $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{pDW}}$ la sous-catégorie pleine de $\text{Vect}_{\check{C}}$ formée des fibrés vectoriels potentiellement de Deninger-Werner.

Théorème 6.13 ([14] Thm. 11, 12, 13). (i) *Les sous-catégories $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}}$ et $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{pDW}}$ de $\text{Vect}_{\check{C}}$ sont stables par extensions.*

(ii) *La catégorie $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{pDW}}$ contient tous les fibrés en droites de degré 0 sur \check{C} .*

(iii) *Tout fibré vectoriel de $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{pDW}}$ est semi-stable de degré 0.*

6.14. Soit X un \bar{S} -modèle de C . D'après 5.13, on a un foncteur pleinement fidèle $J_{\check{X}} : \mathfrak{V}_{\check{X}, \mathbb{Q}}^{\text{DW}} \rightarrow \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}}$. D'après (3.21.2), (6.10.2) et ([13] Cor. 21), on obtient un foncteur \mathfrak{C} -linéaire, exact (3.18) :

$$(6.14.1) \quad \mathbb{V}_{\check{C}} : \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x}))$$

qui commute aux produits tensoriels, aux duaux et aux homomorphismes internes (cf. [14] Thm. 28).

7. Topos annelé de Faltings

7.1. Dans cette section, on se donne un S -schéma plat, séparé et de type fini X tel que $\bar{X} = \check{X} \times_S \bar{S}$ (2.1.1) soit normal. On notera que \bar{X} est localement irréductible dans le sens de ([4] III.3.1). En effet, comme \bar{X} est \bar{S} -plat, ses points génériques sont les points génériques du schéma $X_{\bar{\eta}}$, qui est noethérien ; l'ensemble des points génériques de \bar{X} est donc fini (cf. [4] III.3.2(ii)). On note $\bar{h} : \bar{X} \rightarrow X$ et $h : X_{\bar{\eta}} \rightarrow X$ les morphismes canoniques. On désigne par E la catégorie des morphismes de schémas $V \rightarrow U$ au-dessus du morphisme canonique $X_{\bar{\eta}} \rightarrow X$, i.e. des diagrammes commutatifs

$$(7.1.1) \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\bar{\eta}} & \longrightarrow & X \end{array}$$

tels que le morphisme $U \rightarrow X$ soit étale et que le morphisme $V \rightarrow U_{\bar{\eta}}$ soit fini et étale ([4] VI.10.1). Elle est fibrée au-dessus de la catégorie $\hat{\mathbf{E}t}_{/X}$ des X -schémas étales, par le foncteur

$$(7.1.2) \quad \pi : E \rightarrow \hat{\mathbf{E}t}_{/X}, \quad (V \rightarrow U) \mapsto U.$$

La fibre de π au-dessus d'un X -schéma étale U est la catégorie $\mathbf{\acute{E}t}_{f/U_{\bar{\eta}}}$ des schémas finis étales au-dessus de $U_{\bar{\eta}}$, que l'on équipe de la topologie étale (2.13). La catégorie fibrée π est alors un site fibré. ([6] VI.7.2.1)

On munit E de la topologie co-évanescence ([4] VI.5.3), c'est-à-dire de la topologie engendrée par les recouvrements $\{(V_i \rightarrow U_i) \rightarrow (V \rightarrow U)\}_{i \in I}$ des deux types suivants :

- (v) $U_i = U$ pour tout $i \in I$, et $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ est un recouvrement ;
- (c) $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ est un recouvrement et $V_i \simeq U_i \times_U V$ pour tout $i \in I$.

On appelle *topos de Faltings de X* et l'on note \tilde{E} , le topos des faisceaux d'ensembles sur E . Si F est un préfaisceau sur E , on note F^a le faisceau associé. Signalons la description commode et simple suivante de \tilde{E} .

Proposition 7.2 ([4] VI.5.10). *La donnée d'un faisceau F sur E est équivalente à la donnée pour tout objet U de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ d'un faisceau F_U de $U_{\bar{\eta}, \text{fét}}$ (2.13) et pour tout morphisme $f : U' \rightarrow U$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ d'un morphisme $F_U \rightarrow (f_{\bar{\eta}})_{\text{fét}*}(F_{U'})$, ces morphismes étant soumis à des relations de compatibilité, tels que, pour toute famille couvrante $(f_n : U_n \rightarrow U)_{n \in \Sigma}$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$, si pour tout $(m, n) \in \Sigma^2$, on pose $U_{mn} = U_m \times_U U_n$ et on note $f_{mn} : U_{mn} \rightarrow U$ le morphisme canonique, la suite de morphismes de faisceaux de $U_{\bar{\eta}, \text{fét}}$*

$$(7.2.1) \quad F_U \rightarrow \prod_{n \in \Sigma} (f_{n, \bar{\eta}})_{\text{fét}*}(F_{U_n}) \rightrightarrows \prod_{n, m \in \Sigma} (f_{mn, \bar{\eta}})_{\text{fét}*}(F_{U_{mn}})$$

soit exacte.

En vertu de la proposition précédente, on peut identifier tout faisceau F sur E au foncteur $\{U \rightarrow F_U\}$ associé, où $U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$ et $F_U \in \mathbf{Ob}(U_{\bar{\eta}, \text{fét}})$ est la restriction de F à la fibre de π au-dessus de U .

7.3. Pour tout $U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$, on a un foncteur canonique :

$$(7.3.1) \quad \alpha_U : \mathbf{\acute{E}t}_{f/U_{\bar{\eta}}} \rightarrow E, \quad V \mapsto (V \rightarrow U).$$

Le foncteur $\alpha_X : \mathbf{\acute{E}t}_{f/X_{\bar{\eta}}} \rightarrow E$ est continu et exact à gauche ([4] VI.5.32). Il définit donc un morphisme de topos ([4] VI.(10.6.3))

$$(7.3.2) \quad \beta : \tilde{E} \rightarrow X_{\bar{\eta}, \text{fét}}.$$

Le foncteur

$$(7.3.3) \quad \sigma^+ : \mathbf{\acute{E}t}_{/X} \rightarrow E, \quad U \mapsto (U_{\bar{\eta}} \rightarrow U)$$

est continu et exact à gauche ([4] VI.5.32). Il définit donc un morphisme de topos ([4] VI.(10.6.4)) :

$$(7.3.4) \quad \sigma : \tilde{E} \rightarrow X_{\text{ét}}.$$

Par ailleurs, le foncteur

$$(7.3.5) \quad \Psi^+ : E \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}_{/X_{\bar{\eta}}}, \quad (V \rightarrow U) \mapsto V$$

est continu et exact à gauche ([4] VI.10.7). Il définit donc un morphisme de topos :

$$(7.3.6) \quad \Psi : X_{\bar{\eta}, \text{ét}} \rightarrow \tilde{E}.$$

On vérifie aussitôt qu'on a un isomorphisme canonique

$$(7.3.7) \quad \beta \circ \Psi \xrightarrow{\sim} \rho_{X_{\bar{\eta}}},$$

où $\rho_{X_{\bar{\eta}}} : X_{\bar{\eta}, \text{ét}} \rightarrow X_{\bar{\eta}, \text{fét}}$ est le morphisme canonique (2.13.3). On en déduit par adjonction un morphisme

$$(7.3.8) \quad \beta^* \rightarrow \Psi_* \rho_{X_{\bar{\eta}}}^*,$$

qui est un isomorphisme en vertu de ([4] VI.10.9(iii)).

7.4. On désigne par D la catégorie des morphismes de schémas $V \rightarrow U$ au-dessus du morphisme canonique $h : X_{\bar{\eta}} \rightarrow X$, i.e. des diagrammes commutatifs

$$(7.4.1) \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\bar{\eta}} & \longrightarrow & X, \end{array}$$

tels que les flèches verticales soient étales (cf. [4] VI.4.1). Elle est fibrée au-dessus de la catégorie $\mathbf{\acute{E}t}/X$ des X -schémas étales, par le foncteur

$$(7.4.2) \quad \varpi : D \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}/X \quad (V \rightarrow U) \mapsto U.$$

La fibre de ϖ au-dessus d'un schéma étale U est la catégorie $\mathbf{\acute{E}t}/U_{\bar{\eta}}$ des schémas étales au-dessus de $U_{\bar{\eta}}$, que l'on équipe de la topologie étale. La catégorie fibrée ϖ est alors un site fibré (cf. [6] VI 7.2.1).

On munit D de la topologie co-évanescence ([4] VI.5.3), c'est-à-dire la topologie engendrée par les recouvrements $\{(V_i \rightarrow U_i) \rightarrow (V \rightarrow U)\}_{i \in I}$ des deux types suivants :

- (v) $U_i = U$ pour tout $i \in I$, et $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ est un recouvrement ;
- (c) $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ est un recouvrement et $V_i \simeq U_i \times_U V$ pour tout $i \in I$.

Le topos des faisceaux d'ensembles sur D est appelé *le topos co-évanescence* et est noté $X_{\acute{e}t} \overleftarrow{\times}_{X_{\acute{e}t}} X_{\bar{\eta}, \acute{e}t}$. Celui-ci vérifie une propriété universelle qui explique cette notation (cf. [4] VI.3.7 et VI.3.12). Les foncteurs

$$(7.4.3) \quad p_1^+ : \mathbf{\acute{E}t}/X \rightarrow D, \quad U \mapsto (U_{\bar{\eta}} \rightarrow U),$$

$$(7.4.4) \quad p_2^+ : \mathbf{\acute{E}t}/X_{\bar{\eta}} \rightarrow D, \quad V \mapsto (V \rightarrow X),$$

sont exacts à gauche et continus. Ils définissent donc deux morphismes de topos ([6] IV 4.9.2)

$$(7.4.5) \quad p_1 : X_{\acute{e}t} \overleftarrow{\times}_{X_{\acute{e}t}} X_{\bar{\eta}, \acute{e}t} \rightarrow X_{\acute{e}t},$$

$$(7.4.6) \quad p_2 : X_{\acute{e}t} \overleftarrow{\times}_{X_{\acute{e}t}} X_{\bar{\eta}, \acute{e}t} \rightarrow X_{\bar{\eta}, \acute{e}t}.$$

7.5. Tout objet de E est naturellement un objet de D . On définit ainsi un $(\mathbf{\acute{E}t}/X)$ -foncteur cartésien pleinement fidèle

$$(7.5.1) \quad \rho^+ : E \rightarrow D$$

dont la fibre au-dessus d'un schéma étale U sur X est le foncteur d'injection canonique $\mathbf{\acute{E}t}_{f/U_{\bar{\eta}}} \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}/U_{\bar{\eta}}$. Le foncteur (7.5.1) est continu et exact à gauche ([4] VI.10.15). Il définit donc un morphisme de topos

$$(7.5.2) \quad \rho : X_{\acute{e}t} \overleftarrow{\times}_{X_{\acute{e}t}} X_{\bar{\eta}, \acute{e}t} \rightarrow \tilde{E}.$$

Il résulte aussitôt des définitions que les carrés du diagramme

$$(7.5.3) \quad \begin{array}{ccccc} X_{\acute{e}t} & \xleftarrow{p_1} & X_{\acute{e}t} \overleftarrow{\times}_{X_{\acute{e}t}} X_{\bar{\eta}, \acute{e}t} & \xrightarrow{p_2} & X_{\bar{\eta}, \acute{e}t} \\ \parallel & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho_{X_{\bar{\eta}}} \\ X_{\acute{e}t} & \xleftarrow{\sigma} & \tilde{E} & \xrightarrow{\beta} & X_{\bar{\eta}, \acute{e}t}, \end{array}$$

où $\rho_{X_{\bar{\eta}}}$ est le morphisme (2.13.3), sont commutatifs à isomorphismes canoniques près.

7.6. D'après ([4] VI.3.11), la donnée d'un point de $X_{\acute{e}t} \overleftarrow{\times}_{X_{\acute{e}t}} X_{\bar{\eta}, \acute{e}t}$ est équivalente à la donnée d'une paire de points géométriques \bar{x} de X et \bar{y} de $X_{\bar{\eta}}$ et d'une flèche de spécialisation $u : \bar{y} \rightarrow X_{(\bar{x})}$, où $X_{(\bar{x})}$ est le localisé strict de X en \bar{x} . Un tel point sera noté $(\bar{y} \rightsquigarrow \bar{x})$. On désigne par $\rho(\bar{y} \rightsquigarrow \bar{x})$ son image par ρ , qui est donc un point de \tilde{E} . D'après ([4] VI.5.30 et VI.10.18), lorsque $(\bar{y} \rightsquigarrow \bar{x})$ décrit la famille des points de $X_{\acute{e}t} \overleftarrow{\times}_{X_{\acute{e}t}} X_{\bar{\eta}, \acute{e}t}$, la famille des foncteurs fibres de $X_{\acute{e}t} \overleftarrow{\times}_{X_{\acute{e}t}} X_{\bar{\eta}, \acute{e}t}$ (resp. \tilde{E}) associés aux points $(\bar{y} \rightsquigarrow \bar{x})$ (resp. $\rho(\bar{y} \rightsquigarrow \bar{x})$) est conservative.

7.7. Reprenons les notations de 2.13. On désigne par

$$(7.7.1) \quad \varpi_{\text{scoh}} : D_{\text{scoh}} \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}_{\text{scoh}/X}, \quad \pi_{\text{scoh}} : E_{\text{scoh}} \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}_{\text{scoh}/X}$$

les sites fibrés déduits de ϖ (7.4.2) et π (7.1.2) par changement de base par le foncteur d'injection canonique

$$(7.7.2) \quad \mathbf{\acute{E}t}_{\text{scoh}/X} \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}/X,$$

et par $\iota_1 : D_{\text{scoh}} \rightarrow D$ et $\iota_2 : E_{\text{scoh}} \rightarrow E$ les projections canoniques. D'après ([4] VI.5.21), si l'on munit D_{scoh} (resp. E_{scoh}) de la topologie co-évanescence définie par ϖ_{scoh} (resp. π_{scoh}) et si l'on note \tilde{D}_{scoh} (resp. \tilde{E}_{scoh}) le topos des faisceaux d'ensembles sur D_{scoh} (resp. E_{scoh}), le foncteur ι_1 (resp. ι_2) induit par restriction une équivalence de catégories $X_{\acute{\text{e}t}} \times_{X_{\acute{\text{e}t}}} X_{\bar{\eta}, \acute{\text{e}t}} \xrightarrow{\sim} \tilde{D}_{\text{scoh}}$ (resp. $\tilde{E} \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_{\text{scoh}}$).

7.8. Pour tout $(V \rightarrow U) \in \mathbf{Ob}(E)$, on note \bar{U}^V la clôture intégrale de \bar{U} dans V . On désigne par $\bar{\mathcal{B}}$ le préfaisceau d'anneaux sur E défini pour tout $(V \rightarrow U) \in \mathbf{Ob}(E)$, par

$$(7.8.1) \quad \bar{\mathcal{B}}(V \rightarrow U) = \Gamma(\bar{U}^V, \mathcal{O}_{\bar{U}^V}).$$

Pour tout $U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}/X)$, on pose (7.3.1)

$$(7.8.2) \quad \bar{\mathcal{B}}_U = \bar{\mathcal{B}} \circ \alpha_U!$$

D'après ([4] III.8.16), $\bar{\mathcal{B}}$ est un faisceau pour la topologie co-évanescence de E . On dira dans la suite que $\bar{\mathcal{B}}$ est l'anneau de \tilde{E} associé à \bar{X} . Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}/X)$, on pose

$$(7.8.3) \quad \bar{\mathcal{B}}_n = \bar{\mathcal{B}}/p^n \bar{\mathcal{B}},$$

$$(7.8.4) \quad \bar{\mathcal{B}}_{U,n} = \bar{\mathcal{B}}_U/p^n \bar{\mathcal{B}}_U.$$

La correspondance $\{U \mapsto \bar{\mathcal{B}}_{U,n}\}$ forme naturellement un préfaisceau sur E dont le faisceau associé est canoniquement isomorphe au $\bar{\mathcal{B}}_n$ (cf. [4] VI.8.2 et VI.8.9).

7.9. Considérons l'homomorphisme

$$(7.9.1) \quad \hbar_*(\mathcal{O}_{\bar{X}}) \rightarrow \sigma_*(\bar{\mathcal{B}}),$$

où $\hbar : \bar{X} \rightarrow X$ est la projection canonique, défini pour tout $U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}/X)$ par l'homomorphisme canonique

$$(7.9.2) \quad \Gamma(\bar{U}, \mathcal{O}_{\bar{U}}) \rightarrow \Gamma(\bar{U}^{U_{\bar{\eta}}}, \mathcal{O}_{\bar{U}^{U_{\bar{\eta}}}}).$$

Sauf mention explicite du contraire, on considère $\sigma : \tilde{E} \rightarrow X_{\acute{\text{e}t}}$ (7.3.4) comme un morphisme de topos annelés, respectivement par $\bar{\mathcal{B}}$ et $\hbar_*(\mathcal{O}_{\bar{X}})$. Nous utilisons pour les modules la notation σ^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation σ^* pour l'image inverse au sens des modules.

7.10. Comme $X_{\bar{\eta}}$ est un ouvert de $X_{\acute{\text{e}t}}$, i.e. un sous-objet de l'objet final X de $\mathbf{\acute{E}t}/X$ ([6] IV 8.3), $\sigma^*(X_{\bar{\eta}})$ est un ouvert de \tilde{E} . On note $\gamma : \tilde{E}_{/\sigma^*(X_{\bar{\eta}})} \rightarrow \tilde{E}$ le morphisme de localisation de \tilde{E} en $\sigma^*(X_{\bar{\eta}})$. On désigne par \tilde{E}_s le sous-topos fermé de \tilde{E} complémentaire de l'ouvert $\sigma^*(X_{\bar{\eta}})$, i.e. la sous-catégorie pleine de \tilde{E} formée des faisceaux F tels que $\gamma^*(F)$ soit un objet final de $\tilde{E}_{/\sigma^*(X_{\bar{\eta}})}$ ([6] IV 9.3.5). On note

$$(7.10.1) \quad \delta : \tilde{E}_s \rightarrow \tilde{E}$$

le plongement canonique, c'est-à-dire le morphisme de topos tel que $\delta_* : \tilde{E}_s \rightarrow \tilde{E}$ soit le foncteur d'injection canonique. D'après ([4] III.9.7), pour tout entier $n \geq 1$, l'anneau $\bar{\mathcal{B}}_n$ (7.8.3) est un objet de \tilde{E}_s .

7.11. Soit n un entier ≥ 1 . Notons $d : X_s \rightarrow X$ et $d_n : X_s \rightarrow X_n$ les morphismes canoniques (2.1.1). Il existe un morphisme de topos ([4] III.9.8) :

$$(7.11.1) \quad \sigma_s : \tilde{E}_s \rightarrow X_{s,\acute{\text{e}t}}$$

unique à isomorphisme près tel que le diagramme

$$(7.11.2) \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{E}_s & \xrightarrow{\sigma_s} & X_{s,\text{ét}} \\ \delta \downarrow & & \downarrow d \\ \widetilde{E} & \xrightarrow{\sigma} & X_{\text{ét}}, \end{array}$$

soit commutatif à isomorphisme près.

Pour tout entier $n \geq 1$, comme le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ est algébriquement clos, on a une immersion fermée $\overline{d}_n : X_s \rightarrow \overline{X}_n$ qui relève d_n . Comme \overline{d}_n est un homéomorphisme universel, on peut considérer le faisceau $\mathcal{O}_{\overline{X}_n}$ de $\overline{X}_{n,\text{ét}}$ (ou de $\overline{X}_{n,\text{zar}}$) comme un faisceau de $X_{s,\text{ét}}$ (ou de $X_{s,\text{zar}}$). L'homomorphisme canonique $\sigma^{-1}(\overline{h}_*(\mathcal{O}_{\overline{X}})) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}$ (7.9.1) induit alors un homomorphisme d'anneaux sur \widetilde{E}_s ([4] III.9.9) :

$$(7.11.3) \quad \sigma_s^{-1}(\mathcal{O}_{\overline{X}_n}) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}_n.$$

Par suite, le morphisme de topos σ_s (7.11.1) est sous-jacent à un morphisme de topos annelés que l'on note

$$(7.11.4) \quad \sigma_n : (\widetilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \rightarrow (X_{s,\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}_n}).$$

7.12. On désigne par $\overset{\sim}{\mathcal{B}}$ l'anneau $(\overline{\mathcal{B}}_n)_{n \geq 1}$ de $\widetilde{E}_s^{\text{N}^\circ}$ (2.11) et par $\mathcal{O}_{\overline{X}}^\vee$ l'anneau $(\mathcal{O}_{\overline{X}_n}^\vee)_{n \geq 1}$ de $X_{s,\text{ét}}^{\text{N}^\circ}$ (ou de $X_{s,\text{zar}}^{\text{N}^\circ}$). Les morphismes $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ (7.11.4) induisent un morphisme de topos annelés :

$$(7.12.1) \quad \check{\sigma} : (\widetilde{E}_s^{\text{N}^\circ}, \overset{\sim}{\mathcal{B}}) \rightarrow (X_{s,\text{ét}}^{\text{N}^\circ}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^\vee).$$

On note \mathfrak{X} le schéma formel complété p -adique de \overline{X} . On désigne par :

$$(7.12.2) \quad \check{\upsilon} : (X_{s,\text{ét}}^{\text{N}^\circ}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^\vee) \rightarrow (X_{s,\text{zar}}^{\text{N}^\circ}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^\vee)$$

le morphisme canonique, par

$$(7.12.3) \quad \lambda : (X_{s,\text{zar}}^{\text{N}^\circ}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^\vee) \rightarrow (X_{s,\text{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$$

le morphisme de topos annelés dont le foncteur image directe est la limite projective (2.11), et par

$$(7.12.4) \quad \text{T} : (\widetilde{E}_s^{\text{N}^\circ}, \overset{\sim}{\mathcal{B}}) \rightarrow (X_{s,\text{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$$

le morphisme composé de topos annelés $\lambda \circ \check{\upsilon} \circ \check{\sigma}$.

7.13. Si A est un anneau, on note encore A le faisceau constant de valeur A de $X_{\overline{\eta},\text{fét}}$. Comme l'anneau $\overline{\mathcal{B}}(X_{\overline{\eta}} \rightarrow X) = \Gamma(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ est une $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbre, il existe un homomorphisme canonique d'anneaux $\mathcal{O}_{\overline{K}} \rightarrow \beta_*(\overline{\mathcal{B}})$ de $X_{\overline{\eta},\text{fét}}$. Celui-ci induit, pour tout entier $n \geq 1$, un homomorphisme canonique $\mathfrak{o}_n \rightarrow \beta_*(\overline{\mathcal{B}}_n)$ de $X_{\overline{\eta},\text{fét}}$. On définit le morphisme de topos annelés

$$(7.13.1) \quad \beta_n : (\widetilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \rightarrow (X_{\overline{\eta},\text{fét}}, \mathfrak{o}_n)$$

par le morphisme de topos composé $\beta \circ \delta$ ((7.3.2) et (7.10.1)) et l'homomorphisme canonique $\mathfrak{o}_n \rightarrow \beta_*(\overline{\mathcal{B}}_n)$. On note $\check{\mathfrak{o}}$ l'anneau $(\mathfrak{o}_n)_{n \geq 1}$ de $X_{\overline{\eta},\text{fét}}^{\text{N}^\circ}$ et

$$(7.13.2) \quad \check{\beta} : (\widetilde{E}_s^{\text{N}^\circ}, \overset{\sim}{\mathcal{B}}) \rightarrow (X_{\overline{\eta},\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \check{\mathfrak{o}})$$

le morphisme de topos annelés induit par les morphismes $(\beta_n)_{n \geq 1}$ (7.13.1).

7.14. Pour qu'un faisceau F de \widetilde{E} soit un objet de \widetilde{E}_s , il faut et il suffit que, pour tout point $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ de $X_{\text{ét}} \overset{\sim}{\times}_{X_{\text{ét}}} X_{\overline{\eta},\text{ét}}$ (7.5) tel que \overline{x} soit au-dessus de η , la fibre $F_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})}$ de F en $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ soit un singleton (cf. [4] III.9.6). Soient n un entier ≥ 1 et \mathbb{L} un \mathfrak{o}_n -module de $X_{\overline{\eta},\text{fét}}$. Comme les foncteurs fibres commutent

au produit tensoriel ([6] IV 13.4) et que $\overline{\mathcal{B}}_n$ est un objet de \tilde{E}_s ([4] III.9.7), on en déduit que le faisceau $\beta^*(\mathbb{L}) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \overline{\mathcal{B}}_n$ de \tilde{E} est un objet de \tilde{E}_s . Par adjonction, on a donc un isomorphisme de \tilde{E}

$$(7.14.1) \quad \beta^*(\mathbb{L}) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \overline{\mathcal{B}}_n \xrightarrow{\sim} \delta_*(\beta_n^*(\mathbb{L})).$$

7.15. On note $\mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}}_n)$ la catégorie des $\overline{\mathcal{B}}_n$ -modules de \tilde{E}_s et $\mathbf{Mod}^{\text{tf}}(\overline{\mathcal{B}}_n)$ la sous-catégorie pleine formée des $\overline{\mathcal{B}}_n$ -modules de type fini. On note $\mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}})$ la catégorie des $\overline{\mathcal{B}}$ -modules de \tilde{E}_s^{No} , $\mathbf{Mod}^{\text{atf}}(\overline{\mathcal{B}})$ la sous-catégorie pleine formée des $\overline{\mathcal{B}}$ -modules adiques de type fini (2.11) et $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathcal{B}})$ (resp. $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\overline{\mathcal{B}})$) la catégorie des objets de $\mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}})$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\text{atf}}(\overline{\mathcal{B}})$) à isogénie près (2.16).

7.16. Supposons, dans la suite de cette section, que X soit un S -schéma propre à réduction semi-stable de fibre géométrique générique connexe (5.9). On notera que X est adéquat dans le sens de ([4] III.4.7) et par suite que \overline{X} est normal ([4] III.4.2 (iii)). D'après ([5] 6.1), pour tout point géométrique \bar{x} de X , il existe un voisinage étale U de \bar{x} dans X dont la fibre générique U_η est un schéma $K(\pi, 1)$ (cf. [3] 1.2.2). On en déduit, pour tout faisceau abélien de torsion localement constant constructible \mathcal{F} de $X_{\bar{\eta}, \text{ét}}$ et tout entier $i \geq 1$, que $R^i \Psi_*(\mathcal{F}) = 0$ (7.3.6) (cf. [5] 9.6). On a donc un isomorphisme

$$(7.16.1) \quad H^i(\tilde{E}, \Psi_*(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{\bar{\eta}, \text{ét}}, \mathcal{F})$$

déduit de la suite spectrale de Cartan-Leray.

7.17. Soit \mathbb{L} un faisceau abélien de torsion de $X_{\bar{\eta}, \text{fét}}$. Le faisceau $\rho_{X_{\bar{\eta}}}^*(\mathbb{L})$ (2.13.3) est isomorphe à une limite inductive de faisceaux abéliens de torsion localement constants et constructibles de $X_{\bar{\eta}, \text{ét}}$ (cf. [4] VI.9.20). D'après ([4] VI.10.5 et VI.10.10), les topos $X_{\bar{\eta}, \text{ét}}$ et \tilde{E} et le morphisme de topos Ψ sont cohérents. Par (7.16.1) et passage à la limite ([6] VI 5.1), on a un isomorphisme

$$(7.17.1) \quad H^i(\tilde{E}, \Psi_*(\rho_{X_{\bar{\eta}}}^*(\mathbb{L}))) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{\bar{\eta}, \text{ét}}, \rho_{X_{\bar{\eta}}}^*(\mathbb{L}))$$

déduit de la suite spectrale de Cartan-Leray. Pour tout entier $i \geq 0$, considérons le morphisme composé

$$(7.17.2) \quad H^i(X_{\bar{\eta}, \text{fét}}, \mathbb{L}) \xrightarrow{\beta^*} H^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L})) \xrightarrow{\sim} H^i(\tilde{E}, \Psi_*(\rho_{X_{\bar{\eta}}}^*(\mathbb{L}))) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{\bar{\eta}, \text{ét}}, \rho_{X_{\bar{\eta}}}^*(\mathbb{L})),$$

où la deuxième flèche est induite par l'isomorphisme $\beta^* \xrightarrow{\sim} \Psi_* \rho_{X_{\bar{\eta}}}^*$ (7.3.8) et la troisième flèche est l'isomorphisme (7.17.1). D'après 2.12, le morphisme composé (7.17.2) s'identifie au morphisme induit par $\rho_{X_{\bar{\eta}}}^*$:

$$(7.17.3) \quad \rho_{X_{\bar{\eta}}}^* : H^i(X_{\bar{\eta}, \text{fét}}, \mathbb{L}) \rightarrow H^i(X_{\bar{\eta}, \text{ét}}, \rho_{X_{\bar{\eta}}}^*(\mathbb{L})).$$

qui est un isomorphisme pour $i = 0, 1$, et est un monomorphisme pour $i = 2$ (cf. 2.15). Comme les deux dernières flèches de (7.17.2) sont des isomorphismes, on en déduit le résultat suivant.

Lemme 7.18. *Soit \mathbb{L} un faisceau abélien de torsion de $X_{\bar{\eta}, \text{fét}}$. L'homomorphisme*

$$(7.18.1) \quad \beta^* : H^i(X_{\bar{\eta}, \text{fét}}, \mathbb{L}) \rightarrow H^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L})).$$

est un isomorphisme si $i = 0, 1$, et est un monomorphisme si $i = 2$.

Théorème 7.19 (Faltings ; [3] 2.4.16). *Soient n un entier ≥ 1 et \mathbb{L} un \mathfrak{o}_n -module localement libre de type fini de $X_{\bar{\eta}, \text{fét}}$. Le morphisme \mathfrak{o}_n -linéaire canonique*

$$(7.19.1) \quad H^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L})) \rightarrow H^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L}) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \overline{\mathcal{B}}_n)$$

est un α -isomorphisme (3.1).

D'après ([4] VI.9.20), il existe une extension finie F de \mathbb{Q}_p contenue dans \overline{K} et, notant \mathcal{O}_F l'anneau de valuation de F , un $(\mathcal{O}_F/p^n \mathcal{O}_F)$ -module localement libre de type fini \mathbb{L}' de $X_{\bar{\eta}, \text{fét}}$ tels que $\mathbb{L} \simeq \mathbb{L}' \otimes_{\mathcal{O}_F/p^n \mathcal{O}_F} \mathfrak{o}_n$. Comme \mathfrak{o}_n est plat sur $\mathcal{O}_F/p^n \mathcal{O}_F$, il suffit de démontrer que le morphisme \mathfrak{o}_n -linéaire canonique

$$(7.19.2) \quad H^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L}')) \otimes_{\mathcal{O}_F/p^n \mathcal{O}_F} \mathfrak{o}_n \rightarrow H^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L}') \otimes_{\mathcal{O}_F/p^n \mathcal{O}_F} \overline{\mathcal{B}}_n)$$

est un α -isomorphisme. La même démonstration que celle de ([3] 2.4.16) s'applique alors aux $(\mathcal{O}_F/p^n\mathcal{O}_F)$ -modules localement libres de type fini de $X_{\bar{\eta},\text{fét}}$, en remplaçant le morphisme de Frobenius par une puissance de ce dernier.

Proposition 7.20. *Soient n un entier ≥ 1 et \mathbb{L} un \mathfrak{o}_n -module localement libre de type fini de $X_{\bar{\eta},\text{fét}}$. Le morphisme \mathfrak{o}_n -linéaire induit par β_n (7.13.1)*

$$(7.20.1) \quad \beta_n^* : \mathrm{H}^i(X_{\bar{\eta},\text{fét}}, \mathbb{L}) \rightarrow \mathrm{H}^i(\tilde{E}_s, \beta_n^*(\mathbb{L}))$$

est un α -isomorphisme si $i = 0, 1$, et est un α -monomorphisme si $i = 2$ (3.1).

Preuve. Comme le foncteur $\delta_* : \tilde{E}_s \rightarrow \tilde{E}$ (7.10.1) est exact, on a un isomorphisme

$$\delta^* : \mathrm{H}^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L}_n) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \overline{\mathcal{B}}_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(\tilde{E}_s, \beta_n^*(\mathbb{L}_n))$$

en vertu de (7.14.1). Le morphisme (7.20.1) s'identifie au morphisme composé

$$\mathrm{H}^i(X_{\bar{\eta},\text{fét}}, \mathbb{L}) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{H}^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L})) \rightarrow \mathrm{H}^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L}) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \overline{\mathcal{B}}_n) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{H}^i(\tilde{E}_s, \beta_n^*(\mathbb{L}_n)),$$

où la première flèche est le morphisme (7.18.1) et la deuxième flèche est le α -isomorphisme (7.19.1). La proposition s'ensuit compte tenu de 7.18 et 7.19.

Corollaire 7.21. *Soit $\mathbb{L} = (\mathbb{L}_n)_{n \geq 1}$ un \mathfrak{o} -module localement libre de type fini de $X_{\bar{\eta},\text{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}$. Pour $i = 0, 1$, le morphisme \mathfrak{o} -linéaire induit par $\check{\beta}$ (7.13.2)*

$$(7.21.1) \quad \check{\beta}^* : \mathrm{H}^i(X_{\bar{\eta},\text{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathbb{L}) \rightarrow \mathrm{H}^i(\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\beta}^*(\mathbb{L}))$$

est un α -isomorphisme.

Preuve. Pour tout entier $i \geq 0$, on a un diagramme commutatif (cf. [4] VI.7.10)

$$(7.21.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{R}^1 \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{H}^{i-1}(X_{\bar{\eta},\text{fét}}, \mathbb{L}_n) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(X_{\bar{\eta},\text{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathbb{L}) & \longrightarrow & \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{H}^i(X_{\bar{\eta},\text{fét}}, \mathbb{L}_n) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (\beta_n^*) & & \downarrow \check{\beta}^* & & \downarrow (\beta_n^*) \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{R}^1 \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{H}^{i-1}(\tilde{E}_s, \beta_n^*(\mathbb{L}_n)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\beta}^*(\mathbb{L})) & \longrightarrow & \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{H}^i(\tilde{E}_s, \beta_n^*(\mathbb{L}_n)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où l'on a posé $\mathrm{H}^{-1}(X_{\bar{\eta},\text{fét}}, \mathbb{L}_n) = 0$ et $\mathrm{H}^{-1}(\tilde{E}_s, \beta_n^*(\mathbb{L}_n)) = 0$ pour tout $n \geq 1$. L'assertion résulte alors de 3.10(ii) et 7.20.

7.22. On désigne par \tilde{E}_{pt} le topos de Faltings associé au morphisme canonique $h_S : \bar{\eta} \rightarrow S$. Pour tout $U \in \mathbf{Ob}(\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{/S})$, le site $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{f/U_{\bar{\eta}}}$ est équivalent au site $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{\text{coh}/U_{\bar{\eta}}}$ (2.13). D'après ([4] VI.5.11), le foncteur ρ^+ induit une équivalence de topos (7.5.2) :

$$(7.22.1) \quad \rho : S_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{S_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_{pt},$$

qui s'insère dans le diagramme commutatif (7.5.3)

$$(7.22.2) \quad \begin{array}{ccccc} S_{\text{ét}} & \xleftarrow{p_1} & S_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{S_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}} & \xrightarrow{p_2} & \bar{\eta}_{\text{ét}} \\ \parallel & & \downarrow \rho & & \downarrow \iota \\ S_{\text{ét}} & \xleftarrow{\sigma} & \tilde{E}_{pt} & \xrightarrow{\beta} & \bar{\eta}_{\text{fét}}. \end{array}$$

7.23. Soient $a : \bar{S} \rightarrow S$, $h_S : \bar{\eta} \rightarrow S$ les morphismes canoniques et $a^+ : \hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{\text{scoh}/S} \rightarrow \hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{\text{scoh}/\bar{S}}$, $h_S^+ : \hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{\text{scoh}/S} \rightarrow \hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{\text{coh}/\bar{\eta}}$ les foncteurs de changement de base associés (2.13). On note D_{scoh} et E_{scoh} les sites introduits dans 7.7 relativement au morphisme h_S . On observera que $\bar{\eta}_{\text{ét}}$ étant un topos ponctuel, il existe un unique morphisme de topos

$$(7.23.1) \quad b : \bar{S}_{\text{ét}} \rightarrow \bar{\eta}_{\text{ét}},$$

tel que $b^*(\bar{\eta}) = \bar{S}$ ([6] IV 4.3). Il est induit par l'unique foncteur exact à gauche

$$b^+ : \mathbf{\acute{E}t}_{\text{coh}/\bar{\eta}} \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}_{\text{scoh}/\bar{S}}.$$

Lemme 7.24. (i) *Pour tout $U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{\text{scoh}/S})$, il existe un \bar{S} -morphisme fonctoriel en U*

$$(7.24.1) \quad \bar{U} \rightarrow b^+(U_{\bar{\eta}}),$$

induisant un isomorphisme au-dessus de $\bar{\eta}$.

(ii) *Pour tout $(V \rightarrow U) \in \mathbf{Ob}(E_{\text{scoh}})$, il existe un isomorphisme de \bar{S} -schémas fonctoriel en $(V \rightarrow U)$*

$$(7.24.2) \quad \bar{U} \times_{b^+(U_{\bar{\eta}})} b^+(V) \xrightarrow{\sim} \bar{U}^V,$$

où \bar{U}^V désigne la clôture intégrale de \bar{U} dans V (7.8).

Preuve. D'après ([19] 18.10.8), tout objet U de $\mathbf{\acute{E}t}_{\text{scoh}/S}$ est la somme de deux sous-schémas ouverts U_1 et U_2 , où U_1 est fini sur S et U_2 est fini sur η . On peut traiter indépendamment le cas où U est fini sur S et celui où U est fini sur η .

Si U est fini sur S , U est isomorphe à une somme de copies de S . Par suite, on a un isomorphisme canonique $\bar{U} \xrightarrow{\sim} b^+(\bar{U}_{\bar{\eta}})$, d'où le lemme dans ce cas.

Si U est fini sur η , on a $\bar{U} \simeq U_{\bar{\eta}}$. La construction de (7.24.1) est immédiate dans ce cas puisque le morphisme composé

$$\mathbf{\acute{E}t}_{\text{coh}/\bar{\eta}} \xrightarrow{b^+} \mathbf{\acute{E}t}_{\text{scoh}/\bar{S}} \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}_{\text{coh}/\bar{\eta}},$$

où la seconde flèche est déduite du changement de base, est l'identité. De plus, on a $\bar{U} \times_{b^+(U_{\bar{\eta}})} b^+(V) \simeq U_{\bar{\eta}} \times_{U_{\bar{\eta}}} V = V$ et $\bar{U}^V \simeq V$; d'où l'isomorphisme (7.24.2) dans ce cas.

7.25. On déduit de (7.24.1) un morphisme de foncteurs

$$(7.25.1) \quad t^+ : a^+ \rightarrow b^+ h_S^+,$$

et donc un 2-morphisme

$$t : h_S b \rightarrow a.$$

D'après la propriété universelle des topos co-évanescents ([4] VI.3.7), le triplet (a, b, t) induit un morphisme de topos

$$(7.25.2) \quad u : \bar{S}_{\acute{\text{e}t}} \rightarrow S_{\acute{\text{e}t}} \overset{\leftarrow}{\times}_{S_{\acute{\text{e}t}}} \bar{\eta}_{\acute{\text{e}t}},$$

qui s'insère dans le diagramme commutatif

$$(7.25.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & \bar{S}_{\acute{\text{e}t}} & & \\ & a \swarrow & \downarrow u & \searrow b & \\ S_{\acute{\text{e}t}} & \xleftarrow{p_1} & S_{\acute{\text{e}t}} \overset{\leftarrow}{\times}_{S_{\acute{\text{e}t}}} \bar{\eta}_{\acute{\text{e}t}} & \xrightarrow{p_2} & \bar{\eta}_{\acute{\text{e}t}} \\ & \parallel & \downarrow h_S & & \\ & & S_{\acute{\text{e}t}} & & \end{array}$$

On vérifie aussitôt que

$$(7.25.4) \quad u(\bar{\eta}) = (\text{id} : \bar{\eta} \rightsquigarrow \bar{\eta}) \quad \text{et} \quad u(s) = (\bar{\eta} \rightsquigarrow s),$$

où $\bar{\eta} \rightsquigarrow s$ est l'unique flèche de spécialisation de $\bar{\eta}$ vers s . En vertu de ([4] VI.3.7.2), u est induit par le foncteur

$$(7.25.5) \quad u^+ : D_{\text{scoh}} \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}_{\text{scoh}/\bar{S}} \quad (V \rightarrow U) \mapsto \bar{U} \times_{b^+(U_{\bar{\eta}})} b^+(V),$$

où la flèche $\bar{U} \rightarrow b^+(U_{\bar{\eta}})$ est défini dans (7.24.1). On en déduit que $u^*((\bar{\eta} \rightarrow \eta)^a) = \bar{\eta}$. Le topos $\eta_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{\eta_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$ est canoniquement isomorphe au topos localisé de $S_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{S_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$ en $(\bar{\eta} \rightarrow \eta)^a$ ([4] VI.3.14). Notons \tilde{D}_s le sous-topos fermé de $S_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{S_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$ complémentaire de l'ouvert $(\bar{\eta} \rightarrow \eta)^a$. Le morphisme u (7.25.2) induit deux morphismes de topos ([6] IV 5.11 et 9.4.3)

$$(7.25.6) \quad v : \bar{\eta}_{\text{ét}} \rightarrow \eta_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{\eta_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}} \quad \text{et} \quad u_s : s_{\text{ét}} \rightarrow \tilde{D}_s.$$

On identifie le morphisme v (resp. u_s) au point $(\text{id} : \bar{\eta} \rightsquigarrow \bar{\eta})$ (resp. $(\bar{\eta} \rightsquigarrow s)$) de \tilde{D} .

Proposition 7.26. *Le morphisme u (7.25.2) est une équivalence de topos.*

D'après ([30] 2.3.2), le topos $S_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{S_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$ est local de centre $(\bar{\eta} \rightsquigarrow s)$ ([6] VI 8.4.6). En vertu de (7.25.4), le morphisme de topos u est local ([30] 2.1). La proposition résulte alors de 7.27, 7.29 et 7.30 ci-dessous.

Lemme 7.27. *Le morphisme v (7.25.6) est une équivalence de topos.*

Preuve. On désigne par D'_{scoh} le site défini par la sous-catégorie pleine $(D_{\text{scoh}})_{/(\bar{\eta} \rightarrow \eta)}$ de D_{scoh} munie de la topologie induite via le foncteur d'inclusion. En vertu de ([4] VI.10.14), le topos $\eta_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{\eta_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$ est canoniquement isomorphe au topos des faisceaux d'ensembles sur D'_{scoh} . D'après (7.25.5), le morphisme v est induit par le foncteur

$$(7.27.1) \quad v^+ : D'_{\text{scoh}} \rightarrow \mathbf{\hat{E}t}_{\text{coh}/\bar{\eta}} \quad (V \rightarrow U) \mapsto V.$$

On désigne par $\mathcal{C}_{\bar{\eta}}$ la catégorie des voisinages du point v de $\eta_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{\eta_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$ dans le site D'_{scoh} . Les objets de $\mathcal{C}_{\bar{\eta}}$ sont les couples formés d'un objet $(V \rightarrow U)$ de D'_{scoh} et d'un $\bar{\eta}$ -morphisme m de $\bar{\eta}$ dans V . On désigne par $\mathcal{D}_{\bar{\eta}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\bar{\eta}}$ formée des objets de la forme $(\bar{\eta} \rightarrow U, \text{id}_{\bar{\eta}})$. Il est clair que $\mathcal{D}_{\bar{\eta}}^{\circ}$ forme une sous-catégorie cofinale de $\mathcal{C}_{\bar{\eta}}^{\circ}$.

Pour tout faisceau F de $\eta_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{\eta_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$, considérons le morphisme d'adjonction

$$(7.27.2) \quad v^*(F) \rightarrow v^*v_*v^*(F).$$

Celui-ci s'identifie à la limite inductive sur la catégorie $\mathcal{D}_{\bar{\eta}}^{\circ}$ des morphismes

$$(7.27.3) \quad F(\bar{\eta} \rightarrow U) \rightarrow v_*(v^*(F))(\bar{\eta} \rightarrow U).$$

D'après (7.27.1), on a un isomorphisme $v_*(v^*(F))(\bar{\eta} \rightarrow U) \simeq v^*(F)(\bar{\eta}) = v^*(F)$. Le morphisme (7.27.3) s'identifie alors au morphisme canonique $F(\bar{\eta} \rightarrow U) \rightarrow v^*(F)$. En prenant la limite inductive, le morphisme (7.27.2) est donc un isomorphisme. Comme le point v est conservatif pour le topos $\eta_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{\eta_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$ ([4] VI.5.28), on en déduit que le morphisme d'adjonction

$$(7.27.4) \quad \text{id} \rightarrow v_*v^*$$

est un isomorphisme. Celui-ci implique que v^* est pleinement fidèle ([6] I 6.4). Il est clair que le foncteur fibre v^* est essentiellement surjectif, d'où le lemme.

Lemme 7.28. *Soit \mathcal{T} un topos local de point central $s : \mathbf{Pt} \rightarrow \mathcal{T}$. On suppose que le point s est conservatif pour \mathcal{T} . Alors, s est une équivalence de topos.*

Preuve. Notons $\varepsilon : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Pt}$ la projection canonique ([6] IV 4.3). Rappelons que, pour tout faisceau F de \mathcal{T} , le morphisme naturel $\Gamma(\mathcal{T}, F) \rightarrow s^*(F)$ est bijectif. Celui-ci induit un isomorphisme canonique $\varepsilon_* \xrightarrow{\sim} s^*$. On en déduit un isomorphisme

$$(7.28.1) \quad \varepsilon_*s_* \xrightarrow{\sim} s^*s_*.$$

On notera que le morphisme composé $\varepsilon \circ s : \mathbf{Pt} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Pt}$ s'identifie au morphisme identique. On en déduit que le composé de (7.28.1) et du morphisme d'adjonction

$$(7.28.2) \quad \varepsilon_*s_* \xrightarrow{\sim} s^*s_* \rightarrow \text{id}$$

s'identifie au morphisme identique. Par suite, le morphisme d'adjonction

$$(7.28.3) \quad s^*s_* \xrightarrow{\sim} \text{id}.$$

est un isomorphisme. D'autre part, le morphisme composé déduit des morphismes d'adjonction $s^* \rightarrow s^* s_* s^* \rightarrow s^*$ s'identifie au morphisme identique ([28] 1.1.12). On en déduit un isomorphisme canonique

$$(7.28.4) \quad s^* \xrightarrow{\sim} s^* s_* s^*.$$

Comme le foncteur fibre s^* est conservatif, le morphisme d'adjonction

$$(7.28.5) \quad \text{id} \xrightarrow{\sim} s_* s^*$$

est un isomorphisme. Le morphisme s induit donc une équivalence de topos.

Lemme 7.29. *Le morphisme u_s (7.25.6) est une équivalence de topos.*

Preuve. Les points v et u_s sont conservatifs pour le topos $S_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{S_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$ (cf. 7.6). Par 7.27 et ([6] IV 9.7.3), on en déduit que le point u_s est conservatif pour \tilde{D}_s . D'après 7.28, il suffit de démontrer que le topos \tilde{D}_s est local de centre u_s . Considérons le morphisme composé de topos

$$(7.29.1) \quad S_{\text{ét}} \xrightarrow{u_s} \tilde{D}_s \xrightarrow{i} S_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{S_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Pt},$$

où i est le morphisme d'injection canonique et ε est la projection canonique. Rappelons ([6] IV 9.5.8) que le morphisme d'adjonction

$$(7.29.2) \quad i^* i_* \xrightarrow{\sim} \text{id}$$

est un isomorphisme. Comme $S_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{S_{\text{ét}}} \bar{\eta}_{\text{ét}}$ est local de centre $i \circ u_s$ (7.25.4), on a un isomorphisme canonique

$$(7.29.3) \quad \varepsilon_* \xrightarrow{\sim} u_s^* i^*.$$

On en déduit que le composé

$$(7.29.4) \quad \varepsilon_* i_* \rightarrow u_s^* i^* i_* \rightarrow u_s^*$$

est un isomorphisme. Le foncteur “sections globales” $\Gamma(\tilde{D}_s, -)$ est donc isomorphe au foncteur fibre u_s^* , i.e. le topos \tilde{D}_s est local de centre u_s .

Lemme 7.30. *Soient $f : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}$ un morphisme de topos, U un ouvert de \mathcal{T} et $U' = f^*(U)$. Notons $j : \mathcal{T}_{/U} \rightarrow \mathcal{T}$ (resp. $j' : \mathcal{T}'_{/U'} \rightarrow \mathcal{T}'$) le morphisme de localisation de \mathcal{T} (resp. \mathcal{T}') en U (resp. U') et $i : \mathcal{T}_s \rightarrow \mathcal{T}$ (resp. $i' : \mathcal{T}'_s \rightarrow \mathcal{T}'$) le sous-topos fermé de \mathcal{T} (resp. \mathcal{T}') complémentaire de l'ouvert U (resp. U') ([6] IV 9.3.5). Le morphisme f induit deux morphismes de topos ([6] IV 5.11 et 9.4.3)*

$$(7.30.1) \quad f_{/U} : \mathcal{T}'_{/U'} \rightarrow \mathcal{T}_{/U} \quad \text{et} \quad f_s : \mathcal{T}'_s \rightarrow \mathcal{T}_s.$$

Supposons que \mathcal{T}_s (resp. \mathcal{T}'_s) soit ponctuel, \mathcal{T} (resp. \mathcal{T}') soit local de centre i (resp. i') et que $f_{/U}$ soit une équivalence de topos. Alors, f est une équivalence de topos.

Preuve. Posons $\rho' = i'^* \circ j'_*$ et $\rho = i^* \circ j_*$. Le topos \mathcal{T} (resp. \mathcal{T}') est équivalent au topos obtenu par recollement de $(\mathcal{T}_{/U}, \mathcal{T}_s, \rho)$ (resp. $(\mathcal{T}'_{/U'}, \mathcal{T}'_s, \rho')$) (cf. [6] IV 9.5.4). Considérons le diagramme

$$(7.30.2) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{T}'_{/U'} & \xrightarrow{j'_*} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{i'^*} & \mathcal{T}'_s \\ f_{/U*} \downarrow & & f_* \downarrow & & \downarrow f_{s*} \\ \mathcal{T}_{/U} & \xrightarrow{j_*} & \mathcal{T} & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{T}_s \end{array}$$

dont le carré de gauche est clairement commutatif. Le foncteur i^* (resp. i'^*) est isomorphe au foncteur “sections globales” $\Gamma(\mathcal{T}, -)$ (resp. $\Gamma(\mathcal{T}', -)$) et le foncteur f_{s*} est isomorphe au foncteur identique. On en déduit que le carré de droite de (7.30.2) est aussi commutatif. Les foncteurs ρ et ρ' sont donc compatibles. Par suite, f_* induit une équivalence de catégories en vertu de ([6] IV 9.5.2).

7.31. Soit $\overline{\mathcal{B}}_{pt}$ l'anneau de \widetilde{E}_{pt} associé à \overline{S} (7.8). Par (7.8.1), (7.24.2) et (7.25.5), on a un isomorphisme d'anneaux de \widetilde{E}_{pt} .

$$(7.31.1) \quad \rho_* u_*(\mathcal{O}_{\overline{S}}) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{B}}_{pt}.$$

Par les équivalences de topos (7.22.1) et (7.25.2) :

$$(7.31.2) \quad \overline{S}_{\text{ét}} \xrightarrow{u} S_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{S_{\text{ét}}} \overline{\eta}_{\text{ét}} \xrightarrow{\rho} \widetilde{E}_{pt},$$

l'anneau $\mathcal{O}_{\overline{S}}$ de $\overline{S}_{\text{ét}}$ s'identifie alors à l'anneau $\overline{\mathcal{B}}_{pt}$ de \widetilde{E}_{pt} et pour tout entier $n \geq 1$, l'anneau $\mathcal{O}_{\overline{S}_n}$ de $\overline{S}_{\text{ét}}$ s'identifie alors à l'anneau $\overline{\mathcal{B}}_{pt,n}$ de \widetilde{E}_{pt} (7.8.3). D'après (7.22.2) et 7.29, le sous-topos fermé $s_{\text{ét}}$ de $\overline{S}_{\text{ét}}$ s'identifie au sous-topos fermé $\widetilde{E}_{pt,s}$ (7.10.1) de \widetilde{E}_{pt} .

D'après (7.22.2) et (7.25.3), le morphisme de topos $a : \overline{S}_{\text{ét}} \rightarrow S_{\text{ét}}$ induit une équivalence de topos annelés

$$(7.31.3) \quad a_n : (s_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n}) \xrightarrow{\sim} (s_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n}),$$

qui s'identifie au morphisme de topos annelés σ_n (7.11.4) de \widetilde{E}_{pt} . De plus, le morphisme de topos $b : \overline{S}_{\text{ét}} \rightarrow \overline{\eta}_{\text{fét}}$ induit une équivalence de topos annelés

$$(7.31.4) \quad b_n : (s_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n}) \xrightarrow{\sim} (\overline{\eta}_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n)$$

qui s'identifie au morphisme de topos annelés β_n (7.13.1) de \widetilde{E}_{pt} .

8. Correspondance de Deninger-Werner via le topos annelé de Faltings

Dans cette section, on se donne une S -courbe semi-stable X et un $\overline{\eta}$ -point \overline{x} de $X_{\overline{\eta}}$. On pose $C = X_{\overline{\eta}}$. Rappelons que $\overline{X} = X \times_S \overline{S}$ est un schéma normal (cf. 5.6). On reprend les notations de § 7 pour X .

8.1. Pour tout $\overline{\eta}$ -point \overline{y} de C . Il existe un trait S' fini sur S , un morphisme $h_{S'} : \overline{\eta} \rightarrow S'$ et un S -morphisme $y : S' \rightarrow X$ qui s'insèrent dans un diagramme commutatif de schémas

$$(8.1.1) \quad \begin{array}{ccc} \overline{\eta} & \xrightarrow{h_{S'}} & S' \\ \overline{y} \downarrow & & \downarrow y \\ C & \longrightarrow & X \end{array}$$

On identifie le topos annelé $(\overline{S}_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{S}})$ au topos annelé de Faltings associé au morphisme $h_{S'}$ et au schéma \overline{S} (cf. 7.31). Pour tout entier $n \geq 1$, le diagramme (8.1.1) induit par functorialité ([4] III.8.20) un morphisme de topos annelés qu'on note

$$(8.1.2) \quad [\overline{y}]_n : (s_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n}) \rightarrow (\widetilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n).$$

Par functorialité du topos de Faltings ([4] VI.10.12), celui-ci est indépendant des choix du trait S' fini sur S et du diagramme (8.1.1).

Proposition 8.2. *Supposons X régulier. Soient n un entier ≥ 1 , M un $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module libre de type fini et \overline{y} un point géométrique de C . Le morphisme $[\overline{y}]_n$ (8.1.2) et le foncteur $(-)_\#$ (3.1.1) induisent un isomorphisme fonctoriel*

$$(8.2.1) \quad ([\overline{y}]_n)_\# : \Gamma(\widetilde{E}_s, M)_\# \xrightarrow{\sim} \Gamma(s_{\text{ét}}, [\overline{y}]_n^*(M))_\#.$$

Preuve. Comme M est libre de type fini, il existe un \mathfrak{o}_n -module libre de type fini \mathbb{L} de $C_{\text{fét}}$ tel que $M \simeq \beta_n^*(\mathbb{L})$. D'après ([4] VI.(10.12.6)), on a un diagramme commutatif de topos annelés

$$(8.2.2) \quad \begin{array}{ccc} (s_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n}) & \xrightarrow{[\overline{y}]_n} & (\widetilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \\ b_n \downarrow & & \downarrow \beta_n \\ (\overline{\eta}_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) & \xrightarrow{\overline{y}} & (C_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \end{array}$$

où b_n est l'équivalence de topos annelés (7.31.4), induisant un diagramme commutatif :

$$(8.2.3) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(C_{\text{fét}}, \mathbb{L}) & \xrightarrow{\bar{y}^*} & \Gamma(\bar{\eta}_{\text{fét}}, \bar{y}^*(\mathbb{L})) \\ \beta_n^* \downarrow & & \downarrow b_n^* \\ \Gamma(\tilde{E}_s, M) & \xrightarrow{[\bar{y}]_n^*} & \Gamma(s_{\text{ét}}, [\bar{y}]_n^*(M)) \end{array}$$

où β_n^* induit un α -isomorphisme en vertu de 7.20 et \bar{y}^* induit un isomorphisme puisque \mathbb{L} est un faisceau constant et C connexe. On en déduit un α -isomorphisme

$$(8.2.4) \quad [\bar{y}]_n^* : \Gamma(\tilde{E}_s, M) \rightarrow \Gamma(s_{\text{ét}}, [\bar{y}]_n^*(M)).$$

L'isomorphisme (8.2.1) résulte de 3.2(i).

8.3. Soient (S', η') un trait fini sur (S, η) , $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ un η' -revêtement semi-stable. On note encore s le point fermé de S' et on fixe un η -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow \eta'$ et par suite un S -morphisme $\bar{S} \rightarrow S'$. On pose $X'_s = X' \times_{S'} s$, $\bar{X}' = X' \times_{S'} \bar{S}$ et $C' = X' \times_{S'} \bar{\eta}$. On désigne par

$$(8.3.1) \quad \phi : X' \xrightarrow{\varphi} X_{S'} \rightarrow X, \quad \bar{\varphi} : \bar{X}' \rightarrow \bar{X}, \quad h' : \bar{X}' \rightarrow X' \text{ et } h : C' \rightarrow X'$$

les morphismes canoniques. On a un diagramme commutatif induit par φ

$$(8.3.2) \quad \begin{array}{ccccc} C' & \longrightarrow & \bar{X}' & \xrightarrow{h'} & X' \\ \varphi_{\bar{\eta}} \downarrow & & \downarrow \bar{\varphi} & & \downarrow \phi \\ C & \longrightarrow & \bar{X} & \xrightarrow{h} & X. \end{array}$$

Comme X' est une S' -courbe semi-stable, le schéma \bar{X}' est normal (5.6). On désigne par $(\tilde{E}', \bar{\mathcal{B}}')$ le topos annelé de Faltings associé au schéma X' au-dessus de S' (cf. 7.1 et 7.8) et par

$$(8.3.3) \quad \Phi : (\tilde{E}', \bar{\mathcal{B}}') \rightarrow (\tilde{E}, \bar{\mathcal{B}})$$

le morphisme induit par functorialité par (8.3.2) ([4] III.8.20). D'après ([4] VI.(10.12.6)), les carrés du diagramme

$$(8.3.4) \quad \begin{array}{ccccc} X'_{\text{ét}} & \xleftarrow{\sigma'} & \tilde{E}' & \xrightarrow{\beta'} & C'_{\text{fét}} \\ \phi_{\text{ét}} \downarrow & & \downarrow \Phi & & \downarrow \varphi_{\bar{\eta}} \\ X_{\text{ét}} & \xleftarrow{\sigma} & \tilde{E} & \xrightarrow{\beta} & C_{\text{fét}}, \end{array}$$

où β' et σ' sont les morphismes canoniques (7.3.2) et (7.3.4) relatifs au S' -schéma X' , sont commutatifs à isomorphismes canoniques près.

On note \tilde{E}'_s le sous-topos fermé de \tilde{E}' complémentaire de l'ouvert $\sigma'^*(X'_{\eta'})$ (7.10),

$$(8.3.5) \quad \delta' : \tilde{E}'_s \rightarrow \tilde{E}'$$

le plongement canonique (7.10.1) et

$$(8.3.6) \quad \sigma'_s : \tilde{E}'_s \rightarrow X'_{s, \text{ét}}$$

le morphisme canonique de topos (7.11.1). D'après (8.3.4), on a un isomorphisme $\Phi^*(\sigma^*(X_\eta)) \simeq \sigma'^*(X'_{\eta'})$. En vertu de ([6] IV 9.4.3), il existe donc un morphisme de topos

$$(8.3.7) \quad \Phi_s : \tilde{E}'_s \rightarrow \tilde{E}_s$$

unique à isomorphisme près tel que le diagramme

$$(8.3.8) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{E}'_s & \xrightarrow{\Phi_s} & \tilde{E}_s \\ \delta' \downarrow & & \downarrow \delta \\ \tilde{E}' & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{E} \end{array}$$

soit commutatif. Il résulte de (8.3.4) et de ([6] IV 9.4.3) que le diagramme de morphismes de topos

$$(8.3.9) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{E}'_s & \xrightarrow{\Phi_s} & \tilde{E}_s \\ \sigma'_s \downarrow & & \downarrow \sigma_s \\ X'_{s,\text{ét}} & \xrightarrow{\varphi_s} & X_{s,\text{ét}} \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\overline{\mathcal{B}}'_n = \overline{\mathcal{B}}'/p^n \overline{\mathcal{B}}'$, et on désigne par

$$(8.3.10) \quad \sigma'_n : (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) \rightarrow (X'_{s,\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}'_n})$$

le morphisme de topos annelés induit par σ' (7.11.4), et par

$$(8.3.11) \quad \beta'_n : (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) \rightarrow (C'_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n)$$

le morphisme de topos annelés induit par β' (7.13.1). L'homomorphisme canonique $\Phi^{-1}(\overline{\mathcal{B}}) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}'$ induit un homomorphisme $\Phi_s^*(\overline{\mathcal{B}}_n) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}'_n$. Le morphisme Φ_s est donc sous-jacent à un morphisme de topos annelés, que l'on note

$$(8.3.12) \quad \Phi_n : (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) \rightarrow (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_s).$$

Il résulte de (8.3.9) et de la définition de (7.11.3) que le diagramme de morphismes de topos annelés

$$(8.3.13) \quad \begin{array}{ccc} (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) & \xrightarrow{\Phi_n} & (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \\ \sigma'_n \downarrow & & \downarrow \sigma_n \\ (X'_{s,\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}'_n}) & \xrightarrow{\overline{\varphi}_n} & (X_{s,\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}_n}), \end{array}$$

où $\overline{\varphi}_n$ est la réduction modulo p^n de $\overline{\varphi}$, est commutatif à isomorphisme près. D'après (8.3.4), (8.3.8) et la définition de (7.13.1), le diagramme de morphismes de topos annelés

$$(8.3.14) \quad \begin{array}{ccc} (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) & \xrightarrow{\Phi_n} & (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \\ \beta'_n \downarrow & & \downarrow \beta_n \\ (C'_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) & \xrightarrow{\varphi_{\overline{n}}} & (C_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près.

Les morphismes $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ définissent un morphisme de topos annelés

$$(8.3.15) \quad \check{\Phi} : (\tilde{E}'_s^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\overline{\mathcal{B}}}') \rightarrow (\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\overline{\mathcal{B}}}).$$

8.4. Conservons les notations de 8.3 et supposons de plus que le η' -revêtement semi-stable $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ soit galoisien. Posons $G = \text{Aut}(X'_{\eta'}/X_{\eta'})$, qui est isomorphe à $\text{Aut}(C'/C)$. Tout $g \in G$ s'étend en un X -automorphisme de X' . Par suite, celui-ci induit pour tout entier $n \geq 1$, un morphisme de topos annelés $g_n : (\tilde{E}'_s, \tilde{\mathcal{B}}'_n) \rightarrow (\tilde{E}'_s, \tilde{\mathcal{B}}'_n)$ tel que $\Phi_n \simeq \Phi_n \circ g_n$ et que pour tous $g, h \in G$, on ait un isomorphisme

$$(gh)_n^* \simeq h_n^* \circ g_n^*.$$

Définition 8.5. (i) On dit qu'un $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module M_n est *potentiellement libre de type fini* s'il est de type fini, et s'il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) et un η' -revêtement semi-stable $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$, tel que, reprenant les notations de 8.3, $\Phi_n^*(M_n)$ soit un $\overline{\mathcal{B}}'_n$ -module libre de type fini.

(ii) On dit qu'un $\overline{\mathcal{B}}$ -module $M = (M_n)_{n \geq 1}$ est *potentiellement libre de type fini* si M est adique de type fini (2.11), et si, pour tout entier $n \geq 1$, le $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module M_n est potentiellement libre de type fini.

On désigne par $\mathbf{Mod}^{\text{pltf}}(\overline{\mathcal{B}}_n)$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}}_n)$ (resp. $\mathbf{Mod}(\check{\mathcal{B}})$), formée des $\overline{\mathcal{B}}_n$ -modules potentiellement libres de type fini (resp. $\check{\mathcal{B}}$ -modules potentiellement libres de type fini). On désigne par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$ la catégorie des objets de $\mathbf{Mod}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$ à isogénie près ; c'est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}})$ (7.15). Les objets de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$ sont appelés *les $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -modules potentiellement libres de type fini*.

8.6. Dans cette section, on reprend les notations de 3.21 pour le groupe profini $\pi_1(C, \bar{x})$. Soit $n \geq 1$ un entier. On note abusivement β_n^* , $\check{\beta}^*$ et $\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*$ les foncteurs composés suivants :

$$(8.6.1) \quad \beta_n^* : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{ltf}}(\pi_1(C, \bar{x})) \xrightarrow{\mu_{\bar{x}}} \mathbf{LL}^{\text{tf}}(C_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \xrightarrow{\beta_n^*} \mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}}_n),$$

$$(8.6.2) \quad \check{\beta}^* : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ltf}}(\pi_1(C, \bar{x})) \xrightarrow{\check{\mu}_{\bar{x}}} \mathbf{LL}^{\text{tf}}(C_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}, \mathfrak{d}) \xrightarrow{\check{\beta}^*} \mathbf{Mod}(\check{\mathcal{B}}),$$

$$(8.6.3) \quad \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^* : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{c}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x})) \xrightarrow{\check{\mu}_{\bar{x}, \mathbb{Q}}} \mathbf{LL}_{\mathbb{Q}}^{\text{tf}}(C_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}, \mathfrak{d}) \xrightarrow{\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*} \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}),$$

où $\mu_{\bar{x}}$, $\check{\mu}_{\bar{x}}$ et $\check{\mu}_{\bar{x}, \mathbb{Q}}$ sont les équivalences de catégories définies dans 3.29.

Proposition 8.7. *Soit n un entier ≥ 1 . Le foncteur β_n^* (resp. $\check{\beta}^*$, resp. $\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*$) est exact et il se factorise à travers la sous-catégorie $\mathbf{Mod}^{\text{pltf}}(\overline{\mathcal{B}}_n)$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$, resp. $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$).*

Preuve. L'anneau $\overline{\mathcal{B}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ ([4] III.9.2) et par suite $\overline{\mathcal{B}}_n$ est une \mathfrak{o}_n -algèbre plate, d'où l'exactitude du foncteur β_n^* . On en déduit que les foncteurs $\check{\beta}^*$ et $\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*$ sont exacts.

Étant donné un objet \mathbb{L} de $\mathbf{LL}^{\text{tf}}(C_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n)$, il existe un revêtement étale, connexe et galoisien $\phi : C' \rightarrow C$ tel que $\phi^*(\mathbb{L})$ soit un \mathfrak{o}_n -module libre de type fini de $C'_{\text{fét}}$. D'après 5.11(i), quitte à remplacer S par une extension finie, il existe un η -revêtement semi-stable $\varphi : X' \rightarrow X$ de fibre géométrique générique $\phi : C' \rightarrow C$. Reprenons les notations de 8.3 dans ce cas. D'après (8.3.14), on a un isomorphisme

$$(8.7.1) \quad \Phi_n^*(\beta_n^*(\mathbb{L})) \simeq \beta_n^{*\prime}(\varphi_{\overline{\eta}}^*(\mathbb{L})).$$

Par suite, $\beta_n^*(\mathbb{L})$ est potentiellement libre de type fini. L'assertion pour le foncteur $\check{\beta}^*$ s'ensuit compte tenu de 3.28(ii).

Proposition 8.8. *Supposons X régulier. Le foncteur (8.6.3) est pleinement fidèle.*

Preuve. Étant donnés deux objets $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ de $\mathbf{LL}^{\text{tf}}(C_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}, \mathfrak{d})$, on pose

$$\mathbb{L} = \mathcal{H}om_{\mathfrak{d}}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2),$$

qui est encore un \mathfrak{d} -module localement libre de type fini de $C_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^{\circ}}$. Comme le \mathfrak{d} -module \mathbb{L}_1 est localement libre de type fini, on a un isomorphisme canonique

$$(8.8.1) \quad \check{\beta}^*(\mathbb{L}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\check{\mathcal{B}}}(\check{\beta}^*(\mathbb{L}_1), \check{\beta}^*(\mathbb{L}_2)).$$

D'après 7.21 et (8.8.1), le foncteur $\check{\beta}$ induit un isomorphisme :

$$(8.8.2) \quad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{s}}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\check{\mathcal{B}}}(\check{\beta}^*(\mathbb{L}_1), \check{\beta}^*(\mathbb{L}_2)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q};$$

d'où la pleine fidélité de (8.6.3).

Lemme 8.9. *Soit M un $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module potentiellement libre de type fini. Le \mathfrak{o}_n -module*

$$(8.9.1) \quad \mathscr{W}_n(M) = \Gamma(s_{\mathrm{ét}}, [\bar{x}]_n^*(M))_{\#},$$

où $[\bar{x}]_n : (s_{\mathrm{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}_n}) \rightarrow (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n)$ est le morphisme de topos annelés induit par \bar{x} (8.1.2) et $(-)_{\#}$ est le foncteur (3.1.1), est α -plat de type α -fini (3.4, 3.11).

Preuve. D'après 5.11(i), il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) et un η' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$, tel que, fixant un η -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow \eta'$ et reprenant les notations de 8.3, $\Phi_n^*(M)$ soit libre de type fini et que chaque $\bar{\eta}$ -point de C' au-dessus de \bar{x} se descende en un η' -point de $X'_{\eta'}$.

Choisissons un $\bar{\eta}$ -point \bar{y} de C' au-dessus de \bar{x} , et un η' -point de $X'_{\eta'}$ qui le descend. On note y le S' -point de X' correspondant et $x : S' \rightarrow S$ le S -morphisme induit par φ . Le diagramme commutatif de couples de schémas

$$\begin{array}{ccc} (\bar{\eta} \rightarrow S') & \xrightarrow{(\bar{y}, y)} & (C' \rightarrow X') \\ & \searrow (\bar{x}, x) & \downarrow (\varphi_{\bar{\eta}}, \phi) \\ & & (C \rightarrow X) \end{array}$$

induit un diagramme commutatif de topos annelés :

$$\begin{array}{ccc} (s_{\mathrm{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n}) & \xrightarrow{[\bar{y}]_n} & (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) \\ & \searrow [\bar{x}]_n & \downarrow \Phi_n \\ & & (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme de \mathfrak{o}_n -modules $\mathscr{W}_n(M) \simeq \Gamma(s_{\mathrm{ét}}, [\bar{y}]_n^*(\Phi_n^*(M)))_{\#}$. Comme $\Phi_n^*(M)$ est un $\overline{\mathcal{B}}'_n$ -module libre de type fini, l'assertion s'ensuit compte tenu de 3.14.

8.10. On fixe un entier ≥ 1 . Dans la suite de cette section, on se propose de construire un foncteur de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{pltf}}(\overline{\mathcal{B}}_n)$ dans $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\alpha\mathrm{ptf}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ (3.23). Étant donné un $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module potentiellement libre de type fini M , on définit le \mathfrak{o}_n -module $\mathscr{W}_n(M)$ sous-jacent à la \mathfrak{o}_n -représentation associée à M par (8.9.1). Reprenant les notations de la preuve de 8.9, le morphisme $[\bar{y}]_n$ induit un isomorphisme \mathfrak{o}_n -linéaire (cf. 8.2)

$$(8.10.1) \quad ([\bar{y}]_n^*)_{\#} : \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#} \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}_n(M).$$

On construit une action ϱ_M de $\pi_1(C, \bar{x})$ sur $\mathscr{W}_n(M)$ comme suit. Posons $G = \mathrm{Aut}(X'_{\eta'}/X_{\eta'})$ qui est isomorphe à $\mathrm{Aut}(C'/C)$. D'après 8.4, tout $g \in G$ induit un morphisme de topos annelés $g_n : (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) \rightarrow (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n)$ et par suite un automorphisme

$$(8.10.2) \quad (g_n^*)_{\#} : \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#}.$$

On a un homomorphisme surjectif (6.6.2)

$$(8.10.3) \quad \xi_{\bar{y}} : \pi_1(C, \bar{x}) \rightarrow G^{\mathrm{op}}.$$

Pour tout $\gamma \in \pi_1(C, \bar{x})$, posant $g = \xi_{\bar{y}}(\gamma)$, on définit un automorphisme $\varrho_M(\gamma)$ de $\mathscr{W}_n(M)$ par

$$(8.10.4) \quad \varrho_M(\gamma) : \mathscr{W}_n(M) \xrightarrow{([\bar{y}]_n^*)_{\#}^{-1}} \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#} \xrightarrow{(g_n^*)_{\#}} \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#} \xrightarrow{([\bar{y}]_n^*)_{\#}} \mathscr{W}_n(M).$$

On notera que ϱ_M est l'homomorphisme composé

$$(8.10.5) \quad \varrho_M : \pi_1(C, \bar{x}) \xrightarrow{\xi_{\bar{y}}} G^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}_n} \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}_n} \mathscr{W}_n(M).$$

On définit la \mathfrak{o}_n -représentation de $\pi_1(C, \bar{x})$ associée à M par $(\mathcal{W}_n(M), \varrho_M)$ qu'on note simplement $\mathcal{W}_n(M)$.

Proposition 8.11. *Étant donné un $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module potentiellement libre de type fini M , la \mathfrak{o}_n -représentation $\mathcal{W}_n(M)$ de $\pi_1(C, \bar{x})$ est indépendante des choix du trait (S', η') fini sur (S, η) , du η' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$, et du point \bar{y} de $C'(\bar{\eta})$ au-dessus de \bar{x} à isomorphisme près.*

Preuve. Le \mathfrak{o}_n -module (8.9.1) sous-jacent à $\mathcal{W}_n(M)$ est clairement indépendant des données ci-dessus. Il suffit de démontrer que l'isomorphisme (8.10.4) est indépendant des mêmes données.

Reprenons les notations de 8.9 et soient \bar{y} et \bar{y}' deux $\bar{\eta}$ -points de C' au-dessus de \bar{x} . Il existe un élément $h \in G \simeq \text{Aut}(C'/C)$ tel que $h(\bar{y}) = \bar{y}'$. Avec les notations de 6.6, on a deux homomorphismes

$$(8.11.1) \quad \xi_{\bar{y}} : \pi_1(C, \bar{x}) \rightarrow G^{\text{op}} \quad \xi_{\bar{y}'} : \pi_1(C, \bar{x}) \rightarrow G^{\text{op}}.$$

reliés par la relation (6.6.3) :

$$(8.11.2) \quad \xi_{\bar{y}'}(\gamma) = h\xi_{\bar{y}}(\gamma)h^{-1} \quad \forall \gamma \in \pi_1(C, \bar{x}).$$

On déduit par functorialité un diagramme commutatif

$$(8.11.3) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#} & \xrightarrow{(h_n^*)_{\#}} & \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#} \\ (\bar{y}'^*_n)_{\#} \downarrow & \swarrow (\bar{y}^*_n)_{\#} & \\ \mathcal{W}_n(M) & & \end{array}$$

Pour tout $\gamma \in \pi_1(C, \bar{x})$, posant $g = \xi_{\bar{y}}(\gamma)$ et $g' = \xi_{\bar{y}'}(\gamma)$, on en déduit que $g' = hgh^{-1}$ dans G et que

$$(8.11.4) \quad ([\bar{y}'^*_n]_{\#}^*) \circ (g_n^*)_{\#} \circ ([\bar{y}'^*_n]_{\#}^*)^{-1} \simeq ([\bar{y}^*_n]_{\#}^*) \circ (h_n^*)_{\#} \circ (g_n^*)_{\#} \circ (h_n^*)_{\#}^{-1} \circ ([\bar{y}^*_n]_{\#}^*)^{-1} = ([\bar{y}^*_n]_{\#}^*) \circ (g_n^*)_{\#} \circ ([\bar{y}^*_n]_{\#}^*)^{-1}.$$

Ceci implique que l'automorphisme $\varrho_M(\gamma)$ (8.10.4) est indépendant du choix du point \bar{y} au-dessus de \bar{x} .

Soient (S'', η'') un trait fini sur (S, η) et $\phi : X'' \rightarrow X_{S''}$ un η'' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien trivialisant M . D'après 5.11(i), on peut supposer que S'' domine S' et qu'il existe un morphisme équivariant de ϕ dans $\varphi \times_{S'} S''$ (cf. 5.4). Notons-le $\psi : X'' \rightarrow X' \times_{S'} S''$ et soit $u : \text{Aut}(X''_{\eta''}/X_{\eta''}) \rightarrow \text{Aut}(X'_{\eta''}/X_{\eta''})$ l'homomorphisme induit par $\psi_{\eta''}$. Alors, le morphisme équivariant ψ induit un morphisme u -équivariant de topos annelés de Faltings :

$$(8.11.5) \quad \Psi_n : (\tilde{E}''_s, \overline{\mathcal{B}}''_n) \rightarrow (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n),$$

où la source désigne le topos annelé de Faltings associé au S'' -schéma X'' , qui est muni d'une action de $\text{Aut}(X''_{\eta''}/X_{\eta''})$ (8.4). On en déduit, pour tout $g \in \text{Aut}(X''_{\eta''}/X_{\eta''})$, un diagramme commutatif

$$(8.11.6) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#} & \xrightarrow{(u(g)_n^*)_{\#}} & \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(M))_{\#} \\ (\Psi_n^*)_{\#} \downarrow & & \downarrow (\Psi_n^*)_{\#} \\ \Gamma(\tilde{E}''_s, \Psi_n^*(\Phi_n^*(M)))_{\#} & \xrightarrow{(g_n^*)_{\#}} & \Gamma(\tilde{E}''_s, \Psi_n^*(\Phi_n^*(M)))_{\#} \end{array}$$

La proposition s'ensuit compte tenu de (8.10.4).

8.12. Soit $f : M \rightarrow M'$ un morphisme de $\overline{\mathcal{B}}_n$ -modules potentiellement libres de type fini. D'après 5.11(i), il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) et un η' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ tels que, reprenant les notations de 8.3, $\Phi_n^*(M)$ et $\Phi_n^*(M')$ soient libres de type fini. L'automorphisme (8.10.4) est fonctoriel en M . Par 8.11, on peut associer à $f : M \rightarrow M'$ un morphisme de \mathfrak{o}_n -représentations de $\pi_1(C, \bar{x})$

$$(8.12.1) \quad \mathcal{W}_n(f) : \mathcal{W}_n(M) \rightarrow \mathcal{W}_n(M').$$

La correspondance $M \mapsto \mathcal{W}_n(M)$ définit ainsi un foncteur \mathfrak{o}_n -linéaire

$$(8.12.2) \quad \mathcal{W}_n : \mathbf{Mod}^{\text{pltf}}(\overline{\mathcal{B}}_n) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{apltf}}(\pi_1(C, \bar{x})).$$

Lemme 8.13. *Soit $M = (M_n)_{n \geq 1}$ un $\check{\mathcal{B}}$ -module potentiellement libre de type fini. Pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme canonique $M_{n+1} \rightarrow M_n$ induit un α -isomorphisme fonctoriel de \mathfrak{o}_n -représentations (3.22)*

$$(8.13.1) \quad \mathcal{W}_{n+1}(M_{n+1}) \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \rightarrow \mathcal{W}_n(M_n).$$

Preuve. Soit n un entier ≥ 1 . D'après 5.11(i), il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) et un η' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ trivialisant M_{n+1} . On a un isomorphisme de \mathfrak{o}_n -modules

$$(8.13.2) \quad \Gamma(s_{\text{ét}}, [\bar{x}]_{n+1}^*(M_{n+1})) \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \xrightarrow{\sim} \Gamma(s_{\text{ét}}, [\bar{x}]_n^*(M_n)).$$

En vertu de (3.1.2), celui-ci induit un α -isomorphisme canonique de \mathfrak{o}_n -modules

$$(8.13.3) \quad \mathcal{W}_{n+1}(M_{n+1}) \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \rightarrow \mathcal{W}_n(M_n).$$

D'après 8.11 et la functorialité de (8.10.4), ce dernier est $\pi_1(C, \bar{x})$ -équivariant. On vérifie aussitôt que (8.13.1) est fonctoriel en M (cf. 8.12).

8.14. En vertu de (3.23.1) et 8.13, les foncteurs \mathcal{W}_n induisent un foncteur \mathfrak{o} -linéaire

$$(8.14.1) \quad \mathcal{W} : \mathbf{Mod}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{optf}}(\pi_1(C, \bar{x})) \quad M = (M_n)_{n \geq 1} \mapsto \varprojlim \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathcal{W}_n(M_n).$$

On le note aussi \mathcal{W}_X pour signifier que la construction dépend de X . D'après 3.27, le foncteur \mathcal{W} s'étend en un foncteur \mathfrak{C} -linéaire :

$$(8.14.2) \quad \mathcal{W}_{\mathbb{Q}} : \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x})).$$

Proposition 8.15. *Soient (S', η') un trait fini sur (S, η) , $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ un η' -revêtement semi-stable et régulier. Reprenant les notations de 8.3 pour φ , l'image réciproque par $\check{\Phi}$ (8.3.15) d'un $\check{\mathcal{B}}$ -module potentiellement libre de type fini est un $\check{\mathcal{B}}'$ -module potentiellement libre de type fini. De plus, on a un diagramme commutatif*

$$(8.15.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{\mathcal{W}_X} & \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{optf}}(\pi_1(C, \bar{x})) \\ \check{\Phi}^* \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Mod}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}}') & \xrightarrow{\mathcal{W}_{X'}} & \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{optf}}(\pi_1(C', \bar{x}')) \end{array}$$

où $C' = X'_{\eta'}$, \bar{x}' est un η' -point de C' au-dessus de \bar{x} et la flèche verticale à droite est le foncteur induit par l'homomorphisme canonique $\pi_1(C', \bar{x}') \rightarrow \pi_1(C, \bar{x})$.

Preuve. Soient n un entier ≥ 1 et M_n un $\check{\mathcal{B}}_n$ -module potentiellement libre de type fini. D'après 5.11(i), quitte à remplacer S' par une extension finie, il existe un η' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $\psi : X'' \rightarrow X_{S'}$ dominant $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ tel que $\Psi_n^*(M_n)$ soit un $\check{\mathcal{B}}_n''$ -module libre de type fini, où $(\tilde{E}_s'', \check{\mathcal{B}}_n'')$ désigne le topos annelé de Faltings associé à la S' -courbe semi-stable X'' , Ψ_n le morphisme de topos annelés induit par ψ (8.3.12). Le $\check{\mathcal{B}}_n'$ -module $\Phi_n^*(M_n)$ est donc potentiellement libre de type fini. On en déduit la première proposition.

Notons $\phi : X'' \rightarrow X'$ le morphisme induit par ψ , $\mathcal{W}_{X,n}(M_n)$ et $\mathcal{W}_{X',n}(\Phi_n^*(M_n))$ les \mathfrak{o}_n -représentations associées à M_n et $\Phi_n^*(M_n)$, respectivement. On notera que ϕ est un η' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien de X' . D'après (8.10.1), on a un isomorphisme de \mathfrak{o}_n -modules

$$(8.15.2) \quad \mathcal{W}_{X,n}(M_n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{X',n}(\Phi_n^*(M_n)).$$

En vertu de (8.10.4) et 8.11, celui-ci est $\pi_1(C', \bar{x}')$ -équivariant. On vérifie aussitôt que l'isomorphisme (8.15.2) est fonctoriel en M_n (cf. 8.12). La commutativité du diagramme (8.15.1) s'ensuit.

Proposition 8.16. *Soient n un entier ≥ 1 et V un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{ltf}}(\pi_1(C, \bar{x}))$. Alors, on a un α -isomorphisme canonique et fonctoriel de \mathfrak{o}_n -représentations*

$$(8.16.1) \quad V \rightarrow \mathscr{W}_n(\beta_n^*(V))$$

où β_n^* est le foncteur (8.6.1) (cf. 8.7).

Preuve. Soit $\phi : C' \rightarrow C$ un revêtement étale, connexe et galoisien tel que l'action de $\pi_1(C, \bar{x})$ sur V se factorise à travers $\text{Aut}(C'/C)^{\text{op}}$. D'après 5.11(i), il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) et un η' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ de fibre géométrique générique $\varphi_{\bar{\eta}} = \phi : C' \rightarrow C$. Reprenons les notations de 8.3 et 8.4 pour $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$, tout $g \in \text{Aut}(C'/C)$ induit un diagramme commutatif de topos annelés (cf. (8.3.14))

$$(8.16.2) \quad \begin{array}{ccc} (\tilde{E}'_s, \tilde{\mathcal{B}}'_n) & \xrightarrow{\beta'_n} & (C'_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \\ g_n \downarrow & & \downarrow g \\ (\tilde{E}'_s, \tilde{\mathcal{B}}'_n) & \xrightarrow{\beta'_n} & (C'_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \end{array}$$

On note $\mathbb{L} = \mu_{\bar{x}}(V)$ le \mathfrak{o}_n -module localement libre de type fini de $C'_{\text{fét}}$ associé à V (3.29.2). Choisissons un $\bar{\eta}$ -point \bar{y} de C' au-dessus \bar{x} . On désigne par

$$(8.16.3) \quad \tau(V) : V \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}_n(\beta_n^*(\mathbb{L}))$$

le α -isomorphisme de \mathfrak{o}_n -modules défini par le composé

$$(8.16.4) \quad V \xrightarrow{\sim} \Gamma(C'_{\text{fét}}, \phi^*(\mathbb{L})) \rightarrow \Gamma(\tilde{E}'_s, \beta_n'^*(\phi^*(\mathbb{L}))) \rightarrow \Gamma(\tilde{E}'_s, \beta_n'^*(\phi^*(\mathbb{L})))_{\sharp} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(\beta_n^*(\mathbb{L})))_{\sharp} \xrightarrow{([\bar{y}]_n^*)_{\sharp}} \mathscr{W}_n(\beta_n^*(\mathbb{L}))$$

où la première flèche est un isomorphisme puisque $\phi^*(\mathbb{L})$ est constant et C' est connexe, la deuxième flèche est le α -isomorphisme induit par $\beta_n'^*$ (7.20.1), la troisième flèche est un α -isomorphisme en vertu de (3.1.2), la quatrième flèche provient de (8.3.14) et la dernière flèche est l'isomorphisme (8.2.4). D'après (8.16.2), pour tout $g \in \text{Aut}(C'/C)$, le morphisme (8.16.4) s'insère dans un diagramme commutatif :

$$(8.16.5) \quad \begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(C'_{\text{fét}}, \phi^*(\mathbb{L})) & \longrightarrow & \Gamma(\tilde{E}'_s, \beta_n'^*(\phi^*(\mathbb{L})))_{\sharp} & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(\beta_n^*(\mathbb{L})))_{\sharp} & \xrightarrow{([\bar{y}]_n^*)_{\sharp}} & \mathscr{W}_n(\beta_n^*(\mathbb{L})) \\ g \downarrow & & \downarrow g^* & & \downarrow (g_n^*)_{\sharp} & & \downarrow (g_n^*)_{\sharp} & & \\ V & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(C'_{\text{fét}}, \phi^*(\mathbb{L})) & \longrightarrow & \Gamma(\tilde{E}'_s, \beta_n'^*(\phi^*(\mathbb{L})))_{\sharp} & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(\beta_n^*(\mathbb{L})))_{\sharp} & \xrightarrow{([\bar{y}]_n^*)_{\sharp}} & \mathscr{W}_n(\beta_n^*(\mathbb{L})) \end{array}$$

Celui-ci implique que le α -isomorphisme $\tau(V)$ (8.16.3) est compatible aux actions de $\pi_1(C, \bar{x})$ en vertu de (8.10.4). Par suite, on obtient un α -isomorphisme de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\alpha\text{ptf}}(\pi_1(C, \bar{x}))$

$$(8.16.6) \quad \tau(V) : V \rightarrow \mathscr{W}_n(\beta_n^*(V)).$$

Soit $f : V' \rightarrow V$ un morphisme de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{ltf}}(\pi_1(C, \bar{x}))$. Choisissons un revêtement étale et galoisien $\phi : C' \rightarrow C$ trivialisant les représentations V et V' , un trait (S', η') fini sur (S, η) et un η' -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ de fibre générique géométrique $\phi : C' \rightarrow C$. Le diagramme commutatif (8.16.5) étant fonctoriel en V , on en déduit un diagramme commutatif

$$(8.16.7) \quad \begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{f} & V \\ \tau(V') \downarrow & & \downarrow \tau(V) \\ \mathscr{W}_n(\beta_n^*(V')) & \xrightarrow{(\mathscr{W}_n \circ \beta_n^*)(f)} & \mathscr{W}_n(\beta_n^*(V)) \end{array}$$

d'où la fonctorialité du α -isomorphisme (8.16.1).

Corollaire 8.17. (i) Soit V un objet de $\mathbf{Rep}_o^{\text{ltf}}(\pi_1(C, \bar{x}))$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(8.17.1) \quad \mathfrak{m} \otimes_o V \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}(\check{\beta}^*(V)).$$

(ii) Le foncteur composé $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}} \circ \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*$ (8.6.3) est isomorphe au foncteur identique.

Preuve. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $V_n = V/p^n V$. D'après 8.16, on a un α -isomorphisme canonique et fonctoriel $(V_n)_{n \geq 1} \rightarrow (\mathscr{W}_n(\beta_n^*(V_n)))_{n \geq 1}$ de $\mathbf{Rep}_\delta^{\alpha \text{ptf}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ (3.23). L'assertion (i) résulte alors de 3.24(i) et 3.25(ii). L'assertion (ii) résulte de (i) et de l'isomorphisme canonique $(\mathfrak{m} \otimes_o V)[\frac{1}{p}] \rightarrow V[\frac{1}{p}]$.

8.18. Posons $\check{X} = X \times_S \check{S}$ (2.1). Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\mathcal{O}_{\check{X}}$ -module \mathcal{F} , on considère $\mathcal{F}_n = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_n}$ comme un faisceau de $X_{s, \text{ét}}$. On pose $\check{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ que l'on considère aussi comme un faisceau de $X_{s, \text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}$. D'après ([4] III.7.18), on a un isomorphisme $\check{\sigma}^*(\check{\mathcal{F}}) \simeq (\sigma_n^*(\mathcal{F}_n))_{n \geq 1}$, où σ_n et $\check{\sigma}$ sont des morphismes de topos annelés (7.11.4) et (7.12.1).

Proposition 8.19. Soient n un entier ≥ 1 et \mathcal{F} un fibré vectoriel de Deninger-Werner (6.3) sur \check{X} . Alors, le $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module $\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)$ (resp. $\check{\mathcal{B}}$ -module $\check{\sigma}^*(\check{\mathcal{F}})$) est potentiellement libre de type fini.

Preuve. D'après 5.11(i), quitte à remplacer S par une extension finie, il existe un η -revêtement semi-stable $\varphi : X' \rightarrow X$ tel que $\overline{\varphi}_n$ trivialisent \mathcal{F}_n . Reprenons les notations de 8.3 pour φ . D'après (8.3.13), on a un isomorphisme

$$(8.19.1) \quad \Phi_n^*(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)) \simeq \sigma_n'^*(\overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)).$$

Le $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module $\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)$ est donc potentiellement libre de type fini. Comme $\check{\mathcal{F}}$ est adique, on en déduit que le $\check{\mathcal{B}}$ -module $\check{\sigma}^*(\check{\mathcal{F}})$ est potentiellement libre de type fini.

Proposition 8.20. Soient n un entier ≥ 1 et \mathcal{F} un fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{X} . On a un α -isomorphisme canonique et fonctoriel

$$(8.20.1) \quad \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) \rightarrow \mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n))$$

où \mathbb{V}_n est le foncteur de Deninger-Werner (6.9.2).

Preuve. D'après 5.11(i), quitte à remplacer S par une extension finie, il existe un η -revêtement semi-stable, régulier et galoisien $\varphi : X' \rightarrow X$ tel que $\overline{\varphi}_n$ trivialisent \mathcal{F}_n . Reprenant les notations de 8.1 et 8.3, on a un diagramme commutatif de topos annelés :

$$(8.20.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & [\bar{x}_n] & & \\ & & \curvearrowright & & \\ & & \text{---} & & \text{---} \\ (s_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n}) & \xrightarrow{[\bar{y}]_n} & (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) & \xrightarrow{\Phi_n} & (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \\ & \downarrow \wr & \downarrow \sigma'_n & & \downarrow \sigma_n \\ a_n (s_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n}) & \xrightarrow{y_n} & (X'_{s, \text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}'_n}) & \xrightarrow{\overline{\varphi}_n} & (X_{s, \text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}_n}) \\ & \downarrow \wr & \downarrow u'_n & & \downarrow u_n \\ (s_{\text{zar}}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n}) & \xrightarrow{y_n} & (X'_{s, \text{zar}}, \mathcal{O}_{\overline{X}'_n}) & \xrightarrow{\overline{\varphi}_n} & (X_{s, \text{zar}}, \mathcal{O}_{\overline{X}_n}) \\ & & \text{---} & & \text{---} \\ & & [\bar{x}_n] & & \end{array}$$

où u_n et u'_n sont les morphismes de topos annelés canoniques. Rappelons (6.6.1) et (8.9.1) que les \mathfrak{o}_n -modules sous-jacents aux représentations $\mathbb{V}_n(\mathcal{F})$ et $\mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n))$ sont définis par

$$(8.20.3) \quad \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) = \Gamma(s_{\text{zar}}, \overline{x}_n^*(\mathcal{F}_n)) \quad \text{et} \quad \mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)) = \Gamma(s_{\text{ét}}, [x_n]^*(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)))_{\#}.$$

Comme on a $[\bar{x}_n]^*(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)) \simeq a_n^*(\bar{x}_n^*(\mathcal{F}_n))$ (8.20.2), l'équivalence de topos annelés a_n et le foncteur $(-)_\sharp$ (3.1.1) induisent un α -isomorphisme de \mathfrak{o}_n -modules

$$(8.20.4) \quad a_n^* : \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) \rightarrow \mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)).$$

Posons $C' = X'_\eta$ et $G = \text{Aut}(C'/C)$. Reprenant les notations de 8.4, les carrés commutatifs de droite de (8.20.2) sont compatibles aux actions de G sur $(\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n)$, $(X'_{s,\text{ét}}, \mathcal{O}_{\tilde{X}'_n})$ et $(X'_{s,\text{zar}}, \mathcal{O}_{\tilde{X}'_n})$. On en déduit par le foncteur $(-)_\sharp$, pour tout $g \in G$, un diagramme commutatif :

$$(8.20.5) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) & \xrightarrow{(\bar{y}_n^*)^{-1}} & \Gamma(X'_{s,\text{zar}}, \overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)) & \xrightarrow{g_n^*} & \Gamma(X'_{s,\text{zar}}, \overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)) & \xrightarrow{\bar{y}_n^*} & \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) \\ a_n^* \downarrow & & \downarrow (u'_n \sigma'_n)^* & & \downarrow (u'_n \sigma'_n)^* & & \downarrow a_n^* \\ \mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)) & \xrightarrow{([\bar{y}_n^*]_\sharp)^{-1}} & \Gamma(\tilde{E}'_s, (\sigma'_n)^*(\varphi_n^*(\mathcal{F}_n)))_\sharp & \xrightarrow{(g_n^*)_\sharp} & \Gamma(\tilde{E}'_s, (\sigma'_n)^*(\varphi_n^*(\mathcal{F}_n)))_\sharp & \xrightarrow{([\bar{y}_n^*]_\sharp)_\sharp} & \mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)) \end{array}$$

Celui-ci implique que le α -isomorphisme (8.20.4) est compatible aux actions de $\pi_1(C, \bar{x})$ en vertu de (6.7.3) et (8.10.4). On en déduit un α -isomorphisme de \mathfrak{o}_n -représentations de $\pi_1(C, \bar{x})$

$$(8.20.6) \quad \tau(\mathcal{F}) : \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) \rightarrow \mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F})).$$

Soit $f : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de $\mathfrak{D}_X^{\text{DW}}$. D'après 5.11(i), quitte à remplacer S par une extension finie, il existe un η -revêtement semi-stable et régulier $\varphi : X' \rightarrow X$ tels que $\overline{\varphi}_n$ trivialisent \mathcal{F}_n et \mathcal{F}'_n . Le diagramme commutatif (8.20.5) est fonctoriel en \mathcal{F} . On en déduit par 6.8 et 8.11 un diagramme commutatif

$$(8.20.7) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{V}_n(\mathcal{F}') & \xrightarrow{\mathbb{V}_n(f)} & \mathbb{V}_n(\mathcal{F}) \\ \tau(\mathcal{F}') \downarrow & & \downarrow \tau(\mathcal{F}) \\ \mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F}')) & \xrightarrow{\mathscr{W}_n \circ \sigma_n^*(f)} & \mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F})) \end{array}$$

d'où la functorialité du α -isomorphisme (8.20.1).

Corollaire 8.21. *Soit \mathcal{F} un fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \tilde{X} . On a un isomorphisme canonique et fonctoriel de \mathfrak{o} -représentations continues de $\pi_1(C, \bar{x})$*

$$(8.21.1) \quad \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathbb{V}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}(\check{\sigma}^*(\check{\mathcal{F}}))$$

où \mathbb{V} est le foncteur de Deninger-Werner (6.10.1).

Preuve. D'après 8.20, on a un α -isomorphisme canonique et fonctoriel

$$(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}))_{n \geq 1} \rightarrow (\mathscr{W}_n(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)))_{n \geq 1}$$

de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{apft}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ (3.23). L'assertion résulte alors de 3.24(i) et 3.25(ii).

9. Un énoncé de descente pour les fibrés vectoriels de Deninger-Werner

9.1. Soient \mathcal{T} un topos et G un groupe fini. Une action de G sur \mathcal{T} est la donnée pour tout $g \in G$ d'un morphisme de topos $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ tels que $(\text{id})^* = \text{id}_{\mathcal{T}}$ et que pour tous $g, h \in G$, on ait un isomorphisme

$$(9.1.1) \quad c_{g,h} : g^* h^* \xrightarrow{\sim} (hg)^*,$$

vérifiant des relations de cocycle pour la composition ([15] VI 7.4). Supposons que \mathcal{T} soit muni d'une telle action de G . Un objet G -équivariant de \mathcal{T} est la donnée d'un faisceau \mathcal{F} de \mathcal{T} et pour tout $g \in G$ d'un isomorphisme

$$(9.1.2) \quad \tau_g^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} g^*(\mathcal{F}),$$

tels que $\tau_{\text{id}}^{\mathcal{F}} = \text{id}_{\mathcal{F}}$ et que pour tous $g, h \in G$, on ait

$$(9.1.3) \quad \tau_{gh}^{\mathcal{F}} = c_{h,g} \circ h^*(\tau_g^{\mathcal{F}}) \circ \tau_h^{\mathcal{F}}.$$

Une telle donnée est appelée *une action de G* (à droite) sur \mathcal{F} . Étant donnés deux objets G -équivariants \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , un morphisme $f : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ de \mathcal{T} est dit *G -équivariant*, si pour tout $g \in G$, le diagramme

$$(9.1.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}_2 \\ \tau_g^{\mathcal{F}_1} \downarrow & & \downarrow \tau_g^{\mathcal{F}_2} \\ g^*(\mathcal{F}_1) & \xrightarrow{g^*(f)} & g^*(\mathcal{F}_2) \end{array}$$

est commutatif. On désigne par \mathcal{T}_G la catégorie des objets G -équivariants de \mathcal{T} .

Soit A un anneau de \mathcal{T} muni d'une action de G compatible avec sa structure d'anneau, i.e. tel que les isomorphismes τ_g^A (9.1.2) soient des isomorphismes d'anneaux. Un *A -module G -équivariant* est la donnée d'un A -module M de \mathcal{T} et d'une action de G sur M compatible avec sa structure de A -module.

9.2. Dans la suite de cette section, on se donne une S -courbe semi-stable X et un revêtement étale et galoisien C' de $C = X_{\bar{\eta}}$. On pose $G = \text{Aut}(C'/C)$ et on note $\psi : C' \rightarrow C$ le morphisme canonique. D'après 5.10, le schéma \bar{X} est normal. On reprend les notations de § 7 pour X . On note E^\sharp le site défini par la catégorie $E_{/(C' \rightarrow X)}$ (7.1) munie de la topologie induite par le foncteur canonique

$$(9.2.1) \quad \gamma : E_{/(C' \rightarrow X)} \rightarrow E.$$

Le site E^\sharp est alors canoniquement équivalent au site de Faltings associé au morphisme canonique $C' \rightarrow X$ (cf. [4] VI.10.1 et VI.10.14). On désigne par \tilde{E}^\sharp le topos localisé de \tilde{E} en $\beta^*(C') = (C' \rightarrow X)^a$ qui est canoniquement équivalent au topos des faisceaux d'ensembles sur le site E^\sharp ([4] VI.10.14) et par

$$(9.2.2) \quad \Phi : \tilde{E}^\sharp \rightarrow \tilde{E}$$

le morphisme de localisation. En vertu de ([6] III 2.5), celui-ci s'identifie au morphisme de topos induit par functorialité du topos de Faltings ([4] VI.10.12). On désigne par \tilde{E}_s^\sharp le sous-topos fermé de \tilde{E}^\sharp complémentaire de l'ouvert $\Phi^*(\sigma^*(X_\eta))$ de \tilde{E}^\sharp et par

$$(9.2.3) \quad \delta^\sharp : \tilde{E}_s^\sharp \rightarrow \tilde{E}^\sharp$$

le prolongement canonique. En vertu de ([6] IV 9.4.3), il existe un morphisme de topos canonique

$$(9.2.4) \quad \Phi_s : \tilde{E}_s^\sharp \rightarrow \tilde{E}_s.$$

On pose $\overline{\mathcal{B}}^\sharp = \Phi^*(\overline{\mathcal{B}})$ (7.8) et, pour tout entier $n \geq 1$, $\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp = \overline{\mathcal{B}}^\sharp / p^n \overline{\mathcal{B}}^\sharp$ qui est isomorphe à l'anneau $\Phi^*(\overline{\mathcal{B}}_n)$. Comme $\overline{\mathcal{B}}_n$ est un objet de \tilde{E}_s (7.10), on en déduit que l'anneau $\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp$ appartient à \tilde{E}_s^\sharp . Le morphisme de topos (9.2.4) est donc sous-jacent à un morphisme de topos annelés qu'on note

$$(9.2.5) \quad \Phi_n : (\tilde{E}_s^\sharp, \overline{\mathcal{B}}_n^\sharp) \rightarrow (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n).$$

9.3. Par functorialité du topos de Faltings ([4] VI.10.12), l'action de G sur C' induit une action de G sur le topos \tilde{E}^\sharp (9.1). En particulier, tout $g \in G$ induit un morphisme $g : \tilde{E}^\sharp \rightarrow \tilde{E}^\sharp$ tel que

$$(9.3.1) \quad \Phi \xrightarrow{\sim} \Phi \circ g.$$

On en déduit que $g^*(\Phi^*(\sigma^*(X_\eta))) \simeq \Phi^*(\sigma^*(X_\eta))$. L'action de G sur \tilde{E}^\sharp induit alors une action de G sur \tilde{E}_s^\sharp . Pour tout $g \in G$, on a donc un morphisme $g_s : \tilde{E}_s^\sharp \rightarrow \tilde{E}_s^\sharp$ tel que

$$(9.3.2) \quad \Phi_s \xrightarrow{\sim} \Phi_s \circ g_s.$$

On désigne par \tilde{E}_G^\sharp la catégorie des objets G -équivariants de \tilde{E}^\sharp (9.1). D'après (9.3.1), l'image inverse de Φ induit un foncteur

$$(9.3.3) \quad \Phi^* : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}_G^\sharp.$$

En particulier, l'anneau $\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp$ est muni d'une action de G compatible avec sa structure d'anneau. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $g \in G$, le morphisme de topos g_s est sous-jacent à un morphisme de topos annelés

$$g_n : (\tilde{E}_s^\sharp, \overline{\mathcal{B}}_n^\sharp) \rightarrow (\tilde{E}_s^\sharp, \overline{\mathcal{B}}_n^\sharp)$$

tel qu'on ait un isomorphisme canonique

$$(9.3.4) \quad \Phi_n \xrightarrow{\sim} \Phi_n \circ g_n.$$

L'image inverse de Φ_n induit alors un foncteur

$$(9.3.5) \quad \Phi_n^* : \mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}}_n) \rightarrow \mathbf{Mod}_G(\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp),$$

où $\mathbf{Mod}_G(\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp)$ désigne la sous-catégorie pleine de \tilde{E}_G^\sharp formée des $\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp$ -modules G -équivalents de \tilde{E}_s^\sharp (9.1).

Proposition 9.4. *Le foncteur $\Phi^* : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}_G^\sharp$ (9.3.3) est une équivalence de catégories.*

Preuve. Considérons

$$(9.4.1) \quad \mathbf{F} \rightarrow E$$

le topos fibré associé au site E (cf. [25] II 3.4.1) : la catégorie fibre de \mathbf{F} au-dessus de $(V \rightarrow U) \in \mathbf{Ob}(E)$ est le topos localisé $\tilde{E}/_{(V \rightarrow U)^a}$ de \tilde{E} en $(V \rightarrow U)^a$, et pour tout morphisme $h : (V' \rightarrow U') \rightarrow (V \rightarrow U)$ de E le foncteur image inverse $h^* : \tilde{E}/_{(V \rightarrow U)^a} \rightarrow \tilde{E}/_{(V' \rightarrow U')^a}$ est le foncteur image inverse par le morphisme de localisation par rapport à h . On rappelle que \mathbf{F} est un champ au-dessus de E (cf. [25] II 3.4.4).

Le morphisme $\varpi = (\psi, \text{id}) : (C' \rightarrow X) \rightarrow (C \rightarrow X)$ forme un recouvrement de $(C \rightarrow X)$ dans E (cf. 7.1(v)) que l'on note (abusivement) encore ϖ . La catégorie $\tilde{E} = \mathbf{F}(C \rightarrow X)$ est donc équivalente à la catégorie $\mathbf{F}(\varpi)$ des données de descente relativement au recouvrement ϖ .

Comme le morphisme $\psi : C' \rightarrow C$ est un toreur sous G de $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{f/C}$, on a un isomorphisme dans E

$$(9.4.2) \quad (C' \rightarrow X) \times G \simeq (C' \rightarrow X) \times_{(C \rightarrow X)} (C' \rightarrow X).$$

On note encore G le faisceau constant de \tilde{E} de valeur G . Le morphisme $(C' \rightarrow X)^a \rightarrow (C \rightarrow X)^a$ est alors un toreur sous G de \tilde{E} ([25] III 1.4.1). Par descente galoisienne (cf. [8] 6.2.B), la catégorie des données de descente $\mathbf{F}(\varpi)$ relativement au recouvrement ϖ est équivalente à la catégorie \tilde{E}_G^\sharp , d'où la proposition.

Corollaire 9.5. *Le foncteur $\Phi_n^* : \mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}}_n) \rightarrow \mathbf{Mod}_G(\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp)$ (9.3.5) est une équivalence de catégories.*

9.6. Pour tout objet U de $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{/X}$, on pose $U_\eta^l = U \times_X C'$ et on note $\varphi_U : U_\eta^l \rightarrow U_\eta$ le morphisme canonique. Considérons le site fibré

$$(9.6.1) \quad \pi^\sharp = \pi \circ \gamma : E^\sharp \rightarrow \hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{/X},$$

dont la fibre au-dessus de U est le site $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{f/U_\eta^l}$ (9.9.1). Pour tout faisceau \mathcal{G} de \tilde{E}^\sharp , on note \mathcal{G}_U sa restriction à $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{f/U_\eta^l}$. Le topos \tilde{E}^\sharp est canoniquement équivalent au topos de Faltings associé au morphisme canonique $(C' \rightarrow X)$. La donnée d'un faisceau \mathcal{G} de \tilde{E}^\sharp est alors équivalente à la donnée pour tout objet U de $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{/X}$ d'un faisceau \mathcal{G}_U de $U_{\eta, \text{fét}}^l$ vérifiant des conditions de comptabilité et de recollement (cf. [4] (VI.5.11.1)). Comme φ_U est un toreur sous G pour la topologie étale de U_η , le topos $U_{\eta, \text{fét}}^l$ est muni d'une action de G (9.1) induite par functorialité. D'après ([4] VI.5.11), la donnée d'une action de G sur \mathcal{G} est équivalente à la donnée pour tout objet U de $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{/X}$ d'une action de G sur \mathcal{G}_U compatible aux morphismes de restriction.

9.7. Soit $\mathcal{F} = \{U \mapsto \mathcal{F}_U\}_{U \in \mathbf{Ob}(\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{/X})}$ un préfaisceau sur E tel que pour tout objet U de $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{/X}$, \mathcal{F}_U soit un faisceau de $U_{\eta, \text{fét}}$. Pour tout objet U de $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{/X}$, la flèche $\varphi_U : U_\eta^l \rightarrow U_\eta$ est un objet de $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{t}_{f/U_\eta}$. Le foncteur $\varphi_{U, \text{fét}}^*$ est donc un foncteur de restriction. On en déduit un isomorphisme canonique de préfaisceaux sur E^\sharp

$$(9.7.1) \quad \mathcal{F} \circ \gamma \xrightarrow{\sim} \{U \mapsto \varphi_{U, \text{fét}}^*(\mathcal{F}_U)\},$$

où γ est le foncteur (9.2.1). Le faisceau associé à $\mathcal{F} \circ \gamma$ est isomorphe à $\Phi^*(\mathcal{F}^a)$. Le faisceau $\varphi_{U, \text{fét}}^*(\mathcal{F}_U)$ de $U_{\eta, \text{fét}}^!$ est muni d'une action de G induite par $\varphi_{U, \text{fét}}^*$ fonctorielle en U . D'après 9.6, ils induisent une action de G sur $\Phi^*(\mathcal{F}^a)$ qui coïncide avec celle de $\Phi^*(\mathcal{F}^a)$ induite par Φ^* (9.3.3).

9.8. On désigne par \mathbf{P} la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\hat{E}t}/_X$ formée des schémas affines. On munit \mathbf{P} de la topologie induite par celle de $\mathbf{\hat{E}t}/_X$. Les objets de la sous-catégorie \mathbf{P} forment alors une famille topologiquement génératrice du site $\mathbf{\hat{E}t}/_X$. On désigne par

$$(9.8.1) \quad \pi_{\mathbf{P}}^{\sharp} : E_{\mathbf{P}}^{\sharp} \rightarrow \mathbf{P}$$

le site fibré déduit de π^{\sharp} (9.6.1) par changement de base par $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{\hat{E}t}/_X$. On munit $E_{\mathbf{P}}^{\sharp}$ de la topologie co-évanescence définie par $\pi_{\mathbf{P}}^{\sharp}$ et on note $\tilde{E}_{\mathbf{P}}^{\sharp}$ le topos des faisceaux d'ensembles sur $E_{\mathbf{P}}^{\sharp}$. D'après ([4] VI.5.21 et VI.5.22), la topologie de $E_{\mathbf{P}}^{\sharp}$ est induite par celle de E^{\sharp} au moyen du foncteur de projection canonique $E_{\mathbf{P}}^{\sharp} \rightarrow E^{\sharp}$, et celui-ci induit par restriction une équivalence de catégories

$$(9.8.2) \quad \tilde{E}^{\sharp} \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_{\mathbf{P}}^{\sharp}.$$

On désigne par $\hat{E}_{\mathbf{P}}^{\sharp}$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $E_{\mathbf{P}}^{\sharp}$. Comme $E_{\mathbf{P}}^{\sharp}$ est une sous-catégorie topologiquement génératrice de E^{\sharp} , le foncteur "faisceau associé" sur $E_{\mathbf{P}}^{\sharp}$ induit un foncteur que l'on note aussi

$$(9.8.3) \quad \hat{E}_{\mathbf{P}}^{\sharp} \rightarrow \tilde{E}^{\sharp}, \quad \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^a.$$

Soient $\mathcal{G} = \{W \mapsto \mathcal{G}_W\}$ ($W \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\hat{E}t}/_X)$) un préfaisceau sur E^{\sharp} , $\mathcal{G}_{\mathbf{P}} = \{U \mapsto \mathcal{G}_U\}$ ($U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{P})$) l'objet de $\hat{E}_{\mathbf{P}}^{\sharp}$ obtenu en restreignant \mathcal{G} à $E_{\mathbf{P}}^{\sharp}$. On en déduit un isomorphisme canonique de \tilde{E}^{\sharp}

$$(9.8.4) \quad \mathcal{G}_{\mathbf{P}}^a \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^a.$$

9.9. Dans la suite de cette section, on suppose, de plus, qu'il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) et un η' -revêtement fini, galoisien et à fibres géométriquement réduites $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ (5.4) tels que, en fixant un η -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow \eta'$, $X'_{\bar{\eta}} \simeq C'$ et que $\varphi_{\bar{\eta}} : X'_{\bar{\eta}} \rightarrow X_{\bar{\eta}}$ s'identifie au morphisme ψ . On pose $\bar{X}' = X' \times_{S'} \bar{S}$ et on note

$$(9.9.1) \quad \bar{h} : \bar{X} \rightarrow X \quad \text{et} \quad \bar{\varphi} : \bar{X}' \rightarrow \bar{X}$$

les morphismes canoniques.

Pour tout $(V \rightarrow U) \in \mathbf{Ob}(E^{\sharp})$, on pose $U' = U \times_X X'$, $\bar{U}' = U' \times_{X'} \bar{X}'$ et \bar{U}^V (resp. \bar{U}'^V) la clôture intégrale de \bar{U} (resp. \bar{U}') dans V . Comme \bar{U}' est fini sur \bar{U} , on a un isomorphisme canonique $\bar{U}'^V \xrightarrow{\sim} \bar{U}^V$. Comme Φ^* est le foncteur de restriction, on a $\Phi^*(\bar{\mathcal{B}})(V \rightarrow U) \simeq \bar{\mathcal{B}}(V \rightarrow U)$. On en déduit par (7.8.1) un isomorphisme fonctoriel en $(V \rightarrow U)$

$$(9.9.2) \quad \bar{\mathcal{B}}^{\sharp}(V \rightarrow U) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\bar{U}'^V, \mathcal{O}_{\bar{U}'^V}).$$

Pour tout $U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\hat{E}t}/_X)$, on pose $\bar{\mathcal{B}}_U^{\sharp} = \varphi_{U, \text{fét}}^*(\bar{\mathcal{B}}_U)$ (7.8.2) et $\bar{\mathcal{B}}_{U,n}^{\sharp} = \bar{\mathcal{B}}_U^{\sharp}/p^n \bar{\mathcal{B}}_U^{\sharp}$ qui est isomorphe à $\varphi_{U, \text{fét}}^*(\bar{\mathcal{B}}_{U,n})$ (7.8.4). En vertu de (9.9.2), on a un homomorphisme d'anneaux de $U_{\eta, \text{fét}}^!$

$$(9.9.3) \quad \mathcal{O}_{\bar{X}', (\bar{U}')} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}_U^{\sharp},$$

où la source désigne le faisceau constant de valeur $\mathcal{O}_{\bar{X}', (\bar{U}')}$. Comme l'action de G sur C' s'étend en une action de G sur \bar{X}' , l'anneau $\mathcal{O}_{\bar{X}', (\bar{U}')}$ est muni d'une action de G telle que l'homomorphisme (9.9.3) soit G -équivariant. D'après 7.8 et (9.7.1), l'anneau $\bar{\mathcal{B}}_n^{\sharp}$ est isomorphe au faisceau sur E^{\sharp} associé au préfaisceau

$$(9.9.4) \quad \{U \rightarrow \bar{\mathcal{B}}_{U,n}^{\sharp}\} \quad U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\hat{E}t}/_X).$$

9.10. Comme \tilde{E}^\sharp est isomorphe au topos de Faltings associé au morphisme canonique $C' \rightarrow X$, on a un morphisme canonique ([4] (VI.10.6.3))

$$(9.10.1) \quad \beta^\sharp : \tilde{E}^\sharp \rightarrow C'_{\text{fét}}$$

qui rend commutatif le diagramme (cf. [4] (VI.10.12.6))

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}^\sharp & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{E} \\ \beta^\sharp \downarrow & & \downarrow \beta \\ C'_{\text{fét}} & \xrightarrow{\varphi_{\bar{\eta}}} & C_{\text{fét}}. \end{array}$$

Soit n un entier ≥ 1 . On désigne par $\beta_n^\sharp : (\tilde{E}_s^\sharp, \overline{\mathcal{B}}_n^\sharp) \rightarrow (C'_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n)$ le morphisme de topos annelés défini par le composé $\beta^\sharp \circ \delta^\sharp$ (9.2.3) et le morphisme canonique $\mathfrak{o}_n \rightarrow \beta_n^\sharp(\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp)$. Par des arguments similaires à ceux de 8.3, on en déduit un diagramme commutatif

$$(9.10.2) \quad \begin{array}{ccc} (\tilde{E}_s^\sharp, \overline{\mathcal{B}}_n^\sharp) & \xrightarrow{\Phi_n} & (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \\ \beta_n^\sharp \downarrow & & \downarrow \beta_n \\ (C'_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) & \xrightarrow{\varphi_{\bar{\eta}}} & (C_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n), \end{array}$$

à isomorphisme près, qui commute aux actions de G sur $(\tilde{E}_s^\sharp, \overline{\mathcal{B}}_n^\sharp)$ et $(C'_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n)$.

Théorème 9.11. *Soient X une S -courbe semi-stable, \bar{x} un point géométrique de $X_{\bar{\eta}}$ et \mathcal{F} un fibré vectoriel sur $\tilde{X} = X \times_S \tilde{S}$ (2.1). Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$, un trait (S', η') fini sur (S, η) et un η' -revêtement fini, galoisien et à fibres géométriquement réduites $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$, tels que, fixant un η -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow \eta'$ et reprenant les notations de (9.9.1), $\overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ soit libre de type fini. Alors, on a un isomorphisme \mathcal{B}_n -linéaire*

$$(9.11.1) \quad \gamma_n : \sigma_n^*(\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\sim} \beta_n^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{F})),$$

où $\mathbb{V}_n(\mathcal{F})$ est la \mathfrak{o}_n -représentation de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ associée à \mathcal{F} (6.7), σ_n est le morphisme de topos annelés (7.11.4) et β_n^* est le foncteur (8.6.1).

Preuve. Pour tout objet U de $\mathbf{\acute{E}t}/X$, on pose $U' = U \times_X X'$, $U'_s = U' \times_{S'} s$ et $U'_{\bar{\eta}} = U' \times_{S'} \bar{\eta}$. D'après (9.7.1) et ([4] VI.5.34(ii) et VI.8.9), le $\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp$ -module $\Phi_n^*(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n))$ est isomorphe au faisceau associé au préfaisceau :

$$(9.11.2) \quad \{U \rightarrow \mathcal{F}_n(U_s) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}_n}}(U_s) \overline{\mathcal{B}}_{U,n}^\sharp\} \quad U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}/X).$$

où $\mathcal{F}_n(U_s)$ et $\mathcal{O}_{\bar{X}_n}(U_s)$ sont considérés comme des faisceaux constants de $U'_{\bar{\eta}, \text{fét}}$. D'après (9.9.3), l'anneau $\overline{\mathcal{B}}_{U,n}^\sharp$ de $U'_{\bar{\eta}, \text{fét}}$ est une $\mathcal{O}_{\bar{X}'_n}(U'_s)$ -algèbre. Pour tout objet U de \mathbf{P} (9.8), on en déduit un isomorphisme G -équivariant de faisceaux de $U'_{\bar{\eta}, \text{fét}}$

$$(9.11.3) \quad \mathcal{F}_n(U_s) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}_n}}(U_s) \overline{\mathcal{B}}_{U,n}^\sharp \xrightarrow{\sim} \overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(U'_s) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}'_n}}(U'_s) \overline{\mathcal{B}}_{U,n}^\sharp,$$

où les actions de G sur $\mathcal{F}_n(U_s)$ et $\mathcal{O}_{\bar{X}_n}(U_s)$ sont triviales et $\overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(U'_s)$ et $\mathcal{O}_{\bar{X}'_n}(U'_s)$ sont considérés comme des faisceaux constants de $U'_{\bar{\eta}, \text{fét}}$ munis des actions de G induites par $\overline{\varphi}_n^*$. On note M_U le but de (9.11.3).

On pose $\mathbb{L}_n(\mathcal{F}) = \mu_{\bar{x}}(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}))$ le \mathfrak{o}_n -module localement libre de type fini de $C_{\text{fét}}$ associé à $\mathbb{V}_n(\mathcal{F})$ (3.29.2). D'après ([4] VI.8.9 et IV.10.9), le $\overline{\mathcal{B}}_n^\sharp$ -module $\Phi_n^*(\beta_n^*(\mathbb{L}_n(\mathcal{F}))) \simeq (\beta_n^\sharp)^*(\varphi_{\bar{\eta}}^*(\mathbb{L}_n(\mathcal{F})))$ est isomorphe au faisceau associé au préfaisceau

$$(9.11.4) \quad \{U \rightarrow h_{U, \text{fét}}^*(\varphi_{\bar{\eta}, \text{fét}}^*(\mathbb{L}_n(\mathcal{F}))) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \overline{\mathcal{B}}_{U,n}^\sharp\} \quad U \in \mathbf{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}/X),$$

où $h'_U : U'_\eta \rightarrow C'$ est le morphisme canonique. On pose $N_U = h'^*_{U,\text{fét}}(\varphi^*_{\eta,\text{fét}}(\mathbb{L}_n(\mathcal{F}))) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \overline{\mathcal{B}}^\sharp_{U,n}$ qui est muni d'une action de G fonctorielle en U (cf. 9.7).

Comme $\overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ est un $\mathcal{O}_{\overline{X}'_n}$ -module libre de type fini, d'après (6.7.3) et 6.8, on a un isomorphisme G -équivalent de \mathfrak{o}_n -modules de $C'_{\text{fét}}$

$$(9.11.5) \quad \overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(X'_s) \simeq \varphi^*_{\eta,\text{fét}}(\mathbb{L}_n(\mathcal{F})),$$

où $\overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(X'_s)$ est considéré comme le faisceau constant de $C'_{\text{fét}}$ muni de l'action de G induite par $\overline{\varphi}_n^*$. On a un isomorphisme G -équivalent et fonctoriel en U de $\mathcal{O}_{\overline{X}'_n}(U'_s)$ -modules

$$(9.11.6) \quad \overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(U'_s) \xrightarrow{\sim} \overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(X'_s) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \mathcal{O}_{\overline{X}'_n}(U'_s).$$

On en déduit par (9.11.5) un isomorphisme G -équivalent et fonctoriel en U de $\mathcal{O}_{\overline{X}'_n}(U'_s)$ -modules de $U'_{\eta,\text{fét}}$

$$(9.11.7) \quad \overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(U'_s) \simeq h'^*_{U,\text{fét}}(\varphi^*_{\eta,\text{fét}}(\mathbb{L}_n(\mathcal{F}))) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \mathcal{O}_{\overline{X}'_n}(U'_s).$$

En vertu de (9.11.3) et (9.11.4), on en déduit, pour tout objet U de \mathbf{P} , un isomorphisme G -équivalent et fonctoriel en U de $\overline{\mathcal{B}}^\sharp_{U,n}$ -modules de $U'_{\eta,\text{fét}}$

$$(9.11.8) \quad M_U \xrightarrow{\sim} N_U.$$

D'après 9.7 et 9.8, on en déduit un isomorphisme G -équivalent de $\overline{\mathcal{B}}^\sharp_n$ -modules

$$(9.11.9) \quad \Phi_n^*(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{\sim} \Phi_n^*(\beta_n^*(\mathbb{L}_n(\mathcal{F}))).$$

Le théorème résulte alors de 9.5.

Remarque 9.12. Pour tout entier $1 \leq m \leq n$, on a un isomorphisme $\overline{\mathcal{B}}_m$ -linéaire $\gamma_m : \sigma_m^*(\mathcal{F}_m) \xrightarrow{\sim} \beta_m^*(\mathbb{V}_m(\mathcal{F}))$. En vertu de la preuve, les isomorphismes γ_n et γ_m sont compatibles.

10. Fibrés vectoriels et représentations de Weil-Tate

10.1. Soient X une S -courbe semi-stable, \overline{x} un point géométrique de X_η . On reprend les notations de § 7 pour X . Rappelons qu'on a des morphismes de topos annelés (cf. 7.12 et 7.13)

$$(10.1.1) \quad (X_{s,\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}_n}) \xleftarrow{\sigma_n} (\widetilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \xrightarrow{\beta_n} (X_{\eta,\text{fét}}, \mathfrak{o}_n), \quad \forall n \geq 1$$

$$(10.1.2) \quad (X_{s,\text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^{\text{N}^\circ}) \xleftarrow{\check{\sigma}} (\widetilde{E}_s^{\text{N}^\circ}, \check{\mathcal{B}}) \xrightarrow{\check{\beta}} (X_{\eta,\text{fét}}, \check{\mathfrak{o}}).$$

On reprend les notations de 8.6 pour les foncteurs β_n^* , $\check{\beta}^*$ et $\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*$.

On désigne par \mathfrak{X} le schéma formel complété p -adique de \overline{X} . Rappelons que \mathfrak{X} est de présentation finie sur $\mathcal{S} = \text{Spf}(\mathfrak{o})$ et qu'on a un morphisme de topos annelés (7.12.4)

$$(10.1.3) \quad \mathbb{T} : (\widetilde{E}_s^{\text{N}^\circ}, \check{\mathcal{B}}) \rightarrow (X_{s,\text{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}).$$

Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent \mathcal{F} de $X_{s,\text{zar}}$ et tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}/p^n \mathcal{F}$ que l'on considère comme faisceau de $X_{s,\text{zar}}$ ou de $X_{s,\text{ét}}$. D'après ([4] (III.11.1.12)), on a un isomorphisme canonique

$$(10.1.4) \quad \check{\sigma}^*((\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}) \simeq \mathbb{T}^*(\mathcal{F}).$$

Le foncteur \mathbb{T}_* induit un foncteur additif et exact à gauche que l'on note encore

$$(10.1.5) \quad \mathbb{T}_* : \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]).$$

D'après (4.1.3), le foncteur \mathbb{T}^* induit un foncteur additif que l'on note encore (7.15)

$$(10.1.6) \quad \mathbb{T}^* : \mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}}).$$

Définition 10.2. (i) Soient n un entier ≥ 1 , \mathcal{F}_n un fibré vectoriel sur \overline{X}_n et \mathcal{V}_n une \mathfrak{o}_n -représentation de $\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x})$ (3.18). On dit que \mathcal{F}_n et \mathcal{V}_n sont $\overline{\mathcal{B}}_n$ -associés s'il existe un isomorphisme $\overline{\mathcal{B}}_n$ -linéaire

$$(10.2.1) \quad \sigma_n^*(\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\sim} \beta_n^*(\mathcal{V}_n).$$

(ii) Soient \mathcal{F} un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module localement projectif de type fini (2.9) et V une \mathfrak{C} -représentation continue de $\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x})$ (3.18). On dit que \mathcal{F} et V sont $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associés s'il existe un isomorphisme $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire

$$(10.2.2) \quad \mathbb{T}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V).$$

Définition 10.3. (i) On dit qu'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module localement projectif de type fini \mathcal{F} est *de Weil-Tate* s'il est $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associé à une \mathfrak{C} -représentation continue de $\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x})$.

(ii) On dit qu'une \mathfrak{C} -représentation continue V de $\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x})$ est *de Weil-Tate relativement à X* si elle est $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associée à un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module localement projectif de type fini.

On désigne par $\mathbf{Mod}^{\text{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ formée des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -modules de Weil-Tate et par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}/X}(\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x}))$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x}))$ formée des \mathfrak{C} -représentations de Weil-Tate relativement à X .

Remarque 10.4. On dit qu'un fibré vectoriel \mathcal{F} sur $\check{X} = X \times_S \check{S}$ (2.1) est *de Weil-Tate* si le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module $\widehat{\mathcal{F}}[\frac{1}{p}]$ est de Weil-Tate. D'après (10.1.4), il revient au même de dire qu'il existe une \mathfrak{C} -représentation continue V de $\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x})$ et un isomorphisme $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire

$$(10.4.1) \quad (\check{\sigma}^*((\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V).$$

Proposition 10.5. Soient X une S -courbe semi-stable, \overline{x} un point géométrique de $X_{\overline{\eta}}$, n un entier ≥ 1 et \mathcal{F} un fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{X} (6.3). Alors, il existe un trait S' fini sur S , un S' -modèle semi-stable et régulier X' de $X_{\overline{\eta}}$ (10.15) et un η' -revêtement $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ tels que $\overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{V}_{\check{X}, n}(\mathcal{F})$ soient $\overline{\mathcal{B}}'_n$ -associés, où $(\check{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n)$ désigne le topos annelé de Faltings associé au schéma X' au-dessus de S' et $\mathbb{V}_{\check{X}, n}(\mathcal{F})$ est la \mathfrak{o}_n -représentation de $\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x})$ associée à \mathcal{F} par (6.9.2).

Preuve. Quitte à remplacer S par une extension finie, d'après 5.11(iii), il existe un S -modèle semi-stable X' de $X_{\overline{\eta}}$ et un η -revêtement $\varphi : X' \rightarrow X$ tels que $\overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ soit trivialisé par un η -revêtement semi-stable, fini et galoisien $Y' \rightarrow X'$. D'après 9.11, $\overline{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{V}_{\check{X}', n}(\overline{\varphi}^*(\mathcal{F}))$ sont $\overline{\mathcal{B}}'_n$ -associés. D'après (5.8), (8.3.13) et (8.3.14), on peut supposer que X est régulier. La proposition s'ensuit alors compte tenu de 6.10(ii).

Proposition 10.6. Soient X une S -courbe propre et lisse, \overline{x} un point géométrique de $X_{\overline{\eta}}$, \mathcal{L} un fibré en droites de classe appartenant à $\text{Pic}_{\check{X}/\check{S}}^0(\check{S})$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a associé à \mathcal{L} une \mathfrak{o}_n -représentation $\mathbb{V}_n(\mathcal{L})$ de $\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x})$ (6.7) et une \mathfrak{o} -représentation continue $\mathbb{V}(\mathcal{L})$ de $\pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{x})$ (6.10.1). Alors, \mathcal{L}_n et $\mathbb{V}_n(\mathcal{L})$ sont $\overline{\mathcal{B}}_n$ -associés ; et $\widehat{\mathcal{L}}[\frac{1}{p}]$ et $\mathbb{V}(\mathcal{L})[\frac{1}{p}]$ (3.21) sont $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associés.

Preuve. Soit n un entier ≥ 1 . D'après 6.5 et 9.11, on a un isomorphisme

$$(10.6.1) \quad \gamma_n : \sigma_n^*(\mathcal{L}_n) \xrightarrow{\sim} \beta_n^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{L})),$$

d'où le premier énoncé. En vertu de 9.12, les isomorphismes $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ (10.6.1) sont compatibles. La proposition s'ensuit compte tenu (10.1.4).

Proposition 10.7. Soient X une S -courbe semi-stable et régulière et \overline{x} un point géométrique de $X_{\overline{\eta}}$.

(i) La restriction du foncteur \mathbb{T}^* (10.1.6) à $\mathbf{Mod}^{\text{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ se factorise à travers la sous-catégorie pleine $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{pltf}}(\check{\mathcal{B}})$ (8.5) de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}})$.

(ii) Pour tout objet \mathcal{F} de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$, on a un isomorphisme $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire, canonique et fonctoriel

$$(10.7.1) \quad \mathrm{T}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{T}^*(\mathcal{F}))),$$

où $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}} : \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{pltf}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{cont}}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}))$ est le foncteur (8.14.2).

Preuve. Soit \mathcal{F} un objet de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$. Choisissons un objet V de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{cont}}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}))$ et un isomorphisme $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire

$$(10.7.2) \quad \tau : \mathrm{T}^*(\mathcal{F}) \simeq \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V).$$

L'assertion (i) résulte alors de 8.7. D'après 8.17(ii), on a un isomorphisme $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire canonique et fonctoriel

$$(10.7.3) \quad \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) \xrightarrow{\sim} \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))).$$

On en déduit compte tenu de (10.7.2) et (10.7.3) un isomorphisme $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire

$$\mathrm{T}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{T}^*(\mathcal{F}))).$$

Montrons que cet isomorphisme ne dépend pas des choix de V et de l'isomorphisme τ et qu'il est fonctoriel en \mathcal{F} . Il suffit de démontrer que, pour tous objets V et V' de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{cont}}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}))$ et tout morphisme $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire $\theta : \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) \rightarrow \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V')$, le diagramme

$$(10.7.4) \quad \begin{array}{ccc} \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) & \xrightarrow{\sim} & \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}(\theta)) \\ \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V') & \xrightarrow{\sim} & \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V'))) \end{array}$$

est commutatif. D'après la pleine fidélité du foncteur $\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*$ (8.8), θ est l'image d'un morphisme $\vartheta : V \rightarrow V'$ de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{cont}}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}))$ par $\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*$. La commutativité de (10.7.4) résulte alors de la functorialité de (10.7.3).

Corollaire 10.8. *Sous les hypothèses de 10.7, pour tout objet \mathcal{F} de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$, la \mathfrak{C} -représentation continue $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{T}^*(\mathcal{F}))$ est de Weil-Tate relativement à X . On désigne par $\mathcal{V}_{\mathfrak{X}}$ le foncteur*

$$(10.8.1) \quad \mathcal{V}_{\mathfrak{X}} : \mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{WT}/X}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})), \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{W}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{T}^*(\mathcal{F})).$$

Alors, $\mathcal{V}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F})$ et \mathcal{F} sont $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associés.

Proposition 10.9. *Soient X une S -courbe semi-stable et régulière. On note $\mathbf{LP}^{\mathrm{tf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ formée des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -modules localement projectifs de type fini.*

(i) *Pour tout objet \mathcal{F} de $\mathbf{LP}^{\mathrm{tf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$, le morphisme d'adjonction (cf. [4] III.12.1)*

$$(10.9.1) \quad \mathcal{F} \rightarrow \mathrm{T}_*(\mathrm{T}^*(\mathcal{F}))$$

est un isomorphisme.

(ii) *La restriction du foncteur T^* (10.1.6) à $\mathbf{LP}^{\mathrm{tf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ est pleinement fidèle.*

Preuve. (i) D'après ([4] III.12.4(ii)), on a un isomorphisme déduit du morphisme d'adjonction

$$(10.9.2) \quad \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathrm{T}_*(\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_*(\mathrm{T}^*(\mathcal{F})).$$

L'isomorphisme (10.9.1) résulte alors de l'isomorphisme ([4] III.11.8)

$$(10.9.3) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_*(\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}).$$

(ii) Soient \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 deux $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules cohérents de $X_{s,\text{zar}}$ tels que $\mathcal{G}_1[\frac{1}{p}]$ et $\mathcal{G}_2[\frac{1}{p}]$ soient localement projectifs de type fini. Notons $\mathcal{G} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. Alors, $\mathcal{G}[\frac{1}{p}]$ est aussi localement projectif de type fini (2.9). Comme \mathcal{G}_1 est de présentation finie, on a un isomorphisme canonique

$$(10.9.4) \quad \mathrm{T}^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\overline{\mathcal{B}}}(\mathrm{T}^*(\mathcal{G}_1), \mathrm{T}^*(\mathcal{G}_2)).$$

Considérons le morphisme composé

$$(10.9.5) \quad f : \Gamma(X_{s,\text{zar}}, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(X_{s,\text{zar}}, \mathrm{T}_*(\mathrm{T}^*(\mathcal{G}))) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\widetilde{E}_s^{\mathrm{N}^\circ}, \mathrm{T}^*(\mathcal{G})).$$

D'après (i) et 5.16(i), le morphisme $f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme. On en déduit la pleine fidélité de T^* .

Proposition 10.10. *Soient X une S -courbe semi-stable et régulière et \bar{x} un point géométrique de $X_{\bar{\eta}}$. Pour toute \mathfrak{C} -représentation V de Weil-Tate relativement à X , le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module $\mathrm{T}_*(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))$ est de Weil-Tate. De plus, on a un isomorphisme $\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire, canonique et fonctoriel*

$$(10.10.1) \quad \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*(\mathrm{T}_*(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))).$$

Preuve. Soit V une \mathfrak{C} -représentation de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ de Weil-Tate relativement à X . Choisissons un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module de Weil-Tate \mathcal{F} et un isomorphisme $\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire

$$(10.10.2) \quad \tau : \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) \simeq \mathrm{T}^*(\mathcal{F}).$$

D'après (10.9.1), $\mathrm{T}_*(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))$ est de Weil-Tate.

En vertu de (10.9.1), on a un isomorphisme $\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire, canonique et fonctoriel en \mathcal{F}

$$(10.10.3) \quad \mathrm{T}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*(\mathrm{T}_*(\mathrm{T}^*(\mathcal{F}))).$$

On en déduit compte tenu de (10.10.2) et (10.10.3) un isomorphisme $\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire

$$\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^*(\mathrm{T}_*(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))).$$

Montrons que cet isomorphisme ne dépend pas des choix de \mathcal{F} et de l'isomorphisme τ et qu'il est fonctoriel en V . Il suffit de montrer que, pour tous $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -modules localement projectifs de type fini \mathcal{F} , \mathcal{F}' et tout morphisme $\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire $\theta : \mathrm{T}^*(\mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{T}^*(\mathcal{F}')$, le diagramme

$$(10.10.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{T}^*(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{T}^*(\mathrm{T}_*(\mathrm{T}^*(\mathcal{F}))) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \mathrm{T}^*(\mathrm{T}_*(\theta)) \\ \mathrm{T}^*(\mathcal{F}') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{T}^*(\mathrm{T}_*(\mathrm{T}^*(\mathcal{F}')))) \end{array}$$

est commutatif. D'après la pleine fidélité du foncteur T^* 10.9(ii), θ est l'image d'un morphisme $\vartheta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ de $\mathbf{LP}^{\mathrm{tf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ par T^* . La commutativité de (10.10.4) résulte alors de la fonctorialité de (10.10.3) en \mathcal{F} .

Corollaire 10.11. *Sous les hypothèses de 10.10. Pour toute \mathfrak{C} -représentation V de Weil-Tate relativement à X , le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module $\mathrm{T}_*(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))$ est de Weil-Tate. On désigne par $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ le foncteur*

$$(10.11.1) \quad \mathcal{T}_{\mathfrak{X}} : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{WT}/X}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})) \rightarrow \mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]), \quad V \mapsto \mathrm{T}_*(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V)).$$

Alors, V et $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(V)$ sont $\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -associés.

Proposition 10.12. *Soient X une S -courbe semi-stable et régulière et \bar{x} un point géométrique de $X_{\bar{\eta}}$. Les foncteurs $\mathcal{V}_{\mathfrak{X}}$ (10.8.1) et $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ (10.11.1) sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.*

Preuve. D'après 10.7(ii), pour tout objet \mathcal{F} de $\mathbf{Mod}^{\text{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$, on a un isomorphisme $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire, canonique et fonctoriel

$$(10.12.1) \quad \mathbf{T}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(\mathcal{V}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F})).$$

Composant l'isomorphisme canonique (10.9.1) et l'image de (10.12.1) par \mathbf{T}_* , on en déduit un isomorphisme fonctoriel

$$(10.12.2) \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{V}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F})).$$

D'autre part, d'après (10.10.1), pour tout objet V de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}/X}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}))$, on a un isomorphisme $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire, canonique et fonctoriel

$$(10.12.3) \quad \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^*(\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}(V)).$$

Composant l'isomorphisme canonique $V \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{\mathbb{Q}}(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))$ (8.17(ii)) et l'image de (10.12.3) par $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}$, on en déduit un isomorphisme fonctoriel

$$(10.12.4) \quad V \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}(V)).$$

10.13. Soient X une S -courbe semi-stable et régulière, (S', η') un trait fini sur (S, η) et $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ un η' -revêtement semi-stable et régulier. Soient \bar{x} un $\bar{\eta}$ -point de $X_{\bar{\eta}}$ et \bar{x}' un $\bar{\eta}$ -point de $X'_{\bar{\eta}}$ au-dessus de \bar{x} . On fixe un η -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow \eta'$ et par suite un S -morphisme $\bar{S} \rightarrow S'$. On désigne par \mathfrak{X}' le schéma formel complété p -adique de $X \times_{S'} \bar{S}$ et par $\mathfrak{g} : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ le morphisme de schémas formels induit par la projection canonique $X' \rightarrow X_{S'}$. Reprenant les notations de 8.3 pour φ , on désigne par

$$(10.13.1) \quad \mathbf{T}' : (\tilde{E}_s^{\text{N}^\circ}, \check{\mathcal{B}}') \rightarrow (X'_{s, \text{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}).$$

le morphisme (10.1.3) relatif à X' . On a alors un diagramme commutatif à isomorphismes près (cf. (8.3.14) et [4] III.(9.11.15)).

$$(10.13.2) \quad \begin{array}{ccccc} (X'_{s, \text{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) & \xleftarrow{\mathbf{T}'} & (\tilde{E}_s^{\text{N}^\circ}, \check{\mathcal{B}}') & \xrightarrow{\check{\beta}'} & (X'_{\bar{\eta}, \text{fét}}, \check{\mathfrak{d}}) \\ \mathfrak{g} \downarrow & & \downarrow \check{\Phi} & & \downarrow \varphi_{\bar{\eta}} \\ (X_{s, \text{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) & \xleftarrow{\mathbf{T}} & (\tilde{E}_s^{\text{N}^\circ}, \check{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{\check{\beta}} & (X_{\bar{\eta}, \text{fét}}, \check{\mathfrak{d}}) \end{array}$$

L'homomorphisme canonique $\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{x}') \rightarrow \pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ induit un foncteur

$$(10.13.3) \quad \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{x}')).$$

Proposition 10.14. *Conservons les notations de 10.13. Alors :*

- (i) *L'image inverse d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module de Weil-Tate par \mathfrak{g} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}]$ -module de Weil-Tate.*
- (ii) *Toute \mathfrak{C} -représentation continue de Weil-Tate relativement à X de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ définit par restriction (10.13.3) une \mathfrak{C} -représentation continue de Weil-Tate relativement à X' de $\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{x}')$.*
- (iii) *On a des diagrammes commutatifs à isomorphismes près*

$$(10.14.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}^{\text{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]) & \xrightarrow{\gamma_{\mathfrak{X}}} & \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}/X}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})) \\ \mathfrak{g}^* \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Mod}^{\text{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}]) & \xrightarrow{\gamma_{\mathfrak{X}'}} & \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}/X'}(\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{x}')) \end{array}$$

et

$$(10.14.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{WT}/X}(\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\bar{x}}} & \mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\bar{x}}[\frac{1}{p}]) \\ \downarrow & & \downarrow \mathfrak{g}^* \\ \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{WT}/X'}(\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{x}')) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\bar{x}'}} & \mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\bar{x}'}[\frac{1}{p}]) \end{array}$$

où $\mathcal{V}_{\bar{x}'}$ et $\mathcal{T}_{\bar{x}'}$ sont les foncteurs (10.8.1) et (10.11.1) relatifs à X' .

Preuve. Soient \mathcal{F} un $\mathcal{O}_{\bar{x}}[\frac{1}{p}]$ -module de Weil-Tate et V une \mathfrak{C} -représentation de Weil-Tate associée. Il existe donc un isomorphisme $\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -linéaire

$$(10.14.3) \quad \mathbf{T}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V).$$

En vertu de (10.13.2), on en déduit un isomorphisme $\check{\beta}'_{\mathbb{Q}}$ -linéaire

$$(10.14.4) \quad \mathbf{T}'^*(\mathfrak{g}^*(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \check{\beta}'_{\mathbb{Q}}^*(V),$$

d'où les assertions (i) et (ii).

Comme $\mathcal{V}_{\bar{x}} = \mathbf{T}^* \circ \mathcal{W}_{\mathbb{Q}}$, la commutativité du diagramme (10.14.1) résulte de 8.15 et (10.13.2). La commutativité du diagramme (10.14.2) s'ensuit par 10.12, d'où l'assertion (iii).

10.15. Dans la suite de cette section, on fixe une \bar{K} -courbe propre et lisse C et un point géométrique \bar{x} de C . On pose $\check{C} = C \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$. Soit S' un trait fini sur S . Un S' -modèle de C est la donnée d'un S -morphisme $\bar{S} \rightarrow S'$ et d'une S' -courbe propre X munie d'un isomorphisme $C \simeq X \times_{S'} \bar{\eta}$. Soit X un S' -modèle semi-stable et régulier de C . Reprenant les notations de 5.14, on a un foncteur pleinement fidèle en vertu de (5.15)

$$(10.15.1) \quad j_{\bar{x}} : \mathbf{LP}^{\mathrm{tf}}(\mathcal{O}_{\bar{x}}[\frac{1}{p}]) \rightarrow \mathbf{Vect}_{\check{C}}.$$

Définition 10.16. (i) On dit qu'un fibré vectoriel F sur \check{C} est *de Weil-Tate* s'il existe un trait S' fini sur S , un S' -modèle semi-stable et régulier X de C et un $\mathcal{O}_{\bar{x}}[\frac{1}{p}]$ -module de Weil-Tate \mathcal{F} tels que $j_{\bar{x}}(\mathcal{F}) \simeq F$ (10.15.1).

(ii) On dit qu'une \mathfrak{C} -représentation continue V de $\pi_1(C, \bar{x})$ est *de Weil-Tate* s'il existe un trait S' fini sur S , un S' -modèle semi-stable X de C tels que V soit de Weil-Tate relativement à X .

On désigne par $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\mathrm{WT}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Vect}_{\check{C}}$ formée des fibrés vectoriels de Weil-Tate et par $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{WT}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{cont}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ formée des \mathfrak{C} -représentations continues de Weil-Tate. Soit X un S -modèle semi-stable et régulier de C . La restriction du foncteur $j_{\bar{x}}$ (10.15.1) à $\mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\bar{x}}[\frac{1}{p}])$ induit un foncteur pleinement fidèle que l'on note encore

$$(10.16.1) \quad j_{\bar{x}} : \mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\bar{x}}[\frac{1}{p}]) \rightarrow \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\mathrm{WT}}.$$

Soient S' un trait fini sur S et X' un S' -modèle semi-stable et régulier de C dominant $X_{S'}$. Reprenons les notations de 10.13. En vertu de 10.14(i) et de la définition de $j_{\bar{x}}$ (5.14.2), on vérifie que le diagramme

$$(10.16.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\bar{x}}[\frac{1}{p}]) & & \\ \mathfrak{g}^* \downarrow & \searrow j_{\bar{x}} & \\ \mathbf{Mod}^{\mathrm{WT}}(\mathcal{O}_{\bar{x}'}[\frac{1}{p}]) & \xrightarrow{j_{\bar{x}'}} & \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\mathrm{WT}} \end{array}$$

où $j_{\bar{x}'}$ désigne le foncteur (10.16.1) relatif à X' , est commutatif.

Lemme 10.17. (i) *Pour tout morphisme f de $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}}$, il existe un trait S' fini sur S et un S' -modèle semi-stable et régulier X de C tels que f soit contenu dans l'image du foncteur $j_{\mathfrak{X}}$ (10.16.1).*

(ii) *Pour tout morphisme f de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C, \bar{x}))$, il existe un trait S' fini sur S et un S' -modèle semi-stable X de C tels que f provienne de la sous-catégorie pleine $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}/X}(\pi_1(C, \bar{x}))$ de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C, \bar{x}))$.*

Preuve. (i) Soient F et F' deux fibrés vectoriels de Weil-Tate sur \check{C} . D'après 5.8, il existe un trait S' fini sur S et un S' -modèle X semi-stable et régulier de C tels que F et F' soient les images des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -modules localement projectifs de type fini par $j_{\mathfrak{X}}$ (10.16.1). L'assertion résulte alors de la pleine fidélité de (10.16.1).

En calquant la démonstration de (i), on vérifie l'assertion (ii).

10.18. En vertu de 10.14 et 10.17, les foncteurs $\mathcal{V}_{\check{C}}$ fournissent un foncteur

$$(10.18.1) \quad \mathcal{V}_{\check{C}} : \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C, \bar{x})).$$

De même, les foncteurs $j_{\mathfrak{X}} \circ \mathcal{T}_{\check{C}}$ fournissent un foncteur :

$$(10.18.2) \quad \mathcal{T}_{\check{C}} : \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C, \bar{x})) \rightarrow \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}}.$$

Théorème 10.19. *Les foncteurs $\mathcal{V}_{\check{C}}$ (10.18.1) et $\mathcal{T}_{\check{C}}$ (10.18.2) sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.*

Preuve. Pour tout objet V de $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C, \bar{x}))$, quitte à remplacer S par une extension finie, il existe un S -modèle semi-stable et régulier X de C tel que V soit de Weil-Tate relativement à X . D'après (10.12.4), on a un isomorphisme

$$(10.19.1) \quad V \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{\check{C}}(\mathcal{T}_{\check{C}}(V))$$

Il résulte de la functorialité de (10.12.4) et de 10.17(ii) que celui-ci est functoriel en V .

De même, pour tout objet F de $\mathfrak{V}_{\check{C}}$, quitte à remplacer S par une extension finie, il existe un S -modèle semi-stable et régulier X de C et un objet \mathcal{F} de $\mathbf{Mod}^{\text{WT}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ tels que $F \simeq j_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F})$. D'après (10.12.2), on a un isomorphisme

$$(10.19.2) \quad F \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\check{C}}(\mathcal{V}_{\check{C}}(F)).$$

Il résulte de la functorialité de (10.12.2) et de 10.17(i) que celui-ci est functoriel en F .

Théorème 10.20. *Tout fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{C} est de Weil-Tate. De plus, la restriction du foncteur $\mathcal{V}_{\check{C}} : \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ (10.18.1) à la sous-catégorie $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}}$ s'identifie au foncteur de Deninger-Werner $\mathbb{V}_{\check{C}}$ (6.14.1).*

On présentera la démonstration dans 14.5 et 14.6.

Corollaire 10.21. *Le foncteur de Deninger-Werner $\mathbb{V}_{\check{C}}$ (6.14.1) est pleinement fidèle.*

Preuve. Cela résulte de 10.19 et 10.20.

Proposition 10.22. *Soient $\pi : C' \rightarrow C$ un revêtement étale connexe, \bar{x}' un $\bar{\eta}$ -point de C' au-dessus de \bar{x} , $\check{C}' = C' \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$ et $\check{\pi} = \pi \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$. Alors :*

(i) *L'image inverse d'un fibré vectoriel de Weil-Tate sur \check{C} par $\check{\pi}$ est de Weil-Tate sur \check{C}' .*

(ii) *Toute \mathfrak{C} -représentation continue de Weil-Tate de $\pi_1(C, \bar{x})$ définit par restriction (10.13.3) une \mathfrak{C} -représentation continue de Weil-Tate de $\pi_1(C', \bar{x}')$.*

(iii) *Le morphisme π induit des diagrammes commutatifs à isomorphismes près*

$$(10.22.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}} & \xrightarrow{\mathcal{V}_{\check{C}}} & \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C, \bar{x})) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\check{C}}} & \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}} \\ \check{\pi}^* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \check{\pi}^* \\ \mathfrak{V}_{\check{C}'}^{\text{WT}} & \xrightarrow{\mathcal{V}_{\check{C}'}} & \mathbf{Rep}_{\mathfrak{C}}^{\text{WT}}(\pi_1(C', \bar{x}')) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\check{C}'}} & \mathfrak{V}_{\check{C}'}^{\text{WT}} \end{array}$$

Cela résulte de 10.14.

11. Correspondance de Simpson p -adique pour les représentations de Weil-Tate

11.1. On munit S de la structure logarithmique \mathcal{M}_S définie par son point fermé ([4] II.6.1), autrement dit, $\mathcal{M}_S = j_*(\mathcal{O}_\eta^\times) \cap \mathcal{O}_S$, où $j : \eta \rightarrow S$ est l'injection canonique. On munit \bar{S} et \check{S} (2.1) des structures logarithmiques $\mathcal{M}_{\bar{S}}$ et $\mathcal{M}_{\check{S}}$ images inverses de \mathcal{M}_S (cf. [4] II.5.10).

On associe fonctoriellement à toute $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre A l'anneau (cf. [4] II.9.3)

$$(11.1.1) \quad A^b = \varprojlim_{x \mapsto x^p} A/pA$$

et un homomorphisme $\theta : W(A^b) \rightarrow \widehat{A}$ de l'anneau $W(A^b)$ des vecteurs de Witt de A^b dans le séparé complété p -adique \widehat{A} de A .

On désigne par \underline{p} l'élément de $(\mathcal{O}_{\bar{K}})^b$ induit par la suite $(p^{\frac{1}{p^n}})_{n \geq 0}$ (2.1) et on pose

$$(11.1.2) \quad \xi = [\underline{p}] - p \in W((\mathcal{O}_{\bar{K}})^b),$$

où $[\]$ est le représentant multiplicatif. On pose

$$(11.1.3) \quad \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = W((\mathcal{O}_{\bar{K}})^b) / \text{Ker}(\theta)^2.$$

On a une suite exacte ([4] II.9.5(iv))

$$(11.1.4) \quad 0 \longrightarrow W((\mathcal{O}_{\bar{K}})^b) \xrightarrow{\cdot \xi} W((\mathcal{O}_{\bar{K}})^b) \xrightarrow{\theta} \mathfrak{o} \longrightarrow 0.$$

Elle induit une suite exacte

$$(11.1.5) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{o} \xrightarrow{\cdot \xi} \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \xrightarrow{\theta} \mathfrak{o} \longrightarrow 0,$$

où $\cdot \xi$ est induit par la multiplication par ξ dans $\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. L'idéal $\text{Ker}(\theta)$ est un \mathfrak{o} -module libre de base ξ . On le note $\xi \mathfrak{o}$ et on note $\xi^{-1} \mathfrak{o}$ le \mathfrak{o} -module dual de $\xi \mathfrak{o}$. Pour tout \mathfrak{o} -module M , on désigne les \mathfrak{o} -modules $M \otimes_{\mathfrak{o}} \xi \mathfrak{o}$ et $M \otimes_{\mathfrak{o}} \xi^{-1} \mathfrak{o}$ simplement par ξM et $\xi^{-1} M$ respectivement.

On pose

$$(11.1.6) \quad \mathcal{A}_2(\bar{S}) = \text{Spec}(\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{\bar{K}}))$$

que l'on munit de la structure logarithmique $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}$ définie dans ([4] II.9.8). L'homomorphisme θ induit alors une immersion fermée exacte ([4] II.5.22)

$$(11.1.7) \quad i_{\bar{S}} : (\check{\bar{S}}, \mathcal{M}_{\check{\bar{S}}}) \rightarrow (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}).$$

11.2. Dans la suite de cette section, on se donne une S -courbe semi-stable et régulière X que l'on munit de la structure logarithmique \mathcal{M}_X définie par sa fibre spéciale X_s . Le morphisme de schémas logarithmiques $f : (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (S, \mathcal{M}_S)$ est alors adéquat au sens de ([4] III.4.7). On notera que X_η est le sous-schéma ouvert maximal de X où la structure logarithmique \mathcal{M}_X est triviale. Pour alléger les notations, on pose

$$(11.2.1) \quad \tilde{\Omega}_{X/S}^1 = \Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(S, \mathcal{M}_S)}^1.$$

On munit $\check{\bar{X}} = X \times_S \check{\bar{S}}$ (2.1.1) de la structure logarithmique $\mathcal{M}_{\check{\bar{X}}}$ image inverse de \mathcal{M}_X . Posons $\mathcal{T}_{X/S} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\tilde{\Omega}_{X/S}^1, \mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{T}_{\check{\bar{X}}/\check{\bar{S}}} = \mathcal{T}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\check{\bar{S}}}$. Comme X est une S -courbe, on a alors $\text{H}^2(X_\eta, \mathcal{T}_{X/S, \eta}) = 0$ et $\text{H}^2(X_s, \mathcal{T}_{X/S, s}) = 0$. Compte tenu de ([37] § 5 Cor.2), $\text{R}^2 f_*(\mathcal{T}_{X/S})$ est localement libre de type fini. En outre, on a $\text{R}^2 f_*(\mathcal{T}_{X/S})_\eta = \text{H}^2(X_\eta, \mathcal{T}_{X/S, \eta}) = 0$. On en déduit que $\text{H}^2(X, \mathcal{T}_{X/S}) = 0$ et $\text{H}^2(\check{\bar{X}}, \mathcal{T}_{\check{\bar{X}}/\check{\bar{S}}}) = 0$. D'après ([31] Prop. 3.14), il existe une $(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})$ -déformation lisse $(\check{\bar{X}}, \mathcal{M}_{\check{\bar{X}}})$ de $(\bar{X}, \mathcal{M}_{\bar{X}})$, c'est-à-dire

un diagramme cartésien

$$(11.2.2) \quad \begin{array}{ccc} (\check{X}, \mathcal{M}_{\check{X}}) & \longrightarrow & (\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\check{S}, \mathcal{M}_{\check{S}}) & \xrightarrow{i_{\check{S}}} & (\mathcal{A}_2(\check{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\check{S})}). \end{array}$$

On fixe une telle déformation $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ dans la suite de cette section.

11.3. On note \mathfrak{X} le schéma formel complété p -adique de \bar{X} . On désigne par $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1$ le complété p -adique du $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -module $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\bar{X}/\bar{S}}^1 = \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\bar{X}/\bar{S}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \mathcal{O}_{\bar{X}}$ et on pose, pour tout entier $j \geq 0$, $\xi^{-j}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^j = \wedge_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}^j(\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1)$. On sous-entend par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1$, un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1[\frac{1}{p}]$ (2.10). On désigne par $\mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1)$ la catégorie de tels modules et par $\mathbf{MH}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1)$ la sous-catégorie pleine formée des modules de Higgs dont le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module sous-jacent est cohérent. On appelle $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1$ tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1$ dont le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module sous-jacent est localement projectif de type fini (2.9).

11.4. On reprend les notations de § 7 pour le S -schéma X . Soient \mathcal{M} un $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module adique et de type fini (7.15) et \mathcal{N} un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1$. Dans ([4] III.12.10(ii)), Abbes et Gros définissent la propriété pour \mathcal{M} et \mathcal{N} d'être associées. On dit que \mathcal{M} est de Dolbeault s'il admet un fibré de Higgs associé et que \mathcal{N} est soluble s'il admet un $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module associé (cf. [4] III.12.11).

On désigne par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\check{\mathcal{B}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}})$ (7.15) formée des $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -modules de Dolbeault, et par $\mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1)$ formée des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibrés de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1$. En vertu de ([4] III.12.18), il existe un foncteur

$$(11.4.1) \quad \mathcal{H} : \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1).$$

D'après ([4] III.12.23), il existe un foncteur dans l'autre sens

$$(11.4.2) \quad \mathcal{W} : \mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\check{\mathcal{B}}).$$

Théorème 11.5 ([4] III.12.26). *Les foncteurs (11.4.1) et (11.4.2) sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.*

Lemme 11.6. *Soit \mathcal{F} un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module localement projectif de type fini. Alors, le $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module $\mathbf{T}^*(\mathcal{F})$ (10.1.6) et le fibré de Higgs $(\mathcal{F}, 0)$ sont associés (11.4), et on a un isomorphisme canonique et fonctoriel*

$$(11.6.1) \quad (\mathcal{F}, 0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\mathbf{T}^*(\mathcal{F})).$$

Preuve. Démontrons que $\mathbf{T}^*(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}, 0)$ sont r -associés dans le sens de ([4] III.12.10(i)) pour tout nombre rationnel $r > 0$. On désigne par $\check{\mathcal{C}}^{(r)}$ la $\check{\mathcal{B}}$ -algèbre de Higgs-Tate d'épaisseur r associée à $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ (cf. [4] III.10.31), par $\check{d}^{(r)}$ la $\check{\mathcal{B}}$ -dérivation universelle de $\check{\mathcal{C}}^{(r)}$ définie dans ([4] (III.12.7.1)), par Ξ^r la catégorie des p^r -isoconnexions intégrables relativement à l'extension $\check{\mathcal{C}}^{(r)}/\check{\mathcal{B}}$ (cf. [4] III.6.10) et par $\Xi_{\mathbb{Q}}^r$ la catégorie des objets de Ξ^r à isogénie près (2.16). Dans la suite, on va construire un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(11.6.2) \quad \mathbf{T}^{r+}(\mathcal{F}, 0) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^r(\mathbf{T}^*(\mathcal{F})),$$

où $\mathfrak{S}^r : \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \Xi_{\mathbb{Q}}^r$ et $\mathbf{T}^{r+} : \mathbf{MH}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{F}}^1) \rightarrow \Xi_{\mathbb{Q}}^r$ sont des foncteurs ([4] (III.12.7.3)) et ([4] (III.12.7.8)). En vertu de (4.1.3), il existe un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent \mathcal{G} tel que $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}[\frac{1}{p}]$. Par définition de \mathfrak{S}^r ([4] (III.12.7.2)), on a

$$(11.6.3) \quad \mathfrak{S}^r(\mathbf{T}^*(\mathcal{F})) = (\mathcal{C}^{\check{r}} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathbf{T}^*(\mathcal{G}), \mathcal{C}^{\check{r}} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathbf{T}^*(\mathcal{G}), \text{id}, p^r d^{\check{r}} \otimes \text{id})_{\mathbb{Q}}.$$

Compte tenu de la définition de \mathbf{T}^{r+} ([4] (III.12.7.6)), on a

$$(11.6.4) \quad \mathbf{T}^{r+}(\mathcal{F}, 0) = (\mathcal{C}^{\check{r}} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathbf{T}^*(\mathcal{G}), \mathcal{C}^{\check{r}} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathbf{T}^*(\mathcal{G}), \text{id} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathbf{T}^*(\text{id}), p^r d^{\check{r}} \otimes \mathbf{T}^*(\text{id}))_{\mathbb{Q}}.$$

On prend pour (11.6.2) l'isomorphisme induit par (11.6.3) et (11.6.4). D'après ([4] III.12.17(i)), on en déduit un isomorphisme

$$(\mathcal{F}, 0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\mathbf{T}^*(\mathcal{F})).$$

La functorialité de (11.6.1) se déduit de celle de (11.6.2). Le lemme s'ensuit.

Proposition 11.7. *Soient \bar{x} un point géométrique de $X_{\bar{\eta}}$, V une \mathfrak{C} -représentation continue de $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})$ (3.18). Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Le $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module $\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V)$ (8.6.3) est de Dolbeault (11.4) et le fibré de Higgs $\mathcal{H}(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))$ est de champ de Higgs nul.*

(b) *V est de Weil-Tate relativement à X (10.3).*

De plus, si les conditions sont remplies, on a un isomorphisme canonique fonctoriel de fibrés de Higgs

$$(11.7.1) \quad \mathcal{H}(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V)) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}(V), 0),$$

où $\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}$ est le foncteur (10.11.1).

Preuve. Supposons d'abord que la condition (a) soit remplie. On note \mathcal{F} le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module localement projectif de type fini sous-jacent à $\mathcal{H}(\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V))$. D'après 11.6, on a un isomorphisme canonique

$$(11.7.2) \quad (\mathcal{F}, 0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\mathbf{T}^*(\mathcal{F})).$$

En vertu de 11.5, on en déduit un isomorphisme de $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -modules

$$(11.7.3) \quad \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^*(\mathcal{F}),$$

d'où la condition (b).

Supposons que la condition (b) soit vraie. D'après 10.10, le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module $\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}(V)$ est localement projectif de type fini. De plus, on a un isomorphisme fonctoriel en V (10.10.1)

$$(11.7.4) \quad \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^*(\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}(V)).$$

La condition (a) et l'isomorphisme (11.7.1) résultent alors de 11.6 appliqué à $\mathcal{F} = \mathcal{I}_{\mathfrak{X}}(V)$.

Proposition 11.8. *Soient C une \bar{K} -courbe propre et lisse, \bar{x} un point géométrique de C , V une \mathfrak{C} -représentation de Weil-Tate de $\pi_1(C, \bar{x})$ et $\mathcal{F}(V)$ le fibré vectoriel sur $\check{C} = C \otimes_{\bar{K}} \mathfrak{C}$ associé à V . On a alors une suite exacte*

$$(11.8.1) \quad 0 \rightarrow \mathbf{H}^1(\check{C}_{\text{zar}}, \mathcal{F}(V)) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{cont}}^1(\pi_1(C, \bar{x}), V) \rightarrow \mathbf{H}^0(\check{C}_{\text{zar}}, \mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_{\check{C}}} (\xi^{-1}\Omega_{\check{C}/\mathfrak{C}}^1)) \rightarrow 0,$$

où $\mathbf{H}_{\text{cont}}^1(\pi_1(C, \bar{x}), -)$ désigne le groupe de cohomologie continue de $\pi_1(C, \bar{x})$ (3.30).

Preuve. Quitte à remplacer K par une extension finie, il existe un S -modèle semi-stable et régulier X de C tel que V soit de Weil-Tate relativement à X (10.3). Reprenant les notations précédentes pour X , on a un isomorphisme canonique de $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -modules

$$(11.8.2) \quad \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V) \simeq \mathbf{T}^*(\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}(V)).$$

Reprenant les notations de 2.17 pour le topos annelé $(\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\mathcal{B}})$, d'après (3.30) et (7.21), le foncteur $\check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*$ (8.6.3) induit un isomorphisme canonique

$$(11.8.3) \quad \mathbf{H}_{\text{cont}}^1(\pi_1(C, \bar{x}), V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^1(\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\beta}_{\mathbb{Q}}^*(V)).$$

Par ailleurs, choisissant un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent \mathcal{F} tel que $\mathcal{F}[\frac{1}{p}] \simeq \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(V)$ (4.1.3), on a une suite exacte

$$(11.8.4) \quad H^i(\mathfrak{X}, R^j T_*(T^*(\mathcal{F}))) \Rightarrow H^{i+j}(\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, T^*(\mathcal{F})).$$

Compte tenu de 5.16(i), on en déduit une suite spectrale

$$(11.8.5) \quad H^i(\mathfrak{X}, R^j T_*(T^*(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(V)))) \Rightarrow H^{i+j}(\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, T^*(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(V))).$$

D'après (11.7.1) et ([4] III.12.34), on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -modules

$$(11.8.6) \quad R^j T_*(T^*(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(V))) \simeq \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(V) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \xi^{-j} \tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{C}}^j.$$

Compte tenu de 5.16(ii), on a un isomorphisme \mathcal{C} -linéaire

$$(11.8.7) \quad H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(V) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} (\xi^{-j} \tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathcal{C}}^j)) \simeq H^i(\check{C}_{\text{zar}}, \mathcal{T}(V) \otimes_{\mathcal{O}_{\check{C}}} (\xi^{-j} \Omega_{\check{C}/\mathcal{C}}^j)).$$

Comme C est une courbe sur \bar{K} , ce dernier est nul si $i \geq 2$. On en déduit par (11.8.5) une suite exacte de \mathcal{C} -espaces vectoriels

$$(11.8.8) \quad 0 \rightarrow H^1(\check{C}_{\text{zar}}, \mathcal{T}(V)) \rightarrow H^1(\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, T^*(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(V))) \rightarrow H^0(\check{C}_{\text{zar}}, \mathcal{T}(V) \otimes_{\mathcal{O}_{\check{C}}} (\xi^{-1} \Omega_{\check{C}/\mathcal{C}}^1)) \rightarrow 0.$$

La proposition s'ensuit compte tenu de (11.8.2), (11.8.3) et (11.8.8).

12. Faisceaux de α -modules

12.1. Pour toute \mathfrak{o} -algèbre A , on désigne par $\mathbf{Mod}(A)$ la catégorie abélienne tensorielle des A -modules. Suivant 2.18, prenant pour $\phi : \mathfrak{o} \rightarrow A = \text{End}(\text{id}_{\mathbf{Mod}(A)})$ l'homomorphisme structural, on appelle *catégorie des α - A -modules* et l'on note $\alpha\text{-Mod}(A)$ le quotient de la catégorie $\mathbf{Mod}(A)$ par la sous-catégorie épaisse des A -modules α -nuls. On désigne par

$$(12.1.1) \quad \alpha : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \alpha\text{-Mod}(A) \quad M \mapsto M^\alpha,$$

le foncteur canonique (2.18.1). Pour tous A -modules M et N , on a un isomorphisme canonique fonctoriel ([3] (1.4.7.1))

$$(12.1.2) \quad \text{Hom}_{\alpha\text{-Mod}(A)}(M^\alpha, N^\alpha) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{Mod}(A)}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} M, N).$$

On désigne par σ_* le foncteur

$$(12.1.3) \quad \sigma_* : \alpha\text{-Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A), \quad P \mapsto \text{Hom}_{\alpha\text{-Mod}(A)}(A^\alpha, P),$$

et par $\sigma_!$ le foncteur

$$(12.1.4) \quad \sigma_! : \alpha\text{-Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A), \quad P \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} \sigma_*(P).$$

En vertu de (12.1.2), pour tout A -module M , on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(12.1.5) \quad \sigma_*(M^\alpha) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, M).$$

Proposition 12.2 ([3] 1.4.8). (i) *Le foncteur σ_* est un adjoint à droite du foncteur α (12.1.1).*

(ii) *Le morphisme d'adjonction $\alpha \circ \sigma_* \rightarrow \text{id}$ est un isomorphisme.*

(iii) *Le foncteur $\sigma_!$ est un adjoint à gauche du foncteur α .*

(iv) *Le morphisme d'adjonction $\text{id} \rightarrow \alpha \circ \sigma_!$ est un isomorphisme.*

Corollaire 12.3 ([3] 1.4.9). *Les foncteurs α et $\sigma_!$ sont exacts et le foncteur σ_* est exact à gauche.*

12.4. On appelle α - \mathfrak{o} -algèbre (ou \mathfrak{o}^α -algèbre) un monoïde unitaire commutatif de $\alpha\text{-Mod}(\mathfrak{o})$ ([3] 1.4.11). On désigne par $\mathbf{Alg}(\mathfrak{o})$ la catégorie des \mathfrak{o} -algèbres et par $\alpha\text{-Alg}(\mathfrak{o})$ la catégorie des α - \mathfrak{o} -algèbres. Le foncteur α étant monoïdal, il induit un foncteur que l'on note encore

$$(12.4.1) \quad \alpha : \mathbf{Alg}(\mathfrak{o}) \rightarrow \alpha\text{-Alg}(\mathfrak{o}).$$

Compte tenu de l'isomorphisme canonique $A^\alpha \xrightarrow{\sim} A^\alpha \otimes_{A^\alpha} A^\alpha$, le foncteur σ_* (12.1.3) induit un foncteur que l'on note encore

$$(12.4.2) \quad \sigma_* : \alpha\text{-}\mathbf{Alg}(\mathfrak{o}) \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathfrak{o}), \quad P \mapsto \mathrm{Hom}_{\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(A)}(A^\alpha, P).$$

En vertu de ([3] 1.4.12), celui-ci est un adjoint à droite du foncteur α (12.4.1) et le morphisme d'adjonction $\alpha \circ \sigma_* \rightarrow \mathrm{id}$ est un isomorphisme.

12.5. Soit A une \mathfrak{o} -algèbre. On pose $A^\alpha = \alpha(A)$ (12.4.1) et on désigne par $\mathbf{Mod}(A^\alpha)$ la catégorie des A^α -modules unitaires de $\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})$. Le foncteur $\alpha : \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}) \rightarrow \alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})$ étant monoïdal, il induit un foncteur

$$(12.5.1) \quad \alpha_A : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A^\alpha).$$

Celui-ci transforme les α -isomorphismes en des isomorphismes. Il induit une équivalence de catégories ([3] 1.4.13)

$$(12.5.2) \quad \alpha\text{-}\mathbf{Mod}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}(A^\alpha).$$

On pose $A' = \sigma_*(A^\alpha)$ (12.4.2). D'après 12.4, on a un morphisme canonique de \mathfrak{o} -algèbres $\lambda : A \rightarrow A'$ qui induit un isomorphisme $A^\alpha \xrightarrow{\sim} A'^\alpha$. Pour tous \mathfrak{o}^α -modules P et Q , on a un morphisme \mathfrak{o} -linéaire canonique

$$(12.5.3) \quad \mathrm{Hom}_{\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})}(\mathfrak{o}^\alpha, P) \otimes_{\mathfrak{o}} \mathrm{Hom}_{\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})}(\mathfrak{o}^\alpha, Q) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})}(\mathfrak{o}^\alpha, P \otimes_{\mathfrak{o}^\alpha} Q)$$

défini par functorialité et composition. Par suite, le foncteur σ_* (12.1.3) induit un foncteur

$$(12.5.4) \quad \tau'_* : \mathbf{Mod}(A^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(A').$$

Composant avec le foncteur induit par $\lambda : A \rightarrow A'$, on obtient un foncteur

$$(12.5.5) \quad \tau_* : \mathbf{Mod}(A^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(A).$$

On désigne par π le foncteur

$$(12.5.6) \quad \pi : \mathbf{Mod}(A^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(A) \quad P \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} \tau_*(P).$$

Le foncteur τ_* (resp. π) est un adjoint à droite (resp. gauche) de α_A et les morphismes d'adjonction $\alpha_A \circ \tau_* \rightarrow \mathrm{id}$ et $\mathrm{id} \rightarrow \alpha_A \circ \pi$ sont des isomorphismes (cf. [3] 1.4.13).

12.6. Dans la suite de cette section, \mathcal{C} désigne un site, $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur \mathcal{C} et $\widetilde{\mathcal{C}}$ le topos des faisceaux d'ensembles sur \mathcal{C} . On note $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}}$ (resp. $\mathfrak{m}_{\widehat{\mathcal{C}}}$) le préfaisceau constant sur \mathcal{C} de valeur \mathfrak{o} (resp. \mathfrak{m}) et $\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ (resp. $\mathfrak{m}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$) le faisceau associé. On désigne par $\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}})$ (resp. $\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$) la catégorie abélienne tensorielle des $(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}})$ -modules de $\widehat{\mathcal{C}}$ (resp. $(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$ -modules de $\widetilde{\mathcal{C}}$). Prenant pour $\mathfrak{o} \rightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}})$ (resp. $\mathfrak{o} \rightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$) l'homomorphisme canonique, on appelle *catégorie des α - $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}}$ -modules* (resp. *α - $\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ -modules*) et l'on note $\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}})$ (resp. $\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$) le quotient de $\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}})$ (resp. $\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$) par la sous-catégorie épaisse des modules α -nuls.

12.7. On appelle *catégorie des préfaisceaux de α - \mathfrak{o} -modules sur \mathcal{C}* et l'on note $\alpha\text{-}\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux sur \mathcal{C} à valeurs dans la catégorie $\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})$, i.e., la catégorie des foncteurs de \mathcal{C}° à valeurs dans $\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})$ ([3] 1.4.16).

On dit qu'un préfaisceau de α - \mathfrak{o} -modules F sur \mathcal{C} est *séparé* (resp. un *faisceau*) si pour tout objet X de \mathcal{C} et tout crible couvrant \mathcal{R} de X , le morphisme canonique

$$(12.7.1) \quad F(X) \rightarrow \varprojlim_{(Y,u) \in (\mathcal{C}/\mathcal{R})^\circ} F(Y)$$

est un monomorphisme (resp. isomorphisme) (cf. [3] 1.4.21 et 1.4.24). On note $\alpha\text{-}\widetilde{\mathcal{C}}$ la sous-catégorie pleine de $\alpha\text{-}\widehat{\mathcal{C}}$ des faisceaux de α - \mathfrak{o} -modules sur \mathcal{C} .

Le foncteur $\alpha : \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}) \rightarrow \alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o})$ (12.1.1) définit un foncteur exact et monoïdal

$$(12.7.2) \quad \widehat{\alpha} : \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}}) \rightarrow \alpha\text{-}\widehat{\mathcal{C}}.$$

D'après ([3] 1.4.9(i)), celui-ci transforme les faisceaux de \mathfrak{o} -modules en des faisceaux de α - \mathfrak{o} -modules. Il induit donc un foncteur

$$(12.7.3) \quad \tilde{\alpha} : \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}) \rightarrow \alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}.$$

Ce dernier transforme les α -isomorphismes en des isomorphismes ([3] 1.4.23(iii)). Il induit une équivalence de catégories ([3] 1.4.35)

$$(12.7.4) \quad \alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}) \xrightarrow{\sim} \alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}.$$

On munit $\alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}$ de la structure de catégorie abélienne tensorielle déduite de celle de $\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}})$ (2.20) via l'équivalence (12.7.4).

En vertu de ([3] 1.4.31), le foncteur canonique d'inclusion $\iota : \alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \alpha\text{-}\widehat{\mathcal{C}}$ admet un adjoint à gauche

$$(12.7.5) \quad \bar{a} : \alpha\text{-}\widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}},$$

dit foncteur "faisceau de α - \mathfrak{o} -modules associé". On désigne par $i : \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}})$ le foncteur canonique et par $\mathbf{a} : \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}})$ le foncteur "faisceau de \mathfrak{o} -modules associé". On a alors des diagrammes commutatifs à isomorphismes près ([3] 1.4.35, 1.4.36)

$$(12.7.6) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}) & \xrightarrow{\mathbf{a}} & \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}}) \\ \widehat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha} \\ \alpha\text{-}\widehat{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\bar{\mathbf{a}}} & \alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}}) & \xrightarrow{i} & \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}) \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \widehat{\alpha} \\ \alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\iota} & \alpha\text{-}\widehat{\mathcal{C}} \end{array}$$

12.8. Les foncteurs σ_* (12.1.3) et $\sigma_!$ (12.1.4) (pour les \mathfrak{o} -modules) induisent des foncteurs que l'on note respectivement

$$(12.8.1) \quad \widehat{\sigma}_* : \alpha\text{-}\widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}}),$$

$$(12.8.2) \quad \widehat{\sigma}_! : \alpha\text{-}\widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{C}}}).$$

En vertu de ([3] 1.4.9(i)), $\widehat{\sigma}_*$ transforme les faisceaux de α - \mathfrak{o} -modules en des faisceaux de \mathfrak{o} -modules. Il définit donc un foncteur

$$(12.8.3) \quad \tilde{\sigma}_* : \alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}).$$

On désigne par $\tilde{\sigma}_!$ le foncteur

$$(12.8.4) \quad \tilde{\sigma}_! : \alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}) \quad M \mapsto \mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \tilde{\sigma}_*(M).$$

On notera que $\tilde{\sigma}_!$ s'identifie au composé du foncteur $\widehat{\sigma}_!$ (12.8.2) et du foncteur "faisceau associé" \mathbf{a} . D'après 12.2, le foncteur $\widehat{\sigma}_*$ (resp. $\widehat{\sigma}_!$) est un adjoint à droite (resp. gauche) de $\widehat{\alpha}$ (cf. [3] 1.4.19); les morphismes d'adjonction $\widehat{\alpha} \circ \widehat{\sigma}_* \rightarrow \text{id}$ et $\text{id} \rightarrow \widehat{\alpha} \circ \widehat{\sigma}_!$ sont des isomorphismes. Le foncteur $\tilde{\sigma}_*$ est un adjoint à droite de $\tilde{\alpha}$ et le morphisme d'adjonction $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\sigma}_* \rightarrow \text{id}$ est un isomorphisme ([3] 1.4.35).

Lemme 12.9. (i) *Le foncteur $\tilde{\sigma}_!$ (12.8.4) est un adjoint à gauche de $\tilde{\alpha}$ (12.7.3).*

(ii) *Le morphisme d'adjonction $\text{id} \rightarrow \tilde{\alpha} \circ \tilde{\sigma}_!$ est un isomorphisme.*

Preuve. Soient M un faisceau de α - \mathfrak{o} -modules sur \mathcal{C} et N un $\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ -module. On a $\tilde{\sigma}_!(M) = \mathbf{a}(\widehat{\sigma}_!(\iota(M)))$.

(i) Par adjonction et (12.7.6), on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\mathbf{a}(\widehat{\sigma}_!(\iota(M))), N) &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\widehat{\sigma}_!(\iota(M)), i(N)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}}(\iota(M), \widehat{\alpha}(i(N))) \\ &\simeq \text{Hom}_{\alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}}(M, \tilde{\alpha}(N)). \end{aligned}$$

(ii) Le morphisme d'adjonction $\iota(M) \rightarrow \widehat{\alpha}(\widehat{\sigma}_!(\iota(M)))$ est un isomorphisme. Compte tenu de (12.7.6), on a des isomorphismes

$$(12.9.1) \quad M \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbf{a}}(\widehat{\alpha}(\widehat{\sigma}_!(\iota(M)))) \simeq \widetilde{\alpha}(\widetilde{\sigma}_!(M)).$$

12.10. La donnée d'un monoïde commutatif unitaire de $\alpha\text{-}\widetilde{\mathcal{C}}$ est équivalente à la donnée d'un préfaisceau sur \mathcal{C} à valeurs dans $\alpha\text{-}\mathbf{Alg}(\mathfrak{o})$ (12.4.1) dont le préfaisceau de $\alpha\text{-}\mathfrak{o}$ -module sous-jacent est un faisceau (cf. [3] 1.4.40). On note $\mathbf{Alg}(\alpha\text{-}\widetilde{\mathcal{C}})$ la catégorie des monoïdes commutatifs unitaires de $\alpha\text{-}\widetilde{\mathcal{C}}$.

De même, la donnée d'un monoïde commutatif unitaire de $\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$ est équivalente à la donnée d'une $(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$ -algèbre de $\widetilde{\mathcal{C}}$. On note $\mathbf{Alg}(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$ la catégorie des monoïdes commutatifs unitaires de $\mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$.

Le foncteur $\widetilde{\alpha}$ (12.7.3) étant monoïdal, il induit un foncteur que l'on note encore

$$(12.10.1) \quad \widetilde{\alpha} : \mathbf{Alg}(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}}) \rightarrow \mathbf{Alg}(\alpha\text{-}\widetilde{\mathcal{C}}).$$

Compte tenu de 12.4, le foncteur $\widetilde{\sigma}_*$ (12.8.3) induit un foncteur que l'on note encore

$$(12.10.2) \quad \widetilde{\sigma}_* : \mathbf{Alg}(\alpha\text{-}\widetilde{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}}).$$

D'après ([3] 1.4.40), $\widetilde{\sigma}_*$ est un adjoint à droite de $\widetilde{\alpha}$; le morphisme d'adjonction $\widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\sigma}_* \rightarrow \text{id}$ est un isomorphisme et le morphisme d'adjonction $\text{id} \rightarrow \widetilde{\sigma}_* \circ \widetilde{\alpha}$ induit un isomorphisme $\widetilde{\sigma} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\sigma}_* \circ \widetilde{\alpha}$.

12.11. Dans la suite de cette section, on fixe une $\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ -algèbre A de $\widetilde{\mathcal{C}}$. On désigne par $\mathbf{Mod}(A)$ la catégorie abélienne tensorielle des A -modules de $\widetilde{\mathcal{C}}$. Prenant pour $\varphi : \mathfrak{o} \rightarrow \Gamma(\widetilde{\mathcal{C}}, A)$ l'homomorphisme canonique, on appelle *catégorie des α - A -modules* et l'on note $\alpha\text{-}\mathbf{Mod}(A)$ le quotient de la catégorie abélienne $\mathbf{Mod}(A)$ par la sous-catégorie épaisse des A -modules α -nuls.

On pose $A^\alpha = \widetilde{\alpha}(A)$ (12.10.1) et on désigne par $\mathbf{Mod}(A^\alpha)$ la catégorie des A^α -modules unitaires de $\alpha\text{-}\widetilde{\mathcal{C}}$. La donnée d'une structure de A^α -module unitaire sur un faisceau de $\alpha\text{-}\mathfrak{o}$ -modules M sur \mathcal{C} est équivalente à la donnée pour tout $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ d'une structure de $\alpha(A(X))$ -module unitaire sur $M(X)$ dans le sens de 12.5 telle que pour tout morphisme $X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} , le morphisme $M(Y) \rightarrow M(X)$ soit linéaire relativement au morphisme de \mathfrak{o}^α -algèbres $\alpha(A(Y)) \rightarrow \alpha(A(X))$, où $\alpha : \mathbf{Alg}(\mathfrak{o}) \rightarrow \alpha\text{-}\mathbf{Alg}(\mathfrak{o})$ est le foncteur (12.4.1) (cf. [3] 1.4.41).

Le foncteur $\widetilde{\alpha}$ (12.7.3) étant monoïdal, il définit un foncteur

$$(12.11.1) \quad \widetilde{\alpha}_A : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A^\alpha).$$

Celui-ci transforme les α -isomorphismes en des isomorphismes (cf. [3] 1.4.23(iii)). Il induit une équivalence de catégories ([3] 1.4.41)

$$(12.11.2) \quad \alpha\text{-}\mathbf{Mod}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}(A^\alpha).$$

Dans la suite de cette section, pour tout A -module M , on pose abusivement $M^\alpha = \widetilde{\alpha}_A(M)$.

12.12. On pose $A' = \widetilde{\sigma}_*(A^\alpha)$ (12.10.2). D'après 12.10, on a un homomorphisme canonique de $\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ -algèbres $\lambda : A \rightarrow A'$, qui induit un isomorphisme $\widetilde{\alpha}(A) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\alpha}(A')$. Compte tenu de 12.5, le foncteur $\widetilde{\sigma}_*$ (12.8.3) induit un foncteur (cf. [3] 1.4.41)

$$(12.12.1) \quad \widetilde{\tau}'_* : \mathbf{Mod}(A^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(A').$$

Composant avec le foncteur induit par λ , on obtient un foncteur

$$(12.12.2) \quad \widetilde{\tau}_* : \mathbf{Mod}(A^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(A).$$

On désigne par $\widetilde{\eta}$ le foncteur

$$(12.12.3) \quad \widetilde{\eta} : \mathbf{Mod}(A^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(A), \quad M \mapsto \mathfrak{m}_{\widetilde{\mathcal{C}}} \widetilde{\otimes}_{\mathfrak{o}_{\widetilde{\mathcal{C}}}} \widetilde{\tau}_*(M).$$

Pour tous A^α -modules M et N , on pose

$$(12.12.4) \quad \text{Hom}_{A^\alpha}(M, N) = \text{Hom}_{\mathbf{Mod}(A^\alpha)}(M, N),$$

qui est naturellement muni d'une structure de $\Gamma(\tilde{\mathcal{C}}, A)$ -module, en particulier, d'une structure de \mathfrak{o} -module.

12.13. Soit $A \rightarrow B$ un morphisme de $\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ -algèbres. On note $B^\alpha = \tilde{\alpha}(B)$ (12.10.1) et on désigne par $\mathbf{Mod}(B^\alpha)$ la catégorie des B^α -modules de $\alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}$. On a des diagrammes commutatifs

$$(12.13.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}(B^\alpha) & \xrightarrow{\tilde{\tau}_{B!}} & \mathbf{Mod}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Mod}(A^\alpha) & \xrightarrow{\tilde{\tau}_{A!}} & \mathbf{Mod}(A), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}(B^\alpha) & \xrightarrow{\tilde{\tau}_{B*}} & \mathbf{Mod}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Mod}(A^\alpha) & \xrightarrow{\tilde{\tau}_{A*}} & \mathbf{Mod}(A), \end{array}$$

où les flèches verticales sont des foncteurs d'oubli et $\tilde{\tau}_{B*}$, $\tilde{\tau}_{B!}$, $\tilde{\tau}_{A*}$ et $\tilde{\tau}_{A!}$ désignent les foncteurs (12.12.2) et (12.12.3) relatifs à B et A respectivement. On peut donc omettre les indices B et A dans les notations de $\tilde{\tau}_{B*}$, $\tilde{\tau}_{B!}$, $\tilde{\tau}_{A*}$ et $\tilde{\tau}_{A!}$.

Lemme 12.14 ([3] 1.4.23). (i) *Pour qu'un morphisme de A -modules $f : M \rightarrow N$ soit un α -isomorphisme, il faut et il suffit que le morphisme $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} M \rightarrow \mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} N$ induit par f soit un isomorphisme.*

(ii) *Pour tous A -modules M et N , on a un isomorphisme \mathfrak{o} -linéaire canonique*

$$(12.14.1) \quad \mathrm{Hom}_{A^\alpha}(M^\alpha, N^\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} M, N).$$

Proposition 12.15. (i) *Le foncteur $\tilde{\tau}_*$ (12.12.2) est un adjoint à droite du foncteur $\tilde{\alpha}_A$ (12.11.1).*

(ii) *Le morphisme d'adjonction $\tilde{\alpha}_A \circ \tilde{\tau}_* \rightarrow \mathrm{id}$ est un isomorphisme.*

(iii) *Le foncteur $\tilde{\tau}_!$ (12.12.3) est un adjoint à gauche du foncteur $\tilde{\alpha}_A$.*

(iv) *Le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \rightarrow \tilde{\alpha}_A \circ \tilde{\tau}_!$ est un isomorphisme.*

Preuve. Les assertions (i) et (ii) sont démontrées dans ([3] 1.4.41).

(iii) Soient M un A -module et N un A^α -module. D'après (ii) et (12.14.1), on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{A^\alpha}(N, M^\alpha) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A^\alpha}((\tilde{\tau}_*(N))^\alpha, M^\alpha) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \tilde{\tau}_*(N), M) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\tilde{\tau}_!(N), M). \end{aligned}$$

(iv) On notera que, pour tout A^α -module M , le α - \mathfrak{o} -module sous-jacent à $(\tilde{\tau}_!(M))^\alpha$ s'identifie canoniquement à $\tilde{\alpha}(\tilde{\sigma}_!(M))$. L'assertion résulte du fait que le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \rightarrow \tilde{\alpha} \circ \tilde{\sigma}_!$ est un isomorphisme (cf. 12.9(ii)).

Corollaire 12.16. (i) *Les foncteurs $\tilde{\alpha}_A$, $\tilde{\tau}_!$ sont exacts et le foncteur $\tilde{\tau}_*$ est exact à gauche.*

(ii) *Les foncteurs $\tilde{\alpha}_A$ et $\tilde{\tau}_*$ transforment les objets injectifs en des objets injectifs. En particulier, $\mathbf{Mod}(A^\alpha)$ a suffisamment d'injectifs.*

(iii) *Le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \rightarrow \tilde{\tau}_* \circ \tilde{\alpha}_A$ (resp. $\tilde{\tau}_! \circ \tilde{\alpha}_A \rightarrow \mathrm{id}$) induit un isomorphisme $\tilde{\alpha} \xrightarrow{\sim} \tilde{\alpha}_A \circ \tilde{\tau}_* \circ \tilde{\alpha}_A$ (resp. $\tilde{\alpha}_A \circ \tilde{\tau}_! \circ \tilde{\alpha}_A \xrightarrow{\sim} \tilde{\alpha}_A$).*

Preuve. (i) Compte tenu de 12.15, $\tilde{\alpha}_A$ est exact et $\tilde{\tau}_*$ (resp. $\tilde{\tau}_!$) est exact à gauche (resp. droite). Le $\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ -module $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ étant plat ([6] V 1.7.1), l'exactitude de $\tilde{\tau}_!$ s'ensuit compte tenu (12.12.3).

(ii) Le foncteur $\tilde{\alpha}_A$ (resp. $\tilde{\tau}_*$) est un adjoint à droite d'un foncteur exact, d'où l'assertion ([6] V 0.2).

(iii) En effet, le morphisme composé

$$\tilde{\alpha}_A \rightarrow \tilde{\alpha}_A \circ \tilde{\tau}_* \circ \tilde{\alpha}_A \rightarrow \tilde{\alpha}_A,$$

où les flèches sont déduites des morphismes d'adjonction, s'identifie au morphisme identique. L'assertion pour $\tilde{\tau}_*$ s'ensuit compte tenu de 12.15(ii). La démonstration de l'assertion pour $\tilde{\tau}_!$ est similaire.

Remarque 12.17. Le foncteur $\tilde{\alpha}_A$ ne transforme pas les objets projectifs en des objets projectifs. En effet, considérons le topos ponctuel et prenons pour A l'anneau \mathfrak{o} . En vertu de (12.1.5), pour tout \mathfrak{o} -module M , on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}^\alpha}(\mathfrak{o}^\alpha, M^\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, M).$$

Compte tenu de 3.3, σ^α n'est pas projectif dans la catégorie $\alpha\text{-Mod}(\mathfrak{o})$.

12.18. On désigne par $\mathbf{D}(\mathbf{Mod}(A))$ (resp. $\mathbf{D}(\mathbf{Mod}(A^\alpha))$) la catégorie dérivée de $\mathbf{Mod}(A)$ (resp. $\mathbf{Mod}(A^\alpha)$). Les foncteurs exacts $\tilde{\alpha}_A$ et $\tilde{\eta}$ induisent des foncteurs exacts entre catégories dérivées

$$(12.18.1) \quad F : \mathbf{D}(\mathbf{Mod}(A)) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Mod}(A^\alpha)), \quad G : \mathbf{D}(\mathbf{Mod}(A^\alpha)) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Mod}(A)).$$

Proposition 12.19. *Le foncteur G est un adjoint à gauche du foncteur F .*

Preuve. D'après ([28] 1.1.12), on a des identités triangulaires

$$(12.19.1) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\alpha}_A & \xrightarrow{\eta^* \tilde{\alpha}_A} & \tilde{\alpha}_A \tilde{\eta} \tilde{\alpha}_A \\ & \searrow \text{id}_{\tilde{\alpha}_A} & \downarrow \tilde{\alpha}_A * \varepsilon \\ & & \tilde{\alpha}_A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\eta} & \xrightarrow{\tilde{\eta} * \eta} & \tilde{\eta} \tilde{\alpha}_A \tilde{\eta} \\ & \searrow \text{id}_{\tilde{\eta}} & \downarrow \varepsilon * \tilde{\eta} \\ & & \tilde{\eta} \end{array}$$

où η et ε désignent les transformations naturelles d'adjonction. Comme $\tilde{\alpha}_A$ et $\tilde{\eta}$ sont exacts, on en déduit des identités triangulaires similaires pour la paire (G, F) . La proposition s'ensuit compte tenu de ([28] 1.1.14).

12.20. Rappelons que la catégorie abélienne $\mathbf{Mod}(A^\alpha)$ a suffisamment d'injectifs (12.16(ii)) et reprenons les définitions de 2.4 pour cette catégorie. Pour tous A^α -modules M, N et tout entier $i \geq 0$, on pose $\text{Ext}_{A^\alpha}^i(M, N) = \text{Ext}_{\mathbf{Mod}(A^\alpha)}^i(M, N)$ qui est muni d'une structure de \mathfrak{o} -module.

D'après (2.3.1) et 12.19, pour tout A^α -module M , tout A -module N et tout entier $i \geq 0$, on a un isomorphisme canonique

$$(12.20.1) \quad \text{Ext}_A^i(\tilde{\eta}(M), N) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{A^\alpha}^i(M, N^\alpha).$$

Soient M et N deux A -modules. Le foncteur exact $\tilde{\alpha}_A$ induit un morphisme canonique (2.3.2)

$$(12.20.2) \quad \text{Ext}_A^i(M, N) \rightarrow \text{Ext}_{A^\alpha}^i(M^\alpha, N^\alpha).$$

Composant avec l'isomorphisme $\text{Ext}_{A^\alpha}^i(M^\alpha, N^\alpha) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_A^i(\tilde{\eta}(M^\alpha), N)$, on obtient un morphisme canonique

$$(12.20.3) \quad \text{Ext}_A^i(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^i(\tilde{\eta}(M^\alpha), N).$$

On notera que celui-ci est induit par le morphisme d'adjonction $G \circ F \rightarrow \text{id}$. En particulier, il s'identifie au morphisme canonique induit par la flèche d'adjonction $\tilde{\eta}(M^\alpha) \rightarrow M$.

Lemme 12.21. *Soient M et N deux A -modules de $\tilde{\mathcal{C}}$. Le morphisme canonique (12.20.2) est un α -isomorphisme de \mathfrak{o} -modules.*

Preuve. Il suffit de démontrer que le morphisme (12.20.3) est un α -isomorphisme. En vertu de 12.16(iii), le morphisme canonique $f : \tilde{\eta}(M^\alpha) \rightarrow M$ est un α -isomorphisme de $\mathbf{Mod}(A)$. D'après 2.19, pour tout $\gamma \in \mathfrak{m}$, il existe un morphisme A -linéaire $g_\gamma : M \rightarrow \tilde{\eta}(M^\alpha)$ tel que $g_\gamma \circ f = \gamma^2 \text{id}_M$ et $f \circ g_\gamma = \gamma^2 \text{id}_{\tilde{\eta}(M^\alpha)}$. On en déduit que le noyau et le conoyau de (12.20.3) sont annulés par γ^2 , d'où le lemme.

Corollaire 12.22. *Le foncteur $\tilde{\alpha}_A$ (12.11.1) induit une équivalence de catégories*

$$(12.22.1) \quad \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A^\alpha),$$

où la source (resp. le but) désigne la catégorie des A -modules (resp. A^α -modules) à isogénie près (2.16).

Preuve. Par définition, le foncteur est essentiellement surjectif. La pleine fidélité résulte de 12.21.

12.23. Soient M un A^α -module et N un A -module. En vertu de 12.15(iv), on a des isomorphismes canoniques et fonctoriels de A^α -modules

$$(12.23.1) \quad (\tilde{\eta}(M \otimes_{A^\alpha} N^\alpha))^\alpha \xrightarrow{\sim} M \otimes_{A^\alpha} N^\alpha, \quad (\tilde{\eta}(M))^\alpha \otimes_{A^\alpha} N^\alpha \xrightarrow{\sim} M \otimes_{A^\alpha} N^\alpha.$$

On en déduit par 12.14(ii) et 12.15(iii) un isomorphisme canonique et fonctoriel de A -modules

$$(12.23.2) \quad \mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \tilde{\eta}(M \otimes_{A^\alpha} N^\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \tilde{\eta}(M) \otimes_A N$$

Compte tenu de l'isomorphisme $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}$ et de la définition de $\tilde{\eta}_1$, celui-ci s'identifie à l'isomorphisme

$$(12.23.3) \quad \tilde{\eta}_1(M \otimes_{A^\alpha} N^\alpha) \xrightarrow{\sim} \tilde{\eta}_1(M) \otimes_A N$$

Proposition 12.24. *Soit n un entier ≥ 1 et supposons que $p^n A = 0$. Soit M un A -module plat sur \mathfrak{o}_n ([6] V 1.7).*

(i) *Pour tout \mathfrak{o}_n -module P et tout entier $i \geq 0$, on a un isomorphisme canonique*

$$(12.24.1) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n}^i(\mathfrak{m}/p^n \mathfrak{m}, P) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathfrak{o}}^i(\mathfrak{m}, P).$$

(ii) *Le foncteur $\text{Hom}_A(M, -) : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_n)$ transforme les objets injectifs en objets injectifs.*

(iii) *Soient N_1 et N_2 deux A -modules. On a un isomorphisme canonique et fonctoriel*

$$(12.24.2) \quad \text{Hom}_A(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} N_1, N_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, \text{Hom}_A(N_1, N_2)).$$

(iv) *Pour tout A -module N , on a une suite spectrale*

$$(12.24.3) \quad E_2^{i,j} = \text{Ext}_{\mathfrak{o}}^i(\mathfrak{m}, \text{Ext}_A^j(M, N)) \Rightarrow E^{i+j} = \text{Ext}_A^{i+j}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} M, N).$$

Preuve. (i) Le foncteur $\text{Hom}_{\mathfrak{o}}(-, P) : \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o})$ s'identifie au foncteur composé

$$(12.24.4) \quad \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}) \xrightarrow{- \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_n} \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_n) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathfrak{o}_n}(-, P)} \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}).$$

Comme $- \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_n$ envoie les objets projectifs sur des objets projectifs, on en déduit une suite spectrale

$$(12.24.5) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n}^i(\text{Tor}_j^{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, \mathfrak{o}_n), P) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{o}}^{i+j}(\mathfrak{m}, P).$$

L'assertion résulte alors de la platitude de \mathfrak{m} .

(ii) Posons $\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}, n} = \mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}/p^n \mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}$. Soient P un \mathfrak{o}_n -module et $P_{\tilde{\mathcal{C}}}$ le faisceau associé au préfaisceau constant de valeur P sur $\tilde{\mathcal{C}}$. Pour tout A -module N , par adjonction ([6] IV 13.4.1), on a un isomorphisme canonique

$$(12.24.6) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}, n}}(P_{\tilde{\mathcal{C}}}, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{o}_n}(P, \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}, N)).$$

Soit I un A -module injectif de $\tilde{\mathcal{C}}$. Pour tout \mathfrak{o}_n -module P , on en déduit un isomorphisme canonique

$$(12.24.7) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}, n}}(P_{\tilde{\mathcal{C}}}, \mathcal{H}om_A(M, I)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{o}_n}(P, \text{Hom}_A(M, I))$$

Par ailleurs, on a un isomorphisme canonique ([6] IV 12.14)

$$(12.24.8) \quad \text{Hom}_A(P_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}, n}} M, I) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}, n}}(P_{\tilde{\mathcal{C}}}, \mathcal{H}om_A(M, I)).$$

L'injectivité de $\text{Hom}_A(M, I)$ résulte de celle de I et de la platitude de M .

(iii) En vertu de ([6] IV 12.14), on a un isomorphisme canonique et fonctoriel

$$(12.24.9) \quad \text{Hom}_A(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} N_1, N_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}}, \mathcal{H}om_A(N_1, N_2)).$$

Par adjonction ([6] IV 13.4.1), on a un isomorphisme canonique et fonctoriel

$$(12.24.10) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}}, \mathcal{H}om_A(N_1, N_2)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, \text{Hom}_A(N_1, N_2)).$$

(iv) D'après (iii), le foncteur

$$(12.24.11) \quad \text{Hom}_A(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} M, -) : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_n),$$

s'identifie au foncteur composé

$$(12.24.12) \quad \mathbf{Mod}(A) \xrightarrow{\text{Hom}_A(M, -)} \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_n) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathfrak{o}_n}(\mathfrak{m}/p^n \mathfrak{m}, -)} \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_n).$$

Comme $\text{Hom}_A(M, -)$ envoie les objets injectifs sur des objets injectifs, on en déduit une suite spectrale

$$(12.24.13) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n}^i(\mathfrak{m}/p^n \mathfrak{m}, \text{Ext}_A^j(M, N)) \Rightarrow \text{Ext}_A^{i+j}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} M, N).$$

La suite spectrale (12.24.3) s'ensuit compte tenu de (i).

12.25. Soit $\varphi : (\tilde{\mathcal{C}}', A') \rightarrow (\tilde{\mathcal{C}}, A)$ un morphisme de topos annelés. On note $\alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}'$ la catégorie des faisceaux de α - \mathfrak{o} -modules de $\tilde{\mathcal{C}}'$ (12.7) et on pose $A'^\alpha = \tilde{\alpha}(A')$ (12.10.1). On désigne par $\mathbf{Mod}(A'^\alpha)$ la catégorie des A'^α -modules de $\alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}'$. En vertu de 12.14(i), le foncteur $\varphi^* : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A')$ envoie les α -isomorphismes sur des α -isomorphismes. Il induit donc un foncteur

$$(12.25.1) \quad \psi : \mathbf{Mod}(A^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(A'^\alpha)$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$(12.25.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}(A) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathbf{Mod}(A') \\ \tilde{\alpha}_A \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha}_{A'} \\ \mathbf{Mod}(A^\alpha) & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{Mod}(A'^\alpha). \end{array}$$

Compte tenu de 12.15(iv), pour tout A^α -module M , on a un isomorphisme canonique et fonctoriel

$$(12.25.3) \quad \psi(M) \xrightarrow{\sim} (\varphi^*(\tilde{\tau}_{A'}(M)))^\alpha.$$

Le morphisme adjoint de cet isomorphisme

$$(12.25.4) \quad \tilde{\tau}_{A'}(\psi(M)) \rightarrow \varphi^*(\tilde{\tau}_{A'}(M))$$

est un α -isomorphisme en vertu de 12.15(iii). C'est même un isomorphisme en vertu de 12.14(ii) et de l'isomorphisme $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}$.

12.26. Conservons les notations de 12.25 et supposons que le morphisme φ soit plat, i.e. que le foncteur $\varphi^* : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A')$ soit *exact* ([6] V 1.8). D'après ([24] III.1 Corollaire 3), le foncteur ψ (12.25.1) est exact. En vertu de (12.25.2) et (12.25.4), pour tout A^α -module M , tout A -module N et tout entier $i \geq 0$, les isomorphismes (12.20.1) induisent un diagramme commutatif

$$(12.26.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{A^\alpha}^i(M, N^\alpha) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Ext}_{A'^\alpha}^i(\psi(M), \psi(N^\alpha)) \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathrm{Ext}_A^i(\tilde{\tau}_{A'}(M), N) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathrm{Ext}_{A'}^i(\tilde{\tau}_{A'}(\psi(M)), \varphi^*(N)), \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes canoniques induits par les foncteurs exacts φ^* et ψ (2.3.2).

12.27. Conservons les notations et les hypothèses de 12.26 et supposons de plus que $p^n A = 0$. Soient M un A -module qui est plat sur \mathfrak{o}_n et N un A -module. Comme φ^* est exact, le A' -module $\varphi^*(M)$ est encore plat sur \mathfrak{o}_n . On désigne par E (resp. E') la suite spectrale (12.24.3) associée aux A -modules M et N (resp. A' -modules $\varphi^*(M)$ et $\varphi^*(N)$). Le foncteur exact φ^* induit un morphisme de suites spectrales (cf. 15.5)

$$(12.27.1) \quad u = (u_r^{i,j}, u^n) : E \rightarrow E'$$

dont les morphismes

$$(12.27.2) \quad u_2^{i,j} : \mathrm{Ext}_{\mathfrak{o}}^i(\mathfrak{m}, \mathrm{Ext}_A^j(M, N)) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathfrak{o}}^i(\mathfrak{m}, \mathrm{Ext}_{A'}^j(\varphi^*(M), \varphi^*(N)))$$

$$(12.27.3) \quad u^n : \mathrm{Ext}_A^n(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} M, N) \rightarrow \mathrm{Ext}_{A'}^n(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}'}} \varphi^*(M), \varphi^*(N))$$

s'identifient aux morphismes canoniques induits par φ^* (2.3.2). Compte tenu de l'isomorphisme canonique $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} M \simeq \tilde{\tau}_1(M^\alpha)$ et (12.26.1), le morphisme u^n s'identifie au morphisme canonique induit par ψ :

$$(12.27.4) \quad \mathrm{Ext}_{A^\alpha}^n(M^\alpha, N^\alpha) \rightarrow \mathrm{Ext}_{A'^\alpha}^n(\psi(M^\alpha), \psi(N^\alpha)).$$

Définition 12.28 ([3] 1.5.3). Soient M un A -module de $\tilde{\mathcal{C}}$ et $\gamma \in \mathfrak{m}$.

(i) On dit que M est de *type γ -fini* s'il existe un raffinement $(U_i)_{i \in I}$ de l'objet final de $\tilde{\mathcal{C}}$ tel que, pour tout $i \in I$, il existe un $(A|U_i)$ -module libre de type fini N_i et un morphisme $(A|U_i)$ -linéaire

$$(12.28.1) \quad N_i \rightarrow M|U_i$$

dont le conoyau est annulé par γ .

(ii) On dit que M est de *type α -fini* s'il est de type γ -fini pour tout $\gamma \in \mathfrak{m}$.

Définition 12.29. (i) On dit qu'un A -module M est *plat* (resp. *α -plat*) si, pour tout morphisme injectif de A -modules $f : N_1 \rightarrow N_2$, le noyau de $\text{id}_M \otimes f : M \otimes_A N_1 \rightarrow M \otimes_A N_2$ est nul (resp. α -nul).

(ii) On dit qu'un A^α -module M est *plat* si, pour tout morphisme injectif de A^α -modules $f : N_1 \rightarrow N_2$, le noyau de $\text{id}_M \otimes f : M \otimes_{A^\alpha} N_1 \rightarrow M \otimes_{A^\alpha} N_2$ est nul.

Lemme 12.30. (i) *Pour qu'un A -module M soit α -plat, il faut et il suffit que M^α soit un A^α -module plat.*

(ii) *Pour qu'un A^α -module N soit plat, il faut et il suffit que $\tilde{\tau}_!(N)$ soit un A -module plat.*

Preuve. (i) Supposons que M soit un A -module α -plat et soit $f : N_1 \rightarrow N_2$ une injection de A^α -modules. D'après 12.16(i), f induit une injection de A -modules $\tau_!(N_1) \rightarrow \tau_!(N_2)$. On en déduit que le noyau de $\text{id}_M \otimes \tau_!(f) : M \otimes_A \tau_!(N_1) \rightarrow M \otimes_A \tau_!(N_2)$ est α -nul. Comme le foncteur $\tilde{\alpha}_A$ est exact et commute avec les produits tensoriels, le morphisme $\text{id}_{M^\alpha} \otimes f : M^\alpha \otimes_{A^\alpha} N_1 \rightarrow M^\alpha \otimes_{A^\alpha} N_2$ est une injection ; d'où la platitude de M^α .

D'autre part, supposons que M^α soit un A^α -module plat et soit $f : N_1 \rightarrow N_2$ une injection de A -modules. Posons $N = \text{Ker}(M \otimes_A N_1 \rightarrow M \otimes_A N_2)$. Comme le foncteur $\tilde{\alpha}_A$ est exact et M^α plat, on a une injection de A^α -modules $M^\alpha \otimes_{A^\alpha} N_1^\alpha \rightarrow M^\alpha \otimes_{A^\alpha} N_2^\alpha$. On en déduit que $N^\alpha = 0$; d'où l'assertion cherchée.

(ii) La suffisance de la condition résulte de (i) et de l'isomorphisme $N \xrightarrow{\sim} (\tilde{\tau}_!(N))^\alpha$ (12.15(iv)).

Supposons que N soit un A^α -module plat. En vertu de (i) et de l'isomorphisme $N \xrightarrow{\sim} (\tilde{\tau}_*(N))^\alpha$ (12.15(ii)), $\tilde{\tau}_*(N)$ est α -plat. Soit $f : N_1 \rightarrow N_2$ un morphisme injectif de A -modules. Posons $L = \text{Ker}(\tilde{\tau}_*(N) \otimes_{A^\alpha} N_1 \rightarrow \tilde{\tau}_*(N) \otimes_{A^\alpha} N_2)$ qui est α -nul. Compte tenu de la platitude de $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ sur $\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}$, on a $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}} L = \text{Ker}(\tilde{\tau}_!(N) \otimes_{A^\alpha} N_1 \rightarrow \tilde{\tau}_!(N) \otimes_{A^\alpha} N_2)$. Ce dernier est nul ; d'où la platitude de $\tilde{\tau}_!(N)$.

Lemme 12.31. *Conservons les notations de 12.25.*

(i) *Pour tout A -module plat M , $\varphi^*(M)$ est un A' -module plat.*

(ii) *Pour tout A^α -module plat N , $\psi(N)$ est un A'^α -module plat.*

Preuve. L'assertion (i) est démontrée dans ([6] V 1.7.1). D'après 12.30(ii), le A -module $\tilde{\tau}_!(N)$ est plat. En vertu de (i), le A' -module $\varphi^*(\tilde{\tau}_{A'}(N)) \simeq \tilde{\tau}_{A'}(\psi(N))$ (12.25.4) est plat. La A^α -platitude de $\psi(N)$ s'ensuit compte tenu de 12.30(ii).

12.32. On note $\tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}^\circ}$ le topos des systèmes projectifs d'objets de $\tilde{\mathcal{C}}$ (2.11). On pose $\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}^\circ}} = (\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}})_{n \geq 1}$ (resp. $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}^\circ}} = (\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}})_{n \geq 1}$) qui est isomorphe au faisceau associé au préfaisceau constant de valeur \mathfrak{o} (resp. \mathfrak{m}) de $\tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}^\circ}$. Soit $\check{A} = (A_n)_{n \geq 1}$ une $\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}^\circ}}$ -algèbre. On note $\mathbf{Mod}(\check{A})$ la catégorie des \check{A} -modules de $\tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}^\circ}$.

Proposition 12.33. (i) *Soit M un A -module de $\tilde{\mathcal{C}}$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel (12.12.2)*

$$(12.33.1) \quad \tilde{\tau}_*(M^\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}}, M).$$

(ii) *Soit $M = (M_n)_{n \geq 1}$ un \check{A} -module de $\tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}^\circ}$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$(12.33.2) \quad \mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}^\circ}}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}^\circ}}, M) \simeq (\mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}}, M_n))_{n \geq 1}$$

Preuve. Soient U un objet de $\tilde{\mathcal{C}}$ et $j_U : \tilde{\mathcal{C}}/U \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ le morphisme de localisation de $\tilde{\mathcal{C}}$ en U .

(i) On a un isomorphisme canonique fonctoriel $M(U) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}/U, j_U^*(M))$. Comme $\hat{\alpha}$ et $\hat{\sigma}_*$ transforment les faisceaux en des faisceaux (12.7, 12.8), d'après (12.1.5), on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(12.33.3) \quad \tilde{\tau}_*(M^\alpha)(U) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, M(U)).$$

Par adjonction ([6] IV 13.4.1), on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(12.33.4) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}/U, j_U^*(M))) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}/U}}(j_U^*(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}}), j_U^*(M)).$$

L'assertion s'ensuit.

(ii) Soit n un entier ≥ 1 . On désigne par $\alpha_n : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}$ le morphisme de topos canonique défini pour tout faisceau $F = (F_n)_{n \geq 1}$ de $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}$ par $\alpha_n^*(F) = F_n$ ([4] (III.7.1.2)). Le foncteur α_n^* admet un adjoint à droite $\alpha_{n!}$ (cf. [4] (III.7.1.5)). On en déduit des isomorphismes :

$$(12.33.5) \quad \alpha_n^*(\mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}}, M))(U) \simeq \mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}}, M)(\alpha_{n!}(U))$$

$$(12.33.6) \quad \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}} |_{\alpha_{n!}(U)}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}} |_{\alpha_{n!}(U)}, M |_{\alpha_{n!}(U)}).$$

On note $[n]$ le sous-ensemble ordonné $\{1, 2, \dots, n\}$ de \mathbb{N} . On munit $\tilde{\mathcal{C}}/U \times [n]$ de la topologie totale relative au site fibré constant $\tilde{\mathcal{C}}/U \times [n] \rightarrow [n]$ de fibre $\tilde{\mathcal{C}}$ ([4] VI.7.1) et on désigne par $(\tilde{\mathcal{C}}/U)^{[n]^\circ}$ le topos des faisceaux d'ensembles sur $\tilde{\mathcal{C}}/U \times [n]$ (cf. [4] III.7.1). Le foncteur d'injection canonique $\tilde{\mathcal{C}}/U \times [n] \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}/U \times \mathbb{N}$ induit un morphisme topos ([4] III.7.8)

$$(12.33.7) \quad \varphi_n : (\tilde{\mathcal{C}}/U)^{[n]^\circ} \rightarrow (\tilde{\mathcal{C}}/U)^{\mathbb{N}^\circ}.$$

On note $j_{(U,n)} : (\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ})_{/\alpha_{n!}(U)} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}$ le morphisme de localisation de $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}$ en $\alpha_{n!}(U)$. D'après ([4] III.7.9), on a une équivalence canonique de topos

$$(12.33.8) \quad h : (\tilde{\mathcal{C}}/U)^{[n]^\circ} \xrightarrow{\sim} (\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ})_{/\alpha_{n!}(U)}$$

telle que $j_{(U,n)} \circ h$ soit le composé

$$(12.33.9) \quad (\tilde{\mathcal{C}}/U)^{[n]^\circ} \xrightarrow{\varphi_n} (\tilde{\mathcal{C}}/U)^{\mathbb{N}^\circ} \xrightarrow{(j_U)^{\mathbb{N}^\circ}} \tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}.$$

On en déduit un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(12.33.10) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}} |_{\alpha_{n!}(U)}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}} |_{\alpha_{n!}(U)}, M |_{\alpha_{n!}(U)}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{(\tilde{\mathcal{C}}/U)^{[n]^\circ}}}(\mathfrak{m}_{(\tilde{\mathcal{C}}/U)^{[n]^\circ}}, (j_U^*(M_i))_{1 \leq i \leq n}).$$

D'après ([4] VI.7.13), on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(12.33.11) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{(\tilde{\mathcal{C}}/U)^{[n]^\circ}}}(\mathfrak{m}_{(\tilde{\mathcal{C}}/U)^{[n]^\circ}}, (j_U^*(M_i))_{1 \leq i \leq n}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}/U}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}/U}, j_U^*(M_n)).$$

Compte tenu de (12.33.6), (12.33.10) et (12.33.11), on en déduit un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(12.33.12) \quad \alpha_n^*(\mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}}, M)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathcal{C}}}, M_n),$$

d'où la proposition.

12.34. Conservons les notations de 12.32. On désigne par $\alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}$ la catégorie des faisceaux de $\alpha\text{-}\mathfrak{o}$ -modules de $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}$ (12.7). Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathbf{Mod}(A_n^\alpha)$ la catégorie des A_n^α -modules de $\alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}$ et par $\mathbf{Mod}(\check{A}^\alpha)$ la catégorie des \check{A}^α -modules de $\alpha\text{-}\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{N}^\circ}$. On note $\mathbf{P}(\mathbf{Mod}(A_\bullet^\alpha))$ la catégorie des systèmes projectifs $(M_n)_{n \geq 1}$, où M_n est un A_n^α -module et $M_{n+1} \rightarrow M_n$ un morphisme A_{n+1}^α -linéaire.

Soient $M = (M_n)_{n \geq 1}$ un objet de $\mathbf{Mod}(\check{A})$ et $f = (f_n)_{n \geq 1}$ un morphisme de $\mathbf{Mod}(\check{A})$. Pour que M soit α -nul, il faut et il suffit que, pour tout $n \geq 1$, M_n soit α -nul dans la catégorie $\mathbf{Mod}(A_n)$. Par suite, le morphisme f est un α -isomorphisme si et seulement si, pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme f_n est un α -isomorphisme de $\mathbf{Mod}(A_n)$. Par suite, le foncteur

$$(12.34.1) \quad a : \mathbf{Mod}(\check{A}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{Mod}(A_\bullet^\alpha)) \quad (M_n) \mapsto (M_n^\alpha)$$

envoie les α -isomorphismes sur des isomorphismes. Il induit donc un foncteur

$$(12.34.2) \quad b : \mathbf{Mod}(\check{A}^\alpha) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{Mod}(A_\bullet^\alpha)).$$

Les foncteurs $(\tilde{\tau}_{A_n^*} : \mathbf{Mod}(A_n^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(A_n))_{n \geq 1}$ (12.12.2) induisent un foncteur

$$(12.34.3) \quad t : \mathbf{P}(\mathbf{Mod}(A_\bullet^\alpha)) \rightarrow \mathbf{Mod}(\check{A}) \quad (M_n) \mapsto (\tilde{\tau}_*(M_n)).$$

On désigne par

$$(12.34.4) \quad s : \mathbf{P}(\mathbf{Mod}(A_\bullet^\alpha)) \rightarrow \mathbf{Mod}(\check{A}^\alpha)$$

le composé du foncteur t et du foncteur canonique $\tilde{\alpha}_{\check{A}} : \mathbf{Mod}(\check{A}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\check{A}^\alpha)$. Les isomorphismes $\tilde{\alpha}_{A_n} \circ \tilde{\tau}_{A_n*} \xrightarrow{\sim} \text{id}$ (12.15(ii)) induisent un isomorphisme

$$(12.34.5) \quad b \circ s \xrightarrow{\sim} \text{id}.$$

D'après 12.33, le foncteur composé

$$(12.34.6) \quad t \circ a : \mathbf{Mod}(\check{A}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\check{A})$$

s'identifie au foncteur composé $\tilde{\tau}_{\check{A}*} \circ \tilde{\alpha}_{\check{A}}$. En vertu de 12.16(iii), le foncteur $\tilde{\alpha}_{\check{A}} : \mathbf{Mod}(\check{A}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\check{A}^\alpha)$ est isomorphe au foncteur composé

$$(12.34.7) \quad \mathbf{Mod}(\check{A}) \xrightarrow{a} \mathbf{P}(\mathbf{Mod}(A_\bullet^\alpha)) \xrightarrow{t} \mathbf{Mod}(\check{A}) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_{\check{A}}} \mathbf{Mod}(\check{A}^\alpha).$$

On en déduit un isomorphisme

$$(12.34.8) \quad \text{id} \xrightarrow{\sim} s \circ b.$$

Par suite, b et s sont des équivalences de catégories, quasi-inverses l'une de l'autre.

13. Déformations des faisceaux de α -modules

Dans cette section, on se donne un topos T . On considère toujours T comme muni de sa topologie canonique ([6] II 2.5), qui en fait un site.

13.1. Rappelons d'abord la théorie des déformations pour les modules sur un topos annelé suivant ([29] IV 3). Soit

$$(13.1.1) \quad p : A \rightarrow A_0$$

une surjection de \mathfrak{o} -algèbres de T dont le noyau I est de carré-nul. Soient M_0, J deux A_0 -modules et

$$(13.1.2) \quad \widetilde{M} = (0 \rightarrow J \rightarrow M \rightarrow M_0 \rightarrow 0)$$

une extension de A -modules. On a alors un diagramme commutatif

$$(13.1.3) \quad \begin{array}{ccccccc} I \otimes_A M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M \otimes_A A_0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M_0 \longrightarrow 0. \end{array}$$

La flèche verticale de gauche induit un morphisme de A_0 -modules

$$(13.1.4) \quad u(\widetilde{M}) : I \otimes_{A_0} M_0 \rightarrow J.$$

En vertu de (13.1.3), $u(\widetilde{M})$ est un épimorphisme si et seulement si le morphisme canonique $M \otimes_A A_0 \rightarrow M_0$ est un isomorphisme. La correspondance $\widetilde{M} \mapsto u(\widetilde{M})$ définit un homomorphisme (cf. [29] IV 3.1.1)

$$(13.1.5) \quad u : \text{Ext}_A^1(M_0, J) \rightarrow \text{Hom}_{A_0}(I \otimes_{A_0} M_0, J).$$

On a une suite exacte (cf. [29] IV 3.1.4) :

$$(13.1.6) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}_{A_0}^1(M_0, J) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M_0, J) \xrightarrow{u} \text{Hom}_{A_0}(I \otimes_{A_0} M_0, J) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_{A_0}^2(M_0, J),$$

où la première flèche est le morphisme défini par restriction des scalaires.

Théorème 13.2 ([29] IV 3.1.5). *Soient M_0, J des A_0 -modules et $u_0 : I \otimes_{A_0} M_0 \rightarrow J$ un morphisme A_0 -linéaire. Alors :*

(i) *Il existe une obstruction*

$$(13.2.1) \quad \partial(u_0) \in \text{Ext}_{A_0}^2(M_0, J)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une extension de A -modules \widetilde{M} de M_0 par J telle que $u(\widetilde{M}) = u_0$ (13.1.5).

(ii) Lorsque $\partial(u_0) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphismes de telles extensions \widetilde{M} est un \mathcal{T} -torseur sous $\mathrm{Ext}_{A_0}^1(M_0, J)$.

Lemme 13.3 ([29] IV 3.1.1). *Supposons que le topos T ait suffisamment de points. Soit $\widetilde{M} = (0 \rightarrow J \rightarrow M \rightarrow M_0 \rightarrow 0)$ une extension de A -modules telle que le morphisme canonique $M \otimes_A A_0 \rightarrow M_0$ soit un isomorphisme. Alors, pour que M soit plat sur A , il faut et il suffit que M_0 soit plat sur A_0 et que $u(\widetilde{M})$ (13.1.4) soit un isomorphisme.*

Preuve. Comme T a suffisamment de points, on peut se ramener au cas où T est le topos ponctuel. L'assertion résulte alors du critère de platitude ([18] 0.10.2.1).

Remarque 13.4. La suite exacte (13.1.6) peut s'établir par un calcul direct (cf. [29] IV 3.1.12). L'isomorphisme de Cartan

$$(13.4.1) \quad \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(M_0, J) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{A_0}(M_0 \otimes_A^L A_0, J)$$

induit une suite spectrale

$$(13.4.2) \quad E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}_{A_0}^i(\mathcal{T}or_j^A(M_0, A_0), J) \Rightarrow E^{i+j} = \mathrm{Ext}_A^{i+j}(M_0, J).$$

Comme M_0 est un A_0 -module, on a alors un isomorphisme canonique $\mathcal{T}or_1^A(M_0, A_0) \xrightarrow{\sim} I \otimes_{A_0} M$. La suite exacte des termes de bas degré de (13.4.2) fournit la suite exacte (13.1.6) (cf. [29] IV 3.1.13).

13.5. Soit $\varphi : (T', A') \rightarrow (T, A)$ un morphisme plat de topos annelés ([6] V 1.8). On pose $A'_0 = \varphi^*(A_0)$ et $I' = \varphi^*(I)$. On désigne par

$$(13.5.1) \quad E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}_{A'_0}^i(\mathcal{T}or_j^{A'}(\varphi^*(M_0), A'_0), \varphi^*(J)) \Rightarrow E^{i+j} = \mathrm{Ext}_{A'}^{i+j}(\varphi^*(M_0), \varphi^*(J))$$

la suite spectrale (13.4.2) associée aux A'_0 -modules $\varphi^*(M_0)$ et $\varphi^*(J)$. Le faisceau $\mathcal{T}or_A^j(M_0, A_0)$ est calculé par une résolution plate de M_0 . En vertu de 12.31(i) et de l'exactitude du foncteur φ^* , on a un isomorphisme canonique

$$(13.5.2) \quad \varphi^*(\mathcal{T}or_A^j(M_0, A_0)) \simeq \mathcal{T}or_{A'}^j(\varphi^*(M_0), A'_0).$$

Le foncteur exact φ^* induit un morphisme de suites spectrales (cf. 15.7)

$$(13.5.3) \quad u : E = (E_2^{i,j}, E^n) \rightarrow E' = (E_2^{i,j}, E'^n)$$

dont les morphismes

$$(13.5.4) \quad u_2^{i,j} : \mathrm{Ext}_{A_0}^i(\mathcal{T}or_j^A(M_0, A_0), J) \rightarrow \mathrm{Ext}_{A'_0}^i(\mathcal{T}or_j^{A'}(\varphi^*(M_0), A'_0), \varphi^*(J)),$$

$$(13.5.5) \quad u^n : \mathrm{Ext}_A^n(M_0, J) \rightarrow \mathrm{Ext}_{A'}^n(\varphi^*(M_0), \varphi^*(J))$$

s'identifient aux morphismes canoniques induits par φ^* (2.3.2). Les termes de bas degré du morphisme u induisent un diagramme commutatif

$$(13.5.6) \quad \begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{A_0}^1(M_0, J) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_A^1(M_0, J) & \xrightarrow{u} & \mathrm{Hom}_{A_0}(I \otimes_{A_0} M_0, J) \\ & & \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{A'_0}^1(\varphi^*(M_0), \varphi^*(J)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{A'}^1(\varphi^*(M_0), \varphi^*(J)) & \xrightarrow{u'} & \mathrm{Hom}_{A'_0}(I' \otimes_{A'_0} \varphi^*(M_0), \varphi^*(J)) \\ & & & & & & \\ & & & & \mathrm{Hom}_{A_0}(I \otimes_{A_0} M_0, J) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}_{A_0}^2(M_0, J) \\ & & & & \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ & & & & \mathrm{Hom}_{A'_0}(I' \otimes_{A'_0} \varphi^*(M_0), \varphi^*(J)) & \xrightarrow{\partial'} & \mathrm{Ext}_{A'_0}^2(\varphi^*(M_0), \varphi^*(J)). \end{array}$$

Cela signifie que la théorie de la déformation est fonctorielle par rapport au morphisme plat φ .

13.6. On note α - T la catégorie des α - \mathfrak{o} -modules de T (12.7) et on pose $A_0^\alpha = \tilde{\alpha}(A_0)$ et $A^\alpha = \tilde{\alpha}(A)$ (12.10.1). Soient M_0 et J deux A_0^α -modules. D'après 12.15(iv), (12.20.1) et (12.23.3), on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_A^1(\tilde{\eta}_1(M_0), \tilde{\eta}_1(J)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{A^\alpha}^1(M_0, J), \\ \mathrm{Ext}_{A_0}^2(\tilde{\eta}_1(M_0), \tilde{\eta}_1(J)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{A_0^\alpha}^2(M_0, J), \\ \mathrm{Hom}_{A_0}(I \otimes_{A_0} \tilde{\eta}_1(M_0), \tilde{\eta}_1(J)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A_0^\alpha}(I^\alpha \otimes_{A_0^\alpha} M_0, J). \end{aligned}$$

On définit des morphismes

$$(13.6.1) \quad u^\alpha : \mathrm{Ext}_{A^\alpha}^1(M_0, J) \rightarrow \mathrm{Hom}_{A_0^\alpha}(I^\alpha \otimes_{A_0^\alpha} M_0, J),$$

$$(13.6.2) \quad \partial^\alpha : \mathrm{Hom}_{A_0^\alpha}(I^\alpha \otimes_{A_0^\alpha} M_0, J) \rightarrow \mathrm{Ext}_{A_0^\alpha}^2(M_0, J),$$

par les morphismes u et ∂ relatifs aux A_0 -modules $\tilde{\eta}_1(M_0)$ et $\tilde{\eta}_1(J)$ (13.1.6). On en déduit par (13.1.6) une suite exacte

$$(13.6.3) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Ext}_{A_0^\alpha}^1(M_0, J) \rightarrow \mathrm{Ext}_{A^\alpha}^1(M_0, J) \xrightarrow{u^\alpha} \mathrm{Hom}_{A_0^\alpha}(I^\alpha \otimes_{A_0^\alpha} M_0, J) \xrightarrow{\partial^\alpha} \mathrm{Ext}_{A_0^\alpha}^2(M_0, J),$$

où la première flèche est le morphisme défini par restriction des scalaires.

Théorème 13.7. *Conservons les notations de 13.6. Soient M_0, J des A_0^α -modules et $u_0 : I^\alpha \otimes_{A_0^\alpha} M_0 \rightarrow J$ un morphisme A_0^α -linéaire. Alors :*

(i) *Il existe une obstruction*

$$(13.7.1) \quad \partial^\alpha(u_0) \in \mathrm{Ext}_{A_0^\alpha}^2(M_0, J)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une extension de A^α -modules \tilde{M} de M_0 par J telle que $u^\alpha(\tilde{M}) = u_0$ (13.6.3).

(ii) *Lorsque $\partial^\alpha(u_0) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphismes de telles extensions \tilde{M} est un toreur sous $\mathrm{Ext}_{A_0^\alpha}^1(M_0, J)$.*

13.8. Conservons les notations de 13.5. On note α - T' la catégorie des faisceaux de α - \mathfrak{o} -modules de T' (12.7) et on pose $A'^\alpha = \tilde{\alpha}(A')$ et $A_0'^\alpha = \tilde{\alpha}(A_0')$ (12.10.1). Le foncteur exact $\varphi^* : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A')$ s'étend en un foncteur exact $\psi : \mathbf{Mod}(A^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(A'^\alpha)$ (12.26). D'après (12.26.1) et (13.5.6), on a un diagramme commutatif (2.5.4)

$$(13.8.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{A_0^\alpha}^1(M_0, J) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{A^\alpha}^1(M_0, J) & \xrightarrow{u^\alpha} & \mathrm{Hom}_{A_0^\alpha}(I^\alpha \otimes_{A_0^\alpha} M_0, J) \\ & & \psi \downarrow & & \psi \downarrow & & \psi \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{A_0'^\alpha}^1(\psi(M_0), \psi(J)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{A'^\alpha}^1(\psi(M_0), \psi(J)) & \xrightarrow{u'^\alpha} & \mathrm{Hom}_{A_0'^\alpha}(I'^\alpha \otimes_{A_0'^\alpha} \psi(M_0), \psi(J)) \\ & & & & & & \\ & & & & \mathrm{Hom}_{A_0^\alpha}(I^\alpha \otimes_{A_0^\alpha} M_0, J) & \xrightarrow{\partial^\alpha} & \mathrm{Ext}_{A_0^\alpha}^2(M_0, J) \\ & & & & \psi \downarrow & & \psi \downarrow \\ & & & & \mathrm{Hom}_{A_0'^\alpha}(I'^\alpha \otimes_{A_0'^\alpha} \psi(M_0), \psi(J)) & \xrightarrow{\partial'^\alpha} & \mathrm{Ext}_{A_0'^\alpha}^2(\psi(M_0), \psi(J)), \end{array}$$

où les flèches horizontales sont induites par le foncteur exact ψ (2.3.2). Cela signifie que la théorie de la déformation pour les α -modules est fonctorielle par rapport au morphisme plat φ .

13.9. Soit A une \mathfrak{o} -algèbre (ou $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbre) plate de T . Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $A_n = A/p^n A$ et $I_n = p^n A/p^{2n} A$ qui est un idéal de A_{2n} . Le morphisme de multiplication par p^n induit, pour tout entier $n \geq 1$, un isomorphisme canonique de A_n -modules $I_n \xrightarrow{\sim} A_n$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $A_n^\alpha = \tilde{\alpha}(A_n)$ (12.10.1).

Soient n un entier ≥ 1 , M_n un A_n -module et N_n un A_n^α -module. L'isomorphisme $I_n \xrightarrow{\sim} A_n$ induit un isomorphisme canonique de A_n -modules (resp. A_n^α -modules)

$$(13.9.1) \quad v : I_n \otimes_{A_n} M_n \xrightarrow{\sim} M_n \quad (\text{resp. } w : I_n^\alpha \otimes_{A_n^\alpha} N_n \xrightarrow{\sim} N_n).$$

On appelle *déformation de M_n sur A_{2n}* (resp. *déformation de N_n sur A_{2n}^α*) toute extension de A_{2n} -modules (resp. A_{2n}^α -modules)

$$(13.9.2) \quad \widetilde{M} = (0 \rightarrow M_n \rightarrow M_{2n} \rightarrow M_n \rightarrow 0) \quad (\text{resp. } \widetilde{N} = (0 \rightarrow N_n \rightarrow N_{2n} \rightarrow N_n \rightarrow 0))$$

telle que $u(\widetilde{M}) = v$ (resp. $u^\alpha(\widetilde{N}) = w$) (13.9.1).

13.10. Pour toute déformation $0 \rightarrow M_n \rightarrow M_{2n} \rightarrow M_n \rightarrow 0$ de M_n sur A_{2n} , il est clair que $0 \rightarrow M_n^\alpha \rightarrow M_{2n}^\alpha \rightarrow M_n^\alpha \rightarrow 0$ est une déformation de M_n^α sur A_{2n}^α . D'autre part, si $0 \rightarrow N_n \rightarrow N_{2n} \rightarrow N_n \rightarrow 0$ est une déformation de N_n sur A_{2n}^α , la suite exacte $0 \rightarrow \widetilde{\tau}_1(N_n) \rightarrow \widetilde{\tau}_1(N_{2n}) \rightarrow \widetilde{\tau}_1(N_n) \rightarrow 0$ est une déformation de $\widetilde{\tau}_1(N_n)$ sur A_{2n} en vertu de 12.16(i) et (12.23.3).

Lemme 13.11. *Supposons que le topos T ait suffisamment de points et soit n un entier ≥ 1 .*

(i) *Soit M_n un A_n -module plat. Une déformation de M_n sur A_{2n} est équivalente à la donnée d'un A_{2n} -module plat M_{2n} et d'un épimorphisme A_{2n} -linéaire $g : M_{2n} \rightarrow M_n$ tels que le morphisme canonique $M_{2n} \otimes_{A_{2n}} A_n \rightarrow M_n$ soit un isomorphisme.*

(ii) *Soit N_n un A_n^α -module plat (12.29(ii)). Une déformation de N_n sur A_{2n}^α est équivalente à la donnée d'un A_{2n}^α -module plat N_{2n} et d'un épimorphisme A_{2n}^α -linéaire $g : N_{2n} \rightarrow N_n$ tels que le morphisme canonique $N_{2n} \otimes_{A_{2n}^\alpha} A_n^\alpha \rightarrow N_n$ soit un isomorphisme.*

Preuve. (i) Soit $0 \rightarrow M_n \rightarrow M_{2n} \rightarrow M_n \rightarrow 0$ une déformation de M_n sur A_{2n} . Comme v est un isomorphisme, le morphisme $M_{2n} \otimes_{A_{2n}} A_n \rightarrow M_n$ est un isomorphisme (cf. 13.1). D'après 13.3, M_{2n} est plat sur A_{2n} .

D'autre part, soient M_{2n} un A_{2n} -module plat et $g : M_{2n} \rightarrow M_n$ un morphisme tel que $M_{2n} \otimes_{A_{2n}} A_n \xrightarrow{\sim} M_n$. Par platitude de M_{2n} , on en déduit un isomorphisme $I_n \otimes_{A_{2n}} M_{2n} \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(g)$, d'où l'assertion.

(ii) Soit $0 \rightarrow N_n \rightarrow N_{2n} \rightarrow N_n \rightarrow 0$ une déformation de N_n sur A_{2n}^α . D'après 12.30(ii), $\widetilde{\tau}_1(N_n)$ est A_n -plat. En vertu de (i) et 13.10, $\widetilde{\tau}_1(N_{2n})$ est A_{2n} -plat et on a un isomorphisme $\widetilde{\tau}_1(N_{2n}) \otimes_{A_{2n}} A_n \simeq \widetilde{\tau}_1(N_n)$. On en déduit par 12.15(iv) un isomorphisme $N_{2n} \otimes_{A_{2n}^\alpha} A_n^\alpha \simeq N_n$. La platitude de N_{2n} résulte de 12.30(i).

D'autre part, soient N_{2n} un A_{2n}^α -module plat et $g : N_{2n} \rightarrow N_n$ un morphisme tel que $N_{2n} \otimes_{A_{2n}^\alpha} A_n^\alpha \xrightarrow{\sim} N_n$. Par platitude de N_{2n} , on en déduit un isomorphisme $I_n^\alpha \otimes_{A_{2n}^\alpha} N_{2n} \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(g)$, d'où l'assertion.

13.12. Dans la suite de cette section, on se donne un schéma connexe X et un point géométrique \bar{x} de X . Soit n un entier ≥ 1 . On note $X_{\text{fét}}$ le topos fini étale de X et \mathfrak{o}_n le faisceau constant de valeur \mathfrak{o}_n de $X_{\text{fét}}$. Le foncteur fibre en \bar{x}

$$(13.12.1) \quad \mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathfrak{o}_n), \quad \mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}_{\bar{x}}$$

induit une équivalence de catégories (2.14.3)

$$(13.12.2) \quad \mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}(\pi_1(X, \bar{x})),$$

où le but désigne la catégorie des \mathfrak{o}_n -représentations de $\pi_1(X, \bar{x})$ (3.18). On désigne par $\mathbf{Mod}^{\text{αptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n)$ la catégorie des \mathfrak{o}_n -modules α -plats de type α -fini de $X_{\text{fét}}$ (12.28, 12.29).

Lemme 13.13. (i) *Pour qu'un \mathfrak{o}_n -module \mathbb{L} de $X_{\text{fét}}$ soit α -plat de type α -fini, il faut et il suffit que sa fibre $\mathbb{L}_{\bar{x}}$ (13.12.1) soit un \mathfrak{o}_n -module α -plat de type α -fini.*

(ii) *Le foncteur (13.12.2) induit une équivalence de catégories (3.23)*

$$(13.13.1) \quad \mathbf{Mod}^{\text{αptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}_n}^{\text{αptf}}(\pi_1(X, \bar{x}))$$

Preuve. (i) Comme le foncteur (13.12.1) est conservatif, la α -platitude d'un \mathfrak{o}_n -module de $X_{\text{fét}}$ est équivalente à la α -platitude de sa fibre en \bar{x} .

Si \mathbb{L} est de type α -fini, sa fibre $\mathbb{L}_{\bar{x}}$ est évidemment de type α -fini. Supposons que $\mathbb{L}_{\bar{x}}$ soit de type α -fini et montrons que \mathbb{L} est de type α -fini. Pour tout $\gamma \in \mathfrak{m}$, il existe un \mathfrak{o}_n -module libre de type fini M

et un morphisme \mathfrak{o}_n -linéaire $u : M \rightarrow \mathbb{L}_{\bar{x}}$ dont le noyau est annulé par γ . Soit e_1, \dots, e_m une base de M . L'assertion recherchée étant locale pour $X_{\text{fét}}$, quitte à remplacer X par un revêtement étale, on peut supposer que $\pi_1(X, \bar{x})$ fixe les éléments $u(e_1), \dots, u(e_m)$ de $\mathbb{L}_{\bar{x}}$. Munissant M de l'unique \mathfrak{o}_n -représentation de $\pi_1(X, \bar{x})$ telle que e_1, \dots, e_m soient fixes, l'homomorphisme u est alors $\pi_1(X, \bar{x})$ -équivariant. Par suite, \mathbb{L} est un \mathfrak{o}_n -module de type α -fini de $X_{\text{fét}}$.

(ii) Cela résulte de (i).

13.14. On désigne par $\alpha\text{-}X_{\text{fét}}$ la catégorie des α - \mathfrak{o} -modules de $X_{\text{fét}}$ (12.7). Soit n un entier ≥ 1 . On pose $\mathfrak{o}_n^\alpha = \tilde{\alpha}(\mathfrak{o}_n)$ (12.10.1) et on désigne par $\mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha)$ la catégorie des \mathfrak{o}_n^α -modules de $\alpha\text{-}X_{\text{fét}}$ (12.11). On a un foncteur canonique (12.7.3)

$$(13.14.1) \quad \tilde{\alpha} : \mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \rightarrow \mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha).$$

On désigne par $\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha)$ l'image essentielle de la catégorie $\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n)$ dans $\mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha)$.

Lemme 13.15. *Soit \mathcal{L} un objet de $\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha)$.*

(i) *Le \mathfrak{o}_n^α -module \mathcal{L} est plat (12.29).*

(ii) *Toute déformation de \mathcal{L} sur \mathfrak{o}_{2n}^α (13.11(ii)) est un objet de $\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_{2n}^\alpha)$.*

Preuve. (i) Cela résulte de 12.30(i).

(ii) Soit \mathbb{L} un \mathfrak{o}_n -module α -plat de type α -fini de $X_{\text{fét}}$ tel que $\mathbb{L}^\alpha \simeq \mathcal{L}$. On en déduit par adjonction (12.15(iii)) un α -isomorphisme $\tilde{\pi}_1(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{L}$; d'où la α -finitude de $\tilde{\pi}_1(\mathcal{L})$. D'après 12.30(ii), $\tilde{\pi}_1(\mathcal{L})$ est \mathfrak{o}_n -plat. Soit \mathcal{L}' une déformation de \mathcal{L} sur \mathfrak{o}_{2n}^α . En vertu de 13.10 et 13.11(i), $\tilde{\pi}_1(\mathcal{L}')$ est une déformation de $\tilde{\pi}_1(\mathcal{L})$ sur \mathfrak{o}_{2n} et est donc \mathfrak{o}_{2n} -plat. Par ailleurs, on a une suite exacte de \mathfrak{o}_{2n} -modules

$$(13.15.1) \quad 0 \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{L})_{\bar{x}} \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{L}')_{\bar{x}} \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{L})_{\bar{x}} \rightarrow 0.$$

On en déduit par 3.7 et 13.13(i) la α -finitude de $\tilde{\pi}_1(\mathcal{L}')$. Par suite, $\tilde{\pi}_1(\mathcal{L}')$ appartient à $\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_{2n})$. L'assertion résulte alors de l'isomorphisme $\mathcal{L}' \xrightarrow{\sim} (\tilde{\pi}_1(\mathcal{L}'))^\alpha$ (12.15(iv)).

13.16. On note $X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}$ le topos des systèmes projectifs d'objets de $X_{\text{fét}}$ (2.11) et \mathfrak{o} l'anneau $(\mathfrak{o}_n)_{n \geq 1}$ de $X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}$. On désigne par $\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o})$ formée des \mathfrak{o} -modules $(\mathbb{L}_n)_{n \geq 1}$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$, \mathbb{L}_n soit un objet de $\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n)$ et que le morphisme canonique $\mathbb{L}_{n+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ soit un α -isomorphisme. Compte tenu de 3.23, les foncteurs (13.13.1) induisent une équivalence de catégories

$$(13.16.1) \quad \mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\alpha\text{ptf}}(\pi_1(X, \bar{x})).$$

On désigne par $\mathbf{P}(\mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha))$ la catégorie des systèmes projectifs $(\mathcal{L}_n)_{n \geq 1}$, où \mathcal{L}_n est un \mathfrak{o}_n^α -module de $\alpha\text{-}X_{\text{fét}}$ et $\mathcal{L}_{n+1} \rightarrow \mathcal{L}_n$ est un morphisme $\mathfrak{o}_{n+1}^\alpha$ -linéaire (12.34). Rappelons que le foncteur canonique

$$(13.16.2) \quad \mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha)) \quad (\mathbb{L}_n)_{n \geq 1} \mapsto (\mathbb{L}_n^\alpha)_{n \geq 1},$$

induit une équivalence de catégories (12.34.2)

$$(13.16.3) \quad \mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o}^\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha)),$$

On désigne par $\mathbf{P}(\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha))$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{P}(\mathbf{Mod}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha))$ formée des systèmes projectifs $(\mathcal{L}_n)_{n \geq 1}$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$, \mathcal{L}_n soit un objet de $\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha)$ (13.14) et que le morphisme canonique $\mathcal{L}_{n+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}^\alpha} \mathfrak{o}_n^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_n$ soit un *isomorphisme*. On note $\mathbf{P}(\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha))_{\mathbb{Q}}$ la catégorie des objets de $\mathbf{P}(\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha))$ à isogénie près. On désigne par $\mathbf{LL}^{\text{tf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o})$ (resp. $\mathbf{LL}_{\mathbb{Q}}^{\text{tf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o})$) la catégorie des \mathfrak{o} -modules localement libres de type fini de $X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}$ (resp. \mathfrak{o} -modules localement libres de type fini de $X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}$ à isogénie près).

Lemme 13.17. *La catégorie $\mathbf{P}(\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha))$ est l'image essentielle de la catégorie $\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o})$ par le foncteur (13.16.2).*

Preuve. Il est clair que l'image essentielle de $\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o})$ est contenu dans $\mathbf{P}(\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_\bullet^\alpha))$. Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_n)_{n \geq 1}$ un objet de $\mathbf{P}(\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_\bullet^\alpha))$. En vertu de la preuve de 13.15(ii), $\tilde{\eta}_1(\mathcal{L}_n)$ est α -plat de type α -fini. L'isomorphisme canonique $\mathcal{L}_{n+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}^\alpha} \mathfrak{o}_n^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_n$ induit un isomorphisme $\tilde{\eta}_1(\mathcal{L})_{n+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{n+1}} \mathfrak{o}_n \xrightarrow{\sim} \tilde{\eta}_1(\mathcal{L}_n)$ (12.23.3). L'assertion résulte alors de l'isomorphisme $(\mathcal{L}_n)_{n \geq 1} \xrightarrow{\sim} ((\tilde{\eta}_1(\mathcal{L}_n))^\alpha)_{n \geq 1}$ (12.15(iv)).

Lemme 13.18. *Le foncteur canonique*

$$(13.18.1) \quad \mathbf{LL}^{\text{tf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o}) \rightarrow \mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o})$$

induit une équivalence de catégories

$$(13.18.2) \quad \mathbf{LL}_{\mathbb{Q}}^{\text{tf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_\bullet^\alpha))_{\mathbb{Q}}.$$

Preuve. D'après 3.26, 3.27, (3.29.4) et (13.16.1), le foncteur (13.18.1), qui correspond au foncteur canonique $\mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\text{ptf}}(\pi_1(X, \bar{x})) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathfrak{o}}^{\alpha\text{ptf}}(\pi_1(X, \bar{x}))$, induit une équivalence de catégories $\mathbf{LL}_{\mathbb{Q}}^{\text{tf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o})$, où le but désigne la catégorie des objets de $\mathbf{Mod}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o})$ à isogénie près. L'équivalence de catégories $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\alpha\text{ptf}}(X_{\text{fét}}^{\text{N}^\circ}, \mathfrak{o}) \simeq \mathbf{P}(\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(X_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_\bullet^\alpha))_{\mathbb{Q}}$ résulte de 12.22 et 13.17.

14. Déformations des représentations et déformations des α -modules de Faltings

14.1. Soient X un S -schéma propre à réduction semi-stable de fibre générique géométrique connexe et n un entier ≥ 1 . On note $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{B}})$ (resp. $(\tilde{E}_s, \tilde{\mathcal{B}}_n)$) le topos annelé de Faltings (resp. la fibre spéciale du topos annelé de Faltings) associé au S -schéma X (7.11). On désigne par α - $X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}$ (resp. α - \tilde{E}_s) la catégorie des α - \mathfrak{o} -modules de $X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}$ (resp. \tilde{E}_s) (12.7). On pose $\mathfrak{o}_n^\alpha = \tilde{\alpha}(\mathfrak{o}_n)$, $\tilde{\mathcal{B}}_n^\alpha = \tilde{\alpha}(\tilde{\mathcal{B}}_n)$ (12.10.1) et on désigne par $\mathbf{Mod}(X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha)$ la catégorie des \mathfrak{o}_n^α -modules de α - $X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}$, et par $\mathbf{Mod}(\tilde{\mathcal{B}}_n^\alpha)$ la catégorie des $\tilde{\mathcal{B}}_n^\alpha$ -modules de α - \tilde{E}_s (12.11).

Comme $\tilde{\mathcal{B}}_n$ est plat sur \mathfrak{o}_n ([4] III.9.2), le foncteur $\beta_n^* : \mathbf{Mod}(X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}, \mathfrak{o}_n) \rightarrow \mathbf{Mod}(\tilde{\mathcal{B}}_n)$ (7.13.1) est exact et il induit un foncteur exact (12.26) que l'on note

$$(14.1.1) \quad b_n : \mathbf{Mod}(X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}, \mathfrak{o}_n^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(\tilde{\mathcal{B}}_n^\alpha).$$

Pour tout entier $i \geq 0$ et tous \mathfrak{o}_n^α -modules $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ de $X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}$, celui-ci induit un morphisme canonique (2.3.2)

$$(14.1.2) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n^\alpha}^i(\mathcal{L}, \mathcal{L}') \rightarrow \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{B}}_n^\alpha}^i(b_n(\mathcal{L}), b_n(\mathcal{L}')).$$

Proposition 14.2. *Soient \mathbb{L} et \mathbb{L}' deux \mathfrak{o}_n -modules localement libres de type fini de $X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}$. Posons $\mathcal{L} = \mathbb{L}^\alpha$ et $\mathcal{L}' = \mathbb{L}'^\alpha$. Alors le morphisme (14.1.2) est un isomorphisme si $i = 0, 1$ et est un monomorphisme si $i = 2$.*

Preuve. Le foncteur exact β_n^* induit, pour tout entier $i \geq 0$, un morphisme canonique (2.3.2)

$$(14.2.1) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n}^i(\mathbb{L}, \mathbb{L}') \rightarrow \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{B}}_n}^i(\beta_n^*(\mathbb{L}), \beta_n^*(\mathbb{L}')).$$

Comme \mathbb{L} est un \mathfrak{o}_n -module localement libre de type fini de $X_{\text{fét}}$, on a un isomorphisme canonique

$$(14.2.2) \quad \beta_n^*(\mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_n}(\mathbb{L}, \mathbb{L}')) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{B}}_n}(\beta_n^*(\mathbb{L}), \beta_n^*(\mathbb{L}')).$$

D'après (2.9.1) et (14.2.2), le morphisme (14.2.1) s'identifie au morphisme canonique induit par β_n^*

$$(14.2.3) \quad \text{H}^i(X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}, \mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_n}(\mathbb{L}, \mathbb{L}')) \rightarrow \text{H}^i(\tilde{E}_s, \beta_n^*(\mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_n}(\mathbb{L}, \mathbb{L}'))).$$

On notera que $\mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_n}(\mathbb{L}, \mathbb{L}')$ est un \mathfrak{o}_n -module localement libre de type fini de $X_{\tilde{\eta}, \text{fét}}$. Le morphisme (14.2.3) est donc un α -isomorphisme pour $i = 0, 1$, et est un α -monomorphisme pour $i = 2$ en vertu de 7.20. Par suite, il en est de même de (14.2.1).

Comme \mathbb{L} est localement libre de type fini, on a deux suites spectrales (cf. 12.27)

$$(14.2.4) \quad \text{E}_2^{i,j} = \text{Ext}_{\mathfrak{o}}^i(\mathfrak{m}, \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n}^j(\mathbb{L}, \mathbb{L}')) \Rightarrow \text{E}^{i+j} = \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n^\alpha}^{i+j}(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$$

$$(14.2.5) \quad \text{E}_2^{i,j} = \text{Ext}_{\mathfrak{o}}^i(\mathfrak{m}, \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{B}}_n}^j(\beta_n^*(\mathbb{L}), \beta_n^*(\mathbb{L}'))) \Rightarrow \text{E}^{i+j} = \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{B}}_n^\alpha}^{i+j}(b_n(\mathcal{L}), b_n(\mathcal{L}'))$$

et les foncteurs exacts β_n^* et b_n induisent un morphisme de suites spectrales

$$(14.2.6) \quad u = (u_r^{i,j}, u^m) : E \rightarrow E'.$$

D'après 3.2(iii)-(iv), le morphisme canonique induit par (14.2.1)

$$(14.2.7) \quad u_2^{i,j} : \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n}^i(\mathfrak{m}, \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n}^j(\mathbb{L}, \mathbb{L}')) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{o}_n}^i(\mathfrak{m}, \text{Ext}_{\mathcal{B}_n}^j(\beta_n^*(\mathbb{L}), \beta_n^*(\mathbb{L}'))),$$

est un isomorphisme si $j = 0, 1$ et est un monomorphisme si $i = 0$ et $j = 2$. D'après 2.6, le morphisme canonique u^m (14.1.2) est un isomorphisme si $m = 0, 1$; et est un monomorphisme si $m = 2$.

Proposition 14.3. *Soient m un entier ≥ 1 et \mathcal{L}_m un objet de $\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(X_{\bar{\eta}, \text{fét}}, \mathfrak{o}_m^\alpha)$ (13.14) tels que le morphisme (14.1.2) induit par b_m*

$$(14.3.1) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{o}_m^\alpha}^i(\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_m) \rightarrow \text{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_m^\alpha}^i(b_m(\mathcal{L}_m), b_m(\mathcal{L}_m))$$

soit un isomorphisme pour $i = 0, 1$ et soit un monomorphisme pour $i = 2$. Supposons qu'il existe une déformation M de $b_m(\mathcal{L}_m)$ sur $\overline{\mathcal{B}}_{2m}^\alpha$ (12.31(ii), 13.9). Alors :

(i) *Il existe une déformation \mathcal{L}_{2m} de \mathcal{L}_m sur \mathfrak{o}_{2m}^α telle que $b_{2m}(\mathcal{L}_{2m})$ soit isomorphe à M en tant que déformation.*

(ii) *Le morphisme (14.1.2) induit par b_{2m}*

$$(14.3.2) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{o}_{2m}^\alpha}^i(\mathcal{L}_{2m}, \mathcal{L}_{2m}) \rightarrow \text{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_{2m}^\alpha}^i(b_{2m}(\mathcal{L}_{2m}), b_{2m}(\mathcal{L}_{2m}))$$

est un isomorphisme pour $i = 0, 1$ et est un monomorphisme pour $i = 2$.

Preuve. (i) On pose $I = p^m \mathfrak{o} / p^{2m} \mathfrak{o}$ et $I' = p^m \overline{\mathcal{B}} / p^{2m} \overline{\mathcal{B}}$. En vertu de 13.8, le foncteur b_{2m} induit un diagramme commutatif

$$(14.3.3) \quad \begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathfrak{o}_m^\alpha}^1(\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_m) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathfrak{o}_{2m}^\alpha}^1(\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_m) \\ & & \downarrow b_m & & \downarrow b_{2m} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_m^\alpha}^1(b_m(\mathcal{L}_m), b_m(\mathcal{L}_m)) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_{2m}^\alpha}^1(b_m(\mathcal{L}_m), b_m(\mathcal{L}_m)) \\ \\ \text{Ext}_{\mathfrak{o}_{2m}^\alpha}^1(\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_m) & \xrightarrow{u_1} & \text{Hom}_{\mathfrak{o}_m^\alpha}(I^\alpha \otimes_{\mathfrak{o}_m^\alpha} \mathcal{L}_m, \mathcal{L}_m) & \xrightarrow{\partial_1} & \text{Ext}_{\mathfrak{o}_m^\alpha}^2(\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_m) \\ \downarrow b_{2m} & & \downarrow b_m & & \downarrow b_m \\ \text{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_{2m}^\alpha}^1(b_m(\mathcal{L}_m), b_m(\mathcal{L}_m)) & \xrightarrow{u_2} & \text{Hom}_{\overline{\mathcal{B}}_m^\alpha}(I'^\alpha \otimes_{\overline{\mathcal{B}}_m^\alpha} b_m(\mathcal{L}_m), b_m(\mathcal{L}_m)) & \xrightarrow{\partial_2} & \text{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_m^\alpha}^2(b_m(\mathcal{L}_m), b_m(\mathcal{L}_m)) \end{array}$$

où la première (resp. seconde) ligne est la suite exacte (13.6.3) associée aux \mathfrak{o}_m^α -modules \mathcal{L}_m et \mathcal{L}_m (resp. $\overline{\mathcal{B}}_m^\alpha$ -modules $b_m(\mathcal{L}_m)$ et $b_m(\mathcal{L}_m)$). Notons w_1 (resp. w_2) l'isomorphisme (13.9.1) associé au \mathfrak{o}_m^α -module plat \mathcal{L}_m de $X_{\bar{\eta}, \text{fét}}$ (resp. $\overline{\mathcal{B}}_m^\alpha$ -module plat $b_m(\mathcal{L}_m)$). On a alors $b_m(w_1) = w_2$.

Comme il existe une déformation M de $b_m(\mathcal{L}_m)$ sur $\overline{\mathcal{B}}_{2m}^\alpha$, $\partial_2(w_2)$ est nul d'après 13.7(i). La dernière flèche verticale de (14.3.3) est injective. Par suite $\partial_1(w_1) = 0$. Compte tenu 13.7(i), il existe une déformation de \mathcal{L}_m sur \mathfrak{o}_{2m}^α . En vertu de 13.7(ii), l'assertion résulte du fait que la première flèche verticale du diagramme (14.3.3) est un isomorphisme.

(ii) Posons $\mathbb{L}_m = \tau_1(\mathcal{L}_m)$ et $\mathbb{L}_{2m} = \tau_1(\mathcal{L}_{2m})$. D'après (12.25.4) et (12.26.1), l'hypothèse revient à dire que le morphisme induit par β_m^*

$$(14.3.4) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{o}_m}^i(\mathbb{L}_m, \mathbb{L}_m) \rightarrow \text{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_m}^i(\beta_m^*(\mathbb{L}_m), \beta_m^*(\mathbb{L}_m))$$

est un isomorphisme pour $i = 0, 1$ et est un monomorphisme pour $i = 2$. De même, il suffit de démontrer la même propriété pour le morphisme induit par β_{2m}^*

$$(14.3.5) \quad \text{Ext}_{\mathfrak{o}_{2m}}^i(\mathbb{L}_{2m}, \mathbb{L}_{2m}) \rightarrow \text{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_{2m}}^i(\beta_{2m}^*(\mathbb{L}_{2m}), \beta_{2m}^*(\mathbb{L}_{2m})).$$

Comme τ_1 est exact, \mathbb{L}_{2m} est une extension de \mathbb{L}_m par \mathbb{L}_m . Par dévissage, il suffit de démontrer que le morphisme induit par β_{2m}^*

$$(14.3.6) \quad \mathrm{Ext}_{\mathfrak{o}_{2m}}^i(\mathbb{L}_m, \mathbb{L}_m) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_{2m}}^i(\beta_m^*(\mathbb{L}_m), \beta_m^*(\mathbb{L}_m))$$

est un isomorphisme pour $i = 0, 1$, et est un monomorphisme pour $i = 2$. Rappelons qu'on a deux suites spectrales (13.5)

$$(14.3.7) \quad E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{o}_m}^i(\mathcal{I}or_j^{\mathfrak{o}_{2m}}(\mathbb{L}_m, \mathfrak{o}_m), \mathbb{L}_m) \Rightarrow E^{i+j} = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{o}_{2m}}^{i+j}(\mathbb{L}_m, \mathbb{L}_m),$$

$$(14.3.8) \quad E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_m}^i(\mathcal{I}or_j^{\overline{\mathcal{B}}_{2m}}(\beta_m^*(\mathbb{L}_m), \overline{\mathcal{B}}_m), \beta_m^*(\mathbb{L}_m)) \Rightarrow E^{i+j} = \mathrm{Ext}_{\overline{\mathcal{B}}_{2m}}^{i+j}(\beta_m^*(\mathbb{L}_m), \beta_m^*(\mathbb{L}_m)).$$

et que le foncteur β_{2m}^* induit un morphisme de suites spectrales

$$(14.3.9) \quad u = (u_r^{i,j}, u^n) : E \rightarrow E'.$$

Comme $I \simeq \mathfrak{o}_m$, $I' \simeq \overline{\mathcal{B}}_m$, on en déduit, pour tout entier $j \geq 2$, des isomorphismes

$$(14.3.10) \quad \mathcal{I}or_j^{\mathfrak{o}_{2m}}(\mathbb{L}_m, \mathfrak{o}_m) \simeq \mathcal{I}or_{j-1}^{\mathfrak{o}_{2m}}(\mathbb{L}_m, \mathfrak{o}_m), \quad \mathcal{I}or_j^{\overline{\mathcal{B}}_{2m}}(\beta_m^*(\mathbb{L}_m), \overline{\mathcal{B}}_m) \simeq \mathcal{I}or_{j-1}^{\overline{\mathcal{B}}_{2m}}(\beta_m^*(\mathbb{L}_m), \overline{\mathcal{B}}_m)$$

Pour $j = 1$, on a $\mathcal{I}or_1^{\mathfrak{o}_{2m}}(\mathbb{L}_m, \mathfrak{o}_m) \simeq \mathbb{L}_m$ et $\mathcal{I}or_1^{\overline{\mathcal{B}}_{2m}}(\beta_m^*(\mathbb{L}_m), \overline{\mathcal{B}}_m) \simeq \beta_m^*(\mathbb{L}_m)$. Le morphisme $u_2^{i,j} : E_2^{i,j} \rightarrow E_2^{i,j}$ s'identifie alors au morphisme (14.3.4). D'après 2.6 et l'hypothèse, le morphisme u^i (14.3.6) est un isomorphisme si $i = 0, 1$ et est un monomorphisme si $i = 2$; d'où l'assertion.

Théorème 14.4. *Soient C une courbe propre et lisse sur \overline{K} , $\check{C} = C \otimes_{\overline{K}} \mathfrak{C}$ et F un fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{C} (6.12(i)). Alors, il existe un trait S' fini sur S , un S' -modèle semi-stable et régulier X de C (10.15) et un fibré vectoriel de Deninger-Werner et de Weil-Tate \mathcal{F} sur $\check{X} = X \times_{S'} \check{S}$ tel que $\mathcal{F}_{\check{\eta}} \simeq F$ (6.3, 10.4).*

Preuve. On fixe un entier $n \geq 1$. D'après 10.5, quitte à remplacer S par une extension finie, il existe un S -modèle semi-stable et régulier X de C et un fibré vectoriel de Deninger-Werner \mathcal{F} sur \check{X} de fibre générique F tel qu'on ait un isomorphisme

$$(14.4.1) \quad \gamma_n : \sigma_n^*(\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\sim} \beta_n^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{F})),$$

où $\mathbb{V}_n(\mathcal{F})$ est la \mathfrak{o}_n -représentation de $\pi_1(C, \bar{x})$ associée à \mathcal{F} (6.7). On note \mathbb{L}_n le \mathfrak{o}_n -module localement libre de type fini de $C_{\mathrm{fét}}^\alpha$ associé à $\mathbb{V}_n(\mathcal{F})$ (cf. (3.29.2)) et on pose $\mathcal{L}_n = \mathbb{L}_n^\alpha$.

On va démontrer par récurrence que pour tout entier $m \in \{2^l n \mid l \geq 0\}$ il existe un objet \mathcal{L}_m de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{ptf}}(C_{\mathrm{fét}}^\alpha, \mathfrak{o}_m^\alpha)$ vérifiant l'hypothèse de 14.3 et un isomorphisme de $\overline{\mathcal{B}}_m^\alpha$ -modules

$$(14.4.2) \quad \gamma_m : (\sigma_m^*(\mathcal{F}_m))^\alpha \xrightarrow{\sim} b_m(\mathcal{L}_m)$$

tels que les isomorphismes (γ_m) soient compatibles. L'assertion pour $m = n$ résulte de 14.2 et (14.4.1). Supposons que l'assertion soit vraie pour $m \geq n$ et montrons-là pour $2m$.

Le $\overline{\mathcal{B}}_{2m}$ -module $\sigma_{2m}^*(\mathcal{F}_{2m})$ est une déformation de $\sigma_m^*(\mathcal{F}_m)$ sur $\overline{\mathcal{B}}_{2m}$ 13.11(i). On l'identifie à une déformation de $b_m(\mathcal{L}_m)$ sur $\overline{\mathcal{B}}_{2m}^\alpha$ via le α -isomorphisme γ_m (14.4.2). D'après 14.3(i), il existe une déformation \mathcal{L}_{2m} de \mathcal{L}_m sur \mathfrak{o}_{2m}^α et un isomorphisme de $\overline{\mathcal{B}}_{2m}^\alpha$ -modules

$$(14.4.3) \quad \gamma_{2m} : (\sigma_{2m}^*(\mathcal{F}_{2m}))^\alpha \xrightarrow{\sim} b_{2m}(\mathcal{L}_{2m})$$

compatible avec γ_m . En vertu de 13.15(ii) et 14.3(ii), \mathcal{L}_{2m} est un objet de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{ptf}}(C_{\mathrm{fét}}^\alpha, \mathfrak{o}_{2m}^\alpha)$ et il satisfait l'hypothèse de 14.3.

Pour tout entier $m > n$, choisissons un entier $l \geq 0$ tel que $2^{l-1}n < m \leq 2^l n$ et posons $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{2^l n} \otimes_{\mathfrak{o}_{2^l n}^\alpha} \mathfrak{o}_m^\alpha$. On en déduit des isomorphismes compatibles

$$(14.4.4) \quad \gamma_m : (\sigma_m^*(\mathcal{F}_m))^\alpha \xrightarrow{\sim} b_m(\mathcal{L}_m).$$

On désigne par $\alpha\text{-}C_{\mathrm{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}$ (resp. $\alpha\text{-}\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$) la catégorie des α - \mathfrak{o} -modules de $C_{\mathrm{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}$ (resp. $\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$) (12.7). On pose $\mathfrak{d}^\alpha = \widetilde{\alpha}(\mathfrak{d})$ (resp. $\widetilde{\mathcal{B}}^\alpha = \widetilde{\alpha}(\widetilde{\mathcal{B}})$) (12.10.1) et on désigne par $\mathbf{Mod}(C_{\mathrm{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathfrak{d}^\alpha)$ la catégorie des \mathfrak{d}^α -modules

de $\alpha\text{-}C_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}$, et par $\mathbf{Mod}(\overset{\vee}{\mathcal{B}}^\alpha)$ la catégorie des $\overset{\vee}{\mathcal{B}}^\alpha$ -modules de $\alpha\text{-}\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$ (12.11). Posons $\check{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_m)_{m \geq 1}$ et $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_m)_{m \geq 1} \in \mathbf{P}(\mathbf{Mod}^{\text{ptf}}(C_{\text{fét}}^\alpha, \mathfrak{o}_\bullet^\alpha))$ (13.16) que l'on considère aussi comme un objet de $\mathbf{Mod}(C_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\mathfrak{o}}^\alpha)$ (cf. 12.34). Le foncteur $\check{\beta}^*$ induit un foncteur que l'on note (12.25)

$$(14.4.5) \quad b : \mathbf{Mod}(C_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\mathfrak{o}}^\alpha) \rightarrow \mathbf{Mod}(\overset{\vee}{\mathcal{B}}^\alpha).$$

Par l'équivalence de catégories $\mathbf{Mod}(\overset{\vee}{\mathcal{B}}^\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}}_\bullet^\alpha))$ (12.34.2), le $\overset{\vee}{\mathcal{B}}^\alpha$ -module $b(\mathcal{L})$ correspond au système projectif $(b_m(\mathcal{L}_m))_{m \geq 1}$. En vertu de 12.34, les isomorphismes compatibles (14.4.4) induisent un isomorphisme de $\overset{\vee}{\mathcal{B}}^\alpha$ -modules

$$(14.4.6) \quad \gamma : (\check{\sigma}^*(\check{\mathcal{F}}))^\alpha \xrightarrow{\sim} b(\mathcal{L}),$$

où $\check{\sigma}$ est le morphisme de topos annelés (7.12.1). En vertu de 13.18, il existe un $\check{\mathfrak{o}}$ -module localement libre de type fini \mathbb{L} de $C_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}$ tel que $\mathbb{L}_\mathbb{Q} \simeq \mathcal{L}_\mathbb{Q}$ dans la catégorie $\mathbf{Mod}_\mathbb{Q}(C_{\text{fét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\mathfrak{o}})$. En vertu de 12.22, on en déduit par (14.4.6) un isomorphisme de $\overset{\vee}{\mathcal{B}}_\mathbb{Q}$ -modules

$$(14.4.7) \quad (\check{\sigma}^*(\check{\mathcal{F}}))_\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} (\check{\beta}^*(\mathbb{L}))_\mathbb{Q},$$

d'où le théorème.

Corollaire 14.5. *Tout fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{C} est de Weil-Tate (10.16).*

Proposition 14.6. *La restriction du foncteur $\mathcal{V}_{\check{C}} : \mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{WT}} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\check{\mathfrak{E}}}^{\text{cont}}(\pi_1(C, \bar{x}))$ (10.18.1) à la sous-catégorie $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}}$ s'identifie au foncteur de Deninger-Werner $\mathbb{V}_{\check{C}}$ (6.14.1).*

Preuve. Soient F un fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{C} . D'après 14.4, quitte à remplacer S par une extension finie, il existe un S -modèle semi-stable et régulier X de C , un fibré vectoriel de Deninger-Werner et de Weil-Tate \mathcal{F} sur \check{X} de fibre générique F . En vertu de 8.21, on en déduit un isomorphisme de \mathfrak{E} -représentations continues de $\pi_1(C, \bar{x})$:

$$(14.6.1) \quad \mathbb{V}_{\check{C}}(F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{\check{C}}(F).$$

Il reste à démontrer que celui-ci est fonctoriel en F . Soit $f : F \rightarrow F'$ un morphisme $\mathfrak{V}_{\check{C}}^{\text{DW}}$. En vertu de 5.8 et 14.4, quitte à remplacer S par une extension finie, il existe un S -modèle semi-stable et régulier X de C et deux fibrés vectoriels de Deninger-Werner et de Weil-Tate \mathcal{F} et \mathcal{F}' sur \check{X} tels que $\mathcal{F}_{\check{\eta}} \simeq F$ et $\mathcal{F}'_{\check{\eta}} \simeq F'$. D'après (5.13.1), f s'étend en un morphisme de \mathcal{F} à \mathcal{F}' . La functorialité de (14.6.1) résulte alors de 8.21.

15. Appendice I. Compléments d'algèbre homologique

15.1. On se donne une catégorie abélienne \mathcal{A} ayant suffisamment d'injectifs, un complexe borné inférieurement K^\bullet de \mathcal{A} et un objet X de \mathcal{A} . Choisissons $L^{\bullet, \bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de K^\bullet . La suite spectrale d'hypercohomologie ([18] (0.11.4.3.2))

$$(15.1.1) \quad E_2^{i,j} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, H^j(K^\bullet)) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathbf{RHom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, K^\bullet)),$$

est la suite spectrale du bicomplexe $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, L^{\bullet, \bullet})$ associée à la filtration canonique $F_{\text{II}}^l = (\sum_{i+j=n, l \geq i} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, L^{\bullet, i}))_{n \in \mathbb{Z}}$ ([18] 0.11.3.2). Rappelons la construction de cette dernière. Pour la page 0, on a ([49] 5.6.2)

$$(15.1.2) \quad E_0^{i,j} = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, L^{j,i}),$$

et le morphisme $d_0^{i,j} : E_0^{i,j} \rightarrow E_0^{i,j+1}$ est induit par la différentielle $L^{j,i} \rightarrow L^{j+1,i}$.

Notons, pour tous entiers i et l , $Z_1^l(L^{\bullet, i})$ (resp. $B_1^l(L^{\bullet, i})$, resp. $H_1^l(L^{\bullet, i})$) le l -ième sous-groupe des cocycles (resp. cobords, resp. groupe de cohomologie) du complexe $(L^{j,i})_{j \in \mathbb{Z}}$. Le complexe $(Z_1^l(L^{\bullet, i}))_{i \geq 0}$ (resp.

$(B_1^l(L^{\bullet,i}))_{i \geq 0}$, resp. $(H_1^l(L^{\bullet,i}))_{i \geq 0}$ est une résolution injective de $Z^l(K^\bullet)$ (resp. $B^l(K^\bullet)$, resp. $H^l(K^\bullet)$) (cf. [18] 0.11.4.2). On a alors ([49] 5.6.2)

$$(15.1.3) \quad E_1^{i,j} = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, H_1^j(L^{\bullet,i})).$$

Le morphisme $d_1^{i,j} : E_1^{i,j} \rightarrow E_1^{i+1,j}$ est induit par la différentielle $H^j(L^{\bullet,i}) \rightarrow H^j(L^{\bullet,i+1})$. On en déduit

$$(15.1.4) \quad E_2^{i,j} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, H^j(K^\bullet)).$$

15.2. On se donne de plus une catégorie abélienne \mathcal{A}' ayant suffisamment d'injectifs et un foncteur *exact* $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$. Soient K'^\bullet un complexe borné inférieurement de \mathcal{A}' et $g : F(K^\bullet) \rightarrow K'^\bullet$ un morphisme de complexes. On désigne par E' la suite spectrale d'hypercohomologie

$$(15.2.1) \quad E_2^{i,j} = \text{Ext}_{\mathcal{A}'}^i(F(X), H^j(K'^\bullet)) \Rightarrow E'^{i+j} = H^{i+j}(\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A}')} (F(X), K'^\bullet)).$$

Choisissons une résolution injective de Cartan-Eilenberg $L'^{\bullet,\bullet}$ de K'^\bullet . On notera que $F(L^{\bullet,\bullet})$ est encore une résolution de Cartan-Eilenberg de $F(K^\bullet)$ (mais pas nécessairement injective). Le morphisme g s'étend en un morphisme de bicomplexes ([18] 0.11.4.2, cf. aussi [9] XVII 1.2)

$$(15.2.2) \quad G : F(L^{\bullet,\bullet}) \rightarrow L'^{\bullet,\bullet}.$$

On en déduit par le foncteur F un morphisme de bicomplexes

$$(15.2.3) \quad \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, L^{\bullet,\bullet}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(X), L'^{\bullet,\bullet})$$

et par suite un morphisme de suites spectrales ([18] 0.11.2.3)

$$(15.2.4) \quad u = (u_r^{i,j}, u^n) : E \rightarrow E'.$$

15.3. Le morphisme G (15.2.2) induit au morphisme $(u_0^{i,j} : E_0^{i,j} \rightarrow E_0'^{i,j})_{i,j}$ de u (15.1.2) et il induit, pour tout entier j , un morphisme de complexes

$$(15.3.1) \quad (F(H_1^j(L^{\bullet,i})))_{i \geq 0} \rightarrow (H_1^j(L'^{\bullet,i}))_{i \geq 0}.$$

Le morphisme composé, induit par celui-ci et le foncteur exact F ,

$$(15.3.2) \quad \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, H_1^j(L^{\bullet,i})) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(X), F(H_1^j(L^{\bullet,i}))) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(X), H_1^j(L'^{\bullet,i}))$$

s'identifie au morphisme $u_1^{i,j}$ de u (15.1.3). Les morphismes $(u_1^{i,j})_{i,j}$ induisent le morphisme $u_2^{i,j}$ (15.1.4)

$$(15.3.3) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, H^j(K^\bullet)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}'}^i(F(X), H^j(K'^\bullet))$$

En outre, le morphisme de complexes g induit, pour tout entier j , un morphisme de groupes de cohomologie

$$(15.3.4) \quad F(H^j(K^\bullet)) \simeq H^j(F(K^\bullet)) \rightarrow H^j(K'^\bullet).$$

Rappelons que le complexe $(H_1^j(L^{\bullet,i}))_{i \geq 0}$ (resp. $(H_1^j(L'^{\bullet,i}))_{i \geq 0}$) est une résolution injective de $H^j(K^\bullet)$ (resp. $H^j(K'^\bullet)$). Le morphisme de complexes (15.3.1) étend le morphisme (15.3.4). Le morphisme $u_2^{i,j}$ (15.3.3) s'identifie alors au morphisme composé

$$(15.3.5) \quad \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, H^j(K^\bullet)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}'}^i(F(X), F(H^j(K^\bullet))) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}'}^i(F(X), H^j(K'^\bullet)),$$

où la première flèche est le morphisme canonique (2.3.2) induit par le foncteur exact F et la seconde flèche est induite par (15.3.4).

15.4. Le morphisme g et le foncteur exact F induisent, pour tout entier n , un morphisme (2.3.2)

$$(15.4.1) \quad E^n = \text{Ext}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}^n(X, K^\bullet) \rightarrow E'^n = \text{Ext}_{\mathbf{D}(\mathcal{A}')}^n(F(X), K'^\bullet),$$

qui n'est autre que le morphisme u^n de u .

15.5. Reprenons les notations de 12.27. On considère le cas où $\mathcal{A} = \mathcal{A}' = \mathbf{Mod}(\mathfrak{o})$ et on prend pour F le foncteur identique et pour X le \mathfrak{o} -module \mathfrak{m} . Choisissons I^\bullet (resp. I'^\bullet) une résolution injective de N (resp. $\varphi^*(N)$) et posons $K^\bullet = \mathrm{Hom}_A(M, I^\bullet)$ et $K'^\bullet = \mathrm{Hom}_{A'}(\varphi^*(M), I'^\bullet)$. On a alors un morphisme de complexes $\varphi^*(I^\bullet) \rightarrow I'^\bullet$ et par suite un morphisme de complexes $g : K^\bullet \rightarrow K'^\bullet$. On notera que, dans ce cas, la suite spectrale (12.24.3) s'identifie à la suite spectrale (15.1.1). Appliquant ce qui précède, on en déduit le morphisme de suites spectrales u (12.27.1) et la description des morphismes $u_2^{i,j}$ et u^n .

15.6. On considère le cas dual de 15.2. On se donne deux catégories abéliennes \mathcal{A} et \mathcal{A}' ayant suffisamment d'objets projectifs, un foncteur *exact* $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ et X un objet de \mathcal{A} . Soient K^\bullet un complexe borné supérieurement de \mathcal{A} , K'^\bullet un complexe borné supérieurement de \mathcal{A}' et $g : K'^\bullet \rightarrow F(K^\bullet)$ un morphisme de complexes. En remplaçant les résolutions injectives par les résolutions projectives, on construit un morphisme $u : E \rightarrow E'$ entre les deux suites spectrales d'hypercohomologie

$$(15.6.1) \quad E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(\mathrm{H}^j(K^\bullet), X) \quad \Rightarrow \quad E^{i+j} = \mathrm{H}^{i+j}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(K^\bullet, X)),$$

$$(15.6.2) \quad E_2'^{i,j} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}'}^i(\mathrm{H}^j(K'^\bullet), F(X)) \quad \Rightarrow \quad E'^{i+j} = \mathrm{H}^{i+j}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A}')} (K'^\bullet, F(X))).$$

De même, les morphismes $u_2^{i,j}$ et u^n s'identifient aux morphismes canoniques induits par le morphisme g et le foncteur exact F .

15.7. Reprenons les notations de 13.5. On considère le cas où $\mathcal{A} = \mathbf{Mod}(A)$ et $\mathcal{A}' = \mathbf{Mod}(A')$ et on prend pour F le foncteur exact φ^* et pour X le A -module J . Choisissons $P^\bullet \rightarrow A_0$ (resp. $P'^\bullet \rightarrow A'_0$) une résolution projective de A -modules (resp. A' -modules) et posons $K^\bullet = M_0 \otimes_A P^\bullet$ et $K'^\bullet = \varphi^*(M_0) \otimes_{A'} P'^\bullet$. Comme $A'_0 = \varphi^*(A_0)$, on a alors un morphisme de complexes $P'^\bullet \rightarrow \varphi^*(P^\bullet)$. Il induit un morphisme de complexes $g : K'^\bullet \rightarrow \varphi^*(K^\bullet)$. On notera que, dans ce cas, la suite spectrale (13.4.2) s'identifie à la suite spectrale (15.6.1). Appliquant ce qui précède, on en déduit le morphisme de suites spectrales u (13.5.3) et la description des morphismes $u_2^{i,j}$ et u^n .

16. Appendice II. Admissibilité des fibrés vectoriels de Deninger-Werner : une démonstration simplifiée, d'après Tsuji

16.1. Soit X une S -courbe à réduction semi-stable (5.9). On pose $\overline{X} = X \times_S \overline{S}$, $\check{X} = X \times_S \check{S}$, $C = X_{\overline{\eta}}$ et $\check{C} = C \times_{\overline{K}} \check{\mathcal{C}}$ (2.1.1). On désigne par \tilde{E} le topos de Faltings associé au S -schéma X (7.1), par \tilde{E}_s sa fibre spéciale (7.10), par $\overline{\mathcal{B}}$ l'anneau structural de \tilde{E} (7.8) et, pour tout $n \geq 1$, par $\overline{\mathcal{B}}_n$ l'anneau $\overline{\mathcal{B}}/p^n \overline{\mathcal{B}}$ qui est un objet de \overline{E}_s (7.10). On note $\check{\overline{\mathcal{B}}}$ l'anneau $(\overline{\mathcal{B}}_n)_{n \geq 1}$ de $\tilde{E}_s^{\mathrm{N}^\circ}$ (2.11).

Rappelons qu'on a des morphismes de topos (7.3)

$$\Psi : C_{\mathrm{ét}} \rightarrow \tilde{E}, \quad \beta : \tilde{E} \rightarrow C_{\mathrm{fét}}, \quad \sigma : \tilde{E} \rightarrow X_{\mathrm{ét}}.$$

On note $\delta : \tilde{E}_s \rightarrow \tilde{E}$ et $d : X_{s,\mathrm{ét}} \rightarrow X_{\mathrm{ét}}$ les morphismes canoniques. Le morphisme σ induit un morphisme $\sigma_s : \tilde{E}_s \rightarrow X_{s,\mathrm{ét}}$ (7.11.1). Les morphismes σ_s et $\beta \circ \delta$ induisent des morphismes de topos annelés (cf. 7.12 et 7.13)

$$\begin{aligned} (X_{s,\mathrm{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}_n}) &\xleftarrow{\sigma_n} (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \xrightarrow{\beta_n} (C_{\mathrm{fét}}, \mathfrak{o}_n), \\ (X_{s,\mathrm{ét}}^{\mathrm{N}^\circ}, \mathcal{O}_{\check{X}}) &\xleftarrow{\check{\sigma}} (\tilde{E}_s^{\mathrm{N}^\circ}, \check{\overline{\mathcal{B}}}) \xrightarrow{\check{\beta}} (C_{\mathrm{fét}}^{\mathrm{N}^\circ}, \check{\mathfrak{o}}), \end{aligned}$$

où $\mathcal{O}_{\check{X}}$ (resp. $\check{\mathfrak{o}}$) désigne l'anneau $(\mathcal{O}_{\overline{X}_n})_{n \geq 1}$ de $X_{s,\mathrm{ét}}^{\mathrm{N}^\circ}$ (resp. $(\mathfrak{o}_n)_{n \geq 1}$ de $C_{\mathrm{fét}}^{\mathrm{N}^\circ}$).

16.2. Soient n un entier ≥ 1 et \mathbb{L} un \mathfrak{o}_n -module localement libre de type fini de $C_{\mathrm{fét}}$. D'après 7.16, pour tout $i \geq 1$, on a $R^i \Psi_*(\rho^*(\mathbb{L})) = 0$. Comme $\beta^* \xrightarrow{\sim} \Psi_* \rho^*$ (7.3.8), on en déduit un isomorphisme canonique

$$(16.2.1) \quad \mathrm{H}^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(C_{\mathrm{ét}}, \rho^*(\mathbb{L})).$$

D'après le théorème de comparaison de Faltings (7.19), on a un α -isomorphisme canonique

$$(16.2.2) \quad \mathrm{H}^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(\tilde{E}, \beta^*(\mathbb{L}) \otimes_{\mathfrak{o}_n} \overline{\mathcal{B}}_n).$$

D'après (16.2.1) et (16.2.2), on déduit un α -isomorphisme canonique

$$(16.2.3) \quad H^i(C_{\text{ét}}, \rho^*(\mathbb{L})) \xrightarrow{\sim} H^i(\tilde{E}_s, \beta_n^*(\mathbb{L})).$$

16.3. Soient (S', η') un trait fini sur (S, η) (2.1), X' un S' -modèle à réduction semi-stable de C et $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ un morphisme de S' -modèles. On désigne par $(\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n)$ le topos annelé associé au S' -schéma X' (16.1) et par $\Phi_n : (\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_n) \rightarrow (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n)$ le morphisme de topos annelés induit par φ (8.3).

Proposition 16.4. *Soit \mathcal{M} un $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module plat. Supposons qu'il existe un \mathfrak{o}_1 -module localement libre de type fini \mathbb{L} de $C_{\text{fét}}$ tel que $\beta_1^*(\mathbb{L}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}/p\mathcal{M}$. Alors, le morphisme canonique induit par Φ_n :*

$$(16.4.1) \quad H^i(\tilde{E}_s, \mathcal{M}) \rightarrow H^i(\tilde{E}'_s, \Phi_n^*(\mathcal{M})).$$

est un α -isomorphisme.

Preuve. On désigne par β'_1 le morphisme de topos annelés $(\tilde{E}'_s, \overline{\mathcal{B}}'_1) \rightarrow (C_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_1)$ (16.1). On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & H^i(C_{\text{ét}}, \rho^*(\mathbb{L})) & \\ & \swarrow & \searrow \\ H^i(\tilde{E}_s, \beta_1^*(\mathbb{L})) & \xrightarrow{\Phi_1^*} & H^i(\tilde{E}'_s, \beta_1^*(\mathbb{L})) \end{array}$$

où les flèches obliques sont des α -isomorphismes (16.2.3). L'assertion pour $n = 1$ s'ensuit compte tenu (8.3.14). Comme \mathcal{M} est plat, on déduit le cas général par dévissage.

Corollaire 16.5. *Soient $\mathcal{M}_n, \mathcal{M}'_n$ deux $\overline{\mathcal{B}}_n$ -modules localement libres de type fini et $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1$ leur réduction modulo p . Supposons qu'il existe deux \mathfrak{o}_1 -modules localement libres de type fini \mathbb{L}, \mathbb{L}' de $C_{\text{fét}}$ tels que $\beta_1^*(\mathbb{L}) \simeq \mathcal{M}_1$ et $\beta_1^*(\mathbb{L}') \simeq \mathcal{M}'_1$.*

(i) *Le morphisme canonique induit par Φ_n :*

$$(16.5.1) \quad g : \text{Hom}_{\overline{\mathcal{B}}_n}(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}'_n) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\overline{\mathcal{B}}'_n}(\Phi_n^*(\mathcal{M}_n), \Phi_n^*(\mathcal{M}'_n)).$$

est un α -isomorphisme.

(ii) *On pose $\overline{\mathcal{B}}_n^\alpha = \tilde{\alpha}(\overline{\mathcal{B}}_n)$ et $\overline{\mathcal{B}}'_n{}^\alpha = \tilde{\alpha}(\overline{\mathcal{B}}'_n)$ (12.10) et on utilise $(-)^{\alpha}$ pour désigner la classe d'un $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module dans $\mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}}_n^\alpha)$ (12.11) (resp. un $\overline{\mathcal{B}}'_n$ -module dans $\mathbf{Mod}(\overline{\mathcal{B}}'_n{}^\alpha)$). Le α -isomorphisme g (16.5.1) induit un isomorphisme*

$$(16.5.2) \quad \text{Hom}_{\overline{\mathcal{B}}_n^\alpha}(\mathcal{M}_n^\alpha, \mathcal{M}'_n{}^\alpha) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\overline{\mathcal{B}}'_n{}^\alpha}(\Phi_n^*(\mathcal{M}_n)^\alpha, \Phi_n^*(\mathcal{M}'_n)^\alpha).$$

Preuve. (i) Comme \mathbb{L} et \mathcal{M}_n sont localement libres de type fini, on a des isomorphismes canoniques

$$\beta_1^*(\mathcal{H}om_{\mathfrak{o}_1}(\mathbb{L}, \mathbb{L}')) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\overline{\mathcal{B}}_1}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1), \quad \Phi_n^*(\mathcal{H}om_{\overline{\mathcal{B}}_1}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\overline{\mathcal{B}}'_n}(\Phi_n^*(\mathcal{M}_n), \Phi_n^*(\mathcal{M}'_n)).$$

L'assertion résulte alors de 16.4 appliqué à $\mathcal{M} = \mathcal{H}om_{\overline{\mathcal{B}}_n}(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}'_n)$.

(ii) D'après 12.14(ii) et 12.24(iii), le morphisme (16.5.2) coïncide avec le morphisme

$$\text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, g) : \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, \text{Hom}_{\overline{\mathcal{B}}_n}(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}'_n)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}, \text{Hom}_{\overline{\mathcal{B}}'_n}(\Phi_n^*(\mathcal{M}_n), \Phi_n^*(\mathcal{M}'_n))),$$

induit par g . L'assertion résulte alors de 3.2(i).

16.6. Dans la suite, nous utilisons 9.11 et 16.5(ii) pour démontrer la $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -admissibilité des fibrés vectoriels de Deninger-Werner sur \check{X} (10.4). Pour ce faire, on a besoin quelques compléments au théorème 9.11.

Lemme 16.7. *Soient $\varphi_1 : Y_1 \rightarrow X, \varphi_2 : Y_2 \rightarrow X$ deux η -revêtements finis et galoisiens (5.4). Alors, il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) , un η' -revêtement fini, galoisien, à fibres géométriquement réduites $\varphi : Z \rightarrow X_{S'}$ et pour $i = 1, 2$, un morphisme équivariant de φ dans $\varphi_i \times_S S'$ (5.4).*

Preuve. Il existe un trait S' fini sur S et une composante irréductible Y de $(Y_1 \times_X Y_2) \times_S S'$ tels que la fibre générique de Y soit géométriquement connexe. Le morphisme $Y \rightarrow X_{S'}$ est alors un η' -revêtement fini, galoisien et les morphismes $Y \rightarrow Y_{1,S'}, Y \rightarrow Y_{2,S'}$ sont équivariants. D'après ([20] Thm. 2.0), il existe un trait S'' fini sur S' tel que la normalisation Z de $Y_{S''}$ ait une fibre spéciale géométriquement réduite. Le morphisme canonique $Z \rightarrow X_{S''}$ est alors un η'' -revêtement fini, galoisien, à fibres géométriquement réduites et vérifie les conditions recherchées.

16.8. Soient \mathcal{F} un fibré vectoriel sur \bar{X} et n un entier ≥ 1 . Supposons que \mathcal{F} vérifie la condition suivant :

- (*) il existe un trait (S', η') fini sur (S, η) et un η' -revêtement fini, galoisien et à fibres géométriquement réduites $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$ tels que, fixant un η -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow \eta'$, $\bar{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ soit libre de type fini, où $\bar{\varphi} = \varphi \times_{S'} \bar{S}$.

Le fibré \mathcal{F} est alors de Deninger-Werner (6.3). Soit \bar{x} un \bar{K} -point de C . On pose $C' = X'_{\bar{\eta}}$ et $G = \text{Aut}(C'/C)$. Considérant \bar{x} comme un \bar{S} -point de \bar{X} , la représentation $\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n)$ de $\pi_1(C, \bar{x})$ associée est définie par la fibre $\bar{x}_n^*(\mathcal{F}_n)$ en \bar{x} et l'action de G sur $\bar{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(X'_s)$ (cf. 6.7). En considérant $\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n)$ comme un \mathfrak{o}_n -module de $C'_{\text{fét}}$, on obtient un isomorphisme canonique G -équivariant de \mathfrak{o}_n -modules constants de $C'_{\text{fét}}$ (cf. 9.11.5)

$$(16.8.1) \quad u : \bar{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(X'_s) \xrightarrow{\sim} \varphi_{\bar{\eta}, \text{fét}}^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n)).$$

On désigne par \tilde{E}^\sharp le topos de Faltings associé au morphisme $C' \rightarrow X$, par $\Phi : \tilde{E}^\sharp \rightarrow \tilde{E}$ le morphisme de topos induit par $(C' \rightarrow X) \rightarrow (C \rightarrow X)$ ([4] VI.10.14), et par $\bar{\mathcal{B}}_n^\sharp$ l'anneau $\Phi^{-1}(\bar{\mathcal{B}}_n)$. L'isomorphisme G -équivariant (16.8.1) induit un isomorphisme G -équivariant de $\bar{\mathcal{B}}_n^\sharp$ -modules libres de type fini (9.11.9)

$$(16.8.2) \quad \Phi^*(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{\sim} \Phi^*(\beta_n^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n))).$$

Par descente (9.5), on en déduit un isomorphisme $\bar{\mathcal{B}}_n$ -linéaire (cf. preuve de 9.11)

$$(16.8.3) \quad \gamma_n : \sigma_n^*(\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\sim} \beta_n^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n)).$$

Lemme 16.9. *Conservons les hypothèses de 16.8. L'isomorphisme (16.8.3) est indépendant du choix du trait S' fini sur S et du η' -revêtement $\varphi : X' \rightarrow X_{S'}$.*

Preuve. Soient (S'', η'') un trait fini sur (S, η) et $\psi : X'' \rightarrow X_{S''}$ un η'' -revêtement fini, galoisien et à fibres géométriquement réduites qui trivialise \mathcal{F}_n . D'après 16.7, on peut supposer que S'' est fini sur S' et qu'il existe un morphisme équivariant $\phi : X'' \rightarrow X'_{S''}$ de η'' -revêtement de $X_{S''}$.

On pose $C'' = X''_{\bar{\eta}}$ et $H = \text{Aut}(C''/C)$. Comme $\bar{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ et $\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ sont localement libres de type fini et X' (resp. X'') est cohomologiquement plat de dimension 0 sur S' (resp. S''), on a un isomorphisme canonique de \mathfrak{o}_n -modules

$$(16.9.1) \quad \bar{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(X'_s) \xrightarrow{\sim} \bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n)(X''_s).$$

Comme ϕ est équivariant, l'action de G à gauche est compatible avec l'action de H à droite via la surjection $H \rightarrow G$. On en déduit que la construction de la représentation $\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n)$ ne dépend pas du choix du trait S' et du η' -revêtement φ à isomorphisme près (6.8).

D'après (16.8.1), on a un isomorphisme H -équivariant de \mathfrak{o}_n -modules constants de $C''_{\text{fét}}$

$$(16.9.2) \quad v : \bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n)(X''_s) \xrightarrow{\sim} \psi_{\bar{\eta}, \text{fét}}^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n)).$$

L'image inverse par $\phi_{\bar{\eta}} : C'' \rightarrow C'$ de l'isomorphisme u (16.8.1) coïncide avec l'isomorphisme v via (16.9.1).

On désigne par \tilde{E}^\natural le topos de Faltings associé au morphisme canonique $C'' \rightarrow X$ et par $\Psi : \tilde{E}^\natural \rightarrow \tilde{E}$ (resp. $\Xi : \tilde{E}^\natural \rightarrow \tilde{E}^\sharp$) le morphisme de topos induit par $C'' \rightarrow C$ (resp. $C'' \rightarrow C'$). L'isomorphisme H -équivariant v (16.9.2) induit un isomorphisme H -équivariant de \tilde{E}^\natural (9.11.9)

$$(16.9.3) \quad \Psi^*(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{\sim} \Psi^*(\beta_n^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n))).$$

Comme $\phi_{\bar{\eta}, \text{fét}}^*(u) = v$, l'image inverse par Ξ de l'isomorphisme (16.8.2) est l'isomorphisme (16.9.3). L'assertion s'ensuit.

16.10. Soient (T, τ) un trait fini sur (S, η) , Y un T -modèle semi-stable de C et $\psi : Y \rightarrow X_T$ un morphisme de T -modèles de C . Fixant un η -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow \tau$, on pose $\bar{Y} = Y \times_T \bar{S}$ et

$$\bar{\psi} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$$

le morphisme canonique. On désigne par $(\tilde{E}_{Y,s}, \bar{\mathcal{B}}_{Y,n})$ le topos annelé associé au T -schéma Y (16.1), par

$$(16.10.1) \quad \Psi_n : (\tilde{E}_{Y,s}, \bar{\mathcal{B}}_{Y,n}) \rightarrow (\tilde{E}_s, \bar{\mathcal{B}}_n)$$

le morphisme induit par ψ , et par $\sigma_{Y,n}$ and $\beta_{Y,n}$ les morphismes canoniques de topos annelés

$$\sigma_{Y,n} : (\tilde{E}_{Y,s}, \bar{\mathcal{B}}_{Y,n}) \rightarrow (Y_{s,\text{ét}}, \mathcal{O}_{\bar{Y}_n}), \quad \beta_{Y,n} : (\tilde{E}_{Y,s}, \bar{\mathcal{B}}_{Y,n}) \rightarrow (C_{\text{fét}}, \mathfrak{o}_n).$$

Lemme 16.11. *Conservons les hypothèses de 16.8 et 16.10. Alors,*

(i) *le fibré vectoriel $\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ sur \bar{Y}_n vérifie la condition (*) de 16.8 et on a un isomorphisme canonique de $\bar{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -modules*

$$(16.11.1) \quad \gamma_{Y,n} : \sigma_{Y,n}^*(\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{\sim} \beta_{Y,n}^*(\mathbb{V}_{\bar{Y}_n}(\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n))),$$

où $\mathbb{V}_{\bar{Y}_n}(\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n))$ désigne la représentation associée au fibré vectoriel de Deninger-Werner $\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ sur \bar{Y}_n ;

(ii) *l'image inverse par Ψ_n (16.10.1) de l'isomorphisme γ_n (16.8.3) est l'isomorphisme $\gamma_{Y,n}$.*

Preuve. Les η -morphisms $\bar{\eta} \rightarrow \eta'$ et $\bar{\eta} \rightarrow \tau$ déterminent une composante irréductible S'' de $S' \times_S T$. On note η'' le point générique de S'' et on pose $Z = (X' \times_X Y)_{(S' \times_S T)S''}$. Le morphisme $Z \rightarrow X_{S''}$ est un η'' -revêtement fini et galoisien et le morphisme $Z \rightarrow X'$ est G -équivariant. D'après ([20] Thm. 2.0), il existe un trait (T', τ') fini sur (S'', η'') tel que la normalisation Y' de $Z_{T'}$ ait une fibre spéciale géométriquement réduite. L'action de G sur Z s'étend en une action sur Y' .

Fixant un η'' -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow \tau'$, on pose $\bar{Y}' = Y \times_{T'} \bar{S}$. On désigne par ϕ le τ' -revêtement fini, galoisien, à fibres géométriquement réduites $Y' \rightarrow Y_{T'}$ et par $\bar{\phi}$ le morphisme canonique $\bar{Y}' \rightarrow \bar{Y}$. Le fibré vectoriel $\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n)$ est trivialisé par $\bar{\phi}$ et vérifie alors la condition (*) de 16.8. La représentation $\mathbb{V}_{\bar{Y}_n}(\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n))$ de $\pi_1(C, \bar{x})$ associée, est induite par l'action de G sur $\bar{\phi}_n^*(\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n))(Y'_s)$. Le morphisme canonique $\bar{Y}' \rightarrow \bar{X}'$ induit un isomorphisme G -équivariant

$$(16.11.2) \quad \bar{\varphi}_n^*(\mathcal{F}_n)(X'_s) \xrightarrow{\sim} \bar{\phi}_n^*(\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n))(Y'_s).$$

On en déduit que les représentations $\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{V}_{\bar{Y}_n}(\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n))$ sont isomorphes (cf. 6.10(ii)).

On a un isomorphisme G -équivariant de \mathfrak{o}_n -modules constants de $C'_{\text{fét}}$ (16.8.1)

$$(16.11.3) \quad v : \bar{\phi}_n^*(\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n))(Y'_s) \xrightarrow{\sim} \varphi_{\bar{\eta}, \text{fét}}^*(\mathbb{V}_{\bar{Y}_n}(\bar{\psi}_n^*(\mathcal{F}_n))).$$

L'isomorphisme $\gamma_{Y,n}$ est induit par v (cf. preuve de 9.11). D'après (16.11.2), l'isomorphisme v est compatible avec u (16.8.1).

On note abusivement u (resp. v) l'isomorphisme des \mathfrak{o}_n -modules sous-jacents à u (resp. v). Soient $\rho(\bar{c} \rightsquigarrow \bar{y})$ un point de $\tilde{E}_{Y,s}$ (7.6), $\rho(\bar{c} \rightsquigarrow \psi(\bar{y}))$ l'image du point $\rho(\bar{c} \rightsquigarrow \bar{y})$ dans \tilde{E}_s et $\rho(\bar{c}' \rightsquigarrow \psi(\bar{y}))$ un point de $\tilde{E}^\#$ au-dessus de $\rho(\bar{c} \rightsquigarrow \psi(\bar{y}))$. La fibre de l'isomorphisme γ_n en $\rho(\bar{c} \rightsquigarrow \bar{x})$ est égal à la fibre de l'isomorphisme (16.8.2) en $\rho(\bar{c}' \rightsquigarrow \psi(\bar{y}))$. En vertu de la preuve de 9.11, ce dernier coïncide avec l'isomorphisme

$$(\bar{\mathcal{B}}_n)_{\rho(\bar{c} \rightsquigarrow \psi(\bar{y}))} \otimes_{\mathfrak{o}_n} u.$$

De même, la fibre de l'isomorphisme $\gamma_{Y,n}$ en $\rho(\bar{c} \rightsquigarrow \bar{y})$ coïncide avec l'isomorphisme

$$(\bar{\mathcal{B}}_{Y,n})_{\rho(\bar{c} \rightsquigarrow \bar{y})} \otimes_{\mathfrak{o}_n} v.$$

L'assertion résulte alors de la compatibilité entre u et v .

Proposition 16.12. *Soit \mathcal{F} un fibré vectoriel sur \check{X} vérifiant la condition (*) de 16.8 pour $n = 1$. Alors, il existe un isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{Mod}(\check{\mathcal{B}})_{\mathbb{Q}}$ des $\check{\mathcal{B}}$ -modules à isogénie près :*

$$(16.12.1) \quad \check{\sigma}^*(\mathcal{F})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \check{\beta}^*(\mathbb{V}(\mathcal{F}))_{\mathbb{Q}}.$$

Preuve. D'après 5.11(iii), pour tout $n \geq 1$, il existe un trait $S^{(n)}$ fini sur S , un $S^{(n)}$ -modèle semi-stable $X^{(n)}$ de C et un $S^{(n)}$ -morphisme $\varphi^{(n)} : X^{(n)} \rightarrow X_{S^{(n)}}$ de $S^{(n)}$ -modèles de C tels que fixant un S -morphisme $\bar{S} \rightarrow S^{(n)}$, l'image inverse de \mathcal{F}_n sur $\bar{X}_n^{(n)} = X^{(n)} \times_{S^{(n)}} \bar{S}$ vérifie la condition (*) de 16.8 pour n . On prend $(X^{(1)}, S^{(1)}) = (X, S)$. D'après 5.8 et 16.11, on peut supposer de plus que $\{X^{(n)}/S^{(n)}\}_{n \geq 1}$ forment un système inverse et que chaque $X^{(n)}$ a une réduction semi-stable sur $S^{(n)}$.

Pour tout $n \geq m \geq 1$, $l \geq 1$, on désigne par $(\tilde{E}_s^{(n)}, \bar{\mathcal{B}}_l^{(n)})$ le topos annelé associée au $S^{(n)}$ -schéma $X^{(n)}$ (16.1) et par $\Phi_l^{(n,m)}$ le morphisme de topos annelés $(\tilde{E}_s^{(n)}, \bar{\mathcal{B}}_l^{(n)}) \rightarrow (\tilde{E}_s^{(m)}, \bar{\mathcal{B}}_l^{(m)})$ induit par $X^{(n)} \rightarrow X^{(m)}$. On note simplement $\Phi_l^{(n)}$ pour $\Phi_l^{(n,1)}$. D'après (8.3.13), (8.3.14) et 9.11, pour tout $n \geq 1$, on a un isomorphisme $\bar{\mathcal{B}}_n^{(n)}$ -linéaire

$$(16.12.2) \quad \gamma_n : \Phi_n^{(n)*}(\sigma_n^*(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{\sim} \Phi_n^{(n)*}(\beta_n^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n))).$$

D'après 16.9 and 16.11, l'image inverse par $\Phi_m^{(n,m)}$ de l'isomorphisme γ_m est la réduction modulo p^m de γ_n .

On pose $\mathcal{M}_n = \beta_n^*(\mathbb{V}_n(\mathcal{F}_n))$ et $\mathcal{M}'_n = \sigma_n^*(\mathcal{F}_n)$. Appliquant 16.5(ii) au morphisme de topos annelés $\Phi_n^{(n)}$, on obtient un isomorphisme de $\bar{\mathcal{B}}_n^\alpha$ -modules

$$(16.12.3) \quad \varepsilon_n : \mathcal{M}_n^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'_n^\alpha,$$

qui est envoyé à γ_n^α via l'isomorphisme (16.5.2). Comme les $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ sont compatibles, on en déduit que $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ sont compatibles. On obtient alors un isomorphisme de $\bar{\mathcal{B}}^\alpha$ -modules

$$((\mathcal{M}_n)_{n \geq 1})^\alpha \xrightarrow{\sim} ((\mathcal{M}'_n)_{n \geq 1})^\alpha.$$

L'assertion s'ensuit de 12.22.

Corollaire 16.13. *Tout fibré vectoriel de Deninger-Werner sur \check{C} est de Weil-Tate.*

Preuve. L'assertion résulte de 10.5 et 16.12.

Bibliographie

- [1] A. Abbes, *Réduction semi-stable des courbes d'après Artin, Deligne, Grothendieck, Mumford, Saito, Winters...*, dans "Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique", J.-B. Bost, F. Loeser et M. Raynaud (éditeurs), Progress in Mathematics 187, Birkhäuser (2000), 59-110.
- [2] A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide : Volume I. Construction et étude géométrique des espaces rigides*. Springer, (2010).
- [3] A. Abbes, M. Gros, *La suite spectrale de Hodge-Tate*, prépublication (2015), arXiv :1509.03617.
- [4] A. Abbes, M. Gros, T. Tsuji, *The p-adic Simpson correspondence*, Annals of Mathematics Studies Vol. 193, Princeton University Press (2016).
- [5] P. Achinger. *K($\pi, 1$)-neighborhoods and comparison theorems*; Compositio Mathematica, 151(10) (2015), 1945–1964.
- [6] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, SGA 4, Springer-Verlag, Tome 1, LNM 269 (1972); Tome 2, LNM 270 (1972); Tome 3, LNM 305 (1973).
- [7] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, SGA 6, Springer-Verlag, LNM 225 (1971).
- [8] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. *Néron models*, Springer-Verlag, (1990).
- [9] H. Cartan et S. Eilenberg. *Homological algebra*, Princeton University Press (1956).
- [10] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chapitres 1-9, Hermann (1985).
- [11] M. Demazure, A. Grothendieck. *Schémas en groupes*, SGA3, Springer-Verlag, LNM 151-153, (1970).
- [12] P. Deligne P, J. S. Milne. *Tannakian categories in Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*. Springer-Verlag, LNM 900 (1981), 101-228.
- [13] C. Deninger, A. Werner. *Vector bundles and p-adic representations I*; preprint (2003), arXiv :0309.273.
- [14] C. Deninger, A. Werner. *Vector bundles on p-adic curves and parallel transport*; Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. Vol. 38. No. 4 (2005) : 553-597.
- [15] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, SGA 1, Springer-Verlag, LNM 224, (1971).
- [16] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique I*, Seconde édition, Springer-Verlag (1971).
- [17] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Éléments de Géométrie Algébrique I*. Publ. Math. IHÉS 4 (1960).
- [18] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique, III Étude cohomologique des faisceaux cohérents*. Publ. Math. IHÉS 11 (1961), 17 (1963).
- [19] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique, IV Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*. Pub. Math. IHÉS 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).
- [20] H.P. Epp. *Eliminating wild ramification*; Inventiones mathematicae 19.3 (1973), 235-249.
- [21] G. Faltings, *p-adic Hodge theory*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 255-299.
- [22] G. Faltings, *Almost étale extensions*, dans Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. II, Astérisque 279 (2002), 185-270.
- [23] G. Faltings, *A p-adic Simpson correspondence*, Adv. Math. 198 (2005), 847-862.
- [24] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bulletin de la Société Mathématique de France 90 (1962) : 323-448.
- [25] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag (1971).
- [26] D. Gieseker, *Stable vector bundles and the Frobenius morphism*; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure Vol. 6. No.1 (1973), 95-101.
- [27] O. Gabber, L. Ramero, *Almost Ring Theory*; Springer-Verlag, LNM 1800 (2003).
- [28] O. Gabber, L. Ramero, *Foundations for Almost Ring Theory Release 6.8*; preprint, arXiv :math/0409584, (2004).
- [29] L. Illusie, *Complexe cotangente et déformations I*. Springer-Verlag, LNM 239, (1971).

- [30] L. Illusie, *Produits orientés*, dans *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents*, Séminaire à l'École Polytechnique dirigé par L. Illusie, Y. Laszlo et F. Orgogozo ; Astérisque 363-364 (2014).
- [31] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie* ; Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), (1989), 191-224.
- [32] S. Lichtenbaum, *Curves over discrete valuation rings* ; Am. J. Math. 90 (1968), 380–405.
- [33] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* ; Oxford university press, (2002).
- [34] Q. Liu. *Stable reduction of finite covers of curves* ; Compositio Mathematica 142(01) (2006) : 101-118.
- [35] L. Moret-Bailly, *Métriques permises* ; Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque, 127 (1985), 29-88.
- [36] J.S Milne. *Etale Cohomology* (PMS). No. 33. Princeton University Press, 1980.
- [37] D. Mumford, *Abelian variety*, Oxford University Press (1970).
- [38] M.S. Narasimhan, C.S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. 82 (1965), 540-567.
- [39] M. Raynaud, *Spécialisation du foncteur de Picard* ; Publ. Math. IHÉS, 38, (1970) 27-76.
- [40] M. Raynaud, *p-groupes et réduction semi-stable des courbes*, in The Grothendieck Festschrift, vol. III, eds P. Cartier et al., Progress in Mathematics, vol. 88 (Birkhäuser, Basel, 1990), 179-197.
- [41] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité* ; Inventiones mathematicae 13.1 (1971), 1-89.
- [42] T. Saito, *Log smooth extension of a family of curves and semi-stable reduction* ; Journal of Algebraic Geometry, 13(2), (2004), 287-322.
- [43] P. Scholze, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties* ; Forum of Mathematics, Pi. Cambridge University Press, 1 : e1, (2013).
- [44] J-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*. Hermann, 1975.
- [45] C. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Publ. Math. IHÉS, 75 (1992), 5-95.
- [46] J. Tate, *p-divisible groups* ; Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, Berlin, 158-183 (1967).
- [47] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Inventiones mathematicae 36 (1976), 257-274.
- [48] J. Tong, *Application d'Albanese pour les courbes et contractions* ; Mathematische Annalen 338 (2007), 405–420.
- [49] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra* ; Cambridge university press, 1995.
- [50] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2015.

Lifting the Cartier transform of Ogus–Vologodsky modulo p^n

Abstract

Let W be the ring of the Witt vectors of a perfect field of characteristic p , \mathfrak{X} a smooth formal scheme over W , \mathfrak{X}' the base change of \mathfrak{X} by the Frobenius morphism of W , \mathfrak{X}'_2 the reduction modulo p^2 of \mathfrak{X}' and X the special fiber of \mathfrak{X} . We lift the Cartier transform of Ogus–Vologodsky defined by \mathfrak{X}'_2 modulo p^n [33]. More precisely, we construct a functor from the category of p^n -torsion $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -modules with integrable p -connection to the category of p^n -torsion $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules with integrable connection, each subject to suitable nilpotence conditions. Our construction is based on Oyama’s reformulation of the Cartier transform of Ogus–Vologodsky in characteristic p [34]. If there exists a lifting $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ of the relative Frobenius morphism of X , our functor is compatible with a functor constructed by Shiho from F [36]. As an application, we give a new interpretation of Faltings’ relative Fontaine modules [13] and of the computation of their cohomology.

Contents

1. Introduction	115
2. Notations and conventions	122
3. Blow-ups and dilatations	123
4. Hopf algebras and groupoids	127
5. Connections and stratifications	133
6. Local constructions of Shiho	140
7. Oyama topoi	144
8. Crystals in Oyama topoi	152
9. Cartier transform of Ogus–Vologodsky	162
10. Prelude on rings of differential operators	170
11. Comparison with the Cartier transform of Ogus–Vologodsky	178
12. Fontaine modules	188
13. The Fontaine module structure on the crystalline cohomology of a Fontaine module	199

1. Introduction

1.1. In their seminal work [12], Deligne and Illusie gave a purely algebraic proof of the degeneracy of the Hodge to de Rham spectral sequence in characteristic zero. Their proof is based on a decomposition of the de Rham complex of a smooth variety in positive characteristic.

Let k be a perfect field of characteristic $p > 0$, W the ring of Witt vectors of k , X a smooth scheme over k and X' the base change of X by the Frobenius morphism $F_k : k \rightarrow k$. We put $W_2 = W/p^2W$ and we denote by $F_{X/k} : X \rightarrow X'$ the relative Frobenius morphism of X . Deligne and Illusie proved the following:

- (i) If there exist smooth W_2 -schemes \tilde{X} and \tilde{X}' and a W_2 -morphism $\tilde{F} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ lifting $F_{X/k}$, then \tilde{F} induces a quasi-isomorphism

$$(1.1.1) \quad \bigoplus_{i \geq 0} \Omega_{X'/k}^i[-i] \xrightarrow{\sim} F_{X/k*}(\Omega_{X/k}^\bullet),$$

where $\Omega_{X/k}^\bullet$ denotes the de Rham complex of X over k .

- (ii) If there exists (only) a smooth lifting \tilde{X}' of X' over W_2 , then there exists an isomorphism in the derived category $D^b(\mathcal{O}_{X'})$ of $\mathcal{O}_{X'}$ -modules

$$(1.1.2) \quad \bigoplus_{i=1}^{p-1} \Omega_{X'/k}^i[-i] \xrightarrow{\sim} F_{X/k*}(\tau_{<p}(\Omega_{X/k}^\bullet)),$$

where $\tau_{<p}$ denotes the truncation of a complex in degrees $< p$.

Ogus and Vologodsky developed in [33] an analogue of Deligne–Illusie’s results for the sheaf of PD-differential operators. Their construction leads to an analogue of Simpson correspondence [35] in characteristic p . Recall that Simpson classifies (complex) finite-dimensional linear representations of the topological fundamental group of a smooth and projective complex variety in terms of Higgs modules. If X is a smooth scheme over a field K , a *Higgs module* on X/K is an \mathcal{O}_X -module together with an \mathcal{O}_X -linear morphism $\theta : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/K}^1$, called *Higgs field*, such that $\theta \wedge \theta = 0$. By the integrability condition, θ fits into a complex, called *the Dolbeault complex of (M, θ)* in ([35] p. 24 and [2] I.2.3) or *the Higgs complex of (M, θ)* in ([33] p. 2),

$$M \xrightarrow{\theta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/K}^1 \xrightarrow{\wedge \theta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/K}^2 \xrightarrow{\wedge \theta} \cdots.$$

1.2. We keep the assumption and notation as in 1.1 and let \tilde{X}' be a smooth lifting of X' over W_2 as in 1.1(ii). Ogus and Vologodsky constructed a functor $C_{\tilde{X}'}^{-1}$ called the (*inverse*) *Cartier transform*, from the category $\text{HIG}(X'/k)$ of Higgs modules on X'/k to the category $\text{MIC}(X/k)$ of \mathcal{O}_X -modules with integrable connection relative to k , each subject to suitable nilpotence conditions. They also proved a comparison isomorphism of complexes, which extended that of Deligne–Illusie (1.1.2). In the following, we recall a special case of their construction.

Let ℓ be an integer ≥ 0 . We say that a Higgs module (M, θ) on X/k is *nilpotent of level $\leq \ell$* if there exists an increasing filtration N_\bullet on M such that $N_0 = 0, N_{\ell+1} = M$ and that $\theta(N_i) \subset N_{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1$ for all i . We say that an \mathcal{O}_X -module M with integrable connection ∇ is *nilpotent of level $\leq \ell$* if its p -curvature is nilpotent of level $\leq \ell$ (as an F-Higgs field) ([21] 5.6). We denote by $\text{HIG}_{p-1}(X'/k)$ (resp. $\text{MIC}_{p-1}(X/k)$) the full subcategory of $\text{HIG}(X'/k)$ (resp. $\text{MIC}(X/k)$) consisting of nilpotent objects of level $\leq p-1$. The Cartier transform induces an equivalence of categories ([33] Thm. 2.8)

$$(1.2.1) \quad C_{\tilde{X}'}^{-1} : \text{HIG}_{p-1}(X'/k) \xrightarrow{\sim} \text{MIC}_{p-1}(X/k).$$

Considering an $\mathcal{O}_{X'}$ -module as a Higgs module on X'/k with zero Higgs field, the above equivalence recovers the Cartier descent ([21] 5.1).

Let (M', θ') be a nilpotent Higgs module on X'/k of level $\ell < p$ and $(M, \nabla) = C_{\tilde{X}'}^{-1}(M', \theta')$ (1.2.1). Then there exists an isomorphism in the derived category $D(\mathcal{O}_{X'})$ ([33] 2.27)

$$(1.2.2) \quad \tau_{<p-\ell}(M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^\bullet) \xrightarrow{\sim} F_{X/k*}(\tau_{<p-\ell}(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet)),$$

where $M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^\bullet$ is the Dolbeault complex of (M', θ') and $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet$ is the de Rham complex of (M, ∇) .

1.3. Faltings developed a p -adic analogue of Simpson correspondence [35] for p -adic local systems on varieties over p -adic fields [14]. The relation between Faltings' p -adic Simpson correspondence and the Cartier transform is not yet understood. The first difficulty is to lift the Cartier transform modulo p^n . Shiho [36] constructed a “local” lifting of the Cartier transform modulo p^n under the assumption of a lifting of the relative Frobenius morphism modulo p^{n+1} as in 1.1(i) above. In [34], Oyama gave a new construction of the Cartier transform of Ogus–Vologodsky as the inverse image by a morphism of topoi. His work is inspired by Tsuji's approach to the p -adic Simpson correspondence ([2] IV). In this article, we use Oyama topoi to “glue” Shiho's functor and obtain a lifting of the Cartier transform modulo p^n under the (only) assumption that X lifts to a smooth formal scheme over W .

1.4. Shiho's construction relies on the notion of λ -connections introduced by Deligne. Let $f : X \rightarrow S$ be a smooth morphism of schemes, M an \mathcal{O}_X -module and $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. A λ -connection on M relative to S is an $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ -linear morphism $\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ such that $\nabla(xm) = x\nabla(m) + \lambda m \otimes d(x)$ for every local sections x of \mathcal{O}_X and m of M . Classically, 1-connections are called connections. We define the integrability of λ -connections in the same way as for connections. Integrable 0-connections are nothing but Higgs fields. We denote by $\text{MIC}(X/S)$ (resp. $\lambda\text{-MIC}(X/S)$) the category of \mathcal{O}_X -modules with integrable connection (resp. λ -connection) relative to S .

1.5. In the following, if we use a gothic letter \mathfrak{X} to denote an adic formal W -scheme, the corresponding roman letter T will denote its special fiber. Let \mathfrak{X} be a smooth formal scheme over W and n an integer ≥ 1 . We denote by $\sigma : W \rightarrow W$ the Frobenius automorphism of W , by \mathfrak{X}' the base change of \mathfrak{X} by σ and by \mathfrak{X}_n the reduction of \mathfrak{X} modulo p^n . In [36], Shiho constructed a “local” lifting modulo p^n of the Cartier transform of Ogus–Vologodsky defined by \mathfrak{X}'_2 , under the assumption that there exists a lifting $F_{n+1} : \mathfrak{X}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{X}'_{n+1}$ of the relative Frobenius morphism $F_{X/k} : X \rightarrow X'$ of X .

The image of the differential morphism $dF_{n+1} : F_{n+1}^*(\Omega_{\mathfrak{X}'_{n+1}/W_{n+1}}^1) \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}_{n+1}/W_{n+1}}^1$ of F_{n+1} is contained in $p\Omega_{\mathfrak{X}_{n+1}/W_{n+1}}^1$. Dividing by p , it induces an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -linear morphism

$$dF_{n+1}/p : F_n^*(\Omega_{\mathfrak{X}'_n/W_n}^1) \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}_n/W_n}^1.$$

Shiho defined the functor ([36] 2.5)

$$(1.5.1) \quad \begin{aligned} \Phi_n : p\text{-MIC}(\mathfrak{X}'_n/W_n) &\rightarrow \text{MIC}(\mathfrak{X}_n/W_n) \\ (M', \nabla') &\mapsto (F_n^*(M'), \nabla) \end{aligned}$$

where $\nabla : F_n^*(M') \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}_n/W_n}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} F_n^*(M')$ is the integrable connection defined for every local sections f of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ and e of M' by

$$(1.5.2) \quad \nabla(fF_n^*(e)) = f(\text{id} \otimes \frac{dF_{n+1}}{p})(F_n^*(\nabla'(e))) + df \otimes (F_n^*(e)).$$

Shiho showed that the functor Φ_n induces an equivalence of categories between the full subcategories of $p\text{-MIC}(\mathfrak{X}'_n/W_n)$ and of $\text{MIC}(\mathfrak{X}_n/W_n)$ consisting of quasi-nilpotent objects ([36] Thm. 3.1). For $n = 1$, Ogus and Vologodsky proved that the functor Φ_1 is compatible with the Cartier transform $C_{\mathfrak{X}'_2}^{-1}$ (1.2) defined by \mathfrak{X}'_2 ([33] Thm. 2.11; [36] 1.12).

1.6. Let (\mathcal{T}, A) be a ringed topos. A Hopf A -algebra is the data of a ring B of \mathcal{T} together with five homomorphisms

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} B, \quad \delta : B \rightarrow B \otimes_A B \text{ (comultiplication),} \quad \pi : B \rightarrow A \text{ (counit),} \quad \sigma : B \rightarrow B \text{ (antipode),}$$

where the tensor product $B \otimes_A B$ is taken on the left (resp. right) for the A -algebra structure of B defined by d_2 (resp. d_1), satisfying the compatibility conditions for coalgebras (cf. 4.2, [4] II 1.1.2).

A B -stratification on an A -module M is a B -linear isomorphism

$$(1.6.1) \quad \varepsilon : B \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A B$$

where the tensor product is taken on the left (resp. right) for the A -algebra structure defined by d_2 (resp. d_1), satisfying $\pi^*(\varepsilon) = \text{id}_M$ and a cocycle condition (cf. 5.5).

1.7. The main example of a Hopf algebra is given by the PD-envelope of the diagonal immersion. Let \mathfrak{X} be a smooth formal W -scheme, \mathfrak{X}^2 the product of two copies of \mathfrak{X} over W . For any $n \geq 1$, we denote by $P_{\mathfrak{X}_n}$ the PD-envelope of the diagonal immersion $\mathfrak{X}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n^2$ compatible with the canonical PD-structure on (W_n, pW_n) . The schemes $\{P_{\mathfrak{X}_n}\}_{n \geq 1}$ form an adic inductive system and we denote by $P_{\mathfrak{X}}$ the associated adic formal W -scheme. The $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -bialgebra $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ of $\mathfrak{X}_{\text{zar}}$ is naturally equipped with a formal Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebra structure (i.e. for every $n \geq 1$, a Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -algebra structure on $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}}$, which are compatible) (cf. 4.8, 5.15).

A quasi-nilpotent integrable connection relative to W_n on an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module M (cf. 5.3) is equivalent to an $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ -stratification on M ([5] 4.12). Following Shiho [36], we give below an analogue description of p -connections; the relevant Hopf algebra is constructed by dilatation (certain distinguished open subset of admissible blow-up) in formal geometry.

1.8. We define by dilatation an adic formal \mathfrak{X}^2 -scheme $R_{\mathfrak{X}}$ satisfying the following conditions (3.12).

(i) The canonical morphism $R_{\mathfrak{X},1} \rightarrow X^2$ factors through the diagonal immersion $X \rightarrow X^2$.

(ii) Let $X \rightarrow \mathfrak{X}^2$ be the diagonal immersion. For any flat formal W -scheme \mathfrak{Y} (2.6) and any W -morphisms $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ and $g : Y \rightarrow X$ which fit into the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

there exists a unique W -morphism $f' : \mathfrak{Y} \rightarrow R_{\mathfrak{X}}$ lifting f .

We denote abusively by $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ the direct image of $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ via the morphism $R_{\mathfrak{X},\text{zar}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{zar}}$ (i). Using the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$, we show that $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ is equipped with a formal Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebra structure (4.12).

The diagonal immersion $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ induces a closed immersion $\iota : \mathfrak{X} \rightarrow R_{\mathfrak{X}}$ (3.6). For any $n \geq 1$, we denote by $T_{\mathfrak{X},n}$ the PD-envelope of $\iota_n : \mathfrak{X}_n \rightarrow R_{\mathfrak{X},n}$ compatible with the canonical PD-structure on (W_n, pW_n) . The schemes $\{T_{\mathfrak{X},n}\}_{n \geq 1}$ form an adic inductive system and we denote by $T_{\mathfrak{X}}$ the associated adic formal W -scheme. By the universal property of PD-envelope, the formal Hopf algebra structure on $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ extends to a formal Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebra structure on the $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -bialgebra $\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}}}$ of $\mathfrak{X}_{\text{zar}}$ (5.20).

In ([36] Prop. 2.9), Shiho showed that for any $n \geq 1$ and any $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module M , an $\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}}}$ -stratification on M is equivalent to a quasi-nilpotent integrable p -connection on M (cf. 5.22).

1.9. In fact, we need a fourth Hopf algebra, introduced firstly by Oyama [34], that we construct also by dilatation. For any k -scheme Y , we denote by \underline{Y} the closed subscheme of Y defined by the ideal sheaf of \mathcal{O}_Y consisting of the sections of \mathcal{O}_Y whose p th power is zero. In (3.12, 4.10), we construct an adic formal \mathfrak{X}^2 -scheme $Q_{\mathfrak{X}}$ satisfying the following conditions.

(i) The canonical morphism $Q_{\mathfrak{X},1} \rightarrow X^2$ factors through the diagonal immersion $X \rightarrow X^2$.

(ii) For any flat formal W -scheme \mathfrak{Y} and any W -morphisms $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ and $g : \underline{Y} \rightarrow X$ which fit into the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \underline{Y} & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

there exists a unique W -morphism $f' : \mathfrak{Y} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$ lifting f .

We denote abusively by $\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}$ the direct image of $\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}$ via the morphism $Q_{\mathfrak{X},\text{zar}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{zar}}$ (i). Using the universal property of $Q_{\mathfrak{X}}$, we show that $\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}$ is equipped with a formal Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebra structure (4.12).

Let $P_{\mathfrak{X}}$ be the formal \mathfrak{X}^2 -scheme defined in 1.7, $\iota : \mathfrak{X} \rightarrow P_{\mathfrak{X}}$ the canonical morphism lifting the diagonal immersion $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ and \mathcal{J} the PD-ideal of $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ associated to ι_1 . For any local section of \mathcal{J} , we have $x^p = p!x^{[p]} = 0$. Then we deduce a closed immersion $\underline{P}_{\mathfrak{X}} \rightarrow X$ over \mathfrak{X}^2 . By the universal property of $Q_{\mathfrak{X}}$, we obtain an \mathfrak{X}^2 -morphism $\lambda : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$. The later induces a homomorphism of formal Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebras $\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}} \rightarrow \mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ (5.17).

1.10. Suppose that there exists a lifting $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X . By the universal properties of $R_{\mathfrak{X}'}$ and of PD-envelope, the morphism $F^2 : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}'^2$ induce morphisms $\psi : Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$ (6.9) and $\varphi : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow T_{\mathfrak{X}'}$ (6.11) above F^2 which fit into a commutative diagram (6.12.1)

$$(1.10.1) \quad \begin{array}{ccc} P_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\varphi} & T_{\mathfrak{X}'} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \varpi \\ Q_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\psi} & R_{\mathfrak{X}'} \end{array}$$

where $\varpi : T_{\mathfrak{X}'} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$ (1.8) and $\lambda : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$ (1.9) are independent of F . Moreover, ψ and φ induce homomorphisms of formal Hopf algebras $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}'}} \rightarrow F_*(\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}})$ and $\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}'}} \rightarrow F_*(\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}})$. The above diagram induces a commutative diagram (6.12.2)

$$(1.10.2) \quad \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{category of } \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}'}}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\psi_n^*} & \left\{ \begin{array}{l} \text{category of } \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \\ \varpi_n^* \downarrow & & \downarrow \lambda_n^* \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{category of } \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}'}}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\varphi_n^*} & \left\{ \begin{array}{l} \text{category of } \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \end{array}$$

In ([36] 2.17), Shiho showed that the functor φ_n^* is compatible with the functor Φ_n defined by F (1.5.1), via the equivalence between the category of modules with quasi-nilpotent integrable connection (resp. p -connection) and the category of modules with $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ -stratification (resp. $\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}}}$ -stratification).

We will show that ψ_n^* can be identified with the inverse image functor of a morphism of ringed topoi defined by Oyama (1.3). The identification of ψ_n^* with this inverse image functor depends on the liftings of X and its Frobenius morphism, but the topoi themselves do not.

1.11. Let X be a scheme over k . Following Oyama [34], we define two categories \mathcal{E} and $\underline{\mathcal{E}}$ associated to X as follows. An object of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) is a triple (U, \mathfrak{T}, u) consisting of an open subscheme U of X , a flat formal W-scheme \mathfrak{T} and an affine k -morphism $u : T \rightarrow U$ (resp. $u : \underline{T} \rightarrow U$ (1.9)). Morphisms are defined in a natural way (cf. 7.1). We denote by \mathcal{E}' Oyama's category associated to the k -scheme X' .

Let (U, \mathfrak{T}, u) be an object of $\underline{\mathcal{E}}$. The relative Frobenius morphism $F_{T/k} : T \rightarrow T'$ factors through a k -morphism $f_{T/k} : T \rightarrow \underline{T}'$. We have a commutative diagram

$$(1.11.1) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{u} & \underline{T} & \hookrightarrow & T \\ F_{U/k} \downarrow & & F_{\underline{T}/k} \downarrow & \swarrow f_{T/k} & \downarrow F_{T/k} \\ U' & \xleftarrow{u'} & \underline{T}' & \hookrightarrow & T' \end{array}$$

where the vertical arrows denote the relative Frobenius morphisms. Then $(U', \mathfrak{T}, u' \circ f_{T/k})$ is an object of \mathcal{E}' . We obtain a functor (7.4.2)

$$(1.11.2) \quad \rho : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}', \quad (U, \mathfrak{T}, u) \mapsto (U', \mathfrak{T}, u' \circ f_{T/k}).$$

We say that a family of morphisms $\{(U_i, \mathfrak{T}_i, u_i) \rightarrow (U, \mathfrak{T}, u)\}_{i \in I}$ of $\underline{\mathcal{E}}$ is a *Zariski covering* if we have

$$U = \cup_{i \in I} U_i, \quad \text{and} \quad T_i \xrightarrow{\sim} T \times_U U_i, \quad \forall i \in I.$$

We say that a family of morphisms $\{(U_i, \mathfrak{T}_i, u_i) \rightarrow (U, \mathfrak{T}, u)\}_{i \in I}$ of $\underline{\mathcal{E}}$ is a *Zariski covering* if its image under ρ (1.11.2) is a Zariski covering of \mathcal{E}' . These coverings form a pretopology on $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). We denote by $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}$) the topos of sheaves of sets on $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). The functor ρ is fully faithful, continuous and cocontinuous (7.20). Then, it induces a morphism of topoi (7.21.1)

$$(1.11.3) \quad C_{X/W} : \tilde{\underline{\mathcal{E}}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}'}$$

such that its inverse image functor is induced by the composition with ρ .

1.12. For any object (U, \mathfrak{T}, u) of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) and any open subscheme V of U , we denote by \mathfrak{T}_V the open formal subscheme of \mathfrak{T} associated to the open subscheme $T \times_{u, U} V$ (resp. $T \times_{u' \circ f_{T/k}, U'} V'$ (1.11.2)) of T . For any sheaf \mathcal{F} of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}$), the contravariant functor $V \mapsto \mathcal{F}(V, \mathfrak{T}_V)$ defines a sheaf of U_{zar} that we denote by $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T}, u)}$.

1.13. Let n be an integer ≥ 1 . The contravariant functor $(U, \mathfrak{T}, u) \mapsto \Gamma(\mathfrak{T}, \mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})$ defines a sheaf of rings on $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) that we denote by $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$). By definition, we have $C_{X/W}^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$.

For any object (U, \mathfrak{T}, u) of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), we consider $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ as a sheaf on T (resp. \underline{T}). Then we have

$$(\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n})_{(U, \mathfrak{T}, u)} = u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}) \quad (\text{resp. } (\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n})_{(U, \mathfrak{T}, u)} = u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})).$$

To give an $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -module (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -module) \mathcal{F} amounts to give the following data (8.4):

- (i) For every object (U, \mathfrak{T}, u) of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), an $u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})$ -module $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ of U_{zar} (1.12).
- (ii) For every morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1, u_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), an $u_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{1,n}})$ -linear morphism

$$c_f : u_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{1,n}}) \otimes_{(u_{2*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{2,n}}))|_{U_1}} (\mathcal{F}_{(U_2, \mathfrak{T}_2)})|_{U_1} \rightarrow \mathcal{F}_{(U_1, \mathfrak{T}_1)},$$

satisfying a cocycle condition for the composition of morphisms as in ([5] 5.1).

Following ([5] 6.1), we say that \mathcal{F} is a *crystal* if c_f is an isomorphism for every morphism f and that \mathcal{F} is *quasi-coherent* if $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ is a quasi-coherent $u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})$ -module of U_{zar} for every object (U, \mathfrak{T}, u) . We denote by $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n})$) the category of crystals of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -modules (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -modules). We use the notation $\mathcal{C}^{\text{qcoh}}(-)$ to denote the full subcategory consisting of quasi-coherent crystals.

For any object (U, \mathfrak{T}, u) of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), the functor u_* induces an equivalence of categories between the category of quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -modules of $\mathfrak{T}_{n, \text{zar}}$ and the category of quasi-coherent $u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})$ -modules of U_{zar} (8.7). If \mathcal{F} is a quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -module (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -module), for any object (U, \mathfrak{T}, u) , we can equivalently consider $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ as a quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -module of $\mathfrak{T}_{n, \text{zar}}$.

Proposition 1.14 (8.18). *Let \mathfrak{X} be a smooth formal \mathcal{S} -scheme and X its special fiber. There exists a canonical equivalence of categories between the category $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n})$) and the category of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules with $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ -stratification (resp. $\mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}$ -stratification) (1.6, 1.8, 1.9).*

Theorem 1.15 (8.13). *Let X be a smooth k -scheme. Then, for any $n \geq 1$, the inverse image and the direct image functors of the morphism $C_{X/W}$ (1.11.3) induce equivalences of categories quasi-inverse to each other*

$$(1.15.1) \quad \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}) \rightleftarrows \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}).$$

The theorem is proved by fppf descent for quasi-coherent modules.

We call *Cartier transform modulo p^n* the equivalence of categories $C_{X/W}^*$ (1.15.1).

Given a smooth formal W -scheme \mathfrak{X} with special fiber X , when $n = 1$, Oyama proved 1.15 and showed that the inverse image functor $C_{X/W}^*$ is compatible with the Cartier transform $C_{\mathfrak{X}'_2}^{-1}$ of Ogus–Vologodsky defined by the lifting \mathfrak{X}'_2 of X' (1.2) (cf. [34] section 1.5). In section 11, we reprove the later result in a different way (11.30).

Proposition 1.16 (8.21). *Let \mathfrak{X} be a smooth formal W -scheme, X its special fiber, $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ a lifting of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X and ψ_n^* the functor defined by F in (1.10.2). Then, the following*

diagram (1.14)

$$(1.16.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}) & \xrightarrow{C_{X/W}^*} & \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}) \\ \downarrow \wr \mu & & \downarrow \wr \nu \\ \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}'}}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\psi_n^*} & \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \end{array}$$

is commutative up to a functorial isomorphism. That is, for every crystal \mathcal{M} of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}'$, we have a canonical functorial isomorphism

$$(1.16.2) \quad \eta_F : \psi_n^*(\mu(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \nu(C_{X/W}^*(\mathcal{M})).$$

In the diagram (1.16.1), while $C_{X/W}^*$ does not depend on models of X , ψ_n^* depends on the lifting F of the relative Frobenius morphism and the vertical functors μ and ν depend on the formal model \mathfrak{X} of X . The isomorphism η_F depends also on F .

By 1.10, the equivalence of categories $C_{X/W}^*$ (1.15.1) is compatible with Shiho's functor Φ_n defined by F (1.5.1).

1.17. In [15], Fontaine and Laffaille introduced the notion of *Fontaine module* to study p -adic Galois representations. It is inspired by the work of Mazur ([29], [30]) and Ogus ([5], § 8) on Katz conjecture. Let $\sigma : W \rightarrow W$ be the Frobenius endomorphism and $K_0 = W[\frac{1}{p}]$. A Fontaine module is a triple $(M, M^\bullet, \varphi^\bullet)$ consisting of a W -module of finite length M , a decreasing filtration $\{M^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ such that $M^0 = M$, $M^p = 0$ and W -linear morphisms

$$(1.17.1) \quad \varphi^i : W \otimes_{\sigma, W} M^i \rightarrow M, \quad 0 \leq i \leq p-1,$$

such that $\varphi^i|_{M^{i+1}} = p\varphi^{i+1}$ and $\sum_{i=0}^{p-1} \varphi^i(M^i) = M$. The φ^i 's are called *divided Frobenius morphisms*.

The main result of Fontaine–Laffaille is the construction of a fully faithful and exact functor from the category of Fontaine modules of length $\leq p-2$ to the category of torsion \mathbb{Z}_p -representations of the Galois group G_{K_0} of K_0 ([38] Thm. 2). Its essential image consists of torsion crystalline representations of G_{K_0} with weights $\leq p-2$ (cf. [7] 3.1.3.3).

Fontaine and Messing showed that there exists a natural Fontaine module structure on the crystalline cohomology of a smooth proper scheme \mathcal{X} over W of relative dimension $\leq p-1$ ([16] II.2.7). Then they deduced the degeneration of the Hodge to de Rham spectral sequence of \mathcal{X}_n/W_n .

1.18. A generalisation of Fontaine modules in a relative situation was proposed by Faltings in [13]. Relative Fontaine modules can be viewed as an analogue of variation of Hodge structures on smooth formal schemes over W . Let $\mathfrak{X} = \text{Spf}(R)$ be an affine smooth formal scheme over W , X its special fiber and $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ a σ -lifting of the absolute Frobenius morphism F_X of X . A *Fontaine module over \mathfrak{X} with respect to F* is a quadruple $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi_F^\bullet)$ made of a coherent, torsion $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module M , an integrable connection ∇ on M , a decreasing exhaustive filtration M^\bullet on M of length at most $p-1$ satisfying Griffiths' transversality, and a family of divided Frobenius morphisms $\{\varphi_F^\bullet\}$ as in (1.17.1) satisfying a compatibility condition between $\{\varphi_F^\bullet\}$ and ∇ (cf. [13] 2.c, 2.d).

Using the connection, Faltings glued the categories of Fontaine modules with respect to different Frobenius liftings by a *Taylor formula* (cf. [13] Thm. 2.3). By gluing local data, he defined Fontaine modules over a general smooth formal W -scheme \mathfrak{X} , even if there is no lifting of F_X .

If \mathfrak{X} is the p -adic completion of a smooth, proper W -scheme \mathcal{X} , Faltings associated to each Fontaine module of length $\leq p-2$ over \mathfrak{X} a representation of the étale fundamental group of \mathcal{X}_{K_0} on a torsion \mathbb{Z}_p -module. Moreover, Faltings generalised Fontaine–Messing's result for the crystalline cohomology of a relative Fontaine module.

1.19. Let \mathfrak{X} be a smooth formal W-scheme. As an application of their Cartier transform [33], Ogus and Vologodsky proposed an interpretation of p -torsion Fontaine modules over \mathfrak{X} ([33], 4.16). A p -torsion Fontaine module over \mathfrak{X} is a triple (M, ∇, M^\bullet) as in 1.18 such that $pM = 0$ equipped with a horizontal isomorphism

$$(1.19.1) \quad \phi : C_{\mathfrak{X}'}^{-1}(\pi^*(\mathrm{Gr}(M), \kappa)) \xrightarrow{\sim} (M, \nabla),$$

where κ is the Higgs field on $\mathrm{Gr}(M)$ induced by ∇ and Griffiths' transversality, and $\pi : X' \rightarrow X$ is the base change of the Frobenius morphism of k to X . Given a σ -lifting $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ of F_X , such a morphism ϕ is equivalent to a family of divided Frobenius morphisms $\{\varphi_F^\bullet\}$ with respect to F (1.18) (cf. 12.16).

By Griffiths' transversality, the de Rham complex $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet$ is equipped with a decreasing filtration

$$(1.19.2) \quad F^i(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^q) = M^{i-q} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^q.$$

Let ℓ be the length of the filtration M^\bullet (i.e. $M^0 = M, M^{\ell+1} = 0$) and d the relative dimension of \mathfrak{X} over W . Suppose that $d + \ell < p$. Using the comparison of the de Rham and the Dolbeault complexes (1.2.2), Ogus and Vologodsky reproved Faltings' results ([33] 4.17):

(i) For any i, m , the canonical morphism $\mathbb{H}^m(F^{i+1}(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet)) \rightarrow \mathbb{H}^m(F^i(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet))$ is injective. The morphism ϕ (1.19.1) induces a family of divided Frobenius morphisms on $(\mathbb{H}^m(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet), \{\mathbb{H}^m(F^i)\}_{i \leq p-1})$ which make it into a Fontaine module over W (1.17).

(ii) The hypercohomology spectral sequence of the filtered de Rham complex $(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet, F^i)$ degenerates at E_1 .

1.20. For any $n \geq 1$, using the Cartier transform modulo p^n , we reformulate Faltings' definition of p^n -torsion Fontaine modules over \mathfrak{X} following Ogus–Vologodsky (12.7). The Taylor formula used by Faltings to glue the data relative to different liftings of F_X is naturally encoded in Oyama topos (12.18). Following Faltings' strategy, we prove the analogue of the previous results (1.19(i-ii)) on the crystalline cohomology of a p^n -torsion Fontaine module over \mathfrak{X} (13.1). Such a result can be viewed as a partial generalisation of (1.2.2) for p^n -torsion Fontaine modules. However, we don't know how to generalise Ogus–Vologodsky's result on the comparison of complexes (1.2.2) for the Cartier transform modulo p^n .

1.21. Section 2 contains the main notation and general conventions. In section 3, we recall the notion of dilatation in formal geometry. In section 4, after recalling the notions of Hopf algebras and groupoids, we present the constructions of groupoids $R_{\mathfrak{X}}$ and $Q_{\mathfrak{X}}$ (1.8, 1.9). In section 5, we recall the notions of modules with integrable λ -connection (1.4) and of modules with stratification (1.6) and we discuss the relation between them. Following [36], we present the construction of Shiho's functor Φ_n (1.5.1) in section 6. In section 7, we study the Oyama topoi $\tilde{\mathcal{E}}$ and $\tilde{\mathcal{E}}'$ (1.11), the morphism of topoi $C_{X/W}$ (1.11.3) and their variants for the fppf topology. Section 8 is devoted to the study of crystals in the Oyama topoi (1.13). We prove our main results 1.15 and 1.16. We recall the construction of the Cartier transform of Ogus–Vologodsky [33] in section 9. In section 10, following Berthelot and Oyama, we study several rings of differential operators which serve as a preparation for the next section. In section 11, we compare the Cartier transform $C_{X/W}^*$ (1.15.1) and the Cartier transform of Ogus–Vologodsky. Our proof is different from the original proof of Oyama. In section 12, we introduce a notion of relative Fontaine modules using Oyama topoi (1.20). We compare it with Faltings' definition [13] and Tsuji's definition [37]. In section 13, we construct the Fontaine module structure on the crystalline cohomology of a relative Fontaine module.

After finishing this article, I learned from Arthur Ogus that Vadim Vologodsky has sketched a similar approach for lifting the Cartier transform in a short note¹ without providing any detail.

A different approach to the formulation of a Cartier transform modulo p^n and its relationship to Fontaine modules was taken in [28].

1. available at <http://pages.uoregon.edu/vvologod/papers/p-adiccartier.pdf>

Acknowledgement. This article is a part of my thesis prepared at Université Paris-Sud and IHÉS. I would like to express my great gratitude to my thesis advisor Ahmed Abbes for leading me to this question and for his helpful comments on earlier versions of this work. I would like to thank Arthur Ogus and Takeshi Tsuji for their careful reading and suggestions.

2. Notations and conventions

2.1. In this article, p denotes a prime number, k a perfect field of characteristic p , W the ring of Witt vectors of k and $\sigma : W \rightarrow W$ the Frobenius automorphism of W . For any integer $n \geq 1$, we set $W_n = W/p^n W$ and $\mathcal{S} = \text{Spf}(W)$.

2.2. Let X be a scheme over k . We denote by F_X the absolute Frobenius morphism of X , by $X' = X \otimes_{k, F_k} k$ the base change of X by the Frobenius morphism of k , by $\pi_{X/k} : X' \rightarrow X$ the canonical projection and by $F_{X/k} : X \rightarrow X'$ the relative Frobenius morphism. Then we have a commutative diagram

$$(2.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{F_{X/k}} & X' & \xrightarrow{\pi_{X/k}} & X \\ & \searrow & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & \text{Spec } k & \xrightarrow{F_k} & \text{Spec } k \end{array}$$

2.3. Let X be a scheme over k . We denote by \underline{X} the schematical image of $F_X : X \rightarrow X$ ([24] 6.10.1 and 6.10.5). By ([24] 6.10.4), \underline{X} is the closed subscheme of X defined by the ideal sheaf of \mathcal{O}_X consisting of the sections of \mathcal{O}_X whose p th power is zero. It is clear that the correspondence $X \mapsto \underline{X}$ is functorial. Note that the canonical morphism $\underline{X} \rightarrow X$ induces an isomorphism of the underlying topological spaces.

The relative Frobenius morphism $F_{X/k} : X \rightarrow X'$ factors through \underline{X}' . We denote the induced morphism by $f_{X/k} : X \rightarrow \underline{X}'$. By definition, the homomorphism $\mathcal{O}_{\underline{X}'} \rightarrow f_{X/k*}(\mathcal{O}_X)$ is injective, i.e. $f_{X/k}$ is schematically dominant ([24] 5.4.2).

If $Y \rightarrow X$ and $Z \rightarrow X$ are two morphisms of k -schemes, by functionality, we have a canonical morphism

$$(2.3.1) \quad \underline{Y} \times_X \underline{Z} \rightarrow \underline{Y} \times_X \underline{Z}.$$

Since X is affine if and only if \underline{X} is affine (cf. [24] 2.3.5), we verify that (2.3.1) is an affine morphism.

2.4. In this article, we follow the conventions of [1] for adic rings ([1] 1.8.4) and adic formal schemes ([1] 2.1.24). Note that these notions are stronger than those introduced by Grothendieck in ([24] 0.7.1.9 and 10.4.2).

2.5. If \mathfrak{X} is an adic formal scheme such that $p\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ is an ideal of definition of \mathfrak{X} , for any integer $n \geq 1$, we denote the usual scheme $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/p^n \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ by \mathfrak{X}_n .

2.6. We say that an adic formal \mathcal{S} -scheme \mathfrak{X} ([1] 2.2.7) is *flat over \mathcal{S}* (or that \mathfrak{X} is a flat formal \mathcal{S} -scheme) if the morphism $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ induced by multiplication by p is injective (i.e. if $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ is rig-pur in the sense of ([1] 2.10.1.4.2)). It is clear that the above condition is equivalent to the fact that, for every affine open formal subscheme U of \mathfrak{X} , the algebra $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ is flat over W .

Let A be an adic W -algebra ([1] 1.8.4.5). Then A is flat over W if and only if $A_n = A/p^n A$ is flat over W_n for all integer $n \geq 1$. Indeed, we only need to prove that the condition is sufficient. Let a be an element of A such that $pa = 0$. For any integer $n \geq 1$, by the flatness of A_n over W_n , the image of a in A_n is contained in $p^{n-1}A/p^n A$. Since A is separated, we see that $a = 0$, i.e. A is flat over W . We deduce that an adic formal \mathcal{S} -scheme \mathfrak{X} is flat over \mathcal{S} if and only if \mathfrak{X}_n is flat over \mathcal{S}_n (2.5) for all integer $n \geq 1$.

2.7. Let $f : X \rightarrow S$ be a morphism of schemes. We say (abusively) that a morphism of \mathcal{O}_X -modules $u : M \rightarrow N$ is *\mathcal{O}_S -linear* if it is $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ -linear.

2.8. Let X be a scheme. We denote by $\mathbf{Zar}/_X$ the category of open subschemes of X and by X_{zar} the Zariski topos of X .

3. Blow-ups and dilatations

3.1. Let A be an adic ring (2.4), J an ideal of definition of finite type of A . We put $X = \text{Spec}(A)$, $X' = \text{Spec}(A/J)$ and $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$. The formal scheme \mathfrak{X} is the completion of X along X' . For any A -module M , we denote by \widetilde{M} the associated \mathcal{O}_X -module and by M^Δ the completion of \widetilde{M} along X' ([1] 2.7.1), which is an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module. Any morphism of A -modules induces naturally a morphism of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules. In this way, we define an additive functor from the category of A -modules to the category of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules

$$(3.1.1) \quad M \mapsto M^\Delta.$$

This construction is independent of the choice of J .

3.2. Let \mathfrak{a} be an open ideal of finite type of A . We denote by $\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ the ideal sheaf of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ associated to the presheaf defined by $U \mapsto \mathfrak{a}\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. By ([1] 2.1.13), we have $\mathfrak{a}^\Delta = \mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.

Let B be an adic ring, $u : A \rightarrow B$ an adic homomorphism ([1] 1.8.4.5) and $f : \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B) \rightarrow \mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ the associated morphism. In view of ([1] 2.5.11), we have a canonical functorial isomorphism

$$(3.2.1) \quad f^*(\mathfrak{a}^\Delta) \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{a} \otimes_A B)^\Delta.$$

Then, we deduce a canonical isomorphism

$$(3.2.2) \quad f^*(\mathfrak{a}^\Delta)\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{a}B)^\Delta.$$

Indeed, by definition, $f^*(\mathfrak{a}^\Delta)\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ is the image of the morphism $f^*(\mathfrak{a}^\Delta) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} = f^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, which clearly factors through $(\mathfrak{a}B)^\Delta$. The isomorphism (3.2.2) follows from the fact that $\mathfrak{a}^\Delta = \mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ and $(\mathfrak{a}B)^\Delta = (\mathfrak{a}B)\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$.

3.3. Let \mathfrak{X} be an adic formal scheme, \mathcal{I} an ideal of definition of finite type of \mathfrak{X} and \mathcal{A} an open ideal of finite type of \mathfrak{X} ([1] 2.1.19). For any $n \geq 1$, we denote by \mathfrak{X}_n the usual scheme $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}^n)$ and we set

$$(3.3.1) \quad \mathfrak{X}'_n = \text{Proj}(\oplus_{m \geq 0} \mathcal{A}^m \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}).$$

For $m \leq n$, there exists a canonical morphism $u'_{mn} : \mathfrak{X}'_m \rightarrow \mathfrak{X}'_n$ such that the diagram

$$(3.3.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}'_m & \xrightarrow{u'_{mn}} & \mathfrak{X}'_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}_m & \xrightarrow{u_{mn}} & \mathfrak{X}_n \end{array}$$

is Cartesian, which means that the sequence (\mathfrak{X}'_n) forms an adic inductive (\mathfrak{X}_n) -system ([1] 2.2.13). We call its inductive limit \mathfrak{X}' the *admissible blow-up of \mathcal{A} in \mathfrak{X}* ([1] 3.1.2). By ([1] 2.2.14), \mathfrak{X}' is an adic formal \mathfrak{X} -scheme. The structural map $\varphi : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ is clearly of finite type ([1] 2.3.13).

3.4. Let \mathfrak{X} be a flat formal \mathcal{I} -scheme locally of finite type (2.6, [1] 2.3.13) and \mathcal{A} an open ideal of finite type of \mathfrak{X} containing p . Let $\varphi : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ be the admissible blow-up of \mathcal{A} in \mathfrak{X} . Then the ideal $\mathcal{A}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ is invertible ([1] 3.1.4(i)), and \mathfrak{X}' is flat over \mathcal{I} ([1] 3.1.4(ii)). We denote by $\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}$ the maximal open formal subscheme of \mathfrak{X}' on which

$$(3.4.1) \quad (\mathcal{A}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})|_{\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}} = (p\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})|_{\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}}$$

and we call it the *dilatation of \mathcal{A} with respect to p* . Note that $\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}$ is the complement of $\text{Supp}(\mathcal{A}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}/p\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})$ in \mathfrak{X}' ([24] 0.5.2.2). In view of ([1] 3.1.5 and 3.2.7), the above definition coincides with the notion of dilatation of \mathcal{A} with respect to p introduced in ([1] 3.2.3.4). We denote the restriction of $\varphi : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ to $\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}$ by

$$(3.4.2) \quad \psi : \mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)} \rightarrow \mathfrak{X}.$$

3.5. Keep the notation of 3.4 and assume moreover that $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ is affine. There exists an open ideal of finite type \mathfrak{a} of A containing p such that $\mathfrak{a}^\Delta = \mathcal{A}$ ([1] 2.1.10 and 2.1.13). Let $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(A/pA)$, $\phi : X' \rightarrow X$ be the blow-up of $\widetilde{\mathfrak{a}}$ in X and $Y' = \phi^{-1}(Y)$; so \mathfrak{X} is the completion of X along Y . Then \mathfrak{X}' is canonically isomorphic to the completion of X' along Y' and φ is the extension of ϕ to the completions ([1] 3.1.3).

Let $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ be a finite set of generators of \mathfrak{a} such that $a_0 = p$. For any $0 \leq i \leq n$, let U_i be the maximal open subset of X' where a_i generates $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathcal{O}_{X'}}$. Since $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathcal{O}_{X'}}$ is invertible, $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ form an open covering of X' . It is well known that U_i is the affine scheme associated to the A -algebra A_i defined as follows:

$$(3.5.1) \quad A'_i = A \left[\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right] = \frac{A[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]}{(a_j - a_i x_j)_{j \neq i}}$$

$$(3.5.2) \quad A_i = \frac{A'_i}{(A'_i)_{a_i\text{-tor}}},$$

where $(A'_i)_{a_i\text{-tor}}$ denotes the ideal of a_i -torsion elements of A'_i . Let \widehat{A}_i be the separated completion of A_i for the p -adic topology and $\widehat{U}_i = \text{Spf}(\widehat{A}_i)$. Then $(\widehat{U}_i)_{0 \leq i \leq n}$ form a covering of \mathfrak{X}' ; for any $0 \leq i \leq n$, \widehat{U}_i is the maximal open of \mathfrak{X}' where a_i generates the invertible ideal $\mathfrak{a}^\Delta \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ ([1] 3.1.7(ii)). The open formal subscheme $\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}$ of \mathfrak{X}' is equal to $\widehat{U}_0 = \text{Spf}(\widehat{A}_0)$. In particular, we see that, in the general setting of 3.4, $\psi : \mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)} \rightarrow \mathfrak{X}$ is affine ([1] 2.3.4).

Let $A\{x_1, \dots, x_n\}$ denote the p -adic completion of the polynomial ring in n variables $A[x_1, \dots, x_n]$, which is flat over $A[x_1, \dots, x_n]$ by ([1] 1.12.12). Since A is flat over W , we have $A_0 = A_0'$. In view of ([1] 1.12.16(iv)), we deduce a canonical isomorphism

$$(3.5.3) \quad A \left\{ \frac{a_1}{p}, \dots, \frac{a_n}{p} \right\} = \frac{A\{x_1, \dots, x_n\}}{(a_i - px_i)_{1 \leq i \leq n}} \xrightarrow{\sim} \widehat{A}_0.$$

Proposition 3.6. *Let \mathfrak{X} be a flat formal \mathcal{S} -scheme locally of finite type, \mathcal{A} an open ideal of finite type of \mathfrak{X} containing p , $\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}$ the dilatation of \mathcal{A} with respect to p , $\psi : \mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)} \rightarrow \mathfrak{X}$ the canonical morphism, \mathfrak{Y} a flat formal \mathcal{S} -scheme and $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ an adic morphism ([1] 2.2.7) such that $\mathcal{A} \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} = p \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$. Then there exists a unique \mathcal{S} -morphism $f' : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}$ such that $f = \psi \circ f'$. If f is moreover a closed immersion, then so is f' .*

Proof. We can reduce to the case where $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ is affine and then to the case where $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$ is affine and the morphism f is associated to an adic homomorphism $u : A \rightarrow B$. We take again the notation of 3.5. By (3.2.2), we have $(pB)^\Delta = (\mathfrak{a}B)^\Delta$. The open ideals of finite type pB and $\mathfrak{a}B$ are complete by ([8] III §2.12 Cor 1 of Prop 16) and separated as submodules of B . We deduce that $pB = \mathfrak{a}B$ by taking $\Gamma(\mathfrak{Y}, -)$. Since B is flat over W , the homomorphism u extends uniquely to an A -homomorphism $A_0 \rightarrow B$ and then to an adic A -homomorphism $w : \widehat{A}_0 \rightarrow B$ by p -adic completion. We take for f' the morphism induced by w which is uniquely determined by f . The last assertion is clear.

Remark 3.7. Let \mathfrak{X} be a flat formal \mathcal{S} -scheme locally of finite type, \mathcal{A} an open ideal of finite type of \mathfrak{X} containing p , $\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}$ the dilatation of \mathcal{A} with respect to p , $\psi : \mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)} \rightarrow \mathfrak{X}$ the canonical morphism, \mathfrak{Y} a flat formal \mathcal{S} -scheme and $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ an \mathcal{S} -morphism. Let T be the closed subscheme of \mathfrak{X} defined by \mathcal{A} and $Y = \mathfrak{Y}_1$ (2.5). Since $p \in \mathcal{A}$, the following conditions are equivalent:

- (i) $\mathcal{A} \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} = p \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$.
- (ii) There exists a morphism $g : Y \rightarrow T$ which fits into a Cartesian diagram:

$$(3.7.1) \quad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & \mathfrak{X} \end{array}$$

- (iii) There exists a morphism $g : Y \rightarrow T$ which fits into a commutative diagram (3.7.1).

3.8. Let A be a commutative ring such that $pA = 0$ and I an ideal of A . We denote by F_A the Frobenius endomorphism of A and by $I^{(p)}$ the ideal of A generated by $F_A(I)$.

Let B be an adic ring such that pB is an ideal of definition of B and \mathfrak{a} an open ideal of B containing p . We denote by \mathfrak{a}_1 the ideal \mathfrak{a}/pB of B/pB and by \mathfrak{a}^\sharp the open ideal $\pi^{-1}(\mathfrak{a}_1^{(p)})$ of B , where $\pi : B \rightarrow B/pB$ is the canonical homomorphism. If \mathfrak{a} is furthermore of finite type and $\{a_1, \dots, a_n\}$ is a set of generators of \mathfrak{a} , then \mathfrak{a}^\sharp is of finite type and $\{p, a_1^p, \dots, a_n^p\}$ is a set of generators of \mathfrak{a}^\sharp .

3.9. Let X be a scheme such that $p\mathcal{O}_X = 0$ and \mathcal{I} a quasi-coherent ideal of X . We denote by $\mathcal{I}^{(p)}$ the quasi-coherent ideal $F_X^*(\mathcal{I})\mathcal{O}_X$ of X . When $X = \text{Spec}(A)$ is affine and $I = \Gamma(X, \mathcal{I})$, it is clear that we have $\mathcal{I}^{(p)} = \widetilde{I^{(p)}}$ (3.8).

Let \mathfrak{X} be an adic formal scheme such that $p\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ is an ideal of definition of \mathfrak{X} , \mathcal{A} an open ideal of \mathfrak{X} containing p and $\pi_n : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1}$ (resp. $\pi : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1}$) the canonical homomorphism for all integers $n \geq 1$. We denote by \mathcal{A}_1 the quasi-coherent ideal $\mathcal{A}/p\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ of \mathfrak{X}_1 and by \mathcal{A}^\sharp the ideal $\pi^{-1}(\mathcal{A}_1^{(p)})$ of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, which is equal to the projective limit of the projective system $(\pi_n^{-1}(\mathcal{A}_1^{(p)}))_{n \geq 1}$. When $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ is affine, there exists an open ideal \mathfrak{a} of A such that $\mathcal{A} = \mathfrak{a}^\Delta$ ([1] 2.1.10). By construction, we have $\mathcal{A}^\sharp = (\mathfrak{a}^\sharp)^\Delta$. Hence, in general, \mathcal{A}^\sharp is an open ideal of \mathfrak{X} in the sense of ([1] 2.1.19). By 3.8, if \mathcal{A} is furthermore of finite type, so is \mathcal{A}^\sharp .

Proposition 3.10. *Let \mathfrak{X} be a flat formal \mathcal{S} -scheme locally of finite type, \mathcal{A} an open ideal of finite type of \mathfrak{X} containing p , T the closed subscheme of \mathfrak{X} defined by \mathcal{A} and $\psi : \mathfrak{X}_{(\mathcal{A}^\sharp/p)} \rightarrow \mathfrak{X}$ the dilatation of \mathcal{A}^\sharp with respect to p (3.4). Let \mathfrak{Y} be a flat formal \mathcal{S} -scheme, $Y = \mathfrak{Y}_1$ and $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ an \mathcal{S} -morphism. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *There exists a morphism $g : \underline{Y} \rightarrow T$ (2.3) which fits into a commutative diagram*

$$(3.10.1) \quad \begin{array}{ccc} \underline{Y} & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & \mathfrak{X} \end{array}$$

(ii) $\mathcal{A}^\sharp \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} = p\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$.

If furthermore the above conditions are satisfied, then there exists a unique morphism $f' : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}_{(\mathcal{A}^\sharp/p)}$ such that $f = \psi \circ f'$.

Proof. Since g is uniquely determined by f , we can reduce to the case where $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ is affine and then to the case where $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$ is affine and the morphism f is associated to an adic homomorphism $u : A \rightarrow B$. There exists an open ideal of finite type \mathfrak{a} of A such that $\mathcal{A} = \mathfrak{a}^\Delta$. Since $p \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^\sharp B = pB$ if and only if the p th power of any element of \mathfrak{a}/pB is zero in B/pB . The equivalence of (i) and (ii) follows (3.2.2). The second assertion follows from 3.6 applied to \mathcal{A}^\sharp .

Remark 3.11. Under the assumptions of 3.10, the dilatation $\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}$ of \mathcal{A} (resp. $\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}^\sharp/p)}$ of \mathcal{A}^\sharp) with respect to p is the same as the Higgs envelope $\widetilde{R}_S(\mathfrak{X})$ (resp. $\widetilde{Q}_S(\mathfrak{X})$) introduced in ([34] page 6).

Proposition 3.12. *Let \mathfrak{X} be a flat formal \mathcal{S} -scheme locally of finite type, $i : T \rightarrow \mathfrak{X}_1$ an immersion (not necessary closed). There exists a unique formal \mathfrak{X} -scheme $\mathfrak{X}_{(T/p)}$ (resp. $\mathfrak{X}_{(T/p)}^\sharp$) up to canonical isomorphisms satisfying the following conditions:*

(i) *The canonical morphism $(\mathfrak{X}_{(T/p)})_1 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ (resp. $(\mathfrak{X}_{(T/p)}^\sharp)_1 \rightarrow (\mathfrak{X}_{(T/p)})_1 \rightarrow \mathfrak{X}_1$) factors through the immersion $T \rightarrow \mathfrak{X}_1$.*

(ii) *Let ψ be the canonical morphism $\mathfrak{X}_{(T/p)} \rightarrow \mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{X}_{(T/p)}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}$), \mathfrak{Y} a flat formal \mathcal{S} -scheme, $Y = \mathfrak{Y}_1$ and $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ an \mathcal{S} -morphism. Suppose that there exists a k -morphism $g : Y \rightarrow T$ (resp. $g : \underline{Y} \rightarrow T$) which fits into the following diagram:*

$$(3.12.1) \quad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & \mathfrak{X} \end{array} \quad (\text{resp. } \begin{array}{ccc} \underline{Y} & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & \mathfrak{X} \end{array})$$

Then there exists a unique \mathcal{S} -morphism $f' : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}_{(T/p)}$ (resp. $f' : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}_{(T/p)}^\sharp$) such that $f = \psi \circ f'$.

Proof. It suffices to prove the existence. The uniqueness follows from (i) and the universal property (ii).

Let \mathfrak{U} be an open formal subscheme of \mathfrak{X} such that $i(T) \subset \mathfrak{U}$ and that $T \rightarrow \mathfrak{U}$ is a closed immersion and, let \mathcal{A} be the open ideal of finite type associated to $T \rightarrow \mathfrak{U}$. We take $\mathfrak{X}_{(T/p)}$ (resp. $\mathfrak{X}_{(T/p)}^\sharp$) to be the dilatation $\mathfrak{U}_{(\mathcal{A}/p)}$ (resp. $\mathfrak{U}_{(\mathcal{A}^\sharp/p)}$). Then property (i) follows from 3.7 and 3.10. For any morphism $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ as in (ii), by (3.12.1), the morphism f factors through the open subscheme \mathfrak{U} of \mathfrak{X} . Then property (ii) follows from 3.6 and 3.10.

Proposition 3.13 ([34] 1.1.3). *Let $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ be two flat formal \mathcal{S} -schemes locally of finite type, $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ an étale \mathcal{S} -morphism ([1] 2.4.5). Suppose that there exist a k -scheme T and two immersions $i : T \rightarrow \mathfrak{X}_1$, $j : T \rightarrow \mathfrak{Y}_1$ such that $j = f \circ i$. Then f induces canonical isomorphisms of the formal schemes*

$$(3.13.1) \quad \mathfrak{X}_{(T/p)} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}_{(T/p)}, \quad \mathfrak{X}_{(T/p)}^\sharp \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}_{(T/p)}^\sharp.$$

Proof. By the universal property (3.6), the composition $\mathfrak{X}_{(T/p)} \rightarrow \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ induces a canonical \mathfrak{Y} -morphism $u : \mathfrak{X}_{(T/p)} \rightarrow \mathfrak{Y}_{(T/p)}$. We consider the commutative diagram

$$(3.13.2) \quad \begin{array}{ccccc} (\mathfrak{Y}_{(T/p)})_1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & \mathfrak{X}_1 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathfrak{Y}_{(T/p)} & \longrightarrow & & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \end{array}$$

Since $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ is étale, the composition of top horizontal morphisms lifts uniquely to a \mathfrak{Y} -morphism $g : \mathfrak{Y}_{(T/p)} \rightarrow \mathfrak{X}$. By (3.13.2) and the universal property, g induces an \mathfrak{X} -morphism $v : \mathfrak{Y}_{(T/p)} \rightarrow \mathfrak{X}_{(T/p)}$. The following diagram

$$(3.13.3) \quad \begin{array}{ccccc} \mathfrak{Y}_{(T/p)} & \xrightarrow{v} & \mathfrak{X}_{(T/p)} & \xrightarrow{u} & \mathfrak{Y}_{(T/p)} \\ & \searrow g & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

is commutative. By the universal property, we deduce that $u \circ v = \text{id}$.

Let $\psi : \mathfrak{X}_{(T/p)} \rightarrow \mathfrak{X}$ be the canonical morphism. We consider the diagram

$$(3.13.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_{(T/p)} & \xrightarrow{u} & \mathfrak{Y}_{(T/p)} \\ \psi \downarrow & \swarrow g & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

where the lower triangle is commutative. Since ψ_1 and g_1 factor through T , we have $\psi_1 = (g \circ u)_1$. Since f is étale and the square of (3.13.4) commutes, there exists one and only one lifting of $(\mathfrak{X}_{(T/p)})_1 \rightarrow \mathfrak{X}_1$ to a \mathfrak{Y} -morphism $\mathfrak{X}_{(T/p)} \rightarrow \mathfrak{X}$. We deduce that $\psi = g \circ u$, i.e. the diagram (3.13.4) commutes. Then we have $\psi \circ v \circ u = \psi$. By the universal property, we deduce that $v \circ u = \text{id}$. The first isomorphism follows.

The second isomorphism can be verified in the same way.

Lemma 3.14 ([34] 1.1.4). *Let $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ be two flat formal \mathcal{S} -schemes locally of finite type, $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ a flat \mathcal{S} -morphism, $T \rightarrow \mathfrak{Y}_1$ an immersion and $S = T \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$. Then f induces canonical isomorphisms of formal schemes*

$$(3.14.1) \quad \mathfrak{X}_{(S/p)} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}_{(T/p)} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}, \quad \mathfrak{X}_{(S/p)}^\sharp \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}_{(T/p)}^\sharp \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}.$$

Proof. By 3.12, we can reduce to the case where $T \rightarrow \mathfrak{Y}$ is a closed immersion. Let \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) be the open ideal of finite type associated to the closed immersion $T \rightarrow \mathfrak{Y}$ (resp. $S \rightarrow \mathfrak{X}$). Put $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}_{(\mathcal{B}/p)} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$. By the universal property, the morphism f induces a \mathfrak{Y} -morphism $\mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)} \rightarrow \mathfrak{Y}_{(\mathcal{B}/p)}$ and then an \mathfrak{X} -morphism $u : \mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)} \rightarrow \mathfrak{Z}$.

Since f is flat, \mathfrak{Z} is flat over \mathcal{S} . We have $\mathcal{A}\mathcal{O}_3 = \mathcal{B}\mathcal{O}_3 = p\mathcal{O}_3$. By the universal property, we deduce an \mathfrak{X} -morphism $v : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}_{(\mathcal{A}/p)}$. Since u, v are \mathfrak{X} -morphisms, we deduce that $u \circ v = \text{id}$ and $v \circ u = \text{id}$ by the universal property as in the proof of 3.13.

The second isomorphism can be verified in the same way.

4. Hopf algebras and groupoids

4.1. Let (\mathcal{T}, A) be a ringed topos. For any A -bimodules (resp. A -bialgebras) M and N of \mathcal{T} , $M \otimes_A N$ denotes the tensor product of the right A -module M and the left A -module N , and we regard $M \otimes_A N$ as an A -bimodule (resp. A -bialgebra) through the left A -action on M and the right A -action on N .

Definition 4.2 ([4] II 1.1.2 and [34] 1.2.1). Let (\mathcal{T}, A) be a ringed topos. A *Hopf A -algebra* is the data of an A -bialgebra B and three ring homomorphisms

$$(4.2.1) \quad \delta : B \rightarrow B \otimes_A B \text{ (comultiplication), } \quad \pi : B \rightarrow A \text{ (counit), } \quad \sigma : B \rightarrow B \text{ (antipode)}$$

satisfying the following conditions.

(a) δ and π are A -bilinear and the following diagrams are commutative:

$$(4.2.2) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\delta} & B \otimes_A B \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \otimes \text{id}_B \\ B \otimes_A B & \xrightarrow{\text{id}_B \otimes \delta} & B \otimes_A B \otimes_A B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\delta} & B \otimes_A B \\ \delta \downarrow & \searrow \text{id}_B & \downarrow \pi \cdot \text{id}_B \\ B \otimes_A B & \xrightarrow{\text{id}_B \cdot \pi} & B \end{array}$$

(b) σ is a homomorphism of A -algebras for the left (resp. right) A -action on the source and the right (resp. left) A -action on the target, and satisfies $\sigma^2 = \text{id}_B$, $\pi \circ \sigma = \pi$.

(c) The following diagrams are commutative:

$$(4.2.3) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & A \\ \delta \downarrow & & \downarrow d_1 \\ B \otimes_A B & \xrightarrow{\text{id}_B \cdot \sigma} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & A \\ \delta \downarrow & & \downarrow d_2 \\ B \otimes_A B & \xrightarrow{\sigma \cdot \text{id}_B} & B \end{array}$$

where d_1 (resp. d_2) is the structural homomorphism of the left (resp. right) A -algebra B .

Such a data is also called an affine groupoid of (\mathcal{T}, A) by Berthelot ([4] II 1.1.2).

Definition 4.3 ([4] II 1.1.6). Let $f : (\mathcal{T}', A') \rightarrow (\mathcal{T}, A)$ be a morphism of ringed topoi, $(B, \delta_B, \sigma_B, \pi_B)$ a Hopf A -algebra and $(B', \delta_{B'}, \sigma_{B'}, \pi_{B'})$ a Hopf A' -algebra. We say that an A -bilinear homomorphism $B \rightarrow f_*(B')$ is a *homomorphism of Hopf algebras* if the following diagrams are commutative:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\delta_B} & B \otimes_A B \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_*(B') & \xrightarrow{f_*(\delta_{B'})} & f_*(B' \otimes_{A'} B') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi_B} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_*(B') & \xrightarrow{f_*(\pi_{B'})} & f_*(A') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\sigma_B} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_*(B') & \xrightarrow{f_*(\sigma_{B'})} & f_*(B') \end{array}$$

where the right vertical map of the first diagram is the composition $B \otimes_A B \rightarrow f_*(B') \otimes_{f_*(A')} f_*(B') \rightarrow f_*(B' \otimes_{A'} B')$.

4.4. Let (\mathcal{T}, A) be a ringed topos, M and N two A -bimodules. We denote by $\mathcal{H}om_{ll}(M, N)$ (resp. $\mathcal{H}om_{lr}(M, N)$) the sheaf of A -linear homomorphisms from the left A -module M to the left (resp. right) A -module N . We put $M^\vee = \mathcal{H}om_{ll}(M, A)$. The actions of A on M induces a natural A -bimodule structure on M^\vee . There exists a canonical A -bilinear morphism

$$(4.4.1) \quad M^\vee \otimes_A N^\vee \rightarrow (M \otimes_A N)^\vee$$

which sends $\varphi \otimes \psi$ to θ defined by $\theta(m \otimes n) = \varphi(m\psi(n))$ for all local sections m of M and n of N .

Let E, F be two A -modules, we have a canonical morphism

$$(4.4.2) \quad \alpha : \mathcal{H}om_{ur}(E, F \otimes_A M) \rightarrow \mathcal{H}om_{ul}(M^\vee \otimes_A E, F)$$

defined, for every local sections θ of $\mathcal{H}om_{ur}(E, F \otimes_A M)$, φ of M^\vee and e of E by

$$(4.4.3) \quad \alpha(\theta)(\varphi \otimes e) = (\text{id} \otimes \varphi)(\theta(e)).$$

4.5. Let B be a Hopf A -algebra. By (4.4.1), we obtain a morphism

$$(4.5.1) \quad B^\vee \times B^\vee \rightarrow (B \otimes_A B)^\vee \xrightarrow{\delta^\vee} B^\vee.$$

Letting $\pi : B \rightarrow A$ be the unit element, the above morphism induces a non-commutative ring structure on B^\vee . Indeed, the associative law can be verified from the first diagram of (4.2.2). We verify that $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ for all $a \in B^\vee$ by the second diagram of (4.2.2). The homomorphism $\pi : B \rightarrow A$ induces a ring homomorphism $i : A = A^\vee \rightarrow B^\vee$. In this way, we regard B^\vee as a non commutative A -algebra. Using the second diagram of (4.2.2), one verifies that the left (resp. right) action of A on B^\vee via i is equal to the left (resp. right) A -module structure of B^\vee defined in 4.4.

A homomorphism of Hopf A -algebras $\varphi : B \rightarrow C$ induces homomorphism of A -algebras $\varphi^\vee : C^\vee \rightarrow B^\vee$.

4.6. Let $f : (\mathcal{S}', A') \rightarrow (\mathcal{S}, A)$ be a morphism of ringed topoi, $(B, \delta_B, \sigma_B, \pi_B)$ a Hopf A -algebra. Suppose that the left and the right A -algebra structures on B are equal. Then $(f^*(B), f^*(\delta_B), f^*(\pi_B), f^*(\sigma_B))$ form a Hopf A' -algebra.

Let $(B', \delta_{B'}, \sigma_{B'}, \pi_{B'})$ be a Hopf A' -algebra and $u : B \rightarrow f_*(B')$ a homomorphism of Hopf algebras (4.3). By adjunction, we obtain homomorphisms of A' -algebras

$$(4.6.1) \quad u^\sharp : f^*(B) \rightarrow B', \quad \tilde{u} : f^*(B) \otimes_{A'} f^*(B) \rightarrow B' \otimes_{A'} B'$$

for the left A' -algebra structures on the targets. Then the diagrams

$$(4.6.2) \quad \begin{array}{ccc} f^*(B) & \xrightarrow{f^*(\delta_B)} & f^*(B) \otimes_{A'} f^*(B) \\ u^\sharp \downarrow & & \downarrow \tilde{u} \\ B' & \xrightarrow{\delta_{B'}} & B' \otimes_{A'} B' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f^*(B) & \xrightarrow{f^*(\pi_B)} & A' \\ u^\sharp \downarrow & & \parallel \\ B' & \xrightarrow{\pi_{B'}} & A' \end{array}$$

are commutative. The restriction of \tilde{u} on $f^{-1}(B \otimes_A B)$ is given by $u^\sharp|_{f^{-1}(B)}$. In view of (4.5) and (4.6.2), the homomorphism u^\sharp induces a homomorphism of A' -algebras $(u^\sharp)^\vee : (B')^\vee \rightarrow (f^*(B))^\vee$.

4.7. Let \mathfrak{X} be an adic formal \mathcal{S} -scheme. For any integer $r \geq 1$, let \mathfrak{X}^{r+1} be the fiber product of $(r+1)$ -copies of \mathfrak{X} over \mathcal{S} . We consider \mathfrak{X} as an adic formal (\mathfrak{X}^{r+1}) -scheme by the diagonal immersion $\Delta(r) : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^{r+1}$.

We denote by $\tau : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}^2$ the morphism which exchanges the factors of \mathfrak{X}^2 , by $p_i : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}$ ($i = 1, 2$) the canonical projections and by $p_{ij} : \mathfrak{X}^3 \rightarrow \mathfrak{X}^2$ ($1 \leq i < j \leq 3$) be the projection whose composition with p_1 (resp. p_2) is the projection $\mathfrak{X}^3 \rightarrow \mathfrak{X}$ on the i -th (resp. j -th) factor.

For any formal \mathfrak{X}^2 -schemes \mathfrak{Y} and \mathfrak{Z} , $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z}$ denotes the product of $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}^2 \xrightarrow{p_2} \mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}^2 \xrightarrow{p_1} \mathfrak{X}$, and we regard $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z}$ as a formal \mathfrak{X}^2 -scheme by the projection $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}^2 \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}^3 \xrightarrow{p_{13}} \mathfrak{X}^2$.

Definition 4.8. Let \mathfrak{X} be an adic formal \mathcal{S} -scheme. A formal \mathfrak{X} -groupoid over \mathcal{S} is the data of an adic formal \mathfrak{X}^2 -scheme \mathfrak{G} and three adic \mathcal{S} -morphisms (4.7)

$$(4.8.1) \quad \alpha : \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}, \quad \iota : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}, \quad \eta : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$$

satisfying the following conditions.

(i) α and ι are \mathfrak{X}^2 -morphisms and the following diagrams are commutative:

$$(4.8.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} & \xrightarrow{\text{id} \times \alpha} & \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} \\ \alpha \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{G} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \xrightarrow{\iota \times \text{id}} & \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} \\ \text{id} \times \iota \downarrow & \searrow \text{id} & \downarrow \alpha \\ \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{G} \end{array}$$

(ii) The morphism η is compatible with $\tau : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}^2$ and we have $\eta^2 = \text{id}_{\mathfrak{G}}$, $\eta \circ \iota = \iota$.

(iii) Let q_1 (resp. q_2) be the projection $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{X}$ induced by p_1 (resp. p_2). The following diagrams are commutative:

$$(4.8.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \xrightarrow{q_1} & \mathfrak{X} \\ \text{id} \times \eta \downarrow & & \downarrow \iota \\ \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{G} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \xrightarrow{q_2} & \mathfrak{X} \\ \eta \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \iota \\ \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{G} \end{array}$$

(iv) The morphism of the underlying topological spaces $|\mathfrak{G}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$ factors through $\Delta : |\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$.

Let $\varpi : \mathfrak{G}_{\text{zar}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{zar}}$ be the morphism of topoi induced by $\mathfrak{G}_{\text{zar}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{zar}}^2$ and its factorization through Δ . Then we have $\varpi_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}) = q_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}) = q_{2*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{G}})$. In this way, we regard $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}$ as an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -bialgebra of $\mathfrak{X}_{\text{zar}}$. Then, the formal \mathfrak{X} -groupoid structure on \mathfrak{G} induces a *formal Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebra structure* on $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}$, that is for every $n \geq 1$, a Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -algebra structure on $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}_n}$ which are compatible.

Definition 4.9. Let $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ be two adic formal \mathcal{S} -schemes, $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ an \mathcal{S} -morphism, $(\mathfrak{G}, \alpha_{\mathfrak{G}}, \iota_{\mathfrak{G}}, \eta_{\mathfrak{G}})$ a formal \mathfrak{X} -groupoid and $(\mathfrak{H}, \alpha_{\mathfrak{H}}, \iota_{\mathfrak{H}}, \eta_{\mathfrak{H}})$ a formal \mathfrak{Y} -groupoid. We say that an \mathfrak{X}^2 -morphism $\varphi : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ is a *morphism of formal groupoids above f* if the following diagrams are commutative:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{H} & \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{H}}} & \mathfrak{H} \\ \varphi \times \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{G} & \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{G}}} & \mathfrak{G} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{Y} & \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{H}}} & \mathfrak{H} \\ f \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{G}}} & \mathfrak{G} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{H} & \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{H}}} & \mathfrak{H} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathfrak{G} & \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{G}}} & \mathfrak{G} \end{array}$$

A morphism of formal groupoids $\varphi : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ induces a homomorphism of formal Hopf algebras $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{H}})$, that is for every $n \geq 1$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}_n} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{H}_n})$ is a homomorphism of Hopf algebras.

4.10. In the following of this section, \mathfrak{X} denotes a smooth formal \mathcal{S} -scheme ([1] 2.4.5). We put $X = \mathfrak{X}_1$ (2.5). For any integer $r \geq 1$, let \mathfrak{X}^{r+1} be the fiber product of $(r+1)$ -copies of \mathfrak{X} over \mathcal{S} . We denote by $R_{\mathfrak{X}}(r)$ (resp. $Q_{\mathfrak{X}}(r)$) the dilatation $(\mathfrak{X}^{r+1})_{(X/p)}$ (resp. $(\mathfrak{X}^{r+1})_{(X/p)}^{\sharp}$) with respect to the diagonal immersion $X \rightarrow \mathfrak{X}^{r+1}$ (3.12). By 3.12(i), the canonical morphisms $(R_{\mathfrak{X}}(r))_1 \rightarrow X^{r+1}$ and $(Q_{\mathfrak{X}}(r))_1 \rightarrow (Q_{\mathfrak{X}}(r))_1 \rightarrow X^{r+1}$ factor through the diagonal immersion $X \rightarrow X^{r+1}$.

To simplify the notation, we put $R_{\mathfrak{X}} = R_{\mathfrak{X}}(1)$, $Q_{\mathfrak{X}} = Q_{\mathfrak{X}}(1)$, $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ and $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{O}_{Q_{\mathfrak{X}}}$.

Proposition 4.11 ([34] 1.2.5 and 1.2.6). *Let r, r' be two integers ≥ 1 . There exists canonical isomorphisms*

$$(4.11.1) \quad R_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}(r') \xrightarrow{\sim} R_{\mathfrak{X}}(r+r'), \quad Q_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} Q_{\mathfrak{X}}(r') \xrightarrow{\sim} Q_{\mathfrak{X}}(r+r'),$$

where the projections $R_{\mathfrak{X}}(r) \rightarrow \mathfrak{X}$ and $Q_{\mathfrak{X}}(r) \rightarrow \mathfrak{X}$ (resp. $R_{\mathfrak{X}}(r') \rightarrow \mathfrak{X}$ and $Q_{\mathfrak{X}}(r') \rightarrow \mathfrak{X}$) are induced by the projection $\mathfrak{X}^{r+1} \rightarrow \mathfrak{X}$ on the last factor (resp. $\mathfrak{X}^{r'+1} \rightarrow \mathfrak{X}$ on the first factor).

Proof. By 4.10, we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} (R_{\mathfrak{X}}(r))_1 \times_X (R_{\mathfrak{X}}(r'))_1 & \longrightarrow & R_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}(r') \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^{r+1} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}^{r'+1} \end{array}$$

By the universality of $R_{\mathfrak{X}}(r+r')$ (3.12), we obtain an $(\mathfrak{X}^{r+r'+1})$ -morphism

$$(4.11.2) \quad \varphi : R_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}(r') \rightarrow R_{\mathfrak{X}}(r+r').$$

On the other hand, by the universal property of $R_{\mathfrak{X}}(r)$ and $R_{\mathfrak{X}}(r')$, the projection $\mathfrak{X}^{r+r'+1} \rightarrow \mathfrak{X}^{r+1}$ on the first $(r+1)$ -factors (resp. $\mathfrak{X}^{r+r'+1} \rightarrow \mathfrak{X}^{r'+1}$ on the last $(r'+1)$ -factors) induces a morphism $R_{\mathfrak{X}}(r+r') \rightarrow R_{\mathfrak{X}}(r)$ (resp. $R_{\mathfrak{X}}(r+r') \rightarrow R_{\mathfrak{X}}(r')$) and hence an $(\mathfrak{X}^{r+r'+1})$ -morphism

$$(4.11.3) \quad \psi : R_{\mathfrak{X}}(r+r') \rightarrow R_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}(r').$$

The composition $R_{\mathfrak{X}}(r+r') \xrightarrow{\psi} R_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}(r') \xrightarrow{\varphi} R_{\mathfrak{X}}(r+r') \rightarrow \mathfrak{X}^{r+r'+1}$ is the canonical morphism $R_{\mathfrak{X}}(r+r') \rightarrow \mathfrak{X}^{r+r'+1}$. By the universal property of $R_{\mathfrak{X}}(r+r')$, we have $\varphi \circ \psi = \text{id}$. Let q_1 (resp. q_2) denote the projection on the first (resp. second) factor of $R_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}(r')$. We consider the commutative diagram

$$(4.11.4) \quad \begin{array}{ccccc} R_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}(r') & \xrightarrow{\varphi} & R_{\mathfrak{X}}(r+r') & \xrightarrow{\psi} & R_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}(r') \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow q_1 \\ & & \mathfrak{X}^{r+r'+1} & & R_{\mathfrak{X}}(r) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \mathfrak{X}^{r+1} \end{array}$$

By the universal property of $R_{\mathfrak{X}}(r)$, we see that $q_1 \circ \psi \circ \varphi$ is equal to q_1 . Similarly, we verify that $q_2 \circ \psi \circ \varphi$ is equal to q_2 . Hence, we have $\psi \circ \varphi = \text{id}$.

Since X is reduced, we have $\underline{X} = X$. We have a canonical morphism $(Q_{\mathfrak{X}}(r))_1 \times_X (Q_{\mathfrak{X}}(r'))_1 \rightarrow (Q_{\mathfrak{X}}(r))_1 \times_X (Q_{\mathfrak{X}}(r'))_1$ (2.3.1) and the following commutative diagram (4.10)

$$\begin{array}{ccccc} (Q_{\mathfrak{X}}(r))_1 \times_X (Q_{\mathfrak{X}}(r'))_1 & \longrightarrow & (Q_{\mathfrak{X}}(r))_1 \times_X (Q_{\mathfrak{X}}(r'))_1 & \longrightarrow & Q_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} Q_{\mathfrak{X}}(r') \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^{r+1} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}^{r'+1} \end{array}$$

By the universal property of $Q_{\mathfrak{X}}(r+r')$ (3.12), we obtain an $(\mathfrak{X}^{r+r'+1})$ -morphism

$$(4.11.5) \quad Q_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} Q_{\mathfrak{X}}(r') \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}(r+r').$$

By repeating the proof for $R_{\mathfrak{X}}(r+r')$, we verify that the above morphism is an isomorphism.

Proposition 4.12. *The formal \mathfrak{X}^2 -scheme $R_{\mathfrak{X}}$ (resp. $Q_{\mathfrak{X}}$) has a natural formal \mathfrak{X} -groupoid structure.*

Proof. We follow the proof of ([34] 1.2.7) where the author proves the analogous results for the X^2 -schemes $R_{\mathfrak{X},1}$ and $Q_{\mathfrak{X},1}$. By 4.10, the morphism of the underlying topological spaces $|R_{\mathfrak{X}}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$ (resp. $|Q_{\mathfrak{X}}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$) factors through the diagonal immersion $|\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$. We consider the following commutative diagram (4.10):

$$(4.12.1) \quad \begin{array}{ccc} (R_{\mathfrak{X}}(2))_1 \hookrightarrow & R_{\mathfrak{X}}(2) & \\ \downarrow & \downarrow & \\ & \mathfrak{X}^3 & \\ & \downarrow p_{13} & \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

By the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$ (3.12), we deduce an adic \mathfrak{X}^2 -morphism

$$(4.12.2) \quad \alpha_R : R_{\mathfrak{X}}(2) \rightarrow R_{\mathfrak{X}}.$$

We identify $R_{\mathfrak{X}}(2)$ (resp. $R_{\mathfrak{X}}(3)$) and $R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}$ (resp. $R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}}$) by 4.11. The diagrams

$$\begin{array}{ccccccc} R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\text{id} \times \alpha_R} & R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_R} & R_{\mathfrak{X}} & & R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_R \times \text{id}} & R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_R} & R_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}^4 & \xrightarrow{p_{124}} & \mathfrak{X}^3 & \xrightarrow{p_{13}} & \mathfrak{X}^2 & & \mathfrak{X}^4 & \xrightarrow{p_{134}} & \mathfrak{X}^3 & \xrightarrow{p_{13}} & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

are commutative and the compositions of the lower horizontal arrows coincide. By the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$, we deduce that $\alpha_R \circ (\text{id} \times \alpha_R) = \alpha_R \circ (\alpha_R \times \text{id})$.

For any integer $r \geq 1$, we consider the following commutative diagram:

$$(4.12.3) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathfrak{X} \\ & \nearrow & \downarrow \Delta(r) \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^{r+1} \end{array}$$

By the universal property of $R_{\mathfrak{X}}(r)$, we deduce a \mathfrak{X}^{r+1} -morphism

$$(4.12.4) \quad \iota_R(r) : \mathfrak{X} \rightarrow R_{\mathfrak{X}}(r).$$

In view of 3.6, since $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^{r+1}$ is an immersion, $\iota_R(r)$ is a closed immersion. When $r = 1$, the diagrams

$$\begin{array}{ccccc} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\text{id} \times \iota_R} & R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_R} & R_{\mathfrak{X}} & & R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\iota_R \times \text{id}} & R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_R} & R_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{(p_1, p_2, p_2)} & \mathfrak{X}^3 & \xrightarrow{p_{13}} & \mathfrak{X}^2 & & \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{(p_1, p_1, p_2)} & \mathfrak{X}^3 & \xrightarrow{p_{13}} & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

are commutative and the compositions of the lower horizontal arrows are equal to $\text{id}_{\mathfrak{X}^2}$. By the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$, we deduce that $\alpha_R \circ (\text{id} \times \iota_R) = \alpha_R \circ (\iota_R \times \text{id}) = \text{id}$.

We consider the following commutative diagram (4.7):

$$(4.12.5) \quad \begin{array}{ccc} R_{\mathfrak{X},1} & \hookrightarrow & R_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathfrak{X}^2 \\ & & \downarrow \tau \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

By the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$, we deduce an adic morphism

$$(4.12.6) \quad \eta_R : R_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}}.$$

Since $\tau \circ \Delta = \Delta$, we deduce that $\eta_R \circ \iota_R = \iota_R$ by the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$. By construction, η_R satisfies the condition 4.8(ii). The diagrams

$$(4.12.7) \quad \begin{array}{ccccc} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\text{id} \times \eta_R} & R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_R} & R_{\mathfrak{X}} & & R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{q_1} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\iota_R} & R_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{(p_1, p_2, p_1)} & \mathfrak{X}^3 & \xrightarrow{p_{13}} & \mathfrak{X}^2 & & \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{p_1} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

are commutative and the compositions of the lower horizontal arrows coincide. By the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$, we deduce that $\alpha_R \circ (\text{id} \times \eta_R) = \iota_R \circ q_1$. We prove the equality $\alpha_R \circ (\eta_R \times \text{id}) = \iota_R \circ q_2$ in the same way.

The proposition for $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ can be verified in exactly the same way using 4.10 and 4.11.

4.13. We put $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(W\{T_1, \dots, T_d\})$ and we present local descriptions for $\mathcal{R}_{\mathfrak{Y}}$ and $\mathcal{Q}_{\mathfrak{Y}}$ (4.10). Put $\xi_i = 1 \otimes T_i - T_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}^2}$. The ideal \mathcal{A} , associated to the diagonal closed immersion $\mathfrak{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{Y}^2$, is generated by $p, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$. Hence, we have an isomorphism of $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}^2}$ -algebras (3.5.3, 4.10)

$$(4.13.1) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}^2} \left\{ \frac{\xi_1}{p}, \dots, \frac{\xi_d}{p} \right\} = \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}^2} \{x_1, \dots, x_d\}}{(\xi_i - px_i)_{1 \leq i \leq d}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{\mathfrak{Y}}.$$

By 3.8, the ideal $\mathcal{A}^\#$ is generated by $p, \xi_1^p, \dots, \xi_d^p$ and we have an isomorphism of $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}^2}$ -algebras (3.5.3)

$$(4.13.2) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}^2} \left\{ \frac{\xi_1^p}{p}, \dots, \frac{\xi_d^p}{p} \right\} = \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}^2} \{x_1, \dots, x_d\}}{(\xi_i^p - px_i)_{1 \leq i \leq d}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Q}_{\mathfrak{Y}}.$$

Lemma 4.14. *Let d be the relative dimension of \mathfrak{X} over \mathcal{S} and $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathfrak{X}}^d$ the d -dimensional affine space. Assume that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$. Considering $R_{\mathfrak{X}}$ as a formal \mathfrak{X} -scheme via the morphism $q_1 : R_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ (resp. $q_2 : R_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$), then f induces an isomorphism over \mathfrak{X} :*

$$(4.14.1) \quad \lambda : R_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{A}}_{\mathfrak{X}}^d,$$

such that $\lambda \circ \iota_R : \mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathfrak{X}}^d$ is the closed immersion associated to the zero section of $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathfrak{X}}^d$.

Proof. We follow the proof of ([34] 1.1.8) and we first prove the assertions for \mathfrak{Y} . Observe that q_1 and q_2 are affine. For any $1 \leq i \leq d$, we have $1 \otimes T_i = p(\frac{\xi_i}{p}) + T_i \otimes 1$ in $\mathcal{R}_{\mathfrak{Y}}$. By (4.13.1), we deduce the isomorphisms

$$(4.14.2) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \{x_1, \dots, x_d\} \xrightarrow{\sim} q_{1*}(\mathcal{R}_{\mathfrak{Y}}), \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \{x_1, \dots, x_d\} \xrightarrow{\sim} q_{2*}(\mathcal{R}_{\mathfrak{Y}})$$

where x_i is sent to $\frac{\xi_i}{p}$ in both cases. The isomorphisms (4.14.1) for \mathfrak{Y} follows. We put $Y = \mathfrak{Y}_1$ and we consider the following commutative diagram

$$(4.14.3) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathfrak{X}^2 \\ & \nearrow \Delta & \downarrow \mathrm{id} \times f \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X} \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{Y} \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f \times \mathrm{id} \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{Y}^2 \end{array}$$

where the square is Cartesian. By 3.13 and 3.14, we deduce an isomorphism

$$(4.14.4) \quad R_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} R_{\mathfrak{Y}} \times_{\mathfrak{Y}^2} (\mathfrak{X} \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{Y}) = R_{\mathfrak{Y}} \times_{q_{1, \mathfrak{Y}}} \mathfrak{X}.$$

Considering $R_{\mathfrak{X}}$ as a formal \mathfrak{X} -scheme via q_1 , the isomorphism (4.14.1) follows from that of $R_{\mathfrak{Y}}$. The another isomorphism can be verified in the same way. In view of the construction of ι_R (4.12.4), the composition $\lambda \circ \iota_R$ corresponds to the zero section.

Corollary 4.15. *Keep assumptions of 4.14 and consider $\frac{\xi_i}{p}$'s as sections of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$. We have the following isomorphisms of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebras*

$$(4.15.1) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \{x_1, \dots, x_d\} \xrightarrow{\sim} q_{1*}(\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}), \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \{x_1, \dots, x_d\} \xrightarrow{\sim} q_{2*}(\mathcal{R}_{\mathfrak{X}})$$

where x_i is sent to $\frac{\xi_i}{p}$ in both cases.

4.16. We put $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$. By (4.13.2), we have following isomorphisms

$$(4.16.1) \quad \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}}{(y_i^p - px_i)_{1 \leq i \leq d}} \xrightarrow{\sim} q_{1*}(\mathcal{Q}_{\mathfrak{Y}}), \quad \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}}{(y_i^p - px_i)_{1 \leq i \leq d}} \xrightarrow{\sim} q_{2*}(\mathcal{Q}_{\mathfrak{Y}})$$

where x_i is sent to $\frac{\xi_i^p}{p}$ and y_i is sent to ξ_i in both cases.

Assume that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$. We consider the ξ_i 's and $\frac{\xi_i^p}{p}$'s as sections of $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$. By 3.13, 3.14 and (4.14.3), we deduce the following isomorphisms

$$(4.16.2) \quad \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}}{(y_i^p - px_i)_{1 \leq i \leq d}} \xrightarrow{\sim} q_{1*}(\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}), \quad \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}}{(y_i^p - px_i)_{1 \leq i \leq d}} \xrightarrow{\sim} q_{2*}(\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}})$$

where x_i is sent to $\frac{\xi_i^p}{p}$ and y_i is sent to ξ_i in both cases.

4.17. Let n be an integer ≥ 1 . We describe the Hopf algebra structure of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},n}$ and $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},n}$ in terms of a system of local coordinates. Keep the assumption and notation of 4.14. The homomorphism $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n^2} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n^2}$ induced by $p_{13} : \mathfrak{X}^3 \rightarrow \mathfrak{X}^2$ sends ξ_i to $1 \otimes \xi_i + \xi_i \otimes 1$. The homomorphism $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^2}$ induced by $\tau : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}^2$, sends ξ_i to $-\xi_i$. In view of the proof of 4.12, we have following descriptions:

$$(4.17.1) \quad \begin{cases} \delta : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},n} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},n} & \frac{\xi_i}{p} \mapsto 1 \otimes \frac{\xi_i}{p} + \frac{\xi_i}{p} \otimes 1 \\ \sigma : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},n} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},n} & \frac{\xi_i}{p} \mapsto -\frac{\xi_i}{p} \\ \pi : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n} & \frac{\xi_i}{p} \mapsto 0 \end{cases}$$

$$(4.17.2) \quad \begin{cases} \delta : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},n} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},n} & \xi_i \mapsto 1 \otimes \xi_i + \xi_i \otimes 1 \\ & \frac{\xi_i^p}{p} \mapsto 1 \otimes \frac{\xi_i^p}{p} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{j!(p-j)!} \xi_i^j \otimes \xi_i^{p-j} + \frac{\xi_i^p}{p} \otimes 1 \\ \sigma : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},n} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},n} & \xi_i \mapsto -\xi_i, \quad \frac{\xi_i^p}{p} \mapsto \frac{(-\xi_i)^p}{p} \\ \pi : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n} & \xi_i \mapsto 0, \quad \frac{\xi_i^p}{p} \mapsto 0 \end{cases}$$

5. Connections and stratifications

5.1. Let S be a scheme, X a smooth S -scheme, M an \mathcal{O}_X -module and $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. A λ -connection on M relative to S is an \mathcal{O}_S -linear morphism (2.7)

$$(5.1.1) \quad \nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$$

such that for every local sections f of \mathcal{O}_X and e of M , we have

$$(5.1.2) \quad \nabla(fe) = \lambda e \otimes d(f) + f \nabla(e).$$

We will simply call ∇ a λ -connection on M when there is no risk of confusion. For any $q \geq 0$, the morphism ∇ extends to a unique \mathcal{O}_S -linear morphism

$$(5.1.3) \quad \nabla_q : M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^q \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^{q+1}$$

such that for every local sections ω of $\Omega_{X/S}^q$ and e of M , we have

$$(5.1.4) \quad \nabla_q(e \otimes \omega) = \lambda e \otimes d(\omega) + \nabla(e) \wedge \omega.$$

The composition $\nabla_1 \circ \nabla$ is \mathcal{O}_X -linear. We say that ∇ is *integrable* if $\nabla_1 \circ \nabla = 0$.

Let (M, ∇) and (M', ∇') be two \mathcal{O}_X -modules with λ -connection. A morphism from (M, ∇) to (M', ∇') is an \mathcal{O}_X -linear morphism $u : M \rightarrow M'$ such that $(\text{id} \otimes u) \circ \nabla = \nabla' \circ u$.

Classically, 1-connections are called *connections* and integrable 0-connections are called *Higgs fields*. A *Higgs module* is an \mathcal{O}_X -module equipped with a Higgs field.

We denote by $\text{MIC}(X/S)$ (resp. $\lambda\text{-MIC}(X/S)$, resp. $\text{HIG}(X/S)$) the category of \mathcal{O}_X -modules with integrable connection (resp. λ -connection, resp. Higgs field) relative to S .

Let (M, ∇) be an object of $\lambda\text{-MIC}(X/S)$. We deduce that $\nabla_{q+1} \circ \nabla_q = 0$ for all $q \geq 0$. Then we can associate to (M, ∇) a λ -de Rham complex:

$$(5.1.5) \quad M \xrightarrow{\nabla} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1 \xrightarrow{\nabla_1} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^2 \xrightarrow{\nabla_2} \dots$$

Classically, 0-de Rham complexes are called *Dolbeault complexes* in ([35] p. 24, [2] I.2.3) or *Higgs complexes* in ([33] p. 2).

5.2. Let d, n be integers ≥ 1 , S a $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ -scheme, $f : X \rightarrow \mathbb{A}_S^d = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T_1, \dots, T_d])$ an étale S -morphism. For any $1 \leq i \leq d$, we denote by t_i the image of T_i in \mathcal{O}_X . Let m be an integer ≥ 0 and (M, ∇) an \mathcal{O}_X -module with integrable p^m -connection relative to S . There are \mathcal{O}_S -linear endomorphisms $\nabla_{\partial_1}, \dots, \nabla_{\partial_d}$ of M such that for every local section e of M , we have

$$(5.2.1) \quad \nabla(e) = \sum_{i=1}^d \nabla_{\partial_i}(e) \otimes dt_i.$$

Since ∇ is integrable, we have $\nabla_{\partial_i} \circ \nabla_{\partial_j} = \nabla_{\partial_j} \circ \nabla_{\partial_i}$ for all $1 \leq i, j \leq d$. Therefore, for every multi-index $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$, the endomorphism $\nabla_{\partial^I} = \prod_{j=1}^d (\nabla_{\partial_j})^{i_j}$ is well-defined.

Following ([5] 4.10, [36] Definition 1.5), we say that (M, ∇) is *quasi-nilpotent with respect to f* if, for any open subscheme U of X and any section $e \in M(U)$, there exists a Zariski covering $\{U_j \rightarrow U\}_{j \in J}$ and a family of integers $\{N_j\}_{j \in J}$ such that $\nabla_{\partial^I}(e|_{U_j}) = 0$ for all $j \in J$ and $I \in \mathbb{N}^d$ with $|I| \geq N_j$.

If $f' : X \rightarrow \mathbb{A}_S^d$ is another étale S -morphism, (M, ∇) is quasi-nilpotent with respect to f if and only if it is quasi-nilpotent with respect to f' ([5] 4.13, [36] Lemma 1.6). Note that the previous result requires that $p^n \mathcal{O}_S = 0$.

Definition 5.3 ([5] 4.13; [36] Definition 1.8). Let n be an integer ≥ 1 , S a $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ -scheme, X a smooth S -scheme and (M, ∇) an \mathcal{O}_X -module with integrable p^m -connection relative to S . We say that (M, ∇) is *quasi-nilpotent* if for any point x of X , there exists a Zariski neighborhood U of x in X and an étale S -morphism $f : U \rightarrow \mathbb{A}_S^d$ such that $(M, \nabla)|_U$ is quasi-nilpotent with respect to f (5.2).

We denote by $\text{MIC}^{\text{qn}}(X/S)$ (resp. λ - $\text{MIC}^{\text{qn}}(X/S)$) the full subcategory of $\text{MIC}(X/S)$ (resp. λ - $\text{MIC}(X/S)$) consisting of the quasi-nilpotent objects.

5.4. Let m, n be two integers ≥ 0 , S, T two $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ -schemes, X (resp. Y) a smooth S -scheme (resp. T -scheme). Suppose that there exists a commutative diagram

$$(5.4.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

Let (M, ∇) be an object of p^m - $\text{MIC}(Y/T)$. Taking the inverse image by g of ∇ , we obtain an \mathcal{O}_S -morphism

$$(5.4.2) \quad g^*(M) \rightarrow g^*(M) \otimes_{\mathcal{O}_X} g^*(\Omega_{Y/T}^1).$$

By composing the canonical morphism $g^*(\Omega_{Y/T}^1) \rightarrow \Omega_{X/S}^1$, we obtain an \mathcal{O}_S -linear morphism

$$(5.4.3) \quad (g, h)^*(\nabla) : g^*(M) \rightarrow g^*(M) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1.$$

For any local section m of M and x of \mathcal{O}_X , we have

$$(5.4.4) \quad (g, h)^*(\nabla)(xg^*(m)) = xg^*(\nabla(m)) + p^m g^*(m) \otimes dx.$$

Then we see that $(g, h)^*(\nabla)$ is an integrable p^m -connection on $g^*(M)$. Hence we have an inverse image functor (cf. [21] 1.1.4, [36] page 6)

$$(5.4.5) \quad (g, h)^* : p^m\text{-MIC}(Y/T) \rightarrow p^m\text{-MIC}(X/S).$$

By ([36] Prop 1.9), it sends quasi-nilpotent objects to quasi-nilpotent objects.

Definition 5.5 ([34] 1.2.2). Let (\mathcal{T}, A) be a ringed topos, (B, δ, π, σ) a Hopf A -algebra (4.2) and M an A -module. A B -stratification on M is a B -linear isomorphism $\varepsilon : B \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A B$ (4.1) such that:

- (i) $\pi^*(\varepsilon) = \text{id}_M$.
- (ii) (cocycle condition) The following diagram is commutative:

$$(5.5.1) \quad \begin{array}{ccc} B \otimes_A B \otimes_A M & \xrightarrow{\delta^*(\varepsilon)} & M \otimes_A B \otimes_A B \\ \downarrow \text{id}_B \otimes \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \otimes \text{id}_B \\ & B \otimes_A M \otimes_A B & \end{array}$$

Given two A -modules with B -stratification (M_1, ε_1) and (M_2, ε_2) , a morphism from (M_1, ε_1) to (M_2, ε_2) is an A -linear morphism $f : M_1 \rightarrow M_2$ compatible with ε_1 and ε_2 . The A -module $M_1 \otimes_A M_2$ has a canonical B -stratification

$$(5.5.2) \quad B \otimes_A M_1 \otimes_A M_2 \xrightarrow{\varepsilon_1 \otimes \text{id}_{M_2}} M_1 \otimes_A B \otimes_A M_2 \xrightarrow{\text{id}_{M_1} \otimes \varepsilon_2} M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A B.$$

The above stratification on the tensor product makes the category of A -modules with B -stratification into a tensor category.

Let n be an integer ≥ 1 , \mathfrak{X} an adic formal \mathcal{S} -scheme, M an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module and \mathfrak{G} a formal \mathfrak{X} -groupoid over \mathcal{S} (4.8). We call abusively $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}$ -stratification on M instead of $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}_n}$ -stratification on M (4.8).

Remark 5.6. Keep the notation of 5.5. If a B -linear morphism $\varepsilon : B \otimes_A M \rightarrow M \otimes_A B$ satisfies the conditions (i) and (ii) of 5.5, then ε is an isomorphism. Indeed, by 4.2(c), we have

$$(5.6.1) \quad (\text{id}_B \otimes \sigma)^*(\delta^*(\varepsilon)) = d_1^*(\pi^*(\varepsilon)) = d_1^*(\text{id}_M) = \text{id}_{M \otimes B}.$$

Moreover, we verify that

$$(5.6.2) \quad (\text{id}_B \otimes \sigma)^*(\text{id}_B \otimes \varepsilon) = \sigma^*(\varepsilon), \quad (\text{id}_B \otimes \sigma)^*(\varepsilon \otimes \text{id}_B) = \varepsilon.$$

By the condition (ii) of 5.5, we deduce that $\varepsilon \circ \sigma^*(\varepsilon) = \text{id}_{M \otimes B}$. Symmetrically, we have $\sigma^*(\varepsilon) \circ \varepsilon = \text{id}_{B \otimes M}$. Then the assertion follows.

Lemma 5.7 ([34] 1.2.4). *Let (\mathcal{T}, A) be a ringed topos, B a Hopf A -algebra and M an A -module. A B -stratification on M is equivalent to an A -linear morphism $\theta : M \rightarrow M \otimes_A B$ for the right A -action on the target satisfying the following conditions:*

- (i) *The composition $(\text{id}_M \otimes \pi) \circ \theta : M \rightarrow M \otimes_A B \rightarrow M$ is the identity morphism.*
- (ii) *The following diagram is commutative*

$$(5.7.1) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta} & M \otimes_A B \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \otimes \text{id}_B \\ M \otimes_A B & \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \delta} & M \otimes_A B \otimes_A B \end{array}$$

Proof. Given a stratification ε on M , we define θ for every local section m of M by $\theta(m) = \varepsilon(1 \otimes m)$. The conditions (i) and (ii) follow from the corresponding conditions of ε . Conversely, given a morphism θ as in the lemma, we define a B -linear morphism $\varepsilon : B \otimes_A M \rightarrow M \otimes_A B$ by extension of scalars. It is clear that ε satisfies the conditions (i) and (ii) of 5.5. By 5.6, ε is an isomorphism.

Remark 5.8. Keep the notation of 5.7. In view of 4.2, the homomorphism $\delta : B \rightarrow B \otimes_A B$ induces a B -stratification on the right A -module B .

5.9. Let $\theta : M \rightarrow M \otimes_A B$ be an A -linear morphism satisfying the conditions of 5.7 and $\alpha(\theta) : B^\vee \otimes_A M \rightarrow M$ the associated A -linear morphism (4.4.2). In view of the condition (i) of 5.7, $\alpha(\theta)$ sends $1 \otimes m$ to m for any local section m of M . Moreover, using the condition (ii) of 5.7, one verifies that the morphism $\alpha(\theta)$ makes M into a left B^\vee -module (cf. [34] Proof of 1.2.9 page 18 for details).

5.10. Let $f : (\mathcal{T}', A') \rightarrow (\mathcal{T}, A)$ be a morphism of ringed topoi, B a Hopf A -algebra and B' a Hopf A' -algebra. A homomorphism of Hopf algebras $B \rightarrow f_*(B')$ (4.3) induces a functor (5.5) (cf. [4] II 1.2.5):

$$(5.10.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\text{-modules} \\ \text{with } B\text{-stratification} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'\text{-modules} \\ \text{with } B'\text{-stratification} \end{array} \right\}$$

$$(M, \varepsilon) \quad \mapsto \quad (f^*(M), f^{-1}(\varepsilon) \otimes_{f^{-1}(B)} B').$$

5.11. For a commutative ring A , we denote by $A\langle x_1, \dots, x_d \rangle$ the PD polynomial ring in d variables ([4] I 1.5). If A is an adic ring such that pA is an ideal of the definition, we denote by $A\langle\langle x_1, \dots, x_d \rangle\rangle$ the p -adic completion of the PD polynomial algebra $A\langle x_1, \dots, x_d \rangle$.

5.12. In the following of this section, \mathfrak{X} denotes a smooth formal \mathcal{S} -scheme. For any integer $n \geq 1$, we equip (W_n, pW_n) with the canonical PD-structure γ_n .

Let r, n be integers ≥ 1 . We denote by \mathfrak{X}_n^{r+1} the product of $(r+1)$ -copies of \mathfrak{X}_n over \mathcal{S}_n (2.5) and by $P_{\mathfrak{X}_n}(r)$ the PD-envelope of the diagonal immersion $\mathfrak{X}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n^{r+1}$ compatible with the PD-structure γ_n ([4] I 4.3.1). By extension of scalars ([5] 3.20.8, [4] I 2.8.2), we have a canonical PD-isomorphism $P_{\mathfrak{X}_n}(r) \times_{\mathcal{S}_n} \mathcal{S}_m \xrightarrow{\sim} P_{\mathfrak{X}_m}(r)$ for all integers $1 \leq m < n$. The inductive limit $P_{\mathfrak{X}}(r)$ of the inductive system $(P_{\mathfrak{X}_n}(r))_{n \geq 1}$ is an adic affine formal (\mathfrak{X}^{r+1}) -scheme ([1] 2.3.10). We drop (r) from the notation when $r = 1$.

5.13. Let n be an integer ≥ 1 . Assume that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \text{Spf}(W\{T_1, \dots, T_d\})$ and we set t_i the image of T_i in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ for all $1 \leq i \leq d$. We note ξ_i the section $1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n^2}$ and also its image in $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}}$. We have canonical PD-isomorphisms for the left and the right $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -algebras structure of $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}(r)}$ ([4] I 4.4.1 and 4.5.3) (5.11):

$$(5.13.1) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n} \langle x_1, \dots, x_d \rangle \xrightarrow{\sim} q_{1*}(\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}}), \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n} \langle x_1, \dots, x_d \rangle \xrightarrow{\sim} q_{2*}(\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}})$$

where $q_1, q_2 : P_{\mathfrak{X}_n} \rightarrow \mathfrak{X}_n$ are the canonical morphisms and x_i is sent to ξ_i . For any multi-index $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$, we put $\xi^{[I]} = \prod_{j=1}^d \xi_j^{[i_j]} \in \mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}}$. If $J_{P_{\mathfrak{X}_n}}$ denotes the PD-ideal of $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}}$, then $J_{P_{\mathfrak{X}_n}}^{[j]}$ is free with a basis $\{\xi^{[I]} \mid |I| \geq j\}$ as a left (resp. right) $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module for any $j \geq 1$ ([5] A.3).

Then we deduce the following isomorphisms (5.11)

$$(5.13.2) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \langle x_1, \dots, x_d \rangle \xrightarrow{\sim} q_{1*}(\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}), \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \langle x_1, \dots, x_d \rangle \xrightarrow{\sim} q_{2*}(\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}})$$

where $q_1, q_2 : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ are the canonical morphisms and x_i is sent to ξ_i .

Hence, in general, the PD-scheme $P_{\mathfrak{X}_n}$ is flat over \mathcal{S}_n . We deduce that $P_{\mathfrak{X}}$ is flat over \mathcal{S} (2.6).

5.14. For any integers $n, r, r' \geq 1$, we have a canonical isomorphism of PD-schemes ([4] II 1.3.4):

$$(5.14.1) \quad \lambda_n : P_{\mathfrak{X}_n}(r) \times_{\mathfrak{X}_n} P_{\mathfrak{X}_n}(r') \xrightarrow{\sim} P_{\mathfrak{X}_n}(r+r')$$

where the projection $P_{\mathfrak{X}_n}(r) \rightarrow \mathfrak{X}_n$ (resp. $P_{\mathfrak{X}_n}(r') \rightarrow \mathfrak{X}_n$) is induced by the projection $\mathfrak{X}_n^{r+1} \rightarrow \mathfrak{X}_n$ on the last factor (resp. $\mathfrak{X}_n^{r'+1} \rightarrow \mathfrak{X}_n$ on the first factor). Moreover, the isomorphisms λ_m and λ_n are compatible for all integers $1 \leq m < n$ (see [4] II 1.3.5). We deduce a canonical isomorphism of formal $(\mathfrak{X}^{r+r'+1})$ -schemes

$$(5.14.2) \quad P_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} P_{\mathfrak{X}}(r') \xrightarrow{\sim} P_{\mathfrak{X}}(r+r').$$

Proposition 5.15. *The formal \mathfrak{X}^2 -scheme $P_{\mathfrak{X}}$ has a natural formal \mathfrak{X} -groupoid structure.*

Proof. For any $r \geq 1$, the diagonal immersion $\Delta(r) : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^{r+1}$ induces a canonical (\mathfrak{X}^{r+1}) -morphism

$$(5.15.1) \quad \iota_P(r) : \mathfrak{X} \rightarrow P_{\mathfrak{X}}(r).$$

Let J be the PD-ideal of $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_1}(r)}$ associated to the closed immersion $\mathfrak{X}_1 \rightarrow P_{\mathfrak{X}_1}(r)$. For any local section x of J , we have $x^p = p!x^{[p]} = 0$. Hence, we have a closed immersion $\underline{P_{\mathfrak{X}_1}(r)} \hookrightarrow \mathfrak{X}_1$ (2.3). Since \mathfrak{X}_1 is reduced, the composition $\underline{\mathfrak{X}_1} \rightarrow \underline{P_{\mathfrak{X}_1}(r)} \rightarrow \mathfrak{X}_1$ is an isomorphism. We deduce an isomorphism:

$$(5.15.2) \quad \underline{P_{\mathfrak{X}_1}(r)} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_1.$$

Hence the morphism of the underlying topological spaces $|P_{\mathfrak{X}}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$ factors through $\Delta : |\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$. The canonical morphism

$$(5.15.3) \quad P_{\mathfrak{X}}(2) \rightarrow \mathfrak{X}^3 \xrightarrow{p_{13}} \mathfrak{X}^2$$

is compatible with $\iota_P(2)$ and Δ . By the universal property of $(P_{\mathfrak{X}_n})_{n \geq 1}$, we deduce an \mathfrak{X}^2 -morphism

$$(5.15.4) \quad \alpha_P : P_{\mathfrak{X}}(2) \rightarrow P_{\mathfrak{X}}.$$

Similary, by the universal property of $(P_{\mathfrak{X}_n})_{n \geq 1}$, the composition $P_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}^2 \xrightarrow{\tau} \mathfrak{X}^2$ (4.7) induces a morphism

$$(5.15.5) \quad \eta_P : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow P_{\mathfrak{X}}.$$

By the universal property of $(P_{\mathfrak{X}_n})_{n \geq 1}$, we verify that $(\alpha_P, \iota_P, \eta_P)$ defines a formal \mathfrak{X} -groupoid structure on $P_{\mathfrak{X}}$ (cf. the proof of 4.12).

To simplify the notations, we put $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$ considered as a formal Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebra by (4.8, 5.15).

Proposition 5.16 ([5] 4.12). *Let n be an integer ≥ 1 . There is a canonical equivalence of categories between the category of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules with $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$ -stratification and the category $\text{MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ (5.3).*

We recall the description of this equivalence in the local case (cf. [5] 4.12). Suppose that there exists an étale \mathcal{S}_n -morphism $\mathfrak{X}_n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{S}_n}^d = \text{Spec}(W_n[T_1, \dots, T_d])$. We take again the notation of 5.2 and 5.13. Let (M, ∇) be an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules with quasi-nilpotent integrable connection. The associated stratification $\varepsilon : \mathcal{P}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} M \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$ is defined, for every local section m of M by

$$(5.16.1) \quad \varepsilon(1 \otimes m) = \sum_{I \in \mathbb{N}^d} \nabla_{\partial^I}(m) \otimes \xi^{[I]},$$

where the right hand side is a locally finite sum since ∇ is quasi-nilpotent.

Proposition 5.17. *Let $Q_{\mathfrak{X}}$ be the formal \mathfrak{X} -groupoid defined in 4.12. We have a canonical morphism of formal \mathfrak{X} -groupoids (5.15)*

$$(5.17.1) \quad \lambda : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}.$$

Proof. Note that the canonical isomorphism $\underline{P_X} \xrightarrow{\sim} X$ (5.15.2) fits into a commutative diagram

$$(5.17.2) \quad \begin{array}{ccc} \underline{P_X} & \longrightarrow & P_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

By the universal property of $Q_{\mathfrak{X}}$ (3.12), we deduce a canonical \mathfrak{X}^2 -morphism $\lambda : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$. We denote by $(\alpha_P, \iota_P, \eta_P)$ (resp. $(\alpha_Q, \iota_Q, \eta_Q)$) the formal groupoid structure on $P_{\mathfrak{X}}$ (resp. $Q_{\mathfrak{X}}$). The diagrams

$$(5.17.3) \quad \begin{array}{ccc} P_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} P_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\lambda^2} & Q_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} Q_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_Q} & Q_{\mathfrak{X}} & & P_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} P_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_P} & P_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\lambda} & Q_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}^3 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathfrak{X}^3 & \xrightarrow{p_{13}} & \mathfrak{X}^2 & & \mathfrak{X}^3 & \xrightarrow{p_{13}} & \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

are commutative and the compositions of the lower horizontal arrows coincide. By the universal property of $Q_{\mathfrak{X}}$, we deduce that $\alpha_Q \circ \lambda^2 = \lambda \circ \alpha_P$. The composition $\mathfrak{X} \xrightarrow{\iota_P} P_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ is the diagonal immersion. By the universal property of $Q_{\mathfrak{X}}$, we deduce that $\lambda \circ \iota_P = \iota_Q$. The following diagrams

$$(5.17.4) \quad \begin{array}{ccc} P_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\eta_P} & P_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\lambda} & Q_{\mathfrak{X}} & & P_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\lambda} & Q_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\eta_Q} & Q_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{\tau} & \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathfrak{X}^2 & & \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{\tau} & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

are commutative and the compositions of the lower arrows coincide. By the universal property of $Q_{\mathfrak{X}}$, we deduce that $\lambda \circ \eta_P = \eta_Q \circ \lambda$. The proposition follows.

5.18. We take again the notation of 4.10 for \mathfrak{X} . For any integers $n, r \geq 1$, we denote by $T_{\mathfrak{X}, n}(r)$ the PD-envelope of the closed immersion $\mathfrak{X}_n \hookrightarrow (R_{\mathfrak{X}}(r))_n$ (4.12.4) compatible with the PD-structure γ_n . By extension of scalars ([4] I 2.8.2), we have a canonical isomorphism of PD-schemes $T_{\mathfrak{X}, n}(r) \times_{\mathcal{S}_n} \mathcal{S}_m \xrightarrow{\sim} T_{\mathfrak{X}, m}(r)$ for all integers $1 \leq m < n$. The inductive limit $T_{\mathfrak{X}}(r)$ of the inductive system $(T_{\mathfrak{X}, n}(r))_{n \geq 1}$ is an adic affine formal $R_{\mathfrak{X}}(r)$ -scheme. We denote by

$$(5.18.1) \quad \varpi(r) : T_{\mathfrak{X}}(r) \rightarrow R_{\mathfrak{X}}(r)$$

the canonical morphism. We set $T_{\mathfrak{X}} = T_{\mathfrak{X}}(1)$ and $\varpi = \varpi(1)$.

5.19. Let n, r, r' be integers ≥ 1 . We denote by $J_{(R_{\mathfrak{X}}(r))_n}$ the ideal of $\mathcal{O}_{(R_{\mathfrak{X}}(r))_n}$ associated to the closed immersion $\mathfrak{X}_n \rightarrow (R_{\mathfrak{X}}(r))_n$, which induces an isomorphism on the underlying topological spaces. Via the $(\mathfrak{X}_n^{r+r'+1})$ -isomorphism (4.11.1)

$$(R_{\mathfrak{X}}(r))_n \times_{\mathfrak{X}_n} (R_{\mathfrak{X}}(r'))_n \xrightarrow{\sim} (R_{\mathfrak{X}}(r+r'))_n,$$

the ideal $J_{(R_{\mathfrak{X}}(r))_n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{O}_{(R_{\mathfrak{X}}(r'))_n} + \mathcal{O}_{(R_{\mathfrak{X}}(r))_n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} J_{(R_{\mathfrak{X}}(r'))_n}$ corresponds to $J_{(R_{\mathfrak{X}}(r+r'))_n}$. In view of ([4] II 1.3.5), we deduce a canonical isomorphism of PD-schemes

$$(5.19.1) \quad \lambda_n : T_{\mathfrak{X},n}(r) \times_{\mathfrak{X}_n} T_{\mathfrak{X},n}(r') \xrightarrow{\sim} T_{\mathfrak{X},n}(r+r'),$$

where the projections $T_{\mathfrak{X},n}(r) \rightarrow \mathfrak{X}_n$ (resp. $T_{\mathfrak{X},n}(r') \rightarrow \mathfrak{X}_n$) is induced by the projection $\mathfrak{X}_n^{r+1} \rightarrow \mathfrak{X}_n$ on the last factor (resp. $\mathfrak{X}_n^{r'+1} \rightarrow \mathfrak{X}_n$ on the first factor). In view of the construction of (5.19.1), the isomorphisms λ_m and λ_n are compatibles for all integers $1 \leq m < n$. We deduce a canonical isomorphism of formal $(\mathfrak{X}^{r+r'+1})$ -schemes

$$(5.19.2) \quad T_{\mathfrak{X}}(r) \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}}(r') \xrightarrow{\sim} T_{\mathfrak{X}}(r+r').$$

Proposition 5.20. *The formal \mathfrak{X}^2 -scheme $T_{\mathfrak{X}}$ has a natural formal \mathfrak{X} -groupoid structure such that the morphism $\varpi : T_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}}$ (5.18.1) is a morphism of formal \mathfrak{X} -groupoids (4.9, 4.12).*

Proof. Since the morphism of underlying topological spaces $|R_{\mathfrak{X}}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$ factors through $\Delta : |\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{X}^2|$, the same holds for $|T_{\mathfrak{X}}|$. The \mathfrak{X}^2 -morphism $\iota_R(r) : \mathfrak{X} \rightarrow R_{\mathfrak{X}}(r)$ (4.12.4) induces a canonical \mathfrak{X}^2 -morphism

$$(5.20.1) \quad \iota_T(r) : \mathfrak{X} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}.$$

The composition of $\varpi(2)$ and α_R (4.12.2)

$$(5.20.2) \quad T_{\mathfrak{X}}(2) \rightarrow R_{\mathfrak{X}}(2) \rightarrow R_{\mathfrak{X}}$$

is compatible with $\iota_T(2)$ and ι_R . By the universal property of $(T_{\mathfrak{X},n})_{n \geq 1}$, we deduce an \mathfrak{X}^2 -morphism

$$(5.20.3) \quad \alpha_T : T_{\mathfrak{X}}(2) \rightarrow T_{\mathfrak{X}}$$

compatible with α_R . We identify $T_{\mathfrak{X}}(2)$ and $T_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}}$ (resp. $T_{\mathfrak{X}}(3)$ and $T_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}}$) by 5.19. The diagrams

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\text{id} \times \alpha_T} & T_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_T} & T_{\mathfrak{X}} & & T_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_T \times \text{id}} & T_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} T_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_T} & T_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\text{id} \times \alpha_R} & R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_R} & R_{\mathfrak{X}} & & R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_R \times \text{id}} & R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}} R_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\alpha_R} & R_{\mathfrak{X}} \end{array}$$

are commutative and the compositions of the lower horizontal arrows coincide. By the universal property of $(T_{\mathfrak{X},n})_{n \geq 1}$, we deduce that $\alpha_T \circ (\text{id} \times \alpha_T) = \alpha_T \circ (\alpha_T \times \text{id})$. Since $\eta_R \circ \iota_R = \iota_R$ (4.8(ii)), by the universal property of $(T_{\mathfrak{X},n})_{n \geq 1}$, the composition $T_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\eta_R} R_{\mathfrak{X}}$ (4.12.6) induces a morphism

$$(5.20.4) \quad \eta_T : T_{\mathfrak{X}} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}.$$

By the universal property of $(T_{\mathfrak{X},n})_{n \geq 1}$, we verify that $(\alpha_T, \iota_T, \eta_T)$ is a formal \mathfrak{X} -groupoid structure on $T_{\mathfrak{X}}$ (cf. the proof of 4.12). In view of the proof, the morphism ϖ is clearly a morphism of formal groupoids.

5.21. To simplify the notation, we set $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X}}}$ considered as a formal Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebra (4.8) and we present a local description for it. Assume that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \text{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$. We put $\xi_i = 1 \otimes T_i - T_i - 1$ and we consider $\frac{\xi_i}{p}$ as the section of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ (4.13) and of $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$.

Let n be an integer ≥ 1 . By 4.14 and 4.15, the closed immersion $\mathfrak{X}_n \rightarrow R_{\mathfrak{X},n}$ of smooth \mathcal{S}_n -schemes is regular ([27] 17.12.1) and $(\frac{\xi_1}{p}, \dots, \frac{\xi_d}{p})$ is a regular sequence which generates $J_{R_{\mathfrak{X},n}}$ (5.19). In view of ([4] I 4.5.1 and 4.5.2), we deduce the following isomorphisms:

$$(5.21.1) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n} \langle x_1, \dots, x_d \rangle \xrightarrow{\sim} q_{1*}(\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X},n}}) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n} \langle x_1, \dots, x_d \rangle \xrightarrow{\sim} q_{2*}(\mathcal{O}_{T_{\mathfrak{X},n}}),$$

where $q_1, q_2 : T_{\mathfrak{X}, n} \rightarrow \mathfrak{X}_n$ are the canonical projections and x_i is sent to $\frac{\xi_i}{p}$ in both cases.

Then we deduce the following isomorphisms (5.11)

$$(5.21.2) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \langle x_1, \dots, x_d \rangle \xrightarrow{\sim} q_{1*}(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \langle x_1, \dots, x_d \rangle \xrightarrow{\sim} q_{2*}(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}),$$

where $q_1, q_2 : T_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ are the canonical projections and x_i is sent to $\frac{\xi_i}{p}$ in both cases. For any multi-index $I = (i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$, we put $(\frac{\xi}{p})^{[I]} = \prod_{j=1}^d (\frac{\xi_j}{p})^{[i_j]} \in \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$.

Proposition 5.22 ([36] Prop. 2.9). *Let n be an integer ≥ 1 . There is a canonical equivalence of categories between the category of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules with $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ -stratification and the category $p\text{-MIC}^{\text{qm}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ (5.3).*

We recall the description of this equivalence in the local case (cf. [36] Prop. 2.9). Suppose that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \text{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$. We take again the notation of 5.2 and 5.21. Let (M, ∇) be an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules with quasi-nilpotent integrable p -connection. The associated stratification $\varepsilon : \mathcal{T}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} M \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ is defined, for every local section m of M by

$$(5.22.1) \quad \varepsilon(1 \otimes m) = \sum_{I \in \mathbb{N}^d} \nabla_{\partial^I}(m) \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^{[I]},$$

where the right hand side is a locally finite sum since ∇ is quasi-nilpotent.

Lemma 5.23. *There exists a canonical morphism of formal \mathfrak{X} -groupoids*

$$(5.23.1) \quad \varsigma : R_{\mathfrak{X}} \rightarrow P_{\mathfrak{X}}.$$

Proof. Recall (3.7) that we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} R_{\mathfrak{X}, 1} & \longrightarrow & R_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

Since $R_{\mathfrak{X}}$ is flat over \mathbb{W} , the ideal (p) of $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ has a canonical PD-structure. By the universal property of PD-envelope, we deduce a canonical \mathfrak{X}^2 -morphism $\varsigma : R_{\mathfrak{X}} \rightarrow P_{\mathfrak{X}}$. We denote by $(\alpha_R, \iota_R, \eta_R)$ (resp. $(\alpha_P, \iota_P, \eta_P)$) the formal groupoid structure on $R_{\mathfrak{X}}$ (resp. $P_{\mathfrak{X}}$). By the universal property of $(P_{\mathfrak{X}, n})_{n \geq 1}$, we verify that ς is a morphism of formal \mathfrak{X} -groupoids (cf. the proof of 5.17).

5.24. Let $s : \mathcal{P}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ be the homomorphism of formal Hopf algebras induced by ς . We present a local description of s . Suppose that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \text{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$ and we put t_i the image of T_i in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ and $\xi_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^2}$. We take again the notation of 4.15 and 5.13. In view of the construction of ς , for any multi-index $I \in \mathbb{N}^d$, we have

$$(5.24.1) \quad s(\xi^{[I]}) = \frac{p^{|I|}}{I!} \left(\frac{\xi}{p}\right)^I.$$

We denote by J_R (resp. J_P) the ideal sheaf of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$) associated to the closed immersion ι_R (resp. ι_P). Note that the p -adic valuation of $I!$ is $\leq \sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{|I|}{p^k} \rfloor < |I|$. By (5.24.1), we deduce that in general, s is injective and $s(J_P) \subset pJ_R$. Then we have $s(J_P^{[i]}) \subset p^i J_R^i$ for any $1 \leq i \leq p-1$. By dividing by p^i , we obtain $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -bilinear morphisms

$$(5.24.2) \quad s^i : J_P^{[i]} \rightarrow J_R^i \quad \forall 0 \leq i \leq p-1,$$

where s^0 denotes the morphism s .

6. Local constructions of Shiho

In this section, \mathfrak{X} denotes a smooth formal \mathcal{S} -scheme, X the special fiber of \mathfrak{X} , $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{S}, \sigma} \mathcal{S}$ the base change of \mathfrak{X} by σ (2.1) and $\pi : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ the canonical projection.

6.1. Let n be an integer ≥ 1 . We assume that there exists an \mathcal{S}_{n+1} -morphism $F_{n+1} : \mathfrak{X}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{X}'_{n+1}$ (2.5) whose reduction modulo p is the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X (2.2) and we denote by F_n the reduction modulo p^n of F_{n+1} . The morphism F_{n+1} induces an $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{n+1}})$ -linear morphism $dF_{n+1} : F_{n+1}^*(\Omega_{\mathfrak{X}'_{n+1}/\mathcal{S}_{n+1}}^1) \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}_{n+1}/\mathcal{S}_{n+1}}^1$ whose image is contained in $p\Omega_{\mathfrak{X}_{n+1}/\mathcal{S}_{n+1}}^1$. It induces an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -linear morphism

$$(6.1.1) \quad \frac{dF_{n+1}}{p} : F_n^*(\Omega_{\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n}^1) \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1$$

such that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} F_{n+1}^*(\Omega_{\mathfrak{X}'_{n+1}/\mathcal{S}_{n+1}}^1) & \xrightarrow{dF_{n+1}} & \Omega_{\mathfrak{X}_{n+1}/\mathcal{S}_{n+1}}^1 \\ \downarrow & & \uparrow p \\ F_n^*(\Omega_{\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n}^1) & \xrightarrow{dF_{n+1}/p} & \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1 \end{array}$$

6.2. Let M' be an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}$ -module. We denote by ζ_n the composition

$$(6.2.1) \quad \zeta_n : F_n^*(\Omega_{\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}} M') \xrightarrow{\sim} F_n^*(\Omega_{\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n}^1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} F_n^*(M') \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} F_n^*(M'),$$

i.e., the composition of $\frac{dF_{n+1}}{p} \otimes \text{id}$ and the canonical isomorphism.

Let (M', ∇') be an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}$ -module with an integrable p -connection relative to \mathcal{S}_n (5.1). We construct a W_n -linear morphism $\nabla : F_n^*(M') \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} F_n^*(M')$ as follows. For any local sections f of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ and e of M' , we put

$$(6.2.2) \quad \nabla(fF_n^*(e)) = f\zeta_n(F_n^*(\nabla'(e))) + df \otimes (F_n^*(e)).$$

We define ∇ by additivity and we prove below that ∇ is well-defined and is an integrable connection on $F_n^*(M')$ relative to \mathcal{S}_n .

Let \tilde{f} be a local section of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{n+1}}$, $\tilde{f}' = \pi^*(\tilde{f}) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_{n+1}}$ and e a local section of M' . There exists a local section \tilde{a} of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{n+1}}$ such that $F_{n+1}^*(\tilde{f}') = \tilde{f}^p + p\tilde{a}$. Then, we have $\frac{dF_{n+1}}{p}(F_n^*(df')) = f^{p-1}df + da$, where f, f' and a are the reductions modulo p^n of \tilde{f}, \tilde{f}' and \tilde{a} . We deduce that

$$\begin{aligned} \nabla(F_n^*(f'e)) &= \zeta_n(F_n^*(f'\nabla'(e))) + \zeta_n(F_n^*(pdf' \otimes e)) \\ &= (f^p + pa)\zeta_n(F_n^*(\nabla'(e))) + p(f^{p-1}df + da) \otimes (F_n^*(e)), \\ &= \nabla((f^p + pa)F_n^*(e)), \end{aligned}$$

which implies that ∇ is well-defined.

It is clear that ∇ is a connection. To verify the integrability of ∇ , we can assume that \mathfrak{X} is affine and that there exists an étale \mathcal{S}_{n+1} -morphism $\mathfrak{X}_{n+1} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{S}_{n+1}}^d = \text{Spec}(W_{n+1}[T_1, \dots, T_d])$. For any $1 \leq i \leq d$, let t_i be the image of T_i in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ and $t'_i = \pi^*(t_i) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}$. There exists a section a_i of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ such that $\frac{dF_{n+1}}{p}(dt'_i) = t_i^{p-1}dt_i + da_i$ and a W_n -linear morphism $\theta_i : M' \rightarrow M'$ such that for every local section e of M' , we have $\nabla'(e) = \sum_{i=1}^d dt'_i \otimes \theta_i(e)$. Then we have

$$(6.2.3) \quad \nabla(F_n^*(e)) = \sum_{i=1}^d (t_i^{p-1}dt_i + da_i) \otimes F_n^*(\theta_i(e)).$$

We deduce that

$$\begin{aligned}
\nabla_1(\nabla(F_n^*(e))) &= \nabla_1\left(\sum_{i=1}^d (t_i^{p-1} dt_i + da_i) \otimes F_n^*(\theta_i(e))\right) \\
&= \sum_{i=1}^d -(t_i^{p-1} dt_i + da_i) \wedge \nabla(F_n^*(\theta_i(e))) \\
&= -\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (t_i^{p-1} dt_i + da_i) \wedge (t_j^{p-1} dt_j + da_j) \otimes F_n^*(\theta_j(\theta_i(e))).
\end{aligned}$$

Since ∇' is integrable, $\theta_i \circ \theta_j = \theta_j \circ \theta_i$ for all $1 \leq i, j \leq d$. We deduce that ∇ is integrable.

Lemma 6.3. *Let (M', θ) be a Higgs module on X'/k (5.1) and ∇ the integrable connection on $M = F_{X/k}^*(M')$ constructed in 6.2. If (M', θ) is quasi-nilpotent (5.3), then so is (M, ∇) .*

Proof. The question being local, we can reduce to the case where there exists an étale \mathcal{S}_2 -morphism $\mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{S}_2}^d = \text{Spec}(\mathbb{W}_2[T_1, \dots, T_d])$. We take again the notation of 6.2. There exists \mathcal{O}_X -linear endomorphism $\theta_i : M' \rightarrow M'$ for $1 \leq i \leq d$ such that for every local section e of M' , we have $\theta(e) = \sum_{i=1}^d \theta_i(e) \otimes dt'_i$. We set ∂_i the dual of dt'_i . By (6.2.3), we have

$$(6.3.1) \quad \nabla_{\partial_i}(F_{X/k}^*(e)) = t_i^{p-1} F_{X/k}^*(\theta_i(e)) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial a_j}{\partial t_i} F_{X/k}^*(\theta_j(e)).$$

We denote by $\psi : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} F_X^*(\Omega_{X/k}^1)$ the p -curvature associated to ∇ ([21] 5.0). There exists \mathcal{O}_X -linear endomorphisms $\psi_i : M \rightarrow M$ for $1 \leq i \leq d$ such that

$$(6.3.2) \quad \psi = \sum_{i=1}^d \psi_i \otimes F_X^*(dt_i).$$

Recall ([21] 5.2) that ψ_i and ψ_j commutes for $1 \leq i, j \leq d$. For any $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$, we put $\psi_I = \prod_{j=1}^d \psi_j^{i_j}$ and $\theta_I = \prod_{j=1}^d \theta_j^{i_j}$. The p th iterate $\partial_i^{(p)}$ of ∂_i is zero ([21] 5.0). Then we have

$$(6.3.3) \quad \psi_i = (\nabla_{\partial_i})^p.$$

By (6.3.1) and induction, one verifies that for any integer $l \geq 1$, there exist elements $\{a_{l,I} \in \mathcal{O}_X\}_{I \in \mathbb{N}^d, 1 \leq |I| \leq l}$ such that for every local section e of M' , we have

$$(6.3.4) \quad (\nabla_{\partial_i})^l(F_{X/k}^*(e)) = \sum_{1 \leq |I| \leq l} a_{l,I} F_{X/k}^*(\theta_I(e)).$$

Since the ψ_i 's are \mathcal{O}_X -linear morphisms, if there exists an integer N such that $\theta_I(e) = 0$ for all $|I| \geq N$, then $\psi_I(F_{X/k}^*(e)) = 0$ for all $|I| \geq N$ by (6.3.3) and (6.3.4). We deduce that ∇ is quasi-nilpotent.

6.4. With the notation of 5.1 and 6.2, Shiho constructed a functor (cf. [36] 2.5)

$$(6.4.1) \quad \begin{aligned} \Phi_n : p\text{-MIC}(\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n) &\rightarrow \text{MIC}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n). \\ (M', \nabla') &\mapsto (F_n^*(M'), \nabla) \end{aligned}$$

By 6.3, the functor Φ_1 sends quasi-nilpotent objects to quasi-nilpotent objects. Then by dévissage ([36] Prop 1.13), the same holds for Φ_n . It induces an equivalence of the categories ([36] Theorem 3.1):

$$(6.4.2) \quad \Phi_n : p\text{-MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n) \xrightarrow{\sim} \text{MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n).$$

Let (M', ∇') be an object of $p\text{-MIC}(\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n)$ and $(M, \nabla) = \Phi_n(M', \nabla')$. In view of (6.2.2), the adjunction morphism of $\text{id}_M \otimes \wedge^\bullet(\frac{dF_n+1}{p})$ (6.1.1) induce a \mathbb{W} -linear morphism of complexes (5.1.5)

$$(6.4.3) \quad \lambda : M' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}} \Omega_{\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n}^\bullet \rightarrow F_{X/k*}(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet).$$

Indeed, for local coordinates t_1, \dots, t_d of \mathfrak{X}'_n over \mathcal{S}_n , any local section of $M' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}} \Omega_{\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n}^q$ can be written as a sum of sections of the form $m \otimes dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_q}$. Using (6.2.2), one verifies that (6.4.3) is a morphism of complexes.

Remark 6.5. Given an $\mathcal{O}_{X'}$ -module M' , the *Frobenius descent connection* ∇_{can} on $F_{X'/k}^*(M')$ is defined for every local sections m of M' and f of \mathcal{O}_X , by

$$(6.5.1) \quad \nabla_{\text{can}}(fF_{X'/k}^*(m)) = m \otimes df.$$

It is integrable and of p -curvature zero. Cartier descent states that the functor $M' \mapsto (F_{X'/k}^*(M'), \nabla_{\text{can}})$ induces an equivalence of categories between the category of quasi-coherent $\mathcal{O}_{X'}$ -modules and the full subcategory of $\text{MIC}^{\text{qn}}(X/k)$ consisting of quasi-coherent objects whose p -curvature is zero ([21] 5.1). Considering $\mathcal{O}_{X'}$ -modules as Higgs modules with the zero Higgs field, by (6.2.2), we see that Φ_1 is compatible with Cartier descent.

6.6. Let (M', θ) be a Higgs module on X'/k and ℓ an integer ≥ 0 . We suppose that (M', θ) is nilpotent of level $\leq \ell$, i.e. there exists an increasing filtration of M' :

$$(6.6.1) \quad 0 = N'_0 \subset N'_1 \subset \dots \subset N'_\ell \subset N'_{\ell+1} = M'$$

such that $\theta(N'_i) \subset N'_{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X'/k}^1$ for $1 \leq i \leq \ell + 1$. Then the induced Higgs field on $\text{gr}_{N'}^i(M')$ is trivial.

We set $(M, \nabla) = \Phi_1(M', \theta)$ and $N_i = \Phi_1(N'_i, \theta|_{N'_i})$ for $0 \leq i \leq \ell + 1$. By (6.2.2), we see that ∇ induces an integrable connection on each graded piece $\text{gr}_N^i(M)$, with zero p -curvature.

We have a filtration on the de Rham complex $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet$ (resp. the Dolbeault complex $M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^\bullet$) defined by:

$$N_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet \quad (\text{resp. } N'_i \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^\bullet).$$

Proposition 6.7. *The morphism of complexes (6.4.3) induces for every $i \in [1, \ell + 1]$ a quasi-isomorphism*

$$(6.7.1) \quad N'_i \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^\bullet \rightarrow F_{X/k*}(N_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet).$$

Proof. Following ([32] 1.2), we first consider the case where $\ell = 0$, i.e. θ is the zero Higgs field. Then ∇ is the Frobenius descent connection on $M = F_{X'/k}^*(M')$. When $M' = \mathcal{O}_{X'}$, the morphism on the cohomology induced by λ (6.4.3) is the Cartier isomorphism ([21] 7.2)

$$(6.7.2) \quad C_{X/k}^{-1} : \Omega_{X'/k}^i \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i(F_{X/k*}(\Omega_{X/k}^\bullet)).$$

Since $F_{X/k}$ induces an isomorphism on the underlying topological spaces, we have an isomorphism of complexes

$$(6.7.3) \quad M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_{X/k*}(\Omega_{X'/k}^\bullet) \xrightarrow{\sim} F_{X/k*}(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet).$$

Since $F_{X/k*}(\Omega_{X'/k}^\bullet)$ is a complex of flat $\mathcal{O}_{X'}$ -modules whose cohomology sheaves are also flat (6.7.2), the canonical morphism

$$(6.7.4) \quad M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^i \xrightarrow{\sim} M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{H}^i(F_{X/k*}(\Omega_{X'/k}^\bullet)) \rightarrow \mathcal{H}^i(M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_{X/k*}(\Omega_{X'/k}^\bullet))$$

is an isomorphism. The assertion in the case $\ell = 0$ follows.

We prove the general case by induction on i . The assertion for $i = 1$ is already proved. If the assertion is true for $i - 1$, then the assertion for i follows by dévissage from the induction hypothesis.

6.8. In the following of this section, we suppose that there exists an \mathcal{S} -morphism $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ which lifts the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X . We take again the notation of $R_{\mathfrak{X}}$, $Q_{\mathfrak{X}}$, $T_{\mathfrak{X}}$ and $P_{\mathfrak{X}}$ (4.12, 5.20, 5.15)

Proposition 6.9. *The morphism F induces a morphism of formal groupoids above F (4.9)*

$$(6.9.1) \quad \psi : Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$$

Proof. First, we show that there exists a morphism $g : Q_{\mathfrak{X},1} \rightarrow X'$ which fits into a commutative diagram

$$(6.9.2) \quad \begin{array}{ccc} Q_{\mathfrak{X},1} & \longrightarrow & Q_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow g & & \downarrow \mathfrak{X}^2 \\ X' & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{X}'^2 \end{array}$$

where the bottom map is induced by the diagonal immersion. The problem being local on \mathfrak{X} , we can assume that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \mathrm{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$. For any $1 \leq i \leq d$, we put t_i the image of T_i in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, $t'_i = \pi^*(t_i) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$, $\xi_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^2}$ and $\xi'_i = 1 \otimes t'_i - t'_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'^2}$. Locally, there is a section a_i of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ such that $F^*(t'_i) = t_i^p + pa_i$. Then we have

$$(6.9.3) \quad \begin{aligned} F^{2*}(\xi'_i) &= 1 \otimes t_i^p - t_i^p \otimes 1 + p(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \\ &= (\xi_i + t_i \otimes 1)^p - t_i^p \otimes 1 + p(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \\ &= \xi_i^p + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} \xi_i^j (t_i \otimes 1)^{p-j} + p(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1). \end{aligned}$$

Since $\xi_i^p = p \cdot \left(\frac{\xi_i^p}{p}\right)$ in $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$, the image of $F^{2*}(\xi'_i)$ in $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ is contained in $p\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$. The existence of g follows. By the universal property of $R_{\mathfrak{X}'}$ (3.12), we deduce an \mathfrak{X}'^2 -morphism $\psi : Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$. Using the universal property of $R_{\mathfrak{X}'}$, we verify that ψ is a morphism of formal groupoids above F (cf. the proof of 5.17).

6.10. We denote the composition of $\psi : Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$ and $\lambda : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$ (5.17.1) by

$$(6.10.1) \quad \phi : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$$

The morphism ϕ is a morphism of formal groupoids above F (4.9).

Lemma 6.11 ([36] Prop. 2.14). *The morphism ϕ induces a morphism of formal groupoids above F*

$$(6.11.1) \quad \varphi : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow T_{\mathfrak{X}'}$$

Proof. For any $n \geq 1$, by $\phi \circ \iota_P = F \circ \iota_{R'}$ (4.8(ii)) and the universal property of $T_{\mathfrak{X}',n}$ (5.18), $\phi_n : P_{\mathfrak{X}_n} \rightarrow R_{\mathfrak{X}',n}$ induces a PD- $R_{\mathfrak{X}',n}$ -morphism $\varphi_n : P_{\mathfrak{X}_n} \rightarrow T_{\mathfrak{X}',n}$. For any $1 \leq m < n$, since ϕ_m and ϕ_n are compatible, we see that φ_m and φ_n are compatible. Hence we obtain a \mathfrak{X}'^2 -morphism $\varphi : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow T_{\mathfrak{X}'}$. It follows from 6.10 and the universal property of $(T_{\mathfrak{X}',n})_{n \geq 1}$ that φ is a morphism of formal groupoids above F .

6.12. We have a commutative diagram of formal groupoids

$$(6.12.1) \quad \begin{array}{ccc} P_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\varphi} & T_{\mathfrak{X}'} \\ \downarrow \lambda & \searrow \phi & \downarrow \varpi \\ Q_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\psi} & R_{\mathfrak{X}'} \end{array}$$

where φ, ϕ, ψ are induced by F . By 5.10, we deduce a commutative diagram:

$$(6.12.2) \quad \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{R}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\psi_n^*} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{Q}_{\mathfrak{X}_n}\text{-stratification} \end{array} \right\} \\ \varpi_n^* \downarrow & & \downarrow \lambda_n^* \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{T}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\varphi_n^*} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{P}_{\mathfrak{X}_n}\text{-stratification} \end{array} \right\} \end{array}$$

6.13. Let n be an integer ≥ 1 and F_n (resp. F_{n+1}) the reduction modulo p^n (resp. p^{n+1}) of F . In ([36] Prop. 2.17), Shiho proves that, through the equivalences of categories 5.16 and 5.22, the functor

$$(6.13.1) \quad \varphi_n^* : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{T}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-stratification} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{P}_{\mathfrak{X}_n}\text{-stratification} \end{array} \right\}$$

$$(M, \varepsilon) \mapsto (F_n^*(M), \varphi^{-1}(\varepsilon) \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}'_n})} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}_n}).$$

coincides with the functor induced by F_{n+1} (6.4.2)

$$\Phi_n : p\text{-MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n) \xrightarrow{\sim} \text{MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n).$$

7. Oyama topoi

In this section, X denotes a k -scheme. If we use a gothic letter \mathfrak{T} to denote an adic formal \mathcal{S} -scheme, the corresponding roman letter T will denote its special fiber $\mathfrak{T} \otimes_{\mathbb{W}} k$.

Definition 7.1 ([34] 1.3.1). We define the category $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$) as follows.

- (i) An object of $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ is a triple (U, \mathfrak{T}, u) consisting of an open subscheme U of X , a flat formal \mathcal{S} -scheme \mathfrak{T} (2.6) and an affine k -morphism $u : T \rightarrow U$.
- (ii) An object of $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ is a triple (U, \mathfrak{T}, u) consisting of an open subscheme U of X , a flat formal \mathcal{S} -scheme \mathfrak{T} and an affine k -morphism $u : \underline{T} \rightarrow U$, where \underline{T} is the closed subscheme of T defined in 2.3.
- (iii) Let $(U_1, \mathfrak{T}_1, u_1)$ and $(U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ be two objects of $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$). A morphism from $(U_1, \mathfrak{T}_1, u_1)$ to $(U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ consists of an \mathcal{S} -morphism $f : \mathfrak{T}_1 \rightarrow \mathfrak{T}_2$ and an X -morphism $g : U_1 \rightarrow U_2$ such that $g \circ u_1 = u_2 \circ f_s$ (resp. $g \circ u_1 = u_2 \circ f_s$), where f_s is the reduction modulo p of f .

We denote an object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) simply by (U, \mathfrak{T}) , if there is no risk of confusion.

To simplify the notation, we drop (X/\mathcal{S}) in the notation $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$) and we write simply \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), if there is no risk of confusion. We put $\mathcal{E}' = \mathcal{E}(X'/\mathcal{S})$ (2.2).

Lemma 7.2. *Let $f : \mathfrak{T}_1 \rightarrow \mathfrak{T}_2$ be an \mathcal{S} -morphism of flat formal \mathcal{S} -schemes and $f_s : T_1 \rightarrow T_2$ its special fiber.*

- (i) *If f_s is an isomorphism, then f is an isomorphism.*
- (ii) *If f_s is flat, then the morphism $\mathfrak{T}_{1,n} \rightarrow \mathfrak{T}_{2,n}$ induced by f (2.5) is flat for all integer $n \geq 1$.*

Proof. We can reduce to the case where $\mathfrak{T}_1 = \text{Spf}(B)$, $\mathfrak{T}_2 = \text{Spf}(A)$ are affine ([1] 2.1.37) and f is induced by an adic \mathbb{W} -homomorphism $u : A \rightarrow B$. For any integers $n \geq 1$, we put $A_n = A/p^n A$, $B_n = B/p^n B$, $\text{gr}^n(A) = p^n A/p^{n+1} A$ and $\text{gr}^n(B) = p^n B/p^{n+1} B$. Since A and B are flat over \mathbb{W} , the canonical morphism of B_1 -modules

$$(7.2.1) \quad B_1 \otimes_{A_1} \text{gr}^n(A) \rightarrow \text{gr}^n(B)$$

is an isomorphism.

(i) If u induces an isomorphism $A_1 \xrightarrow{\sim} B_1$, we deduce that u is an isomorphism by (7.2.1) and ([8] III § 2.8 Cor. 3 to Théo. 1).

(ii) If B_1 is flat over A_1 , we deduce that B_n is flat over A_n for all integer $n \geq 1$ by (7.2.1) and the local criteria of flatness ([8] III § 5.2 Théo. 1).

7.3. We say that a morphism $(U_1, \mathfrak{T}_1, u_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) is *flat* if the special fiber $T_1 \rightarrow T_2$ of the morphism $\mathfrak{T}_1 \rightarrow \mathfrak{T}_2$ is flat.

Let $(U_1, \mathfrak{T}_1, u_1) \rightarrow (U, \mathfrak{T}, u)$ be a flat morphism and $(U_2, \mathfrak{T}_2, u_2) \rightarrow (U, \mathfrak{T}, u)$ a morphism of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). Their fiber product is represented by the fiber products $\mathfrak{T}_{12} = \mathfrak{T}_1 \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{T}_2$ which is flat over \mathcal{S} in view of 7.2(ii) and 2.6, and $U_{12} = U_1 \times_U U_2$ endowed with the affine morphism $T_1 \times_T T_2 \rightarrow U_1 \times_U U_2$ (resp. composite morphism $\underline{T}_1 \times_T \underline{T}_2 \rightarrow \underline{T}_1 \times_T \underline{T}_2 \rightarrow U_1 \times_U U_2$ (2.3.1)) induced by u_1 , u_2 and u .

7.4. Let (U, \mathfrak{T}, u) be an object of $\underline{\mathcal{E}}$. We have a commutative diagram

$$(7.4.1) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{u} & \underline{T} & \hookrightarrow & T \\ F_{U/k} \downarrow & & F_{\underline{T}/k} \downarrow & \nearrow f_{T/k} & \downarrow F_{T/k} \\ U' & \xleftarrow{u'} & \underline{T}' & \hookrightarrow & T' \end{array}$$

where the vertical arrows denote the relative Frobenius morphisms (2.2, 2.3). It is clear that $(U', \mathfrak{T}, u' \circ f_{T/k})$ is an object of \mathcal{E}' (7.1). Moreover, the correspondence $(U, \mathfrak{T}, u) \mapsto (U', \mathfrak{T}, u' \circ f_{T/k})$ is functorial. We denote by ρ the functor defined as above:

$$(7.4.2) \quad \rho : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}', \quad (U, \mathfrak{T}, u) \mapsto (U', \mathfrak{T}, u' \circ f_{T/k}).$$

The functor ρ sends flat morphisms to flat morphisms and it commutes with the fibered product of a flat morphism and a morphism of $\underline{\mathcal{E}}$. Indeed, by functoriality, if $T_1 \rightarrow T$ and $T_2 \rightarrow T$ are two morphisms of k -schemes, the canonical morphism $f_{T_1} \times f_{T_2} : T_1 \times_T T_2 \rightarrow \underline{T}'_1 \times_{\underline{T}'} \underline{T}'_2$ is equal to the composition $T_1 \times_T T_2 \rightarrow (\underline{T}_1 \times_T \underline{T}_2)' \rightarrow (\underline{T}_1 \times_T \underline{T}_2)' = \underline{T}'_1 \times_{\underline{T}'} \underline{T}'_2$.

Definition 7.5. (i) We say that a morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of $\underline{\mathcal{E}}$ is *Cartesian* if the following diagram is Cartesian

$$(7.5.1) \quad \begin{array}{ccc} T_1 & \longrightarrow & T_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_1 & \longrightarrow & U_2 \end{array}$$

(ii) We say that a morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of $\underline{\mathcal{E}}$ is *Cartesian* if $\rho(f)$ (7.4.2) is a Cartesian morphism of \mathcal{E}' .

If $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ is a Cartesian morphism of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), T_1 is an open subscheme of T_2 and f identifies \mathfrak{T}_1 with the open formal subscheme induced by \mathfrak{T}_2 on T_1 by 7.2(i).

A Cartesian morphism is clearly flat (7.3). By 7.3 and 7.4, the base change of a Cartesian morphism of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) is Cartesian. The composition of Cartesian morphisms of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) is clearly Cartesian.

7.6. Let (U, \mathfrak{T}, u) be an object of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) and V an open subscheme of U . Note that the canonical morphism $\underline{T} \rightarrow T$ induces an isomorphism on the underlying topological spaces. We denote by \mathfrak{T}_V the restriction of \mathfrak{T} to the open subset $u^{-1}(V)$ of the topological space $|T|$. If (U, \mathfrak{T}) is an object of $\underline{\mathcal{E}}$, we denote by T_V the special fiber of \mathfrak{T}_V , i.e. the subscheme of T induced on $u^{-1}(V)$. Then, we have a canonical isomorphism $(\underline{T}_V)' \xrightarrow{\sim} \underline{T}' \times_{U'} V'$. Hence, we obtain an object (V, \mathfrak{T}_V) of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) and a Cartesian morphism $(V, \mathfrak{T}_V) \rightarrow (U, \mathfrak{T})$ of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$).

Let (U, \mathfrak{T}) be an object of $\underline{\mathcal{E}}$, $(U', \mathfrak{T}) = \rho(U, \mathfrak{T})$ and V an open subscheme of U . Since ρ takes Cartesian morphisms to Cartesian morphisms, we have $\rho(V, \mathfrak{T}_V) = (V', \mathfrak{T}_{V'})$.

Any morphism $(U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) factors uniquely through the Cartesian morphism $(U_1, (\mathfrak{T}_2)_{U_1}) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$. The category $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) is fibered over the category $\mathbf{Zar}/_X$ of open subschemes of X by the functor

$$(7.6.1) \quad \pi : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbf{Zar}/_X \quad (\text{resp. } \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbf{Zar}/_X) \quad (U, \mathfrak{T}) \mapsto U,$$

7.7. Let (U, \mathfrak{T}) be an object of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). By 7.6, we have a functor

$$(7.7.1) \quad \alpha_{(U, \mathfrak{T})} : \mathbf{Zar}/_U \rightarrow \underline{\mathcal{E}} \quad (\text{resp. } \underline{\mathcal{E}}) \quad V \mapsto (V, \mathfrak{T}_V).$$

Let $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ be a morphism of $\underline{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), $J_f : \mathbf{Zar}/_{U_1} \rightarrow \mathbf{Zar}/_{U_2}$ the functor induced by composing with $U_1 \rightarrow U_2$. Then, the morphism f induces a morphism of functors:

$$(7.7.2) \quad \beta_f : \alpha_{(U_1, \mathfrak{T}_1)} \rightarrow \alpha_{(U_2, \mathfrak{T}_2)} \circ J_f.$$

Let \mathcal{F} be a presheaf on \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). We denote by $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ the presheaf $\mathcal{F} \circ \alpha_{(U, \mathfrak{T})}$ on \mathbf{Zar}/U . The morphism β_f induces a morphism of presheaves:

$$(7.7.3) \quad \gamma_f : \mathcal{F}_{(U_2, \mathfrak{T}_2)}|_{U_1} \rightarrow \mathcal{F}_{(U_1, \mathfrak{T}_1)}.$$

It is clear that $\gamma_{\text{id}} = \text{id}$. By construction, if f is a Cartesian morphism, then γ_f is an isomorphism. If $g : (U_2, \mathfrak{T}_2) \rightarrow (U_3, \mathfrak{T}_3)$ is another morphism of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), we verify that

$$(7.7.4) \quad \gamma_{g \circ f} = \gamma_f \circ J_f^*(\gamma_g),$$

where J_f^* denotes the localisation functor from the category of presheaves on \mathbf{Zar}/U_2 to the category of presheaves on \mathbf{Zar}/U_1 .

Proposition 7.8. *A presheaf \mathcal{F} on \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) is equivalent to the following data:*

- (i) For every object (U, \mathfrak{T}) of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) a presheaf $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ on \mathbf{Zar}/U ,
- (ii) For every morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) a morphism $\gamma_f : \mathcal{F}_{(U_2, \mathfrak{T}_2)}|_{U_1} \rightarrow \mathcal{F}_{(U_1, \mathfrak{T}_1)}$, subject to the following conditions

- (a) If f is the identity morphism of (U, \mathfrak{T}) , then γ_f is the identity of $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$.
- (b) If f is a Cartesian morphism, then γ_f is an isomorphism.
- (c) If f and g are two composable morphisms of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), then we have $\gamma_{g \circ f} = \gamma_f \circ J_f^*(\gamma_g)$.

Proof. Let $\{\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}, \gamma_f\}$ be a data as in the proposition. We associate to it a presheaf on \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) as follows. Let (U, \mathfrak{T}) be an object of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). We define $\mathcal{F}(U, \mathfrak{T}) = \mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}(U)$. For any morphism $f : (V, \mathfrak{Z}) \rightarrow (U, \mathfrak{T})$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), we deduce a morphism from γ_f

$$(7.8.1) \quad \mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}(V) \rightarrow \mathcal{F}_{(V, \mathfrak{Z})}(V).$$

In view of conditions (a) and (c), the correspondence

$$(7.8.2) \quad (U, \mathfrak{T}) \mapsto \mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}(U)$$

is a presheaf. In view of condition (b), the above construction is quasi-inverse to the construction of 7.7. The assertion follows.

We call *descent data associated to \mathcal{F}* the data $\{\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}, \gamma_f\}$ as in the proposition.

Definition 7.9 ([34] 1.3.1). Let (U, \mathfrak{T}, u) be an object of $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$). We denote by $\text{Cov}(U, \mathfrak{T}, u)$ the set of families of Cartesian morphisms $\{(U_i, \mathfrak{T}_i, u_i) \rightarrow (U, \mathfrak{T}, u)\}_{i \in I}$ such that $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ is a Zariski covering.

7.10. By 7.5, we see that the sets $\text{Cov}(U, \mathfrak{T})$ for $(U, \mathfrak{T}) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{E}(X/\mathcal{S}))$ (resp. $(U, \mathfrak{T}) \in \mathbf{Ob}(\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S}))$) form a pretopology ([3] II 1.3). We call *Zariski topology* on $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$) the topology associated to the pretopology defined by the $\text{Cov}(U, \mathfrak{T})$'s. We denote by $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S})$) the topos of sheaves of sets on $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$), equipped with the Zariski topology.

To simplify the notation, we drop (X/\mathcal{S}) in the notation $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S})$) and write simply $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}$), if there is no risk of confusion. We put $\tilde{\mathcal{E}}' = \tilde{\mathcal{E}}(X'/\mathcal{S})$.

Proposition 7.11. *Let \mathcal{F} be a presheaf on \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) and $\{\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}, \gamma_f\}$ the associated descent data (7.8). Then \mathcal{F} is a sheaf for the Zariski topology, if and only if for each object (U, \mathfrak{T}) of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), the presheaf $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ (7.7) is a sheaf of U_{zar} (2.8).*

Proof. Let (U, \mathfrak{T}) be an object of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). The functor $\alpha_{(U, \mathfrak{T})}$ (7.7.1) sends morphisms of \mathbf{Zar}/U to Cartesian morphisms of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) and commutes with fibered products. It is clearly continuous for the Zariski topologies. Hence, if \mathcal{F} is a sheaf, then $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ is a sheaf of U_{zar} ([3] III 1.2).

Conversely, suppose that each presheaf $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ is a sheaf of U_{zar} . Let $\{(U_i, \mathfrak{T}_i) \rightarrow (U, \mathfrak{T})\}_{i \in I}$ be an element of $\text{Cov}(U, \mathfrak{T})$. In view of condition (b) of 7.8, we deduce that the sequence

$$\mathcal{F}(U, \mathfrak{T}) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i, \mathfrak{T}_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_{ij}, \mathfrak{T}_{ij})$$

is exact, where $(U_{ij}, \mathfrak{T}_{ij}) = (U_i, \mathfrak{T}_i) \times_{(U, \mathfrak{T})} (U_j, \mathfrak{T}_j)$. Hence, \mathcal{F} is a sheaf.

7.12. Recall that a family of morphisms of schemes $\{f_i : T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$ is called an *fppf covering* if each morphism f_i is flat and locally of finite presentation and if $|T| = \bigcup_{i \in I} f_i(|T_i|)$ (cf. [23] IV 6.3.2).

We say that a family of \mathcal{S} -morphisms of flat formal \mathcal{S} -schemes $\{f_i : \mathfrak{T}_i \rightarrow \mathfrak{T}\}_{i \in I}$ is an *fppf covering* if each morphism f_i is locally of finite presentation ([1] 2.3.15) and if its special fiber $\{T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$ is an fppf covering of schemes. By ([1] 2.3.16) and 7.2(ii), a family of \mathcal{S} -morphisms of flat formal \mathcal{S} -schemes $\{\mathfrak{T}_i \rightarrow \mathfrak{T}\}_{i \in I}$ is an fppf covering if and only if the family $\{\mathfrak{T}_{i,n} \rightarrow \mathfrak{T}_n\}_{i \in I}$ is an fppf covering of schemes for all integer $n \geq 1$.

Recall that an adic formal \mathcal{S} -scheme \mathfrak{T} is flat over \mathcal{S} if and only if \mathfrak{T}_n is flat over \mathcal{S}_n for all integer $n \geq 1$ (2.6). Since fppf coverings of schemes are stable by base change and by composition, the same holds for fppf coverings of flat formal \mathcal{S} -schemes.

Definition 7.13. Let (U, \mathfrak{T}, u) be an object of $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$). We denote by $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U, \mathfrak{T}, u)$ the set of families of flat morphisms $\{(U_i, \mathfrak{T}_i, u_i) \rightarrow (U, \mathfrak{T}, u)\}_{i \in I}$ (7.3) such that $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ is a Zariski covering and that $\{\mathfrak{T}_i \rightarrow \mathfrak{T}\}_{i \in I}$ is an fppf covering (7.12).

It is clear that $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U, \mathfrak{T}, u)$ contains $\text{Cov}(U, \mathfrak{T}, u)$ (7.9).

7.14. By 7.3 and 7.12, we see that the sets $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U, \mathfrak{T})$ for $(U, \mathfrak{T}) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{E}(X/\mathcal{S}))$ (resp. $(U, \mathfrak{T}) \in \mathbf{Ob}(\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S}))$) form a pretopology ([3] II 1.3). We call *fppf topology* the topology on $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$) associated to the pretopology defined by the sets $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U, \mathfrak{T})$. We denote by $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})_{\text{fppf}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S})_{\text{fppf}}$) the topos of sheaves of sets on $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$), equipped with the fppf topology.

To simplify the notation, we drop (X/\mathcal{S}) in the notation $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})_{\text{fppf}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S})_{\text{fppf}}$) and write simply $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}}$), if there is no risk of confusion. We put $\tilde{\mathcal{E}}'_{\text{fppf}} = \tilde{\mathcal{E}}(X'/\mathcal{S})_{\text{fppf}}$.

7.15. Let \mathcal{F} be a sheaf of $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}}$) and (U, \mathfrak{T}) an object of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). Since \mathcal{F} is also a sheaf for the Zariski topology, the presheaf $\tilde{\mathcal{F}}_{(U, \mathfrak{T})}$ (7.8) is a sheaf of U_{zar} .

Let $\{f : (U, \mathfrak{Z}) \rightarrow (U, \mathfrak{T})\}$ be an element of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U, \mathfrak{T})$ and put $(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z}) = (U, \mathfrak{Z}) \times_{(U, \mathfrak{T})} (U, \mathfrak{Z})$. Since \mathcal{F} is a sheaf for the fppf topology, we deduce an exact sequence of U_{zar} (7.7.3)

$$(7.15.1) \quad \mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})} \xrightarrow{\eta} \mathcal{F}_{(U, \mathfrak{Z})} \rightrightarrows \mathcal{F}_{(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})}.$$

7.16. Let \mathcal{C} and \mathcal{D} be two categories, $\hat{\mathcal{C}}$ (resp. $\hat{\mathcal{D}}$) the category of presheaves of sets on \mathcal{C} (resp. \mathcal{D}) and $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ a functor. We have a functor

$$(7.16.1) \quad \hat{u}^* : \hat{\mathcal{D}} \rightarrow \hat{\mathcal{C}} \quad \mathcal{G} \mapsto \hat{u}^*(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \circ u.$$

It admits a right adjoint ([3] I 5.1)

$$(7.16.2) \quad \hat{u}_* : \hat{\mathcal{C}} \rightarrow \hat{\mathcal{D}}.$$

Let \mathcal{C} and \mathcal{D} be two sites². If $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ is a cocontinuous (resp. continuous) functor and \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}) is a sheaf on \mathcal{C} (resp. \mathcal{D}), then $\hat{u}_*(\mathcal{F})$ (resp. $\hat{u}^*(\mathcal{G})$) is a sheaf on \mathcal{D} (resp. \mathcal{C}) ([3] III 1.2, 2.2).

Let $\tilde{\mathcal{C}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{D}}$) be the topos of the sheaves of sets on \mathcal{C} (resp. \mathcal{D}) and $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ a cocontinuous functor. Then u induces a morphism of topoi $g : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ defined by $g_* = \hat{u}_*$ and $g^* = a \circ \hat{u}^*$, where a is the sheafification functor (cf. [3] III 2.3).

7.17. Note that the fppf topology on \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) is finer than the Zariski topology. Equipped with the fppf topology on the source and the Zariski topology on the target, the identical functors $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ and $\underline{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}$ are cocontinuous. By 7.16, they induce morphisms of topoi

$$(7.17.1) \quad \sigma : \tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}, \quad \sigma : \tilde{\underline{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}} \rightarrow \tilde{\underline{\mathcal{E}}}.$$

If \mathcal{F} is a sheaf of $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}}$), $\sigma_*(\mathcal{F})$ is equal to \mathcal{F} . If \mathcal{G} is a sheaf of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}$), then $\sigma^*(\mathcal{G})$ is the sheafification of \mathcal{G} with respect to the fppf topology.

2. We suppose that the site \mathcal{C} is small.

Lemma 7.18. *Let Y, Z be two k -schemes and $g_1, g_2 : \underline{Y} \rightarrow Z$ two k -morphisms. We put $h_i = g'_i \circ f_{Y/k} : Y \rightarrow Y' \rightarrow Z'$ (7.4.1) for $i = 1, 2$. If $h_1 = h_2$, then $g_1 = g_2$.*

Proof. Let U be an affine open subscheme of Z . Since $f_{Y/k}$ is a homeomorphism and $h_1 = h_2$, we have $g_1^{-1}(U) = g_2^{-1}(U)$. Hence we can reduce to case where Z is affine.

Since the morphism $f_{Y/k}$ is schematically dominant (2.3), we deduce that $g'_1 = g'_2$ by ([24] 5.4.1). The functor $X \mapsto X'$ from the category of k -schemes to itself is clearly faithful. Then the lemma follows.

Lemma 7.19. *Let (U, \mathfrak{T}, u) be an object of $\underline{\mathcal{E}}$ and $g : (V', \mathfrak{Z}, w) \rightarrow \rho(U, \mathfrak{T}, u)$ a morphism of \mathcal{E}' . Then there exist an object (V, \mathfrak{Z}, v) of $\underline{\mathcal{E}}$ and a morphism $f : (V, \mathfrak{Z}, v) \rightarrow (U, \mathfrak{T}, u)$ of $\underline{\mathcal{E}}$ such that $g = \rho(f)$.*

Proof. Put $V = F_{U/k}^{-1}(V')$. Since the composition $Z \rightarrow T \xrightarrow{u' \circ f_{T/k}} U'$ factors through $V' \subset U'$, the composition $\underline{Z} \rightarrow \underline{T} \xrightarrow{u} U$ factors through V . We obtain a k -morphism $v : \underline{Z} \rightarrow V$ such that $w = v' \circ f_{Z/k}$. Since $f_{Z/k}$ is separated, v' is affine ([25] 1.6.2(v)) and so is v . Hence, we get an object (V, \mathfrak{Z}, v) of $\underline{\mathcal{E}}$ and a morphism $f : (V, \mathfrak{Z}, v) \rightarrow (U, \mathfrak{T}, u)$ of $\underline{\mathcal{E}}$ such that $g = \rho(f)$.

Lemma 7.20 (cf. [34] 1.4.1). (i) *The functor ρ (7.4.2) is fully faithful.*

(ii) *Equipped with the Zariski topology (7.10) (resp. fppf topology (7.14)) on both sides, the functor ρ is continuous and cocontinuous ([3] III 1.1, 2.1).*

Proof. (i) The functor ρ is clearly faithful. We prove its fullness. Let $(U_1, \mathfrak{T}_1, u_1), (U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ be two objects of $\underline{\mathcal{E}}$ and $g : \rho(U_1, \mathfrak{T}_1, u_1) \rightarrow \rho(U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ a morphism of \mathcal{E}' . Since $U'_1 \subset U'_2 \subset U'$, we have $U_1 \subset U_2 \subset U$. It suffices to show that the diagram

$$\begin{array}{ccc} \underline{T}_1 & \xrightarrow{g_s} & \underline{T}_2 \\ u_1 \downarrow & & \downarrow u_2 \\ U_1 & \longrightarrow & U_2 \end{array}$$

is commutative. It follows from 7.18 applied to the compositions $\underline{T}_1 \xrightarrow{u_1} U_1 \rightarrow U_2$ and $\underline{T}_1 \rightarrow \underline{T}_2 \xrightarrow{u_2} U_2$.

(ii) A family of morphisms $\{(U_i, \mathfrak{T}_i) \rightarrow (U, \mathfrak{T})\}_{i \in I}$ of $\underline{\mathcal{E}}$ belongs to $\text{Cov}(U, \mathfrak{T})$ (resp. $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U, \mathfrak{T})$) if and only if, its image by ρ belongs to $\text{Cov}(\rho(U, \mathfrak{T}))$ (resp. $\text{Cov}_{\text{fppf}}(\rho(U, \mathfrak{T}))$). Since ρ commutes with the fibered product of a flat morphism and a morphism (7.3), the continuity of ρ follows from ([3] III 1.6).

Let $\{(U'_i, \mathfrak{T}_i) \rightarrow \rho(U, \mathfrak{T})\}_{i \in I}$ be an element of $\text{Cov}(\rho(U, \mathfrak{T}))$ (resp. $\text{Cov}_{\text{fppf}}(\rho(U, \mathfrak{T}))$). By 7.19, there exists an element $\{(U_i, \mathfrak{T}_i) \rightarrow (U, \mathfrak{T})\}_{i \in I}$ of $\text{Cov}(U, \mathfrak{T})$ (resp. $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U, \mathfrak{T})$) mapping by ρ to the given element. Then, ρ is cocontinuous by ([3] III 2.1).

7.21. By 7.20(ii) and 7.16, the functor ρ (7.4.2) induces morphisms of topoi

$$(7.21.1) \quad C_{X/\mathcal{S}} : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}',$$

$$(7.21.2) \quad C_{X/\mathcal{S}, \text{fppf}} : \underline{\mathcal{E}}_{\text{fppf}} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}'_{\text{fppf}}.$$

such that the pullback functor is induced by the composition with ρ . We have a commutative diagram

$$(7.21.3) \quad \begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{E}}'_{\text{fppf}} & \xrightarrow{C_{X/\mathcal{S}, \text{fppf}}} & \underline{\mathcal{E}}'_{\text{fppf}} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma' \\ \underline{\mathcal{E}} & \xrightarrow{C_{X/\mathcal{S}}} & \underline{\mathcal{E}}' \end{array}$$

Let \mathcal{F} be a sheaf of $\underline{\mathcal{E}}'$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}'_{\text{fppf}}$), $\{\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}, \gamma_{f, \mathcal{F}}\}$ the descent data associated to \mathcal{F} (7.8) and $\{C^*(\mathcal{F})_{(U, \mathfrak{T})}, \gamma_{f, C^*(\mathcal{F})}\}$ the descent data associated to $C^*_{X/\mathcal{S}}(\mathcal{F})$ (resp. $C^*_{X/\mathcal{S}, \text{fppf}}(\mathcal{F})$). Since ρ takes Cartesian morphisms to Cartesian morphisms (7.5), for any object (U, \mathfrak{T}) of $\underline{\mathcal{E}}$, we have

$$(7.21.4) \quad C^*(\mathcal{F})_{(U, \mathfrak{T})} = \pi_{U*}(\mathcal{F}_{\rho(U, \mathfrak{T})})$$

where π_U denotes the equivalence of topoi $U'_{\text{zar}} \xrightarrow{\sim} U_{\text{zar}}$. For any morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of $\underline{\mathcal{E}}$, we verify that

$$(7.21.5) \quad \gamma_{f, \mathcal{C}^*(\mathcal{F})} = \pi_{U_1*}(\gamma_{\rho(f), \mathcal{F}}).$$

7.22. Let X be an affine scheme and $h : X \rightarrow Y = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_d])$ an étale morphism. By ([20] 3.2), the following diagram is Cartesian (2.2)

$$(7.22.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_X} & X \\ h \downarrow & \square & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{F_Y} & Y. \end{array}$$

We put $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(W\{T_1, \dots, T_d\})$ and we denote by $F_{\mathfrak{Y}} : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}$ the affine morphism defined by $\sigma : W \rightarrow W$ and $T_i \mapsto T_i^p$. Since X is étale over Y , there exists a unique deformation \mathfrak{X} of X over \mathfrak{Y} up to a unique isomorphism by deformation theory. The formal scheme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}, F_{\mathfrak{Y}}} \mathfrak{Y}$ is also a deformation of $X = X \times_{Y, F_Y} Y$ over \mathfrak{Y} . Then we deduce a Cartesian diagram

$$(7.22.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathfrak{Y} & \xrightarrow{F_{\mathfrak{Y}}} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

In particular, we obtain a morphism of finite type $F_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ above σ , which lifts the absolute Frobenius morphism F_X of X . We put $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{S}, \sigma} \mathcal{S}$. Then we obtain an \mathcal{S} -morphism of finite type $F_{\mathfrak{X}'/\mathcal{S}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ which lifts the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$. Since X is smooth, the morphism $F_{X/k} : X \rightarrow X'$ is faithfully flat (cf. [20] 3.2). Hence $\{F_{\mathfrak{X}'/\mathcal{S}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'\}$ is an fppf covering in the sense of 7.12.

Lemma 7.23. Let (U', \mathfrak{T}, u) be an object of \mathcal{E}' , $U = F_{X/k}^{-1}(U')$. Suppose that U is affine and that there exists an étale k -morphism $U \rightarrow \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_d])$.

(i) There exists an object (U, \mathfrak{Z}) of $\underline{\mathcal{E}}$ and an element $\{f : \rho(U, \mathfrak{Z}) \rightarrow (U', \mathfrak{T})\}$ of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U', \mathfrak{T})$.

(ii) Let $g : (U'_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U', \mathfrak{T})$ be a morphism of \mathcal{E}' . Then there exists a morphism $h : (U_1, \mathfrak{Z}_1) \rightarrow (U, \mathfrak{Z})$ of $\underline{\mathcal{E}}$ and an element $\{\varphi : \rho(U_1, \mathfrak{Z}_1) \rightarrow (U'_1, \mathfrak{T}_1)\}$ of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U'_1, \mathfrak{T}_1)$ such that the following diagram is Cartesian:

$$(7.23.1) \quad \begin{array}{ccc} \rho(U_1, \mathfrak{Z}_1) & \xrightarrow{\varphi} & (U'_1, \mathfrak{T}_1) \\ \rho(h) \downarrow & \square & \downarrow g \\ \rho(U, \mathfrak{Z}) & \xrightarrow{f} & (U', \mathfrak{T}) \end{array}$$

Proof. (i) We follow the proof of ([34] 1.4.5). Let \mathfrak{U} be a smooth lifting of U over \mathcal{S} and $F : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}'$ a lifting of $F_{U/k}$ as in 7.22. Note that U' is affine. Since the morphism u is affine, T and \mathfrak{T} are affine. Since \mathfrak{U}' is smooth over \mathcal{S} , there exists an \mathcal{S} -morphism $\tau : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{U}'$ which lifts u . We consider the following commutative diagram:

$$(7.23.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & T \times_{U'} U & \longrightarrow & \mathfrak{T} \times_{\mathfrak{U}'} \mathfrak{U} \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & \mathfrak{T} & & \mathfrak{U} \\ \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \mathfrak{U} & & \mathfrak{U}' \\ \swarrow F_{U/k} & & \swarrow F & & \\ U' & \longrightarrow & \mathfrak{U}' & & \end{array}$$

We set $\mathfrak{Z} = \mathfrak{T} \times_{\mathfrak{U}'} \mathfrak{U}$, $Z = T \times_{U'} U$ and we denote the composition $\underline{Z} \rightarrow Z \rightarrow U$ by v . Then we obtain an object (U, \mathfrak{Z}, v) of $\underline{\mathcal{E}}$. By (7.23.2), one verifies that the diagram

$$(7.23.3) \quad \begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & T \\ f_{Z/k} \downarrow & & \downarrow u \\ \underline{Z} & \xrightarrow{v'} & U' \end{array}$$

is commutative. Then, we obtain a morphism $\rho(U, \mathfrak{Z}, v) \rightarrow (U', \mathfrak{T}, u)$ of \mathcal{E}' . Since $\{F : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}'\}$ is an fppf covering, $\{\rho(U, \mathfrak{Z}, v) \rightarrow (U', \mathfrak{T}, u)\}$ is an element of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U', \mathfrak{T})$.

(ii) The morphism f is flat. We denote by (U'_1, \mathfrak{Z}_1) the fibered product $\rho(U, \mathfrak{Z}) \times_{(U', \mathfrak{T})} (U'_1, \mathfrak{T}_1)$ in \mathcal{E} . By applying 7.19 to the projection $(U'_1, \mathfrak{Z}_1) \rightarrow \rho(U, \mathfrak{Z})$, we obtain the Cartesian diagram (7.23.1). Since φ is the base change of f , φ is an element of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U'_1, \mathfrak{T}_1)$.

Lemma 7.24. *Let X be a k -scheme and (U', \mathfrak{T}) an object of \mathcal{E}' , (U, \mathfrak{Z}) an object of $\underline{\mathcal{E}}$ and $\{\rho(U, \mathfrak{Z}) \rightarrow (U', \mathfrak{T})\}$ an element of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U', \mathfrak{T})$. Then there exists an object $(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})$ of $\underline{\mathcal{E}}$ and two morphisms $p_1, p_2 : (U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z}) \rightarrow (U, \mathfrak{Z})$ such that $\rho(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z}) = \rho(U, \mathfrak{Z}) \times_{(U', \mathfrak{T})} \rho(U, \mathfrak{Z})$ and that $\rho(p_1)$ (resp. $\rho(p_2)$) is the projection $\rho(U, \mathfrak{Z}) \times_{(U', \mathfrak{T})} \rho(U, \mathfrak{Z}) \rightarrow \rho(U, \mathfrak{Z})$ on the first (resp. second) component.*

Proof. By applying 7.19 to the projection $\rho(U, \mathfrak{Z}) \times_{(U', \mathfrak{T})} \rho(U, \mathfrak{Z}) \rightarrow \rho(U, \mathfrak{Z})$ on the first component, we obtain an object $(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})$ of $\underline{\mathcal{E}}$ and a morphism $p_1 : (U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z}) \rightarrow (U, \mathfrak{Z})$ as in the proposition. The existence of p_2 follows from the fullness of ρ (7.20(i)).

Proposition 7.25 ([34] 4.2.1). *Let \mathcal{C} be a site, \mathcal{D} a site whose topology is defined by a pretopology and $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ a functor. Assume that:*

- (i) u is fully faithful,
- (ii) u is continuous and cocontinuous,
- (iii) For every object V of \mathcal{D} , there exists a covering of V in \mathcal{D} of the form $\{u(U_i) \rightarrow V\}_{i \in I}$ where U_i is an object of \mathcal{C} .

Then the morphism of topoi $g : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ defined by $g^* = \hat{u}^*$ and $g_* = \hat{u}_*$ (7.16) is an equivalence of topoi.

Theorem 7.26 (cf. [34] 1.4.6). *For any smooth k -scheme X , the morphism (7.21.2)*

$$C_{X/\mathcal{S}, \text{fppf}} : \tilde{\underline{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}'_{\text{fppf}}$$

is an equivalence of topoi.

The theorem follows from 7.20, 7.23 and 7.25.

7.27. If we equip \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) with the Zariski topology, the functor (7.6.1)

$$(7.27.1) \quad \pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Zar}/X \quad (\text{resp. } \pi : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbf{Zar}/X) \quad (U, \mathfrak{T}) \rightarrow U$$

is cocontinuous. Since π commutes with the fibered product of a flat morphism and a morphism (7.3), one verifies that π is also continuous ([3] III 1.6). By 7.16, it induces a morphism of topoi that we denote by

$$(7.27.2) \quad v : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow X_{\text{zar}} \quad (\text{resp. } v : \tilde{\underline{\mathcal{E}}} \rightarrow X_{\text{zar}})$$

such that the inverse image functor is induced by the composition with π . Moreover, one verifies that the above morphisms fit into a commutative diagram

$$(7.27.3) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\underline{\mathcal{E}}} & \xrightarrow{C_{X/\mathcal{S}}} & \tilde{\mathcal{E}}' \\ v \downarrow & & \downarrow v' \\ X_{\text{zar}} & \xrightarrow{F_{X/k}} & X'_{\text{zar}} \end{array}$$

Let \mathcal{F} be a sheaf of X_{zar} . For any object (U, \mathfrak{T}) of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), we have $(v^*(\mathcal{F}))_{(U, \mathfrak{T})} = \mathcal{F}|_U$. For any morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), the transition morphism γ_f of $v^*(\mathcal{F})$ (7.7.3) is the

canonical isomorphism

$$(7.27.4) \quad \gamma_f : (\mathcal{F}|_{U_2})|_{U_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}|_{U_1}.$$

7.28. Let U be an open subscheme of X . The category $\mathcal{E}(U/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S})$) forms naturally a full subcategory of $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$). Equipped with the Zariski topologies on both sides, the canonical functor $\mathcal{E}(U/\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S}) \rightarrow \underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$) is continuous and cocontinuous. It induces a morphism of topoi

$$(7.28.1) \quad j_U : \tilde{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S}) \quad (\text{resp. } \underline{j}_U : \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(U/\mathcal{S}) \rightarrow \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S}))$$

such that the inverse image functor is given by restricting a sheaf of $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ to $\mathcal{E}(U/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S})$ to $\underline{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S})$). The above morphisms fit into a commutative diagram

$$(7.28.2) \quad \begin{array}{ccc} \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(U/\mathcal{S}) & \xrightarrow{C_{U/\mathcal{S}}} & \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(U'/\mathcal{S}) \\ \underline{j}_U \downarrow & & \downarrow \underline{j}_{U'} \\ \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S}) & \xrightarrow{C_{X/\mathcal{S}}} & \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X'/\mathcal{S}) \end{array}$$

7.29. Let e be the final object of $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S})$) and U an open subscheme of X . We define a presheaf \tilde{U} on $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$) by

$$(7.29.1) \quad \tilde{U}(V, \mathfrak{T}) = \begin{cases} e(V, \mathfrak{T}) & \text{if } V \subset U \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

One verifies that \tilde{U} is a sheaf for the Zariski topology (7.10) and that it is a subobject of e . By (7.21.4), we have $C_{X/\mathcal{S}}^*(\tilde{U}') = \tilde{U}$. Then $C_{X/\mathcal{S}}$ induces by localisation un morphism of topoi

$$(C_{X/\mathcal{S}})_{j_{\tilde{U}'}} : \tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})_{j_{\tilde{U}}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(X'/\mathcal{S})_{j_{\tilde{U}'}}$$

which fits into a commutative diagram ([3] IV 5.10)

$$(7.29.2) \quad \begin{array}{ccc} \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S})_{j_{\tilde{U}}} & \xrightarrow{(C_{X/\mathcal{S}})_{j_{\tilde{U}'}}} & \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X'/\mathcal{S})_{j_{\tilde{U}'}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S}) & \xrightarrow{C_{X/\mathcal{S}}} & \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X'/\mathcal{S}) \end{array}$$

Proposition 7.30 ([4] III 3.1.2). *There exists a canonical equivalence of topoi*

$$(7.30.1) \quad \tilde{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})_{j_{\tilde{U}}} \quad (\text{resp. } \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(U/\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} \underline{\tilde{\mathcal{E}}}(X/\mathcal{S})_{j_{\tilde{U}}}).$$

which is compatible with j_U (resp. \underline{j}_U) and the localisation morphism with respect to \tilde{U} . Moreover, the morphism $(C_{X/\mathcal{S}})_{j_{\tilde{U}'}}$ coincides with $C_{U/\mathcal{S}}$ via the above equivalences.

Proof. A sheaf of $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})_{j_{\tilde{U}}}$ is a pair consisting of a sheaf \mathcal{F} of $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ and a morphism $q : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{U}$. By (7.29.1), for any object (V, \mathfrak{T}) of $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ such that $V \not\subset U$, we have $\mathcal{F}(V, \mathfrak{T}) = \emptyset$. We associate to (\mathcal{F}, q) a sheaf \mathcal{G} of $\tilde{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S})$ by restricting \mathcal{F} to $\mathcal{E}(U/\mathcal{S})$. Conversely, given a sheaf \mathcal{G} of $\tilde{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S})$, we can associate a sheaf \mathcal{F} of $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ by letting

$$(7.30.2) \quad \mathcal{F}(V, \mathfrak{T}) = \begin{cases} \mathcal{G}(V, \mathfrak{T}) & \text{if } V \subset U \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then there exists a unique morphism $q : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{U}$ and we obtain a sheaf of $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})_{j_{\tilde{U}}}$. These functors are quasi-inverse to each other and give the equivalence (7.30.1).

Note that the inverse image functor of j_U (resp. \underline{j}_U) is given by restricting a sheaf of $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ to $\mathcal{E}(U/\mathcal{S})$ (resp. $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ to $\underline{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S})$). If \mathcal{F} is a sheaf of $\tilde{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$), then the canonical morphism $\mathcal{F} \times \tilde{U} \rightarrow \mathcal{F}$ induces an isomorphism when it restricts to $\mathcal{E}(U/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S})$). Then the compatibility between j_U (resp. \underline{j}_U) and the localisation morphism with respect to \tilde{U} follows.

The direct image functor of the localisation morphism is fully faithful ([3] IV 9.2). Then the second assertion follows from the first assertion and the commutativity of the diagrams (7.29.2) and (7.28.2).

8. Crystals in Oyama topoi

In this section, X denotes a k -scheme and n an integer ≥ 1 .

8.1. We define a presheaf of rings $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(X/\mathcal{S}),n}$ on $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S}),n}$ on $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$) (7.1) by

$$(8.1.1) \quad (U, \mathfrak{T}) \mapsto \Gamma(\mathfrak{T}, \mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}).$$

For any object (U, \mathfrak{T}) of $\mathcal{E}(X/\mathcal{S})$ (resp. $\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S})$) and any element $\{(U_i, \mathfrak{T}_i) \rightarrow (U, \mathfrak{T})\}_{i \in I}$ of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U, \mathfrak{T})$ (7.13), $\{\mathfrak{T}_{i,n} \rightarrow \mathfrak{T}_n\}_{i \in I}$ is an fppf covering of schemes (7.12). By fppf descent for quasi-coherent modules ([22] VIII 1.2), $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(X/\mathcal{S}),n}$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S}),n}$) is a sheaf for the fppf topology (7.14). Since the fppf topology is finer than the Zariski topology, it is also a sheaf for the Zariski topology (7.10).

To simplify the notation, we drop (X/\mathcal{S}) from the notation $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(X/\mathcal{S}),n}$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S}),n}$) and we write $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}$). We put $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}(X'/\mathcal{S}),n}$.

8.2. We take again the notation of 7.21. We verify that, by definition

$$(8.2.1) \quad C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}) = \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n} \quad (\text{resp. } C_{X/\mathcal{S},\text{fppf}}^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}) = \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}).$$

The morphism $C_{X/\mathcal{S}}$ (resp. $C_{X/\mathcal{S},\text{fppf}}$) is therefore underlying a morphism of ringed topoi, which we denote also by

$$(8.2.2) \quad C_{X/\mathcal{S}} \quad : \quad (\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{E}'}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}),$$

$$(8.2.3) \quad (\text{resp. } C_{X/\mathcal{S},\text{fppf}} \quad : \quad (\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}, \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{E}'}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}',n})).$$

8.3. For any object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), we consider $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ as a sheaf of T_{zar} (resp. $\underline{T}_{\text{zar}}$). We have (7.11)

$$(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n})_{(U,\mathfrak{T},u)} = u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}) \quad (\text{resp. } (\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n})_{(U,\mathfrak{T},u)} = u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})).$$

A morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1, u_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) induces a morphism of the ringed topoi

$$(8.3.1) \quad \tilde{f}_n : (U_{1,\text{zar}}, u_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{1,n}})) \rightarrow (U_{2,\text{zar}}, u_{2*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{2,n}})).$$

For $u_{2*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{2,n}})$ -modules of $U_{2,\text{zar}}$, we use the notation \tilde{f}_n^{-1} to denote the inverse image in the sense of abelian sheaves, and we keep the notation \tilde{f}_n^* for the inverse image in the sense of modules. Note that if f is a Cartesian morphism (7.5), the morphism \tilde{f}_n is a localisation morphism of ringed topoi.

Let \mathcal{F} be an $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -module of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}$ -module of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}$). The sheaf $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T},u)}$ of U_{zar} (7.11) is naturally an $u_{2*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{2,n}})$ -module. Then the morphism $\gamma_f : \mathcal{F}_{(U_2,\mathfrak{T}_2)}|_{U_1} \rightarrow \mathcal{F}_{(U_1,\mathfrak{T}_1)}$ (7.7.3) extends to an $u_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{1,n}})$ -linear morphism

$$(8.3.2) \quad c_f : \tilde{f}_n^*(\mathcal{F}_{(U_2,\mathfrak{T}_2)}) \rightarrow \mathcal{F}_{(U_1,\mathfrak{T}_1)}$$

If $g : (U_2, \mathfrak{T}_2) \rightarrow (U_3, \mathfrak{T}_3)$ is another morphism of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), in view of (7.7.4), we verify that

$$(8.3.3) \quad c_{g \circ f} = c_f \circ \tilde{f}_n^*(c_g).$$

Proposition 8.4. *An $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -module of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}$ -module of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}$) is equivalent to the following data:*

- (i) For every object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), an $u_{2*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{2,n}})$ -module $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}$ of U_{zar} ,
- (ii) For every morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1, u_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), an $u_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{1,n}})$ -linear morphism c_f (8.3.2),

which is subject to the following conditions

- (a) If f is the identity morphism, then c_f is the identity.

(b) If f is a Cartesian morphism, then c_f is an isomorphism.

(c) If f and g are two composable morphisms of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), then we have $c_{g \circ f} = c_f \circ \tilde{f}_n^*(c_g)$ (8.3.3).

Proof. By 7.8 and 7.11, a data $\{\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}, c_f\}$ gives a sheaf \mathcal{F} of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}$). The $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -module structure on $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ induces an $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -module (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -module) structure on \mathcal{F} .

We call the data $\{\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}, c_f\}$ defined in 8.4 *the linearized descent data associated to the $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -module (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -module) \mathcal{F} of \mathcal{E} (resp. of $\underline{\mathcal{E}}$)*.

An $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -module (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -module) \mathcal{F} of $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}$ (resp. $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}}$) induces an $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -module (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -module) $\sigma_*(\mathcal{F})$ of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}$) (7.17.1). We can associate to \mathcal{F} a linearized descent data $\{\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}, c_f\}$ by that of $\sigma_*(\mathcal{F})$ (8.4).

Definition 8.5 ([34] 1.3.3). Let \mathcal{F} be an $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -module of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. an $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -module of $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}$, resp. an $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -module of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}$, resp. an $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -module of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}}$).

(i) We say that \mathcal{F} is *quasi-coherent* if for every object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), the $u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})$ -module $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ of U_{zar} (8.3) is quasi-coherent ([24] 0.5.1.3).

(ii) We say that \mathcal{F} is a *crystal* or a *crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$* (resp. *$\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}$* , resp. *$\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -modules of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}$* , resp. *$\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -modules of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}}$*) if for every morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), the canonical morphism c_f (8.3.2) is an isomorphism.

We denote by $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n})$ (resp. $\mathcal{C}_{\text{fppf}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n})$, resp. $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n})$, resp. $\mathcal{C}_{\text{fppf}}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n})$) the category of crystals of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}$, resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -modules of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}$, resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -modules of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}}$) and we use the notation $\mathcal{C}^{\text{qcoh}}(-)$ or $\mathcal{C}_{\text{fppf}}^{\text{qcoh}}(-)$ to denote the full subcategory consisting of quasi-coherent crystals.

8.6. Let \mathcal{A} be an $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -algebra of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -algebra of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}$) and $\{\mathcal{A}_{(U, \mathfrak{T})}, c_f\}$ the associated linearized descent data. Then $\mathcal{A}_{(U, \mathfrak{T})}$ is an $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -algebra of U_{zar} . For any morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), the morphism c_f (8.3.2) is a homomorphism of $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_1, n}$ -algebras. We say that \mathcal{A} is quasi-coherent (resp. is a crystal) if it is quasi-coherent (resp. is a crystal) as a module (8.5).

Proposition 8.7. *Let $u : T \rightarrow U$ be an affine morphism of schemes, $i : T \rightarrow \mathcal{T}$ a nilpotent closed immersion. We denote by $v : (\mathcal{T}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}) \rightarrow (U, u_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))$ the morphism of ringed topoi induced by u . Then, the inverse image and direct image functors of v induce equivalences of categories quasi-inverse to each other between the category of quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ -modules of \mathcal{T}_{zar} and the category of quasi-coherent $u_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}})$ -modules of U_{zar} .*

The assertion follows from 8.9 and 8.10.

Lemma 8.8. *We keep the assumption of 8.7. The restriction of the functor v_* to the category of quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ -modules is exact.*

Proof. The functor v_* is left exact. Let $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ be a surjection of quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ -modules. To show that $v_*(\mathcal{M}) \rightarrow v_*(\mathcal{N})$ is surjective, it suffices to show that for any affine open subscheme V of U , the morphism $v_*(\mathcal{M})(V) \rightarrow v_*(\mathcal{N})(V)$ is surjective. Since u is affine, the open subscheme \mathcal{T}_V of \mathcal{T} associated to the open subset $u^{-1}(V)$ of T is affine. Since \mathcal{M}, \mathcal{N} are quasi-coherent and \mathcal{T}_V is affine, the morphism $\mathcal{M}(\mathcal{T}_V) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{T}_V)$ is surjective. Then the assertion follows.

Lemma 8.9. *We keep the assumption of 8.7. For any quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ -module \mathcal{M} , $v_*(\mathcal{M})$ is quasi-coherent and the adjunction morphism $v^*(v_*(\mathcal{M})) \rightarrow \mathcal{M}$ is an isomorphism.*

Proof. The question being local, we may assume that U is affine and so is \mathcal{T} . Then the quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ module \mathcal{M} admits a presentation

$$(8.9.1) \quad \mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{\oplus J} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{\oplus I} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0.$$

The canonical morphism $(v_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))^{\oplus I} \rightarrow v_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{\oplus I})$ is clearly an isomorphism. Since v_* is exact (8.8), we obtain a presentation of $v_*(\mathcal{M})$

$$(v_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))^{\oplus J} \rightarrow (v_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))^{\oplus I} \rightarrow v_*(\mathcal{M}) \rightarrow 0.$$

The first assertion follows.

The exact sequence (8.9.1) induces a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} (v^*(v_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}})))^{\oplus J} & \longrightarrow & (v^*(v_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}})))^{\oplus I} & \longrightarrow & v^*(v_*(\mathcal{M})) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{\oplus J} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{\oplus I} & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Since v_* is exact and v^* is right exact, horizontal arrows are exact. The first two vertical arrows are isomorphisms. Then the second assertion follows.

Lemma 8.10. *We keep the assumption of 8.7. For any quasi-coherent $u_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}})$ -module \mathcal{N} , $v^*(\mathcal{N})$ is quasi-coherent and the adjunction morphism $\mathcal{N} \rightarrow v_*(v^*(\mathcal{N}))$ is an isomorphism.*

Proof. The pull-back functor sends quasi-coherent objects to quasi-coherent objects ([24] 5.1.4).

The second assertion being local, we may assume that U is affine and that \mathcal{N} admits a presentation:

$$(u_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))^{\oplus J} \rightarrow (u_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))^{\oplus I} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$$

Then we deduce a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} (u_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))^{\oplus J} & \longrightarrow & (u_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))^{\oplus I} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (v_*(v^*(u_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))))^{\oplus J} & \longrightarrow & (v_*(v^*(u_*(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}))))^{\oplus I} & \longrightarrow & v_*(v^*(\mathcal{N})) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Since v_* is exact (8.8) and v^* is right exact, the horizontal arrows are exact. The first two vertical arrows are isomorphisms. Then the second assertion follows.

Remark 8.11. (i) Let \mathcal{F} be a quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -module of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},n}$ -module of $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}$). By 8.7, for any object (U, \mathfrak{T}) of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), we can equivalently consider $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{T})}$ (8.4) as a quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -module of $\mathfrak{T}_{n, \text{zar}}$; for any morphism $f : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$), we can equivalently consider c_f (8.4) as an $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_1, n}$ -linear morphism of $\mathfrak{T}_{1, \text{zar}}$:

$$(8.11.1) \quad c_f : f_n^*(\mathcal{F}_{(U_2, \mathfrak{T}_2)}) \rightarrow \mathcal{F}_{(U_1, \mathfrak{T}_1)},$$

where f_n denotes the morphism $\mathfrak{T}_{1, n} \rightarrow \mathfrak{T}_{2, n}$.

(ii) Let \mathcal{F}' be a quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}$ -module of $\tilde{\mathcal{E}}'$. By (7.21.4), $C_{X/\mathcal{F}}^*(\mathcal{F}')$ is also quasi-coherent. For any object (U, \mathfrak{T}) of $\underline{\mathcal{E}}$, we have an equality of $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -modules of $\mathfrak{T}_{n, \text{zar}}$ (7.21.4)

$$(8.11.2) \quad (C_{X/\mathcal{F}}^*(\mathcal{F}'))_{(U, \mathfrak{T})} = \mathcal{F}'_{\rho(U, \mathfrak{T})}.$$

Lemma 8.12. *The inverse image functor $C_{X/\mathcal{F}}^*$ of $C_{X/\mathcal{F}}$ (8.2.2) sends quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}$ -modules (resp. crystals of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}$ -modules) of $\tilde{\mathcal{E}}'$ to quasi-coherent $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -modules (resp. crystals of $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}$ -modules) of $\tilde{\underline{\mathcal{E}}}$.*

Proof. The assertion follows from (7.21.4) and (7.21.5).

Theorem 8.13 (cf. [34] 1.4.3 for $n = 1$). *Let X be a smooth scheme over k . The inverse image and the direct image functors of $C_{X/\mathcal{F}}$ induce equivalences of categories quasi-inverse to each other (8.5)*

$$(8.13.1) \quad \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}) \rightleftarrows \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}).$$

The theorem follows from 8.14 and 8.15 below.

Proposition 8.14. *Let X be a k -scheme. The direct image functors $\sigma_* : \tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ and $\sigma_* : \underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}} \rightarrow \underline{\tilde{\mathcal{E}}}$ (7.17.1) induce equivalences of categories*

$$(8.14.1) \quad \mathcal{C}_{\text{fppf}}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}), \quad \mathcal{C}_{\text{fppf}}^{\text{qcoh}}(\underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E},n}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E},n}).$$

Proof. The functor σ_* sends quasi-coherent crystals of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -modules of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}_{\text{fppf}}$) to quasi-coherent crystals of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -modules of $\underline{\tilde{\mathcal{E}}}$). The functors (8.14.1) are clearly fully faithful. It suffices to show the essential surjectivity.

Let \mathcal{F} be a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$ and $\{\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}, c_f\}$ the associated linearized descent data. We consider $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}$ as an $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -module of T_{zar} (8.11). To see that \mathcal{F} is a sheaf for the fppf topology, we prove that, for any element $\{(U_i, \mathfrak{T}_i) \rightarrow (U, \mathfrak{T})\}_{i \in I}$ of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U, \mathfrak{T})$ (7.13), the sequence

$$(8.14.2) \quad 0 \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}) \rightarrow \prod_{i \in I} \Gamma(T_i, \mathcal{F}_{(U_i, \mathfrak{T}_i)}) \rightarrow \prod_{i,j \in I} \Gamma(T_{ij}, \mathcal{F}_{(U_{ij}, \mathfrak{T}_{ij})})$$

is exact, where $(U_{ij}, \mathfrak{T}_{ij}) = (U_i, \mathfrak{T}_i) \times_{(U,\mathfrak{T})} (U_j, \mathfrak{T}_j)$ (7.3). Then, we have

$$(8.14.3) \quad \mathcal{F}_{(U_i, \mathfrak{T}_i)} \simeq f_i^*(\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}), \quad \mathcal{F}_{(U_{ij}, \mathfrak{T}_{ij})} \simeq f_{ij}^*(\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}),$$

where f_i (resp. f_{ij}) denotes the morphism $\mathfrak{T}_i \rightarrow \mathfrak{T}$ (resp. $\mathfrak{T}_{ij} \rightarrow \mathfrak{T}$). It suffices to show that the sequence

$$(8.14.4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})} \rightarrow \prod_{i \in I} f_{i*}(\mathcal{F}_{(U_i, \mathfrak{T}_i)}) \rightarrow \prod_{i,j \in I} f_{ij*}(\mathcal{F}_{(U_{ij}, \mathfrak{T}_{ij})})$$

is exact. The question being local, we can suppose that U is quasi-compact and quasi-separated and so is \mathfrak{T} . Hence we can reduce to the case where the set I is finite. Note that the schemes $\mathfrak{T}_{i,n}$ and \mathfrak{T}_n are quasi-compact and quasi-separated and that the morphisms f_i and f_{ij} are quasi-compact. Then the exactness of (8.14.4) follows from the fppf descent for quasi-coherent modules ([22] VIII 1.2).

The assertion for quasi-coherent crystals of $\underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E},n}$ -modules can be verified in exactly the same way.

Proposition 8.15. *Let X be a smooth k -scheme. The inverse image and the direct image functors of the morphism $C_{X/\mathcal{S}, \text{fppf}}$ (8.2.3) induce equivalences of categories quasi-inverse to each other:*

$$(8.15.1) \quad \mathcal{C}_{\text{fppf}}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}) \rightleftarrows \mathcal{C}_{\text{fppf}}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}).$$

Proof. We write simply C for $C_{X/\mathcal{S}, \text{fppf}}$. By 7.26, to prove the proposition, it suffices to show that the functors C^* and C_* preserve quasi-coherent crystals. The assertion for C^* follows from (7.21.4) and (7.21.5).

Let \mathcal{F} be a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{fppf}}$ and (U', \mathfrak{T}, u) an object of \mathcal{E}' . We first show that $(C_*(\mathcal{F}))_{(U', \mathfrak{T})}$ is quasi-coherent. We may therefore assume that $U = F_{X/k}^{-1}(U')$ satisfies the condition of 7.23, i.e. U is affine and there exists an étale k -morphism $U \rightarrow \mathbb{A}_k^d$. Then, by 7.23(i) and 7.24, there exist objects (U, \mathfrak{Z}) and $(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})$ of $\underline{\mathcal{E}}$, an element $\{f : \rho(U, \mathfrak{Z}) \rightarrow (U', \mathfrak{T})\}$ of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U', \mathfrak{T})$ and two morphisms $p_1, p_2 : (U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z}) \rightarrow (U, \mathfrak{Z})$ such that $\rho(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z}) = \rho(U, \mathfrak{Z}) \times_{(U', \mathfrak{T})} \rho(U, \mathfrak{Z})$ and that $\rho(p_1)$ and $\rho(p_2)$ are the canonical projections of $\rho(U, \mathfrak{Z}) \times_{(U', \mathfrak{T})} \rho(U, \mathfrak{Z})$ (7.24). In particular, the morphism $\mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}$ attached to p_1 (resp. p_2) is the projection on the first (resp. second) component.

Since the adjunction morphism $C^* C_* \rightarrow \text{id}$ is an isomorphism (7.26), we have (7.21.4)

$$(8.15.2) \quad \pi_{U^*}((C_*(\mathcal{F}))_{\rho(U,\mathfrak{Z})}) = \mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z})}, \quad \pi_{U^*}((C_*(\mathcal{F}))_{\rho(U,\mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})}) = \mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})}.$$

By 8.11, we consider $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z})}$ (resp. $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})}$) as a quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n}$ -module of Z_{zar} (resp. $(\mathcal{O}_{(\mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})_n})$ -module of $(Z \times_T Z)_{\text{zar}}$). Since \mathcal{F} is a crystal, we have $(\mathcal{O}_{(\mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})_n})$ -linear isomorphisms

$$(8.15.3) \quad p_{2,n}^*(\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z})}) \xrightarrow{\sim c_{p_2}} \mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})} \xleftarrow{\sim c_{p_1}^*} p_{1,n}^*(\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z})}).$$

We define $\varphi : p_{2,n}^*(\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z})}) \rightarrow p_{1,n}^*(\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z})})$ to be the composition of c_{p_2} and the inverse of c_{p_1} . Thus, we obtain a descent datum $(\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z})}, \varphi)$ for the fppf covering $\{f_n : \mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{T}_n\}$. By ([22] VIII 1.2), it is effective. Therefore there exists a quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -module \mathcal{M} of T_{zar} , a canonical $(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n})$ -linear isomorphism

$$(8.15.4) \quad f_n^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(U,\mathfrak{Z})}$$

and an exact sequence of U_{zar}

$$(8.15.5) \quad 0 \rightarrow \pi_{U*}(u_*(\mathcal{M})) \rightarrow \mathcal{F}_{(U, \mathfrak{Z})} \rightarrow \mathcal{F}_{(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})}$$

where $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{Z})}$ and $\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})}$ are now considered as sheaves of U_{zar} .

On the other hand, since $C_*(\mathcal{F})$ is a sheaf, there exists an exact sequence of U'_{zar} (7.15.1)

$$(8.15.6) \quad 0 \rightarrow (C_*(\mathcal{F}))_{(U', \mathfrak{T})} \rightarrow (C_*(\mathcal{F}))_{\rho(U, \mathfrak{Z})} \rightarrow (C_*(\mathcal{F}))_{\rho(U, \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{T}} \mathfrak{Z})}.$$

By (8.15.2), we obtain an $u_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n})$ -linear isomorphism $u_*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} (C_*(\mathcal{F}))_{(U', \mathfrak{T})}$ of U'_{zar} . In particular, $(C_*(\mathcal{F}))_{(U', \mathfrak{T})}$ is quasi-coherent. Hence $C_*(\mathcal{F})$ is quasi-coherent.

Let $g : (U'_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U'_2, \mathfrak{T}_2)$ be a morphism of \mathcal{E}' . We prove that the morphism (8.11.1)

$$(8.15.7) \quad c_g : g_n^*(C_*(\mathcal{F}))_{(U'_2, \mathfrak{T}_2)} \rightarrow C_*(\mathcal{F})_{(U'_1, \mathfrak{T}_1)}$$

associated to $C_*(\mathcal{F})$ is an isomorphism. Since the problem is Zariski local, we may assume that U'_2 satisfies the condition of 7.23. By 7.23(ii), there exists a morphism $h : (U_1, \mathfrak{Z}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{Z}_2)$ of $\underline{\mathcal{E}}$, an element $\{f_1 : \rho(U_1, \mathfrak{Z}_1) \rightarrow (U'_1, \mathfrak{T}_1)\}$ of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U'_1, \mathfrak{T}_1)$ and an element $\{f_2 : \rho(U_2, \mathfrak{Z}_2) \rightarrow (U'_2, \mathfrak{T}_2)\}$ of $\text{Cov}_{\text{fppf}}(U'_2, \mathfrak{T}_2)$ such that the following diagram is Cartesian

$$(8.15.8) \quad \begin{array}{ccc} \rho(U_1, \mathfrak{Z}_1) & \xrightarrow{f_1} & (U'_1, \mathfrak{T}_1) \\ \rho(h) \downarrow & & \downarrow g \\ \rho(U_2, \mathfrak{Z}_2) & \xrightarrow{f_2} & (U'_2, \mathfrak{T}_2) \end{array}$$

By 7.24 and repeating the previous fppf descent argument, we have a canonical isomorphism (8.15.4)

$$(8.15.9) \quad f_{i,n}^*(C_*(\mathcal{F}))_{(U'_i, \mathfrak{T}_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(U_i, \mathfrak{Z}_i)}$$

for $i = 1, 2$. Furthermore, since \mathcal{F} is a crystal, we have an isomorphism

$$(8.15.10) \quad c_h : h_n^*(\mathcal{F}_{(U_2, \mathfrak{Z}_2)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(U_1, \mathfrak{Z}_1)}.$$

In view of (7.21.5), (8.15.2), (8.15.8) and (8.15.9), the morphism

$$(8.15.11) \quad f_{1,n}^*(c_g) : f_{1,n}^*(g_n^*(C_*(\mathcal{F}))_{(U'_2, \mathfrak{T}_2)}) \rightarrow f_{1,n}^*(C_*(\mathcal{F}))_{(U'_1, \mathfrak{T}_1)}$$

is identical to c_h (8.15.10) and hence is an isomorphism. Since $f_{1,n} : \mathfrak{Z}_{1,n} \rightarrow \mathfrak{T}_{1,n}$ is faithfully flat, we deduce that c_g is an isomorphism. The proposition follows.

Definition 8.16. Let X be a smooth k -scheme. We call *Cartier transform (modulo p^n)* the equivalence of categories (8.13.1)

$$(8.16.1) \quad C_{X/\mathcal{S}}^* : \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, n}).$$

The above equivalence depends on X and is different to the Cartier transform of Ogus-Vologodsky [33] which depends on a lifting of X' to W_2 . We will explain the compatibility between two constructions under the assumption that there exists a smooth lifting of X to W (11.30).

Let U be an open subscheme of X . By (7.28.2), we have a commutative diagram

$$(8.16.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'(X/\mathcal{S}), n}) & \xrightarrow{C_{X/\mathcal{S}}^*} & \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}(X/\mathcal{S}), n}) \\ j_U^* \downarrow & & \downarrow j_U^* \\ \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'(U/\mathcal{S}), n}) & \xrightarrow{C_{U/\mathcal{S}}^*} & \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}(U/\mathcal{S}), n}) \end{array}$$

To simplify the notation, we write C^* for $C_{X/\mathcal{S}}^*$ if there is no confusion.

8.17. In the following of this section, \mathfrak{X} denotes a smooth formal \mathcal{S} -scheme with special fiber X . The triple $(X, \mathfrak{X}, \text{id})$ (resp. $(X, \mathfrak{X}, \underline{X} \rightarrow X)$) is an object of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$). By 4.10, $(X, R_{\mathfrak{X}}(r))$ (resp. $(X, Q_{\mathfrak{X}}(r))$) is an object of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) for all integer $r \geq 1$.

Proposition 8.18. *There exists a canonical equivalence of tensor categories between the category $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n})$) and the category of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules with $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification (resp. $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -stratification) (4.12, 5.5).*

Proof. We follow the proof of ([34] 1.3.4) where the author deals with the case $n = 1$.

We take again the notation of the proof of 4.12. We denote by $q_1, q_2 : (X, R_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X, \mathfrak{X})$ the canonical morphisms, by $q_{ij} : (X, R_{\mathfrak{X}}(2)) \rightarrow (X, R_{\mathfrak{X}})$ the morphism induced by $R_{\mathfrak{X}}(2) \rightarrow \mathfrak{X}^3 \xrightarrow{p_{ij}} \mathfrak{X}^2$ and the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$ (cf. (4.12.1)) for all $1 \leq i < j \leq 3$, and we put $r_i = q_1 \circ q_{ij} = q_2 \circ q_{ji} : (X, R_{\mathfrak{X}}(2)) \rightarrow (X, \mathfrak{X})$ for all $i \neq j$.

Let \mathcal{F} be a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$. We set \mathcal{F} to be the $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module $\mathcal{F}_{(X,\mathfrak{X})}$. Then we deduce isomorphisms of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -modules of X_{zar} (8.3.2)

$$(8.18.1) \quad c_{q_1} : \tilde{q}_{1,n}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(X,R_{\mathfrak{X}})} \quad c_{q_2} : \tilde{q}_{2,n}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(X,R_{\mathfrak{X}})}.$$

We denote by ε the composition of c_{q_2} and the inverse of c_{q_1} . The composition of the structural homomorphism of the left (resp. right) $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algebra $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ and $\pi_{\mathcal{R}}$ (4.2)

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{R}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$$

is the identity morphism. Hence we have $\pi_{\mathcal{R}}^*(\varepsilon) = \text{id}_{\mathcal{F}}$ (5.5(i)). For $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (1, 3)$, the isomorphism $\tilde{q}_{ij,n}^*(\varepsilon) : \tilde{r}_{j,n}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \tilde{r}_{i,n}^*(\mathcal{F})$ is equal to the composition of $\tilde{r}_{j,n}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(X,R_{\mathfrak{X}}(2))}$ and the inverse of $\tilde{r}_{i,n}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(X,R_{\mathfrak{X}}(2))}$. Hence we obtain the cocycle condition $\tilde{q}_{12,n}^*(\varepsilon) \circ \tilde{q}_{23,n}^*(\varepsilon) = \tilde{q}_{13,n}^*(\varepsilon)$. It is clear that the correspondence $\mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{F}, \varepsilon)$ is functorial and is compatible with tensor products (5.5).

Conversely, let \mathcal{F} be an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module with an $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification $\varepsilon : \tilde{q}_{2,n}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \tilde{q}_{1,n}^*(\mathcal{F})$. Let (U, \mathfrak{T}, u) be an object of \mathcal{E} such that U is affine. Since \mathfrak{X} is smooth over \mathcal{S} and \mathfrak{T} is affine, the k -morphism $u : T \rightarrow U$ extends to a morphism $\varphi : (U, \mathfrak{T}) \rightarrow (X, \mathfrak{X})$ of \mathcal{E} . We define $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}$ to be the $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -module $\tilde{\varphi}_n^*(\mathcal{F})$ of U_{zar} . We show that this definition of $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}$ is independent of the choice of the deformation $\mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{X}$ of $u : T \rightarrow U$ up to a canonical isomorphism which comes from the stratification.

Let $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ be three morphisms $(U, \mathfrak{T}, u) \rightarrow (X, \mathfrak{X}, \text{id})$ of \mathcal{E} , $\phi_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ for all $1 \leq i < j \leq 3$ and $\phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{X}^3$. The diagram

$$(8.18.2) \quad \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathfrak{T} \\ u \downarrow & & \downarrow \phi_{ij} \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{X}^2 \end{array}$$

is commutative. By the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$ (3.12), ϕ_{ij} induces a unique morphism $\varphi_{ij} : (U, \mathfrak{T}, u) \rightarrow (X, R_{\mathfrak{X}})$ of \mathcal{E} . Then we deduce a canonical isomorphism

$$(8.18.3) \quad \tilde{\varphi}_{j,n}^*(\mathcal{F}) = \tilde{\varphi}_{ij,n}^*(\tilde{q}_{2,n}^*(\mathcal{F})) \xrightarrow[\sim]{\tilde{\varphi}_{ij,n}^*(\varepsilon)} \tilde{\varphi}_{ij,n}^*(\tilde{q}_{1,n}^*(\mathcal{F})) = \tilde{\varphi}_{i,n}^*(\mathcal{F}).$$

Similarly, ϕ induces a unique morphism $\psi : (U, \mathfrak{T}) \rightarrow (X, R_{\mathfrak{X}}(2))$ such that $q_{ij} \circ \psi = \varphi_{ij}$. Using the cocycle condition $\tilde{q}_{12,n}^*(\varepsilon) \circ \tilde{q}_{23,n}^*(\varepsilon) = \tilde{q}_{13,n}^*(\varepsilon)$ (5.5(ii)), we verify that

$$(8.18.4) \quad \tilde{\varphi}_{12,n}^*(\varepsilon) \circ \tilde{\varphi}_{23,n}^*(\varepsilon) = \tilde{\varphi}_{13,n}^*(\varepsilon).$$

Hence, by gluing the construction for affine objects, we obtain an $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_n}$ -module $\mathcal{F}_{(U,\mathfrak{T})}$ of U_{zar} for a general object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} .

Let $g : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ be a morphism of \mathcal{E} such that U_1 and U_2 are affine. By the previous arguments, there exists morphisms $\varphi_1 : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (X, \mathfrak{X})$ and $\varphi_2 : (U_2, \mathfrak{T}_2) \rightarrow (X, \mathfrak{X})$ of \mathcal{E} . Then there exists a unique morphism $h : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (X, R_{\mathfrak{X}})$ such that $q_1 \circ h = \varphi_1$ and $q_2 \circ h = \varphi_2 \circ g$. We deduce a canonical $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_{1,n}}$ -linear isomorphism of $U_{1,\text{zar}}$

$$(8.18.5) \quad c_g : \tilde{g}_n^*(\mathcal{F}_{(U_2,\mathfrak{T}_2)}) = \tilde{h}_n^*(\tilde{q}_{2,n}^*(\mathcal{F})) \xrightarrow[\sim]{\tilde{h}_n^*(\varepsilon)} \tilde{h}_n^*(\tilde{q}_{1,n}^*(\mathcal{F})) = \mathcal{F}_{(U_1,\mathfrak{T}_1)}.$$

By gluing the constructions for affine objects, we obtain an isomorphism c_g for a general morphism g of \mathcal{E} . It is clear that $c_{\text{id}} = \text{id}$. Furthermore, let $g' : (U_2, \mathfrak{X}_2) \rightarrow (U_3, \mathfrak{X}_3)$ be another morphism. Using the cocycle condition for stratifications, we verify that

$$(8.18.6) \quad c_{g' \circ g} = c_g \circ \tilde{g}_n^*(c_{g'}).$$

Hence we obtain a linearized descent data $\{\mathcal{F}_{(U, \mathfrak{X}, u)}, c_f\}$ such that each morphism c_f is an isomorphism. Then, we get a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -modules \mathcal{F} of \mathcal{E} by 8.4. The correspondence $(\mathcal{F}, \varepsilon) \mapsto \mathcal{F}$ is clearly functorial and quasi-inverse to the previous construction.

The assertion for crystals of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -modules can be verified in the same way.

Remark 8.19. (i) Let U be an open subscheme of X , \mathfrak{U} the associated open formal subscheme of \mathfrak{X} . By 3.14, we have a canonical isomorphism $R_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}^2} \mathfrak{U}^2$ (resp. $Q_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} Q_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{X}^2} \mathfrak{U}^2$). The restriction functors j_U^* and \underline{j}_U^* (7.28.1) send crystals to crystals. Moreover, one verifies that the equivalence of categories in 8.18 is compatible with localisation with respect to U (7.30).

(ii) If \mathcal{A} is a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -algebras of \mathcal{E} (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}$ -algebras of $\tilde{\mathcal{E}}$), then the $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification (resp. $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -stratification) associated on $\mathcal{A}_{(X, \mathfrak{X})}$ is an isomorphism of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -algebras (resp. $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -algebras).

8.20. We set $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{S}, \sigma} \mathcal{S}$ (2.1) and we suppose that there exists an \mathcal{S} -morphism $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ which lifts the relative Frobenius morphism $F_{X/k} : X \rightarrow X'$ of X . We show that the Cartier transform C^* (8.16.1) globalises Shiho's local construction in § 6 defined by F .

The morphism F induces a morphism of \mathcal{E}' that we denote also by

$$(8.20.1) \quad F : \rho(X, \mathfrak{X}) = (X', \mathfrak{X}, F_{X/k}) \rightarrow (X', \mathfrak{X}', \text{id})$$

Recall that (6.9) the morphism F induces a morphism of formal groupoids $\psi : Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$ above F . The composition $Q_{\mathfrak{X}, 1} \rightarrow \underline{Q}_{\mathfrak{X}, 1}' \rightarrow X'$ (7.4.1) identifies with the morphism $g : Q_{\mathfrak{X}, 1} \rightarrow X'$ induced by $F^2 : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}'^2$ (6.9.2). It follows from the proof of 6.9 that ψ induces a morphism of \mathcal{E}' that we denote also by

$$(8.20.2) \quad \psi : \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X', R_{\mathfrak{X}'})$$

which fits into the following commutative diagrams

$$(8.20.3) \quad \begin{array}{ccc} \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) & \xrightarrow{\psi} & (X', R_{\mathfrak{X}'}) & \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) & \xrightarrow{\psi} & (X', R_{\mathfrak{X}'}) \\ \rho(q_1) \downarrow & & \downarrow q_1 & \rho(q_2) \downarrow & & \downarrow q_2 \\ \rho(X, \mathfrak{X}) & \xrightarrow{F} & (X', \mathfrak{X}') & \rho(X, \mathfrak{X}) & \xrightarrow{F} & (X', \mathfrak{X}') \end{array}$$

where q_1, q_2 (resp. q_1', q_2') are the canonical projections of $(X, Q_{\mathfrak{X}})$ to (X, \mathfrak{X}) (resp. $(X', R_{\mathfrak{X}'})$ to (X', \mathfrak{X}')).

Proposition 8.21. *Keep the assumption of 8.20. The diagram (8.12):*

$$(8.21.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}) & \xrightarrow{C^*} & \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}, n}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{R}_{\mathfrak{X}'}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\psi_n^*} & \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \end{array}$$

where the vertical arrows are the equivalences of categories defined in 8.18 and the bottom functor is induced by the morphism ψ defined by F (5.10), is commutative up to a functorial isomorphism of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules depending on F

$$(8.21.2) \quad \eta_F : F_n^*(\mathcal{M}_{(X', \mathfrak{X}')}) \xrightarrow{\sim} C^*(\mathcal{M})_{(X, \mathfrak{X})}$$

compatible with the $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -stratifications, for every crystal \mathcal{M} of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}', n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}'$.

Proof. Let \mathcal{M} be a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}'$. By (7.21.4), we have

$$(8.21.3) \quad \mathbf{C}^*(\mathcal{M})_{(X,\mathfrak{X})} = \pi_{X*}(\mathcal{M}_{\rho(X,\mathfrak{X})})$$

Since \mathcal{M} is a crystal, F (8.20.1) induces a functorial isomorphism of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules

$$(8.21.4) \quad \eta_F : F_n^*(\mathcal{M}_{(X',\mathfrak{X}')}) = \pi_{X*}(\tilde{F}_n^*(\mathcal{M}_{(X',\mathfrak{X}')})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^*(\mathcal{M})_{(X,\mathfrak{X})}.$$

Similarly, ψ (8.20.2) induces an isomorphism

$$(8.21.5) \quad \pi_{X*}(\tilde{\psi}_n^*(\mathcal{M}_{(X',R_{\mathfrak{X}'})})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^*(\mathcal{M})_{(X,Q_{\mathfrak{X}})}.$$

Recall that the left vertical functor of (8.21.1) is given by $\mathcal{M} \mapsto (\mathcal{M}_{(X',\mathfrak{X}')} , \varepsilon')$ where ε' is induced by isomorphisms $\tilde{q}_{2,n}^*(\mathcal{M}_{(X',\mathfrak{X}')}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{(X',R_{\mathfrak{X}'})} \xleftarrow{\sim} \tilde{q}_{1,n}^*(\mathcal{M}_{(X',\mathfrak{X}')})$. By 5.10, we have

$$(8.21.6) \quad \psi_n^*(\mathcal{M}_{(X',\mathfrak{X}')} , \varepsilon') = (F_n^*(\mathcal{M}_{(X',\mathfrak{X}')}), \pi_{X*}(\tilde{\psi}_n^*(\varepsilon'))).$$

On the other hand, the $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module associated to $\mathbf{C}^*(\mathcal{M})$ is $\mathbf{C}^*(\mathcal{M})_{(X,\mathfrak{X})}$ and the associated $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -stratification is induced by the isomorphisms $\tilde{q}_{2,n}^*(\mathbf{C}^*(\mathcal{M})_{(X,\mathfrak{X})}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^*(\mathcal{M})_{(X,Q_{\mathfrak{X}})} \xleftarrow{\sim} \tilde{q}_{1,n}^*(\mathbf{C}^*(\mathcal{M})_{(X,\mathfrak{X})})$. The proposition follows in view of (8.20.3), (8.21.2) and (8.21.5).

8.22. Keep the assumption of 8.20. Recall that the morphisms of formal \mathfrak{X} -groupoids $\varpi' : T_{\mathfrak{X}'} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$ (5.18.1) and $\lambda : P_{\mathfrak{X}} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$ (5.17.1) induce functors

$$(8.22.1) \quad \varpi_n'^* : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{R}_{\mathfrak{X}'}\text{-stratification} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{T}_{\mathfrak{X}'}\text{-stratification} \end{array} \right\}$$

$$(8.22.2) \quad \lambda_n^* : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}\text{-stratification} \end{array} \right\}$$

By 5.16, 5.22 and 8.18, they further induce functors

$$(8.22.3) \quad \mu : \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}) \rightarrow p\text{-MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n),$$

$$(8.22.4) \quad \nu : \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}) \rightarrow \text{MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n).$$

By (6.12.2), 6.13 and 8.21, the diagrams

$$(8.22.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}) & \xrightarrow{\mathbf{C}^*} & \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{R}_{\mathfrak{X}'}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\psi_n^*} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \\ \varpi_n'^* \downarrow & & \downarrow \lambda_n^* \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{T}_{\mathfrak{X}'}\text{-stratification} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\varphi_n^*} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}\text{-modules} \\ \text{with } \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}\text{-stratification} \end{array} \right\} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ p\text{-MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}'_n/\mathcal{S}_n) & \xrightarrow{\Phi_n} & \text{MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n) \end{array}$$

where the functors ψ_n^* , φ_n^* and Φ_n are induced by F , are commutative up to a functorial isomorphism of $\text{MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$. For every object \mathcal{M} of $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n})$, we have a canonical and functorial isomorphism (8.12)

$$(8.22.6) \quad \eta_F : \Phi_n(\mu(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \nu(\mathbf{C}^*(\mathcal{M})).$$

We see that the Cartier transform \mathbf{C}^* (8.16.1) is compatible with Shiho's functor Φ_n (6.4.2).

Lemma 8.23. *Let $F_1, F_2 : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ be two liftings of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X . Then, F_1, F_2 induce a morphism of \mathcal{E}'*

$$(8.23.1) \quad \psi_{12} : \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X', R_{\mathfrak{X}'}).$$

Proof. The proof is similar to that of 6.9. By the universal property of $R_{\mathfrak{X}'}$, it suffices to show that there exists a unique k -morphism $g : Q_{\mathfrak{X},1} \rightarrow X'$ which fits into a commutative diagram

$$(8.23.2) \quad \begin{array}{ccc} Q_{\mathfrak{X},1} & \longrightarrow & Q_{\mathfrak{X}} \\ \downarrow g & & \downarrow \\ & & \mathfrak{X}^2 \\ & & \downarrow (F_1, F_2) \\ X' & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{X}'^2 \end{array}$$

The problem being local on \mathfrak{X} , we can assume that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \mathrm{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$. We put t_i the image of T_i in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, $\xi_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$, $t'_i = \pi^*(t_i) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ and $\xi'_i = 1 \otimes t'_i - t'_i \otimes 1$ for all $1 \leq i \leq d$. Locally, there exists sections a_i, b_i of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ such that $F_1^*(t'_i) = t_i^p + pa_i$, $F_2^*(t'_i) = t_i^p + pb_i$. By a similar calculation of (6.9.3), we have

$$(8.23.3) \quad (F_1, F_2)^*(\xi'_i) = \xi_i^p + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} \xi_k^j (t_k \otimes 1)^{p-j} + p(1 \otimes b_k - a_k \otimes 1).$$

Since $\xi_i^p = p \cdot \left(\frac{\xi_i^p}{p}\right)$ in $Q_{\mathfrak{X}}$, the assertion follows.

8.24. Keep the assumption of 8.23, we denote by α the composition

$$(8.24.1) \quad \alpha : (X', \mathfrak{X}, F_{X/k}) = \rho(X, \mathfrak{X}) \xrightarrow{\rho(\iota_Q)} \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\psi_{12}} (X', R_{\mathfrak{X}'}).$$

We set $q'_1, q'_2 : (X', R_{\mathfrak{X}'}) \rightarrow (X', \mathfrak{X}')$ the canonical morphisms of \mathcal{E}' and we have $q'_i \circ \alpha = F_i$ (8.20.1).

Considering $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}'}$ as a formal Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -algebra of $\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$, α induces a \mathbb{W} -homomorphism of $\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$:

$$(8.24.2) \quad a : \mathcal{R}_{\mathfrak{X}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}.$$

Equipped with the left (resp. right) $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -linear action on the source and the $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -linear action induced by F_1 (resp. F_2) on the target, a is $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -linear.

Suppose that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \mathrm{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$ and we take again the notation of the proof of 8.23. In view of (8.23.3), the homomorphism a is determined by

$$(8.24.3) \quad a\left(\frac{\xi'_i}{p}\right) = \frac{F_2^*(t'_i) - F_1^*(t'_i)}{p} \quad \forall 1 \leq i \leq d.$$

8.25. Let $F_1, F_2 : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ be two liftings of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X , \mathcal{M} a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}$ -modules, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(X', \mathfrak{X}')}$ and $\varepsilon' : \tilde{q}_{2,n}^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \tilde{q}_{1,n}^*(\mathcal{M})$ the associated $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}'}$ -stratification (8.18). Recall (8.21) that the morphisms F_1 and F_2 induce morphisms $\psi_1, \psi_2 : \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X', R_{\mathfrak{X}'})$ of \mathcal{E}' respectively. We associate to $(\mathcal{M}, \varepsilon')$ two different $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules with $Q_{\mathfrak{X}}$ -stratification

$$(8.25.1) \quad (F_{1,n}^*(\mathcal{M}), \pi_{X^*}(\tilde{\psi}_{1,n}^*(\varepsilon'))) \quad \text{and} \quad (F_{2,n}^*(\mathcal{M}), \pi_{X^*}(\tilde{\psi}_{2,n}^*(\varepsilon'))).$$

Let $\Phi_{1,n}$ (resp. $\Phi_{2,n}$) be Shiho's functor induced by F_1 (resp. F_2) (6.4.2). We associate to \mathcal{M} two different objects of $\mathrm{MIC}^{\mathrm{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ (8.22.5)

$$(8.25.2) \quad \Phi_{1,n}(\mu(\mathcal{M})) \quad \text{and} \quad \Phi_{2,n}(\mu(\mathcal{M}))$$

whose underlying $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules are $F_{1,n}^*(\mathcal{M})$ and $F_{2,n}^*(\mathcal{M})$ respectively.

The morphism α gives a natural way to glue local constructions of Shiho for different choices of lifting of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X .

Proposition 8.26. *Keep the assumption of 8.25. The morphism α and the $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification ε' induce an isomorphism of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -modules with $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -stratification:*

$$(8.26.1) \quad \alpha^*(\varepsilon') : (F_{2,n}^*(\mathcal{M}), \pi_{X^*}(\tilde{\psi}_{2,n}^*(\varepsilon'))) \xrightarrow{\sim} (F_{1,n}^*(\mathcal{M}), \pi_{X^*}(\tilde{\psi}_{1,n}^*(\varepsilon')))$$

such that $\eta_{F_2} = \eta_{F_1} \circ \alpha^*(\varepsilon')$ (8.21.2).

Proof. We denote by $q_1, q_2 : (X, Q_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X, \mathfrak{X})$ the canonical morphisms of \mathcal{E} , by $q'_1, q'_2 : (X', R_{\mathfrak{X}'}) \rightarrow (X', \mathfrak{X}')$ the canonical morphisms of \mathcal{E}' and by $q'_{ij} : (X', R_{\mathfrak{X}'}(2)) \rightarrow (X', R_{\mathfrak{X}'})$ the morphism induced by $R_{\mathfrak{X}'}(2) \rightarrow \mathfrak{X}'^3 \xrightarrow{p'_{ij}} \mathfrak{X}'^2$ and the universal property of $R_{\mathfrak{X}}$ for all $1 \leq i < j \leq 3$ (cf. (4.12.1)).

Since $F_i = q'_i \circ \alpha$ for $i = 1, 2$, the isomorphism $\varepsilon' : \tilde{q}_{2,n}^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \tilde{q}_{1,n}^*(\mathcal{M})$ induces an isomorphism

$$(8.26.2) \quad \pi_{X^*}(\tilde{\alpha}_n^*(\varepsilon')) : \tilde{F}_{2,n}^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \tilde{F}_{1,n}^*(\mathcal{M}).$$

We write simply $\alpha^*(\varepsilon')$ for $\pi_{X^*}(\tilde{\alpha}_n^*(\varepsilon'))$. Then we have $\eta_{F_2} = \eta_{F_1} \circ \alpha^*(\varepsilon')$. It remains to show that the $\alpha^*(\varepsilon')$ is compatible with the $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -stratifications on both sides.

The compositions of morphisms

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^2 &\xrightarrow{p_1} \mathfrak{X} \xrightarrow{\Delta} \mathfrak{X}^2 \xrightarrow{(F_1, F_2)} \mathfrak{X}'^2 \xrightarrow{p'_2} \mathfrak{X}' \\ &\mathfrak{X}^2 \xrightarrow{(F_2, F_2)} \mathfrak{X}'^2 \xrightarrow{p'_1} \mathfrak{X}' \end{aligned}$$

are equal. We deduce that the compositions of morphisms of \mathcal{E}'

$$\begin{aligned} \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) &\xrightarrow{\rho(q_1)} \rho(X, \mathfrak{X}) \xrightarrow{\alpha} (X', R_{\mathfrak{X}'}) \xrightarrow{q'_2} (X', \mathfrak{X}') \\ \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) &\xrightarrow{\psi_2} (X', R_{\mathfrak{X}'}) \xrightarrow{q'_1} (X', \mathfrak{X}') \end{aligned}$$

are equal. In view of the isomorphism $(X', R_{\mathfrak{X}'}(2)) \simeq (X', R_{\mathfrak{X}'}) \times_{(X', \mathfrak{X}')} (X', R_{\mathfrak{X}'})$ of \mathcal{E}' (4.11.1), we obtain a morphism of \mathcal{E}'

$$(8.26.3) \quad u : \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X', R_{\mathfrak{X}'}(2))$$

such that $\alpha \circ \rho(q_1) = q'_{12} \circ u$ and $\psi_2 = q'_{23} \circ u$. Symmetrically, we construct a morphism of \mathcal{E}'

$$(8.26.4) \quad v : \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X', R_{\mathfrak{X}'}(2))$$

such that $\psi_1 = q'_{12} \circ v$ and $\alpha \circ \rho(q_2) = q'_{23} \circ v$. The compositions

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^2 &\xrightarrow{(\iota_1, \iota_1, \iota_2)} \mathfrak{X}^3 \xrightarrow{(F_1, F_2, F_2)} \mathfrak{X}'^3 \xrightarrow{p'_{13}} \mathfrak{X}'^2 \\ \mathfrak{X}^2 &\xrightarrow{(\iota_1, \iota_2, \iota_2)} \mathfrak{X}^3 \xrightarrow{(F_1, F_1, F_2)} \mathfrak{X}'^3 \xrightarrow{p'_{13}} \mathfrak{X}'^2 \end{aligned}$$

are equal to $(F_1, F_2) : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}'^2$. By the universal property of $R_{\mathfrak{X}'}$ (3.12), we deduce that $q'_{13} \circ u = q'_{13} \circ v = \psi_{12}$ (8.23), i.e. the compositions

$$(8.26.5) \quad \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow[u]{u} (X', R_{\mathfrak{X}'}(2)) \xrightarrow{q'_{13}} (X', R_{\mathfrak{X}'})$$

are equal to ψ_{12} . By (8.20.3), we have $\tilde{\psi}_{i,n}^*(\tilde{q}_{j,n}^*(\mathcal{M})) \simeq \tilde{q}_{j,n}^*(\tilde{F}_{i,n}^*(\mathcal{M}))$ for all $i, j = 1, 2$. By the cocycle condition $\tilde{q}_{12,n}^*(\varepsilon') \circ \tilde{q}_{23,n}^*(\varepsilon') = \tilde{q}_{13,n}^*(\varepsilon')$, we deduce a commutative diagram:

$$(8.26.6) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\psi}_{2,n}^*(\tilde{q}_{2,n}^*(\mathcal{M})) & \xrightarrow{\tilde{\psi}_{2,n}^*(\varepsilon')} & \tilde{\psi}_{2,n}^*(\tilde{q}_{1,n}^*(\mathcal{M})) \\ \tilde{q}_{2,n}^*(\tilde{\alpha}_n^*(\varepsilon')) \downarrow & & \downarrow \tilde{q}_{1,n}^*(\tilde{\alpha}_n^*(\varepsilon')) \\ \tilde{\psi}_{1,n}^*(\tilde{q}_{2,n}^*(\mathcal{M})) & \xrightarrow{\tilde{\psi}_{1,n}^*(\varepsilon')} & \tilde{\psi}_{1,n}^*(\tilde{q}_{1,n}^*(\mathcal{M})) \end{array}$$

That is the isomorphism $\alpha^*(\varepsilon')$ is compatible with the $\mathcal{Q}_{\mathcal{X}}$ -stratifications $\pi_{X*}(\tilde{\psi}_{2,n}^*(\varepsilon'))$ and $\pi_{X*}(\tilde{\psi}_{1,n}^*(\varepsilon'))$.

Corollary 8.27. *Keep the assumption of 8.25. The isomorphism (8.26.1) induces an isomorphism of $\text{MIC}^{\text{qn}}(\mathcal{X}_n/\mathcal{S}_n)$ (8.25.2)*

$$(8.27.1) \quad \alpha^*(\varepsilon') : \Phi_{2,n}(\mu(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \Phi_{1,n}(\mu(\mathcal{M}))$$

such that $\eta_{F_2} = \eta_{F_1} \circ \alpha^*(\varepsilon')$ (8.22.6).

It follows from (8.22.5) and 8.26.

Remark 8.28. Given a lifting of the Frobenius morphism, Shiho's functor (6.4.1) applies to $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'_n}$ -modules with integrable p -connection. However, the isomorphism (8.27.1), which glues local constructions of Shiho, depends on the $\mathcal{R}_{\mathcal{X}'}$ -stratification on the $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'_n}$ -module $\mathcal{M}_{(\mathcal{X}', \mathcal{X}')}.$

9. Cartier transform of Ogus–Vologodsky

In this section, X denotes a scheme. Starting from 9.9, we will suppose that X is smooth over k .

9.1. Let E a locally free \mathcal{O}_X -module of finite type. We denote by $S(E)$ (resp. $\Gamma(E)$) the symmetric algebra (resp. PD-algebra) of E over \mathcal{O}_X ([19] I 4.2.2.6) and for any integer $n \geq 0$, by $S^n(E)$ (resp. $\Gamma_n(E)$) its homogeneous part of degree n . There exists a unique homomorphism of \mathcal{O}_X -algebras

$$(9.1.1) \quad \delta : S(E) \rightarrow S(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} S(E)$$

such that for every local section e of E , we have $\delta(e) = 1 \otimes e + e \otimes 1$. This homomorphism makes $S(E)$ into a Hopf commutative \mathcal{O}_X -algebra.

9.2. Let I (resp. J) be the ideal $\bigoplus_{n \geq 1} S^n(E)$ of $S(E)$ (resp. PD-ideal $\bigoplus_{n \geq 1} \Gamma_n(E)$ of $\Gamma(E)$). Recall ([5] 3.9) that we have

$$(9.2.1) \quad S(E)/I^m \simeq \bigoplus_{m < n} S^m(E), \quad \Gamma(E)/J^{[m]} \simeq \bigoplus_{m < n} \Gamma_m(E), \quad \forall n \geq 1.$$

We denote by $\widehat{S}(E)$ (resp. $\widehat{\Gamma}(E)$) the completion of $S(E)$ (resp. $\Gamma(E)$) with respect to the filtration $\{I^n\}_{n \geq 1}$ (resp. PD-filtration $\{J^{[n]}\}_{n \geq 1}$).

Let M be a $\widehat{\Gamma}(E)$ -module. We say that M is *quasi-nilpotent* if for any open subscheme U of X and any $e \in M(U)$, there exists a Zariski covering $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ and a family of integers $\{N_i\}_{i \in I}$ such that for each $i \in I$, $e|_{U_i}$ is annihilated by the ideal $J^{[N_i]}$. For any integer $n \geq 0$, we say that M is *nilpotent of level $\leq n$* if E is annihilated by $J^{[n+1]}$.

9.3. Let $\Omega = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E, \mathcal{O}_X)$ be the dual of E . The pairing $E \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega \rightarrow \mathcal{O}_X$ induces a canonical morphism

$$(9.3.1) \quad \Gamma_n(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} S^{m+n}(\Omega) \rightarrow S^m(\Omega)$$

which is perfect if $m = 0$ ([5] A.10). If we equip $\Gamma(E)$ with the topology defined by the PD-filtration $\{J^{[n]}\}$ and $S(\Omega)$ with the discrete topology, the \mathcal{O}_X -linear morphism $\Gamma(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} S(\Omega) \rightarrow S(\Omega)$ is continuous. It extends by continuity to an action of $\widehat{\Gamma}(E)$ on $S(\Omega)$:

$$(9.3.2) \quad \widehat{\Gamma}(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} S(\Omega) \rightarrow S(\Omega).$$

We have an increasing exhaustive filtration of $\widehat{\Gamma}(E)$ -submodules $\{\bigoplus_{m \leq n} S^m(\Omega)\}_{n \geq 0}$ of $S(\Omega)$ such that $\bigoplus_{m \leq n} S^m(\Omega)$ is nilpotent of level $\leq n$. Then $S(\Omega)$ is quasi-nilpotent. The above morphism induces an \mathcal{O}_X -linear isomorphism

$$(9.3.3) \quad \begin{aligned} \widehat{\Gamma}(E) &= \varprojlim_n (\bigoplus_{m \leq n} \Gamma_m(E)) \\ &\simeq \varprojlim_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bigoplus_{m \leq n} S^m(\Omega), \mathcal{O}_X) \\ &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(S(\Omega), \mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

We equip $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(S(\Omega), \mathcal{O}_X)$ with the \mathcal{O}_X -algebra structure induced by the Hopf algebra $S(\Omega)$ (4.5). The above isomorphism is an isomorphism of \mathcal{O}_X -algebras.

9.4. Let $f : Y \rightarrow X$ be a morphism of schemes. We put $E_Y = f^*(E)$ and $\Omega_Y = f^*(\Omega)$. By the universal property of the symmetric algebra, we have a canonical isomorphism of \mathcal{O}_Y -algebras

$$(9.4.1) \quad f^*(S_{\mathcal{O}_X}(\Omega)) \xrightarrow{\sim} S_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y).$$

Since $S_{\mathcal{O}_X}(\Omega)$ is a direct sum of locally free \mathcal{O}_X -modules of finite type, by duality (9.3.3), we deduce a canonical isomorphism of \mathcal{O}_Y -algebras

$$(9.4.2) \quad \begin{aligned} \widehat{\Gamma}_{\mathcal{O}_Y}(E_Y) &\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(S_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y), \mathcal{O}_Y) \\ &\simeq f^*(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(S_{\mathcal{O}_X}(\Omega), \mathcal{O}_X)) \\ &\simeq f^*(\widehat{\Gamma}_{\mathcal{O}_X}(E)). \end{aligned}$$

9.5. Let \mathcal{L} be an E -torsor of X_{zar} . An *affine function on \mathcal{L}* is a morphism $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X$ of X_{zar} satisfying the following equivalent conditions ([2] II.4.7):

(i) For every open subscheme U of X and every $s \in \mathcal{L}(U)$, the morphism:

$$(9.5.1) \quad E(U) \rightarrow \mathcal{O}(U), \quad t \mapsto f(s+t) - f(s)$$

is $\mathcal{O}_X(U)$ -linear.

(ii) There exists a section $\omega_f \in \Omega(X)$, called the *linear term of f* , such that for every open subscheme U of X and all $s \in \mathcal{L}(U)$ and $t \in E(U)$, we have

$$(9.5.2) \quad f(s+t) = f(s) + \omega_f(t).$$

The condition (i) is clearly local for the Zariski topology on X . We denote by \mathcal{F} the subsheaf of $\mathcal{H}om_{X_{\text{zar}}}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ consisting of affine functions on \mathcal{L} ; in other words, for any open subscheme U of X , $\mathcal{F}(U)$ is the set of affine functions on $\mathcal{L}|_U$. It is naturally endowed with an \mathcal{O}_X -module structure. We call \mathcal{F} the *sheaf of affine functions on \mathcal{L}* .

We have a canonical \mathcal{O}_X -linear morphism $c : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ whose image consists of constant functions. The “linear term” defines an \mathcal{O}_X -linear morphism $\omega : \mathcal{F} \rightarrow \Omega$. One verifies that the sequence

$$(9.5.3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{c} \mathcal{F} \xrightarrow{\omega} \Omega \rightarrow 0$$

is exact. By ([19] I 4.3.1.7), the above sequence induces, for any integer $n \geq 1$, an exact sequence:

$$(9.5.4) \quad 0 \rightarrow S^{n-1}(\mathcal{F}) \rightarrow S^n(\mathcal{F}) \rightarrow S^n(\Omega) \rightarrow 0.$$

The \mathcal{O}_X -modules $(S^n(\mathcal{F}))_{n \geq 0}$ form an inductive system. We denote its inductive limit by

$$(9.5.5) \quad \mathcal{A} = \varinjlim_{n \geq 0} S^n(\mathcal{F})$$

which is naturally endowed with a structure of an \mathcal{O}_X -algebra. For any integer $n \geq 0$, the canonical morphism $S^n(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{A}$ is injective. By letting $N_n(\mathcal{A}) = S^n(\mathcal{F})$ for all $n \geq 0$, we obtain an increasing exhaustive filtration of \mathcal{A} .

There exists a unique homomorphism of \mathcal{O}_X -algebras

$$(9.5.6) \quad \mu : \mathcal{A} \rightarrow S(\Omega) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$$

such that for every local section m of \mathcal{F} , we have

$$(9.5.7) \quad \mu(m) = 1 \otimes m + \omega(m) \otimes 1.$$

For any integer $n \geq 0$, we have

$$(9.5.8) \quad \mu(N_n(\mathcal{A})) \subset \bigoplus_{i+j=n} S^i(\Omega) \otimes N_j(\mathcal{A}).$$

By construction, the following diagram is commutative

$$(9.5.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{S}(\Omega) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \delta \otimes \mathrm{id} \\ \mathrm{S}(\Omega) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mu} & \mathrm{S}(\Omega) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{S}(\Omega) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \end{array}$$

9.6. By (9.3.3) and (9.5.6), we have an \mathcal{O}_X -linear morphism:

$$(9.6.1) \quad \begin{array}{ccc} \widehat{\Gamma}(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ u \otimes a & \mapsto & (u \otimes \mathrm{id})(\mu(a)). \end{array}$$

By (9.5.7) and (9.5.9), the above morphism makes \mathcal{A} into a $\widehat{\Gamma}(E)$ -module. The action of E on \mathcal{F} is given by ω (9.5.3) and duality. By (9.5.8), we see that \mathcal{A} is quasi-nilpotent and that for any $n \geq 0$, $N_n(\mathcal{A})$ is a $\widehat{\Gamma}(E)$ -submodule of \mathcal{A} and is nilpotent of level $\leq n$.

The canonical $\mathrm{S}(\Omega)$ -linear isomorphism $\Omega_{\mathrm{S}(\Omega)/\mathcal{O}_X}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{S}(\Omega)$ induces an isomorphism

$$(9.6.2) \quad \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_X}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}.$$

We denote the universal \mathcal{O}_X -derivation by

$$(9.6.3) \quad d_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \Omega \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}.$$

For any local section m of \mathcal{F} , we have $d_{\mathcal{A}}(m) = \omega(m) \otimes 1$.

9.7. Let $s \in \mathcal{L}(X)$ and let $\rho_s : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X$ be the associated splitting of the exact sequence (9.5.3). The morphism $\Omega \rightarrow \mathcal{F}$ deduced from $\mathrm{id} - c \circ \rho_s$ extends to an isomorphism of \mathcal{O}_X -algebras

$$(9.7.1) \quad \psi : \mathrm{S}(\Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$$

which is compatible with the filtrations $(\oplus_{0 \leq i \leq n} \mathrm{S}^i(\Omega))_n$ and $(N_n(\mathcal{A}))_n$. The diagram (9.1.1)

$$(9.7.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{S}(\Omega) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{A} \\ \delta \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathrm{S}(\Omega) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{S}(\Omega) & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \psi} & \mathrm{S}(\Omega) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \end{array}$$

is commutative. Hence the isomorphism ψ is compatible with the $\widehat{\Gamma}(E)$ -module structures (9.3).

9.8. Let $f : Y \rightarrow X$ be a morphism of schemes and \mathcal{L} an E -torsor of X_{zar} . For \mathcal{O}_X -modules, we will use the notation f^{-1} to denote the inverse image in the sense of abelian sheaves and will keep the notation f^* for the inverse image in the sense of modules. The *affine inverse image of \mathcal{L} under f* , denoted by $f^+(\mathcal{L})$, is the $f^*(E)$ -torsor of Y_{zar} deduced from the $f^{-1}(E)$ -torsor $f^*(\mathcal{L})$ by extending its structural group by the canonical homomorphism $f^{-1}(E) \rightarrow f^*(E)$,

$$(9.8.1) \quad f^+(\mathcal{L}) = f^*(\mathcal{L}) \wedge^{f^{-1}(E)} f^*(E);$$

in other words, the quotient of $f^*(\mathcal{L}) \times f^*(E)$ by the diagonal action of $f^{-1}(E)$ ([17] III 1.4.6).

We denote by \mathcal{F} the sheaf of affine functions on \mathcal{L} (9.5) and by \mathcal{F}^+ the sheaf of affine functions on $f^+(\mathcal{L})$. Let $l : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X$ be an affine morphism, $\omega \in \Omega(X)$ its linear term and $\omega' = f^*(\omega) \in f^*(\Omega)(Y)$. Endowing \mathcal{O}_Y with the structure of $f^*(E)$ -object defined by ω' ([2] II.4.8), there exists a unique $f^*(E)$ -equivariant morphism $l' : f^+(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}_Y$ that fits into the commutative diagram

$$(9.8.2) \quad \begin{array}{ccc} f^*(\mathcal{L}) & \xrightarrow{l} & f^{-1}(\mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^+(\mathcal{L}) & \xrightarrow{l'} & \mathcal{O}_Y \end{array}$$

where the vertical arrows are the canonical morphisms ([17] III 1.3.6). The morphism l' is therefore affine, with linear term ω' . The resulting correspondence $l \mapsto l'$ induces an \mathcal{O}_X -linear morphism

$$(9.8.3) \quad \lambda_{\sharp} : \mathcal{F} \rightarrow f_*(\mathcal{F}^+).$$

Its adjoint morphism is an \mathcal{O}_Y -linear isomorphism ([2] II.4.13.4)

$$(9.8.4) \quad \lambda : f^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+$$

which fits into a commutative diagram

$$(9.8.5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & f^*(\mathcal{F}) & \longrightarrow & f^*(\Omega) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \lambda & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & \mathcal{F}^+ & \longrightarrow & f^*(\Omega) \longrightarrow 0 \end{array}$$

In particular, the isomorphism λ is compatible with actions of $f^*(\widehat{\Gamma}_{\mathcal{O}_X}(E)) \simeq \widehat{\Gamma}_{\mathcal{O}_Y}(f^*(E))$ (9.4.2).

9.9. In the following of this section, X denotes a *smooth scheme over k* . We denote by $\text{Cris}(X/k)$ the crystalline site of X over k equipped with the PD-ideal 0, by $(X/k)_{\text{crys}}$ the crystalline topos of X over k and by $\mathcal{O}_{X/k}$ the structure ring of $(X/k)_{\text{crys}}$ defined for every object (U, T, δ) of $\text{Cris}(X/k)$, by $(U, T, \delta) \mapsto \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$.

Recall ([5] 5.1) that to give a sheaf E on $\text{Cris}(X/k)$ is equivalent to give the following data:

- (i) For every object (U, T, δ) of $\text{Cris}(X/k)$, a sheaf $E_{(U, T, \delta)}$ of T_{zar} ;
- (ii) For every morphism $g : (U_1, T_1, \delta_1) \rightarrow (U_2, T_2, \delta_2)$, a morphism of $T_{1, \text{zar}}$

$$(9.9.1) \quad c_g : J_g^{-1}(E_{(U_2, T_2, \delta_2)}) \rightarrow E_{(U_1, T_1, \delta_1)},$$

where J_g^{-1} denotes the inverse image functor from $T_{2, \text{zar}}$ to $T_{1, \text{zar}}$; satisfying some compatibility conditions.

If E is an $\mathcal{O}_{X/k}$ -module, $E_{(U, T, \delta)}$ is an \mathcal{O}_T -module and c_g extends to an \mathcal{O}_{T_1} -linear morphism:

$$(9.9.2) \quad \tilde{c}_g : j_g^*(E_{(U_2, T_2, \delta_2)}) \rightarrow E_{(U_1, T_1, \delta_1)},$$

where j_g^* denotes the inverse image functor from the category of \mathcal{O}_{T_2} -modules to the category of \mathcal{O}_{T_1} -modules. Recall that E is *quasi-coherent* if each \mathcal{O}_T -module $E_{(U, T, \delta)}$ is quasi-coherent and that E is called a *crystal of $\mathcal{O}_{X/k}$ -modules* if each morphism \tilde{c}_g is an isomorphism.

9.10. Let E be a crystal of locally free $\mathcal{O}_{X/k}$ -modules of finite type on $\text{Cris}(X/k)$ and \mathcal{L} an E -torsor of $(X/k)_{\text{crys}}$. For any object (U, T) of $\text{Cris}(X/k)$, $\mathcal{L}_{(U, T)}$ is an $E_{(U, T)}$ -torsor of T_{zar} ([4] III 3.5.1). We define $\mathcal{F}_{(U, T)}$ to be the sheaf of affine functions on $\mathcal{L}_{(U, T)}$ of T_{zar} (9.5).

Let $g : (U_1, T_1) \rightarrow (U_2, T_2)$ be a morphism of $\text{Cris}(X/k)$. The morphism (9.9.1)

$$(9.10.1) \quad c_g : J_g^{-1}(\mathcal{L}_{(U_2, T_2)}) \rightarrow \mathcal{L}_{(U_1, T_1)}$$

is $J_g^{-1}(E_{(U_2, T_2)})$ -equivariant. By ([17] III 1.4.6(iii)), we obtain an $E_{(U_1, T_1)}$ -equivariant isomorphism

$$(9.10.2) \quad j_g^+(\mathcal{L}_{(U_2, T_2)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{(U_1, T_1)}.$$

By (9.8.4), we deduce an \mathcal{O}_{T_1} -linear isomorphism ([2] II 4.14.2)

$$(9.10.3) \quad \gamma_g : g^*(\mathcal{F}_{(U_2, T_2)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(U_1, T_1)}.$$

In view of the compatibility conditions of c_g (9.10.1) and ([2] II 4.15), the data $\{\mathcal{F}_{(U, T)}, \gamma_g\}$ satisfy the compatibility conditions of ([5] 5.1). Hence, they define a crystal of $\mathcal{O}_{X/k}$ -modules that we denote by \mathcal{F} and call *the crystal of affine functions on \mathcal{L}* .

9.11. Keep the notation of 9.10. For any object (U, T) of $\text{Cris}(X/k)$ and any integer $n \geq 0$, we set $\mathcal{A}_{(U,T)} = \varinjlim_{m \geq 0} S^m(\mathcal{F}_{(U,T)})$ and $N_n(\mathcal{A})_{(U,T)} = S^n(\mathcal{F}_{(U,T)})$. For any morphism $g : (U_1, T_1) \rightarrow (U_2, T_2)$ of $\text{Cris}(X/k)$, since \mathcal{F} is a crystal and J_g^* commutes with inductive limits, we have canonical isomorphisms

$$(9.11.1) \quad \tilde{c}_g : J_g^*(\mathcal{A}_{(U_2, T_2)}) \simeq \varinjlim_{n \geq 0} J_g^*(S^n(\mathcal{F}_{(U_2, T_2)})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{(U_1, T_1)},$$

$$(9.11.2) \quad \tilde{d}_g : J_g^*(N_n(\mathcal{A})_{(U_2, T_2)}) \simeq S^n(J_g^*(\mathcal{F}_{(U_2, T_2)})) \xrightarrow{\sim} N_n(\mathcal{A})_{(U_1, T_1)}.$$

Then the data $\{\mathcal{A}_{(U,T)}, \tilde{c}_g\}$ (resp. $\{N_n(\mathcal{A})_{(U,T)}, \tilde{d}_g\}$) form a crystal of \mathcal{O}_X -algebras (resp. \mathcal{O}_X -modules) that we denote by \mathcal{A} (resp. $N_n(\mathcal{A})$). Then $\{N_n(\mathcal{A})\}_{n \geq 1}$ defines an increasing filtration of \mathcal{A} .

9.12. Let (U, T, δ) be an object of $\text{Cris}(X/k)$ and J_T the PD-ideal associated to the closed immersion $i : U \rightarrow T$. For any local section a of J_T , we have $a^p = 0$ and hence an isomorphism $U \xrightarrow{\sim} \underline{T}$. We denote by $\varphi_{T/k}$ the composition (2.2)

$$(9.12.1) \quad \varphi_{T/k} : T \xrightarrow{f_{T/k}} U' \longrightarrow X'.$$

The morphism $\varphi_{X/k}$ is equal to the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$. If $g : (U_1, T_1) \rightarrow (U_2, T_2)$ is a morphism of $\text{Cris}(X/k)$, then $\varphi_{T_2/k} \circ g = \varphi_{T_1/k}$.

Let M' be an $\mathcal{O}_{X'}$ -module. There exists a canonical isomorphism

$$(9.12.2) \quad \tilde{c}_g : g^*(\varphi_{T_2/k}^*(M')) \xrightarrow{\sim} \varphi_{T_1/k}^*(M').$$

The data $\{\varphi_{T/k}^*(M'), \tilde{c}_g\}$ defines a crystal of $\mathcal{O}_{X/k}$ -modules that we denote by \mathcal{M} .

Lemma 9.13 ([33] 1.1). *The \mathcal{O}_X -module with integrable connection associated to \mathcal{M} ([5] 6.8) is $F_{X/k}^*(M')$ and the Frobenius descent connection ∇_{can} (6.5.1).*

Proof. The \mathcal{O}_X -module $\mathcal{M}_{(X,X)}$ is equal to $\varphi_{X/k}^*(M') = F_{X/k}^*(M')$. Let P_X^1 be the 1st order PD neighborhood of the diagonal immersion $X \rightarrow X^2$ ([5] 3.31) and I the ideal associated to the closed immersion $X \rightarrow P_X^1$. Then (X, P_X^1) is an object of $\text{Cris}(X/k)$ ([5] 4.2). We have a commutative diagram

$$(9.13.1) \quad \begin{array}{ccc} P_X^1 & \xrightarrow{p_1} & X \\ \varphi_{P_X^1/k} \searrow & & \downarrow F_{X/k} \\ X & \xrightarrow{F_{X/k}} & X' \end{array}$$

The morphisms p_1, p_2 extend to morphisms of $\text{Cris}(X/k)$. We have isomorphisms:

$$(9.13.2) \quad \tilde{c}_{p_1} : p_1^*(F_{X/k}^*(M')) \xrightarrow{\sim} \varphi_{P_X^1/k}^*(M'), \quad \tilde{c}_{p_2} : p_2^*(F_{X/k}^*(M')) \xrightarrow{\sim} \varphi_{P_X^1/k}^*(M').$$

We set ε to be the composition of \tilde{c}_{p_2} and the inverse of \tilde{c}_{p_1} . The connection ∇ on $F_{X/k}^*(M')$ associated to \mathcal{M} is defined, for every local sections f of \mathcal{O}_X and m of M' by

$$\nabla(f F_{X/k}^*(m)) = f F_{X/k}^*(m) \otimes 1 - \varepsilon(1 \otimes f F_{X/k}^*(m)) \in F_{X/k}^*(M') \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1.$$

In view of (9.13.1), ∇ annihilates $F_{X/k}^{-1}(M')$. Then the assertion follows.

9.14. We denote by $\text{Cris}(X/W_2)$ the crystalline site of X over W_2 equipped with the PD-structure γ_2 (5.12). Let (U, \tilde{T}, δ) be an object of $\text{Cris}(X/W_2)$ and T the reduction modulo p of \tilde{T} . Since δ and γ_2 are compatible ([5] 3.16), (U, \tilde{T}, δ) induces an object $(U, T, \bar{\delta})$ of $\text{Cris}(X/k)$.

9.15. Let $\mathbb{T}_{X/k}$ (resp. $\mathbb{T}_{X'/k}$) be the \mathcal{O}_X -dual of the \mathcal{O}_X -module of differential forms $\Omega_{X/k}^1$ (resp. $\Omega_{X'/k}^1$). Suppose we are given a smooth lifting \tilde{X}' of X'/k over W_2 . Let (U, \tilde{T}, δ) be an object of $\text{Cris}(X/W_2)$ such that \tilde{T} is flat over W_2 , T the reduction modulo p of \tilde{T} and V an open subscheme of T . Then (U, T) is an

object of $\mathrm{Cris}(X/k)$. We denote by \tilde{V} the open subscheme of \tilde{T} associated to V and by $\mathcal{L}_{\tilde{X}', \varphi_{T/k}}(V)$ the set of W_2 -morphisms $\tilde{V} \rightarrow \tilde{X}'$ which make the following diagram commute (9.12)

$$(9.15.1) \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \tilde{V} \\ \varphi_{T/k}|_V \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & \tilde{X}' \end{array}$$

The functor $V \mapsto \mathcal{L}_{\tilde{X}', \varphi_{T/k}}(V)$ defines a sheaf for the Zariski topology on T . Since \tilde{X}' is smooth over W_2 , such liftings exist locally. By deformation theory ([19] III 2.2.4), the sheaf $\mathcal{L}_{\tilde{X}', \varphi_{T/k}}$ is a torsor under the \mathcal{O}_T -module $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(f_{T/k}^*(\Omega_{X'/k}^1), p\mathcal{O}_{\tilde{T}}) \xrightarrow{\sim} \varphi_{T/k}^*(\mathrm{T}_{X'/k})$.

Proposition 9.16 ([33] Thm. 1.1). *Suppose we are given a smooth lifting \tilde{X}' of X' over W_2 . Let $\mathcal{F}_{X'/k}$ be the crystal of $\mathcal{O}_{X'/k}$ -modules associated to the $\mathcal{O}_{X'}$ -module $\mathrm{T}_{X'/k}$ (9.12). Then, there exists a unique $\mathcal{F}_{X'/k}$ -torsor $\mathcal{L}_{\tilde{X}'}$ of $(X/k)_{\mathrm{cris}}$ satisfying following conditions:*

(i) *For every object (U, T) of $\mathrm{Cris}(X/k)$ admitting a flat lifting (U, \tilde{T}) in $\mathrm{Cris}(X/W_2)$, the abelian sheaf $\mathcal{L}_{\tilde{X}', (U, T)}$ of T_{zar} is the sheaf $\mathcal{L}_{\tilde{X}', \varphi_{T/k}}$ (9.15).*

(ii) *For every morphism $\tilde{g} : (U_1, \tilde{T}_1) \rightarrow (U_2, \tilde{T}_2)$ of flat objects in $\mathrm{Cris}(X/W_2)$ and any lifting $\tilde{F} : \tilde{T}_2 \rightarrow \tilde{X}' \in \mathcal{L}_{\tilde{X}', \varphi_{T_2/k}}(\tilde{T}_2)$, the transition morphism $c_g : j_g^{-1}(\mathcal{L}_{\tilde{X}', (U_2, T_2)}) \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{X}', (U_1, T_1)}$ (9.9.1) satisfies*

$$(9.16.1) \quad c_g(j_g^{-1}(\tilde{F})) = \tilde{F} \circ \tilde{g} : \tilde{T}_1 \rightarrow \tilde{X}'.$$

9.17. We denote by $\mathcal{F}_{\tilde{X}'}$, the crystal of affine functions on $\mathcal{L}_{\tilde{X}'}$ (9.10) and by $\mathcal{A}_{\tilde{X}'}$, the quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{X'/k}$ -algebras associated to $\mathcal{F}_{\tilde{X}'}$ (9.11). We put $\mathcal{A}_{\tilde{X}'} = \mathcal{A}_{\tilde{X}', (X, X)}$. There exists an integrable connection ∇_A on $\mathcal{A}_{\tilde{X}'}$. By (9.4.2) and 9.6, $\mathcal{A}_{\tilde{X}'}$ is a quasi-nilpotent $F_{X'/k}^*(\hat{\Gamma}(\mathrm{T}_{X'/k}))$ -module.

Proposition 9.18 ([33] Prop. 1.5). *The p -curvature*

$$\psi : \mathcal{A}_{\tilde{X}'} \rightarrow \mathcal{A}_{\tilde{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_X} F_{X'/k}^*(\Omega_{X'/k}^1)$$

of ∇_A is equal to the universal \mathcal{O}_X -derivation (9.6.3)

$$d : \mathcal{A}_{\tilde{X}'} \rightarrow \mathcal{A}_{\tilde{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_X} F_{X'/k}^*(\Omega_{X'/k}^1).$$

9.19. Let E be an \mathcal{O}_X -module. Recall (5.1) that a *Higgs fields* on E over X relative to k is an \mathcal{O}_X -linear morphism $\theta : E \rightarrow E \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1$ such that $\theta \wedge \theta = 0$. A Higgs field on E over X relative to k is equivalent to an $\mathrm{S}(\mathrm{T}_{X/k})$ -module structure on E , which extends its \mathcal{O}_X -module structure (cf. [33] 5.1). The pair (E, θ) is called a *Higgs module on X relative to k* .

We denote by $\mathrm{HIG}(X/k)$ the category of Higgs modules on X relative to k . Let I_X be the ideal $\bigoplus_{m>0} \mathrm{S}^m(\mathrm{T}_{X/k})$ of $\mathrm{S}(\mathrm{T}_{X/k})$. For any integer $n \geq 0$, we say that a Higgs module E over X relative to k is *nilpotent of level $\leq n$* , if E is annihilated by I_X^{n+1} as an $\mathrm{S}(\mathrm{T}_{X/k})$ -module.

9.20. We call *PD-Higgs module on X relative to k* a $\hat{\Gamma}(\mathrm{T}_{X/k})$ -module E , and we say that the structure morphism $\psi : \hat{\Gamma}(\mathrm{T}_{X/k}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E, E)$ is the *PD-Higgs field* on E . For any local section ξ of $\hat{\Gamma}(\mathrm{T}_{X/k})$, we set $\psi_\xi = \psi(\xi)$.

Let n be an integer ≥ 1 . We denote by $\mathrm{HIG}_\gamma(X/k)$ the category of $\hat{\Gamma}(\mathrm{T}_{X/k})$ -modules and by $\mathrm{HIG}_\gamma^{\mathrm{qn}}(X/k)$ (resp. $\mathrm{HIG}_\gamma^n(X/k)$) the full subcategory of $\mathrm{HIG}_\gamma(X/k)$ consisting of quasi-nilpotent objects (resp. nilpotent objects of level $\leq n$) (9.2).

Since $\mathrm{S}^n(\mathrm{T}_{X/k}) \simeq \Gamma^n(\mathrm{T}_{X/k})$ for all $0 \leq n \leq p-1$, a nilpotent Higgs module of level $\leq p-1$ induces naturally a nilpotent PD-Higgs module of level $\leq p-1$.

9.21. Let (E_1, ψ_1) and (E_2, ψ_2) be two objects of $\mathrm{HIG}_\gamma^{\mathrm{an}}(X/k)$ and ∂ a local section of $\mathrm{T}_{X/k}$. We define a PD-Higgs field ψ on $E_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} E_2$ by ([33] 2.7.1)

$$(9.21.1) \quad \psi_{\partial^{[n]}} = \sum_{i+j=n} \psi_{1, \partial^{[i]}} \otimes \psi_{2, \partial^{[j]}}.$$

Let m, n be two integers, (E_1, ψ_1) an object of $\mathrm{HIG}_\gamma^n(X/k)$ and (E_2, ψ_2) an object of $\mathrm{HIG}_\gamma^m(X/k)$. There exists a unique PD-Higgs field ψ on $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E_1, E_2)$ defined, for every local sections h of $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E_1, E_2)$ and ∂ of $\mathrm{T}_{X/k}$ by (cf. [33] page 31)

$$(9.21.2) \quad \psi_{\partial^{[l]}}(h) = \sum_{i+j=l} (-1)^i \psi_{2, \partial^{[i]}} \circ h \circ \psi_{1, \partial^{[j]}} \quad \forall l \geq 1.$$

9.22. Let $n \geq 1$ be an integer and P_X^n the n^{th} PD-neighborhood of the diagonal immersion $X \rightarrow X^2$ with respect to the zero PD-ideal of k ([5] 3.31). We put $\mathcal{P}_X^n = \mathcal{O}_{P_X^n}$ and we consider them as sheaves of X_{zar} . Considering \mathcal{P}_X^n as a left \mathcal{O}_X -module, we set $(\mathcal{P}_X^n)^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_X^n, \mathcal{O}_X)$ the sheaf of PD-differential operators of order $\leq n$ ([5] 4.5). The sheaves $\{(\mathcal{P}_X^n)^\vee\}_{n \geq 0}$ form an inductive system. The ring $\mathrm{D}_{X/k}$ of PD-differential operators of X relative to k ([5], §4) is defined as the inductive limit

$$(9.22.1) \quad \mathrm{D}_{X/k} = \varinjlim_{n \geq 0} (\mathcal{P}_X^n)^\vee.$$

Suppose that there exists an étale k -morphism $X \rightarrow \mathbb{A}_k^d = \mathrm{Spec}(k[t_1, \dots, t_d])$. Let t_i be the image of T_i in \mathcal{O}_X and $\partial_i \in \mathrm{T}_{X/k}(X)$ the dual of dt_i that we consider as a PD-differential operator. For $i \neq j$, ∂_i and ∂_j commute. We set $\partial^I = \prod_{j=1}^d \partial_j^{i_j}$ for all $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$. By ([4] I 4.5.3), the \mathcal{O}_X -module $(\mathcal{P}_X^n)^\vee$ is free with a basis $\{\partial^I, |I| \leq n\}$. Any local section of $\mathrm{D}_{X/k}$ can be written as a finite sum $\sum_I a_I \partial^I$.

9.23. Let ∂ be a local section of $\mathrm{T}_{X/k}$ considered as a derivation of \mathcal{O}_X over k and hence as a PD-differential operator of order ≤ 1 . The sheaf of rings $\mathrm{D}_{X/k}$ is generated over \mathcal{O}_X by $\mathrm{T}_{X/k}$. The p th iterate $\partial^{(p)}$ of ∂ is again a derivation of \mathcal{O}_X over k ([21] 5.0.2, [5] 4.5) and hence a PD-differential operator of order ≤ 1 . We denote by ∂^p the p th power of ∂ in $\mathrm{D}_{X/k}$, which is an operator of order $\leq p$.

We have a homomorphism of \mathcal{O}_X -algebras (2.2)

$$(9.23.1) \quad c : F_X^*(\mathrm{T}_{X/k}) \rightarrow \mathrm{D}_{X/k}, \quad F_X^*(\partial) \mapsto \partial^p - \partial^{(p)},$$

called *p-curvature morphism*, which factors through the center $Z_{X/k}$ of $\mathrm{D}_{X/k}$ ([21] 5.2, [6] 1.3.1). By the isomorphism $\pi_{X/k}^*(\mathrm{T}_{X/k}) \simeq \mathrm{T}_{X'/k}$ and adjunction, we deduces from c an $\mathcal{O}_{X'}$ -linear morphism

$$(9.23.2) \quad c' : \mathrm{T}_{X'/k} \rightarrow F_{X/k*}(Z_{X/k}).$$

Theorem 9.24 ([6] 2.2.3; [33] Thm. 2.1). *The morphism c' (9.23.2) induces an isomorphism of $\mathcal{O}_{X'}$ -algebras*

$$(9.24.1) \quad \mathrm{S}(\mathrm{T}_{X'/k}) \xrightarrow{\sim} F_{X/k*}(Z_{X/k}).$$

The above morphism makes $F_{X/k}(\mathrm{D}_{X/k})$ into an Azumaya algebra over $\mathrm{S}(\mathrm{T}_{X'/k})$ of rank p^{2d} , where d is the dimension of X over k .*

9.25. We denote by $\mathrm{D}_{X/k}^\gamma$ the tensor product

$$(9.25.1) \quad \mathrm{D}_{X/k} \otimes_{\mathrm{S}(\mathrm{T}_{X'/k})} \widehat{\Gamma}(\mathrm{T}_{X'/k}).$$

via the morphism $\mathrm{S}(\mathrm{T}_{X'/k}) \rightarrow F_{X/k*}(\mathrm{D}_{X/k})$ induced by the p -curvature morphism (9.24.1). To give a left $\mathrm{D}_{X/k}^\gamma$ -module is equivalent to give an \mathcal{O}_X -module M with integrable connection ∇ and a homomorphism

$$(9.25.2) \quad \psi : \widehat{\Gamma}(\mathrm{T}_{X'/k}) \rightarrow F_{X/k*}(\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(M, \nabla))$$

which extends the Higgs field

$$(9.25.3) \quad \mathrm{S}(\mathrm{T}_{X'/k}) \rightarrow F_{X/k*}(\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(M, \nabla))$$

given by the p -curvature of ∇ (9.24.1) (cf. [33] page 32).

9.26. Recall (9.4.2) that we have a canonical isomorphism $F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})) \xrightarrow{\sim} \widehat{\Gamma}(F_{X'/k}^*(\mathbb{T}_{X'/k}))$. Let M be a left $D_{X'/k}^\gamma$ -module and n an integer ≥ 0 . We say that M is *quasi-nilpotent* (resp. *nilpotent of level $\leq n$*) if M is quasi-nilpotent (resp. nilpotent of level $\leq n$) as a $\widehat{\Gamma}(F_{X'/k}^*(\mathbb{T}_{X'/k}))$ -module (9.2).

We denote by $\text{MIC}_\gamma(X/k)$ the category of left $D_{X'/k}^\gamma$ -modules and by $\text{MIC}_\gamma^{\text{qn}}(X/k)$ (resp. $\text{MIC}_\gamma^n(X/k)$) the full subcategory of $\text{MIC}_\gamma(X/k)$ consisting of quasi-nilpotent objects (resp. nilpotent objects of level $\leq n$).

Let (M, ∇) be an \mathcal{O}_X -module with integrable connection whose p -curvature is nilpotent of level $\leq p-1$ ([21] 5.6). Since $S^n(\mathbb{T}_{X'/k}) \simeq \Gamma_n(\mathbb{T}_{X'/k})$ for all $0 \leq n \leq p-1$, (M, ∇) induces naturally an object of $\text{MIC}_\gamma^{p-1}(X/k)$. In particular, an \mathcal{O}_X -module with integrable connection of p -curvature zero (6.5) induces naturally a nilpotent left $D_{X'/k}^\gamma$ -module of level ≤ 0 .

9.27. Let (M_1, ∇_1, ψ_1) and (M_2, ∇_2, ψ_2) be two objects of $\text{MIC}_\gamma^{\text{qn}}(X/k)$. There exists a canonical integrable connection ∇ on $M_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} M_2$ ([21] 1.1.1). The morphisms ψ_1 and ψ_2 induce an action ψ of $F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ on $M_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} M_2$ as in (9.21.1). Then we obtain an object $(M_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} M_2, \nabla, \psi)$ of $\text{MIC}_\gamma^{\text{qn}}(X/k)$.

Let m, n be two integers and (M_1, ∇_1, ψ_1) an object of $\text{MIC}_\gamma^m(X/k)$ and (M_2, ∇_2, ψ_2) an object of $\text{MIC}_\gamma^n(X/k)$. There exists an integrable connection ∇ on the \mathcal{O}_X -module $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(M_1, M_2)$ defined, for every local sections ∂ of $\mathbb{T}_{X'/k}$ and h of $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(M_1, M_2)$ by ([21] 1.1.2)

$$(9.27.1) \quad \nabla_\partial(h) = \nabla_{2,\partial} \circ h - h \circ \nabla_{1,\partial}.$$

By induction, one verifies that for any $l \geq 1$, we have

$$(9.27.2) \quad (\nabla_\partial)^l(h) = \sum_{i+j=l} (-1)^i \binom{l}{i} (\nabla_{2,\partial})^i \circ h \circ (\nabla_{1,\partial})^j.$$

The morphisms ψ_1 and ψ_2 induce an action of $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ on $F_{X'/k*}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(M_1, M_2))$ defined by the same formula as (9.21.2). In view of (9.27.2), these data make $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(M_1, M_2)$ into an object of $\text{MIC}_\gamma^{m+n}(X/k)$ ([33] 2.1).

9.28. By 9.18, the \mathcal{O}_X -algebra $\mathcal{A}_{\widetilde{X}'}$ (9.17) is equipped with a quasi-nilpotent left $D_{X'/k}^\gamma$ -module structure. Moreover, we have an exhaustive filtration $\{N_n(\mathcal{A}_{\widetilde{X}'})\}_{n \geq 0}$ of left $D_{X'/k}^\gamma$ -submodules of $\mathcal{A}_{\widetilde{X}'}$, such that $N_n(\mathcal{A}_{\widetilde{X}'})$ is nilpotent of level $\leq n$ (9.11). We denote by $(\mathcal{A}_{\widetilde{X}'})^\vee$ the \mathcal{O}_X -dual of $\mathcal{A}_{\widetilde{X}'}$:

$$(9.28.1) \quad (\mathcal{A}_{\widetilde{X}'})^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}_{\widetilde{X}'}, \mathcal{O}_X) \simeq \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(N_n(\mathcal{A}_{\widetilde{X}'}), \mathcal{O}_X).$$

By 9.26 and 9.27, we see that $(\mathcal{A}_{\widetilde{X}'})^\vee$ is an object of $\text{MIC}_\gamma(X/k)$.

The involution morphism $\mathbb{T}_{X'/k} \rightarrow \mathbb{T}_{X'/k}$ defined by $x \mapsto -x$, induces a homomorphism that we denote by

$$(9.28.2) \quad \iota : \widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}) \rightarrow \widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}).$$

Theorem 9.29 ([33] 2.8). *Suppose we are given a smooth lifting \widetilde{X}' of X' over W_2 .*

- (i) *The left $D_{X'/k}^\gamma$ -module $\mathcal{B}_{\widetilde{X}'}$ is a splitting module for the Azumaya algebra $F_{X'/k*}(D_{X'/k}^\gamma)$ over $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$.*
- (ii) *The functors (9.28.2)*

$$(9.29.1) \quad C_{\widetilde{X}'} : \text{MIC}_\gamma(X/k) \xrightarrow{\sim} \text{HIG}_\gamma(X'/k) \quad E \mapsto \iota^*(\mathcal{H}om_{D_{X'/k}^\gamma}((\mathcal{A}_{\widetilde{X}'})^\vee, E))$$

$$(9.29.2) \quad C_{\widetilde{X}'}^{-1} : \text{HIG}_\gamma(X'/k) \xrightarrow{\sim} \text{MIC}_\gamma(X/k) \quad E' \mapsto (\mathcal{A}_{\widetilde{X}'})^\vee \otimes_{\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})} \iota^*(E').$$

are equivalences of categories quasi-inverse to each other. Furthermore, they induce equivalences of tensor categories between $\text{MIC}_\gamma^{\text{qn}}(X/k)$ and $\text{HIG}_\gamma^{\text{qn}}(X'/k)$ (9.21, 9.27).

(iii) Let (E, ∇, ψ) be an object of $\text{MIC}_\gamma(X/k)$ and $(E', \theta') = C_{\tilde{X}'}(E, \nabla, \psi)$. If a lifting \tilde{F} of the relative Frobenius morphism $F_{X'/k}$ exists, it induces a natural isomorphism of $F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(T_{X'/k}))$ -modules

$$(9.29.3) \quad \eta_{\tilde{F}} : (E, \psi) \xrightarrow{\sim} F_{X'/k}^*(E', -\theta').$$

We call $C_{\tilde{X}'}$ (resp. $C_{\tilde{X}'}^{-1}$) the Cartier transform (resp. inverse Cartier transform) of Ogus–Vologodsky.

Theorem 9.30 ([33] 2.17). *Suppose we are given a smooth lifting \tilde{X}' of X' over W_2 . Let (M', θ') be a nilpotent Higgs module on X'/k of level $\ell < p$ (9.20) and $(M, \nabla) = C_{\tilde{X}'}^{-1}(M', \theta')$. Then, the lifting \tilde{X}' induces an isomorphism in the derived category $D(\mathcal{O}_{X'})$*

$$(9.30.1) \quad \tau_{<p-\ell}(M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^\bullet) \xrightarrow{\sim} F_{X'/k*}(\tau_{<p-\ell}(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet)),$$

where $M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/k}^\bullet$ is the Dolbeault complex of (M', θ') , $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^\bullet$ is the de Rham complex of (M, ∇) and $\tau_{<\bullet}$ denotes the truncation of a complex.

We will give a partial generalization of this result for certain p^n -torsion crystals (cf. 13.1, 13.23).

10. Prelude on rings of differential operators

In this section X denotes a smooth scheme over k . From 10.11 on, suppose we are given a smooth formal \mathcal{S} -scheme \mathfrak{X} with special fiber X .

10.1. Let $n \geq 1$ be an integer. We denote by P_X (resp. P_X^n) the PD-envelope (resp. the n^{th} PD-neighborhood) of the diagonal immersion $\Delta : X \rightarrow X^2$ with respect to the zero PD-ideal of k ([5] 3.31). We put $\mathcal{P}_X = \mathcal{O}_{P_X}$ and $\mathcal{P}_X^n = \mathcal{O}_{P_X^n}$ and we consider them as sheaves of X_{zar} . By 5.15, one verifies that \mathcal{P}_X is equipped with a Hopf \mathcal{O}_X -algebra structure (δ, π, σ) (4.2). By (5.14.2), δ is a homomorphism of PD-algebras.

Assume that there exists an étale k -morphism $X \rightarrow \mathbb{A}_k^d = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_d])$. We set t_i the image of T_i in \mathcal{O}_X and $\xi_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$. We consider the ξ_i 's as sections of \mathcal{P}_X . Regarding \mathcal{P}_X as a left (resp. right) \mathcal{O}_X -algebra, we have an isomorphism of PD- \mathcal{O}_X -algebras ([4] I 4.5.3)

$$(10.1.1) \quad \mathcal{O}_X \langle x_1, \dots, x_d \rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_X,$$

where x_i is sent to ξ_i . The homomorphism of PD-algebras $\delta : \mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{P}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_X$ ([4] I 1.7.1) sends ξ_i to $\xi_i \otimes 1 + 1 \otimes \xi_i$. For any $\alpha \in \mathbb{N}^d$, we set $\xi^{[\alpha]} = \prod \xi_i^{[\alpha_i]}$. Then we deduce that

$$(10.1.2) \quad \delta(\xi^{[\alpha]}) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d, \beta \leq \alpha} \xi^{[\beta]} \otimes \xi^{[\alpha-\beta]}.$$

The left (resp. right) \mathcal{O}_X -module \mathcal{P}_X^n is free with a basis $\{\xi^{[\alpha]}, |\alpha| \leq n\}$ ([4] I 4.5.3).

10.2. Let U be a open subscheme of X^2 such that $\Delta(X) \subset U$ and that $X \rightarrow U$ is a closed immersion. The canonical morphism $P_X \rightarrow X^2$ factors through an affine morphism $P_X \rightarrow U$. We denote by Z the schematical image of $P_X \rightarrow U$ ([24] 6.10.1 and 6.10.5). Note that the morphisms $X \rightarrow P_X$ and $P_X \rightarrow Z$ induce isomorphisms between the underlying topological spaces. Hence we regard \mathcal{O}_Z as an \mathcal{O}_X -bialgebra of X_{zar} . We obtain an injective homomorphism of \mathcal{O} -bialgebras $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{P}_X$ and we consider \mathcal{O}_Z as a subalgebra of \mathcal{P}_X .

Lemma 10.3. *The scheme Z defined in 10.2 is independent of the choice of U up to canonical isomorphisms.*

Proof. Let U_1 and U_2 be two open subscheme of X^2 such that $\Delta(X) \subset U_i$ and that $X \rightarrow U_i$ is a closed immersion $i = 1, 2$ and Z_1 (resp. Z_2) the schematical image of P_X in U_1 (resp. U_2). We can suppose that $U_1 \subset U_2$. The image of $|Z_1|$ and $|P_X|$ in $|U_1|$ (resp. $|U_2|$) are equal. Then the composition $Z_2 \rightarrow U_1 \rightarrow U_2$ is a closed immersion. By ([24] 6.10.3), we deduce a canonical isomorphism $Z_1 \xrightarrow{\sim} Z_2$.

Lemma 10.4. *Assume that X is separated and that there exists an étale k -morphism $X \rightarrow \mathbb{A}_k^d$.*

- (i) *The left (resp. right) \mathcal{O}_X -module \mathcal{O}_Z is free with a basis $\{\xi^{[\alpha]}, \alpha \in \{0, 1, \dots, p-1\}^d\}$ (10.1.1).*
- (ii) *The \mathcal{O}_Z -module \mathcal{P}_X is free with a basis $\{\xi^{[p^I]}, I \in \mathbb{N}^d\}$.*

Proof. (i) It is clear that \mathcal{O}_Z contains $\xi^{[\alpha]}$ for all $\alpha \in \{0, \dots, p-1\}^d$. It suffices to show that \mathcal{O}_Z is contained in the \mathcal{O}_X -submodule of \mathcal{P}_X generated by $\{\xi^{[\alpha]}, \alpha \in \{0, 1, \dots, p-1\}^d\}$.

The question being local, we suppose that X is quasi-compact. Let J be the ideal sheaf associated to the diagonal closed immersion $X \rightarrow X^2$ and $\varpi : P_X \rightarrow X^2$ the canonical morphism. By 10.3, we consider Z as the schematical image of ϖ . The ideal J being of finite type, we suppose that J is generated by m elements x_1, \dots, x_m of $J(X^2)$ for some integer $m \geq d$. Since \mathcal{O}_{P_X} is a PD-algebra, the image of x_1^p, \dots, x_m^p in $\varpi_*(\mathcal{O}_{P_X})$ are zero. Put $N = (p-1)m$. Then the image of the ideal J^{N+1} in $\varpi_*(\mathcal{O}_{P_X})$ is zero, i.e. the morphism ϖ factors through the N^{th} order infinitesimal neighborhood $Y_N = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X^2}/J^{N+1})$ of the diagonal immersion $X \rightarrow X^2$. Then we obtain a homomorphism

$$(10.4.1) \quad \mathcal{O}_{Y_N} \rightarrow \mathcal{P}_X$$

whose image is \mathcal{O}_Z . Recall ([5] 2.2) that, the left (resp. right) \mathcal{O}_X -module \mathcal{O}_{Y_N} is free with a basis $\{\xi^I, |I| \leq N\}$. For any element $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$, if one of the components i_j is $\geq p$, then the image of ξ^I in \mathcal{P}_X is zero. Then the assertion follows.

(ii) The assertion follows from (i) and the local description of \mathcal{P}_X (10.1.1).

10.5. The p -curvature morphism $c' : S(\mathbb{T}_{X'/k}) \rightarrow F_{X/k*}(\mathbb{D}_{X/k})$ induces an isomorphism between $S(\mathbb{T}_{X'/k})$ and the center $Z_{X/k}$ of $\mathbb{D}_{X/k}$ (9.24). It makes $\mathbb{D}_{X/k}$ into an $S(\mathbb{T}_{X'/k})$ -module of finite type. Let $I_{X'}$ be the ideal $\bigoplus_{m \geq 1} S^m(\mathbb{T}_{X'/k})$ of $S(\mathbb{T}_{X'/k})$. We denote by \mathcal{K} the two-side ideal of $\mathbb{D}_{X/k}$ generated by $c'(I_{X'})$ and by $\widehat{\mathbb{D}}_{X/k}$ the completion of $\mathbb{D}_{X/k}$ with respect to the filtration $\{\mathcal{K}^m\}_{m \geq 1}$:

$$(10.5.1) \quad \widehat{\mathbb{D}}_{X/k} = \varprojlim_{m \geq 1} \mathbb{D}_{X/k} / \mathcal{K}^m.$$

The completion $\widehat{\mathbb{D}}_{X/k}$ is equal to the $(I_{X'})$ -adic completion for the $S(\mathbb{T}_{X'/k})$ -module $\mathbb{D}_{X/k}$. Then we obtain an isomorphism of $\widehat{S}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -algebras

$$(10.5.2) \quad \widehat{S}(\mathbb{T}_{X'/k}) \otimes_{S(\mathbb{T}_{X'/k})} \mathbb{D}_{X/k} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{D}}_{X/k}.$$

10.6. We consider the \mathcal{O}_X -algebra $(\mathcal{P}_X)^\vee$ (4.5) of hyper PD-differential operators of X relative to k . Recall (9.22.1) that $\mathbb{D}_{X/k} = \varinjlim_{n \geq 1} (\mathcal{P}_X^n)^\vee$. Then we have a canonical homomorphism of \mathcal{O}_X -algebras:

$$(10.6.1) \quad \mathbb{D}_{X/k} \rightarrow (\mathcal{P}_X)^\vee.$$

For any integer $n \geq 0$ and any open subscheme U of X , we define

$$(10.6.2) \quad F^n(\mathcal{P}_X)(U) = \{a \in \mathcal{P}_X(U) \mid u(a) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{K}^{n+1}(U)\}.$$

Then $F^n(\mathcal{P}_X)$ is a left \mathcal{O}_X -submodule of \mathcal{P}_X . We set $(F^n(\mathcal{P}_X))^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F^n(\mathcal{P}_X), \mathcal{O}_X)$.

10.7. Suppose that there exists an étale k -morphism $X \rightarrow \mathbb{A}_k^d = \text{Spec}(k[t_1, \dots, t_d])$. We take again the notation of 9.22. The p -curvature morphism c' sends ∂'_i to ∂_i^p and the ideal \mathcal{K} is generated by $\{\partial_1^p, \dots, \partial_d^p\}$ over $\mathbb{D}_{X/k}$. Then, any local section of $\widehat{\mathbb{D}}_{X/k}$ can be written as an infinite sum:

$$(10.7.1) \quad \sum_{I \in \mathbb{N}^d} a_I \partial^I \quad \text{with } a_I \in \mathcal{O}_X.$$

Since $c'(\partial'^\beta) = \partial^{p\beta}$ for $\beta \in \mathbb{N}^d$, the above section can be rewritten as

$$(10.7.2) \quad \sum_{\alpha \in \{0, \dots, p-1\}^d, \beta \in \mathbb{N}^d} b_{\alpha, \beta} \partial^\alpha \cdot c'(\partial'^\beta) \quad \text{with } b_{\alpha, \beta} \in \mathcal{O}_X.$$

For any $I, J \in \mathbb{N}^d$, the image of ∂^I in $(\mathcal{P}_X)^\vee$ (10.6.1) satisfies $\partial^I(\xi^{[J]}) = \delta_{I, J}$.

Lemma 10.8. (i) For any $n \geq 0$, the sheaf $F^n(\mathcal{P}_X)$ is a \mathcal{O}_Z -submodule of \mathcal{P}_X (10.2).

(ii) With the assumption and notation of 10.4, $F^n(\mathcal{P}_X)$ is a free \mathcal{O}_Z -module with basis $\{\xi^{[I]}, |I| \leq n\}$.

Proof. (i) The question being local, we take again the assumption of 10.4. Since the ideal \mathcal{K} is generated by $\{\partial_1^p, \dots, \partial_d^p\}$, a local section $a = \sum_I b_I \xi^{[I]}$ of \mathcal{P}_X is annihilated by \mathcal{K} if and only if $b_I = 0$ for all $I \in \mathbb{N}^d - \{0, \dots, p-1\}^d$. By 10.4(i), $F^0(\mathcal{P}_X)$ is equal to the subsheaf \mathcal{O}_Z of \mathcal{P}_X . Then the assertion follows.

(ii) The ideal \mathcal{K}^{n+1} is generated by the set of PD-differential operators $\{\partial^{pI}, |I| = n+1\}$ over $D_{X/k}$. Then the assertion follows from 10.4(ii) and the duality between ∂^I and $\xi^{[I]}$.

10.9. For any $n \geq 0$, since $F^n(\mathcal{P}_X)$ is locally a direct summand of \mathcal{P}_X , the canonical morphism $(\mathcal{P}_X)^\vee \rightarrow (F^n(\mathcal{P}_X))^\vee$ is surjective. By (10.1.2), 10.4(i) and 10.8(ii), the homomorphism $\delta : \mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{P}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_X$ (10.1) sends $F^n(\mathcal{P}_X)$ to $F^n(\mathcal{P}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} F^n(\mathcal{P}_X)$. In view of (4.5), the \mathcal{O}_X -algebra $(\mathcal{P}_X)^\vee$ induces an \mathcal{O}_X -algebra structure on $(F^n(\mathcal{P}_X))^\vee$.

Proposition 10.10 (Berthelot). (i) *For any integer $n \geq 1$, the homomorphism (10.6.1) induces a canonical isomorphism of \mathcal{O}_X -algebras $D_{X/k}/\mathcal{K}^{n+1} \xrightarrow{\sim} (F^n(\mathcal{P}_X))^\vee$.*

(ii) *the homomorphism (10.6.1) induces a canonical isomorphism of \mathcal{O}_X -algebras $\widehat{D}_{X/k} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}_X)^\vee$.*

Proof. (i) Since \mathcal{K}^{n+1} acts trivially on $F^n(\mathcal{P}_X)$, we obtain a homomorphism $D_{X/k}/\mathcal{K}^{n+1} \rightarrow (F^n(\mathcal{P}_X))^\vee$. In view of the local description of \mathcal{K}^{n+1} and of $F^n(\mathcal{P}_X)$ (10.8(ii)), this homomorphism is an isomorphism.

(ii) We have a canonical isomorphism $(\mathcal{P}_X)^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\varinjlim_{n \geq 0} F^n(\mathcal{P}_X), \mathcal{O}_X) \simeq \varprojlim (F^n(\mathcal{P}_X))^\vee$. Then the assertion follows from (i).

10.11. In the following of this section, suppose that we are a smooth formal \mathcal{S} -scheme \mathfrak{X} with special fiber X . We put $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} = \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}/p\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ and $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} = \mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}/p\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ (4.10). Recall that the left and the right \mathcal{O}_X -algebra structures of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ are equal (4.10). We denote by $q_1, q_2 : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow X$ the canonical morphisms.

Suppose that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \mathrm{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$. We set t_i the image of T_i in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ and $\xi_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$. We take again the notation of 4.15 and of 4.16 and we denote by ζ_i the element $\frac{\xi_i}{p}$ of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ and by η_i the element $\frac{\xi_i^p}{p}$ of $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}$. We have isomorphisms of \mathcal{O}_X -algebras (4.15, 4.16)

$$(10.11.1) \quad \mathcal{O}_X[x_1, \dots, x_d] \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}, \quad x_i \mapsto \zeta_i;$$

$$(10.11.2) \quad \mathcal{O}_X[x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d]/(x_1^p, \dots, x_d^p) \xrightarrow{\sim} q_{j*}(\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}), \quad x_i \mapsto \xi_i, y_i \mapsto \eta_i \quad j = 1, 2.$$

By 4.17, we have the following description of the Hopf algebra structures on $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ and $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}$

$$(10.11.3) \quad \begin{cases} \delta : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} & \zeta_i \mapsto 1 \otimes \zeta_i + \zeta_i \otimes 1 \\ \sigma : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} & \zeta_i \mapsto -\zeta_i \\ \pi : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow \mathcal{O}_X & \zeta_i \mapsto 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \delta : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} & \xi_i \mapsto 1 \otimes \xi_i + \xi_i \otimes 1 \\ & \eta_i \mapsto 1 \otimes \eta_i + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{j!(p-j)!} \xi_i^j \otimes \xi_i^{p-j} + \eta_i \otimes 1 \\ \sigma : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} & \xi_i \mapsto -\xi_i, \eta_i \mapsto -\eta_i \\ \pi : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow \mathcal{O}_X & \xi_i \mapsto 0, \eta_i \mapsto 0 \end{cases}$$

Proposition 10.12 ([34] 1.2.11). *The Hopf \mathcal{O}_X -algebra $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ is canonically isomorphism to $S(\Omega_{X/k}^1)$ (9.1) and the \mathcal{O}_X -algebra $(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1})^\vee$ (4.5) is canonically isomorphic to $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X/k})$ (9.2).*

Proof. There exists an open formal subscheme \mathfrak{U} of \mathfrak{X}^2 such that diagonal morphism $X \rightarrow \mathfrak{X}^2$ factors through by a closed immersion $X \rightarrow \mathfrak{U}$. Let \mathcal{I} (resp. I) be the ideal associated to the morphism $X \rightarrow \mathfrak{U}$ (resp. $X \rightarrow U$). Then the canonical morphism $\mathcal{O}_{\mathfrak{U}} \rightarrow \mathcal{O}_U$ induces an isomorphism of \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{I}/(\mathcal{I}^2 + p\mathcal{O}_{\mathfrak{U}}) \xrightarrow{\sim} I/I^2$.

We consider $\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ as an $\mathcal{O}_{\mathfrak{U}}$ -algebra of $\mathfrak{U}_{\mathrm{zar}}$. Since $R_{\mathfrak{X}}$ is the dilatation of \mathfrak{U} with respect to \mathcal{I} (4.10), the image of the canonical $\mathcal{O}_{\mathfrak{U}}$ -linear morphism $\alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$ is contained in $p\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$. Note that $R_{\mathfrak{X}}$ is flat over \mathcal{S} . By dividing by p , we obtain an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^2}$ -linear morphism

$$(10.12.1) \quad \beta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}} \quad x \mapsto \frac{\alpha(x)}{p}.$$

With the notation of 10.11, β sends ξ_i to $\frac{\xi_i}{p}$ for all $1 \leq i \leq d$. It is clear that $\beta(\mathcal{I}^2) \subset p\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{X}}}$. Then we obtain an \mathcal{O}_X -linear morphism $\Omega_{X/k}^1 \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ and hence a homomorphism of \mathcal{O}_X -algebras

$$(10.12.2) \quad \mathbb{S}(\Omega_{X/k}^1) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}.$$

With the notation of 10.11, the above morphism sends dt_i to ζ_i and hence is an isomorphism by (10.11.1). By 9.1 and (10.11.3), it is compatible with Hopf algebra structures. The second assertion follows from (9.3.3).

10.13. In the following, we study the \mathcal{O}_X -algebra $(Q_{\mathfrak{X},1})^\vee$. Suppose first that there exists an \mathcal{S} -morphism $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ which lifts the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X . We denote by \mathfrak{Y} (resp. Z) the fiber product of $F^2 : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}'^2$ and $R_{\mathfrak{X}'} \rightarrow \mathfrak{X}'^2$ (resp. the diagonal immersion $X' \rightarrow \mathfrak{X}'^2$) and by S the fiber product of $F_{X/k} : X \rightarrow X'$ and $R_{\mathfrak{X}',1} \rightarrow X'$ (4.10). The morphism $F_{X/k} : X \rightarrow X'$ and the diagonal immersion $\Delta : X \rightarrow \mathfrak{X}^2$ induce a closed immersion $X \hookrightarrow Z$. We have a commutative diagram:

$$(10.13.1) \quad \begin{array}{ccccc} S & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & R_{\mathfrak{X}',1} \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ & \square & & \mathfrak{Y} & \longrightarrow & R_{\mathfrak{X}'} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & \mathfrak{X}'^2 \\ & & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \downarrow \\ & & & \mathfrak{X}^2 & \xrightarrow{F^2} & \mathfrak{X}'^2 \end{array}$$

where $Y = \mathfrak{Y}_1$ is equal to $R_{\mathfrak{X}',1} \times_{X'} Z$ and the left square is Cartesian.

Let \mathfrak{U} be an open formal subscheme of \mathfrak{X}^2 such that diagonal immersion $X \rightarrow \mathfrak{X}^2$ factors through a closed immersion $X \rightarrow \mathfrak{U}$ and put $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U} \times_{\mathcal{S}, \sigma} \mathcal{S}$. Let \mathcal{I} (resp. \mathcal{I}') be the ideal associated to the diagonal immersion $X \rightarrow \mathfrak{U}$ (resp. $X' \rightarrow \mathfrak{U}'$). For any local section x of \mathcal{I} , we have $x^p \in \mathcal{I}'\mathcal{O}_{\mathfrak{U}}$. Since Z is defined by $\mathcal{I}'\mathcal{O}_{\mathfrak{U}}$ and X is reduced, the closed immersion $X \hookrightarrow Z$ induces an isomorphism $X \xrightarrow{\sim} \underline{Z}$. Then, the closed immersion $\underline{Y} \rightarrow Y$ factors through $S \rightarrow Y$. By the universal property of $Q_{\mathfrak{X}}$ (3.12), we deduce an \mathfrak{X}^2 -morphism

$$(10.13.2) \quad \nu : \mathfrak{Y} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}.$$

The composition $Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}^2 \xrightarrow{F^2} \mathfrak{X}'^2$ induces a morphism of formal groupoids above F (6.9.1):

$$(10.13.3) \quad \psi : Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$$

By (10.13.1) and the universal property of $R_{\mathfrak{X}'}$ (3.12), we deduce that the composition $\psi \circ \nu : \mathfrak{Y} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$ is the canonical morphism

$$(10.13.4) \quad \mathfrak{Y} = R_{\mathfrak{X}'} \times_{\mathfrak{X}'^2} \mathfrak{X}^2 \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$$

10.14. Keep the assumption and notation of 10.13. The morphism ν (10.13.2) induces a morphism $S \rightarrow Q_{\mathfrak{X},1}$ which makes the following diagram commutes

$$(10.14.1) \quad \begin{array}{ccccc} S & \longrightarrow & Q_{\mathfrak{X},1} & \xrightarrow{\psi_1} & R_{\mathfrak{X}',1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & & \longrightarrow & X' \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & X^2 & \longrightarrow & X'^2 \end{array}$$

Let u be the canonical morphism $S \rightarrow X$. Since $R_{\mathfrak{X}',1} \rightarrow X'$ is affine, we have an isomorphism $F_{X'/k}^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{X}',1}) \xrightarrow{\sim} u_*(\mathcal{O}_S)$ ([24] 9.3.2). Then the morphism $S \rightarrow Q_{\mathfrak{X},1}$ induces an \mathcal{O}_X -bilinear homomorphism

$$(10.14.2) \quad v : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow F_{X'/k}^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{X}',1}).$$

The morphism ψ_1 induces a homomorphism of Hopf algebras $s_F : \mathcal{R}_{\mathfrak{X}',1} \rightarrow F_{X'/k^*}(\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1})$ (4.3). By adjunction, we obtain a homomorphism of \mathcal{O}_X -algebras

$$(10.14.3) \quad s_F^\sharp : F_{X'/k}^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{X}',1}) \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}$$

for the left \mathcal{O}_X -algebra structure on $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}$. Then the composition $v \circ s_F$ is the identical homomorphism.

10.15. Recall that we have a canonical morphism of formal \mathfrak{X} -groupoids $P_{\mathfrak{X}} \rightarrow Q_{\mathfrak{X}}$ (5.17.1). Then we obtain a homomorphism of Hopf \mathcal{O}_X -algebras (4.3):

$$(10.15.1) \quad u : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow \mathcal{P}_X.$$

By taking duals (4.5 and 10.10(ii)), the above homomorphism induces a homomorphism of \mathcal{O}_X -algebras

$$(10.15.2) \quad u^\vee : \widehat{D}_{X/k} \rightarrow (\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1})^\vee.$$

Lemma 10.16 ([34] 1.2.13). *Keep the assumption and notation of 10.11 and of 10.13.*

- (i) *The homomorphism $u : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow \mathcal{P}_X$ sends ξ_i to ξ_i and η_i to $-\xi_i^{[p]}$ (10.1.1).*
- (ii) *The homomorphism $v : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow F_{X'/k}^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{X}',1})$ sends ξ_i to 0 and η_i to $F_{X'/k}^*(\zeta'_i)$.*

Proof. (i) The first result is clear. In $\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}}}$, we have $\xi_i^p = p(p-1)!\xi_i^{[p]}$. Since $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, we see that $u(\eta_i) = -\xi_i^{[p]}$.

(ii) The question being local, we can suppose that X is separated. Let \mathcal{I} be the ideal associated to the diagonal immersion $X \rightarrow \mathfrak{X}^2$. By (10.13.1), we have $\mathcal{I}\mathcal{O}_S = 0$. In particular, ξ_i is sent to 0 in $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. In $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$, we have:

$$\begin{aligned} \frac{\xi_i^p}{p} &= \frac{1 \otimes t_i^p - t_i^p \otimes 1}{p} + \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{(p-1)!}{l!(p-l)!} t_i^l \otimes t_i^{p-l} & p \geq 3; \\ \frac{\xi_i^2}{2} &= \frac{1 \otimes t_i^2 - t_i^2 \otimes 1}{2} + (-t_i \otimes t_i + t_i^2 \otimes 1) & p = 2. \end{aligned}$$

Since $\mathcal{I}\mathcal{O}_S = 0$, the image of $t_i^l \otimes t_i^{p-l} - t_i^{p-l} \otimes t_i^l$ in $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ is zero. Then $v(\eta_i)$ is equal to the image of $(1 \otimes t_i^p - t_i^p \otimes 1)/p$ in $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. On the other hand, there exists a local section a of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ such that $F^*(t'_i) = t_i^p + pa$. If we denote the morphism $\mathfrak{Y} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$ by f , then we have

$$(10.16.1) \quad f^*(\xi'_i/p) = (1 \otimes t_i^p - t_i^p \otimes 1)/p + 1 \otimes a - a \otimes 1.$$

Then we see that the image $f^*(\xi'_i/p)$ in $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ is equal to $v(\eta_i)$. The assertion follows.

10.17. In view of 10.16(ii), the homomorphism v (10.14.2) is independent of the choice of the lifting $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ of $F_{X'/k}$. Then, we obtain an \mathcal{O}_X -bilinear homomorphism

$$(10.17.1) \quad v : \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow F_{X'/k}^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{X}',1})$$

for a general smooth formal \mathcal{S} -scheme \mathfrak{X} even if the relative Frobenius morphism cannot be lifted over \mathcal{S} . By (10.11.3) and 10.16(ii), v is compatible with Hopf \mathcal{O}_X -algebras structures. By taking \mathcal{O}_X -duals, we obtain a homomorphism of \mathcal{O}_X -algebras (9.4.2, 10.12)

$$(10.17.2) \quad v^\vee : F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})) \rightarrow (\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1})^\vee.$$

Lemma 10.18 ([34] 1.2.14). *Let $\sigma : F_{X'/k}^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}) \rightarrow F_{X'/k}^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1})$ be the involution homomorphism defined in (10.11.3).*

- (i) *The restriction of u^\vee and $(\sigma \circ v)^\vee$ to $F_{X'/k}^{-1}(\widehat{S}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ coincide.*
- (ii) *The images of any local sections of $u^\vee(\widehat{D}_{X/k})$ and of $(\sigma \circ v)^\vee(F_{X'/k}^{-1}(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})))$ commute in $(\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1})^\vee$.*

Proof. The questions being local, we take again the assumption and notation of 10.11. Let $\partial_i \in T_{X/k}(X)$ (resp. $\partial'_i \in T_{X'/k}(X')$) be the dual of dt_i (resp. dt'_i).

(i) We identify dt'_i and ζ'_i via the isomorphism $S(\Omega_{X'/k}^1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{X',1}$ (10.12). It follows from 10.16 that the \mathcal{O}_X -linear morphism $(\sigma \circ v)^\vee(F_{X/k}^*(\partial'_j)) : \mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1} \rightarrow \mathcal{O}_X$ is given by

$$\xi_i \mapsto 0, \quad \eta_i \mapsto \langle -dt'_i, \partial'_j \rangle = -\delta_{ij}.$$

On the other hand, we consider ∂_i as a hyper PD-differential operator. The p -curvature morphism $c' : T_{X'/k} \rightarrow F_{X/k*}(\mathcal{D}_{X/k})$ sends ∂'_i to ∂_i^p . Therefore the \mathcal{O}_X -linear morphism $u^\vee(F_{X/k}^*(\partial'_j)) : \mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1} \rightarrow \mathcal{O}_X$ is given by (10.7)

$$\xi_i \mapsto \langle \xi_i, \partial_j^p \rangle = 0, \quad \eta_i \mapsto \langle -\xi_i^{[p]}, \partial_j^p \rangle = -\delta_{ij}.$$

Then the assertion follows.

(ii) By (i) and the fact that $F_{X/k}^{-1}(\mathcal{O}_{X'})$ is contained in the center of $\mathcal{D}_{X/k}$, the images of any local sections of $u^\vee(\widehat{\mathcal{D}}_{X/k})$ and of $(\sigma \circ v)^\vee(F_{X/k}^{-1}(\mathcal{O}_{X'}))$ commute in $(\mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1})^\vee$. For any $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, we set $\partial^\alpha = \prod_{i=1}^d \partial_i^{\alpha_i}$ and we consider it as a hyper PD-differential operator. By (i), we have $u^\vee(\partial^{p\alpha}) = (\sigma \circ v)^\vee(F_{X/k}^*(\partial'^{\alpha})) = 0$ if one of the component α_i of α is $\geq p$. Then by (10.7.1), it suffices to check that $u^\vee(\partial^\alpha)$ and $(\sigma \circ v)^\vee(F_{X/k}^*(\partial'^{[\beta]}))$ are commutative for all $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. Since u and v are \mathcal{O}_X -bilinear, the product $u^\vee(\partial^\alpha) \cdot (\sigma \circ v)^\vee(F_{X/k}^*(\partial'^{[\beta]}))$ is equal to the composition:

$$(10.18.1) \quad g : \mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1} \xrightarrow{\delta} \mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1} \xrightarrow{u \otimes (\sigma \circ v)} \mathcal{P}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F_{X/k}^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{x},1}) \xrightarrow{\partial^\alpha \otimes F_{X/k}^*(\partial'^{[\beta]})} \mathcal{O}_X.$$

Similarly, the product $(\sigma \circ v)^\vee(\partial'^{[\beta]}) \cdot u^\vee(\partial^\alpha)$ is equal to the composition:

$$(10.18.2) \quad h : \mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1} \xrightarrow{\delta} \mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1} \xrightarrow{(\sigma \circ v) \otimes u} F_{X/k}^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{x},1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_X \xrightarrow{F_{X/k}^*(\partial'^{[\beta]}) \otimes \partial^\alpha} \mathcal{O}_X.$$

Since $\{\xi^I \eta^J | I \in \{0, 1, \dots, p-1\}^d, J \in \mathbb{N}^d\}$ is a basis of the left \mathcal{O}_X -module $\mathcal{Q}_{\mathfrak{x},1}$, and g, h are \mathcal{O}_X -linear, it suffices to show that $g(\xi^I \eta^J) = h(\xi^I \eta^J)$. By (10.11.3), we have

$$(10.18.3) \quad \delta(\xi^I \eta^J) = \prod_{l=1}^d (1 \otimes \xi_l + \xi_l \otimes 1)^{i_l} (1 \otimes \eta_l + \sum_{m=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{m!(p-m)!} \xi_l^m \otimes \xi_l^{p-m} + \eta_l \otimes 1)^{j_l}.$$

We write the right hand side simply by $(1 \otimes \xi + \xi \otimes 1)^I (1 \otimes \eta + \sum_{m=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{m!(p-m)!} \xi^m \otimes \xi^{p-m} + \eta \otimes 1)^J$. Then we have

$$\begin{aligned} & ((u \otimes (\sigma \circ v)) \circ \delta)(\xi^I \eta^J) \\ &= (u \otimes (\sigma \circ v)) \left((1 \otimes \xi + \xi \otimes 1)^I (1 \otimes \eta + \sum_{m=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{m!(p-m)!} \xi^m \otimes \xi^{p-m} + \eta \otimes 1)^J \right) \quad (10.18.3) \\ &= (\xi^I \otimes 1) (-1 \otimes F_{X/k}^*(\zeta') - \xi^{[p]} \otimes 1)^J \quad (10.11.3, 10.16) \\ &= (-1)^{|J|} \sum_{K \in \mathbb{N}^d, K \leq J} \frac{J!}{K!(J-K)!} \xi^I (\xi^{[p]})^K \otimes F_{X/k}^*(\zeta')^{J-K}. \end{aligned}$$

Since $\langle \partial'^{[\beta]}, \zeta'^J \rangle = \delta_{\beta, J}$, we have (10.18.1)

$$(10.18.4) \quad g(\xi^I \eta^J) = \begin{cases} (-1)^{|J|} \frac{J!}{\beta!(J-\beta)!} \langle \partial^\alpha, \xi^I (\xi^{[p]})^{J-\beta} \rangle & \text{if } \beta \leq J, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

A similar calculation shows that $g(\xi^I \eta^J)$ is equal to $h(\xi^I \eta^J)$. Then the assertion follows.

Proposition 10.19 ([34] 1.2.12). *The homomorphisms $(\sigma \circ v)^\vee$ and u^\vee induce an isomorphism of $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(T_{X'/k}))$ -algebras (9.25)*

$$(10.19.1) \quad D_{X/k}^\gamma \xrightarrow{\sim} (\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1})^\vee.$$

Proof. By 10.18, we obtain a canonical homomorphism of $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(T_{X'/k}))$ -algebras

$$(10.19.2) \quad w : \widehat{D}_{X/k} \otimes_{F_{X/k}^{-1}(\widehat{S}(T_{X'/k}))} F_{X/k}^{-1}(\widehat{\Gamma}(T_{X'/k})) \rightarrow (\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1})^\vee.$$

By (10.5.2), the left hand side is isomorphic to $D_{X/k}^\gamma$. We show that w is an isomorphism. The question being local, we may assume that there exists an étale morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d$. We take again the notation of 10.18. By (10.7.2) and 10.18, a local section of $D_{X/k}^\gamma$ can be written as an infinite sum:

$$(10.19.3) \quad \sum_{\alpha \in \{0,1,\dots,p-1\}^d, \beta \in \mathbb{N}^d} c_{\alpha,\beta} \frac{\partial^\alpha}{\alpha!} \otimes F_{X/k}^*(\partial'^{[\beta]})$$

with coefficients $c_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}_X$. By (10.18.4) and $\langle \partial^\alpha, \xi^{[I]} \rangle = \delta_{\alpha,I}$, we have

$$(10.19.4) \quad w \left(\frac{\partial^\alpha}{\alpha!} \otimes F_{X/k}^*(\partial'^{[\beta]}) \right) (\xi^I \eta^J) = (-1)^{|J|} \delta_{\alpha,I} \delta_{\beta,J}.$$

Since $\{\xi^I \eta^J, I \in \{0, \dots, p-1\}^d, J \in \mathbb{N}^d\}$ form a basis for the left \mathcal{O}_X -module $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}$, we deduce that w is an isomorphism.

Proposition 10.20 ([34] 1.2.9). *Let \mathfrak{X} be a smooth formal \mathcal{S} -scheme, X its special fiber. There exists a canonical equivalence of tensor categories between $\text{HIG}_\gamma^{\text{qn}}(X/k)$ (9.20) (resp. $\text{MIC}_\gamma^{\text{qn}}(X/k)$ (9.26)) and the category of \mathcal{O}_X -modules with $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification (resp. $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -stratification) (4.12, 5.5).*

Proof. We recall here the main construction of the equivalence, referring to ([34] pages 18-20) for details.

Let (M, ε) be an \mathcal{O}_X -module with $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification and $\theta : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ the \mathcal{O}_X -linear morphism defined by $\theta(m) = \varepsilon(1 \otimes m)$ (5.7). By 10.12 and 5.9, we deduce a $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -module structure on M :

$$(10.20.1) \quad \psi : \widehat{\Gamma}(T_{X/k}) \otimes_{\mathcal{O}_X} M \rightarrow M.$$

To show that ψ is quasi-nilpotent, we suppose that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d$. We take again notation of 10.11. For any $I \in \mathbb{N}^d$, we set $\partial^{[I]} = \prod_{j=1}^d \partial_j^{[i_j]} \in \widehat{\Gamma}(T_{X/k})$. The action of $\partial^{[I]}$ on M is given by the composition

$$(10.20.2) \quad \psi_{\partial^{[I]}} : M \xrightarrow{\theta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \xrightarrow{\text{id} \otimes \partial^{[I]}} M.$$

Since $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ is isomorphic to a polynomial algebra over \mathcal{O}_X (10.11), for any local section m of M and any point x of X , there exists a neighborhood U of x such that $\theta(m)|_U$ is a section of $M(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}(U)$ and can be written as a finite sum:

$$(10.20.3) \quad \varepsilon(1 \otimes m) = \theta(m) = \sum_{I \in \mathbb{N}^d} \psi_{\partial^{[I]}}(m) \otimes \zeta^I.$$

Hence, (M, ψ) is quasi-nilpotent (9.2).

Let (M, ε) be an \mathcal{O}_X -module with $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -stratification and $\theta : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}$ the morphism induced by ε . By 10.19 and 5.9, we associate to it a $D_{X/k}^\gamma$ -module (M, ∇, ψ) (9.25). We take again the assumption and notation of the proof of 10.19. For $I \in \{0, \dots, p-1\}^d, J \in \mathbb{N}^d$, the action of the local section $\partial^I \otimes F_{X/k}^*(\partial'^{[J]})$ of $D_{X/k}^\gamma$ on M is given by the composition

$$(10.20.4) \quad \nabla_{\partial^I} \circ \psi_{\partial'^{[J]}} : M \xrightarrow{\theta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1} \xrightarrow{\text{id} \otimes w(\partial^I \otimes F_{X/k}^*(\partial'^{[J]})} M$$

Since $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}$ is of finite type over a polynomial algebra over \mathcal{O}_X (10.11), for any local section m of M and any point x of X , there exists a neighborhood U of x such that $\theta(m)|_U$ is a section of $M(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}(U)$ and can be written as a finite sum (10.19.4)

$$(10.20.5) \quad \varepsilon(1 \otimes m) = \theta(m) = \sum_{I \in \{0, \dots, p-1\}^d, J \in \mathbb{N}^d} (-1)^{|J|} \frac{1}{I!} (\nabla_{\partial^I} \circ \psi_{\partial^{|J|}})(m) \otimes \xi^I \eta^J.$$

Hence (M, ∇, ψ) is quasi-nilpotent (9.26).

Corollary 10.21. *Let \mathfrak{X} be a smooth formal \mathcal{S} -scheme, X its special fiber, $\tilde{\mathcal{E}}$ and $\tilde{\mathcal{E}}'$ the Oyama topoi of X (7.10) and $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}$ the p -torsion structure rings of $\tilde{\mathcal{E}}$ and $\tilde{\mathcal{E}}'$ respectively (8.1). We denote by $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},1})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1})$) the category of crystals of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}'$) (8.5). Then, we have equivalences of tensor categories*

$$(10.21.1) \quad \text{HIG}_{\gamma}^{\text{qn}}(X/k) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}), \quad \text{MIC}_{\gamma}^{\text{qn}}(X/k) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}).$$

Moreover, the above equivalence is compatible with localisation with respect to U (7.30).

The equivalences follows from 8.18 and 10.20. The compatibility with localisation follows from 8.19(i). Note that the equivalences of categories (10.21.1) depend on the formal model \mathfrak{X} of X .

Corollary 10.22 (8.21, 9.29(iii)). *Let $C_{X/\mathcal{S}} : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}'$ be the morphism of topoi associated to X (8.2.2), \mathcal{M}' a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}'$ (8.5), (M', θ) the associated $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -module (10.21) and (∇, ψ) the $D_{X/k}^{\gamma}$ -module structure on $(C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}'))_{(X,\mathfrak{X})}$. Then a lifting $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X induces a functorial isomorphism of $F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ -modules:*

$$(10.22.1) \quad \eta_F : \iota^*(F_{X'/k}^*(M', \theta)) \xrightarrow{\sim} ((C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}'))_{(X,\mathfrak{X})}, \psi)$$

where ι denotes the involution homomorphism $F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})) \rightarrow F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ (9.28.2).

Proof. We take again the notation of 10.14. By 4.6, 10.12 and 10.19, the homomorphism s_F^{\sharp} (10.14.3) induces a homomorphism of \mathcal{O}_X -algebras:

$$(10.22.2) \quad (s_F^{\sharp})^{\vee} : D_{X/k}^{\gamma} \rightarrow F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})).$$

Since the composition $v \circ s_F^{\sharp}$ is the identity (10.14), the composition (10.17.2)

$$(10.22.3) \quad F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})) \xrightarrow{(\sigma \circ v)^{\vee}} D_{X/k}^{\gamma} \xrightarrow{(s_F^{\sharp})^{\vee}} F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})).$$

is the involution homomorphism $\iota : F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})) \rightarrow F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ (9.28.2).

Let ε be the associated $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}'}$ -stratification on M' . Recall 8.21 that the morphism F induces a functorial isomorphism of \mathcal{O}_X -modules compatible with $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X}}$ -stratifications:

$$(10.22.4) \quad \eta_F : (F_{X'/k}^*(M'), s_F^*(\varepsilon)) \xrightarrow{\sim} (C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}'))_{(X,\mathfrak{X})}.$$

In view of 10.20, the associated $D_{X/k}^{\gamma}$ -module structure on $F_{X/k}^*(M')$ in the left hand side is give by $F_{X/k}^*(\theta)$ via $(s_F^{\sharp})^{\vee}$ that we denote by (∇_F, ψ_F) . Then we obtain a functorial isomorphism of $D_{X/k}^{\gamma}$ -modules

$$(10.22.5) \quad \eta_F : (F_{X'/k}^*(M'), \nabla_F, \psi_F) \xrightarrow{\sim} (C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}'))_{(X,\mathfrak{X})}.$$

In view of (10.22.3), we have an equality of $F_{X'/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ -modules

$$(10.22.6) \quad (F_{X'/k}^*(M'), \psi_F) = \iota^*(F_{X'/k}^*(M', \theta)).$$

This concludes the proof.

11. Comparison with the Cartier transform of Ogus–Vologodsky

In this section, \mathfrak{X} denotes a smooth formal \mathcal{S} -scheme, X its special fiber and $T_{X/k}$ the \mathcal{O}_X -dual of the \mathcal{O}_X -module of differential forms $\Omega_{X/k}^1$. We set $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{S}, \sigma} \mathcal{S}$.

11.1. Let $\tilde{\mathcal{E}}$ and $\underline{\mathcal{E}}$ be the Oyama topoi of X (7.10) and $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}$, $\underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E},1}$ the p -torsion structure rings of $\tilde{\mathcal{E}}$ and $\underline{\mathcal{E}}$ respectively (8.1). We use the conventions and notation of § 7-8. If we use a gothic letter \mathfrak{T} to denote an adic formal \mathcal{S} -scheme, the corresponding roman letter T will denote its special fiber $\mathfrak{T} \otimes_{\mathbb{W}} k$. A morphism $g : (U_1, \mathfrak{T}_1, u_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ of \mathcal{E} (resp. $\underline{\mathcal{E}}$) induces a morphism of ringed topoi (8.3.1)

$$(11.1.1) \quad \tilde{g}_s : (U_1, u_{1*}(\mathcal{O}_{T_1})) \rightarrow (U_2, u_{2*}(\mathcal{O}_{T_2})).$$

11.2. Let $v : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ (resp. $v : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow X_{\text{zar}}$) be the morphism of topoi defined in 7.27. Its inverse image functor is induced by the composition with the functor

$$\mathcal{E} \text{ (resp. } \underline{\mathcal{E}}) \rightarrow \mathbf{Zar}/X, \quad (U, \mathfrak{T}) \mapsto U.$$

For any object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} , the morphism $u : T \rightarrow U$ induces a canonical, functorial homomorphism

$$(11.2.1) \quad v^*(\mathcal{O}_X)(U, \mathfrak{T}, u) = \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E},1}(U, \mathfrak{T}, u) = u_*(\mathcal{O}_T)(U).$$

Then the morphism of topoi $v : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ underlies a morphism of ringed topoi

$$(11.2.2) \quad \nu : (\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E},1}) \rightarrow (X_{\text{zar}}, \mathcal{O}_X).$$

For any object (U, \mathfrak{T}, u) of $\underline{\mathcal{E}}$, we have a morphism $u' \circ f_{T/k} : T \rightarrow U'$ (7.4.1) and hence a canonical, functorial homomorphism

$$(11.2.3) \quad v^*(F_{X/k}^*(\mathcal{O}_{X'}))(U, \mathfrak{T}, u) = \mathcal{O}_{X'}(U') \rightarrow \underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E},1}(U, \mathfrak{T}, u) = (u' \circ f_{T/k})_*(\mathcal{O}_T)(U').$$

The composition of morphisms $F_{X/k} \circ v : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow X_{\text{zar}} \rightarrow X'_{\text{zar}}$ underlies a morphism of ringed topoi

$$(11.2.4) \quad \mu : (\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E},1}) \rightarrow (X'_{\text{zar}}, \mathcal{O}_{X'}).$$

By (7.27.3), the morphisms μ and ν' fit into a commutative diagram

$$(11.2.5) \quad \begin{array}{ccc} (\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E},1}) & \xrightarrow{c_{X/\mathcal{S}}} & (\tilde{\mathcal{E}}', \mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}) \\ & \searrow \mu & \swarrow \nu' \\ & (X'_{\text{zar}}, \mathcal{O}_{X'}) & \end{array}$$

11.3. Let M be an \mathcal{O}_X -module and $\mathcal{M} = \nu^*(M)$ (11.2.2). For any object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} , we set $\tilde{u}^*(M) = M|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} u_*(\mathcal{O}_T)$. Recall (7.27) that we have $(v^*(M))_{(U, \mathfrak{T})} = M|_U$. In view of 7.11 and (11.2.1), we deduce that $\mathcal{M}_{(U, \mathfrak{T}, u)} = \tilde{u}^*(M)$. For any morphism $g : (U_1, \mathfrak{T}_1, u_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2, u_2)$ of \mathcal{E} , in view of (7.27.4), the transition morphism $c_g : \tilde{g}_s^*(\mathcal{M}_{(U_2, \mathfrak{T}_2)}) \rightarrow \mathcal{M}_{(U_1, \mathfrak{T}_1)}$ is the canonical isomorphism (11.1.1)

$$(11.3.1) \quad \tilde{g}_s^*(\tilde{u}_2^*(M)) \xrightarrow{\sim} \tilde{u}_1^*(M).$$

Hence \mathcal{M} is a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$. If M is moreover quasi-coherent, then so is \mathcal{M} (8.5). In this case, for any object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} , the \mathcal{O}_T -module $\mathcal{M}_{(U, \mathfrak{T})}$ of T_{zar} (8.11) is $u^*(M|_U)$.

Lemma 11.4. *Under the assumption of 11.3, the $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -module associated to \mathcal{M} (10.21) is the \mathcal{O}_X -module M equipped with the zero PD-Higgs field (9.20).*

Proof. The underlying \mathcal{O}_X -module is $\mathcal{M}_{(X, \mathfrak{X})} = M$. The reduction modulo p of the two canonical morphisms $q_1, q_2 : R_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ are equal. By (11.3.1), the $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification on M associated to \mathcal{M} (8.18)

$$\varepsilon : \tilde{q}_{2,s}^*(M) \xrightarrow{\sim} \tilde{q}_{1,s}^*(M)$$

is the identity morphism. In view of (10.20.2) and (10.20.3), the PD-Higgs field associated to ε is zero.

Lemma 11.5. *Let M' be an $\mathcal{O}_{X'}$ -module and $\mathcal{M} = \mu^*(M')$. Then \mathcal{M} is a crystal of $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$ and the $D_{X/k}$ -module associated to \mathcal{M} is $(F_{X/k}^*(M'), \nabla_{\text{can}}, 0)$ (10.21), where ∇_{can} denotes the Frobenius descent connection on $F_{X/k}^*(M')$ (6.5.1).*

Proof. We set $\mathcal{M}' = \nu'^*(M')$ (11.2.5). Then $\mathcal{M} = C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}')$ is a crystal by 11.3. For any object (U, \mathfrak{T}, u) of $\underline{\mathcal{E}}$, we put $\phi_{T/k} = u' \circ f_{T/k} : T \rightarrow T' \rightarrow U'$. Then we have $\rho(U, \mathfrak{T}, u) = (U', \mathfrak{T}', \phi_{T/k})$ (7.4.2) and (7.21.4)

$$(11.5.1) \quad C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}')_{(U, \mathfrak{T}, u)} = \pi_{U*}(\mathcal{M}'_{(U', \mathfrak{T}', \phi_{T/k})}) = \pi_{U*}(\tilde{\phi}_{T/k}^*(M')).$$

The morphism $\phi_{X/k}$ associated to the object (X, \mathfrak{X}) of $\underline{\mathcal{E}}$ is $F_{X/k}$. Then we have $\mathcal{M}_{(X, \mathfrak{X})} = F_{X/k}^*(M')$. There exists a commutative diagram

$$(11.5.2) \quad \begin{array}{ccc} Q_{\mathfrak{X}, 1} & \xrightarrow{q_2} & X \\ \downarrow q_1 & \searrow \phi_{Q_{\mathfrak{X}, 1}/k} & \downarrow F_{X/k} \\ X & \xrightarrow{F_{X/k}} & X' \end{array}$$

The morphisms $q_1, q_2 : (X, Q_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X, \mathfrak{X})$ of $\underline{\mathcal{E}}$ induce isomorphisms (11.3.1, 11.5.1)

$$(11.5.3) \quad c_{q_1} : \tilde{q}_{1,s}^*(F_{X/k}^*(M')) \xrightarrow{\sim} \pi_{X*}(\tilde{\phi}_{Q_{\mathfrak{X}, 1}/k}^*(M')), \quad c_{q_2} : \tilde{q}_{2,s}^*(F_{X/k}^*(M')) \xrightarrow{\sim} \pi_{X*}(\tilde{\phi}_{Q_{\mathfrak{X}, 1}/k}^*(M')).$$

The $Q_{\mathfrak{X}}$ -stratification ε on $F_{X/k}^*(M')$ associated to the crystal \mathcal{M} (8.18) is given by the composition of c_{q_2} and the inverse of c_{q_1} . In view of (11.5.2), for any local section m' of M' , we have

$$(11.5.4) \quad \varepsilon(1 \otimes F_{X/k}^*(m')) = F_{X/k}^*(m') \otimes 1.$$

Let $(F_{X/k}^*(M'), \nabla, \psi)$ be the $D_{X/k}^\gamma$ -module associated to $(F_{X/k}^*(M'), \varepsilon)$ (10.20). In view of (11.5.4), (10.20.4) and (10.20.5), we deduce that ∇ and ψ annihilate the subsheaf $F_{X/k}^{-1}(M')$ of $F_{X/k}^*(M')$. Hence ∇ is the Frobenius descent connection and $\psi = 0$.

Corollary 11.6. *Let $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X'})$ be the category of $\mathcal{O}_{X'}$ -modules and let λ be the functor*

$$(11.6.1) \quad \lambda : \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X'}) \rightarrow \text{MIC}_\gamma^0(X/k) \quad M' \mapsto (F_{X/k}^*(M'), \nabla_{\text{can}}, 0)$$

where $\text{MIC}_\gamma^0(X/k)$ denotes the category of nilpotent $D_{X/k}^\gamma$ -modules of level ≤ 0 (9.26). Then, the following diagram is commutative up to a canonical isomorphism

$$(11.6.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X'}) & \xrightarrow{\lambda} & \text{MIC}_\gamma^0(X/k) \\ \downarrow \nu'^* & & \downarrow \\ \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}', 1}) & \xrightarrow{C_{X/\mathcal{S}}^*} & \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, 1}) \end{array}$$

where the right vertical arrow is given by (10.21).

It follows from (11.2.5), 11.4 and 11.5.

11.7. Let (U, \mathfrak{T}, u) be an object of $\underline{\mathcal{E}}$, W an open subscheme of T and \mathfrak{W}_2 the open subscheme of \mathfrak{T}_2 associated to W . We define $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}, (U, \mathfrak{T}, u)}(W)$ to be the set of \mathcal{S}_2 -morphisms $\mathfrak{W}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ which make the following diagram commutes

$$(11.7.1) \quad \begin{array}{ccccc} & W & \longrightarrow & \mathfrak{W}_2 & \\ u|_W \downarrow & & & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathfrak{X}_2 \end{array}$$

The functor $W \mapsto \mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)}(W)$ defines a sheaf of T_{zar} . Since \mathfrak{X} is smooth over \mathcal{S} , such morphisms exist locally. By deformation theory ([19] III 2.2.4), the sheaf $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)}$ is a torsor under the \mathcal{O}_T -module $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_2}}(u^*(\Omega_{U/k}^1), p\mathcal{O}_{\mathfrak{T}_2}) \xrightarrow{\sim} u^*(T_{U/k})$ of T_{zar} .

11.8. Let $g : (V, \mathfrak{Z}, v) \rightarrow (U, \mathfrak{T}, u)$ be a morphism of \mathcal{E} and $g_s : Z \rightarrow T$ (resp. $g_2 : \mathfrak{Z}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_2$) the reduction of the morphism $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{T}$. For \mathcal{O}_T -modules, we will use the notation g_s^{-1} to denote the inverse image in the sense of abelian sheaves and will keep the notation g_s^* for the inverse image in the sense of modules. By adjunction, the isomorphism $g_s^*(u^*(T_{U/k})) \xrightarrow{\sim} v^*(T_{V/k})$ induces an \mathcal{O}_T -linear morphism:

$$\tau : u^*(T_{U/k}) \rightarrow g_{s*}(v^*(T_{V/k})).$$

We have a canonical τ -equivariant morphism $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)} \rightarrow g_{s*}(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(V,\mathfrak{Z},v)})$ of T_{zar} defined for every local section $h : \mathfrak{W}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)}$ by

$$(11.8.1) \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)} \rightarrow g_{s*}(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(V,\mathfrak{Z},v)}) \quad h \mapsto h \circ g_2|_{g_2^{-1}(\mathfrak{W}_2)}.$$

By adjunction, we obtain a $g_s^{-1}(u^*(T_{U/k}))$ -equivariant morphism of Z_{zar} :

$$(11.8.2) \quad \gamma_g : g_s^*(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)}) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},(V,\mathfrak{Z},v)}.$$

By ([17] III 1.4.6(iii)), we deduce a $v^*(T_{V/k})$ -equivariant isomorphism of Z_{zar} (9.8):

$$(11.8.3) \quad g_s^+(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},(V,\mathfrak{Z},v)}.$$

One verifies that the data $\{u_*(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)}), \gamma_g\}$ satisfy the compatibility conditions of 7.8. Then it defines a sheaf of $\tilde{\mathcal{E}}$ that we denote by $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ (7.11). We set $\mathcal{I}_{X/k} = v^*(T_{X/k})$ (11.2.2, 11.4). In view of 11.7 and (11.8.2), $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ is a $\mathcal{I}_{X/k}$ -torsor of $\tilde{\mathcal{E}}$.

Proposition 11.9. (i) *There exists a quasi-coherent crystal $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$ such that:*

- (a) *For every object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} , $\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}$ (8.11) is the sheaf of affine functions on the $u^*(T_{U/k})$ -torsor $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)}$ of T_{zar} (9.5).*
- (b) *For every morphism $g : (V, \mathfrak{Z}) \rightarrow (U, \mathfrak{T})$ of \mathcal{E} , any affine function $l : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)} \rightarrow \mathcal{O}_T$ and any section $h \in \mathcal{R}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T},u)}(T)$, the transition morphism $c_g : g_s^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X},(V,\mathfrak{Z})}$ (8.11) sends $g_s^*(l)$ to an affine function $l' : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},(V,\mathfrak{Z},v)} \rightarrow \mathcal{O}_Z$ such that*

$$(11.9.1) \quad l'(h \circ g_2) = g_s^*(l(h)) \in \mathcal{O}_Z.$$

- (ii) *We have an exact sequence of crystals (11.2.2):*

$$(11.9.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E},1} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} \rightarrow v^*(\Omega_{X/k}^1) \rightarrow 0.$$

Proof. (i) For any object (U, \mathfrak{T}, u) of \mathcal{E} , we define $\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}$ as in (i). Recall (9.5.3) that we have an exact sequence of \mathcal{O}_T -modules of T_{zar}

$$(11.9.3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_T \xrightarrow{c} \mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})} \xrightarrow{\omega} u^*(\Omega_{U/k}^1) \rightarrow 0.$$

For any morphism $g : (V, \mathfrak{Z}) \rightarrow (U, \mathfrak{T})$ of \mathcal{E} , by (9.8.4) and (11.8.3), we obtain an \mathcal{O}_Z -linear isomorphism

$$(11.9.4) \quad c_g : g_s^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X},(V,\mathfrak{Z})}$$

which fits into a commutative diagram (9.8.5)

$$(11.9.5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & g_s^*(\mathcal{O}_T) & \longrightarrow & g_s^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}) & \xrightarrow{\omega} & g_s^*(u^*(\Omega_{U/k}^1)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow c_g & & \downarrow \wr & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\mathfrak{X},(V,\mathfrak{Z})} & \xrightarrow{\omega} & v^*(\Omega_{V/k}^1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

In view of the compatibility conditions of γ_g (11.8.2) and ([2] II 4.15), the data $\{\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}, c_g\}$ satisfy the compatibility conditions of 8.4. Hence, they define a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$ that we denote by $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$. The equality (11.9.1) follows from (9.8.2) and (11.8.1).

The assertion (ii) follows from 11.3 and the diagram (11.9.5).

11.10. For any object (U, \mathfrak{T}) of \mathcal{E} , $\{S^n(\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})})\}_{n \geq 0}$ form an inductive system (9.5). We denote its inductive limit by $\mathcal{B}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}$ which is an \mathcal{O}_T -algebra of T_{zar} . Since the inverse image functor commutes with inductive limits, for any morphism $g : (V, \mathfrak{Z}) \rightarrow (U, \mathfrak{T})$ of \mathcal{E} , the isomorphism c_g (11.9.4) induces an isomorphism of \mathcal{O}_Z -algebras

$$(11.10.1) \quad b_g : g_s^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\mathfrak{X},(V,\mathfrak{Z})}.$$

Then the data $\{\mathcal{B}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}, b_g\}$ defines a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}$ -algebras of $\tilde{\mathcal{E}}$ (8.6) that we denote by $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$.

11.11. We set $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{F}_{\mathfrak{X},(X,\mathfrak{x})}$ and $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{B}_{\mathfrak{X},(X,\mathfrak{x})}$. Then we obtain an $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification $\varepsilon_{\mathcal{F}}$ on $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\varepsilon_{\mathcal{B}}$ on $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$) and a $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -module structure $\psi_{\mathcal{F}}$ on $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\psi_{\mathcal{B}}$ on $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$).

On the other hand, $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ being the sheaf of affine functions on the $T_{X/k}$ -torsor $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(X,\mathfrak{x})}$, $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$) is equipped by 9.6 with a $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -module structure that we denote by $\kappa_{\mathcal{F}}$ (resp. $\kappa_{\mathcal{B}}$).

Recall that we have an exact sequence (11.9.3)

$$(11.11.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \Omega_{X/k}^1 \rightarrow 0.$$

The element $\text{id}_{\mathfrak{x}_2} : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},(X,\mathfrak{x})}(X)$ induces a canonical splitting

$$(11.11.2) \quad s_{\text{id}} : \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/k}^1, \quad l \mapsto (l(\text{id}), \omega(l)).$$

Then it induces an isomorphism of \mathcal{O}_X -algebras

$$(11.11.3) \quad \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} S(\Omega_{X/k}^1).$$

By 9.7, the isomorphism s_{id} (11.11.2) (resp. (11.11.3)) is compatible with the action $\kappa_{\mathcal{F}}$ (resp. $\kappa_{\mathcal{B}}$) and the canonical action of $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ on $\mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/k}^1$ (resp. $S(\Omega_{X/k}^1)$) (9.3).

Proposition 11.12. *Assume that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \text{Spf}(W\{T_1, \dots, T_d\})$. We take again the notation of 10.11.*

(i) *If l is a section of $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ such that $\omega(l) = 0$ (11.11.2), then $\varepsilon_{\mathcal{F}}(1 \otimes l) = l \otimes 1$.*

(ii) *For $1 \leq i \leq d$, let l_i be the section of $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ such that $l_i(\text{id}) = 0$ and $\omega(l_i) = dt_i$. Then $\varepsilon_{\mathcal{F}}(1 \otimes l_i) = l_i \otimes 1 - 1 \otimes \zeta_i$.*

Proof. Assertion (i) follows from 11.4 and 11.9(ii).

(ii) We denote by $q_s : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \rightarrow X$ the canonical morphism. The canonical morphisms $q_{1,2}, q_{2,2} : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},2} \rightarrow \mathfrak{X}_2 \in \mathcal{R}_{\mathfrak{X},(X,\mathcal{R}_{\mathfrak{X},q_s})}(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1})$ induce two splittings of $\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(X,\mathcal{R}_{\mathfrak{X},q_s})}$ (11.9.3)

$$(11.12.1) \quad s_{q_1} : q_{s*}(\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(X,\mathcal{R}_{\mathfrak{X},q_s})}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \oplus (\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1) \quad f \mapsto (f(q_1), \omega(f))$$

$$(11.12.2) \quad s_{q_2} : q_{s*}(\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(X,\mathcal{R}_{\mathfrak{X},q_s})}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \oplus (\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1) \quad f \mapsto (f(q_2), \omega(f)).$$

We identify $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \oplus (\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1)$ with $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ by $\text{id}_{\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}} \otimes s_{\text{id}}$ (11.11.2). In view of (11.9.1) and (11.9.5), the morphism s_{q_i} is inverse to $q_{s*}(c_{q_i})$ for $i = 1, 2$. Then, the $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification ε on $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ is given by the composition of the inverse of s_{q_2} and s_{q_1} .

We denote by f the local section $s_{q_2}^{-1}(1 \otimes l_i)$ of $q_{s*}(\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(X,\mathcal{R}_{\mathfrak{X},q_s})})$. Then we have $f(q_2) = 0$ and $\omega(f) = 1 \otimes dt_i$. To show the assertion, it suffices to prove that $f(q_1) = -\zeta_i \otimes 1$. The morphisms q_1, q_2 are induced by two homomorphisms

$$(11.12.3) \quad \iota_1 : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_2} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},2}, \quad \iota_2 : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_2} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},2}$$

such that ι_1 is equal to ι_2 modulo p . Then they define a W_2 -derivation

$$(11.12.4) \quad D = \iota_2 - \iota_1 : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_2} \rightarrow p\mathcal{R}_{\mathfrak{X},2}.$$

We denote by

$$(11.12.5) \quad \phi : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1 \rightarrow p\mathcal{R}_{\mathfrak{X},2}$$

the $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ -linear morphism associated to D . Then we have

$$\phi(1 \otimes dt_i) = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 = p \left(\frac{\xi_i}{p} \right) \in p\mathcal{R}_{\mathfrak{X},2}.$$

Identifying $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1, p\mathcal{R}_{\mathfrak{X},2}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} T_{X/k}$, we consider ϕ as a section of $q_s^*(T_{X/k})$. Then we have $q_2 = q_1 + \phi \in \mathcal{R}_{\mathfrak{X},q_s}(R_{\mathfrak{X},1})$ and we deduce that (9.5(ii))

$$\begin{aligned} f(q_1) &= f(q_2 - \phi) \\ &= -\omega(f)(\phi) \\ &= -\zeta_i \otimes 1 \end{aligned}$$

The proposition follows.

Corollary 11.13. *The $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -actions $\psi_{\mathcal{F}}$ and $\kappa_{\mathcal{F}}$ on $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\psi_{\mathcal{B}}$ and $\kappa_{\mathcal{B}}$ on $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$) satisfy $\psi_{\mathcal{F}} = \iota^*(\kappa_{\mathcal{F}})$ (resp. $\psi_{\mathcal{B}} = \iota^*(\kappa_{\mathcal{B}})$), where $\iota : \widehat{\Gamma}(T_{X/k}) \rightarrow \widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ denotes the involution homomorphism (9.28.2).*

Proof. The question being local, we take again the assumptions and notation of 11.12. Let $\partial_i \in T_{X/k}(X)$ be the dual of dt_i . In view of (10.20.3) and 11.12(ii), the action of $\psi_{\mathcal{F},\partial_i}$ on $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ sends l_i to -1 . We equip $\mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/k}^1$ (resp. $S(\Omega_{X/k}^1)$) with the canonical action of $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ (9.3). The isomorphism sid (11.11.2) (resp. (11.11.3)) sends l_i to dt_i and induces an isomorphism of $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -modules

$$(11.13.1) \quad (\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\sim} \iota^*(\mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/k}^1) \quad (\text{resp. } ((\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\mathcal{B}}) \xrightarrow{\sim} \iota^*(S(\Omega_{X/k}^1))).$$

Then the assertion follows from 11.11.

Lemma 11.14. *We denote by ε_R^+ (resp. ε_R^-) the $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification on $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ associated to the $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -action $\kappa_{\mathcal{B}}$ (resp. $\psi_{\mathcal{B}}$) on $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ via the isomorphisms of \mathcal{O}_X -algebras $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} S(\Omega_{X/k}^1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ (10.12, 11.11.3)*

- (i) *For any local section r of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$, we have $\varepsilon_R^+(1 \otimes r) = \delta(r)$ (10.11).*
- (ii) *For any local section r of $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$, we have $\varepsilon_R^-(\delta(r)) = r \otimes 1$.*

Proof. The question being local, we take again the assumption and the notation of 11.12. Then for $1 \leq i \leq d$, l_i is sent to ζ_i by the isomorphism $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$. Since ε_R^+ , ε_R^- and δ are homomorphisms, it suffices to verify the assertion for the local sections ζ_i . By 11.12(ii) and 11.13(i), we have

$$(11.14.1) \quad \varepsilon_R^-(1 \otimes \zeta_i) = \zeta_i \otimes 1 - 1 \otimes \zeta_i, \quad \varepsilon_R^+(1 \otimes \zeta_i) = \zeta_i \otimes 1 + 1 \otimes \zeta_i$$

Then, the assertion (i) follows from 10.11. The assertion (ii) follows from the relations

$$\varepsilon_R^-(\delta(\zeta_i)) = \varepsilon_R^-(1 \otimes \zeta_i + \zeta_i \otimes 1) = (\zeta_i \otimes 1 - 1 \otimes \zeta_i) + 1 \otimes \zeta_i = \zeta_i \otimes 1.$$

Proposition 11.15 ([34] 1.5.3). *Let M be a quasi-nilpotent $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -module, ε the associated $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification on M (10.20). We denote by M_0 the underlying \mathcal{O}_X -module of M equipped with the $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -module structure defined by the zero PD-Higgs field. Then the stratification $\varepsilon : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1} \otimes_{\mathcal{O}_X} M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$ induces two isomorphisms of $\widehat{\Gamma}(T_{X/k})$ -modules (9.21.2)*

- (i) $(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\mathcal{B}}) \otimes_{\mathcal{O}_X} M_0 \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\mathcal{B}}),$
- (ii) $(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\mathcal{B}}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \iota^*(M) \xrightarrow{\sim} M_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\mathcal{B}}).$

Proof. We take again the notation of 11.14. To simplify the notation, we write \mathcal{R} for $\mathcal{R}_{\mathfrak{X},1}$. The $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification on M_0 is the identity morphism $\text{id}_{\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} M} : \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} M \rightarrow \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} M$ (cf. the proof of 11.4). We denote by θ_0 (resp. θ) the morphism $M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}$ defined by $m \mapsto m \otimes 1$ (resp. $m \mapsto \varepsilon(1 \otimes m)$) for every local section m of M .

(i) Since the action $\psi_{\mathcal{B}}$ on $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ is compatible with the ring structure of $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$, it suffices to show that $\theta : M_0 \rightarrow M \otimes (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\mathcal{B}})$ is $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X/k})$ -equivariant. In view of (5.5.2), it suffices to prove that the following diagram is commutative

$$(11.15.1) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_0} & M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \otimes \text{id}_{\mathcal{R}} \\ M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} & \xrightarrow{\theta \otimes \text{id}_{\mathcal{R}}} & M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \varepsilon_{\mathcal{R}}^-} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \end{array}$$

By condition (ii) of 5.7, the composition

$$(11.15.2) \quad M \xrightarrow{\theta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \xrightarrow{\theta \otimes \text{id}_{\mathcal{R}}} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \varepsilon_{\mathcal{R}}^-} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}.$$

in the above diagram is equal to the composition

$$(11.15.3) \quad M \xrightarrow{\theta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \delta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \varepsilon_{\mathcal{R}}^-} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}.$$

By 11.14(ii), the above composition is equal to the composition

$$(11.15.4) \quad M \xrightarrow{\theta_0} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \xrightarrow{\theta \otimes \text{id}_{\mathcal{R}}} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}.$$

The assertion follows.

(ii) By 11.13(i), it suffices to show that the morphism $(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}, \kappa) \otimes_{\mathcal{O}_X} M \rightarrow M_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}, \kappa_{\mathcal{B}})$ is $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X/k})$ -equivariant. Similarly to (i), by (5.5.2), it suffices to prove that the following diagram is commutative

$$(11.15.5) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta} & M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \otimes \text{id}_{\mathcal{R}} \\ M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} & \xrightarrow{\theta_0 \otimes \text{id}_{\mathcal{R}}} & M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \varepsilon_{\mathcal{R}}^+} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \end{array}$$

By condition (ii) of 5.7, the composition

$$(11.15.6) \quad M \xrightarrow{\theta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \xrightarrow{\theta \otimes \text{id}_{\mathcal{R}}} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}$$

in the above diagram is equal to the composition

$$(11.15.7) \quad M \xrightarrow{\theta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \delta} M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}.$$

The assertion follows from 11.14(i).

11.16. Let $C_{X/\mathcal{I}} : \widetilde{\mathcal{E}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}'}$ be the morphism of topoi (7.21.1). We put $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} = C_{X/\mathcal{I}}^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}'})$ (11.8). For any object (U, \mathfrak{T}, u) of $\widetilde{\mathcal{E}}$, we set $\phi_{T/k} = u' \circ f_{T/k} : T \rightarrow \mathbb{T}' \rightarrow U'$ so we have $\rho(U, \mathfrak{T}, u) = (U', \mathfrak{T}, \phi_{T/k})$ (7.4.2). By 7.21, the descent data of the sheaf $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ of $\widetilde{\mathcal{E}}$ is $\{u_*(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}'}, (U', \mathfrak{T}, \phi_{T/k})), \gamma_{\rho(g)}\}$ (7.8, 11.7, 11.8).

We put $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = C_{X/\mathcal{I}}^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'})$ and $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} = C_{X/\mathcal{I}}^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}'})$. For any object (U, \mathfrak{T}, u) of $\widetilde{\mathcal{E}}$, we have (8.11.2)

$$(11.16.1) \quad \mathcal{F}_{\mathfrak{X}, (U, \mathfrak{T}, u)} = \mathcal{F}_{\mathfrak{X}', (U', \mathfrak{T}, \phi_{T/k})}, \quad \mathcal{B}_{\mathfrak{X}, (U, \mathfrak{T}, u)} = \mathcal{B}_{\mathfrak{X}', (U', \mathfrak{T}, \phi_{T/k})}.$$

The linearised descent data of the quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{E}},1}$ -modules $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{E}},1}$ -algebras $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$) of $\widetilde{\mathcal{E}}$ is $\{\mathcal{F}_{\mathfrak{X}', (U', \mathfrak{T}, \phi_{T/k})}, c_{\rho(g)}\}$ (resp. $\{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}', (U', \mathfrak{T}, \phi_{T/k})}, c_{\rho(g)}\}$) (7.21, 8.4, 11.9).

We set $\underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{x}} = \underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{x},(X,\mathfrak{x})}$ and $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}} = \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x},(X,\mathfrak{x})}$. By 10.21, these \mathcal{O}_X -modules are equipped with $D_{X/k}^\gamma$ -module structures that we denote by $(\nabla_{\underline{\mathcal{F}}}, \psi_{\underline{\mathcal{F}}})$ (resp. $(\nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}})$).

11.17. Let \mathcal{M}' be a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}'$, $(M', \theta'_{M'})$ the associated $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -module, $\mathcal{M}'_0 = \nu^*(M')$ (11.3), $\mathcal{N} = C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}')$ and (N, ∇_N, ψ_N) the associated $D_{X/k}^\gamma$ -module. By 10.21, 11.4 and 11.15(i), we have an isomorphism of crystals of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}'$

$$(11.17.1) \quad \mathcal{B}_{\mathfrak{x}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}} \mathcal{M}'_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}} \mathcal{B}_{\mathfrak{x}'}$$

Applying $C_{X/\mathcal{S}}^*$, we obtain an isomorphism of crystals of $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}$:

$$(11.17.2) \quad \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}} \otimes_{\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},1}} C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}'_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},1}} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}}$$

By 11.6, we deduce an isomorphism of $D_{X/k}^\gamma$ -modules

$$(11.17.3) \quad \lambda : \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}} \otimes_{\mathcal{O}_X} F_{X/k}^*(M') \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}}$$

where the $D_{X/k}^\gamma$ -action on the left hand side is induced by $(\nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}})$ on $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}}$ and $(\nabla_{\text{can}}, 0)$ on $F_{X/k}^*(M')$ (9.27), that we still denote by $(\nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}})$; and the $D_{X/k}^\gamma$ -action on the right hand side is induced by (∇_N, ψ_N) on N and $(\nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}})$, that we denote by $(\nabla_{\text{tot}}, \psi_{\text{tot}})$.

The $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -module structures $\psi_{\underline{\mathcal{B}}}$ on $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}}$ and $\theta_{M'}$ on M' define a $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -module structure on $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}} \otimes_{\mathcal{O}_X} M'$ (9.21), that we denote by θ_{tot} . On the other hand, the zero PD-Higgs field on N and the action of $\psi_{\underline{\mathcal{B}}}$ on $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}}$ define a $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -module structure on $N \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}}$, that we still denote by $\psi_{\underline{\mathcal{B}}}$.

Theorem 11.18. *Let \mathcal{M}' be a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}$ -modules of $\tilde{\mathcal{E}}'$, $(M', \theta'_{M'})$ the associated $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -module, $\mathcal{N} = C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}')$ and (N, ∇_N, ψ_N) the associated $D_{X/k}^\gamma$ -module. Then, the isomorphism (11.17.3)*

$$(11.18.1) \quad \lambda : (\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}} \otimes_{\mathcal{O}_X} M', (\nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}}), \theta_{\text{tot}}) \xrightarrow{\sim} (N \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}}, (\nabla_{\text{tot}}, \psi_{\text{tot}}), \psi_{\underline{\mathcal{B}}})$$

is compatible with the $D_{X/k}^\gamma$ -actions and the $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -actions defined on both sides in 11.17.

Proof. We only need to prove the compatibility of the $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -actions. Let $\varepsilon' : \mathcal{B}_{\mathfrak{x}'} \otimes_{\mathcal{O}_X} M' \xrightarrow{\sim} M' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_{\mathfrak{x}'}$ be the $\mathcal{R}_{\mathfrak{x}'}$ -stratification on M' (11.15), and $\psi_{\mathcal{B}'}$ the $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -action on $\mathcal{B}_{\mathfrak{x}'}$ defined in 11.11. The question is local. Since the Cartier transform is compatible with localisation (8.16.2), we can suppose that there exists a lifting $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X . Then it induces a morphism $F : (X', \mathfrak{X}', F_{X'/k}) \rightarrow (X, \mathfrak{X}, F_{X/k})$ of \mathcal{E}' . The isomorphisms (11.17.1), (11.17.2) and the transition morphisms η_F associated to F (8.21.4) induce a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} F_{X/k}^*((\mathcal{B}_{\mathfrak{x}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}} \mathcal{M}'_0)_{(X', \mathfrak{X}')}) & \xrightarrow{\sim} & F_{X/k}^*((\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}} \mathcal{B}_{\mathfrak{x}'})_{(X', \mathfrak{X}')}) \\ \eta_F \downarrow & & \downarrow \eta_F \\ (\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}} \otimes_{\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},1}} C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}'_0))_{(X, \mathfrak{X})} & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}},1}} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}})_{(X, \mathfrak{X})} \end{array}$$

Then we deduce a commutative diagram

$$(11.18.2) \quad \begin{array}{ccc} F_{X/k}^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{x}'} \otimes_{\mathcal{O}_X} M') & \xrightarrow{F_{X/k}^*(\varepsilon')} & F_{X/k}^*(M' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_{\mathfrak{x}'}) \\ \eta_F \downarrow & & \downarrow \eta_F \\ \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}} \otimes_{\mathcal{O}_X} M' & \xrightarrow{\lambda} & N \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}} \end{array}$$

By 10.22, the isomorphism $\eta_F : F_{X/k}^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{x}'}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}}$ underlies an isomorphism of $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ -modules

$$(11.18.3) \quad F_{X/k}^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{x}'}, \iota^*(\psi_{\mathcal{B}'})) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{x}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}}).$$

By 11.15(ii), the isomorphism $F_{X/k}^*(\varepsilon')$ is compatible with actions of $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$:

$$(11.18.4) \quad F_{X/k}^*(\varepsilon') : F_{X/k}^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M', \psi_{\mathcal{B}'} \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \iota^*(\theta_{M'})) \xrightarrow{\sim} F_{X/k}^*(M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}'}, \text{id} \otimes \psi_{\mathcal{B}'}).$$

Then the assertion follows from (11.18.2), (11.18.3) and (11.18.4).

Remark 11.19. The above theorem is an analogue of a result of Ogus–Vologodsky ([33], 2.23).

Lemma 11.20. *Keep the notation of 11.17.*

(i) *The actions $(\nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}})$ of $D_{X/k}^\gamma$ and θ_{tot} of $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ on $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M'$ commute with each other.*

(ii) *The actions $(\nabla_{\text{tot}}, \psi_{\text{tot}})$ of $D_{X/k}^\gamma$ and $\psi_{\underline{\mathcal{B}}}$ of $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ on $N \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}$ commute with each other.*

Proof. (i) By the formula (9.21.1), one verifies that the action $\psi_{\underline{\mathcal{B}}}$ of $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}) \subset D_{X/k}^\gamma$ and the action θ_{tot} of $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ on $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M'$ commute with each other. For any local sections D of $\mathbb{T}_{X/k}$, ξ' of $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$, b of $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}$ and m of M' , by 9.21.1, we have

$$\begin{aligned} \nabla_{\underline{\mathcal{B}}, D}(\theta_{\text{tot}, \xi'}(b \otimes m)) &= \nabla_{\underline{\mathcal{B}}, D}(\psi_{\underline{\mathcal{B}}, \xi'}(b)) \otimes m + \nabla_{\underline{\mathcal{B}}, D}(b) \otimes \theta_{M', \xi'}(m) \\ &= \psi_{\underline{\mathcal{B}}, \xi'}(\nabla_{\underline{\mathcal{B}}, D}(b)) \otimes m + \nabla_{\underline{\mathcal{B}}, D}(b) \otimes \theta_{M', \xi'}(m) \\ &= \theta_{\text{tot}, \xi'}(\nabla_{\underline{\mathcal{B}}, D}(b \otimes m)) \end{aligned}$$

Since $D_{X/k}^\gamma$ is generated by $\mathbb{T}_{X/k}$ and $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$, the assertion follows.

The assertion (ii) follows from (i) and 11.18.

11.21. Let (H, θ) (resp. (H, ∇, ψ)) be a $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X/k})$ -module (resp. a $D_{X/k}^\gamma$ -module). We define its $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X/k})$ invariants (resp. $D_{X/k}^\gamma$ invariants) by

$$(11.21.1) \quad H^\theta = \mathcal{H}om_{\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X/k})}((\mathcal{O}_X, 0), H) \quad (\text{resp. } H^{(\nabla, \psi)} = \mathcal{H}om_{D_{X/k}^\gamma}((\mathcal{O}_X, d, 0), H)).$$

Lemma 11.22. *Keep the notation of 11.17 and suppose that \mathcal{M}' is quasi-coherent. The canonical homomorphism of crystals $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{E}}, 1} \rightarrow \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}$ induces an isomorphism of \mathcal{O}_X -modules (resp. $\mathcal{O}_{X'}$ -modules)*

$$N \xrightarrow{\sim} (N \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}})^{\psi_{\underline{\mathcal{B}}}}, \quad (\text{resp. } M' \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M')^{(\nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}})}).$$

Proof. The assertion in lemma being local, we may assume that there exists a lifting $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X . By 10.22 and (11.13.1), we have isomorphisms of $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ -modules

$$\begin{aligned} \eta_F : F_{X/k}^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M', \iota^*(\psi_{\mathcal{B}'}) \otimes \text{id}) &\xrightarrow{\sim} (N \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}}) \\ \text{S}(\Omega_{X/k}^1) \otimes_{\mathcal{O}_X} F_{X/k}^*(M') &\xrightarrow{\sim} F_{X/k}^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M', \iota^*(\psi_{\mathcal{B}'}) \otimes \text{id}) \end{aligned}$$

where $\text{S}(\Omega_{X/k}^1)$ is equipped with the canonical action of $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X/k})$. A local section u of $\text{S}(\Omega_{X/k}^1) \otimes_{\mathcal{O}_X} F_{X/k}^*(M')$ can be written as a finite sum

$$(11.22.1) \quad u = \sum_{i=0}^m \omega_i \otimes u_i$$

with $u_i \in F_{X/k}^*(M')$ and $\omega_i \in \text{S}^i(\Omega)$. In view of the perfect pairing $\Gamma_i(\mathbb{T}_{X/k}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{S}^i(\Omega_{X/k}^1) \rightarrow \mathcal{O}_X$ (9.3.1) for $i \geq 1$, the action of $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X/k})$ on u is trivial if and only if $u_i = 0$ for $i \geq 1$, i.e. u belongs to the submodule $F_{X/k}^*(M')$ of $F_{X/k}^*(M') \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{S}(\Omega)$. The first isomorphism follows.

Equipped with the Frobenius descent connection ∇_{can} on $F_{X/k}^*(M')$, we have an injection of $D_{X/k}^\gamma$ -modules $(F_{X/k}^*(M'), \nabla_{\text{can}}, 0) \rightarrow (\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M', \nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}})$ and a canonical $\mathcal{O}_{X'}$ -linear isomorphism ([21] 5.1)

$$(11.22.2) \quad M' \xrightarrow{\sim} F_{X/k}^*(M')^{(\nabla_{\text{can}}, 0)}.$$

In view of the first isomorphism, we deduce that $(\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M')^{(\nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}})}$ is contained in the image of $F_{X/k}^*(M')$ in $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M'$. Then the second isomorphism follows from (11.22.2).

Proposition 11.23. *Keep the notation of 11.17 and suppose that \mathcal{M}' is quasi-coherent. The isomorphism (11.18.1) induces*

(i) *a canonical isomorphism of $D_{X/k}^\gamma$ -modules*

$$(\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} M', \nabla_{\underline{\mathcal{B}}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}})^{\theta_{\text{tot}}} \xrightarrow{\sim} (N, \nabla_N, \psi_N);$$

(ii) *a canonical isomorphism of $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -modules*

$$(M', \theta_{M'}) \xrightarrow{\sim} (N \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\underline{\mathcal{B}}})^{(\nabla_{\text{tot}}, \psi_{\text{tot}})}.$$

Proof. By taking $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ invariants (resp. $D_{X/k}^\gamma$ invariants) (11.21) for the isomorphism (11.18.1), assertion (i) (resp. (ii)) follows from 11.20 and 11.22.

11.24. The \mathcal{O}_X -module $\underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}}$ is the sheaf of affine functions on the $F_{X/k}^*(\mathbb{T}_{X'/k})$ -torsor $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}', (X', \mathfrak{X}, F_{X/k})}$ of X_{zar} . By 9.6 and (9.4.2), the \mathcal{O}_X -module $\underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}}$ (resp. \mathcal{O}_X -algebra $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}$) is equipped with a $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ -module structure that we denote by $\vartheta_{\underline{\mathcal{F}}}$ (resp. $\vartheta_{\underline{\mathcal{B}}}$).

Lemma 11.25 (cf. 9.18). *The two $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ -module structures $\psi_{\underline{\mathcal{F}}}$ and $\vartheta_{\underline{\mathcal{F}}}$ on $\underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}}$ (11.16) (resp. $\psi_{\underline{\mathcal{B}}}$ and $\vartheta_{\underline{\mathcal{B}}}$ on $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}$) coincide.*

Proof. It suffices to show the assertion for $\underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}}$. We have $\underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{F}_{\mathfrak{X}', (X', \mathfrak{X}, F_{X/k})}$.

The question being local, we can reduce to case where there exists an \mathcal{S} -morphism $F: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ which lifts the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X . Then we obtain a morphism $F: (X', \mathfrak{X}, F_{X/k}) \rightarrow (X', \mathfrak{X}')$ of \mathcal{E}' and an isomorphism (11.9.4)

$$(11.25.1) \quad \eta_F: F_{X/k}^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}}.$$

Let $\psi_{\mathcal{F}'}$ be the $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -module structure on $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'}$ induced by the crystal $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'}$. By 10.22, the isomorphism $\eta_F: F_{X/k}^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}}$ underlies an isomorphism of $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ -modules

$$(11.25.2) \quad \eta_F: F_{X/k}^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'}, \iota^*(\psi_{\mathcal{F}'})) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}}, \psi_{\underline{\mathcal{F}}}).$$

On the other hand, regarding $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'}$ as a sheaf of affine functions, the $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ -action on $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'}$ defined in 9.6 is equal to $\iota^*(\psi_{\mathcal{F}'})$ (11.13). By 9.8, η_F induces an isomorphism of $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k}))$ -modules

$$(11.25.3) \quad \eta_F: F_{X/k}^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'}, \iota^*(\psi_{\mathcal{F}'})) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}}, \vartheta_{\underline{\mathcal{F}}}).$$

The assertion follows.

11.26. In the following, we compare the Cartier transform $C_{X/\mathcal{S}}^*$ and the Cartier transform of Ogus–Vologodsky (9.29). Let $\text{Cris}(X/k)$ (resp. $(X/k)_{\text{crys}}$) be the crystalline site (resp. topos) of X over k with the PD-ideal 0. Using the W_2 -lifting \mathfrak{X}'_2 of X' , Ogus and Vologodsky constructed a torsor $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}'_2}$ of $(X/k)_{\text{crys}}$ (9.16). We denote by $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2}$ the crystal of affine functions on $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}'_2}$ of $(X/k)_{\text{crys}}$ and by $\mathcal{A}_{\mathfrak{X}'_2}$ the quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{X/k}$ -algebras associated to $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2}$ (9.17). We put $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2} = \mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2, (X, X)}$ and $\mathcal{A}_{\mathfrak{X}'_2} = \mathcal{A}_{\mathfrak{X}'_2, (X, X)}$ which are equipped with $D_{X/k}$ -module structures. Moreover, this $D_{X/k}$ -module structure extends to a $D_{X/k}^\gamma$ -module structure on $\mathcal{A}_{\mathfrak{X}'_2}$ (9.28). The $D_{X/k}^\gamma$ -module $(\mathcal{A}_{\mathfrak{X}'_2})^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}_{\mathfrak{X}'_2}, \mathcal{O}_X)$ is a splitting module for the Azumaya algebra $F_{X/k^*}(D_{X/k}^\gamma)$ over $\widehat{\Gamma}(\mathbb{T}_{X'/k})$ (9.29(i)). Then one deduces an equivalence of tensor categories (9.29(ii))

$$(11.26.1) \quad C_{\mathfrak{X}'_2}^*: \text{MIC}_\gamma^{\text{qn}}(X/k) \xrightarrow{\sim} \text{HIG}_\gamma^{\text{qn}}(X'/k), \quad N \mapsto \iota^*(\mathcal{H}om_{D_{X/k}^\gamma}((\mathcal{A}_{\mathfrak{X}'_2})^\vee, N)).$$

11.27. Let (U, T, δ) be an object of $\text{Cris}(X/k)$ such that there exists a flat formal \mathcal{S} -scheme \mathfrak{T} with special fiber T . Recall (9.12) that the morphism $U \rightarrow T$ induces an isomorphism $U \xrightarrow{\sim} \underline{T}$. Then we obtain an object (U, \mathfrak{T}) of \mathcal{E} . The morphism $\varphi_{T/k}: T \rightarrow X'$ (9.12.1) is the same as the composition $T \xrightarrow{\phi_{T/k}} U' \rightarrow X'$ (11.16). Moreover, the $\varphi_{T/k}^*(\mathbb{T}_{X'/k})$ -torsor $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}'_2, \varphi_{T/k}}$ of T_{zar} (9.15) is the same as the $\phi_{T/k}^*(\mathbb{T}_{U'/k})$ -torsor

$\mathcal{R}_{\mathfrak{X}',(U',\mathfrak{T},\phi_{T/k})}$ of T_{zar} (11.8). Recall that $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2,(U,T)}$ is the sheaf of affine functions on $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}'_2,\varphi_{T/k}}$. By (11.16.1), we deduce a canonical isomorphism of \mathcal{O}_T -modules

$$(11.27.1) \quad \mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2,(U,T)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U,\mathfrak{T})}.$$

Let $g : (U_1, T_1, \delta_1) \rightarrow (U_2, T_2, \delta_2)$ be a morphism of $\text{Cris}(X/k)$. Suppose that there exists an \mathcal{S} -morphism $\mathbf{g} : \mathfrak{T}_1 \rightarrow \mathfrak{T}_2$ of flat formal \mathcal{S} -schemes with special fiber $g : T_1 \rightarrow T_2$. Then we obtain a morphism $\mathbf{g} : (U_1, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (U_2, \mathfrak{T}_2)$ of \mathcal{E} . In view of 9.16(ii), the transition morphism of the crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}$ -modules $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ of \mathcal{E} associated to \mathbf{g} (11.9.4, 11.16)

$$(11.27.2) \quad c_{\mathbf{g}} : g^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U_2,\mathfrak{T}_2)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X},(U_1,\mathfrak{T}_1)}$$

is compatible with the transition morphism of the crystal $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2}$ of $\mathcal{O}_{X/k}$ -modules associated to g (9.9.2)

$$(11.27.3) \quad c_g : g^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2,(U_2,T_2)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2,(U_1,T_1)}.$$

Lemma 11.28. *The isomorphism $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ (11.27.1) is compatible with the actions of $D_{X/k}$.*

Proof. The object $(X, P_{\mathfrak{X}})$ of \mathcal{E} lifts the object (X, P_X) of $\text{Cris}(X/k)$. The canonical morphisms $q_1, q_2 : (X, P_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X, \mathfrak{X})$ of \mathcal{E} lift the canonical morphisms $p_1, p_2 : (X, P_X) \rightarrow (X, X)$ of $\text{Cris}(X/k)$. Recall (8.22.2) that the $\mathcal{Q}_{\mathfrak{X},1}$ -stratification on $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ induces a \mathcal{P}_X -stratification on $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ which is given by the isomorphisms

$$(11.28.1) \quad c_{q_1} : q_{1,s}^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X},(X,P_{\mathfrak{X}})}, \quad c_{q_2} : q_{2,s}^*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X},(X,P_{\mathfrak{X}})}.$$

In view of 11.27, the isomorphism $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ is compatible with \mathcal{P}_X -stratifications. Then the assertion follows.

Corollary 11.29. *The isomorphism $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ induces a canonical isomorphism of \mathcal{O}_X -algebras $\mathcal{A}_{\mathfrak{X}'_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ compatible with the actions of $D_{X/k}^{\gamma}$.*

By 11.28, we obtain an isomorphism $\mathcal{A}_{\mathfrak{X}'_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ compatible with actions of $D_{X/k}$. By 9.28 and 11.25, this isomorphism is compatible with actions of $F_{X/k}^*(\widehat{\Gamma}(T_{X'/k}))$. Then the assertion follows.

Theorem 11.30. *Let \mathfrak{X} be a smooth formal \mathcal{S} -scheme and X its special fiber. The following diagram is commutative up to a canonical isomorphism*

$$(11.30.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}) & \xrightarrow{C_{X/\mathcal{S}*}} & \mathcal{C}^{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{MIC}_{\gamma}^{\text{qn}}(X/k) & \xrightarrow{C_{\mathfrak{X}'_2}} & \text{HIG}_{\gamma}^{\text{qn}}(X/k) \end{array}$$

where $C_{X/\mathcal{S}*}$ is the direct image functor of the morphism of topoi $C_{X/\mathcal{S}}$ (8.13), which depends only on X , and the vertical functors are defined in 10.21 and depend on \mathfrak{X} .

Proof. Let \mathcal{N} be a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1}$ -modules of \mathcal{E} , N the associated $D_{X/k}^{\gamma}$ -module, $\mathcal{M}' = C_{X/\mathcal{S}*}(\mathcal{N})$ and M' the associated $\widehat{\Gamma}(T_{X'/k})$ -module. By 8.13, we have a canonical isomorphism $C_{X/\mathcal{S}}^*(\mathcal{M}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}$. The $D_{X/k}^{\gamma}$ -module structure $(\nabla_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}}, \psi_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}})$ on $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ induces a $D_{X/k}^{\gamma}$ -module structure on its dual $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ (9.27). By (11.26.1) and 11.29, we have a canonical isomorphism of $\widehat{\Gamma}(T_{X'/k})$ -modules

$$(11.30.2) \quad C_{\mathfrak{X}'_2}(N) \xrightarrow{\sim} \iota^*(\mathcal{H}om_{D_{X/k}^{\gamma}}(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\vee}, N))$$

where the $\widehat{\Gamma}(T_{X'/k})$ -action on the right hand side is given by that of $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\vee}$. The canonical morphism

$$(11.30.3) \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_X} N) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}^{\vee}, N)$$

sends a local section φ of $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_X} N)$ to $\chi : \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{\vee} \rightarrow N$ defined for every local section f of $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ by

$$(11.30.4) \quad \chi(f) = (f \otimes \text{id}_N)(\varphi(1)).$$

Since $\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}$ is locally a direct sum of free \mathcal{O}_X -modules of finite type (11.18.3), the morphism (11.30.3) is an isomorphism. We equip \mathcal{O}_X the $D_{X/k}^{\gamma}$ -module structure $(d, 0)$. By (9.27.1) and (9.21.2), one verifies that a local section $\varphi : \mathcal{O}_X \rightarrow \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_X} N$ is $D_{X/k}^{\gamma}$ -equivariant if and only if χ (11.30.4) is $D_{X/k}^{\gamma}$ -equivariant. Then we deduce an isomorphism

$$(11.30.5) \quad \mathcal{H}om_{D_{X/k}^{\gamma}}((\mathcal{O}_X, d, 0), \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_X} N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{D_{X/k}^{\gamma}}(\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{\vee}, N).$$

In view of (9.21.2), the above isomorphism induces an isomorphism of $\widehat{\Gamma}(T_{X'/k})$ -modules (11.17)

$$(11.30.6) \quad (\mathcal{H}om_{D_{X/k}^{\gamma}}(\mathcal{O}_X, \underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_X} N), \psi_{\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}}) \xrightarrow{\sim} \iota^*(\mathcal{H}om_{D_{X/k}^{\gamma}}(\underline{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{\vee}, N)).$$

Then the assertion follows from 11.23(ii) and (11.30.2).

12. Fontaine modules

In this section, \mathfrak{X} denotes a smooth formal \mathcal{S} -scheme and X its special fiber.

Definition 12.1. Let n be an integer ≥ 1 . We define the category of filtered modules with quasi-nilpotent integrable connection $\text{MIC}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ as follows. A *filtered module with quasi-nilpotent integrable connection* is a triple (M, ∇, M^{\bullet}) consisting of an object (M, ∇) of $\text{MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ and a decreasing filtration $\{M^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$

$$(12.1.1) \quad \dots \subseteq M^2 \subseteq M^1 \subseteq M^0 = M = M^{-1} \dots$$

satisfying Griffiths' transversality

$$(12.1.2) \quad \nabla(M^i) \subset M^{i-1} \otimes \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1 \quad \forall i \geq 0.$$

Given two objects $(M_1, \nabla_1, M_1^{\bullet})$ and $(M_2, \nabla_2, M_2^{\bullet})$ of $\text{MIC}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$, a morphism from $(M_1, \nabla_1, M_1^{\bullet})$ to $(M_2, \nabla_2, M_2^{\bullet})$ is a horizontal $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -linear morphism $f : M_1 \rightarrow M_2$ compatible with the filtrations.

For any $\ell \geq 0$, we denote by $\text{MIC}_{\mathbb{F}}^{\ell}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ the full subcategory of $\text{MIC}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ consisting of objects with length $\leq \ell$ (i.e. the filtration satisfies $M^{\ell+1} = 0$).

12.2. Let ℓ be an integer ≥ 0 , (M, ∇, M^{\bullet}) an object of $\text{MIC}_{\mathbb{F}}^{\ell}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$. We consider the $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -linear morphism

$$(12.2.1) \quad g : \bigoplus_{i=1}^{\ell} M^i \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\ell} M^i$$

defined for every local section m_i of M^i by $g(m_i) = (m_i, -pm_i)$ in $M^{i-1} \oplus M^i$. We set

$$(12.2.2) \quad \widetilde{M} = \text{Coker}(g).$$

For any $0 \leq j \leq \ell$, we denote by $(-)_j$ the composition $M^j \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\ell} M^i \rightarrow \widetilde{M}$ and by \widetilde{M}^{-j} the canonical image of $\bigoplus_{i=0}^j M^i$ in \widetilde{M} . We obtain a decreasing filtration

$$(12.2.3) \quad \widetilde{M}^0 \subseteq \widetilde{M}^{-1} \subseteq \dots \subseteq \widetilde{M}^{-\ell} = \widetilde{M}.$$

We consider the W_n -linear morphism

$$(12.2.4) \quad h : \bigoplus_{i=0}^{\ell} M^i \rightarrow \left(\bigoplus_{i=0}^{\ell} M^i \right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1$$

defined by

$$(12.2.5) \quad \begin{aligned} h|_{M^i} &= \nabla : M^i \rightarrow M^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1, \quad \text{for } 1 \leq i \leq \ell, \\ h|_{M^0} &= p\nabla : M^0 \rightarrow M^0 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1. \end{aligned}$$

Lemma 12.3. *The W_n -linear morphism h induces a quasi-nilpotent integrable p -connection $\tilde{\nabla}$ on \tilde{M} such that for any $-\ell \leq i \leq -1$, we have*

$$(12.3.1) \quad \tilde{\nabla}(\tilde{M}^i) \subset \tilde{M}^{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1.$$

Proof. It follows from the definition that the composition

$$(12.3.2) \quad \bigoplus_{i=1}^{\ell} M^i \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=0}^{\ell} M^i \xrightarrow{h} (\bigoplus_{i=0}^{\ell} M^i) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1 \rightarrow \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1$$

is zero. Hence the morphism h induces a W_n -linear morphism

$$(12.3.3) \quad \tilde{\nabla} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1.$$

We show that $\tilde{\nabla}$ is a p -connection. The restriction of h to M^0 is the p -connection $p\nabla$. Hence the restriction of $\tilde{\nabla}$ to \tilde{M}^0 is a p -connection. Let f be a local section of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, i an integer $\in [1, \ell]$ and m a local section of M^i . The morphism h sends $fm \in M^i$ to

$$(12.3.4) \quad \nabla(fm) = f\nabla(m) + m \otimes df \in M^{i-1} \otimes \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1.$$

Note that we have $(m)_{i-1} = (pm)_i$. Then we deduce that

$$(12.3.5) \quad \tilde{\nabla}(f(m)_i) = f\tilde{\nabla}((m)_i) + p(m)_i \otimes df.$$

The assertion follows. The integrability of ∇ implies easily that of $\tilde{\nabla}$.

It is clear from the definition that $\tilde{\nabla}$ satisfies the condition (12.3.1). Since M is p^n -torsion, the restriction of $\tilde{\nabla}$ to \tilde{M}^0 is quasi-nilpotent. In view of (12.3.1), we deduce that $\tilde{\nabla}$ is quasi-nilpotent.

12.4. Let $\varepsilon_{\tilde{M}, T}$ be the $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ -stratification on \tilde{M} associated to $\tilde{\nabla}$ (5.22). We present its local description.

Suppose that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \hat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \mathrm{Spf}(\mathbb{W}\{T_1, \dots, T_d\})$. We take again the notation of 5.2 and of 5.21. For any $0 \leq i \leq \ell$, any local section m of M^i and any $I \in \mathbb{N}$, in view of (12.2.5), we have

$$(12.4.1) \quad \tilde{\nabla}_{\partial^I}((m)_i) = \begin{cases} (\nabla_{\partial^I}(m))_{i-|I|} & \text{if } 0 \leq i \leq |I|; \\ p^{|I|-i}(\nabla_{\partial^I}(m))_0 & \text{if } |I| > i. \end{cases}$$

By (5.22.1), we deduce that

$$(12.4.2) \quad \varepsilon_{\tilde{M}, T}(1 \otimes (m)_i) = \sum_{|I| \leq i} (\nabla_{\partial^I}(m))_{i-|I|} \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^{|I|} + \sum_{|I| > i} p^{|I|-i}(\nabla_{\partial^I}(m))_0 \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^{|I|}.$$

Proposition 12.5. *Suppose that $\ell \leq p-1$.*

(i) *There exists an $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification $\varepsilon_{\tilde{M}}$ on \tilde{M} .*

(ii) *The $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification $\varepsilon_{\tilde{M}}$ induces the $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ -stratification $\varepsilon_{\tilde{M}, T}$ via the functor (8.22.1).*

Proof. Let ε_M be the $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$ -stratification on M and $\theta_M : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$ the morphism defined by $\theta_M(m) = \varepsilon_M(1 \otimes m)$. We denote by J_P the PD-ideal of $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$. In view of local description of $J_{P, n}^{[\bullet]}$ (5.13), $M^i \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} J_P^{[j]}$ is a submodule of $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$ for any $i, j \geq 0$. By ([31] 3.1.3) and Griffiths' transversality, we have

$$(12.5.1) \quad \theta_M(M^i) \subset \sum_{j=0}^i M^j \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} J_P^{[i-j]}, \quad \forall 0 \leq i \leq \ell.$$

We denote the target by $(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}})^i$ and the induced morphism by $\theta_M^i : M^i \rightarrow (M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}})^i$. Let $s : \mathcal{P}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ be the homomorphism defined in 5.24, and for all $j \leq p-1$, $s^j : J_P^{[j]} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ the induced morphism (5.24.2). For any $j \leq i$, we have a canonical morphism

$$(12.5.2) \quad (-)_j \otimes s^{i-j} : M^j \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} J_P^{[i-j]} \rightarrow \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}.$$

For any $0 \leq j' < j \leq i$, in view of the local description of $J_{P,n}^{\bullet}$ (5.13), we have the intersection in $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$

$$M^j \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} J_P^{[i-j]} \cap M^{j'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} J_P^{[i-j']} = M^j \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} J_P^{[i-j']}.$$

Since $s^{i-j}|_{J_P^{[i-j]}} = p^{j-j'} s^{i-j'}$ (5.24.2), we deduce that the morphisms (12.5.2) are compatible and they induce an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -linear morphism

$$(12.5.3) \quad u^i : (M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}})^i \rightarrow \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}.$$

By construction, we have $u^i|_{(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}})^{i+1}} = pu^{i+1}$. Then the morphism

$$\bigoplus_{i=0}^{\ell} u^i \circ \theta_M^i : \bigoplus_{i=0}^{\ell} M^i \rightarrow \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$$

induces an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -linear morphism

$$(12.5.4) \quad \theta_{\widetilde{M}} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}.$$

We will show that the above morphism satisfies the conditions of 5.7 and hence induces an $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification. To do this, we can reduce to the case where there exists an étale \mathcal{S} -morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \mathrm{Spf}(W\{T_1, \dots, T_d\})$. We take again the notation of 5.16. For any $0 \leq i \leq \ell$, any local section m of M^i , we have

$$(12.5.5) \quad \theta_M^i(m) = \sum_{I \in \mathbb{N}^d} \nabla_{\partial^I}(m) \otimes \xi^{[I]} \in \sum_{j=0}^i M^j \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} J_P^{[i-j]}.$$

The p -adic valuation of $I!$ is less than $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{|I|}{p^k} \rfloor$. If $i \leq p-1$ and $|I| \geq i$, $\frac{p^{|I|-i}}{I!}$ is an element of \mathbb{Z}_p . By (5.24.1), we have $s^i(\xi^{[I]}) = \frac{p^{|I|-i}}{I!} \left(\frac{\xi}{p}\right)^I$. Then we deduce that

$$(12.5.6) \quad \theta_{\widetilde{M}}((m)_i) = \sum_{|I| \leq i} \frac{1}{I!} (\nabla_{\partial^I}(m))_{i-|I|} \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^I + \sum_{|I| > i} \frac{p^{|I|-i}}{I!} (\nabla_{\partial^I}(m))_0 \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^I.$$

It is clear that $\theta_{\widetilde{M}}$ verifies condition (i) of 5.7. By (12.5.6) and the local description of $\delta : \mathcal{R}_{\mathfrak{X},n} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X},n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{R}_{\mathfrak{X},n}$ (4.17), we deduce that

$$\begin{aligned} & \theta_{\widetilde{M}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}}(\theta_{\widetilde{M}}((m)_i)) \\ &= \sum_{|I|+|J| \leq i} \frac{1}{I!J!} (\nabla_{\partial^{I+J}}(m))_{i-|I|-|J|} \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^I \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^J \\ & \quad + \sum_{|I|+|J| > i} \frac{p^{|I|+|J|-i}}{I!J!} (\nabla_{\partial^{I+J}}(m))_0 \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^I \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^J \\ &= \mathrm{id}_{\widetilde{M}} \otimes \delta(\theta_{\widetilde{M}}((m)_i)). \end{aligned}$$

By 5.7, we obtain an $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification $\varepsilon_{\widetilde{M}}$ on \widetilde{M} . Assertion (ii) follows by comparing (12.4.2) and (12.5.6).

12.6. By 8.18, we associate to $(\widetilde{M}, \varepsilon_{\widetilde{M}})$ a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ -modules of $\widetilde{\mathcal{E}}$ that we denote by $\widetilde{\mathcal{M}}$.

We put $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{S}, \sigma} \mathcal{S}$ (2.1) and we denote by $\pi : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ the canonical morphism. In view of 3.14 and 4.12, the morphism π induces a morphism of formal groupoids $\pi_R : R_{\mathfrak{X}'} \simeq R_{\mathfrak{X}} \times_{\mathcal{S}, \sigma} \mathcal{S} \rightarrow R_{\mathfrak{X}}$ above π (4.9). We denote by $\widetilde{\mathcal{M}}'$ the crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}$ -modules of $\widetilde{\mathcal{E}}'$ associated to the $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -module with $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}'}$ -stratification $(\pi^*(\widetilde{M}), \pi_R^*(\varepsilon_{\widetilde{M}}))$ (5.10). The $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -module with integrable p -connection associated to $\widetilde{\mathcal{M}}'$ (8.22.3) is the inverse image $\pi^*(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ of $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ by π (5.4).

The previous construction is clearly functorial and it defines a functor (8.5)

$$(12.6.1) \quad \begin{aligned} \mathrm{MIC}_{\mathbb{F}}^{p-1}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n) &\rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}) \\ (M, \nabla, M^\bullet) &\mapsto \widetilde{\mathcal{M}}'. \end{aligned}$$

Definition 12.7. A (p^n -torsion) *Fontaine module over \mathfrak{X}* is a quadruple $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi)$ consisting of an object (M, ∇, M^\bullet) of $\mathrm{MIC}_{\mathbb{F}}^{p-1}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ such that each $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module M^i is quasi-coherent, and a morphism of $\mathrm{MIC}^{\mathrm{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$

$$(12.7.1) \quad \varphi : \nu(\mathrm{C}^*(\widetilde{\mathcal{M}}')) \rightarrow (M, \nabla)$$

where C^* is the Cartier transform (8.16.1) and $\nu : \mathcal{C}(\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}) \rightarrow \mathrm{MIC}^{\mathrm{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ is defined in (8.22.4).

We say that such a Fontaine module is *strongly divisible* if φ (12.7.1) is an isomorphism.

Given two Fontaine modules $(M_1, \nabla_1, M_1^\bullet, \varphi_1)$ and $(M_2, \nabla_2, M_2^\bullet, \varphi_2)$, a morphism from $(M_1, \nabla_1, M_1^\bullet, \varphi_1)$ to $(M_2, \nabla_2, M_2^\bullet, \varphi_2)$ is a morphism $f : (M_1, \nabla_1, M_1^\bullet) \rightarrow (M_2, \nabla_2, M_2^\bullet)$ of $\mathrm{MIC}_{\mathbb{F}}^{p-1}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ such that the following diagram commutes

$$(12.7.2) \quad \begin{array}{ccc} \nu(\mathrm{C}^*(\widetilde{\mathcal{M}}'_1)) & \xrightarrow{\varphi_1} & (M_1, \nabla_1) \\ \nu(\mathrm{C}^*(\widetilde{f}')) \downarrow & & \downarrow f \\ \nu(\mathrm{C}^*(\widetilde{\mathcal{M}}'_2)) & \xrightarrow{\varphi_2} & (M_2, \nabla_2) \end{array}$$

where $\widetilde{f}' : \widetilde{\mathcal{M}}'_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}'_2$ is the $\mathcal{O}_{\mathcal{E}',n}$ -linear morphism induced by f (12.6.1).

We denote by $\mathbf{MF}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{X})$ the category of Fontaine modules over \mathfrak{X} and by $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$ the full subcategory of $\mathbf{MF}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{X})$ of strongly divisible Fontaine modules $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi)$ such that M is a coherent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module for some integer n .

Remark 12.8. In the p -torsion case, given an object (M, ∇, M^\bullet) of $\mathrm{MIC}_{\mathbb{F}}^{\ell}(X/k)$, $\widetilde{M} = \mathrm{gr}(M)$ and $\widetilde{\nabla}$ is the Higgs field on $\mathrm{gr}(M)$ induced by ∇ and Griffiths' transversality which is of length $\leq \ell$. In ([33] 4.16), using their Cartier transform $\mathrm{C}_{\mathfrak{X}_2}^{-1}$ (9.29), Ogus and Vologodsky define a p -torsion Fontaine module as an object (M, ∇, M^\bullet) of $\mathrm{MIC}_{\mathbb{F}}^{p-1}(X/k)$ together with a horizontal isomorphism

$$(12.8.1) \quad \varphi : \mathrm{C}_{\mathfrak{X}_2}^{-1}(\pi^*(\mathrm{Gr}(M), \theta)) \xrightarrow{\sim} (M, \nabla).$$

By 11.30, our definition 12.7 is compatible with theirs.

12.9. Let \mathfrak{Y} be a smooth formal \mathcal{S} -scheme, Y its special fiber and $\iota : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{Y}$ a closed \mathcal{S} -immersion. For any $n \geq 1$, we denote by \mathfrak{D}_n the PD-envelope of ι_n compatible with γ , by $J_{\mathfrak{D}_n}$ the PD-ideal of $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}$. The schemes $\{\mathfrak{D}_n\}_{n \geq 1}$ form an adic inductive system and we denote by \mathfrak{D} the associated adic formal \mathcal{S} -scheme.

Since the canonical morphism $\lambda : \mathfrak{D}_n \rightarrow \mathfrak{Y}_n$ is affine, we consider quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}$ -modules equivalently as quasi-coherent $\lambda_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n})$ -modules ([24] 9.2.1). There exists a quasi-nilpotent integrable connection $\nabla_{\mathfrak{D}_n} : \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}_n}} \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^1$ such that $\nabla_{\mathfrak{D}_n}(y^{[m]}) = y^{[m-1]}dy$ for every local section y of the ideal of \mathfrak{X}_n in \mathfrak{Y}_n ([5] 6.4).

12.10. Recall that σ denotes the Frobenius endomorphism of W . We suppose that there exists a σ -morphism $F_{\mathfrak{Y}} : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}$ lifting the Frobenius morphism $F_Y : Y \rightarrow Y$. For any $n \geq 1$, the $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}_n}$ -linear morphism $\frac{dF_{\mathfrak{Y}}}{p}$ (6.1.1) induces by adjunction a semi-linear morphism with respect to $F_{\mathfrak{Y}}$ that we abusively denote by

$$(12.10.1) \quad \frac{dF_{\mathfrak{Y}}}{p} : \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^1 \rightarrow F_{\mathfrak{Y}*}(\Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^1) = \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^1.$$

Since \mathfrak{D}_n is equal to the PD-envelope of the immersion $X \rightarrow \mathfrak{Y}_n$ compatible with γ , the morphism $F_{\mathfrak{Y}}$ induces a σ -morphism $F_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$ lifting the Frobenius morphism of \mathfrak{D}_1 . We denote by $\varphi_{\mathfrak{D}_n}$ the homomorphism $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n} = F_{\mathfrak{D}_1}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_1}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}$ induced by $F_{\mathfrak{D}}$. Since $\varphi_{\mathfrak{D}_1}(J_{\mathfrak{D}_1}) = 0$, we deduce that for any

$0 \leq r < p$, we have $\varphi_{\mathfrak{D}_n}(J^{[r]}) \subset p^r \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}$. Since \mathfrak{D}_n is flat over \mathcal{S}_n ([4] I 4.5.1), dividing $\varphi_{\mathfrak{D}_{n+r}}$ by p^r , we obtain a semi-linear morphism with respect to $F_{\mathfrak{D}}$

$$(12.10.2) \quad \varphi_{\mathfrak{D}_n}^r : J_{\mathfrak{D}_n}^{[r]} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n} \quad \forall 0 \leq r \leq p-1.$$

Definition 12.11 ([13] 2.3 c), [37], 2.1.7). A *Fontaine module over \mathfrak{X} with respect to $(\iota, F_{\mathfrak{Y}})$* is a quadruple $\mathfrak{M} = (M, \nabla, M^\bullet, \varphi_{\mathfrak{M}}^\bullet)$ consisting of

- (a) A quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}$ -module M for some integer $n \geq 1$.
- (b) A quasi-nilpotent integrable connection $\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}} \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^1$ compatible with $\nabla_{\mathfrak{D}_n}$ (12.9).
- (c) A decreasing filtration $\{M^r\}_{r < p}$ of M by quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}$ -submodules satisfying Griffiths' transversality such that $M^r = M$ for $r \leq 0$ and that $J_{\mathfrak{D}_n}^{[r]} M^s \subset M^{r+s}$ for $r \geq 0, r+s < p$.
- (d) A family of semi-linear morphisms $\{\varphi_{\mathfrak{M}}^r : M^r \rightarrow M\}_{r < p}$ with respect to $F_{\mathfrak{D}}$ called *divided Frobenius morphisms* satisfying the following conditions:
 - (i) $\varphi_{\mathfrak{M}}^r | M^{r+1} = p \varphi_{\mathfrak{M}}^{r+1}, \forall r < p-1$ (in particular, $\varphi_{\mathfrak{M}}^{-i} = p^i \varphi_{\mathfrak{M}}^0$ for $i > 0$).
 - (ii) For any integers $r, s \geq 0$ such that $r+s < p$ and any local sections a of $J_{\mathfrak{D}}^{[r]}$, x of M^s , we have

$$\varphi_{\mathfrak{M}}^{r+s}(ax) = \varphi_{\mathfrak{D}_n}^r(a) \varphi_{\mathfrak{M}}^s(x).$$

- (iii) The following diagram commutes for all $r < p$ (12.10.1):

$$(12.11.1) \quad \begin{array}{ccc} M^r & \xrightarrow{\nabla|_{M^r}} & M^{r-1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}} \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^1 \\ \varphi_{\mathfrak{M}}^r \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathfrak{M}}^{r-1} \otimes \frac{dF_{\mathfrak{Y}}}{p} \\ M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}} \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^1 \end{array}$$

A morphism between two Fontaine modules $\mathfrak{M} = (M, \nabla_M, M^\bullet, \varphi_{\mathfrak{M}}^\bullet)$ and $\mathfrak{N} = (N, \nabla_N, N^\bullet, \varphi_{\mathfrak{N}}^\bullet)$ is a horizontal $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -linear morphism $f : M \rightarrow N$ compatible with the filtrations and the divided Frobenius morphisms.

We denote by $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota, F_{\mathfrak{Y}})$ the category of Fontaine modules over \mathfrak{X} with respect to $(\iota, F_{\mathfrak{Y}})$. One verifies that the quadruple $(\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}, \nabla_{\mathfrak{D}_n}, J_{\mathfrak{D}_n}^{[\bullet]}, \varphi_{\mathfrak{D}_n}^\bullet)$ is an object of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota, F_{\mathfrak{Y}})$.

Let $\mathfrak{M} = (M, M^\bullet, \nabla_M, \varphi_{\mathfrak{M}}^\bullet)$ be an object of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota, F_{\mathfrak{Y}})$. Since M is an $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -module, the de Rham complex $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}} \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet$ is concentrated on X . By Griffith's transversality, for any $r \leq p-1$, we have a subcomplex $(M^{r-q} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}} \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^q)_{q \geq 0}$ of the de Rham complex $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}} \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet$. By (12.11.1), the divided Frobenius morphisms $\{\varphi_{\mathfrak{M}}^\bullet\}$ and $\frac{dF_{\mathfrak{Y}}}{p}$ induce a \mathbb{W} -linear morphism of complexes

$$(12.11.2) \quad (M^{r-\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}} \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet) \otimes_{\sigma, \mathbb{W}} \mathbb{W} \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}} \Omega_{\mathfrak{Y}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet.$$

12.12. Let $\mathfrak{M} = (M, M^\bullet, \nabla_M, \varphi_{\mathfrak{M}}^\bullet)$ be a p^n -torsion object of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota, \mathfrak{Y})$. We define the $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -module $\widetilde{\mathfrak{M}}$ as the quotient of $\bigoplus_{r < p} F_{\mathfrak{D}}^*(M^r)$ by the $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}$ -submodule generated by local sections of the following forms:

- (i) $(1 \otimes x)_{r-1} - (1 \otimes px)_r$ for all $x \in M^r, r < p$,
- (ii) $(\varphi_{\mathfrak{D}_n}^r(a) \otimes x)_s - (1 \otimes ax)_{r+s}$ for all $a \in J_{\mathfrak{D}_n}^{[r]}, x \in M^s, r \geq 0, r+s < p$,

where $(-)_r$ denotes the canonical inclusion $F_{\mathfrak{D}}^*(M^r) \rightarrow \bigoplus_{r < p} F_{\mathfrak{D}}^*(M^r)$. In view of condition (d) of 12.11, the morphisms $\{\varphi_{\mathfrak{M}}^r\}_{r < p}$ induce an $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -linear morphism

$$(12.12.1) \quad \varphi_{\mathfrak{M}} : \widetilde{\mathfrak{M}} \rightarrow M.$$

Definition 12.13. We say that an object \mathfrak{M} of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota, F_{\mathfrak{Y}})$ is *strongly divisible* if $\varphi_{\mathfrak{M}}$ is an isomorphism.

12.14. In the case $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ and $\iota = \text{id}$, we have $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{X}_n$. We write simply $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}})$ for $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \text{id}, F_{\mathfrak{X}})$ and we denote by $\mathbf{MF}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}})$ the full subcategory of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}})$ of strongly divisible objects whose underlying $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules are coherent.

Let $\mathfrak{M} = (M, \nabla, M^\bullet, \varphi_{\mathfrak{M}}^\bullet)$ be an object of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}})$. The condition (d-ii) of 12.11 and the relation (ii) of 12.12 are empty and we have $\widetilde{\mathfrak{M}} = F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M})$ (12.2.2).

12.15. Suppose that there exists a σ -lifting $F_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ of the Frobenius morphism F_X . The morphism $F_{\mathfrak{X}}$ induces an \mathcal{S} -morphism $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$. Let (M, ∇, M^\bullet) be an object of $\text{MIC}_{\mathbb{F}}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$. By (8.22.6) and 12.6, the morphism F induces a functorial isomorphism of $\text{MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$:

$$(12.15.1) \quad \eta_F : \Phi_n(\pi^*(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})) \xrightarrow{\sim} \nu(C^*(\widetilde{\mathcal{M}}')),$$

where Φ_n is Shiho's functor (6.4.1) defined by F . The underlying $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -module of $\Phi_n(\pi^*(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}))$ is $F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M})$ (6.4.1). We denote the connection on $F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M})$ by ∇_F .

Given a horizontal morphism $\varphi : \nu(C^*(\widetilde{\mathcal{M}}')) \rightarrow (M, \nabla)$, we obtain a horizontal morphism φ_F and a family of morphisms $\{\varphi_F^i : M^i \rightarrow M\}_{i=0}^{p-1}$

$$(12.15.2) \quad \varphi_F = \varphi \circ \eta_F : (F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}), \nabla_F) \rightarrow (M, \nabla),$$

$$(12.15.3) \quad \varphi_F^i : M^i \xrightarrow{(-)^i} \widetilde{M} \xrightarrow{\varphi_F} M.$$

For $i > 0$, we set $\varphi_F^{-i} = p^i \varphi_F^0$. Then we obtain a functor

$$(12.15.4) \quad \lambda_F : \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}}) \quad (M, \nabla, M^\bullet, \varphi) \mapsto (M, \nabla, M^\bullet, \varphi_F^\bullet).$$

Conversely, a family of divided Frobenius morphisms $\{\varphi_F^i : M^i \rightarrow M\}_{i \leq p-1}$ satisfying (d-i,iii) of 12.11 induces an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$ -linear morphism $\varphi_F : F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}) \rightarrow M$ (12.12.1). Then we obtain a morphism $\varphi : C^*(\widetilde{\mathcal{M}}')_{(X, \mathfrak{X})} \rightarrow M$ by composing with η_F^{-1} . We define a functor

$$(12.15.5) \quad \chi_F : \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}}) \rightarrow \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}) \quad (M, \nabla, M^\bullet, \varphi_F^\bullet) \mapsto (M, \nabla, M^\bullet, \varphi).$$

Proposition 12.16. *The functors λ_F (12.15.4) and χ_F (12.15.5) are well-defined. They induce equivalences of categories quasi-inverse to each other and preserve the strong divisibility condition (12.13).*

Proof. Let $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi)$ be an object of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X})$. It follows from the definition of \widetilde{M} that the morphisms $\{\varphi_F^\bullet\}$ satisfy condition (d-i) of 12.11. We show that they also satisfy condition (d-iii). Recall (5.4, 6.2) that for any local sections m of \widetilde{M} and f of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$, we have (6.2.2)

$$(12.16.1) \quad \nabla_F(f F_{\mathfrak{X}}^*(m)) = f \zeta(F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{\nabla}(m))) + F_{\mathfrak{X}}^*(m) \otimes df$$

where ζ denotes the composition

$$F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1) \xrightarrow{\sim} F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} F_{\mathfrak{X}}^*(\Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1) \xrightarrow{\text{id} \otimes dF_{\mathfrak{X}}/p} F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1.$$

For any $0 \leq i \leq p-1$ and any local section m of M^i , we denote by $(\nabla(m))_{i-1}$ the image of $\nabla(m)$ via $M^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1 \rightarrow \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1$ for $1 \leq i \leq p-1$ and by $(\nabla(m))_{-1}$ the image of $p\nabla(m)$ in $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^1$ for $i=0$. In view of the definition of $\widetilde{\nabla}$ (12.3), we have $\widetilde{\nabla}((m)_i) = (\nabla(m))_{i-1}$ and

$$(12.16.2) \quad \nabla(\varphi_F^i(m)) = \varphi_F \otimes \text{id}(\nabla_F(F_{\mathfrak{X}}^*((m)_i))) \quad (12.15.3)$$

$$= \varphi_F \otimes \text{id}(\zeta(F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{\nabla}((m)_i)))) \quad (12.16.1)$$

$$= \varphi_F \otimes \frac{dF_{\mathfrak{X}}}{p}((\nabla(m))_{i-1})$$

$$= \varphi_F^{i-1} \otimes \frac{dF_{\mathfrak{X}}}{p}(\nabla(m)).$$

The commutativity of (12.11.1) follows. The functor (12.15.4) is well-defined and preserves the strong divisibility conditions.

Conversely, let $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi_F^\bullet)$ be an object of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}})$. In view of (12.16.2), the associated morphism $\varphi_F : F_{\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}) \rightarrow M$ is compatible with the connections ∇_F and ∇ . Via η_F^{-1} (12.15.1), we obtain a

morphism $\varphi : \nu(\mathbf{C}^*(\widetilde{\mathcal{M}}')) \rightarrow (M, \nabla)$ as (12.7.1). Hence the functor χ_F (12.15.5) is well-defined and is clearly quasi-inverse to λ_F .

Remark 12.17. By 12.16, we see that the notion of Fontaine module over \mathcal{S} (12.7) is compatible with the notion of Fontaine modules over \mathbf{W} introduced by Fontaine and Laffaille (cf. [15] 1.2 or [38] 2.2.1).

12.18. Let $F_1, F_2 : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ be two liftings of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X and let $F_{i,\mathfrak{X}} = \pi \circ F_i : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$. We present an explicit description of the equivalence of categories

$$(12.18.1) \quad \lambda_{F_2} \circ \chi_{F_1} : \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{1,\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{2,\mathfrak{X}}).$$

The morphisms F_1 and F_2 induce a morphism of \mathcal{E}' (8.24.1)

$$(12.18.2) \quad \alpha : \rho(X, \mathfrak{X}) \rightarrow (X', R_{\mathfrak{X}'}).$$

Let (M, ∇, M^\bullet) be an object of $\text{MIC}_{\mathbb{F}}^{p-1}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$. Recall that the morphism α induces a functorial isomorphism of $\text{MIC}^{\text{qm}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ (8.27.1)

$$(12.18.3) \quad \alpha^*(\pi_R^*(\varepsilon_{\widetilde{M}})) : (F_{2,\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}), \nabla_{F_2}) \xrightarrow{\sim} (F_{1,\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}), \nabla_{F_1})$$

such that $\eta_{F_2} = \eta_{F_1} \circ \alpha^*(\pi_R^*(\varepsilon_{\widetilde{M}}))$ (8.26). In view of the proof of 12.16, a family of divided Frobenius morphisms $\{\varphi_{F_j}^i\}_{i \leq p-1}$ is equivalent to a horizontal morphism φ_{F_j} (12.15.2) for $j = 1, 2$. Then the functor (12.18.1) is given by

$$(12.18.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{1,\mathfrak{X}}) &\rightarrow \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{2,\mathfrak{X}}) \\ (M, \nabla, M^\bullet, \varphi_{F_1}) &\mapsto (M, \nabla, M^\bullet, \varphi_{F_1} \circ \alpha^*(\pi_R^*(\varepsilon_{\widetilde{M}}))). \end{aligned}$$

Let us describe the isomorphism (12.18.3) in terms of a system of local coordinates. Assume that there exists an étale \mathcal{S} -morphism $f : \mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d = \text{Spf}(\mathbf{W}\{T_1, \dots, T_d\})$ and put t_i the image of T_i in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ and $\xi_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^2}$. Let i be an integer $\in [0, p-1]$, m an element of M^i and $(m)_i$ its image in \widetilde{M} . We have (12.5.6)

$$(12.18.5) \quad \varepsilon_{\widetilde{M}}(1 \otimes (m)_i) = \sum_{|I| \leq i} \frac{1}{|I|!} (\nabla_{\partial^I}(m))_{i-|I|} \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^I + \sum_{|I| > i} \frac{p^{|I|-i}}{|I|!} (\nabla_{\partial^I}(m))_0 \otimes \left(\frac{\xi}{p}\right)^I.$$

Recall that the morphism $\alpha : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X}'}$ (12.18.2) induces a homomorphism $a : \mathcal{R}_{\mathfrak{X}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ (8.24.2) which sends $\frac{\xi'_i}{p}$ to $\frac{F_{2,\mathfrak{X}}^*(t_i) - F_{1,\mathfrak{X}}^*(t_i)}{p}$ (8.24.3). We deduce that

$$(12.18.6) \quad \begin{aligned} \alpha^*(\pi_R^*(\varepsilon_{\widetilde{M}}))(1 \otimes_{F_2}(m)_i) &= \sum_{|I| \leq i} \left(\frac{F_{2,\mathfrak{X}}^*(t) - F_{1,\mathfrak{X}}^*(t)}{p}\right)^I \otimes_{F_1} \frac{1}{|I|!} (\nabla_{\partial^I}(m))_{i-|I|} \\ &\quad + \sum_{|I| > i} \left(\frac{F_{2,\mathfrak{X}}^*(t) - F_{1,\mathfrak{X}}^*(t)}{p}\right)^I \otimes_{F_1} \frac{p^{|I|-i}}{|I|!} (\nabla_{\partial^I}(m))_0 \end{aligned}$$

where

$$\left(\frac{F_{2,\mathfrak{X}}^*(t) - F_{1,\mathfrak{X}}^*(t)}{p}\right)^I = \prod_{j=1}^d \left(\frac{F_{2,\mathfrak{X}}^*(t_j) - F_{1,\mathfrak{X}}^*(t_j)}{p}\right)^{i_j} \quad \forall I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$$

In ([13] proof of Thm. 2.3), Faltings proposed the Taylor formula (12.18.6) to construct an equivalence of categories between $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{2,\mathfrak{X}})$ and $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{1,\mathfrak{X}})$. We see that his construction coincides with our functor $\lambda_{F_2} \circ \chi_{F_1}$ (12.18.1).

Proposition 12.19 ([31] 5.3.3). *Suppose that there exists a σ -lifting $F_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ of the Frobenius morphism.*

(i) *Let $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi)$ be an object of $\mathbf{MF}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}})$ (12.14). Then each M^i is locally a direct sum of sheaves of the form $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}$.*

(ii) *Any morphism of $\mathbf{MF}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}})$ is strictly compatible with the filtrations ([10] 1.1.5).*

(iii) *The category $\mathbf{MF}(\mathfrak{X}; F_{\mathfrak{X}})$ is abelian.*

Corollary 12.20 ([13] 2.1). (i) *Any morphism of $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$ is strictly compatible with the filtrations.*
(ii) *The category $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$ is abelian.*

Proof. Assertion (i) being local, we may assume that there exists a σ -lifting of the Frobenius morphism. Then, it follows from 12.16 and 12.19(ii).

For any morphism $f : (M_1, \nabla_1, M_1^\bullet, \varphi_1) \rightarrow (M_2, \nabla_2, M_2^\bullet, \varphi_2)$ of p^n -torsion objects of $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$, we denote by (L, ∇_L) and (N, ∇_N) the kernel and the cokernel of f in $\text{MIC}^{\text{qn}}(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$. We denote by L^\bullet (resp. N^\bullet) the filtration on L (resp. N) induced by M_1^\bullet (resp. M_2^\bullet) ([10] 1.1.8). Since f is strictly compatible, for any $i < p$, we have $f(M_1^i) = f(M_1) \cap M_2^i$ ([10] 1.1.11) and an exact sequence $0 \rightarrow L^i \rightarrow M_1^i \rightarrow M_2^i \rightarrow N^i \rightarrow 0$. By the snake lemma, we deduce an exact sequence

$$0 \rightarrow \widetilde{L} \rightarrow \widetilde{M}_1 \rightarrow \widetilde{M}_2 \rightarrow \widetilde{N} \rightarrow 0.$$

Then we deduce a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \nu(\mathbf{C}^*(\widetilde{\mathcal{L}}')) & \longrightarrow & \nu(\mathbf{C}^*(\widetilde{\mathcal{M}}_1')) & \longrightarrow & \nu(\mathbf{C}^*(\widetilde{\mathcal{M}}_2')) & \longrightarrow & \nu(\mathbf{C}^*(\widetilde{\mathcal{N}}')) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \varphi_1 \downarrow \wr & & \wr \downarrow \varphi_2 & & & & \\ 0 & \longrightarrow & (L, \nabla_L) & \longrightarrow & (M_1, \nabla_1) & \longrightarrow & (M_2, \nabla_2) & \longrightarrow & (N, \nabla_N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Hence we can define $\text{Ker}(f)$ and $\text{Coker}(f)$ in $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$. We deduce that the category $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$ is abelian.

12.21. Let $(\iota_1 : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}_1, F_{\mathfrak{Y}_1})$ and $(\iota_2 : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}_2, F_{\mathfrak{Y}_2})$ be two data as in 12.9 and suppose that there exists a smooth \mathcal{S} -morphism $g : \mathfrak{Y}_2 \rightarrow \mathfrak{Y}_1$ compatible with ι_1, ι_2 and the Frobenius morphisms $F_{\mathfrak{Y}_1}$ and $F_{\mathfrak{Y}_2}$. Then g induces a PD-morphism $g_D : \mathfrak{D}_2 \rightarrow \mathfrak{D}_1$ compatible with $F_{\mathfrak{D}_2}$ and $F_{\mathfrak{D}_1}$. Note that g_D induces an isomorphism on the underlying topological spaces.

Lemma 12.22 ([37] 2.2.2). *Let x be a point of \mathfrak{X}_n and let t_1, \dots, t_d be a family of local sections of $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}_{2,n}}$ in a neighborhood of $\iota_2(x)$ such that $\{dt_1, \dots, dt_d\}$ form a basis of $\Omega_{\mathfrak{Y}_{2,n}/\mathfrak{Y}_{1,n},x}^1$ and that $\iota_2^*(t_i) = 0$ (the existence follows from the fact that ι_1 is a closed immersion). Then there exists an $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{1,n},x}$ -PD-isomorphism*

$$(12.22.1) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{1,n},x}\langle T_1, \dots, T_d \rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{2,n},x}$$

which sends T_i to t_i .

Proof. Let \mathcal{I}_i be the ideal of \mathfrak{X}_n in $\mathfrak{Y}_{i,n}$. We have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \iota_1^*(\mathcal{I}_1/\mathcal{I}_1^2)_x & \longrightarrow & \iota_1^*(\Omega_{\mathfrak{Y}_{1,n}/\mathfrak{S}_n}^1)_x & \longrightarrow & \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathfrak{S}_n,x}^1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \iota_2^*(\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_2^2)_x & \longrightarrow & \iota_2^*(\Omega_{\mathfrak{Y}_{2,n}/\mathfrak{S}_n}^1)_x & \longrightarrow & \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathfrak{S}_n,x}^1 \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \iota_2^*(\Omega_{\mathfrak{Y}_{2,n}/\mathfrak{Y}_{1,n}}^1)_x & & \end{array}$$

Hence, if f_1, f_2, \dots, f_m form a regular sequence of generators for $(\mathcal{I}_1)_{\iota_1(x)}$, then $t_1, \dots, t_d, g^*(f_1), \dots, g^*(f_m)$ form a quasi-regular sequence of generators for $(\mathcal{I}_2)_{\iota_2(x)}$ ([27] 0.15.2.2) and hence a regular sequence of generators ([27] 0.15.1.11). Then the assertion follows from ([4] I 4.5.1(ii)).

Proposition 12.23 ([37] Proof of 2.2.1). *Keep the assumption of 12.21. The morphism $g : \mathfrak{Y}_2 \rightarrow \mathfrak{Y}_1$ induces equivalences of categories quasi-inverse to each other:*

$$(12.23.1) \quad g^* : \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota_1, F_{\mathfrak{Y}_1}) \rightarrow \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota_2, F_{\mathfrak{Y}_2}), \quad g_* : \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota_2, F_{\mathfrak{Y}_2}) \rightarrow \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota_1, F_{\mathfrak{Y}_1}).$$

We present the construction of pull-back functor and we refer to [37] for the construction of the push-forward functor. Let $\mathfrak{M} = (M_1, \nabla_1, M_1^\bullet, \varphi_1^\bullet)$ be an object of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \iota_1, F_{\mathfrak{y}_1})$ and n an integer such that $p^n M = 0$. We define

$$g^*(\mathfrak{M}) = (M_2, \nabla_2, M_2^\bullet, \varphi_2^\bullet)$$

as follows. We set $M_2 = \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{2,n}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{1,n}}} M_1$. For any $r < p$, the submodule M_2^r of M_2 is defined to be the sum

$$(12.23.2) \quad \sum_{r_1 \geq 0, r_1 + r_2 = r} \text{Im}(J_{\mathfrak{D}_{2,n}}^{[r_1]} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{1,n}}} M_1^{r_2} \rightarrow M_2).$$

Let x be a point of \mathfrak{X} . With the notation and assumption of 12.22, for any $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$, we set $\underline{T}^{[I]} = \prod_{j=1}^d T_j^{[i_j]}$. In view of 12.11(c) and (12.22.1), $M_{2,x}^r$ can be written as a direct sum of $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{1,n},x}$ -modules

$$(12.23.3) \quad M_{2,x}^r = \bigoplus_{|I|=s} M_{1,x}^{r-s} \cdot \underline{T}^{[I]}.$$

For any local sections a of $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{2,n}}$ and m of M , we define a W_n -linear morphism $\nabla_2 : M_2 \rightarrow M_2 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{y}_2,n}} \Omega_{\mathfrak{y}_{2,n}/\mathcal{S}_n}^1$ by

$$(12.23.4) \quad \nabla_2(a \otimes m) = a \cdot g^*(\nabla_1(m)) + m \otimes \nabla_{\mathfrak{D}_{2,n}}(a).$$

Since ∇_1 and $\nabla_{\mathfrak{D}_{1,n}}$ are compatible, ∇_2 is well-defined and $\nabla_{\mathfrak{D}_{2,n}}$ is compatible with ∇_2 . Since ∇_1 and $\nabla_{\mathfrak{D}_{2,n}}$ are quasi-nilpotent integrable connections satisfying Griffiths' transversality, the same holds for ∇_2 .

For any $r < p$, in view of (12.23.3), one verifies that the semi-linear morphisms

$$\varphi_{J_{\mathfrak{D}_{2,n}}}^{r_1} \otimes \varphi_1^{r_2} : J_{\mathfrak{D}_{2,n}}^{[r_1]} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{1,n}}} M_1^{r_2} \rightarrow M_2, \quad r_1 + r_2 = r, \quad 0 \leq r_1 \leq p-1$$

are compatible and induce a semi-linear morphism with respect to $F_{\mathfrak{D}_2}$:

$$(12.23.5) \quad \varphi_2^r : M_2^r \rightarrow M_2.$$

The conditions 12.11(d i-iii) follow from those of φ_1^\bullet and of $\varphi_{\mathfrak{D}_{2,n}}^\bullet$.

Remark 12.24. By (12.23.4), the morphism g induces a morphism of de Rham complexes

$$(12.24.1) \quad M_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{y}_{1,n}}} \Omega_{\mathfrak{y}_{1,n}/\mathcal{S}_n}^\bullet \rightarrow M_2 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{y}_{2,n}}} \Omega_{\mathfrak{y}_{2,n}/\mathcal{S}_n}^\bullet.$$

For any $r \leq p-1$, we have a commutative diagram (12.11.2)

$$(12.24.2) \quad \begin{array}{ccc} (M_1^{r-\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{y}_{1,n}}} \Omega_{\mathfrak{y}_{1,n}/\mathcal{S}_n}^\bullet) \otimes_{\sigma, W} W & \longrightarrow & M_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{y}_{1,n}}} \Omega_{\mathfrak{y}_{1,n}/\mathcal{S}_n}^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M_2^{r-\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{y}_{2,n}}} \Omega_{\mathfrak{y}_{2,n}/\mathcal{S}_n}^\bullet) \otimes_{\sigma, W} W & \longrightarrow & M_2 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{y}_{2,n}}} \Omega_{\mathfrak{y}_{2,n}/\mathcal{S}_n}^\bullet \end{array}$$

Lemma 12.25 ([37] 2.3.2). *The functor g^* (12.23.1) sends strongly divisible objects to strongly divisible objects (12.13).*

Proof. The canonical morphisms $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{2,n}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_{1,n}}} M_1^r \rightarrow M_2^r$ induce an $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_n}$ -linear morphism (12.12)

$$(12.25.1) \quad u_g : g_D^*(\widetilde{\mathfrak{M}}) \rightarrow \widetilde{g^*(\mathfrak{M})}.$$

In view of condition 12.12(ii), the above morphism is surjective. We have a commutative diagram:

$$(12.25.2) \quad \begin{array}{ccc} g_D^*(\widetilde{\mathfrak{M}}) & \xrightarrow{u_g} & \widetilde{g^*(\mathfrak{M})} \\ g_D^*(\varphi_{\mathfrak{M}}) \downarrow & & \downarrow \varphi_{g^*(\mathfrak{M})} \\ g_D^*(M_1) & \xlongequal{\quad} & M_2 \end{array}$$

If $\varphi_{\mathfrak{M}}$ is an isomorphism, then u_g is an isomorphism and so is $\varphi_{g^*(\mathfrak{M})}$. The lemma follows.

Proposition 12.26. *Suppose that \mathfrak{X} is separated over \mathcal{S} . Take again the notation of 12.18 and let $\Delta : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^2$ be the diagonal immersion, $q_1, q_2 : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}$ the canonical projections and $F_{\mathfrak{X}^2} = (F_{1,\mathfrak{X}}, F_{2,\mathfrak{X}}) : \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}^2$. Then the diagram*

$$(12.26.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{\lambda_{F_1}} & \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{1,\mathfrak{X}}) \\ \lambda_{F_2} \downarrow & & \downarrow q_1^* \\ \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{2,\mathfrak{X}}) & \xrightarrow{q_2^*} & \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \Delta, F_{\mathfrak{X}^2}) \end{array}$$

is commutative up to a canonical isomorphism.

Proof. Let $\mathfrak{M} = (M, \nabla, M^\bullet, \varphi)$ be a Fontaine module over \mathfrak{X} and $\varphi_{F_i} = \varphi \circ \eta_{F_i} : F_{i,\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}) \rightarrow M$ (12.15.2) for $i = 1, 2$. Then we have $\lambda_{F_i}(\mathfrak{M}) = (M, \nabla, M^\bullet, \varphi_{F_i}) \in \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{i,\mathfrak{X}})$. We denote abusively by q_i the composition $P_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}^2 \xrightarrow{q_i} \mathfrak{X}$ and we set $\mathfrak{M}_i = q_i^*(\lambda_{F_i}(\mathfrak{M})) = (q_i^*(M), \nabla_i, A_i^\bullet, \varphi_{\mathfrak{M}_i}^\bullet) \in \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \Delta, F_{\mathfrak{X}^2})$.

Let $\varepsilon : q_2^*(M) \xrightarrow{\sim} q_1^*(M)$ be the $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$ -stratification on M . By ([31] 3.1.3 cf. 13.6), it is a filtered isomorphism with respect to the filtrations A_2^\bullet and A_1^\bullet . Since ε is the $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$ -stratification on M , it is compatible with ∇_2 and ∇_1 . It remains to show that ε is compatible with the divided Frobenius morphisms $\varphi_{\mathfrak{M}_i}^\bullet$ on both sides.

Since $\varphi : C^*(\widetilde{\mathcal{M}'})_{(X,\mathfrak{X})} \rightarrow M$ is a horizontal morphism, the following diagram commutes

$$(12.26.2) \quad \begin{array}{ccc} q_2^*(C^*(\widetilde{\mathcal{M}'})_{(X,\mathfrak{X})}) & \xrightarrow{\sim} & C^*(\widetilde{\mathcal{M}'})_{(X,P_{\mathfrak{X}})} \xleftarrow{\sim} q_1^*(C^*(\widetilde{\mathcal{M}'})_{(X,\mathfrak{X})}) \\ q_2^*(\varphi) \downarrow & & \downarrow q_1^*(\varphi) \\ q_2^*(M) & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon} & q_1^*(M) \end{array}$$

We have $\varphi_{F_i} = \eta_{F_i} \circ \varphi$ and the following commutative diagrams:

$$(12.26.3) \quad \begin{array}{ccc} q_2^*(F_{2,\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M})) & \xrightarrow[\sim]{q_2^*(\eta_{F_2})} & q_2^*(C^*(\widetilde{\mathcal{M}'})_{(X,\mathfrak{X})}) & & q_1^*(F_{1,\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M})) & \xrightarrow[\sim]{q_1^*(\eta_{F_1})} & q_1^*(C^*(\widetilde{\mathcal{M}'})_{(X,\mathfrak{X})}) \\ & \searrow q_2^*(\varphi_{F_2}) & \downarrow q_2^*(\varphi) & & \searrow q_1^*(\varphi_{F_1}) & \downarrow q_1^*(\varphi) & \\ & & q_2^*(M) & & & & q_1^*(M) \end{array}$$

The filtered isomorphism $\varepsilon : A_2^\bullet \xrightarrow{\sim} A_1^\bullet$ induces an isomorphism $\widetilde{\varepsilon} : \widetilde{\mathfrak{M}}_2 \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ (12.12). In the diagrams

$$(12.26.4) \quad \begin{array}{ccc} q_2^*(F_{2,\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M})) & \xrightarrow{\sim} & C^*(\widetilde{\mathcal{M}'})_{(X,P_{\mathfrak{X}})} \xleftarrow{\sim} & q_1^*(F_{1,\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M})) \\ \downarrow u_{q_2} & & (1) & \downarrow u_{q_1} \\ q_2^*(\varphi_{F_2}) \downarrow & & \widetilde{\mathfrak{M}}_2 \xrightarrow[\sim]{\widetilde{\varepsilon}} & \widetilde{\mathfrak{M}}_1 \downarrow \varphi_{\mathfrak{M}_1} \\ & & \downarrow \varphi_{\mathfrak{M}_2} & \downarrow \varphi_{\mathfrak{M}_1} \\ & & q_2^*(M) \xrightarrow[\sim]{\varepsilon} & q_1^*(M) \end{array}$$

the left-hand side diagram and the right-hand side diagram are commutative (12.25.2).

To prove the assertion, it suffices to show that diagram (2) is commutative. By (12.26.2) and (12.26.3), the outer diagram of (12.26.4) commutes. Since u_{q_i} is surjective (12.25.1), it suffices to prove the following lemma.

Lemma 12.27. *Diagram (1) of (12.26.4) is commutative.*

Proof. Recall (8.23) that F_1, F_2 induce a \mathcal{S} -morphism $Q_{\mathfrak{X}} \rightarrow R_{\mathfrak{X}'}$. We denote the composition $\rho(X, P_{\mathfrak{X}}) \rightarrow \rho(X, Q_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (X', R_{\mathfrak{X}'})$ of morphisms of \mathcal{E}' (7.4.2) by f . It fits into the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \rho(X, \mathfrak{X}) & \xleftarrow{\rho(q_2)} & \rho(X, P_{\mathfrak{X}}) & \xrightarrow{\rho(q_1)} & \rho(X, \mathfrak{X}) \\ F_2 \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow F_1 \\ (X', \mathfrak{X}') & \xleftarrow{q'_2} & (X', R_{\mathfrak{X}'}) & \xrightarrow{q'_1} & (X', \mathfrak{X}') \end{array}$$

Hence the composition $q_2^*(F_{2,\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M})) \xrightarrow{\sim} q_1^*(F_{1,\mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}))$ of the upper arrows of diagram (1) coincides with the pull-back of the $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ -stratification $\varepsilon_{\widetilde{M}}$ on \widetilde{M} (12.5) via the composition $P_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{f} R_{\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\pi_R} R_{\mathfrak{X}}$ (12.6):

$$(12.27.1) \quad f^*(\pi_R^*(\varepsilon_{\widetilde{M}})) : \mathcal{P}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}} (\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}).$$

To show the lemma, we may suppose that there exists an étale morphism $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_{\mathcal{S}}^d$ and we take again the notation of 12.18. For $1 \leq k \leq d$, we set $F_1^*(t'_k) = t_k^p + pa_k$ and $F_2^*(t'_k) = t_k^p + pb_k$. By (8.23.3), the homomorphism $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}'} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$ induced by f sends

$$(12.27.2) \quad \left(\frac{\xi'_k}{p} \right) \mapsto z_k = (p-1)! \xi_k^{[p]} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{j!(p-j)!} \xi_k^j (t_k \otimes 1)^{p-j} + (1 \otimes b_k - a_k \otimes 1).$$

For any multi-index $I = (i_1, \dots, i_d)$, we set $z^I = \prod_{k=1}^d z_k^{i_k}$. Let i be an integer $\in [0, p-1]$, m a local section of M^i and $(m)_i$ its image in \widetilde{M} . By (12.18.5) and (12.27.2), the isomorphism (12.27.1) sends

$$(12.27.3) \quad 1 \otimes (1 \otimes_{q_2} (m)_i) \mapsto \sum_{|I| \leq i} \frac{z^I}{I!} \otimes ((\nabla_{\partial^I} (m))_{i-|I|} \otimes_{q_1} 1) + \sum_{|I| > i} \frac{p^{|I|-i} z^I}{I!} \otimes ((\nabla_{\partial^I} (m))_0 \otimes_{q_1} 1)$$

The $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}$ -linear morphism u_{q_2} (resp. u_{q_1}) (12.25.1) sends

$$(12.27.4) \quad 1 \otimes (1 \otimes_{q_2} (m)_i) \mapsto (1 \otimes_{F_{P_{\mathfrak{X}}}} (1 \otimes_{q_2} m))_i \quad (\text{resp. } 1 \otimes ((m)_i \otimes_{q_1} 1) \mapsto (1 \otimes_{F_{P_{\mathfrak{X}}}} (m \otimes_{q_1} 1))_i)$$

where $(-)_i : F_{P_{\mathfrak{X}}}^*(A_j^i) \rightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_j$ denotes the canonical morphism for $j = 1, 2$.

On the other hand, the isomorphism $\varepsilon : A_2^i \xrightarrow{\sim} A_1^i$ sends $1 \otimes m$ to $\sum_I \nabla_{\partial^I} (m) \otimes \xi^{[I]}$. Hence the isomorphism $\widetilde{\varepsilon} : \widetilde{\mathfrak{M}}_2 \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ in diagram (1) sends

$$(12.27.5) \quad (1 \otimes_{F_{P_{\mathfrak{X}}}} (1 \otimes_{q_2} m))_i \mapsto \sum_I (1 \otimes_{F_{P_{\mathfrak{X}}}} (\nabla_{\partial^I} (m) \otimes_{q_1} \xi^{[I]}))_i$$

With the notation of 12.10, the divided Frobenius morphisms on $(\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{X}_n}}, J_{P_{\mathfrak{X}_n}}^{\bullet})$ satisfies

$$(12.27.6) \quad \varphi_{P_{\mathfrak{X}_n}}(\xi_k) = pz_k, \quad \forall 1 \leq k \leq d, \quad \varphi_{P_{\mathfrak{X}_n}}^i(\xi^{[I]}) = \frac{p^{|I|-i} z^I}{I!}, \quad \forall i < p, |I| \geq i.$$

By conditions (i) and (ii) of 12.12, we deduce that

$$(12.27.7) \quad (1 \otimes_{F_{P_{\mathfrak{X}}}} (\nabla_{\partial^I} (m) \otimes \xi^{[I]}))_i = \begin{cases} \left(\frac{z^I}{I!} \otimes_{F_{P_{\mathfrak{X}}}} (\nabla_{\partial^I} (m) \otimes 1) \right)_{i-|I|} & \text{if } |I| \leq i \\ \left(\frac{p^{|I|-i} z^I}{I!} \otimes_{F_{P_{\mathfrak{X}}}} (\nabla_{\partial^I} (m) \otimes 1) \right)_0 & \text{if } |I| > i \end{cases}$$

By comparing (12.27.3), (12.27.4), (12.27.5) and (12.27.7), the assertion follows.

13. The Fontaine module structure on the crystalline cohomology of a Fontaine module

In this section, we reprove the following result of Faltings on the crystalline cohomology of a Fontaine module:

Theorem 13.1 ([13] IV 4.1). *Let \mathfrak{X} be a smooth proper formal \mathcal{S} -scheme of relative dimension d and $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi)$ a p^n -torsion object of $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$ (12.7) of length $\leq \ell \leq p-1$ (i.e. $M^{\ell+1} = 0$). We denote by F^i the subcomplex $M^{i-\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet$ of the de Rham complex $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet$.*

(i) *Let m be an integer such that $\min\{m, d\} + \ell \leq p-1$ and i an integer $\leq p-1$. Then the canonical morphism $\mathbb{H}^m(F^i) \rightarrow \mathbb{H}^m(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet)$ is injective.*

(ii) *Let m be an integer such that $\min\{m, d-1\} + \ell \leq p-2$ and i an integer $\leq p-1$. The isomorphism φ induces a family of semi-linear morphisms $\phi_{\mathbb{H}}^{m,i} : \mathbb{H}^m(F^i) \rightarrow \mathbb{H}^m(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet)$ (with respect to σ). Then the data*

$$(\mathbb{H}^m(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet), (\mathbb{H}^m(F^i))_{i=0}^{p-1}, (\phi_{\mathbb{H}}^{m,i})_{i=0}^{p-1})$$

form an object of $\mathbf{MF}(\mathcal{S})$ (12.17).

(iii) *In the spectral sequence of the filtered de Rham complex $(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet, F^i)$ ([10] 1.4.5)*

$$(13.1.1) \quad E_1^{r,s} = \mathbb{H}^{r+s}(\mathrm{gr}_F^r(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{r+s}(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^\bullet),$$

the differential morphism $d_1^{r,s}$ vanishes for $\min\{r+s, d-1\} + \ell \leq p-2$.

The data $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}, d)$ defines a Fontaine module of length 0 over \mathfrak{X} . By 13.1(iii), we deduce that:

Corollary 13.2 ([16] 2.8; [13] IV 4.1). *If $d \leq p-1$, the Hodge to de Rham spectral sequence of $\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n$ degenerates at E_1 .*

We refer the proof of the theorem to 13.22 and we start with some preparations on crystalline cohomology.

13.3. Let n be an integer and \mathcal{X} a smooth scheme over \mathcal{S}_n . We denote by $\mathrm{Cris}(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)$ (resp. $(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)_{\mathrm{crys}}$) the crystalline site (resp. topos) of \mathcal{X} over \mathcal{S}_n , $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ the structural sheaf and $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ its PD-ideal.

Definition 13.4 ([31] 2.1.2 and 3.1). (i) Let (U, T) be an object of $\mathrm{Cris}(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)$, J_T the PD-ideal of U in T and M an \mathcal{O}_T -module. We say that a decreasing filtration $\{M^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ of M by \mathcal{O}_T -submodules is *G-transversal* to J_T if for any $i \in \mathbb{Z}$, we have

$$(13.4.1) \quad J_T M \cap M^i = J_T^{[1]} M^{i-1} + J_T^{[2]} M^{i-2} + \dots$$

In particular, we see that such a filtration is J_T -saturated, i.e. $J_T^{[i]} M^j \subset M^{i+j}$ for all $i \geq 0, j$.

(ii) Let \mathcal{M} be a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -modules. We say that a decreasing filtration $\{\mathcal{M}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ of \mathcal{M} by $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -submodules of \mathcal{M} is *G-transversal* to $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ if for any object T of $\mathrm{Cris}(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)$, the filtration $\{\mathcal{M}_T^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ of \mathcal{M}_T is G-transversal to $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n, T}$.

Lemma 13.5 ([31] 3.1.1). *Let \mathcal{M} be a crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -modules endowed with a filtration $\{\mathcal{M}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ G-transversal to $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$. For any morphism $f : T_2 \rightarrow T_1$ of $\mathrm{Cris}(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)$, via the transition isomorphism $f^*(\mathcal{M}_{T_1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{T_2}$, $\mathcal{M}_{T_2}^i$ coincides with*

$$(13.5.1) \quad \sum_{i_1+i_2=i} J_{T_2}^{[i_1]} \mathrm{Im}(f^*(\mathcal{M}_{T_1}^{i_2}) \rightarrow f^*(\mathcal{M}_{T_1}^i)).$$

Theorem 13.6 ([31] 3.1.2, 3.2.3). *Let \mathcal{Y} be a smooth \mathcal{S}_n -scheme, $\iota : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ a closed \mathcal{S}_n -immersion and \mathcal{D} the PD-envelope of ι compatible with γ . Let \mathcal{M} be a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -modules, $M = \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ and $\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{S}_n}^1$ the associated quasi-nilpotent integrable connection on M (as an $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module) ([5] 6.6). Then the evaluation of sheaves of $(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)_{\mathrm{crys}}$ on \mathcal{D} induces an equivalence of following data:*

(i) *A decreasing filtration $\{\mathcal{M}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ by quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -modules on \mathcal{M} which is G-transversal to $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$.*

(ii) *A decreasing filtration $\{M^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ by quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ -modules on M which is G-transversal to $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n, \mathcal{D}}$ and which satisfies Griffiths' transversality i.e. $\nabla(M^i) \subset M^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{S}_n}^1$ for all i .*

We review the construction of the data (i) from the data (ii) and we refer to [31] for more details. Let $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ be a filtration as in (ii). Let $\mathcal{D}(1)$ be the PD-envelope of the immersion $X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\Delta} Y \times_{\mathcal{S}_n} Y$ compatible with γ , $p_1, p_2 : \mathcal{D}(1) \rightarrow \mathcal{D}$ the canonical projections and $\varepsilon : p_2^*(M) \xrightarrow{\sim} p_1^*(M)$ the $\mathcal{O}_{\mathcal{D}(1)}$ -stratification induced by ∇ . We define a filtration $\{A_j^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ on $p_j^*(M)$ by the formula (13.5.1) for $j = 1, 2$. By Griffiths' transversality, one verifies that the isomorphism $\varepsilon : p_2^*(M) \xrightarrow{\sim} p_1^*(M)$ induces for any i , an isomorphism ([31] 3.1.3)

$$(13.6.1) \quad A_2^i \xrightarrow{\sim} A_1^i.$$

Given an object T of $\text{Cris}(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)$, there exists locally a morphism $r : T \rightarrow \mathcal{D}$ of $\text{Cris}(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)$. Using the formula (13.5.1), we obtain a filtration $\{\mathcal{M}_T^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ on $r^*(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_T$. Using the fact that ε is a filtered isomorphism, one verifies that the filtration $\{\mathcal{M}_T^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ on \mathcal{M}_T is independent of the choice of r up to isomorphisms which come from the stratification and is well-defined. Then we obtain a filtration $\{\mathcal{M}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ of \mathcal{M} by quasi-coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -modules. By ([31] 2.2.1.2, 2.3.1), one verifies that $\{\mathcal{M}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ is G -transversal to $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$.

13.7. Let M be an $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ -module and $\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{S}_n}^1$ an integrable connection on M . A filtration $\{M^\bullet\}_{i \in \mathbb{Z}}$ of M satisfying Griffiths' transversality induces a filtration on the de Rham complex $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{S}_n}^\bullet$ defined for every $i \in \mathbb{Z}$ and $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ by

$$(13.7.1) \quad F^i(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{S}_n}^q) = M^{i-q} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{S}_n}^q.$$

Since M is an $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ -module, the de Rham complex $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{S}_n}^\bullet$ is concentrated on \mathcal{X} .

Theorem 13.8 ([4] V 2.3.2, [31] 6.1.1). *We denote by $u_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ the canonical morphism $(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}} \rightarrow \mathcal{X}_{\text{zar}}$. Let \mathcal{M} be a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -modules and $\{\mathcal{M}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ a filtration on \mathcal{M} , G -transversal to $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$.*

(i) *There exists an isomorphism in the derived category $D(\mathcal{X}_{\text{zar}}, W_n)$*

$$(13.8.1) \quad R u_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n*}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{S}_n}^\bullet.$$

(ii) *For any i , there exists an isomorphism in $D(\mathcal{X}_{\text{zar}}, W_n)$ compatible with (13.8.1)*

$$(13.8.2) \quad R u_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n*}(\mathcal{M}^i) \xrightarrow{\sim} F^i(\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{S}_n}^\bullet).$$

Corollary 13.9 ([4] V 2.3.4, [31] 6.1.7). *Let $\iota_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_1$ and $\iota_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_2$ be two closed \mathcal{S}_n -immersions of \mathcal{X} into smooth \mathcal{S}_n -schemes, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ the PD-envelopes of ι_1, ι_2 compatible with γ and $f : \mathcal{Y}_2 \rightarrow \mathcal{Y}_1$ an \mathcal{S}_n -morphism such that $\iota_2 = f \circ \iota_1$. Let \mathcal{M} be a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -modules and $\{\mathcal{M}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ a filtration on \mathcal{M} , G -transversal to $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$. Then the morphisms of complexes induced by f*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{D}_1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_1}} \Omega_{\mathcal{Y}_1/\mathcal{S}_n}^\bullet &\rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{D}_2} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_2}} \Omega_{\mathcal{Y}_2/\mathcal{S}_n}^\bullet, \\ F^i(\mathcal{M}_{\mathcal{D}_1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_1}} \Omega_{\mathcal{Y}_1/\mathcal{S}_n}^\bullet) &\rightarrow F^i(\mathcal{M}_{\mathcal{D}_2} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_2}} \Omega_{\mathcal{Y}_2/\mathcal{S}_n}^\bullet), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

are quasi-isomorphisms and compatible with (13.8.1) and (13.8.2).

13.10. We suppose that \mathcal{X} is separated over \mathcal{S}_n and we take a Zariski covering $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ of \mathcal{X} consisting of affine schemes. For any integer $r \geq 0$ and any element $J = (j_0, j_1, \dots, j_r)$ of I^{r+1} , we denote by U^J the intersection $\cap_{i=0}^r U_{j_i}$, by U_J the product $\{U_{j_i}\}_{i=0}^r$ over W_n and by P_J the PD-envelope of the diagonal immersion $U^J \rightarrow U_J$ compatible with γ . Note that U^J and P_J are also affine. Then we obtain two compatible simplicial objects:

$$(13.10.1) \quad \bigsqcup_{i \in I} U_i \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{s} \end{array} \bigsqcup_{J \in I^2} U^J \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{s} \end{array} \bigsqcup_{J \in I^3} U^J \cdots$$

$$(13.10.2) \quad \bigsqcup_{i \in I} U_i \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{s} \end{array} \bigsqcup_{J \in I^2} U_J \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{s} \end{array} \bigsqcup_{J \in I^3} U_J \cdots$$

where d, s denote the faces and degeneracy morphisms. Then the faces and degeneracy morphisms of (13.10.2) induce a simplicial object compatible with (13.10.1):

$$(13.10.3) \quad \bigsqcup_{i \in I} U_i \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{s} \end{array} \bigsqcup_{J \in I^2} P_J \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{s} \end{array} \bigsqcup_{J \in I^3} P_J \cdots$$

Let \mathcal{M} be a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -modules and $\{\mathcal{M}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ a filtration on \mathcal{M} , \mathbb{G} -transversal to $J_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$. We associate to $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^\bullet)$ a bicomplex $C_{\mathcal{Q}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})$ and for any $i \in \mathbb{Z}$, a bicomplex $F^i(C_{\mathcal{Q}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M}))$ by setting

$$(13.10.4) \quad C_{\mathcal{Q}}^{r,s}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{J \in I^{r+1}} \Gamma(U^J, \mathcal{M}_{P_J} \otimes_{\mathcal{O}_{U_J}} \Omega_{U_J/\mathcal{S}_n}^s), \quad r, s \geq 0$$

$$(13.10.5) \quad F^i(C_{\mathcal{Q}}^{r,s}(\mathcal{M})) = \bigoplus_{J \in I^{r+1}} \Gamma(U^J, \mathcal{M}_{P_J}^{i-s} \otimes_{\mathcal{O}_{U_J}} \Omega_{U_J/\mathcal{S}_n}^s), \quad r, s \geq 0,$$

the horizontal differential morphism $\partial_1^{r,s}$ is the alternating sum of the restriction morphisms induced by the faces morphisms (13.10.3) and the vertical differential morphism $\partial_2^{r,s}$ is given by the connection on \mathcal{M}_{P_J} .

Proposition 13.11 ([13] IV a). *There exist canonical isomorphisms of cohomology groups:*

$$(13.11.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}^\bullet((\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}}, \mathcal{M}) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^\bullet(\text{Tot}(C_{\mathcal{Q}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M}))) \\ \mathbf{H}^\bullet((\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}}, \mathcal{M}^i) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^\bullet(\text{Tot}(F^i(C_{\mathcal{Q}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})))), \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Proof. Let e be the final object of $(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}}$. An open subscheme U of \mathcal{X} defines a subobject \tilde{U} of e by

$$\tilde{U}(V, T) = \begin{cases} e(V, T) & \text{if } V \subset U, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Moreover, there exists a canonical equivalence of topoi ([4] IV 3.1.2)

$$(13.11.2) \quad (\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}/\tilde{U}} \xrightarrow{\sim} (U/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}}$$

which identifies the localisation morphism with respect to \tilde{U} and the functoriality morphism induced by $U \rightarrow X$. Then, the morphisms $\{\tilde{U}_i \rightarrow e\}_{i \in I}$ form a covering in $(\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}}$. With the notation of 13.10, we have $\prod_{j \in J} \tilde{U}_j = \tilde{U}^J$. By cohomological descent, we have a spectral sequence ([11] 5.3.3.2, [3] Vbis 2.5.5)

$$(13.11.3) \quad E_1^{r,s} = \bigoplus_{J \in I^{r+1}} \mathbf{H}^s((U^J/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}}, \mathcal{M}|_{\tilde{U}^J}) \Rightarrow \mathbf{H}^{r+s}((\mathcal{X}/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}}, \mathcal{M}),$$

whose differential morphism $d_1^{r,s} : E_1^{r,s} \rightarrow E_1^{r+1,s}$ is the alternating sum of the morphisms induced by the faces morphisms of (13.10.1).

On the other hand, we calculate $\mathbf{H}^\bullet(\text{Tot}(C_{\mathcal{Q}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})))$ by filtering this bicomplex by rows ([26] 0.11.3.2). By 13.8(i), the vertical cohomology of $C_{\mathcal{Q}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})$ is isomorphic to a direct sum of crystalline cohomology groups

$$(13.11.4) \quad \mathbf{H}_1^{r,s} = \text{Ker } \partial_2^{r,s} / \text{Im}(\partial_2^{r,s-1})$$

$$(13.11.5) \quad \simeq \bigoplus_{J \in I^{r+1}} \mathbf{H}^s((U^J/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}}, \mathcal{M}|_{\tilde{U}^J}).$$

Recall that we have a spectral sequence ([39] 5.6.1)

$$(13.11.6) \quad E_1^{r,s} = \mathbf{H}_1^{r,s} \Rightarrow \mathbf{H}^{r+s}(\text{Tot}(C_{\mathcal{Q}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M}))),$$

whose differential morphism $d_1^{r,s} : E_1^{r,s} \rightarrow E_1^{r+1,s}$ is induced by the morphism of complexes

$$(13.11.7) \quad \partial_1^{r,\bullet} : C_{\mathcal{Q}}^{r,\bullet}(\mathcal{M}) \rightarrow C_{\mathcal{Q}}^{r+1,\bullet}(\mathcal{M}).$$

In view of 13.9 and 13.10, the morphism $d_1^{r,s}$ coincides with $d_1^{r,s}$ (13.11.3). Then the assertion for \mathcal{M} follows.

Using 13.8(ii) and 13.9, one verifies the assertion for \mathcal{M}^i in the same way.

13.12. We consider the injective $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}_n}$ -linear morphism

$$(13.12.1) \quad g : \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathcal{M}^i \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{M}^i$$

defined for every local section m of \mathcal{M}^i by $g(m) = (m, -pm)$ in $\mathcal{M}^{i-1} \oplus \mathcal{M}^i$. We set $\Lambda_{\mathcal{M}} = \text{Coker}(g)$. For any $r, s \in \mathbb{Z}$, the morphism g induces an injective morphism

$$(13.12.2) \quad \bigoplus_{i=1}^{p-1} \bigoplus_{J \in I^{r+1}} \Gamma(U^J, \mathcal{M}_{P_J}^{i-s} \otimes_{\mathcal{O}_{U_J}} \Omega_{U_J/\mathcal{S}_n}^s) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{p-1} \bigoplus_{J \in I^{r+1}} \Gamma(U^J, \mathcal{M}_{P_J}^{i-s} \otimes_{\mathcal{O}_{U_J}} \Omega_{U_J/\mathcal{S}_n}^s)$$

compatible with the differential morphisms and hence an injective morphism of bicomplexes:

$$(13.12.3) \quad g_C : \bigoplus_{i=1}^{p-1} F^i(C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{p-1} F^i(C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})).$$

We denote its quotient by $C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\Lambda_{\mathcal{M}})$. By 13.11, the crystalline cohomology groups of $\Lambda_{\mathcal{M}}$ are canonically isomorphic to cohomology groups of $\text{Tot}(C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\Lambda_{\mathcal{M}}))$.

13.13. Let \mathfrak{X} be a smooth and separated formal \mathcal{S} -scheme. In the following, we will use 13.11 to construct a Fontaine module structure on the crystalline cohomology of an object of $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$ (12.7). For this propose, we first show how to associate an object of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X})$ to Fontaine modules with respect to a family of Frobenius liftings (12.11).

Suppose that there exist $m+1$ liftings F_1, \dots, F_{m+1} of the relative Frobenius morphism $F_{X/k}$ of X . We set $\pi : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ the canonical morphism, $F_{\mathfrak{X}^{m+1}} = \pi^{m+1} \circ (F_1, \dots, F_{m+1}) : \mathfrak{X}^{m+1} \rightarrow \mathfrak{X}^{m+1}$ and $\Delta : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^{m+1}$ the diagonal closed immersion. For $1 \leq i \leq m+1$, the projection $q_i : \mathfrak{X}^{m+1} \rightarrow \mathfrak{X}$ on the i -th component induces a functor (12.23.1)

$$q_i^* : \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{i, \mathfrak{X}}) \rightarrow \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \Delta, F_{\mathfrak{X}^{m+1}}).$$

By composing with the functor λ_{F_i} (12.15.4), we obtain a functor

$$(13.13.1) \quad q_i^* \circ \lambda_{F_i} : \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \Delta, F_{\mathfrak{X}^{m+1}}).$$

We denote by $P_{\mathfrak{X}}(m)$ the PD-envelope of the diagonal immersion Δ compatible with γ (5.12) and by $F_{P_{\mathfrak{X}}(m)} : P_{\mathfrak{X}}(m) \rightarrow P_{\mathfrak{X}}(m)$ the lifting of Frobenius morphism induced by $F_{\mathfrak{X}^{m+1}} : \mathfrak{X}^{m+1} \rightarrow \mathfrak{X}^{m+1}$. We denote abusively the composition $P_{\mathfrak{X}}(m) \rightarrow \mathfrak{X}^{m+1} \xrightarrow{q_i} \mathfrak{X}$ by q_i .

Proposition 13.14. *Let n be an integer ≥ 1 , $\mathfrak{M} = (M, \nabla, M^\bullet, \varphi)$ a p^n -torsion Fontaine module over \mathfrak{X} , \mathcal{M} the crystal of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}$ -modules associated to (M, ∇) and $\{\mathcal{M}^i\}$ the filtration on \mathcal{M} associated to $\{M^i\}$ (13.6). Then there exists a functor*

$$(13.14.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}) &\rightarrow \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \Delta, F_{\mathfrak{X}^{m+1}}) \\ (M, \nabla, M^\bullet, \varphi) &\mapsto (\mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}}(m)}, \nabla_{P_{\mathfrak{X}}(m)}, \mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}}(m)}^\bullet, \varphi_{P_{\mathfrak{X}}(m)}^\bullet) \end{aligned}$$

which is isomorphic to the functor $q_i^* \circ \lambda_{F_i}$ (13.13.1) via the transition morphism

$$(13.14.2) \quad c_{q_i} : q_i^*(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}}(m)}.$$

Proof. By 13.6, there exists a quasi-nilpotent integrable connection $\nabla_{P_{\mathfrak{X}}(m)}$ on $\mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}}(m)}$ such that the filtration $\{\mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}}(m)}^\bullet\}$ satisfying Griffiths' transversality. We will construct a family of divided Frobenius morphisms on $(\mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}}(m)}, \mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}}(m)}^\bullet)$ via (13.13.1) and we will show that the construction is independant of the choice of i .

Recall (12.16) that the morphism F_i induces a horizontal morphism $\varphi_{F_i} = \varphi \circ \eta_{F_i} : F_{i, \mathfrak{X}}^*(\widetilde{M}) \rightarrow M$ and hence an object $\lambda_{F_i}(\mathfrak{M}) = (M, M^\bullet, \nabla, \varphi_{F_i})$ of $\mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; F_{i, \mathfrak{X}})$ for $1 \leq i \leq m+1$. We set $\mathfrak{M}_i = q_i^*(\lambda_{F_i}(\mathfrak{M})) = (q_i^*(M), \nabla_i, A_i^\bullet, \varphi_{\mathfrak{M}_i}^\bullet) \in \mathbf{MF}_{\text{big}}(\mathfrak{X}; \Delta, F_{\mathfrak{X}^{m+1}})$ (12.23.1). Note that c_{q_i} (13.14.2) is a horizontal isomorphism. By 13.5, c_{q_i} induces a filtered isomorphism:

$$(13.14.3) \quad A_i^\bullet \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}_n}}^\bullet.$$

Then we obtain a family of divided Frobenius morphisms $\varphi_{P_{\mathfrak{X}}(m)}^\bullet$ on $(\mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}}(m)}, \mathcal{M}_{P_{\mathfrak{X}}(m)}^\bullet)$ by $\varphi_{\mathfrak{M}_i}^\bullet$.

To show that the construction is independent of the choice of $i \in \{1, \dots, m+1\}$, we can reduce to the case $m = 1$. In this case, the proposition follows from 12.26.

13.15. In the rest of this section, we suppose that \mathfrak{X} is a smooth proper formal \mathcal{S} -scheme of relative dimension d . Let ℓ be an integer $\in [0, p-1]$, n an integer ≥ 1 and $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi)$ a p^n -torsion object of $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$ of length ℓ (i.e. $M^\ell \neq 0, M^{\ell+1} = 0$). We denote by \mathcal{M} the crystal of $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}$ -modules associated to (M, ∇) and by $\{\mathcal{M}^i\}$ the filtration on \mathcal{M} associated to $\{M^i\}$ (13.6). We write simply $H_{\text{crys}}^\bullet(-)$ for the crystalline cohomology groups $H^\bullet((\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)_{\text{crys}}, -)$. If we consider $\mathcal{M}, \mathcal{M}^i$ as $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_m/\mathcal{S}_m}$ -modules for some integer $m \geq n$, by 13.8, the notation $H_{\text{crys}}^\bullet(-)$ does not lead to any confusion for the crystalline cohomology of $\mathcal{M}, \mathcal{M}^i$.

Lemma 13.16. *Keep the notation of 13.15 and of 13.12. The morphism φ induces W-linear morphisms of bicomplexes*

$$(13.16.1) \quad \phi_C^i : F^i(C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})) \otimes_{\sigma, W} W \rightarrow C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M}), \quad \forall 0 \leq i \leq p-1,$$

$$(13.16.2) \quad \psi_C : C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\Lambda_{\mathcal{M}}) \otimes_{\sigma, W} W \rightarrow C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M}),$$

which are functorial in $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi) \in \mathbf{MF}(\mathfrak{X})$. In particular, we obtain for $m \geq 0$, W-linear morphisms

$$(13.16.3) \quad \phi_H^{m, i} : H_{\text{crys}}^m(\mathcal{M}^i) \otimes_{\sigma, W} W \rightarrow H_{\text{crys}}^m(\mathcal{M}), \quad \forall 0 \leq i \leq p-1,$$

$$(13.16.4) \quad \psi^m : H_{\text{crys}}^m(\Lambda_{\mathcal{M}}) \otimes_{\sigma, W} W \rightarrow H_{\text{crys}}^m(\mathcal{M}).$$

Proof. We take a Zariski covering $\mathcal{U} = \{\mathfrak{U}_i\}_{i \in I}$ of \mathfrak{X} consisting of affine formal schemes and for each $i \in I$ a lifting $F_i : \mathfrak{U}_i \rightarrow \mathfrak{U}_i$ of the relative Frobenius morphism of $\mathfrak{U}_{i,1}$. For any integer $r \geq 0$ and $J = (j_0, \dots, j_r) \in I^{r+1}$, we denote by \mathfrak{U}^J the intersection $\cap_{i=0}^r \mathfrak{U}_{j_i}$, by \mathfrak{U}_J the product of $(r+1)$ -copies of \mathfrak{U}^J and by P_J the PD-envelope of the diagonal closed immersion $\mathfrak{U}^J \rightarrow \mathfrak{U}_J$. Note that P_J is equal to the PD-envelope of the immersion of \mathfrak{U}^J in the product of $\{\mathfrak{U}_{j_i}\}_{i=0}^r$ over \mathcal{S} . We denote by $F_{\mathfrak{U}_J} : \mathfrak{U}_J \rightarrow \mathfrak{U}_J$ the morphism induced by $\{F_{j_i}\}_{i=0}^r$ and by $F_{P_J} : P_J \rightarrow P_J$ the lifting of the Frobenius morphism induced by $F_{\mathfrak{U}_J}$. By 13.14, we associate to $(M, \nabla, M^\bullet, \varphi)$ a family of divided Frobenius morphisms with respect to $(\mathfrak{U}^J \rightarrow \mathfrak{U}_J, F_{\mathfrak{U}_J})$:

$$(13.16.5) \quad \varphi_{P_J}^i : \mathcal{M}_{P_J}^i \rightarrow \mathcal{M}_{P_J} \quad \forall i \leq p-1.$$

For any $r, s \geq 0$, in view of (12.11.2) and (12.24.2), the W-linear morphism

$$(13.16.6) \quad \bigoplus_{J \in I^{r+1}} \varphi_{P_J}^{i-s} \otimes \wedge^s \left(\frac{dF_{U_J}}{p} \right) : \bigoplus_{J \in I^{r+1}} \Gamma(\mathfrak{U}^J, \mathcal{M}_{P_J}^{i-s} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_J, n}} \Omega_{\mathfrak{U}_J, n/\mathcal{S}_n}^s) \otimes_{\sigma, W} W \rightarrow \bigoplus_{J \in I^{r+1}} \Gamma(\mathfrak{U}^J, \mathcal{M}_{P_J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_J, n}} \Omega_{\mathfrak{U}_J, n/\mathcal{S}_n}^s)$$

is compatible with differential morphisms $\partial_1^{\bullet, \bullet}, \partial_2^{\bullet, \bullet}$ of $F^i(C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M}))$, $C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})$ respectively (13.10). Then we obtain a W-linear morphism of bicomplexes

$$(13.16.7) \quad \phi_C^i : F^i(C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})) \otimes_{\sigma, W} W \rightarrow C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M}).$$

By condition (d-i) of 12.11, we see that the composition (13.12.3)

$$(13.16.8) \quad \bigoplus_{i=1}^{p-1} F^i(C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})) \otimes_{\sigma, W} W \xrightarrow{g_C} \bigoplus_{i=0}^{p-1} F^i(C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})) \otimes_{\sigma, W} W \xrightarrow{\bigoplus \phi_C^i} C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M})$$

vanishes. Then we obtain a W-linear morphism of bicomplexes

$$(13.16.9) \quad \psi_C : C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\Lambda_{\mathcal{M}}) \otimes_{\sigma, W} W \rightarrow C_{\mathcal{U}}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{M}).$$

It is clear that the above constructions are functorial.

By 13.11 and 13.12, we obtain morphisms of cohomology groups (13.16.3) and (13.16.4).

Proposition 13.17. *If $pM = 0$ and $\min\{m, d-1\} + \ell \leq p-2$, the morphism ψ^m (13.16.4) is an isomorphism.*

Proof. We use $H_1^{r,s}(-)$ to denote the vertical cohomology of a bicomplex. Recall (13.11.6) that we have two spectral sequences:

$$(13.17.1) \quad E_1^{r,s} = H_1^{r,s}(C_{\mathcal{U}}^{\bullet,\bullet}(\Lambda_{\mathcal{M}})) \Rightarrow H^{r+s}(\text{Tot}(C_{\mathcal{U}}^{\bullet,\bullet}(\Lambda_{\mathcal{M}})))$$

$$(13.17.2) \quad E_1^{r,s} = H_1^{r,s}(C_{\mathcal{U}}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{M})) \Rightarrow H^{r+s}(\text{Tot}(C_{\mathcal{U}}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{M})))$$

The morphism of bicomplexes ψ_C induces a k -linear morphism of spectral sequences $E' \otimes_{\sigma,k} k \rightarrow E$. Then it is enough to prove that for any $r \geq 0$ and s satisfying $\min\{s, d-1\} + \ell \leq p-2$, the induced morphism

$$(13.17.3) \quad H_1^{r,s}(C_{\mathcal{U}}^{\bullet,\bullet}(\Lambda_{\mathcal{M}})) \otimes_{\sigma,k} k \rightarrow H_1^{r,s}(C_{\mathcal{U}}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{M}))$$

is an isomorphism. Since \mathcal{M} is p -torsion, we have $\Lambda_{\mathcal{M}} = \bigoplus_{i=0}^{p-2} \text{gr}^i(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{M}^{p-1}$. For any $s \geq 0$, we set $\Lambda_{\mathcal{M}}^{-s} = \bigoplus_{i=0}^{p-2} \text{gr}^{i-s}(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{M}^{p-1-s}$. Since \mathfrak{U}^J is affine, $C_{\mathcal{U}}^{r,s}(\Lambda_{\mathcal{M}})$ can be written as a direct sum

$$\bigoplus_{J \in I^{r+1}} \Gamma(\mathfrak{U}^J, \Lambda_{\mathcal{M}, P_J}^{-s} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_{J,1}}} \Omega_{\mathfrak{U}_{J,1}/k}^s).$$

Recall (13.16.6) that the divided Frobenius morphisms $\varphi_{P_J}^i : \mathcal{M}_{P_J}^i \rightarrow \mathcal{M}_{P_J}$ and the semi-linear morphism $\wedge^s(\frac{dF_{\mathfrak{U}}}{p}) : \Omega_{\mathfrak{U}_{J,1}/k}^s \rightarrow \Omega_{\mathfrak{U}_{J,1}/k}^s$ induce a k -linear morphism

$$\psi_{J,C}^{r,s} : \Gamma(\mathfrak{U}^J, \Lambda_{\mathcal{M}, P_J}^{-s} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_{J,1}}} \Omega_{\mathfrak{U}_{J,1}/k}^s) \otimes_{\sigma,k} k \rightarrow \Gamma(\mathfrak{U}^J, \mathcal{M}_{P_J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_{J,1}}} \Omega_{\mathfrak{U}_{J,1}/k}^s)$$

and that the morphism $\psi_C^{r,s}$ (13.16.2) is defined by a direct sum of morphisms $\bigoplus_{J \in I^{r+1}} \psi_{J,C}^{r,s}$.

Then the assertion follows from the following lemma.

Lemma 13.18. *For any $r \geq 0$, $J \in I^{r+1}$, the morphism of complexes*

$$(13.18.1) \quad \psi_{J,C}^{r,\bullet} : \Gamma(\mathfrak{U}^J, \Lambda_{\mathcal{M}, P_J}^{-\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_{J,1}}} \Omega_{\mathfrak{U}_{J,1}/k}^{\bullet}) \otimes_{\sigma,k} k \rightarrow \Gamma(\mathfrak{U}^J, \mathcal{M}_{P_J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_{J,1}}} \Omega_{\mathfrak{U}_{J,1}/k}^{\bullet})$$

induces an isomorphism on the m -th cohomology group for any integer m satisfying $\min\{m, d-1\} + \ell \leq p-2$.

Proof. In view of (12.24.2) and (13.9), we can reduce to the case where $r = 0$, $J \in I$. To simplify the notation, we write \mathfrak{U} for \mathfrak{U}_J , F for the lifting of Frobenius $F_J : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$, U the special fiber of \mathfrak{U} and M (resp. M^i) for $\mathcal{M}_{\mathfrak{U}} = M|U$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathfrak{U}}^i = M^i|U$).

We set $\text{gr}(M) = \bigoplus_{i=0}^{\ell} M^i/M^{i+1}$. By Griffiths' transversality, ∇ induces a Higgs field on $\text{gr}(M)$:

$$\theta : \text{gr}(M) \rightarrow \text{gr}(M) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1.$$

The source of (13.18.1) can be written as

$$(13.18.2) \quad \Gamma(U, (\bigoplus_{i=0}^{p-2-s} \text{gr}^i(M) \oplus M^{p-1-s}) \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega_{U/k}^s) \otimes_{\sigma,k} k$$

which is equal to

$$(13.18.3) \quad \Gamma(U, \text{gr}(M) \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega_{U/k}^s) \otimes_{\sigma,k} k \quad \text{if } s \leq p-1-\ell.$$

The differential morphism of the source is induced by θ for $s \leq p-1-\ell$.

Since $pM = 0$, we have $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}) = (\text{gr}(M), \theta)$ (12.8). The isomorphism φ and the lifting F induce an isomorphism of MIC $(\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n)$ (12.15.2)

$$(13.18.4) \quad \varphi_F : \Phi_1((\text{gr}(M), \theta) \otimes_{\sigma,k} k) \xrightarrow{\sim} (M, \nabla).$$

Recall (12.16) that φ_F induces a family of divided Frobenius morphisms φ_F^{\bullet} . The morphism $\psi_{J,C}^{r,\bullet}$ (13.18.1), which is induced by φ_F^{\bullet} , coincides with the composition of morphism of complexes (6.7.1) induced by Φ_1 and the isomorphism of de Rham complexes induced by φ_F

$$(13.18.5) \quad (\text{gr}(M) \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega_{U/k}^{\bullet}) \otimes_{\sigma,k} k \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega_{U/k}^{\bullet}$$

in degrees $\leq p-1-\ell$. Then the lemma follows from 6.7.

Remark 13.19. Suppose that $pM = 0$. Let $\mathrm{gr}(M) = \bigoplus_{i=0}^{\ell} M^i/M^{i+1}$ and θ the Higgs field on $\mathrm{gr}(M)$ induced by ∇ and Griffiths' transversality. By 13.8 and a similar argument of 13.18, we deduce for $m \leq p-2-\ell$, an isomorphism

$$(13.19.1) \quad \mathbb{H}_{\mathrm{crys}}^m(\Lambda_{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^m(\mathrm{gr}(M) \otimes \Omega_{X/k}^{\bullet}).$$

Proposition 13.20. (i) *If $d \leq p-1-\ell$, the morphism ψ^m (13.16.4) is an isomorphism for all m .*

(ii) *If $d > p-1-\ell$, the morphism ψ^m (13.16.4) is an isomorphism for $m+\ell \leq p-3$, and is a monomorphism for $m+\ell = p-2$.*

Proof. We prove it by induction on n . In the case $n = 1$, i.e. M is p -torsion, it follows from 13.17. Suppose that the proposition is true for $n-1$. By 12.20, the quadruple $(pM, \nabla|_{pM}, pM^{\bullet}, \varphi|_{pC^*(\tilde{\mathcal{M}})})$ is a subobject of $(M, \nabla, M^{\bullet}, \varphi)$ in $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$ and we denote its quotient by $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{M}^{\bullet}, \overline{\varphi})$. If $\overline{\mathcal{M}}$ and $\overline{\mathcal{M}}^{\bullet}$ denote the crystal of $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}_n/\mathcal{S}_n}$ -modules and the filtration associated to $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{M}^{\bullet})$ (13.6), we have an exact sequence:

$$(13.20.1) \quad 0 \rightarrow p\mathcal{M}^i \rightarrow \mathcal{M}^i \rightarrow \overline{\mathcal{M}}^i \rightarrow 0 \quad \forall i \leq p-1.$$

By the snake lemma, we have a commutative diagram:

$$(13.20.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{p-1} p\mathcal{M}^i & \longrightarrow & \bigoplus_{i=0}^{p-1} p\mathcal{M}^i & \longrightarrow & \Lambda_{p\mathcal{M}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathcal{M}^i & \longrightarrow & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{M}^i & \longrightarrow & \Lambda_{\mathcal{M}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{p-1} \overline{\mathcal{M}}^i & \longrightarrow & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \overline{\mathcal{M}}^i & \longrightarrow & \Lambda_{\overline{\mathcal{M}}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Since ψ_m is functorial in $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$, the assertion follows by dévissage from the induction hypothesis.

Proposition 13.21. (i) *Let m be an integer such that $\min\{m, d-1\} \leq p-2-\ell$, the exact sequence (13.12)*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathcal{M}^i \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{M}^i \rightarrow \Lambda_{\mathcal{M}} \rightarrow 0$$

induces an exact sequence of cohomology groups

$$(13.21.1) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathbb{H}_{\mathrm{crys}}^m(\mathcal{M}^i) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{H}_{\mathrm{crys}}^m(\mathcal{M}^i) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathrm{crys}}^m(\Lambda_{\mathcal{M}}) \rightarrow 0.$$

(ii) *If $m+\ell = p-2$, morphism ψ^m (13.16.4) is an isomorphism.*

Proof. We prove the proposition by induction on m . The case $m = -1$ is trivial. Suppose that the assertion is true for $m-1$ and we will prove it for m . By hypothesis of induction, we have an exact sequence (which is automatically true for $m = 0$)

$$(13.21.2) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathbb{H}_{\mathrm{crys}}^m(\mathcal{M}^i) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{H}_{\mathrm{crys}}^m(\mathcal{M}^i) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathrm{crys}}^m(\Lambda_{\mathcal{M}}).$$

Since $\mathcal{M}, \mathcal{M}^i$ are coherent, by 13.8, we see that the cohomology groups in above sequence are finite type W_n -modules. By 13.20, we have the following inequalities on the length of W_n -modules

$$(13.21.3) \quad \begin{aligned} \lg_{W_n} H_{\text{crys}}^m(\Lambda_{\mathcal{M}}) &\leq \lg_{W_n} H_{\text{crys}}^m(\mathcal{M}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \lg_{W_n} H_{\text{crys}}^m(\mathcal{M}^i) - \sum_{i=1}^{p-1} \lg_{W_n} H_{\text{crys}}^m(\mathcal{M}^i). \end{aligned}$$

Then we deduce the surjectivity of the last arrow of (13.21.2), and that the above inequality is an equality. The assertion (i) follows. The assertion (ii) follows from 13.20 and the equality (13.21.3).

13.22. *Proof of 13.1.* Assertion (i) follows from 13.8 and 13.21.

We take for $\phi_{\mathbb{H}}^{m,i}$ the morphism (13.16.3). Then assertion (ii) follows from (i), 13.20 and 13.21.

Note that the complex $F^i = 0$ if $i > d + \ell$. For any r, s satisfying $\min\{r + s, d - 1\} + \ell \leq p - 2$, we deduce from (i) that

$$(13.22.1) \quad \mathbb{H}^{r+s}(\text{gr}_{\mathbb{F}}^r(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n}} \Omega_{\mathfrak{X}_n/\mathcal{S}_n}^{\bullet})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{r+s}(\mathbb{F}^r)/\mathbb{H}^{r+s}(\mathbb{F}^{r+1}).$$

Then assertion (iii) follows by comparing the W_n -length of $E_1^{r,s}$ and of E^{r+s} .

Remark 13.23. Using the comparison isomorphism between the de Rham and the Dolbeault complexes (9.30), Ogus and Vologodsky proved 13.1 for p -torsion Fontaine modules (12.8) ([33] 4.17). More precisely, let $(M, \nabla, M^{\bullet}, \varphi)$ be a p -torsion object of $\mathbf{MF}(\mathfrak{X})$ of length ℓ and θ the Higgs field on $\text{gr}(M)$ induced by ∇ and Griffiths' transversality. By 9.30, the isomorphism (9.30.1) induces via (12.8.1)

$$\varphi : C_{\mathfrak{X}_2}^{-1}(\pi^*(\text{Gr}(M), \theta)) \xrightarrow{\sim} (M, \nabla),$$

for $m \leq p - 1 - \ell$, an isomorphism:

$$(13.23.1) \quad \mathbb{H}^m(\text{gr}(M) \otimes \Omega_{X/k}^{\bullet}) \otimes_{\sigma, k} k \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^m(M \otimes \Omega_{X/k}^{\bullet}).$$

By (13.19.1), we obtain for $m \leq p - 2 - \ell$, an isomorphism

$$(13.23.2) \quad H_{\text{crys}}^m(\Lambda_{\mathcal{M}}) \otimes_{\sigma, k} k \xrightarrow{\sim} H_{\text{crys}}^m(\mathcal{M}).$$

The above isomorphism is an analogue of the isomorphism ψ^m (13.16.4, 13.17) and allows us to deduce 13.1 for p -torsion objects. We don't know whether these two isomorphisms coincide or not.

Theorem 13.1 provides a generalisation of Ogus–Vologodsky's result (9.30) for p^n -torsion Fontaine modules. However, we don't know how to generalise 9.30 for the Cartier transform modulo p^n .

Bibliography

- [1] A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide: Volume I. Construction et étude géométrique des espaces rigides*. Springer-Verlag, (2010).
- [2] A. Abbes, M. Gros, T. Tsuji, *The p -adic Simpson correspondence*, Annals of Mathematics Studies, Vol. 193 (2016).
- [3] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, SGA 4, Springer-Verlag, Tome 1, LNM 269 (1972) ; Tome 2, LNM 270 (1972) ; Tome 3, LNM 305 (1973).
- [4] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Springer-Verlag, LNM 407, (1974).
- [5] P. Berthelot, A. Ogus, *Notes on Crystalline Cohomology (MN-21)*. Princeton University Press, (2015).
- [6] R. Bezrukavnikov, I. Mirković, D. Rumynin, *Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic*, with an appendix by R. Bezrukavnikov and S. Riche, Ann. of Math. 167 (2008), 945–991.
- [7] C. Breuil, W. Messing. *Torsion étale and crystalline cohomologies*, Astérisque 279 (2002), 81-124.
- [8] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chapitres 1-9, Hermann (1985).
- [9] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Springer-Verlag, LNM 163, (1970).
- [10] P. Deligne, *Théorie de Hodge II*, Publ. Math. IHES 40(1) (1971), 5-57.
- [11] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. IHES 44 (1975), 6-77.
- [12] P. Deligne, L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Invent. Math. 89, 247-270 (1987).
- [13] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p -adic Galois representations*, in Proc. 1st JAMI conference (ed. J.I. Igusa), pp. 25-81, John Hopkins (1989).
- [14] G. Faltings, *A p -adic Simpson correspondence*, Adv. Math. 198 (2005), 847-862.
- [15] J.-M. Fontaine, G. Laffaille, *Construction de représentations p -adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 4 série 15 (1982) 547–608.
- [16] J.-M. Fontaine, W. Messing, *p -adic periods and p -adic étale cohomology*, Contemporary Math. 67, (1987), 179-207.
- [17] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag (1971).
- [18] M. Gros, B. Le Stum, A. Quirós, *A Simpson correspondence in positive characteristic*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 46 (2010), 1-35.
- [19] L. Illusie, *Complexe cotangente et déformations I*, Springer-Verlag, LNM 239, (1971).
- [20] L. Illusie, *Frobenius et dégénérescence de Hodge*, in Introduction à la théorie de Hodge, Panoramas et Synthèses, vol. 3, Soc. Math. de France, (1996), pp. 113–168.
- [21] N. Katz. *Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin*, Publ. Math. IHÉS 39 (1970): 175-232.
- [22] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, SGA 1, Springer-Verlag, LNM 224, (1971).
- [23] A. Grothendieck, M. Demazure, *Schemas en groupes I*, SGA 3, Tome 1, Springer-Verlag, LNM 151, (1970).
- [24] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique I*, Seconde édition, Springer-Verlag (1971).
- [25] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique, II Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Pub. Math. IHÉS 8 (1961).
- [26] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique, III Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. IHES 11, 17 (1961).
- [27] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Pub. Math. IHES 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).
- [28] G. Lan, M. Sheng, K. Zuo, *Semistable Higgs bundles, periodic Higgs bundles and representations of algebraic fundamental groups*, to appear in Journal of the European Mathematical Society.
- [29] B. Mazur, *Frobenius and the Hodge filtration*, Bull. Amer. Math. Soc. 78, (1972), 653-667.

- [30] B. Mazur, *Frobenius and the Hodge filtration-estimates*, Ann. of Math. 98, (1973), 58-95.
- [31] A. Ogus, *F-crystals, Griffiths transversality, and the Hodge decomposition*, Astérisque 221, Soc. Math. de France, (1994).
- [32] A. Ogus, *Higgs cohomology, p-curvature, and the Cartier isomorphism*, Compositio Mathematica. 140.01 (2004), 145-164.
- [33] A. Ogus, V. Vologodsky, *Nonabelian Hodge theory in characteristic p*, Publ. Math. IHÉS 106.1 (2007), 1-138.
- [34] H. Oyama, *PD Higgs crystals and Higgs cohomology in characteristic p*, to appear in J. Algebraic Geom.
- [35] C. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Pub. Math. IHÉS, 75 (1992), 5-95.
- [36] A. Shiho, *Notes on generalizations of local Ogus–Vologodsky correspondence*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), 793–875.
- [37] T. Tsuji, *Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles*, J. Reine Angew. Math. 472 (1996), 69–138.
- [38] N. Wach, *Représentations cristallines de torsion*, Compositio Math. 108 (1997), 185–240.
- [39] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, Cambridge university press, (1995).