



**HAL**  
open science

# Groupes modulaires et groupes d'automorphismes de complexes de surfaces de type infini

Maxime Nguyen

► **To cite this version:**

Maxime Nguyen. Groupes modulaires et groupes d'automorphismes de complexes de surfaces de type infini. Théorie des groupes [math.GR]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENM102 . tel-01557515

**HAL Id: tel-01557515**

**<https://theses.hal.science/tel-01557515>**

Submitted on 6 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Maxime Nguyen**

Thèse dirigée par **Louis Funar**

préparée au sein **l'Institut Fourier**  
et de **l'Ecole Doctorale MSTII**

## Groupes modulaires et groupes d'automorphismes de complexes de surfaces de type infini

Thèse soutenue publiquement le ,  
devant le jury composé de :

**M. Louis Funar**

DR CNRS, Directeur de thèse

**M. Pierre Lochak**

CR CNRS, Rapporteur

**M. Athanase Papadopoulos**

DR CNRS, Rapporteur

**M. Vlad Sergiescu**

Maître de Conférences, Examineur









*Comment voulez-vous que je me menthe  
Vos songes rongent mes pensées  
Vos ronces me sont destinées  
Vous étiez pourtant si charmante*

*Ne prenez pas cet air genêt  
C'est un hasard si mes mains tremble  
Dès l'instant où nous sommes ensemble  
Sous un conifère enlacés*



Emilie Simon (2006)

# Remerciements

La thèse est une aventure pendant laquelle on s'expose à soi-même. C'est aussi le résultat d'interactions avec bon nombre de personnes qui nous entourent.

Je remercie en premier lieu mon directeur de thèse, Louis Funar, qui m'a suivi et fait confiance depuis mon mémoire de Master. Il m'a offert un cadre idéal pour mener à bien ce travail, tant par sa science que sa disponibilité et son attention. Je remercie également Pierre Lochak et Athanase Papadopoulos pour leur travail de relecture attentionnée de mon manuscrit, leurs remarques et intéressantes suggestions, ainsi que Vlad Sergiescu d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie Christophe Champetier qui, après avoir codirigé mon mémoire de M2 avec Louis, est devenu un quasi-voisin de bureau du 1er étage dont j'ai sollicité les compétences topologiques à maintes reprises.

Pierre Will a été aussi victime de harcèlement de ma part, lorsque j'éprouvais des difficultés à découper un pantalon, pour lui voler des livres ou encore pour solliciter ses conseils de vieux routier de l'exposé mathématique. Merci Pierre.

Avec Ariadna, on aura fait un article ensemble, mais aussi de bonnes excursions mathématiques dans divers endroits sympathiques de l'Europe. Merci à toi, pour les soirées tapas mais aussi ton efficacité scientifique et ta bonne humeur.

Je tiens à rendre hommage à Camille, grand maître du 3ème étage s'il en est, pour avoir survécu à la torture quasi quotidienne de mes visites incessantes. Malgré son oreille affûtée, il n'eut pas toujours le temps de se cacher chez HG avant mon arrivée devant son bureau. Danseur d'exception, personnalité populaire, il sut m'accorder le privilège de quelques heures agréables de non-travail, perfides bavardages et sorties montagnardes. Avec ou sans porte-banane, il aura forcé d'imagination pour me donner l'illusion bienveillante que je pourrai un jour, qui sait, faire quelque chose de ma vie.

Je félicite Marianne pour toutes ces pauses bien organisées grâce à un système ingénieux dont je ne révélerai pas le secret ici, pendant lesquelles il était bon de parler et râler ensemble, au soleil ou sous la pluie, à midi ou à 16h, sur les routes de montagne ou à l'institut Fourier.

Je salue également tous ceux que j'aurai cotoyés en salle 04 : les membres du séminaire de topologie, ceux qui m'ont subi pendant plusieurs heures de groupe de travail, ainsi que les doctorants qui auront supporté pendant 24 mois mon organisation du séminaire compréhensible. Merci à Simon d'avoir codirigé cette affaire et Delphine d'avoir repris les choses en main alors que la rédaction de cet ouvrage commençait à me saturer l'esprit.

Merci à Gérard pour son aide, ses conseils et ses signaux de fumée. Merci à Fred, grand coach de l'agreg, pour sa présence toujours affective et rassurante.

Merci aussi à David, Hélène, Julien, Sophie, avec qui j'ai vraiment eu grand plaisir à pratiquer l'enseignement pendant ces trois années.

Hervé fut un conseiller d'orientation influent. Grâce lui soit rendue de m'avoir permis de l'attendre en vélo au col de la Croix Perrin. Il me semble que nous étions tout de même arrivés

avant le bus à Autrans, lieu de rencontre et de raclette incontournable des mathématiciens grenoblois.

J'ai une pensée particulière pour les trois habitants du bureau 1xx, véritable plaque tournante du trafic d'expédition du personnel doctorant vers le Restaurant Universitaire Duthérien à 11h44. Cette organisation occulte, accueillant quelques sombres individus en cuir du 3ème étage, aura résisté à l'hostilité du Crous envers les doctorants.

Je remercie mes cobureaux qui m'ont laissé monopoliser l'ordinateur. Ils auront su absorber une partie du flot de paroles de l'homme en vert pendant mon absence. Bravo à eux d'être calmement restés dans le voisinage du grand barbu qui fait peur (mais qui répare les ordinateurs), et de n'avoir pas donné tout mon chocolat à Gérard.

Merci aussi à tous les administratifs grâce à qui tout roule comme il faut, même quand on envoie un document en retard, et Gaby pour son accueil *caliente* et l'expression de ses sentiments.

Je n'oublierai pas ces pauses café sans café à EVE (je peux vous prendre la chaise ?), ni ces soirées hasardeuses autour d'une pizza pleine de roquette et parmesan. Bash, j'aime ta douceur verbale, tous tes gestes lentement dirigés. Alix, je t'aime aussi mais je t'en prie, ne porte pas atteinte à ma connexité. Mais oui, on va aller chez Mathieu, ce soir il mixe une impro au 6bis.

C'était une bonne idée, Thomas, d'avoir aménagé un studio de musique dans ta chambre. J'ai bien aimé y faire du bruit sur la batterie de Jean avec la Funky Fourier Family et Lady GuGu, tout comme avec l'Orchestre des Campus de Grenoble à la salle Messiaen, dans un autre style, avec Nico, Aurélien, Marine, Manu, ce bon vieux Pierre et le bien-aimé Chef...

Merci à Mouss pour toutes ces choucroutes et corollaires. Je pense à Camille pour ces petits apéros entre colocs, Simon Modeste pour ses gâteaux de dernière minute, Aline pour tous ces repas richement équilibrés. Sans elle, jamais je n'aurais imaginé manger des graines de courge en vrai. Mon expérience de thèse restera à jamais associée au marché de l'Estacade, grand lieu de vie, de joie et de nourriture, où j'ai trouvé mes marques assez rapidement. Je pense au pépé du fond, les cheveux noircis par le soleil, avec le chanteur qui sortait par beau temps. Je ne l'ai jamais revu depuis que je lui ai acheté un cd. Je pense à ces bouteilles d'huile de noix, certes un peu chères, mais qui m'ont fait envie à chaque fois. Elles resteront un fantasme inassouvi. Il y a la dame blonde un peu tassée, avec ses salades à moins de soixante-dix centimes, ses grosse bottes de radis et ses belles barquettes de fraises en juin, le gentil vendeur d'olives à qui j'ai pris de la tapenade cette semaine, la boucherie de porc et volailles au milieu avec ses jeunes vendeuses et des blancs de poulet incomparables. Il y a un vendeur de champignons et autres qui hurle sur tout le monde, je le fuis pour voir ce brave vendeur de pain qui nous vient d'Annecy tous les week-ends. Les tielles de la dame aux huitres sont bonnes, les saucisses de canard d'en face aussi. Jamais je n'oublierai le jambon à l'os du boucher à l'entrée sous le pont, jamais. Et les ravioles, et le comté du presque chauve du milieu, et sa crème fraîche qui donna à ma courge farcie un goût exquis. Et le stand incroyable de fromages du pays tout au fond : raclettes en tout genre, granier, chèvre des bauges, tomme de chartreuse, bleu de sassenage, reblochon fermier... un véritable festival pour les papilles.

Merci à mes parents de m'avoir fait, puis laissé faire les études qui me plaisaient pendant un nombre d'années presque indécent.

Je pense fort à ceux qui m'entourent, qui resteront, bougeront, pédaleront, erreront, grimperont, hésiteront, déménageront, voyageront... à celui qui est trop vite parti,

À celle avec qui, plus belle est la vie.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Complexes de courbes et groupes modulaires</b>	<b>15</b>
2.1	Groupe modulaire d'une surface compacte . . . . .	15
2.2	Le complexe de courbes . . . . .	18
2.3	Autres complexes . . . . .	23
2.4	Link d'un sommet . . . . .	24
2.5	Action du groupe modulaire sur des complexes . . . . .	26
2.6	Automorphismes de $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Groupe de Thompson vu comme un groupe modulaire</b>	<b>38</b>
3.1	Définitions et présentation des résultats . . . . .	39
3.2	La surface et son groupe modulaire asymptotique . . . . .	42
3.3	Le complexe $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . . . . .	45
3.4	Le groupe des automorphismes du complexe $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Groupe des automorphismes du complexe de décomposition d'une surface infinie de genre 0</b>	<b>56</b>
4.1	Introduction . . . . .	56
4.2	Le groupe modulaire $\mathcal{B}$ . . . . .	57
4.3	Le groupe modulaire asymptotique étendu $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$ . . . . .	62
4.4	Le complexe de décompositions en pantalons de $S_{0,\infty}$ . . . . .	65
4.5	Le groupe des automorphismes du complexe $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ . . . . .	68
4.6	Lien avec le cas compact . . . . .	74
	<b>Bibliographie</b>	<b>78</b>

# Chapitre 1

## Introduction

On considère  $\Sigma_{g,n}^p$  une surface orientable de type fini épointée et à bord : c'est la réunion de  $g$  tores à laquelle on ôte  $p$  points et  $n$  disques ouverts ( $g, n, p \in \mathbb{N}$ ). Le complexe de courbes, introduit pour la première fois par Harvey ([Har81]) et défini ici dans la section 2.2, est un complexe simplicial dont les sommets sont les classes d'homotopies de courbes simples fermées non orientées et non triviales. Une courbe simple fermée (on appellera cela un *lacet*) est essentielle si elle n'est pas le bord d'un disque, d'un disque à une piqûre, ou si elle ne borde pas un cylindre avec une composante de bord de la surface. Un ensemble de sommets  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  forme un  $k$ -simplexe si et seulement si les classes  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  ont des représentants deux à deux disjoints. On remarque que le complexe de courbes d'une surface  $\Sigma_{g,n}^p$  est isomorphe au complexe de courbes d'une surface  $\Sigma_{g,n+p}^0$ , de sorte que dans la suite, on ne considèrera que des surfaces à  $n$  composantes de bord que l'on notera génériquement  $\Sigma_{g,n}$ . On rappelle que la caractéristique d'Euler est un invariant topologique dont on connaît la valeur explicite pour une surface orientable de type fini : elle vaut  $\chi(\Sigma_{g,n}) = 2 - 2g + n$ .

Le complexe des courbes d'une telle surface offre, notamment lorsque la surface a une caractéristique d'Euler négative, de nombreuses propriétés topologiques et géométriques. En tant qu'espace topologique, le complexe de courbes est homotopiquement équivalent à un bouquet de sphères dont la dimension est une formule explicite ne dépendant que de sa caractéristique d'Euler ([Har86]). Le complexe de courbes est un espace  $(-\chi(\Sigma_{g,n}) - p)$ -connexe, où  $p$  est égal à 1, 2 ou 3 suivant le type topologique de  $\Sigma_{g,n}$  ([Iva87]). Muni de sa métrique combinatoire, le 1-squelette du complexe de courbes d'une surface de caractéristique d'Euler négative est un espace  $\delta$ -hyperbolique au sens de Gromov, de diamètre infini ([MM99]). La preuve de ce résultat important se base sur la construction d'une quasi-isométrie entre l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(\Sigma_{g,n})$  et le complexe de courbes  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . Bien que Masur et Wolf aient montré dans ([MW95]) que l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(\Sigma_{g,n})$ , muni de la métrique de Teichmüller, n'est pas hyperbolique au sens de Gromov, Masur et Minsky ont démontré plus tard ([MM99]) que  $\mathcal{T}(\Sigma_{g,n})$  est relativement hyperbolique par rapport à une certaine famille de sous-ensembles fermés notés  $Thin_\alpha$ . Etant donné  $\alpha$  un sommet de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ , on définit  $Thin_\alpha$  comme étant le sous-ensemble de  $\mathcal{T}(\Sigma_{g,n})$  où la longueur extrémale de  $\alpha$  est inférieure à un certain  $\epsilon > 0$  fixé à l'avance.

Ainsi, les auteurs montrent que l'espace de Teichmüller électrique  $\mathcal{T}_{el}(\Sigma_{g,n})$ , obtenu de  $\mathcal{T}(\Sigma_{g,n})$  en réduisant les sous-ensembles  $Thin_\alpha$  à des sous-ensembles de diamètre 1, est hyperbolique au sens de Gromov. De plus, Masur et Minsky montrent que  $\mathcal{T}_{el}(\Sigma_{g,n})$  et  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  sont quasi-isométriques, ce qui permet d'affirmer que  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  est également hyperbolique au sens de Gromov. Par la suite, Klarreich ([Kla99]) a calculé le bord à l'infini du complexe de courbes et montré que c'est l'espace de feuilletages minimaux sur  $\Sigma_{g,n}$ .

Le *groupe modulaire* de  $\Sigma_{g,n}$ , noté  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  et introduit dans la section 2.1, est le groupe des classes d'homotopie des homéomorphismes de  $\Sigma_{g,n}$  préservant ou non l'orientation<sup>1</sup>. L'image par un homéomorphisme  $f$  de  $\Sigma_{g,n}$  d'un lacet essentiel est un lacet essentiel, les images par  $f$  de deux lacets homotopes sont deux lacets homotopes, les images par  $f$  de deux lacets disjoints sont deux lacets disjoints. Ainsi, le complexe de courbes est un espace naturel sur lequel agit le groupe modulaire d'une surface. On a un morphisme naturel (section 2.5) :

$$\Psi : \text{Mod}(\Sigma_{g,n}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}))$$

Il existe d'autres complexes sur lesquels le groupe modulaire agit de façon évidente, notons par exemple le complexe de pantalons, le complexe des arcs, le complexe des courbes séparantes. Pour plus de détails, voir la section 2.3.

En 1997, Ivanov ([Iva97]) est le premier à apporter une réponse à la question générale suivante :

**Question 1.** *Le groupe modulaire d'une surface  $\Sigma$  est-il isomorphe au groupe d'automorphismes du complexe  $\mathcal{C}(\Sigma)$ , où  $\mathcal{C}(\Sigma)$  est un complexe de courbes ou de décompositions de la surface  $\Sigma$  ?*

Dans le cadre des hypothèses décrites ci-dessus, cela revient à se demander si ce morphisme naturel  $\Psi$  est un isomorphisme. La réponse est positive pour les surfaces de genre  $g \geq 2$ . Dans le même temps, Korkmaz ([Kor99]) résoud les cas de surface de genre  $g \leq 1$ . Plus tard, une nouvelle preuve traitant le cas de tous les types de surfaces est donnée par Luo ([Luo00]), apportant pour la première fois une réponse au cas de  $\Sigma_{1,2}$ . Puis une réponse analogue concernant le complexe de décompositions en pantalons est traité par Margalit ([Mar04]).

Dans le Chapitre 2, on mettra en avant certaines techniques, maintenant devenues standard, développées par Ivanov puis Korkmaz pour la preuve de la surjectivité du morphisme  $\Psi$ . Le noyau de l'application  $\Psi$  est le centre du groupe modulaire, qui est trivial dans la plupart des cas. Leur démarche consiste à étudier des propriétés topologiques des automorphismes du complexe. Après avoir classifié certains types de classe d'homotopie de lacets de la surface, on montre que ces types sont préservés par tout automorphisme. Une classe d'homotopie de lacet essentiel de la surface  $\Sigma_{g,n}$  est une donnée topologique,

---

1. On prendra garde au fait que dans la littérature, on trouvera souvent le nom "groupe modulaire étendu", tandis que le groupe modulaire concerne seulement les homéomorphismes préservant l'orientation. Ici, sauf quand cela est précisé, le groupe modulaire contient les classes d'homéomorphismes ne préservant pas l'orientation.

mais aussi combinatoire en tant que sommet du complexe de courbes  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . Pour faire le lien entre les deux, il est utile de considérer un complexe auxiliaire associé à chaque classe d'homotopie d'un lacet  $\alpha$  (et donc à chaque sommet de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ ), que l'on nommera le *link*  $\mathcal{L}(\alpha)$ . Le link  $\mathcal{L}(\alpha)$  est un sous-complexe de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  dont les sommets sont les sommets de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  adjacents à  $\alpha$  dans  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . Cela revient à considérer l'ensemble des classes de lacets essentiels disjoints de  $\alpha$ , donc le complexe de courbes de la surface obtenue de  $\Sigma_{g,n}$  après le découpage le long de  $\alpha$ . On détaille l'utilité du link dans la section 2.6.2. On donne un exemple d'application de ces techniques dans la section 2.6.5.

Dans le Chapitre 3, j'apporte une réponse (voir le Théorème 7) à la question 1 appliquée à une surface  $\Sigma_{0,\infty}$  de type infini et au complexe de décompositions de  $\Sigma_{0,\infty}$ . Les définitions et résultats de ce chapitre proviennent de [FN11]. La surface  $\Sigma_{0,\infty}$  est une surface planaire, orientée, de genre zéro, homéomorphe à un voisinage fermé de l'arbre binaire infini sans racine plongé dans le disque hyperbolique  $\mathbb{D}^2$ . On définit ensuite un groupe modulaire adapté à cette surface, que l'on appelle le groupe modulaire asymptotique  $\text{Mod}_a(\Sigma_{0,\infty})$ . Ce groupe est l'ensemble des classes d'homotopie des homéomorphismes de  $\Sigma_{0,\infty}$  préservant une structure additionnelle, appelée *structure rigide*, en dehors d'une sous-surface compacte de  $\Sigma_{0,\infty}$ . Une structure rigide est une décomposition de la surface en hexagones. On fixe une décomposition  $\tau_*$  que l'on appelle la structure canonique. Par la suite, on construit un complexe 2-cellulaire  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  dont les sommets représentent l'ensemble des décompositions de  $\Sigma_{0,\infty}$  en hexagones coïncidant asymptotiquement avec  $\tau_*$ . Deux sommets sont reliés par une arête si on peut relier par à un *mouvement élémentaire* les deux décompositions. Les 2-cellules remplissent les 4-cycles et les 5-cycles que l'on trouve dans le graphe ainsi construit.

En considérant la surface  $\Sigma_{0,\infty}$  comme étant le disque hyperbolique auquel on ajoute une infinité de points de son bord, on peut voir toute décomposition en hexagones de  $\Sigma_{0,\infty}$  comme une triangulation idéale du disque hyperbolique  $\mathbb{D}^2$ . Ce point de vue permet notamment de constater que le groupe modulaire asymptotiquement rigide ainsi défini est isomorphe au groupe de Thompson  $\mathcal{T}$ . Rappelons que le groupe de Thompson  $\mathcal{T}$  est un groupe d'homéomorphismes du cercle, linéaires par morceaux et vérifiant certaines propriétés (voir [CFP96] et Définition 3.1.6).

Ensuite, on étudie l'action de  $\text{Mod}_a(\Sigma_{0,\infty})$  (ou de manière équivalente  $\mathcal{T}$ ) par automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . On montre que celle-ci est transitive et que le morphisme naturel qui envoie un élément de  $\mathcal{T}$  sur un élément de  $\text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  est injectif. Réciproquement, afin de voir si tout automorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  admet un antécédent dans  $\text{Mod}_a(\Sigma_{0,\infty})$ , on étudie les propriétés des automorphismes en les faisant agir sur un complexe auxiliaire, le link d'un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  (par analogie avec la définition du link dans le Chapitre 2, voir la section 3.4.1). On montre que tous les links sont isomorphes, de sorte que l'on peut se ramener à n'étudier que le link de la décomposition standard  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(\tau_*)$ . Son 1-squelette n'est rien d'autre que le graphe d'adjacence de la décomposition  $\tau_*$  : chaque sommet représente un arc de  $\tau_*$ , et deux sommets sont reliés par une arête s'ils représentent deux arcs bordant un même hexagone de  $\tau_*$ .

On constate par ailleurs que tout automorphisme de  $\text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  induit naturellement un isomorphisme de link. Réciproquement, sous certaines conditions sur l'isomor-

phisme de link (voir la section 3.4.2), un isomorphisme de link provient d'un automorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . On obtient alors que le groupe des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  est isomorphe à une extension de  $\mathcal{T}$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Le groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est isomorphe au groupe engendré par l'homéomorphisme agissant comme une symétrie sur  $\Sigma_{0,\infty}$ . Cette extension de  $\mathcal{T}$  revient donc à inclure les homéomorphismes ne préservant pas l'orientation. J'obtiens ainsi un véritable analogue au théorème d'Ivanov que l'on peut reformuler ainsi :

**Théorème.** *Le groupe des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  est isomorphe au groupe modulaire asymptotique étendu de la surface  $\Sigma_{0,\infty}$ .*

On tire également de cette étude certaines propriétés du complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . Du fait de son lien avec le complexe de triangulation d'un polygone convexe, on déduit la connexité et simple connexité de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  (Prop 3.3.2). Par ailleurs, on peut voir directement que ce complexe n'est pas  $\delta$ -hyperbolique au sens de Gromov (Prop 3.3.4). En effet, on peut même construire des triangles géodésiques aussi larges que l'on veut. Cela vient du fait qu'il y a une infinité d'arcs d'une décomposition auxquels on peut appliquer un mouvement élémentaire.

Dans le Chapitre 4, je m'intéresse à une autre surface de type infini  $S_{0,\infty}$  qu'on obtient en recollant deux copies de  $\Sigma_{0,\infty}$  le long de son bord. Dans l'idée de répondre à la problématique énoncée dans la question 1, on définit comme dans le Chapitre 3 un groupe modulaire de  $S_{0,\infty}$ . On part du groupe modulaire asymptotique défini par Funar et Kapoudjian ([FK04]), à savoir le *groupe modulaire universel de genre zero*  $\mathcal{B}$ , dont les éléments préservent asymptotiquement une certaine structure que l'on adjoint à la surface. Cette structure est la donnée d'une décomposition en pantalons de  $S_{0,\infty}$  et d'une collection d'arcs, appelés *coutures*, qui sépare la surface en deux composantes connexes, que l'on nomme respectivement la face visible et invisible. On définit ensuite le groupe  $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$ , contenant  $\mathcal{B}$ , dont les éléments présevent asymptotiquement une décomposition en pantalons uniquement. Le groupe modulaire  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  que l'on définit (Définition 4.2.12) est une complétion du groupe  $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$  qui est finiment engendré (voir la section 4.3.6). Ce groupe est constitué de classes d'homotopie d'homéomorphismes de  $S_{0,\infty}$ , préservant ou non l'orientation, stabilisant asymptotiquement la décomposition en pantalons standard  $E$  fixée à l'avance. Par construction, le groupe modulaire d'une sphère  $\Sigma_{0,n}$  à  $n$  trous se plonge naturellement dans  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$ . Il est à noter que  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  est une extension du groupe de Thompson  $V$ , qui lui même contient  $\mathcal{T}$  comme sous-groupe.

Dans la section 4.4, on définit un complexe 2-cellulaire  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  dont les sommets représentent les décompositions en pantalons de  $S_{0,\infty}$  coïncidant avec la décomposition standard  $E$  en dehors d'un compact. De même que dans le cas compact, on relie deux sommets s'ils représentent deux décompositions en pantalons différant d'un mouvement élémentaire. On obtient ainsi des 3-cycles, 4-cycles et 5-cycles que l'on remplit par des 2-cellules.

On peut ensuite étudier l'action naturelle de  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  par automorphismes. Un raisonnement analogue au cas de  $\Sigma_{0,\infty}$  permet de voir immédiatement que cette

application  $\Psi : \widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$  est injective. Je montre le résultat suivant (voir le Théorème 8) :

**Théorème.** *Le groupe modulaire  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  est isomorphe au groupe des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ .*

Dans la section 4.5.1, pour tout sommet  $F$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ , on définit un graphe coloré  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$  dont les sommets sont les sommets adjacents à  $F$  dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  et qui encode la géométrie de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  autour de  $F$ . Ainsi, tout automorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E)$  dans  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$ , où  $F$  est l'image de  $E$  par cet automorphisme. On étudie ensuite la structure de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E)$  (section 4.5.2) avant de voir comment agissent les générateurs de  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  en tant qu'isomorphismes de link (sections 4.5.4 et 4.5.5).

La section 4.6 permet de faire le lien entre les résultats concernant les surfaces de type fini  $\Sigma_{0,n}$  et le cas de  $S_{0,\infty}$ . On montre que tout automorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  induit naturellement un automorphisme du complexe de pantalons de  $\Sigma_{0,n}$ . Cela permet de voir en utilisant le théorème de Margalit (Théorème 5, [Mar04]) que pour tout automorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ , il existe un élément de  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  dont l'action sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  coïncide avec  $\phi$  sur un compact de  $S_{0,\infty}$  (Lemme 4.6.1). Ce résultat implique que localement, un automorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  se comporte comme un élément de  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$ , ce qui me permet de construire une fonction réciproque à l'application  $\Psi$  et démontrer le Théorème 8.

## Chapitre 2

# Complexes de courbes et groupes modulaires

### 2.1 Groupe modulaire d'une surface compacte

#### 2.1.1 Définition et exemples

On se donne  $\Sigma_{g,n}$  une surface connexe, orientable, compacte, de genre  $g$ , avec  $n$  composantes de bord.

**Définition 2.1.1.** *Le groupe modulaire<sup>1</sup>  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  de la surface  $\Sigma_{g,n}$  est le groupe des classes d'homotopie des homéomorphismes de  $\Sigma_{g,n}$  préservant ou non l'orientation, respectant une paramétrisation donnée des composantes de bord et pouvant permuter les composantes de bord entre elles. Autrement dit,  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  est le quotient  $\text{Homeo}(\Sigma_{g,n})/\text{Homeo}_0(\Sigma_{g,n})$ , où  $\text{Homeo}_0(\Sigma_{g,n})$  est le groupe des homéomorphismes homotopes à l'identité.*

**Définition 2.1.2.** *Le groupe modulaire pur (noté  $\text{PMod}(\Sigma_{g,n})$ ) est le sous-groupe de  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  constitué des éléments qui fixent le bord de la surface point par point.*

Ces deux groupes sont reliés par la suite exacte suivante, où  $\mathfrak{S}_n$  est le groupe des permutations de l'ensemble à  $n$  éléments.

$$1 \rightarrow \text{PMod}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1$$

Voyons maintenant quelques exemples fondamentaux d'éléments du groupe modulaire d'une surface.

#### Involution hyperelliptique

Prenons une surface fermée  $\Sigma_{g,0}$  de genre  $g \geq 0$ . On peut la représenter par un polygone à  $4g + 2$  côtés dont on a identifié les côtés opposés deux à deux. On considère

---

1. Le groupe modulaire est souvent appelé mapping class group, ou mapping class group étendu quand il inclut les classes d'homéomorphismes renversant l'orientation.

un homéomorphisme  $h$  de  $\Sigma_{g,0}$  qui agit comme une rotation d'angle  $\pi$  sur le polygone. Si on considère la surface plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , cela revient à définir une rotation d'angle  $\pi$  autour d'un axe comme cela est représenté sur la Figure 2.1

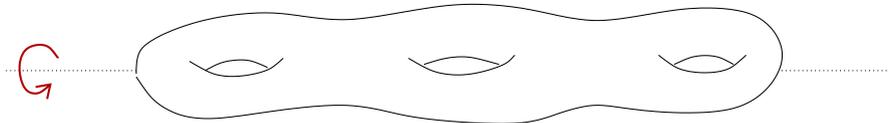


FIGURE 2.1 – La rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe est une involution hyperelliptique

### Twist de Dehn

Etant donnée une surface  $\Sigma_{g,n}$ , on appelle *lacet* de  $\Sigma_{g,n}$  une courbe simple fermée dessinée sur la surface.

On considère un lacet orienté  $a$  de  $\Sigma_{g,n}$ ,  $A = S^1 \times [0, 1]$  un anneau,  $A'$  un voisinage régulier de  $a$  dans  $\Sigma_{g,n}$  et  $f : A \rightarrow A'$  un homéomorphisme préservant l'orientation.

On définit le twist  $T$  sur l'anneau  $A$  par  $T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$ , puis l'application  $T_a$  sur  $\Sigma_{g,n}$  qui

$$T_a(x) = \begin{cases} f \circ T \circ f^{-1}(x) & x \in A' \\ x & x \in \Sigma_{g,n} \setminus A' \end{cases}$$

On note  $\alpha$  la classe d'homotopie (libre) du lacet  $a$ . La classe d'homotopie de l'application  $T_a$  définit un élément non trivial  $t_\alpha$  du groupe modulaire, ne dépendant que de la classe  $\alpha$  ([FM11]). On appelle  $t_\alpha$  le twist de Dehn le long de  $\alpha$ . Voir la Fig 2.2 pour l'illustration d'un exemple.

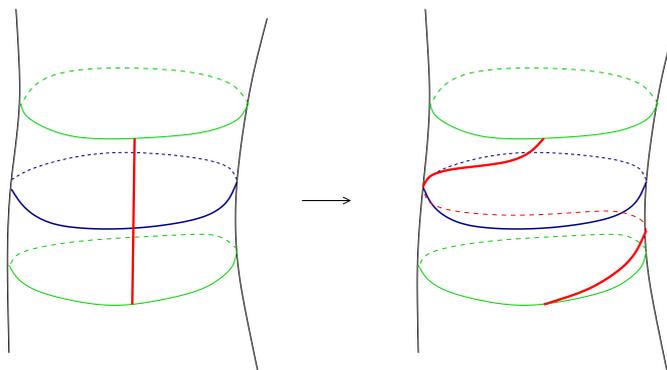


FIGURE 2.2 – Action d'un twist de Dehn sur un segment

On rappelle quelques propriétés de base à savoir sur les twists, que l'on trouve par exemple dans [FM11] :

**Proposition 2.1.1.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux classes d'homotopie de lacets de  $\Sigma_{g,n}$ . Alors les deux twists  $t_\alpha, t_\beta \in \text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  sont égaux si et seulement si  $\alpha = \beta$ .

**Proposition 2.1.2.** Soit  $f \in \text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  et  $\alpha$  la classe d'homotopie d'un lacet de  $\Sigma_{g,n}$ . Alors

$$t_{f(\alpha)} = ft_\alpha f^{-1}$$

On déduit de ces deux propriétés que

**Proposition 2.1.3.** Soit  $f \in \text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  et  $\alpha$  la classe d'homotopie d'un lacet de  $\Sigma_{g,n}$ . Alors  $f$  commute avec  $t_\alpha$  si et seulement si  $\alpha = f(\alpha)$ .

### Demi-twists

On considère un lacet  $a$  et deux composantes de bord notées  $b$  et  $c$  respectivement. On appelle  $P$  le pantalon délimité par  $a, b$  et  $c$ .

On définit un homéomorphisme  $D_{a,b,c}$  de la façon suivante :  $D_{a,b,c}$  coïncide avec l'identité sur  $\Sigma_{g,n} \setminus P$ , il fixe le lacet  $a$  et effectue une rotation d'angle  $\pi$  qui échange  $b$  et  $c$ .

On note  $\alpha$  la classe d'homotopie du lacet  $a$ . La classe d'homotopie de l'application  $D_{a,b,c}$  définit un élément  $d_{\alpha,b,c}$  du groupe modulaire. On appelle  $d_{\alpha,b,c}$  le demi-twist le long de  $\alpha$ , relativement à  $b$  et  $c$ . Voir la Fig 2.3 pour l'illustration d'un exemple.

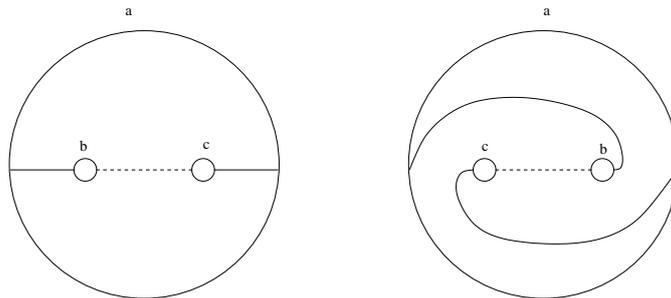


FIGURE 2.3 – Action d'un demi-twist

On remarquera que  $d_{\alpha,b,c}^2 = t_\alpha$ .

### 2.1.2 Une système de générateurs fini du groupe modulaire

**Théorème 1** ([Lic64]). Pour tout  $g, n \geq 0$ , le groupe  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  est engendré par un nombre fini de twists et de demi-twists. De plus, le sous-groupe  $\text{PMod}(\Sigma_{g,n})$  est engendré par un nombre fini de twists. Un système de générateurs est représenté sur la Fig 2.4

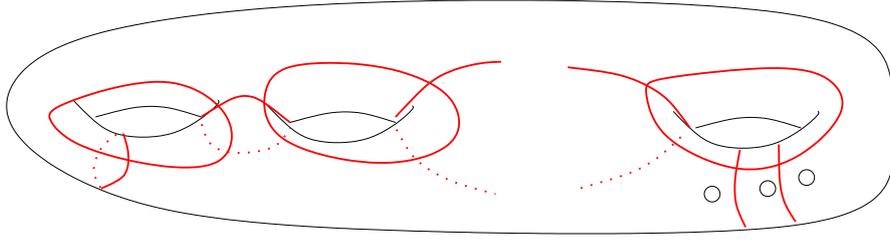


FIGURE 2.4 – Générateurs de  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$

## 2.2 Le complexe de courbes

### 2.2.1 Définitions

On se donne  $\Sigma_{g,n}$  une surface orientable de genre  $g$ , avec  $n$  composantes de bord.

**Définition 2.2.1.** Un lacet est dit **essentiel** s'il n'est pas homotope au bord d'un disque de  $\Sigma_{g,n}$  contenant au plus un trou.

**Définition 2.2.2.** Un **multi-lacet** est une famille de classes d'homotopie de lacets distinctes ayant des représentants deux à deux disjoints. Une **décomposition en pantalons** d'une surface  $\Sigma_{g,n}$  est un multi-lacet maximal.

**Définition 2.2.3.** On construit un complexe simplicial  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  de la façon suivante. Les sommets du complexe sont des classes d'homotopie de lacets de la surface  $\Sigma_{g,n}$ . Deux sommets sont reliés par une arête si les deux classes d'homotopie de lacets associés peuvent être réalisés disjointement dans leur classe d'homotopie. Un  $k$ -simplexe représente un ensemble de  $k + 1$  classes d'homotopie de lacets pouvant être réalisés disjointement deux à deux; les  $k + 1$  faces associées (des  $(k - 1)$ -simplexes) sont obtenues en enlevant un lacet.

Un exemple de simplexe de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  est dessiné dans la Figure 2.5.

**Remarque 2.2.1.** Supposons que  $\Sigma_{g,n}$  soit de genre  $g \geq 2$ . La dimension du complexe  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  est  $3g + n - 4$ . En effet, le nombre de pantalons d'une décomposition maximale de  $\Sigma_{g,n}$  en pantalons est  $2g - 2 + n$ . On en déduit que le cardinal maximal d'une partition est  $3g - 3 + n$ , d'où la dimension du complexe.

*Démonstration.* Par hypothèse, on a que  $g \leq 3g - 3 + n$ . On note  $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ . Etant donnée une surface  $\Sigma_i$ , de genre  $g_i$ , munie de  $n_i$  composantes de bord, on considère l'opération suivante :

- Si  $g_i > 0$ , il existe un lacet essentiel  $\alpha$  tel que  $\Sigma_i \setminus \alpha$  ait une composante connexe, autrement dit que  $\alpha$  ne sépare pas  $\Sigma_i$ , et qu'en coupant  $\Sigma_i$  le long de  $\alpha$ , on obtienne une surface  $\Sigma_{i+1}$  de genre  $g_i - 1$ . Cela crée deux composantes de bord supplémentaires, et ainsi  $n_j = n_i + 2$ .

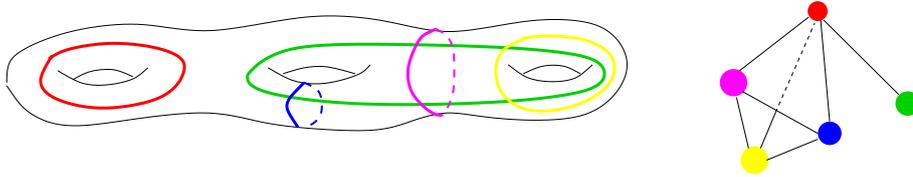


FIGURE 2.5 – Exemple de simplexes dans  $\mathcal{C}(\Sigma_{3,0})$

- Si  $g_i = 0$  et  $n_i > 3$  : il existe un lacet essentiel  $\alpha$  séparant  $\Sigma$ . En coupant  $\Sigma$  le long de  $\alpha$ , on obtient une surface  $\Sigma_{i+1}$  ayant deux composantes connexes, de genre  $g_i$ . Comme précédemment, on a  $n_{i+1} = n_i + 2$ .
- Si  $g_i = 0$  et  $n_i = 3$  : on ne fait rien.

On applique cette opération à  $\Sigma$ , et on obtient une surface avec plusieurs composantes connexes. Récursivement, on applique cette action à chaque composante connexe de la surface  $\Sigma_i$  ainsi obtenue, en commençant par celles dont le genre est strictement positif. On fait cette opération  $3g - 3 + n$  fois.

A chaque opération, si la somme des genres de chaque composante est strictement positive, elle diminue de 1. Sinon, c'est le nombre de composantes qui augmente de 1. Soit  $f(i)$  la somme des genres diminuée du nombre de composantes connexes de la surface  $\Sigma_i$  : alors  $f(0) = g - 1$ , et pour tout  $i$  :  $f(i+1) = f(i) - 1$ . Ainsi, après  $3g - 3 + n$  opérations,  $f(3g - 3 + n) = g - 1 - (3g - 3 + n) = 2 - 2g - n$ . Or  $g \leq 3g - 3 + n$ , donc la somme des genres est nulle, et ainsi le nombre de composantes connexes est  $2g - 2 + n$ . Or à chaque opération, la somme sur chaque composante connexe des caractéristiques d'Euler de chaque composante est invariante : en effet, dans le premier cas, la caractéristique est

$$2 - 2(g - 1) - (n + 2) = 2 - 2g - n$$

et dans le deuxième cas elle est égale à

$$2 - 2g' - n' + 2 - 2(g - g') + (n - n') + 2 = 2 - 2g - n$$

Donc après  $3g - 3 + n$  opérations, chaque composante est de caractéristique  $-1$ . Or elles sont chacune de genre 0, donc ce sont des sphères à 3 trous, pour lesquelles il n'existe pas de lacet essentiel.  $\square$

## 2.2.2 Géométrie

### Métrie sur le graphe

**Définition 2.2.4.** On note par  $d$  la distance naturelle associée au graphe de courbes  $\mathcal{C}^{(1)}(\Sigma_{g,n})$  (le 1-squelette du complexe  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ ), qui assigne la distance 1 entre deux sommets reliés par une arête.

Ainsi, si le graphe de courbes  $\mathcal{C}^{(1)}(\Sigma_{g,n})$  est connexe, alors  $\mathcal{C}^{(1)}(\Sigma_{g,n})$  est un espace métrique géodésique complet.

On caractérise deux lacets disjoints de la façon suivante :  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux classes de lacets pouvant être réalisés disjointement si et seulement si  $d(\alpha, \beta) = 1$ .

### Métrie sur le complexe

Chaque simplexe  $B$  peut être muni d'une structure euclidienne, associée à la distance  $d_B$ , pour laquelle chaque arête du simplexe est de longueur 1. On peut voir  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  comme un espace métrique géodésique en construisant la distance suivante :

#### Définition 2.2.5.

Soit  $x, y \in \mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  : une  $m$ -chaîne de  $x$  à  $y$  est un  $(m + 1)$ -tuple  $C = (x_0, \dots, x_m)$  de points du complexe tels que  $x = x_0$ ,  $y = x_m$ , et pour tout  $i$  il existe un simplexe  $B(i)$  contenant à la fois  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

La longueur d'une chaîne  $C$  est

$$\lambda(C) = \sum_{i=0}^{m-1} d_{B(i)}(x_i, x_{i+1})$$

**Définition 2.2.6.** Dans le cas où  $\Sigma_{g,n}$  est non dégénérée,  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  est connexe d'après le Lemme 2.2.1. Ainsi, on associe la distance :

$$d_{\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})}(x, y) = \inf\{\lambda(C), C \text{ est une chaîne de } x \text{ à } y\}$$

### 2.2.3 Cas dégénérés

Si  $\Sigma$  est la sphère ( $g = 0$ ), avec  $n \leq 3$  trous, alors  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}) = \emptyset$ .

Si  $g = 0$  et  $n = 4$ , ou encore  $g = 1$  et  $n = 0$ , le complexe est un ensemble dénombrable de points. En effet, on ne peut pas trouver deux lacets essentiels disjoints. Pour ces deux cas de figure, on modifie légèrement la définition du complexe de courbes en disant que deux sommets sont reliés par une arête si l'intersection géométrique des deux lacets associés est minimale (égale à 2 si  $g = 0$  et  $n = 4$ , égale à 1 si  $g = 1$  et  $n = 0$ ). Dans ces deux cas, on constate que le complexe des courbes est alors isomorphe au graphe de Farey.

Tous ces cas seront appelés des cas *dégénérés*. Une surface *non dégénérée* est donc une surface qui vérifie que

$$3g + n - 4 > 0$$

## 2.2.4 Intersections géométriques et distance

**Définition 2.2.7.** Soit  $\alpha, \beta$  les classes d'homotopie de deux lacets essentiels. Soit  $a$  et  $b$  deux représentants respectifs des classes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que le cardinal de  $a \cap b$  est minimal. On note  $i(\alpha, \beta)$  ce cardinal : c'est le nombre d'intersections géométriques de  $\alpha$  et  $\beta$ .

Deux lacets d'une même classe d'homotopie peuvent être réalisés disjointement. On en déduit un premier lien entre distance et intersection géométrique :

$$d(\alpha, \beta) \leq 1 \text{ si et seulement si } i(\alpha, \beta) = 0$$

Plus précisément, le lemme suivant permet de voir que l'on peut borner la distance par une fonction affine de l'intersection géométrique.

**Lemme 2.2.1.** Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{(1)}(\Sigma_{g,n})$ ,  $d(\alpha, \beta) \leq 2i(\alpha, \beta) + 1$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{(1)}(\Sigma_{g,n})$ . On peut les supposer distincts. On les réalise dans leur classe d'homotopie de telle sorte que  $|\alpha \cap \beta| = i(\alpha, \beta)$ . Si  $i(\alpha, \beta) = 0$ , alors  $d(\alpha, \beta) = 1$ .

**1er cas** : si  $i(\alpha, \beta) = 1$ , on considère un voisinage de  $\alpha \cup \beta$ . Ce voisinage est un tore avec un trou, dont le bord forme un lacet  $\gamma$  disjoint de  $\alpha$  et  $\beta$ . Mais on suppose que  $\Sigma$  est non dégénérée, donc  $\gamma$  est non trivial. Cela montre que  $d(\alpha, \beta) = 2$ .

**2ème cas** : si  $i(\alpha, \beta) \geq 2$  : on procède par récurrence. On considère deux intersections successives de  $\alpha$  sur  $\beta$ . Il y a deux cas (voir la Fig 2.6) suivant que ces deux points d'intersection ont la même orientation ou non.

On construit un lacet  $\alpha'$  de la façon suivante : on note  $\beta = \beta_0 \cup \beta_1$  où  $\beta_0$  est le sous-arc de  $\beta$  dont les extrémités sont les points d'intersections considérés, qui n'intersecte pas  $\alpha$ , et  $\alpha = \alpha_0 \cup \alpha_1$  où  $\alpha_0$  a pour extrémité gauche la première intersection de  $\beta$  avec  $\alpha$ , et pour extrémité droite l'autre intersection. En posant  $\alpha' = \alpha_0 \cup \beta_0$ , on forme un lacet non trivial, et non homotope à une composante de bord (il intersecte au moins une fois un élément de  $\mathcal{C}^{(1)}(\Sigma_{g,n})$ ), et vérifiant  $i(\alpha', \beta) \leq i(\alpha, \beta) - 1$ , ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\alpha'$  et  $\beta$ . On en déduit, par inégalité triangulaire, que  $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \alpha') + 2i(\alpha, \beta) - 1$ . Or  $d(\alpha, \alpha') \leq 2$ , car  $i(\alpha, \alpha') \in \{0, 1\}$ , cela permet de conclure.

□

## 2.2.5 Topologie

On déduit directement du Lemme 2.2.1 le résultat suivant :

**Lemme 2.2.2.** Soit  $\Sigma_{g,n}$  une surface de genre  $g$  avec  $n$  composantes de bord, où  $g$  et  $n$  sont des entiers excluant les cas où  $g = 0$  et  $n \leq 4$ ,  $g = 1$  et  $n \leq 1$  ; alors le complexe de courbes  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  est connexe.

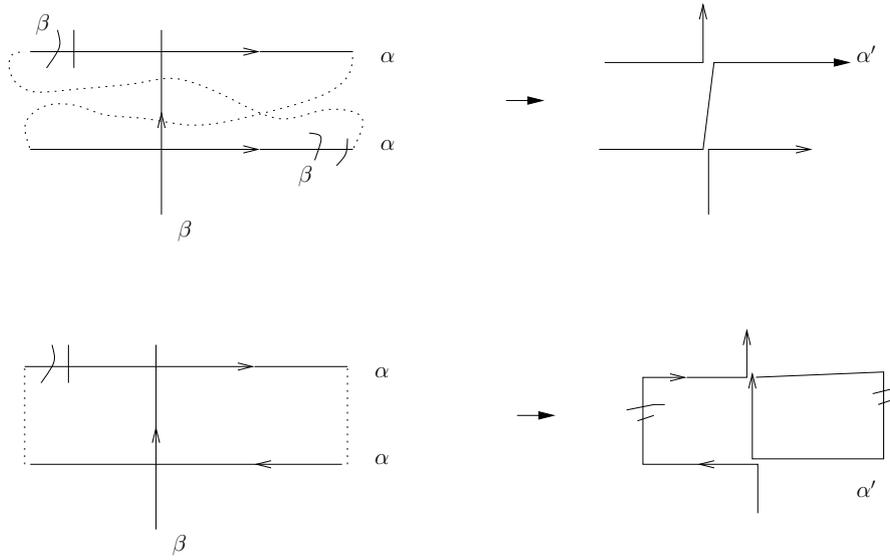


FIGURE 2.6 – Chirurgie sur les lacets  $\alpha$  et  $\beta$

On connaît précisément le type d'homotopie du complexe de courbes. Celui-ci ne dépend que de la topologie de la surface.

**Théorème 2** ([Har86],[IJ08]). *Le complexe de courbes  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  est homotopiquement équivalent à un bouquet infini de sphères dont la dimension est donnée dans le tableau suivant.*

$g$	$n$	$\dim(\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}))$	$\text{hdim}(\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}))$
$g = 0$	$n \geq 3$	$n - 4$	$n - 4$
$g = 1$	$n = 0$	0	0
$g = 1$	$n \geq 1$	$n - 1$	$n - 1$
$g \geq 2$	$n = 0$	$2g - 2$	$3g - 4$
$g \geq 2$	$n \geq 1$	$2g - 3 + n$	$3g - 4 + n$

Ainsi, il suffit de connaître la structure du complexe  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  pour savoir si  $g \leq 1$  ou non, et même connaître toute la topologie de  $\Sigma_{g,n}$  si  $g \geq 2$ .

## 2.2.6 Propriétés hyperboliques

La distance définie sur le 1-squelette de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  fait de ce graphe un espace métrique géodésique. On rappelle la définition d'un espace hyperbolique au sens de Gromov :

**Définition 2.2.8** ([Gro81],[Gro87]). *Etant donné un réel positif  $\delta$ , un espace métrique géodésique  $X$  est appelé  $\delta$ -hyperbolique si tout triangle hyperbolique est  $\delta$ -fin (voir la Fig 2.7). Autrement dit, étant donnés trois points quelconques  $x, y, z$  de  $X$ , toute géodésique reliant  $x$  à  $z$  est contenue dans un  $\delta$ -voisinage de la réunion de deux géodésiques reliant  $x$  à  $y$  et  $y$  à  $z$  respectivement.*

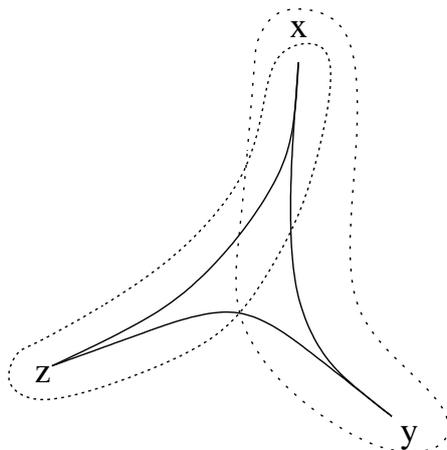


FIGURE 2.7 – Triangle  $\delta$ -fin.

En 1999, Masur et Minsky ont montré le théorème suivant :

**Théorème 3** ([MM99]). *Si  $\Sigma_{g,n}$  est non dénégérée, alors  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  est un espace hyperbolique de diamètre infini.*

## 2.3 Autres complexes

On définit ici plusieurs complexes cellulaires dont la construction s’inspire directement de celle du complexe de courbes d’une surface.

### 2.3.1 Complexe des arcs

On se donne  $\Sigma_{g,n}$  une surface orientable de genre  $g$ , avec  $n$  composantes de bord.

**Définition 2.3.1.** *Un arc essentiel de la surface  $\Sigma_{g,n}$  est un plongement  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma_{g,n}$  non homotope à une composante de bord, dont les extrémités  $\gamma(0)$  et  $\gamma(1)$  appartiennent à une composante de bord.*

**Définition 2.3.2.** *On définit un complexe simplicial  $\mathcal{A}(\Sigma_{g,n})$  de la façon suivante : un  $k$ -simplexe représente un ensemble de  $k + 1$  classes d’homotopie d’arcs essentiels de  $\Sigma_{g,n}$  pouvant être réalisés disjointement. Ainsi, les sommets du complexe sont des classes d’homotopie d’arcs, et deux sommets sont reliés par une arête si ces deux classes d’homotopie d’arcs ont des représentants disjoints .*

### 2.3.2 Complexe de pantalons

Une décomposition en pantalons de  $\Sigma_{g,n}$  est une famille de lacets qui définit un simplexe maximal du complexe des courbes  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . Elle comporte  $3g - 3 + n$  lacets. Le complémentaire d’une décomposition en pantalons est une famille de  $2g - 2 + n$  pantalons.

**Définition 2.3.3.** Soit deux décompositions en pantalons  $F$  et  $F'$  de la surface  $\Sigma_{g,n}$ . On dit que  $F$  et  $F'$  diffèrent d'un **mouvement élémentaire** si  $F'$  peut être obtenue de  $F$  en remplaçant un lacet par un autre qui l'intersecte de façon minimale.

On fixe un lacet  $\alpha$  de  $F$  et on le considère dans le complémentaire des autres lacets de la décomposition en pantalons  $F$ . Il y a deux cas possibles :

- Si  $\alpha$  appartient à une surface homéomorphe à  $\Sigma_{0,4}$  alors un lacet  $\alpha'$  intersecte  $\alpha$  de façon minimale si et seulement si  $i(\alpha, \alpha') = 2$  (Fig 2.8)
- Si  $\alpha$  appartient à une surface homéomorphe à  $\Sigma_{1,1}$  alors un lacet  $\alpha'$  intersecte  $\alpha$  de façon minimale si et seulement si  $i(\alpha, \alpha') = 1$  (Fig 2.9)

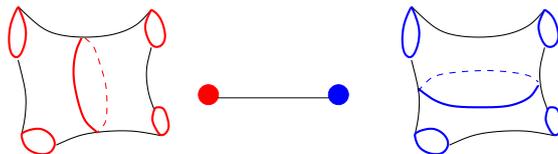


FIGURE 2.8 – Mouvement élémentaire sur  $\Sigma_{0,4}$

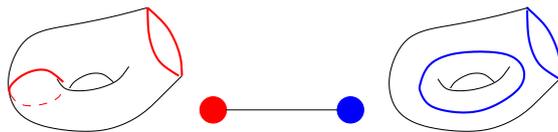


FIGURE 2.9 – Mouvement élémentaire sur  $\Sigma_{1,1}$

**Définition 2.3.4.** On définit le complexe de pantalons de  $\Sigma_{g,n}$ , noté  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{g,n})$ , de la façon suivante :

- Les sommets sont les décompositions en pantalons de  $\Sigma_{g,n}$ .
- Deux sommets sont reliés par une arête si ces sommets représentent deux décompositions en pantalons qui diffèrent par un mouvement élémentaire.
- Les 2-cellules ont pour bord les cycles de mouvements élémentaires du type suivant : triangulaire, carré, pentagonal (voir les Figures 2.10, 2.11, 2.12, 2.13).

## 2.4 Link d'un sommet

On introduit une notion utile par la suite concernant les complexes. Soit  $K$  un complexe simplicial,  $L$  un sous-complexe. On dit que  $L$  est un sous-complexe *complet* si tout ensemble de sommets de  $L$  formant un simplexe de  $K$  forme également un simplexe de  $L$ .

On définit le link d'un sommet, puis le link dual :

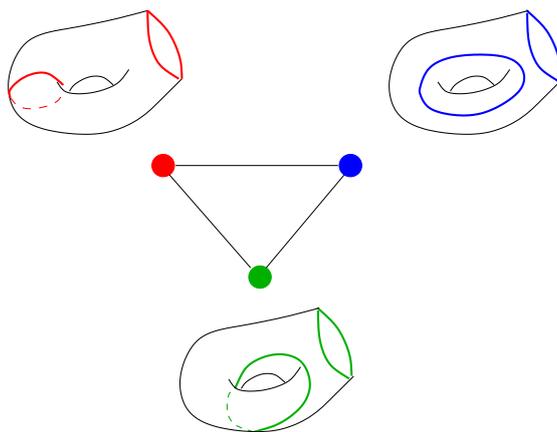


FIGURE 2.10 – 2-cellule triangulaire

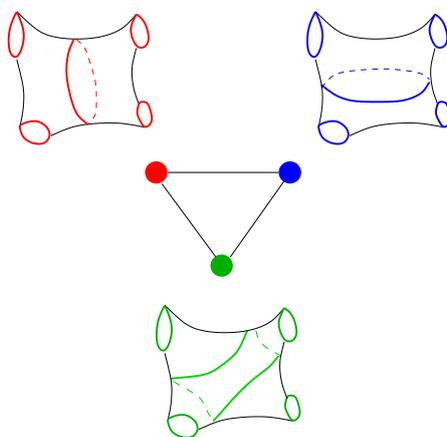


FIGURE 2.11 – 2-cellule triangulaire

**Définition 2.4.1.** Pour tout sommet  $\alpha$  d'un complexe simplicial  $K$ , le link  $\mathcal{L}(\alpha)$  associé à  $\alpha$  est le sous-complexe complet de  $K$  dont les sommets sont les sommets de  $K$  reliés par une arête à  $\alpha$  dans  $K$ . Le link dual  $\mathcal{L}^d(\alpha)$  est le graphe dont les sommets sont ceux de  $\mathcal{L}(\alpha)$ . Ces sommets sont reliés par une arête si et seulement s'ils ne sont pas reliés par une arête dans  $K$ .

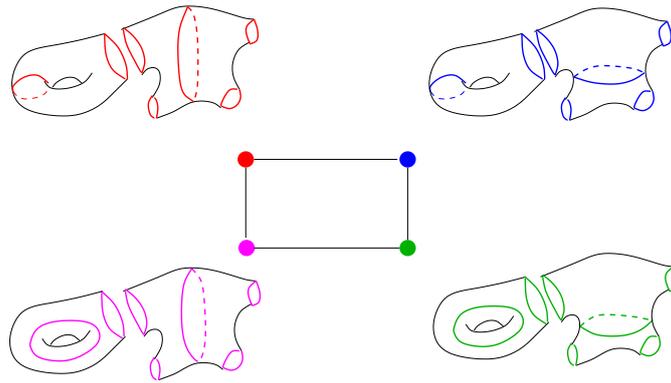


FIGURE 2.12 – 2-cellule carrée

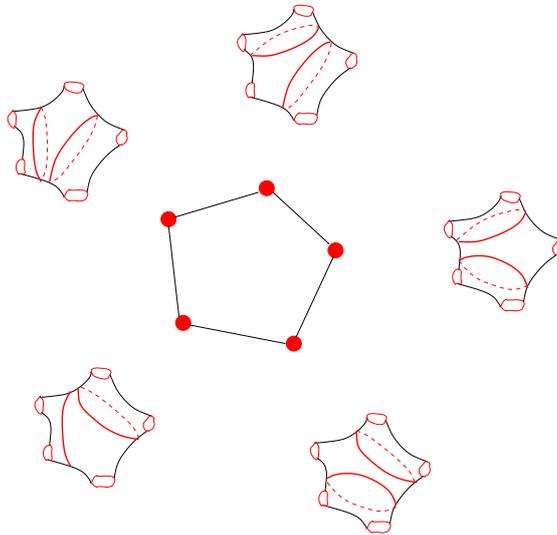


FIGURE 2.13 – 2-cellule pentagonale

## 2.5 Action du groupe modulaire sur des complexes

### 2.5.1 Action sur le complexe des courbes

Le groupe modulaire a une action naturelle sur le complexe de courbes définie de la façon suivante. Etant donnée la classe d'homotopie d'un homéomorphisme  $f$  de la surface, on définit l'image de la classe d'homotopie d'un lacet essentiel  $\alpha$  comme étant la classe d'homotopie du lacet essentiel  $f(\alpha)$ . Du fait que tout homéomorphisme préserve l'intersection nulle entre deux lacets, on voit que  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  agit sur le complexe de courbes  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  comme un automorphisme simplicial. Un exemple d'action d'un élément du groupe modulaire sur un lacet est donné dans la Figure 2.15.

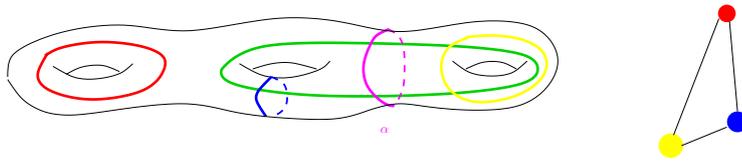


FIGURE 2.14 – Exemple de simplexes dans  $\mathcal{L}(\alpha)$

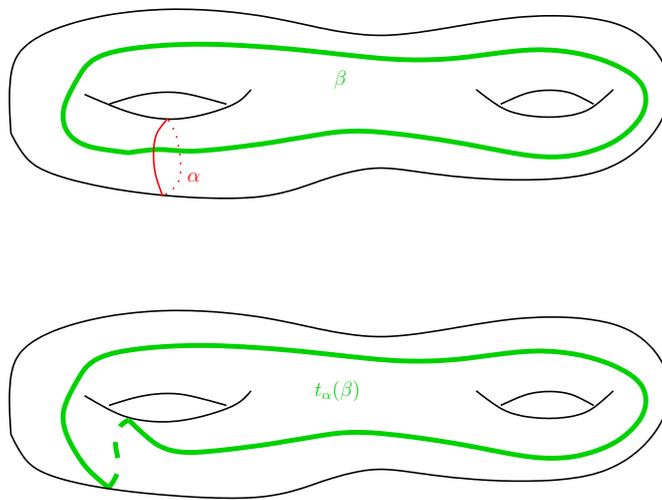


FIGURE 2.15 – Action de  $t_\alpha$  sur  $\beta$

En d'autres termes, il existe un morphisme naturel

$$\Psi : \text{Mod}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}))$$

Ivanov ([Iva97]), Korkmaz ([Kor99]) montrent que sous certaines conditions sur  $\Sigma_{g,n}$ , l'application  $\Psi$  est un isomorphisme. Luo donne une nouvelle preuve ([Luo00]) valable pour tout genre  $g$ , en traitant le cas jusqu'alors non résolu de  $\Sigma_{1,2}$ . Leurs résultats sont résumés dans le théorème suivant :

**Théorème 4** ([Iva97],[Kor99],[Luo00]). *Si  $g \geq 2$  et  $n \geq 1$ ,  $g = 1$  et  $n \geq 3$  ou  $g = 0$  et  $n \leq 5$ , l'application naturelle  $\Psi$  est un isomorphisme entre  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  et  $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}))$ .*

Plus précisément, pour toute surface de caractéristique d'Euler négative non homéomorphe à  $\Sigma_{1,2}$ , l'application  $\Psi : \text{Mod}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}))$  est une surjection. Si  $\Sigma$  est

homéomorphe à  $\Sigma_{1,1}$ ,  $\Sigma_{1,2}$ ,  $\Sigma_{2,0}$ , le noyau  $\ker(\Psi)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (il est engendré par l'involution hyperelliptique). Si  $\Sigma$  est homéomorphe à  $\Sigma_{0,4}$ ,  $\ker(\Psi)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (il est engendré par les deux involutions hyperelliptiques). En fait,  $\ker(\Psi)$  est le centre du groupe modulaire (voir la Prop 2.1.3 et [Kor99]).

Pour démontrer la surjectivité du morphisme  $\Psi : \text{Mod}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}))$ , Ivanov et Korkmaz étudient les propriétés des automorphismes de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . On va énoncer certains résultats importants dans la section 2.6.

## 2.5.2 Action sur le complexe de pantalons

En considérant l'action simpliciale du groupe modulaire sur le complexe de courbes, on constate qu'un simplexe maximal du complexe de courbes est envoyé sur un simplexe maximal. En d'autres termes, le groupe modulaire envoie une décomposition en pantalons de la surface sur une autre. Il en résulte qu'il existe un morphisme naturel  $\Psi' : \text{Mod}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{g,n})$ . Un résultat analogue au théorème d'Ivanov a été démontré par Margalit.

**Théorème 5** ([Mar04]). *Si  $g \geq 2$  et  $n \geq 1$ ,  $g = 1$  et  $n \geq 3$  ou  $g = 0$  et  $n \leq 4$ , l'application naturelle  $\Psi'$  est un isomorphisme entre  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  et  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{g,n})$ .*

Ce résultat est plus précis que le théorème précédent, dans le sens où le groupe des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{g,n})$  est potentiellement plus gros que celui de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . Des versions analogues de ce résultat appliqué à des cas de surfaces de type infini feront l'objet des chapitres 3 et 4.

## 2.6 Automorphismes de $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$

### 2.6.1 Classification des lacets essentiels

Par définition, un automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  agit sur l'ensemble des sommets de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ , donc envoie la classe d'homotopie d'un lacet essentiel sur un autre. On va étudier plus précisément cette action en distinguant certaines classes d'homotopie de lacets essentiels que l'on définit dans ce paragraphe. On fixe la classe d'homotopie d'un lacet essentiel (autrement dit un sommet de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ ) que l'on note  $\alpha$ .

On note  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  la surface obtenue en découpant  $\Sigma_{g,n}$  le long de  $\alpha$ .

On dit que le sommet  $\alpha$  est *non séparable* si la surface  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  est connexe. Sinon, le sommet  $\alpha$  est dit *séparable*.

Si  $\alpha$  est séparable et qu'une composante connexe de  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  est un disque à  $k$  trous, on dit que  $\alpha$  est *k-séparable*.

**Proposition 2.6.1.** *Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux lacets non séparants, il existe un homéomorphisme  $f$  de  $\Sigma_{g,n}$  tel que  $f(\alpha) = \beta$ .*

*Démonstration.* Cela vient du fait que les deux surfaces  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  et  $\Sigma_{g,n}^{(\beta)}$  sont homéomorphes.  $\square$

**Proposition 2.6.2.** *Si  $(\alpha, \beta)$  et  $(\alpha', \beta')$  sont deux paires de lacets tels que  $i(\alpha, \beta) = i(\alpha', \beta') = 1$ , il existe un homéomorphisme  $f$  de  $\Sigma_{g,n}$  tel que  $f(\alpha) = \alpha'$  et  $f(\beta) = \beta'$ .*

*Démonstration.* Cela vient du fait que les deux surfaces  $(\Sigma_{g,n}^{(\alpha)})^{(\beta)}$  et  $(\Sigma_{g,n}^{(\alpha')})^{(\beta')}$  sont homéomorphes.  $\square$

On déduit de ces deux propositions le résultat suivant :

**Proposition 2.6.3.** *Soit  $\alpha$  un lacet essentiel de  $\Sigma_{g,n}$ . Alors  $\alpha$  est non-séparant si et seulement s'il existe un lacet essentiel  $\beta$  tel que  $i(\alpha, \beta) = 1$ .*

## 2.6.2 Interprétation sur le link d'un sommet

Soit  $\alpha$  un sommet de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . La surface  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  obtenue après le découpage le long d'un représentant de  $\alpha$  comporte une ou deux composantes connexes.

Si  $\alpha$  est un lacet séparant, la surface  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  a deux composantes connexes  $S_1$  et  $S_2$ . Tout sommet de  $\mathcal{L}^d(\alpha)$  est un lacet essentiel de  $S_1$  ou de  $S_2$ . La surface  $S_2$  contient un lacet essentiel si et seulement si elle n'est pas homéomorphe à un disque à deux trous. Par ailleurs, deux sommets  $x, y$  de  $\mathcal{L}^d(\alpha)$  sont connectés par un chemin dans  $\mathcal{L}^d(\alpha)$  si et seulement s'il existe une chaîne de lacets  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  ayant  $x$  et  $y$  pour extrémités et telle que pour tout  $1 \leq i < k$ ,  $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ . Ceci est possible si et seulement si ces deux sommets appartiennent à la même composante connexe de la surface  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$ . On en déduit la propriété suivante :

**Proposition 2.6.4.** *Soit  $\alpha$  un lacet essentiel de  $\Sigma_{g,n}$ . Son link dual  $\mathcal{L}^d(\alpha)$  est connexe si et seulement si  $\alpha$  est non-séparant ou 2-séparant.*

On note  $a_1$  et  $a_2$  les deux composantes de bord de  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  issues de ce découpage. Tout sommet  $\beta'$  de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}^{(\alpha)})$  correspond à la classe d'homotopie d'un lacet essentiel de la surface  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$ . En particulier, cette classe n'est homotope à aucune des composantes de bord  $a_1$  et  $a_2$ . Après le recollement de  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  le long de  $a_1$  et  $a_2$ , on obtient de nouveau  $\Sigma_{g,n}$ , et  $\beta'$  définit la classe d'homotopie d'un lacet essentiel  $\beta$  de  $\Sigma_{g,n}$  différent de  $\alpha$  et d'intersection géométrique nulle avec  $\alpha$ . Réciproquement, si  $\beta$  est un lacet essentiel d'intersection géométrique nulle avec  $\alpha$ , ce lacet définit après découpage le long de  $\alpha$  un lacet essentiel de la surface  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$ . Si  $\alpha$  est non séparant, on a donc un isomorphisme entre les complexes  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}^{(\alpha)})$  et  $\mathcal{L}(\alpha)$ .

Si  $\alpha$  est séparant, on remarque que  $\mathcal{C}(S_1)$  et  $\mathcal{C}(S_2)$  sont des sous-complexes complets de  $\mathcal{L}(\alpha)$ .

On considère maintenant  $\alpha$  un sommet de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  et  $\phi$  un automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . Soit  $\beta$  un sommet de  $\Sigma_{g,n}$  à distance 1 de  $\alpha$ ;  $\phi(\beta)$  est donc à distance 1 de  $\phi(\alpha)$ . L'automorphisme  $\phi$  induit donc deux applications

$$\phi_* : \mathcal{L}(\alpha) \rightarrow \mathcal{L}(\phi(\alpha))$$

$$\phi_{*,d} : \mathcal{L}^d(\alpha) \rightarrow \mathcal{L}^d(\phi(\alpha))$$

Si  $\beta$  et  $\beta'$  sont deux sommets de  $\mathcal{L}(\alpha)$  à distance 1 dans  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ , il en est de même pour  $\phi(\beta)$  et  $\phi(\beta')$ . Cela permet de voir que les applications induites  $\phi_*$  et  $\phi_{*,d}$  sont des isomorphismes.

Dans le cas où  $\alpha$  est séparant et que  $\mathcal{L}^d(\alpha)$  a deux composantes connexes  $\mathcal{L}_1^d(\alpha)$  et  $\mathcal{L}_2^d(\alpha)$  associées respectivement aux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , l'existence de l'isomorphisme  $\phi_{*,d} : \mathcal{L}^d(\alpha) \rightarrow \mathcal{L}^d(\phi(\alpha))$  implique que  $\mathcal{L}^d(\phi(\alpha))$  a deux composantes connexes  $\mathcal{L}_1^d(\phi(\alpha))$  et  $\mathcal{L}_2^d(\phi(\alpha))$ . De plus,  $\phi_{*,d}$  induit un isomorphisme  $\mathcal{L}_j^d(\alpha) \rightarrow \mathcal{L}_j^d(\phi(\alpha))$  pour tout  $j \in \{1, 2\}$ . A tout sommet de  $\mathcal{L}_j^d(\alpha)$  correspond un unique sommet de  $\mathcal{L}(\alpha)$ . Cela permet d'identifier deux sous-complexes  $\mathcal{L}_1(\alpha)$  et  $\mathcal{L}_2(\alpha)$  de  $\mathcal{L}(\alpha)$ , qui sont respectivement les complexes de courbes  $\mathcal{C}(S_1)$  et  $\mathcal{C}(S_2)$  identifiés plus haut. De même, en identifiant deux sous-complexes  $\mathcal{L}_1(\phi(\alpha))$  et  $\mathcal{L}_2(\phi(\alpha))$  de  $\mathcal{L}(\phi(\alpha))$ , on obtient un isomorphisme  $\mathcal{L}_j(\alpha) \rightarrow \mathcal{L}_j(\phi(\alpha))$  pour tout  $j \in \{1, 2\}$ .

### 2.6.3 Propriétés topologiques des automorphismes de $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$

Nous allons voir que l'intersection géométrique minimale entre deux lacets  $\alpha$  et  $\beta$  (égale à 1 ou 2 suivant le genre de la surface) est stable par tout automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . Ce sont des éléments clés dans la preuve d'Ivanov et Korkmaz du Théorème 4, dont on rappellera la structure dans la section 2.6.4.

#### Cas où le genre $g \geq 1$

Lorsque le genre de la surface est non nul, il existe des paires de lacets essentiels  $\alpha, \beta$  telles que  $i(\alpha, \beta) = 1$ . Pour des raisons topologiques, leur image par un homéomorphisme de la surface  $\Sigma_{g,n}$  est une paire de lacets essentiels d'intersection géométrique égale à 1. On va montrer que tout automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  vérifie également cette propriété (Lemme 2.6.2). Pour montrer ce résultat, il est utile de s'aider de la caractérisation suivante :

**Lemme 2.6.1.** *Soient  $\alpha, \beta$  deux sommets de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  :*

1. *Si  $g \geq 2$ ,  $i(\alpha, \beta) = 1$  si et seulement s'il existe trois sommets  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  tels que :*
  - $\gamma_1, \alpha, \gamma_2, \beta, \gamma_3$  forment un pentagone dans  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  ;
  - $\gamma_2$  est séparant ;
  - $\Sigma_{g,n}^{(\gamma_2)}$  a une composante connexe isomorphe au tore à un trou  $\Sigma_{1,1}$  contenant  $\alpha$  et  $\beta$ .
2. *Si  $g = 1$ ,  $i(\alpha, \beta) = 1$  si et seulement s'il existe trois sommets  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  tels que :*
  - $\gamma_1, \alpha, \gamma_2, \beta, \gamma_3$  forment un pentagone dans  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  ;
  - $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont  $n$ -séparants ;
  - $\gamma_3$  est non-séparant.

*Démonstration.* L'existence de tels lacets est donnée par le fait que si  $i(\alpha_0, \beta_0) = 1$ , d'après la Proposition 2.6.2, il existe un homéomorphisme qui envoie des représentants de  $\alpha$  et  $\beta$  représentés dans la Figure 2.18.

Réciproquement, supposons l'existence de  $\gamma_1, \alpha, \gamma_2, \beta, \gamma_3$  vérifiant les hypothèses du lemme, et montrons qu'alors  $i(\alpha, \beta) = 1$ .

On considère la surface  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  obtenue après découpage de  $\Sigma_{g,n}$  le long de  $\alpha$ . Il s'agit d'une surface homéomorphe à  $\Sigma_{g-1,n+2}$  car  $\alpha$  est non séparant. On note  $p$  l'application de recollement associée à ce découpage et  $a_1, a_2$  les deux composantes de bord de  $\Sigma_{g,n}^{(\alpha)}$  telles que  $p(a_1) = p(a_2) = \alpha$ .

Soit  $m = i(\alpha, \beta) \geq 1$ . On veut montrer que  $m = 1$ .

A priori,  $p^{-1}(\beta)$  est une union d'arcs. Utilisons maintenant l'hypothèse que les cinq lacets  $\gamma_1, \alpha, \gamma_2, \beta, \gamma_3$  forment un pentagone dans  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ , ce qui signifie en particulier que  $i(\beta, \gamma_2) = 0$ . Cela implique que  $p^{-1}(\beta)$  est inclu dans le pantalon délimité par les lacets  $\gamma_2, a_1, a_2$ . De plus, chaque arc de  $p^{-1}(\beta)$  relie  $a_1$  à  $a_2$  (si un arc reliait  $a_1$  à  $a_1$ , il serait trivial).

On a également que  $i(\beta, \gamma_1) > 0$  et  $i(\alpha, \gamma_1) = 0$ . Cela implique que  $\gamma_1$  intersecte tous les arcs de  $p^{-1}(\beta)$  (cf Figure 2.16). Le même argument appliqué à  $\gamma_3$  permet de voir que  $\gamma_3$  intersecte  $a_1$  et  $a_2$  sans intersecter  $p^{-1}(\beta)$ .

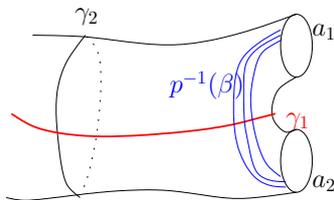


FIGURE 2.16 –

On résume la situation dans le schéma suivant (Fig 2.17), en notant

$$p^{-1}(\beta) = \bigcup_{i=1}^m [X_i, Y_i]$$

où  $X_i, Y_i$  sont les extrémités respectives de chaque arcs sur  $a_1$  et  $a_2$ .

Il s'agit de trouver l'entier  $k$  tel que  $p(X_1) = P(Y_{1+k})$ . Mais  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  ne s'intersectent pas, donc  $p^{-1}(\gamma_3)$  intersecte  $a_1$  sur  $]X_m, X_1[$  et  $a_2$  sur  $]Y_m, Y_1[$ . Cela implique que  $p(X_1) = p(Y_1)$ , et par suite que pour tout entier  $i \in [1, m]$ ,  $p(X_i) = p(Y_i)$ . Du fait que  $\beta$  est connexe, on en déduit que  $m = 1$ .

□

**Lemme 2.6.2.** *Soit  $\phi$  un automorphisme de  $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}))$  et  $\alpha, \beta$  deux sommets de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  tels que  $i(\alpha, \beta) = 1$ . Alors  $i(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = 1$ .*

*Démonstration.* On suppose que  $i(\alpha, \beta) = 1$ . D'après la caractérisation précédente, il existe trois autres lacets essentiels  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  tels que les cinq sommets  $\gamma_1, \alpha, \gamma_2, \beta, \gamma_3$  forment un pentagone dans  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . Le lacet  $\gamma_2$  est séparant, et on note respectivement

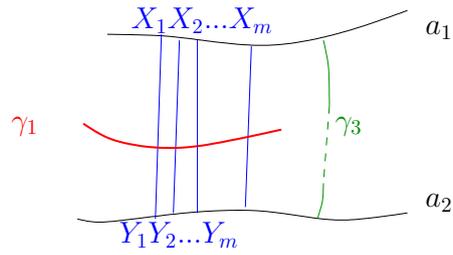


FIGURE 2.17 –

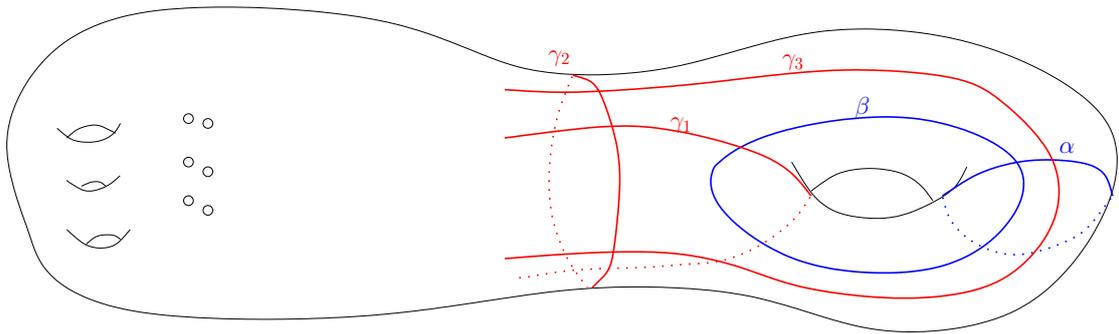


FIGURE 2.18 – Cas où  $g \geq 2$

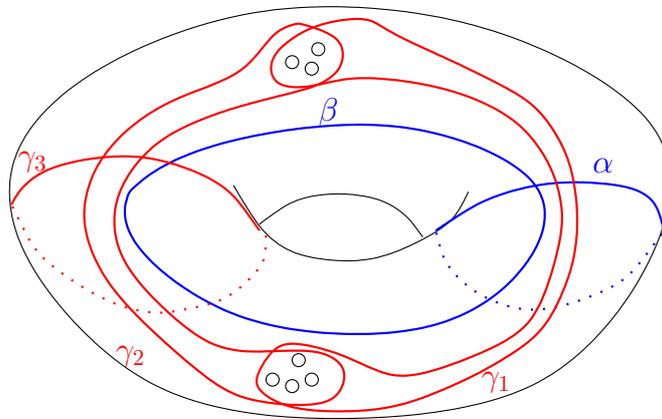


FIGURE 2.19 – Cas où  $g = 1$

$S_0$  et  $S_1$  les deux surfaces obtenues après avoir découpé  $\Sigma_{g,n}$  le long de  $\gamma_2$ , où  $S_1$  contient  $\alpha$  et  $\beta$  et est homéomorphe à une surface  $\Sigma_{1,1}$  de genre 1 avec 1 composante de bord, et  $S_0$  est homéomorphe à une surface  $\Sigma_{g-1,n+1}$  de genre  $g - 1$  avec  $n + 1$  composantes de bord.

Par définition, l'automorphisme  $\phi$  envoie une arête sur une arête, donc on sait d'ores et déjà que  $\phi(\gamma_1), \phi(\alpha), \phi(\gamma_2), \phi(\beta), \phi(\gamma_3)$  forment un pentagone dans  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$ . Le reste de la preuve va se baser sur l'étude du link et du link dual de  $\phi(\gamma_2)$ , grâce aux outils développés dans la section 2.6.2.

L'automorphisme  $\phi$  induit un isomorphisme  $\mathcal{L}^d(\gamma_2) \rightarrow \mathcal{L}^d(\phi(\gamma_2))$ . En particulier,  $\gamma_2$  étant séparant, on sait que  $\mathcal{L}^d(\gamma_2)$  a deux composantes connexes. Pour tout  $j \in \{0, 1\}$ , on note  $\mathcal{L}_j^d(\gamma_2)$  la composante connexe de  $\mathcal{L}^d(\gamma_2)$  associée à la surface  $S_j$ .

On en déduit que  $\mathcal{L}^d(\phi(\gamma_2))$  a deux composantes connexes. Pour tout  $j \in \{0, 1\}$ , on note  $\mathcal{L}_j^d(\phi(\gamma_2))$  l'image par  $\phi$  de  $\mathcal{L}_j^d(\gamma_2)$ . Cela permet de dire que  $\phi(\gamma_2)$  est séparant. On note  $S'_0$  et  $S'_1$  les deux surfaces résultant du découpage le long de  $\phi(\gamma_2)$ , où pour tout  $j \in \{0, 1\}$ ,  $S'_j$  est associée à  $\mathcal{L}_j^d(\gamma_2)$ .

Chaque link dual  $\mathcal{L}_j^d$  est associé à un link  $\mathcal{L}_j$ , de sorte que  $\phi$  induit un isomorphisme  $\mathcal{L}_j(\gamma_2) \rightarrow \mathcal{L}_j(\phi(\gamma_2))$ . On raisonne maintenant sur la dimension des links, préservée par  $\phi$ . On a ainsi les égalités suivantes :

$$\dim(\mathcal{L}_0(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{L}_0(\phi(\gamma_2)))$$

$$\dim(\mathcal{L}_1(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{L}_1(\phi(\gamma_2)))$$

$$\dim(\mathcal{L}_0(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{L}_0(\phi(\gamma_2)))$$

$$\dim(\mathcal{L}_1(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{L}_1(\phi(\gamma_2)))$$

Or on connaît exactement la topologie de  $S_0$  et  $S_1$  ; cela permet de voir que

$$\dim(\mathcal{L}_0(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{C}(\Sigma_{g-1, n+1}))$$

$$\dim(\mathcal{L}_0(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{C}(\Sigma_{g-1, n+1}))$$

$$\dim(\mathcal{L}_1(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{C}(\Sigma_{1,1}))$$

$$\dim(\mathcal{L}_1(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{C}(\Sigma_{1,1}))$$

et ainsi se référer à la table de valeurs des dimensions données pour tout type de surface au paragraphe 2.2.5. Cela nous invite à distinguer les cas selon le genre  $g$  de la surface de départ :

**Si  $g \geq 3$  :**

$$\dim(\mathcal{L}_0(\gamma_2)) = 3(g-1) - 4 + (n+1)$$

$$\dim(\mathcal{L}_0(\gamma_2)) = 2(g-1) - 3 + (n+1)$$

En remarquant d'abord que  $\dim(\mathcal{L}_1(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{L}_1(\phi(\gamma_2))) = 0$ , on voit que  $S'_1$  ne peut être homéomorphe qu'à deux types de surfaces :  $\Sigma_{1,1}$  et  $\Sigma_{0,4}$ . Donc le genre  $g(S'_0)$  de  $S'_0$  est supérieur ou égal à 2. En notant de même  $n(S'_0)$  le nombre de composantes de bord de  $S'_0$ , on déduit de la table de valeurs que

$$\dim(\mathcal{L}_0(\phi(\gamma_2))) = 3g(S'_0) - 4 + n(S'_0)$$

$$\text{hdim}(\mathcal{L}_0(\gamma_2)) = 2g(S'_0) - 3 + n(S'_0)$$

Mais en combinant ces égalités avec l'égalité des dimensions entre les links et leurs images par  $\phi$ , on a

$$3(g-1) - 4 + (n+1) = 3g(S'_0) - 4 + n(S'_0)$$

$$2(g-1) - 3 + (n+1) = 2g(S'_0) - 3 + n(S'_0)$$

On a donc que  $g(S'_0) = g-1$  et  $n(S'_0) = n+1$ . C'est ce que l'on voulait démontrer, à savoir que  $S'_1$  est homéomorphe à  $\Sigma_{1,1}$ .

**Si  $g = 2$  :** On applique le même raisonnement. On a

$$\dim(\mathcal{L}_0(\gamma_2)) = \dim(\mathcal{C}(\Sigma_{1,n+1})) = n$$

On a donc  $g(S'_0) \neq 0$ , et  $g(S'_0) \leq 2$  par hypothèses. Si  $g(S'_0) = 2$ , il existe un entier naturel  $k \leq n-2$  tel que  $S'_0$  soit homéomorphe à  $\Sigma_{2,k}$ . On peut ainsi calculer

$$\dim(\mathcal{L}_0(\phi(\gamma_2))) = 4 - 3 + k = k + 1 < n = \dim(\mathcal{L}_0(\gamma_2))$$

Par l'absurde, on a donc que  $g(S'_0) = g(S'_1)$ . En calculant  $\dim(\mathcal{L}_0(\gamma_2))$  on obtient  $n(S'_0) - 1 = n$ . Cela permet de conclure que  $S'_1$  est homéomorphe à  $\Sigma_{1,1}$ .

**Si  $g = 1$  :** Cette technique ne fonctionne plus car la dimension simpliciale et la dimension homotopique sont les mêmes. On peut se référer à [Kor99] pour les détails de la preuve. □

Une conséquence directe de cette caractérisation, en s'aidant de la Prop 2.6.3, est le résultat suivant :

**Lemme 2.6.3.** *L'image d'un lacet non-séparant par un automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  est un lacet non-séparant.*

Puis grâce à la Proposition 2.6.4, on a :

**Lemme 2.6.4.** *L'image d'un lacet 2-séparant par un automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  est un lacet 2-séparant.*

**Cas où le genre  $g = 0$**

Dans le cas de la sphère trouée, deux lacets essentiels non disjoints s'intersectent au moins deux fois. Nous allons donner une définition mettant en jeu une paire de lacets d'intersection géométrique égale à 2, puis voir que cette configuration est stable par tout automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{0,n})$ .

**Définition 2.6.1.** Une *paire simple* est la donnée de deux lacets 2-séparants  $\alpha, \beta$  ayant un unique trou en commun. Cela revient à définir trois composantes de bord  $p_1, p_2, p_3$ , un arc essentiel reliant  $p_1$  à  $p_2$  et un arc essentiel disjoint du premier reliant  $p_2$  à  $p_3$ .

**Lemme 2.6.5.** Soit  $\phi$  un automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{0,n})$  et  $\alpha, \beta$  deux lacets essentiels formant une paire simple ; alors  $\phi(\alpha), \phi(\beta)$  forment une paire simple.

Pour démontrer le Lemme 2.6.5, on peut obtenir un résultat analogue à la caractérisation donnée dans le Lemme 2.6.1 (voir [Kor99]) :

**Lemme 2.6.6.** Soient  $\alpha, \beta$  deux sommets de  $\mathcal{C}(\Sigma_{0,n})$  ; alors  $(\alpha, \beta)$  forment une paire simple si et seulement si il existe  $n - 2$  sommets  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-2}$  de  $\mathcal{C}(\Sigma_{0,n})$  tels que :

- $\gamma_1, \alpha, \gamma_2, \beta, \gamma_3$  forment un pentagone dans  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  ;
- $\gamma_1$  et  $\gamma_{n-2}$  sont 2-séparants ;
- $\gamma_2$  est 3-séparants ;
- $\gamma_k$  et  $\gamma_{n-k}$  sont  $k$ -séparants,  $3 \leq k \leq \frac{n}{2}$  ;
- $\{\alpha, \gamma_3\} \cup \sigma, \{\alpha, \gamma_2\} \cup \sigma, \{\beta, \gamma_3\} \cup \sigma, \{\beta, \gamma_2\} \cup \sigma$  sont des simplexes maximaux, où  $\sigma = \{\gamma_3, \dots, \gamma_{n-2}\}$ .

Pour voir qu'une paire simple est envoyée sur une paire simple par un automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{0,n})$ , il suffit alors de voir qu'un lacet  $k$ -séparant est envoyé sur un lacet  $k$ -séparant. C'est le lemme suivant :

**Lemme 2.6.7.** Soient  $\Sigma_{0,n}$  une surface de genre 0 avec  $n \geq 5$  composantes de bord,  $\phi$  un automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{0,n})$  et  $\alpha$  un lacet  $k$ -séparant,  $k \geq 2$ . Alors  $\phi(\alpha)$  est un lacet  $k$ -séparant de  $\Sigma_{0,n}$ .

*Démonstration.* Le raisonnement sur la dimension des links utilisé dans la preuve du Lemme 2.6.2 s'applique.  $\square$

## 2.6.4 Lien avec les automorphismes du complexe des arcs

L'étude des automorphismes du complexe des arcs est utilisée dans [Iva97] dans la preuve du Théorème 4 pour la raison suivante :

**Proposition 2.6.5.** Soit  $\Sigma_{g,n}$  une surface avec  $n \geq 1$ . Tout simplexe de  $\mathcal{A}(\Sigma_{g,n})$  est la face d'un simplexe maximal (de codimension 0). De plus, tout simplexe de codimension 1 est la face de 1 ou 2 simplexes maximaux.

**Corollaire 2.6.1.** Tout automorphisme de  $\mathcal{A}(\Sigma_{g,n})$  est déterminé par ses valeurs sur un simplexe maximal de  $\mathcal{A}(\Sigma_{g,n})$ .

On associe à chaque sommet de  $\mathcal{A}(\Sigma_{g,n})$  un sous-ensemble de sommets de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  à 1 ou 2 éléments. Soit  $I$  un sommet de  $\mathcal{A}(\Sigma_{g,n})$  :

**1er cas** Si l'arc essentiel  $I$  relie deux trous distincts  $P_1$  et  $P_2$ , on l'associe au lacet  $\alpha$  défini comme étant le bord d'un voisinage de  $P_1 \cup I \cup P_2$ . Avec les hypothèses faites sur  $g$  et  $n$ , le lacet  $\alpha$  est essentiel ; de plus, il est 2-séparant.

**2ème cas** Si l'arc essentiel  $I$  relie la même composante de bord, le bord d'un voisinage de  $P \cup I$  est un cylindre; le bord de ce cylindre a deux composantes connexes donc définit deux lacets  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Si l'un des deux (disons  $\alpha_2$ ) borde un disque à un trou, à  $I$  on associe le lacet essentiel  $\alpha_1$ . Dans ce cas,  $\alpha_1$  est 2-séparant. Sinon,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont essentiels et à  $I$  on associe la paire  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ . Dans ce cas,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  bordent un cylindre à un trou.

**Lemme 2.6.8.** *Soit  $\Sigma_{g,n}$  une surface telle que  $g \geq 2$  et  $n \geq 1$ ,  $g = 1$  et  $n \geq 3$  ou  $g = 0$  et  $n \leq 5$ . Alors il existe un morphisme injectif  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n}) \hookrightarrow \mathcal{A}(\Sigma_{g,n})$ .*

Le Lemme 2.6.8 est une clé de la démonstration du Théorème 4. Pour le démontrer, Ivanov et Korkmaz utilisent des propriétés topologiques des automorphismes du complexe de courbes. En particulier, il s'agit de montrer que l'image d'un lacet 2-séparant par un automorphisme du complexe de courbes est un lacet 2-séparant, et l'image d'une paire de lacets bordant un cylindre pointé est une paire de lacets bordant un cylindre pointé. On voit ainsi qu'un automorphisme du complexe de courbes agit sur les sommets du complexe des arcs. Ensuite, il faut vérifier que l'application est simpliciale. Les détails sont faits dans [Kor99] pour les cas de genre 0 ou 1 et s'adaptent aux cas de genre  $g \geq 2$ .

## 2.6.5 Plongements simpliciaux de complexes de courbes

On considère deux surfaces  $\Sigma_{g,n}$  et  $\Sigma_{g',n'}$  et un plongement  $\phi : \Sigma_{g,n} \hookrightarrow \Sigma_{g',n'}$ , sous réserve d'existence de ce dernier. Dans ce paragraphe, on notera  $\kappa$  et  $\kappa'$  la dimension respective de leur complexe de courbes associé.

Dans le cas particulier où les deux surfaces  $\Sigma_{g,n}$  et  $\Sigma_{g',n'}$  sont égales, cela revient à considérer un automorphisme de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,n})$  comme précédemment. En s'inspirant des résultats des théorèmes d'Ivanov, Korkmaz, Luo et Margalit, on peut se demander si un tel plongement est induit par un homéomorphisme de surface.

Shackleton ([Sha07]) utilise des arguments dûs à Ivanov pour arriver à un résultat similaire au Théorème 4 en étudiant les propriétés topologiques des plongements simpliciaux. Nous allons énoncer quelques unes de ces propriétés, analogues à celles développées dans la section 2.6.3 qui mènent au Théorème 6.

**Lemme 2.6.9.** *Soient deux surfaces  $\Sigma_{g,n}$  et  $\Sigma_{g',n'}$  avec  $\kappa \leq \kappa'$ . Alors tout plongement simplicial  $\phi : \Sigma_{g,n} \hookrightarrow \Sigma_{g',n'}$  envoie une décomposition en pantalons sur une autre décomposition en pantalons.*

Cette première propriété provient directement du caractère simplicial du plongement. Les hypothèses imposent le fait que le nombre maximal de lacets disjoints non homotopes sur  $\Sigma_{g',n'}$  est au moins égal au nombre maximal de lacets disjoints non homotopes sur  $\Sigma_{g,n}$ .

Ces plongements simpliciaux préservent également une notion d'adjacence développée par Behrstock et Margalit ([BM06]). On dit que deux lacets d'une décomposition en pantalons  $P$  (ou plus généralement d'un multi-lacet) sont *adjacents* s'ils appartiennent au bord d'un pantalon dans le complémentaire de  $P$ . Il est utile de construire un graphe encodant cette information :

**Définition 2.6.2.** Soit  $\Sigma_{g,n}$  une surface et  $Q$  un multi-lacet sur cette surface. On construit le **graphe d'adjacence**  $\mathcal{G}_{adj}(Q)$  de la façon suivante :

- Les sommets de  $\mathcal{G}_{adj}(Q)$  sont les lacets de  $Q$  ;
- Une arête relie deux sommets si ces sommets représentent deux lacets adjacents dans  $Q$ .

Ce graphe joue un rôle analogue à celui du link d'un sommet (voir les sections 2.4 et 2.6.2).

**Lemme 2.6.10.** Soient deux surfaces  $\Sigma_{g,n}$  et  $\Sigma_{g',n'}$  et  $Q$  un multi-lacet sur  $\Sigma_{g,n}$ . On suppose que  $\kappa \leq \kappa'$ . Alors tout plongement simplicial  $\phi : \Sigma_{g,n} \hookrightarrow \Sigma_{g',n'}$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{G}_{adj}(Q)$  sur  $\mathcal{G}_{adj}(\phi(Q))$ .

Il en résulte directement des propriétés topologiques sur les plongements simpliciaux analogues à celles que l'on a vues sur les automorphismes des complexes simpliciaux dans la section 2.6.3. Elles sont résumées dans le lemme suivant :

**Lemme 2.6.11.** Soient deux surfaces  $\Sigma_{g,n}$  et  $\Sigma_{g',n'}$ . On suppose que  $\kappa \leq \kappa'$  et que si  $\kappa = \kappa' \geq 3$ , les deux surfaces sont homéomorphes et différentes de  $\Sigma_{1,2}$ . Alors tout plongement simplicial  $\phi : \Sigma_{g,n} \hookrightarrow \Sigma_{g',n'}$  envoie un lacet non-séparant sur un lacet non-séparant, un lacet séparant non 2-séparant sur un lacet séparant non 2-séparant, un lacet 2-séparant sur un lacet 2-séparant.

Le résultat de Shackleton qui s'ensuit de cette étude est le théorème suivant :

**Théorème 6.** Soient deux surfaces  $\Sigma_{g,n}$  et  $\Sigma_{g',n'}$ . On suppose que  $\kappa \leq \kappa'$  et que si  $\kappa = \kappa' \geq 3$ , les deux surfaces sont homéomorphes ou l'une des deux est homéomorphe à  $\Sigma_{1,3}$ . Alors tout plongement simplicial  $\phi : \Sigma_{g,n} \hookrightarrow \Sigma_{g',n'}$  (préservant le type de chaque lacet si les deux surfaces sont homéomorphes à  $\Sigma_{1,2}$ ) est induit par un homéomorphisme de surface.

## Chapitre 3

# Groupe de Thompson vu comme un groupe modulaire

On a vu au Chapitre 2 qu'étant donnée une surface connexe, orientable de genre  $g$  avec  $n$  trous, il existe plusieurs complexes simpliciaux associés dont le groupe des automorphismes peut être identifié au groupe modulaire.

Nous allons maintenant traiter un cas où la surface considérée est de type infini. Il s'agit d'abord de définir un analogue au groupe modulaire, puis un complexe sur lequel ce groupe agit naturellement. Funar et Kapoudjian ont défini une notion de groupe modulaire asymptotique pour des surfaces de genre zéro et de type infini ([FK04], puis [FK08] et [FK11]), et ont construit plusieurs complexes en montrant que le groupe modulaire asymptotique agit comme un groupe d'automorphisme sur chaque complexe. Ces complexes sont des complexes de décompositions de la surface en sous-surfaces élémentaires, par analogie au complexe de pantalons des surfaces de type fini.

Il est intéressant de remarquer que le groupe modulaire asymptotique que l'on va définir avec des considérations topologiques se trouve être isomorphe au groupe de Thompson  $\mathcal{T}$ , qui est l'un des premiers exemples de groupe simple infini de présentation finie. Kapoudjian et Sergiescu ont également développé cette notion dans [KS05].

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de l'article [FN11] qui est en cours de publication. On va considérer le cas d'une surface infinie planaire avec un bord non compact et lui définir un groupe modulaire asymptotique s'identifiant au groupe de Thompson  $\mathcal{T}$ . On montre que le groupe  $\mathcal{T}$  agit par automorphisme sur le complexe, pour finalement voir que le groupe des automorphismes de ce complexe est isomorphe à une extension de  $\mathcal{T}$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On donne également un sens géométrique à cette extension afin de compléter l'analogie avec le théorème d'Ivanov dans le cas de cette surface  $\Sigma_{0,\infty}$  de type infini et démontrer le théorème 7 ([FN11] et section 3.1.2).

## 3.1 Définitions et présentation des résultats

### 3.1.1 La surface $\Sigma_{0,\infty}$ et son groupe modulaire asymptotique

Soit  $\mathbb{D}^2$  le disque hyperbolique, dont le bord est ici paramétré par l'intervalle  $[0, 1]$  dont on identifie les extrémités. Soit  $\tau_*$  la triangulation de  $\mathbb{D}^2$  donnée par la famille de géodésiques bi-infinies représentant tous les intervalles standard dyadiques, c'est-à-dire la famille des géodésiques  $I_a^n = [\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}]$  où  $a$  et  $n$  sont des entiers naturels tels que  $0 \leq a \leq 2^n - 1$ . Soit  $\mathbb{T}$  le graphe dual de  $\tau_*$ . Ce graphe est un arbre infini trivalent sans racine. On choisit de réaliser l'arbre  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{D}^2$  en utilisant des segments géodésiques obtenus en appliquant une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2^n}$  au segment  $I_a^n$  (voir la Figure 3.1).

On définit maintenant  $\Sigma_{0,\infty}$  comme étant un voisinage fermé de  $\mathbb{T}$  (voir la Figure 3.1). C'est une surface planeaire, orientée, non compacte, contractible, qui a une infinité de composantes de bord. On peut choisir ce voisinage assez fin de sorte qu'il n'y ait pas d'auto-intersection, et que chaque intersection  $I_a^n \cap \Sigma_{0,\infty}$  soit un arc connexe reliant deux composantes de bord de  $\Sigma_{0,\infty}$ .

L'union de la triangulation  $\tau_*$  et des composantes de bord de  $\Sigma_{0,\infty}$  définit un pavage  $\tau'_*$  de la surface en hexagones (voir la Figure 3.1). On remarquera que pour chaque hexagone, ses côtés appartiennent alternativement à  $\partial\Sigma_{0,\infty}$  et à un arc de la triangulation  $\tau_*$ .

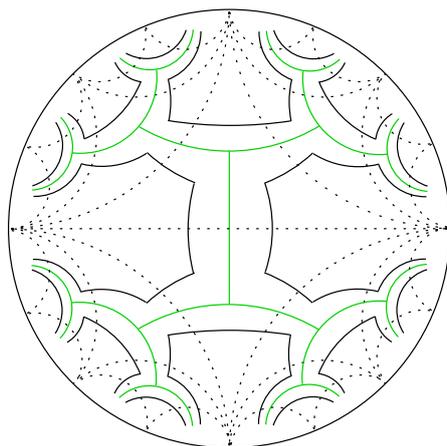


FIGURE 3.1 – La triangulation  $\tau_*$  de  $\mathbb{D}^2$  (en pointillés), son arbre dual  $\mathbb{T}$  et la surface  $\Sigma_{0,\infty}$ .

**Définition 3.1.1.** Une *sous-surface admissible* de  $\Sigma_{0,\infty}$  est une sous-surface compacte de  $\Sigma_{0,\infty}$  pouvant s'écrire comme la réunion finie et connexe d'hexagones de la tessellation  $\tau'_*$ , contenant  $I_0^1 \cap \Sigma_{0,\infty}$ .

Une sous-surface admissible de  $\Sigma_{0,\infty}$  est définie par un ensemble d'arcs  $\{I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}\}$  tel que l'union de ses arcs borde une sous-surface compacte. Un tel ensemble d'arcs est alors qualifié de **séparant** (voir la Fig 3.2).

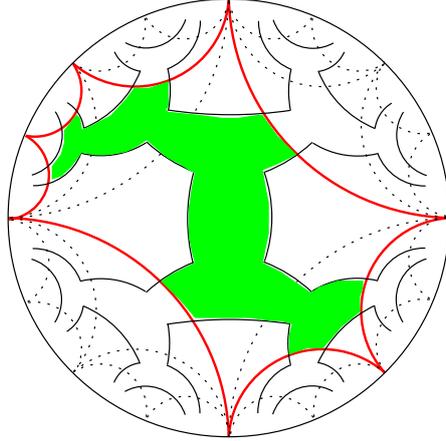


FIGURE 3.2 – Une sous-surface admissible délimitée par une famille d’arcs séparants.

**Définition 3.1.2.** Un ensemble d’arcs  $\{I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}\}$  de  $\tau_*$  est **séparant** si l’union de ses arcs borde une sous-surface compacte de  $\Sigma_{0,\infty}$  contenant  $I_0^1 \cap \Sigma_{0,\infty}$ .

**Définition 3.1.3.** Soit  $f$  un homéomorphisme de  $\Sigma_{0,\infty}$ . On dit que  $f$  est **rigide** s’il stabilise la tessellation  $\tau'_*$ .

**Définition 3.1.4** ([FK04]). Soit  $f$  un homéomorphisme de  $\Sigma_{0,\infty}$ . On dit que  $f$  est **asymptotiquement rigide** s’il existe une sous-surface admissible  $S$  telle que  $f(S)$  est une sous-surface admissible de  $\Sigma_{0,\infty}$  et la restriction de  $f$  sur  $\Sigma_{0,\infty} \setminus S$  est rigide.

Cette définition peut se traduire explicitement en citant l’ensemble d’arcs séparants définissant la sous-surface compacte. On obtient alors qu’un homéomorphisme  $f$  de  $\Sigma_{0,\infty}$  est asymptotiquement rigide s’il existe un ensemble d’arcs séparants  $\{I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}\}$  tel que :

1. Pour tout  $1 \leq i \leq k$ , il existe  $I_{b_i}^{m_i}$  tel que  $f(I_{a_i}^{n_i} \cap \Sigma_{0,\infty}) = I_{b_i}^{m_i} \cap \Sigma_{0,\infty}$ , et
2. Pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $j \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq l < 2^j$ , l’arc  $f(I_{2^j a_i + l}^{n_i + j} \cap \Sigma_{0,\infty})$  est égal à  $I_{2^j b_i + l}^{m_i + j} \cap \Sigma_{0,\infty}$ .

La première condition traduit le fait que  $f$  envoie une sous-surface admissible sur une autre; la deuxième condition correspond à la rigidité de  $f$  à l’extérieur de cette sous-surface admissible. Un exemple d’homéomorphisme asymptotiquement rigide est donné en Fig 3.3.

Le groupe des homéomorphismes asymptotiquement rigides de la surface  $\Sigma_{0,\infty}$  sera noté  $\text{Homeo}_a(\Sigma_{0,\infty})$ .

**Définition 3.1.5** ([FK04]). Le groupe modulaire asymptotique de  $\Sigma_{0,\infty}$ , noté  $\text{Mod}_a(\Sigma_{0,\infty})$ , est le quotient  $\text{Homeo}_a(\Sigma_{0,\infty})/\text{Homeo}_a^0(\Sigma_{0,\infty})$ , où  $\text{Homeo}_a^0(\Sigma_{0,\infty})$  est le sous-groupe des homéomorphismes asymptotiquement rigides homotopes à l’identité.

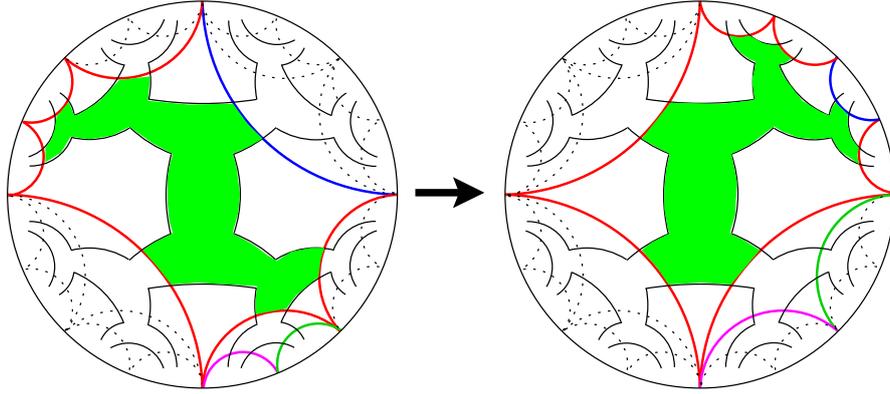


FIGURE 3.3 – Un exemple d’homéomorphisme asymptotiquement rigide

**Définition 3.1.6** ([CFP96]). *Le groupe de Thompson  $\mathcal{T}$  est le groupe des homéomorphismes du cercle linéaires par morceaux, préservant l’orientation, différentiables sauf sur un nombre fini de nombres rationnels dyadiques, tels que sur les intervalles de différentiabilité, les dérivées sont des puissances de 2, et qui stabilise l’ensemble des nombres rationnels dyadiques.*

Pour une introduction plus complète au groupe de Thompson  $\mathcal{T}$ , voir [CFP96].

**Proposition 3.1.1** ([FK08], section 1.3). *Le groupe modulaire asymptotique  $\text{Mod}_a(\Sigma_{0,\infty})$  est isomorphe au groupe de Thompson  $\mathcal{T}$ .*

### 3.1.2 Le complexe $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$

On va maintenant définir un complexe cellulaire 2-dimensionnel sur lequel le groupe modulaire asymptotique  $\text{Mod}_a(\Sigma_{0,\infty})$  agit naturellement. Les sommets de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  sont les classes d’homotopie relativement au bord de  $\Sigma_{0,\infty}$  des tessellations de  $\Sigma_{0,\infty}$  en hexagones qui diffèrent de la tessellation  $\tau'_*$  seulement sur un nombre fini d’hexagones.

Soit  $v$  un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et  $a$  un arc constituant le côté commun de deux hexagones  $h_1$  et  $h_2$  de la tessellation  $v$ . Soit  $a'$  un arc inclus dans  $h_1 \cup h_2$  telle que l’intersection géométrique des classes homotopiques des arcs  $a$  et  $a'$  relativement au bord de  $\Sigma_{0,\infty}$  est égale à 1. Cela implique en particulier que les extrémités respectives de  $a$  et  $a'$  appartiennent à des cotés différents de  $h_1 \cup h_2$ . Soit  $w$  le sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  obtenu de  $v$  en remplaçant l’arc  $a$  par  $a'$ . Alors les sommets  $v$  et  $w$  sont reliés par une arête dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . On dit que  $w$  s’obtient de  $v$  par un *flip* de l’arc  $a$ . C’est l’analogie du mouvement élémentaire décrit par les arêtes du complexe de pantalons dans la Définition 2.3.3. On remarquera qu’ici, l’hexagone dans  $\Sigma_{0,\infty}$  joue le même rôle que le pantalon dans une surface de type fini  $\Sigma_{g,n}$ .

Soit  $v$  un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et soient  $a$  et  $b$  deux arcs, chacun étant le côté d’un hexagone de la tessellation  $v$ . En reprenant la terminologie utilisée dans la section 2.6.5,

on dit que  $a$  et  $b$  sont *adjacents* s'il existe un hexagone de la tessellation  $v$  qui contient ces deux arcs sur son bord. Il y a deux cas possibles :

1. Les deux arcs ne sont pas adjacents. Alors, si l'on applique un flip sur l'arc  $a$  puis sur  $b$ , on obtient la même tessellation que si l'on flippe d'abord  $b$  puis  $a$ . Ainsi, la commutativité des flips définit un 4-cycle sur le 1-squelette de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et on lui attache une **2-cellule carrée** (Fig 3.5).
2. Les deux arcs sont adjacents. Alors, si l'on flippe d'abord  $a$  puis  $b$  on obtient une tessellation différente que si l'on flippe d'abord  $b$  puis  $a$ . Ces deux tessellations diffèrent d'un flip. Cela correspond donc à un 5-cycle sur le 1-squelette de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et on lui attache une **2-cellule pentagonale** (Fig 3.6).

On obtient ainsi un analogue du complexe de pantalons d'une surface de type fini décrit dans la section 2.3.2. En particulier, le groupe modulaire asymptotique agit transitivement sur le complexe par automorphisme (Prop 3.3.3).

On peut alors se demander de quelle manière le groupe des automorphismes de ce complexe est relié au groupe modulaire asymptotique. Pour répondre à cette question, on construit la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

On obtient ainsi le résultat suivant :

**Théorème 7** ([FN11]). *Le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  est isomorphe au produit semi-direct  $\mathcal{T} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

De plus, le co-noyau agit comme un automorphisme extérieur non trivial, de sorte que l'on obtient un morphisme non trivial de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Out}(\mathcal{T})$ . Comme Brin a montré dans [Bri96] que le groupe des automorphismes extérieurs de  $\mathcal{T}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ce morphisme est un isomorphisme.

Les outils utilisés dans la preuve de ce théorème permettent de donner une interprétation géométrique de ce résultat. On distingue ainsi deux sortes d'éléments de  $\text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  : ceux qui préservent l'orientation du complexe, et ceux qui l'inversent. Il est ainsi naturel de définir le groupe modulaire étendu de  $\Sigma_{0,\infty}$  par  $\mathcal{T} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et ainsi obtenir un véritable analogue au Théorème 4 sur les surfaces compactes.

La preuve de ce théorème va se structurer de la façon suivante : dans la section 3.2, on opère une légère modification à la surface  $\Sigma_{0,\infty}$  qui n'altèrera pas la notion de groupe modulaire asymptotique défini plus haut. Cela permettra de décrire l'isomorphisme entre le groupe modulaire asymptotique et le groupe de Thompson  $\mathcal{T}$ . Dans la section 3.3, on étudiera le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et on définira l'action de  $\mathcal{T}$  sur ce complexe. Enfin, dans la section 3.4, on décrira la structure de  $\text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  dans le but de démontrer le Théorème 7.

## 3.2 La surface et son groupe modulaire asymptotique

Dans cette section, on introduit un espace topologique  $\Sigma_{0,\infty}^*$  homotope à la surface  $\Sigma_{0,\infty}$  définie au départ. Ces deux espaces ont le même groupe modulaire asymptotique.

**Définition 3.2.1.** L'espace topologique  $\Sigma_{0,\infty}^*$  s'obtient en attachant au disque hyperbolique  $\mathbb{D}^2$  les points de son bord correspondant aux nombres rationnels dyadiques.

La triangulation  $\tau_*$  de  $\mathbb{D}^2$  est une triangulation de  $\Sigma_{0,\infty}^*$  ayant comme sommets l'ensemble des composantes de bord de  $\Sigma_{0,\infty}^*$ .

**Lemme 3.2.1** ([FN11]). Soit  $\partial_0\Sigma_{0,\infty}$  une composante connexe du bord de  $\Sigma_{0,\infty}$  qui est une ligne bi-infinie de  $\mathbb{D}^2$ . La fermeture de  $\partial_0\Sigma_{0,\infty}$  dans  $\mathbb{D}^2$  est  $\partial_0\Sigma_{0,\infty} \cup \{q\}$ , où  $q$  est un rationnel dyadique de  $\partial\mathbb{D}^2$ . Ainsi, il y a une bijection naturelle entre les nombres rationnels dyadiques représentés par  $\partial\Sigma_{0,\infty}^*$  et l'ensemble des composantes de bord de  $\Sigma_{0,\infty}$ .

**Corollaire 3.2.1.** Soit  $\partial_0\Sigma_{0,\infty}$  une composante connexe du bord de  $S_{0,\infty}$  et soient  $I_{a_1}^{n_1}$ ,  $I_{a_2}^{n_2}$  deux géodésiques de  $\tau_*$  intersectant  $\partial_0\Sigma_{0,\infty}$ . Alors,  $I_{a_1}^{n_1}$ ,  $I_{a_2}^{n_2}$  ont une extrémité en commun (dyadique).

**Corollaire 3.2.2.** Soit  $\{I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}\}$  un ensemble d'arcs séparants cycliquement ordonné. Alors ce sont les côtés d'un  $k$ -gone idéal de  $\mathbb{D}^2$ .

**Corollaire 3.2.3.** On peut déformer continûment  $\Sigma_{0,\infty}$  en  $\Sigma_{0,\infty}^*$  par une homotopie  $H : \Sigma_{0,\infty} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2 \cup \partial\mathbb{D}^2$  telle que :

- Pour  $t < 1$ ,  $H(\cdot, t)$  est un homéomorphisme ;
- Pour  $t < 1$ ,  $H(\Sigma_{0,\infty} \cap I_a^n, t) \subset I_a^n$  ;
- $H(\cdot, 1)$  est un homéomorphisme de l'intérieur de  $\Sigma_{0,\infty}$  dans  $\mathbb{D}^2$  ;
- Soit  $\partial_0\Sigma_{0,\infty}$  une composante de bord de  $\Sigma_{0,\infty}$  et soit  $q$  le rationnel dyadique sur son adhérence. Alors  $H(\partial_0\Sigma_{0,\infty}, 1) = q$ .

On donne maintenant une définition de groupe modulaire asymptotique de  $\Sigma_{0,\infty}^*$ .

**Définition 3.2.2.** Soit  $f$  un homéomorphisme de  $\Sigma_{0,\infty}^*$  préservant l'orientation. On dit que  $f$  est asymptotiquement rigide s'il existe un ensemble d'arcs séparants  $\{I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}\}$  tel que :

1. Pour tout  $1 \leq i \leq k$ , il existe  $I_{b_i}^{n_i}$  tel que  $f(I_{a_i}^{n_i}) = I_{b_i}^{n_i}$ , et
2. Pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $j \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq l < 2^j$ , l'arc  $f(I_{2^j a_i + l}^{n_i + j})$  est égal à  $I_{2^j b_i + l}^{n_i + j}$ .

L'ensemble d'arcs séparants  $\{I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}\}$  borde un polygone idéal dans  $\Sigma_{0,\infty}^*$ . On dira que ce polygone est un *support* de  $f$ . Un homéomorphisme asymptotiquement rigide est défini par la donnée d'un support et de son image, mais le support n'est pas unique.

**Définition 3.2.3.** Le groupe modulaire asymptotique  $\text{Mod}_a(\Sigma_{0,\infty}^*)$  est le quotient

$$\text{Homeo}_a(\Sigma_{0,\infty}^*) / \text{Homeo}_a^0(\Sigma_{0,\infty}^*)$$

**Proposition 3.2.1** ([FN11]). Les groupes modulaires asymptotiques de  $\Sigma_{0,\infty}$  est  $\Sigma_{0,\infty}^*$  sont isomorphes.

On peut maintenant donner une idée de la preuve de la Proposition 3.1.1.

### Preuve de la Proposition 3.1.1

Soit  $\phi$  un homéomorphisme asymptotiquement rigide de  $\Sigma_{0,\infty}^*$ . On affirme que  $\phi$  agit comme un élément de  $\mathcal{T}$  sur  $\partial\Sigma_{0,\infty}^*$ , qui est l'ensemble des nombres rationnels dyadiques, et que cette action ne dépend que de la classe d'équivalence de  $\phi$  dans  $\text{Mod}_a(\Sigma_{0,\infty}^*)$ . Pour voir cela, on considère deux ensemble d'arcs séparants  $\{I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}\}$  et  $\{I_{b_1}^{m_1}, \dots, I_{b_k}^{m_k}\}$  associés à  $\phi$ , avec  $\phi(I_{a_i}^{n_i}) = I_{b_i}^{m_i}$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $a_1 = 0$  et  $a_k = 2^{n_k} - 1$  et que les deux ensembles sont cycliquement ordonnés. Soit  $f$  l'unique application du cercle vérifiant les conditions suivantes :

1. Pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $f\left(\frac{a_i}{2^{n_i}}\right) = \frac{b_i}{2^{m_i}}$
2. Pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $f\left(\frac{a_i + 1}{2^{n_i}}\right) = \frac{b_i + 1}{2^{m_i}}$
3. Pour tout  $x \in \left(\frac{a_i + 1}{2^{n_i}}, \frac{b_i + 1}{2^{m_i}}\right)$ ,  $f'(x) = 2^{n_i - m_i}$ .

On peut voir alors que  $f \in \mathcal{T}$ .

Réciproquement, étant donné un élément  $f \in \mathcal{T}$ , on peut montrer (voir le Lemme 2.2 de [CFP96]) qu'il existe une partition de l'intervalle unité en intervalles standard dyadiques  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1$  et un entier  $0 \leq j \leq k$  tels que :

1. Les sous-intervalles de la partition  $f(x_j) < f(x_{j+1}) < \dots < f(x_k) = f(x_0) < \dots < f(x_{j-1}) < f(x_j) + 1 = 1$  sont des intervalles standard dyadiques, et
2. L'application  $f$  est linéaire sur chaque sous-intervalle de la partition.

Ainsi, on peut trouver deux  $k$ -gones idéaux inscrits dans  $\tau_*$  définissant un élément  $\phi$  de  $\text{Mod}_a(\Sigma_{0,\infty}^*)$  qui agit comme  $f$  sur  $\partial\Sigma_{0,\infty}^*$ . Cela termine la preuve.

### Une présentation finie de $\mathcal{T}$

Il pourra être utile de penser au groupe de Thompson  $\mathcal{T}$  comme un groupe engendré par deux éléments : un élément  $\alpha$  d'ordre 4 et un élément  $\beta$  d'ordre 3. Une présentation complète (voir [FK08] et [LS97] pour plus de détails) est la suivante :

$$\mathcal{T} = \langle \alpha, \beta | \alpha^4, \beta^3, [\beta\alpha\beta, \alpha^2\beta\alpha\beta\alpha^2], [\beta\alpha\beta, \alpha^2\beta^2\alpha^2\beta\alpha\beta\alpha^2\beta\alpha^2], (\beta\alpha^5) \rangle$$

Les deux générateurs  $\alpha, \beta$  peuvent être définis en termes de polygones idéaux :  $\alpha$  envoie  $\{I_0^2, I_1^2, I_2^2, I_3^2\}$  sur  $\{I_1^2, I_2^2, I_3^2, I_0^2\}$  et  $\beta$  envoie  $\{I_0^1, I_0^2, I_1^2\}$  sur  $\{I_0^2, I_1^2, I_0^1\}$ .

On remarquera que les polygones définissant un élément de  $\mathcal{T}$  ne sont pas uniques, bien qu'il existe un polygone minimal qui satisfasse les conditions. Considérons une paire de polygones définissant un élément  $f \in \mathcal{T}$ . Alors, si l'on scinde un intervalle standard dyadique du polygone de départ en deux moitiés et que l'on fait la même opération sur son intervalle image par  $f$ , la nouvelle paire de polygones ainsi obtenue définit le même élément dans  $\mathcal{T}$ . Toutes les paires de polygones définissant  $f$  sont obtenus en faisant cette opération à partir d'une paire minimale un nombre fini de fois.

### 3.3 Le complexe $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$

#### 3.3.1 Lien avec le cas compact

On peut ainsi voir  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  plongé dans le complexe de pantalons  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n})$ . Pour cela, on considère deux copies de  $\Sigma_{0,\infty}$  munie chacune de la tessellation  $\tau'_*$ , que l'on recolle ensemble le long de leur bord. On obtient ainsi une surface “doublée” que l'on redéfinira dans le chapitre suivant. Chaque arc de  $\tau'_*$  voit ses deux copies former un lacet de la surface doublée, la tessellation  $\tau'_*$  devient alors une décomposition de la surface doublée en une infinité de pantalons. Ainsi, un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  peut être vu comme une décomposition en pantalons de la surface doublée, s'obtenant de la décomposition initiale (définie par un nombre fini de mouvements élémentaires appliqués à partir de  $\tau'_*$ , voir la Définition 2.3.3).

#### 3.3.2 Lien avec $\Sigma_{0,\infty}^*$

On va donner ici un autre point de vue sur le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  en utilisant la définition de  $\Sigma_{0,\infty}^*$ . On peut par exemple voir un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  comme étant une triangulation de  $\Sigma_{0,\infty}^*$  par des arcs dont les extrémités appartiennent à  $\partial\Sigma_{0,\infty}^*$ , qui diffèrent de  $\tau_*$  seulement sur un nombre fini de triangles. Ainsi, deux sommets  $u, v$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  sont reliés par une arête si on peut obtenir  $v$  de  $u$  en changeant la diagonale d'un quadrilatère inscrit dans la triangulation  $u$  (voir la Fig 3.4). On dira que  $v$  résulte du *flip* d'un arc de  $u$ .

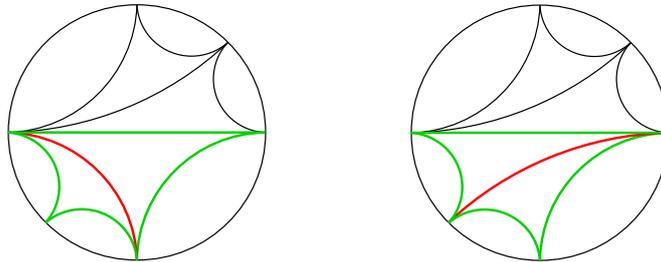


FIGURE 3.4 – Exemple de flip sur une triangulation de  $\Sigma_{0,\infty}^*$ .

#### Interprétation géométrique des 2-cellules

Chaque 2-cellule du complexe est un objet provenant d'un sommet  $v$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et du flip consécutif de deux des arcs de la triangulation  $v$ . S'il existe un triangle dans  $v$  contenant les deux arcs sur son bord (ces deux arcs sont alors *adjacents*), alors les flips associés ne commutent pas et la 2-cellule est pentagonale. Sinon, ces deux arcs ne sont pas adjacents, les flips associés commutent et la 2-cellule est carrée (voir les Fig 3.5 et 3.6). Cela permet d'affirmer le fait suivant :

**Proposition 3.3.1** ([FN11]). *Etant donnés trois sommets  $u, v, w$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  tels que  $u$  et  $w$  sont distincts et reliés par une arête à  $v$  dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ , alors il existe une unique 2-cellule contenant  $u, v$  et  $w$ .*

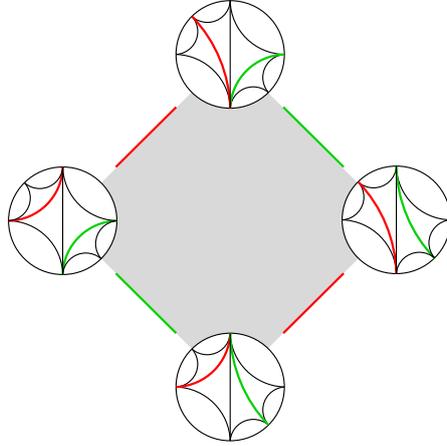


FIGURE 3.5 – 2-cellule carrée de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ .

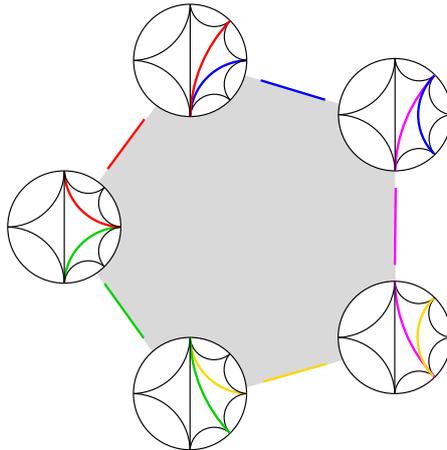


FIGURE 3.6 – 2-cellule pentagonale de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ .

**Définition 3.3.1.** *On appelle le complexe 2-dimensionnel  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  le complexe de décompositions de surface  $\Sigma_{0,\infty}$  (ou  $\Sigma_{0,\infty}^*$ ).*

### Lien avec le graphe de triangulations d'un polygone convexe

Il est intéressant de constater que le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  est fortement lié au graphe des triangulations d'un  $n$ -gone convexe (voir par exemple [BH09], [Lee89] et [HN99]).

Le graphe des triangulations d'un  $n$ -gone convexe est un graphe dont les sommets sont les triangulations d'un  $n$ -gone en  $n - 2$  triangles et les arêtes relient deux sommets s'ils diffèrent par un seul flip. Ainsi, le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  peut être interprété comme le complexe 2-dimensionnel associé au graphe de triangulations d'un  $\infty$ -gone convexe.

On peut maintenant en déduire la connexité de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  à partir du cas fini (voir [HN99]) pour une preuve simple). En effet, chaque sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  a seulement un nombre fini d'arcs qui n'appartiennent pas la triangulation  $\tau_*$ , de sorte qu'il existe un polygone convexe contenant tous ces arcs.

De plus, Lee a montré dans [Lee89] que le complexe de triangulations du  $n$ -gone convexe est un polytope convexe de dimension  $(n - 3)$  (voir aussi [DR01]). Ainsi, le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  est aussi simplement connexe. En résumé :

**Proposition 3.3.2** ([FN11]). *Le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  est connexe et simplement connexe.*

### 3.3.3 Action de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$

#### Action sur les sommets

Soit  $v$  un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et  $f \in \mathcal{T}$ . Considérons l'ensemble  $G$  des géodésiques définies comme suit : la géodésique joignant deux rationnels dyadiques  $p, q$  est dans  $G$  si la géodésique joignant les rationnels dyadiques  $f^{-1}(p)$  et  $f^{-1}(q)$  appartient à la triangulation  $v$ . On peut remarquer que les géodésiques de  $G$  définissent une triangulation de  $\Sigma_{0,\infty}^*$ . On note cette triangulation  $f \cdot v$ . Par définition de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ ,  $f \cdot v$  est un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . Remarquons que l'on peut trouver un polygone idéal défini par un ensemble d'arcs séparants  $\{I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}\}$  qui est un support de  $f$  et qui contient toutes les géodésiques qui sont dans la triangulation  $v$  et qui n'appartiennent pas à  $\tau_*$ . On donne un exemple avec les deux générateurs  $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$  dans les Figures 3.7 et 3.8.

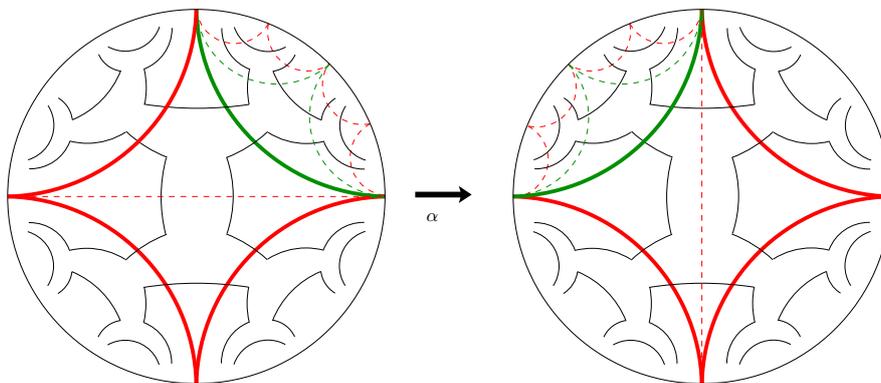


FIGURE 3.7 – Action du générateur  $\alpha$  sur  $\tau_*$ .

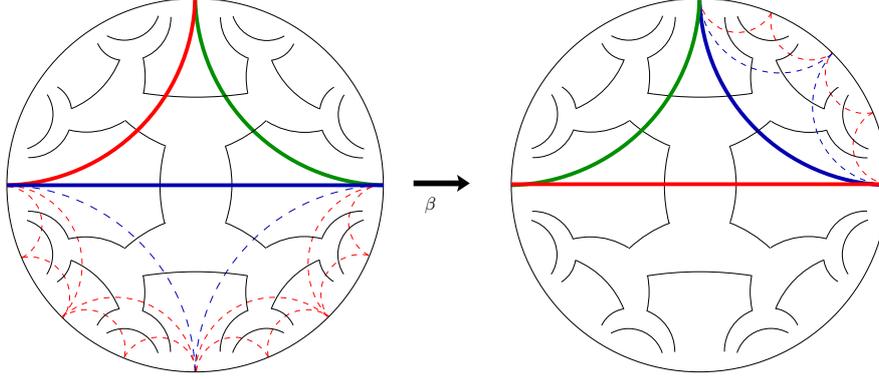


FIGURE 3.8 – Action du générateur  $\beta$  sur  $\tau_*$ .

### Action sur les arêtes et les 2-cellules

Soit  $v, w$  deux sommets reliés par une arête dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ , et  $f \in \mathcal{T}$ . Par définition de l'action sur les sommets,  $f \cdot v$  et  $f \cdot w$  sont également reliés par une arête. En se souvenant de l'interprétation géométrique des 2-cellules, on voit que l'action s'étend également au 2-squelette de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . On a ainsi défini une application naturelle

$$\Psi : \mathcal{T} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$$

**Proposition 3.3.3** ([FN11]). *Le groupe modulaire asymptotique  $\mathcal{T}$  de  $\Sigma_{0,\infty}^*$  agit transitivement sur le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  par automorphismes. De plus, l'application  $\Psi$  est injective.*

*Démonstration.* Il a été montré au paragraphe précédent que  $\mathcal{T}$  agit sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  par automorphismes.

On prouve la transitivité en montrant que pour tout sommet  $v$  du complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ , il existe un élément  $f \in \mathcal{T}$  tel que  $f \cdot \tau_* = v$ . Soit  $P$  un polygone idéal inscrit dans la triangulation  $\tau_*$  tel  $P$  contient toutes les arêtes de la triangulation  $v$  qui ne coïncident pas avec  $\tau_*$  et comprend au moins les rationnels dyadiques  $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  sur son bord. Soit  $a$  une arête de  $v$  comprise à l'intérieur du polygone  $P$  et  $p > q$  ses extrémités. Il existe un unique triangle idéal dans  $P$  ayant pour sommets  $p, x, q$ , où  $x$  est un rationnel dyadique tel que  $p > x > q$ . On associe le triangle défini par les sommets  $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}$  à ce triangle. De façon analogue, au triangle ayant pour sommets  $y > p > q$  (ou  $p > q > y$ ) de  $P$  on associe le triangle  $\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}$ . En répétant cette procédure un nombre fini de fois, on construit un polygone idéal  $Q$  triangulé, et l'élément  $f \in \mathcal{T}$  défini par  $f(Q) = P$  vérifie bien  $f(\tau_*) = v$ .

Pour prouver l'injectivité de  $\Psi$ , on se contente de montrer que si  $f \in \mathcal{T}$  est différent de l'identité, il existe un sommet  $v$  tel que  $f \cdot v \neq v$ . Soit  $q$  un rationnel dyadique tel que  $f(q) \neq q$ . On prend un carré idéal inscrit dans la triangulation  $\tau_*$  ayant  $q$  pour sommet et une intersection vide avec son image par  $f$  (il existe car  $f(q) \neq q$ , la triangulation  $\tau_*$

a l'ensemble des rationnels dyadiques comme sommets et les rationnels dyadiques sont denses dans  $[0,1]$ ). Maintenant, soit  $v$  la triangulation obtenue en appliquant un flip à la diagonale de ce carré dans  $\tau_*$ . Alors  $f \cdot v \neq v$ .  $\square$

### 3.3.4 Le complexe $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ n'est pas Gromov-hyperbolique

Contrairement à ce qui a été montré au Théorème 3 pour le complexe de courbes d'une surface compacte, on a le résultat suivant concernant le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$

**Proposition 3.3.4** ([FN11]). *Le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.*

Pour s'en convaincre, on se basera sur l'observation suivante :

**Remarque 3.3.1.** *Un flip modifie un seul arc de la triangulation. Ainsi, la distance entre deux sommets  $v, w \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  est minoré par le nombre d'arcs qui appartiennent à la triangulation  $v$  mais pas à la triangulation  $w$ .*

*Démonstration.* Soit  $n$  un entier strictement positif. On note  $d = d_{\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})}$  la distance usuelle sur le graphe de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . On construit un triangle géodésique  $u, v, w$  tel que  $d(u, v) = d(v, w) = n$  et  $d(u, w) = 2n$ , puis on donne un point  $p$  dans le segment géodésique  $uw$  tel que  $d(p, x) \geq n$  pour tout  $x \in uv \cup vw$ .

On définit  $2n$  carrés disjoints  $s_1, \dots, s_{2n}$  inscrits dans  $\tau_*$ . Soit  $u = \tau_*$ ,  $v$  le sommet s'obtenant de  $\tau_*$  après avoir appliqué un flip aux diagonales de chaque carré  $s_1, \dots, s_n$  et le sommet s'obtenant de  $\tau_*$  après avoir appliqué un flip aux diagonales de chaque carré  $s_{n+1}, \dots, s_{2n}$ . Les segments  $uv$  et  $vw$  représentent la succession de flips des diagonales de  $s_1, \dots, s_n$  et  $s_{n+1}, \dots, s_{2n}$  respectivement, dans cet ordre. Le segment  $uw$  est issu du flip de la diagonale du carré  $s_{2n}$ , puis la diagonale du carré  $s_{2n-1}$ , jusqu'au carré  $s_1$ , dans l'ordre décroissant (voir la Fig 3.9). Le point  $p$  est le sommet s'obtenant de  $\tau_*$  par le flip des diagonales de  $s_{n+1}, \dots, s_{2n}$ . Tous ces segments sont géodésiques et  $d(p, x) = n + \min\{d(u, x), d(w, x)\}$  pour tout  $x \in uv \cup vw$ .  $\square$

## 3.4 Le groupe des automorphismes du complexe $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$

Dans cette section, on va étudier le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  et montrer qu'il est isomorphe au produit semi-direct  $\mathcal{T} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

La structure de la preuve s'inspire des idées développées par Ivanov et reprises par la suite dans des cas similaires (voir le Chapitre 2). On va ainsi voir, dans l'idée du corollaire de la Proposition 2.6.5, que tout automorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  est entièrement déterminé par ses valeurs prises sur la boule unité centrée en  $\tau_*$ . Ensuite, on étudie les propriétés des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  à la lumière de leur action sur un complexe auxiliaire, le link d'un sommet, à l'instar de ce qui a été fait dans la section 2.6.2. Cela permet alors de construire, pour un  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  donné, un élément  $t \in \Psi(\mathcal{T}) \subset \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  tel que  $t(\tau_*) = \phi(\tau_*)$ .

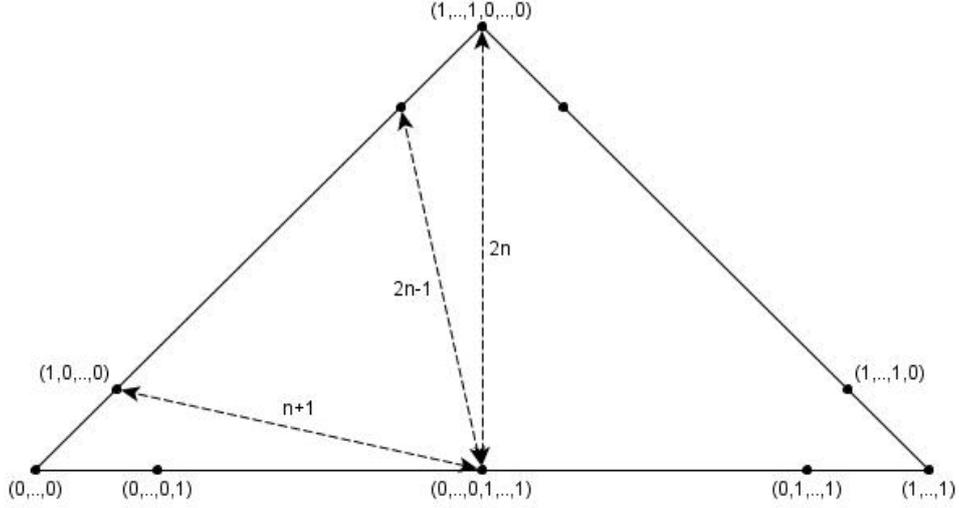


FIGURE 3.9 – Les points correspondent aux triangulations obtenues en flippant sur  $\tau_*$  la diagonale de  $s_i$ , si la  $i$ -ème coordonnée est égale à 1. Les lignes discontinues représentent les distances dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ .

### 3.4.1 Construction du link $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$

On se rappelle que pour toute triangulation  $v$  de  $\Sigma_{0,\infty}^*$ , les flips le long de deux arcs de  $v$  ne commutent pas si et seulement si ces arcs sont adjacents, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au bord d'un même triangle. On va construire un sous-complexe de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  qui encode cette information.

Soit  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}^{(1)}(v)$  un graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des sommets de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  reliés par une arête à  $v$  (autrement dit, la sphère unité centrée en  $v$ ). On relie deux sommets de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}^{(1)}(v)$  par une arête s'ils appartiennent à une même 2-cellule pentagonale de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ .

Donnons maintenant une interprétation géométrique à  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}^{(1)}(v)$ . On associe à chaque arc  $a$  de la triangulation  $v$  un sommet qui représente le sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  s'obtenant de  $v$  en appliquant un flip à l'arc  $a$ . D'après l'interprétation géométrique des 2-cellules détaillée dans la section 3.3.2, on voit dès lors que deux sommets de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}^{(1)}(v)$ , respectivement associés à deux arcs  $a$  et  $b$  de  $v$ , sont reliés par une arête si et seulement si  $a$  et  $b$  sont adjacents. Ainsi,  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}^{(1)}(v)$  peut être vu comme une union connexe de triangles, chacun étant inscrit dans un triangle de  $v$ , où l'intersection entre deux triangles est soit vide, soit un sommet, et où chaque sommet appartient à deux triangles différents (voir la Fig 3.10).

**Définition 3.4.1** ([FN11]). *Soit  $v$  un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . Le link de  $v$  est le complexe 2-dimensionnel  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$  qui est constitué de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}^{(1)}(v)$  auquel on attache une 2-cellule*

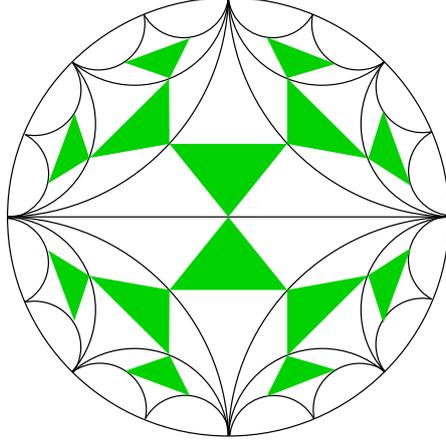


FIGURE 3.10 – Le link de  $\tau_*$ .

sur chaque triangle. De plus, le link peut se plonger dans  $\mathbb{D}^2$  et se trouve naturellement orienté.

On remarque que le link a été construit en n'utilisant que la structure combinatoire de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  dans le voisinage d'un sommet. On note également que  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  est régulier dans le sens où tous les sommets ont la même structure combinatoire sur leur voisinage.

**Lemme 3.4.1** ([FN11]). *Soit  $v$  un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . Alors tout automorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  induit un isomorphisme  $\phi_{*,v} : \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v) \rightarrow \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(w)$ , où  $w = \phi(v)$ .*

On déduit de ce lemme et de la transitivité de l'action de  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  le corollaire suivant :

**Corollaire 3.4.1** ([FN11]). *Soit  $v, w$  deux sommets de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . Alors leurs links respectifs  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$  et  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(w)$  sont isomorphes.*

### 3.4.2 Extension des isomorphismes de link

Dans la section précédente, on montre que tout automorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  induit un isomorphisme  $\phi_{*,v} : \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v) \rightarrow \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(w)$ , où  $w = \phi(v)$ . Réciproquement, étant donné deux sommets  $v$  et  $w$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et un isomorphisme  $i : \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v) \rightarrow \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(w)$ , on va se demander sous quelles conditions il existe un automorphisme  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  tel que  $\phi_{*,v} = i$ .

#### Un problème d'orientation

Soit  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$ ,  $v$  un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et  $w = \phi(v)$ . Soit  $(a, b, c)$  le triplet de sommets d'un triangle  $\Delta$  du link  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$ . On suppose que ce triplet est cycliquement ordonné, en accord avec l'orientation du triangle. Les sommets  $\phi(a), \phi(b), \phi(c) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  sont les sommets d'un triangle  $\phi(\Delta)$  dans  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(w)$ . Il y a deux possibilités :

1. L'orientation de  $\phi(\Delta)$  induit un ordre cyclique  $(\phi(a), \phi(b), \phi(c))$  sur ses sommets.  
On dit alors que  $\phi$  **préserve l'orientation** de  $\Delta$ .
2. L'orientation de  $\phi(\Delta)$  induit un ordre cyclique  $(\phi(a), \phi(c), \phi(b))$  sur ses sommets.  
On dit alors que  $\phi$  **renverse l'orientation** de  $\Delta$ .

**Définition 3.4.2** ([FN11]). Soit  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$ ,  $v$  un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . On dit que  $\phi_{*,v}$  **préserve (renverse) l'orientation** s'il préserve (renverse) l'orientation de chaque triangle de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$ . Par extension, on dit de même que  $\phi$  **préserve (renverse) la  $v$ -orientation** s'il préserve (renverse) l'orientation de chaque triangle de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$ .

### Lien avec $\mathcal{T}$

**Remarque 3.4.1.** Tout élément  $f \in \mathcal{T}$  induit un automorphisme  $\Psi(f) \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  qui préserve la  $v$ -orientation pour tout sommet  $v \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ .

**Lemme 3.4.2** ([FN11]). Soient  $v, w$  deux sommets de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et  $i : \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v) \rightarrow \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(w)$  un isomorphisme préservant l'orientation. Alors il existe un unique automorphisme  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  tel que  $\phi_{*,v} = i$ . De plus,  $\phi \in \mathcal{T}$ .

*Démonstration.* On montre d'abord l'existence en construisant un élément  $\phi \in \mathcal{T}$  de la façon suivante : soit  $\{I_{c_1}^{d_1}, \dots, I_{c_l}^{d_l}\}$  un ensemble d'arcs séparants sur la triangulation  $w$  contenant tous les arêtes ne coïncidant pas avec  $\tau_*$ . Soient  $u'_1, \dots, u'_l$  les sommets de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(w)$  correspondant aux triangulations s'obtenant de  $w$  par le flip, respectivement, des arêtes  $I_{c_1}^{d_1}, \dots, I_{c_l}^{d_l}$ . Soit  $\{I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}\}$  (avec  $k \geq l$ ) un ensemble d'arcs séparants de la triangulation  $v$  contenant en son intérieur  $i^{-1}(u'_1), \dots, i^{-1}(u'_l)$ . Soit  $u_1, \dots, u_k$  les sommets de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$  correspondant aux triangulations s'obtenant de  $v$  par le flip, respectivement, des arêtes  $I_{a_1}^{n_1}, \dots, I_{a_k}^{n_k}$ . Alors  $i(u_1), \dots, i(u_k)$  sont les sommets correspondant aux arêtes qui forment un ensemble d'arcs séparants de  $w$  que l'on note  $\{I_{b_1}^{m_1}, \dots, I_{b_k}^{m_k}\}$ . On définit alors  $\phi$  par  $\phi(I_{a_j}^{n_j}) = I_{b_j}^{m_j}$  pour tout  $1 \leq j \leq k$ . On vérifie alors que  $\phi_{*,v} = i$ .

On montre l'unicité en utilisant l'interprétation géométrique des 2-cellules et la Proposition 3.3.1. Soit  $\psi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  tel que  $\psi_{*,v} = i$ . On montre alors que l'action sur le 0-squelette de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  doit coïncider avec  $\phi$ . On a :

- $\psi(v) = w$
- Pour tout sommet  $u$  à distance 1 de  $v$ ,  $\psi(u) = i(u)$
- Supposons par récurrence que  $\psi$  est défini sur la boule de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  centrée en  $v$  de rayon  $n$ , avec  $n \geq 2$ , et soit  $u$  un sommet à distance  $n + 1$  de  $v$ . On considère un chemin  $p = v, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n, u$  de longueur  $n + 1$  reliant  $v$  à  $u$ . Les sommets  $u_{n-1}, u_n, u$  définissent une unique 2-cellule de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . Cette 2-cellule contient au moins un 4ème sommet  $u'$  à distance inférieure ou égale à  $n$  de  $v$ . Ainsi,  $\psi(u)$  doit être le sommet de l'unique 2-cellule de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  définie par  $\psi(u'), \psi(u_{n-1}), \psi(u_n)$  qui est reliée par une arête à  $\psi(u_n)$  et différent de  $\psi(u_{n-1})$ .

□

## Une obstruction liée à l'orientation

On va voir que le résultat du lemme précédent ne s'applique plus si l'isomorphisme de link ne préserve pas l'orientation de tous les triangles.

**Lemme 3.4.3** ([FN11]). *Soient  $v, w$  deux sommets de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et  $i : \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v) \rightarrow \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(w)$  un isomorphisme qui renverse l'orientation sur un triangle  $\Delta_1 = (u_0, u_1, u_2)$  et renversant l'orientation d'un triangle  $\Delta_2 = (u_0, u_3, u_4)$ . Alors il n'existe pas  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  tel que  $\phi_{*,v} = i$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  tel que  $\phi_{*,v} = i$ . Du fait que  $u_1$  et  $u_0$  appartiennent à un même triangle de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$ , les sommets  $u_1, v, u_0$  définissent une 2-cellule pentagonale de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . Soit  $u_5$  le sommet à distance 1 de  $u_0$  et différent de  $v$  sur cette 2-cellule. De la même façon, on définit  $u_6$  le sommet à distance 1 de  $u_0$  et différent de  $v$  sur la 2-cellule pentagonale engendrée par  $u_4, v, u_0$ . Les sommets  $u_5, u_0, u_6$  définissent une 2-cellule pentagonale.

D'un autre côté,  $i(u_1), i(v), i(u_0)$  définissent également une 2-cellule pentagonale de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . En adaptant la preuve de l'unicité du lemme précédent,  $\phi(u_5)$  est nécessairement le sommet à distance 1 de  $i(u_0)$  et différent de  $w$  sur cette 2-cellule pentagonale. De plus,  $\phi(u_6)$  est nécessairement le sommet à distance 1 de  $\phi(u_0)$  et différent de  $w$  sur la 2-cellule pentagonale définie par  $i(u_4), i(v), i(u_0)$ . Mais dans ce cas, les trois sommets  $\phi(u_5), \phi(u_0), \phi(u_6)$  engendrent une 2-cellule carrée de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ , ce qui contredit le fait que  $\phi$  agit de façon cellulaire sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ . On peut regarder la Fig 3.11 pour se faire une idée de la situation. □

Soit  $v$  un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  et  $w$  un sommet à distance 1 de  $v$ . Soient  $(w, u_1, u_2)$  et  $(w, u_3, u_4)$  les triplets de sommets définissant les deux triangles de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$  ayant comme sommet commun  $w$ . Une représentation géométrique du link  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(w)$  a les mêmes sommets que  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(v)$  et seuls les deux triangles mentionnés ci-dessus sont modifiés en les deux triangles  $(w, u_1, u_4)$  et  $(w, u_2, u_3)$  (voir les Figures 3.10 et 3.12 dans le cas où  $v = \tau_*$ ).

Cela permet de donner une autre preuve du Lemme 3.4.3 :

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  tel que  $\phi_{*,v} = i$ . Alors  $\phi_{*,u_0}$  est un isomorphisme entre le link de  $u_0$  et le link de  $i(u_0)$ . Mais la remarque faite dans le paragraphe précédent permet de voir que  $u_1$  et  $u_4$  sont adjacents dans le link de  $u_0$ , ce qui n'est pas le cas de  $i(u_1)$  et  $i(u_4)$  dans le link de  $i(u_0)$ . Cela contredit le fait que  $\phi_{*,u_0}$  est un isomorphisme. □

Le résultat suivant donne un exemple d'automorphisme qui ne préserve pas l'orientation de chaque triangle sur le link :

**Lemme 3.4.4** ([FN11]). *Soit  $i_R : \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(\tau_*) \rightarrow \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(\tau_*)$  un isomorphisme renversant l'orientation se construisant par la symétrie par rapport à l'axe  $I_0^1$ . Alors il existe un unique automorphisme  $\phi_R \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$  tel que  $(\phi_R)_{*,\tau_*} = i_R$ .*

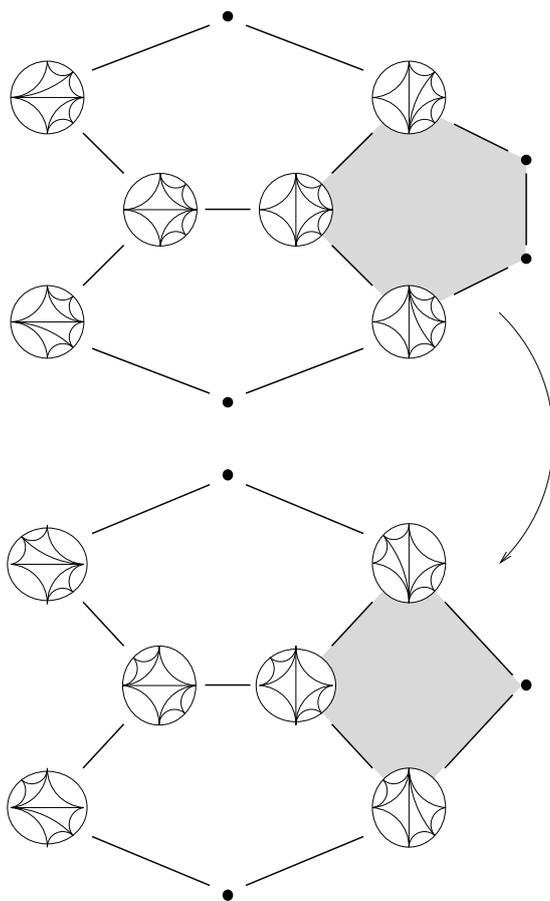


FIGURE 3.11 – Un exemple du Lemme 3.4.3.

### 3.4.3 Preuve du Théorème 7

On étend la notion de préservation de l'orientation des isomorphismes de link aux automorphismes du complexe.

**Définition 3.4.3** ([FN11]). *Soit  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$ ;  $\phi$  est un automorphisme qui préserve (renverse) l'orientation s'il préserve (renverse) la  $v$ -orientation pour tout sommet  $v$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ .*

Avec cette terminologie, le Lemme 3.4.2 dit exactement que le sous-groupe des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  préservant l'orientation est isomorphe au groupe  $\mathcal{T}$ . En revanche, l'automorphisme  $\phi_R$  défini dans le Lemme 3.4.4 renverse l'orientation. Cela permet de classifier les automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  :

**Proposition 3.4.1** ([FN11]). *Tout automorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$  préserve ou renverse l'orientation.*

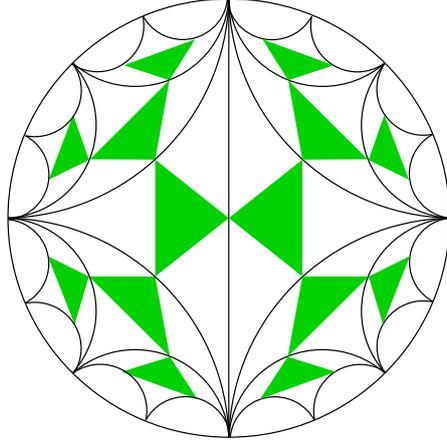


FIGURE 3.12 – Le link du sommet obtenu après un flip de  $I_0^1$  sur  $\tau_*$ .

*Démonstration.* Le Lemme 3.4.3 et la connexité de  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}(\tau_*)$  permet d'affirmer qu'étant donné un automorphisme  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty}))$ , sa restriction au link  $\phi_{*,\tau_*}$  préserve ou renverse la  $\tau_*$ -orientation. Dans le premier cas,  $\phi \in \Psi(\mathcal{T})$  d'après le Lemme 3.4.2; dans le second cas, on considère l'automorphisme  $\phi' = \phi \circ \phi_R$  qui préserve la  $\tau_*$ -orientation, donc préserve l'orientation. Ainsi,  $\phi = \phi' \circ \phi_R$  renverse l'orientation (on vient de voir que  $\phi_R$  renverse l'orientation).  $\square$

On peut maintenant montrer le Théorème 7 :

*Démonstration.* On cherche à construire la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

et on montre qu'elle se scinde.

On définit le morphisme  $\Pi : \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  de la façon suivante :

$$\phi \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \phi \text{ préserve l'orientation} \\ 1 & \text{si } \phi \text{ renverse l'orientation} \end{cases}$$

La Proposition 3.4.1 montre que  $\Pi$  est bien définie. Des Lemmes 3.4.2 et 3.4.4, on déduit que ce morphisme est surjectif et l'isomorphisme  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx \langle \phi_R \rangle$  est une section de  $\Pi$ . Enfin, le Lemme 3.4.2 montre que le noyau de  $\Pi$  est isomorphe à  $\mathcal{T}$ .  $\square$

En conséquence, on a une action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur le groupe des automorphismes de  $\mathcal{T}$ , où le générateur de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agit comme l'automorphisme  $\gamma_R$  défini par  $\gamma_R(t) = \phi_R \circ t \circ \phi_R$ , pour tout  $t \in \mathcal{T}$ . En particulier, on peut définir  $\gamma_R$  à partir des générateurs de  $\mathcal{T}$  avec  $\gamma_R(\alpha) = \alpha^{-1}$  et  $\gamma_R(\beta) = \alpha^2 \beta^{-1} \alpha^2$ . Cela signifie que si l'on conjugue  $\gamma_R$  par  $\alpha^2$ , on obtient le générateur du groupe des automorphismes extérieurs de  $\mathcal{T}$  envoyant  $\alpha$  sur  $\alpha^{-1}$  et  $\beta$  sur  $\beta^{-1}$ , qui est le générateur de  $\text{Out}(\mathcal{T})$  donné par Brin dans [Bri96].

## Chapitre 4

# Groupe des automorphismes du complexe de décomposition d'une surface infinie de genre 0

Nous allons dans ce chapitre définir une surface  $S_{0,\infty}$ , non compacte, de genre 0. Funar et Kapoudjian ont défini un groupe modulaire adapté à cette surface, qu'ils appellent *groupe modulaire universel en genre zéro*, que l'on notera  $\mathcal{B}$ . Ce groupe modulaire est universel dans le sens où c'est le plus petit groupe contenant uniformément tous les groupes modulaires de surfaces de genre nul. C'est une extension du groupe de Thompson  $V$  par la limite inductive de groupes modulaires purs de sphères trouées. En suivant la méthode de Hatcher-Thurston ([HT80]) pour montrer que les groupes modulaires des surfaces compactes sont finiment présentés, Funar et Kapoudjian définissent un complexe sur lequel  $\mathcal{B}$  agit naturellement, puis montrent en utilisant un théorème de Brown ([Bro84]) que  $\mathcal{B}$  est de présentation finie.

On définit donc  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  un complexe de décompositions en pantalons de la surface  $S_{0,\infty}$ . En observant que  $\mathcal{B}$  agit par automorphisme sur ce complexe, la question est de connaître le lien exact entre le groupe des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  et le groupe modulaire  $\mathcal{B}$ . Le résultat principal démontré dans ce chapitre est le suivant :

**Théorème.** *Le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$  est isomorphe à la complétion d'une extension du groupe  $\mathcal{B}$ .*

L'énoncé précis de ce résultat est le Théorème 8. La définition de cette extension est donnée dans la section 4.3.6. Sauf mention contraire, les résultats de ce chapitre sont originaux. Ils font l'objet d'un article en cours de préparation.

### 4.1 Introduction

On définit d'abord dans la section 4.2.1 une surface non compacte  $S_{0,\infty}$ , de genre 0, homéomorphe à une sphère privée d'un ensemble de Cantor. Elle peut être représentée

comme un voisinage tubulaire de l'arbre binaire infini sans racine  $\mathbb{T}$ . On lui associe une décomposition en pantalons particulière que l'on note  $E$  et qui fera office de décomposition standard associée à  $S_{0,\infty}$ . On lui ajoute également une famille de segments qui décomposent la surface en deux composantes connexes, que l'on appellera la face visible et invisible respectivement. La donnée de la décomposition  $E$  et de cette famille de segments est une *structure rigide* de  $S_{0,\infty}$ .

On peut ensuite introduire (section 4.2.2) le groupe modulaire asymptotique  $\mathcal{B}$  : il s'agit d'un groupe modulaire dont les éléments sont des classes d'homotopie d'homéomorphismes préservant l'orientation, mais aussi une structure rigide donnée à l'infini. Cela signifie en particulier que la face visible de  $S_{0,\infty}$  est préservée à l'infini. On ajoute au groupe  $\mathcal{B}$  des éléments ne préservant pas l'orientation, ni la face visible à l'infini, pour obtenir le groupe modulaire asymptotique étendu  $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$  et ensuite sa complétion  $\widehat{\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}}$ .

Dans un deuxième temps, on définit dans la section 4.4 un complexe cellulaire  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  dont les sommets représentent les décompositions en pantalons de  $S_{0,\infty}$  qui coïncident asymptotiquement avec  $E$ . On montre que tout élément de  $\widehat{\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}}$  agit par automorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ , et que l'application naturelle  $\Psi : \widehat{\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$  est injective (Lemme 4.4.1).

Pour savoir si  $\Psi$  est surjective, on étudie dans la section 4.5 les propriétés des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  en les faisant agir sur un graphe auxiliaire, le link  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E)$ , défini dans la section 4.5.1. On étudie précisément la structure de ce graphe et l'on décrit l'action des générateurs de  $\widehat{\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}}$  sur ce complexe (section 4.5.4 et section 4.5.5).

Dans la section 4.6, on obtient d'autres propriétés des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  en les considérant comme des prolongements d'automorphismes du complexe de pantalons d'une surface compacte. On construit explicitement un élément de  $\widehat{\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}}$  qui agit sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  de la même façon qu'un automorphisme quelconque du complexe. On démontre ainsi le résultat principal de ce chapitre :

**Théorème 8.** *Le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$  est isomorphe à  $\widehat{\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}}$ .*

## 4.2 Le groupe modulaire $\mathcal{B}$

### 4.2.1 Description de la surface $S_{0,\infty}$

**Définition 4.2.1.** *On définit  $S_{0,\infty}$  comme étant la surface issue du recollement le long de son bord de deux copies de  $\Sigma_{0,\infty}$ .*

Il pourra être utile de considérer  $S_{0,\infty}$  comme le bord d'un voisinage fermé trois-dimensionnel de l'arbre binaire infini sans racine  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , tandis que  $\Sigma_{0,\infty}$  est un voisinage fermé planaire de  $\mathbb{T}$ .

**Définition 4.2.2.** *Une **décomposition en pantalons** de la surface  $S_{0,\infty}$  est une collection maximale de lacets non triviaux sur  $S_{0,\infty}$  qui sont deux à deux disjoints et non*

homotopes. Le complémentaire d'une décomposition en pantalons dans  $S_{0,\infty}$  est une famille (dénombrable) de copies de  $\Sigma_{0,3}$ .

On construit une décomposition en pantalons standard découlant naturellement du pavage  $\tau_*$  de  $\Sigma_{0,\infty}$  : la surface  $S_{0,\infty}$  est issue du recollement de deux copies de  $\Sigma_{0,\infty}$  le long de leurs bords. Chaque copie est munie du pavage  $\tau_*$ , qui est une famille d'arcs dont les extrémités appartiennent au bord de  $\Sigma_{0,\infty}$ . On choisit l'application de recollement de telle sorte que les deux copies de la famille d'arcs  $\tau_*$  forment une famille de courbes simples fermées de  $S_{0,\infty}$ .

On ajoute à  $S_{0,\infty}$  une structure additionnelle qui permettra ensuite de définir un groupe modulaire. On reprend la terminologie employée dans [FK04].

**Définition 4.2.3.** Une **structure prérigide** de  $S_{0,\infty}$  est une famille dénombrable de droites disjointes proprement plongées dans  $S_{0,\infty}$  telle que le complémentaire de leur union dans  $S_{0,\infty}$  a exactement deux composantes connexes.

**Définition 4.2.4.** Une **structure rigide** est la donnée d'une décomposition en pantalons et d'une structure prérigide. Ces deux familles doivent être compatibles, dans le sens où la trace de la structure prérigide sur chaque pantalon est faite de trois composantes connexes, chacune appelée **couture**. De plus, chaque paire de composantes de bord d'un pantalon donné est reliée par une unique couture.

On fixe arbitrairement une structure prérigide que l'on associe à la décomposition en pantalons canoniques  $E$ . On obtient une structure rigide particulière que l'on appelle la **structure rigide canonique** (voir la Figure 4.1).

**Définition 4.2.5.** Le complémentaire dans  $S_{0,\infty}$  de la réunion des courbes de la structure prérigide canonique a deux composantes connexes. On en distingue une et on l'appelle la **face visible** de  $S_{0,\infty}$ . La face visible est isomorphe à  $\Sigma_{0,\infty}$  (il en est de même pour la face invisible).

**Définition 4.2.6.** Une décomposition en pantalons de la surface  $S_{0,\infty}$  est **asymptotiquement triviale** si elle coïncide avec la décomposition canonique en dehors d'une sous-surface compacte de  $\Sigma$ .

**Définition 4.2.7.** Soit  $F$  une décomposition en pantalons de la surface  $S_{0,\infty}$ . On dit que  $F$  est **compatible avec la face visible** de  $S_{0,\infty}$  si pour tout lacet  $c$  de  $F$ , la trace de  $c$  sur la face visible de  $S_{0,\infty}$  est connexe.

Par exemple, la décomposition en pantalons canonique  $E$  est compatible avec la face visible de  $S_{0,\infty}$ . La face visible de  $S_{0,\infty}$  munie de la trace de  $E$  sur celle-ci est homéomorphe à  $\Sigma_{0,\infty}$  munie du pavage  $\tau'_*$  décrit au chapitre précédent.

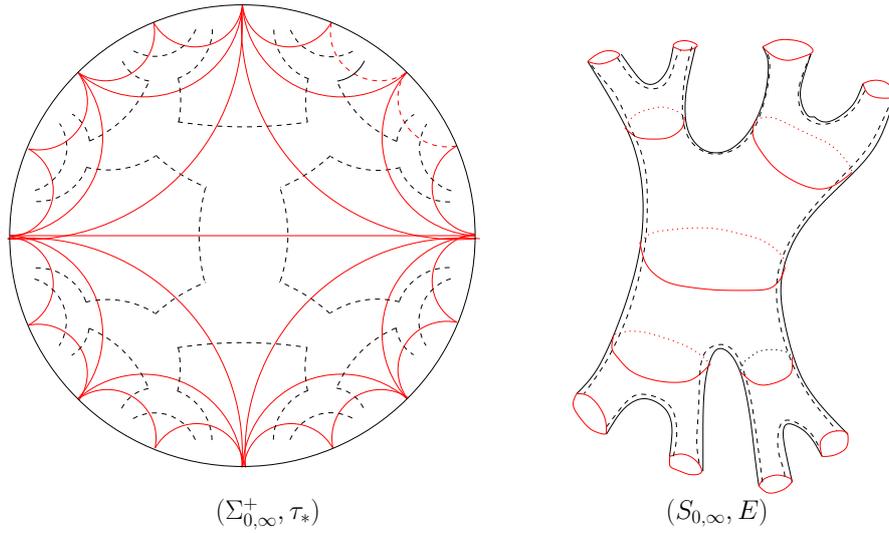


FIGURE 4.1 – La surface  $S_{0,\infty}$  munie de sa décomposition canonique, découpée le long de sa face visible, issue du recollement de deux copies de  $(\Sigma_{0,\infty}, \tau_*)$  le long de leur bord.

## 4.2.2 Définition du groupe modulaire $\mathcal{B}$

On va maintenant définir un groupe modulaire asymptotique de façon analogue au cas de la surface planaire  $\Sigma_{0,\infty}$ . Les cinq définitions suivantes se trouvent dans [FK04].

**Définition 4.2.8.** Une sous-surface compacte  $\Sigma_{0,n}$  est **admissible** si chacune de ses composantes de bord est un lacet de la décomposition canonique de  $S_{0,\infty}$ . Le nombre  $n$  de composantes de bord est appelé l'**ordre** de la sous-surface en question.

**Définition 4.2.9.** Soit  $f$  un homéomorphisme de  $S_{0,\infty}$ . On dit que  $f$  est **rigide** si elle respecte la trace de la structure rigide canonique. Autrement dit,  $f$  est rigide si elle envoie la décomposition en pantalons canonique sur la décomposition en pantalons canonique, les coutures sur les coutures et la face visible sur la face visible.

**Définition 4.2.10.** Soit  $f$  un homéomorphisme de  $S_{0,\infty}$ . On dit que  $f$  est **quasi-rigide** si elle respecte la trace de la décomposition en pantalons canonique.

**Définition 4.2.11.** Soit  $f$  un homéomorphisme de  $S_{0,\infty}$ . On dit que  $f$  est **asymptotiquement rigide** (resp. **asymptotiquement quasi-rigide**) s'il existe une sous-surface admissible  $\Sigma_{0,n} \subset S_{0,\infty}$  telle que son image par  $f$  est également une sous-surface admissible et la restriction de  $f$  à  $S_{0,\infty} \setminus \Sigma_{0,n}$  est rigide (resp. quasi-rigide).

**Définition 4.2.12.** On note  $\mathcal{B}$  le groupe des classes d'homotopie des homéomorphismes de  $S_{0,\infty}$  asymptotiquement rigides. On l'appelle le **groupe modulaire universel préservant l'orientation en genre zéro**.

## Lien avec $\Sigma_{0,\infty}$ , $V$ et $\mathcal{T}$

Il existe une projection naturelle  $\pi : S_{0,\infty} \rightarrow \Sigma_{0,\infty}$  telle que l'antécédent de chaque arc du pavage  $\tau'_*$  de  $\Sigma_{0,\infty}$  soit un lacet de la décomposition  $E$ . Cela permet notamment d'établir une bijection entre l'ensemble des lacets de la décomposition  $E$  et les intervalles standard dyadiques, ceux-ci définissant chaque arc du pavage  $\tau_*$ .

$$\{\text{lacets de } E\} \leftrightarrow \{\text{arcs de } \tau_*\} \leftrightarrow \{\text{intervalles standard dyadiques}\}$$

**Définition 4.2.13** ([CFP96]). *Le groupe de Thompson  $V$  est le groupe des bijections continues du cercle linéaires par morceaux, différentiables sauf sur un nombre fini de nombres rationnels dyadiques, tels que sur les intervalles de différentiabilité, les dérivées sont des puissances de 2, et qui stabilise l'ensemble des nombres rationnels dyadiques.*

Il est à noter que le groupe de Thompson  $V$  contient le groupe de Thompson  $\mathcal{T}$  défini précédemment. La différence est que la condition “être un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation” dans la définition de  $\mathcal{T}$  devient “être une bijection continue”. Si l'on regarde l'action de  $V$  sur le disque hyperbolique  $\mathbb{D}^2$  muni d'une triangulation dont les sommets sont les rationnels dyadiques, cela signifie en particulier qu'un élément de  $V$  envoie un polygone idéal sur un autre, sans forcément préserver l'ordre cyclique des côtés du polygone, alors qu'un élément de  $\mathcal{T}$  préserve cet ordre.

On rappelle que  $\text{PMod}(\Sigma_{g,n})$  est le sous-groupe de  $\text{Mod}^+(\Sigma_{g,n})$  qui fixe les composantes de bord point par point de  $\Sigma_{g,n}$ . On définit  $\text{PMod}^*$  comme étant la limite inductive

$$\text{PMod}^* = \bigcup_{n \rightarrow \infty} \text{PMod}(\Sigma_{0,3 \times 2^n})$$

En prenant  $g = 0$  en faisant tendre  $n$  vers l'infini dans la suite exacte de la section 2.1.1, on obtient le résultat suivant :

**Proposition 4.2.1** ([FK04]). *On a la suite exacte suivante :*

$$1 \longrightarrow \text{PMod}^* \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow V \longrightarrow 1$$

On peut montrer par ailleurs ([FK04]) que cette suite exacte se scinde sur  $\mathcal{T}$ . Plus précisément, on a la caractérisation suivante :

**Proposition 4.2.2** ([FK04]). *Le groupe de Thompson  $\mathcal{T}$  est le sous-groupe de  $\mathcal{B}$  des éléments préservant la face visible de la surface  $S_{0,\infty}$ .*

## Générateurs de $\mathcal{B}$

Le groupe  $\mathcal{B}$  est engendré par le twist  $t$  (Fig 4.2), la tresse  $\pi$  (Fig 4.3) et les deux générateurs  $\alpha$  et  $\beta$  du groupe de Thompson  $\mathcal{T}$ . Pour plus de détails sur la définition de ces générateurs, voir la section 3 de [FK04].

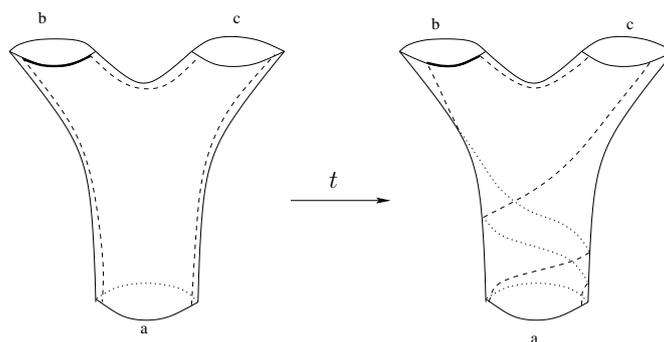


FIGURE 4.2 – Action d'un twist  $t$  sur un pantalon.

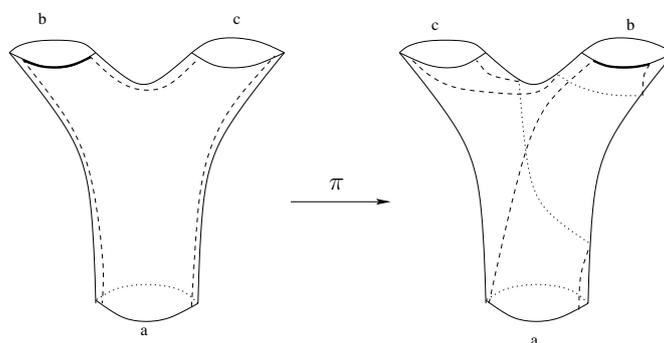


FIGURE 4.3 – Action d'une tresse  $\pi$  sur un pantalon.

### Autres sous-groupes remarquables de $\mathcal{B}$

**Proposition 4.2.3** ([FK04]). *Le sous-groupe des éléments de  $\mathcal{B}$  représentant des homéomorphismes rigides est isomorphe à  $PSL_2(\mathbb{Z})$  : c'est le sous-groupe de  $\mathcal{T}$  engendré par les éléments  $\alpha^2$  (d'ordre 2) et  $\beta$  (d'ordre 3).*

On considère maintenant une surface  $\Sigma_{0,n}$  plongée dans  $S_{0,\infty}$  de sorte que ses composantes de bord coïncident avec des lacets appartenant à la décomposition  $E$  de  $S_{0,\infty}$ . En particulier, chaque composante de bord a une face visible. Le groupe modulaire  $\text{Mod}^+(\Sigma_{0,n})$  est le groupe des classes d'homotopie des homéomorphismes préservant l'orientation de  $\Sigma_{0,n}$ . Ces homéomorphismes peuvent permuter les composantes de bord de  $\Sigma_{0,n}$  mais on peut supposer qu'ils préservent leurs faces visibles. Il existe donc un plongement  $\text{Mod}^+(\Sigma_{0,n}) \hookrightarrow \mathcal{B}$  qui consiste à étendre de façon rigide l'homéomorphisme représentant un élément de  $\text{Mod}^+(\Sigma_{0,n})$ .

### 4.3 Le groupe modulaire asymptotique étendu $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$

On définit certaines classes d'homotopie d'homéomorphismes de  $S_{0,\infty}$  avant de définir le groupe modulaire asymptotique étendu comme une extension du groupe  $\mathcal{B}$  contenant ces classes d'homéomorphismes.

#### 4.3.1 La symétrie

**Définition 4.3.1.** *On définit  $i_R$  comme étant la classe d'homotopie de l'homéomorphisme quasi-rigide qui agit comme une symétrie sur  $S_{0,\infty}$ , échangeant sur chaque pantalon de la décomposition canonique  $E$  la face visible et la face invisible.*

**Définition 4.3.2.** *On définit  $\mathcal{B}^*$  comme étant l'extension par le groupe  $\langle i_R \rangle \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  du groupe  $\mathcal{B}$ . On l'appelle le groupe modulaire asymptotique de  $S_{0,\infty}$ .*

Il existe ainsi un plongement  $\text{Mod}(\Sigma_{0,n}) \hookrightarrow \mathcal{B}^*$  du groupe modulaire de la surface  $\Sigma_{0,n}$  des homéomorphismes préservant ou non l'orientation de la surface.

#### 4.3.2 Le groupe des demi-twists $D$

On adapte la définition du demi-twist donnée dans la section 2.1.1 au cas de la surface infinie  $S_{0,\infty}$ . Soit  $S_0$  un pantalon de la décomposition  $E$  délimité par trois lacets notés  $a, b, c$ . Après découpage le long de ces trois lacets, cela définit trois composantes connexes infinies de  $S_{0,\infty}$  que l'on note respectivement  $S_a, S_b, S_c$ . Le demi-twist  $D_{a,b,c}$  défini sur  $S_0$  fixe le lacet  $a$  et effectue une rotation d'angle  $\pi$  qui échange  $b$  et  $c$ . On ajoute la condition que la trace de  $b$  sur la face visible de  $S_{0,\infty}$  est envoyée sur la trace de  $c$  sur la face non visible, et vice-versa (voir la Fig 4.4). Puis on étend cet homéomorphisme à  $S_{0,\infty}$  de façon quasi-rigide. Cela signifie que  $D_{a,b,c}$  agit comme l'identité sur  $S_a$ , envoie la face visible de  $S_b$  sur la face invisible de  $S_c$ , la face invisible de  $S_b$  sur la face visible de  $S_c$ , la face visible de  $S_a$  sur la face invisible de  $S_b$  et la face invisible de  $S_a$  sur la face invisible de  $S_b$  (voir la Fig 4.5). On note  $d_{a,b,c}$  la classe d'homotopie de l'homéomorphisme  $D_{a,b,c}$ , ne dépendant que des classes d'homotopie des lacets  $a, b$  et  $c$ . On note  $\text{supp}(d_{a,b,c})$  la sous-surface de  $S_{0,\infty}$  sur laquelle  $d_{a,b,c}$  agit non trivialement. Avec les notations de ce paragraphe, on a  $\text{supp}(d_{a,b,c}) = S_0 \cup S_b \cup S_c$ .

On note  $D$  le groupe engendré par tous les demi-twists le long de chaque lacet de la décomposition canonique  $E$ . Le groupe  $D$  est un groupe abélien libre infiniment engendré.

#### 4.3.3 Classification des demi-twists

Rappelons qu'il existe une bijection entre l'ensemble des lacets de  $E$  et les arêtes de la triangulation  $\tau'_*$ , ce qui permet d'associer à chaque lacet un intervalle standard dyadique  $I_k^n = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ . Dans  $\mathbb{D}^2$ , les triplets  $(I_0^1, I_0^2, I_1^2)$ ,  $(I_0^1, I_2^2, I_3^2)$  forment des triangles idéaux de la triangulation  $\tau_*$ . Puis pour  $a > 0$ , tous les autres triangles idéaux de  $\tau_*$  s'écrivent sous la forme  $(I_k^n, I_{2k}^{n+1}, I_{2k+1}^{n+1})$ . On a ainsi énuméré tous les pantalons de la

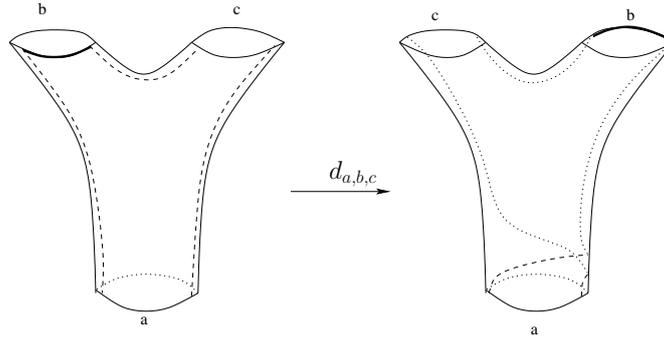


FIGURE 4.4 – Action d’un demi-twist  $d_{a,b,c}$  sur un pantalon.

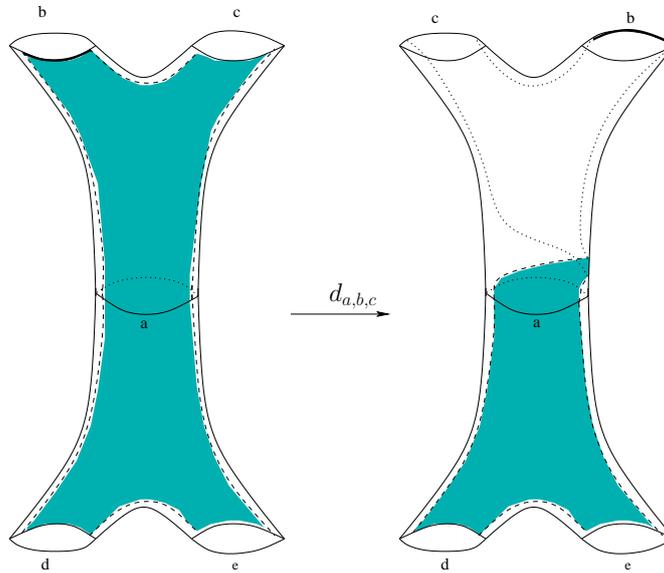


FIGURE 4.5 – Action d’un demi-twist  $d_{a,b,c}$  sur la face visible.

décomposition  $E$ . On va donc pouvoir décrire l’ensemble des demi-twists qui engendrent  $D$  par l’ensemble des intervalles standard dyadiques :

Soit  $d_{a,b,c}$  un demi-twist. Il existe  $k$  et  $n$  des entiers naturels vérifiant  $0 \leq k \leq 2^n - 1$  tels que  $a$  soit représenté par  $I_k^n$ ,  $b$  par  $I_{2k}^{n+1}$  et  $c$  par  $I_{2k+1}^{n+1}$ . On utilise dès lors la notation

$$d_{a,b,c} = d_a = d_{I_k^n}$$

**Remarque 4.3.1.** Avec ces conventions, un lacet de  $E$  est naturellement associé à deux lacets adjacents. Ainsi, la seule donnée d’un lacet  $a$  de  $E$  suffit pour déterminer un demi-twist. Dans la suite, pour définir un demi-twist, on ne précisera l’identité des deux lacets adjacents qui sont permutés par ce demi-twist que si cela aide à la compréhension.

#### 4.3.4 Définition de $\widehat{D}$

Pour tout  $n \leq m$  et  $a, b$  vérifiant  $0 \leq a \leq 2^n - 1$  et  $0 \leq b \leq 2^m - 1$ , on a  $\text{supp}(d_{I_a^n}) \cap \text{supp}(d_{I_b^m}) = \emptyset$  ou bien  $\text{supp}(d_{I_a^n}) \subset \text{supp}(d_{I_b^m})$ . Ainsi, pour toute suite  $(a_i, n_i, p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq a_i \leq 2^{n_i} - 1$ , la suite  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est croissante, on peut définir le produit infini  $\prod_{i=0}^{\infty} (d_{I_{a_i}^{n_i}})^{p_i}$ . On définit ainsi la complétion  $\widehat{D}$  de  $D$ .

#### 4.3.5 Définition de $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$

**Définition 4.3.3.** On définit  $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$  comme étant le groupe engendré par les demi-twists le long des lacets de  $E$  et les deux générateurs  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathcal{T}$ .

On remarque que la tresse et le twist sont engendrés par des demi-twists. En effet, en itérant deux fois un demi-twist le long d'un lacet  $c$ , on obtient un twist le long du lacet  $c$ . De plus, on obtient une tresse sur le pantalon dont les composantes de bord sont numérotées par  $a, b, c$  en composant les demi-twists le long de  $a, b$  et  $c$ . Ainsi,  $\mathcal{B}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$ . De plus, tout demi-twist le long d'un lacet quelconque de  $S_{0,\infty}$  est le conjugué par un élément de  $\mathcal{B}$  d'un demi-twist le long d'un lacet de  $E$ . En effet,  $\mathcal{B}$  agit transitivement sur les lacets. On en déduit que  $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$  contient tous les demi-twists  $d_\alpha$ , pour tout lacet  $\alpha$  de  $S_{0,\infty}$ . Au final, on a les relations suivantes, où  $f \in \mathcal{B}$  :

$$\begin{aligned} t_c &= d_c^2 \\ \pi &= d_a d_b^{-1} d_c^{-1} \\ d_\alpha &= f d_c f^{-1} \end{aligned}$$

**Remarque 4.3.2.** Un demi-twist le long d'un lacet de la décomposition canonique est un homéomorphisme quasi-rigide de  $S_{0,\infty}$ .

#### 4.3.6 Définition du groupe modulaire asymptotique étendu $\widehat{\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}}$

**Définition 4.3.4.** On définit  $\widehat{\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}}$  comme étant le groupe des classes d'homotopie des homéomorphismes asymptotiquement quasi-rigides de la surface  $S_{0,\infty}$ .

Ce groupe contient  $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$  comme sous-groupe. Il contient également la symétrie  $i_R$ . On peut voir que la symétrie s'écrit comme un produit infini de demi-twists sur tous les lacets de  $E$  :

$$i_R = \prod_{c_i \in E} d_{c_i}$$

Si  $x \in \widehat{\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}}$ , il existe une sous-surface  $S$  de  $S_{0,\infty}$  en dehors de laquelle  $x$  agit de façon quasi-rigide, c'est-à-dire stabilise la décomposition  $E$ . On peut supposer que  $S$  est bordée

par un ensemble de lacets du type  $\{I_l^{n_0}, 0 \leq l \leq 2^{n_0} - 1\}$ , où  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, chaque élément  $x$  du groupe  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  s'écrit comme le produit infini

$$x = f \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (d_{I_{a_i}^{n_i}})^{p_i}$$

où  $f \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$  agit de façon rigide en dehors de  $S$ ,  $(n_i)$  est une suite croissante d'entiers,  $0 \leq a_i \leq 2^{n_i} - 1$  et  $p_i \in \mathbb{Z}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . De plus, les demi-twists  $d_{I_{a_i}^{n_i}}$  agissent comme l'identité à l'intérieur de  $S$ . Donc  $f$  commute avec  $\prod_{i=0}^{\infty} (d_{I_{a_i}^{n_i}})^{p_i}$ .

Soit  $x' = f' \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (d_{I_{a'_i}^{n'_i}})^{p'_i}$  un autre élément de  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  où  $f' \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$  agit de façon rigide en dehors de la sous-surface admissible délimitée par les lacets  $\{I_l^{n'_0}, 0 \leq l \leq 2^{n'_0} - 1\}$ . On considère le produit  $x \cdot x'$ . On peut supposer sans perte de généralités que  $n'_0 \leq n_0$ . Quitte à remplacer  $f'$  par  $f' \cdot g$  où  $g$  est un produit fini de demi-twists, on peut supposer que  $n'_0 = n_0$ . Ainsi,

$$x \cdot x' = f \cdot f' \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (d_{I_{a_i}^{n_i}})^{p_i + p'_i}$$

Par conséquent, le produit de  $f$  avec  $\prod_{i=0}^{\infty} (d_{I_{a_i}^{n_i}})^{p_i}$  permet bien de définir tout élément du groupe  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$ .

## 4.4 Le complexe de décompositions en pantalons de $S_{0,\infty}$

### 4.4.1 Définition du complexe

**Définition 4.4.1.** Soient deux décompositions en pantalons asymptotiquement triviales  $F$  et  $F'$  de  $S_{0,\infty}$ . On dit qu'elles diffèrent par un mouvement élémentaire le long du lacet  $c$  si  $F'$  s'obtient de  $F$  en remplaçant le lacet  $c$  par un autre qui l'intersecte deux fois et est disjoint des autres lacets de  $F$  (voir la Figure 4.6).

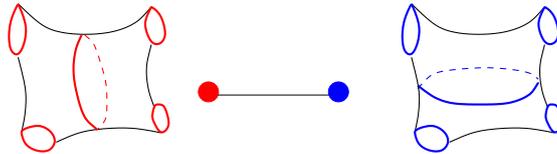


FIGURE 4.6 – Exemple d'un mouvement élémentaire entre deux décompositions en pantalons, les autres lacets non représentés de la décomposition étant fixes.

**Définition 4.4.2.** On définit le complexe de décompositions en pantalons de  $S_{0,\infty}$ , noté  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ , de la façon suivante :

- Les sommets sont les décompositions en pantalons asymptotiquement triviales de  $S_{0,\infty}$  ;
- Deux sommets sont reliés par une arête si ces sommets représentent deux décompositions en pantalons qui diffèrent par un mouvement élémentaire ;
- Les 2-cellules ont pour bord les 3-cycles, 4-cycles et 5-cycles d'arêtes, que l'on nomme respectivement les 2-cellules triangulaires, carrées, pentagonales (voir les Figures 4.7 et 4.8).

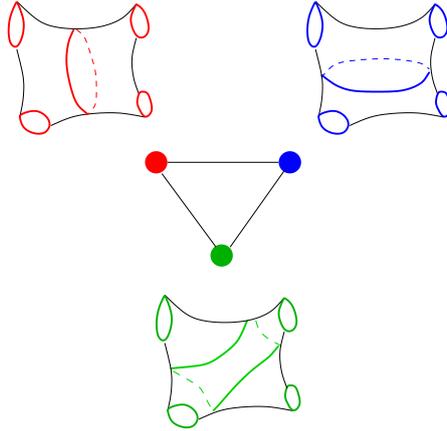


FIGURE 4.7 – Exemple d'une 2-cellule triangulaire dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ .

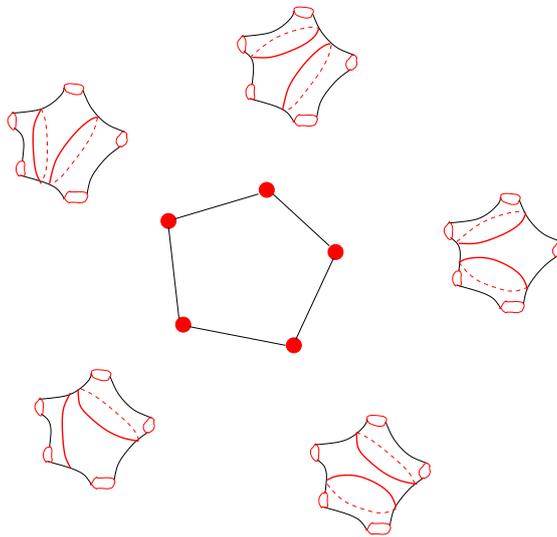


FIGURE 4.8 – Exemple d'une 2-cellule pentagonale dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ .

**Définition 4.4.3.** On note  $d$  la distance sur le graphe de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  qui assigne la longueur 1 à chaque arête.

On va maintenant distinguer deux types de mouvement élémentaire sur la décomposition canonique  $E$  de  $S_{0,\infty}$ . Soit  $c$  un lacet de  $E$ . Il existe une unique sous-surface d'ordre 4, notée  $S \subset S_{0,\infty}$  telle que ses composantes de bord sont des lacets de  $E$  et  $c$  décompose  $S$  en deux pantalons  $p_1$  et  $p_2$  de  $E$  et  $S$  s'obtient de  $S_{0,\infty}$  après un découpage le long de quatre lacets de  $E$ . Il existe un unique lacet  $c'$  de  $S$  qui intersecte deux fois  $c$  et dont la trace sur la face visible de  $S$  est connexe. On dit alors que le mouvement élémentaire transformant  $c$  en  $c'$  est un *mouvement élémentaire simple*.

#### 4.4.2 Interprétation géométrique des 2-cellules

De même que dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,\infty})$ , les 2-cellules de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  se caractérisent géométriquement. On rappelle que deux lacets d'une décomposition en pantalons sont dit *adjacents* si ce sont les composantes de bord d'un même pantalon. Le résultat suivant est l'analogie de la Proposition 3.3.1.

**Proposition 4.4.1.** Soient  $F_1, F_2, F_3$  trois sommets du complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  tels que  $d(F_1, F_2) = d(F_2, F_3) = 1$ . Alors il existe une unique 2-cellule de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  contenant ces trois sommets.

*Démonstration.* Il y a trois cas possibles :

- Si  $d(F_1, F_3) = 1$ , alors  $F_1, F_2, F_3$  sont les sommets d'une 2-cellule triangulaire ;
- Si  $d(F_1, F_3) = 2$ , il y a deux cas possibles ; on note  $m_c$  et  $m_{c'}$  les mouvements élémentaires le long des lacets  $c$  et  $c'$  représentés respectivement par les arêtes  $(F_1, F_2)$  et  $(F_2, F_3)$  ;
- Si  $c$  et  $c'$  ne sont pas adjacents dans la décomposition  $F_2$ , les mouvements élémentaires associés sont à supports disjoints et ils commutent. Ainsi,  $F_1, F_2, F_3$  appartiennent à une unique 2-cellule carrée ;
- Si  $c$  et  $c'$  sont adjacents, les mouvements élémentaires associés à  $c$  et  $c'$  ne commutent pas. Soit  $F_0$  la décomposition obtenue en appliquant le mouvement élémentaire  $m_{c'}$  à  $F_1$  et  $F_4$  la décomposition obtenue en appliquant  $m_c$  à  $F_3$ . Alors  $d(F_0, F_4) = 1$ .

□

#### 4.4.3 Action du groupe modulaire étendu sur le complexe

**Lemme 4.4.1.** Le groupe modulaire asymptotique étendu agit sur le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  par automorphisme, transitivement sur l'ensemble des sommets. De plus, l'application naturelle  $\Psi : \widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$  est injective.

*Démonstration.* La première partie est une version faible de la Proposition 5.4 de [FK04]. On montre la deuxième partie concernant l'injectivité de manière similaire à la preuve de l'injectivité dans la Proposition 3.3.3, comme suit. On considère un élément  $x \in \widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  et

on suppose que  $x$  est non trivial. On trouve un sommet  $F$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  tel que  $x \cdot F \neq F$ . Supposons d'abord que  $x \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$ . Soit  $\Sigma_{0,n}$  une sous-surface admissible de  $S_{0,\infty}$  en dehors de laquelle  $x$  agit de façon rigide et telle que  $n \geq 5$ . Alors  $x$  induit un homéomorphisme non trivial de  $\Sigma_{0,n}$  dans  $x(\Sigma_{0,n})$ . Si  $\Sigma_{0,n} \neq x(\Sigma_{0,n})$ , il existe un lacet  $c$  de la décomposition canonique  $E$  de  $S_{0,\infty}$  bordant  $\Sigma_{0,n}$  tel que  $x(c)$  est un lacet de  $E$  bordant  $x(\Sigma_{0,n})$  différent de  $c$ . Soit  $F$  la décomposition issue d'un mouvement élémentaire du lacet  $c$  de  $E$ . Alors  $x \cdot F \neq F$ . Si  $\Sigma_{0,n} = x(\Sigma_{0,n})$ ,  $x$  induit un homéomorphisme non trivial  $\bar{x}$  de  $\Sigma_{0,n}$ . D'après l'injectivité dans le théorème 5, il existe une décomposition en pantalon  $F_n$  de  $\Sigma_{0,n}$  telle que  $\bar{x} \cdot F_n \neq F_n$ . Soit  $F$  la décomposition de  $S_{0,\infty}$  qui coïncide avec  $E$  en dehors de  $\Sigma_{0,n}$  et avec  $F_n$  à l'intérieur de  $\Sigma_{0,n}$ . Alors  $x \cdot F \neq F$ .

Supposons maintenant que  $x \notin \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$ . Cela signifie que  $x$  s'écrit sous la forme

$$x = f \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (d_{c_i})^{p_i}$$

où  $f \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$ . Si  $f$  est non trivial, le cas précédent permet de conclure. Sinon, il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $p_i \neq 0$ . Soit  $F$  la décomposition issue du mouvement élémentaire simple sur  $E$  appliqué à  $c_i$ . Alors  $x \cdot F \neq F$ .  $\square$

On rappelle que l'on veut démontrer que  $\Psi$  est un isomorphisme (Théorème 8).

## 4.5 Le groupe des automorphismes du complexe $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$

On va dégager des propriétés des automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  en les faisant agir sur un certain graphe, le link d'un sommet  $F$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ , dont l'ensemble des sommets correspond aux sommets adjacents à  $F$  dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ . Le résultat suivant permet de réduire l'espace sur lequel il est pertinent d'étudier un automorphisme, en l'occurrence la boule unité d'un sommet.

**Lemme 4.5.1.** *Soient deux automorphismes  $\phi$  et  $\phi'$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  tels que pour toute décomposition  $F$  telle que  $d(E, F) \leq 1$ , on a  $\phi(F) = \phi'(F)$ . Alors  $\phi = \phi'$ .*

*Démonstration.* La preuve, se basant sur la caractérisation géométrique des 2-cellules de la Proposition 4.4.1, est identique à la démonstration de l'unicité du Lemme 3.4.2. On montre alors que  $\phi$  et  $\phi'$  coïncident sur le 0-squelette de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ . On a :

- $\phi(E) = \phi'(E)$
- Pour tout sommet  $F$  à distance 1 de  $E$ ,  $\phi(F) = \phi'(F)$
- Supposons par récurrence que  $\phi$  et  $\phi'$  coïncident sur la boule de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  centrée en  $E$  de rayon  $n$ , avec  $n \geq 2$ , et soit  $G$  un sommet à distance  $n + 1$  de  $E$ . On considère un chemin  $p = E, H_1, \dots, H_{n-1}, H_n, G$  de longueur  $n + 1$  reliant  $E$  à  $G$ . Les sommets  $H_{n-1}, H_n, G$  définissent une unique 2-cellule de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ . Cette 2-cellule contient au moins un 4ème sommet  $G'$  à distance inférieure ou égale à  $n$  de  $E$ . En effet, si cette 2-cellule était triangulaire,  $G$  serait à distance inférieure ou égale à  $n$  de  $E$ . Ainsi,  $\phi(G)$  doit être le sommet de l'unique 2-cellule de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$

définie par  $\phi(G'), \phi(H_{n-1}), \phi(H_n)$  qui est reliée par une arête à  $\phi(G_n)$  et différent de  $\phi(G_{n-1})$ . Par unicité,  $\phi(G) = \phi'(G)$ . □

#### 4.5.1 Le link d'une décomposition

De manière analogue à la démarche effectuée dans la section 3.4.1, on va, étant donnée  $F$  une décomposition asymptotiquement triviale, considérer un graphe ayant comme sommets l'ensemble des décompositions à distance 1 de  $F$  et qui encode la structure du complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ .

**Définition 4.5.1.** *On construit  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$  comme étant un graphe muni de deux types d'arête :*

- les **sommets** sont les décompositions en pantalons asymptotiquement triviales reliées par une arête à  $F$  dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  ;
- les **arêtes** :
  - les **arêtes de type (A)** relient deux sommets si les décompositions correspondantes appartiennent à une même 2-cellule pentagonale ;
  - les **arêtes de type (B)** relient deux sommets si les triangulations associées appartiennent à une même 2-cellule triangulaire.

**Définition 4.5.2.** *Pour tout lacet  $c$  de la décomposition  $F$ , on note  $V_c(F)$  le sous-ensemble des sommets de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$  correspondant à un mouvement élémentaire de  $c$  sur  $F$ .*

**Proposition 4.5.1.** *Le 0-squelette de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$  est la réunion disjointe des  $V_c(F)$  où  $c$  parcourt l'ensemble des lacets de  $F$ .*

**Lemme 4.5.2.** *Tout automorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  induit un isomorphisme  $\phi_{*,F} : \mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E) \rightarrow \mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$  où  $F = \phi(E)$ . De plus,  $\phi_{*,F}$  préserve le type d'arête.*

On en déduit que pour toute décomposition asymptotiquement triviale  $F$ , on a un isomorphisme entre  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E)$  et  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$ .

On construit maintenant un graphe issu de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$ , contenant moins d'information mais faisant apparaître sa structure générale.

**Définition 4.5.3.** *On note  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(F)$  le graphe obtenu en quotientant  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$  par la relation d'équivalence qui identifie deux sommets reliés par une arête de type (B) ainsi que cette arête à un seul point.*

Enfin, on donne une définition similaire du link d'une décomposition en pantalons d'une surface compacte, qui nous servira dans la section 4.6.

Soit  $\Sigma_{0,n}$  une surface de genre 0 avec  $n$  composantes de bord ( $n \geq 5$ ) et  $F_n$  une décomposition en pantalons de  $\Sigma_{0,n}$  ;  $F_n$  est un sommet du complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n})$ .

**Définition 4.5.4.** On construit le link restreint  $\mathcal{L}_{S_0,\infty}(F_n)$  comme étant un graphe muni de deux types d'arête :

- les **sommets** sont les décompositions en pantalons reliées par une arête à  $F_n$  dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n})$  ;
- les **arêtes** :
  - les **arêtes de type (A)** relient deux sommets si les décompositions correspondantes appartiennent à une même 2-cellule pentagonale ;
  - les **arêtes de type (B)** relient deux sommets si les triangulations associées appartiennent à une même 2-cellule triangulaire.

#### 4.5.2 Structure de $\mathcal{L}_{S_0,\infty}(E)$

Puisque tous les links sont isomorphes, on va pouvoir se contenter de l'étude du link de la décomposition canonique  $E$  fixée au départ. La description suivante se base sur la caractérisation géométrique des 2-cellules.

##### Arêtes de type (A)

Etant donnés deux lacets  $c$  et  $c'$  de  $E$  et deux sommets distincts quelconques  $a \in V_c(E)$  et  $b \in V_{c'}(E)$ , il existe une arête (A) reliant les sommets  $a$  et  $b$  dans  $\mathcal{L}_{S_0,\infty}(E)$  si et seulement si  $c$  et  $c'$  sont adjacents dans  $E$ .

##### Arêtes de type (B)

Etant donnés deux lacets  $c$  et  $c'$  de  $E$  et deux sommets distincts quelconques  $a \in V_c(E)$  et  $b \in V_{c'}(E)$ , s'il existe une arête (B) reliant les sommets  $a$  et  $b$  dans  $\mathcal{L}_{S_0,\infty}(E)$  alors  $c = c'$ .

Nous allons maintenant voir les conditions nécessaires pour que deux sommets  $a, b \in V_c(E)$  soient reliés par une arête, forcément de type (B), en étudiant la structure de l'ensemble  $V_c(E)$ .

##### Structure de $V_c(E)$

Soit  $c$  un lacet de la décomposition  $E$ . En effectuant un mouvement élémentaire simple sur  $c$ , on définit un lacet  $c_0$  et on note  $F_{c_0}$  la décomposition obtenue en remplaçant  $c$  par  $c_0$ .

Tous les autres lacets intersectant deux fois  $c$  et n'intersectant pas les autres lacets de  $E$  s'obtiennent de  $c_0$  après avoir effectué  $k$  demi-twists le long de  $c$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . On note  $c_k = d_c^k(c_0)$ ,  $F_{c_k}$  la décomposition en pantalons s'obtenant de  $F$  en remplaçant  $c$  par  $c_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (voir la Fig 4.9).

Ainsi,  $V_c(E) = \{F_{c_k}, k \in \mathbb{Z}\}$ . Soit  $k, k' \in \mathbb{Z}$  : alors  $F_{c_k}$  et  $F_{c_{k'}}$  sont reliés par une arête (nécessairement de type (B)) si et seulement si  $|k - k'| = 1$ .

On remarque qu'un sommet de  $V_c(E)$  est une classe d'homotopie d'un lacet essentiel de  $\Sigma_{0,4}$  et que deux sommets de  $V_c(E)$  sont reliés par un arête de type (B) si ces deux

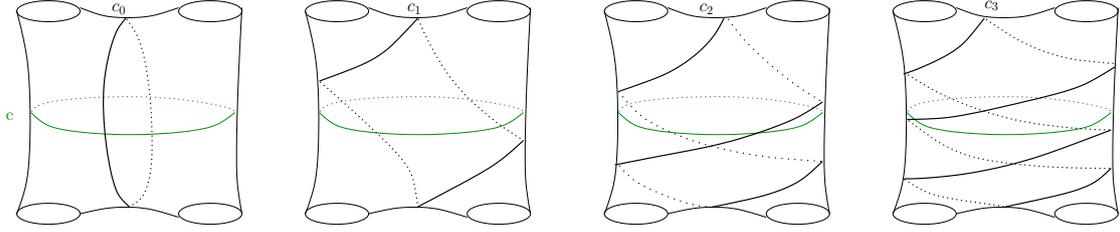


FIGURE 4.9 – Exemple de lacets correspondants aux sommets  $F_{c_k}$  pour  $k \in \{0, \dots, 3\}$ .

lacets ont une intersection géométrique égale à 2. De ce fait, on peut voir  $V_c(E)$  comme un sous-graphe du complexe de courbes  $\mathcal{C}(\Sigma_{0,4})$ , qui lui-même est isomorphe à la triangulation de Farey du disque hyperbolique, que l'on a notée  $\tau_*$  au chapitre précédent. En reprenant la numérotation des sommets de  $\tau_*$  par des rationnels dyadiques, on peut ainsi représenter les sommets de  $V_c(E)$  via l'application  $F_{c_k} \mapsto \frac{1}{2^{k+1}}$  si  $k \geq 0$  et  $F_{c_k} \mapsto \frac{3}{2^{-k+1}}$  si  $k < 0$  (voir la Figure 4.10).

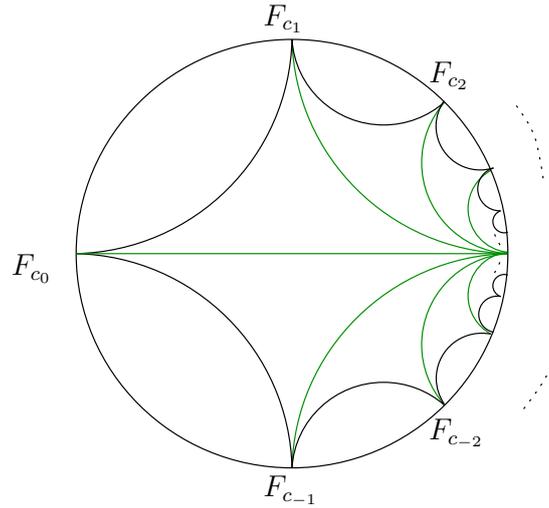


FIGURE 4.10 – L'ensemble  $V_c(E) = \{F_{c_k}, k \in \mathbb{Z}\}$  vu comme un sous-ensemble des sommets de la triangulation  $\tau_*$  du disque hyperbolique. Les arêtes en vert sont des arêtes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ , les autres sont des arêtes de type (B) de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E)$ .

**Remarque 4.5.1.** *On prendra garde au fait que la triangulation  $\tau_*$  revêt dès lors un double sens : il s'agit à la fois d'un graphe isomorphe au complexe de courbes et au complexe de pantalons de la sphère à 4 trous  $\Sigma_{0,4}$ . C'est également la triangulation privilégiée de la surface  $\Sigma_{0,\infty}^*$  étudiée dans le chapitre précédent, fortement liée à la décomposition en pantalons  $E$  choisie pour étudier le complexe  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ .*

### 4.5.3 Structure de $\mathcal{L}_{S_0,\infty}^A(E)$

Le travail précédent sur les arêtes de type (B) permet de voir que l'image par l'application quotient  $\mathcal{L}_{S_0,\infty}(E) \rightarrow \mathcal{L}_{S_0,\infty}^A(E)$  de chaque ensemble  $V_c(E)$  est réduite à un point. Il y a une bijection entre les sommets de  $\mathcal{L}_{S_0,\infty}^A(E)$  et l'ensemble des lacets de la décomposition  $E$ . Le graphe  $\mathcal{L}_{S_0,\infty}^A(E)$  est en fait le graphe d'adjacence de la décomposition  $E$  (voir la Définition 2.6.2), il est donc isomorphe au 1-squelette du link de la décomposition canonique de la surface  $\Sigma_{0,\infty}$ , noté  $\mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}^{(1)}(\tau_*)$  :

$$\mathcal{L}_{S_0,\infty}^A(E) \approx \mathcal{L}_{\Sigma_{0,\infty}}^{(1)}(\tau_*)$$

On va pouvoir notamment réutiliser les notions d'orientation du link développées dans la section 3.4.2.

### 4.5.4 Action de $\widehat{D}$ sur les links

#### Action d'un demi-twist sur $\mathcal{L}_{S_0,\infty}(E)$

Soit  $d$  un demi-twist effectué sur un pantalon délimité par les lacets  $a, b, c$  de  $E$ , qui permute  $a$  et  $b$ . Alors  $d$  agit sur  $\mathcal{L}_{S_0,\infty}(E)$  et préserve le type d'arête de  $\mathcal{L}_{S_0,\infty}(E)$ . Donc  $d$  agit sur l'ensemble des  $V_{c'}(E)$ , où  $c'$  parcourt l'ensemble des lacets de  $E$ . On distingue 4 cas pour décrire l'action sur  $V_{c'}(E)$ , selon la position de  $c'$  par rapport aux lacets  $a, b, c$  :

1. Le demi-twist  $d$  échange les lacets  $a$  et  $b$  :  $d$  envoie  $V_a(E)$  sur  $V_b(E)$  et  $V_b(E)$  sur  $V_a(E)$ . Cette action est définie via l'application  $F_{a_k} \mapsto F_{b_{-k}}$  et  $F_{b_k} \mapsto F_{a_{-k}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
2. L'ensemble  $V_c(E)$  est stable et  $d$  agit sur cet ensemble via l'application  $F_{c_k} \mapsto F_{c_{k+1}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
3. Si  $c'$  est un lacet appartenant à la composante connexe de  $S_{0,\infty} \setminus c$  contenant  $a$  et  $b$ , l'action sur  $V_{c'}(E)$  se déduit par quasi-rigidité de  $d$  via l'application  $F_{c'_k} \mapsto F_{c''_{-k}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , où  $c''$  est l'image de  $c'$  par  $d$ .
4. Si  $c'$  est un lacet appartenant à la composante connexe de  $S_{0,\infty} \setminus c$  ne contenant pas  $a$  et  $b$ , l'action sur  $V_{c'}(E)$  est fixe point par point car la restriction de  $d$  à la composante connexe de  $S_{0,\infty} \setminus c$  ne contenant pas  $a$  et  $b$  est l'application identité.

#### Action d'un demi-twist sur $\mathcal{L}_{S_0,\infty}^A(E)$

Soit  $d$  un demi-twist effectué le long d'un lacet  $c$  de  $E$ . Alors par définition d'un demi-twist,  $d$  agit en renversant l'orientation d'un triangle autour du sommet  $V_c(E)$  de  $\mathcal{L}_{S_0,\infty}^A(E)$  (voir la Fig 4.11).

### 4.5.5 Action de $\mathcal{T}$ sur les link

Soit  $t$  un élément du groupe de Thompson  $\mathcal{T}$ . Alors  $t$  induit un isomorphisme  $t_{*,F} : \mathcal{L}_{S_0,\infty}(E) \rightarrow \mathcal{L}_{S_0,\infty}(F)$ , où  $F = t(E)$ . Si  $c$  est un lacet de  $E$ , il existe un lacet  $c'$  de  $F$  tel que  $t_{*,F}(V_c(E)) = V_{c'}(F)$ . L'homéomorphisme  $t$  préserve la face visible de  $S_{0,\infty}$  d'après la Proposition 4.2.2). Donc pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $t_{*,F}(F_{c_k}) = F_{c'_k}$ .

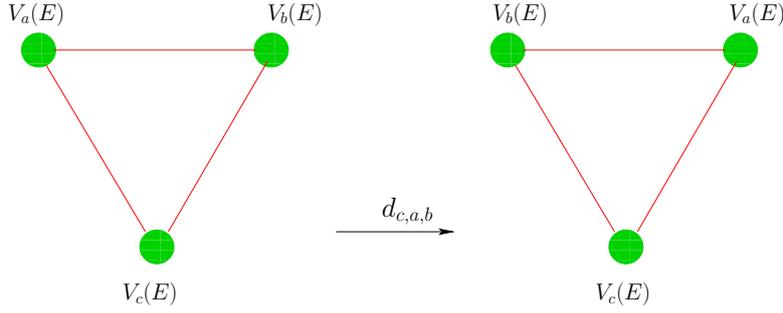


FIGURE 4.11 – Le demi-twist  $d$  agissant sur  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(E)$

#### 4.5.6 Caractérisation des isomorphismes $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E) \rightarrow \mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E)$

On en déduit des conditions nécessaires pour qu'un isomorphisme  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E) \rightarrow \mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E)$  soit issu d'un élément de  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$ .

**Lemme 4.5.3.** *Soit  $f \in \widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  et  $\phi = \Psi(f) \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$ . On suppose de plus que  $\phi(E) = E$ . Soit  $c$  un lacet de  $E$  et  $c'$  le lacet de  $E$  tel que  $\phi(V_c(E)) = V_{c'}(E)$ . Alors il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $j \in \{0, 1\}$  tels que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\phi(F_{c_k}) = F_{c'_{(-1)^j(k+p)}}$ . De plus, si  $a, b$  sont les deux lacets adjacents de  $c$ ,  $\phi$  préserve l'orientation du triangle  $V_a(E), V_b(E), V_c(E)$  de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(E)$  si et seulement si  $p$  est pair.*

*Démonstration.* On construit un morphisme  $\mu_c : \widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$  tel que  $\phi(F_{c_k}) = F_{c'_{\mu_c(k)}}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . D'après la section 4.5.5, on a  $\mu_c(t) = id_{\mathbb{Z}}$  pour tout élément  $t \in \mathcal{T}$ . Si  $d$  est un demi-twist, l'étude de l'action d'un demi-twist sur  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E)$  dénombre trois possibilités, suivant la position de  $c$  par rapport au lacet autour duquel tourne le demi-twist  $d$ , comme suit :  $\mu_c(d)$  est soit l'identité de  $\mathbb{Z}$ , soit la translation  $k \mapsto k + 1$ , soit la symétrie  $k \mapsto -k$ . Du fait que tout élément de  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  engendré par  $\alpha, \beta$  et les demi-twists, ce morphisme existe.

De plus, on sait que  $\mathcal{T}$  préserve l'orientation des triangles de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(E)$ , conformément au Lemme 3.4.2. D'après la section 4.5.4,  $\phi$  préserve l'orientation d'un triangle si et seulement si un nombre pair d'itérations du demi-twist autour du lacet définissant le sommet engendrant ce triangle est appliqué. □

**Lemme 4.5.4.** *Soit  $f \in \widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  et  $\phi = \Psi(f) \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$ . On suppose de plus que  $\phi(E) = E$  et qu'il existe un triangle de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(E)$  stable par  $\phi$ . Alors  $f \in \widehat{D}$ .*

*Démonstration.* On peut écrire  $f$  comme le produit d'un élément  $d \in \widehat{D}$  et  $f' \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$ . Puisque  $d$  est quasi-rigide,  $f'$  est un élément quasi-rigide de  $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$ . Quitte à composer  $f'$  par

la symétrie  $i_R$ , on peut supposer que  $f'$  préserve l'orientation de  $S_{0,\infty}$ . L'automorphisme  $\Psi(f')$  stabilise un triangle de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(E)$  par hypothèse. Par conséquent, son isomorphisme induit sur  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(E)$  agit comme un automorphisme de l'arbre binaire infini enraciné. Cela signifie (voir un système de générateurs du groupe des automorphismes de l'arbre binaire infini enraciné dans [BS97]) que la projection de  $f'$  dans le groupe de Thompson  $V$  est un produit de tresses. On en déduit que  $f'$  est un produit de demi-twists, donc un élément de  $\widehat{D}$ .  $\square$

**Lemme 4.5.5.** *Soit  $f \in \widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  et  $\phi = \Psi(f) \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$ . Supposons que  $\phi(E) = E$  et qu'il existe un triangle  $V_a(E), V_b(E), V_c(E)$  de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(E)$  stable par  $\phi$  et que ce triangle est associé au lacet  $c$ . Soient  $a', a''$  deux lacets adjacents à  $a$  tels que  $V_a(E), V_{a'}(E), V_{a''}(E)$  est le triangle associé à  $a$ . Alors il existe  $p, p', p'' \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mu_a(f)(k) = k + p$ ,  $\mu_{a'}(f)(k) = (-1)^p \times (k + p')$ ,  $\mu_{a''}(f)(k) = (-1)^p \times (k + p'')$ .*

*Démonstration.* On applique le Lemme 4.5.4 pour savoir que  $f$  est un produit (possiblement infini) de demi-twists. La stabilité du triangle  $V_a(E), V_b(E), V_c(E)$  permet d'affirmer qu'il y a au plus un demi-twist du produit  $f$  qui agit non trivialement sur  $V_a(E)$ . La connaissance de l'action d'un demi-twist sur le link permet de conclure.  $\square$

## 4.6 Lien avec le cas compact

On veut montrer que tout automorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  induit un isomorphisme de complexes de pantalons

$$\phi_n : \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n}) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma'_{0,n})$$

où  $\Sigma_{0,n}$  et  $\Sigma'_{0,n}$  sont des sous-surfaces admissibles de  $S_{0,\infty}$  et  $n \geq 5$ , au sens où  $\phi$  et  $\phi_n$  coïncident sur toute décomposition dont le support est inclus dans  $\Sigma_{0,n}$ . On rappelle que pour tout  $n \geq 5$  et toute surface  $\Sigma_{0,n}$  de genre 0 avec  $n$  composantes de bord,  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n})$  se plonge dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ .

### 4.6.1 Définition de l'isomorphisme induit

Soit  $\phi$  un automorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$  et  $F := \phi(E)$ . Il existe une sous-surface admissible  $\Sigma'_{0,n}$  d'ordre  $n$  telle que  $F$  coïncide avec  $E$  en dehors de  $\Sigma'_{0,n}$ . On peut choisir  $n \geq 5$ . La décomposition  $F$  induit une décomposition en pantalons de  $\Sigma'_{0,n}$ , notée  $F'_n$ .

#### Définition de $\Sigma_{0,n}$

L'ensemble (fini) des lacets  $c'$  de  $F'_n$  décomposant  $\Sigma'_{0,n}$  en pantalons permet de définir un ensemble fini et (A)-connexe de  $V_{c'}$  de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(F)$  où  $c'$  appartient au sous-ensemble fini des lacets de  $F$  qui décomposent  $\Sigma'_{0,n}$  en pantalons. L'image par  $\phi_{*,F}^{-1}$  de cet ensemble est un ensemble fini et (A)-connexe de  $V_c$  de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E)$  où  $c$  appartient à l'ensemble des lacets de  $E$ . Ces lacets définissent un ensemble fini et connexe de pantalons de  $S_{0,\infty}$ , donc une sous-surface admissible notée  $\Sigma_{0,n}$  (voir la Fig 4.12).

**Définition de  $\phi_n$  sur les sommets de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n})$**

Pour toute décomposition asymptotiquement triviale  $G$ , on note  $G_n$  la trace de  $G$  sur  $\Sigma_{0,n}$ . Soit  $G'$  une décomposition en pantalon de  $\Sigma_{0,n}$ . Soit  $G$  la décomposition asymptotiquement triviale en pantalons de  $S_{0,\infty}$  telle que  $G' = G_n$ . On définit  $\phi_n(G') := \phi(G)_n$  comme étant la trace de  $\phi(G)$  sur  $\Sigma'_{0,n}$ . Par définition de  $\Sigma_{0,n}$ ,  $\phi_n(G')$  coïncide avec  $E$  en dehors de  $\Sigma'_{0,n}$ . On montre que l'application  $\phi_n$  ainsi définie de l'ensemble des sommets de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n})$  dans l'ensemble des sommets de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n})$  est un isomorphisme de complexe.

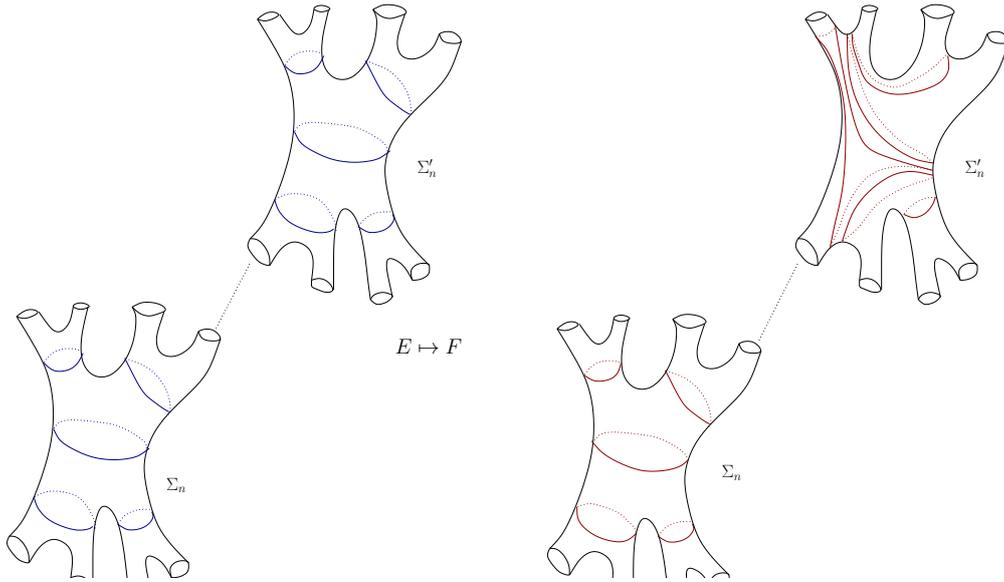


FIGURE 4.12 –  $\Sigma'_{0,n}$  est un support de  $\phi(E)$

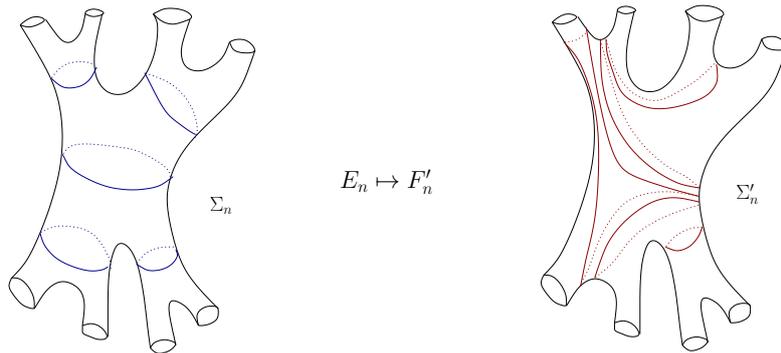


FIGURE 4.13 – L'isomorphisme  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n}) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma'_{0,n})$

### $\phi_n$ préserve la structure cellulaire du complexe

Soit  $G$  une décomposition à distance 1 de  $E$ . Supposons qu'elle est issue d'un mouvement élémentaire sur un lacet de  $\Sigma_{0,n}$ . Alors  $\Sigma_{0,n}$  contient le support de  $G$ . De plus, par construction de  $\Sigma_{0,n}$ ,  $\phi(G)$  est issu d'un mouvement élémentaire de  $F$  sur un lacet de  $\Sigma'_{0,n}$  et induit une décomposition en pantalons de  $\Sigma'_{0,n}$ .

Donc par récurrence, l'image par  $\phi$  de toute décomposition de  $S_{0,\infty}$  issue d'un nombre fini de mouvements élémentaires sur des lacets de  $\Sigma_{0,n}$  est une décomposition de  $S_{0,\infty}$  dont le support est inclu dans  $\Sigma'_{0,n}$ , donc un sommet de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma'_{0,n})$ . Il reste à constater que toute décomposition en pantalons asymptotiquement triviale de  $\Sigma_{0,n}$  est issue d'un nombre fini de mouvements élémentaires d'une décomposition de  $\Sigma_{0,n}$  arbitrairement fixée.

**Lemme 4.6.1.** *Soit  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$ . Il existe  $n \geq 5$  et un élément  $g \in \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$  tels que  $\phi$  et  $\Psi(g) \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$  coïncident sur un link restreint  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E_n)$ .*

*Démonstration.* On note  $E$  la décomposition canonique et  $F = \phi(E)$ . Soit  $\Sigma'_{0,n}$  une sous-surface telle que  $F$  coïncide avec  $E$  en dehors de  $\Sigma'_{0,n}$ . On note  $n$  l'ordre de  $\Sigma'_{0,n}$  et on le choisit plus grand ou égal à 5. Comme précédemment, on définit  $\Sigma_{0,n}$  la sous-surface admissible de  $S_{0,\infty}$  par l'image réciproque par  $\phi_{*,F}^{-1}$  du sous-link associé. On note  $E_n$  la trace de la décomposition canonique sur  $\Sigma_{0,n}$  et  $E'_n$  la trace de la décomposition canonique sur  $\Sigma'_{0,n}$ . On choisit la classe d'homotopie d'un homéomorphisme  $f$  envoyant  $\Sigma_{0,n}$  sur  $\Sigma'_{0,n}$  tel que  $f(E_n) = E'_n$ . Cet homéomorphisme induit un isomorphisme  $\bar{f} : \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n}) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma'_{0,n})$ . En composant  $\phi_n$  par  $\bar{f}^{-1}$  à gauche, on définit un automorphisme  $\phi_{n,f}$  du complexe de pantalons de la surface  $\Sigma_{0,n}$ , puis avec le théorème de Margalit ([Mar04]), un élément du groupe modulaire de  $\Sigma_{0,n}$  noté  $F_{n,f}$ , préservant ou non l'orientation, qui agit sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Sigma_{0,n})$  par l'automorphisme  $\phi_{n,f}$ .

On considère maintenant la fonction  $f \circ F_{n,f} : \Sigma_{0,n} \rightarrow \Sigma'_{0,n}$  que l'on prolonge à un homéomorphisme que l'on note  $g_{n,f}$  de la surface  $S_{0,\infty}$  de façon rigide en dehors de  $\Sigma_{0,n}$ . Par construction,  $\Psi(g_{n,f})$  coïncide avec  $\phi$  sur le link restreint  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E_n)$ . On a ainsi un automorphisme  $\phi' = \phi \circ \Psi(g_{n,f}^{-1})$  qui fixe la décomposition  $E$  et coïncide avec l'identité de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E_n)$ .  $\square$

### 4.6.2 Extension des isomorphismes de link

Le Lemme 4.6.1 a des conséquences importantes puisqu'il permet de généraliser les caractérisations locales décrites dans la section 4.5.6 à tous les automorphismes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty})$ . Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Lemme 4.6.2.** *Soit  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(S_{0,\infty}))$ . On suppose de plus que  $\phi(E) = E$  et qu'il existe un triangle  $V_a(E), V_b(E), V_c(E)$  de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(E)$  stable par  $\phi$ . On suppose que ce triangle est associé au lacet  $c$ . Soit  $a', a''$  deux lacets adjacents à  $a$  tels que  $V_a(E), V_{a'}(E), V_{a''}(E)$  est le triangle associé à  $a$ . Alors il existe  $p, p', p'' \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mu_a(f)(k) = k + p$ ,  $\mu_{a'}(f)(k) = (-1)^p \times (k + p')$ ,  $\mu_{a''}(f)(k) = (-1)^p \times (k + p'')$ .*

*Démonstration.* D'après le Lemme 4.6.1, il existe un élément  $f \in \widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  tel que les automorphismes  $\Psi(f)$  et  $\phi$  coïncident sur un link restreint  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E_n)$  contenant  $V_a(E)$ ,  $V_b(E)$ ,  $V_c(E)$ . Ainsi, les propriétés valables pour  $\Psi(f)$  données par le Lemme 4.5.5 sont également vraies pour  $\phi$ .  $\square$

### 4.6.3 Démonstration du théorème

Soit  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{C}\mathcal{P}(S_{0,\infty}))$ . On cherche à construire un élément de  $\widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  qui agit comme  $\phi$  sur  $\mathcal{C}\mathcal{P}(S_{0,\infty})$ .

Soit  $F = \phi(E)$ . D'après le Lemme 4.6.1, il existe un élément  $g$  de  $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}$  qui est rigide en dehors d'une sous-surface admissible  $\Sigma_{0,n}$  de  $S_{0,\infty}$ , tel que  $\phi(E)$  coïncide avec  $E$  en dehors de la sous-surface admissible  $g(\Sigma_{0,n})$ . De plus, les automorphismes  $\phi$  et  $\Psi(g)$  coïncident sur le link restreint  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E_n)$  associé à  $\Sigma_{0,n}$ .

On considère maintenant l'automorphisme  $\phi \circ \Psi(g^{-1})$ . Soit  $a$  un lacet de  $E$  s'identifiant à une composante de bord de  $\Sigma_{0,n}$  et  $P$  un pantalon de  $S_{0,\infty}$  muni de la décomposition canonique attaché tel que  $P \cap \Sigma_{0,n} = a$ . Le pantalon  $P$  a trois composantes de bord  $a, a', a''$  qui définissent un triangle  $V_a(E), V_{a'}(E), V_{a''}(E)$  de  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}^A(E)$ . D'après le Lemme 4.6.2, il existe  $p, p', p'' \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mu_a(\phi)(k) = k + p$ ,  $\mu_{a'}(\phi)(k) = (-1)^p \times (k + p')$ ,  $\mu_{a''}(\phi)(k) = (-1)^p \times (k + p'')$ . Soit  $d$  le demi-twist agissant sur le pantalon  $P$  autour de  $a$ . On pose  $g' = d^p \circ g$ . D'après la description de l'action d'un demi-twist,  $\phi$  et  $\Psi(g')$  coïncident sur  $\mathcal{L}_{S_{0,\infty}}(E_n) \cup \{V_{a'}(E)\} \cup \{V_{a''}(E)\}$ .

Par récurrence, en composant  $g$  à gauche par des demi-twists ainsi choisis, on construit un élément  $f \in \widehat{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$  tels que les deux automorphismes  $\Psi(d \circ g_{n,f})$  et  $\phi$  coïncident sur tous les éléments à distance inférieure ou égale à 1 de  $E$ , donc sont égaux (Lemme 4.5.1). On a montré que l'application  $\Psi$  était surjective, ce qui permet de conclure la preuve du théorème.

# Bibliographie

- [BG98] M. G. Brin and F. Guzman, *Automorphisms of generalized Thompson groups*, Journal of Algebra **203** (1998), 285–348.
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1999.
- [BH09] P. Bose and F. Hurtado, *Flips in planar graphs*, Comput. Geom. **44** (2009), 60–80.
- [BL06] M. Boggi and P. Lochak, *On profinite complexes of curves, their automorphisms and the weak anabelianity of the moduli stacks of curves*, preprint (2006).
- [BM06] J. Behrstock and D. Margalit, *Curve complexes and finite index subgroups of mapping class groups*, Geometriae Dedicata **118** (2006), no. 1, 71–85.
- [Bri96] M. G. Brin, *The chameleon groups of Richards J. Thompson : automorphisms and dynamics*, Publ. Math. I.H.E.S. **84** (1996), 5–33.
- [Bri10] M. R. Bridson, *Semisimple actions of mapping class groups on CAT(0) spaces*, Geometry of Riemann surfaces, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 368, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, pp. 1–14. MR 2665003 (2011i :30041)
- [Bro84] K.S. Brown, *Presentations for groups acting on simply-connected complexes*, Journal of Pure and Applied Algebra **32** (1984), 1–10.
- [BS97] A.M. Brunner and S. Sidki, *On the automorphism group of the one-rooted binary tree*, Journal of Algebra **195** (1997), no. 2, 465–486.
- [CB88] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 9, Cambridge University Press, Cambridge, 1988. MR 964685 (89k :57025)
- [CFP96] J.W. Cannon, W.J. Floyd, and W.R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson’s groups*, Enseignement Mathématique **42** (1996), 215–256.
- [Chi97] Y. Chiang, *Geometric intersection numbers on a four-punctured sphere*, Conform. Geom. Dyn. **1** (1997), 87–103. MR 1482943 (98i :57024)
- [DR01] S. L. Devadoss and R. C. Read, *Cellular structures determined by polygons and trees*, Ann. Comb. **5** (2001), 71–98.
- [FK04] L. Funar and C. Kapoudjian, *On a universal mapping class group of genus zero*, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), no. 5, 965–1012. MR 2105950 (2005h :57025)

- [FK08] ———, *The braided Ptolemy-Thompson group is finitely presented*, *Geom. Topol.* **12** (2008), 475–530.
- [FK11] ———, *The braided Ptolemy-Thompson group is asynchronously combable*, *Comment. Math. Helv.* **86** (2011), no. 3, 707–768. MR 2803858 (2012d :20082)
- [FKS59] L. Funar, C. Kapoudjian, and V. Sergiescu, *Asymptotically rigid mapping class groups and Thompson groups*, *Handbook of Teichmüller theory* (A. Papadopoulos, ed.), vol. IV, to appear. arXiv :1105.0559.
- [FLP79] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, *Astérisque* **66-67** (1979).
- [FM11] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, vol. 49, Princeton University Press, 2011.
- [FN11] A. Fossas and M. Nguyen, *Thompson’s group  $T$  is the orientation-preserving automorphism group of a cellular complex*, *Publ. Mat.* (to appear. arXiv :1104.2983, 2011).
- [Gro81] M. Gromov, *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, 1981, pp. 183–213.
- [Gro87] ———, *Hyperbolic groups*, *Essays in group theory*, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 75–263. MR 919829 (89e :20070)
- [Har81] W.J. Harvey, *Boundary structure of the modular group*, *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference* (State Univ. New York, Stony Brook, NY, 1978), vol. 97, 1981, pp. 245–251.
- [Har86] J.L. Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, *Inventiones Mathematicae* **84** (1986), no. 1, 157–176.
- [HN99] F. Hurtado and M. Noy, *Graph of triangulations of a convex polygon and tree of triangulations*, *Comput. Geom.* **13(3)** (1999), 179–188.
- [HT80] A. Hatcher and W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, *Topology* **19** (1980), no. 3, 221–237.
- [IJ08] N. V. Ivanov and L. Ji, *Infinite topology of curve complexes and non-Poincaré duality of Teichmüller modular groups*, *Enseign. Math. (2)* **54** (2008), no. 3-4, 381–395. MR 2478092 (2010b :57022)
- [IK07] E. Irmak and M. Korkmaz, *Automorphisms of the Hatcher-Thurston complex*, *Israel J. Math.* **162** (2007), 183–196. MR 2365859 (2008j :57026)
- [IM10] E. Irmak and J. McCarthy, *Injective simplicial maps of the arc complex*, *Turkish Journal of Math.* **34** (2010), 339–354.
- [Irm06] E. Irmak, *Complexes of nonseparating curves and mapping class groups*, *Michigan Math. J.* **54** (2006), 81–110.
- [Iva87] N. V. Ivanov, *Complexes of curves and Teichmüller modular groups*, *Uspekhi Mat. Nauk* **42** (1987), no. 3(255), 49–91, 255. MR 896878 (88g :32040)

- [Iva97] ———, *Automorphism of complexes of curves and of Teichmüller spaces*, Internat. Math. Res. Notices (1997), no. 14, 651–666. MR 1460387 (98j :57023)
- [Iva02] ———, *Mapping class groups*, Handbook of geometric topology, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 523–633. MR 1886678 (2003h :57022)
- [Kla99] E. Klarreich, *The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space*, preprint (1999).
- [Kor99] M. Korkmaz, *Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori*, Topology and its Applications **95** (1999), 85–111.
- [KP10] M. Korkmaz and A. Papadopoulos, *On the arc and curve complex of a surface*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **148** (2010), no. 3, 473–483. MR 2609303 (2011f :57038)
- [KS94] L. Keen and C. Series, *The Riley slice of Schottky space*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1994), no. 1, 72–90.
- [KS05] C. Kapoudjian and V. Sergiescu, *An extension of the Burau representation to a mapping class group associated to Thompson’s group  $T$* , 141–164. MR 2181963 (2006h :20052)
- [Lee89] C. W. Lee, *The associahedron and triangulations of the  $n$ -gon*, European J. Combin. **10** (1989), 551–560.
- [Lic64] W.B.R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 60, Cambridge Univ Press, 1964, pp. 769–778.
- [LS97] L. Lochak and P. Schneps, *The universal Ptolemy-Teichmüller groupoid*, Geometric Galois actions, vol. 2, Cambridge Univ. Press, 1997, pp. 325–347.
- [Luo00] Feng Luo, *Automorphisms of the complex of curves.*, Topology **39** (2000), no. 2, 283–298.
- [Mar02] X. Martin, *Sur la géométrie du groupe de Thompson.*, PhD Thesis. Institut Fourier. Grenoble. (2002).
- [Mar04] D. Margalit, *Automorphisms of the pants complex*, Duke Mathematical Journal **121** (2004), no. 3, 457–480.
- [MM99] H.A. Masur and Y.N. Minsky, *Geometry of the complex of curves I : Hyperbolicity*, Inventiones mathematicae **138** (1999), no. 1, 103–149.
- [MM00] H. A. Masur and Y. N. Minsky, *Geometry of the complex of curves. II. Hierarchical structure*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), no. 4, 902–974. MR 1791145 (2001k :57020)
- [MW95] H.A. Masur and M. Wolf, *Teichmüller space is not Gromov hyperbolic*, Annales-academiae scientiarum fennicae series A1 mathematica, vol. 20, Academia Scientiarum Fennicae, 1995, pp. 259–268.
- [RS09] Kasra Rafi and Saul Schleimer, *Covers and the curve complex*, Geom. Topol. **13** (2009), no. 4, 2141–2162. MR 2507116 (2010m :57024)

- [Sal43] R. Salem, *On some singular monotonic functions which are strictly increasing*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 427–439.
- [Sha07] K. J. Shackleton, *Combinatorial rigidity in curve complexes and mapping class groups*, Pacific Journal of Mathematics **230** (2007), no. 1, 217–232.
- [SS00] P. Schmutz-Schaller, *Mapping class groups of hyperbolic surfaces and automorphism groups of graphs*, Compositio Mathematica **122** (2000), 243–260.
- [STT88] D. Sleator, R. Tarjan, and W. Thurston, *Rotation distance, triangulations and hyperbolic geometry*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 3, 647–681. MR 928904 (90h :68026)
- [Tit70] J. Tits, *Sur le groupe des automorphismes d'un arbre*, Essays on topology and related topics, Springer, New York, 1970, pp. 188–211.

## Résumé

Soit  $\Sigma_{g,n}$  une surface orientable de genre  $g$  avec  $n$  trous. Le groupe modulaire de  $\Sigma_{g,n}$  agit sur divers complexes, comme le complexe de courbes et le complexe de décomposition en pantalons. Il a été prouvé, selon une approche initialement établie par Ivanov, que le groupe d'automorphismes de chacun de ces complexes est isomorphe au groupe modulaire. Cela implique notamment que le groupe des automorphismes extérieurs d'un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire est fini. Le but de cette thèse est de démontrer un résultat similaire s'appliquant à des surfaces de type infini de genre zéro. Pour cela, on définit un groupe modulaire asymptotique de ces surfaces, puis un complexe cellulaire localement infini sur lequel le groupe modulaire agit naturellement. On fait apparaître des propriétés du groupe des automorphismes de chaque complexe en faisant agir les automorphismes sur des graphes auxiliaires. Le premier groupe modulaire étudié est isomorphe au groupe de Thompson  $\mathcal{T}$ . Le second est une extension du groupe modulaire universel de genre zéro.

## Abstract

Let  $\Sigma_{g,n}$  be an orientable surface of genus  $g$  with  $n$  punctures. The mapping class group of  $\Sigma_{g,n}$  acts on several complexes, for instance the curve complex or the pants complex of the surface. It is proved that the automorphism group of each of these complexes are isomorphic to the mapping class group. This implies in particular that the group of outer automorphisms of a finite index subgroup is finite. The purpose of this thesis is to prove a similar result on some surfaces of infinite type and genus zero. For this, we define an asymptotic mapping class group of these surfaces, and then a locally infinite cellular complex where the mapping class group acts naturally. It brings up some properties of the automorphism group of each cellular complex by making automorphisms act on auxiliary graphs. The first studied asymptotic mapping class group is isomorphic to the Thompson group  $\mathcal{T}$ . The second one is an extension of the universal mapping class group of genus zero.

## Mots-clés

groupe modulaire, complexe de pantalons, surface de type infini, groupe de Thompson