



**HAL**  
open science

# Transport des rayons cosmiques en turbulence magnétohydrodynamique

Romain Cohet

► **To cite this version:**

Romain Cohet. Transport des rayons cosmiques en turbulence magnétohydrodynamique. Astrophysique [astro-ph]. Université Montpellier, 2015. Français. NNT : 2015MONT051 . tel-01557708

**HAL Id: tel-01557708**

**<https://theses.hal.science/tel-01557708>**

Submitted on 6 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
Docteur

Délivré par l'Université Montpellier II

Préparée au sein de l'école doctorale **I2S\***  
Et de l'unité de recherche **UMR 5299**

Spécialité : **Astrophysique**

Présentée par **Romain COHET**

**Transport des Rayons Cosmiques  
en Turbulence  
Magnétohydrodynamique**

Soutenue le 12 Février 2015 devant le jury composé de :

M.	J. Cohen-Tanugi	Chargé de recherche, Univ. Montpellier 2, LUPM	<b>Examineur</b>
M.	S. Gabici	Chargé de recherche, Univ. Paris 7, LUPM	<b>Rapporteur</b>
M.	P. Hennebelle	Professeur, CEA,	<b>Examineur</b>
M.	M. Lemoine	Directeur de recherche, CNRS, IAP	<b>Rapporteur</b>
M.	A. Marcowith	Directeur de recherche, Univ. Montpellier 2, LUPM	<b>Directeur</b>
M.	M. Manna	Professeur, Univ. Montpellier 2, L2C	<b>Président</b>

*A Monsieur le Professeur M. Manna, président du jury* Permettez-moi de vous exprimer mon plus profond respect et ma gratitude, pour avoir accepté de présider mon jury.

*A Monsieur le Docteur J. Cohen-Tanugi, Membre du jury* Je vous remercie pour l'honneur que vous me faites de participer à mon jury de thèse.

*A Monsieur le Directeur de Recherche M. Lemoine, Rapporteur et Membre du jury* Je vous présente toute ma reconnaissance pour avoir accepté d'examiner ma dissertation doctorale et m'avoir fait l'honneur de vous compter parmi les membres de mon jury.

*A Monsieur le Docteur S. Gabici, Rapporteur et Membre du jury* C'est un grand honneur et un plaisir de vous compter parmi les membres de mon jury, et je souhaite vous exprimer toute ma gratitude pour avoir accepté d'examiner mon manuscrit.

*A Monsieur le Professeur P. Hennebelle, Membre du jury* Je souhaite vous remercier tout particulièrement pour le suivi, les conseils, le temps que vous avez déployés en quantité pour accompagner mon travail. Une grande partie de cet oeuvre n'aurait pas été possible sans votre aide ni vos encouragements, c'est pourquoi je tiens à te dire sincèrement merci.

*A Monsieur le Directeur de Recherche A. Marcowith, Membre du jury et Directeur de thèse* Je ne saurais manquer de remercier Alexandre pour avoir été mon directeur de thèse durant toutes ces années. Je souhaite te remercier avoir été mon guide à travers le périple que constitue l'écriture de cette thèse que je n'aurais pu faire seul. Merci également pour n'avoir cessé de m'encourager, de ta confiance sans cesse renouvelée, pour tes conseils aussi bien pour le travail que dans la vie, et ta bienveillance. Les personnes de ta qualité sont rares, et tu compteras parmi les personnes que je n'oublierai jamais.

*A Pierre et Frédérique, mes grands parents*

Pour tout les moments passé ensemble, pour vos pensées bienveillantes et vos continues attentions. Ce travail n'aurait pas été possible sans vous.

*A mon grand-père, Daniel, et ma grand-mère, Simone, Que je chéris.*

*A mes parents, Lucile et Jean-François*

Pour leur amour inconditionnel qui m'accompagne depuis toujours.

*A mon frère*

Pour tous nos moments d'intense complicité, qu'il y en ait plein d'autres.

*A ma soeur*

Pour ton écoute, ta patience et ta tolérance, qui font de toi un grand médecin.

*A Nathael,*

Qui m'éclaire par son ingéniosité, sa persévérance et sa sagesse. Je souhaite que l'on puisse construire des projets ensembles.

*A Olivier,*

Pour tes conseils, et ton expérience.

*A Roxane,*

Pour être la force qui m'a permis d'accomplir ce travail. Merci d'avoir partagé avec moi cette épreuve, et d'avoir su trouver les mots dans les moments difficiles.

*A Kélian, mon fils,*

Pour m'avoir donné la joie d'être père.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>I Les Rayons Cosmiques dans le milieu interstellaire</b>	<b>21</b>
<b>1 La turbulence</b>	<b>23</b>
1.1 Introduction . . . . .	23
1.2 Turbulence hydrodynamique . . . . .	23
1.2.1 La théorie de Kolmogorov . . . . .	24
1.3 Magnétohydrodynamique . . . . .	25
1.3.1 Ondes linéaires MHD . . . . .	27
1.3.2 Turbulence MHD . . . . .	29
1.4 Milieu interstellaire . . . . .	33
1.4.1 Présentation des différentes phases . . . . .	34
1.4.2 Les nuages moléculaires . . . . .	35
1.4.3 Les vestiges de supernova . . . . .	36
1.4.4 Amortissement de la turbulence interstellaire . . . . .	36
<b>2 Le transport des rayons cosmiques en turbulence MHD</b>	<b>39</b>
2.1 Définitions . . . . .	39
2.2 Éléments de théorie cinétique . . . . .	41
2.3 Théorie quasi-linéaire du transport . . . . .	43
2.3.1 Coefficients de diffusion . . . . .	43
2.3.2 Résonances sur les ondes MHD . . . . .	48
2.3.3 Détermination des spectres de Goldreich-Sridhar . . . . .	48
2.3.4 Résultats quasi-linéaire pour les différents modes d'onde . . . . .	50
2.4 Les théories non linéaires . . . . .	51
2.4.1 Elargissement de la fonction de résonance . . . . .	51
2.4.2 Théorie non linéaire du centre guide . . . . .	52
<b>II Modélisation numérique de la turbulence MHD</b>	<b>59</b>
<b>3 Turbulence MHD</b>	<b>61</b>

3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Les différents types de codes MHD . . . . .	62
3.2.1	Les codes incompressibles . . . . .	62
3.2.2	Les codes compressibles . . . . .	63
3.3	Génération de la turbulence . . . . .	63
3.3.1	Turbulence induite par instabilités . . . . .	63
3.3.2	Turbulence en déclin . . . . .	63
3.3.3	Turbulence forcée . . . . .	64
3.3.4	Turbulence prescrite . . . . .	64
3.3.5	Avantages et inconvénients des méthodes de génération . . . . .	65
3.4	Techniques de résolution des équations de la MHD . . . . .	66
3.4.1	Les codes pseudo-spectraux . . . . .	66
3.4.2	Eléments finis . . . . .	67
3.5	Le code RAMSES . . . . .	67
3.5.1	Intégration des équations de la MHD . . . . .	67
3.5.2	Conditions initiales et unités . . . . .	69
3.6	Les autres codes MHD . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Simulation directe de la turbulence</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	73
4.2	Module de Forçage . . . . .	73
4.2.1	Conditions initiales . . . . .	74
4.2.2	Evolution temporelle . . . . .	75
4.2.3	Géométrie . . . . .	77
4.3	Stationnarité . . . . .	78
4.4	Paramètres dynamiques . . . . .	81
4.4.1	Prédictibilité du niveau de la turbulence . . . . .	81
4.4.2	Nomenclature des simulations . . . . .	82
4.5	Sur le cluster de calcul . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Analyses des simulations HD et MHD</b>	<b>85</b>
5.1	Introduction . . . . .	85
5.2	Résultats HD . . . . .	85
5.2.1	Conditions initiales . . . . .	86
5.2.2	512 <sup>3</sup> . . . . .	87
5.2.3	1024 <sup>3</sup> . . . . .	90
5.3	Résultats MHD . . . . .	94
5.3.1	Analyse spectrale . . . . .	94
5.3.2	Fonction de structure . . . . .	99
5.4	La méthode des champs locaux . . . . .	101
5.4.1	Discussion . . . . .	106

### III Etude numérique du transport des rayons cosmiques 109

<b>6</b>	<b>Implémentation de l'intégrateur</b>	<b>111</b>
6.1	Introduction . . . . .	111
6.2	Equations et interpolation des champs . . . . .	111
6.2.1	Initialisation . . . . .	112
6.2.2	Schéma linéaire CIC . . . . .	113
6.2.3	Spline cubique . . . . .	115
6.2.4	Piecewise Cubic Spline . . . . .	118
6.3	Les schémas numériques . . . . .	119
6.3.1	Schéma Leap-Frog . . . . .	119
6.3.2	Méthode de Runge-Kutta . . . . .	120
6.3.3	Méthode de Burlish-Stoer . . . . .	122
6.4	Comparaison . . . . .	123
6.4.1	Schémas d'interpolation . . . . .	123
6.4.2	Efficacité . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>133</b>
7.1	Résultats précédents . . . . .	133
7.1.1	Cas de la turbulence incompressible . . . . .	133
7.1.2	Cas de la turbulence compressible . . . . .	138
7.2	Le coefficient de diffusion angulaire $D_{\mu\mu}$ . . . . .	142
7.2.1	Fonction d'auto-corrélation $C(\tau)$ . . . . .	142
7.2.2	Critère de "Beresnyak" . . . . .	144
7.2.3	Dépendances du $D_{\mu\mu}$ et du libre parcours moyen . . . . .	147
7.2.4	Incertitudes de mesure . . . . .	153
7.3	Diffusion spatiale : libre parcours moyen parallèle . . . . .	154
7.3.1	Dépendance de la résolution . . . . .	154
7.3.2	Influence du nombre de particule . . . . .	156
7.3.3	Dépendance énergétique . . . . .	156
7.3.4	Dépendance du niveau de turbulence . . . . .	158
7.4	Diffusion spatiale : libre parcours moyen perpendiculaire . . . . .	160
7.4.1	Dépendance de la résolution . . . . .	160
7.4.2	Influence du nombre de particules . . . . .	161
7.4.3	Dépendance énergétique . . . . .	162
7.4.4	Dépendance du niveau de turbulence . . . . .	163
7.5	Propagation avec des paramètres de forçage extrêmes . . . . .	165
7.5.1	Forçage compressible $\chi = 0$ . . . . .	166
7.5.2	Forçage incompressible $\chi = 1$ . . . . .	167
<b>8</b>	<b>Champs locaux</b>	<b>171</b>
8.1	propagation dans les champs locaux . . . . .	171



<b>Conclusion</b>	<b>185</b>
<b>Références</b>	<b>189</b>
Bibliographie	189
<b>Résumé - Abstract</b>	<b>196</b>

# Introduction



Les rayons cosmiques sont des noyaux d'atome qui se propagent dans le milieu interstellaire à des énergies relativistes pouvant atteindre  $10^{20}$  eV.

Les scientifiques du début du vingtième siècle constataient que leurs électromètres se déchargeaient, et ce même après les avoir soigneusement isolés. En 1912, Victor Hess mesura, avec un vol en ballon dirigeable à plus de 5000 mètres d'altitude, que le taux d'ionisation était quatre fois plus élevé qu'au sol. Non seulement il montra que la source de ce phénomène était d'origine extraterrestre, mais qu'il était principalement issu du soleil.

A partir de cette découverte, les interprétations étaient réparties entre deux conceptions sur la nature même des objets responsables de la décharge des électromètres. Le terme de rayon cosmique fut donné par Millikan, qui était persuadé de la seule implication de photons dans le phénomène. Mais à la fin des années 20, il a été prouvé que les dits rayons cosmiques étaient sensibles au champ magnétique terrestre, et donc que le phénomène était issu de particules chargées.

C'est à la fin des années 30 que Pierre Auger découvrit les gerbes de particules, et en conclut que le rayonnement détecté était en fait issu de particules de haute énergie, dites primaires, diffusant avec des molécules de l'atmosphère pour former des gerbes de particules, dites secondaires. La confirmation expérimentale de cette interprétation intervint 20 ans plus tard, lorsque la communauté fut en mesure de déterminer la composition et l'énergie des rayons cosmiques.

Les sources de ces noyaux sont potentiellement nombreuses. Dans les années 30 déjà, Zwicky et Baade, en introduisant les supernovae, ont émit l'hypothèse que ces dernières pouvaient en être la source, compte tenu de la quantité d'énergie disponible. Il s'est avéré que les pertes adiabatiques subies par les particules ne permettaient pas de les accélérer jusqu'à des énergies suffisantes pour expliquer l'émission radio. Néanmoins les restes de supernovae (RSN) évitaient ce problème. Dans les années 50, Fermi [28, 29] développa les bases théoriques sur les processus d'accélération dans les perturbations magnétiques se propageant dans le milieu interstellaire. Finalement, dans les années 70, après deux décennies de débat, les restes de supernovae ont été identifiés comme des sites d'accélération de rayons cosmiques, grâce au travaux indépendants de quelques auteurs [3, 4], au travers de ce qui sera appelé, l'accélération diffusive par onde de choc, illustré par la figure 1.

### **Accélération diffusive par onde de choc [22]**

Ce modèle consiste en un choc se propageant à une vitesse  $v_s$  dans le milieu interstellaire. En aval du choc, c'est-à-dire la région dont le choc s'échappe, une faible fraction de particules chargées est accélérée pour dépasser l'énergie thermique du milieu. A nouveau, une fraction d'entre elles devient assez énergétique pour rattraper l'onde de choc, et passer dans le milieu amont, c'est-à-dire le milieu qui reçoit

le choc. A chaque traversée, les particules interagissent avec des perturbations magnétiques qui les défléchissent et induisent une trajectoire de marche au hasard, leur permettant ainsi de faire plusieurs cycles autour du choc.

Le processus décrit plus haut est appelé le cycle de Fermi. A chaque traversée du front de choc, les particules gagnent une quantité d'énergie cinétique proportionnelle à leur énergie initiale. Le gain relatif d'énergie est donc indépendant de l'énergie de la particule, et vaut

$$\frac{4}{3} \frac{v_u - v_d}{v},$$

où  $v$  est la vitesse de la particule,  $v_d$  et  $v_u$  la vitesse en aval et en amont du choc respectivement, dans le référentiel au repos du choc.

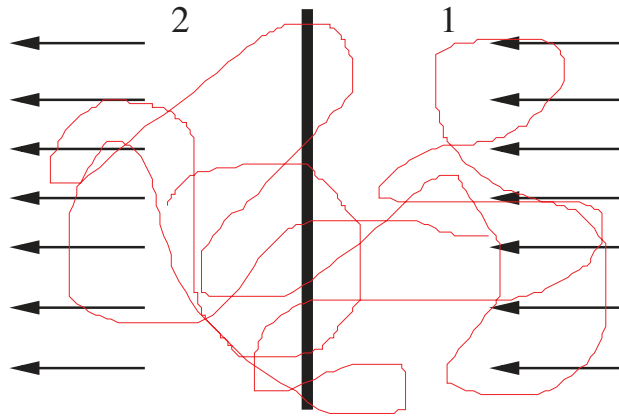


FIGURE 1 – Schéma d'illustration du processus d'accélération diffusive dans un choc représenté par le trait plein vertical dans le référentiel au repos du choc. La région 2 correspond à la zone en aval du choc, où la vitesse fluide est  $v_d$ , et la région 1 la zone en amont, où la vitesse fluide est  $v_u$  vitesse. La trajectoire de la particule est représentée en rouge, et illustre la marche aléatoire dans les régions post- et pré-choc, ainsi que le va-et-vient au travers le front de choc.

Bien entendu, à chaque fois qu'un cycle de Fermi se termine, une particule a une probabilité non nulle de s'échapper en aval du choc. En prenant en considération le processus d'échappement, et celui de l'accélération, le modèle prédit que la distribution de particules en fonction de l'énergie est une loi de puissance  $dN/dE \propto E^{-\sigma}$ , dont l'indice  $\sigma$  ne dépend que du rapport de compression  $r$  du choc, tel que

$$\sigma = \frac{r + 2}{r - 1},$$

avec

$$r = \frac{(\gamma + 1)M_s^2}{(\gamma - 1)M_s^2 + 2},$$

où  $\gamma$  est l'indice adiabatique du gaz.

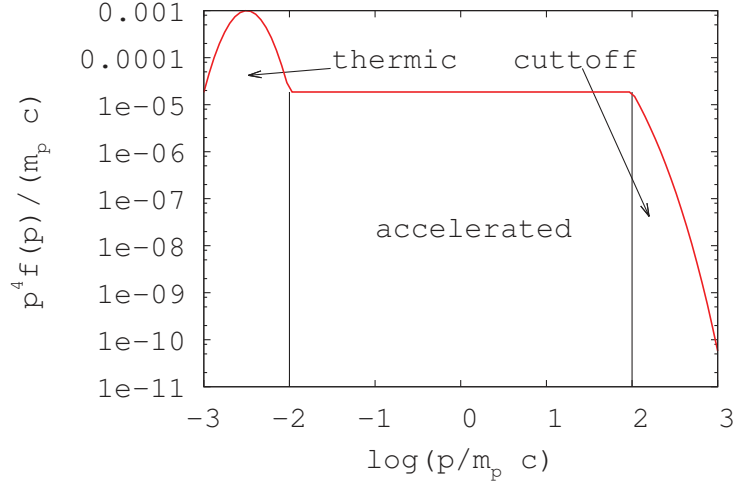


FIGURE 2 – Schéma représentant la distribution de la norme de l'impulsion  $f(p)$  redressée en  $p^4$  à la position du choc en fonction de l'impulsion normalisée  $p/m_p c$ .

de sorte que si le choc a un nombre de Mach<sup>1</sup>  $M_s \gg 1$ ,  $r = 4$  (figure 2), et l'indice de la loi de puissance a pour valeur  $\sigma = 2$ . La distribution des particules dans l'espace des impulsions  $f(p)$  sur le front du choc, est aussi appelée "spectre d'accélération", ou "spectre source d'accélération des chocs de restes de supernova". D'autres sources sont également possibles. Pour les électrons, les pulsars et les nébuleuses de pulsars [12] et pour les protons et métaux, les amas d'étoiles massives [23, 73].

### Les spectres du rayonnement cosmique

Le spectre du rayonnement cosmique s'étend sur plus de 12 décades en énergie suivant une loi de puissance  $N(E)dE \propto E^{-p}dE$ , avec des cassures. Ce spectre, représenté figure 3, permet de classer les rayons cosmiques. En effet, les particules d'énergie les plus faibles, concrètement inférieures à 1 GeV par nucléon, sont principalement issues de notre étoile, dans ce qui constitue le vent solaire. Le libre parcours moyen de ces particules n'excède pas la taille de l'héliosphère, ce qui explique pourquoi il est rare de détecter des rayons cosmiques de faible énergie au voisinage de la terre qui ne soient pas d'origine solaire. C'est pourquoi le spectre de la figure 3 à faible énergie ( $<1$  GeV) adopte une forme plate, qui ne s'extrapole pas avec le reste du spectre. On dit qu'aux énergies inférieures à 1 GeV, le spectre des rayons cosmiques est modulé par le vent solaire.

Pour les rayons cosmiques dont l'énergie est située entre 1 GeV et  $10^6$  GeV, le spectre de la figure 3 produit une pente  $p = -2.7$ . Cette zone du spectre fut historiquement

1. le nombre de Mach est le rapport entre la vitesse du choc  $v_s$  et la vitesse du son  $c_s$  dans le milieu amont au choc.

privilégée, probablement aidée par le fait que le flux de particules à 100 GeV est d'une particule par mètre carré et par seconde, ce qui est assez élevé.

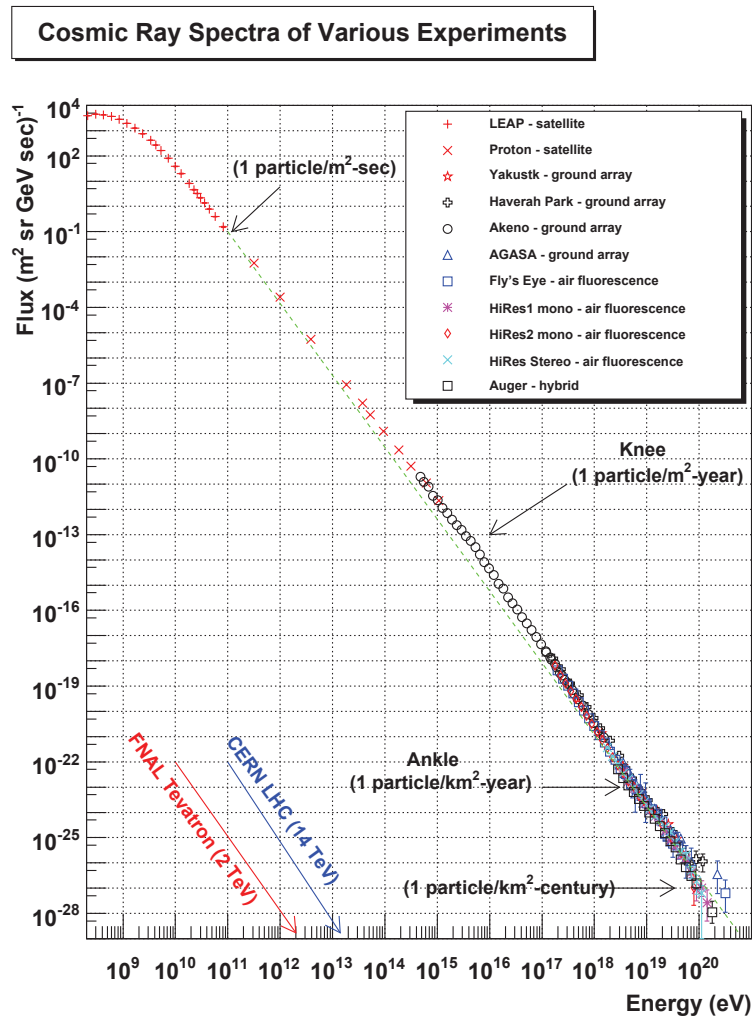


FIGURE 3 – Spectre en énergie des rayons cosmiques. La figure situe les positions des différentes zones de transition faisant varier la pente. Elle résume également les résultats expérimentaux sur la mesure du flux de RC, basés sur des expériences différentes. Pour finir, on remarque la place des accélérateurs terrestres dans le graphique : ils produisent des particules dont l'énergie est jusqu'à sept ordres de grandeur moins élevés que celle des rayons cosmiques. Figure récupérée sur <http://www.physics.utah.edu/~whanlon/spectrum.html>.

C'est à 4 PeV ( $10^6$  GeV) que le spectre se brise, changeant la pente à  $p = -3.0$ , jusqu'à une énergie de 500 PeV. La rupture de pente à 4 PeV est appelé le "genou", et le flux perd 12 ordres de grandeur, soit une particule par mètre carré et par an. La raison de la présence du "genou" reste à ce jour inexplicée, même si de nombreuses interprétations en ont été faites [41].

A 500 PeV, une nouvelle cassure diminue à nouveau la pente à une valeur  $p = -3.3$ , c'est le "second genou". Le spectre adopte donc un indice spectral de  $-3.3$ , jusqu'à une énergie d'environ 3 EeV, où le spectre se redresse à  $p = -2.7$ , c'est ce que l'on nomme la "cheville". Techniquement, les protons de  $10^{20}$  eV d'énergie ont, dans un champ magnétique typique du milieu interstellaire  $B_{ISM} = 3\mu\text{G}$  un rayon de Larmor  $r_L = 30$  kiloparsec, ce qui correspond au diamètre de notre galaxie. Pour des protons d'énergie  $10^{18}$  eV dans le même champ magnétique, le rayon de Larmor est de  $r_L = 300$  pc, ce qui est supérieur à l'épaisseur du disque galactique. C'est la raison pour laquelle la communauté scientifique semble s'accorder sur le fait que de tels rayons cosmiques ne peuvent pas rester confinés dans la galaxie, et sont nécessairement d'origine extra-galactique.

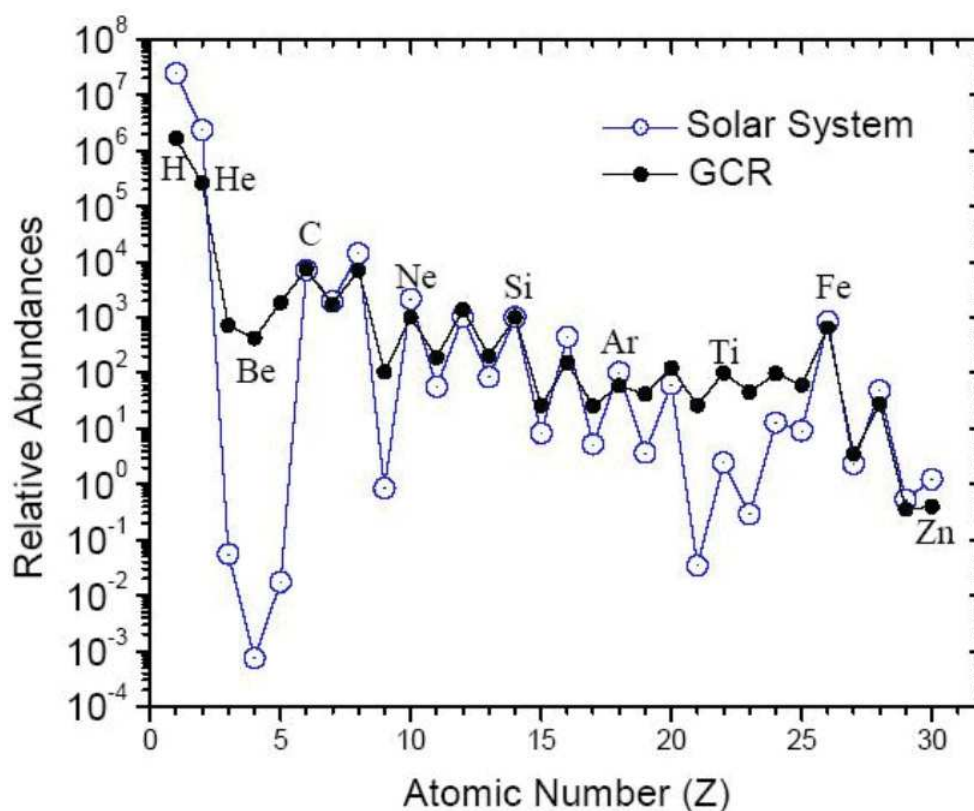


FIGURE 4 – Abondances relative des éléments constitutifs du système solaire et des rayons cosmiques, mesurées sur le satellite de la mission ACE. Les particules ont ici des énergies variant de  $10^2$  à  $5 \cdot 10^8$  eV par nucléons. Figure extraite de [42]



Une autre propriété des rayons cosmiques est leur spectre de masse, représenté en figure 4. Ce spectre nous apprend que les rayons cosmiques sont composés à 86% de protons, 11% d'Hélium, 1% d'électrons, et des traces de métaux plus lourds. La figure 4 compare la population, en noyaux, des rayons cosmiques et celle du milieu composant le système solaire. Les quantités sont normalisées par rapport au nombre d'atomes de fluor dans le système solaire. Cette proportion n'est connue que pour des énergies relativement peu élevées (maximum quelques centaines de GeV), sachant la difficulté d'obtenir des événements à haute énergie.

La figure 4 montre que la population des rayons cosmiques n'est cependant pas si différente de la population du système solaire, avec toutefois quelques différences notables sur les atomes du Lithium, Bérium et Bore, qui sont présents en abondance, ainsi que des éléments avec un nombre de protons inférieur au Fer. Cette surabondance relative est liée au fait que les noyaux lourds du milieu interstellaire sont fissionnés par les rayons cosmiques de haute énergie. C'est le processus de spallation.

La dernière propriété des rayons cosmiques se trouve être leur spectre d'anisotropie, représenté en figure 5. Cette dernière montre que les rayons cosmiques d'énergie inférieure au PeV ont un niveau d'anisotropie inférieur au %. A partir de 1 PeV, l'anisotropie augmente jusqu'à des dizaines de % pour le régime extragalactique.

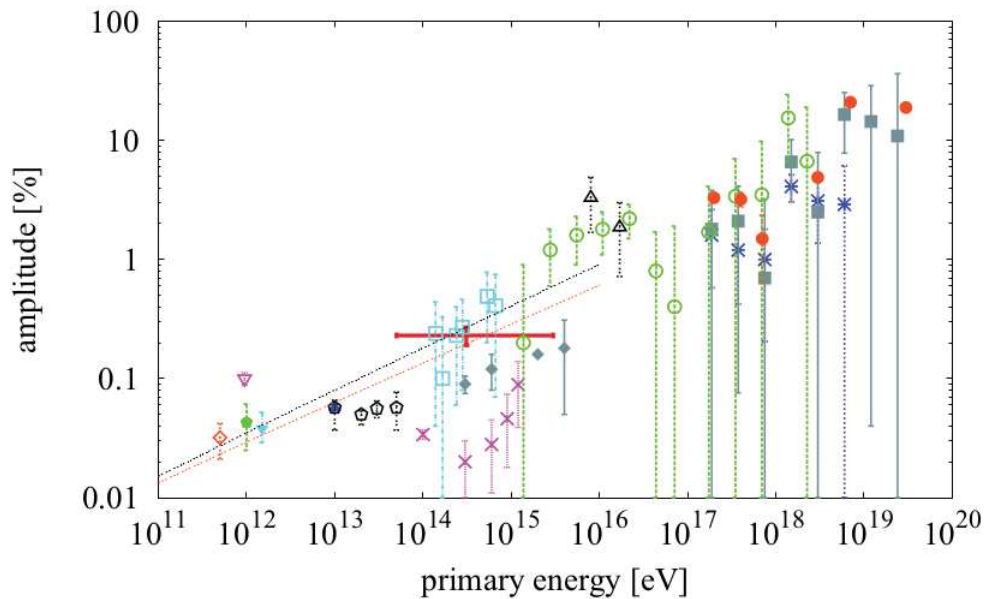


FIGURE 5 – Spectre de l'anisotropie des rayons cosmiques en fonction de l'énergie. L'ordonnée correspond au niveau d'anisotropie, calculée à partir de l'amplitude de la première harmonique du rayon cosmique primaire (plus de détails dans [90] et références associées). Les couleurs et symboles représentent différentes mesures. Figure extraite de [43].

Cette figure montre que l'anisotropie est de l'ordre du pourcent jusqu'à 100 PeV. La conséquence qui en résulte est qu'il est impossible d'attribuer une source à un proton dont l'énergie appartient à cette intervalle. Cependant, à des énergies plus élevées, la rigidité des particules est suffisante pour être peu déviée par le champ magnétique du milieu interstellaire et intergalactique. A ce moment, il serait éventuellement possible d'attribuer le rayon cosmique à une source [49].

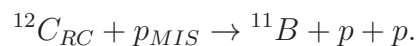
### Le rapport $[B/C]$

Une autre conclusion que l'on peut tirer de la figure 5, est que les rayons cosmiques subissent une marche aléatoire sous l'action d'un champ électromagnétique turbulent. Ceci nous pousse à nous interroger sur la phénoménologie du transport : Comment une particule chargée interagit-elle dans le milieu interstellaire ?

Plusieurs processus sont à l'origine de la perte d'énergie d'un rayon cosmique. Pour commencer, comme toutes particules chargées, le rayon cosmique émet un rayonnement par interaction coulombienne, ou bremsstrahlung. Nous savons également que les rayons cosmiques sont sujets à faire fissionner les atomes du milieu interstellaire. C'est notamment pour cette raison que l'on observe dans le spectre de masse des rayons cosmiques (c.f. 4) une surabondance des éléments légers, tels que le Lithium, le Béryllium, le Bore ou encore les noyaux précédant le Fer.

Ainsi, un rayon cosmique incident est appelé primaire, et les produits de la diffusion du rayon cosmique primaire avec un atome de notre atmosphère est un rayon cosmique qualifié de secondaire. Le rapport entre le nombre de rayons secondaires et le nombre de rayons primaires donne de précieuses informations sur le transport dans la galaxie.

Un exemple de réaction de spallation est donnée par



Le rapport entre les concentrations des secondaires et celles des primaires permet d'obtenir le *grammage*, noté  $x$ . Exprimée en  $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$ , cette grandeur correspond à la quantité de matière moyenne qui est passée au travers une surface de  $1 \text{ cm}^2$ , au long d'une trajectoire dans le milieu interstellaire.

Les modèles de propagation les plus simples nous donnent, à partir des mesures du grammage, et du rapport des concentrations des atomes de Carbone et de Bore, le libre parcours moyen des rayons cosmiques, dont l'énergie est de l'ordre du GeV/nucléons, au sein de la galaxie  $\lambda \sim 1 \text{ Mpc}$ , ce qui est trois ordres de grandeur supérieurs au diamètre de notre galaxie. Cette propriété se traduit par un temps  $t$  de résidence moyen au sein de notre galaxie proche de 3 millions d'années.

Ainsi, pour expliquer pourquoi les rayons cosmiques transitent aussi longtemps dans la Voie Lactée, nous devons considérer une marche aléatoire des rayons cosmiques dans le milieu interstellaire.

La valeur du rapport secondaire sur primaire est dépendant de l'énergie. En définissant la rigidité  $R$  comme le rapport entre l'énergie de la particule et le produit de sa charge par le champ magnétique  $R = E/ZeB$ , le grammage peut s'exprimer comme

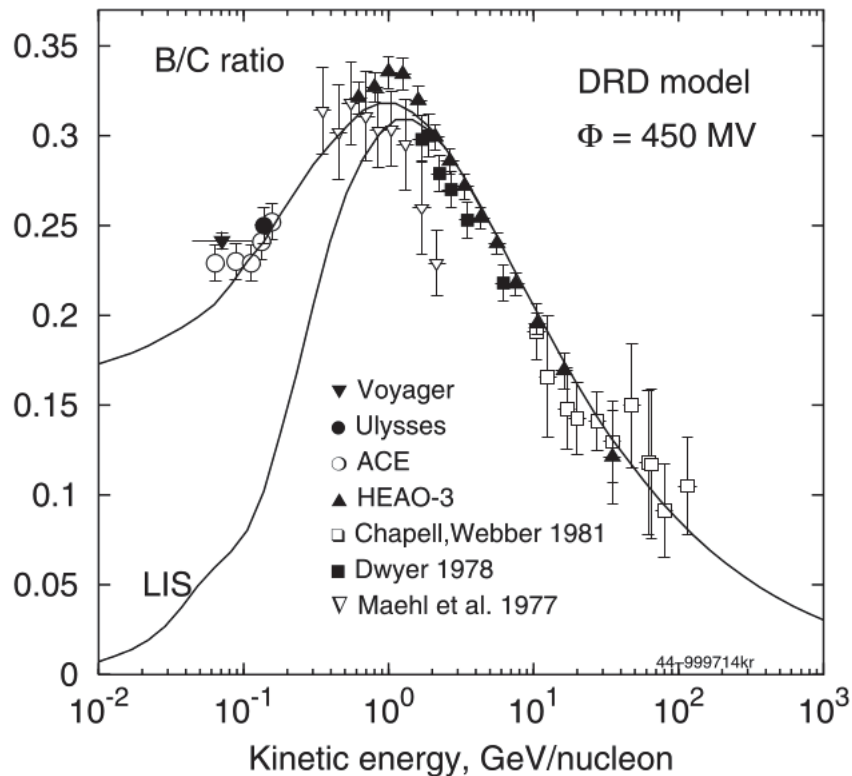


FIGURE 6 – Mesures du rapport primaire sur secondaire. Les points représentent les relevés dans différentes expériences. Les traits pleins sont des modèles qui tentent d'ajuster les mesures. Figure extraite de [77].

$$x(R) = \begin{cases} x(R_0) & \text{pour } R < R_0 \\ x(R_0) \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\alpha} & \text{pour } R > R_0 \end{cases} .$$

La figure 6 montre le rapport de concentration des atomes de Bore et de Carbone.

### Phénoménologie du transport

La propagation des rayons cosmiques dans le milieu interstellaire produit des rapports secondaire sur primaire  $S/P$  dépendant de l'énergie, que les modèles phénoménologiques du transport cherchent à expliquer, en utilisant des concepts simples. Parmi ces modèles, l'approche de "la boîte qui fuit", ou leaky-box en anglais, est le modèle le plus simple que l'on utilise pour modéliser le transport des rayons cosmiques, de la source à la terre. Si  $S_{inj}(E) \propto E^{-\delta}$  est le spectre d'injection des

rayons cosmiques (cf. le premier paragraphe de cette introduction) et  $\tau_{ech} \propto E^{-\alpha}$  l'échelle de temps au bout de laquelle un rayon cosmique s'échappe de la galaxie, alors le spectre des rayons cosmiques dans la galaxie s'écrit comme le produit des deux quantités précédentes

$$N(E) = S_{inj} \tau_{ech},$$

résultant en une loi de puissance  $N(E) \propto E^{-\alpha-\delta}$ . Le but est maintenant de trouver les combinaisons de  $\alpha$  et  $\delta$  pour que leur somme soit égale à celle observée sur terre :  $\alpha + \delta = 2.7$ . C'est ici que le rapport secondaire sur primaire intervient, pour calculer la dépendance en énergie de l'échelle de temps  $\tau_{ech}$ .

Le modèle de "la boîte qui fuit" propose une dépendance en énergie telle que

$$\tau_{ech} \propto E^{-0.5}, \quad (1)$$

en considérant des protons en tant que rayons cosmiques, ayant une énergie  $E \in [3 : 20]$  GeV. Ce résultat accrédiaterait le modèle d'accélération diffusive dans les chocs, ce dernier proposant  $\delta \sim 2$  comme spectre source. En fait, l'erreur de mesure sur le paramètre  $\alpha$  montre que ce type de modèle est réservé aux calculs d'ordre de grandeurs, et le développement de modèles un peu plus raffinés ont dû prendre en compte la marche aléatoire des particules dans le champ magnétique turbulent du milieu interstellaire. Ces modèles prennent en compte la diffusion des particules chargées par des modèles phénoménologiques, ou numériques ; et certains d'entre eux prennent en compte la ré-accélération par la turbulence MHD. Chacun d'entre eux cherchent à construire un spectre en énergie sous la forme d'une loi de puissance [77].

Avec ces modèles, nous avons une vue d'ensemble de la propagation depuis les sources jusqu'à la Terre. Cependant, les rayons cosmiques rencontrent beaucoup de milieux différents lors de leur parcours. Pour comprendre leurs interactions avec les différentes phases du milieu interstellaire, nous devons modéliser chacune de ces phases, et y appliquer des modèles phénoménologiques pour en extraire les propriétés moyennes du transport.

## Microphysique du transport et théorie quasi-linéaire

La théorie la plus simple pour décrire le transport dans la turbulence magnétique est appelée "la théorie quasi-linéaire". Elle fut formulée en 1966 par Jokipii [46], et était accompagnée d'hypothèses fortes, notamment celle de considérer que les centres guides<sup>2</sup> des particules suivent les lignes des champs turbulents.

Cette hypothèse contraint les fluctuations magnétiques à être faibles, et le spectre d'énergie turbulente à être suffisamment large pour que la force aléatoire qui résulte du champ électromagnétique ait un temps d'auto-corrélation faible devant le temps de diffusion des particules.

---

2. Le centre guide est le centre de la courbure de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique.

La théorie quasi-linéaire relie la diffusion entre les échelles parallèles et perpendiculaires au travers la relation [46]

$$\frac{D_{\perp}}{D_{\parallel}} = \frac{1}{1 + \lambda_{\parallel}^2 r_L^2},$$

où  $\lambda_{\parallel} = 3D_{\parallel}/v$  est le libre parcours moyen parallèle au champ magnétique moyen. Les problèmes de la théorie quasi-linéaire peuvent être résumés en trois points. Le premier est l'hypothèse selon laquelle la trajectoire suit une orbite non perturbée. Cette affirmation entraîne la conservation de l'invariant adiabatique  $p_{\perp}^2/B$ , ce qui, par définition, n'est pas le cas lorsque le champ magnétique fluctue de manière aléatoire. Le deuxième point intervient pour la diffusion aux angles d'attaque proches de  $90^{\circ}$  : la théorie quasi-linéaire prédit une diffusion nulle pour ces angles, rendant impossible l'établissement d'un régime diffusif. Le troisième point consiste à l'échec de la théorie quasi-linéaire dans la description du transport perpendiculaire. Ces points seront abordés dans la section 2.3 de cette thèse.

Un effort considérable a été mené depuis sur le transport dans des champs magnétiques turbulents. L'échec de la théorie quasi linéaire a su motiver le développement de théories non linéaires, que nous détaillerons dans la section 2.4. En 2005, Shalchi proposa la théorie quasi-linéaire du second ordre [85], qui fut reprise par Tautz en 2008 pour l'adapter aux simulations de turbulence MHD [97]. Ce fut la première théorie non linéaire du transport ayant un réel niveau de consistance avec les mesures numériques.

## Plan de la thèse

L'objet de cette thèse est d'étudier le transport des rayons cosmiques au sein d'un champ magnétique turbulent généré dans le cadre de l'approximation MHD. Ce travail de thèse s'intéresse aux particules de très haute énergie, bien plus énergétiques que celles créées dans nos accélérateurs les plus puissants. Après une rapide introduction situant mon travail de thèse (2), je développerai dans un premier temps mon travail de recherche sur la turbulence MHD (§3), avant d'aborder en détail la technique de génération de la turbulence que j'ai implémentée au cours de la première année de thèse (§4). Je présenterai pour finir les résultats relatifs à cette partie de mon travail (§5).

La dernière partie de mon manuscrit (III) sera consacrée à l'étude du transport des rayons cosmiques, en commençant par préciser le travail réalisé en amont (§6) sur les aspects numériques. je présenterai ensuite les résultats obtenus relatifs au transport des particules (§7) dans les champs turbulents obtenus précédemment. Enfin, je proposerai une approche permettant une compréhension plus fine de l'anisotropie de la turbulence MHD sur le transport des rayons cosmiques (§8).

## Première partie

# Les Rayons Cosmiques dans le milieu interstellaire



# Chapitre 1

## La turbulence

### 1.1 Introduction

Au cours de ce chapitre d'introduction, je tenterai de situer le sujet de cette thèse dans la problématique de la turbulence. Dans un premier temps, j'aborderai dans la section 1.2 la turbulence hydrodynamique avant de traiter dans la section 1.3 la turbulence magnétohydrodynamique. Dans un second temps, en section 1.4, j'introduirai les phases du milieu interstellaire, pour lesquelles l'étude de la turbulence joue un rôle crucial dans leurs compréhensions.

### 1.2 Turbulence hydrodynamique

La turbulence est un système dynamique chaotique à très grand nombre de degrés de liberté. Elle fait l'objet d'une intense recherche, et a même été décrétée comme l'une des dix grandes énigmes de la physique moderne par le CNRS [9].

La turbulence a, comme tout système chaotique, la propriété d'imprévisibilité, c'est-à-dire, la sensibilité aux conditions initiales.

En hydrodynamique, le système est régi par des équations déterministes. Cependant, si l'on prend deux états initiaux qui ne diffèrent que par des différences infinitésimales, ces différences vont, sous l'effet des interactions non linéaires des diverses parties du système, s'amplifier de façon importante dans le temps, pour atteindre une valeur finie.

La seconde propriété de la turbulence est le mélange d'échelle : la turbulence fluide se manifeste par une diffusion très importante des quantités transportées (quantité de mouvement, densité fluide, température...), dans une très large gamme d'échelle spatiale. Ceux sont les interactions locales non linéaires entre ces échelles qui mènent à l'excitation d'une gamme continue d'échelle, entre les plus grandes et



les plus petites, dite "cascade d'énergie".

### 1.2.1 La théorie de Kolmogorov

Kolmogorov est un mathématicien russe du vingtième siècle, ayant formulé la théorie la plus connue sur la turbulence hydrodynamique incompressible [57]. Il a décrit la turbulence comme une superposition de tourbillons d'une très large gamme de longueur d'onde  $l$  et de vitesse  $v_l$ , jusqu'à une échelle dite "échelle de Kolmogorov"  $l_K$ , où l'énergie des tourbillons est dissipée dans le milieu.

La cascade d'énergie est effective entre l'échelle où l'énergie est injectée (appelée échelle intégrale), et l'échelle de Kolmogorov. L'intervalle des échelles concernées est appelé la zone inertielle, ce qui signifie que le transfert d'énergie est entièrement dominé par le terme d'advection de la vitesse fluide dans l'équation d'Euler (cf. le deuxième terme de l'équation (1.9)).

Ces observations conduiront le mathématicien à formuler les hypothèses d'invariance d'échelle, et de la localité des interactions dans l'espace de Fourier.

Si à l'échelle  $l$  correspond un temps de retournement

$$t_l = \frac{l}{v_l}, \quad (1.1)$$

correspondant au temps mis par une particule fluide pour faire le tour du tourbillon d'échelle  $l$ , la deuxième hypothèse de Kolmogorov illustre, durant ce temps de retournement, qu'un tourbillon d'échelle  $l$  perd une fraction de son énergie cinétique par dissipation, alimentant en énergie des tourbillons d'échelles inférieures.

Le taux de transfert d'énergie cinétique  $\epsilon_l$  est tel que

$$\epsilon_l = \frac{v_l^2}{t_l} = \frac{v_l^3}{l}. \quad (1.2)$$

L'hypothèse d'invariance d'échelle conduit à un taux de transfert d'énergie cinétique indépendant de l'échelle  $\epsilon_l \equiv \epsilon$ , ce qui mène à la loi de Kolmogorov

$$v_l = (\epsilon l)^{1/3}. \quad (1.3)$$

Partant de l'équation (1.3), une analyse dimensionnelle nous permet d'établir la loi de puissance sur le spectre en énergie cinétique  $E(k)$  dans l'espace de Fourier : c'est la phénoménologie de Kolmogorov. En supposant la forme du spectre

$$E(k) = C_K \epsilon^\alpha k^\beta, \quad (1.4)$$

et en considérant les dimensions des différentes quantités :

- $k$  a pour dimension  $[L]^{-1}$
- $E(k)$  densité spectrale d'énergie, ayant pour dimension  $[L]^3 [T]^{-2}$
- $\epsilon$  taux de transfert d'énergie, ayant pour dimension  $[L]^2 [T]^{-3}$

Kolmogorov montre que le spectre unidimensionnel en énergie cinétique, dans le cadre d'une turbulence isotrope, s'écrit

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (1.5)$$

où  $C_K$  est la constante de Kolmogorov, sans dimension. L'équation (1.5) montre que l'énergie est essentiellement contenue dans les grandes échelles. Ce spectre est calculé à partir du spectre 3D  $E^{3D}(k)$  en décomposant l'espace de Fourier en sphères concentriques centrées sur l'origine, soit

$$\int_0^\infty dk E(k) = \int_0^\infty dk 4\pi k^2 E^{3D}(k). \quad (1.6)$$

La version tridimensionnelle du spectre défini par l'équation (1.6) s'écrit

$$E^{3D}(k) = \frac{C_K}{4\pi} \epsilon^{2/3} k^{-11/3}. \quad (1.7)$$

## 1.3 Magnétohydrodynamique

La turbulence est plus complexe lorsque le fluide est compressible ; elle l'est plus encore lorsqu'on ajoute l'équation d'induction dans le système hydrodynamique. La magnétohydrodynamique, ou MHD, est utilisée pour décrire les fluides neutres magnétisés.

La principale hypothèse d'une telle description consiste à considérer le plasma à des échelles supérieures aux longueurs de Debye<sup>1</sup>, ainsi qu'aux rayons de Larmor (eq. (2.13)) des particules le composant. Cela revient à décrire le plasma dans son ensemble, là où les effets collectifs dominent.

A de telles échelles, les variables fluides sont obtenues en effectuant la moyenne des fonctions de distribution des particules. Comme dans la description hydrodynamique, on retrouve la densité de masse  $\rho$ , la vitesse fluide  $\mathbf{u}$ , et l'énergie totale  $E$ . La nouvelle variable décrit le champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Ces variables sont régies par les équations fluides exprimables sous formes conservatives, dans les unités CGS :

---

1. La longueur de Debye est une grandeur macroscopique définie comme  $\lambda_D = 7.43 \sqrt{T/n_e} \text{ cm}$ , où  $T$  est la température du plasma en Kelvin, et  $n_e$  la densité électronique en  $\text{cm}^{-3}$ . Cette échelle de longueur représente la distance sur laquelle les charges électriques écrantent le champ électrostatique d'un plasma.

— Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0; \quad (1.8)$$

— Equation du mouvement

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{4\pi} \right) + \nabla P_{tot} = 0; \quad (1.9)$$

— Equation de l'énergie

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left( (E + P_{tot}) \mathbf{u} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \right) + \nabla P_{tot} = 0; \quad (1.10)$$

— Equation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}) = 0. \quad (1.11)$$

Nous avons introduit la pression totale

$$P_{tot} = P + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{8\pi}, \quad (1.12)$$

et l'énergie totale

$$E = \epsilon_{int} + \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{8\pi}, \quad (1.13)$$

avec  $\epsilon_{int}$  l'énergie interne.

Les équations (1.8) à (1.11) constituent les équations de la MHD idéale<sup>2</sup>, dans laquelle le champ électrique est un champ électromoteur

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (1.14)$$

Le système d'équation précédent est ouvert, ne suffisant pas à décrire le fluide. Afin de fermer le système, nous devons postuler une relation de fermeture liant la densité fluide à la pression. Généralement appelée équation d'état, cette dernière équation contraint l'état du plasma. Dans la suite de l'étude, nous considérerons la fermeture du système MHD par l'équation d'état des gaz parfaits

$$P = (\gamma_g - 1) \epsilon, \quad (1.15)$$

où  $\gamma_g$  est l'indice adiabatique du gaz.

---

2. Les études menées dans cette thèse sont associées à des plasmas idéaux, qui décrivent de façon relativement appropriée les plasmas que l'on trouve dans le milieu interstellaire. Par exemple, les équations dynamiques des plasmas idéaux négligent les phénomènes de dissipation aux petites échelles, phénomènes qui seront abordés dans la section 1.4.4.

### 1.3.1 Ondes linéaires MHD

L'introduction du champ magnétique dans les équations hydrodynamiques provoque l'apparition de nouvelles ondes, utilisant le nouveau champ pour se propager.

En partant d'un plasma au repos, d'état  $(\rho_0, \mathbf{u}_0 = 0, \mathbf{B}_0, P_0)$ , on introduit des perturbations  $(\delta\rho, \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{B}, \delta P)$  telles que

$$\delta X = X_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (1.16)$$

avec  $X$  l'une des variables dynamiques ci-dessus. En injectant les perturbations dans l'équation (1.9) et en négligeant les termes croisés d'ordre deux, il vient la relation de dispersion généralisée des modes d'ondes MHD

$$(\omega^2 - v_A^2 k^2 \cos^2 \theta) (\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_s^2 + v_A^2) + c_s^2 v_A^2 k^4 \cos^2 \theta) = 0, \quad (1.17)$$

avec  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0 = k B_0 \cos \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{B}_0$ . On a également défini la vitesse d'Alfvén, mesurant le rapport entre la pression magnétique et la densité de masse, comme

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (1.18)$$

La vitesse du son, mesurant le rapport entre la pression et la densité de masse

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma_g P_0}{\rho_0}}. \quad (1.19)$$

La solution non-triviale immédiate de l'équation (1.17) donne l'équation de dispersion des ondes d'Alfvén de cisaillement

$$\omega^2 = v_A^2 k^2 \cos^2 \theta. \quad (1.20)$$

La vitesse de phase dépend de la direction de propagation. Il est à noter que ce type d'onde a une vitesse de propagation nulle dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}_0$ , le champ magnétique moyen (Figure 1.1). Ces ondes ont des perturbations magnétiques et des perturbations de vitesses orthogonales à  $\mathbf{B}_0$ .

La deuxième relation de dispersion que l'on peut extraire de l'équation (1.17) est celle relative aux ondes dites magnéto-sonores

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_s^2 + v_A^2) + c_s^2 v_A^2 k^4 \cos^2 \theta = 0, \quad (1.21)$$

d'où l'on extrait la relation de dispersion des modes rapides et lents

$$\omega_{f,s}^2 = k^2 \frac{c_s^2 + v_A^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.22)$$

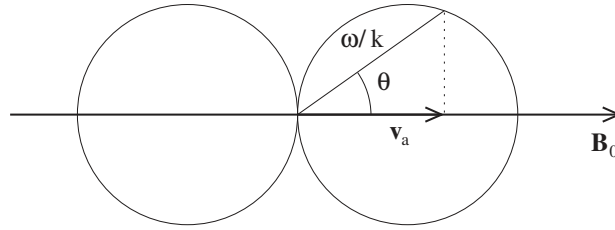
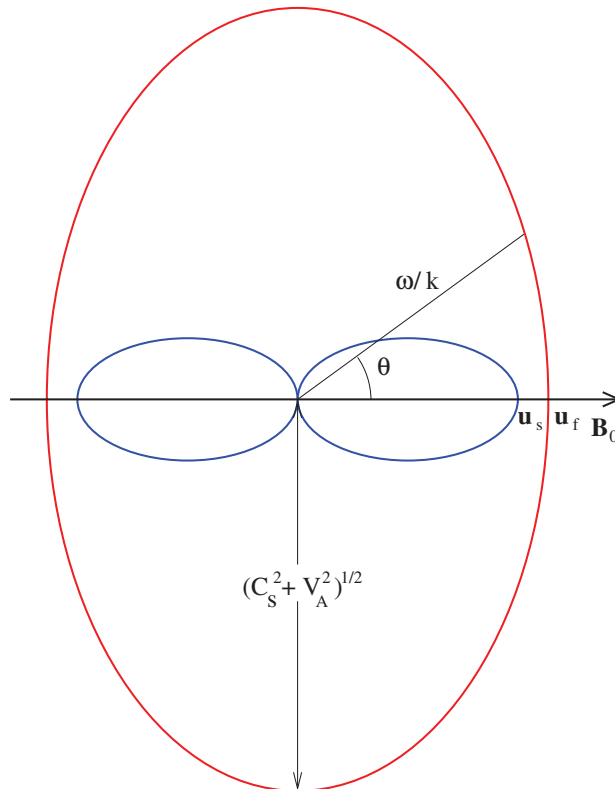


FIGURE 1.1 – Relation de dispersion pour les ondes d’Alfvén

Le signe dans la racine carré définit l’onde : “+” pour les ondes rapides, de vitesse de phase élevée, et “-” pour les ondes lentes. Ces dernières ont une vitesse de propagation s’annulant lorsque la perturbation est perpendiculaire au champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$  (Figure 1.2). Ces ondes ont des composantes perturbées  $\delta\mathbf{B}$  et  $\delta\mathbf{v}$  le long de  $\mathbf{B}_0$

FIGURE 1.2 – Relation de dispersion pour les ondes magnéto-soniques rapides (*fast*) en rouge, et lentes (*slow*) en bleu.

### 1.3.2 Turbulence MHD

La turbulence d'un fluide compressible est plus complexe, bien davantage avec l'introduction d'un champ magnétique. On distingue cependant deux régimes de turbulence MHD, qualifiés à partir du nombre de Mach Alfvénique

$$M_A = \frac{\delta u}{v_A}, \quad (1.23)$$

où  $\delta u$  est l'amplitude de la perturbation de la vitesse fluide et  $v_A$  la vitesse d'Alfvén définie par l'équation (1.18). L'équation (1.23) mesure l'intensité du champ magnétique perturbé.

#### Turbulence faible ( $M_A < 1$ )

Supposons que le champ magnétique soit la somme d'une composante continue de grande échelle, dénommée champ moyen  $\mathbf{B}_0$ , et d'une composante turbulente  $\delta\mathbf{B}$ , tel que  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}$  et  $B_0 \gg \delta B$ .

C'est ce que l'on dénomme une turbulence faible. Alors que le transfert d'énergie, dans le cas hydrodynamique, était régi par le terme d'advection sur la vitesse fluide, le second terme de l'équation (1.9) montre que le type d'onde qui contrôle le transfert d'énergie change de nature. L'introduction du champ magnétique dans le terme d'advection rend les ondes d'Alfvén responsables de ce transfert.

Etant donnée la nature incompressible de ces ondes, nous pouvons d'ores et déjà prédire que l'énergie va principalement être transférée dans le plan perpendiculaire au champ magnétique global, ou moyen, impliquant donc la propriété d'anisotropie de la turbulence, ainsi que la bidimensionnalisation de la cascade d'énergie.

Pour tout nombre d'onde  $\mathbf{k}$ , on définit l'échelle parallèle et perpendiculaire au champ magnétique moyen tel que

$$\mathbf{k}_{\parallel} = \frac{1}{B_0^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0, \quad (1.24)$$

et

$$\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_{\parallel}. \quad (1.25)$$

Afin de comprendre l'anisotropie du spectre concernant la turbulence faible, considérons deux ondes d'Alfvén en interaction,  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Si l'on considère que seules les ondes d'Alfvén de direction de propagation opposée interagissent, l'onde résultante  $\mathbf{k}_3$  est telle que

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1, \quad (1.26)$$

et comme  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , soit d'après l'équation (1.20),

$$\pm k_{\parallel,3} = k_{\parallel,1} - k_{\parallel,2}. \quad (1.27)$$

En comparant la composante verticale de l'équation (1.26) avec la version positive de l'équation (1.27), il vient

$$\begin{aligned} k_{\parallel,3} &= k_{\parallel,1} + k_{\parallel,2}, \\ k_{\parallel,3} &= k_{\parallel,1} - k_{\parallel,2}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

ce qui signifie que la composante  $k_{\parallel,2} = 0$  [95, 14], autrement dit, la composante parallèle dans une interaction à trois ondes est conservée. De ce fait, la composante perpendiculaire de  $\mathbf{k}_3$  est telle que

$$k_{3,\perp}^2 = k_{2,\perp}^2 + k_{1,\perp}^2. \quad (1.29)$$

Autrement dit, il existe un transfert d'énergie à une échelle plus petite dans la direction perpendiculaire à  $\mathbf{B}_0$ .

Considérons un tourbillon d'échelle perpendiculaire  $l_\perp$  et parallèle  $l_\parallel$  au champ moyen  $\mathbf{B}_0$ . D'un point de vue phénoménologique, et par ce transfert d'énergie dans la direction perpendiculaire, la turbulence faible développée mène à la formation de tourbillons de plus en plus allongés dans la direction parallèle à  $\mathbf{B}_0$ .

Considérons deux paquets d'onde d'Alfvén, de direction de propagation opposées, et de tailles similaires. Dans le cadre d'une turbulence d'onde d'Alfvén, on montre que le temps mis par la première onde pour parcourir une distance équivalente à l'échelle parallèle  $l_\parallel$  de la seconde est égal au temps de cascade  $\tau_{cas}$  du paquet d'onde [32, 60], c'est-à-dire

$$\tau_{cas} \sim \frac{l_\parallel}{v_A}, \quad (1.30)$$

soit

$$v_{l_\perp}/l_\perp \sim v_A/l_\parallel. \quad (1.31)$$

C'est la balance critique de Goldreich et Sridhar. Cette relation traduit l'équilibre des temps de croisement et de cascade [32].

La cascade d'énergie agissant essentiellement dans le plan perpendiculaire à  $B_0$ , le flux d'énergie donné par l'équation (1.2) s'écrit

$$\epsilon \sim v_{l_\perp}^3/l_\perp. \quad (1.32)$$

En injectant l'équation précédente dans l'équation (1.31), on obtient la relation d'anisotropie

$$l_\parallel \propto l_\perp^{2/3}. \quad (1.33)$$

Et donc, de manière équivalente

$$\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \sim k_{\perp}^{1/3}. \quad (1.34)$$

Relation vérifiée numériquement [17] (figure 1.3).

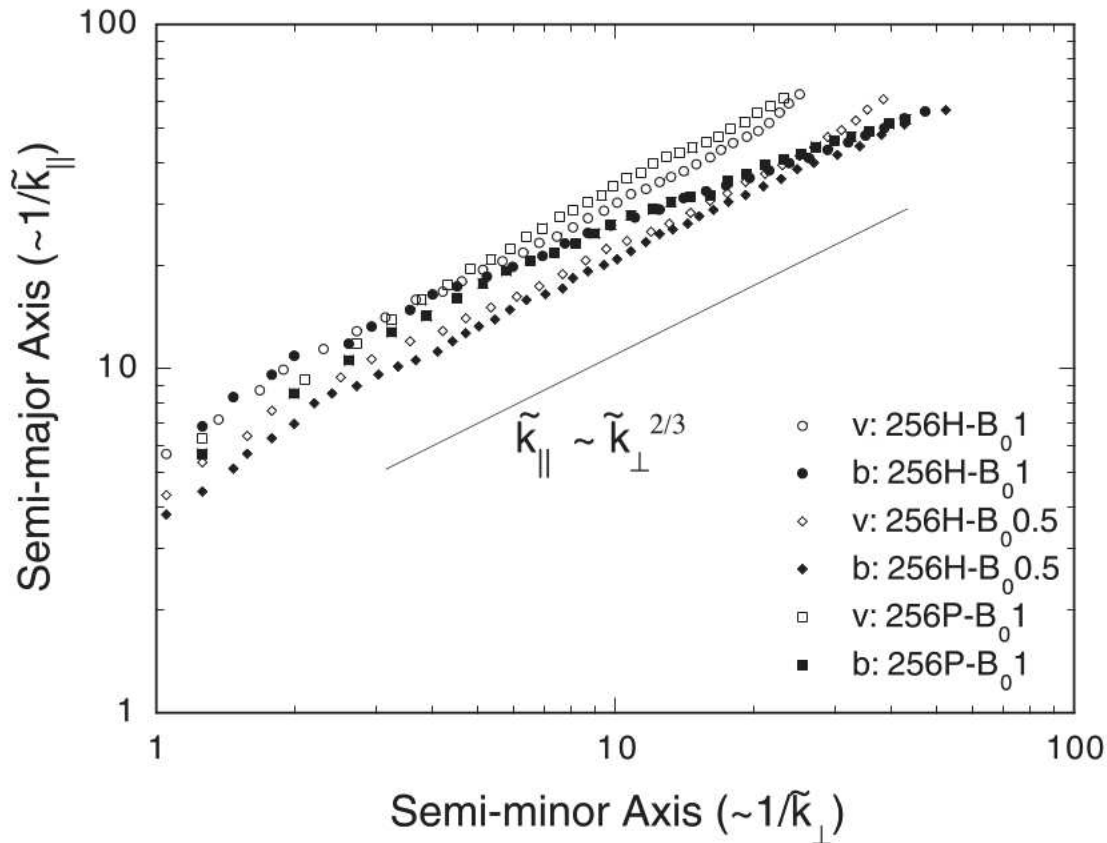


FIGURE 1.3 – Mesure numérique du niveau de l’anisotropie pour des simulations MHD incompressibles avec différentes valeurs du champ moyen  $B_0$ , en utilisant le calcul des fonctions de structure d’ordre 2, qui seront définies dans la section 5.3. L’auteur vérifie ici la compatibilité du modèle de Goldreich-Sridhar avec les simulations numériques. Figure extraite de [17].

Le spectre de Fourier dans le plan perpendiculaire suit alors la loi de Kolmogorov de 1941 de l’équation (1.5)

$$E(k_{\perp}) = C_K \epsilon^{2/3} k_{\perp}^{-5/3}. \quad (1.35)$$

Le spectre en énergie dans l’axe parallèle au champ magnétique moyen est obtenu avec l’équation (1.33)

$$E(k_{\parallel}) \sim \epsilon^{3/2} k_{\parallel}^{-5/2}. \quad (1.36)$$



La différence d'indice spectral entre les spectres des modes parallèles et perpendiculaires traduit la différence d'efficacité pour transférer l'énergie aux petites échelles. Cette différence produit alors des perturbations magnétiques parallèles  $\delta B_{\parallel}$  faibles devant les perturbations perpendiculaires  $\delta B_{\perp}$ . C'est la raison pour laquelle, dans le cadre d'une turbulence faible, le spectre doit être calculé en séparant les modes perpendiculaires des modes parallèles. La forme générale du spectre tridimensionnel prend la forme [32]

$$E(k_{\perp}, k_{\parallel}) = C_K \frac{v_A^2}{k_{\perp}^{10/3} L^{1/3}} f\left(\frac{k_{\parallel} L^{1/3}}{k_{\perp}^{2/3}}\right), \quad (1.37)$$

avec  $v_A$  la vitesse d'Alfvén, et  $L$  la longueur caractéristique de la turbulence. L'hypothèse ici est que le forçage à grande échelle  $L$  est trans-alfvénique, c'est-à-dire  $M_A \sim 1$ , soit  $\delta v \sim v_A$ .

Dans l'équation (1.37),  $f$  est une fonction satisfaisant les conditions

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 1. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Cette fonction contrôle la relation d'anisotropie entre les échelles parallèles et perpendiculaires.

De cette façon, pour retrouver l'équation (1.35) à partir de l'équation (1.37), il suffit d'intégrer le spectre sur les échelles parallèles suivant une géométrie cylindrique

$$\int_{k_{\perp}=0}^{\infty} dk_{\perp} E(k_{\perp}), \quad (1.39)$$

avec

$$E(k_{\perp}) = \int_{k_{\parallel}=-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} 2\pi k_{\perp} E(k_{\perp}, k_{\parallel}). \quad (1.40)$$

En procédant le changement de variable

$$x = \frac{k_{\parallel} L^{1/3}}{k_{\perp}^{2/3}}, \quad (1.41)$$

il vient

$$dk_{\parallel} = \frac{k_{\perp}^{2/3}}{L^{1/3}} dx. \quad (1.42)$$

En utilisant les propriétés (1.38), il vient l'équation (1.35).

**Turbulence forte ( $M_A > 1$ )**

La turbulence forte, ou super-Alfvénique, diffère de la turbulence faible par l'intensité du champ magnétique moyen devant celle des fluctuations  $B_0 \ll \delta B$ . Les propriétés globales de cette turbulence, comme la décroissance de l'énergie turbulente, est similaire à une turbulence hydrodynamique, puisque le champ moyen est dominé par les fluctuations magnétiques. En effet, le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie magnétique

$$\frac{E_K}{E_M} \sim M_A^2 \gg 1, \quad (1.43)$$

montre que le champ magnétique est transporté avec le plasma. Dans ce cas de figure, le champ magnétique est compressé en structures allongées laissant de grandes zones spatiales libres de champ magnétique turbulent. En d'autre terme, l'intermittence spatiale augmente avec le nombre de Mach Alfvénique [10].

**Turbulence hydrodynamique supersonique ( $M_s > 1$ )**

La turbulence hydrodynamique a fait également l'objet d'investigations, notamment pour le cas de milieux fortement compressibles, où le nombre de Mach sonique  $M_s$  est grand. Ce nombre traduit l'importance relative des fluctuations de la vitesse par rapport à la vitesse du son

$$M_s = \frac{\delta v}{c_s}, \quad (1.44)$$

où  $c_s$  est la vitesse du son, définie par l'équation (1.19). Ces investigations s'inscrivent dans l'étude des nuages moléculaires que nous décrirons un peu plus loin dans l'exposé.

L'indice spectral de la zone inertielle dans le cadre d'une turbulence supersonique s'éloigne du modèle de Kolmogorov [47]. Sachant que la théorie de Kolmogorov a été formulée pour des fluides incompressibles, cet écart pourrait être expliqué par la nature hautement compressible des milieux supersoniques. Nous reviendrons sur ces aspects au chapitre 5.

L'introduction du champ magnétique dans les simulations supersoniques appelle au constat précédemment établi, c'est à dire l'accentuation de l'anisotropie avec la force du champ magnétique moyen [66].

## 1.4 Milieu interstellaire

Bien que les simulations numériques développées dans ce travail ne se réfèrent pas explicitement à une phase particulière du milieu interstellaire, la turbulence est étudiée dans ce contexte. Pour notre galaxie, le milieu interstellaire montre des propriétés turbulentes pour des échelles allant de l'unité astronomique ( $1 U.A. =$

$4.8 \cdot 10^{-6} pc$ ), à quelques kiloparsec ( $1 pc = 3.08 \cdot 10^{18} cm$ ). Une des difficultés propres à l'étude de la turbulence interstellaire est la multiplicité des sources d'injection d'énergie :

- Le cisaillement de grande échelle, de l'ordre du kiloparsec, dû à la rotation de notre galaxie ;
- Les rémanents de supernova, injectant des quantités importantes d'énergie cinétique, à des échelles de l'ordre de la dizaine de parsec ;
- Les nuages moléculaires, source d'énergie cinétique d'échelle proche du parsec ;
- Les mécanismes de haute énergie de plus petite échelle, comme les jets associés aux phénomènes d'accrétion, d'échelle proche du dixième de parsec.

La plupart de ces processus, notamment les restes de supernova ou les vents d'étoile massives, injectent de la turbulence en régime trans- voire supersonique. De plus, les mesures de dispersion de vitesse au sein des nuages moléculaires concluent à de la turbulence supersonique. Le régime de turbulence magnétique est cependant moins tranché, et dépend de la phase du milieu interstellaire considérée (voir paragraphe 1.4.1).

### 1.4.1 Présentation des différentes phases

Le milieu interstellaire est constitué de régions très différentes d'un point de vue thermodynamique.

La plus grande partie est constituée de gaz neutre<sup>3</sup>, en majorité atomique. Il existe deux phases pour le gaz neutre : l'une dite *tiède*, où la température est de l'ordre du millier de Kelvin, et peu dense, avec une densité moyenne en atome d'hydrogène  $n_H \sim 0.4 cm^{-3}$  ; l'autre froide, de température de l'ordre de la dizaine de Kelvin, mais plus dense,  $n_H \sim 30 cm^{-3}$  [107, 44]. Elle constituent les phases WNM (Warm Neutral Medium) et CNM (Cold Neutral Medium) respectivement.

Le gaz interstellaire peut également être ionisé. Les différents processus physiques à l'origine de cet état du gaz peuvent être multiples, allant de la photo-ionisation à la collision par des particules de haute énergie comme les rayons cosmiques, en passant par le chauffage par onde de choc. Là aussi, le gaz ionisé se distingue en deux phases : la phase dite tiède (warm ionized medium, WIM en anglais), dont la température approche les 8000 Kelvin, mais reste peu dense ; la phase chaude (Hot Ionized Medium, HIM en anglais), où la température est de l'ordre du million de Kelvin, et  $n_H \sim 3 \times 10^{-3} cm^{-3}$ . Le Halo Galactique (HG en anglais), est typiquement une phase HIM. Le tableau 1.1 dresse une liste exhaustive des phases mentionnées. Dans ce tableau,  $l_{mfp}$  correspond à la distance moyenne au bout de laquelle une particule thermique sera déviée de sa trajectoire balistique par la collision avec les autres composantes du milieu.

---

<sup>3</sup>. Plus exactement, la masse du milieu interstellaire est essentiellement sous forme de gaz neutre. Par contre, environ 70% de son volume est sous forme ionisée.

Parameter	Galactic Halo	HIM	WIM	WNM	CNM	DC
$T$ (K).....	$2 \times 10^6$	$1 \times 10^6$	8000	6000	100	15
$C_s$ (km s <sup>-1</sup> ).....	130	91	8.1	7	0.91	0.35
$n$ (cm <sup>-3</sup> ).....	$10^{-3}$	$4 \times 10^{-3}$	0.1	0.4	30	200
$l_{mfp}$ (cm).....	$4 \times 10^{19}$	$2 \times 10^{18}$	$6 \times 10^{12}$	$8 \times 10^{11}$	$3 \times 10^6$	$10^4$
$L$ (pc).....	100	100	50	50	50	50
$B$ ( $\mu$ G).....	5	2	5	5	5	15
$\beta$ .....	0.28	3.5	0.11	0.33	0.42	0.046
Damping.....	Collisionless	Collisional	Collisional	Neutral-ion	Neutral-ion	Neutral-ion

TABLE 1.1 – Paramètres des différentes phases du milieu interstellaire. Sont listés la température  $T$  en Kelvin, la vitesse du son caractéristique  $c_s$  (cf. equation (1.19)), la densité de particule  $n$ , le libre parcours moyen typique  $l_{mfp}$  l'échelle caractéristique de la phase  $L$ , l'amplitude du champ magnétique  $B$  et le rapport de la pression thermique sur la pression magnétique  $\beta_p$ . La dernière ligne correspond au processus dominant l'amortissement des ondes (cf. section 1.4.4) (damping en anglais). Figure extraite de [107] et références associées. Les acronymes sont : HIM, pour Hot Ionized Medium ; WIM, pour Warm Ionized Medium ; WNM, pour Warm Neutral Medium ; CNM, pour Cold Neutral Medium ; DC, pour Dark Cloud.

Les ondes MHD ont des comportements différents en fonction de la phase considérée, surtout à cause de leur amortissement, variant avec les paramètres thermodynamiques du milieu. Avant de décrire cet aspect, nous allons détailler deux zones du milieu interstellaire qui permettent d'illustrer les différents régimes de turbulence présentés plus haut.

### 1.4.2 Les nuages moléculaires

Les nuages moléculaires sont les régions les plus denses et les plus froides du milieu interstellaire. Ils sont composés essentiellement de molécule d'hydrogène ( $H_2$ ), mais aussi de monoxyde de carbone (CO), d'ammoniac ( $NH_3$ ) et d'eau ( $H_2O$ ). Ces nuages sont denses ( $n \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$ ) et froids ( $T \sim 30$  Kelvin)(cf. DC dans le tableau 1.1).

Dans ces phases particulières, la turbulence joue le rôle de régulateur de naissance des étoiles en diminuant d'un facteur 50 leur fréquence d'apparition, par rapport à une absence de turbulence [71].

Le champ magnétique intervient dans le théorème du Viriel, pour contrebalancer l'effondrement gravitationnel. Certains travaux [69, 70] ont montré que le champ magnétique moyen, au sein du nuage moléculaire, pouvait être faible, validant ainsi l'hypothèse d'une turbulence super-sonique et super-Alfvénique pour les nuages moléculaires.

La nature supersonique de la turbulence conduit à des structures complexes de chocs

interagissant les uns avec les autres, pouvant former au sein du nuage moléculaire des régions de densité accrue, appelées les coeurs denses, prémices de la formation stellaire. C'est une des explications avancées pour expliquer la distribution de masse des jeunes étoiles [71].

### 1.4.3 Les vestiges de supernova

Les chocs de vestiges de supernova présentent un intérêt bien connu, notamment pour l'accélération de rayons cosmiques par les processus de Fermi d'ordre 1 [22] (cf. introduction).

Ces chocs sont super-alfvéniqes : alors que la région pré-choc est un plasma dans lequel les perturbations magnétiques  $\delta\mathbf{B}$  sont faibles devant le champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$ , l'onde de choc véhicule un champ magnétique fortement compressé, pouvant ainsi transporter des particules. Ce phénomène transmet l'énergie du choc aux particules, ce qui permet à une partie d'entre elles de s'échapper.

Le passage de l'onde de choc a également un effet sur le champ magnétique en aval du choc, produisant son amplification. En effet, la propagation d'une onde de choc, dans un milieu turbulent, entraîne l'apparition de mouvements tourbillonnaires, ou vorticité, tordant le champ magnétique et augmentant la pression magnétique. Ce processus est extrêmement efficace, lors de chocs très énergétiques, l'intensité du champ magnétique peut être multipliée par un facteur 100 [31]. Au-delà de l'effet purement fluide, il se peut également que l'amplification du champ magnétique en amont du choc soit due aux particules elles-mêmes [5].

### 1.4.4 Amortissement de la turbulence interstellaire

L'image de la cascade d'énergie turbulente est valable jusqu'à des échelles de dissipation  $k_d$ . Aux petites échelles, l'amortissement du spectre turbulent intervient par l'intermédiaire de processus qui peuvent être nombreux, mais se regroupent en deux catégories : l'amortissement collisionnel et non-collisionnel. Les importances relatives des différents processus d'amortissement dépendent de la phase interstellaire (cf tableau 1.1). Si le libre parcours moyen des particules thermiques du plasma,  $\lambda_{th}$ , est supérieur à la longueur d'onde des ondes MHD, alors l'amortissement sera non-collisionnel. A l'inverse, si le libre parcours moyen est inférieur à l'échelle de dissipation MHD, alors l'amortissement est collisionnel, et la cascade d'énergie dissipera à un nombre d'onde maximum  $k_c = 2\pi l_{th}^{-1}$ .

Le principe est de rendre le spectre plus mou au-delà de l'échelle  $k_d$ . Intuitivement, cela signifie que la longueur d'onde des ondes ne doit pas descendre en dessous de l'échelle où des processus, pouvant rendre la dissipation d'énergie plus efficace, apparaissent. Par exemple, dans les phases froides neutres, atomiques et

moléculaires, les ondes d'Alfvén et les ondes magnéto-soniques sont amorties par interaction collisionnelle entre les ions et les neutres, assimilés à de l'amortissement visqueux.

Dans les phases plus chaudes, comme les HIM, le libre parcours moyen des particules composant le milieu est plus grand que l'échelle de dissipation de l'énergie [107, 44]. La dissipation de l'énergie se fait alors par amortissement de Landau, qui est non collisionnel. Ce processus traduit l'aspect radiatif des plasmas : si toute particule chargée émet des rayonnements lorsqu'elle est accélérée, elle est réciproquement accélérée par absorption de rayonnement. L'énergie des ondes MHD peut être évidemment absorbée par les particules thermiques du milieu, c'est le cas pour les particules d'énergie inférieure à l'onde, qui sont accélérées en prélevant l'énergie de l'onde initiale.

Il peut également exister d'autres processus d'amortissement, comme l'amortissement par effet joule, ou résistif. Cependant, ce processus intervient rarement dans les plasmas astrophysiques, puisque la conductivité des plasmas y est très élevée [107].



# Chapitre 2

## Le transport des rayons cosmiques en turbulence MHD

Dans ce chapitre, nous introduirons les différentes théories liées au transport des rayons cosmiques, mettant en lumière les inconvénients de la théorie quasi-linéaire, et la nécessité de développer des théories non-linéaires.

La section 2.1 introduira les notations employées dans le chapitre, en considérant le problème d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme, avant de passer dans un second temps, à la description analytique de la théorie cinétique menant à la théorie quasi-linéaire (Section 2.2). La section 2.3 explicitera les hypothèses liées à cette théorie, avant d'introduire les coefficients de diffusion. Une discussion suivra sur les interactions entre les ondes MHD et les particules, responsables de l'existence d'un ensemble de tenseurs de résonance. Avant d'introduire les avancées qui ont été menées depuis quarante ans pour développer des théories non-linéaires du transport des rayons cosmiques (partie 2.4), nous présenterons en particulier, dans la section 2.4.2, les précédents résultats obtenus pour la théorie quasi-linéaire.

### 2.1 Définitions

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est décrite par le système

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{x}$  est la position,  $\mathbf{v}$  la vitesse,  $\mathbf{E}$  le champ électrique,  $\mathbf{B}$  le champ magnétique. Les quantités  $q$  et  $c$  ont leurs significations usuelles. Dans un champ magnétique uniforme  $B = B_0 \mathbf{e}_z$ , et en écrivant la vitesse en terme de composante parallèle et perpendiculaire au champ magnétique :

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z \equiv \mu v \mathbf{e}_z, \quad (2.3)$$



$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel \equiv v\sqrt{1 - \mu^2} \mathbf{e}_z, \quad (2.4)$$

avec

$$\mu = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_0}{vB_0}, \quad (2.5)$$

le cosinus de l'angle entre le champ magnétique et la vitesse de la particule.

En négligeant le champ électrique<sup>1</sup> l'énergie est alors conservée

$$\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.7)$$

Et le système se réécrit

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \Omega \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

La solution de ce système peut s'écrire

$$\mathbf{v}_0 = \begin{cases} v\sqrt{1 - \mu^2} \cdot \cos(\phi_0 - \Omega t) \\ v\sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sin(\phi_0 - \Omega t) \\ \mu v \end{cases}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{x}_0(t) = \begin{cases} x_0(0) + R_L \sqrt{1 - \mu^2} [\sin(\phi_0) - \sin(\phi_0 - \Omega t)] \\ y_0(0) - R_L \sqrt{1 - \mu^2} [\cos(\phi_0) - \cos(\phi_0 - \Omega t)] \\ z_0(0) + \mu vt \end{cases}. \quad (2.11)$$

Avec  $\phi_0$  la phase initiale et

$$\Omega \equiv \frac{qB_0}{\gamma mc}, \quad (2.12)$$

la pulsation synchrotron, et

$$R_L \equiv \frac{v}{\Omega}, \quad (2.13)$$

---

1. En physique des plasmas, les champs électriques de grande échelle sont absents de par le caractère de forte conductivité des plasmas. Dans les champs astrophysiques, le champ électrique est calculé comme le produit vectoriel

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c}, \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{u}$  la vitesse du fluide MHD. On a donc  $E \ll B$  dans le terme d'accélération de l'équation du mouvement, pour les fluides que nous rencontrons dans le milieu interstellaire.

le rayon de Larmor. Ce paramètre est une mesure directe de l'énergie de la particule.

## 2.2 Eléments de théorie cinétique

L'équation fondamentale pour décrire le transport des particules dans un plasma est tirée de la théorie cinétique décrivant l'évolution d'une fonction appelée fonction densité de probabilité de l'espace des phases à six dimensions

$$f_c = f_c(\chi, t), \quad (2.14)$$

avec

$$\chi_i \equiv \{x, y, z, p_x, p_y, p_z\}, \quad (2.15)$$

les dimensions d'espace et d'impulsion relativiste. L'indice  $c$  représente l'espèce du cosmique considéré. La quantité  $f_c d\chi$  correspond au nombre de particules situées dans l'intervalle  $[\chi; \chi + d\chi]$  de l'espace des phases à 6 dimensions à un instant  $t$ . L'équation qui régit l'évolution de la fonction de distribution est l'équation de Vlasov relativiste,

$$\partial_t f_c + \dot{\chi}_i \partial_i f_c = 0, \quad (2.16)$$

où la convention de sommation d'Einstein est utilisée.  $\dot{\chi}$  s'exprime par le système d'équation (2.1) et (2.2) du mouvement pour une particule chargée dans le champ électromagnétique du plasma.

En négligeant les champs électriques de grande échelle, nous pouvons reformuler l'expression du champ électromagnétique comme la somme d'une partie constante et uniforme  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$  avec une partie fluctuante  $\delta B$  tel que

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \quad \langle \mathbf{B} \rangle = B_0, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{E} = \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad \langle \mathbf{E} \rangle = 0. \quad (2.18)$$

Les parenthèses  $\langle \cdot \rangle$  représentent la moyenne d'ensemble de l'espace considéré. Grâce à la nature giratoire du mouvement, et pour plus de simplicité, nous introduisons les coordonnées du centre guide et les coordonnées sphériques dans l'espace des impulsions

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z}{\Omega}, \quad (2.19)$$

Où  $\Omega$  est la pulsation synchrotron définie par l'équation (2.12) et

$$p_x = p \cos \phi \sqrt{1 - \mu^2}, \quad p_y = p \sin \phi \sqrt{1 - \mu^2}, \quad p_z = p\mu. \quad (2.20)$$

Nous introduisons également les composantes gauches et droites des champs électriques et magnétiques

$$\delta B_{L,R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta B_x \pm i\delta B_y), \quad \delta B_{\parallel} = \delta B_z, \quad (2.21)$$

$$\delta E_{L,R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta E_x \pm i\delta E_y), \quad \delta E_{\parallel} = \delta E_z. \quad (2.22)$$

En injectant les relations (2.20) dans (2.19), il vient les expressions

$$X = x + \frac{v\sqrt{1-\mu^2}}{\Omega} \sin \phi, \quad Y = y - \frac{v\sqrt{1-\mu^2}}{\Omega} \cos \phi, \quad Z = z, \quad (2.23)$$

transformant le système de coordonnées (2.15) en

$$\chi_i \equiv \{X, Y, Z, p, \mu, \phi\}. \quad (2.24)$$

Enfin, en injectant les relations (2.20) à (2.23) dans (2.16), nous obtenons la formulation de l'équation de Vlasov relativiste en coordonnée sphérique

$$\partial_t f_c + v\mu\partial_Z f_c - \Omega\partial_\phi f_c + \frac{1}{p^2}\partial_{\chi_j} (p^2 g_{\chi_j} f_c) = 0, \quad (2.25)$$

avec  $g_{\chi_j}$  les termes de forces généralisées prenant en compte les fluctuations du champ électromagnétique [93]. Les solutions de l'équation précédente, dans le cas où  $g_{\chi_j} = 0$ , sont les solutions relatives aux trajectoires non perturbées par les fluctuations des champs électriques et magnétiques. Notons à titre d'exemple l'expression de  $g_\mu$

$$g_\mu = \frac{\Omega\sqrt{1-\mu^2}}{B_0} \left[ \frac{c}{v}\sqrt{1-\mu^2}\delta E_{\parallel} + \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ e^{i\phi} \left( \delta B_R + i\mu\frac{c}{v}\delta E_R \right) - e^{-i\phi} \left( \delta B_L - i\mu\frac{c}{v}\delta E_L \right) \right] \right]. \quad (2.26)$$

La distribution de probabilité  $f_c$  évolue de manière erratique sous l'action des champs turbulents, c'est pourquoi nous nous intéressons à l'évolution de la valeur moyenne de  $f_c$  sur plusieurs réalisations indépendantes. Considérons un ensemble de réalisations où les distributions de probabilité à un instant  $t = t_0$  sont identiques. A  $t > t_0$ , on définit la valeur moyenne

$$F_c(\chi, t) = \langle f_c(\chi, t) \rangle, \quad (2.27)$$

où les parenthèses  $\langle \cdot \rangle$  représentent de nouveau la moyenne sur l'ensemble des réalisations. Si l'on définit l'écart à la moyenne  $\delta f_c$

$$\delta f_c = F_c - f_c, \quad (2.28)$$

l'équation d'évolution de l'écart à la moyenne est calculée en faisant la moyenne de l'équation (2.25), donnant

$$\partial_t F_c + v\mu\partial_Z F_c - \Omega\partial_\phi F_c + \frac{1}{p^2}\partial_{\chi_j} \langle p^2 g_{\chi_j} \delta f_c \rangle = 0. \quad (2.29)$$

En retranchant l'équation (2.16) à (2.29), on obtient

$$\partial_t \delta f_c + v\mu \partial_Z \delta f_c - \Omega \partial_\phi \delta f_c + g_{\chi_j} \partial_j (F_c + \delta f_c) - \langle g_{\chi_j} \partial_j f_c \rangle = 0. \quad (2.30)$$

Afin d'aller plus loin dans le développement, nous devons formuler des hypothèses sur les champs. La section suivante utilise le développement au premier ordre de la méthode des perturbations : c'est la théorie quasi-linéaire du transport.

## 2.3 Théorie quasi-linéaire du transport

La théorie quasi-linéaire du transport est basée sur l'hypothèse que les fluctuations des champs électromagnétiques sont faibles devant les champs moyens, soit

$$\delta B \ll B_0 \quad ; \quad \delta E \ll B_0. \quad (2.31)$$

La perturbation sur les trajectoires des particules est alors considérée comme suffisamment faible pour pouvoir les négliger devant les orbites non perturbées.

### 2.3.1 Coefficients de diffusion

En utilisant la méthode des perturbations pour résoudre (2.30), nous obtenons l'expression avec les termes de premier ordre

$$\partial_t \delta f_c + v\mu \partial_Z \delta f_c - \Omega \partial_\phi \delta f_c + g_{\chi_j} \partial_j F_c = 0. \quad (2.32)$$

La méthode des caractéristiques donne la forme d'une solution de (2.32), soit

$$\delta f_c(t) = \delta f_c(t_0) + \int_{t_0}^t ds [g_{\chi_j} \partial_{\chi_j} F_c]. \quad (2.33)$$

En injectant l'équation (2.33) dans (2.29), il vient

$$\partial_t F_c + v\mu \partial_Z F_c - \Omega \partial_\phi F_c = \frac{1}{p^2} \partial_{\chi_j} \left( p^2 \int_{t_0}^t ds \langle g_{\chi_j}(t) g_{\chi_k}(s) \rangle [\partial_{\chi_k} F_c] \right), \quad (2.34)$$

que l'on réécrit sous la forme de l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t F_c + v\mu \partial_Z F_c - \Omega \partial_\phi F_c = \frac{1}{p^2} \partial_{\chi_j} [p^2 D_{\chi_j \chi_k} \partial_{\chi_k} F_c], \quad (2.35)$$

avec les coefficients de diffusion de Fokker-Planck

$$D_{\chi_j \chi_k} = \int_{t_0}^t ds \langle g_{\chi_j}(t) g_{\chi_k}(s) \rangle, \quad (2.36)$$

que l'on peut réécrire comme

$$D_{\chi_j \chi_k} = \Re \int_0^\infty d\xi \langle g_{\chi_j}(t) g_{\chi_k}^*(t - \xi) \rangle, \quad (2.37)$$

où l'étoile désigne le complexe conjugué.

Les termes de fluctuation  $g_{\chi_j}$  sont déterminés le long d'une trajectoire non perturbée, donnée par les équations (2.11). Cette approximation, liée au développement à l'ordre 1 de l'équation de Vlasov (2.29), n'est acceptable que dans la limite des temps courts, tel que

$$t \ll T_D, \quad (2.38)$$

où  $T_D$  est le temps au-delà duquel l'action des champs fluctuants, et donc des  $g_{\chi_j}$ , influe sur l'évolution de la densité de probabilité moyenne (équation (2.27)).

Le remplacement de la borne supérieure de l'intégrale dans l'équation (2.36) est motivée par le fait que cette intégrale ne dépend que de la valeur  $\xi = t - s$ . Les échelles de temps considérées sont telles que l'intégrand  $\langle g_{\chi_j}(t) g_{\chi_k}^*(t - \xi) \rangle$  devient négligeable, ce qui permet le passage à l'équation (2.37).

L'expression générale des coefficients de diffusion est complexe, et peut être trouvée notamment dans le chapitre 12.2 de la référence [93], dont cette présente section est largement inspirée.

Afin de comprendre la physique sous-jacente, nous nous limiterons aux cas où les fluctuations électriques ont des effets négligeables devant les fluctuations magnétiques. Cette hypothèse ramène l'expression de la force généralisée (2.26) à

$$g_\mu = \frac{i\Omega}{\sqrt{2}B_0} \sqrt{1 - \mu^2} [e^{i\phi(t)} \delta B_R(\mathbf{x}_0(t)) - e^{-i\phi(t)} \delta B_L(\mathbf{x}_0(t))]. \quad (2.39)$$

En injectant l'équation précédente dans la définition (2.37), on obtient le coefficient de diffusion angulaire  $D_{\mu\mu}$

$$D_{\mu\mu} = \frac{\Omega^2 (1 - \mu^2)}{2B_0^2} \int_0^\infty d\xi [R_{RR} e^{-i\Omega\xi} - R_{RL} e^{i[2\phi_0 - 2\Omega t + \Omega\xi]} - R_{LR} e^{-i[2\phi_0 - 2\Omega t + \Omega\xi]} + R_{LL} e^{i\Omega\xi}], \quad (2.40)$$

où les  $R_{lm}$  représentent les corrélations magnétiques. Le long de la trajectoire non perturbée

$$R_{RR} = \langle \delta B_R(\mathbf{x}_0(t), t) \delta B_R^*(\mathbf{x}_0(t - \xi), t - \xi) \rangle, \quad (2.41)$$

$$R_{LR} = \langle \delta B_L(\mathbf{x}_0(t), t) \delta B_R^*(\mathbf{x}_0(t - \xi), t - \xi) \rangle, \quad (2.42)$$

$$R_{RL} = \langle \delta B_R(\mathbf{x}_0(t), t) \delta B_L^*(\mathbf{x}_0(t - \xi), t - \xi) \rangle, \quad (2.43)$$

$$R_{LL} = \langle \delta B_L(\mathbf{x}_0(t), t) \delta B_L^*(\mathbf{x}_0(t - \xi), t - \xi) \rangle. \quad (2.44)$$

Les équations (2.41) à (2.44) sont à la base des théories du transport en turbulence magnétique. Les quantités  $R_{lm}$  sont les tenseurs de corrélation magnétique d'ordre 4, deux en temps et deux en espace. Les équations (2.41) à (2.44) sont également utilisées pour les calculs des coefficients de diffusion des lignes de champ magnétique.

En introduisant l'espace de Fourier

$$\delta B_{L,R}(\mathbf{x}_0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \delta B_{L,R}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0}, \quad (2.45)$$

les équations (2.41) à (2.44) deviennent

$$R_{lm}(\mathbf{x}_0(t), t, \mathbf{x}_0(t-\xi), t-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_0(t-\xi)]} P_{lm}, \quad (2.46)$$

avec  $l, m = \{L, R\}$  et où la propriété d'une turbulence homogène

$$\langle \delta B_l(\mathbf{k}, t) \delta B_m(\mathbf{k}', t-\xi) \rangle = P_{lm}(\mathbf{k}, t, t-\xi) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.47)$$

a été utilisée. Avec les coordonnées sphériques de l'espace de Fourier

$$\begin{aligned} k_x &= k_{\perp} \cos \Psi, \\ k_y &= k_{\perp} \sin \Psi, \\ k_z &= k_{\parallel}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

En utilisant (2.11) et (2.48), et en développant (2.46), on obtient

$$R_{lm}(\mathbf{x}_0(t), t, \mathbf{x}_0(t-\xi), t-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k P_{lm} e^{iW[\sin(\Psi-\phi_0+\Omega t) - \sin(\Psi-\phi_0+\Omega(t-\xi))] + ik_{\parallel} v_{\parallel} \xi}, \quad (2.49)$$

avec  $W = k_{\perp} \sqrt{1 - \mu^2} R_L$ . En injectant la propriété [1],

$$e^{ix \sin(\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\alpha}, \quad (2.50)$$

dans l'équation (2.49), l'équation (2.40) devient

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= \frac{\Omega^2 (1 - \mu^2)}{2B_0^2} \Re \int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \sum_{n,p=-\infty}^{\infty} J_n(W) J_p(W) \\ &\times e^{in(\Psi-\phi_0+\Omega t) - ip(\Psi-\phi_0+\Omega(t-\xi)) + iv_{\parallel} k_{\parallel} \xi} \\ &\times [P_{RR}(\mathbf{k}, t) e^{-i\Omega\xi} - P_{RL}(\mathbf{k}, t) e^{i[2\phi_0 - 2\Omega t + \Omega\xi]} \\ &- P_{LR}(\mathbf{k}, t) e^{-i[2\phi_0 - 2\Omega t + \Omega\xi]} + P_{LL}(\mathbf{k}, t) e^{i\Omega\xi}]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dans toute la suite, nous considérerons la turbulence comme statique, puisque les particules énergétiques n'ont pas le temps de voir bouger le champ, car ce sont des particules non thermiques. Cette hypothèse s'écrit

$$|k_{\parallel}v_{\parallel}| \gg \omega \text{ et } n\Omega \sim k_{\parallel}v_{\parallel} \quad (2.52)$$

Cette propriété simplifie d'avantage l'écriture, avec

$$P_{lm}(\mathbf{k}, t) = P_{lm}(\mathbf{k}), \quad (2.53)$$

et dans l'hypothèse où la gyropériode  $2\pi(\Omega^{-1})$  est petite devant le temps d'intégration, nous pouvons faire la moyenne de l'équation (2.51) sur la gyrophase  $\phi_0$  tel que

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= \frac{\Omega^2(1-\mu^2)}{2B_0^2} \Re \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k [J_{n+1}^2(W) P_{RR}(\mathbf{k}) + J_{n-1}^2(W) P_{LL}(\mathbf{k}) \\ &\quad - J_{n-1}(W) J_{n+1}(W) (P_{RL}e^{2i\Psi} + P_{LR}e^{-2i\Psi})] R_n(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec

$$R_n(\mathbf{k}) = \Re \int_0^{\infty} d\xi e^{i(v_{\parallel}k_{\parallel} + n\Omega)\xi} = \pi \delta(v_{\parallel}k_{\parallel} + n\Omega), \quad (2.55)$$

la fonction de résonance quasi-linéaire de la turbulence en régime MHD. Dans le but de décrire les coefficients de diffusion de manière analytique, plusieurs géométries du tenseur magnétique ont été considérées, la première fois par Jokipii en 1966 [46] qui a utilisé un modèle où la turbulence ne dépendait que de la coordonnée parallèle, dit modèle unidimensionnel (slab en anglais)

$$\delta\mathbf{B}^{slab}(\mathbf{x}) = \delta\mathbf{B}(z). \quad (2.56)$$

Cette description est la manière la plus simple de décrire le transport.

Une autre approche consiste à considérer la turbulence comme étant bidimensionnel [79], où

$$\delta\mathbf{B}^{2D}(\mathbf{x}) = \delta\mathbf{B}(x, y). \quad (2.57)$$

Plus compliqué, la turbulence est dite homogène, lorsque chacune des composantes de la turbulence dépend des trois coordonnées de l'espace [30]

$$\delta\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \delta\mathbf{B}(x, y, z), \quad (2.58)$$

comme c'est le cas du modèle composite [97, 89, 64], qui est une combinaison linéaire des équations (2.56) et (2.57) pour former

$$\delta\mathbf{B}^{comp}(\mathbf{x}) = a\delta\mathbf{B}^{2D}(x, y) + b\delta\mathbf{B}^{slab}(z), \quad (2.59)$$

où  $a$  et  $b$  sont des nombres sans dimension.

Un autre exemple, consiste à considérer une turbulence isotrope, où les perturbations  $\delta\mathbf{B}$  ne dépendent donc que du module  $\|\mathbf{x}\|$

$$\delta\mathbf{B}^{iso}(\mathbf{x}) = \delta\mathbf{B}(\|\mathbf{x}\|). \quad (2.60)$$

Dans cet exemple, la turbulence est statique et isotrope, et l'expression du coefficient de diffusion parallèle quasi-linéaire s'écrit [97, 100]

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= 2(1 - \mu^2) \Omega^2 \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2 \int_0^1 d\eta \int_0^\infty dk G(k) \\ &\times \sum_{-\infty}^{\infty} R_n(k, \eta) \left[ \eta^2 J_n'^2(w) + \frac{n^2}{w^2} J_n^2(w) \right], \end{aligned} \quad (2.61)$$

avec  $w = kR_G \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \eta^2}$  et  $\eta$  le cosinus de l'angle entre le champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ ,  $J_n$  les fonctions de Bessel de première espèce et leurs dérivées  $J_n'$ , et  $G(k)$  le spectre unidimensionnel, responsable de la répartition de l'énergie dans l'espace de Fourier. L'équation (2.61) sera discutée dans le cadre des théories du transport dans le milieu interstellaire.

Cependant, la théorie quasi-linéaire échoue à décrire le transport des particules chargées dans certaines configurations, notamment pour décrire le transport perpendiculaire et la diffusion parallèle dans les modèles de turbulence autres qu'unidimensionnels. Les problèmes se résument en trois points :

1. Le problème de la diffusion à  $90^\circ$  :

A  $\mu = 0$ , la théorie quasi-linéaire est incohérente, notamment à cause du coefficient de diffusion angulaire, qui est obtenu à partir de l'hypothèse où les particules suivent des trajectoires non perturbées, sans tenir compte de leur vitesse parallèle. L'équation (2.52) n'est au demeurant plus valable. Évidemment, cette hypothèse est d'autant plus fautive que le temps augmente : la particule s'éloigne de plus en plus de son orbite non perturbée. De plus, si le coefficient de diffusion angulaire est nul à  $\mu = 0$ , cela signifie que les particules dont la vitesse est orthogonale avec le champ magnétique seront piégées dans cet état. C'est ce que la communauté scientifique appelle *le problème des  $90^\circ$*  ([107, 108, 97, 100]). Les procédures de dérivation non-linéaire des coefficients de diffusion sont donc apparues, afin de lever cette difficulté [103].

2. Le problème de la diffusion perpendiculaire : la théorie quasi-linéaire ne peut pas décrire le transport perpendiculaire au champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$ . Alors que les simulations numériques [30] prévoient des comportements sub-diffusifs pour une géométrie unidimensionnelle (équation 2.56), et des comportements diffusifs pour les modèles composites (équation 2.59), la théorie quasi-linéaire échoue dans les deux cas à obtenir ces régimes temporels [88].



### 3. Le problème de la géométrie :

La théorie quasi-linéaire est incapable de prédire le transport parallèle dans le cas où la géométrie considérée n'est pas unidimensionnelle. Ce problème fut également résolu par l'introduction des théories non-linéaires du transport [88].

Les trois problèmes précédemment énumérés ont motivé le développement des théories non linéaires, qui ont commencé à apparaître dans les années 70. La section suivante dresse une liste non exhaustive des différentes théories développées depuis 1966.

## 2.3.2 Résonances sur les ondes MHD

La fonction de résonance (2.55) sélectionne les ondes du spectre qui résonnent pour une vitesse de particules donnée. La version en turbulence dynamique ajoute la pulsation de l'onde dans l'argument de la distribution de Dirac du terme de droite. Pour  $n = 0$ , dans le référentiel se déplaçant à  $v = v_{\parallel}$  par rapport au laboratoire, les ondes ont une fréquence nulle. Dans ce référentiel, une particule résonne avec ces ondes qu'elle voit.

Cet effet est connu sous le nom de miroir magnétique, ou résonance Chérenkov, et requiert des perturbations compressibles du champ magnétique. Le principe de cette résonance est basée sur la conservation de son invariant adiabatique

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = cst. \quad (2.62)$$

Cette condition est vérifiée si la perturbation magnétique possède une échelle supérieure au rayon de Larmor de la particule. Lorsque la composante parallèle de la vitesse de la particule s'annule, la force magnétique sur la particule inverse le signe de  $\mu$ , et la particule repart en sens inverse. Ce processus entraîne une diffusion dans l'espace des  $\mu$  très efficace par les ondes magnéto-soniques [54, 108]. On dit que l'interaction n'intervient que pour des  $\mu$  proches de zéro. Cette résonance porte le nom de transit time damping ou TTD.

Pour  $n \neq 0$ , une particule résonne avec les ondes qu'elle voit à sa fréquence de giration  $\Omega$  ou à un multiple : c'est la gyro-résonance.

## 2.3.3 Détermination des spectres de Goldreich-Sridhar

Le spectre de Goldreich-Sridhar tridimensionnel  $E^{3D}(k_{\perp}, k_{\parallel})$  s'écrit (cf. equation (1.37))

$$E^{3D}(k_{\perp}, k_{\parallel}) \propto k_{\perp}^{-10/3} g(k_{\parallel}/k_{\perp}^{2/3}), \quad (2.63)$$

où  $g$  est une fonction arbitraire non définie, donnant la répartition de l'énergie dans la direction de  $k_{\parallel}$  dans l'espace de Fourier. La forme de  $g$  a été déterminée à partir du fit de la fonction de structure des vitesses de deuxième ordre

$$S_{ij}^K = \langle \tilde{v}_i(\mathbf{k}) \tilde{v}_j^*(\mathbf{k}) \rangle, \quad (2.64)$$

d'une simulation MHD incompressible.

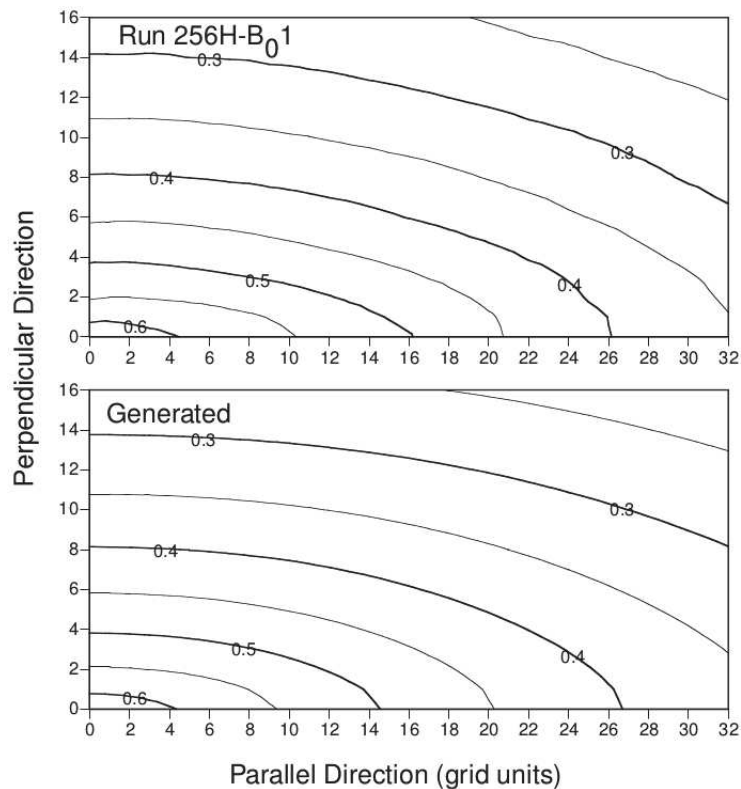


FIGURE 2.1 – Fonction de structure de deuxième ordre des vitesses. En haut, construction numérique pour une simulation incompressible  $256^3$ . En bas, fonction de structure calculée à partir du profil exponentiel donné par l'équation (2.65). Figure extraite de [18].

Le résultat dans le cas d'une turbulence trans-alfvénique où  $\delta u \sim v_A$ , illustré figure 2.1, s'écrit [18]

$$E^{3D}(k_{\perp}, k_{\parallel}) = \frac{B_0}{L^{1/3}} k_{\perp}^{-10/3} e^{(-L^{1/3} k_{\parallel} / k_{\perp}^{2/3})}. \quad (2.65)$$

Ce résultat est maintenant utilisé pour calculer le coefficient de diffusion angulaire  $D_{\mu\mu}$ , et avec lui la fréquence de diffusion  $\nu$  déterminée par

$$\nu = 2 \frac{D_{\mu\mu}}{1 - \mu^2}. \quad (2.66)$$

### 2.3.4 Résultats quasi-linéaire pour les différents modes d'onde

L'étude des interactions avec les différents modes d'onde composant la turbulence MHD est utile pour déterminer les coefficients de diffusion dans les différentes phases du milieu interstellaire. On sait que la turbulence MHD peut être décomposée sur les modes d'onde d'Alfvén et magnéto-sonores [18, 20].

Les ondes d'Alfvén ont un spectre en énergie anisotrope [32, 106] suivant une loi de Goldreich-Sridhar (équation (2.65)), l'essentiel de l'énergie est stockée dans les modes perpendiculaires  $k_{\perp}$ . Deux conséquences se dégagent de cette propriété. La première est que les interactions sont essentiellement de nature giratoire, puisque les interactions TTD nécessitent des perturbations compressibles. La seconde conséquence est que les particules satisfaisant  $k_{\parallel} r_L \sim 1$  vérifient aussi  $k_{\perp} \gg r_L^{-1}$ . Ceci implique que lors d'une giration, une particule va interagir avec plusieurs tourbillons décorrélés les uns des autres, diminuant l'efficacité de la diffusion angulaire (cf. figure 2.2) [106, 107].

Les modes magnéto-sonores rapides suivent quant à eux un spectre isotrope, suivant une loi de Kraichman [20]. C'est dans cette turbulence d'onde que l'on trouvera le concours des interactions giratoires et TTD au coefficient de diffusion angulaire.

Le coefficient de diffusion angulaire dans le cadre d'une diffusion sur les modes d'Alfvén  $D_{\mu\mu}^{G,A}$  s'écrit [106, 107]

$$D_{\mu\mu}^{G,A} = \frac{v^{2.5} \mu^{5.5}}{\omega^{1.5} L^{2.5} (1 - \mu^2)^{0.5}} \Gamma \left[ 6.5, k_d^{-2/3} k_{\parallel} L^{1/3} \right], \quad (2.67)$$

où  $\Gamma[a, z]$  est la distribution gamma incomplète,  $k_d$  est l'échelle de dissipation,  $L$  l'échelle de cohérence de la turbulence et  $v$  la vitesse des particules. L'équation (2.67) est valable pour les angles d'attaque non proches de zéro. En utilisant l'équation (2.67) pour déterminer la fréquence de diffusion exprimée par l'équation (2.66), il a été démontré [106, 107] que les résultats sont bien en dessous de ceux estimés dans le cadre d'une diffusion dans une turbulence isotrope et slab. Ce comportement est dû à la distribution gamma incomplète, qui diminue les valeurs des coefficients de diffusion.

Le coefficient de diffusion angulaire pour les modes d'onde magnéto-sonique rapide résultant de l'interaction Cherenkov, ou TTD, s'écrit [107]

$$D_{\mu\mu}^{TTD,F} = \frac{\pi (\Omega v \mu)^{0.5} (1 - \mu^2)}{14 L^{0.5}} \left( 1 - \left[ (k_{\perp}/k_{\parallel})^2 + 1 \right]^{-7/4} \right). \quad (2.68)$$

Ici, la différence avec l'équation (2.67) vient de la fonction de résonance utilisée pour le calcul du coefficient de diffusion angulaire. Contrairement à son analogue

alfvénique, la fonction de résonance est élargie même pour les  $\mu$  proches de zéro, ce qui constitue déjà une correction à la théorie quasi-linéaire [107]. L'équation (2.68) est donc valable sur l'ensemble des valeurs de  $\mu$ . La figure 2.2 compare les résultats obtenus pour le taux de diffusion défini par l'équation 2.66 pour deux phases du milieu interstellaire, le halo galactique, et le WIM. Elle illustre la dépendance de la fréquence de diffusion angulaire avec l'énergie de la particule et le cosinus de l'angle d'attaque  $\mu$  pour une énergie de particule  $E_{part} = 1 \text{ GeV}$ . Le résultat est commun pour les deux phases étudiées : la contribution du TTD dans la fréquence de diffusion est négligeable pour des particules de haute énergie et pour des  $\mu \in [0.2 : 1]$ . Pour les  $\mu \lesssim 0.2$ , la contribution du TTD au coefficient de diffusion angulaire devient supérieure, montrant que l'effet de miroir magnétique domine la diffusion.

Ces résultats seront comparés aux résultats non-linéaires développés dans la section suivante.

## 2.4 Les théories non linéaires

Les théories non linéaires du transport sont apparues avec l'échec de la théorie quasi-linéaire de décrire dans certains scénarios les transports perpendiculaires et parallèles des rayons cosmiques.

La prise en compte des non linéarités intervient à partir de l'équation (2.30) pour résoudre l'équation (2.29). Le développement fait rapidement intervenir une algèbre lourde, aussi il est admis que l'apport de la non linéarité peut être amené via la modification de la fonction de résonance (équation (2.55)) [96].

Ceci peut se comprendre par le fait que l'approximation selon laquelle la particule suit une trajectoire non perturbée n'est pas satisfaisante, puisque l'angle d'attaque de la particule varie graduellement avec le champ magnétique au travers de l'invariant adiabatique (équation (2.62)), élargissant de ce fait la fonction de distribution relative à la résonance onde-particule.

### 2.4.1 Elargissement de la fonction de résonance

Plusieurs théories ont été dérivées pour pallier aux problèmes de la théorie quasi-linéaire.

*La weakly non linear theory (WNLT)* [84]. Dans cette théorie, la fonction de résonance (2.55) est remplacée par

$$R_n(k_{\parallel}v_{\parallel} + n\Omega) = \frac{D_{\perp}k_{\perp}^2 + \nu}{(D_{\perp}k_{\perp}^2 + \nu)^2 + (k_{\parallel}v_{\parallel} + n\Omega)^2}, \quad (2.69)$$

avec  $\nu = 2D_{\mu\mu}/(1 - \mu^2)$  pour la diffusion perpendiculaire et  $\nu = 0$  pour la diffusion de l'angle d'attaque  $\mu$ . Dans cette théorie, l'élargissement de la résonance provient

de la diffusion perpendiculaire et de la diffusion dans les angles d'attaque [88].

La théorie quasi-linéaire de second ordre, à la différence de la théorie quasi-linéaire, la théorie du second ordre lève la contrainte du calcul le long de l'orbite non perturbée [85]. La fonction de résonance (2.55) devient

$$R_n^{(2)} = \int_0^\infty dt \cos [(vk_{\parallel}\mu + n\Omega) t] e^{-v^2 k_{\parallel}^2 \int_0^t d\tau [\tau^2 D_{\mu\mu}(\tau)]}, \quad (2.70)$$

en prenant l'expression du  $D_{\mu\mu}$  quasi-linéaire. Cependant, l'équation (2.70) a été créée pour une géométrie de turbulence unidirectionnelle [88]. La formulation dans le cadre d'une turbulence isotrope est [97]

$$R_n^{(2)} = \int_0^\infty dt \cos [(vk_{\parallel}\mu\eta + n\Omega) t] e^{-v^2 k_{\parallel}^2 \int_0^t d\tau [\tau^2 D_{\mu\mu}(\tau)]}, \quad (2.71)$$

où  $\eta$  est le cosinus de l'angle entre le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{B}_0$ .

La figure 2.3 représente les mesures numériques dans une turbulence homogène et isotrope avec un niveau de turbulence  $\delta B/B_0 = 0.03$ . Dans cette figure, le problème de la diffusion à  $90^\circ$  est corrigé.

Les fonctions de résonance autorisent certaines parties de l'espace des modes de Fourier à résonner avec les particules. C'est pourquoi le spectre ondulatoire, ainsi que le type d'onde contenue dans la turbulence joue un rôle prédominant dans l'efficacité de la diffusion angulaire.

## 2.4.2 Théorie non linéaire du centre guide

Pour établir un modèle théorique sur la diffusion des rayons cosmiques, il est nécessaire de définir le spectre des fluctuations. Les développements de théories non-linéaires permettent d'exprimer les coefficients de diffusion, et avec eux les libres parcours moyens.

- *La théorie non linéaire du centre guide* [64, 91] postule que le centre guide suit les lignes de champ magnétique. Elle utilise une turbulence axi-symétrique, combinée avec la formulation de Taylor-Green-Kubo (TGK), qui exprime le libre parcours moyen dans la direction  $x$  comme

$$\lambda_{xx} = \frac{3}{v} \int_0^\infty dt \langle v_x(0) v_x(t) \rangle. \quad (2.72)$$

Dans un modèle où le champ magnétique turbulent n'a pas de composante parallèle

$$\delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (2.73)$$

et où le centre guide suit les lignes de champ magnétique, l'équation du mouvement des particules dans la direction perpendiculaire s'écrit [64]

$$v_x(t) = av_z(t) \delta B_x[\mathbf{x}(t), t] / B_0, \quad (2.74)$$

où  $a$  est un paramètre, tel que si  $a = 1$ , la particule suivra exactement les lignes de champ magnétique. En injectant l'équation (2.74) dans l'équation (2.72), on fait apparaître la fonction de corrélation d'ordre 4 :

$$\lambda_{xx} = \frac{3a^2}{vB_0} \int_0^\infty dt \langle v_z(t) v(0) \delta B_x[\mathbf{x}(t), t] \delta B_x[\mathbf{x}(0), 0] \rangle. \quad (2.75)$$

A partir de l'équation (2.75), l'hypothèse de Corrsin [64, 88] est habituellement utilisée, où l'on transforme la corrélation d'ordre 4 en un produit de deux corrélations d'ordre 2

$$\lambda_{xx} = \frac{3a^2}{vB_0} \int_0^\infty dt \langle v_z(t) v(0) \rangle \langle \delta B_x[\mathbf{x}(t), t] \delta B_x[\mathbf{x}(0), 0] \rangle. \quad (2.76)$$

Sous cette condition, la théorie non linéaire du centre guide obtient des résultats en contradiction avec ceux précédemment obtenus, comme un comportement diffusif des particules dans la direction perpendiculaire, alors que la communauté trouve un comportement sub-diffusif. Une autre source de discussion est liée au paramètre  $a$  de l'équation (2.74) : si  $a = 1$ , la limite de la diffusion des lignes de champ n'est pas obtenue, ce qui est en contradiction directe avec les hypothèses de départ de cette théorie [89].

Une version améliorée de cette théorie reprend l'équation (2.75) et ne retient pas l'hypothèse de Corrsin (équation (2.76)). Cette nouvelle formulation permet de corriger les défauts précédents, et si on considère une turbulence axi-symétrique ( $\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \lambda_\perp$ ), le libre parcours moyen perpendiculaire devient [89]

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_\perp}{\lambda_\parallel} &= 2a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{s+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)} \left(\frac{\delta B_\perp}{B_0}\right)^2 \\ &\times \int_0^\infty dx_\perp \frac{x_\perp^q}{(1+x_\perp^2)^{(s+q)/2}} \frac{1}{(4\lambda_\parallel \lambda_\perp x_\perp^2) / (9L^2) + 1}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

où  $s$  est l'indice spectral de la zone inertielle,  $q$  est l'indice spectral de la zone d'injection de l'énergie [89].

- *Théorie Non linéaire pour une turbulence de Goldreich-Sridhar*

Le tenseur de diffusion perpendiculaire de Cho, Lazarian et Vishniac [18] a été postulé de façon empirique, suite à l'étude de l'anisotropie des fluctuations magnétiques dans le cadre d'une turbulence homogène de type Goldreich-Sridhar. Les auteurs ont comparé la forme des fonctions de structure avec celles générées par leur tenseur, trouvant une correspondance suffisante pour être exploitée par la suite [107, 108, 89].

Le tenseur permet de relier le libre parcours moyen parallèle et perpendiculaire par la relation

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\parallel}} &= \frac{a^2}{6} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^{2/3} \int_1^{\infty} dx_{\perp} \int_0^{\infty} dx_{\parallel} e^{-(x_{\parallel} x_{\perp}^{-2/3} (\delta b/B_0)^{-4/3})} \\ &\times \frac{2x_{\parallel}^2 + x_{\perp}^2}{x_{\parallel}^2 + x_{\perp}^2} \frac{x_{\perp}^{-7/3}}{\left( \lambda_{\parallel} x_{\parallel}^2 \right) / \left( \lambda_{\perp} x_{\perp}^2 \right) + \left( 4\lambda_{\parallel} \lambda_{\perp} x_{\perp}^2 \right) / \left( 9L^2 \right) + 1}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

La figure 2.4 représente les équations (2.77) et (2.78). Elle montre un facteur 5 entre le calcul avec le tenseur empirique et le modèle non linéaire établi pour une turbulence composite 2D/slab.

Il est également possible de mesurer les contributions respectives des modes en interaction. En utilisant la fonction de résonance non linéaire [108]

$$R_n(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega \pm n\Omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{|k_{\parallel}| v_{\perp} M_A^{1/2}} e^{-\frac{(k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)^2}{k_{\parallel}^2 v^2 (1-\mu^2) M_A}} \quad (2.79)$$

qui découle de l'hypothèse où les centres guides des particules ont une distribution gaussienne autour des lignes de champ magnétique, les contributions des résonances giratoires ( $n = 1$ ) retrouvent les résultats quasi-linéaires dans la limite où  $\mu = 1$ , contrairement à la prédiction pour la diffusion à  $\mu = 0$ , qui diffèrent de la théorie quasi-linéaire (figure 2.5, à droite). Le coefficient de diffusion associé aux interactions giratoires produites par les ondes d'Alfvén s'écrit

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu}^{G,A} &= \frac{v\sqrt{\pi}M_A^{4/3}}{3\pi Lr_L^2} (1-\mu^2) \int_1^{k_{max}L} d^3x \frac{x_{\perp}^{-10/3}}{x_{\parallel}\Delta\mu} \frac{J_1^2(w)}{w^2} \\ &\times \exp \left[ -\frac{x_{\parallel}}{x_{\perp}^{2/3}M_A^{4/3}} - \frac{[\mu - 1/(x_{\parallel}r_L)]^2}{\Delta\mu^2} \right], \end{aligned} \quad (2.80)$$

où  $w = x_{\perp}r_L\sqrt{1-\mu^2}$ .

Pour les résonances TTD à  $n = 0$ , l'équation (2.79) étend l'intervalle des  $\mu$  dans laquelle la diffusion est efficace. Le coefficient s'écrit

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu}^T &= \frac{v\sqrt{\pi}M_A^{4/3}}{6\pi Lr_L^2} (1-\mu^2) \int_1^{k_{max}L} d^3x \frac{x_{\parallel}x_{\perp}^{-10/3}}{(x_{\perp}^2 + x_{\parallel}^2)\Delta\mu} J_1^2(w) \\ &\times \exp \left[ -\frac{x_{\parallel}}{x_{\perp}^{2/3}M_A^{4/3}} - \frac{(\mu - v_A/v)^2}{\Delta\mu^2} \right], \end{aligned} \quad (2.81)$$

Les équations (2.81) et (2.80) sont valables pour des régimes de turbulence trans-alfvénique, où  $M_A \sim 1$ , et sont à comparer aux équations (2.67) et (2.68) respectivement. La figure 2.5 à gauche montre les contributions issues des deux équations précédentes, et à droite, compare les résultats issus de la théorie quasi-linéaire avec ceux issus de la fonction de résonance (2.79).

De toute évidence, établir une théorie non-linéaire est une chose assez délicate, mais nécessaire compte tenu de l'échec de la théorie quasi-linéaire à prédire les résultats sur les grandeurs caractéristiques du transport. C'est dans ce contexte que se situe notre présente étude, et nous détaillerons quelle a été notre démarche pour enquêter sur ce problème.



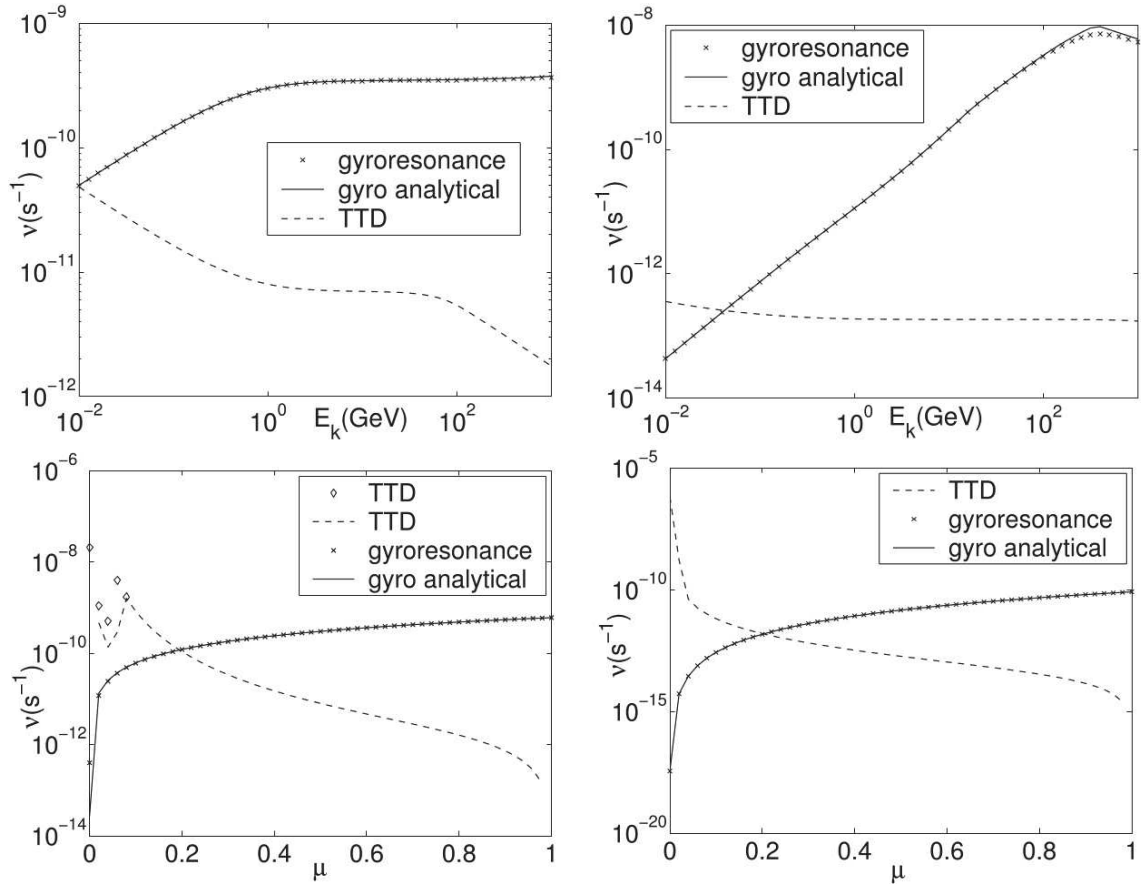


FIGURE 2.2 – Taux de diffusion angulaire pour les interactions de gyro-résonance (trait plein) et TTD (ligne discontinue). A gauche, tracé pour le Halo galactique avec  $B_0 = 5\mu G$  et la longueur de cohérence de la turbulence  $L = 100$  pc ; à droite, pour le WIM ( $B_0 = 5\mu G$  et  $L = 50$  pc), soit des rayons de Larmor normalisés dans l'intervalle  $r_L/L \sim 2 - 4 \cdot 10^{-9}$ . En haut, dépendance avec l'énergie des particules ; en bas, dépendance de l'angle d'attaque  $\mu$  pour une énergie  $E_{part} = 1$  GeV. Les traits pleins correspondent à des calculs analytiques, alors que les points sont des calculs numériques. Figures tirées de [107].

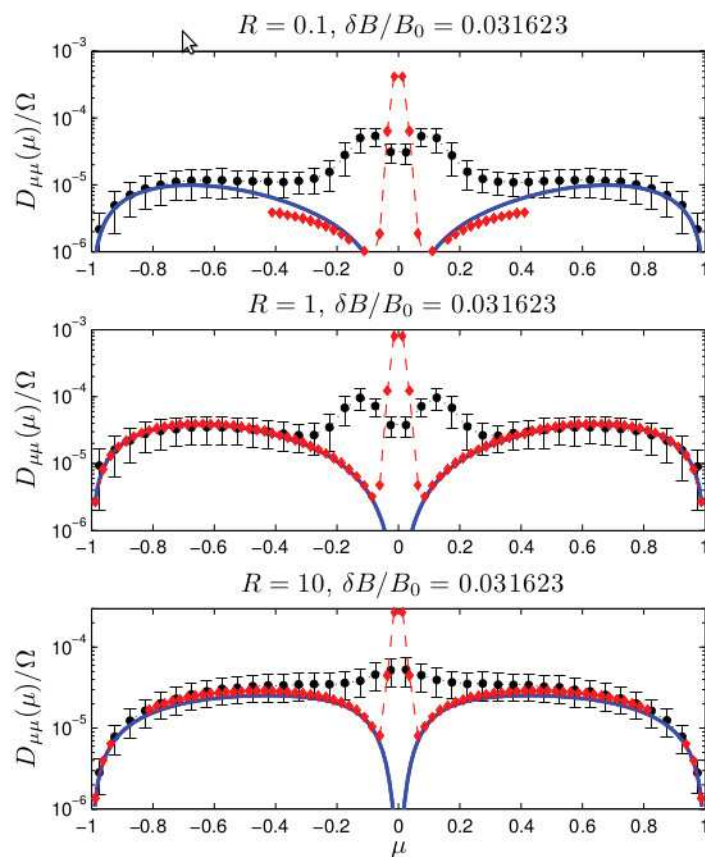


FIGURE 2.3 – Coefficient de diffusion angulaire  $D_{\mu\mu}$  déterminé numériquement, en fonction du cosinus de l'angle d'attaque  $\mu$ . Les points noirs correspondent à des expériences Monte Carlo (cf. chapitre 6), la courbe bleue est la prédiction quasi-linéaire, et la courbe rouge la prédiction quasi-linéaire du second ordre. Cette dernière vise à reproduire les résultats de l'expérience numérique en points noirs. Figure extraite de [97].

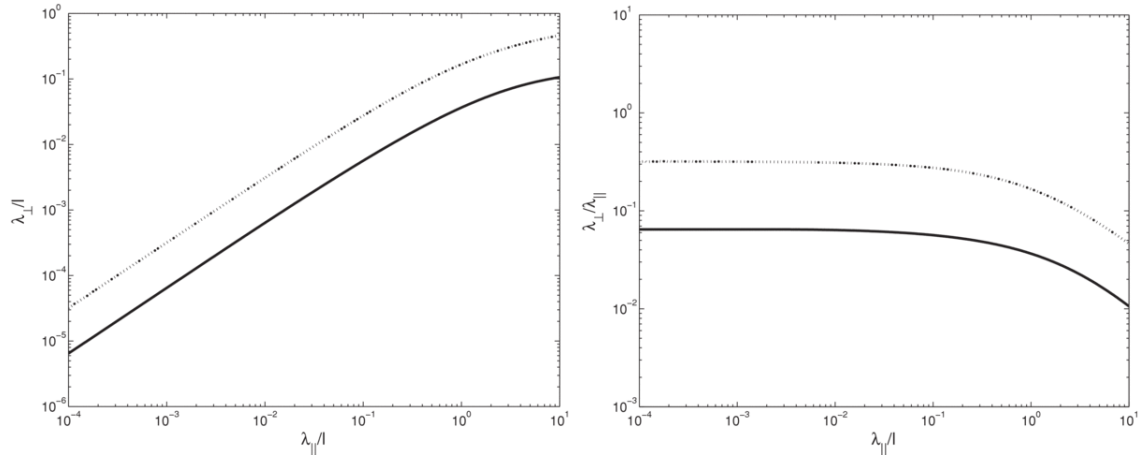


FIGURE 2.4 – À gauche : libre parcours moyen perpendiculaire en fonction du libre parcours moyen parallèle, rapporté à la taille du domaine de calcul  $l$  ; à droite : rapport du libre parcours moyen perpendiculaire par le libre parcours moyen parallèle. Dans chacun des cas, en trait plein correspond le calcul avec le tenseur expérimental de Cho, Lazarian et Vishniac [18], et en pointillé la théorie non linéaire du centre guide [64, 91]. Figure extraite de [89].

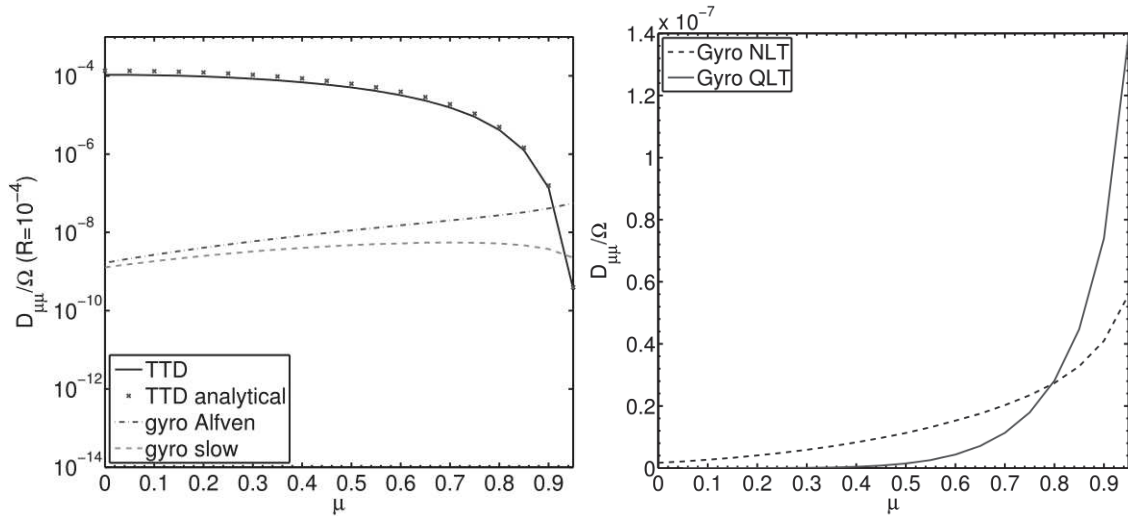


FIGURE 2.5 – Coefficient de diffusion angulaire  $D_{\mu\mu}$  normalisé à la pulsation synchrotron  $\Omega$  en fonction du cosinus de l'angle d'attaque  $\mu$ , le tout pour des particules se propageant dans un milieu trans-alfvéenique, avec un rayon de Larmor  $r_L/L = 10^{-4}$ . À gauche, comparaison des différentes interactions de résonance. L'interaction Cherenkov est bien plus efficace, sauf à  $\mu \sim 1$ , où la gyro-résonance devient prépondérante. À droite, comparaison entre la théorie quasi-linéaire et la théorie non-linéaire montrant qu'à  $\mu = 0$  le coefficient de diffusion n'est plus nul, contrairement à la prédiction quasi-linéaire. Figure extraite de [108].

## Deuxième partie

# Modélisation numérique de la turbulence MHD



# Chapitre 3

## Turbulence MHD

### 3.1 Introduction

Il existe de nombreuses techniques numériques pour développer une turbulence MHD, en vue d'y faire propager des particules, qu'on verra dans la section 3.3, après avoir fait l'inventaire des différents codes MHD section 3.2.

Les premières simulations de turbulence MHD sont rapidement apparues suite à la théorie de Goldreich-Shridar [32]. Elles étaient naturellement de nature incompressible. Malgré cela, on trouve des divergences, notamment concernant le spectre en énergie cinétique, la valeur de l'exposant relatif à la zone inertielle y est débattue [63, 7].

La nécessité de se rapprocher des fluides physiques, tel que le milieu interstellaire, a joué en faveur de l'apparition des simulations MHD compressibles. La compressibilité introduit un nouveau groupe de perturbations lié à la présence d'ondes compressibles, comme les ondes magnéto-soniques rapides [20, 108].

Il existe également des techniques de prescription de turbulence, en imposant notamment la forme du spectre de turbulence directement dans l'espace de Fourier [13, 30, 98]. Ces techniques présentent certains avantages, mais aussi quelques inconvénients qui seront discutés dans la section 3.3.4, avant d'aborder succinctement les différentes techniques numériques pour résoudre les équations de la MHD section 3.4.

Je terminerai ce chapitre (section 3.5) par une présentation du code MHD utilisé dans cette thèse : le code RAMSES.

## 3.2 Les différents types de codes MHD

Parmi les codes MHD, plusieurs approches sont possibles. J'aborderai ici les différentes déclinaisons des codes MHD, et je tenterai de dresser la liste des avantages et inconvénients respectifs. Une introduction des schémas numériques existants pour traiter la MHD proprement dite sera abordée dans la section 3.4.

### 3.2.1 Les codes incompressibles

La propriété d'incompressibilité se traduit par un champ de densité constant dans l'espace et le temps, c'est-à-dire l'annulation du gradient de densité

$$\nabla(\rho) = 0, \quad (3.1)$$

et l'annulation de la dérivée temporelle

$$\partial_t \rho = 0, \quad (3.2)$$

réduisant l'équation (1.8) à

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.3)$$

L'équation d'Euler (1.9) se réduit alors à

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}) - \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla(\mathbf{B})}{4\pi\rho} + \nabla \frac{P_{tot}}{\rho} = 0, \quad (3.4)$$

Si on combine l'équation précédente à l'équation d'induction (1.11)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0, \quad (3.5)$$

nous obtenons les équations de la MHD incompressible exprimées avec les variables d'Elsässer  $\mathbf{w}^\pm$

$$\frac{\partial \mathbf{w}^\pm}{\partial t} + (\mathbf{w}^\mp \cdot \nabla)\mathbf{w}^\pm + \nabla \frac{P_{tot}}{\rho} = 0, \quad (3.6)$$

où les  $\mathbf{w}^\pm$  sont les variables d'Elsässer, définies comme

$$\mathbf{w}^\pm = \mathbf{u} \pm \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}. \quad (3.7)$$

Elles satisfont par construction à la relation d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\pm = 0. \quad (3.8)$$

L'équation (3.6) décrit la propagation des ondes d'Alfvén responsables du cisaillement de la ligne de champ. Si les variables d'Elsässer  $w^\pm$  décrivent la fluctuation des ondes d'Alfvén, le signe décrit la polarisation de ces ondes.

Cette description numérique de la MHD fut grandement sollicitée suite à la publication de la théorie de Goldreich-Sridhar [62, 17, 18, 10, 6, 7], mais rapidement remplacée par la version compressible.

### 3.2.2 Les codes compressibles

L'introduction de la propriété de compressibilité a permis de généraliser le problème de la turbulence MHD, et de décrire plus fidèlement les milieux réels que constitue par exemple le milieu interstellaire. Outre le fait que la version compressible de la MHD ait plus de degrés de liberté, les propriétés de la turbulence changent, par rapport aux résultats incompressibles, pour des nombres de Mach  $M_s$  égaux ou supérieurs à l'unité [18, 20]. Quelques résultats des études sur la turbulence compressible seront présentés dans la section 3.6.

## 3.3 Génération de la turbulence

### 3.3.1 Turbulence induite par instabilités

Ce type d'étude pourrait être qualifié de physique, au sens propre du terme : il s'agit en fait de méthodes où certaines conditions sont réunies pour pouvoir générer de la turbulence MHD. Par exemple, si les conditions initiales d'une simulation consistent en deux fluides se propageant à des vitesses opposées, l'interface entre les deux fluides va faire l'objet d'instabilités de Rayleigh-Taylor qui conduiront à l'apparition de sous-structures, puis à la turbulence [35].

Si le code résout la MHD gravitationnelle, on peut également créer une simulation d'un corps accréant de la matière, et étudier la turbulence MHD créée dans le disque d'accrétion.

Nous pouvons également citer la méthode d'injection d'énergie aléatoire dans le temps et dans l'espace, comme l'apparition à des coordonnées spatio-temporelles de vestige de supernova, interagissant entre eux dans un fluide initialement au repos [2].

### 3.3.2 Turbulence en déclin

Certaines méthodes consistent à générer un champ de vitesse initial ayant les propriétés souhaitées, avec les paramètres de norme, direction et sens qui suivent une distribution aléatoire.

En se basant sur un milieu de densité, pression et champ magnétique constants, le champ de vitesse est alors imposé, en générant, par exemple [38], une turbulence isotrope en  $k^{-5/3}$ .

Dans ce type d'approche, aucun forçage n'est utilisé, ce qui consiste à faire relaxer le champ initial. On appelle cela le déclin. Une fraction de l'énergie cinétique initiale est transmise dans les autres composantes de l'énergie totale. C'est la raison pour laquelle obtenir un spectre stationnaire n'est pas possible dans ce genre d'approche.



### 3.3.3 Turbulence forcée

La méthode utilisée dans cette étude est celle faisant intervenir un terme de forçage  $\mathbf{f}$  dans l'équation d'Euler (1.9), homogène à une accélération volumique

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{4\pi} \right) + \nabla P_{tot} = \rho \mathbf{f} \quad (3.9)$$

Il existe plusieurs types de forçage. Celui utilisé dans cette thèse est stochastique en temps et en espace selon le processus de Ornstein-Uhlenbeck. Il fera l'objet d'une description détaillée dans la section 4.2.

Plusieurs types de code sont à même de travailler avec de la turbulence forcée, la plupart sont conçus pour fonctionner sur des centres de calcul nationaux, tels que le CINES, CEA ou le GENCI [50, 102, 52, 34], pour ne citer que les calculateurs français.

### 3.3.4 Turbulence prescrite

Cette méthode consiste à générer de façon artificielle le champ magnétique turbulent, qui sera par la suite utilisé pour les expériences de propagation de particules. L'idée consiste à superposer un ensemble de modes d'onde avec des directions de propagation et des polarisations totalement aléatoires [30]. Le champ magnétique est la somme d'une composante homogène et d'une composante aléatoire

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta B \hat{\mathbf{e}}, \quad (3.10)$$

où la somme des modes d'onde est effectuée sur la partie fluctuante du champ.

De manière générale, si le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_n$  s'écrit

$$\mathbf{k}_n = k_n \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \eta_n^2} \cos \phi_n \\ \sqrt{1 - \eta_n^2} \sin \phi_n \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

où  $\eta_n$  et  $\phi_n$  sont des nombres aléatoires associés au mode  $n$ , le calcul de la composante  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) du champ magnétique turbulent s'écrit

$$\hat{e}_i = \epsilon \sum_{n=1}^{N_m} \xi_{i,n} A(k_n) \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n + \zeta_n), \quad (3.12)$$

avec  $\xi_n$  le vecteur de polarisation

$$\xi_n = \begin{pmatrix} \sin \phi_n \sin \alpha_n + \eta_n \cos \phi_n \cos \alpha_n \\ -\cos \phi_n \sin \alpha_n + \eta_n \sin \phi_n \cos \alpha_n \\ -\sqrt{1 - \eta_n^2} \cos \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

où  $\alpha_n$  est un nombre aléatoire définissant la polarisation du mode  $n$ . L'équation (3.12) fait également intervenir l'amplitude  $A(k_n)$  qui est telle que

$$A^2(k_n) = G(\mathbf{k}_n) \Delta k_n \left( \sum_{\nu=1}^{N_m} G(k_\nu) \Delta k_\nu \right)^{-1}, \quad (3.14)$$

où  $G(k)$  est le spectre de la turbulence, et  $\Delta k_n = k_{n+1} - k_n$  est l'écart entre le mode  $n$  et  $n+1$ .

Le rapport entre le champ magnétique turbulent et le spectre vient de la relation (2.47),

$$\langle \delta B^2 \rangle = \int d^3k \text{Tr} P_{lj}(\mathbf{k}). \quad (3.15)$$

Le tenseur de corrélation magnétique (2.47) peut se réécrire comme le produit de deux fonctions, l'une relative à la géométrie intrinsèque de la turbulence, l'autre étant  $G(\mathbf{k}_n)$ , exprimant la répartition de l'énergie magnétique dans l'espace de Fourier. Par exemple, la forme isotrope de  $P_{lj}$  [93]

$$P_{lj}(\mathbf{k}) = \frac{G(\mathbf{k})}{8\pi k^2} \left( \delta_{lj} - \frac{k_l k_j}{k^2} + i\sigma(\mathbf{k}) \epsilon_{ljo} \frac{k_o}{k} \right), \quad (3.16)$$

où  $\sigma$  représente l'hélicité magnétique. La forme axisymétrique du tenseur est

$$P_{lj}(\mathbf{k}) = \frac{G(\mathbf{k})}{8\pi k^2} \left( \delta_{lj} - \frac{k_l k_j}{k^2} \right). \quad (3.17)$$

### 3.3.5 Avantages et inconvénients des méthodes de génération

*Dans le cas de la turbulence induite*, quel que soit le système physique à l'origine de la turbulence, ces simulations font intervenir des conditions initiales qui génèrent la turbulence dans des régions confinées du cube de simulation. C'est le cas pour deux fluides en collision, où la turbulence se développe à l'interface entre les fluides, laissant le reste du cube de simulation.

Cette turbulence n'est pas homogène, et ceci impacte directement le spectre de Fourier en énergie, en plus de rendre locale la zone d'intérêt pour la propagation de particules chargées.

Cette limitation nous amène à considérer des méthodes permettant d'obtenir une zone inertielle sur un intervalle de mode relativement large.

*Dans le cas de la turbulence dite en déclin*, l'avantage est que l'utilisateur peut imposer les conditions de périodicité aux bords.

Le problème vient lorsque l'on cherche à injecter les particules. En effet, l'énergie totale dans la boîte de calcul diminue, lié à la "viscosité numérique". Ceci a pour conséquence que le spectre en énergie ne peut pas devenir stationnaire.

La forme de la densité de probabilité à l'origine du champ initial a un effet sur le spectre en énergie, ce qui devient problématique lorsqu'on cherche à obtenir de la statistique sur les grandeurs moyennes du transport.

*Dans le cas de la turbulence forcée*, le principal avantage est la reproductibilité des résultats d'une simulation MHD à l'autre. Outre le fait qu'une telle méthode s'accommode parfaitement de conditions périodiques, le spectre en énergie devient stationnaire par différents processus qui seront détaillés section 4.3. Le désavantage de ces méthodes est l'absence de zones inertielles pour les simulations de basse résolution. Une simulation  $1024^3$ , dont la zone inertielle s'étend sur trois décades, utilise plus de 100000 heures de calcul.

*Dans le cas de la turbulence prescrite*, le premier avantage à construire la turbulence magnétique par une superposition de mode d'onde est que l'on peut définir soi-même les ingrédients présents dans le spectre.

De plus, cette méthode permet également de formuler des hypothèses sur la géométrie du champ  $\delta\mathbf{B}$ . Pour définir des géométries unidirectionnelles, 2D ou isotropes, il suffit de modifier le vecteur polarisation défini par l'équation (3.13).

Le nombre de mode  $N_m$  est important puisque, rappelons-le, ces simulations ont pour but la propagation de particules test [13, 101]. C'est d'ailleurs un des points faibles de cette méthode, puisque le principe est de calculer une superposition de mode entre chaque pas de temps, ce qui, avec de grands  $N_m$ , devient vite coûteux en temps de calcul. Un autre désavantage est la discontinuité du spectre, puisque l'espace des modes d'onde est lui aussi discrétisé. Ceci peut avoir une grande incidence sur les particules test, notamment sur l'accélération relative aux champs électriques [96, 65].

## 3.4 Techniques de résolution des équations de la MHD

### 3.4.1 Les codes pseudo-spectraux

Ces codes résolvent les équations de la MHD dans l'espace des modes de Fourier. Ils sont souvent écrits tels que, pour les équations incompressibles [16, 62, 52],

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{u}_j &= -ik_l \left( \delta_{jm} - \frac{k_j k_m}{k^2} \right) \left( \widetilde{u_m u_l} - \widetilde{b_m b_l} \right), \\ \partial_t \tilde{b}_j &= -ik_l \left( \widetilde{u_l b_j} - \widetilde{b_l u_j} \right), \\ k_m \tilde{b}_m &= 0, \\ k_m \tilde{u}_m &= 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

où les quantités tildées sont les composantes de l'espace de Fourier. Le terme  $k_j k_m / k^2$  provient du terme de pression de l'équation d'Euler. La résolution des équations dans l'espace de Fourier permet de traiter le problème sous forme algébrique. Cependant, les produits  $\widetilde{u_m u_l} - \widetilde{b_m b_l}$  et  $\widetilde{u_l b_j}$  doivent être calculés dans l'espace réel, et ramenés dans l'espace de Fourier pour le traitement algébrique.

Ce va-et-vient entre les espaces duals entraîne l'apparition d'une erreur sur les grands  $k$ , liée à la reconstitution du spectre. En effet, les fréquences inférieures à la demi fréquence d'échantillonnage, ou fréquence de Nyquist, sont ajoutées aux fréquences immédiatement inférieures à la fréquence de Nyquist : c'est le repliement spectral, ou aliasing en anglais.

Pour déjouer ce problème, la méthode appelée anti-aliasing prévoit de tronquer le spectre de Fourier à  $2/3$  des fréquences en dessous de la fréquence de Nyquist, réduisant le spectre de Fourier à un tiers de son intervalle initial [52].

### 3.4.2 Éléments finis

Cette technique, basée sur les éléments finis, construit une grille que nous appelons espace, domaine de calcul ou tout simplement cube. Ce dernier, représente l'espace réel, et est discrétisé en cellule, définissant la géométrie de l'espace utilisé. La taille d'une cellule,  $\Delta x$ , varie avec la résolution, que nous noterons  $r$ . Les équations sont généralement traitées par les méthodes de Godunov, menant des opérations sur les cellules afin de déterminer la solution spatio-temporelle du fluide.

C'est dans cette famille de codes que s'inscrit RAMSES [102, 34], le code MHD à maille adaptative qui m'a été fourni au début de ma thèse. Ce code résout les équations de la MHD idéale écrites sous forme conservative (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) avec une relation de fermeture de type gaz parfait (1.15). Nous présentons de façon succincte le code dans la section suivante.

## 3.5 Le code RAMSES

### 3.5.1 Intégration des équations de la MHD

Le schéma numérique utilisé pour résoudre les équations (1.8) à (1.11) est le schéma MUSCL-Hancock, pour *Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Law*, qui est précis au deuxième ordre à la fois en espace et en temps [55].

Soit une équation aux dérivées partielles unidirectionnelles portant sur le vecteur  $U$  tel que

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (3.19)$$

où  $F(U)$  est une fonction des quantités  $U$ , appelée également fonction flux. La forme semi-discrète de l'équation précédente prend la forme

$$\partial_t U_i + \frac{1}{\Delta x} [F(U_{i+1}) - F(U_i)] = 0, \quad (3.20)$$

dans le cas d'un schéma de Godunov classique, avec  $\Delta x$  la taille d'une cellule. Cela consiste donc à faire la moyenne des fonctions flux entre les cellules  $i$  et  $i + 1$ .

Le schéma MUSCL-Hancock à la différence du schéma de Godunov classique, extrapole la valeur de la variable  $U$  dans toute la cellule par une fonction continue que l'on prendra comme linéaire pour l'exemple.  $U$  s'écrit alors

$$U(x) = U_i + \frac{x - x_i}{\Delta x} \delta U_i, \quad (3.21)$$

où  $\delta U_i$  est la pente moyenne calculée à partir des cellules adjacentes  $i - 1$  et  $i + 1$  comme

$$\delta U_i = \frac{1}{2} \sum_{j=i}^{i+1} [U_j - U_{j-1}]. \quad (3.22)$$

L'équation (3.21) n'est valable que dans le domaine couvert par la cellule  $i$ , soit  $x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$ .

RAMSES utilise alors la valeur de la variable  $U$  sur les faces de la cellule, c'est-à-dire  $U_{i\pm 1/2}$ , pour calculer la valeur, temporaire, de  $U_i$  au pas de temps  $t^{n+1/2} \equiv t^n + \Delta t^n/2$ , notée  $U_i^{n+1/2}$ . Cette quantité est utilisée pour calculer les valeurs prédites sur les faces de la cellule

$$\begin{aligned} U_{i-1/2}^+ &= U_i^{n+1/2} - \delta U_i, \\ U_{i-1/2}^- &= U_i^{n+1/2} + \delta U_i, \end{aligned} \quad (3.23)$$

au temps  $t^{n+1/2}$ . La solution à  $t^n$  est alors déterminée comme

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left( F(U_{i-1/2}^+) - F(U_{i+1/2}^-) \right). \quad (3.24)$$

Le schéma de Muscl-Hancock implémenté dans RAMSES prévoit un autre calcul des pentes (équation (3.21)). Si  $\alpha = U_i - U_{i-1}$  et  $\beta = U_{i+1} - U_i$ , le calcul est donné par

$$\delta U_i = \begin{cases} \min((\alpha + \beta)/2, 2\alpha, 2\beta) & \forall \{\alpha, \beta\} \mid \alpha\beta > 0 \\ 0 & \forall \{\alpha, \beta\} \mid \alpha\beta \leq 0 \end{cases}, \quad (3.25)$$

ce qui permet d'éviter d'éventuelles fluctuations de la solution au voisinage d'un fort gradient, comme c'est le cas dans les environnements de choc.

Avant de poursuivre le prochain chapitre, nous devons préciser le système d'unités qui est source de confusion lors de l'exploitation des résultats.

### 3.5.2 Conditions initiales et unités

RAMSES est écrit en unité CGS, avec toutefois le champ magnétique en unité de  $\sqrt{4\pi}$ . Comme pour tout code numérique, il est préférable d'exprimer les variables dynamiques de façon normalisées, ou adimensionnelles. Si  $\bar{X}$  est la variable dynamique adimensionnée, utilisée par RAMSES, alors  $X_\varphi$ , la valeur de cette variable en unité CGS, est telle que

$$X_\varphi \equiv \bar{X} \cdot X_{scale}. \quad (3.26)$$

où la variable  $X_{scale}$  est appelée *rapport de normalisation*, et correspond au rapport de conversion entre le système physique et le système de RAMSES. Les rapports de normalisation sont appelés par les utilisateurs de RAMSES *les unités de l'utilisateur*, car leurs valeurs peuvent être choisies librement, en fonction du problème traité par la simulation.

Par exemple, pour une simulation de turbulence donnée, on définira toujours les variables de densité et de longueur comme sur le principe de l'équation (3.26). Ainsi, si j'impose au code que toutes les longueurs soient normalisées à un parsec, les champs magnétiques à  $5 \mu\text{Gauss}$  et les densités à un proton par centimètre cube, je définis alors

$$\begin{aligned} L_{scale} &= 3.08 \cdot 10^{18} \text{ cm}, \\ B_{scale} &= 5 \cdot 10^{-6} \text{ G}, \\ \rho_{scale} &= 1.6 \cdot 10^{-24} \text{ g.cm}^{-3}. \end{aligned}$$

Ces trois quantités me permettent de définir les rapports de normalisation pour la pression,  $P_{scale}$ , la vitesse,  $U_{scale}$ , et le temps,  $T_{scale}$ , par les relations

$$\begin{aligned} P_{scale} &= 2B_{scale}^2, \\ U_{scale} &= \sqrt{2P_{scale}/\rho_{scale}}, \\ T_{scale} &= L_{scale}/U_{scale}. \end{aligned}$$

Lors du traitement des données, l'utilisateur pourra donc exprimer les valeurs obtenues en utilisant la relation (3.26).

### 3.6 Les autres codes MHD

Il existe de nombreuses déclinaisons de codes MHD, dont une liste non-exhaustive, et contenant RAMSES, est testée dans [50]. L'étude compare la réponse de différents codes MHD lors du déclin d'un champ MHD turbulent, et tente de quantifier l'effet de la dissipation numérique sur la turbulence.

Cette étude montre une dépendance non négligeable du spectre en énergie avec les schémas numériques. La figure 3.1 illustre les résultats obtenus par les différents codes de calcul MHD.

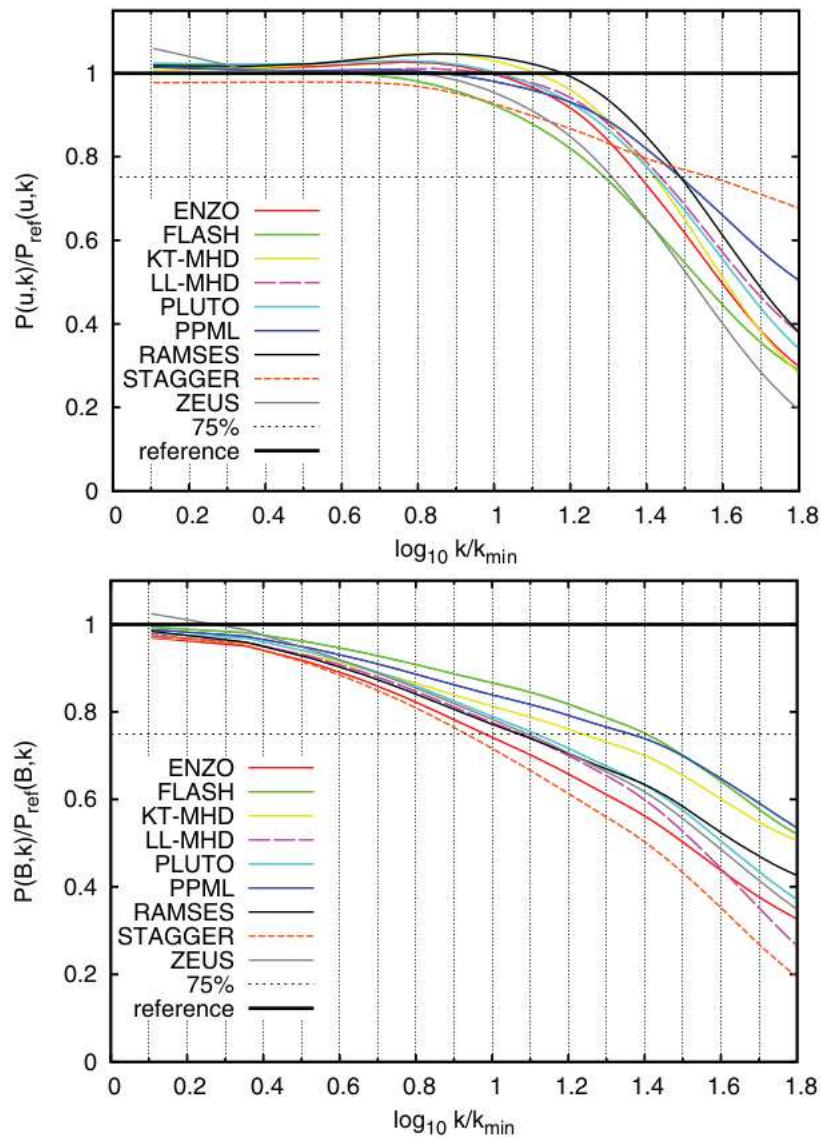


FIGURE 3.1 – Rapport des spectres cinétiques et magnétiques par rapport au spectre turbulent initial  $P_{ref}$ , pour une simulation  $256^3$ .

Il est intéressant de comparer la courbe pour RAMSES et la courbe pour le code LL-MHD (courbe discontinue rose), puisque ces deux codes ne diffèrent que par la façon de contraindre le transport des variables dynamiques. La figure 3.2 compare les spectres obtenus à partir d'une simulation  $512^3$ . De manière générale, ces codes sont cohérents les uns avec les autres, en tout cas dans la zone inertielle du spectre. Par contre, les différentes solutions divergent les unes des autres à partir de la fréquence de dissipation, c'est à dire  $\log(k/k_{min}) = 0.8$  pour les simulations  $256^3$  (figure 3.1), et  $\log(k/k_{min}) = 1.5$  pour les simulations  $512^3$  (figure 3.2).

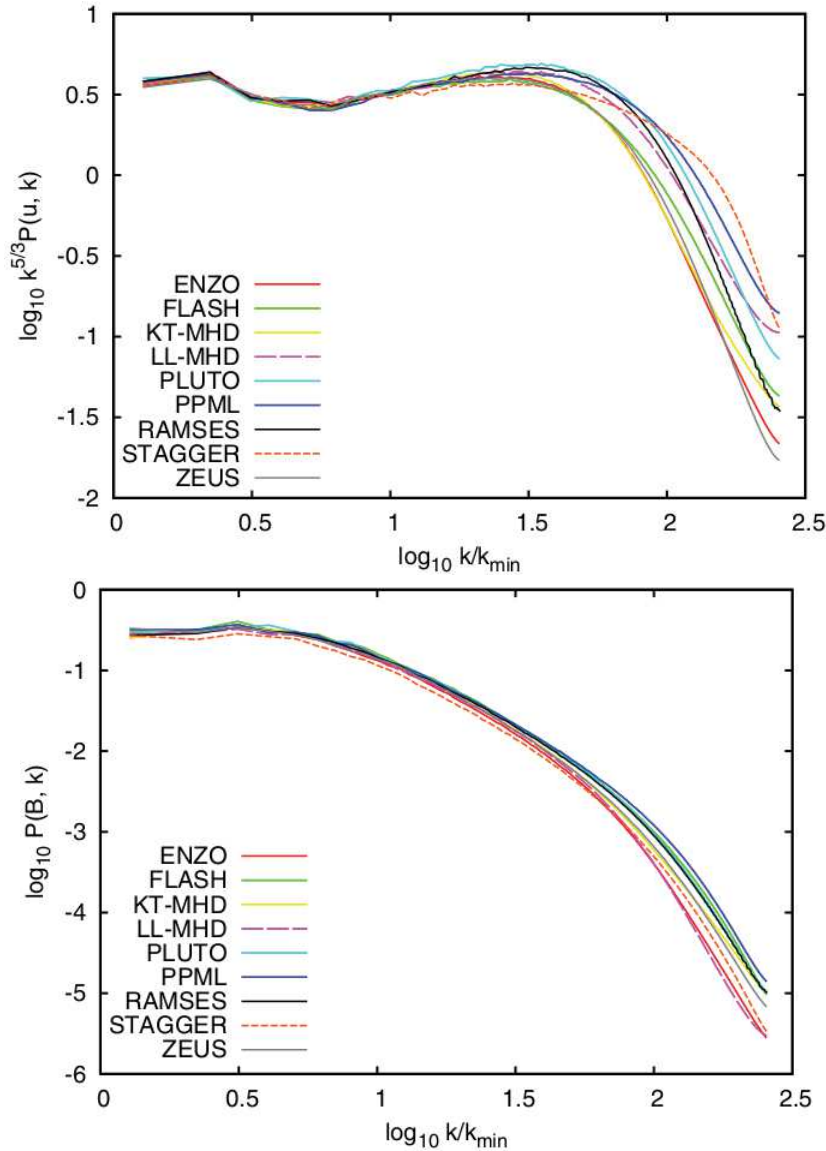


FIGURE 3.2 – Spectre de puissance du champ de vitesse (à gauche) et du champ magnétique (à droite) en fonction du logarithme du rapport entre le mode de Fourier et le mode d'injection  $k/k_{min}$ .





# Chapitre 4

## Simulation directe de la turbulence

### 4.1 Introduction

Au cours de ce chapitre, nous aborderons les aspects techniques de l'implémentation du forçage que j'ai implémenté pour le code RAMSES dans la section 4.2, avant de discuter la stationnarité du spectre dans la section 4.3. Ensuite, nous aborderons dans la section 4.4 les différents paramètres du forçage, ainsi que les conditions initiales avec lesquelles nous devons jouer pour générer différents types de turbulence.

### 4.2 Module de Forçage

L'avantage de forcer l'équation d'Euler (3.9) est que la turbulence est présente sur l'ensemble du domaine de calcul, et la turbulence est dite homogène. La composante  $f_i$  se calcule comme

$$f_i = \sum_{m=1}^{N_m} \hat{f}_{i,m} \cos(2\pi k_{j,m} x_j), \quad (4.1)$$

où les  $\hat{f}_{i,m}$  sont les amplitudes de Fourier relatives au mode  $m$ , elles obéissent à l'équation différentielle stochastique

$$d\hat{f}_{i,m} = g_\chi \left[ -\alpha \hat{f}_{i,m} \frac{dt}{T} + \beta \frac{c_s}{T} \sqrt{\frac{2w^2}{T}} P_{ij,m}^\chi d\xi_j \right], \quad (4.2)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes sans dimension,  $c_s$  la vitesse du son initiale donnée par l'équation (1.19),  $T$  le temps dynamique de la turbulence,  $w \equiv w(k)$  le spectre du forçage, pris comme une constante dans l'espace des  $k$ ,  $P_{ij,m}^\chi$  le tenseur de projection, responsable de la géométrie, et  $d\xi_j = \xi_j \sqrt{dt}$  avec  $\xi_j$  un nombre aléatoire de densité de probabilité suivant une loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de probabilité gaussienne et de variance 1 centrée sur 0.

Dans l'équation (4.2), les  $\hat{f}_{i,m}$  sont initialisés à zéro au début de la simulation, et

ne croissent qu'au travers le terme aléatoire  $d\xi_j$ . Si  $\alpha$  est non nul, toutes variations antérieures des  $\hat{f}_{i,m}$  sont effacées par la décroissance exponentielle.

L'équation différentielle stochastique (4.2) est un processus de Ornstein-Uhlenbeck, utilisé dans de nombreuses études sur la turbulence forcée [25, 92, 26].

Le tenseur de projection s'écrit

$$P_{ij,m}^\chi = \chi\delta_{ij} + (1 - 2\chi) \frac{k_{i,m}k_{j,m}}{k_m^2}, \quad (4.3)$$

avec  $\delta_{i,j}$  le symbole de Kronecker. Le paramètre  $\chi$  définit la géométrie de la turbulence : pour  $\chi = 0$ , le tenseur de projection (4.3) construit des amplitudes de Fourier telles que  $\nabla \times \hat{\mathbf{f}} = 0$ , soit un forçage compressible. A l'inverse, pour  $\chi = 1$ , le tenseur de projection (4.3) construit des amplitudes de Fourier telles que  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{f}} = 0$ , soit un forçage purement solénoïdale (incompressible).

Le coefficient  $g_\chi$  de l'équation (4.2) est un terme de normalisation

$$g_\chi = \frac{3}{\sqrt{1 - 2\chi + 3\chi^2}}. \quad (4.4)$$

Le second terme du membre de droite de l'équation (4.2) est le terme responsable de la diffusion spatio-temporelle stochastique. Le tenseur de projection  $P_{ij}$  contraint le champ de force résultant à être statistiquement isotrope dans l'espace réel.

Le premier terme du membre de droite de l'équation (4.2) assure quant à lui la perte de mémoire du forçage, atténuant les amplitudes de Fourier précédentes.

Nous avons choisi, dans toutes nos simulations, de faire l'égalité entre le temps dynamique de la turbulence à la plus grande échelle et le temps d'auto-corrélation du forçage, avec

$$T \equiv \frac{L}{c_s}, \quad (4.5)$$

où  $L$  est la taille du domaine de calcul,  $c_s$  la vitesse du son (1.19). L'équation (4.5) correspond au temps que met une perturbation pour traverser le cube de simulation. Si nous posons  $\alpha = \beta$  dans l'équation (4.2), nous pouvons faire varier  $\alpha$  pour faire varier le niveau de turbulence. Une autre manière de le faire serait de modifier les conditions initiales pour un  $\alpha$  donné. Une étude complète sur les conditions initiales sera menée dans la prochaine section.

### 4.2.1 Conditions initiales

Pour débiter une simulation, nous devons préciser les conditions initiales qui définiront le milieu : densité  $\rho_0$ , pression  $P_0$ , champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$ , champ

de vitesse  $\mathbf{v}_0$  et l'indice adiabatique  $\gamma_g$ .

De manière générale, nous partirons d'un fluide initialement au repos ( $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ ). La suite revient à définir la vitesse d'Alfvén (1.18) et la vitesse du son (1.19) au travers des autres grandeurs.

Ainsi, pour une simulation où  $\rho_{\varphi,0} = 1 \text{ m}_p/\text{cm}^3$ ,  $P_{\varphi,0} = 10^{-14} \text{ bar}$ ,  $\gamma_g = 1.01$  et  $B_{\varphi,0} = 5 \mu\text{G}$ , on a, en unité de code (cf. section 3.5.2) :

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1, \\ \mathbf{B}_0 &= \hat{\mathbf{z}}, \\ P_0 &= 1, \\ c_{s,0} &= \sqrt{\gamma_g} = 1.0005, \\ v_{A,0} &= 1.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Les paramètres du forçage à définir avant de commencer une simulation sont : l'amplitude  $w$ , le temps d'auto-corrélation de la turbulence que l'on prendra égal au temps de transit d'une perturbation à la vitesse du son  $T = T_D$ , le paramètre définissant la géométrie des composantes de Fourier  $\chi$ .

Dans la suite de cette section, on posera

$$\begin{aligned}w &= 10^{-2}, \\ T &= 0.2, \\ \chi &= 0.5.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Nous allons maintenant détailler les grandeurs mesurées au cours d'une simulation typique avec une résolution de  $256^3$ .

### 4.2.2 Evolution temporelle

Nous avons tracé l'évolution temporelle du spectre en énergie cinétique sur la figure 4.1. L'énergie cinétique par unité de masse totale est définie à partir du spectre en énergie cinétique par unité de masse  $e_K(k_n)$ , par

$$E_K = \sum_{n=1}^{N_m} e_K(k_n),\tag{4.8}$$

où

$$e_K(k_n) = \int_0^{k_{N_m}} dk_n 4\pi k_n^2 \epsilon_K(\mathbf{k}_n) \delta(k_n - |\mathbf{k}_n|),\tag{4.9}$$

pour l'énergie cinétique, où

$$\epsilon_K(\mathbf{k}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{u}_i^2(\mathbf{k}_n),\tag{4.10}$$

où  $\tilde{u}_i$  représente la composante  $i$  de la vitesse dans l'espace de Fourier.

De même, pour l'énergie magnétique,

$$E_M = \sum_{n=1}^{N_m} e_M(k_n), \quad (4.11)$$

où

$$e_M(k_n) = \int_0^{k_{N_m}} dk_n 4\pi k_n^2 \epsilon_M(\mathbf{k}_n) \delta(k_n - |\mathbf{k}_n|), \quad (4.12)$$

et

$$\epsilon_M(\mathbf{k}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \delta \tilde{B}_i^2(\mathbf{k}_n), \quad (4.13)$$

où  $\delta B$  est donnée par la relation (3.10).

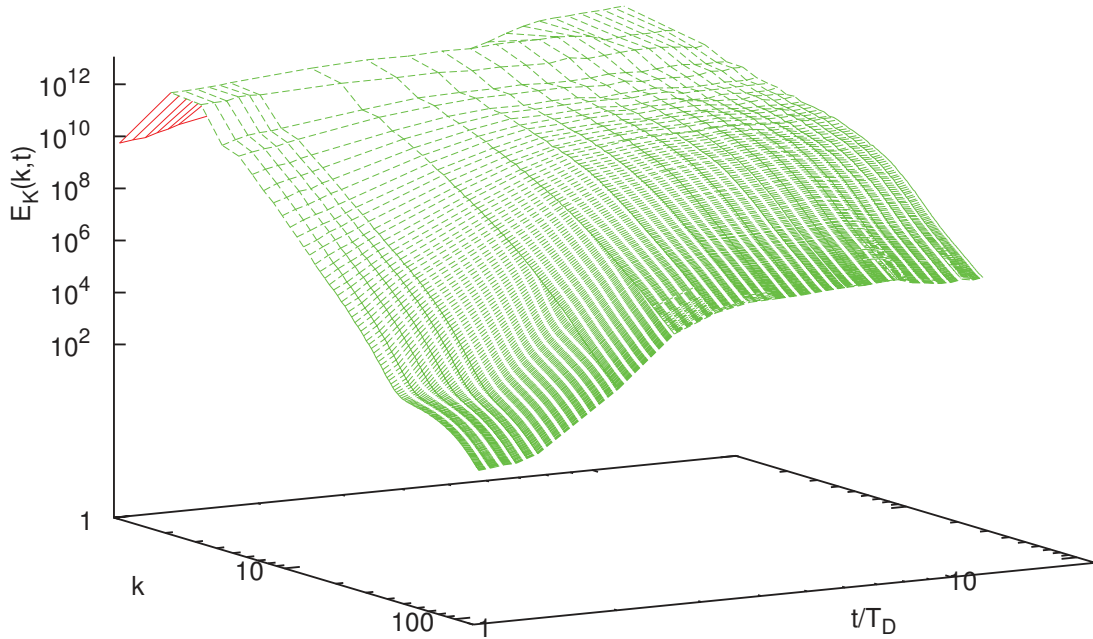


FIGURE 4.1 – Evolution temporelle du spectre en énergie cinétique. La turbulence développée correspond au temps à partir duquel la dissipation numérique de l'énergie compense l'injection par le forçage, résultant en une stabilisation du spectre, ici obtenue à partir de  $t/T_D = 8$ .

## 4.2.3 Géométrie

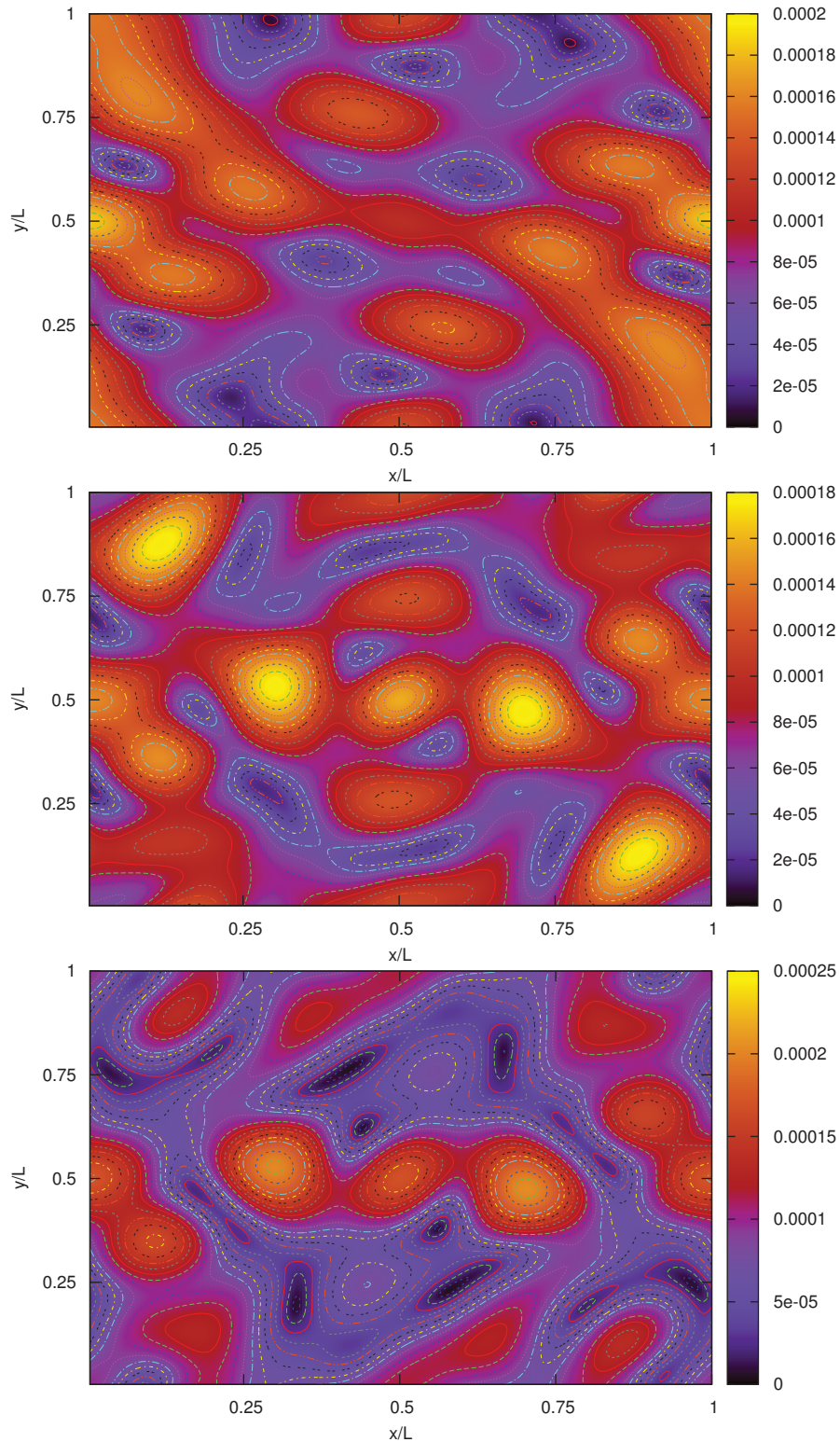


FIGURE 4.2 – Module de la vitesse dans le plan d'équation  $z = 0.5$  pour : (haut)  $\chi = 0$ , (milieu)  $\chi = 0.5$ , (bas)  $\chi = 1$  avec les iso-contours associés. Dans chacun des cas, les modes qui composent le forçage sont identiques.

Ici, nous allons expliciter l'influence du paramètre  $\chi$ , par le biais de l'équation (4.3).

Afin d'illustrer l'influence de ce paramètre, j'ai représenté figure 4.2 la coupe d'un cube de simulation dans un plan d'équation  $z = 0.5$ , et y ai tracé la norme du champ de vitesse résultant de l'accélération du champ  $\mathbf{f}$  pour  $\alpha = 0$ , à un instant donné, pour différentes valeurs de  $\chi$ .

Dans la figure 4.2, la partie du bas montre un champ de vitesse tournant, relatif au forçage incompressible  $\chi = 1$ . A l'inverse, la partie du haut ne montre pas de vorticité, ce qui correspond à un forçage compressible, ou  $\chi = 0$ . La figure du centre fait concourir les deux géométries, avec  $\chi = 0.5$ .

La transformée de Fourier du forçage est aussi une donnée intéressante. Les spectres en énergie cinétique sont décomposés en une partie solénoïdale

$$\epsilon_{K,S}(\mathbf{k}_n) = \left( \frac{\mathbf{k}_n \times \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_n)}{k_n} \right)^2, \quad (4.14)$$

et compressible

$$\epsilon_{K,C}(\mathbf{k}_n) = \left( \frac{\mathbf{k}_n \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_n)}{k_n} \right)^2. \quad (4.15)$$

### 4.3 Stationnarité

Lorsque le forçage commence à injecter de l'énergie cinétique, le couplage des équations MHD vont transférer une partie de cette énergie au champ magnétique par l'équation d'induction ( quation (1.11)).

Les précédentes simulations montrent que le spectre en énergie cinétique ne produit pas forcément un spectre de Goldreich-Sridhar, avec une pente de  $-5/3$ . La question est alors de savoir à quel instant la turbulence peut être considérée comme développée. Considérons l'évolution de l'énergie magnétique turbulente totale

$$E_M = \sum_i^r \sum_j^r \sum_l^r \frac{\delta B^2(i, j, l)}{2}, \quad (4.16)$$

et l'énergie cinétique

$$E_K = \sum_i^r \sum_j^r \sum_l^r \rho(i, j, l) \frac{u^2(i, j, l)}{2}, \quad (4.17)$$

tracées dans la figure 4.3. Cette figure nous montre que la stabilisation de l'énergie magnétique se traduit par la croissance d'une surpression et donc à un chauffage du cube de simulation. Nous constatons également que l'énergie magnétique est

stabilisée à partir de 8 périodes de temps dynamique. (L'évolution temporelle des spectres en énergie (4.12) et (4.9) représentée sur la figure 4.1).

La figure 4.4 trace l'évolution de la quantité

$$\Psi_K(k_n, t) = E_K(k_n, t) / E_K(k_n, t_f), \quad (4.18)$$

où  $t_f$  est le temps d'arrêt de la simulation. Ce temps est déterminé de façon récursive (cf plus loin).

L'intervalle de la zone inertielle est ici situé entre les modes  $k_i$  et  $k_f$ . Nous calculons dans cet intervalle l'écart quadratique moyen entre le spectre à l'état final et le spectre à l'instant  $t$ , c'est-à-dire

$$\Phi_K(t) = \frac{1}{k_f - k_i} \int_{k_i}^{k_f} dk (\Psi_K(k, t) - 1)^2. \quad (4.19)$$

Les quantités  $\Phi_K$  et  $\Phi_M$  nous donnent l'information sur la stabilisation du spectre. Les quantités sont tracées dans la figures 4.5. Dans toute la suite, nous considérerons comme stationnaire tout spectre qui est tel que  $\Phi \sim 10^{-2}$ . Dès lors que le spectre devient stationnaire, le choix du temps de fin de simulation  $t_f$  peut être choisi de façon arbitraire. Cependant, il sera commode de laisser quelques périodes dynamiques  $T_D$  entre l'obtention de l'état stationnaire et la fin de la simulation.

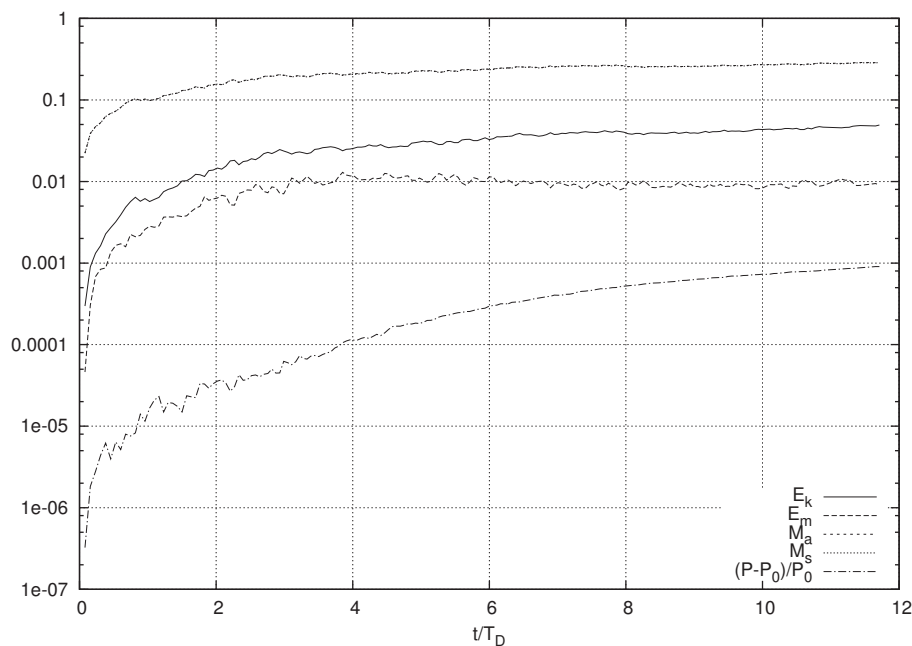


FIGURE 4.3 – Evolution temporelle des énergies cinétiques et magnétiques totales, des nombres de Mach Alfvénique et sonique, qui sont ici superposés, et de la surpression. L'axe des abscisses représente le temps en échelle de temps dynamique de la turbulence  $T_D$ .



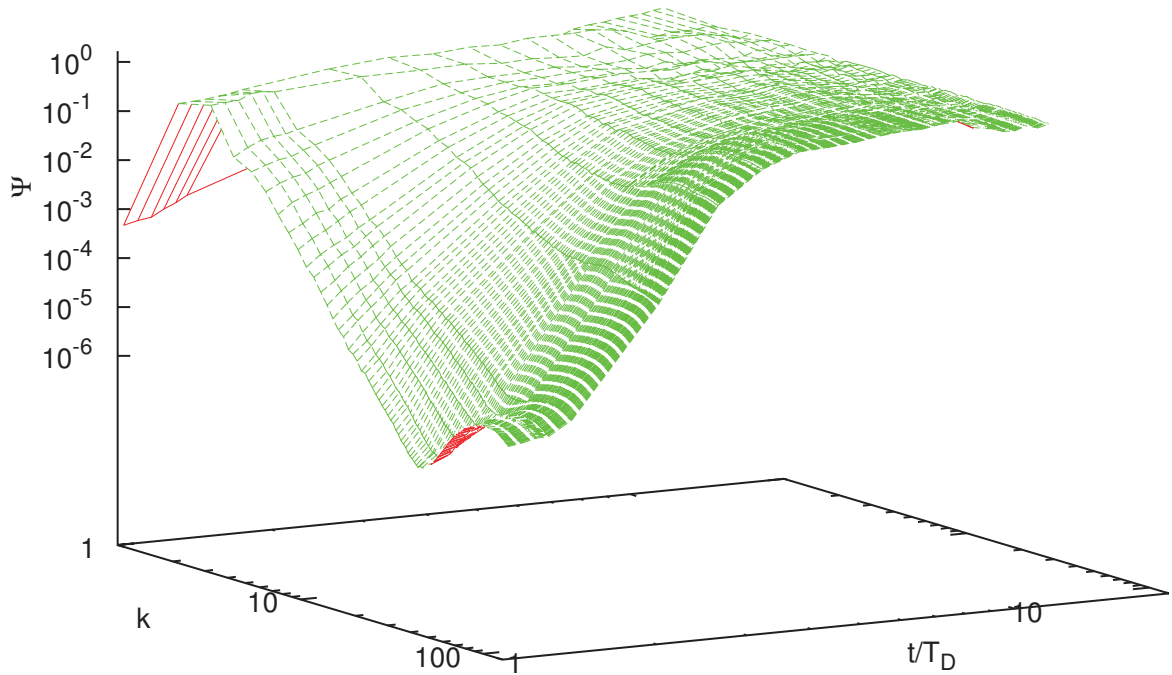


FIGURE 4.4 – Evolution temporelle de  $\Psi$ . On distingue la stabilisation du spectre à partir de  $8T_D$ .

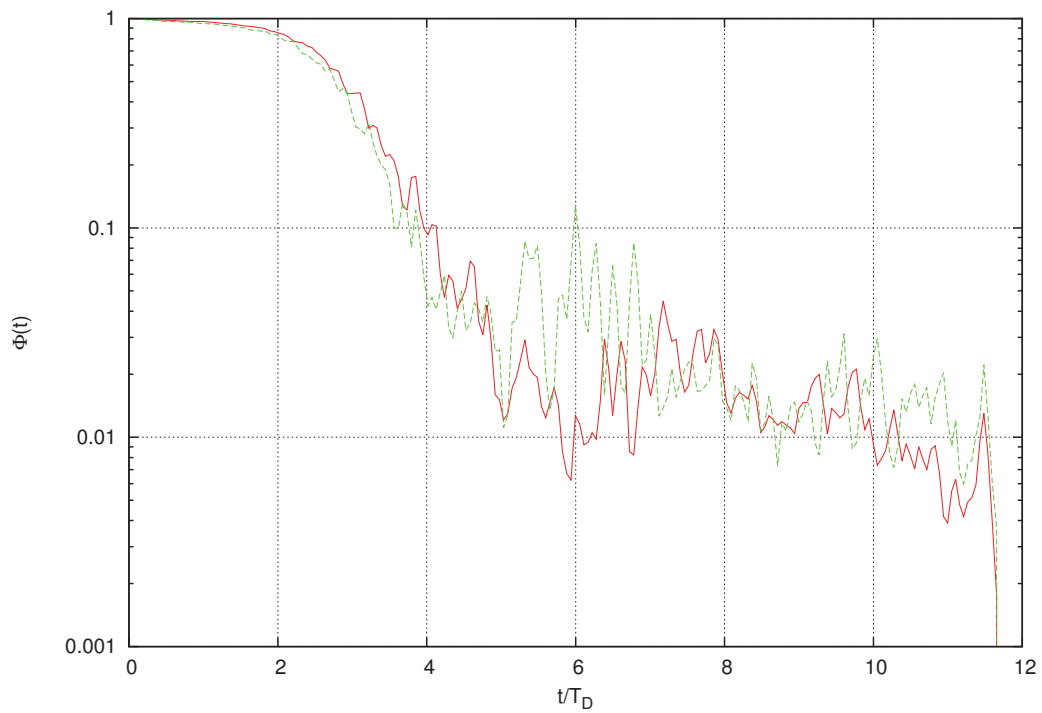


FIGURE 4.5 – Evolution temporelle de  $\Phi_M$  (vert trait pointillé) et  $\Phi_K$  (rouge trait plein). La stabilisation du spectre intervient lorsque  $\Phi \sim 10^{-2}$ , à partir de  $8T_D$ .

En effet, une fois le spectre devenu stationnaire, nous générons trois à quatre cubes de simulation, ou snapshots, espacés de 2 temps dynamiques  $T_D$  chacun, afin de pouvoir disposer de plusieurs réalisations MHD à un nombre de Mach Alfvénique donné. Ces réalisations seront utiles par la suite pour contraindre la statistique des expériences de particules test. Le temps de fin de simulation pour quatre réalisations MHD serait donc ici d'environ  $15T_D$ .

## 4.4 Paramètres dynamiques

Nous développons dans cette partie l'étude du forçage en faisant varier ses paramètres. Afin de préciser les étapes de simulation directe de la turbulence, nous allons décrire le travail effectué pour une simulation.

### 4.4.1 Prédicibilité du niveau de la turbulence

Le niveau de turbulence est défini par le rapport

$$\eta \equiv \frac{\delta B}{B_0} \quad (4.20)$$

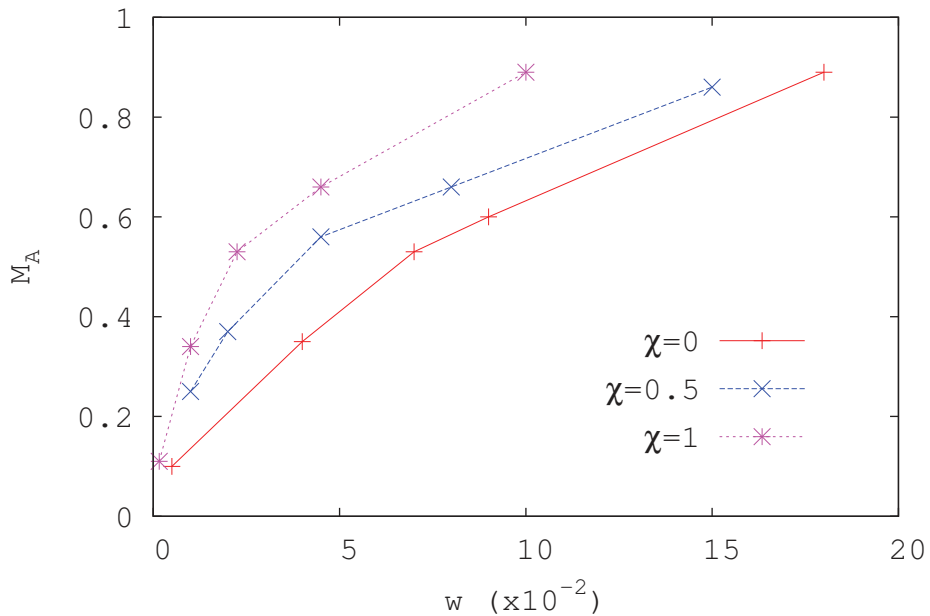


FIGURE 4.6 – Evolution du nombre de Mach Alfvénique en fonction du paramètre  $w$ , pour différentes géométries de forçage. Ces tracés correspondent aux simulations  $512^3$ .

En étudiant l'équation (4.2), il semble raisonnable de penser que le niveau de turbulence sera proportionnel à  $w$ , même si le forçage agit uniquement sur l'équation

d'Euler. L'étude est résumée par la figure 4.6, qui présente les valeurs de  $M_a$  pour un spectre magnétique stationnaire.

Il est également utile de modifier les conditions initiales d'une simulation pour faire varier l'importance relative des perturbations par rapport aux champs initiaux. Le nombre de Mach est une donnée importante en turbulence puisqu'il donne l'importance de la perturbation  $\delta v$  par rapport aux vitesses caractéristiques du fluide MHD que sont la vitesse du son (1.19) et la vitesse d'Alfvén (1.18) dont on rappelle les expressions

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (4.21)$$

et

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad (4.22)$$

A  $w$  constant, et donc à  $\delta v$  constant, modifier les pressions thermiques et magnétiques initiales permet de faire varier les nombres de Mach sonique et alfvénique.

## 4.4.2 Nomenclature des simulations

Dans toute la suite, nous utiliserons une classification afin de référencer les simulations qui ont été réalisées au cours de cette thèse. Cette classification contiendra l'essentiel des paramètres qui ont changés d'une simulation à l'autre, de façon à identifier les simulations sans ambiguïté.

Prenons l'exemple d'une simulation  $256^3$ , avec  $w = 0.01$ , un champ magnétique  $B_0 = 1$ , une pression  $P = 1$  et une géométrie  $\chi = 0.5$ . Le nom associé sera

L8W1B1P1C5

Chaque chiffre fait référence à la lettre qui le précède. Ici,  $L$  est relié à la résolution  $r$  par  $r = 2^L$ , car RAMSES construit les cellules du cube de simulation sous forme d'octet.  $W$  représente le paramètre de forçage  $w$  de l'équation (4.2), multiplié par 100 pour plus de compacité.  $B$  fait référence à l'intensité du champ magnétique moyen  $B_0$ , et  $C$  la géométrie du forçage  $\chi$ , multiplié par 10 pour plus de compacité. La liste des simulations réalisées au cours de cette thèse est détaillée dans le tableau 4.1. Des simulations hydrodynamiques (HD) ont aussi été réalisées (cf. §5.2) pour l'étude des distributions de densité en turbulence supersonique.

## 4.5 Sur le cluster de calcul

La ressource utilisée sur les grands équipements de calcul intensif est exprimée en *h.cpu*. c'est le résultat du produit du temps total de simulation avec le nombre

#	Nom	Résolution	$\chi$	$w (\times 10^{-2})$	$M_s$	$M_a$
1	L8W1B1P1C5	256 <sup>3</sup>	0.5	1	1.62	0.58
2	L8W1B0.01P0.01C5	256 <sup>3</sup>	0.5	1	1.62	3.66
3	L8W1B0.1P0.1C5	256 <sup>3</sup>	0.5	1	0.54	1.39
4	L8W1B1P100C5	256 <sup>3</sup>	0.5	1	0.02	0.18
5	L8W5B1P100C5	256 <sup>3</sup>	0.5	5	0.06	0.59
6	L8W2B1P100C5	256 <sup>3</sup>	0.5	2	0.02	0.23
7	L9W0.55B1P1C0	512 <sup>3</sup>	0.0	0.5	0.10	0.10
8	L9W3B1P1C0	512 <sup>3</sup>	0.0	4	0.35	0.35
9	L9W5B1P1C0	512 <sup>3</sup>	0.0	7	0.51	0.53
10	L9W9B1P1C0	512 <sup>3</sup>	0.0	9	0.61	0.60
11	L9W15B1P1C0	512 <sup>3</sup>	0.0	18	0.92	0.89
12	L9W1B1P1C5	512 <sup>3</sup>	0.5	1	0.25	0.25
13	L9W2B1P1C5	512 <sup>3</sup>	0.5	2	0.37	0.37
14	L9W1B1P1C5	512 <sup>3</sup>	0.5	4.5	0.56	0.56
15	L9W8B1P1C5	512 <sup>3</sup>	0.5	8	0.68	0.66
16	L9W15B1P1C5	512 <sup>3</sup>	0.5	15	0.92	0.86
17	L9W0.16B1P1C0	512 <sup>3</sup>	1.0	0.16	0.11	0.11
18	L9W1B1P1C10	512 <sup>3</sup>	1.0	1	0.34	0.34
19	L9W8B1P1C10	512 <sup>3</sup>	1.0	2.25	0.53	0.53
20	L9W4.5B1P1C10	512 <sup>3</sup>	1.0	4.5	0.69	0.66
21	L9W19B1P1C10	512 <sup>3</sup>	1.0	10	1.0	0.89
22	L10W4.5B1P1C5	1024 <sup>3</sup>	0.5	4.5	0.53	0.53
23	L10W15B1P1C5	1024 <sup>3</sup>	0.5	15	1.10	1.04
24	L10W1B1P1C10	1024 <sup>3</sup>	1	1	0.35	0.35

TABLE 4.1 – Tableau des simulations

de coeurs utilisés. Si une simulation est plus rapide avec l'augmentation du nombre de coeur, on remarque cependant que le besoin en ressources augmente. On appelle cet effet le 'scaling' de l'application. Cela signifie qu'en partant d'un faible nombre de coeurs, si ce nombre est doublé, le temps de simulation n'est pas nécessairement divisé par deux. Cela entraîne alors des surcoûts sur la ressource.

Au cours de cette thèse, plus de quatre millions d'heures de calcul ont été utilisées.

Résolution	# de processeur	temps de simulation (h)	ressources consommées (h.cpu)
256	8	148	1184
256	16	74	1187
256	32	38	1219
256	64	19	1223
256	92	14	1320
256	128	11	1408
512	128	230	29410
512	256	115	31780
512	512	69	35328
512	1024	38	38912
512	2048	21	43000
1024	1024	78	79872
1024	2048	44	90112

TABLE 4.2 – Tableau des consommations sur le cluster JADE du CINES.

# Chapitre 5

## Analyses des simulations HD et MHD

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre j'aborde les travaux spécifiques que j'ai effectué sur la turbulence HD et MHD. Je commence par l'étude des distributions de densité dans le cadre d'une turbulence polytropicque supersonique dans la section 5.2. Cette partie fait l'objet d'une publication en préparation (Cohet, Hennebelle et Marcowith 2015). Ensuite, je continue par l'étude des résultats en turbulence MHD, qui sera consacrée à la mesure de l'anisotropie §5.3, puis à la définition des champs locaux §5.4. Ces deux dernières études sont utiles pour l'étude de la propagation des rayons cosmiques abordée au chapitre 7.

### 5.2 Résultats HD : étude des distributions de densité en turbulence isotherme

L'étude de la distribution de densité dans les milieux avec un régime supersonique de la turbulence hydrodynamique trouve de nombreuses applications dans le champ de l'astrophysique, comme par exemple les études sur la fonction initiale de masse des étoiles [36, 37] ou l'efficacité de la formation stellaire [72].

Dans une première partie (§5.2.1), nous aborderons les concepts théoriques de la distribution de densité, avant de présenter différents résultats avec des simulations  $512^3$  (§5.2.2) et  $1024^3$  (§5.2.3).

### 5.2.1 Conditions initiales

J'ai réalisé des simulations hydrodynamiques (où  $\mathbf{B} = 0$ ) supersoniques, avec une équation d'état de forme polytropicque

$$P = P^* \left( \frac{\rho}{\rho_{ISM}} \right)^{\gamma^*}, \quad (5.1)$$

où  $P^*$  et  $\gamma^*$  sont les paramètres de l'équation d'état,  $\rho_{ISM}$  la densité typique du milieu interstellaire. Le cas isotherme est donné pour  $\gamma^* = 1$ . Le tableau 5.1 regroupe

#	Résolution	$\chi$	$\gamma^*$	$P^*$	$M_s$
1	512	0.5	1.0	0.01	1.3
2	512	0.5	1.0	0.01	4.3
3	512	0.5	1.0	0.01	19.7
4	1024	0.5	1.3	0.01	13.9
5	1024	0.5	1.0	0.01	19.4
6	1024	0.5	0.7	0.01	19.5
7	1024	0.5	0.5	0.01	18.5
8	1024	1.0	1.0	0.01	19.2
9	1024	1.0	0.7	0.01	22.2

TABLE 5.1 – Tableau récapitulatif des simulations hydrodynamiques.

les simulations sur lesquelles j'ai procédé à l'extraction de données.

Les précédentes études ([47, 26] et références associées) montrent que la fonction densité de probabilité de la variable  $\rho$  est proche d'une loi log-normale, et donc, en construisant la distribution de la variable  $s \equiv \ln(\rho/\bar{\rho})$ , où  $\bar{\rho}$  est la moyenne de la densité sur la boîte de calcul, on obtient une loi s'approchant d'une distribution normale centrée réduite.

Mathématiquement, si les fluctuations de densité à une position donnée sont formées par la somme d'un grand nombre de fluctuations indépendantes les unes des autres, alors la loi qui régit la distribution  $p_s$  de la variable  $s$  est une loi normale, par application du théorème central limite. C'est la principale hypothèse du modèle. Cependant, la littérature [74, 47, 26] montre des déviations à la loi normale pour la variable  $s$ , notamment aux faibles et hautes densités, traduisant le fait que les densités extrêmes dépendent de la densité de l'espace alentour pour pouvoir se former. C'est la signature de l'intermittence, propriété fondamentale de la turbulence.

Pour construire la distribution de la variable  $s$ , on classe une à une les cellules d'un cube de simulation dans un diagramme où la variable est  $s$ . Une fois la distribution obtenue, le but ici est de déterminer la fonction de distribution normale

centrée réduite

$$p(s)ds = p_0 \exp \left[ -\frac{(s - s_0)^2}{\sigma_s^2} \right] ds, \quad (5.2)$$

où  $p_0$  est un facteur de normalisation, qui s'ajusterait avec l'ensemble des points  $s$  satisfaisant la relation

$$p(s) \geq 0.1 \text{MAX}(p(s)). \quad (5.3)$$

Nous allons maintenant détailler les simulations regroupées dans le tableau 5.1 dans les deux prochains paragraphes.

### 5.2.2 512<sup>3</sup>

Les figures 5.1 à 5.3 représentent les distributions du logarithme de la densité pour les simulations hydrodynamiques 1 à 3. Pour toutes ces simulations,  $\gamma^* = 1$ , et le nombre de Mach va en augmentant, ce qui se traduit par l'augmentation de la largeur de la distribution  $\sigma_s$ , ainsi que le déplacement de la moyenne  $s_0$  vers les petites densités.

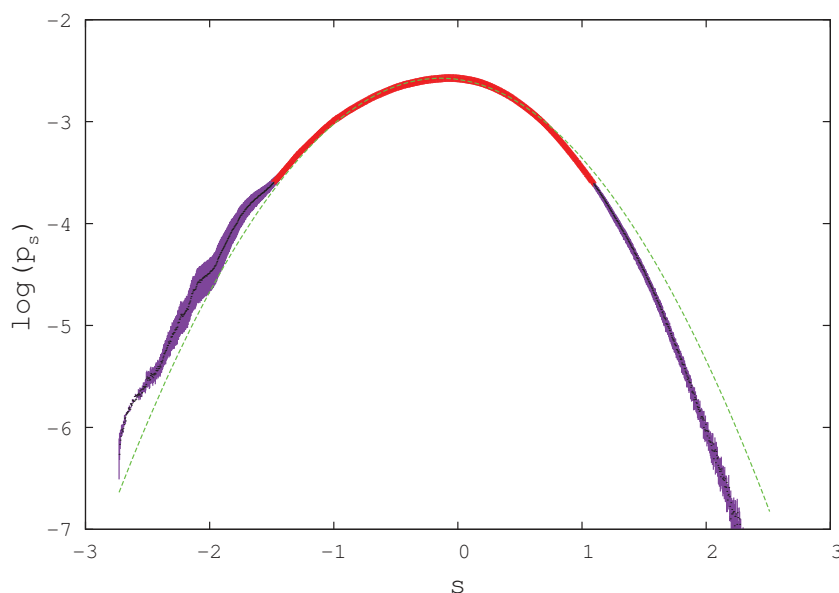


FIGURE 5.1 – Fonction densité de probabilité  $p_s$  de la variable  $s \equiv \ln \rho/\bar{\rho}$  pour la première simulation 512<sup>3</sup> (cf tableau 5.1) où  $M_s = 1.3$ . En violet correspond l'écart-type statistique des distributions utilisées pour faire la moyenne (représentée en point noir). Les points affichés en rouge correspondent à l'ensemble des points utilisés pour ajuster la loi normale, elle-même représentée en pointillé vert.



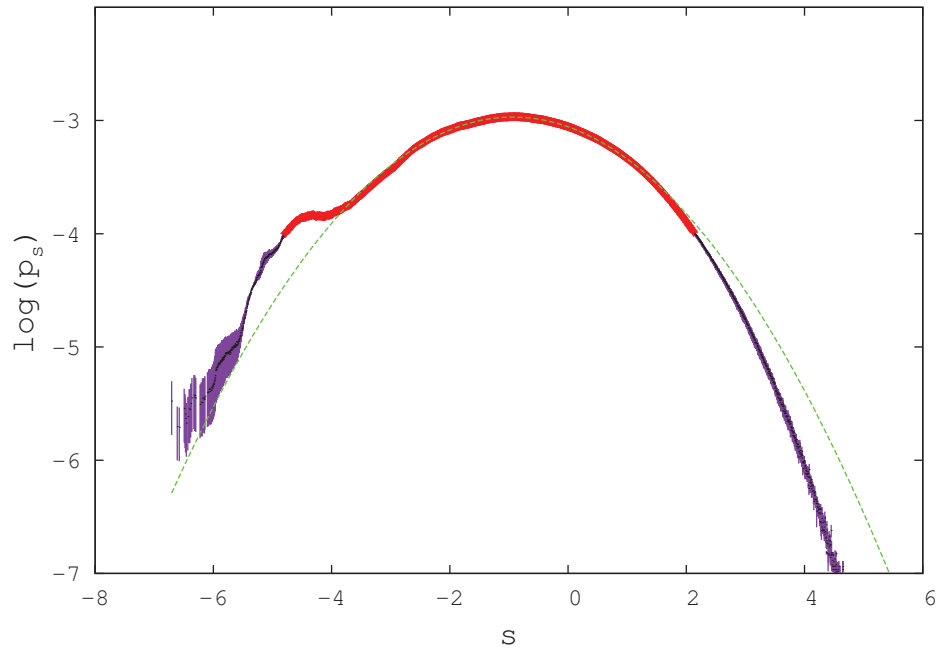


FIGURE 5.2 – Idem que la figure 5.1 pour la seconde simulation  $512^3$ , où  $M_s = 4.3$ .

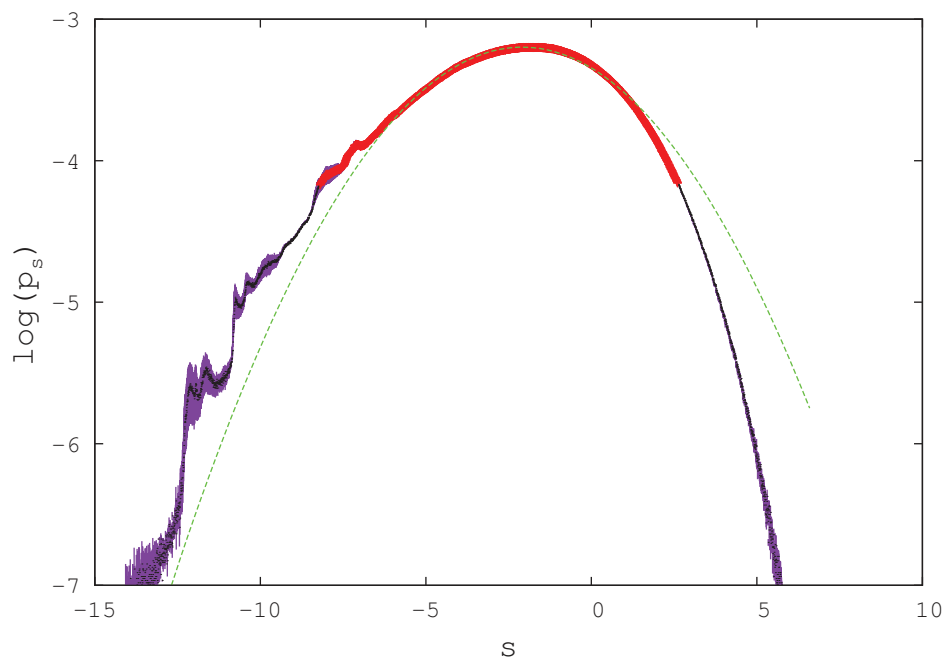


FIGURE 5.3 – Idem que la figure 5.2 pour la troisième simulation  $512^3$ , où  $M_s = 19.7$ . On remarque ici l'apparition d'une queue sur l'intervalle des  $s < 5$ . L'augmentation du nombre de Mach tend donc à faire dévier la distribution d'une loi normale centrée réduite.

Pour déterminer  $p_s$ , nous considérons un nombre  $N$  de simulations hydrodynamiques, et on construit pour chacune de ces solutions la distribution  $p_{s,i}$ . On procède alors à la moyenne

$$p_s = \sum_{i=1}^N p_{s,i}. \quad (5.4)$$

Une fois cela fait, on sélectionne tous les points qui sont au-dessus de la droite d'équation

$$y = 0.1p_{s,MAX}, \quad (5.5)$$

afin d'évaluer par une régression les coefficients intervenant dans l'équation (5.3). Ici, seules deux solutions pour chacune des figures ont été utilisées pour déterminer le profil final. Cette étude est préliminaire, d'autres simulations suivront afin d'améliorer la précision de la mesure.

La relation entre la largeur de la gaussienne et le nombre de Mach est connue pour être de la forme [47, 25, 92, 26]

$$\sigma_s^2 = \ln [1 + b^2 M_s^2], \quad (5.6)$$

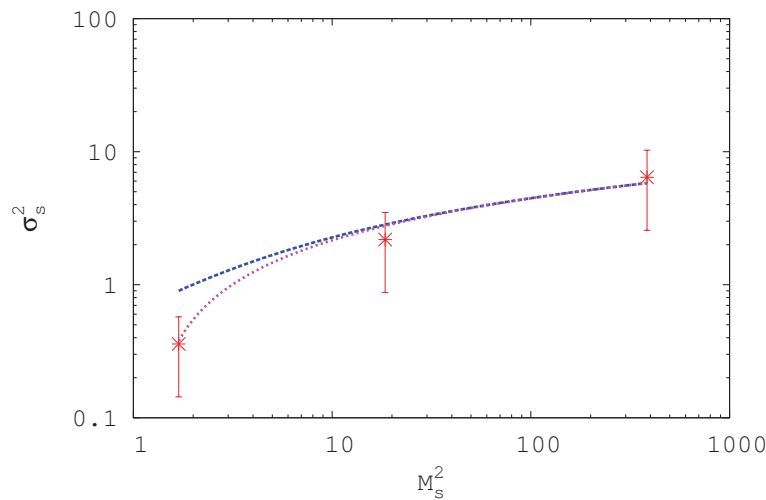


FIGURE 5.4 – Dépendance de la variance statistique de la densité de probabilité  $p_s$  en fonction de  $M_s^2$ . La courbe en tirets bleus représente la loi de l'équation (5.6), avec  $b = 0.86 \pm 0.24$ , alors que la courbe en pointillés roses représente l'ajustement pour la fonction  $\sigma_s^2 = \ln [\beta^2 M_s^2]$ , avec  $\beta = 0.9 \pm 0.16$ .

où  $b$  est un paramètre à déterminer. En traçant  $\sigma_s^2 = f(M_s^2)$ , on obtient le résultat de la figure 5.4. La figure 5.4 montre que la loi représentée par l'équation (5.6) est vérifiée pour des nombres de Mach soniques supérieurs à 4. La valeur de  $b$  dans ce cas est cohérente avec les résultats précédents [25], où le paramètre  $b$  dépend de la géométrie du forçage  $\chi$  d'après la relation

$$b = 1 - \frac{2}{3}\chi, \quad (5.7)$$

ce qui donnerait pour  $\chi = 0.5$   $b = 0.66$ . Une autre propriété de la turbulence est exprimée au travers les figures 5.1, 5.2 et 5.3, à savoir l'intermittence de la turbulence. Outre le fait que la variance augmente, on constate également que les faibles et les fortes densités tendent à s'écarter du modèle isotherme fixé par la loi log-normale. Ceci traduit le fait que les parties extérieures des distributions de densité ne sont plus régies par des processus purement aléatoires, mais plutôt par l'état des proches voisins.

### 5.2.3 $1024^3$

Nous allons étudier les effets du paramètre  $\gamma^*$  sur les simulations  $1024^3$ . Chacune des simulations a un nombre de mach supérieur à 10. Les figures 5.6 à 5.9 représentent les densités de probabilité obtenues. Pour les  $\gamma^* \neq 0$ , on s'attend à obtenir une déviation de la loi normale centrée réduite, se traduisant par l'apparition d'une queue sur la distribution aux faibles densités [74].

Si on considère que la queue de la distribution à une équation de la forme

$$f(s) = f(0)\exp[\Lambda s], \quad (5.8)$$

on détermine les paramètres  $f(0)$  et  $\Lambda$  pour obtenir la loi de puissance.

Il sera nécessaire de compléter cette étude avec une mesure de la dépendance de  $\Lambda$  avec le nombre de Mach, car les figures 5.1 à 5.3 et 5.7 accréditent une dépendance de  $\Lambda$  avec  $M_s$ . On peut cependant tracer l'évolution de la largeur de la loi normale avec  $\gamma^*$  (figure 5.5)

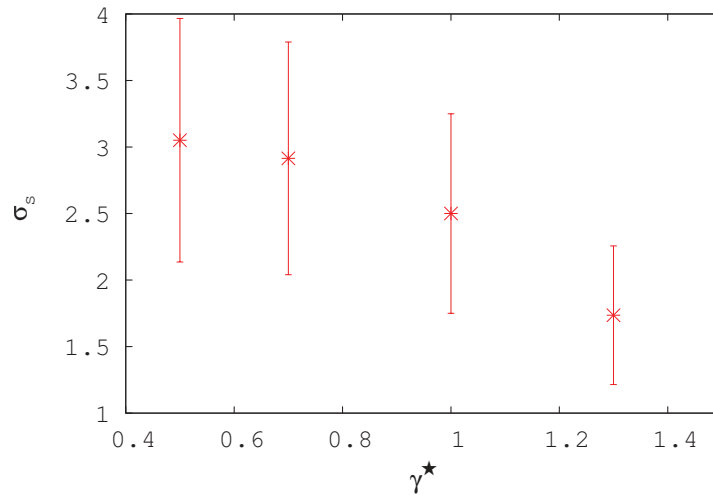


FIGURE 5.5 – Largeur de la distribution  $p_s$  en fonction de  $\gamma_*$ .

La figure 5.8 montre que l'écart à l'isothermalité compense l'intermittence due au fort nombre de Mach dans la simulation, mais uniquement pour les faibles densités.

A partir de ces simulations, il me paraît nécessaire de reprendre l'étude mais pour des nombres de Mach plus faibles, car il est difficile de faire la différence entre l'intermittence turbulente, due au fort  $M_s$ , et l'écart à l'isothermalité, engendrée par le coefficient  $\gamma^*$ . De plus, il est impossible de prétendre à l'universalité de  $\Lambda$  avec  $\gamma^*$ .

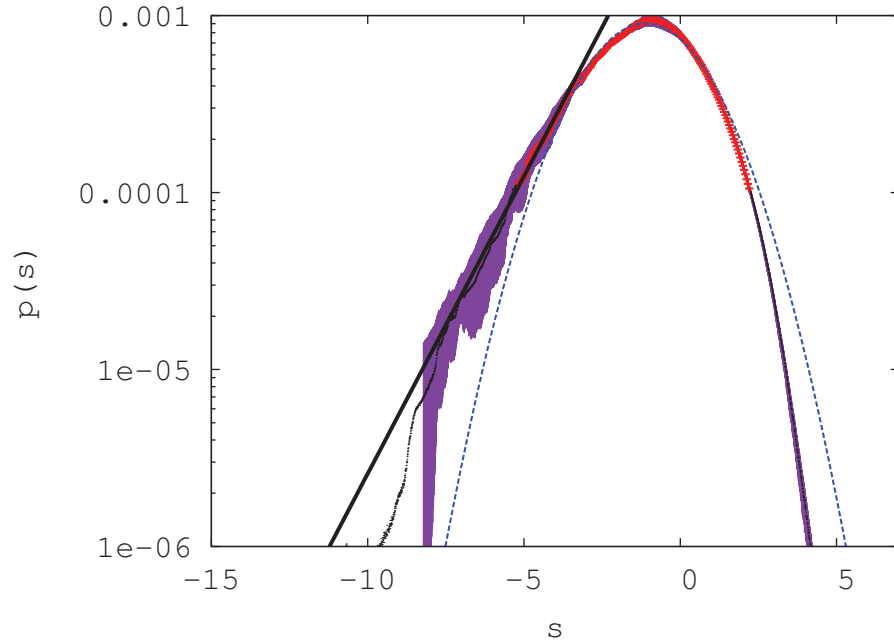


FIGURE 5.6 – Densité de probabilité pour  $\gamma^* = 1.3$ . Les points surlignés en rouge sont ceux retenus pour le fit d'une loi normale centrée réduite, représentée par la courbe en tirets bleus. L'indice spectral  $\Lambda = 0.774 \pm 0.003$

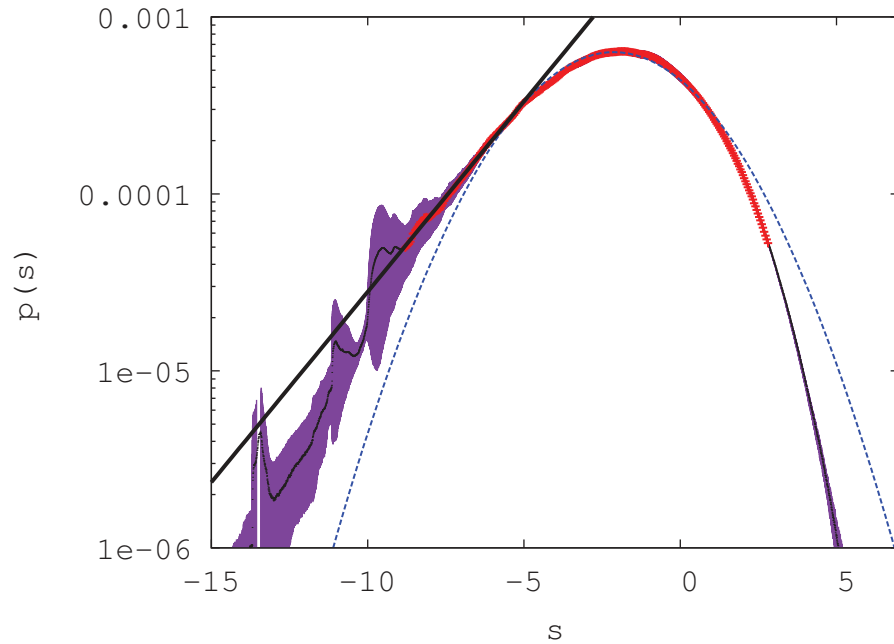


FIGURE 5.7 – Même chose que la figure 5.6 avec  $\gamma^* = 1.0$ . Ici, comme dans la figure 5.3, on constate que malgré  $\gamma_* = 1$ , la distribution normale centrée réduite n'ajuste pas aux faibles densités. La mesure de l'indice spectral donne  $\Lambda = 0.4956 \pm 0.0009$ .

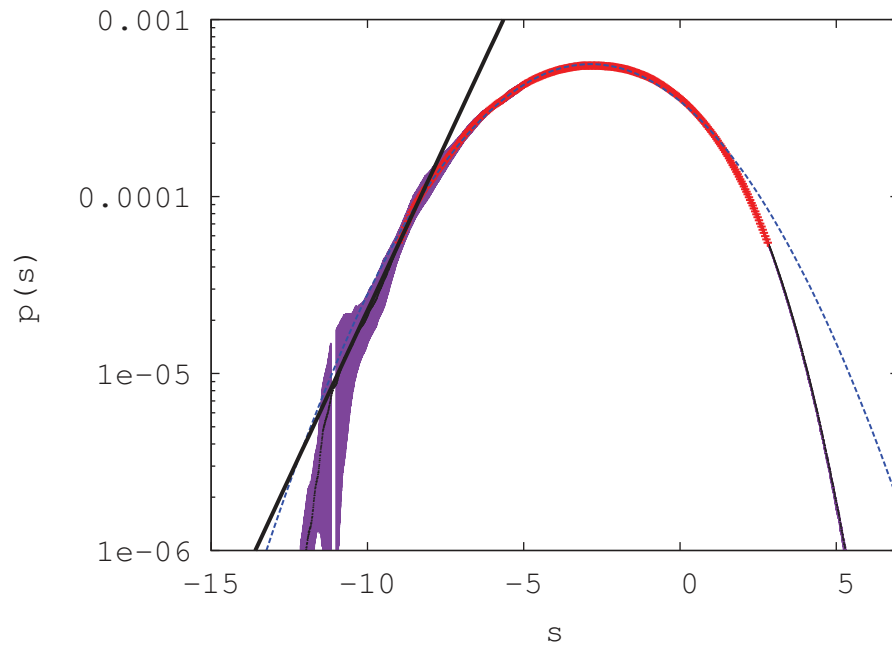


FIGURE 5.8 – Même chose que pour la figure 5.7, avec  $\gamma_* = 0.7$ . Ici,  $\Lambda = 0.870 \pm 0.003$ .

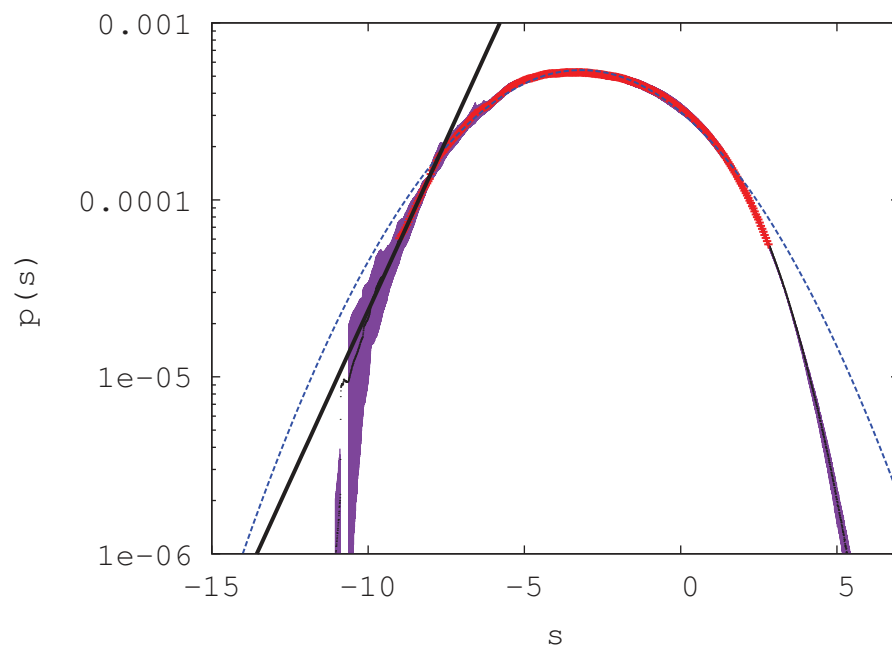


FIGURE 5.9 – Même code de couleur de la figure 5.8, avec  $\gamma_* = 0.5$ . Ici,  $\Lambda = 0.888 \pm 0.003$ .

## 5.3 Résultats MHD

Dans cette partie, j'analyserai les simulations MHD obtenues à travers l'étude de l'anisotropie du spectre de Fourier. Cela nous sera utile dans les paragraphes 7 et 8 pour comprendre la propagation des rayons cosmiques dans la turbulence MHD.

### 5.3.1 Analyse spectrale

Le principal outil pour mesurer l'anisotropie est encore le spectre de Fourier. Dans toute la suite, nous considérerons l'échelle parallèle  $k_{\parallel}$  comme étant colinéaire à  $B_0$ , et donc orientée le long de l'axe  $z$ . Le spectre en énergie cinétique tridimensionnel  $\epsilon_K(\mathbf{k}_n)$  sert de base pour déterminer les spectres de dimensions inférieures.  $N_m$  est le nombre de modes composant le spectre de Fourier.

Pour obtenir le spectre unidimensionnel  $e_K(k_n)$

$$e_K(k_n) = \int_0^{k_{N_m}} dk_n 4\pi k^2 \epsilon_K(\mathbf{k}_n) \delta(k_n - |\mathbf{k}_n|), \quad (5.9)$$

cela revient à faire la somme de l'énergie située dans une pellicule sphérique dans l'espace de Fourier tel que

$$|\mathbf{k}| \in [k_{n-1}; k_n[. \quad (5.10)$$

De la même façon, pour obtenir le spectre bidimensionnel (2D)  $e_K(k_{\perp}, k_{\parallel})$ , il suffit de poser  $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ , et répartir l'énergie cinétique dans des couches cylindriques coaxiales. Pour chaque valeur de  $k_z$ , on calcule

$$e_K(k_{\perp}, k_{\parallel}) = \int_0^{k_{N_m}} dk_n 2\pi k_n \epsilon_K(\mathbf{k}_n + \mathbf{k}_z) \delta(k_n - |\mathbf{k}_{\perp}|). \quad (5.11)$$

Les spectres 2D pour les simulations 7, 11, 12 et 13 du tableau 4.1 sont représentés en figure 5.10. Afin de mesurer le degré d'anisotropie, nous allons utiliser les isocontours de la figure 5.10 pour relever les couples  $\{k_{\parallel}, k_{\perp}\}$  tels que

$$e_K(0, k_{\parallel}) = e_K(k_{\perp}, 0). \quad (5.12)$$

L'ensemble des points ainsi obtenus sont représentés sur la figure 5.11. Cette dernière montre que la balance critique est tout à fait appropriée.

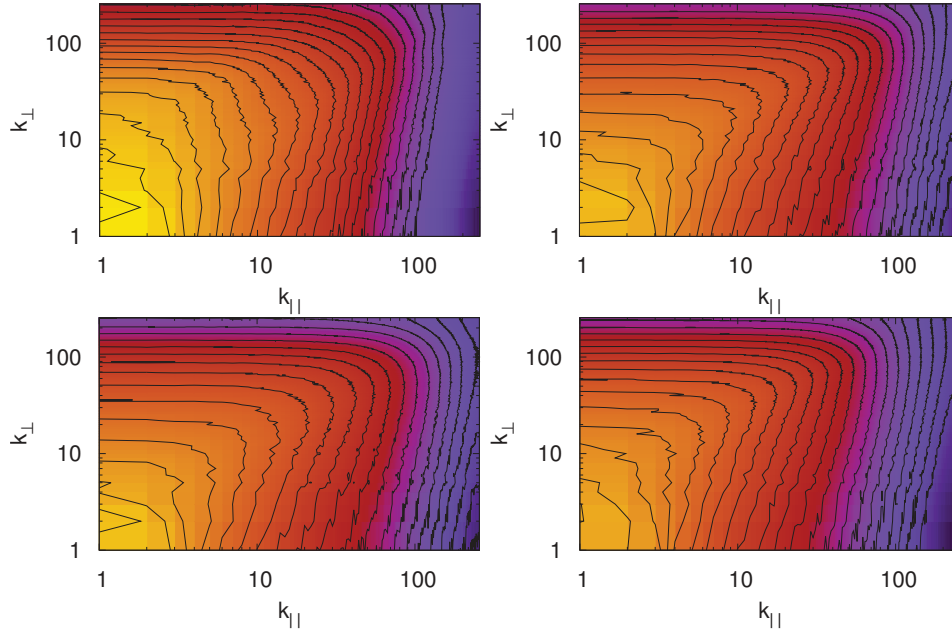


FIGURE 5.10 – Iso-contour des spectres en énergie cinétique 2D  $e_K(k_{\perp}, k_{\parallel})$ . Les simulations sont, de gauche à droite et de haut en bas, L9W1B1P1C5, où  $\beta_p = 0.025$  et  $M_A = 0.25$ ; L9W2B1P1C5, où  $\beta_p = 0.048$  et  $M_A = 0.37$ ; L9W4.5B1P1C5, où  $\beta_p = 0.125$  et  $M_A = 0.66$ ; L9W15B1P1C5, où  $\beta_p = 0.084$  et  $M_A = 0.86$ .

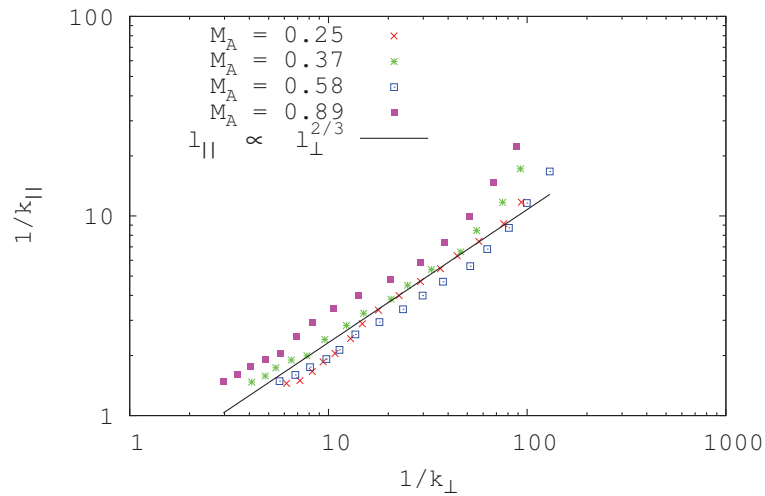


FIGURE 5.11 – Mesure de l'anisotropie du spectre 2D  $e_K(k_{\perp}, k_{\parallel})$ . La droite en noir représente la relation de balance critique de Goldreich-Sridhar. On voit que la relation entre les échelles parallèles et perpendiculaires ressemble fortement à la relation de Goldreich-Sridhar. De plus, les grandes échelles sont moins affectées par l'anisotropie, puisque le forçage est lui isotrope.



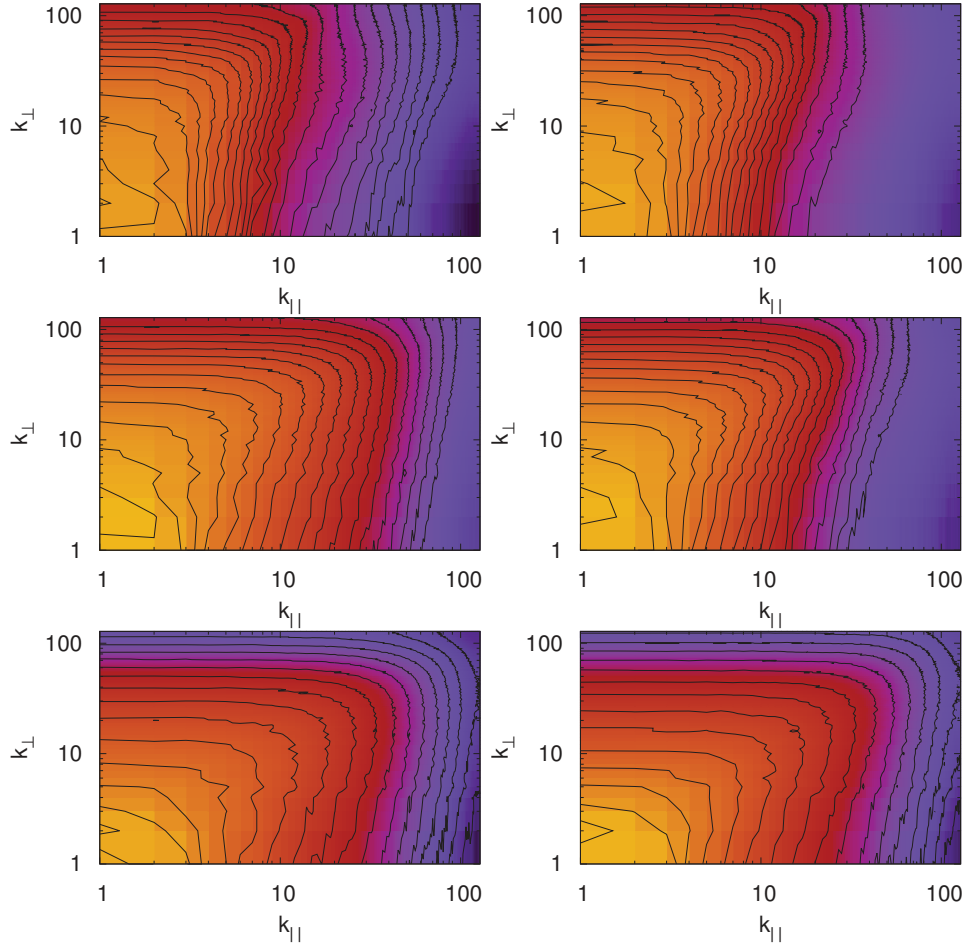


FIGURE 5.12 – Iso-contour des spectres en énergie cinétique 2D pour les simulations : L8W1B1P100C5, où  $\beta_p = 40.5$  et  $M_A = 0.18$ ; L8W2B1P100C5, où  $\beta_p = 66.1$  et  $M_A = 0.23$ ; L8W1B1P1C5, où  $\beta_p = 0.064$  et  $M_A = 0.58$ ; L8W5B1P100C5, où  $\beta_p = 48.34$  et  $M_A = 0.59$ ; L8W1B0.1P0.1C5, où  $\beta_p = 3.31$  et  $M_A = 0.54$ ; L8W1B0.01P0.01C5, où  $\beta_p = 2.55$  et  $M_A = 3.66$ . Les simulations sont rangées de gauche à droite et de haut en bas. Plus le nombre de Mach alfvénique augmente, moins l’anisotropie est marquée.

Les simulations L8W1B0.1P0.1C5 et L8W1B0.01P0.01C5 produisent des nombres de Mach alfvéniques élevés puisque le champ magnétique moyen est faible devant les fluctuations. Cela a un impact qui tend à rendre une relation isotrope entre les échelles parallèles et perpendiculaires. Les simulations L8W1B1P100C5 et L8W2B1P100C5 sont qualifiées d’incompressibles, puisque le rapport  $\beta_p = M_A^2/M_s^2 \gg 1$ . L’anisotropie exprimée par l’équation (5.12) et représentée dans la figure 5.13 montre également que l’indice spectral augmente avec le paramètre  $\beta_p$ .

L’étude de l’anisotropie peut également se faire à l’aide de l’étude des corrélations des champs, notamment par le biais de fonction de structure d’ordre deux, que l’on

définira dans le paragraphe suivant.

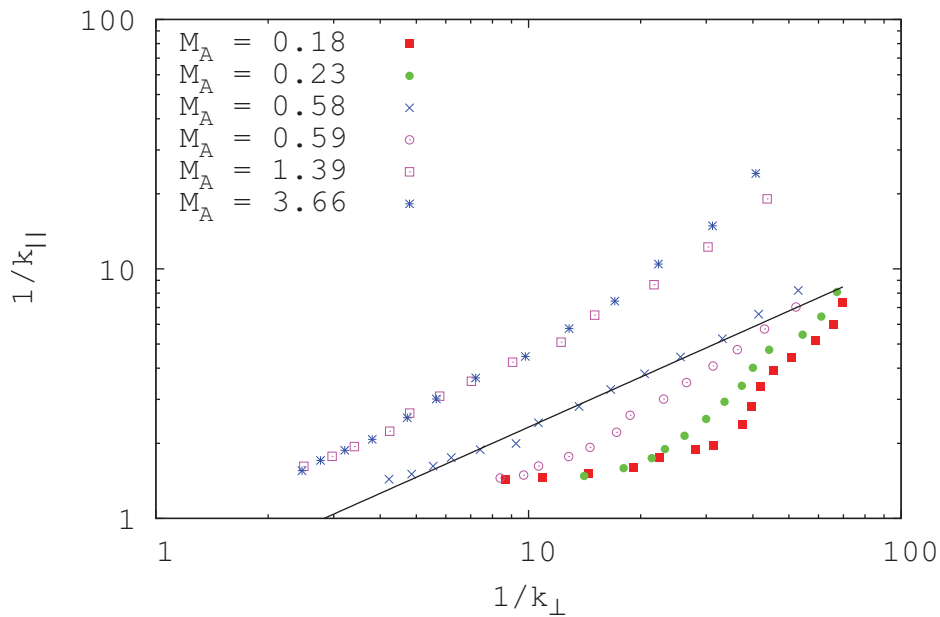


FIGURE 5.13 – Relations d’anisotropie tirées de la figure 5.12. La droite en trait plein noir représente la relation d’anisotropie  $l_{\parallel} \propto l_{\perp}^{2/3}$ . La relation d’anisotropie est cohérente avec la figure 5.11. La propriété d’incompressibilité semble rendre le spectre plus dur, même après avoir allongé la durée de ces simulations.

Pour finir, nous présentons sur la page suivante les figures 5.14 et 5.15 représentant respectivement le spectre 2D de la simulation 17, simulation de haute résolution où  $M_A = 0.58$  (cf 4.1), et la relation d’anisotropie associée au spectre. La relation d’anisotropie vérifie bien la balance critique de Goldreich Sridhar. De plus, la haute résolution nous permet de développer cette relation jusqu’à des grands nombres d’onde.

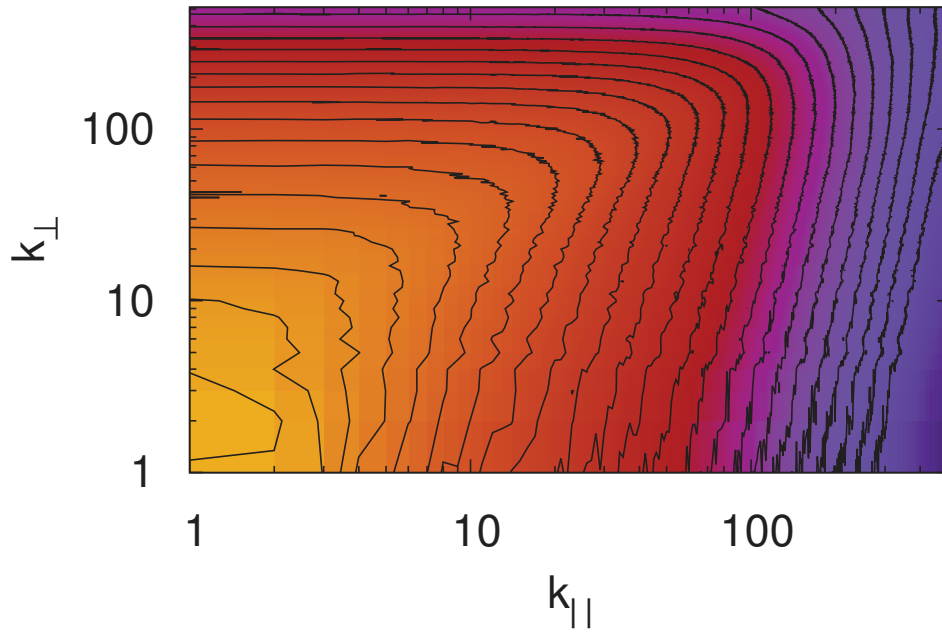


FIGURE 5.14 – Iso-contour du spectre en énergie cinétique 2D pour la simulation L10W4.5B1P1C5.

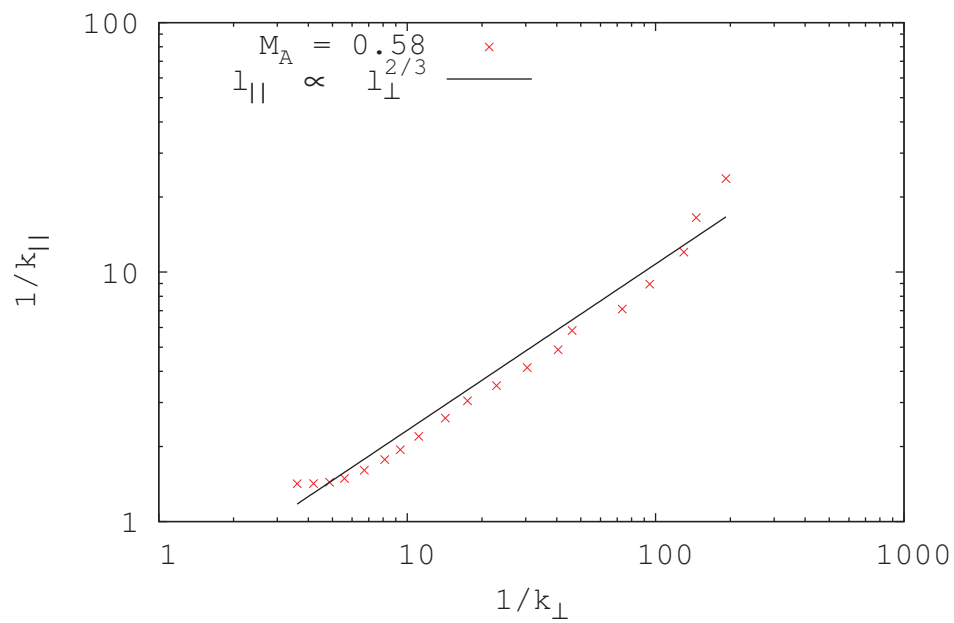


FIGURE 5.15 – Relations d'anisotropie tirées de la figure 5.14. La droite en trait plein noir représente la relation d'anisotropie  $l_{\parallel} \propto l_{\perp}^{2/3}$ . La relation d'anisotropie est cohérente avec les figures 5.11 et 5.13.

### 5.3.2 Fonction de structure

La théorie de Goldreich-Sridhar [32] stipule que les mouvements tourbillonnaires mélangent les lignes de champ magnétique dans la direction perpendiculaire au champ magnétique moyen.

Les structures cohérentes sont maintenues un temps comparable à l'inverse du produit  $k_{\perp} \tilde{v}_k$ , où  $\tilde{v}_k$  est la vitesse de l'échelle  $1/k$ , suite à l'interaction avec les mouvements ondulatoires de temps de corrélation  $(k_{\parallel} v_A)^{-1}$ . La balance critique de Goldreich-Sridhar consiste à rendre comparable ces deux temps de corrélation, ce qui a pour effet de générer une anisotropie dépendante de l'échelle (équation (1.31)), produisant des tourbillons allongés dans le sens du champ magnétique moyen.

Lorsque la turbulence magnétique est forte, cet effet devient local : les lignes de champ sont mélangées dans la direction perpendiculaire à un champ magnétique local, qu'il reste à définir.

Parler d'échelle de turbulence est une image qu'il faut définir avec précision. Aussi, on définit la fonction de structure de deuxième ordre

$$SF_2(l_{\parallel}, l_{\perp}) = \langle [\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})]^2 \rangle \quad (5.13)$$

Où  $\mathbf{l} = l_{\perp} \mathbf{e}_{\perp} + l_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel}$  et  $\langle \cdot \rangle$  signifie la moyenne sur le domaine de calcul. Les vecteurs  $\mathbf{e}_{\perp}$  et  $\mathbf{e}_{\parallel}$  sont les vecteurs unitaires perpendiculaires et parallèles au champ magnétique local  $B_L$ . L'équation (5.13) est un moyen de mesurer les corrélations spatiales du champ de vitesse.

Le champ magnétique local est défini comme

$$\mathbf{B}_L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{l}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})) \quad (5.14)$$

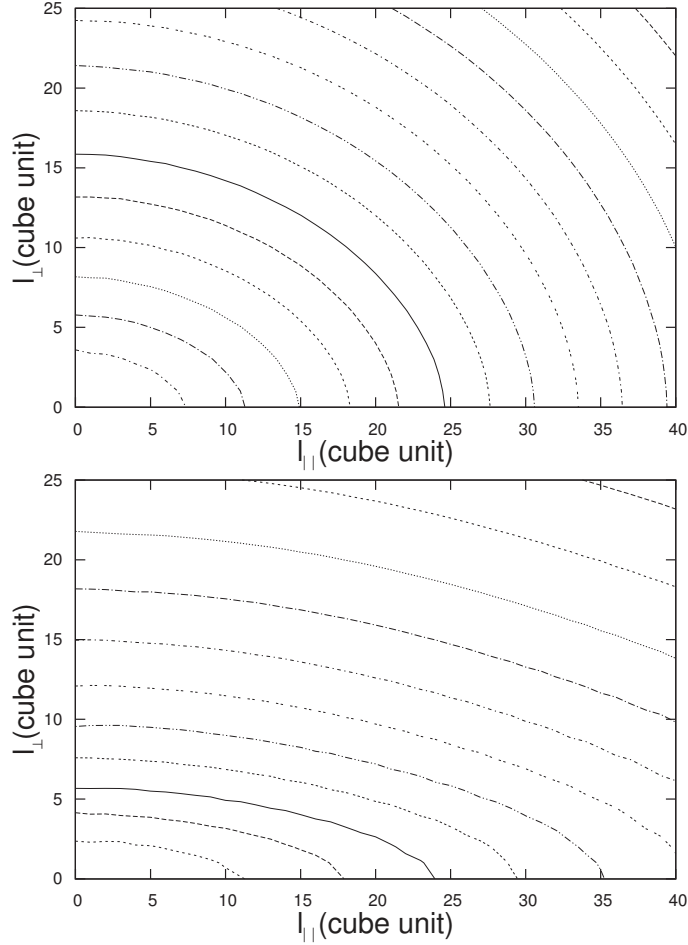


FIGURE 5.16 – Iso-contour des fonctions de structure d’ordre deux pour les simulations L8W1B0.01P0.01C5 (haut) et L8W1B1P1C5 (bas).

La figure 5.16 reprend les fonctions de structure pour deux simulations  $256^3$ , L8W1B1P1C5 et L8W1B0.01P0.01C5. L’équation (5.13) peut être travaillée à partir de la précédente figure pour tracer

$$l_{\parallel} = f(l_{\perp}), \quad SF_2(l_{\parallel}, 0) = SF_2(0, l_{\perp}) \quad (5.15)$$

traduisant la relation d’anisotropie entre les échelles parallèles et perpendiculaires (figure 5.16). La figure 5.17 est à comparer avec la figure 1.3. Elle montre que la pente associée est supérieure à celle prédite dans le modèle de Goldreich-Sridhar, même dans une limite incompressible (simulation L8W1B1P100C5). La simulation L8W1B0.01P0.01C5 produit des fonctions de structure avec un indice plus grand, traduisant la perte de l’anisotropie avec l’augmentation du niveau de turbulence, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus dans le paragraphe précédent.

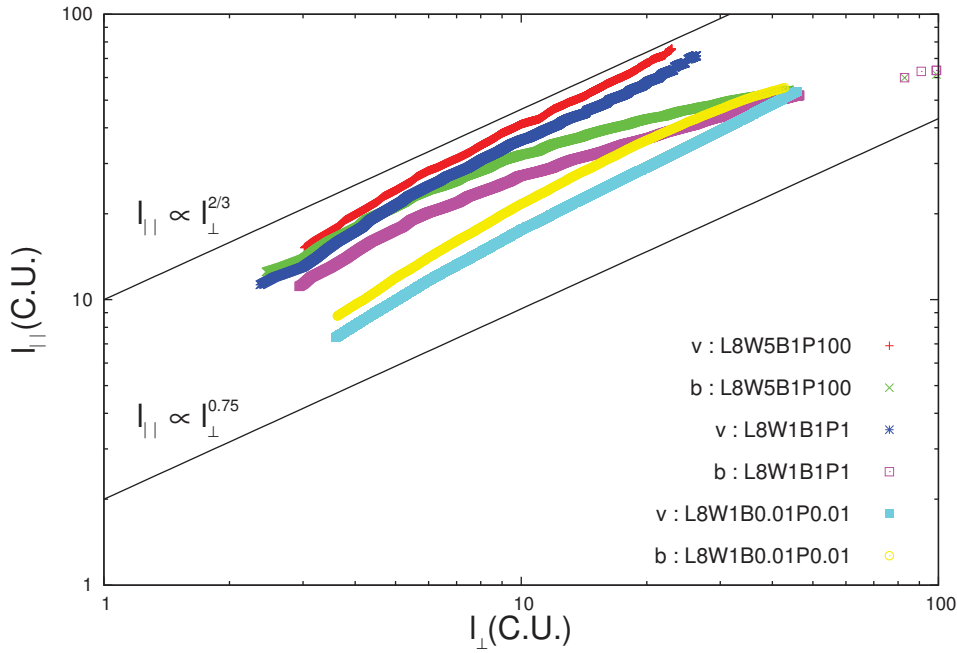


FIGURE 5.17 –  $l_{||} = f(l_{\perp})$  pour les simulations L8W1B0.01P0.01C5, L8W1B1P1C5, et L8W1B1P100C5.

La perte d'anisotropie avec l'augmentation du niveau de turbulence s'explique en partie avec l'intermittence élevée que provoquent les grands nombres de Mach. Cependant, les petites échelles conservent leur niveau d'anisotropie. Ceci nous amène à considérer d'autres méthodes pour quantifier l'anisotropie, que nous avons détailler dans la section suivante.

## 5.4 La méthode des champs locaux

Le champ magnétique moyen devient du même ordre de grandeur que la fluctuation magnétique, ce qui conduit à considérer une zone de l'espace dans laquelle la moyenne du champ magnétique est grande devant ses déviations locales.

Une façon simple de procéder est de définir une sphère  $\mathcal{S}$  de rayon  $\sigma$  telle que le champ magnétique local soit défini comme

$$\mathbf{B}_L(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (5.16)$$

Une manière moins brutale de procéder est de faire la moyenne pondérée par une gaussienne des champs magnétiques autour de la cellule considérée. Soit  $\phi_{\sigma}$  défini comme

$$\phi_{\sigma}(\mathbf{x}) = N_{\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{\sigma^2}\right], \quad (5.17)$$

où  $N_\sigma$  est le facteur de normalisation. A partir de l'équation (5.17), on peut définir le champs local  $\mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x})$  comme

$$\mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x}' \mathbf{B}(\mathbf{x}') \phi_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.18)$$

où  $\mathcal{V}$  est l'ensemble du volume du cube. On définit de la même manière le champ de vitesse  $\mathbf{V}_\sigma(\mathbf{x})$  tel que

$$\mathbf{V}_\sigma(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x}' \mathbf{u}(\mathbf{x}') \phi_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.19)$$

avec  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse fluide.

En analysant l'équation (5.18), on s'aperçoit que si  $\sigma = 0$ , alors  $\phi_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  et l'équation (5.18) devient

$$\mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (5.20)$$

De même, si  $\sigma \rightarrow \infty$ , alors  $\phi_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow N_\sigma$  et l'équation (5.18) devient

$$\mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{B}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{V}} = \mathbf{B}_0. \quad (5.21)$$

Nous avons utilisé cette méthode de calcul sur la simulation L8W1B1P1C5, et nous avons tracé les transformées de Fourier des champs magnétiques  $\mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x})$  sur la figure 5.18, où l'on constate que les petites échelles sont atténuées à mesure que  $\sigma$  augmente. Ici, les  $\sigma$  sont exprimés en taille de boîte. Plus loin, nous utiliserons également les valeurs de sigma en longueur de cellules élémentaires. Pour passer de l'un à l'autre il suffit de multiplier par le nombre de cellules dans une longueur de boîte. Ici, comme la résolution est  $256^3$ , il suffit donc de multiplier par 256 pour avoir la valeur de  $\sigma$  en nombre de cellules.

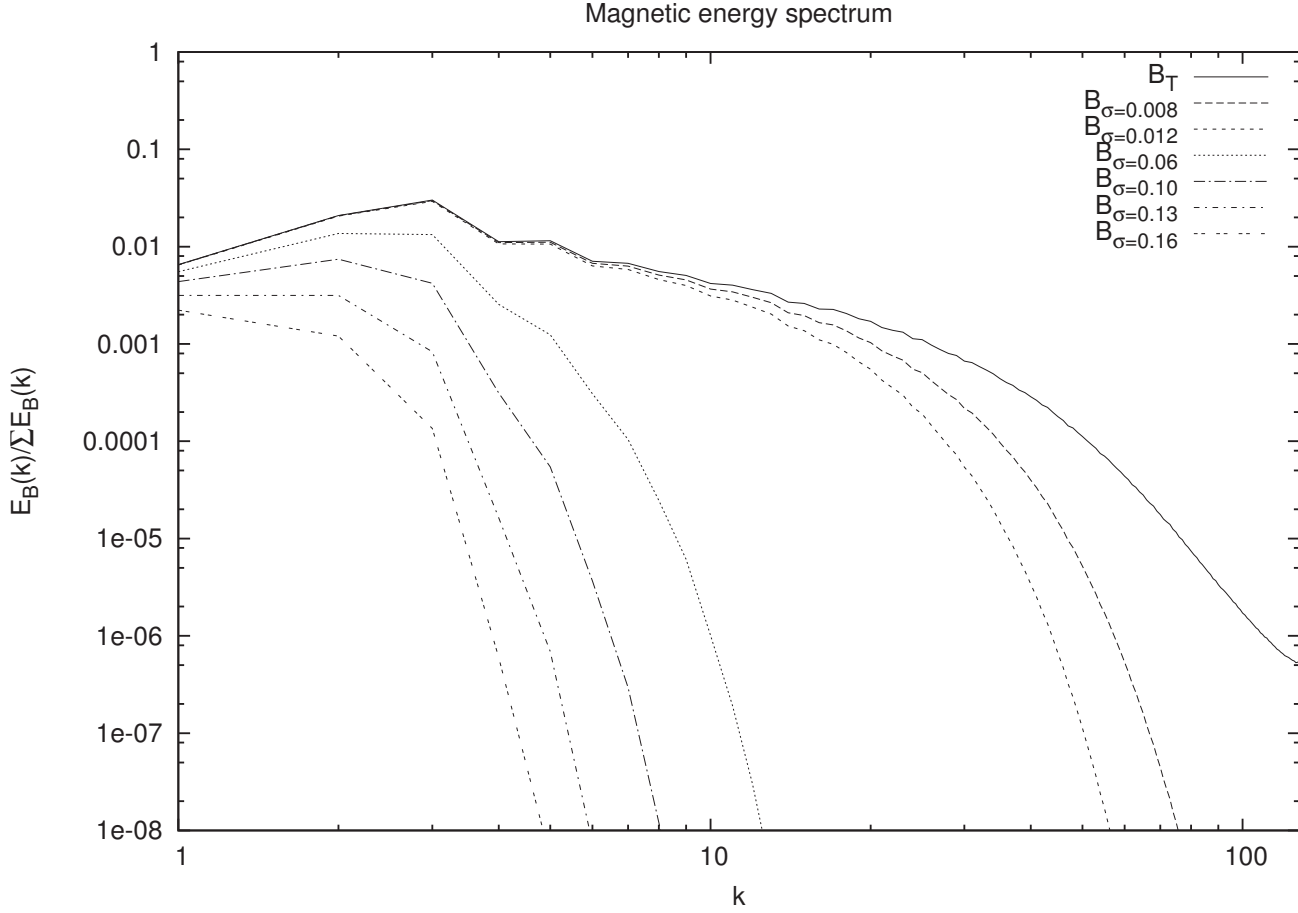


FIGURE 5.18 – Transformées de Fourier des champs locaux  $\mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x})$  de la simulation L8W1B1P1C5. La courbe en trait plein correspond à la transformée de Fourier du champ total.

Comme le montre la figure 5.18, les petites échelles sont très rapidement atténuées avec l'augmentation de  $\sigma$ . De même, la figure 5.19 illustre également ce phénomène, mais cette fois dans l'espace réel, où on a représenté les lignes de champ magnétique pour des valeurs de  $\sigma$  diminuant.

Nous allons maintenant tracer les fonctions de structure en remplaçant la définition donnée par l'équation 5.14 par  $B_l = B_\sigma$ .

$$SF^b(R, z) = \langle |\mathbf{b}_\sigma(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_\sigma(\mathbf{x}')| \rangle_{\mathcal{V}}, \quad (5.22)$$

où les  $\mathbf{b}_\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x})$ , et  $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$  la moyenne sur l'ensemble du volume du domaine de calcul. Les variables  $R$  et  $z$  de l'équation (5.22) sont définies comme

$$\begin{aligned} R \equiv l_\perp &= |\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x})|, \\ z \equiv l_\parallel &= \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x}) / B_\sigma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.23)$$



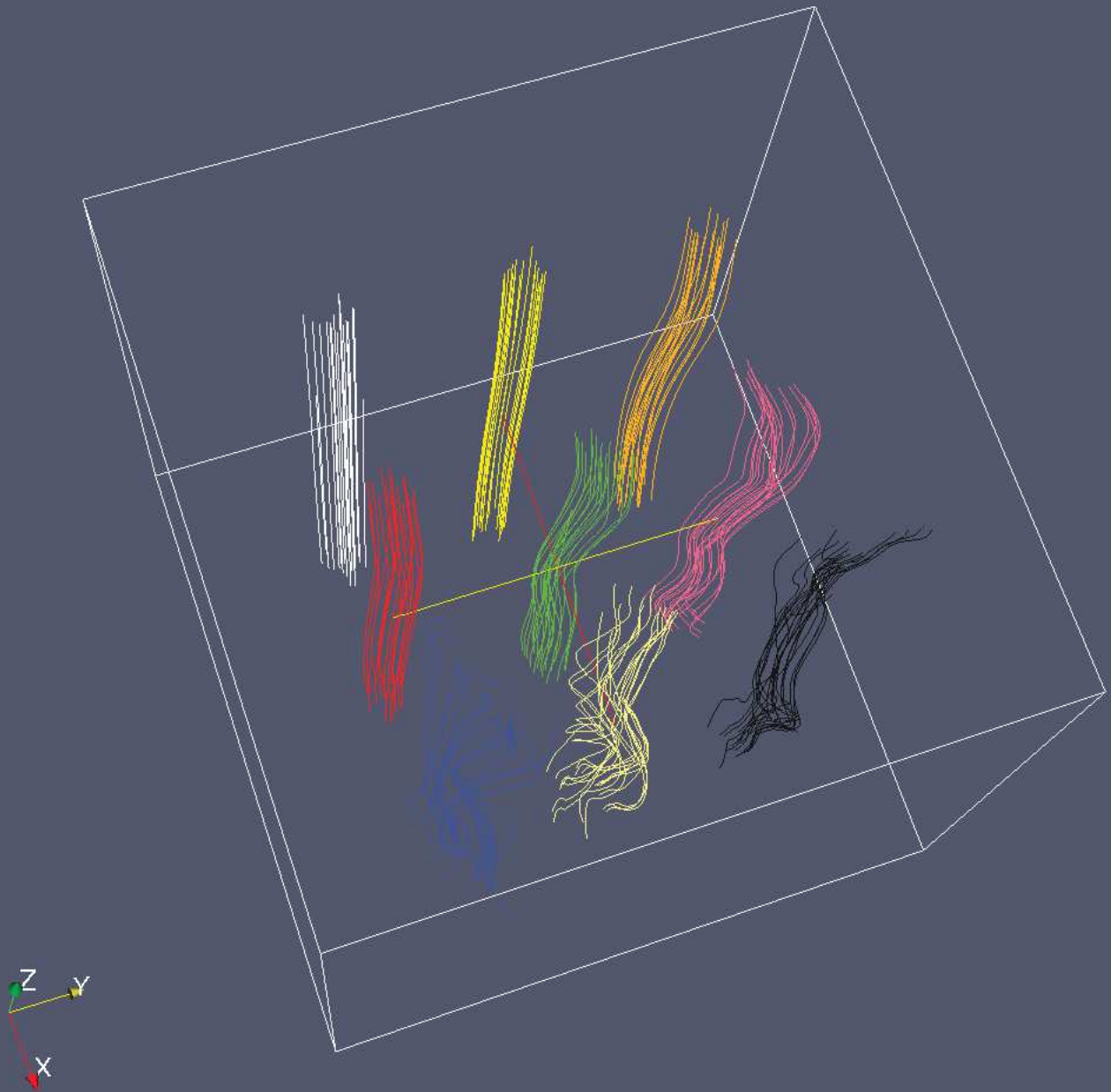


FIGURE 5.19 – Représentation des lignes de champ dans le cube de simulation pour différentes valeurs de  $\sigma$ . En blanc,  $\sigma = 128$  cellules ; en jaune,  $\sigma = 64$  ; en orange,  $\sigma = 42$  ; en rouge,  $\sigma = 34$  ; en vert,  $\sigma = 25$  ; en rose,  $\sigma = 16$  ; en bleu,  $\sigma = 8$  ; en beige,  $\sigma = 2$  ; en noir, c'est le champ total.

Nous avons représenté sur la figure 5.20 les isocontours de la surface  $\mathbf{F}^b(l_{\perp}, l_{\parallel})$  pour  $\sigma = \{16, 34, 64\}$ .

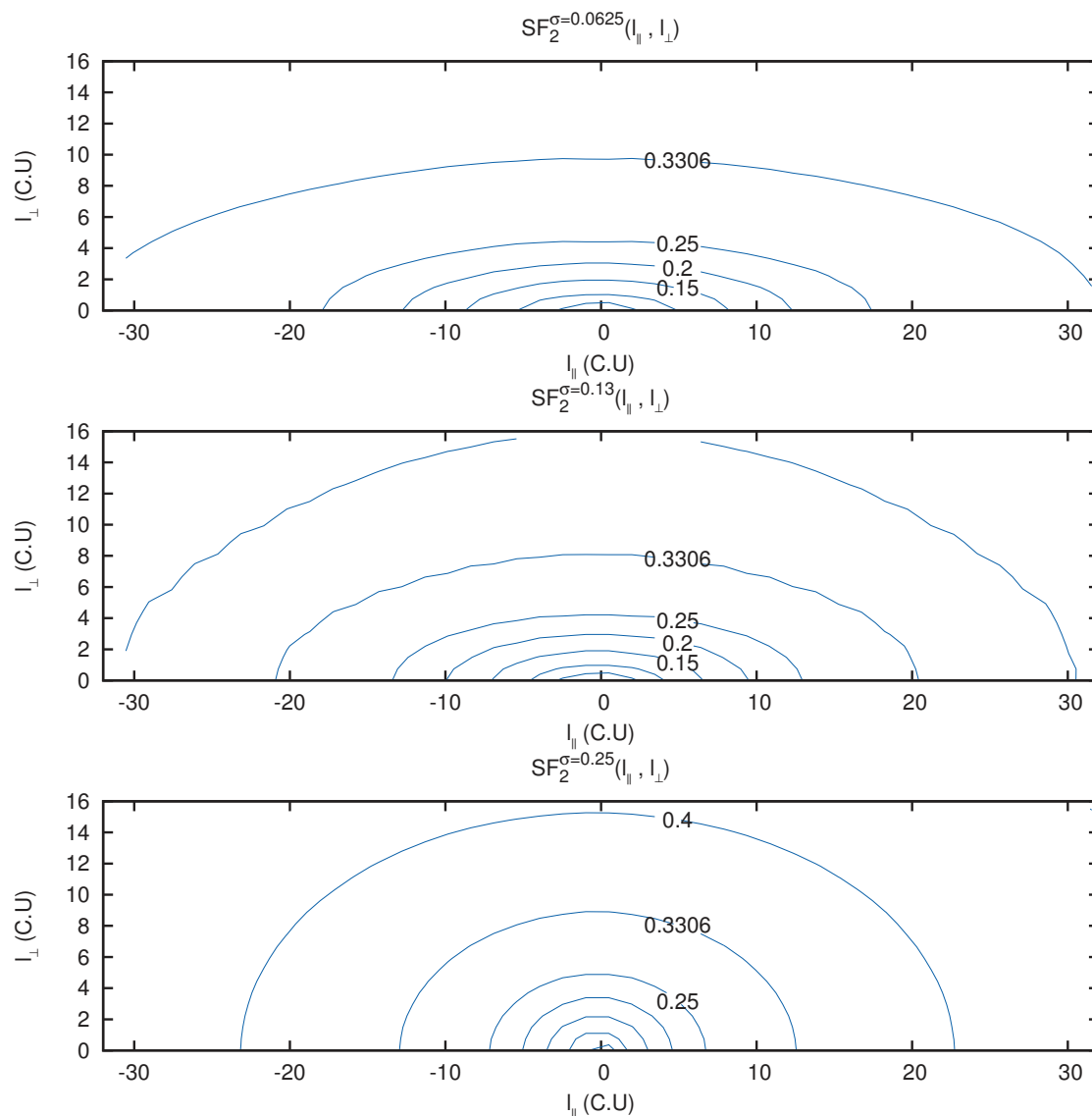


FIGURE 5.20 – Iso-contour de la surface  $F^b(R, z)$  pour  $\sigma = 16$  (en haut),  $\sigma = 34$  (au centre),  $\sigma = 64$  (en bas). On remarque que l'anisotropie diminue à mesure que  $\sigma$  augmente.

Nous avons tracé les ensembles de points qui satisfont

$$F^b(0, l_{\parallel}) = F^b(l_{\perp}, 0), \quad (5.24)$$

dans la figure 5.21. En observant cette dernière, il apparaît que les valeurs de filtrage  $\sigma \in [13 : 16]$  produisent des champs ayant une géométrie presque isotrope.

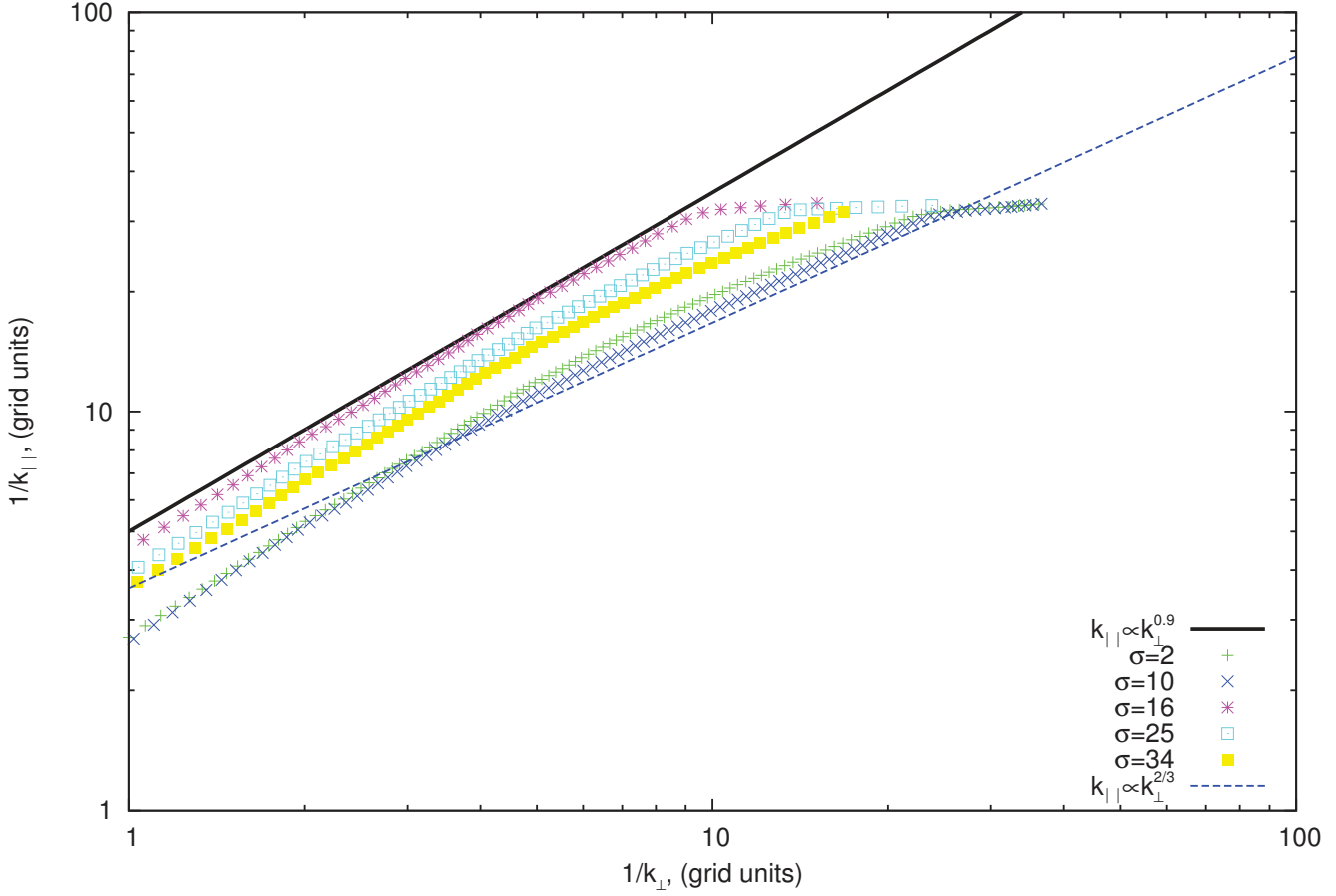


FIGURE 5.21 – Relation d’anisotropie pour les différents champs locaux calculés à partir de la simulation L8W1B1P1C5. On remarque que les valeurs de  $\sigma \in [13 : 16]$  produisent des champs avec une relation d’anisotropie  $k_{\parallel} \propto k_{\perp}^{0.9}$ .

### 5.4.1 Discussion

L’étude de l’anisotropie des champs locaux semble confirmer les résultats précédents [17], notamment à travers la figure 5.20. Cependant, certains effets sont difficiles à expliquer, comme les écarts à la balance critique de Goldreich Sridhar pour des valeurs de  $\sigma^{-1}$  comprises dans la zone inertielle du spectre. Plusieurs investigations restent à réaliser pour compléter cette étude, comme étudier le champ local de simulations de plus haute résolution.

Nous avons également choisi une forme pour la fonction de filtrage de type gaussienne (équation (5.17)), et il serait intéressant d’introduire une échelle parallèle et une échelle perpendiculaire pour cette forme de filtrage, telles que

$$\phi_{\sigma_{\perp}\sigma_{\parallel}}(\mathbf{x}) = N_{\sigma_{\perp},\sigma_{\parallel}} \exp \left[ -\frac{\mathbf{x}_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}^2} - \frac{\mathbf{x}_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}^2} \right], \quad (5.25)$$

pour mettre éventuellement en lumière un effet de l'anisotropie.

Sans prendre un paramètre de filtrage, nous pourrions également remplacer la moyenne pondérée de l'équation (5.18) par le calcul de la moyenne dans une sphère de rayon  $\sigma$ , ou encore par le calcul de la moyenne dans un ellipsoïde de rayons  $\sigma_{\perp}$  et  $\sigma_{\parallel}$  tels que

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp}^{2/3}. \quad (5.26)$$



## Troisième partie

# Etude numérique du transport des rayons cosmiques



# Chapitre 6

## Implémentation de l'intégrateur

### 6.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de définir les techniques numériques qui seront utilisées par la suite pour réaliser les expériences de particules test. Ces expériences consistent à injecter un grand nombre de particules, d'enregistrer leurs trajectoires, et de calculer les grandeurs moyennes caractéristiques du transport, telles que le libre parcours moyen ou les coefficients de diffusion.

Je présenterai dans la section 6.2 les différentes méthodes d'interpolation que j'ai implémenté pour RAMSES, utilisées pour déterminer la valeur des champs électromagnétiques à la position des particules. En particulier, le paragraphe 6.2.2 abordera l'interpolation linéaire, et le paragraphe suivant (6.2.3) l'interpolation par spline cubique.

Après avoir discuté les schémas d'interpolation, j'aborderai les différents intégrateurs de trajectoire que j'ai implémentés pour traquer les particules dans la section 6.3. Enfin, la section 6.4 fera l'objet de la comparaison de toutes ces techniques, dans le but de déterminer le meilleur compromis entre précision et temps de calcul.

### 6.2 Equations et interpolation des champs

Dans cette section je détaille le fonctionnement de l'intégrateur développé dans le cadre de cette étude, et notamment les méthodes mises en oeuvre pour estimer la valeur des champs électromagnétiques  $\mathbf{B}(\mathbf{x}_p)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{x}_p)$  à la position de la particule  $\mathbf{x}_p$ .

Le système d'équation utilisé est celui des équations (2.1) et (2.2) que l'on réécrit pour le traitement numérique [8]



$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}_i}{d\tau} &= \frac{\hat{v}_i}{\hat{\gamma}}, \\ \frac{d\hat{v}_i}{d\tau} &= e_i + \epsilon^{ijk} \frac{\hat{v}_j}{\hat{\gamma}} b_k,\end{aligned}\tag{6.1}$$

avec  $\epsilon^{ijk}$  le symbole de Levi-Civita, et

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= \frac{\gamma}{\gamma_0}, \\ \hat{v} &= \hat{\gamma} \frac{v_p}{c}, \\ e_i &= \frac{E_i}{B_0}, \\ b_i &= \frac{B_i}{B_0}, \\ d\tau &= \frac{qB_0}{\gamma_0 mc} dt, \\ \hat{x} &= \frac{qB_0}{\gamma_0 mc^2} \cdot x,\end{aligned}\tag{6.2}$$

où les quantités  $m$ ,  $c$ ,  $q$  représentent les grandeurs usuelles. Les composantes du champ magnétique  $B_i$ , et électrique  $E_i$  sont les champs électromagnétiques à la position de la particule. Le système d'équation (6.1) permet d'utiliser des facteurs de Lorentz très élevés, ce qui sera exploité dans cette étude.

### 6.2.1 Initialisation

L'énergie est fixée et égale pour toutes les particules. Ces dernières sont placées spatialement de manière aléatoire dans le cube de simulation.

Une fois les particules placées, la suite consiste au calcul de la vitesse.  $\gamma$  étant fixé, la norme de la vitesse l'est également, puisque  $\beta^2 = 1 - 1/\gamma^2$ . Les composantes de la vitesse sont déterminées à partir du champ magnétique  $\mathbf{B}$ , et de deux autres vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ , tous deux perpendiculaires à  $B$ , tels que  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{B}/B]$  forment un trièdre direct.

Pour chaque particule, le cosinus de l'angle d'attaque  $\mu$  est tiré aléatoirement, de sorte que la distribution en  $\mu$  soit constante. Un autre nombre  $a$  est tiré aléatoirement avec une densité de probabilité constante dans l'intervalle  $[0 : 1]$ . La vitesse est alors donnée par

$$\beta = \frac{\mu\beta}{B} \mathbf{B} + \beta \sqrt{1 - \mu^2} (\cos(2\pi a) \mathbf{e}_1 + \sin(2\pi a) \mathbf{e}_2).\tag{6.3}$$

Avec les conditions initiales (4.6), et en imposant  $\mu = 0$ , j'ai mesuré les rayons et périodes de Larmor pour différentes énergies de particules, résumées dans le tableau 6.1, où les  $\Delta R_L$  et  $\Delta t_L$  sont définis comme

$\gamma$	$R_{L,exp}$	$\Delta R_L$	$t_{L,exp}$	$\Delta t_L$
29523.58	3.00E-02	3.81E-08	4.88E-06	2.00E-04
59047.17	6.00E-02	3.35E-08	9.76E-06	2.01E-04
88570.76	9.E-02	6.25E-08	1.5E-005	2.E-04
98411.95	1.00E-01	8.07E-08	1.63E-05	2.02E-04

TABLE 6.1 – Mesure du rayon de Larmor  $R_{L,exp}$  obtenu dans un champ uniforme d'amplitude  $B_0 = 1 \mu G$ , avec la mesure de la période de giration  $t_{L,exp}$ , et leurs erreurs relatives, calculées par rapport à la valeur théorique  $\Delta R_L$  et  $\Delta t_L$ .

$$\begin{aligned}\Delta R_L &= \frac{|R_{L,th} - R_{L,exp}|}{R_{L,th}}, \\ \Delta t_L &= \frac{|t_{L,th} - t_{L,exp}|}{t_{L,th}},\end{aligned}\tag{6.4}$$

avec les  $R_{L,th}$  et  $t_{L,th}$  les valeurs théoriques du rayon de Larmor et de la gyro-période. Le tableau 6.1 montre que les erreurs relatives sont faibles, et constantes avec l'énergie des particules.

Avant d'effectuer une étude plus approfondie du transport, nous devons toutefois aborder la question délicate de l'interpolation des champs. En effet, si les particules peuvent évoluer dans l'ensemble du domaine de calcul, les champs électromagnétiques sont, au contraire, stockés sur la grille des éléments finis. Il est donc nécessaire d'interpoler les champs du point de la grille vers la position de la particule.

### 6.2.2 Schéma linéaire CIC

La première méthode consiste à calculer le champ magnétique  $\mathbf{B}$  à la position de la particule  $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)$  comme le barycentre des champs magnétiques présents dans les 8 cellules les plus proches :

$$B_i(x_p, y_p, z_p) = \sum_{n=1}^8 \alpha_n B_{n,i},\tag{6.5}$$

avec les  $B_{n,i}$  représentant la composante  $i$  du champ magnétique de la cellule  $n$ , et

$$\sum_{n=1}^8 \alpha_n = 1.\tag{6.6}$$

Les  $\alpha_n$  sont les pondérations du barycentre, et correspondent au volume opposé à la cellule  $j$  (figure 6.1). Si  $\Delta V = \Delta X \Delta Y \Delta Z$ , est le volume d'une cellule, on a

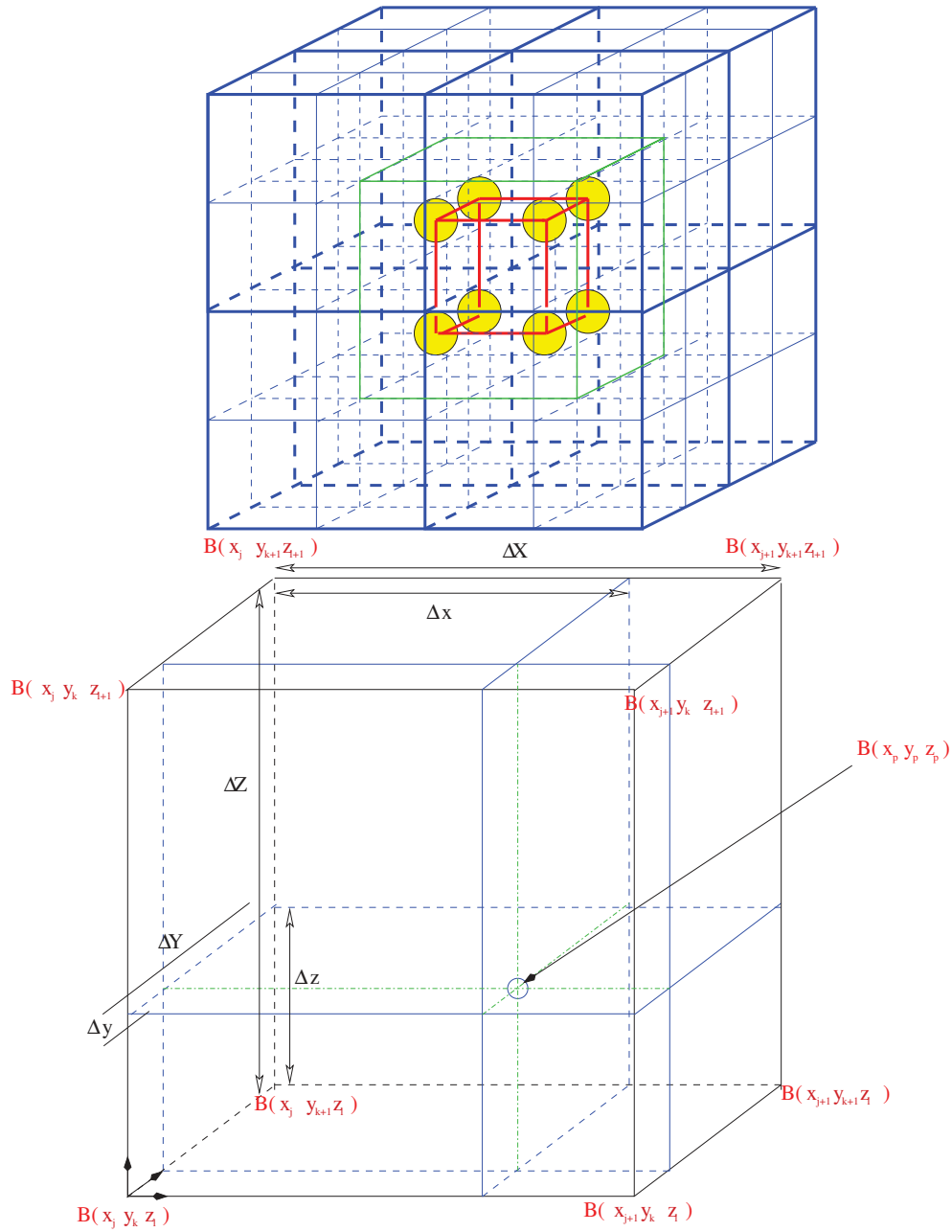


FIGURE 6.1 – En haut, position à l'intérieur de la grille : le cube en vert représente la dimension d'une grille. En bas, position de la particule entre les huit cellules représentées par le cube rouge de la figure précédente. Ici, les sommets du cube coïncident chacun avec le centre d'une cellule, dans lesquelles les variables MHD sont stockées.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \Delta V^{-1} \begin{bmatrix} (\Delta X - \Delta x) & (\Delta Y - \Delta y) & \Delta z \\ (\Delta X - \Delta x) & \Delta y & \Delta z \\ \Delta x & (\Delta Y - \Delta y) & \Delta z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix}, \\
\alpha_2 &= \Delta V^{-1} \begin{bmatrix} (\Delta X - \Delta x) & (\Delta Y - \Delta y) & \Delta z \\ (\Delta X - \Delta x) & \Delta y & \Delta z \\ \Delta x & (\Delta Y - \Delta y) & \Delta z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix}, \\
\alpha_3 &= \Delta V^{-1} \begin{bmatrix} (\Delta X - \Delta x) & (\Delta Y - \Delta y) & \Delta z \\ (\Delta X - \Delta x) & \Delta y & \Delta z \\ \Delta x & (\Delta Y - \Delta y) & \Delta z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix}, \\
\alpha_4 &= \Delta V^{-1} \begin{bmatrix} (\Delta X - \Delta x) & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ (\Delta X - \Delta x) & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \end{bmatrix}, \\
\alpha_5 &= \Delta V^{-1} \begin{bmatrix} (\Delta X - \Delta x) & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ (\Delta X - \Delta x) & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \end{bmatrix}, \\
\alpha_6 &= \Delta V^{-1} \begin{bmatrix} (\Delta X - \Delta x) & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ (\Delta X - \Delta x) & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \end{bmatrix}, \\
\alpha_7 &= \Delta V^{-1} \begin{bmatrix} (\Delta X - \Delta x) & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ (\Delta X - \Delta x) & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \end{bmatrix}, \\
\alpha_8 &= \Delta V^{-1} \begin{bmatrix} (\Delta X - \Delta x) & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ (\Delta X - \Delta x) & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & (\Delta Y - \Delta y) & (\Delta Z - \Delta z) \\ \Delta x & \Delta y & (\Delta Z - \Delta z) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{6.7}$$

où les  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  sont les distances des sommets à la particule (figure 6.1).

En utilisant l'équation (6.5), nous sommes maintenant en mesure de calculer le champ magnétique à la position de la particule en utilisant un schéma d'interpolation qui n'est autre qu'un Spline 3D de premier ordre. Le champ électrique est lui aussi interpolé avec cette méthode, en utilisant cette fois la relation

$$E_i = \frac{1}{c} \epsilon^{i,j,k} u_j B_k, \tag{6.8}$$

où  $u_j$  est la composante de la vitesse fluide, et  $c$  la vitesse de la lumière.

Cette méthode est implémentée dans RAMSES sous l'appellation de Cloud-in-Cell (CIC) pour interpoler la valeur du champ de force gravitationnel sur les objets gravitants. J'ai donc modifié ce module pour qu'il opère sur les champs électromagnétiques du module de propagation.

### 6.2.3 Spline cubique

D'autres études ont utilisé des schémas d'interpolation d'ordre plus élevé comme un spline cubique tridimensionnel [8, 104, 105]. Le principe d'un tel schéma est de prévenir une éventuelle variation brutale des champs, en introduisant la dérivée seconde du champ interpolé. Cela évite l'apparition d'instabilité dans le traceur de particules.

L'algorithme utilisé consiste à interpoler les dimensions une à une, ce qui revient à considérer le problème à une dimension. Soit  $\Delta X = x_{i+1} - x_i$  un intervalle contenant une particule à la position  $x$ , on définit [76]

$$\begin{aligned}
C_x &= \frac{x_{i+1} - x}{\Delta X}, \\
D_x &= 1 - C_x = \frac{x - x_i}{\Delta X}, \\
F_x &= \frac{1}{6} (C_x^3 - C_x) \Delta X^2, \\
G_x &= \frac{1}{6} (D_x^3 - D_x) \Delta X^2.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$G_x = \frac{1}{6} (D_x^3 - D_x) \Delta X^2. \tag{6.10}$$

La composante  $l$  du champ magnétique interpolée suivant  $x$  s'écrit alors

$$\begin{aligned}
B_l^x(y_j, z_k) &= C_x B_l(x_i, y_j, z_k) + D_x B_l(x_{i+1}, y_j, z_k) \\
&+ F_x \partial_{xx} B_l(x_i, y_j, z_k) + G_x \partial_{xx} B_l(x_{i+1}, y_j, z_k).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

La difficulté vient de l'aspect tridimensionnel du problème. En effet, la quantité  $B_l^x(y_j, z_k)$  est valable sur l'arête du cube où  $y = y_j$  et  $z = z_k$ . Pour la suite, j'écrirai donc  $B_l^x$  pour les trois autres arêtes

$$\begin{aligned}
B_l^x(y_{j+1}, z_k) &= C_x B_l(x_i, y_{j+1}, z_k) + D_x B_l(x_{i+1}, y_{j+1}, z_k) \\
&+ F_x \partial_{xx} B_l(x_i, y_{j+1}, z_k) + G_x \partial_{xx} B_l(x_{i+1}, y_{j+1}, z_k),
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
B_l^x(y_j, z_{k+1}) &= C_x B_l(x_i, y_j, z_{k+1}) + D_x B_l(x_{i+1}, y_j, z_{k+1}) \\
&+ F_x \partial_{xx} B_l(x_i, y_j, z_{k+1}) + G_x \partial_{xx} B_l(x_{i+1}, y_j, z_{k+1}),
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
B_l^x(y_{j+1}, z_{k+1}) &= C_x B_l(x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) + D_x B_l(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1}) \\
&+ F_x \partial_{xx} B_l(x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) + G_x \partial_{xx} B_l(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1}).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Une fois les  $B_l^x$  obtenus sur les arêtes, je calcule calculons les champs sur les faces,  $B_l^{xy}$ , d'équation  $z = z_k$  et  $z = z_{k+1}$  avec

$$\begin{aligned}
B_l^{xy}(z_k) &= C_y B_l^x(y_j, z_k) + D_y B_l^x(y_{j+1}, z_k) \\
&+ F_y \partial_{yy} B_l^x(y_j, z_k) + G_y \partial_{yy} B_l^x(y_{j+1}, z_k),
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
B_l^{xy}(z_{k+1}) &= C_y B_l^x(y_j, z_{k+1}) + D_y B_l^x(y_{j+1}, z_{k+1}) \\
&+ F_y \partial_{yy} B_l^x(y_j, z_{k+1}) + G_y \partial_{yy} B_l^x(y_{j+1}, z_{k+1}),
\end{aligned} \tag{6.16}$$

où  $\partial_{yy}B_l^x(y_j, z_k)$  et  $\partial_{yy}B_l^x(y_{j+1}, z_k)$  sont déterminés par interpolation linéaire

$$\begin{aligned}\partial_{yy}B_l^x(y_j, z_k) &= C_x\partial_{yy}B_l(x_i, y_j, z_k) + D_x\partial_{yy}B_l(x_{i+1}, y_j, z_k), \\ \partial_{yy}B_l^x(y_{j+1}, z_k) &= C_x\partial_{yy}B_l(x_i, y_{j+1}, z_k) + D_x\partial_{yy}B_l(x_{i+1}, y_{j+1}, z_k),\end{aligned}\quad (6.17)$$

ainsi que les  $\partial_{yy}B_l^x(y_j, z_{k+1})$  et  $\partial_{yy}B_l^x(y_{j+1}, z_{k+1})$ , puisqu'il suffit de remplacer  $k$  dans l'équation (6.17) par  $k + 1$ .

En combinant les équations (6.16) et (6.11), on obtient la valeur du champ magnétique à la position de la particule

$$B_l(x, y, z) = C_zB_l^{xy}(z_k) + D_zB_l^{xy}(z_{k+1}) + F_z\partial_{zz}B_l^{xy}(z_k) + G_z\partial_{zz}B_l^{xy}(z_{k+1}),\quad (6.18)$$

où les dérivées secondes sont calculées à partir d'un spline linéaire bidimensionnel

$$\begin{aligned}\partial_{zz}B_l^{xy}(z_k) &= C_xC_y\partial_{zz}B_l(x_i, y_j, z_k) + D_xC_y\partial_{zz}B_l(x_{i+1}, y_j, z_k) \\ &+ C_xD_y\partial_{zz}B_l(x_i, y_{j+1}, z_k) + D_xD_y\partial_{zz}B_l(x_{i+1}, y_{j+1}, z_k),\end{aligned}\quad (6.19)$$

$$\begin{aligned}\partial_{zz}B_l^{xy}(z_{k+1}) &= C_xC_y\partial_{zz}B_l(x_i, y_j, z_{k+1}) + D_xC_y\partial_{zz}B_l(x_{i+1}, y_j, z_{k+1}) \\ &+ C_xD_y\partial_{zz}B_l(x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) + D_xD_y\partial_{zz}B_l(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1}).\end{aligned}\quad (6.20)$$

Au final, le spline cubique à trois dimensions fait intervenir sept fois l'opération de spline cubique unidimensionnel, et dix fois le calcul d'un spline de premier ordre pour estimer les dérivées secondes, ce qui a naturellement un coût en temps de calcul<sup>1</sup>.

---

1. Afin d'économiser le temps de calcul, il est plus rapide de définir les 32 coefficients et d'implémenter la forme complète du spline cubique

$$\begin{aligned}B_l(x, y, z) &= (C_xC_yC_z + F_xC_yC_z\partial_{xx} + C_xF_yC_z\partial_{yy} + C_xC_yF_z\partial_{zz})B_l(x_i, y_j, z_k) \\ &+ (C_xC_yD_z + F_xC_yD_z\partial_{xx} + C_xF_yD_z\partial_{yy} + C_xC_yG_z\partial_{zz})B_l(x_i, y_j, z_{k+1}) \\ &+ (C_xD_yC_z + F_xD_yC_z\partial_{xx} + C_xG_yC_z\partial_{yy} + C_xD_yF_z\partial_{zz})B_l(x_i, y_{j+1}, z_k) \\ &+ (C_xD_yD_z + F_xD_yD_z\partial_{xx} + C_xG_yD_z\partial_{yy} + C_xD_yG_z\partial_{zz})B_l(x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) \\ &+ (D_xC_yC_z + G_xC_yC_z\partial_{xx} + D_xF_yC_z\partial_{yy} + D_xC_yF_z\partial_{zz})B_l(x_{i+1}, y_j, z_k) \\ &+ (D_xC_yD_z + G_xC_yD_z\partial_{xx} + D_xF_yD_z\partial_{yy} + D_xC_yG_z\partial_{zz})B_l(x_{i+1}, y_j, z_{k+1}) \\ &+ (D_xD_yC_z + G_xD_yC_z\partial_{xx} + D_xG_yC_z\partial_{yy} + D_xD_yF_z\partial_{zz})B_l(x_{i+1}, y_{j+1}, z_k) \\ &+ (D_xD_yD_z + G_xD_yD_z\partial_{xx} + D_xG_yD_z\partial_{yy} + D_xD_yG_z\partial_{zz})B_l(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1}),\end{aligned}\quad (6.21)$$

qui ne fait appel qu'à une fonction de 10 variables à travers 32 coefficients.

### 6.2.4 Piecewise Cubic Spline

Une dernière méthode implémentée est une méthode d'interpolation de troisième ordre, dite "Piecewise Cubic Spline", ou *PCS*, et consiste à utiliser les 64 cellules entourant la particule (cf. figure 6.2).

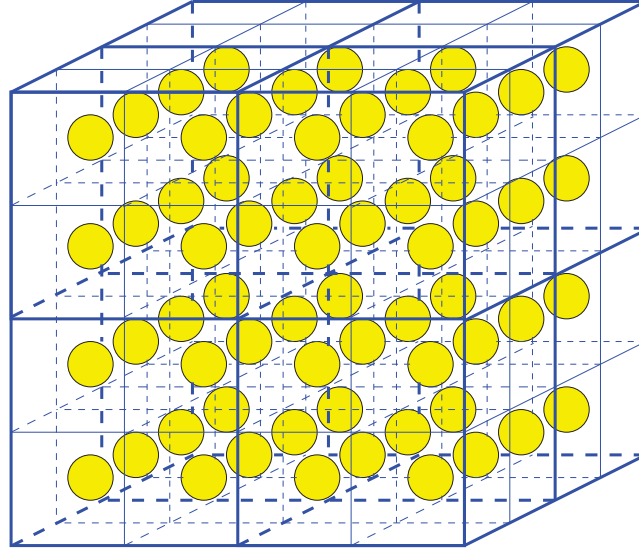


FIGURE 6.2 – Utilisation des 64 cellules les plus proches de la particule. Les points représentent le centre de chacune d'elle, où l'on retrouve les variables MHD.

Le principe de calcul est le même que pour la méthode CIC, où l'équation (6.5) est remplacée par

$$B_i(x_p, y_p, z_p) = \sum_{n=1}^{64} \alpha_n(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_p) B_{n,i}, \quad (6.22)$$

où les  $\alpha_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_p)$  sont calculés pour chacune des directions. Par exemple, pour la direction  $x$ , si on définit l'écart  $\delta = x_p - x_n$ , alors la méthode *PCS* donne

$$\alpha_n(\delta) = \frac{1}{6} \begin{cases} 4 - 6\delta^2 + 3|\delta|^3 & \text{si } |\delta| < 1 \\ (2 - |\delta|)^3 & \text{si } |\delta| \in [1; 2[ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.23)$$

Cette méthode d'interpolation vérifie la relation

$$\sum_{n=1}^{64} \alpha_n(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_p) = 1. \quad (6.24)$$

La comparaison de ces schémas d'interpolation sera abordée dans la section 6.4. Maintenant que nous sommes en mesure de déterminer les champs électromagnétiques à la position de la particule, je peux passer à l'intégrateur des trajectoires.

## 6.3 Les schémas numériques

Dans cette section, je détaillerai les différents traceurs de particules, c'est-à-dire les schémas numériques, résolvant les équations du mouvement des particules, implémentés pour RAMSES. Les différents traceurs ont été introduits au fur et à mesure, dans le souci de trouver un compromis entre la précision de ces différents schémas et la sauvegarde de la ressource principale des centres de calcul nationaux, même si, de manière générale, les traceurs d'ordres moins élevés consomment moins de temps de calcul. Trois méthodes différentes ont été implémentées : la méthode Leap-Frog, le Runge-Kutta et la méthode Burlisch-Stoer. La comparaison de ces différentes techniques sera discutée dans le paragraphe 6.4.2.

### 6.3.1 Schéma Leap-Frog

Il s'agit du traceur original de RAMSES, celui utilisant le champ gravitationnel, engendré par les éléments fluides, sur des particules massives [102]. L'objectif de cette implémentation est double. D'abord, le schéma consomme moins de ressource temporelle que les deux autres méthodes. Ensuite, outre le fait qu'il soit précis au second ordre, il permet également de faire propager des particules tout en laissant les variables MHD évoluer dans le même temps.

La vitesse d'une particule relativiste étant bien plus élevée que la vitesse MHD caractéristique, le temps de variation des champs électromagnétiques par la MHD est donc bien supérieur au temps de transit des particules dans ces mêmes champs. C'est pourquoi je peux raisonnablement faire l'hypothèse que les particules évoluent dans un champ statique. La rétroaction des particules sur les champs MHD pourra être implémentée à partir de ce traceur, puisqu'il s'intègre parfaitement à RAMSES.

Le principe de ce schéma est de calculer l'état de la particule au temps  $n + 1$  en deux étapes. D'abord, la vitesse à  $n + 1/2$  est estimée à partir de l'accélération

$$F_i^n = e_i(\mathbf{x}_p^n) + \epsilon^{ijk} \frac{\hat{v}_j^n}{\hat{\gamma}^n} b_k(\mathbf{x}_p^n), \quad (6.25)$$

via

$$\hat{v}_i^{n+1/2} = \hat{v}_i^n + F_i^n \frac{\Delta t^n}{2}. \quad (6.26)$$

Ensuite, on fait avancer la particule de  $x^n$  à  $x^{n+1}$

$$\hat{x}_i^{n+1} = \hat{x}_i^n + \hat{v}_i^{n+1/2} \Delta t^n, \quad (6.27)$$



et on corrige la vitesse à partir de la valeur de l'accélération (6.25) au temps  $n + 1$

$$\hat{v}_i^{n+1} = \hat{v}_i^{n+1/2} + F_i^{n+1} \frac{\Delta t^n}{2}. \quad (6.28)$$

Une attention toute particulière est portée sur le calcul du produit vectoriel entre la vitesse de la particule et le champ magnétique. En effet, un calcul algébrique conventionnel introduirait des erreurs conséquentes, impliquant, dans le cadre d'une turbulence purement magnétique ( $E = 0$ ) la non conservation de l'énergie. Pour éviter cela, il suffit de remarquer que le produit vectoriel se traduit par une rotation d'axe  $\mathbf{B}$  et d'angle  $\theta^n$  tel que

$$\tan \frac{\theta^n}{2} = -\frac{qB(\mathbf{x}^n) \Delta t^n}{\gamma m c^2}. \quad (6.29)$$

Concrètement, déterminer les composantes de la vitesse se fait par l'intermédiaire de l'algorithme de Boris [11]. Cet algorithme utilise la solution  $\hat{v}_i^n$  pour calculer un vecteur intermédiaire,  $\hat{v}'_i$  tel que

$$\hat{v}'_i = \hat{v}_i^n + \epsilon^{ijk} \hat{v}_j^n t_k, \quad (6.30)$$

où  $\epsilon^{ijk}$  est le symbole de Lévi-Civita, et les  $t_j$  les composantes du vecteur

$$\mathbf{t} = -e^n \tan \frac{\theta^n}{2}, \quad (6.31)$$

où on a défini le vecteur directeur de l'axe de rotation,  $\mathbf{e}^n \equiv \mathbf{e}_B(\mathbf{x}^n)$

$$\mathbf{e}_B(\mathbf{x}^n) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}^n)}{B(\mathbf{x}^n)}. \quad (6.32)$$

Le vecteur intermédiaire  $\hat{\mathbf{v}}'$  est à son tour utilisé pour calculer la solution  $\hat{v}_i^{n+1}$  par la relation

$$\hat{v}_i^{n+1} = \hat{v}_i^n + \epsilon^{ijk} \hat{v}'_j s_k, \quad (6.33)$$

où  $s_k$  est la composante d'un vecteur que l'on définit comme

$$\mathbf{s} = \frac{2\mathbf{t}}{1 + t^2}. \quad (6.34)$$

Cet algorithme est utilisé quel que soit le traceur utilisé, pour garantir une dispersion minimum sur l'énergie de la particule lors du calcul des composantes de la vitesse.

### 6.3.2 Méthode de Runge-Kutta

L'implémentation d'un traceur à base de méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 à pas de temps adaptatif et à erreur contrôlée (ou RK5QC) a été motivé par le souci

de reproduire de précédents résultats sur la propagation de particules chargées en turbulence MHD [8]. Ce traceur a été emprunté dans la seconde édition du Numerical Recipes [76]. Ce type d'algorithme consiste à estimer les pentes à des points intermédiaires sur le pas de temps avant d'en faire une combinaison linéaire avec des coefficients liés à l'ordre du RK.

Le traceur regroupe les vecteurs positions  $\hat{\mathbf{x}}^n$  et vitesses  $\hat{\mathbf{v}}^n$  dans un même vecteur  $y^n$ . Il résout l'équation

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = f(t_n, y^n), \quad (6.35)$$

où  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . La première étape est de déterminer la solution  $k_1$  à partir de la force  $f(t_n, y^n)$  comme première approximation : si  $H_n$  est le pas de temps d'intégration à l'instant  $t_n$ , soit  $H_n = \Delta t = t_{n+1} - t_n$ ,

$$k_1 = H_n f(t_n, y^n). \quad (6.36)$$

Ceci correspond à un schéma d'Euler classique. Ensuite, le traceur segmente le pas de temps d'intégration  $H_n$  suivant les coefficients  $a_i$  du tableau 6.2. En estimant les valeurs de  $y$  le long du pas de temps par

$$\begin{aligned} k_2 &= H_n f(t_n + a_2 H_n, y_n + b_{21} k_1), \\ k_3 &= H_n f(t_n + a_3 H_n, y_n + b_{31} k_1 + b_{32} k_2), \\ k_4 &= H_n f(t_n + a_4 H_n, y_n + b_{41} k_1 + b_{42} k_2 + b_{43} k_3), \\ k_5 &= H_n f(t_n + a_5 H_n, y_n + b_{51} k_1 + b_{52} k_2 + b_{53} k_3 + b_{54} k_4), \\ k_6 &= H_n f(t_n + a_6 H_n, y_n + b_{61} k_1 + b_{62} k_2 + b_{63} k_3 + b_{64} k_4 + b_{65} k_5), \end{aligned} \quad (6.37)$$

i	$a_i$	$b_{ij}$					$c_i$	$c_i^*$
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
j =		1	2	3	4	5		

TABLE 6.2 – Paramètres d'intégration de la méthode RK5QC.

la valeur de  $y^{n+1}$  est alors calculée par

$$y^{n+1} = y^n + \sum_{i=1}^6 c_i k_i, \quad (6.38)$$

où les  $c_i$  sont les coefficients référencés dans le tableau 6.2. L'étape exprimée à travers l'équation (6.38) est répétée avec les quantités  $c_i^*$  pour donner

$$y^{*n+1} = y^n + \sum_{i=1}^6 c_i^* k_i, \quad (6.39)$$

et ainsi estimer l'erreur  $\Delta_n$  sur la détermination de la solution à  $t_{n+1}$

$$\Delta_n \equiv y^{n+1} - y^{*n+1} = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i. \quad (6.40)$$

Le pas de temps  $H_{n+1}$  est réévalué à partir de la relation

$$H_{n+1} = H_n \left| \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \right|^{0.2}, \quad (6.41)$$

ce qui permet de contrôler les variations brutales des forces électromagnétiques.

Cette méthode est plus coûteuse en temps de calcul et je montrerai qu'elle n'offre pas forcément la meilleure solution pour l'intégration des trajectoires (cf. 6.4).

### 6.3.3 Méthode de Burlish-Stoer

Cette méthode a été, quant à elle, implémentée en tant qu'alternative à la méthode RK5QC. Elle n'est cependant pas adaptée à des fonctions aux variations erratiques, ce qui en fait, en général, une méthode avec une certaine fragilité. Elle consiste à faire avancer l'état d'une particule de  $y_n$  à  $y_{n+1}$  où  $\Delta t \equiv H = t_{n+1} - t_n$  peut être grand, voir très grand, devant le pas de temps calculé par RAMSES. Pour ce faire, cette méthode utilise  $m$  segmentations égales du pas de temps  $H$ , avec

$$m = 2, 4, 6, 8, 10, \dots, n_j = 2j, \dots \quad (6.42)$$

Chaque pas de temps  $H$  est indépendant, résultant en un nombre de segmentation  $m$  différent. Pour chaque  $m$ , l'erreur sur la solution à  $y_{n+1}$  est calculée, déterminant si oui ou non  $m$  doit être augmenté. Au-delà d'une certaine valeur de  $m$ , la solution sera considérée comme incalculable, comme c'est le cas lors de la présence de discontinuités sur la trajectoire d'intégration.

Cependant, RAMSES impose le pas de temps  $\Delta t$  à être tel que

$$\Delta t = \alpha \frac{\Delta x}{v_p}, \quad (6.43)$$

où  $v_p$  est la vitesse de la particule,  $\Delta x$  la taille d'une cellule de la grille de calcul, et  $\alpha$  un coefficient de sûreté, en général inférieur à l'unité. Cela signifie qu'en un pas de temps, la particule ne peut pas parcourir une distance supérieure à la taille d'une cellule. Dans cet intervalle de temps, le champ électromagnétique varie lentement, justifiant l'utilisation de cette méthode, mais révèle également que  $m$  sera rarement supérieur à deux, résultant en un schéma classique de point-milieu [76]. La comparaison de ces différents traceur sera l'objet de la section 6.4.

## 6.4 Comparaison

Dans cette section je confronte les différents schémas d'interpolation et d'intégration précédemment listés, et nous identifierons la méthode la plus efficace pour mener à bien les études suivantes. Dans toute cette partie, je négligerai l'effet du champ électrique dans l'équation du mouvement.

Dans un premier temps, je vais souligner le comportement des trajectoires sous l'influence des techniques d'interpolation. Pour cela, je fais propager un échantillon de  $N_p = 1000$  particules, sur deux simulations, utilisant toutes les deux le traceur RK5QC. Les particules ont les mêmes conditions initiales, de sorte que d'une simulation à l'autre, ce soit uniquement la méthode de calcul des champs électromagnétiques qui soit différente.

### 6.4.1 Schémas d'interpolation

#### Influence du rayon de Larmor

La rigidité  $R$  traduit la capacité de déflexion d'une particule sous l'effet d'un champ magnétique. Elle s'exprime comme

$$R = \frac{cp}{q} = B_0 r_L, \quad (6.44)$$

et augmente avec l'énergie de la particule, traduisant le fait qu'une particule de haute énergie sera plus difficilement déviée. Nous pouvons prédire que la méthode d'interpolation influencera très peu la trajectoire d'une particule de haute énergie, puisque celle-ci sera sensible aux fluctuations de grande échelle. A l'inverse, si le rayon de Larmor devient comparable à la taille d'une cellule élémentaire de la grille de calcul, la trajectoire sera grandement influencée par la méthode d'interpolation.

Pour quantifier l'influence de l'interpolation, nous allons tracer la distance moyenne entre les particules, notée  $\delta x$ , définie comme

$$\delta x(t) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left\| \mathbf{x}_i^{(1)}(t) - \mathbf{x}_i^{(3)}(t) \right\|, \quad (6.45)$$

où  $\mathbf{x}_i^{(1)}$  correspond à la position de la particule  $i$  dans la simulation de spline linéaire, et  $\mathbf{x}_i^{(3)}$  la position de la même particule, mais pour la simulation avec le spline cubique. La figure 6.3 trace l'évolution de  $\delta x(t)$  pour deux énergies de particules, pour la simulation *L8W1B1P1C5* (cf. tableau 4.1).

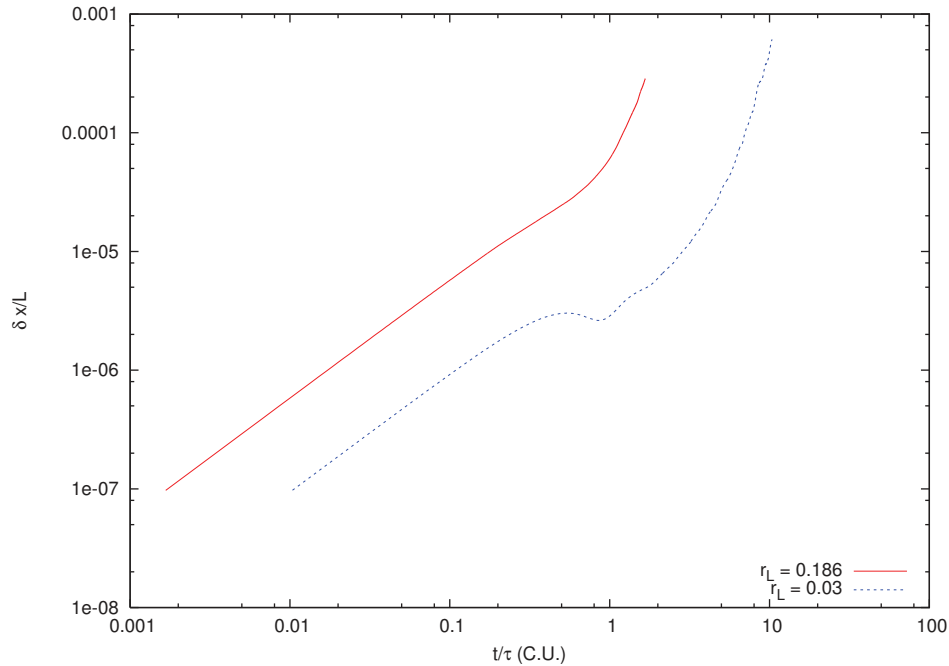


FIGURE 6.3 – Ecart moyen des trajectoires en unité de boîte de calcul  $\delta x/L$  en fonction du temps rapporté à la période de giration  $\tau$  des particules. Ici, la simulation *L8W1B1P1C5* a été utilisée pour initialiser 1000 particules sur 1000 pas de temps RAMSES, avec des énergies correspondant à des rayons de Larmor  $r_L/L = 0.03$  (en vert), et  $r_L/L = 0.186$  (en rouge).

Dans cette figure, l'écart entre les trajectoires croît selon une loi de puissance dans les deux cas de figure, jusqu'à une valeur de  $t = \tau$  au-delà de laquelle les champs électromagnétiques ne sont plus comparables. On remarque que la transition située à  $t = \tau$  est lissée pour les grandes énergies. C'est l'effet que nous attendions, traduisant la dépendance accrue des méthodes d'interpolation sur la trajectoire des particules de faible énergie.

### Influence de l'angle d'attaque

L'angle d'attaque initiale  $\mu_0$  peut également jouer un rôle non négligeable dans la divergence des trajectoires. En effet, plus la vitesse de la particule est alignée avec la ligne de champ, moins la diffusion dans l'espace des phases sera efficace. Sur la figure 6.4, nous remarquons que plus la vitesse initiale est alignée avec le champ magnétique, moins le schéma d'interpolation influe, et ce, même à temps long. Pour les temps inférieurs à une période de giration  $\tau$ , nous remarquons également que la distance moyenne entre les trajectoires suit une loi de puissance. Au-delà de la période de giration, la distance augmente plus rapidement, puisque les champs n'ont plus aucune similarité. Cependant, il est encore trop tôt pour parler de diffusion des

lignes de champ, puisque la séparation des particules représente à  $t = \tau$ , un centième de la taille d'une cellule.

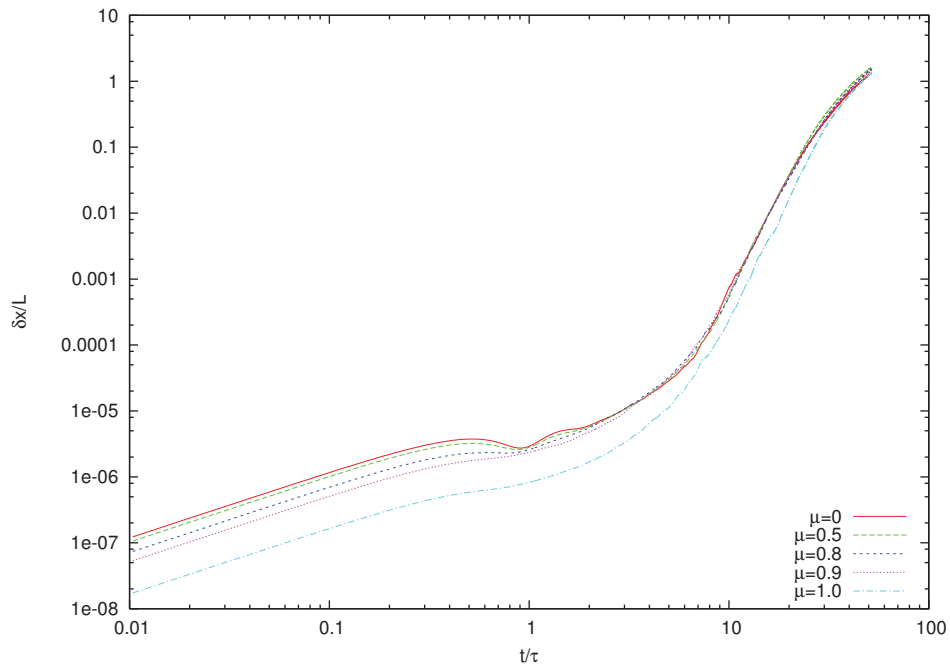


FIGURE 6.4 – Ecart moyen des trajectoires en unité de boîte de calcul  $\delta x/L$  en fonction du temps rapporté à la période de giration  $\tau$  des particules. Ici, la simulation *L8W1B1P1C* a été utilisée pour initialiser 1000 particules sur 50 périodes de giration avec un rayon de Larmor initial  $r_L/L = 10^{-3}$ .

### Influence du niveau de turbulence

Si nous nous intéressons maintenant au niveau de turbulence, nous devrions observer des résultats similaires à ceux des discussions ci-dessus. En effet, l'augmentation du niveau de turbulence rend plus efficace la diffusion des particules, elle même dépendante du schéma d'interpolation.

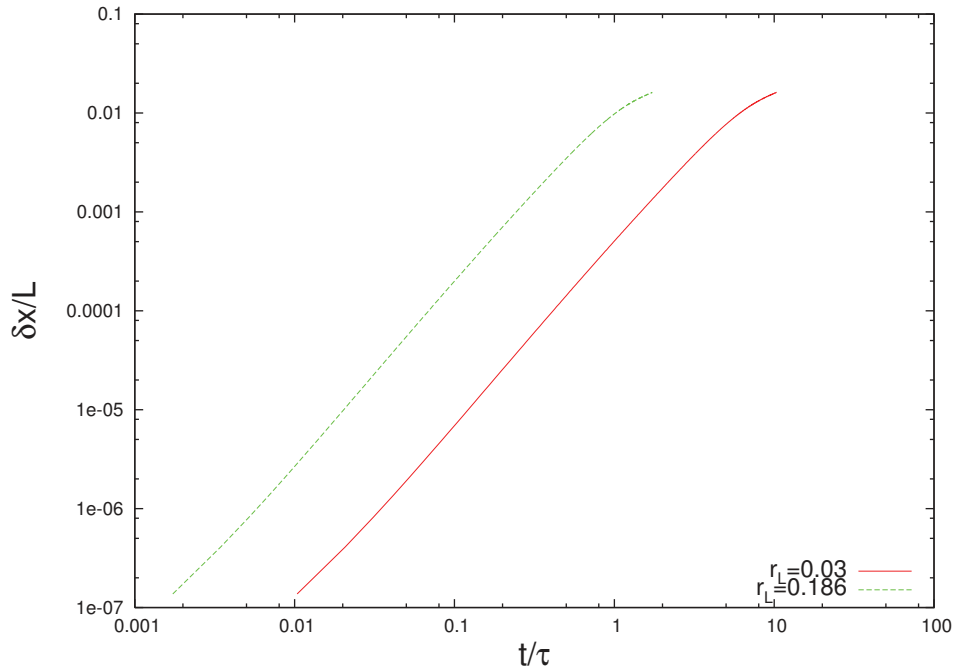


FIGURE 6.5 – Ecart moyen des trajectoires en unité de boîte de calcul  $\delta x/L$  en fonction du temps rapporté à la période de giration  $\tau$  des particules. Ici, la simulation *L8W1B0.01P0.01C5* a été utilisée, où  $M_A = 1.36$ . J'ai initialisé 1000 particules avec une distribution en  $\mu_0$  constante sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , et je les ai fait propager sur un millier de pas de temps RAMSES. La ligne verte discontinue représente l'écart pour des particules avec un rayon de Larmor initial  $r_L/L = 0.186$ , et la ligne continue rouge l'échantillon de particules avec  $r_L/L = 0.03$ .

La comparaison des figures 6.5 et 6.3 illustre particulièrement cet effet, puisque l'écart grandit plus vite dans le cadre d'une turbulence forte, indépendamment de l'énergie des particules.

### Processus d'isotropisation de l'angle d'attaque

Dans cette partie, je m'intéresserai aux grandeurs caractéristiques du transport pour un échantillon de  $10^5$  particules. Nous comparerons les résultats obtenus des temps moyens à longs, afin de quantifier l'effet du schéma d'interpolation sur ces résultats. J'ai initialisé l'ensemble des particules à un angle d'attaque donné. Au cours de cette expérimentation, j'ai calculé l'évolution des quantités relatives aux conditions initiales  $D_{\mu\mu}(t)$  et  $BC(t)$  définies par

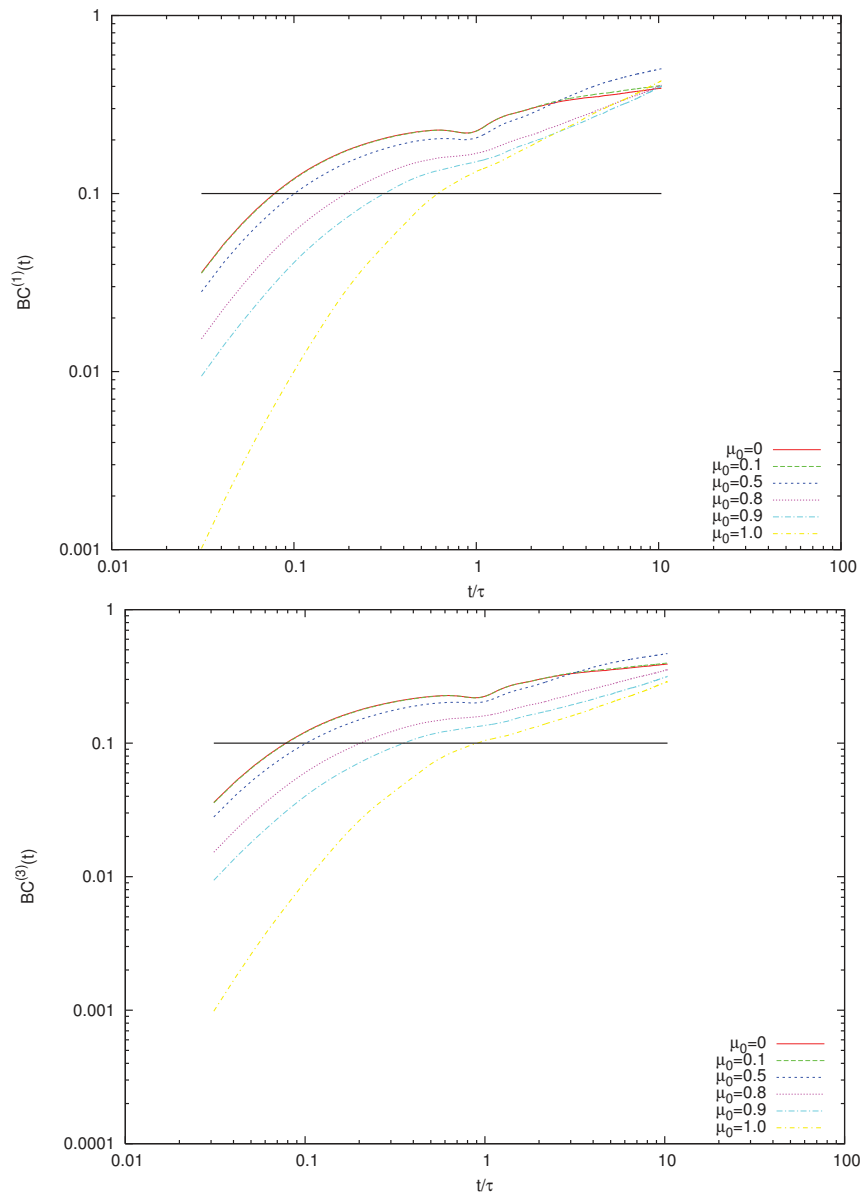


FIGURE 6.6 – En haut, évolution de  $BC$  calculée à partir du schéma d'interpolation linéaire ; en bas, la quantité  $BC$  par le spline d'ordre 3 est tracée. Ici, la simulation MHD utilisée est *L8W1B1P1C5*. J'ai initialisé  $10^5$  particules avec une distribution en  $\mu_0$  homogène à une distribution de Dirac en différents  $\mu_0$ . Je les ai fait propager sur 10 périodes de rotation avec un rayon de Larmor initial  $r_L/L = 3 \cdot 10^{-2}$ . La ligne noire correspond à la valeur où  $BC(t) = 0.1$ .



$$BC(t) = \left[ \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (\mu_i(t) - \mu_i(0))^2 \right]^{1/2}, \quad (6.46)$$

$$D_{\mu\mu}(t) = \frac{BC(t)}{2t}. \quad (6.47)$$

La figure 6.6 trace l'évolution de  $BC$  pour les deux schémas d'interpolation. La figure 6.7 trace le rapport entre  $BC^{(1)}(t)$  déterminé avec l'interpolation linéaire, et  $BC^{(3)}(t)$  déterminé avec l'interpolation de spline cubique. L'écart croît plus vite avec des  $\mu_0$  proches de l'unité, jusqu'à un facteur 2 pour  $\mu_0 = 1$ . Cet effet semble contradictoire avec la figure 6.4, cependant il s'agit ici de la diffusion dans l'espace des cosinus de l'angle d'attaque  $\mu$ . En moyenne, l'écart  $(\mu - \mu_0)^2$  en fonction du temps pour les  $\mu$  proches de zéro reste faible, car les particules vont diffuser de façon symétrique autour de  $\mu = 0$ , conservant une moyenne faible. Au contraire, les particules avec la vitesse focalisée diffusent moins vite dans l'espace des  $\mu$ , puisqu'ils suivent la ligne de champ. La différence entre les schémas d'interpolation est donc logiquement exacerbée pour des angles d'attaque nuls.

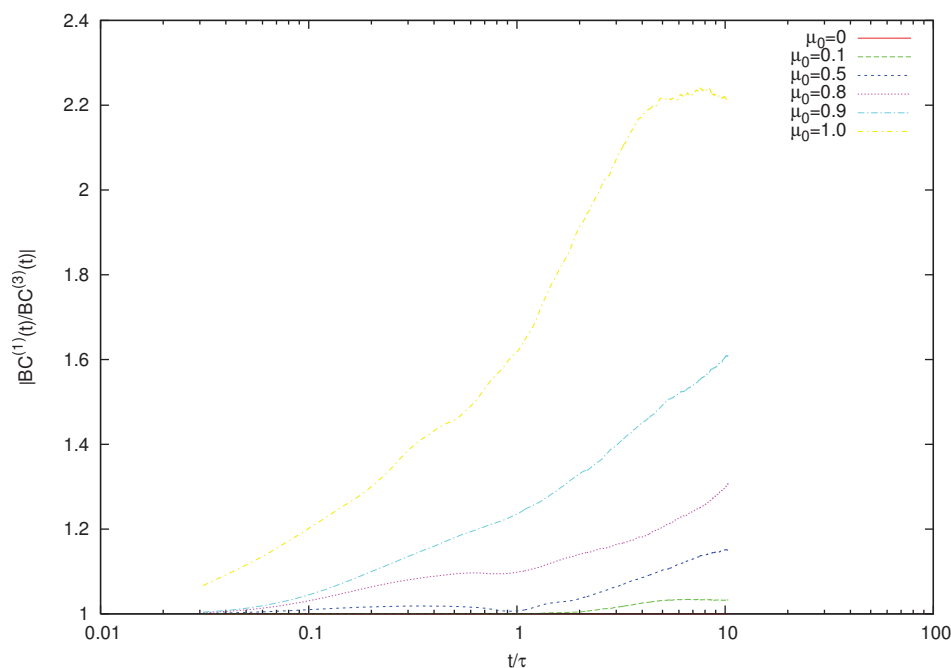


FIGURE 6.7 – Rapport entre les  $BC(t)$  pour les deux schémas d'interpolation.

Malgré les différences notables sur le coefficient de diffusion angulaire à  $\mu_0 \sim 1$ , nous montrerons dans la discussion suivante que le libre parcours moyen est peu affecté par cet écart.

### Libre parcours moyen

Le libre parcours moyen est déterminé par l'équation [33, 24]

$$\lambda_{\parallel} = \frac{3v}{8} \int_0^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}}. \quad (6.48)$$

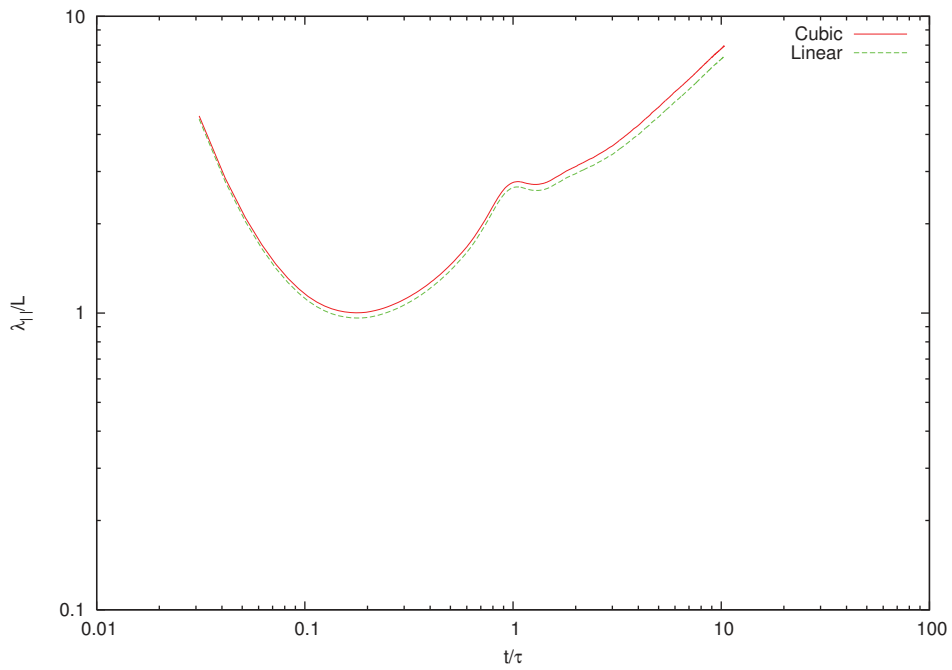


FIGURE 6.8 – Libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{\parallel}/L$  rapporté à l'échelle du cube, en fonction du temps.

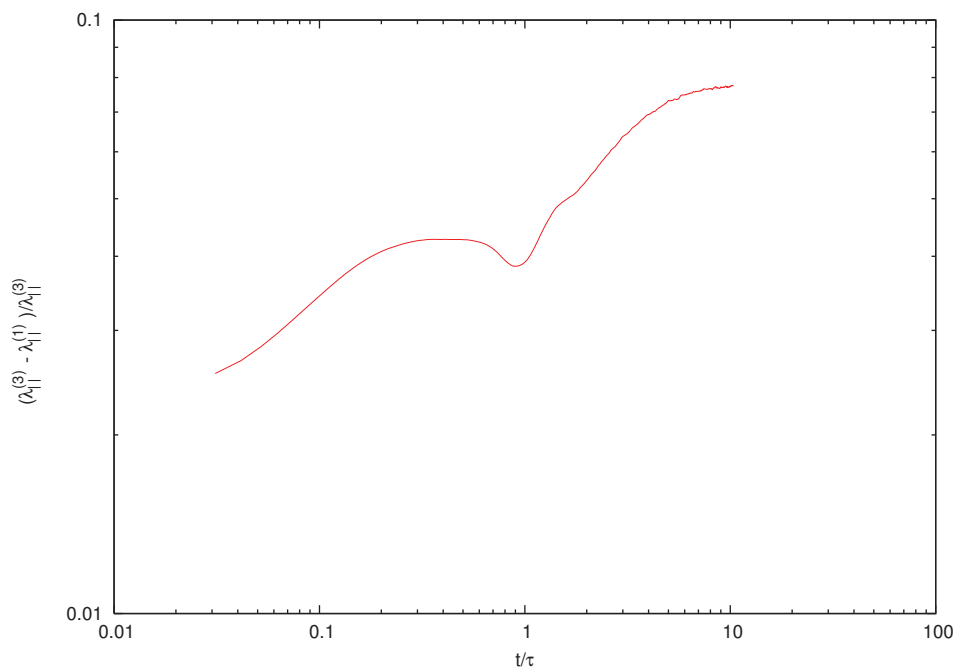


FIGURE 6.9 – Ecart relatif entre les libres parcours moyens déterminés par les deux méthodes d'interpolation.

L'étude de l'intégrand montre que les effets pour les  $\mu$  proches de l'unité sont effacés par le numérateur. Le facteur 2 obtenu dans la discussion précédente sera absorbé lors du calcul du libre parcours moyen. La figure 6.8 compare les résultats obtenus par les deux méthodes d'interpolation à partir de la simulation *L8W1B1P1C5*, pour  $1.1 \cdot 10^6$  particules, répartis dans onze "bin" de  $\mu_0$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , soit

$$\mu_0 \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}. \quad (6.49)$$

Avec  $10^5$  particules par  $\mu_0$ , je calcule le libre parcours moyen avec l'équation (6.48). Le rapport entre les libres parcours moyens déterminés par les différentes méthodes n'excède pas 10% (figure 6.9).

### 6.4.2 Efficacité

Pour achever l'étude des différentes méthodes, je dois introduire la notion d'efficacité, notion appartenant au domaine du calcul haute performance (en anglais, HPC). Faire propager des millions de particules peut prendre du temps, surtout lorsqu'on s'intéresse à la diffusion.

L'étude des résultats sur les différents schémas d'intégration n'a pas montré de différence, cela dû au fait que RAMSES limite le pas de temps en sorte que la particule ne puisse pas se déplacer d'une distance supérieure à la longueur d'une cellule élémentaire.

Cette contrainte sur le pas de temps impose une très faible variation des champs

électromagnétiques, car la construction de la solution MHD par RAMSES force les gradients des grandeurs MHD à ne pas être trop élevés entre les cellules. La conséquence sur les traceurs est directe : la méthode de RK5QC ne donne pas de différence avec celle de Burlish-Stoer, et les différences avec le traceur dit Leap-Frog sont de l'ordre du % sur  $10^5$  pas de temps. Pour un grand nombre de particules, cette erreur est complètement dominée par la variance statistique, ce qui nous permet de considérer le traceur le plus rapide pour reconstruire la trajectoire des particules.

En terme de rapidité d'exécution, la figure 6.10 montre que la méthode RK5QC est en pratique entre 1.5 et trois fois plus longue que celle de Burlish-Stoer. Cela s'explique par le fait que les calculs du RK5QC seront de toute façon réalisés, alors que la seconde méthode se limitera à diviser le pas de temps en deux. Sur  $10^6$  pas de temps, l'économie de ressource est très profitable (figure 6.10).

Le traceur Leap-Frog est quant à lui plus rapide que les deux précédents, puisque déjà optimisé à l'architecture de RAMSES. Le calcul de la force de Lorentz est utilisé deux fois, au lieu de 4 pour le Burlish-Stoer. L'appel des routines constitue une économie de 40% de temps, ramenant une simulation de 22h avec le Burlish-Stoer à 13h pour le Leap-Frog.

Dans toute la suite, nous utiliserons l'intégrateur Leap-Frog pour économiser le temps de calcul. Cette décision est un bon compromis entre rapidité et précision, puisque l'erreur statistique sera toujours supérieure à celle engendrée par la précision du traceur.

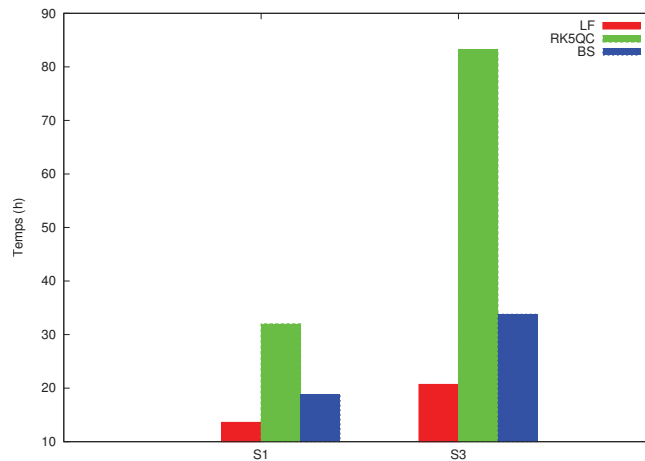


FIGURE 6.10 – Temps de simulation en fonction des outils numériques utilisés. Ici, LF fait référence au schéma du point-milieu, ou Leap-Frog (§6.2.1), BS pour la méthode de Burlish-Stoer (§6.2.3). Les groupements S1 et S3 font référence au spline d'ordre 1 et d'ordre 3 respectivement. Cette mesure des performances est appliquée à une simulation où  $10^6$  particules se propagent sur  $10^6$  pas de temps.

L'autre aspect de cette discussion porte sur le schéma d'interpolation, discuté en détail dans la partie 6.4.1. L'utilisation du spline cubique augmente le temps de calcul de 60% lors de l'utilisation des traceurs Leap-Frog et Burlish-Stoer, et de 180% le temps de calcul du traceur RK5QC. Au vue de la différence entre les résultats du spline cubique et l'interpolation linéaire, je choisirai l'interpolation linéaire dans toute la suite, en apposant au résultat une erreur systématique de 10% que l'on ajoutera à l'erreur statistique par la formule de propagation de l'erreur. Cette formule intervient pour toute grandeur  $f(X_i)$ , déterminée à partir des mesures  $X_i$  auxquelles on associe les erreurs  $\Delta X_i$ . L'erreur sur la quantité  $f(X_i)$ , notée  $\Delta f$ , s'écrit

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f(X_i)}{\partial X_i} \Delta X_i \right)^2}, \quad (6.50)$$

où les  $\partial f(X_i)/\partial X_i$  sont les dérivées partielles de  $f$  par rapport à la variable  $X_i$ . Dans toute la suite, les erreurs seront calculées selon l'équation de propagation des erreurs illustrée par l'équation 6.50.

Au cours de cette partie, j'ai présenté les différentes techniques que j'ai implémentées pour étudier la propagation des particules. J'ai défini le protocole que j'utiliserai par la suite pour dresser les résultats. Je vais maintenant exposer les différents résultats que j'ai obtenus dans le cadre de ce travail de thèse.

# Chapitre 7

## Simulations numériques

Au cours de ce chapitre, j'aborderai les résultats précédemment obtenus par la communauté scientifique dans la section 7.1, avant d'exposer mes propres résultats sur la propagation à proprement parlé. Je définirai le coefficient de diffusion angulaire  $D_{\mu\mu}$  tel qu'utilisé dans mon travail dans la section 7.2 avant d'investiguer les libres parcours moyens parallèles et perpendiculaires dans les sections 7.3 et 7.4 respectivement. Les résultats présentés dans cette partie feront l'objet d'une publication en préparation (Cohet et Marcowith 2015).

### 7.1 Résultats précédents

Dans cette section, je montrerai que les grandeurs caractéristiques du transport dépendent du type de turbulence considéré (compressible ou incompressible), ainsi que du niveau de turbulence (sub- ou super- alfvénique).

#### 7.1.1 Cas de la turbulence incompressible

Les travaux basés sur la turbulence incompressible montrent un désaccord avec la prédiction quasilineaire. Dans [8], l'auteur utilise un forçage dépendant de la composante d'Elsässer, défini dans l'équation (3.7). Cela permet de contrôler l'injection d'énergie dans chacune des composantes  $w^+$  et  $w^-$ , provoquant deux spectres différents, comme présenté sur la figure 7.1. La différence de puissance dans les spectres traduit un taux de présence plus élevé des ondes  $w^+$ , se propageant le long du champ magnétique moyen.

Dans le contexte d'une turbulence "équilibrée" trans-alfvénique, la figure 7.3 illustre l'écart entre les prédictions théoriques et les expériences de particules test. De plus, l'absence de mode d'onde compressible dans la turbulence incompressible diminue l'effet de la diffusion angulaire [108], ce qui pourrait mener à des différences accrues lorsqu'on considérera des simulations de turbulence compressible.

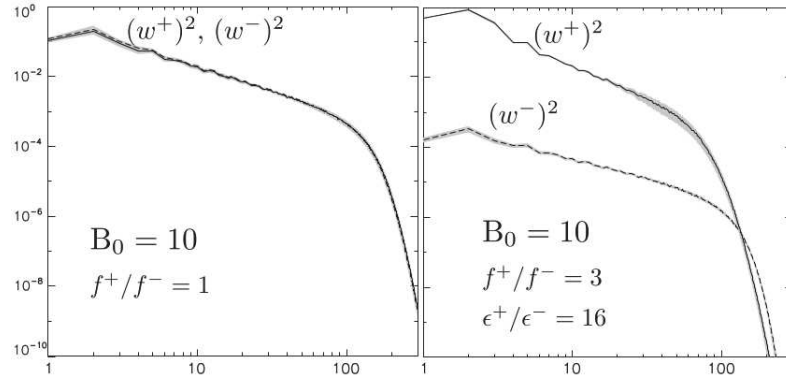


FIGURE 7.1 – Spectres en énergie des variables d'Elsässer, normalisés à l'énergie totale. A gauche le cas "équilibré", où l'énergie transférée est égale dans les deux composantes ; à droite, le cas "déséquilibré" avec le rapport des amplitudes de forçage défini par  $f^+/f^- = 3$ .  $\epsilon^+/\epsilon^-$  est le rapport des taux de transfert d'énergie pour les deux variables d'Elsässer  $w^+$  et  $w^-$ . Figure extraite de [8].

La figure 7.3 montre également que le coefficient de diffusion angulaire est constant avec l'énergie, et ce jusqu'à un rayon de Larmor au-delà duquel la rigidité des particules augmente l'efficacité de la diffusion, et faisant tendre la diffusion vers une diffusion de Bohm (où le coefficient de diffusion angulaire est constant avec l'énergie des particules).

La conséquence est qu'une description quasi-linéaire n'est pas suffisante dans un régime de turbulence où  $M_A \sim 1$ . Les interactions ondes particules doivent être décrites par des approches non linéaires du transport.

Le coefficient de diffusion parallèle  $D_{\parallel}$ , est défini comme

$$D_{\parallel} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (x_{\parallel}(t) - x_{\parallel}(0))^2 \rangle}{2t}, \quad (7.1)$$

où les parenthèses  $\langle \cdot \rangle$  signifient la valeur moyenne sur l'ensemble des particules, et  $x_{\parallel}$  la coordonnée alignée au champ magnétique moyen  $B_0$ . On définit de la même façon le coefficient de diffusion perpendiculaire,

$$D_{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (x_{\perp}(t) - x_{\perp}(0))^2 \rangle}{2t}. \quad (7.2)$$

A partir des équations (7.1) et (7.2), on définit les libres parcours moyens parallèles  $\lambda_{\parallel}$  et perpendiculaires  $\lambda_{\perp}$  comme

$$\begin{aligned} \lambda_{\parallel} &= \frac{3}{v_p} D_{\parallel}, \\ \lambda_{\perp} &= \frac{3}{v_p} D_{\perp}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

avec  $v_p$  la vitesse des particules.

Ces quantités sont déterminées numériquement en remplaçant la limite des temps infinis par un temps  $t_f$  au-delà duquel les coefficients de diffusion représentés par les équations (7.1) et (7.2) sont constants dans le temps. La figure 7.2 illustre l'établissement du régime de diffusion pour une particule d'énergie  $r_L/L = 0.12$  dans plusieurs réalisations turbulentes.

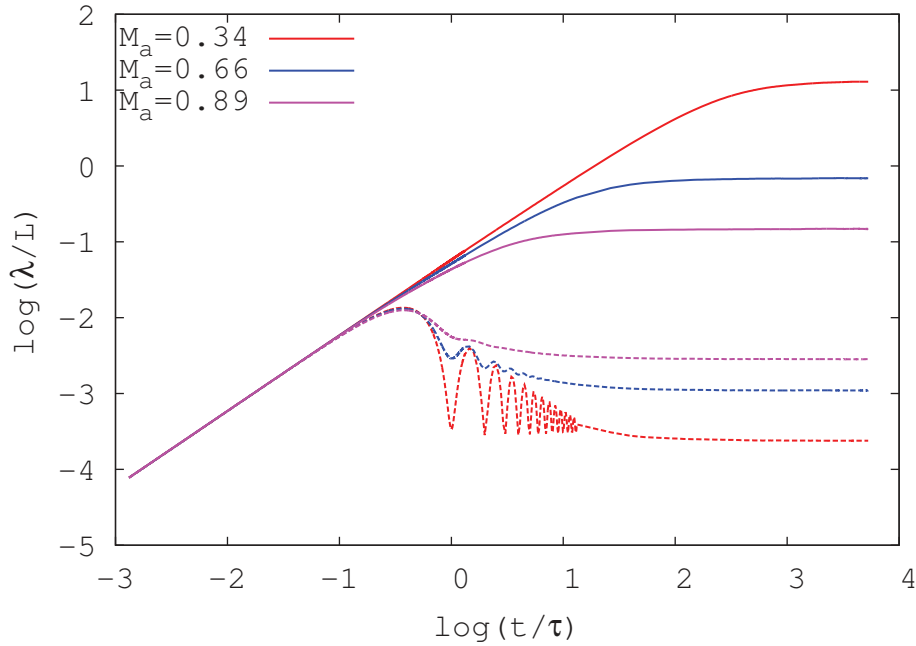


FIGURE 7.2 – Evolution des libres parcours moyens parallèles (en traits plein) et perpendiculaire (en traits pointillé) normalisé à la taille de la boîte de calcul  $L$ , le tout en fonction du temps normalisé à la période de gyration  $\tau$ , pour différentes réalisations turbulentes. L'énergie des particules est tel que  $r_L/L = 0.117$ . Le régime de diffusion est atteint lorsque les grandeurs deviennent indépendantes du temps. Le plateau ainsi obtenu apparaît d'autant plus rapidement que le niveau de turbulence est élevé.

La figure 7.4 trace, dans le contexte d'une turbulence où  $M_A \sim 1$ , la dépendance des coefficients de diffusion spatiaux en fonction de l'énergie, pour différents équilibres de turbulence. Le trait plein fait référence à la turbulence "équilibrée", quand les autres font référence aux réalisations turbulentes "déséquilibrées" : en pointillés, faiblement déséquilibrée ; en tirets, déséquilibrée ; en traits mixtes, fortement déséquilibrée.



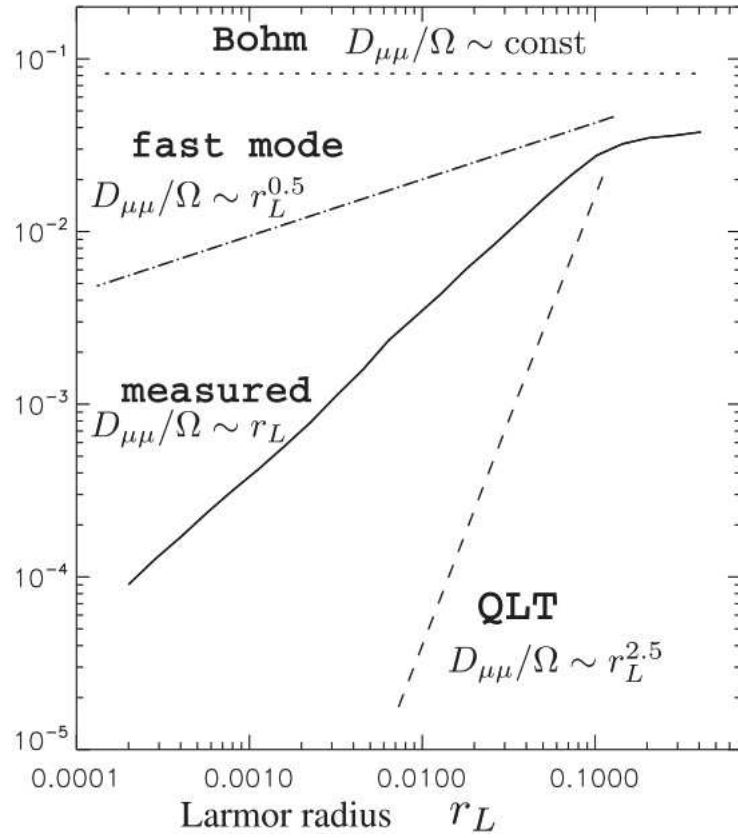


FIGURE 7.3 – Taux de diffusion angulaire relatif à la période de giration  $D_{\mu\mu}/\Omega$  en fonction de l'énergie des particules en unité de taille de cube. Figure extraite de [8].

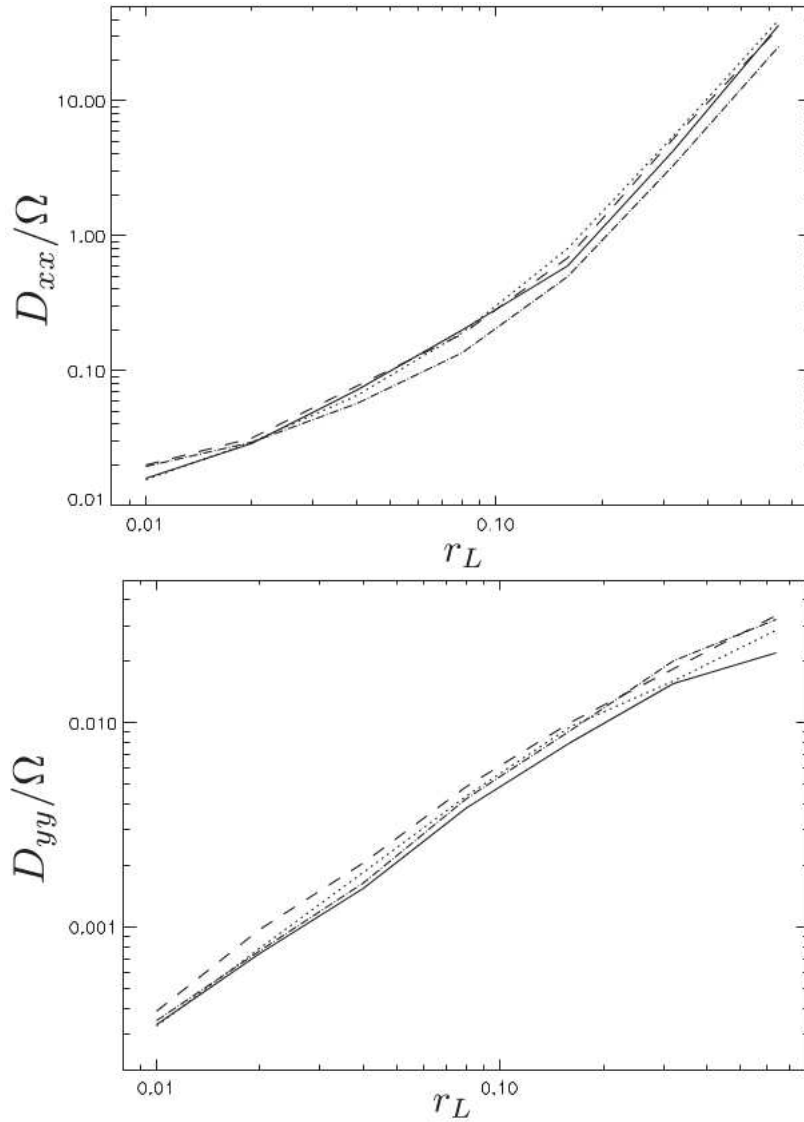


FIGURE 7.4 – Coefficient de diffusion parallèle (en haut) et perpendiculaire (en bas) normalisé à la pulsation synchrotron en fonction du rayon de Larmor  $r_L/L$  des particules, pour un niveau de turbulence  $M_a \sim 1$ . Les traits pleins correspondent à un rapport des amplitudes de forçage  $f^+/f^- = 1$ ; les lignes en traits mixtes représentent le cas où  $f^+/f^- = 3$ ; les courbes en pointillés,  $f^+/f^- = 1.33$ ; les courbes en tirets,  $f^+/f^- = 2$ . Figure extraite de [8].

L'étude de la figure 7.4 montre que le déséquilibre apporté aux ondes d'Alfvén à travers les variables d'Elsässer peut influencer le résultat à hauteur de 50%. L'étude ne permet cependant pas de déterminer si ces écarts sont compris dans les erreurs numériques.

### 7.1.2 Cas de la turbulence compressible

La production de la turbulence compressible inclut maintenant les modes magnéto-sonores rapides, et permet de confronter les études dans les cas concrets tels que [94, 104], alors que d'autres études cherchent une application dans certaines phases du milieu interstellaire [105].

Dans [104], les auteurs utilisent un code basé sur la méthode des volumes finis pour développer une turbulence compressible isotrope, avec un forçage compressible ou solénoïdal. La distribution  $f_k$  du forçage en question est répartie dans l'espace de Fourier comme

$$f_k = \begin{cases} sk^{-9/2}e^{(2i\pi p)} & \forall k \in [1, k_{max}] \\ 0 & \forall k \in \mathbb{R} - [1, k_{max}] \end{cases}, \quad (7.4)$$

où  $k$  est le module du mode de Fourier,  $s$  un nombre aléatoire réparti sur une densité de probabilité gaussienne et  $p$  un autre nombre aléatoire de distribution constante.  $Lk_{max} = 3\sqrt{3}$  est la borne supérieure de l'intervalle de l'espace de Fourier dans lequel le forçage est actif. La construction de la propriété de compressibilité est réalisée après avoir passé le forçage dans l'espace réel, en définissant l'incrément de vitesse  $\delta v$  comme dérivé d'un potentiel scalaire  $f$ , ou d'un potentiel vecteur  $\mathbf{f}$  tel que

$$\delta \mathbf{v} = \begin{cases} \nabla f & \text{pour } \nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{f} & \text{pour } \nabla \times \delta \mathbf{v} = 0 \end{cases}, \quad (7.5)$$

où  $\mathbf{f} = f\mathbf{a}$ , avec  $\mathbf{a}$  un vecteur composé de trois nombres aléatoires de densité de probabilité constante.

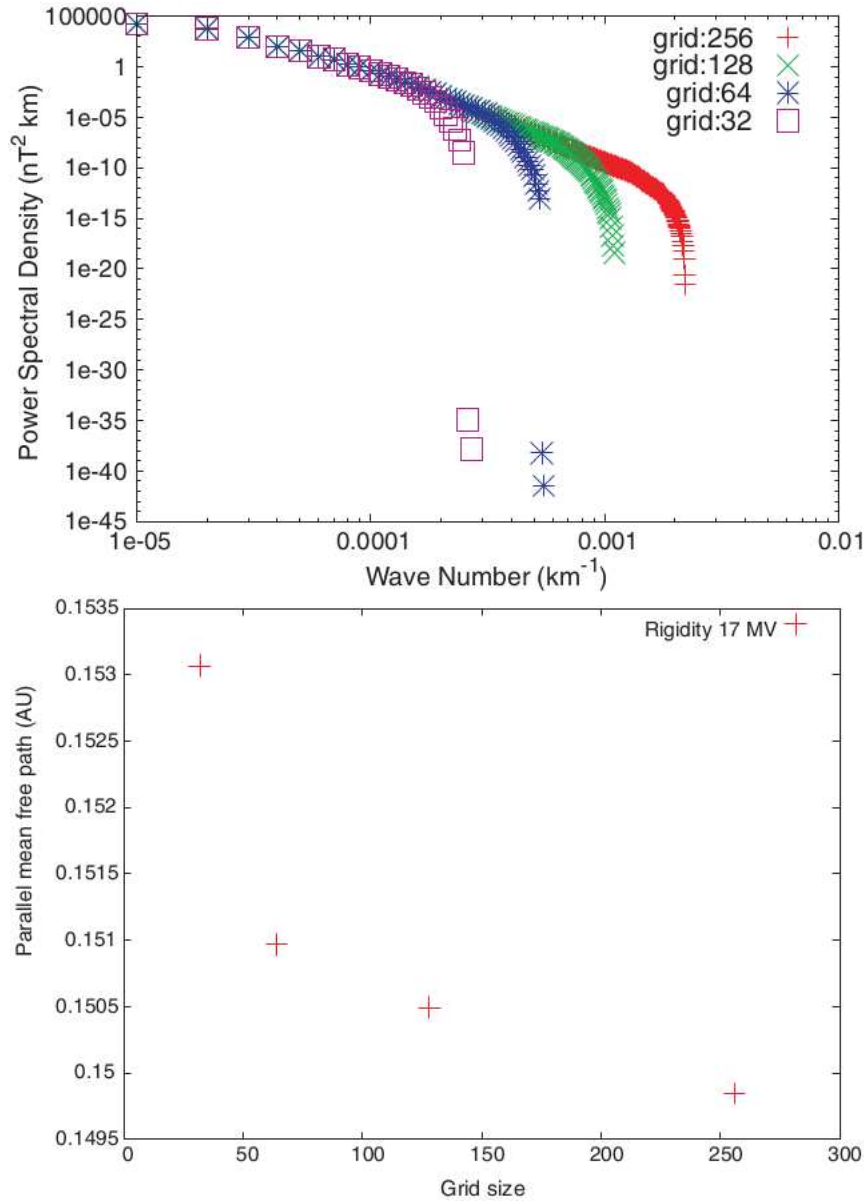


FIGURE 7.5 – En haut, spectres en énergie équivalents calculés à partir d’une simulation  $256^3$ , simulant la perte d’information sur les petites échelles. En bas, libre parcours moyen en fonction de la résolution. Figure extraite de [104].

La figure 7.5 montre l’influence des petites échelles sur le libre parcours moyen parallèle des rayons cosmiques, avec un écart constaté de l’ordre de 5% entre le spectre  $32^3$  et celui  $256^3$ . Nous devons cependant préciser que ces spectres ont été fabriqués à partir d’une simulation MHD  $256^3$ , et qu’en-dessous d’une résolution à  $128^3$ , nos propres expériences ont montré, dans les spectres, l’absence de zone inertielle.

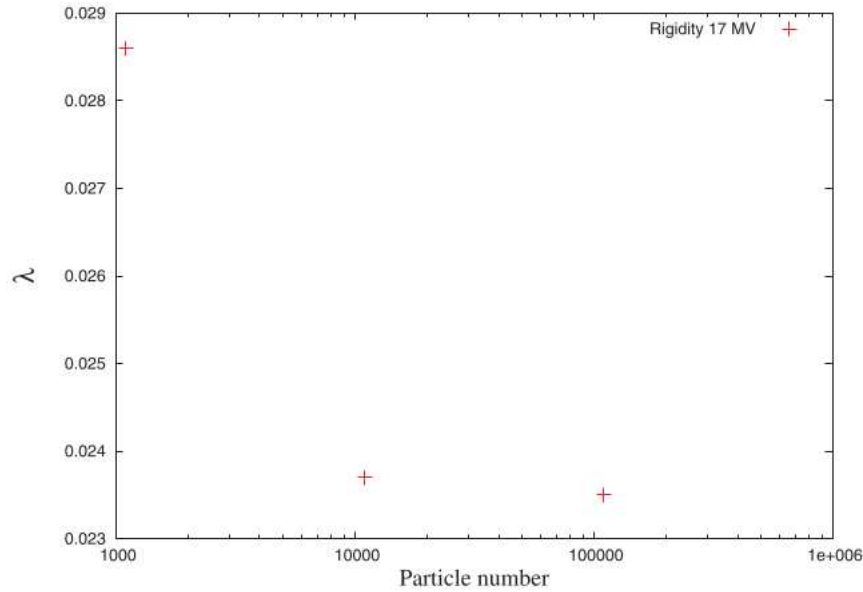


FIGURE 7.6 – Simulation  $256^3$  montrant l’incidence du nombre de particules sur le libre parcours moyen. Figure extraite de [104].

La figure 7.6 montre la dépendance du libre parcours moyen parallèle avec le nombre total de particules, illustrant un écart de plus de 20% entre une simulation à  $10^3$  et  $10^5$  particules. Les auteurs retiennent l’échantillon de  $10^5$  particules pour leurs études, motivé par le faible écart-type statistique. Cependant, la distribution initiale est constante et échantillonnée dans l’espace des angles d’attaque, ce qui induit une distribution non constante dans l’espace des  $\mu$ .

Dans [105], les auteurs s’intéressent plus particulièrement à l’effet du nombre de Mach alfvénique  $M_a$ , ou niveau de turbulence, sur les quantités caractéristiques du transport. Cette étude s’appuie sur une série de simulations MHD  $512^3$  qui réunit dix simulations sub-alfvéniques ( $M_A < 0.8$ ) et une simulation super-alfvénique, où  $M_A = 1.5$ . Dans cette étude, seulement  $10^3$  particules par simulation sont utilisées pour calculer les libres parcours moyens parallèles et perpendiculaires, justifiant ce choix par la faible variance statistique sur les résultats du libre parcours moyen perpendiculaire. Cependant, cette explication est contradictoire avec l’étude précédente [104] et la nôtre, puisque l’écart entre les libres parcours moyens parallèles déterminés à partir de  $10^3$  et  $10^5$  particules atteint 20%. Nous devons approfondir cette réflexion dans les sections suivantes de ce chapitre (§7.2 et §7.3).

La figure 7.7 montre l’évolution des libres parcours moyens parallèles et perpendiculaires avec le nombre de Mach alfvénique. Le libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{\parallel}$  est calculé de deux façons. Soit en utilisant l’équation (7.3), soit à partir de l’équation (6.48).

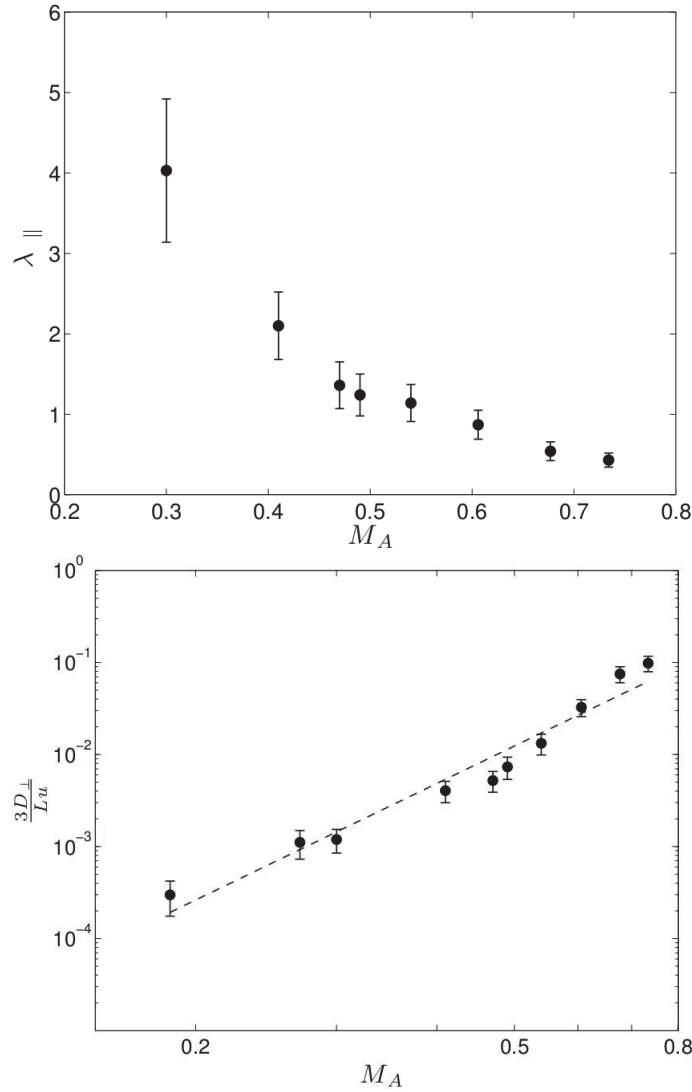


FIGURE 7.7 – Evolutions des libres parcours moyens parallèles (en haut) et perpendiculaires (en bas), en unité de cube, avec le niveau de turbulence magnétique  $M_a$ . Figures extraites de [105]

Le résultat illustré dans la figure 7.7 semble montrer une loi de puissance entre le nombre de Mach alfvénique et  $\lambda_{\perp}$  tel que [105]

$$\lambda_{\perp} \propto M_A^{4.21 \pm 0.75}, \quad (7.6)$$

confirmant les résultats théoriques précédents [108]. Ce résultat est néanmoins valable dans une limite sub-alfvénique, où  $M_A < 0.8$ .

Un autre résultat, relié au coefficient de diffusion angulaire  $D_{\mu\mu}$ , représenté dans la figure 7.8, valide également les prédictions théoriques liées à l'élargissement de la fonction de résonance lié aux interactions de TTD.

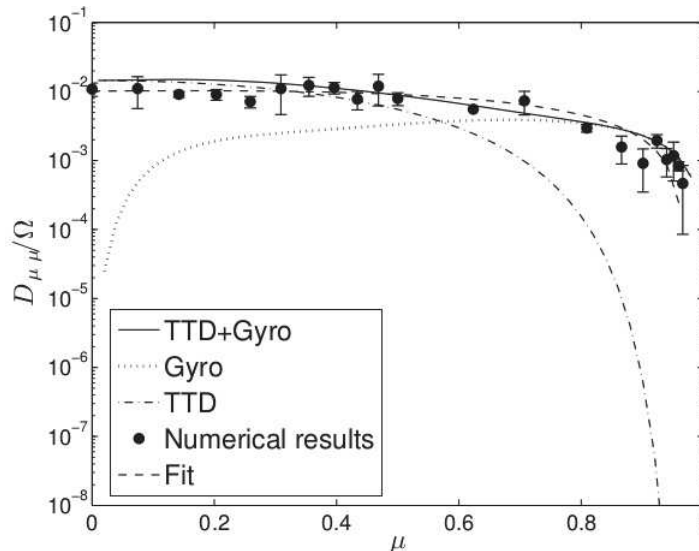


FIGURE 7.8 – Coefficient de diffusion angulaire pour des particules de rayon de Larmor  $r_l = 0.01$  en longueur de boîte. Les résultats numériques sont représentés par les points, et les différentes contributions des résonances sont représentées par les courbes en pointillé pour l'interaction gyro-résonnante, et en tiret pour l'interaction Cherenkov (TTD). Figure extraite de [105]

## 7.2 Le coefficient de diffusion angulaire $D_{\mu\mu}$

Dans cette section, nous aborderons la délicate question du calcul numérique du coefficient de diffusion dans l'espace des cosinus de l'angle d'attaque,  $D_{\mu\mu}$ , que nous appellerons par commodité, coefficient de diffusion angulaire.

Cette quantité peut être calculée de nombreuses façons, contrairement à ses homologues spatiaux, car il présente un nombre de paramètres plus important. Rien que sa variable principale,  $\mu$ , peut être définie par rapport au champ total  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , ou par rapport au champ moyen, ou global,  $B_0$ , selon l'équation (2.5), voire au champ local (cf. §8).

De plus, l'espace des phases que constituent les cosinus des angles d'attaque est borné à l'intervalle  $[-1, 1]$ . Intégrer sur des temps longs ne donnerait donc pas la bonne information [100].

Nous tenterons de définir de manière claire ce paramètre, qui est très important pour l'étude de la diffusion des particules chargées [8, 106, 108, 105, 101, 97].

### 7.2.1 Fonction d'auto-corrélation $C(\tau)$

Cette quantité permet de calculer le temps de diffusion  $T_S$  des particules se propageant dans un champ magnétique turbulent. Cette fonction est définie comme

[13]

$$C(\tau) = \frac{\langle \mu(t) \mu(t + \tau) \rangle}{\langle \mu^2(t) \rangle}, \quad (7.7)$$

où les parenthèses  $\langle \cdot \rangle$  définissent la moyenne sur le temps et sur l'échantillon de particules, c'est-à-dire pour le numérateur du terme de droite de l'équation (7.7)

$$\langle \mu(t) \mu(t + \tau) \rangle = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{t_f - \tau} \int_{t=0}^{t_f - \tau} dt \mu_i(t) \mu_i(t + \tau), \quad (7.8)$$

et pour le dénominateur

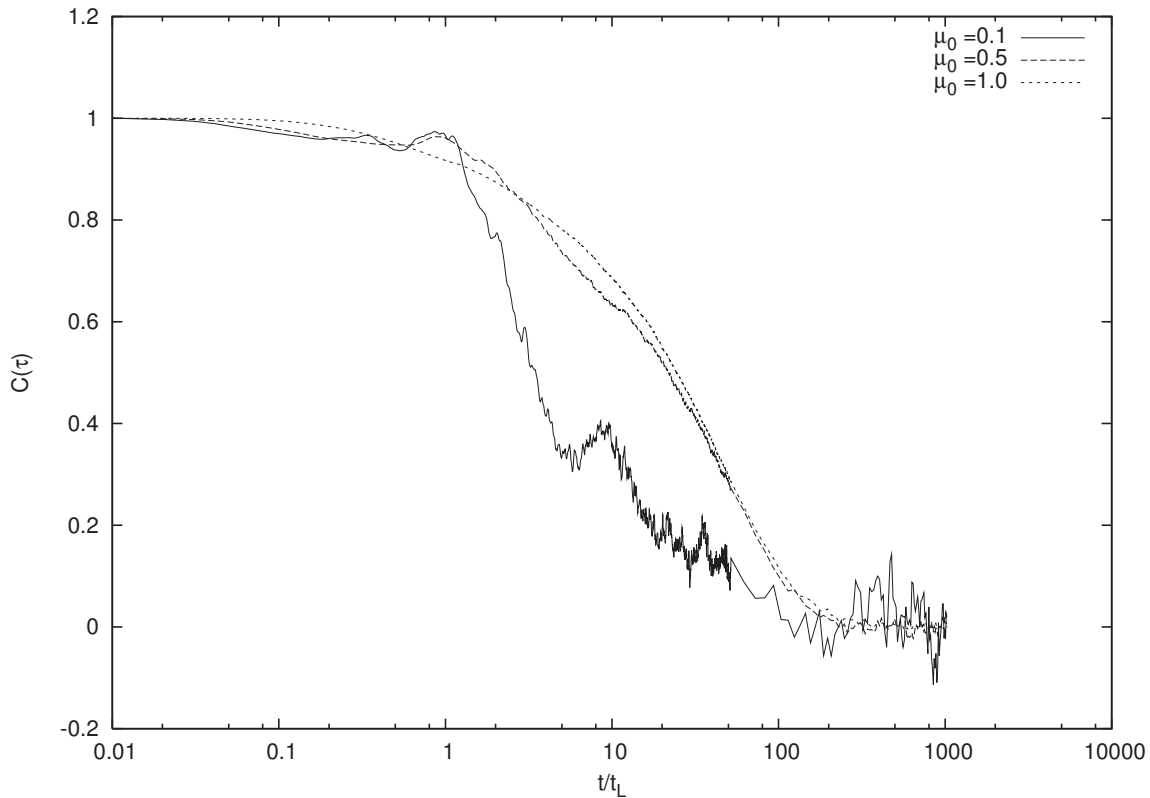


FIGURE 7.9 –  $C(\tau)$  pour différentes valeurs de  $\mu_0$  en fonction du temps rapporté à la période de giration  $t_L$ , des particules d'énergie  $r_L/L = 0.03$ . Le cube de simulation L9W1B1P1C5 a été utilisé.

$$\langle \mu^2(t) \rangle = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{t_f} \int_{t=0}^{t_f} dt \mu_i^2(t). \quad (7.9)$$

En remarquant que le temps de fin de simulation  $t_f$  est le même pour toutes les particules, on peut réécrire la fonction d'autocorrélation  $C(\tau)$  comme

$$C(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{1-\tau/t_f} \int_{t=0}^{t_f-\tau} dt \mu_i(t) \mu_i(t + \tau)}{\sum_{i=1}^{N_p} \int_{t=0}^{t_f} dt \mu_i^2(t)}. \quad (7.10)$$



La forme de la fonction d'auto-corrélation suit une loi exponentielle de la forme

$$C(\tau) = e^{-\tau/T_S}. \quad (7.11)$$

Avant de poursuivre l'étude de la fonction  $C(\tau)$ , je peux d'ores et déjà prédire que le temps de diffusion  $T_S$  est fonction de l'angle d'attaque. Si on considère un ensemble de particules de même énergie et d'angle d'attaque  $\mu_0$  à un instant  $t = 0$ , on peut calculer la dépendance de ce temps de diffusion avec les angles d'attaque.

La figure 7.9 trace l'évolution de la fonction d'auto-corrélation en fonction de  $\tau$ , pour différentes valeurs de  $\mu_0$ , pour des particules de rayon de Larmor  $r_L/L = 0.03$ , pour la simulation 13, L9W1B1P1C5 (cf. 4.1).

La figure 7.9 nous montre que la diffusion pour des particules initialement proches de  $\mu_0 = 0$  est plus efficace, puisque la fonction décroît plus rapidement. On remarque également que  $C(\tau)$  est très fluctuante pour les échantillons où  $\mu_0 < 0.8$ . La mesure de la diffusion angulaire doit se faire pour des temps courts, de préférence avant les variations de la fonction d'auto-corrélation. Comme le montrent les figures 7.9, il est difficile de trouver un temps suffisamment long pour quantifier le coefficient de diffusion. C'est dans cette optique que l'on développera le critère de la section 7.2.2

### 7.2.2 Critère de "Beresnyak"

La définition du coefficient de diffusion angulaire est exprimée à partir de la formulation de Taylor-Green-Kubo (TGK)

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= \int_0^\infty ds \langle \dot{\mu}(s) \dot{\mu}(0) \rangle, \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle (\mu(t) - \mu_0)^2 \rangle, \end{aligned} \quad (7.12)$$

où le passage de la première ligne à la seconde est valable dans la limite où  $t$  est suffisamment long pour que les deux expressions deviennent constantes, indépendantes du temps [89, 100].

Une troisième expression, celle que l'on utilisera dans l'ensemble de cette thèse, déjà mentionnée au travers l'équation (6.47),

$$D_{\mu\mu}(\mu, t) = \frac{\langle (\mu(t) - \mu_0)^2 \rangle}{2t}, \quad (7.13)$$

est également valable dans la limite des grands  $t$ . Cependant, la limite  $t \rightarrow \infty$  donnerait une variation moyenne  $\Delta\mu$  de l'ordre de deux, puisque l'espace des  $\mu$  est borné à l'intervalle  $[-1, 1]$ , et que les cosinus des angles d'attaque subissent un processus d'isotropisation au fur et à mesure de la diffusion des particules [101]. Cela signifie qu'à des temps suffisamment longs, le coefficient de diffusion angulaire  $D_{\mu\mu}$  sera toujours dominé par le terme en  $1/t$ , et ce quelle que soit la formule utilisée.

La bonne manière de procéder est de considérer un temps suffisamment long pour que l'on ait perdu les conditions initiales, mais également suffisamment court pour ne pas être dominé par l'hyperbole en  $t$  [8, 105, 100].

C'est dans ce contexte que l'on introduit la quantité

$$BC(t) = \langle (\mu(t) - \mu_0)^2 \rangle, \quad (7.14)$$

que j'appellerai le critère de Beresnyak [8]. Au même titre que la fonction d'auto-corrélation  $C(\tau)$ , cette quantité doit nous renseigner sur l'instant de fin de simulation, au-delà duquel la limite numérique de l'équation (7.12) devient incorrecte. En suivant les recommandations de [8], j'imposerai au critère de Beresnyak une plage de valeur, entre  $10^{-2}$  et  $10^{-1}$  pour terminer la simulation (figure 7.10 et 7.11). Néanmoins, cet aspect est suffisamment important pour mériter une étude particulière, abordées par [100], et fera l'objet de futures investigations.

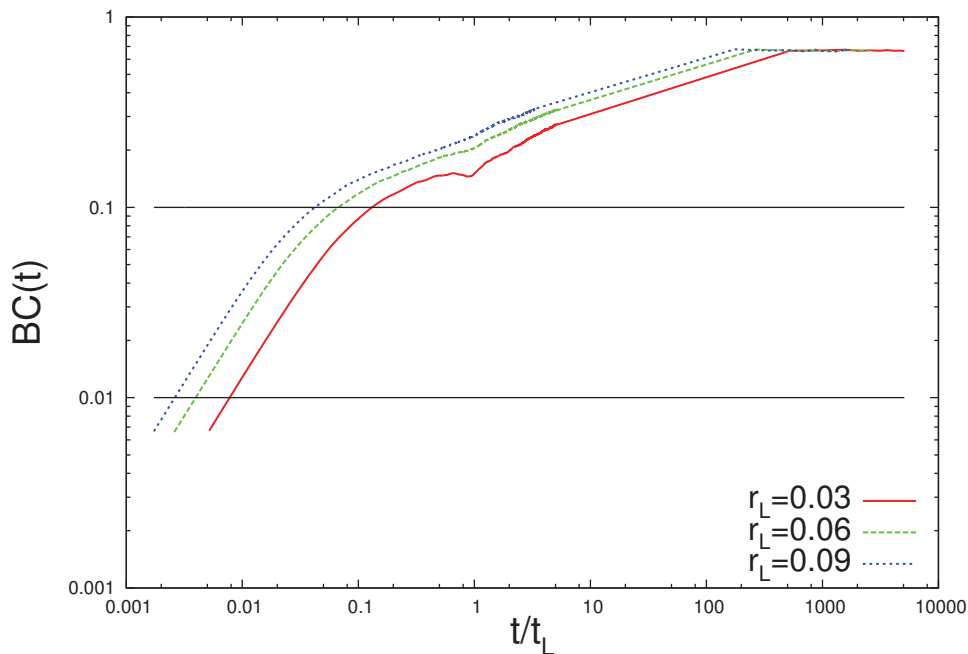


FIGURE 7.10 – Critère de Beresnyak en fonction du temps normalisé à la période de giration  $t_L$ . Différentes énergies sont représentées, le nombre total de particules pour chacune de ces énergies est  $10^5$ .

Cependant, la section précédente nous montre que les angles d'attaque tels que les  $\mu$  soient plus proches de zéro diffusent plus vite dans l'espace des phases. Dans la figure 7.11, je trace l'évolution temporelle du critère de Beresnyak, pour différents  $\mu_0$ , et on voit que l'intervalle de temps peut changer d'un facteur 10. Les lignes horizontales correspondent à l'intervalle de fin de simulation. On voit dans cette figure que ce sont les particules dont les angles d'attaque sont proches de 90 deg

qui vont contrôler la diffusion dans l'espace des phases. Une particule avec un angle d'attaque nul,  $\mu = 1$ , aura tendance à suivre la ligne de champ magnétique sur laquelle elle se trouve, et donc diffuser de manière lente, c'est pourquoi  $C(\tau)$  est plus lisse à  $\mu_0 = 1$ . Une illustration de ce phénomène est proposée sur la figure 7.12. Le temps de fin de simulation pour les calculs du  $D_{\mu\mu}$  sera donc déterminé par le critère de Beresnyak, et j'étudierai l'impact de sa valeur sur le coefficient de diffusion angulaire. Remarquons également que si on rapproche les figures 7.11 et 7.9, à un critère de Beresnyak  $BC_t = 0.05$  (la courbe en noir sur la figure 7.11), correspond une valeur de  $C(\tau) = 0.95 \pm 0.02$  pour  $\mu \in [-1 : 1]$ , ce qui est plutôt surprenant, la fonction d'auto-corrélation mesurant justement les corrélations aux conditions initiales. Il semblerait que  $t$  doive être suffisamment court pour ne pas se trouver dans la coupure exponentielle de la fonction d'auto-corrélation  $C(\tau)$ .

Maintenant que j'ai pu déterminer la plage temporelle dans laquelle interrompre la simulation, je peux m'intéresser à l'impact qu'aura ce temps sur le libre parcours moyen.

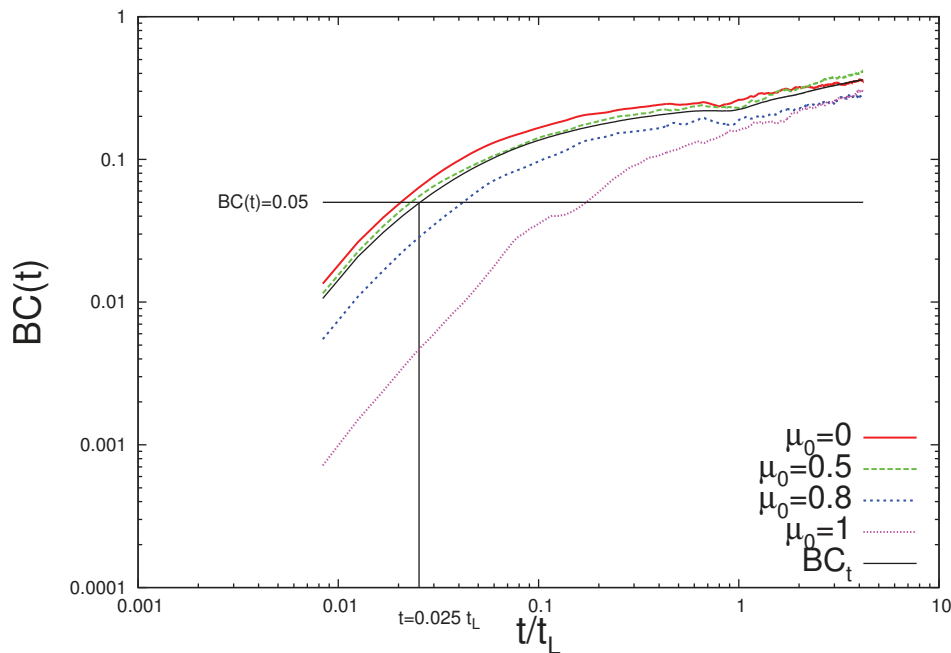


FIGURE 7.11 – Critère de Beresnyak en fonction du temps normalisé à la période de gyration  $t_L$ . Ici, l'énergie des particules est fixée à  $r_L/L = 0.03$ , seuls diffèrent les angles d'attaque initiaux. La courbe en noir représente le critère de Beresnyak "total", c'est-à-dire celui calculé pour l'ensemble des particules.

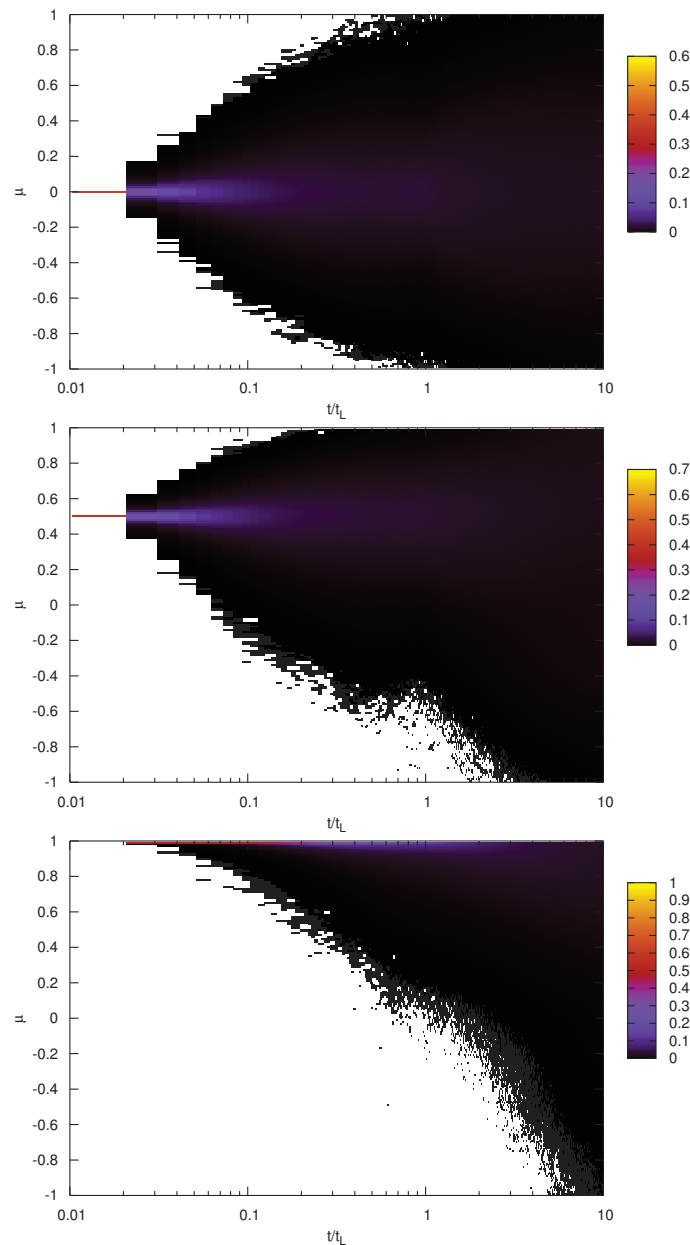


FIGURE 7.12 – Evolution temporelle d’une distribution, initialement de Dirac, dans l’espace des phases des  $\mu$ . En haut, la distribution est  $\mu_0 = 0$ ; au milieu  $\mu_0 = 0.5$  et en bas  $\mu_0 = 1$ . On voit ici que la diffusion est plus efficace sur un laps de temps donné pour des particules avec un faible  $\mu$ .

### 7.2.3 Dépendances du $D_{\mu\mu}$ et du libre parcours moyen

Dans toute la suite de ce paragraphe, j’utiliserai une simulation  $512^3$  et une force de turbulence  $M_A = 0.58$ .

Les études précédentes [105, 8] calculent l'expression du coefficient de diffusion angulaire à partir de plusieurs réalisations indépendantes ayant des distributions de Dirac comme conditions initiales. En reconstruisant le coefficient de diffusion angulaire à partir du résultat de leurs simulations, les auteurs ont calculé un libre parcours moyen associé à un critère de Beresnyak donné.

Si les conditions initiales consistent en une distribution homogène dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , le coefficient  $D_{\mu\mu}$  sera différent (cf. figure 7.13), puisque le critère de Beresnyak prendra en compte les particules quels que soient leurs angles d'attaque initiaux. Comme je ne travail qu'avec des distributions initiales homogènes dans l'espace des  $\mu$ , j'ai segmenté cet espace en "bin" de  $\mu_0$ .

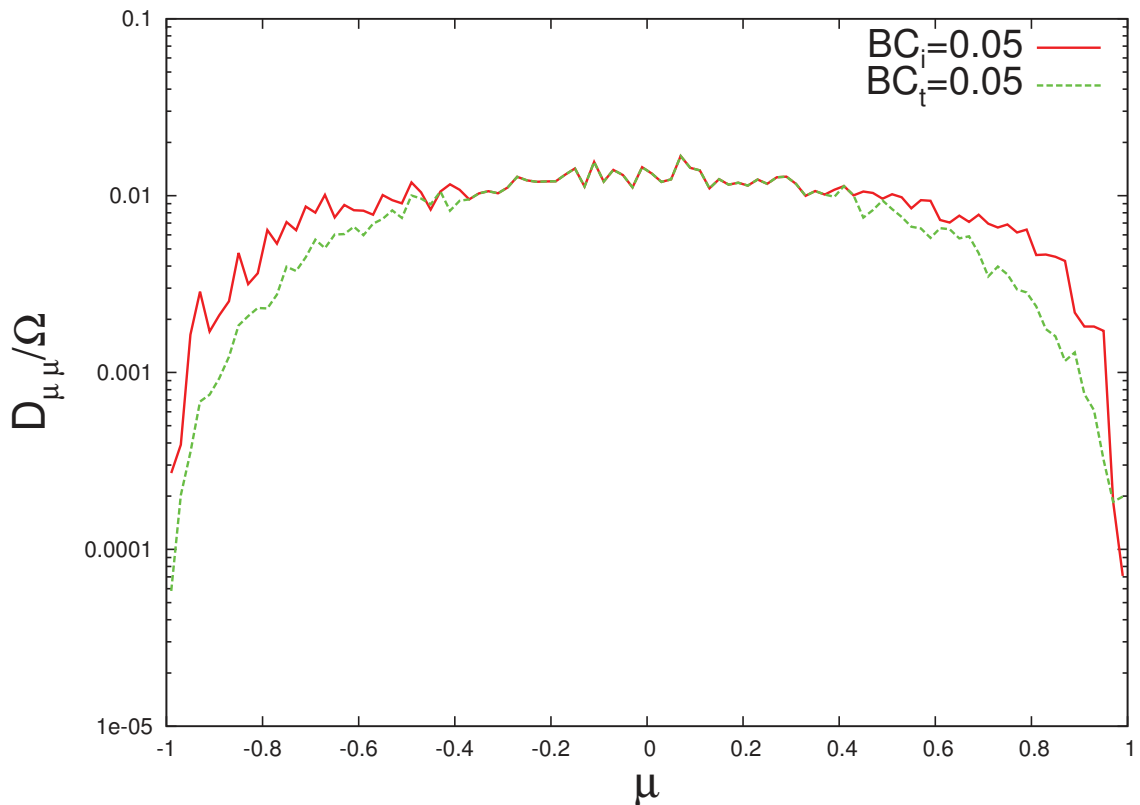


FIGURE 7.13 – Coefficient de diffusion angulaire rapporté à la pulsation synchrotron  $D_{\mu\mu}/\Omega$  en fonction de  $\mu$ , pour des particules d'énergie  $r_L/L = 0.03$ . La courbe discontinue verte correspond à la méthode où les particules se propagent durant un temps égal. La ligne continue rouge représente les résultats obtenus par la méthode où les particules sont réparties dans des "bins" de  $\mu_0$ , chacun des bins se propageant un temps qui lui est propre.

Considérons donc une distribution homogène en  $\mu$  à  $t = 0$ . Si  $N_{bin}$  est le nombre de bins qui segmentent la distribution initiale, alors  $n_{p,i} = N_p/N_{bin}$  est le nombre de particules dans le bin  $i$ . De cette façon, je contrôle pour chaque bin la valeur du

critère de Beresnyak associé  $BC_i$ , et, à chaque instant, si la valeur de  $BC_i$  dans le bin  $i$  est inférieure à la valeur consigne de  $10^{-1}$ , je calcule le coefficient de diffusion angulaire associé à ce bin.

Comme le montre la figure 7.11, le temps de diffusion des particules sera dépendant du bin dans lequel elles sont placées. La figure 7.13 compare les coefficients de diffusion angulaire obtenus avec la méthode de l'échantillonnage en  $\mu_0$ , et la méthode consistant à prendre toutes les particules pour le calcul de  $BC$ . L'énergie des particules est ici fixée à  $r_L/L = 0.03$ . Les particules avec un angle d'attaque proche de  $90^\circ$  diffusent plus vite que celles situées sur les angles faibles. Ceci explique la différence de profil entre les deux méthodes représentées figure 7.13.

La différence vient sur les "ailes" du coefficient de diffusion angulaire, pour  $|\mu| > 0.5$ . Cet effet devrait néanmoins avoir de faibles conséquences sur la valeur du libre parcours moyen  $\lambda_{\parallel}$ , puisqu'il est calculé à partir du coefficient de diffusion angulaire  $D_{\mu\mu}$  par la relation (6.48) dont je rappelle ici l'expression

$$\lambda_{\parallel} = \frac{3v}{8} \int_0^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}}. \quad (7.15)$$

Le numérateur de membre de droite de cette équation tend à annuler les contributions à  $\mu = 1$ , pour des comportements standards de  $D_{\mu\mu}$ . La figure 7.14 trace l'évolution des libres parcours moyens obtenus à partir des deux méthodes. La question se pose alors d'elle-même : pour quelle valeur de  $BC$  doit-on stopper la simulation ? Et si on conserve la première méthode, le libre parcours moyen sera entre 1.2 et 2 fois plus élevé qu'avec la seconde méthode, et il faut décider du moment où interrompre la simulation, par exemple lorsque l'écart entre les deux méthodes est le plus faible, c'est-à-dire à  $BC = 0.05$ .

Je donne également l'exemple pour une simulation où les particules sont six fois plus énergétiques sur les figures 7.15 et 7.16. Sur ces figures, je remarque que les particules n'ont pas de libre parcours moyen plus élevé, alors que leur énergie est six fois plus élevée. La discussion de cette observation sera faite dans le paragraphe 7.3. Par contre, l'écart entre les deux méthodes est inférieur à celui pour les particules de basse énergie. L'écart relatif entre les deux méthodes est ici au maximum de 10%.

J'utiliserai la méthode de l'échantillonnage en  $\mu_0$  pour déterminer le coefficient de diffusion angulaire, afin de me rapprocher le plus possible des précédents résultats [8, 105]. Cependant, l'erreur associée à la détermination du libre parcours moyen est augmentée à cause de l'incertitude sur la valeur du critère de Beresnyak à adopter pour stopper la simulation. Une description détaillée de l'erreur de mesure sera l'objet du paragraphe 7.2.4

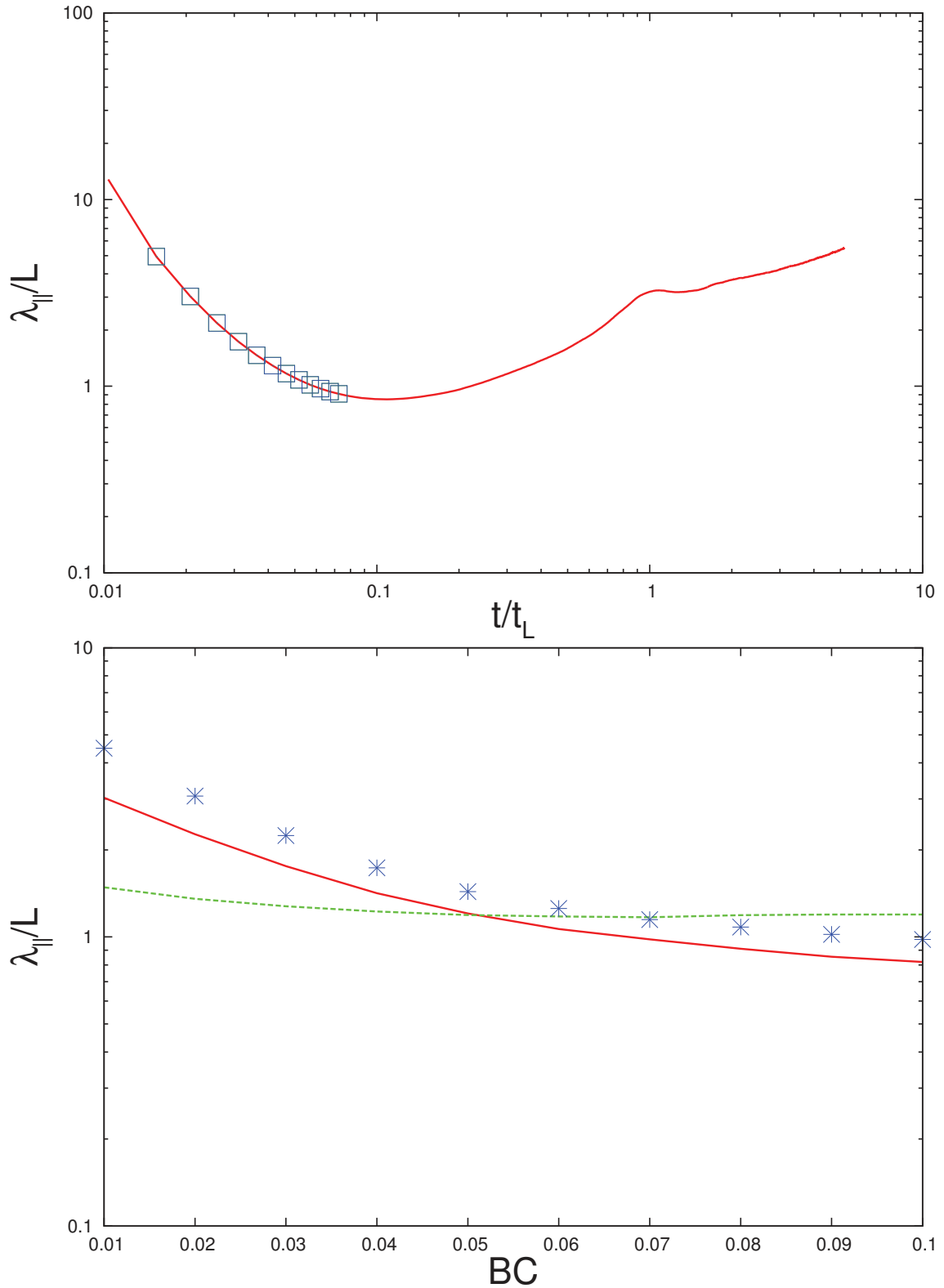


FIGURE 7.14 – En haut, évolution temporelle du libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{||}$  pour des particules d'énergie  $r_L/L = 0.03$ . Les points représentent les mesures pour lesquelles  $BC(t) \in [10^{-2}, 10^{-1}]$ . En bas, le libre parcours moyen parallèle avec la méthode de l'échantillonnage en  $\mu_0$  (trait rouge) en fonction du critère de Beresnyak. Les points en bleu représentent le libre parcours moyen à des critères de Beresnyak déterminés à partir de la totalité des particules. Le rapport des deux méthodes, en pointillés vert, peut atteindre une valeur de 2.

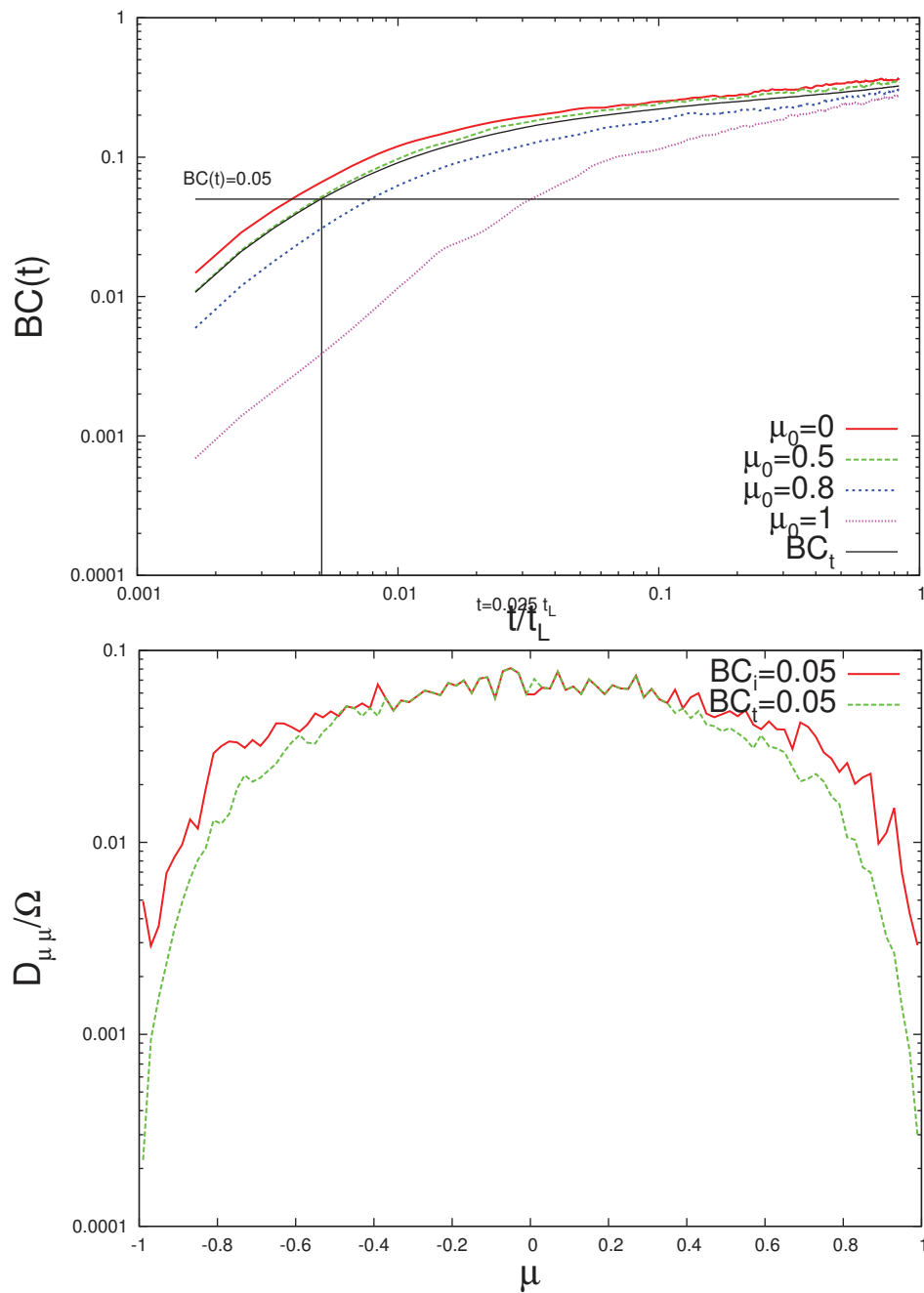


FIGURE 7.15 – En haut, évolution temporelle du critère de Beresnyak. En bas, coefficient de diffusion angulaire rapporté à la pulsation synchrotron  $D_{\mu\mu}/\Omega$  en fonction de  $\mu$ . A nouveau, la méthode de l'échantillonnage en  $\mu_0$  élargit les ailes du coefficient de diffusion. Les particules ont un rayon de Larmor  $r_L/L = 0.186$ .



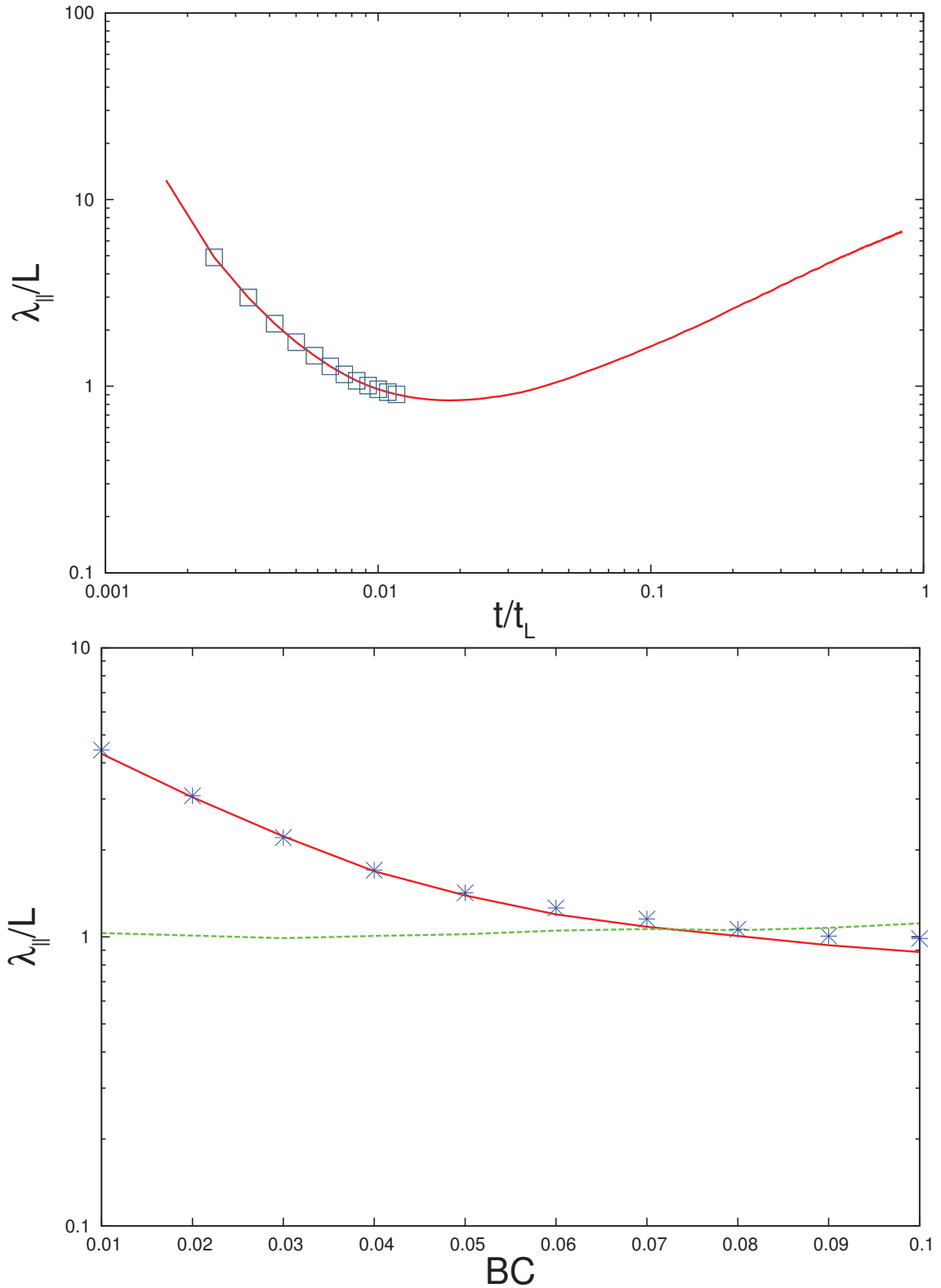


FIGURE 7.16 – En haut, évolution temporelle du libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{\parallel}$  pour des particules de rayon de Larmor  $r_L/L = 0.186$ . Les points représentent l'intervalle de temps dans lequel  $BC(t) \in [10^{-2}, 10^{-1}]$ . En bas, libre parcours moyen parallèle avec la méthode de l'échantillonnage en  $\mu_0$  (trait rouge) en fonction du critère de Beresnyak. Les points correspondent au libre parcours moyen déterminé à partir du critère de Beresnyak total. Le rapport des deux méthodes (trait vert), nous montre que le rapport des résultats entre les deux méthodes ne dépasse pas 10%.

On peut se demander quelle méthode est la bonne pour estimer le libre parcours moyen. Il semble que la méthode de l'échantillonnage en  $\mu_0$  ait de bons arguments. En effet, si on cherche le libre parcours moyen, alors les données temporelles n'ont pas d'importance. Ce qui importe, c'est la distance moyenne au-delà de laquelle la trajectoire des particules est suffisamment déviée. Or, déterminer le libre parcours moyen à partir du coefficient de diffusion angulaire implique que tous les bins constituant l'espace des  $\mu_0$  aient atteint le critère de diffusion, donné par le critère de Beresnyak  $BC$ .

Dans les paragraphes 7.3, 7.4 et 7.5, j'utiliserai, pour vérification, la première méthode, à savoir celle consistant à échantillonner l'espace des  $\mu_0$ , pour calculer le libre parcours moyen parallèle.

### 7.2.4 Incertitudes de mesure

Le paragraphe 6.4 nous a permis d'appréhender les différentes sources d'erreur qui influent sur le résultat du libre parcours moyen, à savoir le nombre de particules, la résolution numérique, le nombre de réalisations turbulentes et la méthode d'interpolation.

Le paragraphe 7.2 nous a également montré que si le libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{\parallel}$  est déterminé à partir du coefficient de diffusion angulaire  $D_{\mu\mu}$ , une source d'erreur supplémentaire doit être attribuée sur le critère de Beresnyak considéré. En effet, je me suis limité à  $BC = 0.05$ , mais il est difficile de prétendre que c'est la bonne valeur. Néanmoins, les paragraphes 7.3 et 7.4 font intervenir uniquement des grandeurs spatiales dans la détermination des libres parcours moyens.

Une fois le nombre de particules et la résolution numérique fixés, les sources d'erreur sur  $\lambda_{\parallel}$  se limitent donc à l'écart-type statistique des différentes réalisations. Chacune des simulations MHD a été constituée de 5 snapshots, tous ayant leur propre nombre de Mach alfvénique. Dans chacun des snapshots, le nombre de particules et la distribution des angles d'attaque seront les mêmes. Les résultats sur les libres parcours moyens exposés dans les deux prochaines sections sont calculés en réalisant la moyenne sur toutes les réalisations. L'erreur associée sera qualifiée d'erreur statistique, et sera déterminée par le calcul de l'écart-type des réalisations

$$\Delta\lambda = \left[ \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\lambda - \bar{\lambda})^2 \right]^{1/2}, \quad (7.16)$$

où  $\lambda$  désigne le libre parcours moyen qu'il soit parallèle ou perpendiculaire.

Pour une simulation donnée, l'incertitude sur le libre parcours moyen sera donc donnée par la somme des contributions respectives de l'erreur statistique  $\Delta\lambda$  et de

l'erreur liée à la méthode d'interpolation  $\Delta S$ , soit une erreur totale  $\Delta$

$$\Delta = \Delta\lambda + \Delta S. \quad (7.17)$$

Nous avons pu constater que l'erreur liée au schéma d'interpolation jouait peu sur la valeur finale du libre parcours moyen. je choisis donc de fixer  $\Delta S$  constant et égal à 5%, c'est-à-dire de considérer l'erreur liée à l'interpolation comme une erreur systématique.

$\Delta\lambda$ , quant à lui, peut varier d'une simulation à l'autre, ce qui explique la différence d'incertitude dans les figures des paragraphes 7.3 et 7.4.

Lorsque je développerai les résultats des libres parcours moyens en fonction du nombre de Mach alfvénique, j'ajouterai des barres d'erreur en abscisse, faisant référence à l'écart-type de l'ensemble des nombres de Mach alfvéniques des cinq snapshots.

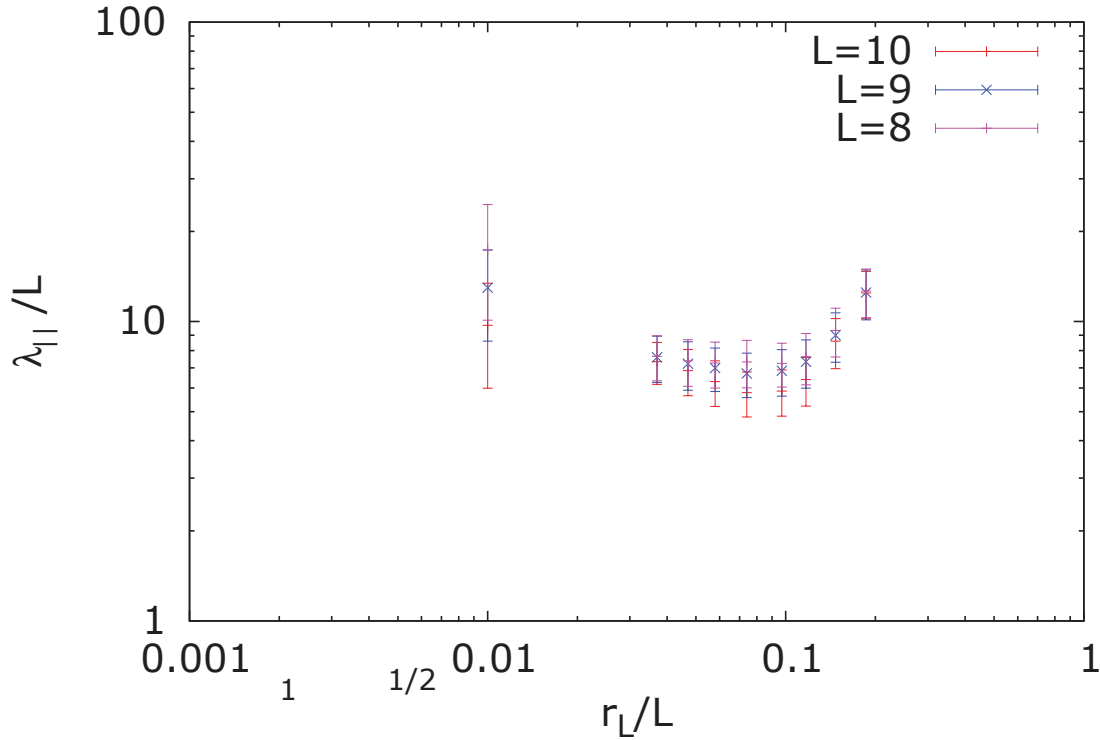
## 7.3 Diffusion spatiale : libre parcours moyen parallèle

La détermination du libre parcours moyen est plus simple lorsque l'on s'intéresse aux données spatiales dans la grille de calcul. La périodicité de la grille permet de suivre les particules dans une turbulence homogène, et ainsi d'optimiser les résultats des grandeurs caractéristiques du transport en turbulence MHD. Cette section s'articule autour des paramètres qui modifient le libre parcours moyen. Ces paramètres ne sont pas équivalents : la résolution numérique (§7.3.1) et le nombre de particules (§7.3.2) sont les paramètres d'ordre numérique susceptibles de modifier le résultat de la mesure du libre parcours moyen, alors que l'énergie des particules (§7.3.3) et le niveau de turbulence (§7.3.4) sont les paramètres physiques pouvant jouer sur la détermination de la grandeur.

### 7.3.1 Dépendance de la résolution

j'utiliserai les simulations *L8W1B1P1C5*, *L9W1B1P1C5* et *L10W4.5B1P1C5* dans ce paragraphe pour comparer l'impact de la résolution numérique sur le libre parcours moyen parallèle.

Ces simulations ont un niveau de turbulence similaire. J'injecte alors  $10^6$  particules avec une distribution constante sur tout l'espace des  $\mu$  et je fais propager différentes énergies de particules,  $r_L/L \in [0.03 : 0.186]$ .



1/3

FIGURE 7.17 – Evolution du libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{||}/L$  en fonction de l'énergie pour différentes valeurs de résolution. Ici, j'ai choisi d'injecter  $10^6$  particules afin de compenser les effets de statistique liés au nombre de particules (cf. §7.3.2).

Les résultats, qui sont condensés dans la figure 7.17, nous montrent que les résultats sont compatibles quel que soit la résolution utilisée, avec toutefois une dépendance pour les faibles énergies ( $r_L/L = 0.01$ ), correspondant à la zone dissipative du spectre MHD. Comme cette partie du spectre gagne en puissance avec la résolution, il est normal d'avoir un meilleur confinement. L'augmentation d'un facteur deux de la résolution divise le pas de temps par ce même facteur. Réaliser l'intégration des particules pour la simulation *L9W1B1P1C5* a donc nécessité deux millions de pas de temps, deux fois plus que pour la simulation  $256^3$ . Doubler la résolution fait aussi reculer la limite de dissipation aux grands modes  $k$ . Les particules peuvent donc interagir avec un plus grand nombre de modes d'onde, augmentant l'efficacité de la diffusion, et diminuant le libre parcours moyen parallèle. Mais ce n'est pas ce que l'on observe sur la figure 7.17.

Pour les particules de plus haute énergie, les grands modes ont de faibles puissances dans le spectre, et les particules sont de moins en moins sensibles à ces petites fluctuations à mesure que leur énergie augmente. Ceci explique pourquoi l'augmentation de la résolution influence moins la propagation des particules de haute énergie. Cependant, comme la puissance des grands modes augmente, il est légitime de se demander dans quelle limite ce résultat est correct. En effet, on aurait tendance à

penser que si on rajoute de petites fluctuations, alors  $\lambda_{\parallel}$  devrait diminuer. On interprète cette augmentation comme le fait que le champ magnétique est mieux défini. Je dois vérifier cette hypothèse avec des simulations  $1024^3$ .

### 7.3.2 Influence du nombre de particule

Pour étudier le libre parcours moyen, j'utilise un nombre limité de particules. Avoir un nombre fini d'éléments constitue, en soi, une première approximation dans la théorie du transport. Ce paragraphe nous permettra de mieux appréhender les effets de statistique liés au nombre de particules.

La figure 7.18 résume les résultats correspondants.

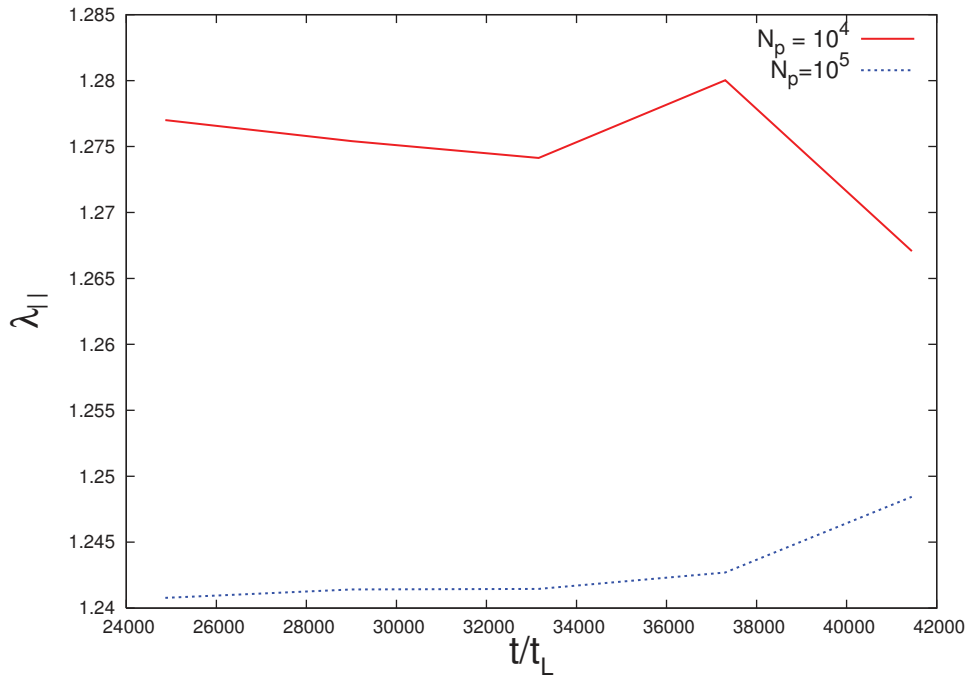


FIGURE 7.18 – Evolution temporelle du libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{\parallel}$ . Ici, les particules ont une énergie équivalente à un rayon de Larmor  $r_L/L = 0.03$ .

Dans cette figure, l'influence sur le résultat entre le passage d'une simulation de  $10^4$  à  $10^5$  particules modifie la valeur de près de 2%. J'utiliserai par la suite  $10^5$  particules, puisque le coût en temps de calcul n'est pas impacté dans les simulations faisant intervenir plus de seize coeurs.

L'écart de résultat entre les deux simulations servira par la suite à attribuer une contribution à l'erreur totale sur la mesure du libre parcours moyen.

### 7.3.3 Dépendance énergétique

Dans cette partie, je m'intéresserai à la dépendance énergétique du libre parcours moyen. Comme annoncé dans le paragraphe précédent, j'injecte  $10^5$  particules qui

constituent une distribution constante dans l'espace des  $\mu$ . Chacune des expériences de particules test fera l'objet d'une intégration sur deux millions de pas de temps, correspondant à un temps au bout duquel les particules sont dans un régime diffusif, c'est-à-dire où le libre parcours moyen devient constant avec le temps.

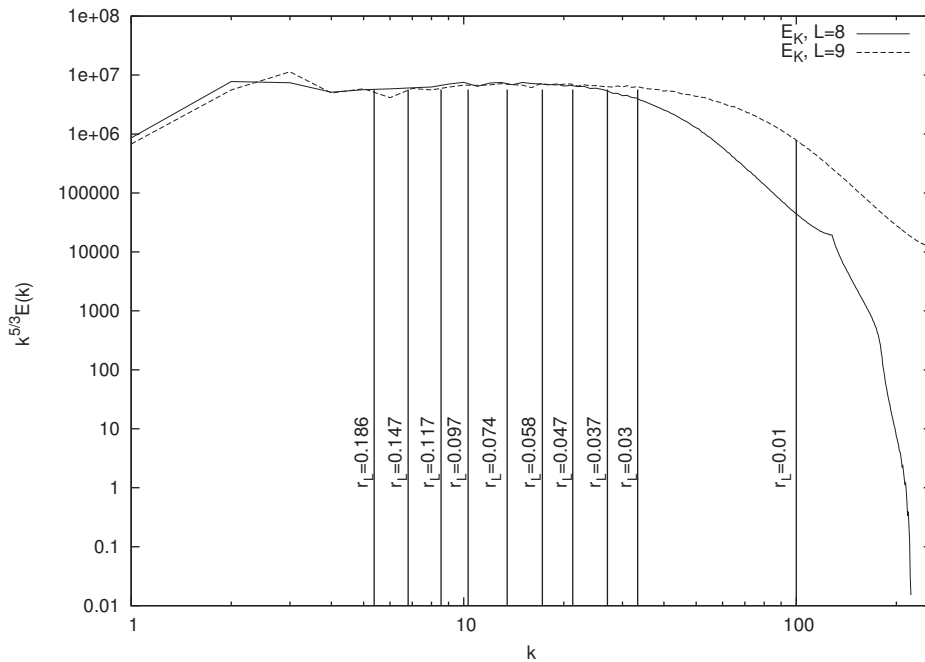


FIGURE 7.19 – Spectres d'énergie cinétique redressés en  $k^{5/3}$  pour les simulations *L9W1B1P1C5* et *L8W1B1P1C5* en fonction du mode d'onde  $k$ . J'ai placé les particules suivant la relation  $k = r_L^{-1}$  sur les spectres pour situer leurs interactions relatives.

La figure 7.19 représente les spectres d'énergie cinétique pour deux simulations MHD. Nous avons placé sur la figure l'ensemble des  $k_{res}$ , défini comme  $r_L/L = k_{res}^{-1}/L$ . La figure 7.20 nous montre que le libre parcours moyen parallèle est constant avec l'énergie sur l'ensemble de la zone inertielle du spectre, pour les simulations où  $M_A < 0.7$  (simulations 1, 2, 5, 6 et 7 du tableau 4.1). Nous remarquons toutefois une cassure autour de  $r_L/L = 0.1$  due au fait que les particules de haute énergie subissent moins l'effet des petites échelles. Ces résultats sont cohérents avec ceux rassemblés dans la figure 7.3. Le fait d'augmenter l'énergie des particules nous rapproche également de la zone de forçage, ce qui induit une incertitude supplémentaire quant à l'effet sur le libre parcours moyen. C'est pourquoi je me suis limité à un rayon de Larmor maximum à  $r_L/L = 0.186$ .

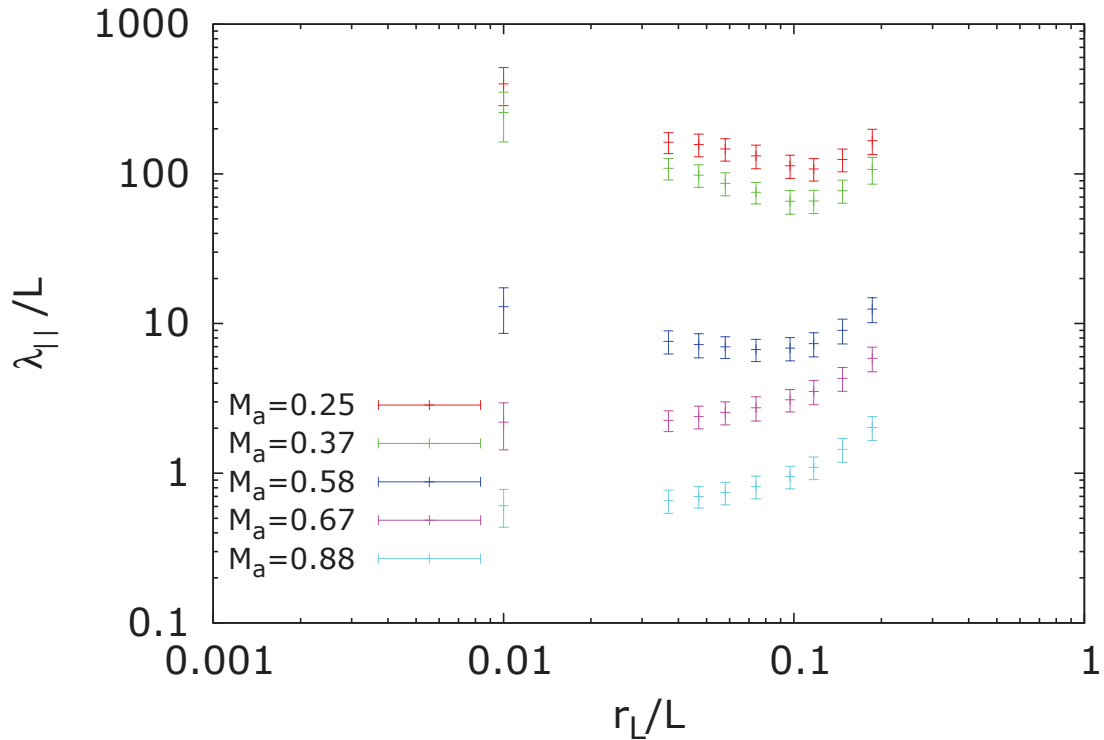


FIGURE 7.20 – Evolution du libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{||}$  en fonction de l'énergie des particules, exprimée en terme de rayon de Larmor en unité de cube  $r_L/L$ , pour différentes réalisations MHD.

### 7.3.4 Dépendance du niveau de turbulence

Pour finir, je trace l'évolution du libre parcours moyen  $\lambda_{||}$  en fonction du nombre de mach alfvénique, représentant le niveau de turbulence.

J'utiliserai pour cela les simulations portant les numéros 7, 8, 11, 12, 13 et 14 dans le tableau 4.1. J'ai fait propager différentes énergies de particules, pour voir l'impact du niveau de turbulence sur cette dépendance (figure 7.21).

Cette figure nous montre que le libre parcours moyen décroît avec l'augmentation du niveau de turbulence. Ce résultat est cohérent avec les études précédentes [105], et s'explique par l'augmentation du confinement produit par des champs magnétiques turbulents devenant comparables au champ moyen  $B_0$  : la notion même de parallèle et perpendiculaire devient floue, puisque ce sont des directions relatives à un champ magnétique moyen, lui-même écranté par de fortes fluctuations magnétiques. L'étude du libre parcours moyen perpendiculaire (cf. §7.4.4) confirmera cette explication.

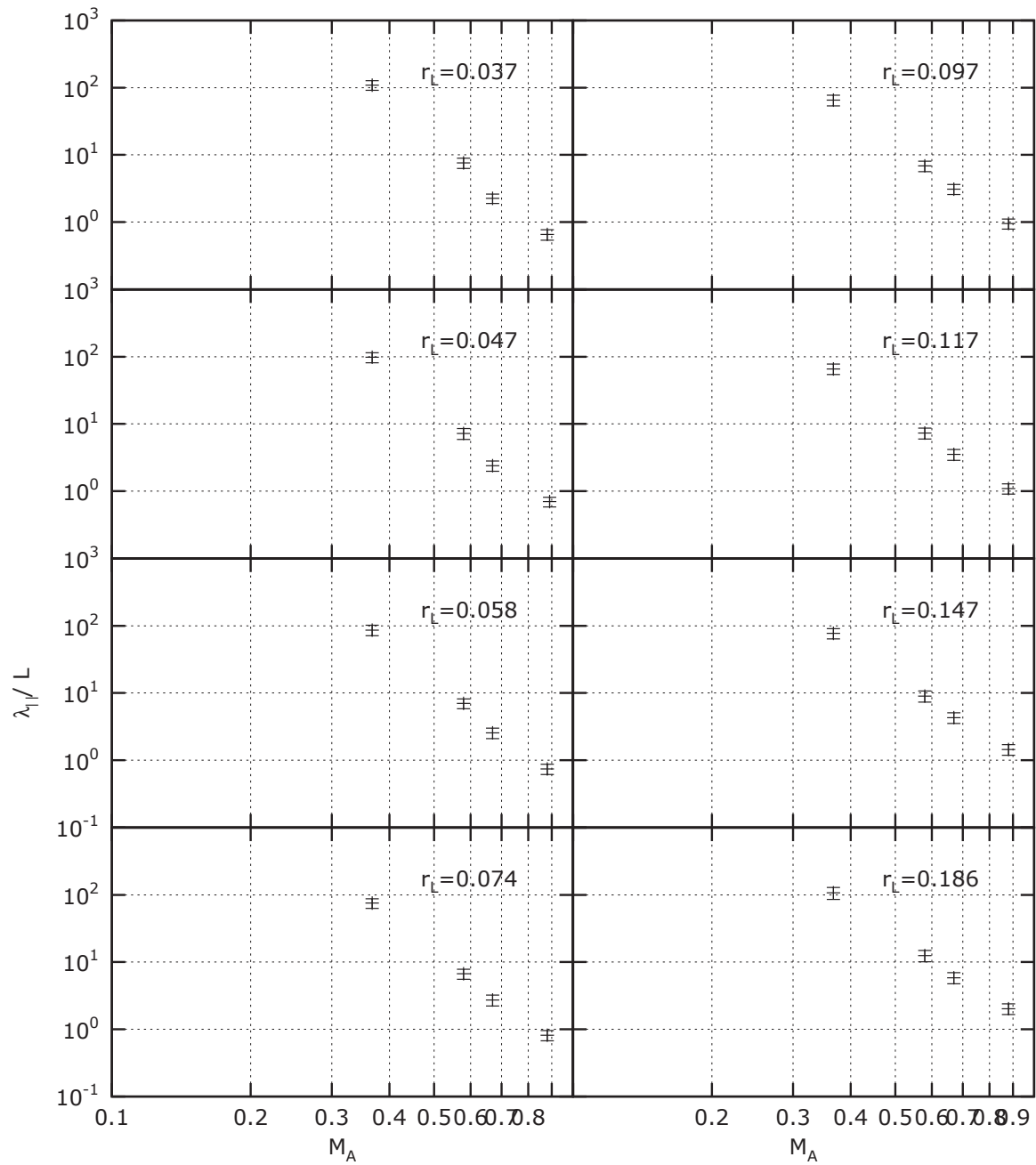


FIGURE 7.21 – Evolution libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{||}$  en fonction du niveau de turbulence, traduit par le nombre de Mach alfvénique  $M_a$ . Différentes énergies sont représentées.



## 7.4 Diffusion spatiale : libre parcours moyen perpendiculaire

Dans cette section, j'utilise les simulations précédentes pour étudier le libre parcours moyen perpendiculaire  $\lambda_{\perp}$ . Cette quantité est en général de plusieurs ordres de grandeurs plus petits que son homologue parallèle  $\lambda_{\parallel}$ , mais a des propriétés différentes, comme par exemple d'augmenter avec le niveau de turbulence (cf. §7.4.4). Pour toute la suite de l'exposé, je définis  $\lambda_{\perp}$  à partir de l'équation (7.3), avec, pour  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ ,

$$x_{\perp}(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}. \quad (7.18)$$

### 7.4.1 Dépendance de la résolution

En utilisant les simulations *L9W1B1P1C5*, *L8W1B1P1C5* et *L10W4.5B1P1C5* nous comparons les différents résultats du libre parcours moyen perpendiculaire pour différentes énergies de particules (les mêmes que dans le paragraphe 7.3.1) dans la figure 7.22. En analysant les spectres représentés dans la figure 7.20, on peut déduire que la présence de nouveaux modes dans la simulation  $512^3$  et  $1024^3$  provoque un confinement plus important.

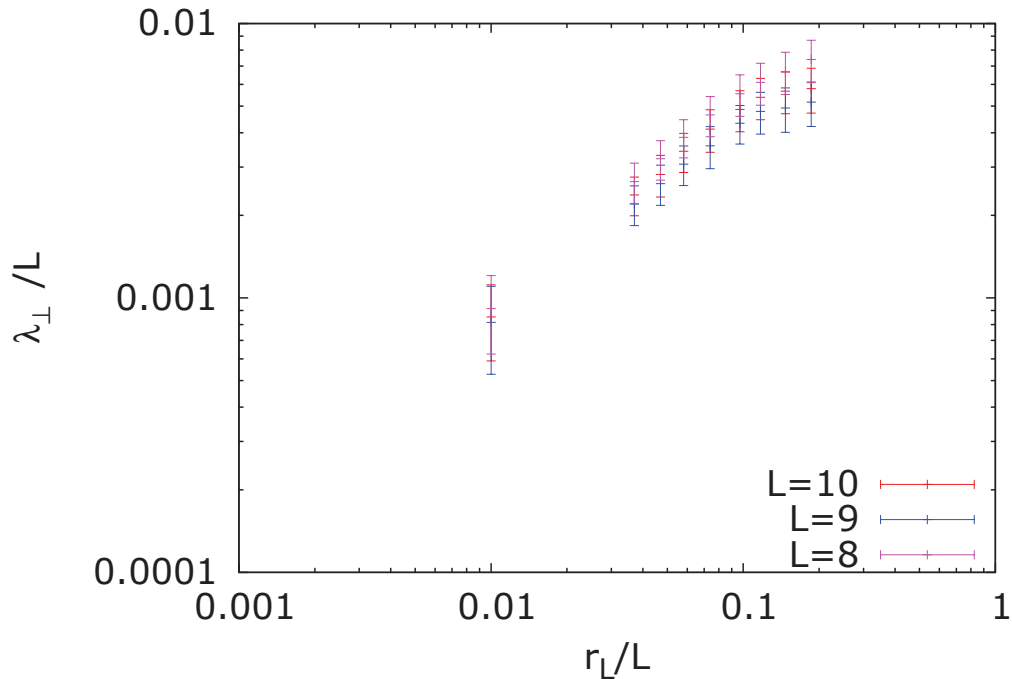


FIGURE 7.22 – Evolution libre parcours moyen perpendiculaire  $\lambda_{\perp}$  en fonction du rayon de Larmor des particules  $r_L/L$ .

Dans la figure 7.22, on voit que  $\lambda_{\perp}$  n'est pas sensible à la variation de résolution.

## 7.4.2 Influence du nombre de particules

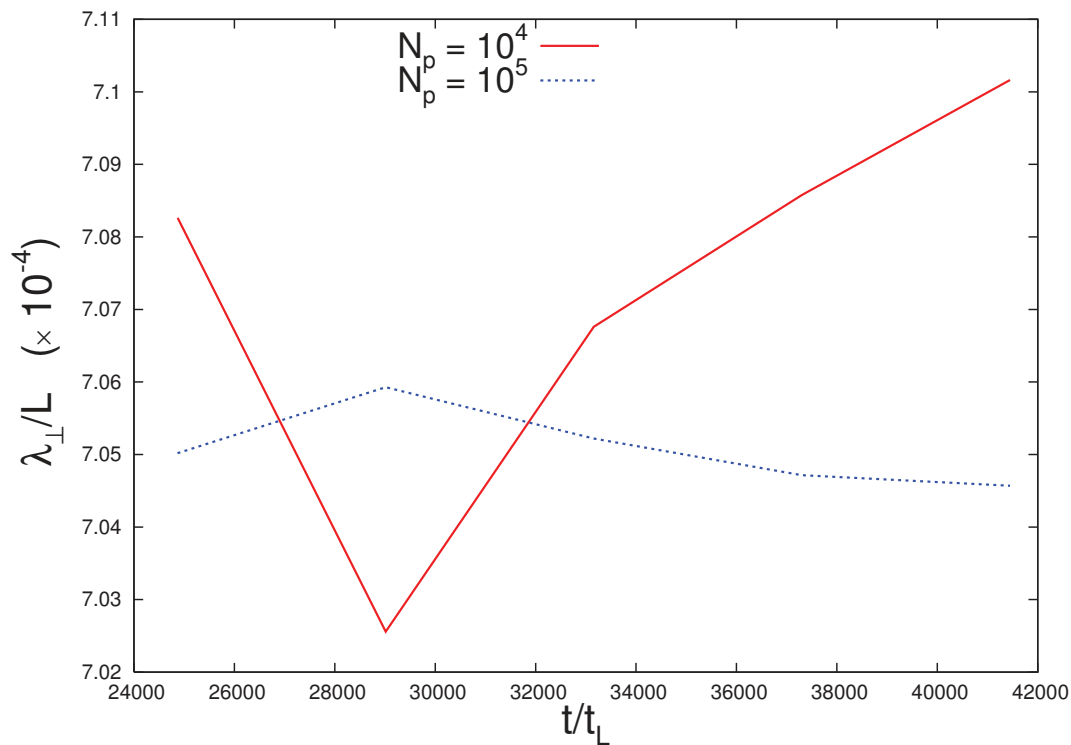


FIGURE 7.23 – Evolution du libre parcours moyen perpendiculaire  $\lambda_{\perp}$  en fonction du temps rapporté à la période de giration  $t/t_L$ , le tout pour une simulation à  $10^4$  particules, et à  $10^5$  particules.

Comme précédemment, on cherche à mesurer l'impact du nombre de particules sur le résultat du libre parcours moyen perpendiculaire. Le résultat, représenté figure 7.23, est similaire à celui relatif au libre parcours moyen, voire plus sévère : l'écart entre les simulations n'excède pas 1%, rendant définitivement négligeable la contribution du nombre de particules à l'erreur totale.

### 7.4.3 Dépendance énergétique

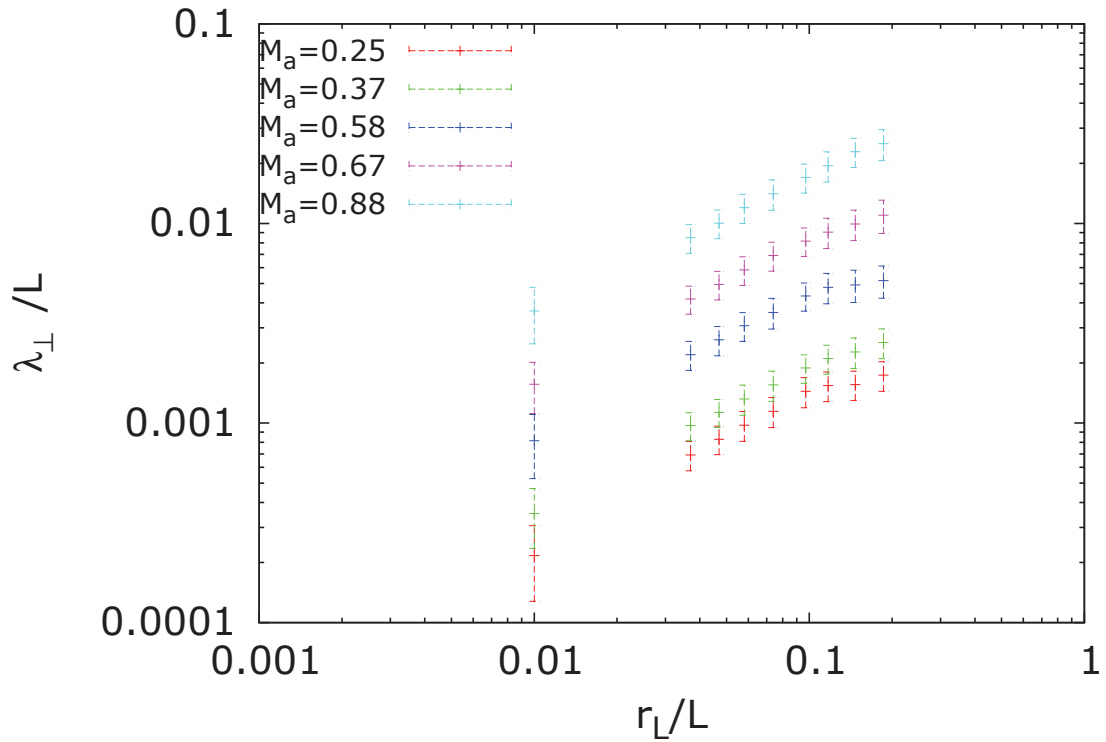


FIGURE 7.24 – Libre parcours moyen perpendiculaire  $\lambda_{\perp}$  en fonction du rayon de Larmor des particules  $r_L/L$ .

J'utilise maintenant les simulations déjà utilisées dans la section 7.3.3 pour étudier la dépendance énergétique du libre parcours moyen perpendiculaire. Les résultats, condensés dans la figure 7.24, montrent que  $\lambda_{\perp}$  augmente avec l'énergie, indépendamment du niveau de turbulence, ce qui confirme les résultats établis dans [8].

## 7.4.4 Dépendance du niveau de turbulence

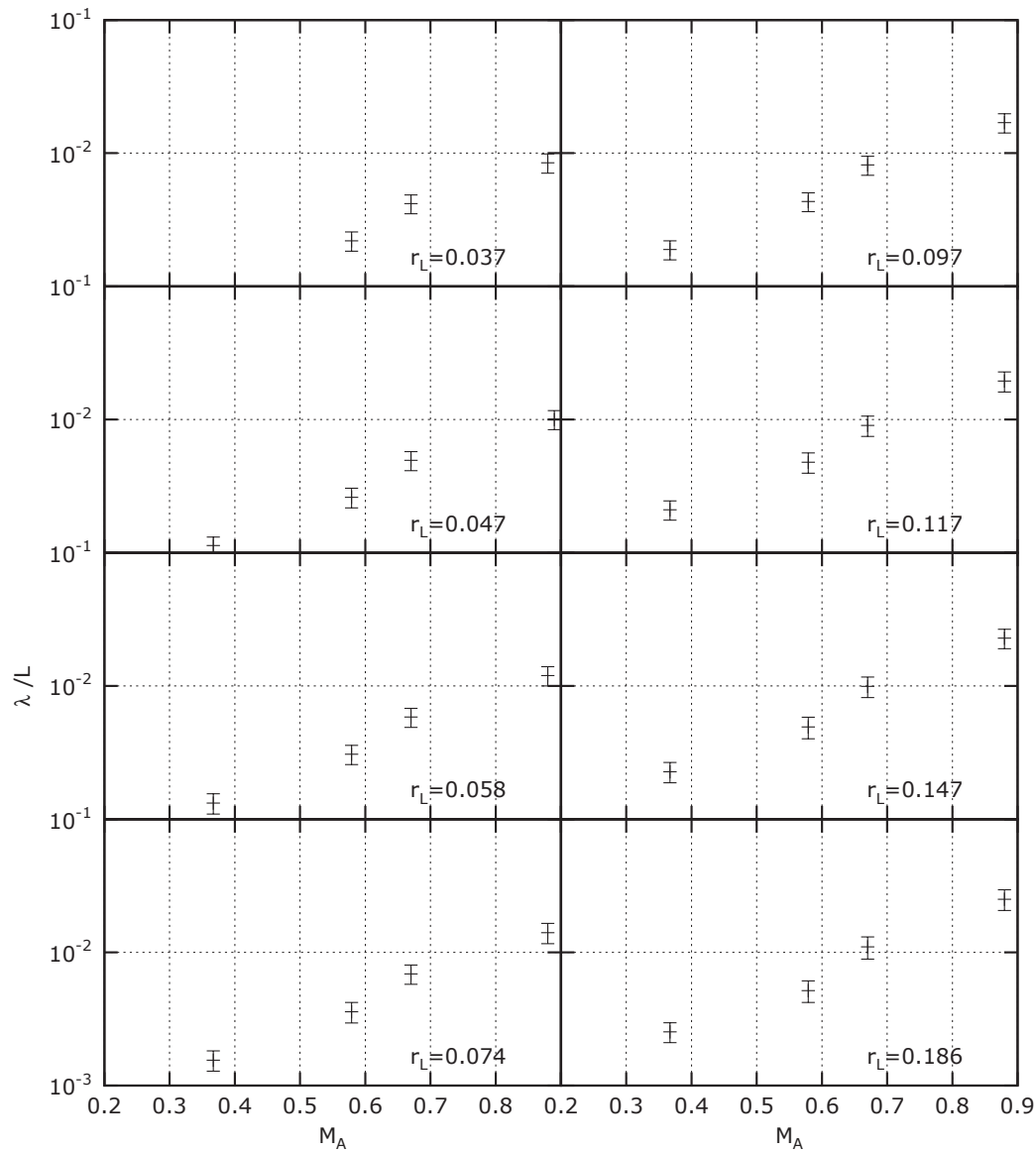


FIGURE 7.25 – Libre parcours moyen perpendiculaire  $\lambda_{\perp}$  en fonction du nombre de Mach alfvénique  $M_A$ , autrement appelé niveau de turbulence.

Le niveau de turbulence fait augmenter le libre parcours moyen perpendiculaire, comme le montre la figure 7.25. Cette propriété vient du champ turbulent : les fluctuations sont de plus en plus importantes et facilitent la diffusion dans le sens perpendiculaire au champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$ . Par contre, je ne suis pas en mesure de confirmer le résultat exprimé par l'équation (7.6) [105], qui produit une loi proportionnelle à  $\lambda_{\perp} \propto M_A^4$ . Mon étude produit une loi  $\propto M_A^2$ . Cependant, je me suis placé dans un cas où l'énergie de mes particules est déterminée de telle sorte que

le rayon de Larmor correspond à un mode d'onde de la zone inertielle du spectre MHD, à la différence de [105], où le rayon de Larmor est situé au-delà de l'échelle de dissipation du spectre, techniquement à  $k = 100$  sur la figure 7.19.

Le problème vient du fait qu'à des énergies aussi faibles, la puissance des modes après la coupure de dissipation ( $k_d \sim 25$ ) est très dépendante du code MHD utilisé [50], comme nous l'avons souligné à travers la figure 3.2. Le résultat obtenu dans l'étude [105] n'est donc pas fiable à cause de la divergence des codes MHD à ce niveau du spectre. Une autre différence à relever est le mode de forçage de la turbulence : j'ai fait un mixage des modes solénoïdaux et compressibles, en fixant  $\chi = 0.5$ , alors que les résultats produisant la loi en  $\lambda_{\perp} \propto M_A^4$ , sont extraits d'une turbulence forcée de façon purement solénoïdale, soit  $\chi = 1$ .

## 7.5 Propagation avec des paramètres de forçage extrêmes

Dans cette section, je reprends les résultats relatifs à la propagation dans le cas où le forçage est obtenu à partir d'une géométrie purement compressible ( $\chi = 0$ , §7.5.1) ou purement solénoïdale ( $\chi = 1$ , §7.5.2), constitués par les simulations 8 à 11, et 18 à 21 du tableau des simulations 4.1. Les simulations 7 et 17 ont des niveaux de turbulence tels que le calcul des coefficients de diffusion spatiaux est trop coûteux en ressources, et nous n'avons pas pu obtenir les résultats associés à ces simulations.

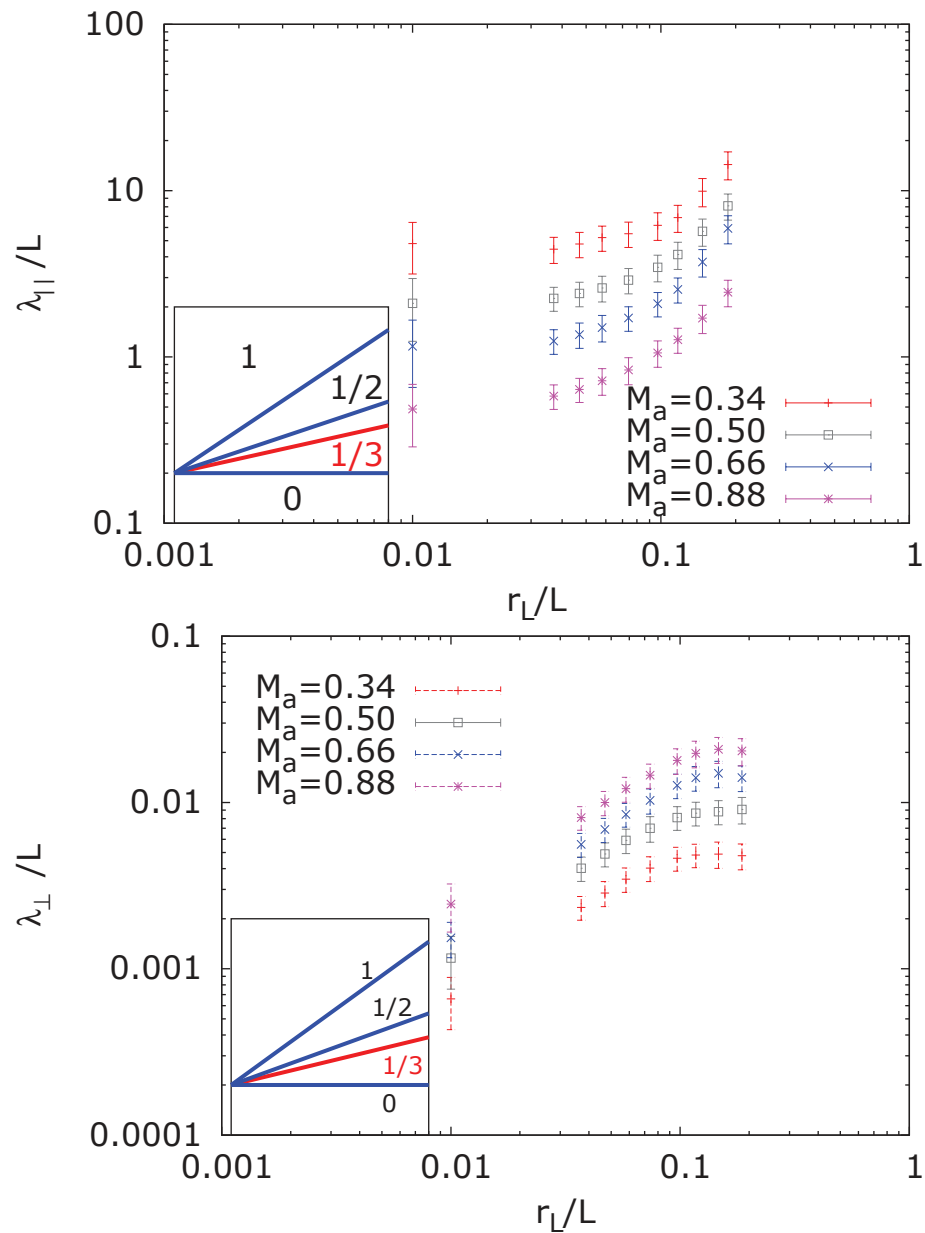
7.5.1 Forçage compressible  $\chi = 0$ 

FIGURE 7.26 – Evolution des libres parcours moyens en fonction de l'énergie des particules,  $r_L/L$ , pour différentes valeurs du nombre de Mach alfvénique,  $M_A$ . En haut, libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{\parallel}$ ; en bas, libre parcours moyen perpendiculaire  $\lambda_{\perp}$ .

La figure 7.26 représente le libre parcours moyen parallèle dans les simulations à  $\chi = 0$  (cf 4.1) en fonction du rayon de Larmor des particules. Cette figure montre qu'un forçage compressible produit un spectre de propagation similaire, quel que soit le niveau de turbulence. Le libre parcours moyen perpendiculaire est représenté figure

7.27. Cette dernière montre que les parties purement solénoïdales ne produisent pas de point d'inflexion à haute énergie, alors que le forçage purement compressible limite  $\lambda_{\perp}$  à un maximum.

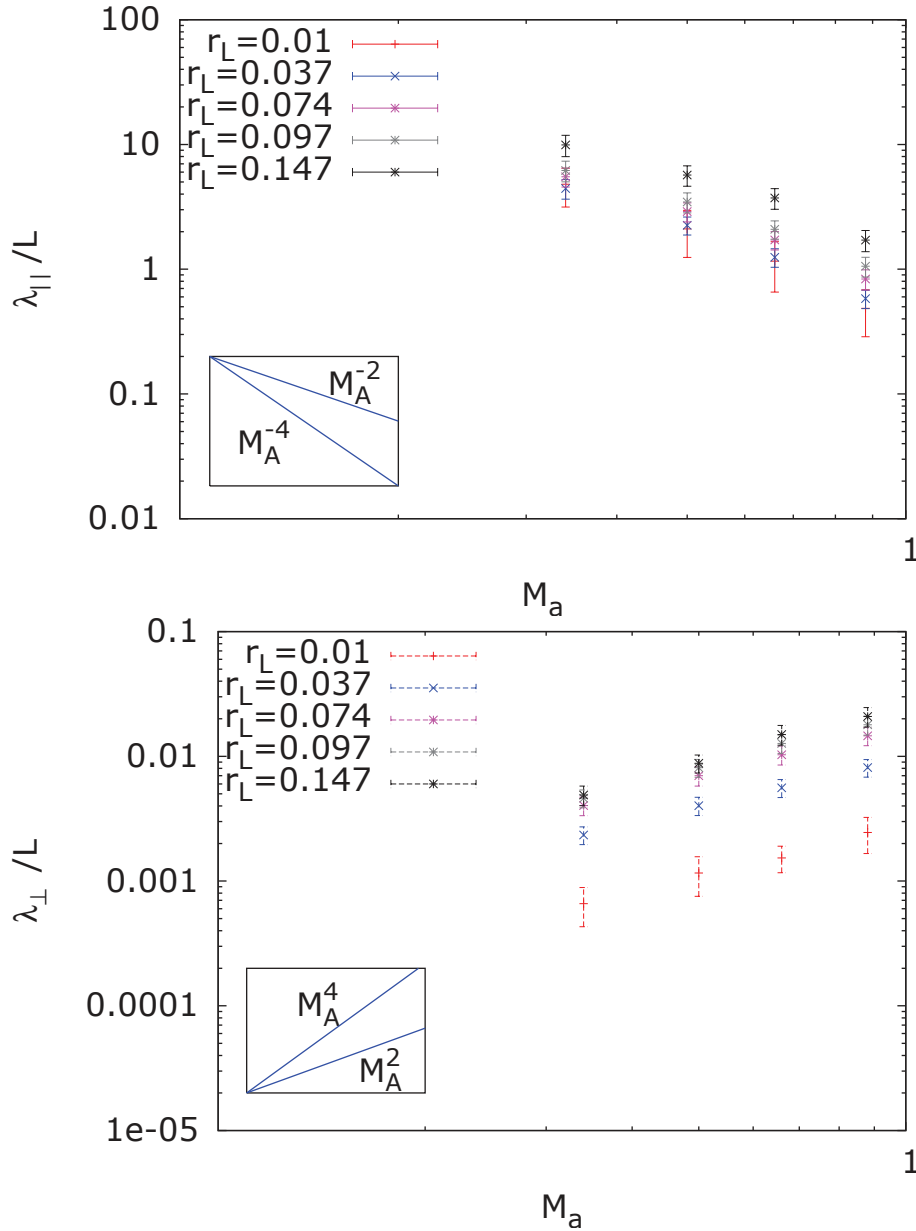


FIGURE 7.27 – Libre parcours moyen fonction du nombre de Mach alfvénique  $M_a$ . On note que l'indice de la loi de puissance est fonction de l'énergie des particules.

### 7.5.2 Forçage incompressible $\chi = 1$

Ici, nous présentons les mêmes travaux que dans la parties précédente, mais pour un forçage purement incompressible.



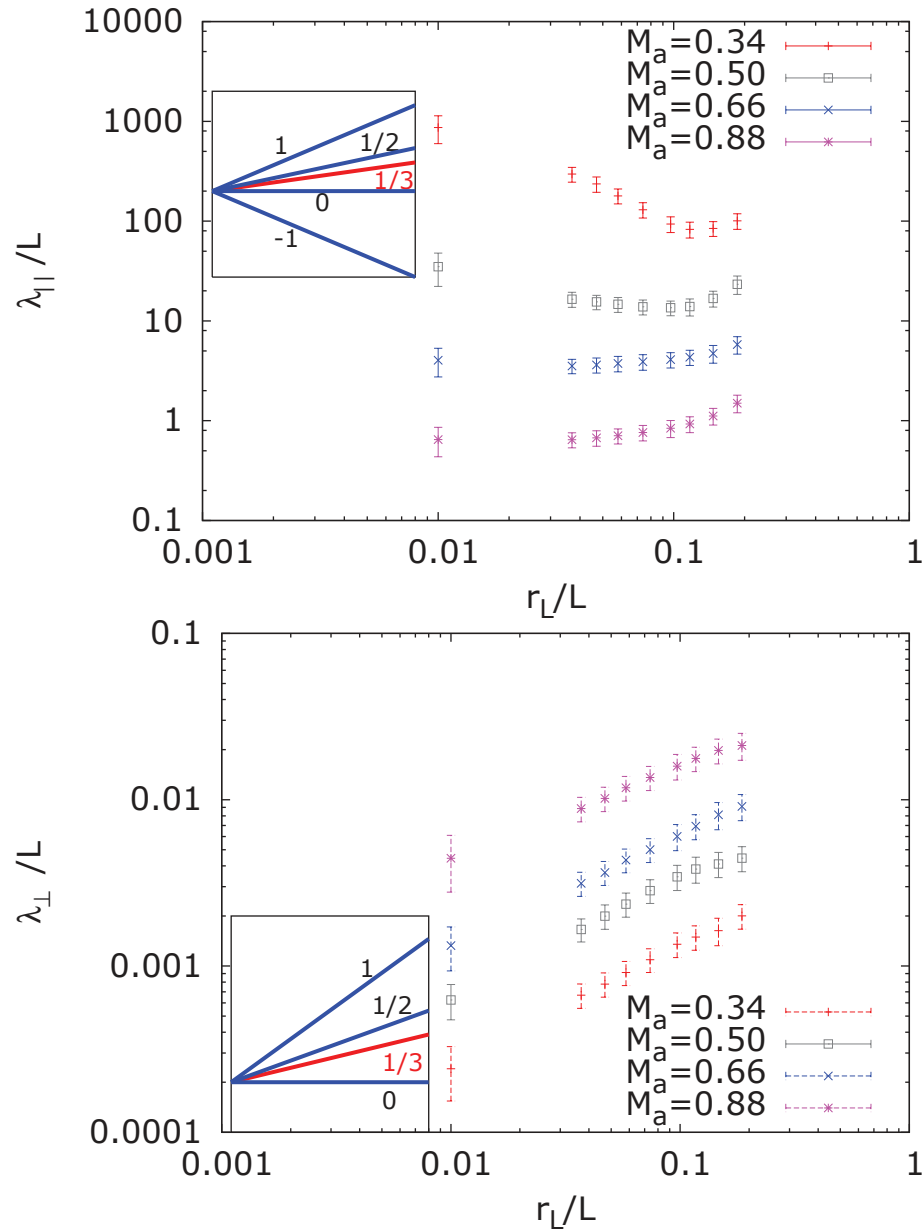


FIGURE 7.28 – Evolution des libres parcours moyens en fonction de l'énergie des particules,  $r_L/L$ , pour différentes valeurs du nombre de Mach alfvénique,  $M_A$ . En haut, libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{||}$ ; en bas, libre parcours moyen perpendiculaire  $\lambda_{\perp}$ .

La figure 7.28 représente le libre parcours moyen parallèle dans les simulations à  $\chi = 1$  (cf 4.1) en fonction du rayon de Larmor des particules. Cette figure montre une dépendance forte en  $M_a$  pour le libre parcours moyen parallèle que l'on ne retrouve pas pour un forçage à  $\chi = 0$ , ce qui confirme par rapport à la section 7.4.3 que la présence de mode solénoïdaux dans le forçage influence le spectre de propagation. Au contraire, le libre parcours moyen perpendiculaire ne semble pas subir une quelconque influence. Ces résultats nous permettent de dire que la propagation

parallèle est grandement influencée par la population des modes présents dans la turbulence. Le fait qu'à haut niveau de turbulence les résultats ne dépendent plus du régime de forçage nous indique qu'il se produit un couplage dans les mode MHD à partir d'une certaine valeur de  $M_a$ .

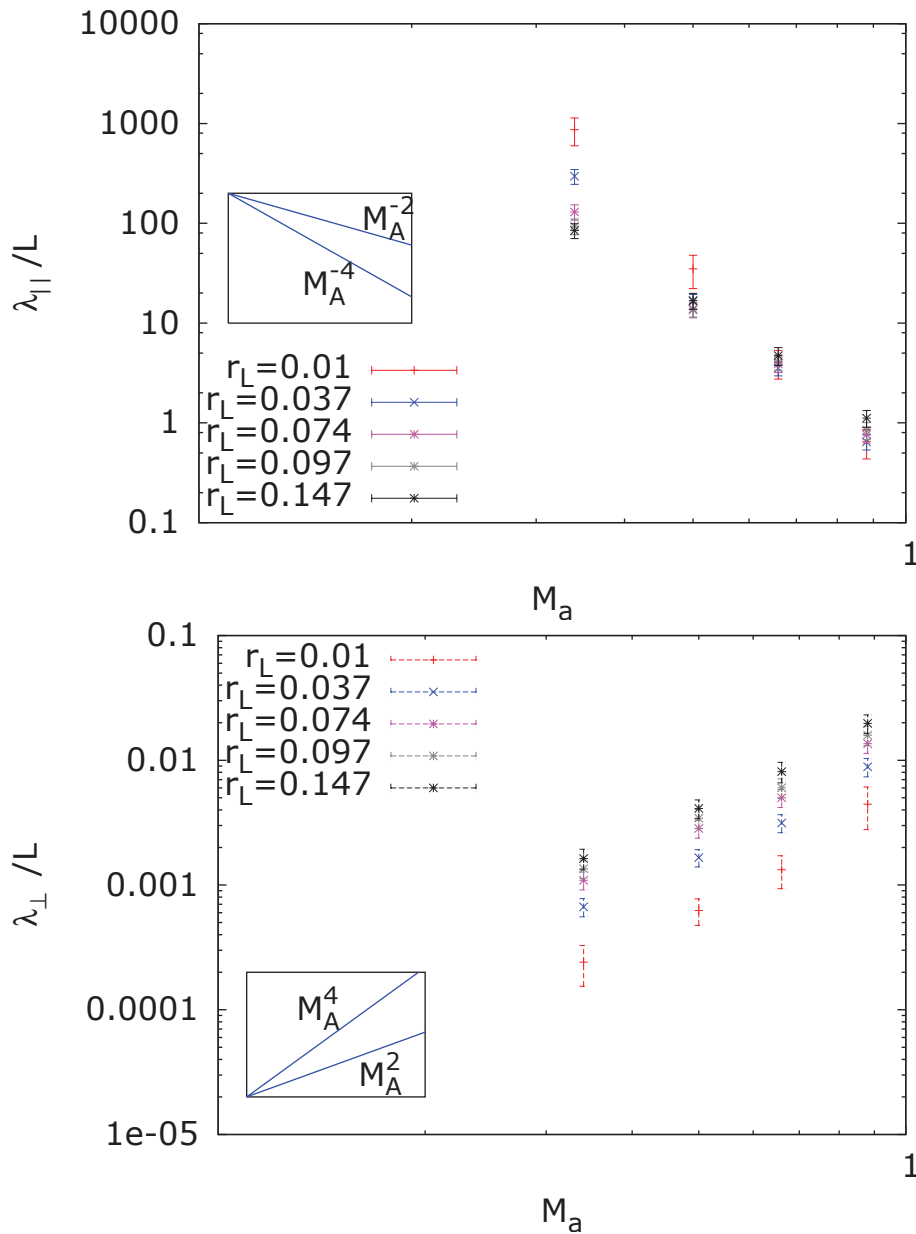


FIGURE 7.29 – Libre parcours moyen fonction du nombre de Mach alfvénique  $M_a$ . A nouveau, l'indice de la loi de puissance est fonction de l'énergie des particules.

La figure 7.29 nous montre que les valeurs des indices pour les libres parcours moyens parallèles passent de -4 à presque -8 avec l'énergie! Une étude complète des indices des lois de puissance nous donnera une indication très utiles pour com-

prendre les interactions entre le spectre de puissance du champ magnétique et les libres parcours moyens. Cela sera l'objet de futures investigations que je ne peux malheureusement pas présenter dans le cadre de cette thèse.

# Chapitre 8

## Champs locaux

Dans ce chapitre, j'exploiterai les résultats du chapitre 5 pour tenter de comprendre dans le détail le rôle de l'anisotropie sur les grandeurs caractéristiques du transport. Ce travail a été présenté à la conférence CRISM 2014, et est associé en fin de chapitre (Cohet et Marcowith 2014).

### 8.1 propagation dans les champs locaux

j'ai utilisé la méthode de calcul des champs locaux (cf. §5.4), dont je rappelle l'expression

$$\mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x}) = \iiint_V d^3\mathbf{x}' \mathbf{B}(\mathbf{x}') \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2}{\sigma^2}\right), \quad (8.1)$$

sur la simulation L8W1B1P1C5 pour plusieurs valeurs de  $\sigma$

$$\sigma = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 25, 30, 34, 42, 64\}. \quad (8.2)$$

D'après l'équation (8.1), plus  $\sigma$  est élevé, plus les fluctuations sont de grandes échelles. A l'inverse, plus ce paramètre est petit, plus le champ local se rapproche du champ turbulent original, comprenant toutes les échelles de fluctuations.

La limite où  $\sigma = 0$  transforme l'exponentielle de l'équation (8.1) en une distribution de Dirac, menant, après intégration, à la relation

$$\mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (8.3)$$

Dans la limite où  $\sigma$  est grand, l'exponentielle tend vers l'unité, et on retrouve la relation du calcul du champ moyen

$$\mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0. \quad (8.4)$$

A l'aide de ces champs, nous définissons le champ moyen fluctuant  $\mathbf{b}_\sigma$ , qui est tel que

$$\mathbf{b}_\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x}). \quad (8.5)$$

On fait maintenant propager  $N_p = 10^5$  particules d'énergie  $r_L/L = 25/256 \sim 0.1$  taille de cube dans les champs magnétiques locaux turbulents, définis par l'équation (8.5). La force de Lorentz subie par les particules est maintenant

$$\mathbf{f}_\sigma = q \cdot \mathbf{v}_p \times \mathbf{b}_\sigma. \quad (8.6)$$

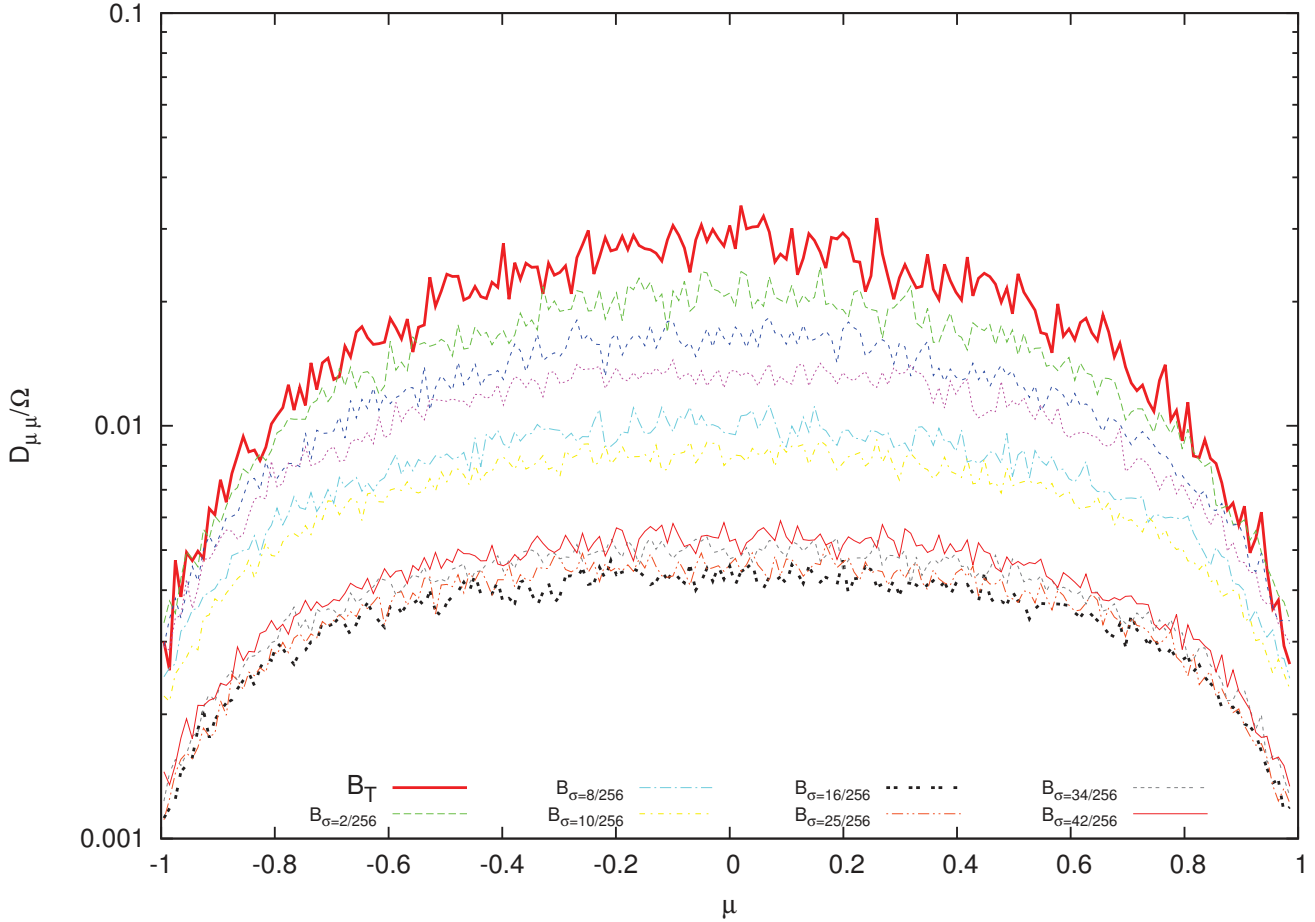


FIGURE 8.1 – Coefficient de diffusion angulaire rapporté à la période de giration  $D_{\mu\mu}/\Omega$  en fonction de  $\mu$  à un critère de Beresnyak  $BC = 5 \times 10^{-2}$ . La courbe en gras et trait plein rouge est le résultat du coefficient de diffusion angulaire pour une propagation dans le champ total et un critère de Beresnyak  $BC = 0.05$ . Les autres courbes représentent les coefficients de diffusion angulaire obtenus en calculant  $\mu$  par rapport aux champs locaux,  $\mu_\sigma$ . Ici, les particules se sont propagées dans les  $b_\sigma$ .

Les particules sont injectées de façon à générer une distribution constante dans l'espace de  $\mu$ . Lorsque le critère de Beresnyak

$$BC(t) = \sqrt{\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (\mu_i^{b_\sigma}(t) - \mu_i^{b_\sigma}(t=0))^2}, \quad (8.7)$$

pour l'ensemble des particules devient égal à 0.05, la simulation est stoppée, et je calcule le coefficient de diffusion angulaire en remplaçant les particules dans les champs locaux, c'est-à-dire

$$D_{\mu\sigma\mu\sigma}(\text{BC} = 0.05) = \frac{1}{2N_p t} \sum_{i=1}^{N_p} (\mu_{\sigma i}(t) - \mu_{\sigma i}(t=0))^2, \quad (8.8)$$

où  $\mu_{\sigma i}$  est le cosinus de l'angle d'attaque de la particule  $i$  prise par rapport au champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_\sigma$  tel que

$$\mu_{\sigma i} = \frac{\mathbf{v}_{p,i} \cdot \mathbf{B}_\sigma(\mathbf{x}_{p,i})}{v_{p,i} B_\sigma(\mathbf{x}_{p,i})}. \quad (8.9)$$

La figure 8.1 nous donne une information notable sur la forme du coefficient de diffusion angulaire. Si on compare les trois courbes les plus proches du  $D_{\mu\mu}$  dans le champ total (ligne en gras continue rouge), correspondant à  $\sigma \leq 5$ , on s'aperçoit que le profil du coefficient de diffusion angulaire "s'aplatit", c'est-à-dire qu'à  $\mu = 0$ , l'amplitude du  $D_{\mu\mu}$  est divisée par un facteur trois, alors que sa valeur à  $\mu = 1$  n'est pas affectée par le filtrage. On l'interprète comme étant la contribution à la résonance du TTD qui diminue, alors que celui lié à l'interaction de gyro-résonance ne change pas sous l'effet du filtrage. Cet effet montre que l'interaction TTD, dont le principe est similaire à un miroir magnétique pour les particules, est très efficace sur les petites échelles.

La seconde expérience consiste à faire propager les particules dans les champs locaux eux-mêmes. Cette expérience, résumée figure 8.2, fait intervenir autant de simulations qu'il y a de  $\sigma$ , définis par l'équation (8.2). Pour chacune de ces simulations, j'ai injecté  $10^5$  particules de façon à obtenir une distribution en  $\mu_\sigma$  constante sur l'intervalle  $[-1 ; 1]$ . A l'issue des simulations, on procède au calcul du  $D_{\mu\sigma\mu\sigma}$  de la même façon que dans l'expérience précédente.

La figure 8.2 représente les résultats obtenus par cette démarche. Il en ressort que l'amplitude générale du coefficient de diffusion angulaire diminue à mesure que  $\sigma$  augmente. Cet effet est parfaitement normal, puisque dans la limite où  $\sigma$  est grand, le champ magnétique moyen devient constant, et le libre parcours moyen parallèle infini. Il apparaît qu'au-delà de  $\sigma \sim 8 - 10$ , le champ magnétique filtré perd de l'efficacité sur la diffusion aux grands angles d'attaque  $\mu \sim 0$ .

Si on compare les trois courbes les plus proches du  $D_{\mu\mu}$  dans le champ total (ligne en gras continue rouge), correspondant toujours à  $\sigma \leq 5$ , on s'aperçoit que le profil du coefficient de diffusion angulaire "s'aplatit" : la contribution à la résonance du TTD diminue plus rapidement que celle de nature giratoire sous l'effet du filtrage, traduit par

$$\frac{D_{\mu\mu}}{D_{\mu\sigma\mu\sigma}^{\sigma=4}} = \begin{cases} 3 & \text{si } \mu = 0 \\ 2 & \text{si } \mu = \pm 1 \end{cases}. \quad (8.10)$$

Un autre phénomène peut être relevé en comparant les figures 8.1 et 8.2 : pour  $\sigma = 16$  (courbe en pointillé noir sur les deux figures), correspondant à l'échelle  $k = 256/16 = 16$ . En situant cette échelle sur le spectre associé à la simulation L8W1B1P1C5 (figure 7.20), on s'aperçoit que cette échelle correspond à peu de chose près à la fréquence de coupure du spectre MHD pour cette simulation.

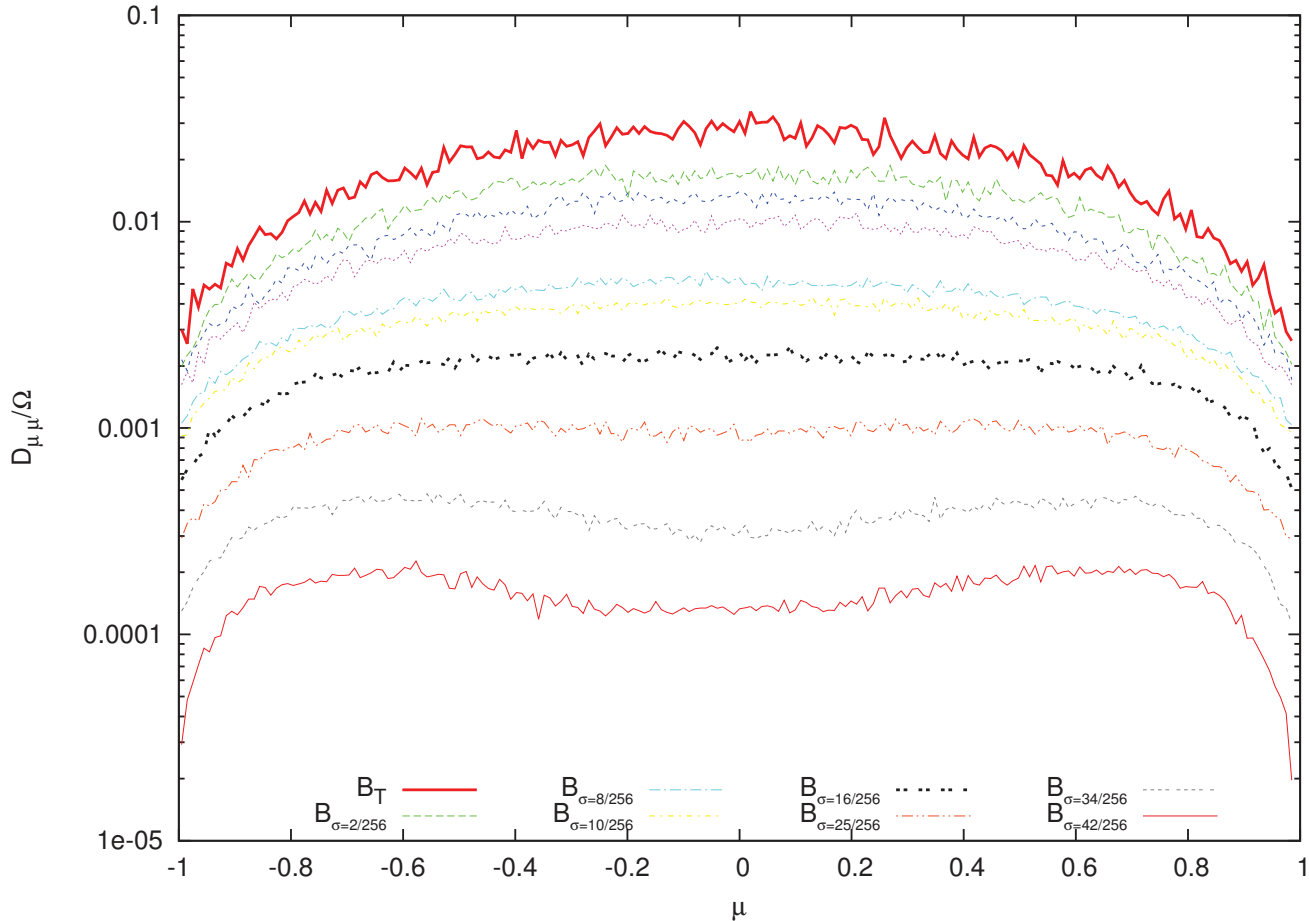


FIGURE 8.2 – Coefficient de diffusion angulaire rapporté à la période de giration  $D_{\mu\mu}/\Omega$  en fonction de  $\mu$  à un critère de Beresnyak  $BC = 5 \times 10^{-2}$ . La courbe en gras et trait plein rouge est le résultat du coefficient de diffusion angulaire pour une propagation dans le champ total et un critère de Beresnyak  $BC = 0.05$ .

Lorsque  $\sigma = 16$ , le profil du coefficient de diffusion de la figure 8.1 est minimum. Au-delà, le coefficient de diffusion augmente jusqu'à se stabiliser dans la limite où  $B_{\sigma} = B_0$ . Dans la figure 8.2,  $\sigma = 16$  correspond au profil complètement plat sur l'intervalle  $|\mu| \in [0 ; 0.6]$ . Au-delà, la forme générale du coefficient de diffusion change : le maximum du  $D_{\mu\mu}$  se déplace sur les points où  $|\mu| = 0.6$ . La figure 7.8 nous montre que c'est typiquement le profil d'une interaction gyro-résonante [105]. Une explication de ce résultat est que l'interaction de type TTD n'a pas d'échelle privilégiée [8]. En filtrant, la contribution du TTD diminue, ce qui change la forme générale du

coefficient de diffusion angulaire.

Pour finir, comme les particules ont une énergie  $r_L/L = 0.1$ , on s'intéresse maintenant à l'échelle de filtrage  $\sigma = \sigma_{res} = 1/k_{\parallel res} \sim r_L$ . Outre le fait que le champ filtré avec  $\sigma = \sigma_{res} = 25/256$  ne produise qu'une faible contribution à la résonance giratoire du coefficient de diffusion, on peut néanmoins remarquer que les fluctuations à faible sigma dominant le transport, jusqu'à des valeurs où

$$\frac{1}{k_{\perp res} L} = \left(\frac{r_L}{L}\right)^{3/2} \sim 8/256. \quad (8.11)$$

Cette relation d'échelle montre une relation entre les échelles parallèles et perpendiculaires de type Goldreich-Sridhar, où

$$\frac{l_{\perp}}{L} = \frac{1}{k_{\perp} L} = \left(\frac{l_{\parallel}}{L}\right)^{3/2}. \quad (8.12)$$

Autrement dit, les échelles plus petites que les échelles perpendiculaires  $l_{\perp}/L$  sont plus efficaces pour diffuser le long de leurs champs locaux. En conséquence, le libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{\parallel}$  calculé le long des champs locaux est proche de celui calculé dans le champ total.



## Cosmic ray propagation in local magnetic fields

---

### R.Cohet<sup>\*†</sup>

*Laboratoire Univers et particules de Montpellier, Université Montpellier II/CNRS, place E.*

*Bataillon, cc072, 34095 Montpellier, France*

*E-mail: [Romain.Cohet@univ-montp2.fr](mailto:Romain.Cohet@univ-montp2.fr)*

### A.Marcowith

*Laboratoire Univers et particules de Montpellier, Université Montpellier II/CNRS, place E.*

*Bataillon, cc072, 34095 Montpellier, France*

*E-mail: [Alexandre.Marcowith@univ-montp2.fr](mailto:Alexandre.Marcowith@univ-montp2.fr)*

Magneto-hydrodynamic (MHD) turbulence is responsible for the transport of cosmic rays (CRs) in the interstellar medium. Recent models of MHD turbulence show an anisotropic spectrum resulting from the balance between the non-linear cascade process and the interaction oppositely travelling wave packets along the magnetic field lines. The interaction between CRs and magnetic fluctuations involve wave numbers that have to be calculated with respect to the local magnetic field, i.e. the magnetic fields seen by a perturbation of scale  $k^{-1}$  which have scales larger than  $k^{-1}$ . We have developed kinetic-MHD simulations using the RAMSES code upgraded with a kinetic module describing the particle transport via turbulent Lorentz forces. We have reconstructed the local magnetic fields from the total magnetic field using a Gaussian filter. We have reconstructed the cosine pitch-angle diffusion coefficient for particles propagating in the random Lorentz force produced by the total field and the different local filtered fields. The particles have the same Larmor radius of  $r_L = 0.1$  in cube length units and the wave-number  $r_L^{-1}$  fall in the inertial range of the turbulence. We found that the particle mean free path is dominated by the transport in local fields with small filter parameters, typically smaller than  $r_L^{3/2}$  in cube length units meaning that perpendicular small scale fluctuations are important in the wave-particle interaction process. The filtering procedure hence helps to isolate the physics of the particles and the MHD anisotropic turbulence interaction.

*Cosmic Rays and the InterStellar Medium - CRISM 2014,*

*24-27 June 2014*

*Montpellier, France*

---

<sup>\*</sup>Speaker.

<sup>†</sup>This work is supported by the ANR COSMIS project

## 1. Introduction

Understanding the properties of cosmic ray (CR) transport in magnetized turbulence is a key issue in the description of the origin of cosmic ray radiation. The transport involves the interaction of CRs with various type of waves that usually are described in the long wave length magnetohydrodynamic (MHD) limit. The MHD perturbations are part of magnetized turbulent motions that pervade the interstellar medium (ISM) and induce a random walk of the CR from their sources to the Earth [1]. The very nature of the MHD turbulence is although not well constrained and matter of very active research [2].

Recent phenomenological models of MHD turbulence have pointed out that the mean magnetic (large scale) field induces a natural anisotropy in the energy transfer. They considered that the source of small scale turbulent motions is produced by the interaction of opposite wave packets travelling along the local mean magnetic field lines. The balance between the interaction timescale and the perpendicular cascade timescale leads to a relation between the parallel and the perpendicular perturbation wave numbers  $k_{\parallel} \propto k_{\perp}^{2/3}$  (see [3]). Here the local magnetic field has to be understood in the sense of the large scale magnetic field for the wave packets [4] of scale  $1/k$ . This turbulence model originally developed in the incompressible limit has been tested successfully in the compressible limit using numerical calculations [5].

It appeared soon that a turbulence with a critical balance should not provide efficient cosmic ray transport through the diffusion of the pitch-angle of the particles<sup>1</sup> [6, 7]. This problem arises from the form of the anisotropy. In a Goldreich-Sridhar type turbulence the Eddies are elongated along the local magnetic field and a particle with a gyroradius  $r_L \gg 1/k_{\perp}$  do interact with several uncorrelated field lines within one gyro period. This argument has never been tested with numerical simulations so far but [8] using an enveloped turbulence approach did found an increase of the parallel mean free path by a factor only of a few with respect to the quasi-linear theory in isotropic turbulence obtained by [9]. To alleviate the problem of weak cosmic ray transport efficiency in Alfvénic anisotropic turbulence recent work argued for a strong impact of fast magneto sonic waves (which have been shown to follow an isotropic cascade) [5, 10, 11]. [12] did extend these work to investigate the perpendicular transport by field line wandering using a non-linear theory for the guiding center motion. In all these previous work wavenumbers are taken with respect to the local magnetic field. However, recent direct numerical calculations involving the particle transport in MHD snapshots have been performed in the global magnetic field reference frame [13, 14].

In this work we consider the propagation of the perturbations along the local magnetic field lines and isolate the particle pitch-angles with respect to the local magnetic fields. This approach helps in understanding the contribution of the different scales composing the total fluctuating magnetic field to the particle transport. Hereafter three different magnetic fields are defined: the global magnetic field  $\vec{B}_0$ , i.e. the magnetic field at scales larger than the turbulence coherence scale, the total magnetic field  $\vec{B}_T$  which combines the global field and the fluctuations at all wavelengths, and the local magnetic field  $\vec{B}_l$ .

---

<sup>1</sup>The pitch-angle is the angle between the particle velocity and the magnetic field.

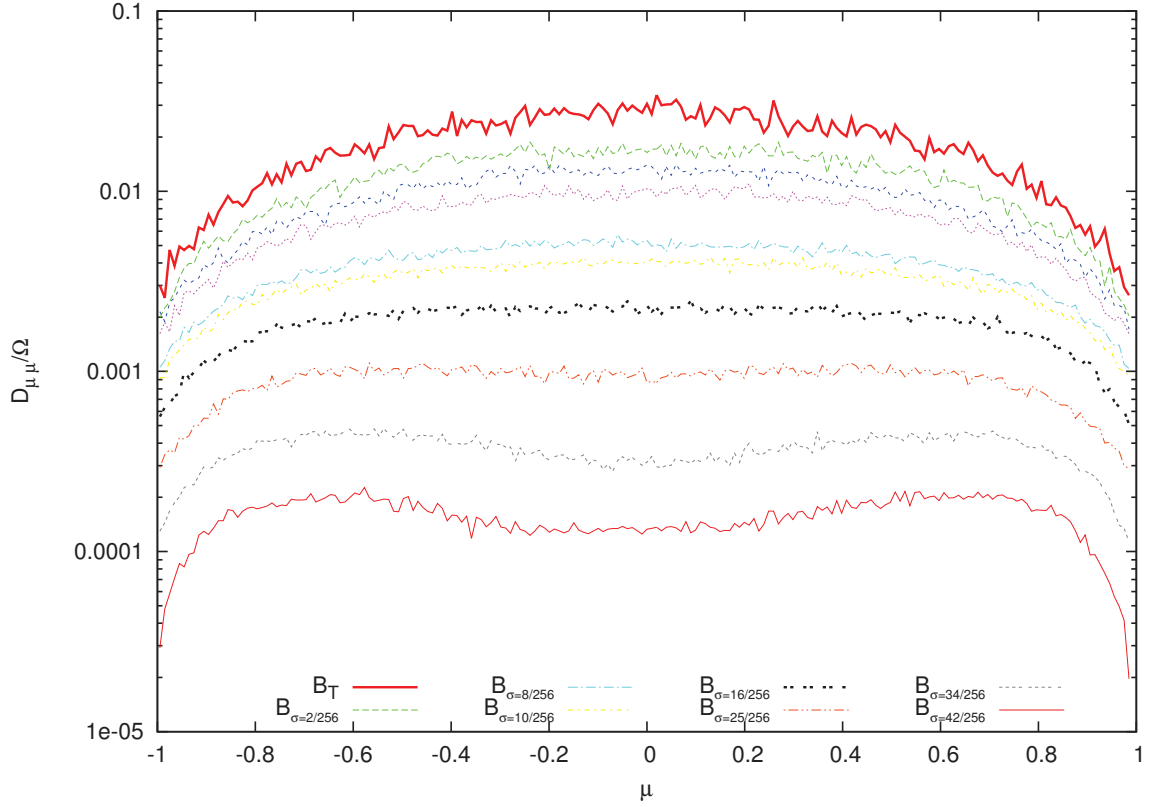
## 2. Magneto-hydrodynamic simulations

The MHD simulations are performed using the RAMSES code [15]. The turbulence is generated in a periodic cubic box using the approach detailed in [16]. The magnetic field is interpolated at the position of the particle using a grid volume weighted average of the magnetic field components. In order to derive the local components of the magnetic we applied a filtering of the total magnetic field  $\vec{B}$  [4]. The local large scale magnetic field is  $\vec{B}_\sigma(\vec{r}) = \Sigma_{\vec{r}'} \vec{B}(\vec{r}') F_\sigma(|\vec{r} - \vec{r}'|)$  and we adopted  $F_\sigma(|\vec{r} - \vec{r}'|) = K \exp(-|\vec{r} - \vec{r}'|^2/\sigma^2)$  for the filter function and  $K$  is chosen as  $\Sigma_{\vec{r}'} F_\sigma(|\vec{r} - \vec{r}'|) = 1$ . We reconstruct at each grid point a local field of a given  $\sigma$ . The simulations are performed at a resolution of  $256^3$ . The filter parameter  $l = \sigma$  is chosen in the range  $[2/256, 42/256]$  in box unit size. The scales in the inertial turbulence range fall in the wavenumber interval  $[256/128, 256/21]$  (in units of  $2\pi/L$ ) approximatively. Hence,  $\vec{b}_\sigma$  with small (large)  $\sigma$  parameters corresponds small (large) scale strongly (weakly) anisotropic perturbations. The simulation are performed for a moderate turbulence with a mean Alfvénic Mach number  $M_a \simeq 0.6$ . It is found that the structure function produced from the small scale perturbations of the local fields constructed as  $\vec{b}_\sigma = \vec{B} - \vec{B}_\sigma$  (the perturbation in the velocity field are constructed in the same manner) do show an anisotropy corresponding the GS scaling especially for  $\sigma$  parameters  $\leq 8/256$ . The structure function have been defined in [4] as  $F_b(R, z) = |\vec{b}_\sigma(\vec{r}_1) - \vec{b}_\sigma(\vec{r}_2)|$  (see their figure 11), where  $R$  and  $z$  are the perpendicular and parallel coordinates in a cylindrical coordinate system associated with the local mean field  $\vec{B}_\sigma$ .

## 3. Cosmic Ray transport

The RAMSES code has been upgraded with a particle-in-cell module calculating the particle trajectory under the effect of the Lorentz force following the procedure described in [13]. In figure 3 we present the pitch-angle cosine diffusion coefficients  $D_{\mu\mu}$  calculated averaging over all particles as  $\langle (\mu(t) - \mu(t=0))^2 \rangle / 2t$  following the prescription of [17, 13] for applicability of the calculation. as the variable  $\mu \in [-1, 1]$  the validity of the calculation is only limited over a restricted time which verifies that the rms deviation from  $\mu(t=0)$  should be comprised between 0.01 and 0.1. We selected the value of 0.05 in this work. We use 100 000 particles to reconstruct the diffusion coefficients. All the results in this section are presented for a particle with a Larmor radius  $r_L = 0.1$  such that  $r_L^{-1}$  falls in the inertial range of the turbulent spectrum. Or, put in another way the wave numbers which correspond to the gyro-resonance with such a Larmor radius are in the interval  $[256/128, 256/21]$ .

The particles has propagated into the total magnetic field (hence under the effect of the total Lorentz force  $\vec{F}_T = q\vec{v} \wedge \vec{B}_T$ ) but the cosine of the pitch-angle are taken with respect to the total (in red solid line) or the local (other curves) magnetic fields. At first we have found that the diffusion coefficient  $D_{\mu\mu}$  has been found to be consistent with the results obtained by [14]. It provides a particle mean free path of  $\lambda_{\parallel,t} = 3/8v \int d\mu (1 - \mu^2)^2 / D_{\mu\mu} \sim 1.5L$  for a turbulent field with  $M_a \simeq 0.6$ . Then it is clear that the small  $\sigma$  dominate the pitch-angle scattering. This is not surprising as for small  $\sigma$  the local mean magnetic field converges to the total magnetic field at the position of the particle (see the above formula in §2). At high  $\sigma$  values the direction of the mean field coincides with the global

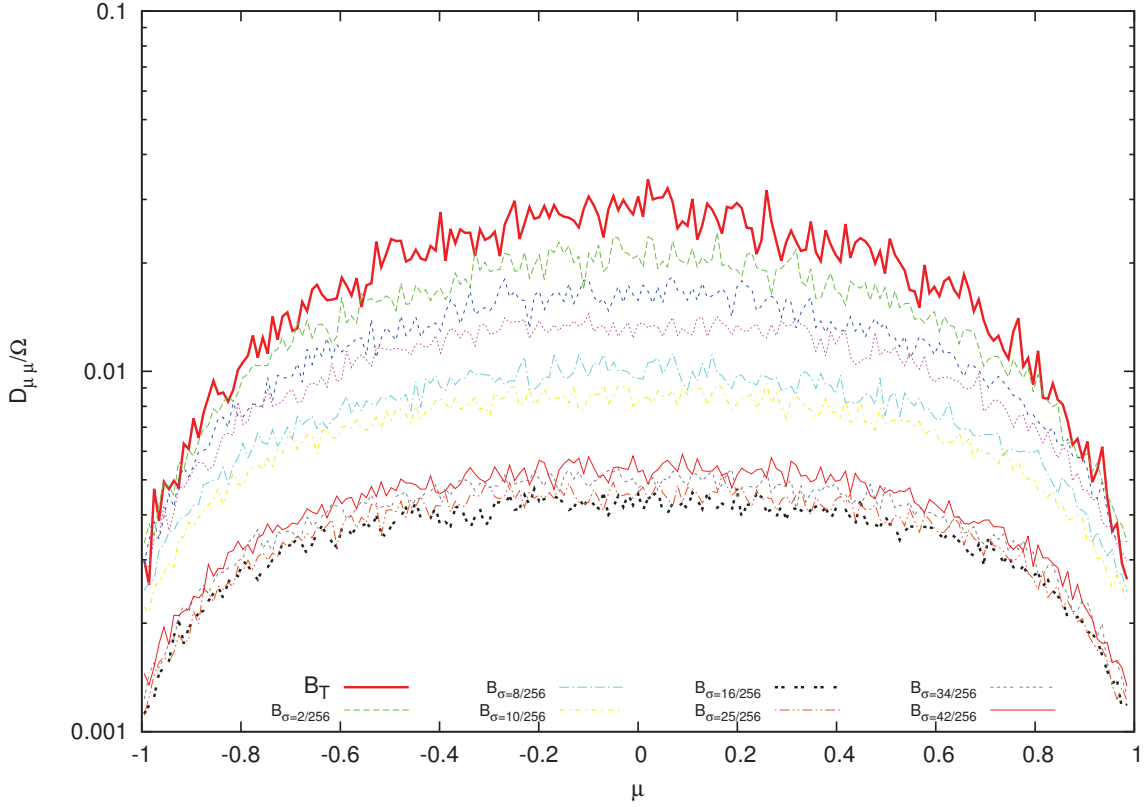


**Figure 1:** Cosine pitch angle diffusion coefficients in the local magnetic field  $B_\sigma$  for different values of  $\sigma$  spanning the interval  $2/256$  to  $42/256$ . The Lorentz force is calculated in the total magnetic field. In continuous red is the diffusion coefficient obtained in the total magnetic field  $B$ . The filter parameter corresponding to the particle Larmor radius is approximatively  $\sigma = 25/256$  corresponding to the orange dot-dashed curve.

field  $B_0$  and the pitch-angle scattering drops.

The figure 3 shows first again the total diffusion coefficient with respect to the cosine of the pitch angle  $\mu = \cos(\vec{v}, \vec{B})$  taken in the total magnetic field using the total Lorentz force (upper red solid line). The other diffusion coefficients are calculated with respect to the cosine of the pitch angle  $\mu_\sigma = \cos(\vec{v}, \vec{B}_\sigma)$  taken in the local magnetic fields using the Lorentz force due to the small scale fluctuations at a scale  $\sigma$ , i.e.  $\vec{f}_\sigma = q\vec{v} \wedge \vec{b}_\sigma$ . Hence, at a given  $\sigma$  the local diffusion coefficients probe the propagation of a particle in a local field (large scale) of intensity  $B_\sigma$  under the effect of (small scale) fluctuations of intensity  $b_\sigma$ .

It appears that beyond filter parameters  $\sigma \sim (8 - 10)/256$  the filtered field lines do not contribute to the transport significantly at large pitch-angles and the diffusion coefficients  $D_{\mu_\sigma, \mu_\sigma}^\sigma(\mu_\sigma \sim 0) < 0.1 D_{\mu_2, \mu_2}^{\sigma=2}(\mu_2 \sim 0)$ . As  $\mu_\sigma \rightarrow \pm 1$  larger scales ( $\sigma > (8 - 10)/256$ ) do contribute to the pitch-angle scattering more, i.e. the aisles of the distribution are more pronounced at these values. Also, fluctuations at scales  $\sigma = \sigma_{res} = 1/k_{\parallel res} \simeq 25/256$  associated with the gyro-resonant structures do not produce a strong pitch-angle scattering. In fact it appears that beyond  $\sigma \sim 14/256$ , the diffusion coefficients drop for any values of  $\mu_\sigma$  and are stalling at low values. Fluctuations at small sigmas do dominate the transport of the particles in the local field up to values not strongly different than



**Figure 2:** Cosine pitch angle diffusion coefficients in the local magnetic field  $B_\sigma$  for different values of  $\sigma$  spanning the interval  $2/256$  to  $42/256$ . The Lorentz force is calculated in the local fluctuating magnetic fields. In continuous red is the diffusion coefficient obtained in the total magnetic field  $B$  (same as in Fig 3). The filter parameter corresponding to the particle Larmor radius is approximately  $\sigma = 25/256$  corresponding to the orange dot-dashed curve.

$(25/256)^{3/2} \sim 8/256 = 1/k_{\perp res}$ . This scaling is associated with the relation between perpendicular and parallel scales in the Goldreich-Sridhar scaling,  $\ell_\perp/L = 1/(k_\perp L) = (\ell_\parallel/L)^{3/2}$ . Hence one can conclude that the scales with scales smaller than  $\ell_\perp/L$  are more efficient in producing a pitch-angle scattering along their local mean field: the parallel mean free path deduced along the local field at low  $\sigma$  values is close but a bit larger than the value  $\lambda_{\parallel,t}$  calculated above in the total magnetic field.

#### 4. Conclusions

We have developed kinetic-MHD simulations of cosmic ray transport in the turbulent magnetic perturbations. We have calculated the local magnetic fields using a filtering procedure of the total magnetic field at each grid points. The random Lorentz force that control the particle propagation is calculated using different filters. The scales of the filter span the scales in the inertial turbulent range. The contribution of each filtered field to the particle transport is dominated by local fields with  $\sigma \sim 1/k_\perp < r_L \sim 1/k_{\parallel res}$  meaning that small scale perturbations are important to account in the wave-particle interaction process.

**References**

- [1] Schlickeiser R., 2002, *The Astrophysics of cosmic rays*, Springer
- [2] Verma M.K., 2004, *Physics Reports*, 401, 229
- [3] Goldreich P. & Sridhar S., 1995, *ApJ*, 438, 763
- [4] Cho J. & Vishniac E.T., 2000, *ApJ*, 539, 273
- [5] Cho J. & Lazarian A., 2003, *MNRAS*, 345, 325
- [6] Chandran B.D.G., 2000, *Phys. Rev. Lett.*, 85, 4656
- [7] Yan H. & Lazarian A., 2002, *Phys. Rev. Lett.*, 89, 1102
- [8] Laitinen T., Dalla S., Kelly J. & Marsh M., 2013, *ApJ*, 764, 168
- [9] Giacalone J. & Jokipii J.R., 1999, 520, 204
- [10] Yan H. & Lazarian A., 2004, *ApJ*, 614, 757
- [11] Yan H. & Lazarian A., 2008, *ApJ*, 673, 942
- [12] Shalchi A., Busching I., Lazarian A. & Schlickeiser R., 2010, *ApJ*, 725, 2117
- [13] Beresnyak A., Yan H. & Lazarian A., 2011, *ApJ*, 728, 60
- [14] Xu S. & Yan H., 2013, *ApJ*, 779, 140
- [15] Teyssier R., 2002, *A&A*, 385, 337
- [16] Smith et al 2009
- [17] Tautz R. et al, 2013, *A&A*, 558, 147



## Conclusion/perspectives





Dans ce manuscrit, j'ai présenté une étude du transport de particules chargées dans une turbulence magnétohydrodynamique. Pour réaliser cette étude, j'ai implémenté un module de forçage ajoutant un terme source dans l'équation d'Euler. Ce terme fait intervenir des composantes d'accélération dans l'espace de Fourier qui évoluent de manière stochastique dans le temps selon un processus de Ornstein-Uhlenbeck. Le forçage implémenté dans cette thèse laisse également le choix de sa géométrie à l'utilisateur, de sorte que le champ de vitesse résultant soit une combinaison de modes compressibles et solénoïdaux définis par l'utilisateur.

Dans cette première partie, j'ai pu effectuer un travail spécifique sur les distributions de densité dans le cadre de simulations hydrodynamiques avec une équation d'état polytropique. J'ai pu ainsi généraliser les travaux de Hopkins par l'intermédiaire de la paramétrisation de Hennebelle (communication privée, 2014).

La première partie nous a également permis de développer un modèle pour comprendre l'anisotropie de la turbulence magnétohydrodynamique, au travers l'étude sur les champs locaux. Bien que cette étude nécessite un approfondissement pour expliquer certains points encore incompris, je pense avoir développé un outil pertinent pour mesurer l'anisotropie.

Dans un deuxième temps, j'ai pu implémenté un module basé sur un schéma numérique de type Particule-In-Cell pour pouvoir suivre les trajectoires des rayons cosmiques le long de leurs cheminements dans la turbulence magnétohydrodynamique. J'ai pu isoler l'effet de la technique d'interpolation sur le transport, montrant directement qu'un schéma d'interpolation linéaire était suffisant dans le cadre de cette thèse.

J'ai pu décrire en détail deux façons de calculer le coefficient de diffusion angulaire. La différence entre les deux méthodes croît à mesure que l'énergie des particules diminue. J'ai également pu mettre en évidence une loi de puissance reliant le libre parcours moyen perpendiculaire avec le nombre de Mach alfvénique, telle que  $\lambda_{\perp} \propto M_A^2$ , pour des régimes de turbulence faible, soit  $M_A < 1$ . De manière moins prononcée, le libre parcours moyen parallèle  $\lambda_{\parallel}$  tend à donner une loi  $\propto M_A^{-2}$ .

Le libre parcours moyen perpendiculaire semble linéaire avec l'énergie, alors que le libre parcours moyen parallèle y semble indépendant.

Pour finir, la seconde partie de cette thèse m'a permis d'isoler les effets des différentes échelles sur le transport dans les champs locaux.

Les suites à donner à cette étude sont nombreuses, et contiennent une part importante de développements numériques. Sans toutefois nécessiter de développement lourd. L'étude la plus simple consisterait à activer le champ électrique au cours de la propagation. La dérive électrique turbulente va générer des variations stochastiques dans l'énergie des particules, ce qui va produire l'élargissement de la distribution de l'énergie en une gaussienne, si les gains et pertes successifs sont considérés comme non corrélés, c'est-à-dire une succession de gains et de pertes d'énergie indépendants les uns des autres.

Nous développons actuellement la propagation de rayons cosmiques dans les nuages

moléculaires, où nous avons implémenté une équation sur l'énergie avec un terme de perte, assimilé à des pertes radiatives, fonction de l'énergie et de la densité fluide. Quelques efforts seront nécessaires pour régler des problèmes de compatibilité entre le module de propagation et les mailles variables produites par l'utilisation de l'AMR de RAMSES.

Je pense également important de faire des simulations de haute résolution  $\geq 1024^3$  supersoniques et sub alfvéniques pour mesurer l'impact d'un haut taux de compression sur le transport des rayons cosmiques. En effet, la présence renforcée d'ondes de chocs dans les cubes de simulation hautement supersoniques entraîne la compression du champ magnétique en amont du choc, pouvant capturer les rayons cosmiques, et le cas échéant, les accélérer via le champ électrique, lui aussi renforcé dans ces régions.

Nous aimerions également, à moyen terme, implémenter la rétroaction des particules sur le champ MHD lui-même, puisque les instabilités de courant des rayons cosmiques sont identifiées comme un processus majeur dans l'amplification du champ magnétique dans un choc, même si Beresnyak (2013) a récemment contesté le fait que le champ magnétique résultant soit efficace pour augmenter l'énergie maximum des particules accélérées dans le choc.

# Références



# Bibliographie

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* New York : Dover, 1972
- [2] M.A. de Avillez, M.-M. Mac Low, *Mixing in a supernova-driven ISM : A 3-D parameter study*. RevMexAA, 15, 290-292, 2003
- [3] W.I. Axford, E. Leer, G. Skadron, *The acceleration of cosmic rays by shock waves*. ICRC proceedings, 11, 32, 1977
- [4] A.R. Bell, *The acceleration of cosmic rays in shock fronts - I*. MNRAS, 182, 147-156, 1978.
- [5] A.R. Bell, *Turbulent amplification of magnetic field and diffusive shock acceleration of cosmic rays*. MNRAS, 353,550-558, 2004.
- [6] A. Beresnyak, A. Lazarian *Structure of stationary strong imbalanced turbulence*. The Astrophysical Journal, 702 :460-471, 2009.
- [7] A. Beresnyak, A. Lazarian *Comparison of spectral slopes of magnetohydrodynamic and hydrodynamic turbulence and measurements of alignment effects*. The Astrophysical Journal, 702 :1190-1198, 2009.
- [8] A. Beresnyak, H. Yan, A. Lazarian, *Numerical study of cosmic ray diffusion in magnetohydrodynamic turbulence*. The Astrophysical Journal, 728 :60, 2011
- [9] B. Bigot, *Ondes et turbulence dans les écoulements MHD anisotropes : applications solaires*. Thèse du 10 avril 2008
- [10] D. Biskamp, *Magnetohydrodynamic turbulence*. Cambridge University Press, 2003
- [11] C.K. Birdsall, A.B. Langdon Biskamp, *Plasma physics via computer simulation*. Series in plasma Physics, 2005
- [12] P. Blasi, *Origin of the Positron Excess in Cosmic Rays*. Physical Review Letters, vol. 103, Issue 5, 2009
- [13] F. Casse, M. Lemoine, G. Pelletier *Transport of cosmic rays in chaotic magnetic fields*. arXiv :astro-ph/0109223, 2002
- [14] B.D.G Chandran, *A review of the theory of incompressible MHD turbulence*. Astrophys. Space Sci., 292 :17-28, (2004)
- [15] J. Cho, A. Lazarian, *Simulation of magnetohydrodynamic turbulence in a strongly magnetized medium*. The Astrophysical Journal, 731 :1, 2011

- [16] J. Cho, E.T. Vishniac, *The generation of magnetic fields through driven turbulence*. The Astrophysical Journal, 538 : 217-225, 2000.
- [17] J. Cho, E.T. Vishniac, *The Anisotropy of Magnetohydrodynamic Alfvénic Turbulence*. The Astrophysical Journal, 539 : 273, 2000
- [18] J. Cho, A. Lazarian, E.T. Vishniac, *Simulation of Magnetohydrodynamic Turbulence in a Strongly Magnetized Medium*. The Astrophysical Journal, 564 : 291, 2002
- [19] J. Cho, A. Lazarian, *Compressible sub-alfvénic MHD turbulence in low  $\beta$  plasmas*. Physical Review Letters, 88 :245001, 2002.
- [20] J. Cho, A. Lazarian, *Compressible magnetohydrodynamic turbulence : mode coupling, scaling relations, anisotropy, viscosity-damped regime, and astrophysical implications*. MNRAS, 345,325-339, 2003.
- [21] B.Commerçon, R.Teyssier, E.Audit, P.Henebelle, and G.Chabrier, *Which Numerical Method for Protostellar Collapse* A & A, 529, A35+, 2008
- [22] L. Oc. Drury, *An introduction to the theory of diffusive shock acceleration of energetic particles in tenuous plasmas*. Rept.Prog.Phys., vol.46, 973-1027, 1983.
- [23] L.OC. Drury, D.E. Ellison, F.A. Aharonian, E. Berezhko, A. Bykov, A. Decourchelle, R. Diehl, G. Meynet, E. Parizot, J. Raymond, S. Reynolds, S. Spangler, *Test of galactic cosmic-ray source models-Working Group Report* Space Science Reviews, vol. 99, Issue 1/4, p. 329-352 (2001)
- [24] James A. Earl, *The diffusive idealization of charged-particle transport in random magnetic fields* The Astrophysical Journal, 193 :231-242, 1974.
- [25] C. Federrath, R.S. Klessen, W. Schmidt, *The density probability distribution in compressible isothermal turbulence : solenoidal versus compressive forcing* The Astrophysical Journal, 688 : L79-L82, 2008.
- [26] C. Federrath, J. Roman-Duval, R.S. Klessen, W. Schmidt, M.-M. MacLow *Comparing the statistics of interstellar turbulence in simulations and observations : Solenoidal versus compressive turbulence forcing*. The Astronomy & Astrophysics, 512, A81, 2010.
- [27] C. Federrath, *On the universality of supersonic turbulence*. arXiv :1306.3989v4, 2014.
- [28] E. Fermi, *On the Origin of the Cosmic Radiation* Physical Review, vol.75, N8, 1949
- [29] E. Fermi, *Galactic magnetic field and origin of cosmic radiation* The Astrophysical Journal, vol. 119, 1954
- [30] J. Giacalone, J. R. Jokipii, *The transport of cosmic rays across a turbulent magnetic field* The Astrophysical Journal, 520 :204-214, 1999.
- [31] J. Giacalone, J. R. Jokipii, *Magnetic field amplification by shocks in turbulent fluids* The Astrophysical Journal, 663 :L41-L44, 2007.

- [32] P. Goldreich, S. Sridhar, *Toward a theory of interstellar turbulence : II. Strong anisotropic turbulence*. The Astrophysical Journal, 438 :763-775, 1995.
- [33] K. Hasselmann, G. Wibberenz, *A note on the parallel diffusion coefficient* The Astrophysical Journal, 162 :1049-1051, 1970.
- [34] S. Fromang, P. Hennebelle, R. Teyssier *A high order Godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magnetohydrodynamics*. Astronomy & Astrophysics 457,371-384, 2006.
- [35] P. Hennebelle, E. Audit, *On the structure of the turbulent interstellar atomic hydrogen : I. Physical characteristics. Influence and nature of turbulence in a thermally bistable flow*. Astronomy & Astrophysics, 465, 431-443, 2007.
- [36] P. Hennebelle, G. Chabrier, *Analytical Theory for the Initial Mass Function : CO Clumps and Prestellar Cores* The Astrophysical Journal, 684 :395-410 (2008)
- [37] P. Hennebelle, G. Chabrier, *Analytical Theory for the Initial Mass Function. II. Properties of the Flow* The Astrophysical Journal, 702 :1428-1442 (2009)
- [38] P. Hennebelle, *On the origin of non-self-gravitating filaments in the ISM*. Astronomy & Astrophysics, 556, A153, 2013.
- [39] Hanasz and Lesch, *Incorporation of cosmic ray transport into the ZEUS MHD code. Application for studies of Parker instability in the ISM* A & A, 331-339, 2003
- [40] P.F Hopkins, *A model for (Non-lognormal) density distributions in isothermal turbulence* arXiv :1211.3119v2, 2013
- [41] J.R. Hörandel, N.N. Kalmykov, A.V. Timokhin *The end of the galactic cosmic-ray energy spectrum : a phenomenological view* arXiv :astro-ph/0508015
- [42] M.H. Israel, W.R. Binns, A.C.Cummings, R.A.Leske, R.A. Mewaldt, E.C. Stone, T.T. von Rosenvinge, M.E. Wiedenbeck *Isotopic composition of cosmic rays : results from the cosmic ray isotope spectrometer on the ACE spacecraft* Nuclear Physics A 758 (2005)
- [43] A. Iyono, T. Konishi, T. Morita, T. Nakatsuka, C. Noda, N. Ochi, S. Ohara, M. Okita, K. Okei, J. Ryou, J. Tada, N. Takahashi, M. Tokiwa, S. Tsuji, T. Wada, I. Yamamoto, Y. Yamashita, *The Cosmic Ray Anisotropy Observed by the Large Area Air Shower Experiments* 29th International Cosmic Ray Conference Pune (2005)
- [44] P. Jean, W. Gillard, A. Marcowith, K. Ferrière, *Positron transport in the interstellar medium* A & A, 508, 1099-1116, 2009.
- [45] F.C. Jones, D.C. Ellison *The plasma physics of shock acceleration* Space Science Reviews, vol. 58, no. 3-4, 1991, p. 259-346
- [46] J.R. Jokipii, *Cosmic-ray propagation. I. Charged particles in a random magnetic field*. The Astrophysical Journal, 146 :480, 1966.



- [47] A. G. Kritsuk, M. L. Norman, P. Padoan, R. Wagner, *The statistics of supersonic isothermal turbulence*. The Astrophysical Journal, 665 :416-431, 2007.
- [48] H. Kang, D. Ryu, *Diffusive shock acceleration in test-particle regime*. ArXiv :1008.0429, 2010
- [49] K. Kotera, M. Lemoine, *The optical depth of the Universe to ultrahigh energy cosmic ray scattering in the magnetized large scale structure* arXiv :0801.1450
- [50] A. G. Kritsuk et al *Comparing numerical methods for isothermal magnetized supersonic turbulence*. The Astrophysical Journal, 735 :1, 2011.
- [51] G. Kowal, A. Lazarian, *Velocity field of compressible magnetohydrodynamic turbulence : Wavelet decomposition and mode scalings*. The Astrophysical Journal, 720 :742-756, 2010.
- [52] S. Lange, F. Spanier, *Evolution of plasma turbulence excited with particle beams* The Astronomy & Astrophysics, 546, A51, 2012.
- [53] S. Lange, F. Spanier, M. Battarbee, R. Vainio, T. Laitinen *Particle scattering in turbulent plasmas with amplified wave modes* The Astronomy & Astrophysics, Manuscrit n8, 2013.
- [54] M.A. Lee, H.J. Völk, *Hydromagnetic waves and cosmic-ray diffusion theory* The Astrophysical Journal, 198 :485-492, 1975
- [55] B. Van Leer, *Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method*. Journal of Computational Physics, 32 101-136, 1979
- [56] M. Lemoine, B. Revenu, *Relativistic fermi acceleration with shock compressed turbulence*. MNRAS Vol.366 635-644, 2006
- [57] M. Lesieur *Turbulence in Fluids*. Springer, 2008
- [58] T. Laitinen, S. Dalla, J. Kelly, *Energetic particle diffusion in structured turbulence*. The Astrophysical Journal, 749 :103-112, 2012.
- [59] T. Laitinen, S. Dalla, J. Kelly, M. Marsh, *Energetic particle diffusion in critically balanced turbulence* The Astrophysical Journal, 764 :168-176, 2013.
- [60] Y. Lithwick, P. Goldreich, *Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence in Interstellar Plasmas*. The Astrophysical Journal, 562 :279-296, 2001
- [61] T. Lunttila, P. Padoan, M. Juvela, A. Nordlund, *The super Alfvénic model of molecular clouds : predictions for zeeman splitting measurements*. The Astrophysical Journal, 686 :L91-L94, 2008.
- [62] J. Maron, P. Goldreich, *Simulations of incompressible magnetohydrodynamic turbulence*. The Astrophysical Journal, 554 :1175-1196, 2001.
- [63] J. Mason, F. Cattaneo, S. Boldyrev *Numerical Measurements of the Spectrum in Magnetohydrodynamic Turbulence* arXiv :0706.2003
- [64] W. H. Matthaeus, G. Qin, J. W. Bieber, G. P. Zank, *Nonlinear collisionless perpendicular diffusion of charged particles*. The Astrophysical Journal, 590 :L53-L56, 2003.

- [65] J.A. Miller, *Electron acceleration in solar flares by fast mode alfvén waves : quasi-linear theory and pitch-angle scattering* The Astrophysical Journal, 491 :939-951, 1997
- [66] F. Z. Molina, S. C. O. Glover, C. Federrath, R. S. Klessen The density variance. Mach number relation in supersonic turbulence. I. Isothermal, magnetized gas MNRAS Vol.423 2680-2689, 2012
- [67] C.S. Ng, A. Bhattacharjee, *Interaction of Shear-Alfven Wave Packets : Implication for Weak Magnetohydrodynamic Turbulence in Astrophysical Plasmas* The Astrophysical Journal 465 :845
- [68] S. Oughton, E.R. Priest, W.H. Matthaeus, *The influence of a mean magnetic field on three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence.* Journal of Fluid Mechanism, vol. 280, p95-117, 1994.
- [69] P. Padoan, R. Jimenez, M. Juvela, A. Nordlund, *The average magnetic field strength in molecular clouds : New evidence of super-Alfvénic turbulence.* The Astrophysical Journal, 604 :L49-L52, 2004.
- [70] P. Padoan, A. Nordlund, *A super-Alfvénic model of dark clouds.* The Astrophysical Journal, 526 :279-294, 2000.
- [71] P. Padoan, T. Lunttila, M. Juvela, A. Nordlund, D. Collins, A. Kritsuk, M. Normal, S. Ustyugov, *Magnetic fields in Molecular clouds.* Astrophysical Dynamics : From Galaxies to Stars, Proceedings IAU symposium No. 271, 2010.
- [72] P. Padoan, A. Nordlund, *The Star Formation Rate of Supersonic Magnetohydrodynamic Turbulence* The Astrophysical Journal, 730 :40 (2011)
- [73] E. Parizot, A. Marcowith, E. van der Swaluw, A.M. Bykov, V. Tatischeff, *Superbubbles and energetic particles in the Galaxy. I. Collective effects of particle acceleration* Astronomy and Astrophysics, vol. 424, p.747-760 (2004)
- [74] T. Passot, E. Vázquez-Semadeni *Density probability distribution in one-dimensional polytropic gas dynamics.* arXiv :physics/9802019
- [75] G. Pelletier, M. Lemoine, A. Marcowith, *On fermi acceleration and magnetohydrodynamic instabilities at ultra-relativistic magnetized shock waves.* MNRAS Vol.393, 587-597, 2009.
- [76] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery Numerical recipes The Art of Scientific Computing, cambridge univeristy press, 1992.
- [77] V.S. Ptuskin, I.V. Moskalenko, F.C. Jones, A.W. Strong, V.N. Zirakashvili, *Dissipation of magnetohydrodynamic waves on energetic particles : Impact on interstellar turbulence and cosmic ray transport* The Astrophysical Journal, 642 :902-916, 2006
- [78] G. Qin, A. Shalchi *Pitch-angle diffusion coefficients of charged particles from computer simulation* The Astrophysical Journal, 707 :61-66, 2009.

- [79] G. Qin, W. H. Matthaeus, J. W. Bieber *Parallel diffusion of charged particles in strong two-dimensional turbulence* The Astrophysical Journal, 640 :L103-L106, 2006.
- [80] Y. Ramera, B. Chandran *Numerical Simulations of Buoyancy Instabilities in Galaxy Cluster Plasmas with Cosmic Rays and Anisotropic Thermal Conduction* The Astrophysical Journal, 685 :105Y117, 2008.
- [81] B.Reville, P.O’Sullivan, J.G. Kirk, P.Duffy, *Steady-State Solutions in Nonlinear Diffusive Shock Acceleration.* MNRAS, 386, 509, 2008.
- [82] B.Reville, A.R. Bell, *A filamentation instability for streaming cosmic rays* MNRAS, 419, 2433, 2012.
- [83] E.W. Rosolowsky, J.E. Pineda, J. Kauffmann, A.A. Goodman, *Structural analysis of molecular clouds : dendrograms.* The Astrophysical Journal, 679 :1338-1351, 2008.
- [84] A. Shalchi, J. W. Bieber, W. H. Matthaeus, G. Qin *nonlinear parallel and perpendicular diffusion of charged cosmic rays in weak turbulence* The Astrophysical Journal, 616 :617-629, 2004.
- [85] A. Shalchi, *Second-order quasilinear theory of cosmic ray transport* Physics of Plasma, 12, 2005.
- [86] A. Shalchi, A. Dosch, *Nonlinear guiding center theory of perpendicular diffusion : derivation from the newton-Lorentz equation.* The Astrophysical Journal, 685 :971-975, 2008.
- [87] A. Shalchi, I. Kourakis, *Analytical description of stochastic field-line wandering in magnetic turbulence.* The Astrophysical Journal, 665 :416-431, 2007.
- [88] A. Shalchi, *Nonlinear cosmic ray diffusion theories.* Springer, 2009.
- [89] A. Shalchi, I. Büsching, A. Lazarian, R. Schlickeiser, *Perpendicular diffusion of cosmic rays for a Goldreich-Sridhar spectrum* The Astrophysical Journal, 725 :2117-2127, 2010.
- [90] T. Shibata, M. Hareyama, M. Nakazawa, C. Saito, *A POSSIBLE APPROACH TO THREE-DIMENSIONAL COSMIC-RAY PROPAGATION IN THE GALAXY. I. STABLE NUCLEI WITHOUT ENERGY CHANGE* The Astrophysical Journal, 612 :238-261, 2004.
- [91] A. Shalchi, *A unified particle diffusion theory for cross-field scattering : sub-diffusion, recovery of diffusion, and diffusion in three-dimensional turbulence* The Astrophysical Journal, 720 :L127-L130, 2010.
- [92] W.Schmidt, C. Federrath, M. Hupp, S. Kern, J.C. Niemeyer, *Numerical simulations of compressively driven interstellar turbulence : I. Isothermal gas.* Astronomy & Astrophysics, 494, 127-145, 2009.
- [93] R. Schlickeiser, *Cosmic ray astrophysics.* Springer, 2002
- [94] F. Spanier, M. Wisniewski, *Simulation of charged particle diffusion in MHD plasmas.* Astrophysics and Space Sciences Transactions, 7,21-27, 2011.

- [95] S. Sridhar, P. Goldreich, *Toward a theory of interstellar turbulence. 1 : Weak Alfvénic turbulence.* The Astrophysical Journal, 432 :612-621, 1994
- [96] T.H. Stix, *The theory of plasma waves* McGraw-Hill, 1962
- [97] R. Tautz, A. Shalchi, R. Schlickeiser *Solving the  $90^\circ$  scattering problem in isotropic turbulence* The Astrophysical Journal, 685 :L165-L168, 2008.
- [98] R. Tautz, *A new simulation code for particle diffusion in anisotropic, large-scale and turbulent magnetic field* Computer Physics Communications, 181 :71-77, 2010.
- [99] R. Tautz, A. Dosch *On numerical turbulence generation for test-particle simulations* arXiv :1301.7164, 2013
- [100] R. Tautz, A. Dosch, F. Effenberger, H. Fichtner, A. Kopp *Pitch-angle scattering in magnetostatic turbulence : I. Test-particle simulations and the validity of analytical results* The Astronomy & Astrophysics, Manuscript n8, 2013.
- [101] R. Tautz, *Pitch-angle scattering in magnetostatic turbulence : II. Analytical considerations and pitch-angle isotropization* The Astronomy & Astrophysics, Manuscript n8, 2014.
- [102] R. Teyssier, *Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement.* Astronomy & Astrophysics 385,337-364, 2002.
- [103] H. Völk, *Nonlinear perturbation theory for cosmic ray propagation in random magnetic fields* Astrophysics and Space Science, V25 :471-490, 1973.
- [104] M. Wisniewski, F. Spanier, R. Kissmann, *Diffusion of energetic particles in turbulent Magnetohydrodynamic plasmas* The Astrophysical Journal, 750 :150-160, 2012.
- [105] S. Xu, H. Yan, *Cosmic ray parallel and perpendicular transport in turbulent magnetic fields.* The Astrophysical Journal, Draft version 3, 2013
- [106] H. Yan, A. Lazarian, *Scattering of cosmic rays by magnetohydrodynamic interstellar turbulence.* arXiv :astro-ph/0205285v2, 2002.
- [107] H. Yan, A. Lazarian, *Cosmic ray scattering and streaming in compressible magnetohydrodynamic turbulence.* The Astrophysical Journal, 614 :757-769, 2004.
- [108] H. Yan, A. Lazarian, *Cosmic-ray propagation : non linear diffusion parallel and perpendicular to mean magnetic field* The Astrophysical Journal, 673 :942-953, 2008.
- [109] A.L. Zachary, B.I. Cohen, *An orbit-averaged DARWIN quasi-neutral hybrid code.* JCoPh, 66, 496, 1986.

**Résumé :** Dans cette thèse, nous étudions les propriétés du transport de particules chargées de haute énergie dans des champs électromagnétiques turbulents. Ces champs ont été générés en utilisant le code magnétohydrodynamique (MHD) *RAMSES*, résolvant les équations de la MHD idéales compressibles. Nous avons développé un module pour générer la turbulence MHD, en utilisant une technique de forçage à grande échelle. Les propriétés des équations de la MHD font cascader l'énergie des grandes échelles vers les petites, développant un spectre en énergie suivant un loi de puissance, appelée zone inertielle.

Nous avons développé un module permettant de calculer les trajectoires de particule chargée une fois le spectre turbulent établi. En injectant les particules à une énergie telle que l'inverse du rayon de Larmor des particules corresponde à un mode du spectre de Fourier dans la zone inertielle, nous avons cherché à mettre en évidence un effet systématique lié à la loi de puissance du spectre. Cette méthode a montré que le libre parcours moyen est indépendant de l'énergie des particules jusqu'à des valeurs de rayon de Larmor proches de l'échelle de cohérence de la turbulence. La dépendance du libre parcours moyen avec le nombre de Mach alfvénique des simulations MHD a également produit une loi de puissance.

Nous avons également développé une technique pour mesurer l'effet de l'anisotropie de la turbulence MHD sur les propriétés du transport des rayons cosmiques, au travers le calcul de champs magnétiques locaux. Cette étude nous a montré un effet sur coefficient de diffusion angulaire, accréditant l'hypothèse que les particules sont plus sensible aux variations de petites échelles.

**Abstract :** In this thesis, we study the transport properties of high energy charged particles in turbulent electromagnetic fields. These fields were generated by using the magnetohydrodynamic (MHD) code *RAMSES*, which solve the compressible ideal MHD equations. We have developed a module for generating the MHD turbulence, by using a large scale forcing technique. The MHD equations induce a cascading of the energy from large scales to small ones, developing an energy spectrum which follows a power law, called the inertial range.

We have developed a module for computing the charged particle trajectories once the turbulent spectrum is established. By injecting the particles to energy such as the inverse of the particle Larmor radius corresponds to a mode in the inertial range of the Fourier spectrum, we have highlighted systematic effects related to the power law spectrum. This method showed that the mean free path is independent of the particles energy until the Larmor radius takes values close to the turbulence coherence scale. The dependence of the mean free path with the alfvénic Mach number produced a power law.

We have also developed a technique to measure the anisotropy effect of the MHD turbulence in the cosmic rays transport properties through the calculation of local magnetic fields. This study has shown an effect on the pitch angle scattering coefficient, which confirmed the assumption that the particles are more sensitive to changes in small scales fluctuations.