



**HAL**  
open science

# Méthode multi-échelle pour la simulation d'écoulements miscibles en milieux poreux

Aboubacar Konaté

► **To cite this version:**

Aboubacar Konaté. Méthode multi-échelle pour la simulation d'écoulements miscibles en milieux poreux. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066006 . tel-01558994

**HAL Id: tel-01558994**

**<https://theses.hal.science/tel-01558994>**

Submitted on 10 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Université Pierre et Marie Curie

École doctorale Sciences Mathématiques de Paris Centre

*Laboratoire Jacques-Louis Lions*

# Méthode multi-échelle pour la simulation d'écoulements miscibles en milieux poreux

Par **Aboubacar KONATÉ**

Thèse de doctorat de Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue publiquement le 12/01/2017

### Devant un jury composé de :

#### Rapporteurs :

Grégoire	ALLAIRE	Professeur à l'École Polytechnique
Alexei	LOZINSKI	Professeur à L'Université de Franche-Comté

#### Examineurs :

Guillaume	ENCHÉRY	Chercheur à l'IFPEN
Antoine	GLORIA	Professeur à l'Université Libre de Bruxelles
Gilles	VILMART	Professeur à l'Université de Genève
Frédéric	HECHT	Professeur à l'Université Pierre et Marie CURIE

#### Directeur de thèse :

Vivette	GIRAULT	Professeur à l'Université Pierre et Marie CURIE
---------	---------	---

#### Co-Directeur de thèse :

Xavier	CLAEYS	Maitre de conférece à l'Université Pierre et Marie CURIE
--------	--------	---

# Méthode multi-échelle pour la simulation d'écoulements miscibles en milieux poreux

## Thèse

présentée et soutenue publiquement le 12/01/2017

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université Paris 6**  
(spécialité mathématiques appliquées)

par

Aboubacar KONATÉ

### Composition du jury

*Directeur de Thèse :* Vivette GIRAULT

*Co-Directeur de Thèse :* Xavier CLAEYS

*Rapporteurs :* Grégoire ALLAIRE  
Alexei LOZINSKI

*Examineurs :* Guillaume ENCHÉRY  
Frédéric HECHT  
Antoine GLORIA  
Gilles VILMART

Mis en page avec la classe thloria.

*À mes parents  
Seydou KONATÉ et Diariétou KANOUTÉ*



# Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier mes directeurs de thèse Vivette Girault et Xavier Claeys pour leur patience et leur disponibilité. Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Vivette et je retiendrai d'elle le souci de la précision et de la rigueur. J'ai appris énormément choses auprès d'elle. Je suis très reconnaissant envers Xavier. Il a répondu à chacune de mes sollicitations malgré son emploi du temps très chargé.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance envers Guillaume Enchery qui m'a proposé ce sujet et a suivi régulièrement l'avancée de mes travaux. Je suis également très reconnaissant envers lui pour son immense soutien dans la rédaction de ce manuscrit et ceci malgré un emploi du temps très chargé.

Je tiens également à remercier les rapporteurs Grégoire Allaire et Alexei Lozinski pour avoir accepté de lire mon manuscrit avec intérêt, pour leurs questions et leurs remarques.

Je voudrais remercier Antoine Gloria, Gilles Vilmart et Frédéric Hecht. Je suis très honoré qu'ils aient accepté de participer au jury.

J'ai énormément bénéficié des conseils de Sylvain Desroziers et également ceux de Béatrice Rivière lors de son passage à l'Institut Français du Pétrole.

Pendant ces trois années de thèse, j'ai eu la chance de rencontrer de nombreux doctorants. Ils ont su créer un environnement de convivialité. Je pense, notamment, à Riad, Huong, Adrien, Thibault, Benoît, Tassadit, Claire, Mouhamed, Zakaria, Bastian, Nicolas, ...

Enfin, mes derniers remerciements vont à ma famille. Elle m'a accompagné et soutenu pendant ces trois années malgré la distance.





# Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude et la mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis multi-échelles pour la simulation d'écoulements miscibles en milieux poreux. La définition des fonctions de base multi-échelles suit l'idée introduite par F. Ouaki dans [Oua13]. La nouveauté de ce travail consiste à combiner cette approche multi-échelle avec des éléments finis de type Galerkin Discontinus (DG) de façon à pouvoir utiliser ces nouveaux éléments sur des maillages non-conformes composés de mailles de formes diverses.

Nous rappelons, dans un premier temps, le principe des méthodes DG et montrons comment ces méthodes peuvent être utilisées pour discrétiser une équation de convection-diffusion instationnaire identique à celle rencontrée dans le problème d'écoulement considéré dans ce travail. Après avoir vérifié l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème, nous redémontrons la convergence des méthodes DG vers cette solution en établissant une estimation d'erreur a priori.

Nous introduisons, ensuite, les éléments finis multi-échelles non conformes et détaillons leur mise en oeuvre sur ce problème de convection-diffusion. En supposant les conditions aux limites et les paramètres du problème périodiques, nous montrons une nouvelle estimation d'erreur a priori pour cette méthode.

Dans une seconde partie, nous considérons le problème d'écoulement complet où l'équation considérée dans la première partie est résolue de manière couplée avec l'équation de Darcy. Nous introduisons différents cas tests inspirés de modèles d'écoulements rencontrés en géosciences et comparons les solutions obtenues avec les deux méthodes DG, à savoir la méthode classique utilisant un seul maillage et la méthode étudiée ici. Nous proposons de nouvelles conditions aux limites pour la résolution des problèmes de cellule qui permettent, par rapport à des conditions aux limites linéaires plus classiquement utilisées, de mieux reproduire les variations des solutions le long des interfaces du maillage grossier. Les résultats de ces tests montrent que la méthode multi-échelle proposée permet de calculer des solutions proches de celles obtenues avec la méthode DG sur un seul maillage et de réduire, de façon significative, la taille du système linéaire à résoudre à chaque pas de temps.



# Abstract

This work deals with the study and the implementation of a multiscale finite element method for the simulation of miscible flows in porous media. The definition of the multiscale basis functions is based on the idea introduced by F. Ouaki in [Oua13]. The novelty of this work lies in the combination of this multiscale approach with Discontinuous Galerkin methods (DG) so that these new finite elements can be used on nonconforming meshes composed of cells with various shapes.

We first recall the basics of DG methods and their application to the discretisation of a convection-diffusion equation that arises in the flow problem considered in this work. After establishing the existence and uniqueness of a solution to the continuous problem, we prove again the convergence of DG methods towards this solution by establishing an a priori error estimate.

We then introduce the nonconforming multiscale finite element method and explain how it can be implemented for this convection-diffusion problem. Assuming that the boundary conditions and the parameters of the problem are periodic, we prove a new a priori error estimate for this method.

In a second part, we consider the whole flow problem where the equation, studied in the first part of that work, is coupled and simultaneously solved with Darcy equation. We introduce various synthetic test cases which are close to flow problems encountered in geosciences and compare the solutions obtained with both DG methods, namely the classical method based on the use of a single mesh and the one studied here. For the resolution of the cell problems, we propose new boundary conditions which, compared to classical linear conditions, allow us to better reproduce the variations of the solutions on the interfaces of the coarse mesh. The results of these tests show that the multiscale method enables us to calculate solutions which are close to the ones obtained with DG methods on a single mesh and also enables us to reduce significantly the size of the linear system that has to be solved at each time step.



# Table des matières

**Remerciements**

**Résumé**

**Abstract**

**Chapitre 1**

**Introduction**

1.1	Contexte et motivations . . . . .	17
1.1.1	Extraction des hydrocarbures . . . . .	17
1.1.2	Utilisation de la simulation . . . . .	18
1.2	État de l'art des méthodes multi-échelles . . . . .	18
1.3	Les méthodes de type Galerkin Discontinues . . . . .	19
1.3.1	Un bref aperçu historique . . . . .	19
1.3.2	Quelques propriétés intéressantes des méthodes de type Galerkin Discontinues . . . . .	20
1.4	Présentation du modèle et de la discrétisation éléments finis . . . . .	20
1.4.1	Le problème du transport d'un traceur en milieu poreux . . . . .	20
1.4.2	Discrétisation temporelle . . . . .	21
1.4.3	Résolution du problème de Darcy . . . . .	21
1.4.4	Discrétisation DG de l'équation de transport . . . . .	21
1.4.5	Méthode multi-échelle pour l'équation de transport . . . . .	23
1.5	Présentation des résultats obtenus au cours de la thèse . . . . .	24
1.5.1	Analyse d'un problème de convection-diffusion et de sa discrétisation à partir d'éléments finis de type Galerkin Discontinus . . . . .	24
1.5.2	Estimation d'erreur a-priori pour la méthode multi-échelle . . . . .	25
1.5.3	Résultats numériques . . . . .	28
1.6	Perspectives . . . . .	30

**Chapitre 2**

**Approximation numérique d'une équation de transport par les méthodes de type Galerkin Discontinues**

2.1	Définition du problème . . . . .	31
2.2	Existence et unicité d'une solution . . . . .	32

2.2.1	Écriture du problème sous forme variationnelle . . . . .	32
2.2.2	Construction d'une solution de (2.3) . . . . .	35
2.3	Analyse numérique des méthodes de Galerkin Discontinues . . . . .	37
2.3.1	Schéma numérique . . . . .	37
2.4	Estimation d'erreur . . . . .	44

### Chapitre 3

#### Problème du traceur

3.1	Modèle continu . . . . .	53
3.2	Discrétisation temporelle . . . . .	55
3.3	Résolution du problème de Darcy . . . . .	55
3.3.1	Méthode des volumes finis à 2 points . . . . .	56
3.3.2	Méthodes de reconstruction des flux . . . . .	57
3.4	Schémas numériques de type DG pour l'équation de transport . . . . .	57
3.5	Résultats numériques . . . . .	58
3.5.1	Exemple 1 : Validation . . . . .	58
3.5.2	Exemple 2 : Perméabilité homogène . . . . .	62
3.5.3	Exemple 3 : SPE10 . . . . .	62

### Chapitre 4

#### Homogénéisation d'un problème de transport

4.1	Définition du problème périodique . . . . .	67
4.1.1	Mise à l'échelle . . . . .	67
4.1.2	Problème périodique . . . . .	68
4.2	Quelques résultats d'homogénéisation . . . . .	69
4.3	Nouvelle estimation d'erreur . . . . .	71

### Chapitre 5

#### Méthode multi-échelle pour un problème de transport et estimation d'erreur à priori

5.1	La méthode multi-échelle . . . . .	85
5.1.1	Hypothèses de départ . . . . .	85
5.1.2	Idée de la méthode . . . . .	87
5.1.3	Définition du maillage grossier . . . . .	88
5.1.4	Approximation des problèmes de cellule . . . . .	89
5.1.5	Schéma de discrétisation à l'échelle grossière . . . . .	90
5.2	Estimation d'erreur à priori pour la méthode multi-échelle . . . . .	91
5.3	Estimation d'erreur . . . . .	92
5.4	Majoration des termes $T_1$ , $T_2$ et $T_3$ . . . . .	99
5.5	Majoration des termes $T_4$ et $T_5$ . . . . .	108
5.6	Majoration des termes $T_6$ , $T_7$ , $T_8$ , $T_9$ et $T_{10}$ . . . . .	123
5.7	Démonstration du théorème 5.2 . . . . .	131

---

**Chapitre 6****Mise en oeuvre de la méthode multi-échelle pour la simulation du problème de traceur**

6.1	Construction du maillage grossier . . . . .	134
6.1.1	Construction d'un maillage grossier Cartésien . . . . .	134
6.1.2	Construction d'un maillage grossier à l'aide du partitionneur Métis . . . . .	134
6.2	Méthode multi-échelle . . . . .	134
6.2.1	Définition des problèmes de cellules . . . . .	135
6.2.2	Construction de l'espace d'approximation grossier sur les mailles agglomérées . . . . .	135
6.2.3	Construction de la base multi-échelle pour une maille grossière . . . . .	136
6.2.4	Définition du problème grossier . . . . .	137
6.2.5	Couplage avec l'équation de Darcy . . . . .	137
6.2.6	Autres conditions aux limites pour les problèmes de cellule . . . . .	138
6.2.7	La méthode du domaine élargi dite " Oversampling technique " . . . . .	138
6.3	Stratégies de mise à jour des fonctions de base multi-échelles . . . . .	139
6.3.1	Stratégie 1 . . . . .	139
6.3.2	Stratégie 2 . . . . .	139
6.4	Résultats numériques . . . . .	139
6.4.1	Exemple 1 : Cas d'un champ de vitesse périodique . . . . .	140
6.4.2	Exemple 2 : Perméabilité homogène . . . . .	142
6.4.3	Exemple 3 : SPE10 . . . . .	143
<b>Annexe A Quelques résultats d'analyse fonctionnelle</b>		<b>155</b>
<b>Annexe B Existence, unicité et régularité des problèmes de cellule</b>		<b>159</b>
<b>Annexe C Existence, unicité et régularité des problèmes d'évolution</b>		<b>167</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>181</b>





# Table des figures

1.1	Champ de perméabilité dans la direction $x$ pour les couches 26 et 39 du cas SPE10 . . . . .	29
1.2	Exemples de maillages grossiers faits d'agglomérations non régulières de mailles fines . . . . .	30
3.1	Erreurs relatives en échelle logarithmique . . . . .	60
3.2	Champ de perméabilité $\mathbf{K}$ . . . . .	60
3.3	Champ de perméabilité $\mathbf{K}$ . . . . .	62
3.4	Géométrie du domaine $\Omega$ . . . . .	63
3.5	Profils de concentration obtenus à différentes dates sur le premier exemple . . . . .	64
3.6	Champ de perméabilité dans la direction $x$ pour les couches 26 et 39 du cas SPE10 . . . . .	64
3.7	Profils de concentration obtenus à différentes dates pour la couche 26 du second exemple . . . . .	65
3.8	Profils de concentration obtenus à différentes dates pour la couche 39 du second exemple . . . . .	66
5.1	Exemple de maillage fin . . . . .	88
5.2	Définition d'un maillage pour la méthode oversampling . . . . .	90
6.1	Exemple de maillage grossier Cartésien . . . . .	134
6.2	Exemple de fonctions de bases $\mathbb{P}_2^3$ . . . . .	136
6.3	Définition d'un maillage pour la méthode oversampling . . . . .	139
6.4	Champs de vitesse avec $\varepsilon = \delta = b_x^0 = 0.1$ et $b_y^0 = 0$ . . . . .	140
6.5	Solutions au temps $t = 7 \Delta t$ . La solution multi-échelle 6.5(b) a été obtenue en utilisant des conditions aux limites linéaires pour les problèmes de cellules tandis que la solution multi-échelle 6.5(c) a été obtenue avec la méthode oversampling. . . . .	141
6.6	Champs de vitesse avec $\varepsilon = 0.1$ , $\delta = b_x^0 = 0.01$ , $b_y^0 = 0$ . . . . .	141
6.7	Champs de vitesse avec $\varepsilon = 0.1$ , $\delta = b_x^0 = 10.0$ et $b_y^0 = 0$ . . . . .	142
6.8	Profils de concentration obtenus au temps $t = 21 \Delta t$ . La solution multi-échelle 6.8(b) a été obtenue en utilisant des conditions aux limites linéaires pour les problèmes de cellules tandis que la solution multi-échelle 6.8(c) a été obtenue avec le choix décrit au paragraphe 6.2.6. . . . .	143
6.9	Profils de concentration obtenus au temps $t = 31 \Delta t$ . La solution multi-échelle 6.9(b) a été obtenue en utilisant des conditions aux limites linéaires pour les problèmes de cellules tandis que la solution multi-échelle 6.9(c) a été obtenue avec le choix décrit au paragraphe 6.2.6. . . . .	143
6.10	Profils de concentration obtenus au temps $t = 10 \Delta t$ sur la couche 26 du cas SPE10 avec les deux choix de conditions aux limites. . . . .	144
6.11	Profils de concentration obtenus au temps $t = 10 \Delta t$ . Toutes les solutions multi-échelles sont obtenues avec la stratégie décrite en 6.2.6 sur des maillages grossiers Cartésiens. Les solutions multi-échelles 6.11(b), 6.11(c), 6.11(d), 6.11(e) et 6.11(f) sont obtenues respectivement avec un maillage grossier Cartésien $\mathcal{E}_H = 24 \times 44$ , $\mathcal{E}_H = 15 \times 20$ , $\mathcal{E}_H = 12 \times 10$ , $\mathcal{E}_H = 6 \times 10$ et $\mathcal{E}_H = 3 \times 5$ . . . . .	145
6.12	Maillages grossiers obtenus avec le partitionneur Metis pour la couche 26. . . . .	146
6.13	Profils de concentration obtenus au temps $t = 10 \Delta t$ pour la couche 26. . . . .	147
6.14	Profils de concentration obtenus au temps $t = 10 \Delta t$ . Solution multi-échelle 6.14(b) avec mise à jour systématique des fonctions de base. Solution multi-échelle 6.14(c) sans mise à jour des fonctions de base. . . . .	148

6.15	Profils de concentration obtenus au temps $t = 10 \Delta t$ . Solution multi-échelle 6.15(b) avec mise à jour systématique des fonctions de base. Solution multi-échelle 6.15(c) avec mise à jour des fonctions de base tous les 4 pas de temps. . . . .	148
6.16	Profils de concentration obtenus au temps $t = 10 \Delta t$ . Solution multi-échelle 6.16(b) avec mise à jour systématique des fonctions de base. Solution multi-échelle 6.16(c) avec la stratégie 6.3.2 avec $\varepsilon_s = 0.001$ . . . . .	149
6.17	Maillages grossiers obtenus avec le partitionneur Metis pour la couche 39. . . . .	150
6.18	Profils de concentration obtenus au temps $t = 10 \Delta t$ sur la couche 39 du cas SPE10 avec les deux choix de conditions aux limites. . . . .	150
6.19	Profils de concentration obtenus au temps $t = 10 \Delta t$ sur la couche 39 du cas SPE10. . . . .	151
6.20	Profils de concentration obtenus au temps $10 \Delta t$ . Les solutions 6.20(b), 6.20(c), 6.20(d) et 6.20(e) représentent respectivement la solution obtenue sans mise à jour des fonctions de base multi-échelle, avec mise à jour automatique des fonctions de base, avec la stratégie 6.3.1 avec $T_m = 4$ et avec la stratégie 6.3.2 avec $\varepsilon_s = 0.001$ . . . . .	152
6.21	Profils de concentration obtenus au temps $t = 10 \Delta t$ pour la couche 39. . . . .	153

# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte et motivations</b>	<b>17</b>
1.1.1	Extraction des hydrocarbures	17
1.1.2	Utilisation de la simulation	18
<b>1.2</b>	<b>État de l'art des méthodes multi-échelles</b>	<b>18</b>
<b>1.3</b>	<b>Les méthodes de type Galerkin Discontinues</b>	<b>19</b>
1.3.1	Un bref aperçu historique	19
1.3.2	Quelques propriétés intéressantes des méthodes de type Galerkin Discontinues	20
<b>1.4</b>	<b>Présentation du modèle et de la discrétisation éléments finis</b>	<b>20</b>
1.4.1	Le problème du transport d'un traceur en milieu poreux	20
1.4.2	Discrétisation temporelle	21
1.4.3	Résolution du problème de Darcy	21
1.4.4	Discrétisation DG de l'équation de transport	21
1.4.5	Méthode multi-échelle pour l'équation de transport	23
<b>1.5</b>	<b>Présentation des résultats obtenus au cours de la thèse</b>	<b>24</b>
1.5.1	Analyse d'un problème de convection-diffusion et de sa discrétisation à partir d'éléments finis de type Galerkin Discontinus	24
1.5.2	Estimation d'erreur a-priori pour la méthode multi-échelle	25
1.5.3	Résultats numériques	28
<b>1.6</b>	<b>Perspectives</b>	<b>30</b>

---

## 1.1 Contexte et motivations

### 1.1.1 Extraction des hydrocarbures

Les compagnies pétrolières cherchent à extraire les hydrocarbures présents au sein d'un gisement de la manière la plus efficace et la plus économique possible. Cette extraction n'est pas une opération simple. La géométrie du réseau poreux et les propriétés des roches qui le composent peuvent plus ou moins complexifier la production des hydrocarbures. Dans le passé, il était courant de ne récupérer qu'un peu moins de 10 % des hydrocarbures disponibles dans un réservoir (récupération primaire), en laissant le reste des hydrocarbures en place parce qu'il n'existait pas de techniques capables de maintenir une pression suffisante au sein du gisement. Plus tard, l'introduction d'injecteurs d'eau a permis d'améliorer le taux de récupération des hydrocarbures. Dans le cycle d'exploitation d'un gisement, cette seconde étape est appelée récupération secondaire. Elle permet d'extraire jusqu'à 45 % des hydrocarbures. Aujourd'hui, il existe des techniques qui permettent d'amener cette récupération à 60 %. Parmi elles, on peut citer

1. la récupération thermique qui consiste à injecter de la vapeur dans le réservoir et ainsi à fluidifier les hydrocarbures, c'est à dire à diminuer leur viscosité sous l'effet de l'apport de chaleur,
2. l'injection de gaz qui consiste à injecter du CO<sub>2</sub> qui, si les conditions thermodynamiques le permettent, va se dissoudre dans la phase hydrocarbure et là aussi contribuer à réduire la viscosité de huile,
3. l'injection d'espèces chimiques telles que
  - des polymères pour augmenter la viscosité de l'eau et obtenir un rapport de mobilité plus favorable par rapport à la viscosité de la phase hydrocarbure (amélioration de l'efficacité de balayage macroscopique),
  - des surfactants pour réduire la tension superficielle entre les phases aqueuse et hydrocarbure (amélioration de l'efficacité de balayage microscopique).

La valeur économique d'un gisement se mesure sur la quantité des hydrocarbures, le nombre de barrils, que l'on est capable d'en extraire. Pour estimer le potentiel économique d'un réservoir, les compagnies pétrolières ont recours à des logiciels de simulation dans le but de définir et d'évaluer différents scénarios d'exploitation.

### 1.1.2 Utilisation de la simulation

De nombreuses activités en ingénierie de réservoir nécessitent l'utilisation d'un simulateur d'écoulement. Parmi ces activités, on trouve :

- le calage de modèles de réservoir à partir de données de production ou de sismiques 3D/4D,
- l'optimisation du placement des puits et des scénarios de production,
- l'analyse, la gestion des incertitudes et les calculs économiques.

Chacune de ces activités nécessite dans certains cas le lancement de plusieurs dizaines voire centaines de simulations parfois très coûteuses en temps de calculs. Pour diminuer ces temps de simulation, de nombreuses voies de recherche sont explorées, à l'heure actuelle, et les méthodes numériques dites multi-échelles, du fait de leur haut niveau de parallélisation, constituent dans ce contexte une voie de recherche privilégiée.

## 1.2 État de l'art des méthodes multi-échelles

Les méthodes d'éléments finis multi-échelles ont été introduites pour la première fois par Th.Y. Hou et X.H. Wu dans [HW97] pour résoudre des problèmes elliptiques à coefficients de diffusion oscillants. Le principe de ces méthodes consiste à calculer numériquement des fonctions de base particulières dont la forme dépend des variations du coefficient de diffusion à une très petite échelle. Ces fonctions sont utilisées pour assembler et résoudre, dans une première étape, un système linéaire sur un maillage relativement grossier. Elles sont ensuite utilisées, dans une seconde étape, pour reconstruire une approximation de la solution sur un maillage plus fin de façon à reproduire l'influence des variations du coefficient de diffusion à la petite échelle. Des résultats d'homogénéisation établis dans [BLP78], [SP80] et [ZKO94] permettent de justifier le principe de construction de cette méthode dans le cas où le tenseur de diffusion est périodique. Notons que d'autres méthodes multi-échelles également inspirées de résultats d'homogénéisation ont été proposées dans [Arb00], [MBS00], [WE03] et [EH09].

Une propriété très importante pour simuler le transport des fluides est la conservation des flux. Cela a motivé l'introduction d'une autre méthode multi-échelle basée sur la méthode des éléments finis mixte-hybrides dans [CH02]. Elle fut mise en œuvre sur un modèle de type *Black-Oil* dans [KLN<sup>+</sup>09]. Des résultats similaires ont été obtenus avec une autre méthode multi-échelle basée sur la méthode des volumes finis [JLT03a].

Pour des problèmes de type convection-diffusion, une première méthode dite multi-échelle hétérogène (HMM) a été proposée dans [HO10]. A la différence des méthodes précédentes, cette méthode sert uniquement à calculer plus précisément une solution sur le maillage grossier et ne permet pas d'obtenir une solution discrète à l'échelle

fine. Une toute autre approche a été récemment proposée dans [Elf15]. Cette méthode a pour point de départ une discrétisation éléments finis de type Galerkin Discontinus et construit un espace d'approximation multi-échelle à partir d'une décomposition orthogonale locale (LOD) sans hypothèse de périodicité ni de séparation d'échelle sur les coefficients. Une estimation d'erreur entre les deux solutions données respectivement par la méthode éléments finis appliquée de façon classique sur le maillage fin et la méthode multi-échelle a été établie sous l'hypothèse

$$\mathcal{O}\left(\frac{\|H\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_{\min}}\right) \ll 1$$

où  $\mathbf{u}$  désigne la vitesse, et  $\lambda_{\min}$  la plus petite valeur propre du coefficient de diffusion.

Une nouvelle méthode multi-échelle basée sur le même principe que la méthode HMM a été récemment proposée dans [AE14] pour une équation de type advection-diffusion.

L'approximation numérique d'une équation de type convection-diffusion par les méthodes classiques peut générer des instabilités lorsque la convection domine la diffusion. Ce phénomène est également observé dans le cadre des méthodes multi-échelles. Des approches pour pallier à cette difficulté sont proposées dans [BLM15, Mad16] dans le cadre de certaines méthodes multi-échelles.

La méthode, étudiée spécifiquement dans ce rapport, a été proposée pour la première fois dans la thèse [Oua13]. Cette dernière a fait l'objet d'une publication dans [OADE15]. Nous nous proposons ici d'en poursuivre l'étude, notamment

- en l'utilisant de manière combinée avec des éléments finis de type Galerkin Discontinus de façon à pouvoir l'utiliser à terme sur des maillages de type Corner Point Grid (CPG) adaptés à la simulation de réservoir,
- en la testant sur des exemples d'écoulements Darcéens.

Nous allons maintenant donner un bref aperçu de l'état de l'art sur les méthodes d'éléments finis de type Galerkin Discontinues.

## 1.3 Les méthodes de type Galerkin Discontinues

### 1.3.1 Un bref aperçu historique

Bien que les méthodes DG aient existé sous diverses formes depuis plus de 30 ans, elles n'ont connu un important développement que durant la dernière décennie. Les premières méthodes DG ont été proposées et analysées dans les années 1970. La première application à une équation hyperbolique remonte à 1973 lorsque Reed et Hill [RH73] ont utilisé cette technique pour résoudre l'équation du transport des neutrons. L'introduction d'un décentrage du terme convectif fut proposé par Lesaint et Raviart [Les73, LR74, Les76] en 1974 et fut analysé pour la première fois par Girault et Raviart [GR12] pour le problème de Navier-Stokes. Quelques années plus tard, la méthode a été améliorée par Caissignac et Touzani [CT90a, CT90b] pour approcher des équations d'écoulements incompressibles avec couches limites. Durant la même période, la méthode a été étendue aux problèmes d'évolution par Chavent et Cockburn [CC87].

Le traitement spécifique du terme de diffusion fut réalisé au cours des travaux de Nitsche [Nit72] au début des années 1970, Babuška [Bab73], Babuška et Zlámal [BZ73], Douglas et Dupont [DD76], Baker [Bak77], Wheeler [Whe78] et Arnold [Arn82]. Ces derniers travaux constituent une étape importante dans le développement des méthodes DG. Depuis le début des années 90, de nouvelles contributions sont apparues. Par exemple, Bassi et Rebay [BR97] ont utilisé une méthode DG pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles, Cockburn et Shu pour les équations de type convection-diffusion. Un cadre d'analyse unifié a été proposé par Arnold, Bressi, Cockburn et Marini dans [ABCM02] pour l'équation de Poisson.

### 1.3.2 Quelques propriétés intéressantes des méthodes de type Galerkin Discontinues

Les méthodes DG ont gagné en popularité du fait de quelques-unes de leurs propriétés comme la conservativité locale des flux, leur faible diffusivité et leur meilleure représentation des discontinuités. Les espaces d'approximation étant localisés sur chaque élément du maillage, ces méthodes permettent de traiter plus facilement les non-conformités des maillages et les failles et offrent une plus grande flexibilité. En effet, dans les endroits où la solution est plus régulière, on peut décider d'augmenter le degré des polynômes (sans modifier le maillage) ou bien de raffiner dans le cas contraire.

Sur le plan informatique, ces méthodes présentent des propriétés très intéressantes. Elles permettent d'obtenir plus facilement des schémas d'ordre plus élevé que les méthodes de type volumes finis et se parallélisent très facilement. Mais il n'y a pas encore de solveur linéaire efficace à grande échelle.

Dans le paragraphe qui suit, nous présentons le modèle et la discrétisation éléments finis de type Galerkin Discontinus qui ont constitué le point de départ de ces travaux.

## 1.4 Présentation du modèle et de la discrétisation éléments finis

### 1.4.1 Le problème du transport d'un traceur en milieu poreux

On considère, dans cette thèse, le système d'équations suivant qui modélise le transport d'un traceur dans un milieu poreux  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t (\phi(x)c(t,x)) + \operatorname{div}(\mathbf{u}(t,x)c(t,x) - \mathbf{D}(\mathbf{u})(t,x)\nabla c(t,x)) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u})(t,x) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ \mathbf{u}(t,x) = -\frac{\mathbf{K}(x)}{\mu(c)} (\nabla P(t,x) - \rho(t,x)\mathbf{g}) & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ c(0,x) = c^0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où les inconnues sont la pression du fluide  $P$ , la vitesse de Darcy  $\mathbf{u}$  et la concentration du traceur  $c$ . Dans le système d'équations (1.1) :

—  $\phi(x)$  désigne la porosité du milieu poreux (sans dimension),

—  $\mathbf{K}(x)$  le tenseur de perméabilité en  $[m^2]$ ,

—  $\mu$  la viscosité fonction de la concentration  $c$ ,

—  $\rho(t,x)$  la masse volumique du fluide en  $[kg/m^3]$ ,

—  $\mathbf{g}$  le vecteur gravité en  $[m/s^2]$ ,

—  $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \underbrace{D_m \mathbf{I}}_{\text{diffusion moléculaire}} + \underbrace{\alpha_T \|\mathbf{u}\| \mathbf{I} + \frac{\alpha_L - \alpha_T}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u}\mathbf{u}^T}_{\text{dispersion mécanique}}$  avec  $D_m$  (en  $[m^2/s]$ ) la diffusion moléculaire. Les

facteurs  $\alpha_L$  et  $\alpha_T$  (en  $[m]$ ) représentent respectivement les dispersivités longitudinale et transversale.

La frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est telle que  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D$  où  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$  sont deux parties deux-à-deux disjointes. Le bord  $\Gamma_D$  est tel que  $\bar{\Gamma}_D = \bar{\Gamma}_{in} \cup \bar{\Gamma}_{out}$ . On définit  $\Gamma_{in}$  et  $\Gamma_{out}$  comme suit

$$\Gamma_{in} = \{x \in \Gamma_D; \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) < 0\},$$

$$\Gamma_{out} = \{x \in \Gamma_D; \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) \geq 0\}.$$

Le système d'équations (1.1) est complété par les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{u}(t,x) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) & = u_P(t,x) - u_I(t,x) & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ c(t,x) & = c_{in} & \text{sur } (0,T) \times \Gamma_{in}, \\ c(t,x) & = c_{out} & \text{sur } (0,T) \times \Gamma_{out}, \\ (\mathbf{D}(\mathbf{u})(x)\nabla c(t,x)) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) & = 0 & \text{sur } (0,T) \times \Gamma_N, \\ \int_\Omega P(t,x) dx & = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \end{array} \right.$$

où

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} u_I(t,x) d\sigma dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} u_P(t,x) d\sigma dt > 0.$$

On suppose que :

$$u_I(t,x) = 0 \text{ sur } (0,T) \times (\Gamma_{out} \cup \Gamma_N)$$

et que

$$u_P(t,x) = 0 \text{ sur } (0,T) \times (\Gamma_{in} \cup \Gamma_N).$$

### 1.4.2 Discrétisation temporelle

Nous avons utilisé le schéma "IMPIMC (IMplicit in Pressure, IMplicit in Concentration)" pour la discrétisation en temps du système d'équations (1.1). A une date  $t^{n+1}$  de la simulation, cet algorithme procède en deux étapes découplées. On résout, tout d'abord l'équation de Darcy pour obtenir une approximation  $P_h^{n+1}$  de la pression  $P^{n+1}$ . On reconstruit une vitesse discrète  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  en utilisant la nouvelle pression  $P^{n+1}$ . Enfin, la vitesse  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  est utilisée dans l'équation de transport pour calculer la nouvelle approximation de la concentration  $c^{n+1}$ .

### 1.4.3 Résolution du problème de Darcy

Nous avons choisi une méthode de type volume finis à 2 points pour résoudre l'équation de Darcy. Cette méthode permet d'avoir des flux consistants sur des maillages parallélépipédiques et conservatifs sur chacune des faces. La vitesse discrète  $\mathbf{u}^{n+1}$  est reconstruite dans l'espace de Raviart-Thomas de degré 0 à partir des flux donnés par la méthode des volumes finis.

Remarquons que, dans le cas de maillages plus généraux, nous pouvons utiliser une méthode volumes finis de la famille des méthodes HMM (Hybrid Mimetic Mixed methods voir [DEGH10]) et la formule de reconstruction  $H(\text{div})$ -conforme proposée dans [Lem13].

Pour accélérer la résolution de l'équation de Darcy, nous pouvons également utiliser la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles étudiée dans [Oua13]. Celle-ci peut être également appliquée sur des maillages généraux en utilisant une méthode de discrétisation de type HMM.

### 1.4.4 Discrétisation DG de l'équation de transport

En simulation de réservoir, les éléments finis dits conformes ont été peu utilisés du fait de la présence de termes de convection (qui nécessitent l'emploi de méthodes de stabilisation, difficiles à mettre en oeuvre) et de la non conformité du maillage (suite à des raffinements ou à cause de la présence de failles).

Dans cette thèse, nous avons choisi une discrétisation de type Galerkin Discontinue pour approcher la solution de l'équation de transport. Ce choix a été motivé par le fait que ce mode de discrétisation permet :

- une discrétisation simple du terme de convection, par le biais d'un décentrement,

- de gérer les non-conformités du maillage mentionnées précédemment,
- d'obtenir plus facilement des schémas d'ordre plus élevé que les méthodes volumes finis,
- une utilisation quasi-immédiate dans des codes parallèles.

Dans ce qui suit, nous rappelons brièvement le principe de cette discrétisation dans le cas conforme.

**Notations et schémas DG :** Nous considérons une famille de maillages  $\mathcal{E}_h$  conformes et réguliers de  $\bar{\Omega}$  dont les éléments, notés  $E_i$ , sont des quadrilatères ou des hexaèdres. On note  $\Gamma_h^i$  l'ensemble des faces intérieures de  $\mathcal{E}_h$  et  $\Gamma_h^b$  l'ensemble des faces situées sur le bord de  $\mathcal{E}_h$ . On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}\Gamma_{h,in} &= \{e \in \Gamma_{in}; e \in \Gamma_h^b\}, & \Gamma_{h,out} &= \{e \in \Gamma_{out}; e \in \Gamma_h^b\}, \\ \Gamma_{h,N} &= \{e \in \Gamma_N; e \in \Gamma_h^b\}, & \Gamma_{h,D} &= \Gamma_{h,in} \cup \Gamma_{h,out}.\end{aligned}$$

Soit  $e \in \Gamma_h^i$  telle que  $e = E_k \cap E_l$ . On note  $\mathbf{n}_e$  un vecteur normal unitaire dirigé de  $E_k$  vers  $E_l$ . On définit le saut  $[\psi]_e$  et la moyenne  $\{\psi\}_e$  d'une fonction  $\psi$  sur  $e$  par

$$[\psi]_e = \psi_{E_k} - \psi_{E_l}, \quad \{\psi\}_e = \frac{1}{2}(\psi_{E_k} + \psi_{E_l}).$$

Pour  $e \in \Gamma_h^b$ ,  $\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_\Omega$  et on définit le saut et la moyenne de  $\psi$  comme étant la trace de  $\psi$  sur  $e$ . On définit enfin la forme bilinéaire des sauts :

$$J_0(u, v) = \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{\sigma_e}{h_e} \int_e [u]_e [v]_e d\sigma$$

où  $h_e$  est le diamètre de  $e$ , et chaque  $\sigma_e$  est un paramètre positif choisi de façon à obtenir une propriété de coercivité discrète. Les solutions discrètes sont recherchées dans l'espace d'approximation suivant

$$X_h = \{v_h \in L^2(\Omega); \forall E \in \mathcal{E}_h, v_h|_E \in \mathbb{P}_d^k(E) \text{ ou } \mathbb{Q}_d^k(E)\}$$

et, pour résoudre l'équation de transport du système (1.1), nous utilisons le schéma suivant dont l'analyse est détaillée au chapitre 2 : trouver  $c_h^{n+1} \in X_h$  telle que pour tout  $v_h \in X_h$ , on a :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi c_h^{n+1} v_h dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla c_h^{n+1}) \cdot \nabla v_h dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{u}^{n+1} c_h^{n+1}) \cdot \nabla v_h dx \\ & - \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla c_h^{n+1}\}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma - \gamma \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla v_h\}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_h^{n+1}]_e d\sigma \right) \\ & + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e c_h^{upw} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_{h,out}} \int_e c_h^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e v_h ds + J_0(c_h^{n+1}, v_h) \\ & = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi c_h^n v_h dx + \sum_{e \in \Gamma_{h,in}} \int_e c_{in} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma \end{aligned} \right. \quad (1.2)$$

avec  $\gamma = -1, 0, 1$ .



### 1.4.5 Méthode multi-échelle pour l'équation de transport

F. Ouaki a proposé dans sa thèse [Oua13] une méthode multi-échelle pour résoudre une équation de transport basée sur une discrétisation de type éléments finis. La méthode a été testée dans le cas où la vitesse de convection est une fonction périodique définie analytiquement, sur des maillages Cartésiens, à l'échelle fine comme à l'échelle grossière.

Partant des résultats obtenus par Franck Ouaki dans [Oua13], nous montrons, dans le chapitre 6, comment intégrer cette approximation multi-échelle au sein d'une discrétisation de type Galerkin discontinue pour résoudre plus efficacement l'équation de transport du système (1.1). Dans cette approche, les vitesses sont obtenues de manière discrète en résolvant l'équation de Darcy. Cette méthode peut être mise en oeuvre dans le cas où les éléments du maillage grossier sont de forme quelconque.

Nous décrivons, brièvement, dans ce qui suit, le principe de cette méthode.

#### Définition du maillage grossier

On considère un maillage  $\mathcal{E}_h$  dit maillage fin sur lequel sont définis les paramètres pétro-physiques (champs de perméabilité  $\mathbf{K}$ , porosité  $\phi$ , ...). On note par  $E$  un élément du maillage  $\mathcal{E}_h$ . On construit un maillage  $\mathcal{E}_H$  en effectuant une agglomération des éléments du maillage fin  $\mathcal{E}_h$ . On note par  $K$  un élément du maillage  $\mathcal{E}_H$  et par  $R_K$  l'ensemble des éléments fins qui le composent, *i.e.*,  $K = \bigcup_{E \in R_K} E$ .

#### Définition des problèmes de cellules

Pour chaque  $i = 1, \dots, d$ ,  $d$  désignant la dimension du domaine, et chaque maille  $K \in \mathcal{E}_H$ , on considère la fonction  $\tilde{w}_i^{n+1,K}$  solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1}(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^{n+1,K}(x) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}(x)) \nabla \tilde{w}_i^{n+1,K}(x) \right) & = \phi(x) \mathbf{u}^{*,n+1,K} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \forall x \in K, \\ \tilde{w}_i^{n+1,K}(x) & = x_i, \quad \forall x \in \partial K, \end{cases} \quad (1.3)$$

où

$$\mathbf{u}^{*,n+1,K} = \frac{\int_K \mathbf{u}^{n+1}(x) dx}{\int_K \phi(x) dx}.$$

Le vecteur  $\tilde{w}^{n+1}$  est la fonction vectorielle dont la restriction à une maille  $K$  a pour composantes les solutions des problèmes (1.3).

#### Construction de l'espace d'approximation grossier sur les mailles agglomérées

Les éléments du maillage grossier pouvant avoir des formes diverses, nous utilisons la méthodologie décrite dans [BBC<sup>+</sup>12] pour construire dans chacun de ces éléments  $K$  une base orthonormale de l'espace  $\mathbb{P}_d^k(K)$ .

#### Construction de la base multi-échelle pour une maille grossière

L'espace d'approximation grossier  $X_H$  étant construit, l'espace des fonctions multi-échelle  $X_{MS,H}$  est alors défini par :

$$X_{MS,H}^{n+1} = \left\{ v_{MS,H}^{n+1} = v_H \circ \tilde{w}^{n+1} \text{ avec } v_H \in \mathbb{P}_d^k(\mathcal{E}_H) \right\} \quad (1.4)$$

où  $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{E}_H) = \bigcup_{K \in \mathcal{E}_H} \mathbb{P}_d^k(K)$ .

## Discrétisation à l'échelle grossière

La méthode multi-échelle consiste à discrétiser l'équation de transport dans l'espace multi-échelle (1.4) en utilisant la formulation DG introduite en (1.2). On obtient alors le schéma suivant : trouver  $c_H^{n+1} \in X_{MS,H}^{n+1}$  telle que pour tout  $v_H \in X_{MS,H}^{n+1}$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi c_H^{n+1} v_H dx + \sum_{K \in \mathcal{E}_H} \int_K (\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla c_h^{n+1}) \cdot \nabla v_H dx - \sum_{K \in \mathcal{E}_H} \int_E (\mathbf{u}^{n+1} c_H^{n+1}) \cdot \nabla v_H dx \\ - \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \{ \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla c_H^{n+1} \}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_H]_e d\sigma - \gamma \left( \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \{ \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla v_H \}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_H^{n+1}]_e d\sigma \right) \\ + \sum_{e \in \Gamma_H^i} \int_e c_H^{upw} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e [v_H]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \int_e c_H^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma + J_0(c_H^{n+1}, v_H) \\ = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi c_H^n v_H dx + \sum_{e \in \Gamma_{H,in}} \int_e c_{in} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e v_H d\sigma. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

avec  $\gamma = -1, 0, 1$ . Le cas  $\gamma = 1$  correspond à un schéma DG symétrique,  $\gamma = -1$  correspond à un schéma DG anti-symétrique et  $\gamma = 0$  à un schéma DG incomplet.

## 1.5 Présentation des résultats obtenus au cours de la thèse

### 1.5.1 Analyse d'un problème de convection-diffusion et de sa discrétisation à partir d'éléments finis de type Galerkin Discontinus

#### Équation de convection-diffusion étudiée

Dans le chapitre 4, nous établissons l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t (\phi(x)c(t,x)) + \operatorname{div}(\mathbf{u}(x)c(t,x) - \mathbf{D}(\mathbf{u})(x)\nabla c(t,x)) & = 0 \quad \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ c(t,x) & = 0 \quad \text{sur } (0,T) \times \Gamma_D, \\ (\mathbf{D}(\mathbf{u})(x)\nabla c(t,x)) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) & = 0 \quad \text{sur } (0,T) \times \Gamma_N, \\ c(0,x) & = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

#### Discrétisation DG

On approche la solution  $c$  de l'équation (1.6) par  $c_h$  solution du problème suivant : trouver  $c_h \in H^1(0,T; X_h)$  telle que, pour tout  $v_h \in X_h$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\partial(\phi c_h)}{\partial t} v_h dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) \cdot \nabla v_h dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{u} c_h) \cdot \nabla v_h dx \\ - \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{ \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h \}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma - \gamma \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{ \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla v_h \}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_h]_e d\sigma \right) \\ + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e c_h^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_{h,out}} \int_e c_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma + J_0(c_h, v_h) = 0, \\ c_h(0) = c_0. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

### Estimation d'erreur a-priori

Nous avons établi l'estimation d'erreur suivante sous les hypothèses 2.1 détaillées dans le chapitre 2.

**Théorème 1.1.** *On suppose les hypothèses 2.1 vérifiées. Soit  $(\mathcal{E}_h)_{h>0}$  une suite de maillages conformes et réguliers de  $\Omega$ . Soit  $c \in L^2(0,T; H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega))$  solution de l'équation (1.6). Soit  $c_h \in H^1(0,T; X_h)$  solution du schéma numérique (1.7). Si on suppose que  $c$  appartient à l'espace  $H^1(0,T; H^{k+1}(\Omega))$  alors il existe une constante  $C$  qui ne dépend ni de  $c$ , ni de  $h$  telle que, pour tout  $t \in (0,T)$ , on a*

$$\|c - c_h\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} + \|c - c_h\|_{L^2(0,t;X_h)} \leq Ch^k \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left( \left\| \frac{\partial c}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2 + \|c\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2 \right) \right)^{1/2}.$$

### 1.5.2 Estimation d'erreur a-priori pour la méthode multi-échelle

Une estimation d'erreur a-priori a été établie pour la méthode multi-échelle introduite précédemment sur un problème de convection-diffusion à coefficients périodiques que nous allons introduire maintenant.

**Définition du problème périodique, rappels de résultats d'homogénéisation existants et énoncé d'une nouvelle estimation d'erreur**

On considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} \phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x)) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega \\ c_\varepsilon(0,x) = c^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

où l'on suppose que la porosité, la vitesse et le tenseur de diffusion-dispersion sont des fonctions périodiques en espace de période  $\varepsilon$  ne dépendant pas du temps. La condition initiale est donnée par une fonction  $c^0$ . Dans la suite, on note

$$\phi^\varepsilon(x) = \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \mathbf{u}^\varepsilon(x) = \mathbf{u}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \mathbf{D}^\varepsilon(x) = \mathbf{D}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

et  $y = x/\varepsilon$ .

### Quelques résultats d'homogénéisation

Soit  $Y$  le cube unité  $[0,1]^d$ . On définit tout d'abord le problème de cellule suivant : trouver  $w_i \in H^1(Y)$  solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(y) \cdot (\nabla_y w_i(y) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}_y(\mathbf{D}(y) (\nabla_y w_i(y) + \mathbf{e}_i)) = \phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i, & \forall y \in Y, \\ w_i(y) \text{ est } Y\text{-périodique,} \\ \int_Y w_i(y) dy = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

où la vitesse homogénéisée  $\mathbf{u}^*$  est définie par :

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{\bar{\phi}} \int_Y \mathbf{u}(y) dy,$$

et  $\bar{\phi} = \int_Y \phi(y) dy$ .

Le problème homogénéisé relatif au problème (1.8) s'énonce de la manière suivante : trouver une fonction  $c$  solution de

$$\begin{cases} \bar{\phi} \partial_t c(t,x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ c(0,x) = c^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.10)$$

où le tenseur  $\mathbf{D}^*$  est défini comme suit :

$$\mathbf{D}_{i,j}^* = \int_Y \mathbf{D}(y) (\nabla_y w_i(y) + \mathbf{e}_i) \cdot (\nabla_y w_j(y) + \mathbf{e}_j) dy.$$

On note  $c_1$  la fonction définie par

$$c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, y \right) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) w_i(y). \quad (1.11)$$

### Nouvelle estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution homogénéisée

Pour établir l'estimation d'erreur (1.19), nous avons été amené à établir le théorème suivant :

**Théorème 1.2.** *On suppose que les hypothèses 4.1 sont vérifiées. On suppose le domaine  $\Omega$  est rectangulaire et en forme de boîte (voir définition 5.1.1). Soient  $(c_\varepsilon)$  la suite des solutions de l'équation (1.8),  $c$  la solution du problème homogénéisé (1.10),  $c_1$  la fonction définie par l'égalité (1.11) et les fonctions  $w_i$  solutions des problèmes (1.9). Nous avons alors l'estimation suivante :*

$$\sqrt{\int_0^T \left\| c_\varepsilon(t, \cdot) - c \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^2(\Omega)}^2 dt} \leq C_3 (1 + \varepsilon) \quad (1.12)$$

où la constante  $C_3 > 0$  est indépendante de  $\varepsilon$  mais dépend du temps final  $T$ .

### Idée de la méthode multi-échelle

Introduisons les fonctions tests oscillantes  $\widehat{w}_i^\varepsilon$  définies comme suit :

$$\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right). \quad (1.13)$$

Alors on a  $\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) = \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$ . En remplaçant  $\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x)$  par  $\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$  dans l'équation (1.9), on obtient le problème de cellule suivant :

$$\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) \right) = \frac{1}{\varepsilon} \phi \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i \quad \forall x \in \varepsilon Y \quad (1.14)$$

et, compte tenu des estimations (5.4), (5.5) et (5.6), nous pouvons prendre

$$c_\varepsilon(t, x) \approx c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \sum_{i=1}^d (\widehat{w}_i^\varepsilon(x) - x_i) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right).$$

On remarque que le membre de droite correspond à un développement de Taylor à l'ordre 1 en espace. On peut alors approcher la fonction  $c_\varepsilon$  par ce début de développement, ce qui permet d'écrire :

$$c_\varepsilon(t, x) \approx c \left( t, \widehat{w}^\varepsilon(x) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right).$$

On introduit la fonction  $\tilde{c}_\varepsilon$  vérifiant :

$$\tilde{c}_\varepsilon(t, x) = c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right). \quad (1.15)$$

Dans ce cas,

$$c \left( t, \widehat{w}^\varepsilon(x) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) = \tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)),$$

et on prend comme approximation :

$$c_\varepsilon(t, x) \approx \tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)). \quad (1.16)$$

La formule d'approximation (1.16) est le point de départ de la méthode d'éléments finis multi-échelles étudiée dans ce travail pour le problème (1.8). Cette formule nous suggère d'approcher la solution du problème (1.8) dans l'espace où les fonctions de base sont des polynômes composés avec la fonction  $\widehat{w}^\varepsilon$ .

### Approximation des problèmes de cellule

Pour chaque maille  $E \in \mathcal{E}_H$ , on approche  $\widehat{w}_i^\varepsilon$  par  $\widetilde{w}_i^{\varepsilon,E}$  solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E}(x) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E}(x) \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^{*,E} \cdot \mathbf{e}_i \quad \forall x \in E, \\ \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E}(x) &= x_i \quad \forall x \in \partial E, \end{cases} \quad (1.17)$$

où

$$\mathbf{u}^{*,E} = \frac{\int_E \mathbf{u}^\varepsilon(x) dx}{\int_E \phi^\varepsilon(x) dx}.$$

On construit le vecteur  $\widetilde{w}^{\varepsilon,E}$  ayant pour composantes les solutions des problèmes (1.17).

### Schéma de discrétisation à l'échelle grossière

On commence par définir l'espace d'approximation grossier  $X_H$  comme suit :

$$X_H = \{v_H \in L^2(\Omega); \forall E \in \mathcal{E}_H, v_H|_E \in \mathbb{P}_d^k(E)\}.$$

L'espace des fonctions multi-échelle  $X_{\varepsilon,H}$  est alors défini par :

$$X_{\varepsilon,H} = \{v_{\varepsilon,H} = v_H \circ \widetilde{w}^\varepsilon \text{ avec } v_H \in X_H\}.$$

Pour établir une estimation d'erreur à priori, on considérait la norme brisée définie comme suit :

$$\|v_H\|_{H^1(\mathcal{E}_H)} = \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla v_H\|_{L^2(E)}^2 + J_{0,H}(v_H, v_H) + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \left| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e \right| [v_H]_e^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

On approche la solution de (1.8) par  $c_{\varepsilon,H} \in X_{\varepsilon,H}$  solution du problème : trouver  $c_{\varepsilon,H} \in H^1(0,T; X_{\varepsilon,H})$  telle que, pour tout  $v_{\varepsilon,H} \in X_{\varepsilon,H}$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega \frac{\partial(\phi^\varepsilon c_{\varepsilon,H})}{\partial t} v_{\varepsilon,H} dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E (\mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_{\varepsilon,H}) \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{\varepsilon} \int_E (\mathbf{u}^\varepsilon c_{\varepsilon,H}) \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} dx \\ - \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \{ \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_{\varepsilon,H} \}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_{\varepsilon,H}]_e d\sigma - \gamma \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \{ \mathbf{D}^\varepsilon \nabla v_{\varepsilon,H} \}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_{\varepsilon,H}]_e d\sigma \\ + \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{1}{\varepsilon} \int_e c_{\varepsilon,H}^{upw} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e [v_{\varepsilon,H}]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \frac{1}{\varepsilon} \int_e c_{\varepsilon,H} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e v_{\varepsilon,H} d\sigma + J_{0,H}(c_{\varepsilon,H}, v_{\varepsilon,H}) = 0, \\ c_{\varepsilon,H}(0) = \pi_{\varepsilon,H} c^0 \end{array} \right. \quad (1.18)$$

avec  $\gamma = -1, 0, 1$ .

### Estimation d'erreur à priori pour la méthode multi-échelle

**Théorème 1.3.** *On suppose les hypothèses 5.1 vérifiées. On suppose que le domaine  $\Omega$  est rectangulaire et en forme de boîte (voir définition 5.1.1). Soit  $c_\varepsilon$  la solution du problème (1.8). On considère un maillage régulier*

$\mathcal{E}_H$  de pas  $H$  avec  $\varepsilon < H$ . On note  $c_{\varepsilon,H}$  la solution discrète obtenue avec le schéma numérique (1.18). Alors,  $\forall t \in [0, T]$ , nous avons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \|c_{\varepsilon,H} - c_\varepsilon\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|c_{\varepsilon,H} - c_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 \\ & \leq \varepsilon + H + \frac{\varepsilon}{H} + \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\sqrt{\lambda_{\min}\varepsilon}} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \varepsilon^2 + H + \frac{\varepsilon}{H} \right) \\ & \quad + \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\varepsilon + H) \end{aligned} \quad (1.19)$$

**Remarques 1.1.** 1. La présence du terme  $\left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2$  dans l'estimation d'erreur à priori (1.19) pourrait laisser croire que la méthode multi-échelle ne converge pas lorsque  $\varepsilon$  et  $H$  tendent vers 0. Il faut se souvenir que  $\frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon}$  représente la vitesse du modèle considéré (1.8) donc il est très naturel qu'il apparaisse dans l'estimation d'erreur à priori.

2. On remarque que la méthode multi-échelle est plus précise pour des petites vitesses de convection.
3. On remarque que la convergence de la méthode multi-échelle se détériore lorsque la convection est dominante, ie  $\left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \gg \lambda_{\min}$ .
4. On remarque également que la convergence de la méthode multi-échelle se détériore lorsque  $\varepsilon$  et  $H$  sont proches à cause du terme de résonance  $\frac{\varepsilon}{H}$ . Ceci est dû au choix des conditions aux limites des problèmes de cellule (1.17).

### 1.5.3 Résultats numériques

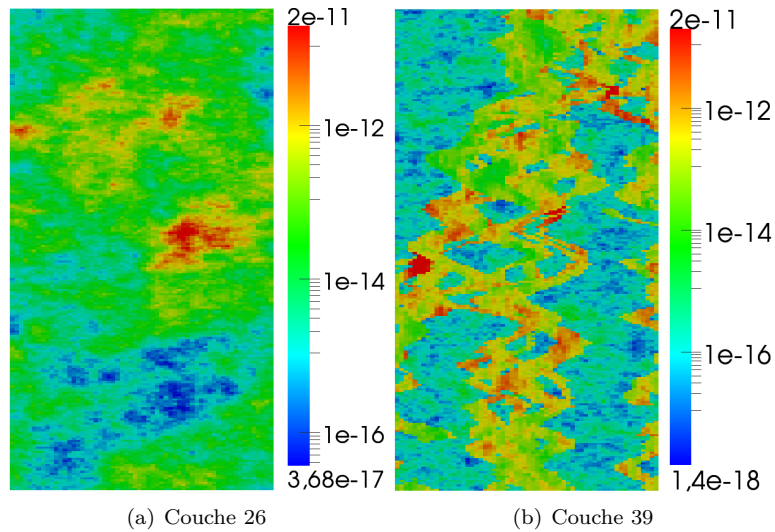
Les méthodes présentées précédemment ont été implémentées dans la plate-forme Arcane [GL09] utilisée à IFP Énergie nouvelles (IFPE<sub>n</sub>) pour la mise au point de simulateurs en géosciences (modélisation de bassin, simulateurs de réservoir et de stockage de  $CO_2$ , ...).

Nous introduisons au chapitre 3 plusieurs exemples illustratifs et caractéristiques de la simulation de réservoir en dimension deux d'espace. Dans tous les cas, le domaine  $\Omega$  considéré est un réservoir de dimension  $365,76 \text{ m} \times 670,56 \text{ m}$ . Le maillage fin est composé de 120 mailles dans la direction  $x$  et de 220 mailles dans la direction  $y$ . Trois champs de perméabilité ont été choisis. Pour le premier, la perméabilité est constante. Quant aux deux suivants, ils correspondent aux couches 26 et 39 du cas SPE10 [MM01] représentés sur la figure 1.5.3. Des premières solutions de référence, correspondant à la discrétisation introduite précédemment dans les paragraphes 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4 sont présentées dans ce chapitre.

#### Résolution multi-échelle du transport du traceur couplée avec celle du problème de Darcy

Dans le chapitre 6, nous avons testé le schéma multi-échelle (1.18) et son couplage avec la résolution de l'équation de Darcy sur les cas d'application mentionnés précédemment. Pour démontrer l'efficacité de cette méthode, nous avons comparé, à la fois qualitativement et quantitativement et en terme de temps de simulation, les solutions multi-échelles avec les solutions obtenues avec la discrétisation réalisée uniquement à l'échelle fine.

Ces tests ont également été l'occasion de tester différentes variantes de la méthode que nous décrivons dans les trois paragraphes suivants.

FIGURE 1.1 – Champ de perméabilité dans la direction  $x$  pour les couches 26 et 39 du cas SPE10

### Nouvelles conditions aux limites pour les problèmes de cellules

Les conditions aux limites utilisées pour résoudre les problèmes de cellules (1.3) jouent un rôle très important sur la qualité de l'approximation. En fait, les conditions linéaires proposées dans la version initiale de la méthode ne capturent pas les variations de la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  et du tenseur  $\mathbf{D}$  aux bords des mailles grossières. Nous avons donc proposé une autre stratégie décrite au paragraphe 6.2.6 permettant de mieux prendre en compte les variations des paramètres sur les interfaces du maillage grossier.

### La méthode du domaine élargi dite "Oversampling technique"

Nous avons testé la méthode du domaine élargi dite "Oversampling technique" introduite par T. Hou dans [HW97] pour réduire l'influence des conditions aux limites linéaires. Elle constitue une alternative intéressante à la stratégie précédente. En effet, lorsque les fonctions de base de multi-échelle doivent être recalculées un nombre assez important de fois, la stratégie précédente devient impraticable car elle serait très coûteuse en terme de temps de calcul. La méthode du domaine élargi consiste à résoudre, pour chaque maille grossière  $K$ , le problème de cellule (1.3) dans un domaine  $\tilde{K}$  qui contient  $K$ .

### Stratégies de mise à jour des fonctions de base multi-échelles

Les fonctions de base multi-échelles  $X_{MS,H}$  (1.4) varient au cours du temps en fonction de la variation de la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  et du tenseur  $\mathbf{D}$ . Par conséquent une mise à jour de ces fonctions est nécessaire au cours de la simulation. Pour éviter une mise à jour coûteuse et inutile de l'ensemble de ces fonctions à chaque pas de temps, nous proposons deux stratégies différentes 6.3.1 et 6.3.2 au chapitre 6.

### Utilisation de maillages faits d'agglomérations non régulières de mailles fines

La méthode multi-échelle a été également testée sur des maillages grossiers faits d'agglomérations quelconques de mailles fines. Des exemples de tels maillages sont représentés sur la figure 1.2. Ces tests constituent une première étape, l'objectif étant à terme de construire le maillage grossier en fonction, par exemple, des hétérogénéités spatiales du champ de perméabilité.

Pour clore cette introduction, nous mentionnons quelques perspectives pouvant faire l'objet de futurs travaux.

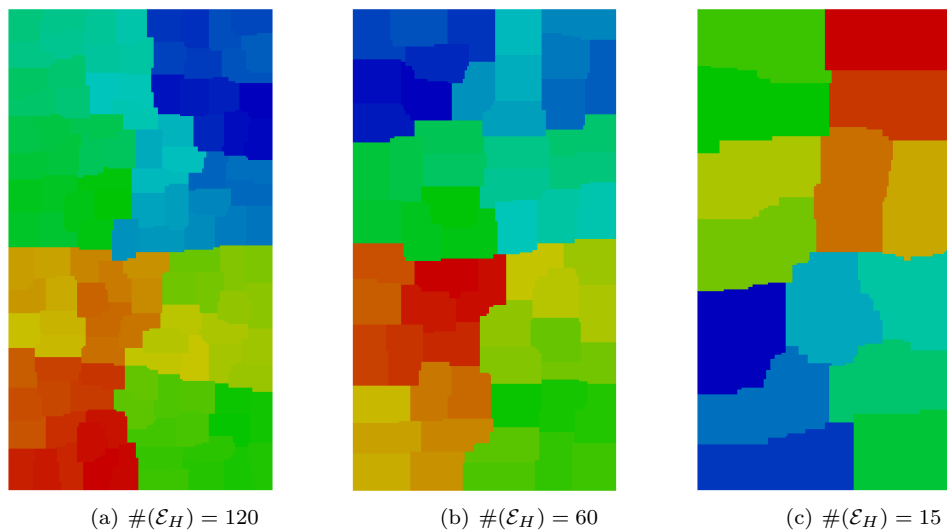


FIGURE 1.2 – Exemples de maillages grossiers faits d’agglomérations non régulières de mailles fines

## 1.6 Perspectives

### Performances de la méthode multi-échelle en parallèle

Un des intérêts des éléments finis multi-échelles est de pouvoir répartir le calcul des fonctions de base sur des processeurs différents et ainsi d’obtenir des réductions des temps de calculs très importantes par rapport aux approches classiques travaillant sur un seul maillage. Une prochaine étape consisterait donc à mesurer les performances de la méthode étudiée ici en parallèle.

Lors de ces tests, il serait également intéressant de coupler cette méthode avec les éléments finis mixtes multi-échelles [HW97] de façon à réaliser une simulation multi-échelle complète du problème (1.1). Les pistes évoquées dans [Oua13] pour améliorer l’efficacité de la méthode mixte pourraient être reprises pour la méthode étudiée ici.

### Stratégies d’agglomération du maillage fin

Comme cela a été rappelé plus haut, la qualité des fonctions de base multi-échelles dépend des conditions aux limites imposées au niveau des problèmes de cellules. Différentes stratégies d’agglomération du maillage fin devront être testées pour éviter d’avoir de trop grandes variations des propriétés pétrophysiques au niveau des interfaces des mailles grossières.

### Prise en compte de la compressibilité du fluide

La méthode multi-échelle étudiée dans ce manuscrit est valable sous l’hypothèse  $\text{div } u^{n+1} = 0$ . Cette hypothèse n’est plus vérifiée dès lors que le fluide est compressible. Il conviendra donc de voir comment modifier la méthode pour lever cette restriction.

### Application à des cas non linéaires et, en particulier, aux écoulements diphasiques

La non-linéarité présente dans le problème de transport a été ici écartée par le découplage en temps, qui nous a permis de nous ramener à un problème de convection-diffusion linéaire en la concentration du pas de temps courant. Mais les non-linéarités sont incontournables dès lors que l’on considère, par exemple, des cas d’écoulements diphasiques. Une autre piste de recherche consistera à étudier les extensions possibles de la méthode aux non-linéarités inhérentes à ce type de modèle.



## Chapitre 2

# Approximation numérique d'une équation de transport par les méthodes de type Galerkin Discontinues

### Sommaire

<b>2.1</b> Définition du problème . . . . .	<b>31</b>
<b>2.2</b> Existence et unicité d'une solution . . . . .	<b>32</b>
2.2.1 Écriture du problème sous forme variationnelle . . . . .	32
2.2.2 Construction d'une solution de (2.3) . . . . .	35
<b>2.3</b> Analyse numérique des méthodes de Galerkin Discontinues . . . . .	<b>37</b>
2.3.1 Schéma numérique . . . . .	37
<b>2.4</b> Estimation d'erreur . . . . .	<b>44</b>

Le but de ce chapitre est de montrer comment discrétiser une équation de type convection-diffusion au moyen d'éléments finis de type Galerkin Discontinus. Nous définissons tout d'abord, au paragraphe 2.1, l'équation modèle, les conditions aux limites et initiales vérifiées par cette équation. Nous établissons ensuite au paragraphe 2.2 l'existence et l'unicité d'une solution à cette équation. Nous montrons au paragraphe 2.3, comment discrétiser cette équation au moyen d'éléments finis de type Galerkin Discontinus et établissons une estimation d'erreur à priori pour ce type de discrétisation au paragraphe 2.4.

### 2.1 Définition du problème

Soient  $\Omega$  un domaine borné, connexe et Lipschitz de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2,3$ ) et  $T$  un réel positif. On note  $\mathbf{n}$  le vecteur normal unitaire au bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ .  $\partial\Omega$  est tel que  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D$  avec  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$  deux-à-deux disjoints. On note  $c(t,x)$  la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t (\phi(x)c(t,x)) + \operatorname{div} (\mathbf{u}(t,x)c(t,x) - \mathbf{D}(\mathbf{u})(t,x)\nabla c(t,x)) & = 0 \quad \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ c(t,x) & = 0 \quad \text{sur } (0,T) \times \Gamma_D, \\ (\mathbf{D}(\mathbf{u})(t,x)\nabla c(t,x)) \cdot \mathbf{n}(x) & = 0 \quad \text{sur } (0,T) \times \Gamma_N, \\ c(0,x) & = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

On suppose les hypothèses suivantes vérifiées :

**Hypothèses 2.1.** :

1.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$   $(0, T) \times \Gamma_N$ ,
2.  $c_0 \in L^2(\Omega)$ ,
3.  $\phi$  est indépendant du temps et  $\phi \in L^\infty(\Omega)$ ,
4. il existe  $\phi_{\min}$  et  $\phi_{\max}$  deux réels positifs tels que  $\forall x \in \mathbb{R}^d$ ,  $0 < \phi_{\min} \leq \phi(x) \leq \phi_{\max}$ ,
5.  $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$  et  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^d)$ ,
6.  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  est symétrique et appartient à  $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^{d \times d})$ ,
7. il existe deux réels  $\lambda_{\min} > 0$  et  $\lambda_{\max}$  tels que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \Omega, \quad \lambda_{\max} |\xi|^2 \geq \mathbf{D}(\mathbf{u})(x) \xi \cdot \xi \geq \lambda_{\min} |\xi|.$$

Dans ce qui suit, nous serons amenés à décomposer le bord  $\Gamma_D$  en  $\bar{\Gamma}_D = \bar{\Gamma}_{in} \cup \bar{\Gamma}_{out}$  où  $\Gamma_{in}$  et  $\Gamma_{out}$  sont tels que

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= \{x \in \Gamma_D; \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}, \\ \Gamma_{out} &= \{x \in \Gamma_D; \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0\}. \end{aligned}$$

La forme du problème (2.1) suggère de chercher  $c$  dans l'espace  $L^\infty(0, T; H^1_{0, \Gamma_D}(\Omega))$ .

**Remarques 2.1.** *Étudions toutefois la régularité de la trace de  $\mathbf{c}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . Afin de fixer les idées, nous nous plaçons ici en dimension trois. Avec les hypothèses faites sur  $\mathbf{u}$  et l'espace où l'on cherche  $c$ , on a  $\mathbf{u} \in L^4(\Omega)^3$ ,  $c \in L^6(\Omega)$  en espace; en temps  $\mathbf{c}\mathbf{u} \in L^2(0, T)$ . Donc  $\mathbf{c}\mathbf{u} \in L^2(0, T; L^{12/5}(\Omega)^3)$ . De même,  $\operatorname{div} \mathbf{c}\mathbf{u} = c \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla c \cdot \mathbf{u} \in L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega))$ . Donc, par rapport à  $x$ ,  $\mathbf{c}\mathbf{u}$  est dans un espace différent de  $H(\operatorname{div}; \Omega)$ , plus régulier pour la fonction elle-même et moins régulier pour la divergence. Écrivons formellement la formule de Green qui peut être justifiée par densité :*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{c}\mathbf{u})\psi \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{c}\mathbf{u} \cdot \nabla \psi \, dx = \langle \mathbf{c}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle_{\partial\Omega}. \quad (2.2)$$

Le premier terme a un sens pour  $\psi \in L^4(\Omega)$  et le second terme a un sens pour  $\nabla \psi \in L^{12/7}(\Omega)^3$ . D'après les injections de Sobolev,  $W^{1,t}(\Omega)$  s'injecte dans  $L^4(\Omega)$  pour  $t = \frac{12}{7}$ . Donc pour que le membre de gauche de l'équation (2.2) ait un sens, il faut que  $\psi \in W^{1,12/7}(\Omega)$ , espace plus grand que  $H^1(\Omega)$ . Maintenant, la trace de  $\psi$  est dans  $W^{5/12,12/7}(\partial\Omega)$  donc d'après l'injection évidente de  $H^{5/12}(\partial\Omega)$  dans  $W^{5/12,12/7}(\partial\Omega)$ , le second membre de (2.2) a un sens dès que  $\mathbf{c}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  est dans  $H^{-5/12}(\partial\Omega)$  qui s'injecte dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Tout ceci est formel mais peut être justifié par densité. La conclusion est que  $\mathbf{c}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \in L^2(0, T; H^{-5/12}(\partial\Omega))$  qui est un espace un peu plus régulier que  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et en particulier sa restriction à  $\Gamma_N$  est dans  $L^2(0, T; H^{-5/12}(\Gamma_N))$ . Ceci est aussi valable pour n'importe quelle surface régulière de  $\Omega$ .

## 2.2 Existence et unicité d'une solution

Pour établir l'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.1), nous réécrivons tout d'abord ce problème sous forme variationnelle puis construisons une solution correspondant à la limite d'une approximation de type Faedo-Galerkin.

### 2.2.1 Écriture du problème sous forme variationnelle

Dans ce qui suit,  $\mathcal{Q}_T = (0, T) \times \Omega$ . On introduit la formulation variationnelle suivante où l'on cherche une solution  $c \in L^2(0, T; H^1_{0, \Gamma_D}(\Omega))$  telle que  $\forall V \in H^1_{0, T}(\mathcal{Q}_T) \cap L^2(0, T; H^1_{0, \Gamma_D}(\Omega))$  :

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \phi c \frac{\partial V}{\partial t} \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c \cdot \nabla V \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{c}\mathbf{u} \cdot \nabla V \, dx \, dt = \int_{\Omega} \phi c_0 V(\cdot, 0) \, dx. \quad (2.3)$$

**Remarque 2.1.** *L'existence et l'unicité de (2.3) est assurée par le Théorème 6.6 établi dans [Wlo].*

Partant de ce résultat, l'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.1) se déduit du théorème suivant :

**Théorème 2.1.** *Toute solution  $c$  de l'équation (2.1) dans  $L^2(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega))$  est solution de la formulation variationnelle (2.3) et réciproquement.*

*Démonstration.* Pour mettre le problème (2.1) sous forme variationnelle et donner un sens à la condition aux limites sur  $\Gamma_N$ , il est commode d'introduire la fonction

$$\mathbf{W} = (\mathbf{u}c - \mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c, \phi c).$$

Puisque l'on cherche la solution  $c$  de (2.1) dans l'espace  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , la fonction  $\mathbf{W}$  appartient à  $H(\operatorname{div}_X; \mathcal{Q}_T)^{d+1}$  car  $\mathbf{W} \in L^2(\mathcal{Q}_T)^{d+1}$  et

$$\operatorname{div}_X \mathbf{W} = \operatorname{div}_x \mathbf{W} + \partial_t \mathbf{W} = 0.$$

Par conséquent  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T} \in H^{-1/2}(\partial \mathcal{Q}_T)$ , ce qui entraîne que  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T} \in H^{-1/2}(S)$  sur toute partie  $S \subset \partial \mathcal{Q}_T$ . Ceci donne un sens faible à la condition aux limites sur  $\Gamma_N$  :

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T} = (\mathbf{u}c - \mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma_N.$$

Nous venons de voir que  $c\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \in L^2(0, T; H^{-5/12}(\partial \Omega))$ , espace plus petit que  $H^{-1/2}(\partial \Omega)$ , ce qui entraîne que

$$\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c \cdot \mathbf{n} \in H^{-1/2}((0, T) \times \Gamma_N).$$

Donc la condition  $(\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c) \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $(0, T) \times \Gamma_N$  de l'équation (2.1) a un sens dans le dual de  $H_{00}^{1/2}((0, T) \times \Gamma_N)$ . De plus, dans le cas qui nous concerne  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $(0, T) \times \Gamma_N$ , donc  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T} = 0$  sur  $(0, T) \times \Gamma$ . En résumé,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W} \in H(\operatorname{div}_X; \mathcal{Q}_T), \\ \operatorname{div}_X \mathbf{W} = 0, \text{ dans } \mathcal{Q}_T, \\ \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T} = -\phi c_0, \text{ sur } \{0\} \times \Omega, \\ \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T} = \phi c(T), \text{ sur } \{T\} \times \Omega, \\ \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T} = 0, \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Enfin, on peut préciser un peu plus l'espace de l'inconnue  $c$  en mettant la condition essentielle sur  $\Gamma_D$  dans l'espace, c'est-à-dire, on cherche  $c$  dans  $L^2(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega))$ . La fonction  $\mathbf{W}$  permet de mettre facilement le problème (2.1) sous une première forme variationnelle. Prenons les fonctions-test  $V$  dans  $H^1(\mathcal{Q}_T) \cap L^2(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega))$ . D'après la formule de Green ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}_T} (\operatorname{div}_X \mathbf{W})V \, dx \, dt &= - \int_{\mathcal{Q}_T} \mathbf{W} \cdot \nabla_X V \, dx \, dt + \langle \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T}, V \rangle_{\partial \mathcal{Q}_T} = \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \phi c \frac{\partial V}{\partial t} \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c \cdot \nabla V \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}c \cdot \nabla V \, dx \, dt + \langle \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T}, V \rangle_{\partial \mathcal{Q}_T} = 0. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites on a :

$$\langle \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T}, V \rangle_{\partial \mathcal{Q}_T} = \int_{\Omega} (-\phi c(0)V(\cdot, 0) + \phi c(T)V(\cdot, T)) \, dx.$$

Pour éliminer le terme au temps  $T$ , puisqu'on ne dispose pas de  $c(T)$ , on choisit  $V$  tel que  $V(\cdot, T) = 0$ . Alors

$$\langle \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T}, V \rangle_{\partial \mathcal{Q}_T} = \int_{\Omega} -\phi c_0 V(\cdot, 0) \, dx.$$

D'où une première formulation variationnelle où l'on cherche une solution  $c \in L^2(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega))$  telle que  $\forall V \in H_{0, T}^1(\mathcal{Q}_T) \cap L^2(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega))$  :

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \phi c \frac{\partial V}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c \cdot \nabla V dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} c \mathbf{u} \cdot \nabla V dx dt = \int_{\Omega} \phi c_0 V(\cdot, 0) dx.$$

Nous venons de voir que toute solution  $c$  de (2.1) dans  $L^2(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega))$  est solution de (2.3). Pour montrer la réciproque, on considère  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}_T)$  et en remplaçant  $V$  par  $\Phi$  dans (2.3) on a :

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \phi c \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c \cdot \nabla \Phi dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} c \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi dx dt = 0.$$

En utilisant la fonction  $\mathbf{W}$ , ceci s'écrit

$$- \int_{\mathcal{Q}_T} \mathbf{W} \cdot \nabla_X \Phi dx dt = 0$$

ou encore

$$\langle \operatorname{div}_X \mathbf{W}, \Phi \rangle = 0, \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T.$$

L'équation (2.1) est donc satisfaite au sens des distributions. Ceci entraîne que  $\mathbf{W} \in H(\operatorname{div}_X; \mathcal{Q}_T)$  et que pour tout  $V \in H^1(\mathcal{Q}_T)$

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \nabla_X V dx dt + \langle \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T}, V \rangle_{\partial \mathcal{Q}_T} = 0. \quad (2.5)$$

Si on choisit  $V$  à support compact dans  $\Omega$  et  $V(\cdot, T) = 0$ , on a

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \phi c \frac{\partial V}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c \cdot \nabla V dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} c \mathbf{u} \cdot \nabla V dx dt = \langle \phi c(\cdot, 0), V(\cdot, 0) \rangle_{\Omega}.$$

Si on compare cette dernière égalité avec la formulation variationnelle (2.3), on a

$$\langle \phi c(\cdot, 0), V(\cdot, 0) \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \phi c_0 V(\cdot, 0) dx,$$

ce qui entraîne au sens des distributions sur  $\Omega$

$$\phi c(\cdot, 0) = \phi c_0.$$

Puisque  $\phi > \phi_{min} > 0$ , on a également l'égalité suivante :

$$c(\cdot, 0) = c_0 \quad \text{pp sur } \Omega$$

d'où  $c(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)$ .

Pour retrouver la condition naturelle sur  $\Gamma_N$ , on reprend (2.5) avec  $V \in H_0^1(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega))$  et on compare avec (2.3). Ceci donne

$$\langle \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T}, V \rangle_{(0, T) \times \Gamma_N} = 0.$$

Nous avons vu plus haut que  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{Q}_T} = \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c \cdot \mathbf{n}$  sur  $(0, T) \times \Gamma_N$  car  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_N$  donc

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c \cdot \mathbf{n} = 0$$

au sens de  $(H_{00}^{1/2}((0, T) \times \Gamma_N))'$ . □

### 2.2.2 Construction d'une solution de (2.3)

Il ne s'agit pas encore dans ce paragraphe de proposer un schéma numérique pour résoudre de manière approchée le problème (2.3) mais plutôt d'utiliser une semi-discrétisation en espace basée sur une méthode de Galerkin pour montrer l'existence d'une solution. Comme l'espace de Hilbert  $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$  est séparable, il admet une base orthonormale (voir [Bre10])  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq \infty}$ . On définit l'espace  $V^N = \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ . On définit la suite  $(c^N)_{N \geq 1}$  solution du problème suivant : trouver  $c^N : [0, T] \rightarrow V^N$  de la forme :

$$c^N(t) = \sum_{s=1}^N \alpha_s^N(t) \varphi_s$$

avec  $\alpha_s^N \in H^1(0, T)$ ,  $1 \leq s \leq N$ , solution de

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(\phi c^N)}{\partial t} \right) \varphi_i dx + \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c^N \cdot \nabla \varphi_i dx - \int_{\Omega} c^N \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_i dx = 0, & \forall i = 1, \dots, N, \\ c^N(0) = P_N(c_0) = \sum_{s=1}^N (c_0, \varphi_s) \varphi_s. \end{cases} \quad (2.6)$$

$P_N$  représente l'opérateur de projection orthogonale sur  $V^N$  dans  $L^2(\Omega)$ . Comme  $\varphi_j, j = 1, \dots, N$  est une base pour  $V^N$ , l'équation (2.6) équivaut à résoudre le système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha}^N(t) + \mathbf{A}(t) \boldsymbol{\alpha}^N(t) = 0, \\ \boldsymbol{\alpha}^N(0) = \boldsymbol{\alpha}_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où, pour  $i, j = 1, \dots, N$ ,

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\Omega} \phi \varphi_i \varphi_j dx, \quad \mathbf{A}_{ij}(t) = \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i - (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_j) dx, \quad \boldsymbol{\alpha}_{0,i} = \int_{\Omega} c_0 \varphi_i dx.$$

On remarque que les coefficients de  $\mathbf{M}$  sont constants et que ceux de  $\mathbf{A}$  appartiennent à  $L^\infty(0, T)$ . La matrice  $\mathbf{M}$  est symétrique et grâce aux hypothèses faites sur  $\phi$ , elle est définie positive, donc inversible. Par conséquent, le système (2.7) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha}^N(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}(t) \boldsymbol{\alpha}^N(t) = 0, \\ \boldsymbol{\alpha}^N(0) = \boldsymbol{\alpha}_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

C'est un système carré d'équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients bornés. Une extension classique du théorème de Cauchy-Lipschitz (voir [Wlo]) entraîne que (2.8) admet une unique solution  $\boldsymbol{\alpha}^N \in \mathcal{C}^0([0, T])^N$  et en reportant cette information dans (2.8) on trouve que  $\boldsymbol{\alpha}^N \in W^{1,\infty}(0, T)^N$ . En multipliant la  $i^{\text{ème}}$  équation de (2.6) par  $\alpha_i$  et en sommant sur  $i$ , on trouve :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial(\phi c^N(t))}{\partial t} \right) c^N(t) dx + \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c^N(t) \cdot \nabla c^N(t) - \int_{\Omega} c^N(t) \mathbf{u} \cdot \nabla c^N(t) dx = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi (c^N(t))^2 dx + \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c^N(t) \cdot \nabla c^N(t) \leq \frac{1}{2} \|\text{div}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_T)} \|c^N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| (c^N(t))^2 dx.$$

En utilisant les conditions aux limites et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_N$ , on élimine le terme de bord au second membre et on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi (c^N(t))^2 dx + \lambda_{\min} \|\nabla c^N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|\text{div}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_T)} \|c^N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En intégrant de 0 à  $t$ , nous obtenons :

$$\frac{\phi_{\min}}{2} \int_{\Omega} (c^N(t))^2 dx + \lambda_{\min} \|\nabla c^N\|_{L^2(\mathcal{Q}_t)}^2 \leq \frac{1}{2} \|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_T)} \int_0^t \|c^N(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi (c^N(0))^2 dx,$$

ce qui peut être également réécrit sous la forme :

$$\|c^N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\lambda_{\min}}{\phi_{\min}} \|\nabla c^N\|_{L^2(\mathcal{Q}_t)}^2 \leq \frac{1}{\phi_{\min}} \|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_T)} \int_0^t \|c^N(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|c^N(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En utilisant le Lemme A.1, on a :

$$\|c^N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\lambda_{\min}}{\phi_{\min}} \|\nabla c^N\|_{L^2(\mathcal{Q}_t)}^2 \leq \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|c^N(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\{ e^{\frac{1}{\phi_{\min}} \|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_T)} t} \right\}.$$

On remarque que  $\|c^N(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|c_0\|_{L^2(\Omega)}$  car  $P_N$  est la projection sur  $V^N$  pour la norme  $L^2(\Omega)$  donc :

$$\|c^N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\lambda_{\min}}{\phi_{\min}} \|\nabla c^N\|_{L^2(\mathcal{Q}_t)}^2 \leq \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|c_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\{ e^{\frac{1}{\phi_{\min}} \|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_T)} t} \right\}. \quad (2.9)$$

Par conséquent  $\nabla c^N$  est borné dans  $L^2(\mathcal{Q}_T)$  et  $c^N$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . Il existe alors une sous suite de  $c^N$  (encore notée par  $c^N$ ) qui converge faiblement dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et \*-faiblement dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . Il existe  $c \in L^2(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  telle que :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} c^N(x, t) \Psi(x, t) dx dt &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} c(x, t) \Psi(x, t) dx dt, \quad \forall \Psi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ \int_0^T \int_{\Omega} \nabla c^N(x, t) \Psi(x, t) dx dt &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla c(x, t) \Psi(x, t) dx dt, \quad \forall \Psi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d). \end{aligned}$$

On voudrait montrer que la limite  $c$  de la sous-suite de  $c^N$  vérifie la formulation variationnelle (2.3). Puisque  $c^N$  est assez régulière, on a :

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial c^N}{\partial t} \varphi_j dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi c^N \varphi_j dx.$$

Soit  $\Psi \in H_{0, T}^1(0, T)$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \phi c^N \varphi_j \right) \Psi(t) + \int_0^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c^N \cdot \nabla \varphi_j \right) \Psi(t) - \int_0^T \left( \int_{\Omega} c^N \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j \right) \Psi(t) &= 0, \\ - \int_0^T \left( \int_{\Omega} \phi c^N \varphi_j \right) \Psi'(t) + \int_0^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c^N \cdot \nabla \varphi_j \right) \Psi(t) - \int_0^T \left( \int_{\Omega} c^N \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j \right) \Psi(t) & \\ &= \left( \int_{\Omega} \phi c^N(0) \varphi_j \right) \Psi(0). \end{aligned}$$

On fixe  $j$  et on passe à la limite en  $N$ . On obtient :

$$- \int_0^T \left( \int_{\Omega} \phi c \varphi_j \right) \Psi'(t) + \int_0^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c \cdot \nabla \varphi_j \right) \Psi(t) - \int_0^T \left( \int_{\Omega} c \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j \right) \Psi(t) = \left( \int_{\Omega} \phi c_0 \varphi_j \right) \Psi(0).$$

En utilisant la densité de la base  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  dans  $H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)$ , on a  $\forall v \in H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)$ ,  $\forall \Psi \in H^1(0, T)$  :

$$- \int_0^T \left( \int_{\Omega} \phi c v \right) \Psi'(t) + \int_0^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c \cdot \nabla v \right) \Psi(t) - \int_0^T \left( \int_{\Omega} c \mathbf{u} \cdot \nabla v \right) \Psi(t) = \left( \int_{\Omega} \phi c_0 v \right) \Psi(0).$$

L'ensemble des fonctions de la forme  $v\Psi$  avec  $v \in H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)$  et  $\Psi \in H_{0, T}^1(0, T)$  est dense à la fois dans  $L^2(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega))$  et dans  $H_{0, T}^1(0, T; L^2(\Omega))$ , donc dans l'intersection des deux,  $H_{0, T}^1(\mathcal{Q}_T) \cap L^2(0, T; H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega))$ .  $c$  vérifie donc bien la formulation variationnelle (2.3).

## 2.3 Analyse numérique des méthodes de Galerkin Discontinues

L'objectif de cette section est d'étudier le schéma numérique proposé dans [SW05]. Nous introduisons, dans un premier temps, les notations relatives au maillage.

**Définition 2.1.** Soit  $\mathcal{E}_h$  une suite de maillage de  $\Omega$ . On dit qu'il s'agit d'une suite de maillages réguliers si

1. la suite  $h = \max_{E_i \in \mathcal{E}_h} \text{diam}(E_i)$  tend vers 0,
2. il existe une constante  $\sigma_0$  telle que, pour tout  $h > 0$  et tout  $E \in \mathcal{E}_h$ ,

$$\frac{\text{diam}(E)}{\rho(E)} \leq \sigma_0,$$

où  $\rho(K)$  désigne la rondeur de l'élément  $E$ .

**Définition 2.2.** Nous considérons une famille de maillages  $\mathcal{E}_h$  conformes et réguliers de  $\bar{\Omega}$  dont les éléments, notés  $E_i$ , sont des quadrilatères ou des hexaèdres. On note  $\Gamma_h^i$  l'ensemble des faces intérieures de  $\mathcal{E}_h$  et  $\Gamma_h^b$  l'ensemble des faces situées sur le bord de  $\mathcal{E}_h$ . On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_{h,in} &= \{e \in \Gamma_{in}; e \in \Gamma_h^b\}, & \Gamma_{h,out} &= \{e \in \Gamma_{out}; e \in \Gamma_h^b\}, \\ \Gamma_{h,N} &= \{e \in \Gamma_N; e \in \Gamma_h^b\}, & \Gamma_{h,D} &= \Gamma_{h,in} \cup \Gamma_{h,out}. \end{aligned}$$

Soit  $e \in \Gamma_h^i$  telle que  $e = E_k \cap E_l$ . On note  $\mathbf{n}_e$  un vecteur normal unitaire dirigé de  $E_k$  vers  $E_l$ . On définit le saut  $[\psi]_e$  et la moyenne  $\{\psi\}_e$  d'une fonction  $\psi$  sur  $e$  par

$$[\psi]_e = \psi_{E_k} - \psi_{E_l}, \quad \{\psi\}_e = \frac{1}{2}(\psi_{E_k} + \psi_{E_l}).$$

Pour  $e \in \Gamma_h^b$ ,  $\mathbf{n}_e = \mathbf{n}$  et on définit le saut et la moyenne de  $\psi$  comme étant la trace de  $\psi$  sur  $e$ . On définit enfin la forme bilinéaire des sauts :

$$J_0(u, v) = \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{\sigma_e}{h_e} \int_e [u]_e [v]_e d\sigma$$

où  $h_e$  est le diamètre de  $e$ , et chaque  $\sigma_e$  est un paramètre positif à choisir.

### 2.3.1 Schéma numérique

On définit l'espace  $X_h$  comme suit :

$$X_h = \{v_h \in L^2(\Omega); \forall E \in \mathcal{E}_h, v_h|_E \in \mathbb{P}_d^k(E) \text{ ou } \mathbb{Q}_d^k(E)\}.$$

Remarquons que la condition essentielle sur  $\Gamma_D$  ne figure pas dans l'espace  $X_h$ , ce qui est typique des méthodes de Galerkin Discontinues. Il est possible de choisir des  $k$  différents d'un élément à l'autre, mais pour simplifier, nous n'en utiliserons qu'un seul.

Pour semi-discrétiser en espace la solution  $c$  de (2.1) dans  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , on fait le raisonnement heuristique suivant. Supposons pour le moment que  $c_h \in H^1(0, T; X_h)$  est une approximation de  $c$  et soit  $v_h \in X_h$ . Comme  $c_h$  est très régulière dans chaque  $E$  et que  $\mathbf{D}(\mathbf{u}) \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^{d \times d})$ , on remplace  $c$  par  $c_h$  dans (2.1), on multiplie cette relation par  $v_h$  et on intègre en espace, ce qui nous donne :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi c_h}{\partial t} v_h dx + \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u} c_h - \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) v_h dx = 0$$

ou encore

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi c_h}{\partial t} v_h dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \text{div}(\mathbf{u} c_h - \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) v_h dx = 0.$$

En appliquant la formule de Green, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi c_h}{\partial t} v_h dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left( \int_E (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) \cdot \nabla v_h dx - \int_{\partial E} (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}_E v_h d\sigma \right) \\ + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left( - \int_E (\mathbf{u} c_h) \cdot \nabla v_h dx + \int_{\partial E} (\mathbf{u} c_h) \cdot \mathbf{n}_E v_h d\sigma \right) = 0. \end{aligned}$$

En se servant de l'égalité :  $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, a_1 b_1 - a_2 b_2 = \frac{1}{2} [(a_1 + a_2)(b_1 - b_2) + (a_1 - a_2)(b_1 + b_2)]$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_{\partial E} (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}_E v_h d\sigma = \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e (\{ \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h \}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e + [\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h]_e \cdot \mathbf{n}_e \{ v_h \}_e) d\sigma \\ + \sum_{e \in \Gamma_h^b} \int_e (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma. \end{aligned}$$

Par la suite, on décide de négliger  $[\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h]_e \cdot \mathbf{n}_e \{ v_h \}_e$  ce qui est consistant puisqu'il est nul si on remplace  $c_h$  par la solution exacte  $c$  (car on a la continuité de la trace  $(\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c) \cdot \mathbf{n}_e$ ). En utilisant la condition aux limites naturelle sur  $\Gamma_N$ , on remplace

$$\sum_{e \in \Gamma_h^b} \int_e (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma \quad \text{par} \quad \sum_{e \in \Gamma_{h,D}} \int_e (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma$$

car  $(\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c) \cdot \mathbf{n}_e = 0$ , pour  $e \in \Gamma_{h,N}$ . De même on a :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_{\partial E} c_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_E v_h d\sigma = \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e (\{ c_h \mathbf{u} \}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e + [c_h \mathbf{u}]_e \cdot \mathbf{n}_e \{ v_h \}_e) d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_h^b} \int_e c_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma.$$

Par la suite, on décide de négliger le terme  $[c_h \mathbf{u}]_e \cdot \mathbf{n}_e$  ce qui est consistant puisqu'il est nul si l'on remplace  $c_h$  par la solution exacte  $c$  (car on a la continuité de  $c \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e$ ). En utilisant le fait que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_N$ , on a :

$$\sum_{e \in \Gamma_h^b} \int_e c_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma = \sum_{e \in \Gamma_{h,D}} \int_e c_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma.$$

Pour toute face interne  $e = E_k \cap E_l$ , le terme  $\{ c_h \mathbf{u} \}_e \cdot \mathbf{n}_e$  est approché par le schéma décentré (Upwind)

$$\{ c_h \mathbf{u} \}_e \cdot \mathbf{n}_e = \begin{cases} c_{h|E_k} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e \geq 0, \\ c_{h|E_l} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e < 0. \end{cases}$$

On note :

$$c_h^{upw} = \begin{cases} c_{h|E_k} & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e \geq 0, \\ c_{h|E_l} & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e < 0. \end{cases}$$

Rappelons que  $\mathbf{n}_e$  est dirigé de  $E_k$  vers  $E_l$ . Donc on prend la valeur de  $c_h$  dans  $E_k$  là où  $\mathbf{u}$  entre dans  $E_l$  et inversement. Le même décentrement est appliqué sur les faces de bord. La solution  $c$  étant supposée nulle sur  $\Gamma_{h,D}$ , le terme

$$\int_e c_h^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma$$

s'annule donc pour  $e \in \Gamma_{h,in}$ . Remarquons encore que, du fait de la continuité de la trace de  $c$ , les termes :

$$\left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{ \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla v_h \}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_h]_e \right) \text{ et } J_0(c_h, v_h)$$



peuvent être ajoutés sans perte de consistance. Finalement, on aboutit au schéma semi-discret en espace suivant, consistant à trouver  $c_h \in H^1(0, T; X_h)$  tel que pour tout  $v_h \in X_h$ , on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\partial(\phi c_h)}{\partial t} v_h dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) \cdot \nabla v_h dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{u} c_h) \cdot \nabla v_h dx \\ - \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h\}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma - \gamma \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla v_h\}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_h]_e d\sigma \right) \\ + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e c_h^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_{h,out}} \int_e c_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma + J_0(c_h, v_h) = 0 \\ c_h(0) = c_0 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

avec  $\gamma = -1, 0, 1$ . Le cas  $\gamma = 1$  correspond à un schéma DG symétrique,  $\gamma = -1$  correspond à un schéma DG anti-symétrique et  $\gamma = 0$  à un schéma DG incomplet.

On pose

$$\begin{aligned} A_h^\gamma(c_h, v_h) &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h) \cdot \nabla v_h dx - \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h\}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma \\ &\quad - \gamma \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla v_h\}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_h]_e d\sigma \right) \end{aligned}$$

et

$$B_h(c_h, v_h) = - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{u} c_h) \cdot \nabla v_h dx + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e c_h^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_{h,out}} \int_e c_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma.$$

Lorsque la solution  $c$  de l'équation (2.1) est assez régulière pour qu'on puisse remplacer  $c_h$  par  $c$  dans (2.10), la consistance est alors définie comme suit :

**Définition 2.3.** On dit que la méthode (2.10) est consistante si l'égalité suivante est vérifiée

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\phi c)}{\partial t} v_h dx + A_h^\gamma(c, v_h) + B_h(c, v_h) + J_0(c, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in X_h. \quad (2.11)$$

**Proposition 2.1.** Si la solution  $c$  de (2.1) est assez régulière pour que

$$\forall e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_h^b, \quad \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c|_e \cdot \mathbf{n}_e \in H^{-1/2}(e)$$

alors la méthode (2.10) est consistante.

*Démonstration.* On considère  $c$  la solution de l'équation (2.1). On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u} c - \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c) v_h dx &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \operatorname{div}(\mathbf{u} c - \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c) v_h dx \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left[ \int_E (\mathbf{u} c - \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c) \cdot \nabla v_h dx - \int_{\partial E} (\mathbf{u} c - \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c) \cdot \mathbf{n}_E v_h d\sigma \right]. \end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_{\partial E} (\mathbf{u} c - \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c) \cdot \mathbf{n}_E v_h d\sigma = \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (\{\mathbf{u} c - \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c\}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e + [\mathbf{u} c - \mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c]_e \cdot \mathbf{n}_e \{v_h\}_e) d\sigma.$$

En utilisant la régularité de  $\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c|_e \cdot \mathbf{n}_e$  et  $c\mathbf{u}|_e \cdot \mathbf{n}_e$ , on a  $[\mathbf{u}c - \mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c]_e \cdot \mathbf{n}_e = 0$ ,  $\forall e \in \Gamma_h^i$ . En utilisant le fait que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_{h,N}$  et la condition naturelle sur  $c$ , on a :  $(\mathbf{u}c - \mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c)_e \cdot \mathbf{n}_e = 0$ ,  $\forall e \in \Gamma_{h,N}$ . En se servant de l'égalité  $c^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e = \{c\}_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e + \frac{1}{2} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [c]_e$ , on a  $\int_e \{\mathbf{u}c\}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma = \int_e c^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma$ ,  $\forall e \in \Gamma_h^i$ , car  $c \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , donc  $[c]_e = 0$  pour tout  $e \in \Gamma_h^i$ . Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_{\partial E} (\mathbf{u}c - \mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c) \cdot \mathbf{n}_E v_h d\sigma &= - \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c\}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e c^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e d\sigma \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_{h,D}} \int_e c\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e v_h d\sigma. \end{aligned}$$

□

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution de (2.10), nous introduisons la norme suivante de l'espace  $X_h$

$$\|v_h\|_{X_h} = \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u})\nabla v_h\|_{L^2(E)}^2 + J_0(v_h, v_h) + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [v_h]_e^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

On se propose de montrer le résultat suivant qui sera utilisé par la suite.

**Proposition 2.2.** *Il existe une constante  $\hat{C}$  qui ne dépend que de l'élément de référence et du degré des polynômes dans l'espace  $X_h$ , telle que, pour tout  $v_h$  et  $c_h$  dans  $X_h$ , les inégalités suivantes sont vérifiées :*

1.

$$\left| \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c_h\} \cdot \mathbf{n}_e [v_h] d\sigma \right| \leq \frac{\delta}{4} \sum_{j=1,2} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u})\nabla c_h\|_{L^2(E_j)}^2 + \frac{\hat{C}^2}{4\delta} \sum_{j=1,2} \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E_j| h_e} \frac{1}{h_e} \| [v_h] \|_{L^2(e)}^2.$$

où  $e$  est la face interne  $e = E_1 \cap E_2$ ,

2.

$$\left| \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c_h\} \cdot \mathbf{n}_e [v_h] d\sigma \right| \leq \frac{\delta}{2} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u})\nabla c_h\|_{L^2(E)}^2 + \frac{\hat{C}^2 \lambda_{max}^2 h_e |e|}{2\delta \lambda_{min} |E| h_e} \| [v_h] \|_{L^2(e)}^2.$$

où  $e$  est une face de bord adjacente à l'élément  $E$ .

*Démonstration.* Soit  $e = E_1 \cap E_2$  une face interne, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c_h\} \cdot \mathbf{n}_e [v_h] d\sigma \right| \leq \left( \frac{h_e^{1/2}}{2} \sum_{j=1,2} \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c_h|_{E_j}\|_{L^2(e)} \right) \left( \frac{1}{h_e^{1/2}} \| [v_h] \|_{L^2(e)} \right).$$

En passant à l'élément de référence  $\hat{e}$ , on a

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla c_h|_{E_j}\|_{L^2(e)} \leq \lambda_{max} \|\nabla c_h|_{E_j}\|_{L^2(e)} \leq \lambda_{max} \left( \frac{|e|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \|\widehat{\nabla c_h}\|_{L^2(\hat{e})}.$$

En utilisant l'équivalence des normes en dimension finie, on a :

$$\|\widehat{\nabla c_h}\|_{L^2(\hat{e})} \leq \hat{c} \|\widehat{\nabla c_h}\|_{L^2(\hat{E})} \leq \hat{c} \left( \frac{|\hat{E}|}{|E_j|} \right)^{1/2} \|\nabla c_h\|_{L^2(E_j)}.$$

Remarquons que

$$\|\nabla c_h\|_{L^2(E_j)} \leq \|\mathbf{D}^{-1/2}(\mathbf{u})(\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u})\nabla c_h)\|_{L^2(E_j)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u})\nabla c_h\|_{L^2(E_j)}.$$

En rassemblant ces majorations, on déduit que :

$$\begin{aligned} & \left| \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h\} \cdot \mathbf{n}_e [v_h] d\sigma \right| \\ & \leq \frac{\hat{c}}{2} \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1,2} \left( \frac{|e|}{|E_j|} \right)^{1/2} h_e^{1/2} \frac{\lambda_{max}}{\sqrt{\lambda_{min}}} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E_j)} \right) \left( \frac{1}{h_e^{1/2}} \| [v_h] \|_{L^2(e)} \right). \end{aligned}$$

On pose :

$$\hat{C} = \hat{c} \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2},$$

ce qui donne :

$$\left| \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h\} \cdot \mathbf{n}_e [v_h] d\sigma \right| \leq \sum_{j=1,2} \frac{\hat{C}}{2} \left( \frac{|e|}{|E_j|} \right)^{1/2} h_e^{1/2} \frac{\lambda_{max}}{\sqrt{\lambda_{min}}} \left( \frac{1}{h_e^{1/2}} \| [v_h] \|_{L^2(e)} \right) \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E_j)}.$$

En utilisant l'inégalité de Young :  $2ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta} b^2$ , on a :

$$\left| \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h\} \cdot \mathbf{n}_e [v_h] d\sigma \right| \leq \frac{\delta}{4} \sum_{j=1,2} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E_j)}^2 + \frac{\hat{C}^2}{4\delta} \sum_{j=1,2} \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E_j|} \frac{1}{h_e} \| [v_h] \|_{L^2(e)}^2.$$

De même, si  $e \in \Gamma_h^b$  et  $E$  est l'élément de  $\mathcal{E}_h$  adjacent à  $e$ , on obtient :

$$\left| \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h\} \cdot \mathbf{n}_e [v_h] d\sigma \right| \leq \frac{\delta}{2} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E)}^2 + \frac{\hat{C}^2 \lambda_{max}^2 h_e |e|}{2\delta \lambda_{min} |E|} \frac{1}{h_e} \| [v_h] \|_{L^2(e)}^2.$$

□

**Proposition 2.3.** On a l'égalité suivante :

$$B_h(c_h, c_h) = \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [c_h]_e^2 d\sigma.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E c_h \mathbf{u} \cdot \nabla c_h dx &= \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \mathbf{u} \cdot \nabla (c_h^2) dx \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} -\frac{1}{2} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial E} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_E c_h^2 d\sigma \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [c_h^2]_e d\sigma + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^b} \int_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e c_h^2 d\sigma. \end{aligned}$$

En utilisant cette dernière égalité, on a :

$$\begin{aligned} B_h(c_h, c_h) &= \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 dx + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e (c_h^{upw} [c_h]_e - \frac{1}{2} [c_h^2]_e) d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_{h,out}} \int_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e c_h^2 d\sigma - \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_{h,in}} \int_e c_h^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e d\sigma, \end{aligned}$$

En remarquant que

$$(c_h^{upw} [c_h]_e - \frac{1}{2} [c_h^2]_e) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e = \frac{1}{2} [c_h]_e^2 |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e|,$$

nous avons

$$B_h(c_h, c_h) = \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [c_h]_e^2 d\sigma.$$

□

**Proposition 2.4.** Pour  $\gamma = -1, 0, 1$ , on peut choisir les constantes  $\sigma_e$  de sorte que l'opérateur  $A_h^\gamma + B_h + J_0$  vérifie l'inégalité suivante :

$$A_h^\gamma(c_h, c_h) + B_h(c_h, c_h) + J_0(c_h, c_h) \geq \frac{1}{2} \|c_h\|_{X_h}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 dx.$$

*Démonstration.* On a

$$A_h^\gamma(c_h, c_h) = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E)}^2 - (1 + \gamma) \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla c_h\}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_h]_e d\sigma \right).$$

En utilisant la Proposition 2.2, on a :

$$\begin{aligned} A_h^\gamma(c_h, c_h) &\geq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E)}^2 - (1 + \gamma) \left( \frac{\delta}{4} \sum_{e \in \Gamma_h^i} \sum_{j=1,2} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E_j)}^2 \right) \\ &\quad - (1 + \gamma) \left( \frac{\delta}{2} \sum_{e \in \Gamma_{h,D}} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E)}^2 \right) - (1 + \gamma) \left( \frac{\hat{C}^2}{4\delta} \sum_{e \in \Gamma_h^i} \sum_{j=1,2} \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E_j|} \frac{1}{h_e} \|[c_h]\|_{L^2(e)}^2 \right) \\ &\quad - (1 + \gamma) \left( \sum_{e \in \Gamma_{h,D}} \frac{\hat{C}^2 \lambda_{max}^2 h_e |e|}{2\delta \lambda_{min} |E|} \frac{1}{h_e} \|[c_h]\|_{L^2(e)}^2 \right). \end{aligned}$$

Soit  $L$  le nombre maximum de faces qu'un élément peut avoir, alors on a :

$$\begin{aligned} A_h^\gamma(c_h, c_h) &\geq \left( 1 - (1 + \gamma) \frac{L\delta}{2} \right) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E)}^2 \\ &\quad - (1 + \gamma) \left( \frac{\hat{C}^2}{4\delta} \sum_{e \in \Gamma_h^i} \sum_{j=1,2} \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E_j|} \frac{1}{h_e} \|[c_h]\|_{L^2(e)}^2 + \frac{\hat{C}^2}{2\delta} \sum_{e \in \Gamma_{h,D}} \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E|} \frac{1}{h_e} \|[c_h]\|_{L^2(e)}^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la Proposition 2.3, nous avons

$$\begin{aligned} A_h^\gamma(c_h, c_h) + B_h(c_h, c_h) + J_0(c_h, c_h) &\geq \left( 1 - (1 + \gamma) \frac{L\delta}{2} \right) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 dx \\ &\quad + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \left( \sigma_e - (1 + \gamma) \frac{\hat{C}^2}{4\delta} \sum_{j=1,2} \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E_j|} \right) \frac{1}{h_e} \|[c_h]\|_{L^2(e)}^2 \\ &\quad + \sum_{e \in \Gamma_{h,D}} \left( \sigma_e - (1 + \gamma) \frac{\hat{C}^2 \lambda_{max}^2 h_e |e|}{2\delta \lambda_{min} |E|} \right) \frac{1}{h_e} \|c_h\|_{L^2(e)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [c_h]_e^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Si on choisit  $\delta = \frac{1}{2L}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 A_h^\gamma(c_h, c_h) + B_h(c_h, c_h) + J_0(c_h, c_h) &\geq \left(\frac{3-\gamma}{4}\right) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla c_h\|_{L^2(E)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_h^i} \left( \sigma_e - (1+\gamma) \frac{L\hat{C}^2}{2} \sum_{j=1,2} \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E_j|} \right) \frac{1}{h_e} \| [c_h] \|_{L^2(e)}^2 \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_{h,D}} \left( \sigma_e - (1+\gamma) L\hat{C}^2 \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E|} \right) \frac{1}{h_e} \| c_h \|_{L^2(e)}^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [c_h]_e^2 d\sigma.
 \end{aligned}$$

En posant,

$$\begin{cases} \sigma_e = 2L\hat{C}^2 \sum_{j=1,2} \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E_j|} & \forall e \in \Gamma_h^i, \\ \sigma_e = 4L\hat{C}^2 \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E|} & \forall e \in \Gamma_{h,D} \end{cases} \quad (2.12)$$

nous avons

$$\begin{aligned}
 A_h^\gamma(c_h, c_h) + B_h(c_h, c_h) + J_0(c_h, c_h) &\geq \left(\frac{3-\gamma}{4}\right) \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{D}^{1/2} \nabla c_h\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{\sigma_e}{h_e} \| [c_h]_e \|_{L^2(e)}^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [c_h]_e^2 d\sigma + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 dx.
 \end{aligned}$$

Donc pour toutes les valeurs de  $\gamma$ ,

$$A_h^\gamma(c_h, c_h) + B_h(c_h, c_h) + J_0(c_h, c_h) \geq \frac{1}{2} \|c_h\|_{X_h}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u}) c_h^2 dx.$$

□

**Remarque 2.2.** En se servant de l'inégalité :  $\forall e \in \Gamma_h, \frac{|e|}{|E|} \leq \sigma_0^3 h^{-1}$  (voir 2.1 pour la définition de  $\sigma_0$ ), on peut montrer que les  $\sigma_e$  peuvent être encadrés par des constantes indépendantes de  $h$ .

**Remarque 2.3.** La méthode DG étudiée ici nécessite l'emploi de coefficients de pénalisation  $\sigma_e$  pour rendre le schéma stable. Ces paramètres doivent être choisis avec une grande précaution. Ils doivent être choisis suffisamment grands pour que le schéma numérique (2.10) converge et pas trop importants pour éviter de générer une matrice avec un conditionnement trop important.

Théoriquement, les coefficients de pénalisation doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_e \geq 2L\hat{C}^2 \sum_{j=1,2} \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E_j|} & \forall e \in \Gamma_h^i, \\ \sigma_e \geq 4L\hat{C}^2 \frac{\lambda_{max}^2 h_e |e|}{\lambda_{min} |E|} & \forall e \in \Gamma_{h,D}. \end{cases}$$

Dans le cas où les valeurs propres du tenseur de diffusion  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  varie sur un intervalle assez large, ce choix peut devenir peu efficace. Par exemple, si  $\lambda_{min} = 1.0e^{-7}$  et  $\lambda_{max} = 1.0$ , les coefficients de pénalisation vérifieraient

les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_e \geq 2.0e^7 L\hat{C}^2 \sum_{j=1,2} \frac{h_e |e|}{|E_j|} & \forall e \in \Gamma_h^i, \\ \sigma_e \geq 4.0e^7 L\hat{C}^2 \frac{h_e |e|}{|E|} & \forall e \in \Gamma_{h,D}. \end{cases}$$

Ce qui générerait une matrice avec un conditionnement trop important. À cause de cela, d'autres méthodes pour choisir les paramètres  $\sigma_e$  sont proposées dans la littérature voir ([Dry03, ESZ08]). Ces méthodes consistent à choisir les paramètres localement comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_e = 2\alpha \frac{w_{E_1}^e w_{E_2}^e}{w_{E_1}^e + w_{E_2}^e} / h_e, & \forall e \in \Gamma_h^i \text{ avec } e = E_1 \cap E_2 \\ \sigma_e = \alpha \frac{w_E^e}{h_e}, & \forall e \in \Gamma_{h,D} \cap E \\ w_E^e = (\mathbf{D}(\mathbf{u})|_E \mathbf{n}_e) \cdot \mathbf{n}_e, \end{cases}$$

avec  $\alpha$  une constante choisie entre 1 et 100 en pratique.

## 2.4 Estimation d'erreur

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 2.2.** *On suppose les hypothèses 2.1 sont vérifiées. Soit  $(\mathcal{E}_h)_{h>0}$  une suite de maillages conformes et réguliers de  $\Omega$ . Soit  $c \in L^2(0,T; H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega))$  solution l'équation (2.1). Soit  $c_h \in H^1(0,T; X_h)$  solution du schéma numérique (2.10). Si on suppose que  $c$  appartient à l'espace  $H^1(0,T; H^{k+1}(\Omega))$  alors il existe une constante  $C$  qui ne dépend ni de  $c$ , ni de  $h$  telle que, pour tout  $t \in (0,T)$ , on a*

$$\|c - c_h\|_{L^\infty(0,t; L^2(\Omega))} + \|c - c_h\|_{L^2(0,t; X_h)} \leq Ch^k \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left( \left\| \frac{\partial c}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T; H^{k+1}(E))}^2 + \|c\|_{L^2(0,T; H^{k+1}(E))}^2 \right) \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

**Remarque 2.4.** *L'estimation d'erreur 2.13 comporte le terme  $h^{2k+1} \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 \sigma_0^2}{\lambda_{\min}}$ . Ce terme peut être une source d'instabilité de la solution numérique obtenue avec le schéma (2.10). En effet, lorsque  $\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \gg \lambda_{\min}$ , la convergence du schéma n'est plus garantie. Ce phénomène a été abondamment étudié dans la littérature. Plusieurs méthodes sont proposées pour pallier à cette difficulté. On peut citer par exemple les méthodes de type Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) [JK07], [HFM87], [BH82], Galerkin/Least-Square (GLS) [HFH89], Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin (PSPG) [Tez91], etc. Toutes ces méthodes de stabilisation ont l'inconvénient de dépendre d'un paramètre qui n'est pas facile à choisir (pour plus de détails sur ce point voir [FM04]). Dans le cas où la solution du problème n'est pas assez régulière, les méthodes de stabilisation peuvent s'avérer inefficaces. Dans ce cas, une stratégie pour diminuer la quantité  $h^{2k+1} \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}^2}{\lambda_{\min}}$  consiste soit à raffiner le maillage ou soit à augmenter le degré du polynôme  $k$  localement. Et, parmi les avantages d'une discrétisation de type Galerkin Discontinue c'est la possibilité de se passer des contraintes de conformité contrairement aux méthodes de type éléments finis continus. Ainsi, on peut procéder un raffinement sans modifier le maillage.*

Un autre avantage qu'offre une discrétisation de type Galerkin Discontinue est le fait que, pour deux éléments adjacents, on peut employer des polynômes de degré différents. La solution numérique peut être stabilisée en combinant à la fois une adaption en espace et une adaption en terme de degré des polynômes. Cette stratégie est communément appelée dans la littérature la "hp"-adaption ([GS06], [HS05]).

Dans la suite, on pose

$$\begin{aligned}\xi &= c_h - c, \quad \text{l'erreur d'approximation,} \\ \xi^I &= c - \pi_h(c), \quad \text{l'erreur d'interpolation,} \\ \xi^A &= c_h - \pi_h(c) = \xi + \xi^I,\end{aligned}$$

avec  $\pi_h$  l'opérateur d'interpolation de Lagrange dans l'espace  $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ . L'approche pour montrer l'estimation (2.13) est classique. Elle consiste à établir une estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution numérique en intercalant l'opérateur  $\pi_h$ . Ensuite, on borne les termes de l'estimation en utilisant le fait que  $\xi^I = c - \pi_h(c)$  est une erreur d'interpolation. On commence par montrer la proposition suivante.

**Proposition 2.5.** *Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle qu'on ait l'inégalité suivante*

$$\|\xi\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi\|_{L^2(0,t;X_h)}^2 \leq 2 \left( \|\xi^I\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi^I\|_{L^2(0,T;X_h)}^2 + C \left( \|\xi^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\frac{\partial \xi^I}{\partial t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\Upsilon(\xi^I)\|_{L^1(0,T)} \right) \right), \quad (2.14)$$

avec

$$\begin{aligned}\Upsilon(\xi^I) &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|(\mathbf{D}(\mathbf{u})^{1/2} \nabla \xi^I)\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{h_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I\}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\mathbf{u} \xi^I\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \frac{h_e}{\sigma_e} \|(\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2\end{aligned}$$

*Démonstration.* En utilisant la consistance du schéma (2.10), on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\phi \xi)}{\partial t} v_h \, dx + A_h^\gamma(\xi, v_h) + B_h(\xi, v_h) + J_0(\xi, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in X_h.$$

En remplaçant  $\xi$  par  $\xi^A - \xi^I$ , on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\phi \xi^A)}{\partial t} v_h \, dx + A_h^\gamma(\xi^A, v_h) + B_h(\xi^A, v_h) + J_0(\xi^A, v_h) = \int_{\Omega} \frac{\partial(\phi \xi^I)}{\partial t} v_h \, dx + A_h^\gamma(\xi^I, v_h) + B_h(\xi^I, v_h) + J_0(\xi^I, v_h).$$

On prend  $v_h = \xi^A$ , ce qui donne

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\phi \xi^A)}{\partial t} \xi^A \, dx + A_h^\gamma(\xi^A, \xi^A) + B_h(\xi^A, \xi^A) + J_0(\xi^A, \xi^A) = \int_{\Omega} \frac{\partial(\phi \xi^I)}{\partial t} \xi^A \, dx + A_h^\gamma(\xi^I, \xi^A) + B_h(\xi^I, \xi^A) + J_0(\xi^I, \xi^A).$$

En utilisant le résultat de la proposition 2.4, nous avons :

$$A_h^\gamma(\xi^A, \xi^A) + B_h(\xi^A, \xi^A) + J_0(\xi^A, \xi^A) \geq \frac{1}{2} \|\xi^A\|_{X_h}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u})(\xi^A)^2 \, dx,$$

ce qui donne :

$$\left( \frac{\partial(\phi \xi^A)}{\partial t}, \xi^A \right) + \frac{1}{2} \|\xi^A\|_{X_h}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u})(\xi^A)^2 \, dx \leq \left( \frac{\partial(\phi \xi^I)}{\partial t}, \xi^A \right) + A_h^\gamma(\xi^I, \xi^A) + B_h(\xi^I, \xi^A) + J_0(\xi^I, \xi^A).$$

Considérons le terme  $\left( \frac{\partial(\phi \xi^A)}{\partial t}, \xi^A \right)$ . On a :

$$\left( \frac{\partial(\phi \xi^A)}{\partial t}, \xi^A \right) = \left( \phi \frac{\partial \xi^A}{\partial t}, \xi^A \right) = \int_{\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (\xi^A)^2 \right\} \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi (\xi^A)^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\phi^{1/2} \xi^A\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Considérons maintenant le terme  $\left(\frac{\partial(\phi\xi^I)}{\partial t}, \xi^A\right)$ . Nous avons

$$\left(\frac{\partial(\phi\xi^I)}{\partial t}, \xi^A\right) = \left(\phi \frac{\partial\xi^I}{\partial t}, \xi^A\right) = \left(\phi^{1/2} \frac{\partial\xi^I}{\partial t}, \phi^{1/2}\xi^A\right) \leq \left\| \phi^{1/2} \frac{\partial\xi^I}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \phi^{1/2}\xi^A \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Young :  $2ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta} b^2$ , on a

$$\left(\frac{\partial(\phi\xi^I)}{\partial t}, \xi^A\right) \leq \frac{\delta \phi_{max}}{2} \left\| \frac{\partial\xi^I}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\phi_{max}}{2\delta} \|\xi^A\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Enfin, on peut majorer le terme  $\|\xi^A\|_{L^2(\Omega)}$  par  $\|\xi^A\|_{X_h}$  (voir [Bre03]). Il existe une constante  $C_p$  indépendante de  $h$  telle que  $\|\xi^A\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\xi^A\|_{X_h}$ . En utilisant le fait que  $\|[\xi^I]_e\|_{L^2(e)}^2 = 0$  pour toute face  $e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}$ , le terme  $A_h^\gamma(\xi^I, \xi^A)$  se simplifie en

$$A_h^\gamma(\xi^I, \xi^A) = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I) \cdot \nabla \xi^A dx - \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I\}_e \cdot \mathbf{n}_e [\xi^A]_e d\sigma.$$

En utilisant, à nouveau, successivement, les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Young, nous obtenons les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I) \cdot \nabla \xi^A dx &\leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|(\mathbf{D}(\mathbf{u})^{1/2} \nabla \xi^I)\|_{L^2(E)}^2 \right) + \frac{1}{2\delta} \|\xi^A\|_{X_h}^2, \\ \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I\}_e \cdot \mathbf{n}_e [\xi^A]_e d\sigma &\leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{h_e}{\sigma_e} \| \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I\}_e \|_{L^2(e)}^2 \right) + \frac{1}{2\delta} \|\xi^A\|_{X_h}^2. \end{aligned}$$

En rassemblant ces deux résultats, nous avons

$$A_h^\gamma(\xi^I, \xi^A) \leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|(\mathbf{D}(\mathbf{u})^{1/2} \nabla \xi^I)\|_{L^2(E)}^2 \right) + \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{h_e}{\sigma_e} \| \{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I\}_e \|_{L^2(e)}^2 \right) + \frac{1}{\delta} \|\xi^A\|_{X_h}^2.$$

Considérons le terme  $B_h(\xi^I, \xi^A)$

$$B_h(\xi^I, \xi^A) = - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{u} \xi^I) \cdot \nabla \xi^A dx + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e (\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [\xi^A]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_{h,out}} \int_e \xi^I \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e \xi^A d\sigma.$$

Comme pour le terme précédent, nous avons les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{u} \xi^I) \cdot \nabla \xi^A d\sigma &\leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{min}} \|\mathbf{u} \xi^I\|_{L^2(E)}^2 \right) + \frac{1}{2\delta} \|\xi^A\|_{X_h}^2, \\ \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e (\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [\xi^A]_e d\sigma &\leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i} \frac{h_e}{\sigma_e} \|(\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)}^2 \right) + \frac{1}{2\delta} \|\xi^A\|_{X_h}^2. \end{aligned}$$

En rassemblant ces deux inégalités, nous obtenons

$$\begin{aligned} B_h(\xi^I, \xi^A) &\leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{min}} \|\mathbf{u} \xi^I\|_{L^2(E)}^2 \right) + \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i} \frac{h_e}{\sigma_e} \|(\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_{h,out}} \frac{h_e}{\sigma_e} \|\xi^I \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)}^2 \right) + \frac{3}{2\delta} \|\xi^A\|_{X_h}^2. \end{aligned}$$



Remarquons, de plus, que  $J_0(\xi^I, \xi^A) = 0$  et que  $\xi^I = 0$  sur  $\Gamma_{h,out}$ . Posons, maintenant,

$$\begin{aligned} \Upsilon(\xi^I) &= \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|(\mathbf{D}(\mathbf{u}))^{1/2} \nabla \xi^I\|_{L^2(E)}^2 \right) + \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{h_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I\}_e\|_{L^2(e)}^2 \right) \\ &+ \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{min}} \|\mathbf{u} \xi^I\|_{L^2(E)}^2 \right) + \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i} \frac{h_e}{\sigma_e} \|(\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)}^2 \right). \end{aligned}$$

On choisit  $\delta$  tel que

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\delta} \max(3, C_p^2 \phi_{max}) > 0.$$

On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\phi^{1/2} \xi^A\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \alpha \|\xi^A\|_{X_h}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u})(\xi^A)^2 \leq \frac{\delta \phi_{max}}{2} \left\| \frac{\partial \xi^I}{\partial t} \right\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \frac{\delta}{2} \Upsilon(\xi^I).$$

En intégrant sur  $]0, t]$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\phi^{1/2} \xi^A(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\xi^A\|_{L^2(0,t;X_h)}^2 + \int_0^t \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\operatorname{div} \mathbf{u})(\xi^A)^2 &\leq \frac{\delta \phi_{max}}{2} \left\| \frac{\partial \xi^I}{\partial t} \right\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 \\ &+ \frac{\delta}{2} \int_0^t \Upsilon(\xi^I) + \frac{1}{2} \|\phi^{1/2} \xi^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\xi^A\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\alpha}{\phi_{min}} \|\xi^A\|_{L^2(0,t;X_h)}^2 &\leq \frac{\delta \phi_{max}}{\phi_{min}} \left\| \frac{\partial \xi^I}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{\delta}{\phi_{min}} \|\Upsilon(\xi^I)\|_{L^1(0,T)} \\ &+ \frac{1}{\phi_{min}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^\infty(Q_T)} \int_0^t \|\xi^A\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\phi_{max}}{\phi_{min}} \|\xi^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme A.1 et en procédant comme dans le paragraphe 2.2.2, on a

$$\begin{aligned} \|\xi^A\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\alpha}{\phi_{min}} \|\xi^A\|_{L^2(0,t;X_h)}^2 &\leq \left( \frac{\phi_{max}}{\phi_{min}} \|\xi^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta \phi_{max}}{\phi_{min}} \left\| \frac{\partial \xi^I}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{\delta}{\phi_{min}} \|\Upsilon(\xi^I)\|_{L^1(0,T)} \right) \\ &\times \exp \left( \frac{1}{\phi_{min}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^\infty(Q_T)} \right) t. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

$$\|\xi^A\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi^A\|_{L^2(0,t;X_h)}^2 \leq C \left( \|\xi^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \xi^I}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\Upsilon(\xi^I)\|_{L^1(0,T)} \right).$$

En utilisant l'égalité  $\xi = \xi^A - \xi^I$ , on a

$$\|\xi\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi\|_{L^2(0,t;X_h)}^2 \leq 2 \left( \|\xi^I\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi^I\|_{L^2(0,T;X_h)}^2 + C \left( \|\xi^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \xi^I}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\Upsilon(\xi^I)\|_{L^1(0,T)} \right) \right).$$

□

Nous allons maintenant achever la démonstration du théorème 2.2.

*Démonstration.* On reprend l'estimation (2.14).

Considérons le terme  $\|\xi^I\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2$ . En utilisant le fait que  $\xi^I$  est une erreur d'interpolation, on a :

$$\|\xi^I\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \lesssim h^{k+1}|c|_{L^\infty(0,T;H^{k+1}(\Omega))}.$$

Considérons le terme  $\|\xi^I\|_{L^2(0,T;X_h)}^2$ . On rappelle que :

$$\|\xi^I\|_{L^2(0,T;X_h)}^2 = \int_0^T \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I\|_{L^2(E)}^2 + J_0(\xi^I, \xi^I) + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [\xi^I]_e^2 dx \right) dt.$$

Toujours, en utilisant le fait que  $\xi^I$  est une erreur d'interpolation, on a :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I\|_{L^2(E)}^2 \lesssim h^{2k} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |c|_{H^{k+1}(E)}^2 \right).$$

En utilisant le fait que  $\xi^I$  est continue et le fait que  $\xi^I = 0$  sur  $\Gamma_D$ , on a

$$J_0(\xi^I, \xi^I) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [\xi^I]_e^2 dx = 0.$$

En rassemblant ces résultats, on obtient

$$\|\xi^I\|_{L^2(0,T;X_h)}^2 \lesssim h^{2k} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |c|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2 \right).$$

Considérons le terme

$$\begin{aligned} \Upsilon(\xi^I) &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|(\mathbf{D}(\mathbf{u})^{1/2} \nabla \xi^I)\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{h_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}(\mathbf{u}) \nabla \xi^I\}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\mathbf{u} \xi^I\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \frac{h_e}{\sigma_e} \|(\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité suivante

$$(\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e = \{\xi^I\}_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e + \frac{1}{2} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e| [\xi^I]_e = \{\xi^I\}_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e \quad \forall e \in \Gamma_h^i.$$

Soit  $e = E_1 \cap E_2$  une face interne, on a :

$$\|(\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)} \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \|\xi^I \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e|_{E_j}\|_{L^2(e)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \|\xi^I|_{E_j}\|_{L^2(e)}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \|\xi^I|_{E_j}\|_{L^2(e)} &\leq \left( \frac{|e|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \|\xi^I\|_{L^2(\hat{e})} \\ &\leq C_{\text{trace}} \left( \frac{|e|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \|\hat{\xi}^I\|_{H^1(\hat{E})} \\ &\leq C_{\text{trace}} \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|e|}{|E_j|} \right)^{1/2} \left( \|\xi^I\|_{L^2(E_j)}^2 + h^2 \|\nabla \xi^I\|_{L^2(E_j)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_{\text{trace}} \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|e|}{|E_j|} \right)^{1/2} \left( (Ch^{k+1}|c|_{H^{k+1}(E_j)})^2 + h^2 (Ch^k \sigma_0 |c|_{H^{k+1}(E_j)})^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_{\text{trace}} C \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|e|}{|E_j|} \right)^{1/2} h^{k+1} (1 + \sigma_0^2)^{1/2} |c|_{H^{k+1}(E_j)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e \in \Gamma_h^i} \frac{h_e}{\sigma_e} \|(\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\
 & \leq \sum_{e \in \Gamma_h^i} \frac{h_e}{\sigma_e} \frac{|e|}{|E_j|} \left( \sum_{j=1,2} C_{\text{trace}} C \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}}{2} \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} h^{k+1} (1 + \sigma_0^2)^{1/2} |c|_{H^{k+1}(E_j)} \right)^2 \\
 & \leq C^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 h^{2k+2} C_{\text{trace}}^2 (1 + \sigma_0^2)^{1/2} \sum_{e \in \Gamma_h^i} \left( \sum_{j=1,2} \sqrt{\frac{h_e |e|}{2\sigma_e |E_j|} \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|}} |c|_{H^{k+1}(E_j)} \right)^2 \\
 & \leq C^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 h^{2k+2} C_{\text{trace}}^2 (1 + \sigma_0^2)^{1/2} \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left( \sum_{j=1,2} \frac{L h_e |e|}{2\sigma_e |E_j|} \right) |c|_{H^{k+1}(E)}^2 \\
 & \lesssim \left( \frac{\hat{C}}{\hat{c}} \right)^2 \frac{C_{\text{trace}} \lambda_{\min} (1 + \sigma_0^2)^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 h^{2k+2}}{\hat{C}^2 \lambda_{\max}^2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |c|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2 \\
 & \lesssim \frac{C_{\text{trace}} \lambda_{\min} (1 + \sigma_0^2)^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 h^{2k+2}}{\hat{c}^2 \lambda_{\max}^2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |c|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2
 \end{aligned}$$

où  $L$  est le nombre maximum de faces qu'un élément peut avoir. En utilisant le fait que

$$\sum_{j=1}^2 \frac{L h_e |e|}{2\sigma_e |E_j|} \leq \frac{\lambda_{\min}}{4\hat{C}^2 \lambda_{\max}^2} \text{ pour } e \in \Gamma_h^i,$$

on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in \Gamma_h^i} \frac{h_e}{\sigma_e} \|(\xi^I)^{upw} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 & \leq C^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 h^{2k+2} C_{\text{trace}}^2 (1 + \sigma_0^2)^{1/2} \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \frac{\lambda_{\min}}{4\hat{C}^2 \lambda_{\max}^2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |c|_{H^{k+1}(E)}^2 \\
 & \lesssim \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 h^{2k+2} C_{\text{trace}}^2 (1 + \sigma_0^2)^{1/2} \lambda_{\min}}{4\hat{C}^2 \lambda_{\max}^2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |c|_{H^{k+1}(E)}^2.
 \end{aligned}$$

Soit  $e = E_1 \cap E_2$  une face interne, on a :

$$\|\{\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla \xi^I\}_e \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)} \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla \xi^I|_{E_j}\|_{L^2(e)}.$$

En utilisant, à nouveau un théorème de trace, nous montrons que :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla \xi^I|_{E_j}\|_{L^2(e)} & \leq \lambda_{\max} \left( \frac{|e|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \|\widehat{\nabla \xi^I}\|_{L^2(\hat{e})} \\
 & \leq C_{\text{trace}} \lambda_{\max} \left( \frac{|e|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \|\widehat{\nabla \xi^I}\|_{H^1(\hat{E})} \\
 & \leq C_{\text{trace}} \lambda_{\max} \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|e|}{|E_j|} \right)^{1/2} (\|\nabla(\xi^I)\|_{L^2(E_j)}^2 + h^2 \|D^2 \xi^I\|_{L^2(E_j)}^2)^{1/2} \\
 & \leq C_{\text{trace}} \lambda_{\max} \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|e|}{|E_j|} \right)^{1/2} ((Ch^k \sigma_0 |c|_{H^{k+1}(E_j)})^2 + (Ch^k \sigma_0^2 |c|_{H^{k+1}(E_j)})^2)^{1/2} \\
 & \leq CC_{\text{trace}} \lambda_{\max} \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|e|}{|E_j|} \right)^{1/2} h^k \sigma_0 |c|_{H^{k+1}(E_j)} (1 + \sigma_0^2)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{h_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla \xi^I\}_e\|_{L^2(e)}^2 \\
 & \leq C^2 C_{\text{trace}}^2 \sigma_0^2 (1 + \sigma_0^2) \lambda_{\max}^2 \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right) h^{2k} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \left( \sum_{j=1,2} \sqrt{\frac{h_e |e|}{2\sigma_e |E_j|} \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|}} |c|_{H^{k+1}(E_j)} \right)^2 \\
 & \leq C^2 C_{\text{trace}}^2 \sigma_0^2 (1 + \sigma_0^2) \lambda_{\max}^2 \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right) h^{2k} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left( \sum_{j=1,2} \frac{L h_e |e|}{2 |E_j| \sigma_e} \right) |c|_{H^{k+1}(E_j)}^2
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \frac{L h_e |e|}{2 \sigma_e |E_j|} \leq \frac{\lambda_{\min}}{4 \hat{C}^2 \lambda_{\max}^2} \text{ pour } e \in \Gamma_h^i, \\ \frac{L h_e |e|}{\sigma_e |E|} \leq \frac{\lambda_{\min}}{4 \hat{C}^2 \lambda_{\max}^2} \text{ pour } e \in \Gamma_{h,D}, \end{cases}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{h_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla \xi^I\}_e\|_{L^2(e)}^2 \\
 & \leq C^2 C_{\text{trace}}^2 \sigma_0^2 (1 + \sigma_0^2) \lambda_{\max}^2 \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right) h^{2k} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \frac{\lambda_{\min}}{4 \hat{C}^2 \lambda_{\max}^2} \left( \sum_{j=1,2} |c|_{H^{k+1}(E_j)} \right)^2 \\
 & \leq \frac{C^2 C_{\text{trace}}^2 \sigma_0^2 (1 + \sigma_0^2) \lambda_{\min}}{4 \hat{C}^2} \left( \frac{|\hat{E}|}{|\hat{e}|} \right) h^{2k} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |c|_{H^{k+1}(E)}^2 \\
 & \lesssim \frac{C_{\text{trace}}^2 \sigma_0^2 (1 + \sigma_0^2) \lambda_{\min}}{4 \hat{C}^2} h^{2k} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |c|_{H^{k+1}(E)}^2.
 \end{aligned}$$

Nous avons, par ailleurs :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\mathbf{u} \xi^I\|_{L^2(E)}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\mathbf{u}\|_{L^4(E)}^2 \|\xi^I\|_{L^4(E)}^2.$$

On voudrait à présent majorer l'erreur d'interpolation  $\|\xi^I\|_{L^4(E)}^2$ . Pour cela, on procède comme suit :

$$\begin{aligned}
 \|\xi^I\|_{L^4(E)} & = \left( \int_E |c - \pi_h(c)|^4 dx \right)^{1/4} = \left( \int_{\hat{E}} |(c - \pi_h(c)) \circ \mathcal{F}_E|^4 |\mathbb{J}_{\mathcal{F}}| d\hat{x} \right)^{1/4} \\
 & \leq \|\mathbb{J}_{\mathcal{F}}\|_{L^\infty(\hat{E})}^{1/4} \left( \int_{\hat{E}} |(c - \pi_h(c)) \circ \mathcal{F}_E|^4 d\hat{x} \right)^{1/4}, \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

où  $\mathcal{F}_E$  désigne l'application bijective et linéaire en chacune de ces variables, définie dans l'élément  $\hat{E}$  à valeur dans l'élément de référence  $E$  telle que  $\mathcal{F}_E(\hat{E}) = E$  et  $\mathbb{J}_{\mathcal{F}}$  désigne le jacobien de  $\mathcal{F}_E$ .

On considère le membre de droite de (2.15). On a

$$(c - \pi_h(c)) \circ \mathcal{F}_E = c \circ \mathcal{F}_E - \hat{\pi}_h(c \circ \mathcal{F}_E) = \hat{c} - \hat{\pi}_h(\hat{c})$$

En utilisant l'extension du théorème de Deny-Lions (voir [Cia91], Théorème 3.1.1 et [CR72]), il existe une constante  $\hat{C}$  qui dépend de l'élément de référence  $\hat{E}$  telle que :

$$\|\hat{c} - \hat{\pi}_h(\hat{c})\|_{L^4(\hat{E})} \leq \hat{C} [\hat{c}]_{H^{k+1}(\hat{E})},$$

où

$$[\hat{c}]_{H^{k+1}(\hat{E})} = \left( \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial^{k+1} \hat{c}}{\partial^{k+1} \hat{x}_i} \right\|_{L^2(\hat{E})}^2 \right)^{1/2}.$$

Il nous reste à présent à faire le chemin inverse, c'est à dire exprimer l'intégrale précédent sur l'élément  $E$ . On commence par la remarque suivante : si  $\hat{v}$  appartient à  $H^m(\hat{E})$ , alors  $v \circ \mathcal{F}_E \in H^m(E)$ . Par conséquent, en utilisant le fait l'application  $\mathcal{F}_E$  est linéaire en chacune de ces variables, on obtient :

$$\frac{\partial \hat{v}(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial (v \circ \mathcal{F}_E)(\hat{x})}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(\hat{x})}{\partial^2 \hat{x}_i} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial^2 \hat{x}_i} \frac{\partial (v \circ \mathcal{F}_E)(\hat{x})}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i} \right)^2 \frac{\partial^2 (v \circ \mathcal{F}_E)(\hat{x})}{\partial^2 x_i} = \left( \frac{\partial \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i} \right)^2 \frac{\partial^2 (v \circ \mathcal{F}_E)(\hat{x})}{\partial^2 x_i},$$

$$\frac{\partial^3 \hat{v}(\hat{x})}{\partial^3 \hat{x}_i} = 2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial^2 \hat{x}_i} \frac{\partial \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial^2 (v \circ \mathcal{F}_E)(\hat{x})}{\partial^2 x_i} + \left( \frac{\partial \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i} \right)^3 \frac{\partial^3 (v \circ \mathcal{F}_E)(\hat{x})}{\partial^3 x_i} = \left( \frac{\partial \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i} \right)^3 \frac{\partial^3 (v \circ \mathcal{F}_E)(\hat{x})}{\partial^3 x_i},$$

Par récurrence, on montre que

$$\frac{\partial^m \hat{v}(\hat{x})}{\partial^m \hat{x}_i} = \left( \frac{\partial \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i} \right)^m \frac{\partial^m (v \circ \mathcal{F}_E)(\hat{x})}{\partial^m x_i}, \quad \forall m \geq 1.$$

Alors, en passant à l'élément  $E$ , on obtient

$$\left\| \frac{\partial^{k+1} \hat{c}}{\partial^{k+1} \hat{x}_i} \right\|_{L^2(\hat{E})}^2 = \int_E \left| \left( \frac{\partial \mathcal{F}_E(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i} \right)^{k+1} \frac{\partial^{k+1} c}{\partial^{k+1} x_i} \right|^2 |\mathbb{J}_{\mathcal{F}^{-1}}| dx \leq \left\| \frac{\partial \mathcal{F}_E}{\partial \hat{x}_i} \right\|_{L^\infty(\hat{E})}^{2k+2} \|\mathbb{J}_{\mathcal{F}^{-1}}\|_{L^\infty(E)} \int_E \left| \frac{\partial^{k+1} c}{\partial^{k+1} x_i} \right|^2 dx$$

En rassemblant les différents résultats, on obtient l'inégalité suivante :

$$\|\hat{c} - \hat{\pi}_h(\hat{c})\|_{L^4(\hat{E})}^2 \leq \hat{C}^2 \|\mathbb{J}_{\mathcal{F}}\|_{L^\infty(\hat{E})}^{1/2} \left\| \frac{\partial \mathcal{F}_E}{\partial \hat{x}_i} \right\|_{L^\infty(\hat{E})}^{2k+2} \|\mathbb{J}_{\mathcal{F}^{-1}}\|_{L^\infty(E)} \|c\|_{H^{k+1}(E)}^2$$

Il reste à majorer les termes  $\|\mathbb{J}_{\mathcal{F}}\|_{L^\infty(\hat{E})}$ ,  $\left\| \frac{\partial \mathcal{F}_E}{\partial \hat{x}_i} \right\|_{L^\infty(\hat{E})}^{2k+2}$  et  $\|\mathbb{J}_{\mathcal{F}^{-1}}\|_{L^\infty(E)}$ . Il existe trois constantes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  indépendantes de  $h_E$  et de l'élément  $E$  telles que (voir [CR72]) :

$$\|\mathbb{J}_{\mathcal{F}}\|_{L^\infty(\hat{E})} \leq C_1 h_E^2, \quad \left\| \frac{\partial \mathcal{F}_E}{\partial \hat{x}_i} \right\|_{L^\infty(\hat{E})} \leq C_2 h_E, \quad \|\mathbb{J}_{\mathcal{F}^{-1}}\|_{L^\infty(E)} \leq C_3 \frac{1}{\rho_E^2}.$$

Finalement, on a

$$\|\hat{c} - \hat{\pi}_h(\hat{c})\|_{L^4(\hat{E})}^2 \leq \hat{C}^2 C_1 C_2 C_3 \frac{h_E^2}{\rho_E^2} h_E^{2k+1} |c|_{H^{k+1}(E)}^2 \lesssim \sigma_0^2 h^{2k+1} |c|_{H^{k+1}(E)}^2$$

où on a utilisé le fait que  $\frac{h_E}{\rho_E} \leq \sigma_0$ .

En sommant sur les éléments, on obtient :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{min}} \|\mathbf{u}\|_{L^4(E)}^2 \|\xi^I\|_{L^4(E)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{min}} \|\mathbf{u}\|_{L^4(E)}^2 h^{2k+1} \sigma_0^2 |c|_{H^{k+1}(E)}^2.$$

Ce qui donne encore

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\lambda_{min}} \|\mathbf{u} \xi^I\|_{L^2(E)}^2 \lesssim h^{2k+1} \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 \sigma_0^2}{\lambda_{min}} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |c|_{H^{k+1}(E)}^2 \right).$$

Considérons le terme  $\left\| \frac{\partial \xi^I(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2$ . On a

$$\left\| \frac{\partial \xi^I(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \lesssim h^{2k+2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \frac{\partial c}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2 \right).$$

En rassemblant ces différentes inégalités et supposant que  $\xi^A(0) = 0$  (la solution numérique initiale est prise égale à l'interpolée de Lagrange de  $c_0$ ), on a

$$\begin{aligned} & \|c - c_h\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} + \|c - c_h\|_{L^2(0,t;X_h)} \\ & \lesssim h^k \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \frac{\partial c}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2 + \|c\|_{L^\infty(0,T;H^{k+1}(E))}^2 + \|c\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $L^\infty(0,T;H^{k+1}(E)) \subset L^2(0,T;H^{k+1}(E))$ , on a

$$\|c - c_h\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} + \|c - c_h\|_{L^2(0,t;X_h)} \lesssim h^k \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \frac{\partial c}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2 + \|c\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(E))}^2 \right)^{1/2}.$$

□

# Chapitre 3

## Problème du traceur

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Modèle continu</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>3.2</b>	<b>Discrétisation temporelle</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>3.3</b>	<b>Résolution du problème de Darcy</b> . . . . .	<b>55</b>
3.3.1	Méthode des volumes finis à 2 points . . . . .	56
3.3.2	Méthodes de reconstruction des flux . . . . .	57
<b>3.4</b>	<b>Schémas numériques de type DG pour l'équation de transport</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>3.5</b>	<b>Résultats numériques</b> . . . . .	<b>58</b>
3.5.1	Exemple 1 : Validation . . . . .	58
3.5.2	Exemple 2 : Perméabilité homogène . . . . .	62
3.5.3	Exemple 3 : SPE10 . . . . .	62

Ce chapitre a pour but d'introduire le problème d'écoulement étudié au cours de cette thèse et un schéma numérique permettant de résoudre ce système d'équations aux dérivées partielles. Ce schéma est basé sur une discrétisation de type volumes finis pour l'équation de Darcy, sur une méthode de reconstruction de la vitesse dans l'espace de Raviart-Thomas  $\mathbb{RT}_0$  et utilise la méthode DG étudiée dans le chapitre 2 pour l'équation de transport. A titre illustratif, nous présentons quelques résultats numériques obtenus avec cette discrétisation.

### 3.1 Modèle continu

On considère, dans cette thèse, le système d'équations suivant qui modélise le transport d'un traceur dans un milieu poreux  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t (\phi(x)c(t,x)) + \operatorname{div}(\mathbf{u}(t,x)c(t,x)) - \mathbf{D}(\mathbf{u})(t,x)\nabla c(t,x) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u})(t,x) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ \mathbf{u}(t,x) = -\frac{\mathbf{K}(x)}{\mu(c)} (\nabla P(t,x) - \rho(t,x)\mathbf{g}) & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ c(0,x) = c^0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où les inconnues sont la pression du fluide  $P$ , la vitesse de Darcy  $\mathbf{u}$  et la concentration du traceur  $c$ . Dans le système d'équations (3.1) :

- $\phi(x)$  désigne la porosité du milieu poreux (sans dimension),
- $\mathbf{K}(x)$  le tenseur de perméabilité en  $[m^2]$ ,

- $\mu = (c\mu_s^{-0.25} + (1-c)\mu_0^{-0.25})^{-4}$  où  $\mu_s$  et  $\mu_0$  désignent respectivement la viscosité du traceur en  $[Pa.s]$  et la viscosité du fluide initialement présent dans le milieu poreux en  $[Pa.s]$ ,
- $\rho(t,x)$  la masse volumique du fluide en  $[kg/m^3]$ ,
- $\mathbf{g}$  le vecteur gravité en  $[m/s^2]$ ,
- $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \underbrace{D_m \mathbf{I}}_{\text{diffusion moléculaire}} + \underbrace{\alpha_T \|\mathbf{u}\| \mathbf{I} + \frac{\alpha_L - \alpha_T}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u} \mathbf{u}^T}_{\text{dispersion mécanique}}$  avec  $D_m$  (en  $[m^2/s]$ ) la diffusion moléculaire. Les

facteurs  $\alpha_L$  et  $\alpha_T$  (en  $[m]$ ) représentent respectivement les dispersivités longitudinale et transversale.

On fait les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 3.1.** :

1.  $\Omega$  est un domaine borné, connexe et Lipschitz.  $\mathbf{n}_\Omega$  est le vecteur normal unitaire à  $\partial\Omega$ , dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ . Le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est tel que  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D$  avec  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$  deux parties du bord deux-à-deux disjointes. Le bord  $\Gamma_D$  est tel que  $\bar{\Gamma}_D = \bar{\Gamma}_{in} \cup \bar{\Gamma}_{out}$ . On définit  $\Gamma_{in}$  et  $\Gamma_{out}$  comme suit

$$\Gamma_{in} = \{x \in \Gamma_D ; \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) < 0\},$$

$$\Gamma_{out} = \{x \in \Gamma_D ; \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) \geq 0\}.$$

2. Il existe deux constantes positives  $k_{min}$  ( $k_{min} > 0$ ) et  $k_{max}$  telles que

$$k_{min} |\xi|^2 \leq \xi^T \mathbf{K}(x) \xi \leq k_{max} |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

3. Le tenseur  $\mathbf{D}$  est défini sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans l'espace  $\mathbb{R}^{d \times d}$ . On suppose qu'il existe deux constantes positives  $d_{min}$  ( $d_{min} > 0$ ) et  $d_{max}$  telles que :

$$d_{min} (1 + |\mathbf{u}|) |\xi|^2 \leq \xi^T \mathbf{D}(\mathbf{u}) \xi \leq d_{max} (1 + |\mathbf{u}|) |\xi|^2, \quad \xi, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d.$$

4.  $\phi \in H^1(\Omega)$  et il existe deux constantes positives  $\phi_{min}$  ( $\phi_{min} > 0$ ) et  $\phi_{max}$  telles que

$$\phi_{min} \leq \phi(x) \leq \phi_{max} \quad \forall x \in \Omega.$$

On complète le système d'équations (3.1) par les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{u}(t,x) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) & = u_P(t,x) - u_I(t,x) & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ c(t,x) & = c_{in} & \text{sur } (0,T) \times \Gamma_{in}, \\ c(t,x) & = c_{out} & \text{sur } (0,T) \times \Gamma_{out}, \\ (\mathbf{D}(\mathbf{u})(x) \nabla c(t,x)) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) & = 0 & \text{sur } (0,T) \times \Gamma_N, \\ \int_{\Omega} P(t,x) dx & = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \end{array} \right.$$

où

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} u_I(t,x) d\sigma dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} u_P(t,x) d\sigma dt > 0.$$

On suppose que :

$$u_I(t,x) = 0 \text{ sur } (0,T) \times (\Gamma_{out} \cup \Gamma_N)$$

et que

$$u_P(t,x) = 0 \text{ sur } (0,T) \times (\Gamma_{in} \cup \Gamma_N).$$



## 3.2 Discrétisation temporelle

Soit  $(t^n)_{1 \leq n \leq N}$  une suite croissante de réels positifs appartenant à  $[0, T]$ . On note

$$c^n(x) = c(t^n, x), \quad P^n(x) = P(t^n, x), \quad \mathbf{u}^n(x) = \mathbf{u}(t^n, x) \quad \text{et} \quad \rho^n(x) = \rho(t^n, x).$$

On considère l'algorithme suivant pour résoudre le systèmes d'équations (3.1).

### Algorithme de découplage

1. Un maillage  $\mathcal{E}_h$ , la condition initiale  $c^0$  et les conditions aux bords, une initialisation des paramètres  $(\phi, \rho, \dots)$ , etc.
2. FOR  $n = 0$  to  $N$

(a) Résoudre le système de Darcy suivant pour obtenir  $P^{n+1}$  à partir de  $c^n$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{K}(x)}{\mu(c^n(x))} (\nabla P^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x)\mathbf{g}) \right) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ - \left( \frac{\mathbf{K}(x)}{\mu(c^n(x))} (\nabla P^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x)\mathbf{g}) \right) \cdot \mathbf{n}_\Omega = u_P^{n+1}(x) - u_I^{n+1}(x) & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_\Omega P^{n+1}(x) dx = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

(b) Reconstruction de la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  à partir de  $P^{n+1}$ .

(c) Résoudre l'équation de transport pour obtenir  $c^{n+1}$  à partir de  $\mathbf{u}^{n+1}$  grâce au schéma d'Euler implicite suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t (\phi c^{n+1})(x) + \operatorname{div} (\mathbf{u}^{n+1} c^{n+1} - \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla c^{n+1})(x) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1}(x) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) = u_P^{n+1}(x) - u_I^{n+1}(x) & \text{sur } \partial\Omega, \\ c^{n+1}(x) = c_{in}(t^{n+1}, x) & \text{sur } \Gamma_{in}, \\ c^{n+1}(x) = c_{out}(t^{n+1}, x) & \text{sur } \Gamma_{out}, \\ (\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1})(x) \nabla c^{n+1}(x)) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Cet algorithme résout le système d'équations (3.1) en deux étapes découplées. On résout, tout d'abord l'équation de Darcy (3.2) pour obtenir la pression  $P^{n+1}$ . On reconstruit la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  en utilisant la nouvelle pression  $P^{n+1}$ . Enfin, la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  est utilisée dans l'équation de transport (3.3) pour calculer la concentration  $c^{n+1}$ . Cette approche est appelée dans la littérature le schéma "IMPIMC (IMPLICIT in Pressure, IMPLICIT in Concentration)".

## 3.3 Résolution du problème de Darcy

Nous avons choisi une méthode de type volume finis à 2 points pour résoudre l'équation de Darcy (3.2). Cette méthode permet d'avoir des flux consistants sur des maillages parallélépipédiques et conservatifs sur chacune des faces. Comme nous le verrons dans ce qui suit, la conservativité des flux est une propriété importante pour la reconstruction de la vitesse de Darcy  $\mathbf{u}^{n+1}$ . Remarquons que l'équation (3.2) peut également être résolue au moyen d'un schéma de type DG mais qu'une étape de postprocessing est nécessaire afin de reconstruire des flux conservatifs comme cela a été fait dans [LR15].

Pour des maillages plus généraux, nous pouvons utiliser une méthode volumes finis de la famille des méthodes HMM (Hybrid Mimetic Mixed methods voir [DEGH10]) et la formule de reconstruction  $H(\operatorname{div})$ -conforme proposée dans [Lem13].

### 3.3.1 Méthode des volumes finis à 2 points

Nous rappelons dans ce paragraphe le principe du schéma volumes finis à deux points. En intégrant l'équation (3.2) sur une maille  $E \in \mathcal{E}_h$  nous avons :

$$\int_E -\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} (\nabla P^{n+1} - \rho^{n+1} \mathbf{g}) \right) dx = 0.$$

En utilisant la formule de la divergence, on a :

$$\sum_{e \in \partial E} \int_e - \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} (\nabla P^{n+1} - \rho^{n+1} \mathbf{g}) \right) \cdot \mathbf{n}_e ds = 0.$$

En utilisant la condition aux limites

$$\left( - \frac{\mathbf{K}(x)}{\mu(c^n(x))} (\nabla P^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x) \mathbf{g}) \right) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) = u_P^{n+1}(x) - u_I^{n+1}(x) \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

on a :

$$\sum_{e \in \partial E, e \not\subset \partial\Omega} \int_e \left[ - \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} (\nabla P^{n+1} - \rho^{n+1} \mathbf{g}) \right) \right] \cdot \mathbf{n}_e d\sigma = \sum_{e \in \partial\Omega \cap \partial E} \int_e (u_I^{n+1} - u_P^{n+1}) d\sigma.$$

Ce qui donne :

$$\sum_{e \in \partial E, e \not\subset \partial\Omega} \int_e - \left( \frac{\mathbf{K}(x)}{\mu(c^n)} \nabla P^{n+1} \right) \cdot \mathbf{n}_e d\sigma = \sum_{e \in \Gamma_h^b} \int_e (u_I^{n+1} - u_P^{n+1}) d\sigma - \sum_{e \in \partial E, e \not\subset \partial\Omega} \int_e \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} \rho^{n+1} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{n}_e d\sigma.$$

On approche la pression  $P^{n+1}$  par la fonction  $P_h^{n+1} \in \mathbb{P}_d^0(\mathcal{E}_h)$  solution de

$$\sum_{e \in \partial E, e \not\subset \partial\Omega} \int_e - \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} \nabla P_h^{n+1} \right) \cdot \mathbf{n}_e d\sigma = \sum_{e \in \Gamma_h^b} \int_e (u_I^{n+1} - u_P^{n+1}) d\sigma - \sum_{e \in \partial E, e \not\subset \partial\Omega} \int_e \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} \rho^{n+1} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{n}_e d\sigma.$$

Soit  $e = E_K \cap E_L$  avec  $\mathbf{n}_e$  orientée de  $E_K$  vers  $E_L$ . On approche  $\left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} \nabla P_h^{n+1} \right) \cdot \mathbf{n}_e$  par la différence finie

$$\left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} \nabla P_h^{n+1} \right) \cdot \mathbf{n}_e \approx \frac{\lambda_K \lambda_L |e|}{\lambda_K d_{Le} + \lambda_L d_{Ke}} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1}),$$

avec  $P_K^{n+1}$  et  $P_L^{n+1}$  les valeurs respectives de  $P_h^{n+1}$  dans les éléments  $E_K$  et  $E_L$  et

$$\lambda_K = \frac{(m(\mathbf{K})|_K \mathbf{n}_e) \cdot \mathbf{n}_e}{m(\mu(c^n))|_K}$$

où l'opérateur  $m(g)|_K$  désigne la moyenne de la fonction  $g$  sur l'élément  $E_K$  et  $d_{Ke}$  la distance entre le centre de  $E_K$  et le centre de la face  $e$ . De même, on approche  $\int_e \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} \rho^{n+1} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{n}_e d\sigma$  comme suit :

$$\int_e \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu(c^n)} \rho^{n+1} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{n}_e d\sigma \approx \frac{\psi_K \psi_L |e|}{\psi_K d_{Le} + \psi_L d_{Ke}} g(z_K - z_L).$$

avec

$$\psi_K = \frac{(m(\mathbf{K} \rho^{n+1})|_K \mathbf{n}_e) \cdot \mathbf{n}_e}{m(\mu(c^n))|_K}$$

où  $d_{KL}$  désigne la distance entre les centres de  $E_K$  et  $E_L$ .

Finalement, on aboutit au schéma suivant pour le calcul de la pression :

$$\sum_{e \in \partial E, e \notin \partial \Omega} \frac{\lambda_K \lambda_L |e|}{\lambda_K d_{Le} + \lambda_L d_{Ke}} (P_K^{n+1} - P_L^{n+1}) = \sum_{e \in \Gamma_h^b} \int_e (u_I^{n+1} - u_P^{n+1}) d\sigma - \sum_{e \in \partial E, e \notin \partial \Omega} \frac{\psi_K \psi_L |e|}{\psi_K d_{Le} + \psi_L d_{Ke}} g(z_K - z_L). \quad (3.4)$$

On désigne par  $F_{K,e}$  le flux défini comme suit :

$$F_{K,e} = \begin{cases} \frac{\lambda_K \lambda_L |e|}{\lambda_K d_{Le} + \lambda_L d_{Ke}} (P_K^{n+1} - P_L^{n+1}) + \frac{\psi_K \psi_L |e|}{\psi_K d_{Le} + \psi_L d_{Ke}} g(z_K - z_L), & \forall e \in \Gamma_h^i \\ \int_e (u_I^{n+1} - u_P^{n+1}) d\sigma, & \forall e \in \Gamma_h^b. \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.3.2 Méthodes de reconstruction des flux

La pression  $P_h^{n+1}$  obtenue avec le schémas (3.4) nécessite un traitement spécifique pour évaluer la vitesse  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  aux points d'intégrations. La méthode proposée ici consiste à construire une approximation  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  de la fonction

$$-\frac{\mathbf{K}(x)}{\mu(c^n(x))} (\nabla P^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x)\mathbf{g})$$

dans l'espace  $\mathbb{RT}_0(\mathcal{E}_h)$ . Une telle approximation peut être construite en déterminant, pour tout  $E \in \mathcal{E}_h$ , six constantes  $a, b, c, \alpha, \beta$  et  $\gamma$  telles que

$$\mathbf{u}_h^{n+1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a + \alpha x \\ b + \beta y \\ c + \gamma z \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Les constantes  $a, b, c, \alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont déterminées en utilisant les équations suivantes définies pour tout  $e \in \partial E$  :

$$\int_e \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e d\sigma = F_{K,e}.$$

## 3.4 Schémas numériques de type DG pour l'équation de transport

L'équation de transport est résolue avec le schéma suivant introduit au chapitre 2 : trouver  $c_h^{n+1} \in X_h$  telle que, pour tout  $v_h \in X_h$ , on a :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi c_h^{n+1} v_h dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{D}(\mathbf{u}_h^{n+1}) \nabla c_h^{n+1}) \cdot \nabla v_h dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{u}_h^{n+1} c_h^{n+1}) \cdot \nabla v_h dx \\ & - \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}_h^{n+1}) \nabla c_h^{n+1}\}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e ds - \gamma \left( \sum_{e \in \Gamma_h^i \cup \Gamma_{h,D}} \int_e \{\mathbf{D}(\mathbf{u}_h^{n+1}) \nabla v_h\}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_h^{n+1}]_e ds \right) \\ & + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e c_h^{upw} \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e [v_h]_e ds + \sum_{e \in \Gamma_{h,out}} \int_e c_h^{n+1} \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e v_h ds + J_0(c_h^{n+1}, v_h) \\ & = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi c_h^n v_h dx + \sum_{e \in \Gamma_{h,in}} \int_e c_{in} \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e v_h ds \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

avec  $\gamma = -1, 0, 1$ . Le cas  $\gamma = 1$  correspond à un schéma DG symétrique,  $\gamma = -1$  correspond à un schéma DG anti-symétrique et  $\gamma = 0$  à un schéma DG incomplet.

## 3.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques obtenus avec les méthodes introduites précédemment.

### 3.5.1 Exemple 1 : Validation

Pour étudier la convergence des schémas numériques (3.4), (3.3.2) et (3.7), on considère l'exemple suivant inspiré du cas test étudié dans la thèse [Li15] : soient  $\Omega$  le carré unité et  $p$  et  $c$  deux fonctions définies comme suit :

$$p(x,y,t) = (2 - e^{-x}(1+x+x^2) - e^{-y}(1+y+y^2)) e^{\frac{\pi}{2}t} \quad \forall x \in \Omega,$$

$$c(x,y,t) = (x(1-x) + y(1-y)) t \quad \forall x \in \Omega.$$

Nous allons considérer dans ce section trois champs de perméabilité pour étudier numériquement la méthode de reconstruction (3.3.2) introduite dans ce chapitre. Nous allons, par la même occasion, étudier l'impact de la vitesse obtenue avec cette méthode reconstruction sur le schéma DG (3.7) pour l'équation de transport. Les résultats numériques dans cette section ont été obtenus grâce à un logiciel prototype développé à partir de la librairie deal.II [BHK] au cours de cette thèse. Les éléments  $\mathbb{Q}_2$  ont été utilisés pour l'équation de transport.

**Test 1 : Champs de perméabilité homogène** Dans ce premier test, les valeurs des paramètres sont définies dans le tableau 3.1. Des écarts relatifs entre les solutions exactes et les solutions numériques sont

$\Omega$	$(0, 1)^2$
$\phi$	0.2
$\mathbf{K}$	$9.44e^{-3} \mathbf{I} m^2$
$D^{\text{diff}}$	$1.8e^{-7} m^2 \cdot s^{-1}$
$\alpha_L$	$1.8e^{-5} m$
$\alpha_T$	$1.8e^{-6} m$
$\mu_0$	2.9 Pa.s
$\mu_s$	5.8 Pa.s
$\rho$	$1.0e^3 kg \cdot m^{-3}$
$\Delta t$	0.05 s

TABLE 3.1 – Valeurs des paramètres utilisées dans l'exemple 1.

représentés dans les tableau 3.2, tableau 3.3, tableau 3.4 et tableau 3.5. On peut observer, à partir de la figure 3.5.1, les ordres de convergences suivants :

$$\|P - P_h\|_{L^2(\Omega)} \sim \mathcal{O}(h),$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \sim \mathcal{O}(h).$$

Les coefficients de pénalisation  $\sigma_e$  dans le schéma (3.7) sont choisis comme dans la remarque 2.3 avec  $\alpha = 1.0$ . Dans cet exemple, on observe que le nombre d'itérations pour résoudre les systèmes linéaires issus de la discrétisation de l'équation de la concentration par le schéma (3.7) est du même ordre pour  $\gamma = -1, 0, 1$ . On peut remarquer, à partir de la figure 3.5.1, les ordres de convergences suivants

$$\|c - c_h\|_{L^2(\Omega)} \sim \mathcal{O}(h),$$

$$\|c - c_h\|_{X_h(\mathcal{E}_h)} \sim \mathcal{O}(h).$$

$h$	1/10	1/20	1/40	1/80	1/160	1/200
$\frac{\ P - P_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ P\ _{L^2(\Omega)}}$	0.0380191	0.0188306	0.00939198	0.00469304	0.00234615	0.00187689
$\frac{\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ \mathbf{u}\ _{L^2(\Omega)}}$	0.0178508	0.00508409	0.00141192	0.000385249	0.000103776	6.78839e-05

TABLE 3.2 – Ecarts relatifs entre les solutions analytiques et les solutions numériques en fonction du pas du maillage au temps  $t = 0.05$ .

$h$	1/10	1/20	1/40	1/80	1/160	1/200
$\frac{\ c - c_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ c\ _{L^2(\Omega)}}$	2.77256e-05	1.37923e-05	6.81317e-06	3.32438e-06	1.58344e-06	1.23643e-06
$\frac{\ c - c_h\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}{\ c\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}$	6.00315e-05	3.16591e-05	1.6191e-05	8.10676e-06	3.96712e-06	3.13075e-06
Nb. itérations	4	4	4	6	7	7

TABLE 3.3 – Ecarts relatifs entre la solution analytique et la solution numérique en fonction du pas du maillage au temps  $t = 0.05$  avec  $\gamma = 0$ .

$h$	1/10	1/20	1/40	1/80	1/160	1/200
$\frac{\ c - c_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ c\ _{L^2(\Omega)}}$	2.77271e-05	1.37953e-05	6.81905e-06	3.33558e-06	1.60386e-06	1.26084e-06
$\frac{\ c - c_h\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}{\ c\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}$	6.0035e-05	3.16662e-05	1.6205e-05	8.13409e-06	4.0179e-06	3.19191e-06
Nb. itérations	4	4	5	6	8	8

TABLE 3.4 – Ecarts relatifs entre la solution analytique et la solution numérique en fonction du pas du maillage au temps  $t = 0.05$  avec  $\gamma = 1.0$ .

$h$	1/10	1/20	1/40	1/80	1/160	1/200
$\frac{\ c - c_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ c\ _{L^2(\Omega)}}$	2.77241e-05	1.37893e-05	6.8073e-06	3.31325e-06	1.56353e-06	1.21295e-06
$\frac{\ c - c_h\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}{\ c\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}$	6.0028e-05	3.1652e-05	1.61769e-05	8.07962e-06	3.91762e-06	3.0719e-06
Nb. itérations	4	4	5	6	6	7

TABLE 3.5 – Ecarts relatifs entre la solution analytique et la solution numérique en fonction du pas du maillage au temps  $t = 0.05$  avec  $\gamma = -1.0$ .

**Test 2 : Perméabilité hétérogène** Dans ce deuxième test, les valeurs des paramètres sont définies dans le tableau 3.6. Ici,  $\max_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{k_{max}}{k_{min}} \sim \mathcal{O}(10^2)$ . Théoriquement, l'erreur de reconstruction de la vitesse avec la méthode 3.3.2 devient large si le rapport  $\frac{k_{max}}{k_{min}}$  est important. Cela est confirmé numériquement (voir tableau 3.7). On constate une perte de précision au niveau la solution de l'équation de transport obtenue avec le schéma DG (3.7) (voir le tableau 3.8).

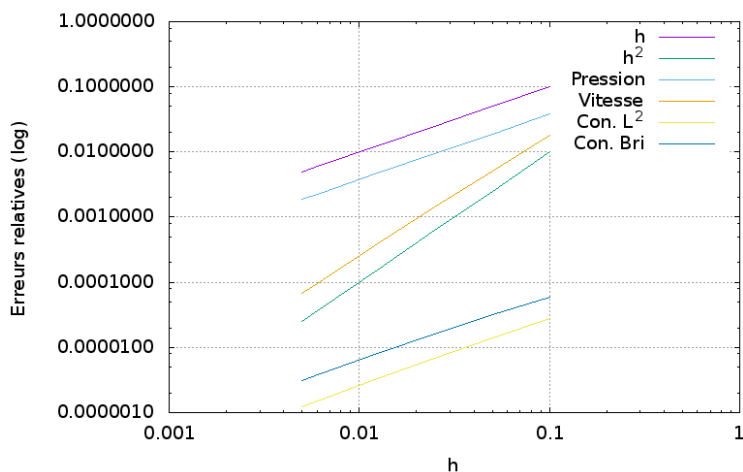


FIGURE 3.1 – Erreurs relatives en échelle logarithmique

$\Omega$	$(0, 1)^2$
$\phi$	0.2
$\mathbf{K}$	figure 3.5.1
$D^{\text{diff}}$	$1.8e^{-7} m^2 \cdot s^{-1}$
$\alpha_L$	$1.8e^{-5} m$
$\alpha_T$	$1.8e^{-6} m$
$\mu_0$	$2.9 Pa \cdot s$
$\mu_s$	$5.8 Pa \cdot s$
$\mathcal{E}_h$	$120 \times 220$
$\rho$	$1.0e^3 kg \cdot m^{-3}$
$\Delta t$	$0.05 s$

TABLE 3.6 – Valeurs des paramètres utilisées dans l'exemple 1.

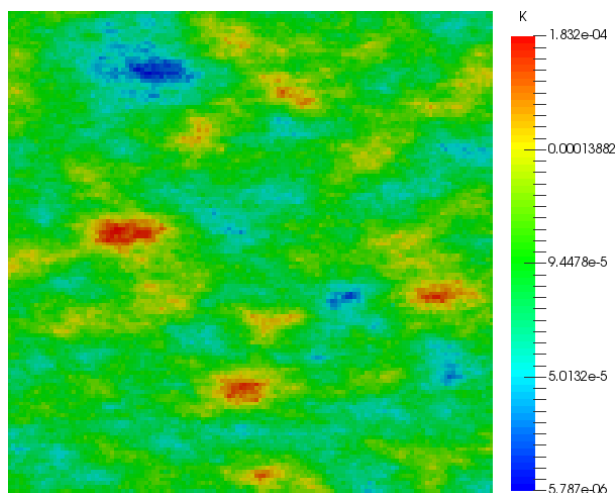


FIGURE 3.2 – Champ de perméabilité  $\mathbf{K}$

**Test 3 : Perméabilité très hétérogène** Dans ce troisième test, les valeurs des paramètres sont définies dans le tableau 3.9. Ici,  $\max_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{k_{max}}{k_{min}} \sim \mathcal{O}(10^7)$ . On constate une perte de précision significative dans la reconstruction de

$\frac{\ P - P_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ P\ _{L^2(\Omega)}}$	0.00293278
$\frac{\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ \mathbf{u}\ _{L^2(\Omega)}}$	0.0378169

TABLE 3.7 – Ecarts relatifs entre les solutions analytiques et les solutions numériques au temps  $t = 0.05$ .

$\gamma$	-1.0	0	1.0
$\frac{\ c - c_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ c\ _{L^2(\Omega)}}$	1.88114e-05	1.88528e-05	1.88981e-05
$\frac{\ c - c_h\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}{\ c\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}$	8.40361e-05	8.44254e-05	8.48533e-05
Nb. itération	5	5	6

TABLE 3.8 – Ecarts relatifs entre la solution analytique et la solution numérique en fonction du paramètre  $\gamma$  au temps  $t = 0.05$ .

la vitesse (voir tableau 3.10). On observe également une perte de précision au niveau de la solution de l'équation de transport obtenue avec le schéma DG (3.7) (voir tableau 3.11).

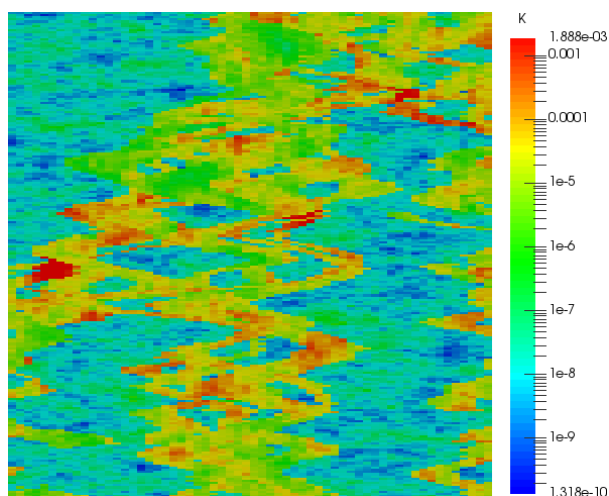
$\Omega$	$(0, 1)^2$
$\phi$	0.2
$\mathbf{K}$	figure 3.5.1
$D^{\text{diff}}$	$1.8e^{-7} m^2.s^{-1}$
$\alpha_L$	$1.8e^{-5} m$
$\alpha_T$	$1.8e^{-6} m$
$\mu_0$	$2.9 Pa.s$
$\mu_s$	$5.8 Pa.s$
$\mathcal{E}_h$	$120 \times 220$
$\rho$	$1.0e^3 kg.m^{-3}$
$\Delta t$	$0.05 s$

TABLE 3.9 – Valeurs des paramètres utilisées dans l'exemple 1.

$\frac{\ P - P_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ P\ _{L^2(\Omega)}}$	0.00251975
$\frac{\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ \mathbf{u}\ _{L^2(\Omega)}}$	0.408781

TABLE 3.10 – Ecarts entre les solutions analytiques et les solutions numériques au temps  $t = 0.05$ .

**Conclusion** Ce premier exemple nous a permis de valider les méthodes proposées dans le chapitre 2 et dans celui-ci. Nous avons constaté des pertes significatives de précision à cause de la vitesse. Pour conserver les ordres de convergences, il est parfois nécessaire d'employer des méthodes d'ordre plus élevé pour résoudre l'équation de Darcy à cause des fortes hétérogénéités du champ de perméabilité  $\mathbf{K}$ . On peut remarquer également que les méthodes de discrétisation de type Galerkin Discontinue génèrent des matrices de taille trop importante. Afin


 FIGURE 3.3 – Champ de perméabilité  $\mathbf{K}$ 

$\gamma$	-1.0	0	1.0
$\frac{\ c - c_h\ _{L^2(\Omega)}}{\ c\ _{L^2(\Omega)}}$	0.000416615	0.000429988	0.000447109
$\frac{\ c - c_h\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}{\ c\ _{X_h(\mathcal{E}_h)}}$	0.00240157	0.00253748	0.00271208
Nb. itération	6	6	7

 TABLE 3.11 – Ecarts entre la solution analytique et la solution numérique en fonction du paramètre  $\gamma$  au temps  $t = 0.05$ .

d'alléger le coût de calcul de ces grands systèmes linéaires, la méthode Galerkin Discontinue Hybride (HDG) a été proposée dans [NP12].

### 3.5.2 Exemple 2 : Perméabilité homogène

Pour les exemples qui suivent, un schéma DG incomplet avec des éléments  $\mathbb{P}_2$  a été utilisé pour résoudre l'équation de transport. Tous les résultats numériques dans cette section ont été produits grâce à un code développé au cours de cette thèse basé sur la plateforme Arcane [GL09].

La géométrie du domaine  $\Omega$  et la partition de  $\partial\Omega$  sont représentées sur la figure 3.4. Les surfaces  $\Gamma_{in}$  et  $\Gamma_{out}$  sont définies comme suit

$$\Gamma_{in} = (0, 30.48) \times \{0\} \cup \{0\} \times (0, 30.48),$$

$$\Gamma_{out} = (365.76, 335.28) \times \{670.56\} \cup \{365.76\} \times (640.08, 670.56).$$

Les valeurs des paramètres choisies pour ce deuxième exemple sont données dans le tableau 3.12. Ici le champ de perméabilités est supposé constant en espace. Les valeurs des concentrations sont représentées sur la figure 3.5.2 à différentes dates.

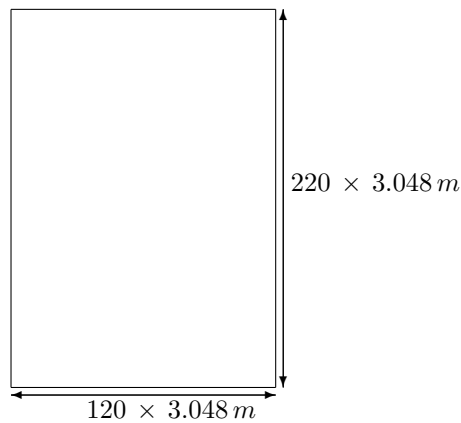
### 3.5.3 Exemple 3 : SPE10

Le cas test *SPE10* est un benchmark classique en simulation de réservoir [MM01]. Initialement le maillage de ce cas test comprend 85 couches dans la direction verticale et respectivement 60 et 220 mailles dans les directions  $x$  et  $y$ . Le champ de perméabilité présente spatialement des contrastes de perméabilités importants. Pour nos tests, nous avons extrait les couches 26 et 39 correspondant à des variations caractéristiques de ce champ pour ce benchmark. Dans notre second exemple, la géométrie du domaine  $\Omega$ , la partition de  $\partial\Omega$  et les paramètres du



$\Omega$	voir Figure 3.4
$\phi$	0.2
$\mathbf{K}$	$1.0e^{-15} \mathbf{I} m^2$
$D^{\text{diff}}$	$1.8e^{-7} m^2 \cdot s^{-1}$
$\alpha_L$	$1.8e^{-5} m$
$\alpha_T$	$1.8e^{-6} m$
$\dim(\mathcal{E}_h)$	$120 \times 220$
$\mu_0$	$1.0e^{-3} Pa \cdot s$
$\mu_s$	$9.0e^{-4} Pa \cdot s$
$\rho$	$1.0e^3 kg \cdot m^{-3}$
$c_{in}$	1
$c_{out}$	0
$\int_{\partial\Omega} u_I(t,x) d\sigma$	$5.7e^{-5} m^2 \cdot s^{-1}$
$\Delta t$	$216e^5 s$

TABLE 3.12 – Valeurs des paramètres utilisées dans l'exemple 2.

FIGURE 3.4 – Géométrie du domaine  $\Omega$ 

problème sont identiques au premier exemple. Seule la taille du maillage diffère légèrement, chaque maille ayant été divisée par 2 dans la direction  $x$ . Les valeurs des perméabilités diffèrent également. Celles-ci sont représentées sur la figure 3.5.3 pour les deux couches retenues.

Les concentrations obtenues à différents temps sont représentées sur la figure 3.5.3 pour la couche 26 et sur la figure 3.5.3 pour la couche 39.

Pour le cas SPE10, du fait des très fortes hétérogénéités, l'utilisation de polynômes d'ordre supérieur à 1 est souvent nécessaire pour obtenir des solutions suffisamment précises. Mais inversement l'utilisation de tels

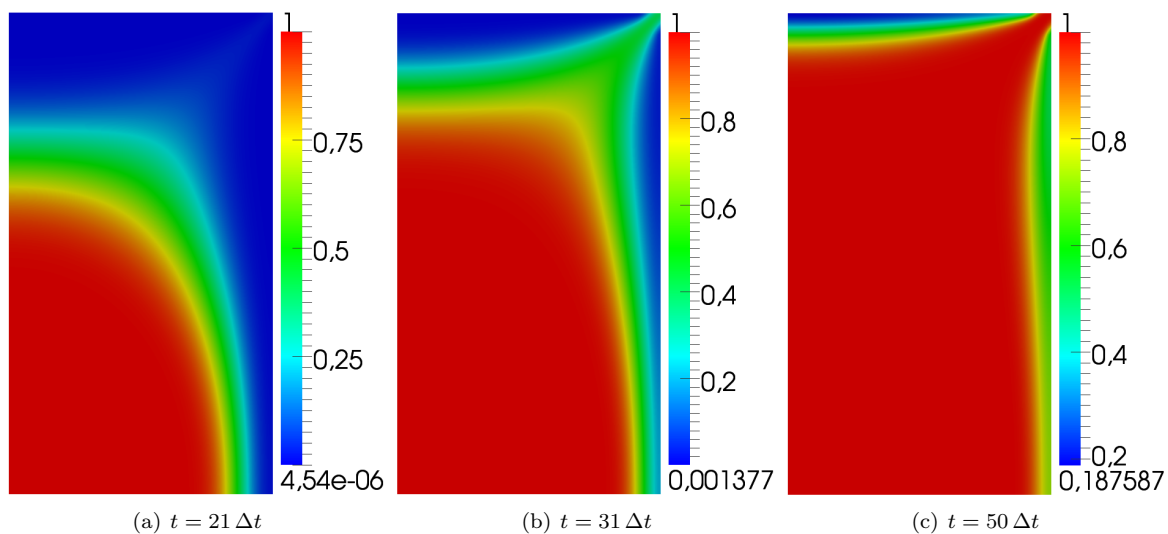


FIGURE 3.5 – Profils de concentration obtenus à différentes dates sur le premier exemple

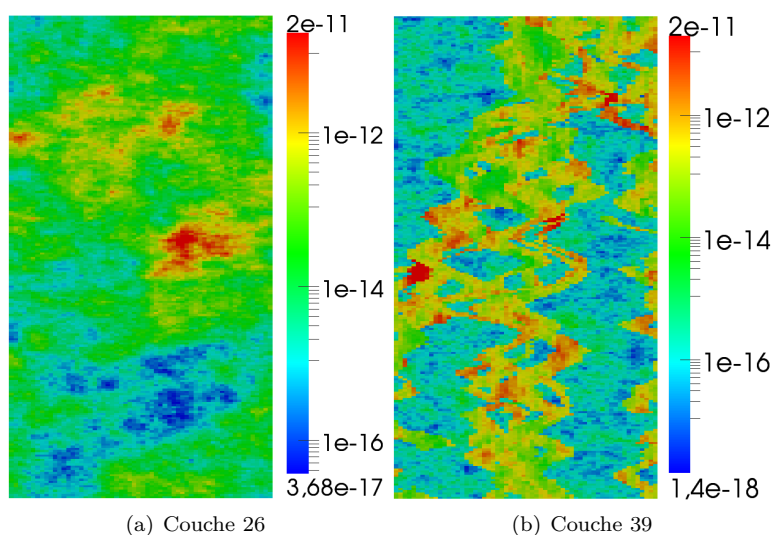


FIGURE 3.6 – Champ de perméabilité dans la direction  $x$  pour les couches 26 et 39 du cas SPE10

polynômes a un coût. Ainsi, l'utilisation d'éléments  $\mathbb{P}_2$  sur le cas  $3D$  complet aboutit, pour résoudre l'équation de transport (3.3), à chaque pas de temps, à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est de taille 10.122.000.

L'objectif des chapitres qui suivent est d'étudier et de mettre en oeuvre une méthode d'éléments finis multi-échelle afin de résoudre à moindre coût l'équation (3.3).

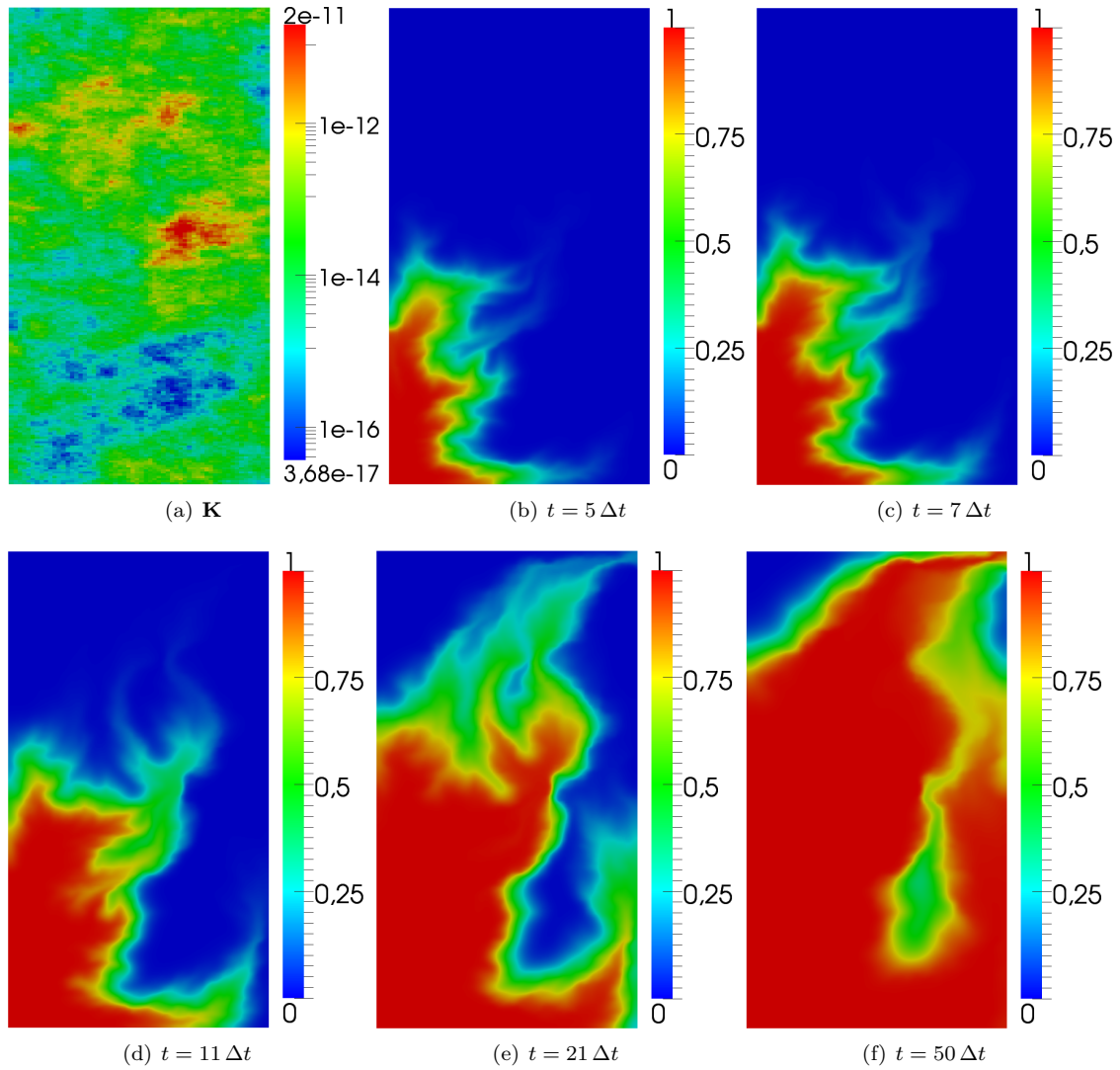


FIGURE 3.7 – Profils de concentration obtenus à différentes dates pour la couche 26 du second exemple

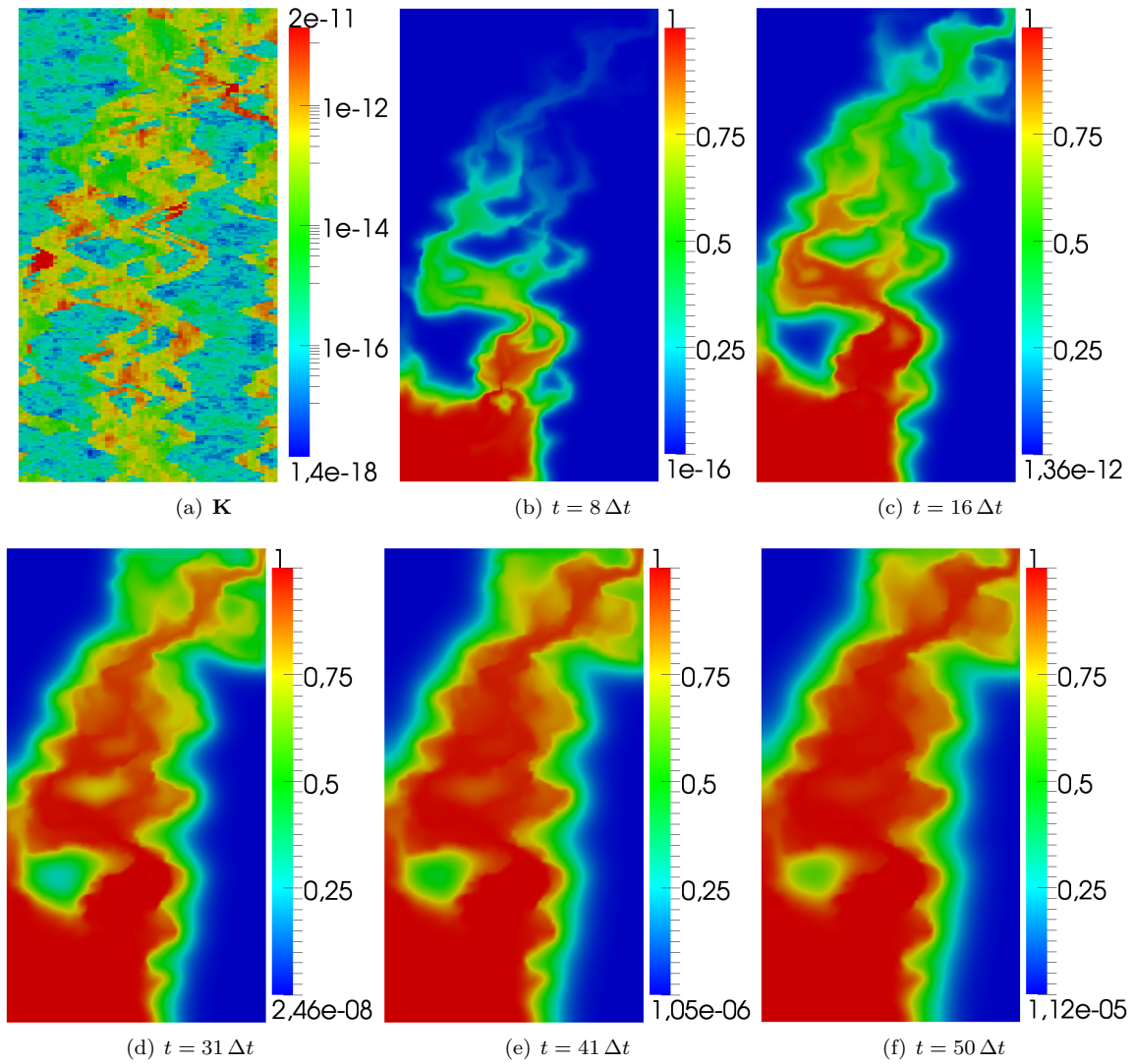


FIGURE 3.8 – Profils de concentration obtenus à différentes dates pour la couche 39 du second exemple

# Chapitre 4

## Homogénéisation d'un problème de transport

### Sommaire

---

<b>4.1 Définition du problème périodique</b> . . . . .	<b>67</b>
4.1.1 Mise à l'échelle . . . . .	67
4.1.2 Problème périodique . . . . .	68
<b>4.2 Quelques résultats d'homogénéisation</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>4.3 Nouvelle estimation d'erreur</b> . . . . .	<b>71</b>

---

L'objectif de ce chapitre est de rappeler un certain nombre de résultats d'homogénéisation pour un problème de transport étudiés par F. Ouaki dans ([Oua13]). Nous proposons également une nouvelle estimation de l'erreur d'homogénéisation.

### 4.1 Définition du problème périodique

Une première étape avant de procéder à l'homogénéisation d'une équation de type convection-diffusion est la mise à l'échelle de cette dernière. Différentes formes de mise à l'échelle sont proposées dans la littérature ( voir [AR07], [DP05], [ABMP10], [BJP03] et [HL09]). Nous rappelons ci-dessous la forme étudiée dans la thèse de F. Ouaki ([Oua13]).

#### 4.1.1 Mise à l'échelle

On considère l'équation de transport suivante :

$$\partial_t (\phi(x^*)c(t,x^*)) + \operatorname{div}(\mathbf{u}(x^*)c(t,x^*) - \mathbf{D}(\mathbf{u})(x^*)\nabla c(t,x^*)) = 0 \text{ dans } (0,T) \times \Omega. \quad (4.1)$$

On note  $x^*$  la variable d'espace à l'échelle fine,  $l$  la longueur caractéristique de variation des paramètres  $\phi$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ . On note  $L_R$  la longueur caractéristique du domaine  $\Omega$ . On pose  $\varepsilon = \frac{l}{L_R}$  et note respectivement par  $\phi_R$ ,  $\mathbf{u}_R$ ,  $c_R$ ,  $T_R$  et  $\mathbf{D}(\mathbf{u})_R$  les grandeurs caractéristiques de la porosité, de la vitesse, de la concentration, du temps et de la diffusion. Les variables adimensionnées sont alors définies ainsi

$$x = \frac{x^*}{L_R}, \quad t = \frac{t^*}{T_R}, \quad \phi^\varepsilon(x) = \frac{\phi(x^*)}{\phi_R},$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}_R}(x^*), \quad \mathbf{D}(\mathbf{u})^\varepsilon(t,x) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{u})}{\mathbf{D}(\mathbf{u})_R}(t^*,x^*), \quad c_\varepsilon(t,x) = \frac{c(t^*,x^*)}{c_R}.$$

L'équation adimensionnée obtenue à partir de (4.1) s'écrit ainsi sous la forme

$$\partial_t(\phi^\varepsilon(x)c_\varepsilon(t,x)) + \operatorname{div} \left\{ \frac{\mathbf{u}_R(x)T_R}{L_R\phi_R} \mathbf{u}^\varepsilon(x)c_\varepsilon(t,x) - \frac{\mathbf{D}(\mathbf{u})_R(x)T_R}{L_R^2\phi_R} \mathbf{D}(\mathbf{u})^\varepsilon(x)\nabla c_\varepsilon(t,x) \right\} = 0 \text{ dans } (0,T^\varepsilon) \times \Omega_\varepsilon,$$

où  $\Omega^\varepsilon = \left\{ \frac{x^*}{L_R}; x^* \in \Omega \right\}$  et  $T^\varepsilon = \frac{T}{T_R}$ .

Pour ce problème on peut définir un nombre de Péclet à chaque échelle

1. à l'échelle fine, on note  $\mathbf{Pe}_{loc} = \frac{l\mathbf{u}_R}{\mathbf{D}(\mathbf{u})_R}$ ,
2. à l'échelle macroscopique, on définit  $\mathbf{Pe} = \frac{L_R\mathbf{u}_R}{\mathbf{D}(\mathbf{u})_R}$ .

On a alors  $\mathbf{Pe} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{Pe}_{loc}$ . On se place ici dans le cas où  $\mathbf{Pe}_{loc} = 1$  ce qui entraîne  $\mathbf{Pe} = \frac{1}{\varepsilon}$  et, en prenant également  $T_R = \frac{L_R^2\phi_R}{\mathbf{D}(\mathbf{u})_R}$ , l'équation (4.1) se réécrit

$$\partial_t(\phi^\varepsilon(x)c_\varepsilon(t,x)) + \operatorname{div} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x)c_\varepsilon(t,x) - \mathbf{D}(\mathbf{u})^\varepsilon(x)\nabla c_\varepsilon(t,x) \right\} = 0 \text{ dans } (0,T^\varepsilon) \times \Omega_\varepsilon. \quad (4.2)$$

**Remarque 4.1 :** Avec ce choix de  $T_R$ , on considère donc une échelle de temps correspondant au temps de diffusion et on suppose que la diffusion est du même ordre que la convection à l'échelle fine.

#### 4.1.2 Problème périodique

On considère le problème modèle adimensionné (4.2). Pour simplifier la présentation, on prend  $\Omega = \mathbb{R}^d$  (pour se passer des conditions aux limites) et on supposera que le tenseur de diffusion-dispersion  $\mathbf{D}$  ne dépend pas de la vitesse  $\mathbf{u}$ . Supposons dans un premier temps que la porosité, la vitesse et le tenseur de diffusion-dispersion sont périodiques en espace de période  $\varepsilon$  et ne dépendent pas du temps. Nous les notons

$$\phi^\varepsilon(x) = \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \mathbf{u}^\varepsilon(x) = \mathbf{u}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \mathbf{D}^\varepsilon(x) = \mathbf{D}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (4.3)$$

On rappelle que le domaine  $Y$  désigne le cube unité  $[0,1]^d$ . Pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ , on définit l'opérateur  $T_{\mathbf{z}}^\varepsilon$  (translation + homothétie) sur  $Y$  comme suit

$$T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) = \mathbf{z}\varepsilon + \varepsilon y, \quad \forall y \in Y. \quad (4.4)$$

Pour  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ , on définit le domaine  $Y_{\mathbf{z}}^\varepsilon$  comme suit

$$Y_{\mathbf{z}}^\varepsilon = T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(Y). \quad (4.5)$$

On peut remarquer que l'union des  $Y_{\mathbf{z}}^\varepsilon$  est un recouvrement de  $\mathbb{R}^d$ , ie

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} Y_{\mathbf{z}}^\varepsilon.$$

Nous considérons le problème de transport qui consiste à chercher une fonction  $c_\varepsilon$  dans l'espace

$$L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap C^0([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$$

solution de

$$\begin{cases} \phi^\varepsilon(x)\partial_t c_\varepsilon(t,x) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x)\nabla c_\varepsilon(t,x)) & = 0 \text{ dans } (0,T) \times \mathbb{R}^d \\ c_\varepsilon(0,x) & = c^0(x) \text{ dans } \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.6)$$

avec les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 4.1.** :

1. On suppose que le tenseur  $\mathbf{D}$  est symétrique, que ses composantes  $\mathbf{D}_{i,j}$  sont des fonctions  $Y$ -périodiques et sont dans  $C^2(\bar{Y})$  et qu'il existe deux réels positifs  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$  avec  $\lambda_{min} > 0$  tels que  $\forall x \in \Omega$

$$\lambda_{max} |\xi|^2 \geq \mathbf{D}(x)\xi \cdot \xi \geq \lambda_{min} |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^d$ ,

2. On suppose que la divergence de la vitesse  $\mathbf{u}$  est nulle :  $\text{div}_y(\mathbf{u}(y)) = 0, \forall y \in Y$ , que ses composantes  $\mathbf{u}_i$  sont des fonctions  $Y$ -périodiques et sont dans  $C^2(\bar{Y})$ ,
3. On suppose que  $\phi \in H^2(Y)$ , que  $\phi$  est  $Y$ -périodique et qu'il existe deux réels positifs  $\phi_{min}$  et  $\phi_{max}$  avec  $\phi_{min} > 0$  tels que  $\forall y \in Y, \quad \phi_{min} \leq \phi(y) \leq \phi_{max}$ ,
4. La condition initiale  $c^0 \in H^4(\mathbb{R}^d)$ .

Sous les hypothèses 4.1, il existe une unique solution au problème (4.6). De plus, en exploitant la régularité de la condition initiale  $c^0$ , on montre que  $c_\varepsilon \in L^\infty(0,T; H^2(\mathbb{R}^d))$  (preuve établie dans l'annexe C, proposition C.3).

**Remarque 4.1.** La condition initiale  $c_0$  a été choisie assez régulière. Ceci, comme le verra, est nécessaire pour pouvoir établir l'estimation (4.17).

## 4.2 Quelques résultats d'homogénéisation

Dans cette section, on rappelle un certain nombre de résultats démontrés dans [Oua13][chapitre7].

On définit tout d'abord le problème de cellule suivant : trouver  $w_i \in H^1(Y)$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(y) \cdot (\nabla_y w_i(y) + \mathbf{e}_i) - \text{div}_y(\mathbf{D}(y) (\nabla_y w_i(y) + \mathbf{e}_i)) = \phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i, \quad \forall y \in Y, \\ w_i(y) \text{ est } Y\text{-périodique,} \\ \int_Y w_i(y) dy = 0, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

où la vitesse homogénéisée  $\mathbf{u}^*$  est définie par :

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{\bar{\phi}} \int_Y \mathbf{u}(y) dy, \quad (4.8)$$

où  $\bar{\phi} = \int_Y \phi(y) dy$ .

L'existence et l'unicité d'une solution  $w_i \in W^{1,\infty}(Y)$  au problème (4.7) découle du lemme B.4 rappelé dans l'annexe B.

**Définition 4.1.** Soit le tenseur  $\mathbf{D}^*$  défini par :

$$\mathbf{D}_{i,j}^* = \int_Y \mathbf{D}(y) (\nabla_y w_i(y) + \mathbf{e}_i) \cdot (\nabla_y w_j(y) + \mathbf{e}_j) dy. \quad (4.9)$$

Ce tenseur vérifie la proposition suivante établie dans [Oua13][page 107] :

**Proposition 4.1.** Le tenseur  $\mathbf{D}^*$  est symétrique, défini positif et ses composantes se réécrivent sous la forme :

$$\mathbf{D}_{i,j}^* = \int_Y \left\{ (\phi(y) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i(y)) w_j(y) + \mathbf{D}(y) (\nabla_y w_j(y) + \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i \right\} dy. \quad (4.10)$$

**Proposition 4.2.** *Le tenseur  $\mathbf{D}^*$  vérifie l'inégalité suivante :*

$$(\mathbf{D}^* \xi) \cdot \xi \geq \lambda_{\min} |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (4.11)$$

*Démonstration.* L'inégalité suivante a été établie dans [Oua13][page 109]

$$\mathbf{D}^* \xi \cdot \xi \geq \lambda_{\min} \int_Y \left| \nabla_y w_\xi(y) + \xi \right|^2 dy,$$

avec  $w_\xi = \sum_{i=1}^d \xi_i w_i$ .

Partant de celle-ci, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* \xi \cdot \xi &\geq \lambda_{\min} \int_Y \left| \nabla_y w_\xi(y) + \xi \right|^2 dy = \lambda_{\min} \int_Y \left| \nabla_y w_\xi(y) \right|^2 dy + \lambda_{\min} \int_Y |\xi|^2 dy + 2\lambda_{\min} \int_Y \nabla_y w_\xi(y) \cdot \xi dy \\ &= \lambda_{\min} \int_Y \left| \nabla_y w_\xi(y) \right|^2 dy + \lambda_{\min} |Y| |\xi|^2 + 2\lambda_{\min} \int_Y \nabla_y w_\xi(y) \cdot \xi dy \\ &\geq \lambda_{\min} |Y| |\xi|^2 + 2\lambda_{\min} \int_Y \nabla_y w_\xi(y) \cdot \xi dy \\ &\geq \lambda_{\min} |Y| |\xi|^2 + 2\lambda_{\min} \int_Y \sum_{i=1}^d \xi_i \nabla_y w_i(y) \cdot \xi dy \\ &\geq \lambda_{\min} |Y| |\xi|^2 + 2\lambda_{\min} \sum_{i=1}^d \xi_i \sum_{k=1}^d \xi_k \int_Y \frac{\partial w_i}{\partial y_k}(y) dy \\ &\geq \lambda_{\min} |Y| |\xi|^2 + 2\lambda_{\min} \sum_{i=1}^d \xi_i \sum_{k=1}^d \xi_k \int_{\partial Y} w_i(y) \mathbf{n}_k dy \\ &\geq \lambda_{\min} |Y| |\xi|^2 + 2\lambda_{\min} \sum_{i=1}^d \xi_i \int_{\partial Y} w_i(y) (\mathbf{n} \cdot \xi) dy \\ &\geq \lambda_{\min} |\xi|^2, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que  $w_i$  est  $Y$ -périodique. □

### Problème homogénéisé

On définit le problème suivant : trouver une fonction  $c$  dans  $L^2(0, T; H^5(\mathbb{R}^d))$  solution

$$\begin{cases} \bar{\phi} \partial_t c(t, x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^* \nabla c(t, x)) &= 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ c(0, x) &= c^0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (4.12)$$

Sous les hypothèses 4.1, le problème (4.12) admet une unique solution (preuve établie dans l'annexe C proposition C.4).

**Définition 4.2.** *Soit la fonction  $c_1$  définie par*

$$c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, y \right) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) w_i(y). \quad (4.13)$$

### Ansatz

On cherche la solution  $c_\varepsilon$  du problème (4.6) sous la forme suivante

$$c_\varepsilon(t, x) = c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right). \quad (4.14)$$



Dans ce qui suit, on pose

$$\tilde{c}_\varepsilon(t, x) = c\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right).$$

Nous avons les estimations suivantes établies dans [Oua13] :

**Théorème 4.1.** *On suppose que les hypothèses 4.1 sont vérifiées. Soient  $(c_\varepsilon)$  la suite des solutions de l'équation (4.6),  $c$  la solution du problème homogénéisé (4.12),  $c_1$  la fonction définie par l'égalité (4.13) et les fonctions  $w_i$  solutions des problèmes (4.7). Nous avons alors les estimations suivantes :*

$$\sqrt{\int_0^T \left\| c_\varepsilon(t, \cdot) - c\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon c_1\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 dt} \leq C_1 \varepsilon \quad (4.15)$$

et

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| c_\varepsilon(t, \cdot) - c\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon c_1\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 \varepsilon, \quad (4.16)$$

où les constantes  $C_1, C_2 > 0$  sont indépendantes de  $\varepsilon$  mais dépendantes du temps final  $T$ .

### 4.3 Nouvelle estimation d'erreur

Nous avons établi dans cette thèse le théorème suivant qui raffine les résultats du théorème 4.1

**Théorème 4.2.** *On suppose que les hypothèses 4.1 sont vérifiées. Soient  $(c_\varepsilon)$  la suite des solutions de l'équation (4.6),  $c$  la solution du problème homogénéisé (4.12),  $c_1$  la fonction définie par l'égalité (4.13) et les fonctions  $w_i$  solutions des problèmes (4.7). Nous avons alors l'estimation suivante :*

$$\sqrt{\int_0^T \left\| c_\varepsilon(t, \cdot) - c\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon c_1\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt} \leq C_3 (1 + \varepsilon) \quad (4.17)$$

où la constante  $C_3 > 0$  est indépendante de  $\varepsilon$  mais dépend du temps final  $T$ .

*Démonstration.* Nous allons procéder comme dans [Oua13]. On pose

$$r_\varepsilon(t, x) = c_\varepsilon(t, x) - c\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon c_1\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (4.18)$$

et

$$c_\varepsilon^{ap}(t, x) = c\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon c_1\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) = c\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial c}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right). \quad (4.19)$$

Evaluons  $\partial_t c_\varepsilon^{ap}(t, x)$ . On a

$$\begin{aligned} \partial_t c_\varepsilon^{ap}(t, x) &= \partial_t c\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \nabla c\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x_i}\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.12), on a

$$\begin{aligned} \partial_t c_\varepsilon^{ap}(t, x) &= \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \frac{1}{\phi} \mathbf{D}_{k,i}^* \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i}\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \nabla c\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x_i}\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Evaluons  $\nabla c_\varepsilon^{ap}(t,x)$ . On a

$$\begin{aligned}
 \nabla c_\varepsilon^{ap}(t,x) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \mathbf{e}_i \\
 &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^d \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^d \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right). \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Evaluons  $\operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon^{ap}(t,x))$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon^{ap}(t,x)) &= \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \sum_{i=1}^d \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \\
 &\quad + \varepsilon \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right). \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

En utilisant les équations (4.6), (4.12) et l'égalité (4.13), on voit que  $r_\varepsilon$  vérifie formellement

$$\begin{cases} \phi^\varepsilon(x) \partial_t r_\varepsilon(t,x) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) = -f^\varepsilon(t,x), \\ r_\varepsilon(0) = \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c^0}{\partial x_i}(x) \end{cases} \quad (4.23)$$

avec

$$f^\varepsilon(t,x) = \phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon^{ap}(t,x) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon^{ap}(t,x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon^{ap}(t,x)).$$

Le terme  $f^\varepsilon$  peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 f^\varepsilon(t,x) &= \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{k,i}^* \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \phi^\varepsilon(x) \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \\
 &+ \varepsilon \sum_{i=1}^d \phi^\varepsilon(x) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^d \phi^\varepsilon(x) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \\
 &+ \sum_{i=1}^d \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \\
 &- \sum_{i=1}^d \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \\
 &- \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right)_k \frac{\partial^2 \tilde{c}_\varepsilon}{\partial x_k \partial x_i} (t,x) - \varepsilon \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \\
 &= \varepsilon \sum_{i=1}^d \phi^\varepsilon(x) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \\
 &+ \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{k,i}^* - \left( (\phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_k^* - \mathbf{u}_k^\varepsilon(x)) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) + \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_k \right) \right) \frac{\partial^2 \tilde{c}_\varepsilon}{\partial x_k \partial x_i} (t,x) \\
 &+ \sum_{i=1}^d \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \phi^\varepsilon(x) \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i \right) \frac{\partial \tilde{c}_\varepsilon}{\partial x_i} (t,x) \\
 &- \varepsilon \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right).
 \end{aligned}$$

On rappelle que  $H^1(\mathbb{R}^d) = H_0^1(\mathbb{R}^d)$ . Donc  $(H^1(\mathbb{R}^d))' = H^{-1}(\mathbb{R}^d)$  et

$$\forall v \in H^{-1}(\mathbb{R}^d), \quad \|v\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \left| \langle v, \varphi \rangle \right|,$$

d'où

$$\left| \langle v, \varphi \rangle \right| \leq \|v\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (4.24)$$

On commence par établir une estimation pour  $\|r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))}$ . En multipliant l'équation (4.23) par  $r_\varepsilon$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) \partial_t r_\varepsilon(t,x) r_\varepsilon(t,x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x) r_\varepsilon(t,x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x) dx \\
 = - \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(t,x) r_\varepsilon(t,x) dx. \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

**Remarque 4.2.** Ici, il faut remarquer que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $H^k(\mathbb{R}^d)$ ,  $\forall k \geq 0$ . Ceci permet d'appliquer la formule de Green sans avoir le terme de bord.

**Remarque 4.3.** Ici, on s'intéresse à la justification des intégrales dans l'équation (4.25). On sait que  $c_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))$ . Donc, d'après l'équation (4.6), on a  $\phi^\varepsilon \partial_t c_\varepsilon \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$  car  $\mathbf{D}^\varepsilon$  et  $\mathbf{u}^\varepsilon$  sont assez régulières. Alors les propriétés de  $\phi^\varepsilon$  entraînent que

$$\partial_t c_\varepsilon \in L^\infty(0,T,L^2(\mathbb{R}^d)) \quad (4.26)$$

donc  $c_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$ .

Maintenant on étudie  $c_\varepsilon^{ap}$  sachant que  $c \in L^2(0, T; H^5(\mathbb{R}^d))$ . Comme  $w_i \in W^{1, \infty}(Y)$ , ceci entraîne que  $c_1 \in L^2(0, T; H^4(\mathbb{R}^d))$ . Donc  $c_\varepsilon^{ap} \in L^2(0, T; H^4(\mathbb{R}^d))$ .

Considérons le terme  $\partial_t c_\varepsilon^{ap}$  (voir (4.20)). Le troisième terme de (4.20) est le terme qui détermine la régularité de  $\partial_t c_\varepsilon^{ap}$ . Comme  $c \in L^2(0, T; H^5(\mathbb{R}^d))$  et  $\bar{\phi} \partial_t c = \operatorname{div}(\mathbf{D}^* \nabla c)$ ,  $w_i \in W^{1, \infty}(Y)$ , alors on a

$$\partial_t c_\varepsilon^{ap} \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^d)). \quad (4.27)$$

Enfin, on considère  $\operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon^{ap})$  (voir (4.22)). On peut voir que son 2<sup>ème</sup> terme est celui qui détermine sa régularité. Comme  $c \in L^2(0, T; H^5(\mathbb{R}^d))$ , la dérivée d'ordre 3 de  $c$  est dans  $L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^d))$ , donc, la régularité de  $\mathbf{D}^\varepsilon$  entraîne  $\operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon^{ap}) \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^d))$ .

Par conséquent, (4.26), (4.27) et la régularité de  $\phi^\varepsilon$  entraînent que  $\phi^\varepsilon \partial_t r_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))$ . On montre également que  $\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla r_\varepsilon$  et  $\operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon r_\varepsilon)$  appartient à  $L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))$ . On en déduit que  $f^\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))$ . Les intégrales dans l'équation (4.25) sont alors justifiées.

En utilisant le fait que  $\phi^\varepsilon$  ne dépend pas de la variable  $t$  et le fait que  $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ , on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) (r_\varepsilon(t, x))^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) dx \leq \|f^\varepsilon(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \|r_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

En utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{\delta}{2} a^2 + \frac{1}{2\delta} b^2$ , on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} r_\varepsilon(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \lambda_{\min} \|\nabla r_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{2\delta} \|f^\varepsilon(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{\delta}{2} \|r_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2.$$

En prenant  $\delta = \lambda_{\min}$  et en intégrant sur  $[0, t]$  avec  $t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} r_\varepsilon(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{\lambda_{\min}}{2} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0, t; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 &\leq \frac{1}{2\lambda_{\min}} \int_0^t \|f^\varepsilon(\tau)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} r_\varepsilon^2(0) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda_{\min}}{2} \int_0^t \|r_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Ceci donne encore

$$\begin{aligned} \|r_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{\lambda_{\min}}{\phi_{\min}} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0, t; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 &\leq \frac{1}{\phi_{\min} \lambda_{\min}} \int_0^t \|f^\varepsilon(\tau)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau + \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda_{\min}}{\phi_{\min}} \int_0^t \|r_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ceci entraîne alors

$$\|r_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{\phi_{\min} \lambda_{\min}} \int_0^t \|f^\varepsilon(\tau)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau + \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{\lambda_{\min}}{\phi_{\min}} \int_0^t \|r_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau.$$

En appliquant le lemme A.1, avec

$$\alpha(t) = \frac{1}{\phi_{\min} \lambda_{\min}} \int_0^t \|f^\varepsilon(\tau)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau + \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

et

$$\beta = \frac{\lambda_{\min}}{\phi_{\min}},$$

on déduit l'inégalité suivante

$$\sup_{t \in [0, T]} \|r_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq e^{\frac{\lambda_{\min} T}{\phi_{\min}}} \left( \frac{1}{\phi_{\min} \lambda_{\min}} \int_0^T \|f^\varepsilon(\tau)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau + \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right). \quad (4.29)$$

Toujours en reprenant l'inégalité (4.28), on a

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0,t;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}^2} \int_0^T \|f^\varepsilon(\tau)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau + \frac{\phi_{\max}}{\lambda_{\min}} \|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_0^t \|r_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau.$$

De l'inégalité (4.29), on déduit que

$$\int_0^t \|r_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau \leq T e^{\frac{\lambda_{\min} T}{\phi_{\min}}} \left( \frac{1}{\phi_{\min} \lambda_{\min}} \int_0^T \|f^\varepsilon(\tau)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau + \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right).$$

On en déduit alors que

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \leq \max \left( T e^{\frac{\lambda_{\min} T}{\phi_{\min}}}, \frac{\phi_{\min}}{\lambda_{\min}} \right) \left( \frac{1}{\phi_{\min} \lambda_{\min}} \int_0^T \|f^\varepsilon(\tau)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau + \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right). \quad (4.30)$$

Il nous reste alors à estimer  $\|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$  et  $\|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))}^2$ . On commence avec le terme  $\|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$ . On a

$$\|r_\varepsilon^2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \varepsilon^2 \max_{i \in \{1, \dots, d\}} \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 \|c^0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (4.31)$$

Considérons maintenant le terme  $\|f^\varepsilon(t,x)\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}$ . On rappelle que

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(t,x) &= \phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon^{ap}(t,x) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon^{ap}(t,x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon^{ap}(t,x)) \\ &= B_1^\varepsilon(t,x) + B_2^\varepsilon(t,x) + B_3^\varepsilon(t,x) + B_4^\varepsilon(t,x) \end{aligned}$$

avec

$$B_1^\varepsilon(t,x) = \varepsilon \sum_{i=1}^d \phi^\varepsilon(x) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right),$$

$$B_2^\varepsilon(t,x) = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\phi} \mathbf{D}_{k,i}^* - \left( (\phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_k^* - \mathbf{u}_k^\varepsilon(x)) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) + \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_k \right) \right) \frac{\partial^2 \tilde{c}_\varepsilon}{\partial x_k \partial x_i} (t,x),$$

$$B_3^\varepsilon(t,x) = \sum_{i=1}^d \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \phi^\varepsilon(x) \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i \right) \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x_i} (t,x),$$

$$B_4^\varepsilon(t,x) = -\varepsilon \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right).$$

Considérons le terme  $B_1^\varepsilon$ . On a

$$\begin{aligned} \|B_1^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} &= \left\| \varepsilon \sum_{i=1}^d \phi^\varepsilon(x) w_i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x_i} \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq \varepsilon \|\phi\|_{L^\infty(Y)} \|w_i\|_{L^\infty(Y)} \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x_i} \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq \varepsilon \frac{\|\phi\|_{L^\infty(Y)}}{\phi} \|w_i\|_{L^\infty(Y)} \|\mathbf{D}^*\|_{L^\infty(Y)} |c|_{L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^d))} \end{aligned} \quad (4.32)$$

où l'on a utilisé le fait que  $\frac{\partial c}{\partial t} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) = -\frac{1}{\phi} \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^* \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)$ . Considérons le terme  $B_2^\varepsilon$ . On a

$$\begin{aligned} \|B_2^\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d C_{k,i} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(t, x) dx \right| \\ &= \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \left| \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_{Y_{\mathbf{z}}^\varepsilon} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d C_{k,i} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(t, x) dx \right| \\ &= \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \left| \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d C_{k,i}(y) \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \varepsilon^d dy \right| \end{aligned}$$

avec

$$C_{k,i}(y) = \left( \frac{\phi(y)}{\phi} \mathbf{D}_{k,i}^* - ((\phi(y)\mathbf{u}_k^* - \mathbf{u}_k(y)) w_i(y) + (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y))) \cdot \mathbf{e}_k) \right).$$

En utilisant la définition de  $\mathbf{D}_{k,i}^*$  (voir (4.10)), on a  $\int_Y C_{k,i}(y) dy = 0$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_Y C_{k,i}(y) dy &= \int_Y \left( \frac{\phi(y)}{\phi} \mathbf{D}_{k,i}^* - ((\phi(y)\mathbf{u}_k^* - \mathbf{u}_k(y)) w_i(y) + (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y))) \cdot \mathbf{e}_k) \right) dy \\ &= \mathbf{D}_{k,i}^* - \int_Y ((\phi(y)\mathbf{u}_k^* - \mathbf{u}_k(y)) w_i(y) + (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y))) \cdot \mathbf{e}_k) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le lemme A.3, il existe une fonction  $\xi_{k,i} \in H(\operatorname{div}, Y) \cap L^\infty(Y)^d$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \xi_{k,i}(y) = C_{k,i}(y), & \text{dans } Y \\ \xi_{k,i} \cdot \mathbf{n}_Y = 0, & \text{sur } \partial Y. \end{cases}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \|B_2^\varepsilon(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \left| \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \operatorname{div}_y \xi_{k,i}(y) \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \varepsilon^d dy \right| \\ &= \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \left| \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \xi_{k,i}(y) \cdot \nabla_y \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \right) \varepsilon^d dy \right| \\ &\leq \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \|\xi_{k,i}\|_{L^\infty(Y)} \int_Y \left| \nabla_y \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \right) \right| \varepsilon^d dy \\ &\leq \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \|\xi_{k,i}\|_{L^\infty(Y)} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \nabla_y \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(t, x) \right) \right| dx \\ &\leq \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \varepsilon \|\xi_{k,i}\|_{L^\infty(Y)} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \nabla \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(t, x) \right) \right| dx \\ &\leq \varepsilon \max_{k,i} \|\xi_{k,i}\|_{L^\infty(Y)} \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R})}=1} \left( |c|_{H^3(\mathbb{R}^d)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + |c|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) \\ &\leq \varepsilon \max_{k,i} \|\xi_{k,i}\|_{L^\infty(Y)} \left( |c|_{H^3(\mathbb{R}^d)} + |c|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|B_2^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))} \leq \varepsilon \max_{k,i} \|\xi_{k,i}\|_{L^\infty(Y)} \left( |c|_{L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^d))} + |c|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} \right).$$

Considérons le terme  $B_3^\varepsilon(t, x)$ . On a

$$\begin{aligned}
 & \|B_3^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^d \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(\cdot) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(\cdot) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \phi^\varepsilon(\cdot) \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 &\leq d \sum_{i=1}^d \left\| \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(\cdot) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(\cdot) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \phi^\varepsilon(\cdot) \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 &\leq d \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left( \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \phi^\varepsilon(x) \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i \right) \frac{\partial \tilde{c}_\varepsilon}{\partial x_i} (t, x) \right)^2 dx \\
 &\leq d \sum_{i=1}^d \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_{Y_{\mathbf{z}^\varepsilon}} \left( \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_i + \varepsilon \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \phi^\varepsilon(x) \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i \right) \frac{\partial \tilde{c}_\varepsilon}{\partial x_i} (t, x) \right)^2 dx \\
 &\leq d \sum_{i=1}^d \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \left( \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}(y) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y) \right) - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y))) - \phi(y) \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 \varepsilon^d dy \\
 &\leq \frac{d}{\varepsilon} \sum_{i=1}^d \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \left( \left( \mathbf{u}(y) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y) \right) - \operatorname{div}_y (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y))) - \phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 \varepsilon^d dy \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

car en utilisant le problème de cellule (4.7), on a

$$\mathbf{u}(y) \cdot \left( \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y) \right) - \operatorname{div}_y (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y))) - \phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i = 0, \quad \forall y \in Y.$$

On en déduit que

$$\|B_3^\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))} = 0. \quad (4.33)$$

Considérons le terme  $B_4^\varepsilon$ . On a

$$\begin{aligned}
 \|B_4^\varepsilon(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \varphi(x) dx \right| \\
 &= \varepsilon \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^d \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \\
 &\leq \varepsilon \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)} \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)} |c|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \sup_{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=1} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
 &\leq \varepsilon \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)} \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)} |c|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|B_4^\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^d))} \leq \varepsilon \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)} \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)} |c|_{L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^d))}.$$

En utilisant le fait que pour tout  $v \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ , on a  $\|v\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leq \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ . Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
 \|f^\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^d))} &\leq \|B_1^\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))} + \|B_2^\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^d))} + \|B_3^\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))} \\
 &\quad + \|B_4^\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^d))} \\
 &\leq C\varepsilon
 \end{aligned} \quad (4.34)$$

avec  $C$  indépendante de  $\varepsilon$ .

Finalement, en remplaçant les estimations (4.31) et (4.34) dans les inégalités (4.29) et (4.30), on obtient les inégalités suivantes

$$\sup_{t \in [0, T]} \|r_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \varepsilon, \quad (4.35)$$

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_2 \varepsilon, \quad (4.36)$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  deux constantes indépendantes de  $\varepsilon$ . On retrouve ainsi les inégalités (4.15) et (4.16) démontrées dans [Oua13].

On souhaite maintenant établir une majoration de  $|r_\varepsilon|_{H^2(\mathbb{R}^d)}$ . L'ingrédient essentiel de la démonstration est la méthode de la "translation" (voir [All05][page 133]).

On multiplie l'équation (4.23) par  $D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x))$  (voir (C.3) pour la définition de l'opérateur  $D_k^h$ ) ce qui donne

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) \partial_t r_\varepsilon(t, x) D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x)) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x)) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla (D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x))) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(t, x) D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x)) dx. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla (D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x))) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \left( -f^\varepsilon(t, x) - \phi^\varepsilon(x) \partial_t r_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) \right) D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (C.4), nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} D_k^h (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla D_k^h (r_\varepsilon(t, x)) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \left( -f^\varepsilon(t, x) - \phi^\varepsilon(x) \partial_t r_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) \right) D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (C.5)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} D_k^h (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla D_k^h (r_\varepsilon(t, x)) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^{\varepsilon, h, k}(x) \nabla D_k^h (r_\varepsilon(t, x))) \cdot \nabla D_k^h (r_\varepsilon(t, x)) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \left( -f^\varepsilon(t, x) - \phi^\varepsilon(x) \partial_t r_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) \right) D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x)) dx. \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{D}^{\varepsilon, h, k}(x)_{i,j} = \mathbf{D}_{i,j}^\varepsilon(x + h\mathbf{e}_k)$ .

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \|\nabla D_k^h (r_\varepsilon)(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 & \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} D_k^h (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla D_k^h (r_\varepsilon(t, x)) dx \right| \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left( -f^\varepsilon(t, x) - \phi^\varepsilon(x) \partial_t r_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) \right) D_k^{-h} (D_k^h r_\varepsilon(t, x)) dx \right| \\ & \leq \sup_{i,j} \|D_k^h (\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|D_k^h (r_\varepsilon(t, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ & + \left\| f^\varepsilon(t, \cdot) + \phi^\varepsilon \partial_t r_\varepsilon(t, \cdot) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla r_\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|D_k^{-h} D_k^h r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (C.6)  $\left( \|D_k^{-h} D_k^h r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla D_k^h r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right)$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla D_k^h (r_\varepsilon)(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} & \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \|D_k^h (\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ & + \frac{1}{\lambda_{\min}} \left( \|f^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\phi^\varepsilon \partial_t r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right). \end{aligned}$$



Considérons le terme  $\left\| D_h^k(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ . En utilisant à nouveau l'inégalité (C.6), on a

$$\left\| D_h^k(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}^\varepsilon}{\partial x_k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}}{\partial y_k} \right\|_{L^\infty(Y)} < +\infty, \quad (4.37)$$

car  $\mathbf{D}_{i,j} \in C^2(\bar{Y})$ . En utilisant la propriété (C.7), on a

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_k}(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \frac{1}{\varepsilon} \sup_{i,j} \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}}{\partial y_k} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{\min}} \left( \|f^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\phi^\varepsilon(\cdot) \partial_t r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right). \end{aligned}$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} |r_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \frac{1}{\varepsilon} \sup_{i,j} \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}}{\partial y_k} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{\min}} \left( \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \|\phi^\varepsilon \partial_t r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (4.36), on a :

$$|r_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{C_2}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}}{\partial y_k} \right\|_{L^\infty(Y)} + \frac{1}{\lambda_{\min}} \left( \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + C_2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(Y)} + \|\phi^\varepsilon \partial_t r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \right). \quad (4.38)$$

Il nous reste alors à majorer les termes  $\|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}$  et  $\|\phi^\varepsilon \partial_t r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}$ . Pour estimer  $\|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}$ , il nous reste à majorer  $\|B_2^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2$  et  $\|B_4^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2$ .

Considérons le terme  $B_2^\varepsilon$ . On a

$$\begin{aligned} \|B_2^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d C_{k,i} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 dx \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_{Y_{\mathbf{z}}^\varepsilon} \left( \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d C_{k,i} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 dx \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \left( \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d C_{k,i}(y) \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 \varepsilon^d dy \\ &\leq \max_{k,i} \|C_{k,i}\|_{L^\infty(Y)}^2 d^2 \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 \varepsilon^d dy \\ &\leq \max_{k,i} \|C_{k,i}\|_{L^\infty(Y)}^2 d^2 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 dx \\ &\leq d^2 \max_{k,i} \|C_{k,i}\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{H^2(\mathbb{R}^d)}^2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \|C_{k,i}\|_{L^\infty(Y)} &= \left\| \frac{\phi(y)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{k,i}^* - ((\phi(y) \mathbf{u}_k^* - \mathbf{u}_k(y)) w_i(y) + (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i(y))) \cdot \mathbf{e}_k) \right\|_{L^\infty(Y)} \\ &\leq \frac{\|\phi\|_{L^\infty(Y)}}{\bar{\phi}} |\mathbf{D}_{k,i}^*| + \|\phi\|_{L^\infty(Y)} |\mathbf{u}_k^*| + \|\mathbf{u}_k\|_{L^\infty(Y)} \|w_i\|_{L^\infty(Y)} \\ &\quad + \|D_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} + \|D_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla w_i\|_{L^\infty(Y)}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|B_2^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \leq d^2 \max_{k,i} \|C_{k,i}\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))}^2. \quad (4.39)$$

Considérons le terme  $B_4^\varepsilon$ . On a

$$\begin{aligned} & \|B_4^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^2 \left( \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \right)^2 dx \\ &= \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left( \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \sum_{m=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \mathbf{e}_m \right) \right)^2 dx \\ &= \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left( \sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \sum_{m=1}^d (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{e}_k \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \right)^2 dx \\ &= \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left( \sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \sum_{m=1}^d \mathbf{D}_{k,m}^\varepsilon(x) \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \right)^2 dx \\ &\leq 2\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left( \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mathbf{D}_{k,m}^\varepsilon(x) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 dx \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left( \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^d \left( \mathbf{D}_{k,m}^\varepsilon(x) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial^3 c}{\partial x_k \partial x_m \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 dx \\ &\leq 2\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left( \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mathbf{D}_{k,m}^\varepsilon(x) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 dx \\ &\quad + 2d^3 \varepsilon^2 \max_{k,m} \|\mathbf{D}_{k,m}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{H^3(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq 2\varepsilon^2 \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \left( \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^d \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \mathbf{D}_{k,m}(y) w_i(y) \right) \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 \varepsilon^d dy \\ &\quad + 2d^3 \varepsilon^2 \max_{k,m} \|\mathbf{D}_{k,m}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{H^3(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq 2d^3 \|\nabla \mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^d \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 \varepsilon^d dy \\ &\quad + 2d^3 \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|\nabla w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^d \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 \varepsilon^d dy \\ &\quad + 2d^3 \varepsilon^2 \max_{k,m} \|\mathbf{D}_{k,m}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{H^3(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq 2d^3 \|\nabla \mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^d \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 dx \\ &\quad + 2d^3 \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|\nabla w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^d \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_m \partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)^2 dx \\ &\quad + 2d^2 \varepsilon^2 \max_{k,m} \|\mathbf{D}_{k,m}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{H^3(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \|B_4^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq 2d^4 \|\nabla \mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{H^2(\mathbb{R}^d)}^2 + 2d^4 \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|\nabla w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{H^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \quad + 2d^3 \varepsilon^2 \max_{k,m} \|\mathbf{D}_{k,m}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{H^3(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & \|B_4^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ & \leq 2d^4 \|\nabla \mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))}^2 + 2d^4 \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|\nabla w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ & \quad + 2d^3 \varepsilon^2 \max_{k,m} \|\mathbf{D}_{k,m}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^d))}^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

En utilisant les inégalité (4.32), (4.39), (4.33) et (4.40), on en déduit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 & \leq \varepsilon^2 \frac{\|\phi\|_{L^\infty(Y)}^2}{\bar{\phi}^2} \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 \|\mathbf{D}^*\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^d))}^2 + d^2 \max_{k,i} \|C_{k,i}\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ & \quad + 2d^4 \|\nabla \mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ & \quad + 2d^4 \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|\nabla w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ & \quad + 2d^3 \varepsilon^2 \max_{k,m} \|\mathbf{D}_{k,m}\|_{L^\infty(Y)}^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c|_{L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^d))}^2 \\ & \leq C_3 (1 + \varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Il nous reste à majorer le terme  $\|\phi^\varepsilon \partial_t r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}$ . On teste l'équation (4.23) avec  $\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x)$  (ce qui est légitime car  $\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ ) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) \left( \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) \right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x) \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx \\ & \quad = - \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(t,x) \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx \end{aligned}$$

En utilisant successivement les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Young, nous avons :

$$\begin{aligned} & (\phi_{min} - \delta) \left\| \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx \\ & \quad \leq \frac{1}{2\delta} \left( \|f^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \|\nabla r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right). \end{aligned}$$

En prenant  $\delta = \frac{\phi_{min}}{2}$ , on a :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{2}{\phi_{min}} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx \\ & \quad \leq \frac{2}{\phi_{min}^2} \left( \|f^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \|\nabla r_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right). \end{aligned}$$

Considérons le terme  $\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx$ . En utilisant le fait que le gradient et la dérivée commutent, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \frac{\partial \nabla r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx.$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que  $\mathbf{D}^\varepsilon$  est indépendant de  $t$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial t} (\nabla r_\varepsilon(t,x)) \right) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla r_\varepsilon(t,x)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{D}^\varepsilon$  est symétrique, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla r_\varepsilon(t,x)) dx \\ = 2 \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla r_\varepsilon(t,x)) dx. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla r_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x) dx.$$

On obtient alors

$$\left\| \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{\phi_{min}} \frac{d}{dt} \|\mathbf{D}^\varepsilon \nabla r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{2}{\phi_{min}^2} \left( \|f^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \|\nabla r_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right).$$

En intégrant sur  $[0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{\phi_{min}} \|\mathbf{D}^\varepsilon \nabla r_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{2}{\phi_{min}^2} \left( \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \right) \\ + \frac{1}{\phi_{min}} \|\mathbf{D}^\varepsilon \nabla r_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{\lambda_{min}}{\phi_{min}} \|\nabla r_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{2}{\phi_{min}^2} \left( \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \right) \\ + \frac{\lambda_{max}}{\phi_{min}} \|\nabla r_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (4.36) et (4.41), on a :

$$\left\| \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{\lambda_{min}}{\phi_{min}} \|\nabla r_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{2}{\phi_{min}^2} \left( C_3(1 + \varepsilon^2) + C_2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(Y)}^2 \right) + \frac{\lambda_{max}}{\phi_{min}} \|\nabla r_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Considérons le terme  $\|\nabla r_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$ . On a d'après (4.18) :

$$\begin{aligned} \nabla r_\varepsilon(0) &= -\varepsilon \sum_{i=1}^d \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial c^0}{\partial x_i}(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c^0}{\partial x_i}(x) \\ &= -\sum_{i=1}^d \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c^0}{\partial x_i}(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial c^0}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|\nabla r_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2d \max_i \|\nabla_y w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 + 2d\varepsilon^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 &\leq \frac{2}{\phi_{min}^2} \left( C_3(1 + \varepsilon^2) + C_2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(Y)}^2 \right) \\
 &\quad + \frac{\lambda_{max}}{\phi_{min}} \left( 2d \max_i \|\nabla_y w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 + 2d\varepsilon^2 \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right) \\
 &\leq \frac{\varepsilon^2 2C_3}{\phi_{min}^2} + \frac{2d\varepsilon^2 \lambda_{max}}{\phi_{min}} \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 &\quad + \frac{2C_3}{\phi_{min}^2} + \frac{2C_2}{\phi_{min}^2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(Y)}^2 + \frac{2d\lambda_{max}}{\phi_{min}} \max_i \|\nabla_y w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2.
 \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq \varepsilon \sqrt{\frac{2C_3}{\phi_{min}^2} + \frac{2d\lambda_{max}}{\phi_{min}} \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^2(\mathbb{R}^d)}^2} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{2C_3}{\phi_{min}^2} + \frac{2C_2}{\phi_{min}^2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(Y)}^2 + \frac{2d\lambda_{max}}{\phi_{min}} \max_i \|\nabla_y w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2}. \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Revenons à l'estimation de  $|r_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))}$ . On a, d'après (4.38)

$$\begin{aligned}
 |r_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} &\leq \frac{C_2}{\lambda_{min}} \sup_{i,j} \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}}{\partial y_k} \right\|_{L^\infty(Y)} \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda_{min}} \left( \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + C_2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(Y)} + \|\phi^\varepsilon(x) \partial_t r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \right).
 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (4.41) et (4.42), on a

$$\begin{aligned}
 |r_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} &\leq \frac{C_2}{\lambda_{min}} \sup_{i,j} \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}}{\partial y_k} \right\|_{L^\infty(Y)} + \frac{1}{\lambda_{min}} \left( \sqrt{C_3(1 + \varepsilon^2)} + C_2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(Y)} \right) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon \phi_{max}}{\lambda_{min}} \sqrt{\frac{2C_3}{\phi_{min}^2} + \frac{2d\lambda_{max}}{\phi_{min}} \max_i \|w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^2(\mathbb{R}^d)}^2} \\
 &\quad + \frac{\phi_{max}}{\lambda_{min}} \sqrt{\frac{2C_3}{\phi_{min}^2} + \frac{2C_2}{\phi_{min}^2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(Y)}^2 + \frac{2d\lambda_{min}}{\phi_{min}} \max_i \|\nabla_y w_i\|_{L^\infty(Y)}^2 |c^0|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2} \\
 &\leq C_{sec} (1 + \varepsilon).
 \end{aligned}$$

□



# Chapitre 5

## Méthode multi-échelle pour un problème de transport et estimation d'erreur à priori

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>La méthode multi-échelle</b>	<b>85</b>
5.1.1	Hypothèses de départ	85
5.1.2	Idée de la méthode	87
5.1.3	Définition du maillage grossier	88
5.1.4	Approximation des problèmes de cellule	89
5.1.5	Schéma de discrétisation à l'échelle grossière	90
<b>5.2</b>	<b>Estimation d'erreur à priori pour la méthode multi-échelle</b>	<b>91</b>
<b>5.3</b>	<b>Estimation d'erreur</b>	<b>92</b>
<b>5.4</b>	<b>Majoration des termes <math>T_1, T_2</math> et <math>T_3</math></b>	<b>99</b>
<b>5.5</b>	<b>Majoration des termes <math>T_4</math> et <math>T_5</math></b>	<b>108</b>
<b>5.6</b>	<b>Majoration des termes <math>T_6, T_7, T_8, T_9</math> et <math>T_{10}</math></b>	<b>123</b>
<b>5.7</b>	<b>Démonstration du théorème 5.2</b>	<b>131</b>

---

L'objectif de ce chapitre est de proposer et d'étudier une discrétisation de type Galerkin Discontinue (voir chapitre 2) pour la méthode multi-échelle proposée par F. Ouaki ([Oua13]). Nous montrons en particulier une estimation d'erreur. Nous rappelons tout d'abord le principe de cette méthode.

## 5.1 La méthode multi-échelle

### 5.1.1 Hypothèses de départ

Nous rappelons dans ce paragraphe comment les résultats mentionnés dans la section 4.2 ont été utilisés dans [Oua13] pour construire une nouvelle méthode multi-échelle pour résoudre le problème (4.6). Les résultats théoriques précédents ont été montrés en considérant l'espace  $\mathbb{R}^d$ . Comme, à des fins de simulation numérique, nous ne pouvons travailler avec cet espace dans sa totalité, nous considérons seulement un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aux bords duquel nous imposons des conditions de périodicité. Les résultats d'homogénéisation qu'on obtiendrait avec des conditions aux bords de type Dirichlet seraient différents (voir [APP12]). Cela est principalement dû au terme de grande dérive  $\frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon}$  qui pose un problème<sup>1</sup> sur le bord du domaine. Les hypothèses de périodicité sur

---

1. La difficulté est due au fait que lorsqu'on approche la solution du problème (4.6) sous la forme  $c_\varepsilon(t, x) = c(x) + \varepsilon c_1\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ , nous n'avons aucune garantie que l'argument  $x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}$  reste le domaine  $\Omega$ . Donc grâce aux conditions de

les conditions aux limites sont donc nécessaires pour l'étude théorique de la méthode mais, en pratique, cette méthode sera aussi appliquée avec des conditions aux bords plus classiques.

Pour ce qui suit, on supposera que  $\Omega$  est rectangulaire et en forme de boîte, ie  $\Omega = \sum_{i=1}^{N_\Omega} Y_{\mathbf{z}^\varepsilon}$  (voir 4.5 pour la définition de  $Y_{\mathbf{z}^\varepsilon}$ ). On définit  $W_{\#}^{m,p}(\Omega)$  comme l'espace des fonctions appartenant à l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  et  $\Omega$ -périodique. On désigne par  $\dot{W}^{m,p}(\Omega)$  l'espace des fonctions appartenant à l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  à moyenne nulle sur  $\Omega$ .

On cherche

$$c_\varepsilon \in C^0([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_{\#}^1(\Omega))$$

solution du problème

$$\begin{cases} \phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t, x) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x)) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ c_\varepsilon(0, x) = c^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

Comme précédemment, nous notons  $\phi^\varepsilon(x) = \phi(\frac{x}{\varepsilon})$ ,  $\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \mathbf{u}(\frac{x}{\varepsilon})$ ,  $\mathbf{D}^\varepsilon(x) = \mathbf{D}(\frac{x}{\varepsilon})$  et supposons les hypothèses qui suivent vérifiées.

**Hypothèses 5.1.** :

1. On suppose que le tenseur  $\mathbf{D}$  est symétrique, que ses composantes  $\mathbf{D}_{i,j}$  sont des fonctions  $Y$ -périodiques et sont dans  $C^2(\bar{Y})$  et qu'il existe deux réels positifs  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  avec  $\lambda_{\min} > 0$  tels que  $\forall x \in \Omega$

$$\lambda_{\max} |\xi|^2 \geq \mathbf{D}(x) \xi \cdot \xi \geq \lambda_{\min} |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^d$ ,

2. On suppose que la divergence de la vitesse  $\mathbf{u}$  est nulle :  $\operatorname{div}_y(\mathbf{u}(y)) = 0, \forall y \in Y$  et que ses composantes  $\mathbf{u}_i$  sont des fonctions  $Y$ -périodiques et sont dans  $C^2(\bar{Y})$ ,
3. On suppose que  $\phi \in H^2(Y)$ , que  $\phi$  est  $Y$ -périodique et qu'il existe deux réels positifs  $\phi_{\min}$  et  $\phi_{\max}$  avec  $\phi_{\min} > 0$  tels que  $\forall y \in Y, \phi_{\min} \leq \phi(y) \leq \phi_{\max}$ ,
4. La condition initiale  $c^0 \in H_{\#}^1(\Omega)$ .

**Définition 5.1.** On définit le problème suivant : trouver une fonction  $c$  dans  $L^2(0, T; H_{\#}^5(\Omega))$  solution

$$\begin{cases} \bar{\phi} \partial_t c(t, x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^* \nabla c(t, x)) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ c(0, x) = c^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{D}^*$  et  $\bar{\phi}$  sont définies dans le chapitre 4.

**Définition 5.2.** Soit la fonction  $c_1$  définie par

$$c_1\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, y\right) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial c}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) w_i(y) \quad (5.3)$$

où les fonctions  $w_i$  sont définies dans le chapitre 4.

limites périodiques, la fonction  $c_\varepsilon$  peut être vue comme étant une fonction définie dans l'espace tout entier.



**Théorème 5.1.** *On suppose que les hypothèses 5.1 sont vérifiées. Soient  $(c_\varepsilon)$  la suite des solutions de l'équation (5.1),  $c$  la solution du problème homogénéisé (5.2),  $c_1$  la fonction définie par l'égalité (5.3) et les fonctions  $w_i$  solutions des problèmes (4.7). Nous avons alors les estimations suivantes :*

$$\sqrt{\int_0^T \left\| c_\varepsilon(t, \cdot) - c\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon c_1\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt} \leq C_1 \varepsilon \quad (5.4)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| c_\varepsilon(t, \cdot) - c\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon c_1\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \varepsilon, \quad (5.5)$$

et

$$\sqrt{\int_0^T \left\| c_\varepsilon(t, \cdot) - c\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon c_1\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^2(\Omega)}^2 dt} \leq C_3 (1 + \varepsilon) \quad (5.6)$$

où les constantes  $C_1, C_2$  et  $C_3 > 0$  sont indépendantes de  $\varepsilon$  mais dépendantes du temps final  $T$ .

*Démonstration.* La preuve est identique à celle du théorème (4.2).  $\square$

**Remarque 5.1.** *L'approximation numérique de l'équation (5.1) par les méthodes classiques engendre principalement deux difficultés.*

*Premièrement, pour approcher efficacement ce problème, le pas du maillage  $h$  doit satisfaire l'inégalité  $h \leq \varepsilon$ . Ce qui, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zero, génère des matrices de taille trop importante.*

*Deuxièmement, les solutions peuvent engendrer des instabilités lorsque la convection est trop dominante (ici, la norme de la vitesse est  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ ).*

### 5.1.2 Idée de la méthode

Introduisons les *fonctions tests oscillantes*  $\widehat{w}_i^\varepsilon$  définies comme suit :

$$\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

et posons  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ . Alors on a  $\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) = \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . En remplaçant  $\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x)$  par  $\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  dans l'équation (4.7), on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) - \operatorname{div}\left(\mathbf{D}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x)\right) = \frac{1}{\varepsilon} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i \quad \forall x \in \varepsilon Y. \quad (5.7)$$

On a alors :

$$c_\varepsilon(t, x) \approx c\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=1}^d (\widehat{w}_i^\varepsilon(x) - x_i) \frac{\partial c}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right).$$

On remarque que le membre de droite correspond à un développement de Taylor à l'ordre 1 en espace. On peut alors approcher la fonction  $c_\varepsilon$  par ce début de développement, ce qui permet d'écrire :

$$c_\varepsilon(t, x) \approx c\left(t, \widehat{w}^\varepsilon(x) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right).$$

On introduit la fonction  $\tilde{c}_\varepsilon$  vérifiant :

$$\tilde{c}_\varepsilon(t, x) = c\left(t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right). \quad (5.8)$$

Dans ce cas,

$$c\left(t, \widehat{w}^\varepsilon(x) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) = \tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)),$$

et on prend comme approximation :

$$c_\varepsilon(t, x) \approx \tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)). \quad (5.9)$$

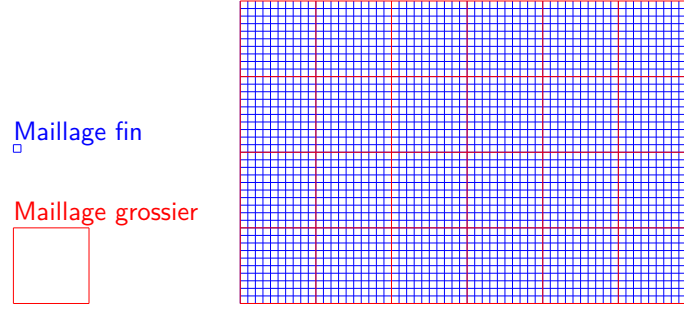


FIGURE 5.1 – Exemple de maillage fin

La formule d'approximation (5.9) est le point de départ de la définition d'une nouvelle méthode d'éléments finis multi-échelles adaptée au problème (4.6). Cette formule nous suggère d'approcher la solution du problème (4.6) dans l'espace où les fonctions de base sont des polynômes composés avec la fonction  $\hat{w}^\varepsilon$ . L'intérêt de cette méthode repose sur le fait qu'on peut approcher numériquement et de manière très rapide la fonction  $\hat{w}^\varepsilon$ . Les méthodes multi-échelles reposent principalement sur deux ingrédients : la construction des fonctions de base multi-échelle et l'approximation dans la base multi-échelle. Les fonctions multi-échelles sont conçues pour capturer la variation de la porosité  $\phi^\varepsilon$ , de la vitesse  $\mathbf{u}^\varepsilon$  et du tenseur de diffusion  $\mathbf{D}^\varepsilon$  à l'échelle fine. L'approximation dans la base multi-échelle génère une matrice dont la taille est beaucoup moins importante par rapport à celle générée si la simulation était faite directement sur le maillage fin.

### 5.1.3 Définition du maillage grossier

**Définition 5.3.** Soit  $\mathcal{E}_H$  une famille régulière de maillages de  $\bar{\Omega}$ . Les éléments de  $\mathcal{E}_H$  notés  $E_i$  sont supposés être deux à deux disjoints. On suppose que le domaine  $E_i$  est une boîte de la forme  $E_i = \bigcup_{\mathbf{k}}^{N_E} Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon$  avec  $N_E$  le nombre d'éléments de la boîte. On suppose de plus que les éléments  $Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon$  sont deux à deux disjoints. On rappelle que pour tout élément  $Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon$ , il existe  $y_{\mathbf{k}}^\varepsilon \in \mathbb{R}^d$  tel que chaque coordonnée de  $y_{\mathbf{k}}^\varepsilon$  est un multiple de  $\varepsilon$  et que  $Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon$  est l'image de  $Y$  par l'application  $T_{\mathbf{k}}^\varepsilon$ , composée d'une translation et d'une homothétie, définie comme suit

$$T_{\mathbf{k}}^\varepsilon(y) = y_{\mathbf{k}}^\varepsilon + \varepsilon y, \text{ ie, } T_{\mathbf{k}}^\varepsilon(Y) = Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon.$$

On note  $\Gamma_H^i$  l'ensemble des faces intérieures de  $\mathcal{E}_H$  et  $\Gamma_H^b$  l'ensemble des faces de  $\mathcal{E}_H$  situées sur le bord de  $\Omega$ . On reprend les mêmes notations que le chapitre 2 et nous introduisons

$$\Gamma_{H,in} = \{e \in \Gamma_{in}; e \in \Gamma_H^b\}, \quad \Gamma_{H,out} = \{e \in \Gamma_{out}; e \in \Gamma_H^b\}$$

$$\Gamma_{H,N} = \{e \in \Gamma_N; e \in \Gamma_H^b\}, \quad \Gamma_{H,D} = \Gamma_{H,in} \cup \Gamma_{H,out}.$$

Soit  $e \in \Gamma_H^i$  tel que  $e = E_m \cap E_l$ , on notera  $\mathbf{n}_e$  un vecteur normal unitaire dirigé de  $E_m$  vers  $E_l$ . On définit le saut  $[\psi]_e$  et la moyenne  $\{\psi\}_e$  d'une fonction  $\psi$  par

$$[\psi]_e = \psi_{E_m} - \psi_{E_l}, \quad \{\psi\}_e = \frac{1}{2}(\psi_{E_m} + \psi_{E_l}).$$

Pour  $e \in \Gamma_H^b$ ,  $\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_\Omega$  et on définit le saut et la moyenne de  $\psi$  comme étant la trace de  $\psi$  sur  $e$ . On définit enfin la forme bilinéaire des sauts :

$$J_{0,H}(u,v) = \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \int_e [u]_e [v]_e d\sigma$$

où  $H_e$  est le diamètre de  $e$ , et chaque  $\sigma_e$  est un paramètre positif à choisir.

### 5.1.4 Approximation des problèmes de cellule

Comme cela a été mentionné plus haut, les fonctions  $\widehat{w}_i^\varepsilon$  doivent être approchées numériquement et de manière rapide. Pour chaque maille  $E \in \mathcal{E}_H$ , on approche  $\widehat{w}_i^\varepsilon$  par  $\widetilde{w}_i^{\varepsilon,E}$  solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E}(x) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E}(x) \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^{*,E} \cdot e_i \quad \forall x \in E, \\ \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E}(x) &= x_i \quad \forall x \in \partial E, \end{cases} \quad (5.10)$$

où

$$\mathbf{u}^{*,E} = \frac{\int_E \mathbf{u}^\varepsilon(x) dx}{\int_E \phi^\varepsilon(x) dx}.$$

On construit le vecteur  $\widetilde{w}^{\varepsilon,E}$  ayant pour composantes les solutions des problèmes (5.10) comme suit :

$$\forall E \in \mathcal{E}_H, \quad \left( \widetilde{w}_{|E}^\varepsilon \right)_i = \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E}.$$

Il existe une unique fonction  $w_i \in H^2(\bar{E})$  vérifiant l'équation (5.10) (voir B.5).

Nous avons le lemme suivant (démontré dans [Oua13], Annexe C)

**Lemme 5.1.** *Il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $\varepsilon$  et de la maille  $E$  telles que*

$$\left| \widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,E} \right|_{H^1(E)} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon |\partial E|}, \quad (5.11)$$

$$\left\| \widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,E} \right\|_{L^2(E)} \leq C_2 \varepsilon \sqrt{|E|} \quad (5.12)$$

et

$$\left\| \widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,E} \right\|_{L^\infty(E)} \leq \|w\|_{L^\infty(Y)} \varepsilon \quad (5.13)$$

**Remarques 5.1.** 1. Les problèmes (5.10) sont indépendants entre eux et peuvent être calculés en parallèle.

2. Le choix des conditions aux limites joue un rôle crucial sur la qualité des fonctions de bases multi-échelles. Le fait que les conditions aux limites soient définies indépendamment des variations de la porosité  $\phi^\varepsilon$ , de la vitesse  $\mathbf{u}^\varepsilon$  et du tenseur de diffusion  $\mathbf{D}^\varepsilon$ , peut engendrer d'importantes erreurs. Typiquement si on considère le choix fait dans (5.10), on a :

$$\left\| \widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \right\|_{L^2(\partial E)} \leq \sqrt{\varepsilon |\partial E|} \|w_i\|_{L^\infty(E)},$$

$$\left\| \nabla \left( \widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \right) \right\|_{L^2(\partial E)} \leq \sqrt{|\partial E|} \|\nabla_y w_i\|_{L^\infty(E)}.$$

où nous avons utilisé le fait que  $w_i \in W^{1,\infty}(Y)$  (voir le lemme B.4). On voit que ce choix est tout à fait justifié car lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\left\| \widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \right\|_{L^2(\partial E)}$  tend vers 0. Mais, par contre,  $\left\| \nabla \left( \widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \right) \right\|_{L^2(\partial E)}$  ne tend vers zéro que lorsque  $H$  tend vers zéro et toute la difficulté vient de ce dernier point. En effet dans l'estimation d'erreur a priori (5.16), établie ci-après, l'erreur de résonance se comporte en  $\frac{\varepsilon}{H}$  c'est à dire que l'estimation d'erreur (5.16) se dégrade lorsque  $\varepsilon$  et  $H$  sont proches. Des méthodes ont été proposées dans le cas elliptique pour améliorer ces conditions aux limites. On peut citer par exemple :

— la méthode d'oversampling étudiée dans [HW97, EHW00, CCSY08],

— une méthode consistant à résoudre un problème de cellule sur  $\partial E$  dans [HW97, JLT03b, JLT05].

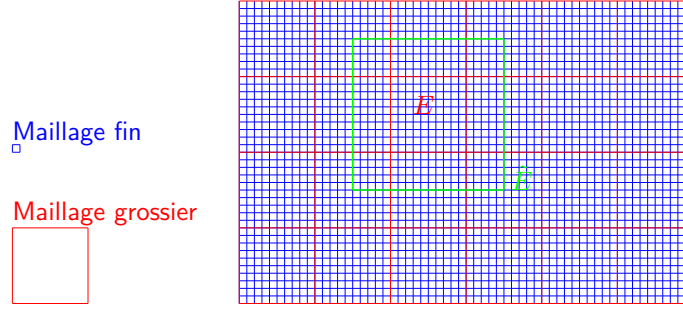


FIGURE 5.2 – Définition d'un maillage pour la méthode oversampling

### 5.1.5 Schéma de discrétisation à l'échelle grossière

On définit l'espace  $X_H$  comme suit :

$$X_H = \{v_H \in L^2(\Omega); \forall E \in \mathcal{E}_H, v_H|_E \in \mathbb{P}_d^k(E)\}.$$

L'espace des fonctions multi-échelle  $X_{\varepsilon,H}$  est alors défini par :

$$X_{\varepsilon,H} = \{v_{\varepsilon,H} = v_H \circ \tilde{w}^\varepsilon \text{ avec } v_H \in X_H\}.$$

Pour tout élément  $E$ , on note  $\{\varphi_j\}_{j=1,\dots,NDOF}$  une base de  $\mathbb{P}_d^k(E)$ . On définit l'opérateur d'interpolation de Lagrange  $\pi_H$  sur  $C^0(\bar{E})$  comme suit :

$$\pi_H v(x) = \sum_{j=1}^{NDOF} v(a_j) \varphi_j(x), \quad \forall v \in C^0(\bar{E}),$$

où les points  $a_j$  sont tels que  $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$ . On définit l'opérateur d'interpolation  $\pi_{\varepsilon,H}$  sur  $C^0(\bar{E})$  comme suit

$$\pi_{\varepsilon,H} v(x) = \sum_{j=1}^{NDOF} v(a_j) \varphi_j \circ \tilde{w}^{\varepsilon,E}(x) = (\pi_H v) \circ \tilde{w}^{\varepsilon,E}(x), \quad \forall v \in C^0(\bar{E}). \quad (5.14)$$

Comme  $\tilde{w}^{\varepsilon,E} \in H^2(\bar{E})$  alors, pour tout  $v_{\varepsilon,H}$  dans  $X_{\varepsilon,H}$ ,  $v_{\varepsilon,H}|_E \in H^2(\bar{E})$ . Par la suite, nous utiliserons la norme brisée suivante définie sur l'espace  $H^1(\mathcal{E}_H)$  :

$$\|v_H\|_{H^1(\mathcal{E}_H)} = \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla v_H\|_{L^2(E)}^2 + J_{0,H}(v_H, v_H) + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \left| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e \right| [v_H]_e^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

On approche la solution de (5.1) par  $c_{\varepsilon,H} \in X_{\varepsilon,H}$  solution du problème : trouver  $c_{\varepsilon,H} \in H^1(0,T; X_{\varepsilon,H})$  tel que

pour tout  $v_{\varepsilon,H} \in X_{\varepsilon,H}$ , on a :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi^{\varepsilon} c_{\varepsilon,H}^{n+1} v_{\varepsilon,H} dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E (\mathbf{D}^{\varepsilon} \nabla c_{\varepsilon,H}) \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{\varepsilon} \int_E (\mathbf{u}^{\varepsilon} c_{\varepsilon,H}) \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} dx \\ & - \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \{ \mathbf{D}^{\varepsilon} \nabla c_{\varepsilon,H} \}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_{\varepsilon,H}]_e d\sigma - \gamma \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \{ \mathbf{D}^{\varepsilon} \nabla v_{\varepsilon,H} \}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_{\varepsilon,H}]_e d\sigma \\ & + \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{1}{\varepsilon} \int_e c_{\varepsilon,H}^{upw} \mathbf{u}^{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e [v_{\varepsilon,H}]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \frac{1}{\varepsilon} \int_e c_{\varepsilon,H} \mathbf{u}^{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e v_{\varepsilon,H} d\sigma + J_{0,H}(c_{\varepsilon,H}, v_{\varepsilon,H}) \\ & = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi^{\varepsilon} c_{\varepsilon,H}^n v_{\varepsilon,H} dx \\ & c_{\varepsilon,H}(0) = \pi_{\varepsilon,H} c^0 \end{aligned} \right. \quad (5.15)$$

avec  $\gamma = -1, 0, 1$ . Le cas  $\gamma = 1$  correspond à un schéma DG symétrique,  $\gamma = -1$  à un schéma DG anti-symétrique et  $\gamma = 0$  à un schéma DG incomplet.

**Proposition 5.1.** *Si la solution  $c_{\varepsilon}$  de (5.1) est assez régulière pour que*

$$\forall t \in (0, T), \forall e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_H^b, \quad \mathbf{D}^{\varepsilon} \nabla c_{\varepsilon}(t)|_e \cdot \mathbf{n}_e \in H^{-1/2}(e)$$

alors le schéma (5.15) est consistant.

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle de la proposition 2.1. □

## 5.2 Estimation d'erreur à priori pour la méthode multi-échelle

**Théorème 5.2.** *On suppose que les hypothèses 5.1 vérifiées. On suppose le domaine  $\Omega$  est rectangulaire et en forme de boîte. Soit  $c_{\varepsilon}$  la solution du problème (5.1). On considère un maillage régulier  $\mathcal{E}_H$  de pas  $H$  avec  $\varepsilon < H$ . On note  $c_{\varepsilon,H}$  la solution discrète obtenue avec le schéma numérique (5.15). Alors,  $\forall t \in [0, T]$ , nous avons l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} & \|c_{\varepsilon,H} - c_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|c_{\varepsilon,H} - c_{\varepsilon}\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 \\ & \lesssim \varepsilon + H + \frac{\varepsilon}{H} + \left\| \frac{\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\sqrt{\lambda_{\min} \varepsilon}} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2 \left( \varepsilon^2 + H + \frac{\varepsilon}{H} \right) \\ & \quad + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2 (\varepsilon + H) \end{aligned} \quad (5.16)$$

**Remarques 5.2.** 1. La présence du terme  $\left\| \frac{\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\varepsilon} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2$  dans l'estimation d'erreur à priori (5.16) pourrait laisser croire que la méthode multi-échelle ne converge pas lorsque  $\varepsilon$  et  $H$  tendent vers 0. Il faut se souvenir que  $\frac{\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\varepsilon}$  représente la vitesse du modèle considéré (5.1) donc il est très naturel qu'il apparaisse dans l'estimation d'erreur à priori.

2. On remarque que la méthode multi-échelle est plus efficace pour des petites vitesses de convection.

3. On remarque que la convergence de la méthode multi-échelle se détériore lorsque la convection est dominante, ie  $\left\| \frac{\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\varepsilon} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2 \gg \lambda_{\min}$  (voir (5.48)).

4. On remarque également que la convergence de la méthode multi-échelle se détériore lorsque  $\varepsilon$  et  $H$  sont proches à cause du terme de résonance  $\frac{\varepsilon}{H}$ . Ceci est dû au choix des conditions aux limites des problèmes de cellule (5.10).

### Principe de la démonstration

La démonstration du théorème 5.2 est divisée en plusieurs étapes :

1. La première étape consiste à établir une estimation d'erreur entre la solution exacte  $c_\varepsilon$  et la solution discrète  $c_{\varepsilon,H}$  en intercalant un opérateur convenable appliqué à  $\tilde{c}_\varepsilon$ . Contrairement aux méthodes DG classiques où un opérateur de type Lagrange appliqué à  $c_\varepsilon$  serait suffisant, ici la situation est beaucoup plus complexe. En effet, comme  $\pi_{\varepsilon,H}c_\varepsilon$  n'est pas un polynôme alors la théorie des éléments finis classiques ne permet pas d'évaluer l'erreur d'interpolation  $c_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}c_\varepsilon$ . Sachant que l'on dispose des inégalités du théorème 5.1 issues de la théorie de l'homogénéisation, l'interpolation de la solution homogénéisée  $\pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon$  est un intermédiaire intéressant pour calculer une estimation d'erreur entre la solution exacte  $c_\varepsilon$  et la solution discrète  $c_{\varepsilon,H}$ .
2. La deuxième étape consiste à majorer les termes de l'estimation d'erreur entre la solution exacte  $c_\varepsilon$  et la solution discrète  $c_{\varepsilon,H}$ .
3. Et enfin, en dernier lieu, on rassemble les différents résultats pour conclure.

Dans ce qui suit, on définit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\xi_\varepsilon(t,x) &= c_{\varepsilon,H}(t,x) - c_\varepsilon(t,x), \quad \forall(t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \xi_\varepsilon^I(t,x) &= c_\varepsilon(t,x) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,x), \quad \forall(t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \xi_\varepsilon^A(t,x) &= \xi_\varepsilon(t,x) + \xi_\varepsilon^I(t,x) = c_{\varepsilon,H}(t,x) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,x), \quad \forall(t,x) \in (0,T) \times \Omega.\end{aligned}$$

### 5.3 Estimation d'erreur

L'objectif de cette section est d'établir une estimation d'erreur analogue à celle que nous avons établie à la proposition 2.5 pour le schéma numérique (2.10).

**Proposition 5.2.** *Lorsque la solution  $c_\varepsilon$  de l'équation (5.1) est assez régulière pour que*

$$\forall t \in (0,T), \forall e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_H^b, \quad \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(t)|_e \cdot \mathbf{n}_e \in H^{-1/2}(e),$$

alors pour tout  $t \in (0,T)$ , on a l'inégalité suivante

$$\|\xi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 \lesssim \sum_{i=1}^{10} T_i \quad (5.17)$$

avec

$$\begin{aligned}T_1 &= \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2, \quad T_2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| (\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2, \quad T_3 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{\lambda_{\min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \xi_\varepsilon^I \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \\ T_4 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{H^2}{\pi^2} \|\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2, \quad T_5 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2|E|} \left\| \int_E \partial_t(\phi^\varepsilon(x) \xi_\varepsilon^I(\cdot, x)) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2, \\ T_6 &= \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^I\}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2, \quad T_7 = \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|(\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2,\end{aligned}$$

$$T_8 = \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\xi_\varepsilon^I \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2, \quad T_9 = \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2,$$

$$T_{10} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \int_e \left| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e \right| (\xi_\varepsilon^I)^2 d\sigma.$$

*Démonstration.* Nous allons suivre une démarche similaire à celle utilisée au chapitre 2 pour établir l'estimation (2.14). Pour plus de clarté, on décide de supprimer momentanément la dépendance des fonctions par rapport à la variable  $t$ .

En utilisant l'équation (5.1) et le schéma (5.15), on a :

$$\int_{\Omega} \partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon) v_{\varepsilon,H} dx + A_H^\gamma(\xi_\varepsilon, v_{\varepsilon,H}) + B_H(\xi_\varepsilon, v_{\varepsilon,H}) + J_{0,H}(\xi_\varepsilon, v_{\varepsilon,H}) = 0$$

où

$$A_H^\gamma(\xi_\varepsilon, v_{\varepsilon,H}) = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E (\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon) \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} dx - \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e (\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon\}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_{\varepsilon,H}]_e - \gamma \{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla v_{\varepsilon,H}\}_e \cdot \mathbf{n}_e [\xi_\varepsilon]_e) d\sigma$$

$$B_H(\xi_\varepsilon, v_{\varepsilon,H}) = - \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E \left( \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla \xi_\varepsilon \right) \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} dx + \sum_{e \in \Gamma_H^i} \int_e (\xi_\varepsilon)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} [v_{\varepsilon,H}]_e d\sigma + \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \int_e \xi_\varepsilon \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} v_{\varepsilon,H} d\sigma.$$

$$J_{0,H}(\xi_\varepsilon, v_{\varepsilon,H}) = \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \int_e [\xi_\varepsilon]_e [v_{\varepsilon,H}]_e d\sigma.$$

En remplaçant  $\xi_\varepsilon$  par  $\xi_\varepsilon^A - \xi_\varepsilon^I$  et en prenant  $v_{\varepsilon,H} = \xi_\varepsilon^A$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^A) \xi_\varepsilon^A dx + A_H^\gamma(\xi_\varepsilon^A, \xi_\varepsilon^A) + B_H(\xi_\varepsilon^A, \xi_\varepsilon^A) + J_{0,H}(\xi_\varepsilon^A, \xi_\varepsilon^A) \\ = \int_{\Omega} \partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I) \xi_\varepsilon^A + A_H^\gamma(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) + B_H(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) + J_{0,H}(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A). \end{aligned}$$

La proposition 2.4 implique que :

$$A_H^\gamma(\xi_\varepsilon^A, \xi_\varepsilon^A) + B_H(\xi_\varepsilon^A, \xi_\varepsilon^A) + J_{0,H}(\xi_\varepsilon^A, \xi_\varepsilon^A) \geq \frac{1}{2} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E \left( \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right) (\xi_\varepsilon^A)^2 dx$$

où

$$\|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2 + J_{0,H}(\xi_\varepsilon^A, \xi_\varepsilon^A) + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \left| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e \right| (\xi_\varepsilon^A)^2 d\sigma.$$

Comme  $\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right) = 0$ , on a :

$$\left( \frac{\partial(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^A)}{\partial t}, \xi_\varepsilon^A \right)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 \leq \int_{\Omega} \frac{\partial(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)}{\partial t} \xi_\varepsilon^A dx + A_H^\gamma(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) + B_H(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) + J_{0,H}(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A).$$

Considérons le terme  $\left( \frac{\partial(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^A)}{\partial t}, \xi_\varepsilon^A \right)$ . En utilisant le fait que la fonction  $\phi^\varepsilon$  ne dépend pas de  $t$ , on obtient :

$$\left( \frac{\partial(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^A)}{\partial t}, \xi_\varepsilon^A \right) = \left( \phi^\varepsilon \frac{\partial(\xi_\varepsilon^A)}{\partial t}, \xi_\varepsilon^A \right) = \int_{\Omega} \phi^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (\xi_\varepsilon^A)^2 \right\} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi^\varepsilon (\xi_\varepsilon^A)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} \xi_\varepsilon^A \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Considérons le terme  $\int_{\Omega} (\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)) \xi_\varepsilon^A$ . On a :

$$\int_{\Omega} (\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)) \xi_\varepsilon^A dx = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E (\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)) \xi_\varepsilon^A dx,$$

en utilisant le lemme A.2, on a :

$$\int_{\Omega} (\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)) \xi_\varepsilon^A dx \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H} D_E \|\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)\|_{\dot{H}^{-1}(E)} \|\nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{\sqrt{|E|}} \left| \int_E \partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I) dx \right| \|\xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}.$$

En utilisant l'inégalité de Young,  $2ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta} b^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)) \xi_\varepsilon^A dx &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{\delta}{2} D_E^2 \|\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)\|_{\dot{H}^{-1}(E)}^2 + \frac{1}{2\delta} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2 \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{\delta}{2|E|} \left| \int_E \partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I) dx \right|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2 \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{\delta}{2} D_E^2 \|\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)\|_{\dot{H}^{-1}(E)}^2 + \frac{1}{2\delta} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{-1/2} (\overline{\mathbf{D}^\varepsilon})^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2 \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{\delta}{2|E|} \left| \int_E \partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I) dx \right|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2 \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{\delta}{2} D_E^2 \|\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)\|_{\dot{H}^{-1}(E)}^2 + \frac{1}{2\delta \lambda_{\min}} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2 \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{\delta}{2|E|} \left| \int_E \partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I) dx \right|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant le fait qu'on peut majorer  $\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2$  par  $\hat{C} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2$  (voir [Bre03]) avec  $\hat{C}$  indépendant de  $H$  et en utilisant le fait que  $D_E$  est majorée par  $\frac{H}{\pi}$  (voir [PW60]), alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)) \xi_\varepsilon^A dx &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{\delta}{2} \frac{H^2}{\pi^2} \|\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)\|_{\dot{H}^{-1}(E)}^2 + \frac{1}{2\delta \lambda_{\min}} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{\delta}{2|E|} \left| \int_E \partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I) dx \right|^2 \\ &\quad + \frac{\hat{C}}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2. \end{aligned}$$

On considère le terme  $A_H^\gamma(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A)$ . On rappelle que

$$\begin{aligned} A_H^\gamma(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E (\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^I) \cdot \nabla \xi_\varepsilon^A dx - \sum_{e \in \Gamma_H^i} \int_e \{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^I\}_e \cdot \mathbf{n}_e [\xi_\varepsilon^A]_e d\sigma - \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \int_e (\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^I) \cdot \mathbf{n}_e \xi_\varepsilon^A d\sigma \\ &\quad - \gamma \sum_{e \in \Gamma_H^i} \int_e \{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^A\}_e \cdot \mathbf{n}_e [\xi_\varepsilon^I]_e d\sigma - \gamma \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \int_e (\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^A) \cdot \mathbf{n}_e \xi_\varepsilon^I d\sigma. \end{aligned}$$

Comme  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\xi_\varepsilon^I(t) \in H^1(\Omega)$ , alors on a  $[\xi_\varepsilon^I]_e = 0, \forall e \in \Gamma_H^i$ . En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Young, nous obtenons :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E (\mathbf{D}^\varepsilon \nabla(\xi_\varepsilon^I)) \cdot \nabla \xi_\varepsilon^A dx \leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla(\xi_\varepsilon^I)\|_{L^2(E)}^2 \right) + \frac{1}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2,$$



$$\sum_{e \in \Gamma_H^i} \int_e \{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla(\xi_\varepsilon^I)\}_e \cdot \mathbf{n}_e [\xi_\varepsilon^A]_e \, d\sigma \leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla(\xi_\varepsilon^I)\}_e\|_{L^2(e)}^2 \right) + \frac{1}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2,$$

Nous pouvons montrer que

$$\frac{1}{2\delta} \left( \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^A\}_e\|_{L^2(e)}^2 \right) \leq \frac{C_3}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

En effet, soit une face interne  $e = E_1 \cap E_2$ , on a

$$\|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^A\}_e\|_{L^2(e)}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \|\mathbf{D}^\varepsilon (\nabla \xi_\varepsilon^A)_{E_j}\|_{L^2(e)}^2 \leq \frac{\lambda_{max}^2}{2} \sum_{j=1,2} \|(\nabla \xi_\varepsilon^A)_{E_j}\|_{L^2(e)}^2.$$

En passant à l'élément de référence  $\widehat{E}$ , on a

$$\|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^A\}_e\|_{L^2(e)}^2 \leq \frac{|e|}{|\widehat{e}|} \frac{\lambda_{max}^2}{2} \sum_{j=1,2} \|(\widehat{\nabla \xi_\varepsilon^A})_{\widehat{E}}\|_{L^2(\widehat{e})}^2.$$

En utilisant l'équivalence des normes en dimension finie, on a :

$$\begin{aligned} \|\widehat{\nabla \xi_\varepsilon^A}\|_{L^2(\widehat{e})} &\leq \widehat{c} \|\widehat{\nabla \xi_\varepsilon^A}\|_{L^2(\widehat{E})} \leq \widehat{c} \left( \frac{|\widehat{E}|}{|E_j|} \right)^{1/2} \|\nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E_j)} \leq \widehat{c} \left( \frac{|\widehat{E}|}{|E_j|} \right)^{1/2} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{-1/2} (\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E_j)} \\ &\leq \widehat{c} \left( \frac{|\widehat{E}|}{|E_j|} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E_j)}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^A\}_e\|_{L^2(e)}^2 \lesssim \sum_{j=1,2} \frac{|e|}{|E_j|} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E_j)}^2 \lesssim \sum_{j=1,2} H_e^{-1} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E_j)}^2.$$

De même, pour une face de bord  $e = E \cap \Gamma_h^b$ , on a

$$\|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^A\}_e\|_{L^2(e)}^2 \lesssim \frac{|e|}{|E|} \|\nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2 \lesssim \frac{|e|}{|E|} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2 \lesssim H_e^{-1} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2.$$

De ces inégalités, nous déduisons qu'il existe une constante  $C_4$  indépendante de  $H$  telle que

$$\frac{1}{2\delta} \left( \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^A\}_e\|_{L^2(e)}^2 \right) \lesssim \frac{1}{2\delta} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^A\|_{L^2(E)}^2 \lesssim \frac{C_4}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2.$$

En rassemblant ces différents résultats, on obtient

$$\begin{aligned} A_H^\gamma(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) &\leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla(\xi_\varepsilon^I)\|_{L^2(E)}^2 \right) + \frac{C_4}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 + \frac{1}{\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 \\ &\quad + \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^2(e)}^2 \right) + \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla(\xi_\varepsilon^I)\}_e\|_{L^2(e)}^2 \right). \end{aligned}$$

Considérons le terme  $B_H(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A)$ . On rappelle que :

$$B_H(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) = - \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E \left( \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \xi_\varepsilon^I \right) \cdot \nabla \xi_\varepsilon^A \, dx + \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,out}} \int_e (\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} [\xi_\varepsilon^A]_e \, d\sigma.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young, on a :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E \left( \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \xi_\varepsilon^I \right) \cdot \nabla \xi_\varepsilon^A dx \leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{\lambda_{min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \xi_\varepsilon^I \right\|_{L^2(E)}^2 \right) + \frac{1}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2.$$

Comme précédemment, nous pouvons montrer que :

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,out}} \int_e (\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} [\xi_\varepsilon^A]_e d\sigma \leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \left\| (\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} \right\|_{L^2(e)}^2 \right) + \frac{1}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2.$$

En rassemblant ces différents résultats, on a

$$B_H(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) \leq \frac{\delta}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{\lambda_{min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \xi_\varepsilon^I \right\|_{L^2(E)}^2 \right) + \frac{1}{\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 + \frac{\delta}{2} \left( \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,out}} \frac{H_e}{\sigma_e} \left\| (\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} \right\|_{L^2(e)}^2 \right).$$

Considérons le terme  $J_{0,H}(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A)$ . On rappelle que :

$$J_{0,H}(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) = \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \int_e [\xi_\varepsilon^I]_e [\xi_\varepsilon^A]_e d\sigma.$$

En utilisant le fait que  $[\xi_\varepsilon^I]_e = 0, \forall e \in \Gamma_H^i$ , on a alors :

$$J_{0,H}(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) = \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \int_e [\xi_\varepsilon^I]_e [\xi_\varepsilon^A]_e d\sigma.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$J_{0,H}(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^A) \leq \frac{\delta}{2} \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \left\| [\xi_\varepsilon^I]_e \right\|_{L^2(e)}^2 + \frac{1}{2\delta} \|\xi_\varepsilon^A\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2.$$

Posons

$$\begin{aligned} \Upsilon(\xi_\varepsilon^I) &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{H^2}{\pi^2} \|\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)\|_{H^{-1}(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2|E|} \left| \int_E \partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I) dx \right|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^I\|_{L^2(E)}^2 \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^I\}_e\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{\lambda_{min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \xi_\varepsilon^I \right\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \left\| (\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} \right\|_{L^2(e)}^2 \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \frac{H_e}{\sigma_e} \left\| \xi_\varepsilon^I \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} \right\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \frac{2\sigma_e}{H_e} \left\| [\xi_\varepsilon^I]_e \right\|_{L^2(e)}^2. \end{aligned}$$

On choisit  $\delta$  tel que

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\delta} (C_4 + 5 + \frac{1}{\lambda_{min}} + \hat{C})$$

soit strictement positif. On obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \|\sqrt{\phi^\varepsilon} \xi_\varepsilon^A(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\alpha \|\xi_\varepsilon^A(t)\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 \leq \delta \Upsilon(\xi_\varepsilon^I)(t).$$

En intégrant sur  $]0, t]$ , on a

$$\|\xi_\varepsilon^A(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\alpha}{\phi_{min}} \|\xi_\varepsilon^A\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 \leq \frac{\delta}{\phi_{min}} \int_0^T \Upsilon(\xi_\varepsilon^I)(\tau) d\tau + \|\xi_\varepsilon^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En prenant  $t = T$ , il existe une constante  $C$  indépendante de  $H$  telle que

$$\|\xi_\varepsilon^A\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi_\varepsilon^A\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 \leq C \left( \int_0^T \Upsilon(\xi_\varepsilon^I)(\tau) d\tau + \|\xi_\varepsilon^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|\xi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 \lesssim \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^2(0,T;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 + \int_0^T \Upsilon(\xi_\varepsilon^I)(\tau) d\tau + \|\xi_\varepsilon^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On rappelle que

$$\|\xi_\varepsilon^I\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^I\|_{L^2(E)}^2 + J_{0,H}(\xi_\varepsilon^I, \xi_\varepsilon^I) + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e |\xi_\varepsilon^I|_e^2 d\sigma.$$

Toujours en utilisant le fait que  $\xi_\varepsilon^I(t) \in H^1(\Omega)$ , on obtient

$$\|\xi_\varepsilon^I\|_{H^1(\mathcal{E}_H)}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^I\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^2(e)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \int_e \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e |\xi_\varepsilon^I|_e^2 d\sigma.$$

En rassemblant tous ces résultats, on a

$$\|\xi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 \lesssim \sum_{i=1}^{11} T_i$$

avec

$$T_1 = \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2, \quad T_2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla \xi_\varepsilon^I\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2, \quad T_3 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{\lambda_{\min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \xi_\varepsilon^I \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2$$

$$T_4 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{H^2}{\pi^2} \|\partial_t(\phi^\varepsilon \xi_\varepsilon^I)\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2, \quad T_5 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2|E|} \left\| \int_E \partial_t(\phi^\varepsilon(x) \xi_\varepsilon^I(\cdot, x)) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2,$$

$$T_6 = \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^I\}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2, \quad T_7 = \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|(\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2,$$

$$T_8 = \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \frac{H_e}{\sigma_e} \left\| \xi_\varepsilon^I \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2, \quad T_9 = \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2,$$

$$T_{10} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \int_e \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e |\xi_\varepsilon^I|^2 d\sigma, \quad T_{11} = \|\xi_\varepsilon^A(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Le terme  $T_{11}$  est nul. En effet, par définition on a

$$\xi_\varepsilon^A(0, x) = c_{\varepsilon,H}(0, x) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(0, x) = c_{\varepsilon,H}(0, x) - \pi_{\varepsilon,H} c_\varepsilon^0(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

et puisqu'on a défini la condition initiale sur  $c_{\varepsilon,H}$  par

$$\forall x \in \Omega, \quad c_{\varepsilon,H}(0, x) = \pi_{\varepsilon,H} c_\varepsilon^0(x).$$

on en déduit que  $T_{11} = 0$ . □

La suite de la démonstration consiste à majorer les termes  $T_i$  de l'estimation d'erreur (5.17). On commence par montrer la proposition suivante :

**Proposition 5.3.** Soit  $(\mathcal{E}_H)_{H>0}$  une famille régulière de maillages de  $\bar{\Omega}$ . On suppose que  $\Omega$  est rectangulaire et en forme de boîte. On suppose que les hypothèses 5.1 sont vérifiées. Soient  $(c_\varepsilon)$  la suite des solutions de l'équation (5.1),  $c$  la solution du problème homogénéisé (5.2),  $c_1$  la fonction définie par l'égalité (5.3) et les fonctions  $w_i$  solutions des problèmes (4.7). Nous avons alors l'estimation suivante :

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_0^T \left\| \nabla \left( c_\varepsilon(t, \cdot) - c \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(e)}^2 dt \leq C_9 \left( H(1 + \varepsilon)^2 + \frac{\varepsilon^2}{H} \right) \quad (5.18)$$

avec  $C_9$  une constante indépendante de  $\varepsilon$  et de  $H$ .

*Démonstration.* On note par  $P_H^k$  l'opérateur de projection orthogonale défini dans  $L^2(\Omega)$  à valeur dans l'espace  $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{E}_H)$ .

Posons  $G = c_\varepsilon(t, x) - c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right)$ . Soit  $E \in \mathcal{E}_H$  et soit  $e \in \partial E$ , alors en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|\nabla G\|_{L^2(e)} \leq \|\nabla (G - P_H^k(G))\|_{L^2(e)} + \|\nabla (P_H^k(G))\|_{L^2(e)}.$$

En utilisant le résultat démontré dans [DPE12][Lemma 1.59], on a

$$\|\nabla (G - P_H^k(G))\|_{L^2(e)} \leq C_{tr} H^{1/2} |G|_{H^2(E)}, \quad \forall e \in \Gamma_H \cap E \quad (5.19)$$

avec  $C_{tr}$  une constante indépendante de  $E$  et de  $H$ .

En utilisant le résultat démontré dans [Riv08][Page 23], on a

$$\|\nabla (P_H^k(G))\|_{L^2(e)} \leq C_{trb} H^{-1/2} \|\nabla P_H^k(G)\|_{L^2(E)}$$

avec  $C_{trb}$  une constante indépendante de  $E$  et de  $H$ .

Donc il faut évaluer  $\|\nabla P_H^k(G)\|_{L^2(E)}$ . Comme  $P_H^k$  est stable en norme  $H^1$  donc

$$\|\nabla P_H^k(G)\|_{L^2(E)} \leq \|\nabla (P_H^k(G) - G)\|_{L^2(E)} + \|\nabla G\|_{L^2(E)}.$$

En passant à l'élément de référence  $\hat{E}$ , il existe une constante  $\hat{C}$  telle que

$$\begin{aligned} \|\nabla (P_H^k(G) - G)\|_{L^2(E)} &\leq \hat{C} \frac{|E|^{1/2}}{H} \left\| \widehat{\nabla} \left( \widehat{P}_H^k(\hat{G}) - \hat{G} \right) \right\|_{L^2(\hat{E})} \\ &\leq \hat{C} \frac{|E|^{1/2}}{H} \left\| \widehat{\nabla} \hat{G} \right\|_{L^2(\hat{E})} \quad \text{car } k \geq 0 \\ &\leq \hat{C} \left\| \widehat{\nabla} \hat{G} \right\|_{L^2(E)}. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$\|\nabla P_H^k(G)\|_{L^2(E)} \leq \hat{C} \|\nabla G\|_{L^2(E)} + \|\nabla G\|_{L^2(E)} \leq (1 + \hat{C}) \|\nabla G\|_{L^2(E)}.$$

En recollant les inégalités, on obtient :

$$\|\nabla P_H^k(G)\|_{L^2(e)} \leq C_{trb} (1 + \hat{C}) H^{-1/2} \|\nabla G\|_{L^2(E)} \quad (5.20)$$

En utilisant les inégalités (5.19) et (5.20), on a

$$\begin{aligned} &\sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \left\| \nabla \left( c_\varepsilon(t, x) - c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\ &\leq \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \left( 2C_{tr}^2 H \|G\|_{L^2(0,T;H^2(E))}^2 + 2C_{trb}^2 (1 + \hat{C})^2 H^{-1} \|\nabla G\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \right) \\ &\leq 2LC_{tr}^2 H \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|G\|_{L^2(0,T;H^2(E))}^2 + 2C_{trb}^2 (1 + \hat{C})^2 H^{-1} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla G\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \end{aligned}$$

avec  $L$  le nombre de faces de faces qu'un élément de  $\mathcal{E}_H$  peut posséder. Finalement, en utilisant l'inégalité (5.4), on a

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_0^T \left\| \nabla \left( c_\varepsilon(t, \cdot) - c \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(e)}^2 \\ \leq 2LC_{tr}^2 H \varepsilon^2 + 2LC_{trb}^2 (1 + \widehat{C})^2 H^{-1} \varepsilon^2 \\ \leq C_9 (H(1 + \varepsilon)^2 + H^{-1} \varepsilon^2) \end{aligned}$$

avec  $C_9 = \max(2LC_{tr}^2, 2LC_{trb}^2(1 + \widehat{C})^2)$ . □

## 5.4 Majoration des termes $T_1$ , $T_2$ et $T_3$

La stratégie pour majoration des termes  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  repose sur la remarque suivante

**Remarques 5.3.** *La difficulté pour majorer les termes  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  réside dans le fait que*

$$\xi_\varepsilon^I(t, x) = c_\varepsilon(t, x) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(t, x)$$

*n'est pas une erreur d'interpolation. Pour majorer ce terme, celui-ci doit être décomposé en fonction de trois types d'erreur, que sont :*

- l'erreur d'homogénéisation,
- l'erreur de discrétisation,
- et l'erreur due à l'approximation des problèmes de cellules (4.7) par les problèmes (5.10).

Sur la base de cette remarque, on considère la décomposition suivante :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla (c_\varepsilon - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2 \leq 3 (G_{hom}^1 + G_{disc}^1 + G_{cell}^1), \quad (5.21)$$

où

$$\begin{aligned} G_{hom}^1 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla (c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2, \\ G_{disc}^1 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla ((\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2, \\ \text{et } G_{cell}^1 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2. \end{aligned}$$

De même, on considère les décompositions suivantes :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|c_\varepsilon - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2 \leq 3 (G_{hom}^2 + G_{disc}^2 + G_{cell}^2), \quad (5.22)$$

où

$$\begin{aligned} G_{hom}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2, \\ G_{disc}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2, \\ G_{cell}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2, \end{aligned}$$

et

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|c_\varepsilon - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(E))}^2 \leq 3 (G_{hom}^3 + G_{disc}^3 + G_{cell}^3), \quad (5.23)$$

où

$$\begin{aligned} G_{hom}^3 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^\infty(0, T; L^2(E))}^2, \\ G_{disc}^3 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^\infty(0, T; L^2(E))}^2, \\ G_{cell}^3 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty(0, T; L^2(E))}^2. \end{aligned}$$

**Terme d'homogénéisation globale  $G_{hom}$**

**Lemme 5.2.** *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$G_{hom}^1 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla(c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2. \quad (5.24)$$

$$G_{hom}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2. \quad (5.25)$$

$$G_{hom}^3 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^\infty(0, T; L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2. \quad (5.26)$$

*Démonstration.* Pour majorer les termes  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ , nous allons procéder comme dans [Oua13]. L'idée consiste à utiliser les inégalités du lemme 5.1. On commence par la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \|\nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \nabla \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0, T; L^2(E))} &\leq \left\| \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{i=1}^d \nabla \hat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(0, T; L^2(E))} \\ &\quad + \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \hat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \nabla \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2(0, T; L^2(E))}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Le premier terme du membre de droite de (5.27) peut être majoré en utilisant l'inégalité (5.4). En effet, on a :

$$\begin{aligned} \nabla \left( c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) &= \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \sum_{i=1}^d \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \left( \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\hat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$  et donc que  $\nabla \hat{w}_i^\varepsilon(x) = \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla \left( c_\varepsilon(t, x) - c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) &= \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{i=1}^d \nabla \hat{w}_i^\varepsilon(x) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ &\quad - \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x). \end{aligned}$$

L'inégalité (5.4) implique que :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2((0,T) \times E)}^2 &\lesssim \left( \varepsilon + \varepsilon \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \sum_{i=1}^d |E|^2 \left\| w_i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(0,T; L^\infty(E))}^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\ &\lesssim 2 \left( \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \sum_{i=1}^d |E|^2 \left\| w_i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(0,T; L^\infty(E))}^2 \right) \right) \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le fait que  $c \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\Omega))$  et  $w \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , on obtient

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(0,T; L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 (1 + |\Omega|) \lesssim \varepsilon^2. \quad (5.28)$$

Considérons maintenant le second terme du membre de droite de (5.27). On remarque d'abord que

$$\sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) - \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) = \sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) (\partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) - \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x))).$$

On a ainsi :

$$\left\| \sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(\cdot) (\partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot))) \right\|_{L^2((0,T) \times E)} \lesssim \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \nabla \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2((0,T) \times E)}.$$

En utilisant le développement de Taylor avec reste intégral, on obtient :

$$\nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) = \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(\cdot) (\partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot))) \right\|_{L^2(0,T; L^2(E))}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \varepsilon^2 \|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^2(0,T; W^{2,\infty}(\Omega))}^2 \|w\|_{L^\infty(E)}^2 |E| \\ &\lesssim \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les inégalités (5.28) et (5.29) nous permettent de déduire l'inégalité (5.24).

Considérons le terme  $\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T; L^2(E))}^2$ . Un développement de Taylor avec reste intégral donne :

$$\tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) = \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) &= c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, x) - \varepsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds \\ &= c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, x) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \\ &\quad - \varepsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
 \|c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x))\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 &\leq \left( \left\| c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t,x) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))} \right. \\
 &\quad + \varepsilon \left\| c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))} \\
 &\quad \left. + \varepsilon \left\| \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))} \right)^2 \\
 &\leq 3 \left( \left\| c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t,x) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \right. \\
 &\quad + \varepsilon^2 \left\| c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \\
 &\quad \left. + \varepsilon^2 \left\| \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \right).
 \end{aligned}$$

En sommant sur tous les éléments du maillage, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x))\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 &\leq 3 \left( \left\| c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t,x) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right. \\
 &\quad + \varepsilon^2 \left\| c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\
 &\quad \left. + \varepsilon^2 \left\| \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right).
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (5.4), le fait que  $c \in L^2(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))$  et que  $w \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , nous avons

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x))\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2$$

d'où l'inégalité (5.25).

Considérons le terme  $\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^\infty(0,T;L^2(E))}^2$ . Comme précédemment, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x))\|_{L^\infty(0,T;L^2(E))}^2 &\leq 3 \left( \left\| c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t,x) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(E))}^2 \right. \\
 &\quad + \varepsilon^2 \left\| c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(E))}^2 \\
 &\quad \left. + \varepsilon^2 \left\| \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(E))}^2 \right).
 \end{aligned}$$



En sommant sur tous les éléments du maillage, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))\|_{L^\infty(0, T; L^2(E))}^2 &\leq 3 \left( \left\| c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, x) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right. \\ &\quad + \varepsilon^2 \left\| c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left\| \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (5.5), le fait que  $c \in L^2(0, T; W^{2, \infty}(\Omega))$  et que  $w \in W^{1, \infty}(\Omega)$ , on a

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))\|_{L^\infty(0, T; L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2$$

d'où l'inégalité (5.26).  $\square$

### Terme d'interpolation $G_{disc}$

**Lemme 5.3.** *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$G_{disc}^1 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla((\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2 \lesssim H^4 + \varepsilon^2 H^2, \quad (5.30)$$

$$G_{disc}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2 \lesssim H^6 + \varepsilon^2 H^4, \quad (5.31)$$

$$G_{disc}^3 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^\infty(0, T; L^2(E))}^2 \lesssim H^6 + \varepsilon^2 H^4. \quad (5.32)$$

*Démonstration.* On commence par remarquer que

$$\nabla((\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) = \sum_{i=1}^d \nabla \hat{w}_i^\varepsilon(x) \partial_{x_i} (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x)).$$

Puis, en utilisant  $\nabla \hat{w}_i^\varepsilon(x) = \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|\nabla((\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0, T; L^2(E))} &= \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \hat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2(0, T; L^2(E))} \\ &\leq \sqrt{T} \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^\infty(0, T; L^2(E))}. \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor avec reste intégral, on obtient :

$$\nabla(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) = \nabla(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, x) + \varepsilon \sum_{i=1}^d \int_0^1 w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} (\nabla(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)) \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

Puis, en utilisant le fait que  $c \in L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(\Omega))$  et en utilisant des résultats d'interpolation classiques, on a

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla((\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left( H^4 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; H^3(E))}^2 + H^2 \varepsilon^2 |E| \right) \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left( H^4 |E| |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(E))}^2 + H^2 \varepsilon^2 |E| \right) \\ &\lesssim H^4 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(\Omega))}^2 |\Omega| + H^2 \varepsilon^2 |\Omega| \\ &\lesssim H^4 + H^2 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (5.30).

Considérons le terme  $\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2$ . En utilisant le développement de Taylor avec reste intégral, on obtient :

$$(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) = (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, x) + \varepsilon \sum_{i=1}^d \int_0^1 w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

Puis, en utilisant le fait que  $c \in L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega))$  et en utilisant des résultats d'interpolation classiques, on a

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left( H^6 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty((0,T);H^3(E))}^2 + H^4 \varepsilon^2 |E| \right) \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left( H^6 |E| |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty((0,T);W^{3,\infty}(E))}^2 + H^4 \varepsilon^2 |E| \right) \\ &\lesssim H^6 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty((0,T);W^{3,\infty}(\Omega))}^2 |\Omega| + H^4 \varepsilon^2 |\Omega| \\ &\lesssim H^6 + H^4 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (5.31).

Considérons le terme  $\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^\infty(0,T;L^2(E))}^2$ . En utilisant le résultat précédent, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^\infty(0,T;L^2(E))}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left( H^6 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty((0,T);H^3(E))}^2 + H^4 \varepsilon^2 |E| \right) \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left( H^6 |E| |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty((0,T);W^{3,\infty}(E))}^2 + H^4 \varepsilon^2 |E| \right) \\ &\lesssim H^6 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty((0,T);W^{3,\infty}(\Omega))}^2 |\Omega| + H^4 \varepsilon^2 |\Omega| \\ &\lesssim H^6 + H^4 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (5.32). □

### Terme d'homogénéisation locale $G_{cell}$

**Lemme 5.4.** *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$G_{cell}^1 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \lesssim \frac{\varepsilon}{H} + \varepsilon H^{7-d} + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^{6-d}, \quad (5.33)$$

$$G_{cell}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 + H^{8-d} \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{H}, \quad (5.34)$$

$$G_{cell}^3 = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty(0,T;L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 + H^{8-d} \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{H}, \quad (5.35)$$

où  $\pi_H$  est l'opérateur d'interpolation dans  $X_H$  et  $\pi_{\varepsilon,H}$  est l'opérateur d'interpolation multi-échelle tel que défini en (5.14).

*Démonstration.* En utilisant la définition de  $\pi_{\varepsilon,H}$ , on a :

$$\begin{aligned} \nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(t, x)) &= \nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \tilde{w}^\varepsilon(x))) \\ &= \sum_{i=1}^d \nabla \hat{w}_i^\varepsilon(x) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon(x) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \tilde{w}^\varepsilon(x)). \end{aligned}$$

En intercalant le terme  $\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon(x) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x))$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2((0, T) \times E)} &\leq \left\| \sum_{i=1}^d (\nabla \hat{w}_i^\varepsilon - \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E}) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2((0, T) \times E)} \\ &\quad + \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E} (\partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - (\partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot)))) \right\|_{L^2((0, T) \times E)} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Considérons le premier terme du membre de droite de (5.36). On a :

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^d (\nabla \hat{w}_i^\varepsilon - \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E}) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2(0, T; L^2(E))} \\ &\leq \sqrt{T} \left\| \sum_{i=1}^d \nabla (\hat{w}_i^\varepsilon - \tilde{w}_i^{\varepsilon, E}) \right\|_{L^2(E)} \left\| \sup_{i \in \{1, \dots, d\}} \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(E))}. \end{aligned}$$

On applique ensuite le lemme 5.1 sur chaque maille  $E$ . Ainsi :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla (\hat{w}^\varepsilon - \tilde{w}^{\varepsilon, E})\|_{L^2(E)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \varepsilon |\partial E| \lesssim \varepsilon H^{d-1} H^{-d} \lesssim \frac{\varepsilon}{H},$$

où nous avons utilisé le fait que la mesure du bord d'une maille est bornée par  $H^{d-1}$  et que le nombre de mailles nécessaires au recouvrement de  $\Omega$  est borné par  $H^{-d}$ . On a donc

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \sum_{i=1}^d (\nabla \hat{w}_i^\varepsilon - \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E}) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2(E)}^2 \lesssim \frac{\varepsilon}{H} \sup_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \sup_{i \in \{1, \dots, d\}} \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(E))}^2. \quad (5.37)$$

De plus, utilisant le fait que  $\tilde{c}_\varepsilon \in L^2(0, T; H^5(\Omega))$ , on montre que  $\|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(E))}$  est bornée. En effet, en utilisant le résultat d'interpolation suivant (voir [BS07]) : il existe une constante  $C$  indépendante de  $H$  telle que

$$|v - \pi_H v|_{W^{i, \infty}(E)} \leq C H^{m-i-d/p} \|v\|_{W^{m, p}(E)}, \quad \forall v \in W^{m, p}(E),$$

on obtient :

$$\|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(E))} \leq |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(E))} + C H^{4-d/2} |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; H^5(E))} \lesssim (1 + H^{4-d/2}).$$

Et, on obtient alors :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \sum_{i=1}^d \nabla (\hat{w}_i^\varepsilon - \tilde{w}_i^{\varepsilon, E}) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2 \lesssim \frac{\varepsilon}{H} + \varepsilon H^{7-d}. \quad (5.38)$$

Considérons maintenant le second terme du membre de droite de (5.36). On a

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^d \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E} (\partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))) \right\|_{L^2(0, T; L^2(E))} \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E} \right\|_{L^\infty(E)} \sup_{i \in \{1, \dots, d\}} \left\| \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot)) \right\|_{L^2(0, T; L^2(E))}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

**Remarque 5.2.** Pour majorer le terme  $\partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))$ , on souhaiterait appliquer une inégalité de Taylor-Lagrange<sup>2</sup>. Ce qui nécessite que la fonction  $x \rightarrow \varphi_k(x)$  soit lipschitzienne dans  $E$ . Or, comme les fonctions  $\varphi_k$  sont des polynômes dans  $E$  alors  $\varphi_k$  est de classe  $C^\infty$  dans  $E$ . La difficulté est que nous n'avons aucune garantie que les images des fonctions  $x \rightarrow \tilde{w}^{\varepsilon, E}(x)$  et  $x \rightarrow \hat{w}^\varepsilon(x)$  soient incluses dans  $E$ .

On introduit pour cela le sous-ensemble  $C_E$  de  $E$  pour lequel  $\hat{w}^\varepsilon(x) \in E$  :

$$C_E = \left\{ x \in E \mid B(x, 2\varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)}) \subset E \right\}.$$

Nous avons également  $\tilde{w}^{\varepsilon, E}(x) \in E \forall x \in C_E$ . En effet, en reprenant l'estimation (5.13), on a

$$\|\hat{w}^\varepsilon - x - (\tilde{w}^{\varepsilon, E} - x)\|_{L^\infty(E)} \leq \|w\|_{L^\infty(Y)} \varepsilon, \forall x \in E.$$

Donc

$$\|\tilde{w}^{\varepsilon, E} - x\|_{L^\infty(E)} \leq \|w\|_{L^\infty(Y)} \varepsilon + \|\hat{w}^\varepsilon - x\|_{L^\infty(E)}, \forall x \in E$$

et

$$\|\tilde{w}^{\varepsilon, E} - x\|_{L^\infty(E)} \leq 2 \|w\|_{L^\infty(Y)} \varepsilon.$$

On va donc majorer le terme  $\partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))$  en le séparant en deux

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot)) \right\|_{L^2(E)}^2 \\ &= \left\| \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot)) \right\|_{L^2(C_E)}^2 \\ & \quad + \left\| \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot)) \right\|_{L^2(E \setminus C_E)}^2. \end{aligned} \quad (5.40)$$

On a donc les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot)) \right\|_{L^2(C_E)}^2 &\leq \|\nabla \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^\infty(C_E)}^2 \|\hat{w}^\varepsilon - \tilde{w}^{\varepsilon, E}\|_{L^2(C_E)}^2 \\ &\lesssim \|\nabla \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^\infty(E)}^2 \|\hat{w}^\varepsilon - \tilde{w}^{\varepsilon, E}\|_{L^2(E)}^2 \\ &\lesssim \|\nabla \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^\infty(E)}^2 \varepsilon^2 |E| \\ &\lesssim \|\nabla \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^\infty(E)}^2 \varepsilon^2 H^d, \end{aligned} \quad (5.41)$$

en utilisant le lemme 5.1 et le fait que les volumes des mailles sont de l'ordre de  $H^d$ .

Sur  $E \setminus C_E$ , on utilise le fait que

$$|E \setminus C_E| \lesssim |\partial E| \varepsilon.$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot)) \right\|_{L^2(E \setminus C_E)}^2 \\ & \lesssim \left\| \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot)) \right\|_{L^\infty(E \setminus C_E)}^2 |\partial E| \varepsilon \\ & \lesssim \varepsilon H^{d-1}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

En insérant les inégalités (5.42) et (5.41) dans (5.39), on obtient

$$\left\| \sum_{i=1}^d \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E}(\partial_{x_i}(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, (\hat{w}^\varepsilon - \tilde{w}^{\varepsilon, E})(\cdot))) \right\|_{L^2(0, T; L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 H^d (1 + H^{6-d}) + \varepsilon H^{d-1}.$$

2. Soit  $f$  une fonction appartenant à l'espace  $W^{1, \infty}(\omega)$  dans  $\omega \subset \Omega$ , alors il existe une constant  $M$  telle que

$$|f(y) - f(x)| \leq M |x - y| \quad \forall x, y \in \omega.$$

où nous avons utilisé l'inégalité suivante :

$$\|\nabla \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(E))} \leq |\nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;L^\infty(E))} + CH^{3-d/2} |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;H^5(E))} \lesssim (1 + H^{3-d/2}).$$

En calculant la norme  $L^2$  sur tout l'espace, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon,E} (\partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, (\hat{w}^\varepsilon - \tilde{w}^{\varepsilon,E})(\cdot))) \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \varepsilon^2 H^d (1 + H^{6-d}) + \varepsilon H^{d-1} \\ &\lesssim \varepsilon^2 (1 + H^{6-d}) + \varepsilon H^{-1} \end{aligned}$$

car le nombre de mailles pour recouvrir  $\Omega$  est de l'ordre de  $H^{-d}$ .

Finalement, on obtient

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(E))} \lesssim \frac{\varepsilon}{H} + \varepsilon H^{7-d} + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^{6-d}.$$

Considérons le terme  $\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2$ . On a :

$$\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) = \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \tilde{w}^{\varepsilon,E}(x)).$$

Comme précédemment, nous effectuons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(E)}^2 &= \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(C_E)}^2 \\ &\quad + \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(E \setminus C_E)}^2. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Les mêmes arguments nous permettent de montrer que :

$$\|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(C_E)}^2 \lesssim \|\nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t)\|_{L^\infty(E)}^2 \varepsilon^2 H^d \lesssim (1 + H^{8-d}) \varepsilon^2 H^d, \quad (5.44)$$

$$\|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(E \setminus C_E)}^2 \lesssim \varepsilon H^{d-1}. \quad (5.45)$$

Les inégalités (5.45) et (5.44) nous permettent ainsi de borner (5.43) de la façon suivante :

$$\|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(E)}^2 \lesssim (1 + H^{8-d}) \varepsilon^2 H^d + \varepsilon H^{d-1}.$$

En calculant la norme  $L^2$  sur tout le domaine  $\Omega$ , on obtient

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 + H^{8-d} \varepsilon^2 + \varepsilon H^{-1},$$

et

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty(0,T;L^2(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 + H^{8-d} \varepsilon^2 + \varepsilon H^{-1}.$$

□

**Proposition 5.4.** Soient  $c_\varepsilon$  la solution du problème (5.1) et  $\tilde{c}_\varepsilon$  définie par (5.2) et (5.8), les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$T_1 \lesssim \frac{\varepsilon}{H} + \varepsilon H^{7-d} + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^2 H^{6-d} + H^4, \quad (5.46)$$

$$T_2 \lesssim \varepsilon^2 + H^{8-d} \varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^4 + \frac{\varepsilon}{H} + H^6, \quad (5.47)$$

$$T_3 \lesssim \frac{1}{\lambda_{\min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \varepsilon^2 + H^{8-d} \varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^4 + \frac{\varepsilon}{H} + H^6 \right). \quad (5.48)$$

*Démonstration.* On peut remarquer que

$$T_1 \leq G_{hom}^3 + G_{disc}^3 + G_{cell}^3.$$

En utilisant les inégalités (5.26), (5.32) et (5.35), on obtient l'inégalité (5.46).

De même, on peut voir que

$$T_2 \leq \lambda_{max}^2 (G_{hom}^1 + G_{disc}^1 + G_{cell}^1).$$

A partir des inégalités (5.24), (5.30) et (5.33), on obtient l'inégalité (5.47).

Enfin, on a

$$T_3 \leq \frac{1}{\lambda_{min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (G_{hom}^2 + G_{disc}^2 + G_{cell}^2).$$

Et enfin, en utilisant les inégalités (5.25), (5.31) et (5.34), on obtient l'inégalité (5.48).  $\square$

## 5.5 Majoration des termes $T_4$ et $T_5$

Les termes  $T_4$  et  $T_5$  sont les plus compliqués à majorer car nous ne disposons pas d'inégalités issues de la théorie de l'homogénéisation pour la dérivée temporelle. Ce qui justifie l'utilisation d'une norme négative. Et, grâce à cela, nous pouvons borner les termes  $T_4$  et  $T_5$ .

À nouveau, partant de la remarque 5.3, on décompose  $T_4$  comme suit :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{H^2}{\pi^2} \|\phi^\varepsilon \partial_t (c_\varepsilon - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 \leq 3(D_{hom} + D_{disc} + D_{cell}), \quad (5.49)$$

où

$$\begin{aligned} D_{hom} &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{H^2}{\pi^2} \|\phi^\varepsilon(\cdot) \partial_t c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \phi^\varepsilon(\cdot) \partial_t (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2, \\ D_{disc} &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{H^2}{\pi^2} \|\phi^\varepsilon(\cdot) \partial_t ((\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2, \\ \text{et } D_{cell} &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{H^2}{\pi^2} \|\phi^\varepsilon(\cdot) \partial_t (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2. \end{aligned}$$

De même, nous décomposons le terme  $T_5$  sous la forme :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2|E|} \left\| \int_E \phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, x) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2 \leq 3(D_{hom}^b + D_{disc}^b + D_{cell}^b), \quad (5.50)$$

où

$$\begin{aligned} D_{hom}^b &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2|E|} \left\| \int_E \phi^\varepsilon(x) (\partial_t c_\varepsilon(\cdot, x) - \phi^\varepsilon \partial_t (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(x)))) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2, \\ D_{disc}^b &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2|E|} \left\| \int_E \phi^\varepsilon(x) (\partial_t ((\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(x)))) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2, \\ \text{et } D_{cell}^b &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{2|E|} \left\| \int_E \phi^\varepsilon(x) (\partial_t (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, x))) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2. \end{aligned}$$

**Terme d'homogénéisation globale**  $D_{hom}$  et  $D_{hom}^b$

**Lemme 5.5.** Soient  $c_\varepsilon$  la solution du problème (5.1) et  $\tilde{c}_\varepsilon$  définie par (5.2) et (5.8). Nous avons les inégalités suivantes :

$$D_{hom} \lesssim \varepsilon^2 H^2 (1+H)^2 + \varepsilon^2 H^4 \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + H^2 \varepsilon^2 + H^4 (1+\varepsilon)^2, \quad (5.51)$$

$$D_{hom}^b \lesssim \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2. \quad (5.52)$$

*Démonstration.* On commence par rappeler que, pour  $E \in \mathcal{E}_H$ , on a :

$$\begin{aligned} & \|\phi^\varepsilon(\cdot) \partial_t c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \phi^\varepsilon(\cdot) \partial_t (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0,T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 \\ &= \int_0^T \left( \sup_{\varphi \in \dot{H}^1(E) \setminus \{0\}} \frac{(\int_E \phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) \varphi(x) dx)^2}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(E)}^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Majorer les termes  $D_{hom}$  et  $D_{hom}^b$  revient alors à majorer les intégrales suivantes :

$$\int_E \phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) \varphi(x) dx, \quad \text{pour } \varphi \in \dot{H}^1(E)$$

et

$$\int_E \phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) dx.$$

On commence d'abord par décomposer le terme  $\phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon(t,x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)))$  en plusieurs termes. En utilisant l'équation (5.1), on a

$$\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x) = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) + \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x)).$$

En dérivant le terme  $\tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))$ , on a :

$$\begin{aligned} \phi^\varepsilon(x) \partial_t \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) &= \phi^\varepsilon(x) \partial_t \left( c \left( t, x + \varepsilon w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= \phi^\varepsilon(x) (\partial_t c) \left( t, x + \varepsilon w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \left( c \left( t, x + \varepsilon w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right). \end{aligned}$$

On définit  $I_1$  comme suit :

$$I_1(t,x) = -\frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \left( c \left( t, x + \varepsilon w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right).$$

En utilisant l'équation (5.2), on a

$$\phi^\varepsilon(x) \partial_t c \left( t, x + \varepsilon w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) = \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\phi} \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^* \nabla c \left( t, x + \varepsilon w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)$$

On définit le terme  $I_2$  comme suit

$$I_2(t,x) = \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^* \nabla c \left( t, x + \varepsilon w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right).$$

Donc, on a

$$\phi^\varepsilon(x) \partial_t \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) = I_1(t,x) + \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\phi} I_2(t,x).$$

On applique ensuite un développement de Taylor au voisinage de  $x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon}$  sur les termes  $I_1$  et  $I_2$  en utilisant le fait que  $c \in L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(\Omega))$  :

$$I_1(t, x) = -\frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon} \right) - \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \left( \sum_{i=1}^d \nabla \partial_{x_i} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon} \right) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \\ - \varepsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) w_j \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \partial_{x_i, x_j}^2 c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon} + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) (1-s) ds.$$

$$I_2(t, x) = \operatorname{div}(\mathbf{D}^* \nabla c) \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \operatorname{div}(\mathbf{D}^* \nabla \partial_{x_i} c) \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon} + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

On pose  $C_\varepsilon$  la somme des deux restes intégraux de  $I_1 + \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} I_2$ , ie

$$C_\varepsilon(t, x) = - \int_0^1 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) w_j \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \partial_{x_i, x_j}^2 c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon} + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) (1-s) ds \\ + \int_0^1 \sum_{i=1}^d \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \operatorname{div}(\mathbf{D}^* \nabla \partial_{x_i} c) \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^*t}{\varepsilon} + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

On en déduit que

$$\phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) \\ = \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x)) - \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \operatorname{div}(\mathbf{D}^* \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x)) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ + \operatorname{div} \left( \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) - \operatorname{div} \left( \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) \\ + \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \left( \sum_{i=1}^d \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) - \varepsilon C_\varepsilon(t, x) \\ = \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x)) - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ + \sum_{k=1}^d \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right)_i \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \sum_{k=1}^d \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ - \operatorname{div} \left( \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_i^* w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) - \varepsilon C_\varepsilon(t, x) \\ = \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* - \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_i^* w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_i \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ + \sum_{k=1}^d \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) - \varepsilon C_\varepsilon(t, x)$$



où on a utilisé le fait que  $\partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) = \partial_{x_k, x_i}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x)$ . En intercalant le terme

$$\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \mathbf{u}_i^\varepsilon(x) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x),$$

on a

$$\begin{aligned} & \phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) \\ &= \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ & \quad - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^\varepsilon(x)) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_i \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ & \quad + \sum_{k=1}^d \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) - \varepsilon C_\varepsilon(t, x) \\ & \quad + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \mathbf{u}_i^\varepsilon(x) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x). \end{aligned}$$

Par définition, on a :

$$\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \mathbf{u}_i^\varepsilon(x) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) = \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \sum_{k=1}^d w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right)$$

On a

$$c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \sum_{k=1}^d w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right)$$

Ce qui donne

$$\nabla c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \sum_{k=1}^d \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \sum_{k=1}^d w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right)$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^d w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) = \nabla c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \sum_{k=1}^d \nabla w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right).$$

On a

$$\begin{aligned}
 & \phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) \\
 &= \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^\varepsilon(x)) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_i \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^d \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) - \varepsilon C_\varepsilon(t, x) \\
 &\quad + \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \sum_{k=1}^d \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \\
 &= \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^\varepsilon(x)) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_i \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^d \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) - \varepsilon C_\varepsilon(t, x) \\
 &\quad + \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \sum_{k=1}^d \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^d \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \left( \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \mathbf{e}_k \right),
 \end{aligned}$$

ce qui donne encore :

$$\begin{aligned}
 & \phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) \\
 &= \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^\varepsilon(x)) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_i \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^d \left( \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_k \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\
 &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \nabla c_\varepsilon(t, x) - \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \nabla c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) - \varepsilon C_\varepsilon(t, x).
 \end{aligned}$$

Posons

$$I_\varepsilon(t, x) = - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^\varepsilon(x)) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_i \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x)$$

$$M_\varepsilon(t, x) = \sum_{k=1}^d \left( \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_k \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x)$$

$$J_\varepsilon(t, x) = \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right)$$

$$N_\varepsilon(t, x) = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \nabla c_\varepsilon(t, x) - \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \nabla c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right)$$

On a alors

$$\phi^\varepsilon(x) \partial_t (c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x))) = I_\varepsilon(t, x) + J_\varepsilon(t, x) - \varepsilon C_\varepsilon(t, x) + M_\varepsilon(t, x) + N_\varepsilon(t, x).$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} D_{hom} &\leq \frac{H^2}{\pi^2} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|I_\varepsilon + J_\varepsilon - \varepsilon C_\varepsilon + M_\varepsilon + N_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 \\ &\leq \frac{5H^2}{\pi^2} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left( \|I_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 + \|J_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \|C_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 + \|M_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 + \|N_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 \right). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} D_{hom}^b &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{5}{2|E|} \left( \left\| \int_E I_\varepsilon(\cdot, x) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2 + \left\| \int_E J_\varepsilon(\cdot, x) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left\| \int_E C_\varepsilon(\cdot, x) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2 + \left\| \int_E M_\varepsilon(\cdot, x) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2 + \left\| \int_E N_\varepsilon(\cdot, x) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2 \right). \end{aligned}$$

**Remarque 5.3.** La suite de la démonstration consistera à majorer les termes  $I_\varepsilon$ ,  $J_\varepsilon$ ,  $C_\varepsilon$  et  $M_\varepsilon$  et  $N_\varepsilon$  en norme  $L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))$  et en norme  $L^2(0, T; L^1(E))$ . La majoration repose principalement sur les deux arguments suivants :

- utilisation du lemme A.3,
- utilisation de la forme des éléments du maillage :

$$E = \bigcup_{\mathbf{k}}^{N_E} Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon, \quad \forall E \in \mathcal{E}_H.$$

On rappelle que  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon \subset E$ ,  $Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon$  est l'image de  $Y$  par l'application  $T_{\mathbf{k}}^\varepsilon$  définie par

$$T_{\mathbf{k}}^\varepsilon(y) = \mathbf{k}\varepsilon + \varepsilon y.$$

**Majoration du terme  $I_\varepsilon$**

Partant de la remarque 5.3, pour tout  $\varphi \in \dot{H}^1(E)$ , on a :

$$\begin{aligned} &\int_E I_\varepsilon(t, x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_E \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\phi} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^\varepsilon(x)) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_i \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \varphi(x) dx \\ &\quad (5.53) \\ &= - \sum_{z=1}^{N_E} \int_{Y_{\mathbf{z}}^\varepsilon} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \left( \frac{\phi^\varepsilon(x)}{\phi} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^\varepsilon(x)) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_i \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \varphi(x) dx \\ &= - \sum_{z=1}^{N_E} \varepsilon^d \int_Y \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \left( \frac{\phi(y)}{\phi} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi(y) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i(y)) w_k(y) - \left( \mathbf{D}(y) \left( \mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y) \right) \right) \cdot \mathbf{e}_i \right) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \varphi(T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) dy. \end{aligned}$$

L'égalité suivante est vérifiée

$$\int_Y \left( \frac{\phi(y)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi(y) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i(y)) w_k(y) - (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y))) \cdot \mathbf{e}_i \right) dy = 0.$$

En effet, en utilisant le fait que  $\bar{\phi} = \int_Y \phi(y) dy$  et la définition de  $\mathbf{D}_{ik}^*$  (voir (4.10)), on a

$$\begin{aligned} \int_Y \left( \frac{\phi(y)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi(y) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i(y)) w_k(y) - (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y))) \cdot \mathbf{e}_i \right) dy \\ = \mathbf{D}_{ik}^* - \int_Y (\phi(y) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i(y)) w_k(y) - (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y))) \cdot \mathbf{e}_i dy \\ = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent en utilisant le Lemme A.3, il existe une fonction  $\zeta_{ik} \in H(\operatorname{div}, Y) \cap (L^\infty(Y))^d$  telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y \zeta_{ik}(y) = \frac{\phi(y)}{\bar{\phi}} \mathbf{D}_{ik}^* - (\phi(y) \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i(y)) w_k(y) - (\mathbf{D}(y) (\mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y))) \cdot \mathbf{e}_i, \text{ dans } Y \\ \zeta_{ik}(y) \cdot \mathbf{n}_Y(y) = 0, \text{ sur } \partial Y. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_E I_\varepsilon(t, x) \varphi(x) dx &= \sum_{z=1}^{N_E} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \varepsilon^d \int_Y -\operatorname{div}_y \zeta_{ik}(y) \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \varphi(T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) dy \\ &= \sum_{z=1}^{N_E} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \varepsilon^d \int_Y \zeta_{ik}(y) \cdot \nabla_y (\partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \varphi(T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y))) dy \\ &\leq \max_{i,k} \|\zeta\|_{L^\infty(Y)} \sum_{z=1}^{N_E} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \varepsilon^d \int_Y \left| \nabla_y (\partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \varphi(T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y))) \right| dy \\ &\leq \varepsilon \max_{i,k} \|\zeta_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \int_E \left| \nabla (\partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \varphi(x)) \right| dx \\ &\leq \varepsilon \max_{i,k} \|\zeta_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \int_E \left| \nabla \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \varphi(x) + \partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \nabla \varphi(x) \right| dx \\ &\leq \varepsilon \max_{i,k} \|\zeta_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} |E|^{1/2} \left( \|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(E))} \|\varphi\|_{L^2(E)} + \|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; W^{2, \infty}(E))} \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)} \right) \\ &\leq \varepsilon \max_{i,k} \|\zeta_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} |E|^{1/2} \left( D_E \|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(E))} + \|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; W^{2, \infty}(E))} \right) \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)} \\ &\leq \varepsilon \max_{i,k} \|\zeta_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} |E|^{1/2} \left( \frac{H}{\pi} \|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(E))} + \|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; W^{2, \infty}(E))} \right) \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)} \\ &\leq \varepsilon \max_{i,k} \|\zeta_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} |E|^{1/2} \left( \frac{H}{\pi} \|c\|_{L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(E))} + \|c\|_{L^\infty(0, T; W^{2, \infty}(E))} \right) \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)} \end{aligned}$$

car, le domaine  $E$  étant convexe, la constante  $D_E$  est majorée par  $\frac{H}{\pi}$  (voir [PW60]). On en déduit que

$$\|I_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; \dot{H}^{-1}(E))} \lesssim \varepsilon \left( \frac{H}{\pi} + 1 \right) |E|^{1/2}.$$

Donc, on a :

$$\|I_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))} \lesssim \sqrt{T} \varepsilon \left( \frac{H}{\pi} + 1 \right) |E|^{1/2}.$$

En sommant sur tous les éléments  $E$ , on a :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|I_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 T \left(\frac{H}{\pi} + 1\right)^2 \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_H} |E|\right) \lesssim \varepsilon^2 T \left(\frac{H}{\pi} + 1\right)^2 |\Omega|.$$

On obtient finalement

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|I_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 \left(\frac{H}{\pi} + 1\right)^2. \quad (5.54)$$

De même, en prenant  $\varphi = 1$  dans 5.53 , on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_E I_\varepsilon(t,x) dx \right| &\leq \varepsilon \max_{i,k} \|\zeta_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \int_E \left| \nabla (\partial_{x_i, x_k}^2 \tilde{c}_\varepsilon(t,x)) \right| dx \\ &\leq \varepsilon \max_{i,k} \|\zeta_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} |E| \|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(E))} \\ &\leq \varepsilon \max_{i,k} \|\zeta_{i,k}\|_{L^\infty(Y)} |E| \|c\|_{L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(E))} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{|E|} \left\| \int_E I_\varepsilon(t,x) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2 \lesssim |E| \varepsilon^2.$$

En sommant sur tous les éléments  $E$ , on a :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \left\| \int_E I_\varepsilon(t,x) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2 \lesssim \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_H} |E| \lesssim \varepsilon^2 |\Omega| \lesssim \varepsilon^2. \quad (5.55)$$

### Majoration du terme $C_\varepsilon$

Ce terme est majoré comme suit :

$$\left| \int_E C_\varepsilon(t,x) \varphi(x) dx \right| \leq |E|^{1/2} \|C_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times E)} \|\varphi\|_{L^2(E)} \leq |E|^{1/2} D_E \|C_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times E)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)} \quad (5.56)$$

où  $D_E$  est la constante de Poincaré-Wirtinger associée à  $E$ . On peut montrer que  $\|C_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times E)}$  est indépendante de  $\varepsilon$  car  $c \in L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega))$ ,  $w_i \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\phi^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ . En sommant sur tous les éléments, on a

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|C_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H} |E| D_E^2 \|C_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)}^2 \leq \frac{H^2}{\pi^2} |\Omega| \|C_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)}^2$$

en utilisant à nouveau le fait que la constante  $D_E$  est majorée par  $\frac{H}{\pi}$  (voir [PW60]). On obtient finalement

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|C_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 \leq T \frac{H^2}{\pi^2} |\Omega| \|C_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)}^2 \lesssim H^2. \quad (5.57)$$

De même, en prenant  $\varphi = 1$  dans la première partie (5.56), on a :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \left\| \int_E C_\varepsilon(t,x) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2 \leq T \sum_{E \in \mathcal{E}_H} |E| \|C_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)}^2 \leq T |\Omega| \|C_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)}^2. \quad (5.58)$$

**Majoration du terme  $M_\varepsilon$** 

On s'intéresse au terme  $M_\varepsilon$ . On rappelle que :

$$M_\varepsilon(t,x) = \sum_{k=1}^d \left( \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_k \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,x)$$

En multipliant  $M_\varepsilon$  par une fonction  $\varphi \in \dot{H}$  et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_E M_\varepsilon(t,x) \varphi(x) dx & (5.59) \\ &= \sum_{k=1}^d \int_E \left( \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_k \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,x) \varphi(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{z=1}^{N_E} \int_{Y_k^\varepsilon} \left( \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right) - \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_k \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,x) \varphi(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{z=1}^{N_E} \int_Y \varepsilon^d \left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y \left( \mathbf{D}(y) \left( \mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y) \right) \right) - \frac{\mathbf{u}(y)}{\varepsilon} \cdot \left( \mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_k \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \varphi(T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^d \sum_{z=1}^{N_E} \int_Y \varepsilon^d \left( \operatorname{div}_y \left( \mathbf{D}(y) \left( \mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y) \right) \right) - \mathbf{u}(y) \cdot \left( \mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y) \right) + \phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_k \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) \varphi(T_{\mathbf{z}}^\varepsilon(y)) dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

car on a l'égalité suivante (voir (4.7))

$$\mathbf{u}(y) \cdot \left( \mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y) \right) - \operatorname{div}_y \left( \mathbf{D}(y) \left( \mathbf{e}_k + \nabla_y w_k(y) \right) \right) = \phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_k.$$

On en déduit le résultat suivant :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|M_\varepsilon\|_{L^2(0,T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 = 0. \quad (5.60)$$

De même, en prenant  $\varphi = 1$  dans (5.59), on obtient

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \left\| \int_E M_\varepsilon(t,x) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2 = 0. \quad (5.61)$$

**Majoration du terme de  $N_\varepsilon$** 

On rappelle que

$$N_\varepsilon(t,x) = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \nabla c_\varepsilon(t,x) - \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \nabla \left( c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right).$$

En multipliant  $N_\varepsilon$  par une fonction  $\varphi \in \dot{H}$  et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_E N_\varepsilon(t,x) \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_E \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \left( \nabla c_\varepsilon(t,x) - \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \nabla \left( c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \varphi(x) dx \right| \\ & \leq \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \left\| \nabla c_\varepsilon(t,x) - \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \nabla \left( c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(E)} \|\varphi\|_{L^2(E)} \\ & \leq D_E \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \left\| \nabla c_\varepsilon(t,x) - \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \nabla \left( c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(E)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)} \\ & \leq \frac{H}{\pi} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \left\| \nabla c_\varepsilon(t,x) - \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \nabla \left( c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(E)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

On en déduit le résultat suivant :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|N_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 \lesssim \frac{H^2}{\pi^2} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - c\left(\cdot, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* \cdot}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \nabla \left( c_1\left(\cdot, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* \cdot}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2.$$

En utilisant l'inégalité (5.4), on a ;

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|N_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 H^2 \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \quad (5.63)$$

De même, en prenant  $\varphi = 1$  dans 5.62, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \left\| \int_E N_\varepsilon(t,x) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \int_0^T \left( \int_E N_\varepsilon(t,x) dx \right)^2 dt \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \int_0^T |E| \|N_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(E)}^2 dt \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_0^T \|N_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(E)}^2 dt \leq \int_0^T \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|N_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(E)}^2 dt \\ &\leq \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \int_0^T \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \nabla c_\varepsilon(t,\cdot) - c\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \nabla \left( c_1\left(t, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right) \right\|_{L^2(E)}^2 dt. \end{aligned}$$

Toujours, en utilisant l'inégalité (5.4), on a ;

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \left\| \int_E N_\varepsilon(\cdot, x) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2 \lesssim \varepsilon^2 \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2. \quad (5.64)$$

### Majoration du terme $J_\varepsilon$

Considérons le terme  $J_\varepsilon$ . On rappelle que :

$$J_\varepsilon(t,x) = \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,x) \right).$$

Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_E J_\varepsilon(t,x) \varphi(x) dx &= - \int_E \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,x) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ &\quad + \int_{\partial E} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,x) \right) \cdot \mathbf{n}_E(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \int_E J_\varepsilon(t,x) \varphi(x) dx &\lesssim \left\| \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(t,\cdot) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot) \right\|_{L^2(E)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)} \\ &\quad + \left\| \left( \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(t,\cdot) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot) \right) \cdot \mathbf{n}_E \right\|_{L^2(\partial E)} \|\varphi\|_{L^2(\partial E)}. \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore, en utilisant un théorème de trace :

$$\begin{aligned} \int_E J_\varepsilon(t,x) \varphi(x) dx &\lesssim \left\| \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(t,\cdot) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot) \right\|_{L^2(E)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)} \\ &\quad + H^{1/2} \left\| \left( \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(t,\cdot) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot) \right) \cdot \mathbf{n}_E \right\|_{L^2(\partial E)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(E)}. \end{aligned}$$

De l'inégalité (5.4), on a :

$$\left\| \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \nabla \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \varepsilon \nabla \left( c_1 \left( \cdot, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* \cdot}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \lesssim \varepsilon.$$

Elle peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\nabla c_\varepsilon(t, x) = \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \nabla \left( c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) + \mathbf{g}_\varepsilon(t, x), \quad (5.65)$$

avec

$$\|\mathbf{g}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \lesssim \varepsilon.$$

En plus, en utilisant l'inégalité (5.18), on a

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\mathbf{g}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \leq C_9 (H(1+\varepsilon)^2 + H^{-1}\varepsilon^2).$$

En multipliant l'égalité (5.65) par  $\mathbf{D}^\varepsilon$ , on a :

$$\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) = \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \left( c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) + \mathbf{D}^\varepsilon(x) \mathbf{g}_\varepsilon(t, x),$$

et en utilisant la définition de  $c_1$  (4.13), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) &= \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \mathbf{D}^\varepsilon(x) \sum_{k=1}^d \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \mathbf{D}^\varepsilon(x) \mathbf{g}_\varepsilon(t, x) \\ &= \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \mathbf{D}^\varepsilon(x) \mathbf{g}_\varepsilon(t, x). \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) = \varepsilon \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_k} c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \mathbf{D}^\varepsilon(x) \mathbf{g}_\varepsilon(t, x).$$

Les fonctions  $w_i$  et le tenseur  $\mathbf{D}^\varepsilon$  étant bornés, on a

$$\|\mathbf{D}^\varepsilon(\cdot) w(\cdot) \nabla \partial_{x_k} \tilde{c}(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0,T;L^2(E))} \leq \|w\|_{L^\infty(Y)} \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla \partial_{x_k} \tilde{c}\|_{L^2(0,T;L^2(E))}$$

car  $c \in L^\infty(0, T; W^{3,\infty}(\Omega))$ . De plus, en utilisant le caractère borné de  $\mathbf{D}^\varepsilon$

$$\|\mathbf{D}^\varepsilon(\cdot) \mathbf{g}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \lesssim \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)} \|\mathbf{g}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \\ \lesssim \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left( \sum_{i=1}^d \|\nabla \partial_{x_i} c\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 + \|\mathbf{g}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \right) \\ \lesssim \varepsilon^2 \end{aligned}$$



Considérons maintenant le terme

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} H \left\| \left( \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right) \cdot \mathbf{n}_E \right\|_{L^2(0,T;L^2(\partial E))}^2.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \left( \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right) \cdot \mathbf{n}_E \right\|_{L^2(0,T;L^2(\partial E))}^2 \\ = \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \left( \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon w_k \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_k} c \left( \cdot, \cdot - \frac{\mathbf{u}^* \cdot}{\varepsilon} \right) \right) \cdot \mathbf{n}_E \right\|_{L^2(0,T;L^2(\partial E))}^2 \\ + \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| (\mathbf{D}^\varepsilon \mathbf{g}_\varepsilon) \cdot \mathbf{n}_E \right\|_{L^2(0,T;L^2(\partial E))}^2 \\ \lesssim \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_H} |\partial E| + L \|\mathbf{D}\|_{L^\infty(Y)} \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\mathbf{g}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\ \lesssim \frac{\varepsilon^2}{H} + H(1 + \varepsilon)^2 + H^{-1} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait le nombre de faces est de l'ordre du nombre d'éléments, ie  $H^{-d}$  et que  $|\partial E|$  est de l'ordre  $H^{d-1}$  et où  $L$  représente le nombre maximun de faces qu'un élément peu posséder. On obtient alors

$$\begin{aligned} H \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \left\| \left( \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) \cdot \mathbf{n}_E \right\|_{L^2(0,T;L^2(\partial E))}^2 \\ \lesssim (\varepsilon^2 + H^2(1 + \varepsilon)^2 + \varepsilon^2). \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|J_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 \lesssim \varepsilon^2 + (\varepsilon^2 + H^2(1 + \varepsilon)^2). \quad (5.66)$$

On procède maintenant à la majoration de  $\int_E J_\varepsilon(t, x) dx$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E J_\varepsilon(t, x) dx &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \sum_{e \in \partial E} \int_e \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) \cdot \mathbf{n}_e(x) dx \\ &= \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \left[ \mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right] \cdot \mathbf{n}_e(x) d\sigma \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{D} \in C^2(\bar{Y})$ ,  $c_\varepsilon \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ ,  $\tilde{c}_\varepsilon \in L^2(0,T;H^5(\Omega))$  et  $w_i \in H^3(Y)$ , on montre que

$$\mathbf{D}^\varepsilon \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Par conséquent, on a

$$\left[ \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right] \cdot \mathbf{n}_e(x) = 0, \quad \forall e \in \Gamma_H^i.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E J_\varepsilon(t, x) dx &= \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \sum_{e \in \partial E} \int_e \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \left( \nabla w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) \cdot \mathbf{n}_e(x) d\sigma \\
 &= \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \int_e \left[ \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right] \cdot \mathbf{n}_e(x) dx \\
 &= \int_{\partial \Omega} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^d \mathbf{D}^\varepsilon(x) \left( \mathbf{e}_k + \varepsilon \nabla \left( w_k \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \partial_{x_k} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \right) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) dx.
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{D}^\varepsilon$  et  $w_i^\varepsilon$  sont  $\varepsilon$ -périodiques et le fait que  $c$  est  $\Omega$ -périodique et que  $\Omega$  est en forme de boîte, on déduit

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \int_E J_\varepsilon(t, x) dx = 0. \quad (5.67)$$

En rassemblant les inégalités (5.54), (5.57), (5.63), (5.60) et (5.66), on obtient l'inégalité suivante :

$$D_{hom} \lesssim \varepsilon^2 H^2 (1 + H)^2 + \varepsilon^2 H^4 \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + H^2 \varepsilon^2 + H^4 (1 + \varepsilon)^2,$$

De même, en rassemblant les inégalités (5.55), (5.58), (5.64), (5.61) et (5.67), on obtient l'inégalité suivante :

$$D_{hom}^b \lesssim \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2.$$

□

**Terme d'interpolation**  $D_{disc}$  et  $D_{disc}^b$

**Lemme 5.6.** Soient  $c_\varepsilon$  la solution du problème (5.1) et  $\tilde{c}_\varepsilon$  solution de l'équation (5.2). Alors les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$D_{disc} \lesssim H^6 + H^4 \varepsilon^2, \quad (5.68)$$

$$D_{disc}^b \lesssim H^2 + \varepsilon^2. \quad (5.69)$$

*Démonstration.* On rappelle que

$$\begin{aligned}
 \|\phi^\varepsilon(\cdot) \partial_t ((\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0,T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 &= \int_0^T \left( \sup_{\varphi \in \dot{H} \setminus \{0\}} \frac{|\int_E \phi^\varepsilon(x) \partial_t ((\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) \varphi(x) dx|^2}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(E)}^2} \right) dt \\
 &\lesssim \frac{H^2}{\pi^2} \int_0^T \|\phi^\varepsilon(\partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(E)}^2 dt
 \end{aligned} \quad (5.70)$$

où  $\pi_H$  est l'opérateur d'interpolation sur  $X_H$  et la fonction  $\hat{w}^\varepsilon$  est définie pour chaque composante par

$$\hat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right),$$

les fonctions  $w_i$  étant les solutions des problèmes de cellule (4.7). Majorer  $D_{disc}$  revient à majorer l'intégrale suivante :

$$\int_E \phi^\varepsilon(x) (\partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) \varphi(x) dx.$$

En appliquant le développement de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (t, \hat{w}^\varepsilon(x)) = \partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (t, x) + \varepsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

Et comme  $\tilde{c}_\varepsilon(t, x) = c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right)$ ,  $\partial_t c(t, x) = \frac{1}{\phi} \operatorname{div} (D^* \nabla c) (t, x)$  et  $c \in L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(\Omega))$  alors  $\partial_t c \in L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega))$ . Or,  $\partial_t \tilde{c}_\varepsilon(t, x) = \partial_t c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon} \cdot \nabla c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right)$ , on a alors  $\partial_t \tilde{c}_\varepsilon \in L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega))$ . En utilisant un résultat d'interpolation de Lagrange, on obtient

$$\begin{aligned} \|\phi^\varepsilon(\cdot) (\partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (t, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{\dot{H}^{-1}(E)} &\lesssim \frac{H}{\pi} \phi_{max} \left( \|\partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (t)\|_{L^2(E)} + \varepsilon |E|^{1/2} \right) \\ &\lesssim \frac{H}{\pi} \left( H^1 |E|^{1/2} \|\partial_t \tilde{c}_\varepsilon(t)\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} + \varepsilon |E|^{1/2} \right) \\ &\lesssim H^2 |E|^{1/2} \|\partial_t \tilde{c}_\varepsilon\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} + H \varepsilon |E|^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{H^2}{\pi^2} \|\phi^\varepsilon(\cdot) (\partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2 &\lesssim H^6 |\Omega| \|\partial_t \tilde{c}_\varepsilon\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} + H^4 \varepsilon^2 |\Omega| \\ &\lesssim H^6 + H^4 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Considérons  $D_{disc}^b$ . On rappelle que

$$D_{disc}^b = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \left\| \int_E \phi^\varepsilon(x) \partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (t, \hat{w}^\varepsilon(x)) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2.$$

En prenant  $\varphi = 1$  dans (5.70), on a :

$$\begin{aligned} \int_E \phi^\varepsilon(x) \partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (t, \hat{w}^\varepsilon(x)) dx &\leq \phi_{max} |E|^{1/2} \|\partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (t, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(E)} \\ &\lesssim \phi_{max} H^1 |E| \|\partial_t \tilde{c}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{W^{1, \infty}(E)} + \varepsilon |E|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \left\| \int_E \phi^\varepsilon(x) \partial_t (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (\cdot, \hat{w}^\varepsilon(x)) dx \right\|_{L^2(0, T)}^2 \lesssim H^2 + \varepsilon^2.$$

□

**Terme d'homogénéisation locale  $D_{cell}$  et  $D_{cell}^b$**

**Lemme 5.7.** *On reprend les définitions de la proposition 5.5. Alors, les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$D_{cell} \lesssim \varepsilon H + \varepsilon^2 H^2 (1 + H^{4-d}), \quad (5.71)$$

$$D_{cell}^b \lesssim \frac{\varepsilon}{H} + \varepsilon^2 (1 + H^{4-d}). \quad (5.72)$$

*Démonstration.* On rappelle que

$$D_{cell} = \sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\phi^\varepsilon \partial_t (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0, T; \dot{H}^{-1}(E))}^2.$$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} & \|\phi^\varepsilon(\cdot)\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot))\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 & (5.73) \\ &= \int_0^T \left( \sup_{\varphi \in \dot{H} \setminus \{0\}} \frac{|\int_E \phi^\varepsilon(x)\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,x))\varphi(x)dx|^2}{\|\nabla\varphi\|_{L^2(E)}^2} \right) dt & (5.74) \\ &\lesssim \frac{H^2}{\pi^2} \|\phi^\varepsilon(\cdot)\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(\cdot,\hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(\cdot,\cdot))\|_{L^2(E)}^2 \end{aligned}$$

Majorer  $D_{cell}$  revient à majorer l'intégrale suivante :

$$\int_E \phi^\varepsilon(x)\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,x))\varphi(x)dx. \quad (5.75)$$

Partant toujours de la remarque 5.2, sur chaque maille  $E$ , on va séparer cette norme en deux en considérant l'ensemble  $C_E$  et son complémentaire. Sur  $E \setminus C_E$ , on majore simplement de la manière suivante

$$\begin{aligned} & \|\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot))\|_{L^2(E \setminus C_E)} \|\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot))\|_{L^\infty(E \setminus C_E)} \varepsilon |\partial E| \\ & \lesssim \varepsilon H^{d-1}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Sur  $C_E$ , les fonctions  $\varphi_i$  sont de classe  $C^\infty$  et on utilise une inégalité de Taylor

$$\|\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot))\|_{L^2(C_E)} \lesssim \|\nabla\partial_t\pi_H\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(E)} \|\hat{w}^\varepsilon - \tilde{w}^{\varepsilon,H}\|_{L^2(E)}.$$

Et, en utilisant (5.12), nous avons

$$\|\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(\cdot) - \tilde{w}^{\varepsilon,E}(\cdot))\|_{L^2(C_E)}^2 \lesssim \varepsilon^2 H^d (1 + H^{4-d}). \quad (5.77)$$

On déduit des inégalités (5.77) et (5.76)

$$\|\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(\cdot) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot))\|_{L^2(E)}^2 \lesssim \varepsilon H^{d-1} + \varepsilon^2 H^d (1 + H^{4-d}).$$

Et donc, on a :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \|\phi^\varepsilon(\cdot)\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,\cdot))\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 \lesssim \varepsilon H^{-1} + \varepsilon^2 (1 + H^{4-d}),$$

car le nombre de mailles dans  $\mathcal{E}_H$  est de l'ordre de  $H^{-d}$ .

On obtient finalement :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{H^2}{\pi^2} \|\phi^\varepsilon(\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon)(t,\hat{w}^\varepsilon) - \partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon)(t,\tilde{w}^{\varepsilon,E}))\|_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}(E))}^2 \lesssim \varepsilon H + \varepsilon^2 H^2 (1 + H^{4-d}).$$

On rappelle que  $D_{cell}^b$  est défini comme suit

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \left\| \int_E \phi^\varepsilon(x)\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,x)) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2.$$

En prenant  $\varphi = 1$  dans (5.75), on a :

$$\int_E \phi^\varepsilon(x)\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,x)) dx \leq \phi_{max}|E|^{1/2} \|\partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,\tilde{w}^{\varepsilon,E}(x)))\|_{L^2(E)}$$

Par conséquent, on en déduit :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_H} \frac{1}{|E|} \left\| \int_E \partial_t(\pi_H\tilde{c}_\varepsilon(t,\hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{c}_\varepsilon(t,x)) dx \right\|_{L^2(0,T)}^2 \lesssim \varepsilon H^{-1} + \varepsilon^2 (1 + H^{4-d})$$

□

**Proposition 5.5.** Soient  $c_\varepsilon$  la solution du problème (5.1) et  $\tilde{c}_\varepsilon$  définie par (5.2) et (5.8). Les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$T_4 \lesssim \varepsilon^2 H^2 (1+H)^2 + \varepsilon^2 H^4 \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + H^2 \varepsilon^2 + H^4 (1+\varepsilon)^2 + H^6 + H^4 \varepsilon^2 + \varepsilon H + \varepsilon^2 H^2 (1+H^{4-d}), \quad (5.78)$$

$$T_5 \lesssim \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + H^2 + \varepsilon^2 (1+H^{4-d}). \quad (5.79)$$

*Démonstration.* En utilisant les inégalités (5.50), (5.68) et (5.71), on en déduit les inégalités voulues.  $\square$

## 5.6 Majoration des termes $T_6, T_7, T_8, T_9$ et $T_{10}$

L'objectif de section consiste à majorer les termes  $T_6, T_7, T_8$  et  $T_9$ . On rappelle que

$$T_6 = \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^I\}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2, \quad T_7 = \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|(\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2,$$

$$T_8 = \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\xi_\varepsilon^I \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2, \quad T_9 = \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2,$$

$$T_{10} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \int_e \left| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e \right| (\xi_\varepsilon^I)^2 d\sigma.$$

Nous considérons la décomposition suivant que nous allons utiliser pour majorer les termes  $T_7, T_8, T_9$  et  $T_{10}$  :

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|c_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \leq G_{hom}^e + G_{disc}^e + G_{cell}^e,$$

où,

$$G_{hom}^e = \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2,$$

$$G_{disc}^e = \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2,$$

$$\text{et } G_{cell}^e = \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2,$$

la fonction  $\hat{w}^\varepsilon$  est définie pour chaque composante par  $\hat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$ , et les fonctions  $w_i$  sont les solutions des problèmes de cellule (4.7).

De même, pour majorer le terme  $T_6$ , on considère la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\nabla (c_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 &\leq \sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\nabla (c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2, \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\nabla (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2, \end{aligned}$$

**Terme d'homogénéisation globale  $G_{hom}^e$** 

**Lemme 5.8.** Les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$G_{hom}^e = \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \lesssim \varepsilon^2 \left( H + \frac{1}{H} \right). \quad (5.80)$$

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\nabla (c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \lesssim \frac{\varepsilon^2}{H} + H(1 + \varepsilon)^2. \quad (5.81)$$

*Démonstration.* Soit  $e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}$ . Posons  $v(t, x) = c_\varepsilon(t, x) - \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))$ . En passant à l'élément de référence, on a

$$\begin{aligned} \|v(t, \cdot)\|_{L^2(e)} &\leq |e|^{1/2} \|v(t, \cdot)\|_{L^2(\hat{e})} \leq \hat{C}|e|^{1/2} \left( \|\hat{v}(t, \cdot)\|_{L^2(\hat{e})} + \|\widehat{\nabla} \hat{v}(t, \cdot)\|_{L^2(\hat{e})} \right) \\ &\leq \hat{C} \frac{|e|^{1/2}}{|E|^{1/2}} \left( \|v(t, \cdot)\|_{L^2(E)} + H \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^2(E)} \right). \end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^2(e)}^2 \leq 2\hat{C} \frac{|e|}{|E|} \left( \|v(t, \cdot)\|_{L^2(E)}^2 + H^2 \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^2(E)}^2 \right).$$

En sommant sur toutes les faces, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 &\lesssim \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \frac{L\hat{C}}{H} \|c_\varepsilon(t, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} L\hat{C}H \|\nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \nabla \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(E))}^2 \end{aligned}$$

avec  $L$  le nombre maximum de faces d'un élément. En utilisant l'inégalité (5.24), on a

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \lesssim L\hat{C} \left( \frac{\varepsilon^2}{H} + H\varepsilon^2 \right) \leq L\hat{C}\varepsilon^2 \left( H + \frac{1}{H} \right)$$

ce qui donne l'inégalité (5.80).

Pour établir l'inégalité (5.81), nous allons procéder comme pour l'inégalité (5.24). On commence par décomposer le terme

$$\|\nabla (c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2$$

comme suit :

$$\begin{aligned} \|\nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \nabla \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(e))} &\leq \left\| \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{i=1}^d \nabla \hat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))} \\ &+ \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \hat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \nabla \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))}. \quad (5.82) \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite de (5.82) peut être majoré en utilisant l'inégalité (5.4). En effet, on a :

$$\begin{aligned} \nabla \left( c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) &= \nabla \tilde{c}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \sum_{i=1}^d \nabla \left( w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \left( \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x), \end{aligned}$$

où, nous avons utilisé le fait  $\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$  et donc  $\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) = \mathbf{e}_i + \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \nabla \left( c_\varepsilon(t, x) - c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) &= \nabla c_\varepsilon(t, x) - \sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x) \\ &\quad - \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(t, x). \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\left\| \left( \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right) \cdot \mathbf{n}_e \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))} \\ &\lesssim \left\| \left( \nabla \left( c_\varepsilon(t, x) - c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \cdot \mathbf{n}_e \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))} \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^d \left\| \left( w_i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right) \cdot \mathbf{n}_e \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))}. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le fait que  $c \in L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(\Omega))$  et  $w_i \in W^{1, \infty}(\Omega)$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^d \left\| \left( w_i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right) \cdot \mathbf{n}_e \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))} \lesssim |e|^{1/2}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} &\sum_{e \in \Gamma_H^i} \left\| \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))}^2 \\ &\lesssim 2\varepsilon^2 \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H, D}} |e| + 2 \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H, D}} \left\| \left( \nabla \left( c_\varepsilon(t, x) - c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \cdot \mathbf{n}_e \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))}^2 \\ &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{H} + \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H, D}} \left\| \left( \nabla \left( c_\varepsilon(t, x) - c \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon c_1 \left( t, x - \frac{\mathbf{u}^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \cdot \mathbf{n}_e \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))}^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (5.18), on a

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i} \left\| \nabla c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - \sum_{i=1}^d \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(\cdot) \partial_{x_i} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))}^2 \lesssim \frac{\varepsilon^2}{H} + H(1 + \varepsilon)^2 + H^{-1}\varepsilon^2.$$

d'où l'inégalité (5.81). □

**Terme d'interpolation**  $G_{disc}^e$ 

**Lemme 5.9.** Les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \lesssim H^5 + H^3 \varepsilon^2, \quad (5.83)$$

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\nabla(\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \lesssim H^3 + H \varepsilon^2. \quad (5.84)$$

*Démonstration.* En utilisant le développement de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) = (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, x) + \varepsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

Puis, en utilisant le fait que  $\tilde{c}_\varepsilon \in L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega))$  et  $w \in W^{1,\infty}(\Omega)$  et en utilisant des résultats d'interpolation classiques  $\|\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^2(e)} \lesssim H^{5/2} |\tilde{c}|_{H^3(E)}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 &\lesssim \sum_{e \in \Gamma_H^i} \left( H^5 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^3(e))}^2 + H^3 \varepsilon^2 |e| \right) \\ &\lesssim \sum_{e \in \Gamma_H^i} \left( H^5 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega))}^2 |e| + H^3 \varepsilon^2 |e| \right) \\ &\lesssim H^5 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega))}^2 + H^3 \varepsilon^2 \\ &\lesssim H^5 + H^3 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (5.83).

Pour montrer l'inégalité (5.84), on considère le développement de Taylor avec reste intégral suivant :

$$\nabla(\tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x))) = \nabla(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, x) + \varepsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^d w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} (\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon) \left( t, x + \varepsilon s w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

Puis, en utilisant le fait que  $\tilde{c}_\varepsilon \in L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega))$  et  $w \in W^{1,\infty}(\Omega)$  et en utilisant des résultats d'interpolation classiques  $\|\nabla(\tilde{c}_\varepsilon - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^2(e)} \lesssim H^{3/2} |\tilde{c}|_{H^3(E)}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\nabla(\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 &\lesssim \sum_{e \in \Gamma_H^i} \left( H^3 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^3(e))}^2 + H \varepsilon^2 |e| \right) \\ &\lesssim \sum_{e \in \Gamma_H^i} \left( H^3 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega))}^2 |e| + H \varepsilon^2 |e| \right) \\ &\lesssim H^3 |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega))}^2 + H \varepsilon^2 \\ &\lesssim H^3 + H \varepsilon^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (5.84). □

**Terme d'homogénéisation locale**  $G_{cell}^e$ 

**Lemme 5.10.** L'inégalité suivante est vérifiée :

$$G_{cell}^e = \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \lesssim \frac{\varepsilon^2}{H} + \varepsilon^2 H^{7-d}, \quad (5.85)$$

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\nabla(\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \lesssim \frac{\varepsilon}{H} + \varepsilon H^{7-d} + \varepsilon H^{2-d}. \quad (5.86)$$



*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; L^2(e))}^2 &= \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon - \tilde{w}^\varepsilon(\cdot))\|_{L^2(0, T; L^2(e))}^2 \\
 &\leq \|\nabla \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))}^2 \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\hat{w}^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{L^2(e)}^2 \\
 &\leq \|\nabla \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))}^2 \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\varepsilon w^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2(e)}^2 \\
 &\leq \varepsilon^2 \|\nabla \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))}^2 \|w^\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} |e|.
 \end{aligned}$$

De plus, utilisant le fait que  $\tilde{c}_\varepsilon \in L^2(0, T; H^5(\Omega))$ , on montre que  $\|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(E))}$  est bornée. En effet, en utilisant le résultat d'interpolation suivant ( voir [BS07] ) : il existe une constant  $C$  indépendante de  $H$  telle que

$$|v - \pi_H v|_{W^{i, \infty}(\Omega)} \leq CH^{m-i-d/p} \|v\|_{W^{m, p}(\Omega)}, \quad \forall v \in W^{m, p}(\Omega),$$

on a :

$$\|\nabla \pi_H \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega))} + CH^{4-d/2} |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; H^{k+3}(\Omega))} \lesssim (1 + H^{4-d/2}). \quad (5.87)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \|\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; L^2(e))}^2 &\leq \varepsilon^2 (1 + H^{8-d}) \|w^\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} |e| \\
 &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{H} + \varepsilon^2 H^{7-d}
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que  $\forall e \in \Gamma_H, \hat{w}^\varepsilon(x) = x + \varepsilon w^\varepsilon(x)$  et  $\tilde{w}^\varepsilon, H(x) = x$  et où on a utilisé le fait le nombre face est de l'ordre du nombre d'élément, ie  $H^{-d}$ . Ce qui donne l'inégalité (5.85).

Considérons le terme  $\sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0, T; L^2(e))}^2$ . En utilisant la définition de  $\pi_{\varepsilon, H}$ ,

on a :

$$\begin{aligned}
 \nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(t, x)) &= \nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(t, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(x))) \\
 &= \sum_{i=1}^d \nabla \hat{w}_i^\varepsilon(x) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x)) - \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E}(x) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(x)).
 \end{aligned}$$

En intercalant le terme  $\nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E}(x) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(t, \hat{w}^\varepsilon(x))$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \|\nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0, T; L^2(e))} &\leq \left\| \sum_{i=1}^d (\nabla \hat{w}_i^\varepsilon - \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E}) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))} \\
 &\quad + \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, E} (\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \tilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))) \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))} \\
 &\quad (5.88)
 \end{aligned}$$

Considérons le premier terme du membre de droite de (5.88). On a :

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{i=1}^d \left( \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon - \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \right) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))} \\
 & \leq \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \left( \widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \right) \right\|_{L^2(e)} \left\| \sup_{i \in \{1, \dots, d\}} \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(e))} \\
 & \leq \varepsilon \|\nabla w^\varepsilon(x)\|_{L^2(e)} \left\| \sup_{i \in \{1, \dots, d\}} \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \\
 & \leq \varepsilon |e|^{1/2} \|\nabla w^\varepsilon(x)\|_{L^\infty(e)} \left\| \sup_{i \in \{1, \dots, d\}} \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}.
 \end{aligned}$$

De plus, utilisant le fait que  $\tilde{c}_\varepsilon \in L^2(0,T;H^5(\Omega))$ , on montre que  $\|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}$  est bornée. En effet, en utilisant le résultat d'interpolation suivant ( voir [BS07] ) : il existe une constant  $C$  indépendante de  $H$  telle que

$$\|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} + CH^{4-d/2} |\tilde{c}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;H^5(\Omega))} \lesssim (1 + H^{4-d/2}).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in \Gamma_H^i} \left\| \sum_{i=1}^d \left( \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon - \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \right) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 & \lesssim \varepsilon^2 (1 + H^{8-d}) \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} |e| \\
 & \lesssim \frac{\varepsilon^2}{H} (1 + H^{8-d}), \tag{5.89}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait le nombre face est de l'ordre du nombre d'élément, ie  $H^{-d}$ .

Considérons le terme  $\left\| \sum_{i=1}^d \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \left( \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon,E}(\cdot)) \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))}$ . On a

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \left( \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}) (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon,E}(\cdot)) \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))} \\
 & \leq \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,E} \right\|_{L^\infty(e)} \sup_i \left\| \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon,E}(\cdot)) \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))}
 \end{aligned}$$

Partant toujours de la remarque 5.2, on introduit l'ensemble

$$C_E^e = \left\{ x \in E \mid \text{dist}(x, 2\varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)}) \subset E \right\} \cap e.$$

Alors comme  $\widehat{w}^\varepsilon(x) = x + \varepsilon w^\varepsilon(x)$ , donc  $\widehat{w}^\varepsilon(x) \in e \forall x \in C_E^e$ .

On va donc majorer le terme  $\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon,E}(\cdot))$  en le séparant en deux

$$\begin{aligned}
 & \left\| \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon,E}(\cdot)) \right\|_{L^2(e)}^2 \\
 & = \left\| \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon,E}(\cdot)) \right\|_{L^2(C_E^e)}^2 \\
 & \quad + \left\| \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon (\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon,E}(\cdot)) \right\|_{L^2(e \setminus C_E^e)}^2. \tag{5.90}
 \end{aligned}$$

On a donc les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))\|_{L^2(C_E^e)} &\leq \|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))\|_{L^2(C_E^e)} \\ &\lesssim \|\nabla \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^\infty(E)} \|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon, E}\|_{L^2(e)} \\ &\lesssim \|\nabla \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^\infty(E)} \|\varepsilon w^\varepsilon(x)\|_{L^2(e)} \\ &\lesssim \|\nabla \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^\infty(E)} \varepsilon^{1/2} |e|^{1/2} \|w^\varepsilon\|_{L^\infty(e)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (5.87), on a

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))\|_{L^2(C_E^e)}^2 &\lesssim \|\nabla \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon)\|_{L^\infty(E)}^2 \varepsilon |e| \|w^\varepsilon\|_{L^\infty(e)}^2 \\ &\lesssim (1 + H^{3-d}) \varepsilon |e| \|w^\varepsilon\|_{L^\infty(e)}^2 \\ &\lesssim (1 + H^{3-d}) \varepsilon |e|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))\|_{L^2(C_E^e)}^2 &\lesssim \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} (1 + H^{3-d}) \varepsilon |e| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{H} + \varepsilon H^{2-d}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Sur  $e \setminus C_E^e$ , on utilise le fait que

$$\begin{cases} |e \setminus C_E^e| \lesssim H \varepsilon & \text{si } d = 2, \\ |e \setminus C_E^e| \lesssim H^2 \varepsilon & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))\|_{L^2(e \setminus C_E^e)}^2 &\lesssim \|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))\|_{L^\infty(e \setminus C_E^e)}^2 |e \setminus C_E^e| \\ &\lesssim \varepsilon H + \varepsilon H^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i} \|\partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))\|_{L^2(e \setminus C_E^e)}^2 \lesssim \frac{\varepsilon}{H}. \quad (5.92)$$

En utilisant les inégalités (5.91) et (5.92), on a :

$$\sum_{e \in \Gamma_H^i} \left\| \sum_{i=1}^d \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon, E} (\partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}) (\cdot, \widehat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon) (\cdot, \widetilde{w}^{\varepsilon, E}(\cdot))) \right\|_{L^2(0, T; L^2(e))}^2 \lesssim \frac{\varepsilon}{H} + \varepsilon H^{5-d}.$$

□

**Proposition 5.6.** Soient  $c_\varepsilon$  la solution du problème (5.1) et  $\tilde{c}_\varepsilon$  définie par (5.2) et (5.8), on a les inégalités suivantes :

$$T_6 \lesssim \varepsilon^2 + H^2(1 + \varepsilon)^2 + \varepsilon^2 H^2 + H^4 + \varepsilon + \varepsilon H^{3-d} + \varepsilon H^{8-d}, \quad (5.93)$$

$$T_7 \lesssim \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^2 H^4 + H^6 + \varepsilon^2 H^{8-d}), \quad (5.94)$$

$$T_8 \lesssim \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^2 H^4 + H^6 + \varepsilon^2 H^{8-d}), \quad (5.95)$$

$$T_9 \lesssim \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{H^2} + \varepsilon^2 H^2 + H^4 + \varepsilon^2 H^{6-d}, \quad (5.96)$$

$$T_{10} \lesssim \varepsilon^2 + H^2(1 + \varepsilon)^2 + \varepsilon^2 H^2 + H^4 + \varepsilon + \varepsilon H^{3-d} + \varepsilon H^{8-d}. \quad (5.97)$$

*Démonstration.* Soit  $e \in E_1 \cap E_2$  une face interne. On a

$$(\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\xi_\varepsilon^I]_e \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} + \{\xi_\varepsilon^I\}_e \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon}$$

et comme  $\xi_\varepsilon^I(t) \in H^1(\Omega)$  et que  $\mathbf{u} \in C(\Omega)$  alors  $[\xi_\varepsilon^I]_e \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} = 0$  pour toute face  $e \in \Gamma_H^i$ . On obtient alors

$$(\xi_\varepsilon^I)^{upw} \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} = \{\xi_\varepsilon^I\}_e \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\xi_\varepsilon^I|_{E_1} + \xi_\varepsilon^I|_{E_2}) \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} T_7 &= \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \left\| \frac{1}{2} (\xi_\varepsilon^I|_{E_1} + \xi_\varepsilon^I|_{E_2}) \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon} \right\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \leq \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\ &\leq \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \leq \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)}^2 H (G_{hom}^e + G_{disc}^e + G_{cell}^e). \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (5.80), (5.83) et (5.85), on en déduit

$$T_7 \lesssim \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^2 H^4 + H^6 + \varepsilon^2 H^{8-d}),$$

$$\begin{aligned} T_8 &= \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\xi_\varepsilon^I \frac{\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_e}{\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \leq H \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (G_{hom}^e + G_{disc}^e + G_{cell}^e) \\ &\lesssim \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^2 H^4 + H^6 + \varepsilon^2 H^{8-d}). \end{aligned}$$

$$T_9 = \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \frac{\sigma_e}{H_e} \|\xi_\varepsilon^I\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \lesssim \frac{1}{H} (G_{hom}^e + G_{disc}^e + G_{cell}^e) \lesssim \left( \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{H^2} + \varepsilon^2 H^2 + H^4 + \varepsilon^2 H^{6-d} \right).$$

$$\begin{aligned} T_{10} &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_{H,D}} \int_e \left| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_e \right| (\xi_\varepsilon^I)^2 d\sigma \lesssim \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (G_{hom}^e + G_{disc}^e + G_{cell}^e) \\ &\lesssim \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \varepsilon^2 H + \frac{\varepsilon^2}{H} + \varepsilon^2 H^3 + H^5 + \varepsilon^2 H^{7-d} \right). \end{aligned}$$

De même, en utilisant les inégalités (5.81), (5.84) et (5.86), on en déduit

$$\begin{aligned} T_6 &= \sum_{e \in \Gamma_H^i} \frac{H_e}{\sigma_e} \|\{\mathbf{D}^\varepsilon \nabla \xi_\varepsilon^I\}_e\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\ &\leq \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \frac{H_e}{\sigma_e} \lambda_{max}^2 \|\nabla (c_\varepsilon(\cdot, \cdot) - (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot))))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2, \\ &\quad + \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \frac{H_e}{\sigma_e} \lambda_{max}^2 \|\nabla (\tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\ &\quad + \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \frac{H_e}{\sigma_e} \lambda_{max}^2 \|\nabla (\pi_H \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \hat{w}^\varepsilon(\cdot)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{c}_\varepsilon(\cdot, \cdot))\|_{L^2(0,T;L^2(e))}^2 \\ &\lesssim \lambda_{max}^2 (\varepsilon^2 + H^2(1 + \varepsilon)^2 + \varepsilon^2 H^2 + H^4 + \varepsilon + \varepsilon H^{3-d} + \varepsilon H^{8-d}). \end{aligned}$$

□

## Étape 3

## 5.7 Démonstration du théorème 5.2

On termine la démonstration du théorème 5.2 en utilisant les inégalités établies précédemment.

*Démonstration.* En utilisant les inégalités (5.46), (5.47), (5.48), (5.78), (5.79), (5.93), (5.94), (5.95) et (5.97), on en déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
& \|\xi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 \\
& \lesssim \frac{\varepsilon}{H} + \varepsilon H^{7-d} + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^2 H^{6-d} + H^4 + \varepsilon^2 + H^{6-d} \varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^4 + \frac{\varepsilon}{H} + H^6 \\
& + \frac{1}{\lambda_{min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \varepsilon^2 + H^{6-d} \varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^4 + \frac{\varepsilon}{H} + H^6 \right) + \varepsilon^2 H^2 (1+H)^2 + \varepsilon^2 H^4 \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\
& + H^2 \varepsilon^2 + H^4 (1+\varepsilon)^2 + H^6 + H^4 \varepsilon^2 + \varepsilon H + \varepsilon^2 H^2 (1+H^{4-d}) \\
& + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + H^2 + \varepsilon^2 (1+H^{4-d}) \\
& + \varepsilon^2 + H^2 (1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 H^2 + H^4 + \varepsilon + \varepsilon H^{3-d} + \varepsilon H^{8-d} \\
& + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^2 H^4 + H^6 + \varepsilon^2 H^{8-d}) \\
& + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\varepsilon^2 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^2 H^4 + H^6 + \varepsilon^2 H^{8-d}) \\
& + \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{H^2} + \varepsilon^2 H^2 + H^4 + \varepsilon^2 H^{6-d} \\
& + \varepsilon^2 + H^2 (1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 H^2 + H^4 + \varepsilon + \varepsilon H^{3-d} + \varepsilon H^{8-d}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait  $\varepsilon < H$ , on a :

$$\begin{aligned}
& \|\xi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 \\
& \lesssim \frac{\varepsilon}{H} + H^{8-d} + \varepsilon^2 + H^4 + H^6 + \frac{\varepsilon}{H} \\
& + \frac{1}{\lambda_{min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \varepsilon^2 + H^{8-d} + \frac{\varepsilon}{H} + H^6 \right) + H^4 (1+H)^2 \\
& + H^4 (1+\varepsilon)^2 + H^6 + H^4 (1+H^{4-d}) + \varepsilon^2 \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + H^2 (1+H^{4-d}) \\
& + H^2 (1+\varepsilon)^2 + \varepsilon + H^{9-d} + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\varepsilon^2 + H^4 + H^6 + H^{10-d}) \\
& + \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{H^2} + H^2 (1+\varepsilon)^2 + \varepsilon + H^{4-d} + H^{9-d}.
\end{aligned}$$

Lorsque  $H$  et  $\varepsilon$  tendent vers 0, on peut majorer  $H^k$  par  $H$  pour  $k \geq 1$  et  $\varepsilon^2$  par  $\varepsilon$ . Alors, en utilisant le fait que  $d \leq 3$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\xi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\mathcal{E}_H))}^2 & \lesssim \varepsilon + H + \frac{\varepsilon}{H} + \frac{1}{\lambda_{min}} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \varepsilon^2 + H + \frac{\varepsilon}{H} \right) \\
& + \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\varepsilon + H).
\end{aligned}$$

□



## Chapitre 6

# Mise en oeuvre de la méthode multi-échelle pour la simulation du problème de traceur

### Sommaire

---

<b>6.1 Construction du maillage grossier</b> . . . . .	<b>134</b>
6.1.1 Construction d'un maillage grossier Cartésien . . . . .	134
6.1.2 Construction d'un maillage grossier à l'aide du partitionneur Métis . . . . .	134
<b>6.2 Méthode multi-échelle</b> . . . . .	<b>134</b>
6.2.1 Définition des problèmes de cellules . . . . .	135
6.2.2 Construction de l'espace d'approximation grossier sur les mailles agglomérées . . . . .	135
6.2.3 Construction de la base multi-échelle pour une maille grossière . . . . .	136
6.2.4 Définition du problème grossier . . . . .	137
6.2.5 Couplage avec l'équation de Darcy . . . . .	137
6.2.6 Autres conditions aux limites pour les problèmes de cellule . . . . .	138
6.2.7 La méthode du domaine élargi dite " Oversampling technique " . . . . .	138
<b>6.3 Stratégies de mise à jour des fonctions de base multi-échelles</b> . . . . .	<b>139</b>
6.3.1 Stratégie 1 . . . . .	139
6.3.2 Stratégie 2 . . . . .	139
<b>6.4 Résultats numériques</b> . . . . .	<b>139</b>
6.4.1 Exemple 1 : Cas d'un champ de vitesse périodique . . . . .	140
6.4.2 Exemple 2 : Perméabilité homogène . . . . .	142
6.4.3 Exemple 3 : SPE10 . . . . .	143

---

Nous montrons, dans ce chapitre, comment la méthode multi-échelle basée sur des éléments finis de type Galerkin Discontinus, introduite et étudiée au chapitre 5, peut être mise en oeuvre pour résoudre l'équation de convection-diffusion du système (3.1). Nous commencerons par décrire deux algorithmes implémentés pour générer le maillage grossier, l'un produisant un maillage cartésien, l'autre un maillage non structuré fait d'agglomérats de mailles fines. Nous rappellerons ensuite la méthode proposée dans [BBC<sup>+</sup>12] qui permet de construire une base de polynômes orthonormée sur des mailles grossières de forme quelconque. Ceci nous permettra d'introduire les éléments finis multi-échelles et nous verrons à cette occasion comment définir les conditions aux limites des problèmes de cellule afin d'obtenir des solutions plus précises. Nous décrirons enfin deux stratégies de mise à jour des fonctions de base au cours de la simulation.

## 6.1 Construction du maillage grossier

On considère un maillage  $\mathcal{E}_h$  appelé maillage fin sur lequel sont définis les paramètres pétro-physiques (la perméabilité  $\mathbf{K}$ , la porosité  $\phi$ , les paramètres de la dispersion). On note  $E$  un élément de ce maillage. On construit un maillage  $\mathcal{E}_H$  à partir d'agglomérations d'éléments du maillage fin  $\mathcal{E}_h$ . On note  $K$  un élément du maillage  $\mathcal{E}_H$  et  $R_K$  l'ensemble des éléments fins qui le composent ( $K = \bigcup_{E \in R_K} E$ ). Deux algorithmes, décrits dans les paragraphes qui suivent, ont été mis en oeuvre pour générer le maillage grossier.

### 6.1.1 Construction d'un maillage grossier Cartésien

Dans le cas où le maillage  $\mathcal{E}_h$  est Cartésien, la façon la plus simple de construire le maillage  $\mathcal{E}_H$  est de regrouper les mailles fines à partir d'une suite d'entiers donnée par l'utilisateur dans chaque direction de l'espace (voir figure 6.1). Cette méthode, bien que très simple, ne peut être mise en oeuvre sur des maillages plus généraux et ne tient pas compte des variations spatiales des paramètres pétrophysiques.

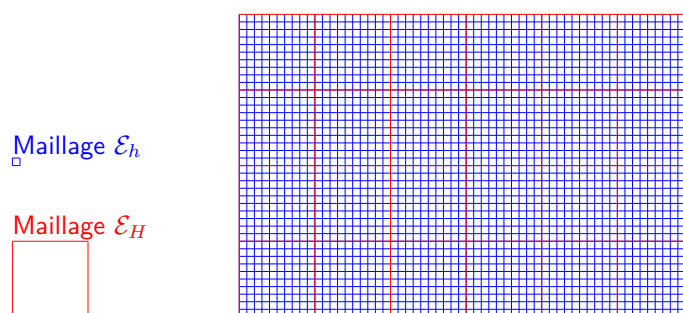


FIGURE 6.1 – Exemple de maillage grossier Cartésien

### 6.1.2 Construction d'un maillage grossier à l'aide du partitionneur Métis

Pour pouvoir travailler sur des maillages plus généraux, un second algorithme utilisant le partitionneur Métis a été mis en oeuvre. Ici l'utilisateur fixe simplement le nombre de mailles grossières souhaité et le partitionneur regroupe les mailles fines en sous-domaines comme cela est fait au début d'une simulation parallèle. Le découpage est effectué sur un graphe où chaque maille est représentée par une feuille et chaque lien est constitué d'une face. Les variations spatiales des paramètres pétrophysiques étant liées aux changements de lithologies dans le réservoir, ces dernières peuvent être utilisées pour guider le partitionneur lors de ses regroupements. Il suffit pour cela de pondérer le graphe en choisissant un poids adapté lorsque deux lithologies existent de part et d'autre d'une face. Ce poids peut être réglé en fonction de la différence en moyenne du champ de perméabilité ou de porosité, par exemple. Cette seconde idée qui devrait permettre de limiter les variations des paramètres pétrophysiques le long des interfaces des mailles grossières et d'améliorer la précision de la méthode multi-échelle n'a pu être complètement validée au cours de cette thèse.

Nous détaillons maintenant la mise en oeuvre, pour le problème du traceur, de la méthode multi-échelle introduite au chapitre 5.

## 6.2 Méthode multi-échelle

Nous rappelons tout d'abord la définition des problèmes de cellules.



### 6.2.1 Définition des problèmes de cellules

Pour chaque maille  $K \in \mathcal{E}_H$ , on considère la fonction  $\tilde{w}_i^{n+1,K}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1}(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^{n+1,K}(x) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}(x)) \nabla \tilde{w}_i^{n+1,K}(x) \right) &= \phi(x) \mathbf{u}^{*,n+1,K} \cdot \mathbf{e}_i, \forall x \in K, \\ \tilde{w}_i^{n+1,K}(x) &= x_i, \forall x \in \partial K, \end{cases} \quad (6.1)$$

où

$$\mathbf{u}^{*,n+1,K} = \frac{\int_K \mathbf{u}^{n+1}(x) dx}{\int_K \phi(x) dx}.$$

On construit ensuite le vecteur  $\tilde{w}^{n+1,K}$  ayant pour composantes les solutions des problèmes (6.1) comme suit :

$$\forall K \in \mathcal{E}_H, \quad \left( \tilde{w}_{|K}^{n+1} \right)_i = \tilde{w}_i^{n+1,K}.$$

Ces fonctions vont nous permettre d'intégrer, par composition, les variations spatiales des paramètres pétrophysiques dans les fonctions de base définies sur le maillage grossier. Dans le paragraphe qui suit, nous rappelons comment construire une telle base sur des mailles grossières telles qu'obtenues avec l'algorithme décrit en 6.1.2.

### 6.2.2 Construction de l'espace d'approximation grossier sur les mailles agglomérées

Comme les éléments agglomérés peuvent avoir des formes diverses, les méthodes classiques des éléments finis ne permettent pas de construire une base polynômiale dans un élément aggloméré  $K$ . Nous avons ici appliqué la méthode proposée dans [BBC<sup>+</sup>12] pour construire une base orthonormée de l'espace  $\mathbb{P}_d^k(K)$ .

#### Orthonormalisation

Pour un élément  $K \in \mathcal{E}_H$ , on note  $N_{\text{dof}}^K$  le nombre d'éléments de la base de l'espace  $\mathbb{P}_d^k(K)$  et  $(\hat{\varphi}_i)_{i \in \{1, \dots, N_{\text{dof}}^K\}}$  une base de cet espace. Un exemple classique consiste à prendre la base des monômes suivante

$$\hat{\varphi}_i = \{\mathbb{M}_d^\alpha(\mathbf{x})\}_{\{\alpha \in \mathbb{N}^d, \|\alpha\| \leq k\}}, \quad \mathbb{M}_d^\alpha(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}. \quad (6.2)$$

À partir de cette base, nous appliquons l'algorithme modifié de Gram-Schmidt pour construire une nouvelle base  $(\varphi_i)_{i \in \{1, \dots, N_{\text{dof}}^K\}}$ . Cet algorithme est décrit comme suit :

#### Construction d'une base polynomiale dans un élément aggloméré $K$

1. for  $i = 0$  to  $N_{\text{dof}}^K - 1$

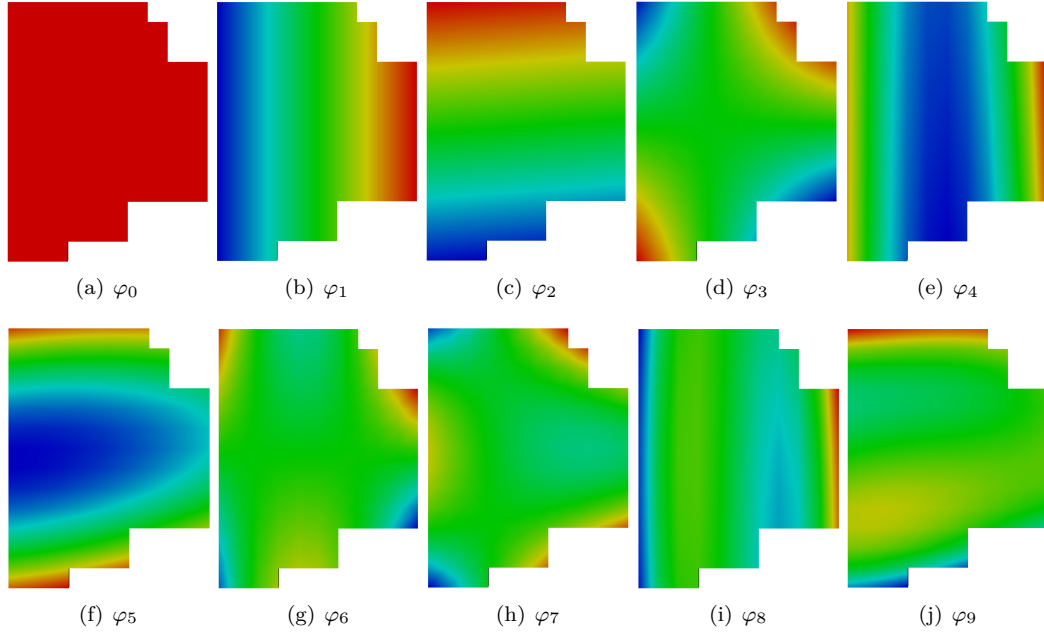
(a) for  $j = 0$  to  $i - 1$

i.  $r_{ij}^K = \int_K \hat{\varphi}_i^K(x) \varphi_j^K(x) dx;$

ii.  $\hat{\varphi}_i^K = \hat{\varphi}_i^K - r_{ij}^K \varphi_j^K;$

2.  $r_{ii}^K = \sqrt{\int_K \hat{\varphi}_i^K(x) \hat{\varphi}_i^K(x) dx};$

3.  $\hat{\varphi}_i^K = \hat{\varphi}_i^K / r_{ii}^K;$


 FIGURE 6.2 – Exemple de fonctions de bases  $\mathbb{P}_2^3$ 

$$4. \varphi_i^K = \widehat{\varphi}_i^K;$$

Notons qu'ici les coordonnées  $\mathbf{x}$  sont exprimées dans le repère  $(\vec{G}_K, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  où  $\vec{G}_K$  représente le centre de gravité de l'élément  $K$  et les  $\vec{e}_i$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Comme cela a été noté dans [BBC<sup>+</sup>12], un meilleur choix, permettant en particulier de contenir le conditionnement de la matrice de masse pour des éléments très déformés, consisterait à exprimer les coordonnées  $\mathbf{x}$  dans le repère  $(\vec{G}_K, e_{1,K}, e_{2,K}, e_{3,K})$  où  $e_{1,K}$ ,  $e_{2,K}$  et  $e_{3,K}$  correspondent aux principaux axes d'inertie de la maille  $K$ .

On définit alors l'espace  $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{E}_H)$  comme suit

$$\mathbb{P}_d^k(\mathcal{E}_H) = \bigcup_{K \in \mathcal{E}_H} \mathbb{P}_d^k(K)$$

en prenant, pour chaque  $\mathbb{P}_d^k(K)$ , la base construite grâce à la procédure décrite précédemment. Des exemples de fonctions de base obtenues avec cet algorithme sont données sur la figure 6.2.

**Remarque 6.1.** 1. À partir des coefficients  $r_{ij, i, j \in \{1, \dots, N_K^{\text{dof}}\}}^K$ , on peut évaluer la base  $(\varphi_i)_{i \in \{1, \dots, N_K^{\text{dof}}\}}$  ainsi que toutes ses dérivées. Cette propriété est très intéressante d'un point de vue informatique car il suffit uniquement de stocker ces coefficients pour avoir toutes informations sur la base  $(\varphi_i)_{i \in \{1, \dots, N_K^{\text{dof}}\}}$ .

2. La base  $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{E}_H)$  est hiérarchique, i.e.  $\mathbb{P}_d^{k-1}(\mathcal{E}_H) \subset \mathbb{P}_d^k(\mathcal{E}_H)$ . Cette propriété est intéressante dans le contexte de la  $\mathbf{p}$  – adaptation.

### 6.2.3 Construction de la base multi-échelle pour une maille grossière

Les fonctions décrites aux paragraphes précédents nous permettent maintenant d'introduire l'espace des fonctions multi-échelle  $X_{MS,H}$  défini par :

$$X_{MS,H}^{n+1} = \left\{ v_{MS,H}^{n+1} = v_H \circ \widetilde{w}^{n+1} \text{ avec } v_H \in \mathbb{P}_d^k(\mathcal{E}_H) \right\}. \quad (6.3)$$

### 6.2.4 Définition du problème grossier

La méthode multi-échelle consiste à discrétiser l'équation de convection-diffusion du système (3.1) dans l'espace multi-échelle (6.3). On obtient alors le schéma suivant : trouver  $c_H^{n+1} \in X_{MS,H}^{n+1}$  telle que pour tout  $v_H \in X_{MS,H}^{n+1}$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi c_H^{n+1} v_H dx + \sum_{K \in \mathcal{E}_H} \int_K (\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla c_h^{n+1}) \cdot \nabla v_H dx - \sum_{K \in \mathcal{E}_H} \int_E (\mathbf{u}^{n+1} c_H^{n+1}) \cdot \nabla v_H dx \\ - \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \{ \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla c_H^{n+1} \}_e \cdot \mathbf{n}_e [v_H]_e ds - \gamma \left( \sum_{e \in \Gamma_H^i \cup \Gamma_{H,D}} \int_e \{ \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla v_H \}_e \cdot \mathbf{n}_e [c_H^{n+1}]_e \right) ds \\ + \sum_{e \in \Gamma_H^i} \int_e c_H^{upw} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e [v_H]_e ds + \sum_{e \in \Gamma_{H,out}} \int_e c_H^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e v_h ds + J_0(c_H^{n+1}, v_H) \\ = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi c_H^n v_H dx + \sum_{e \in \Gamma_{H,in}} \int_e c_{in} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_e v_H ds. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

avec  $\gamma = -1, 0, 1$ . Le cas  $\gamma = 1$  correspond à un schéma DG symétrique,  $\gamma = -1$  correspond à un schéma DG anti-symétrique et  $\gamma = 0$  à un schéma DG incomplet.

### 6.2.5 Couplage avec l'équation de Darcy

Le découplage des résolutions des équations de Darcy et de l'équation de convection-diffusion est précisé comme suit :

#### Résolutions des équations de Darcy et de l'équation de convection-diffusion au moyen des éléments finis multi-échelles

1. Construction des maillages  $\mathcal{E}_h$  et  $\mathcal{E}_H$ , initialisation de la condition initiale  $c^0$ , des conditions aux bords, initialisation des paramètres ( $\phi$ ,  $\rho$ , ...), etc.
2. FOR  $n = 0$  to  $N$ 
  - (a) Calcul de  $P^{n+1}$  en résolvant le problème de Darcy suivant à partir de la donnée de  $c^n$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{K}(x)}{\mu(c^n(x))} (\nabla P^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x) \mathbf{g}) \right) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ - \left( \frac{\mathbf{K}(x)}{\mu(c^n)} (\nabla P^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x) \mathbf{g}) \right) \cdot \mathbf{n}_{\Omega} = u_P^{n+1}(x) - u_I^{n+1}(x) & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} P^{n+1}(x) dx = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

- (b) Reconstruction de la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  en utilisant  $P^{n+1}$  ;
- (c) Résolution des problèmes aux cellules (6.1) ;
- (d) Construction de l'espace multi-échelle  $X_{MS,H}^{n+1}$  (6.3) ;

- (e) Calcul de  $c^{n+1}$  en résolvant l'équation de transport suivante à partir de l'approximation discrète de  $\mathbf{u}^{n+1}$  et du schéma (6.4) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t (\phi c^{n+1})(x) + \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1} c^{n+1} - \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla c^{n+1})(x) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1}(x) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) = u_P^{n+1}(x) - u_I^{n+1}(x) & \text{sur } \partial\Omega, \\ c^{n+1}(x) = c_{in}(t^{n+1}, x) & \text{sur } \Gamma_{in}, \\ c^{n+1}(x) = c_{out}(t^{n+1}, x) & \text{sur } \Gamma_{out}, \\ (\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1})(x) \nabla c^{n+1}(x)) \cdot \mathbf{n}_\Omega(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

Ce découplage est similaire à celui décrit au paragraphe 3.2. L'équation de Darcy est résolue au moyen de la méthode volumes finis à deux points décrite au paragraphe 3.3.1. La reconstruction de la vitesse discrète est décrite au paragraphe 3.3.2.

### 6.2.6 Autres conditions aux limites pour les problèmes de cellule

Comme cela a été mentionné dans le chapitre 5, les conditions aux limites utilisées pour résoudre les problèmes de cellules (6.1) ont une influence directe sur la qualité des fonctions de base multi-échelles. Les conditions aux limites linéaires imposées au niveau des problèmes de cellules (6.1) peuvent dégrader l'approximation dans la mesure où elles ignorent les variations de la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  et du tenseur  $\mathbf{D}$  aux bords des mailles grossières.

Nous proposons ici de nouvelles conditions aux limites pour pallier à ce problème. L'idée de cette nouvelle approche consiste à utiliser la fonction  $\tilde{w}_i^g$  solution du problème suivant comme condition aux limites des problèmes de cellules (6.1)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}^1(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^g(x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u}^1(x)) \nabla \tilde{w}_i^g(x)) = f^i(x) & \forall x \in \Omega, \\ \tilde{w}_i^g(x) = x_i & \forall x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

avec  $f^i(x)|_K = \phi(x) \mathbf{u}^{*,1,K} \cdot e_i$ .

Rappelons que, dans ce qui précède,  $\mathbf{u}^1$  correspond à la vitesse de Darcy évaluée au cours du premier pas de temps, *i.e.*, en utilisant la concentration initiale. La résolution du problème (6.5) est faite sur le maillage fin.

**Remarque 6.2.** *Si, au cours de la simulation, les variations spatiales de la vitesse  $\mathbf{u}$  et du tenseur  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  diffèrent fortement de leur valeur initiale (suite à la fermeture ou l'ouverture de puits), il peut être nécessaire de résoudre à nouveau le problème (6.5) afin d'obtenir une bonne approximation.*

### 6.2.7 La méthode du domaine élargi dite " Oversampling technique "

Nous présentons ici la méthode du domaine élargi dite "Oversampling technique" introduite par T. Hou dans [HW97] pour réduire l'influence des conditions aux limites linéaires sur la qualité des fonctions de base multi-échelles. Elle constitue une alternative intéressante à la stratégie introduite en 6.2.6. En effet, lorsque les fonctions de base de multi-échelle doivent être recalculées un nombre assez important de fois, la stratégie 6.2.6 devient inefficace car elle serait très coûteuse en terme de temps de calcul. La méthode du domaine élargi consiste à résoudre le problème de cellule (6.1) dans un domaine  $\tilde{K}$  qui contient  $K$  (voir figure 6.3). Elle est définie comme suit : pour chaque maille  $K \in \mathcal{E}_H$ , on construit  $\tilde{K}$  et on considère la fonction  $\tilde{w}_i^{n+1, \tilde{K}}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}^{n+1}(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^{n+1, \tilde{K}}(x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}(x)) \nabla \tilde{w}_i^{n+1, \tilde{K}}(x)) = \phi(x) \mathbf{u}^{*,n+1, \tilde{K}} \cdot e_i & , \forall x \in K, \\ \tilde{w}_i^{n+1, \tilde{K}}(x) = x_i & , \forall x \in \partial\tilde{K}, \end{array} \right. \quad (6.6)$$

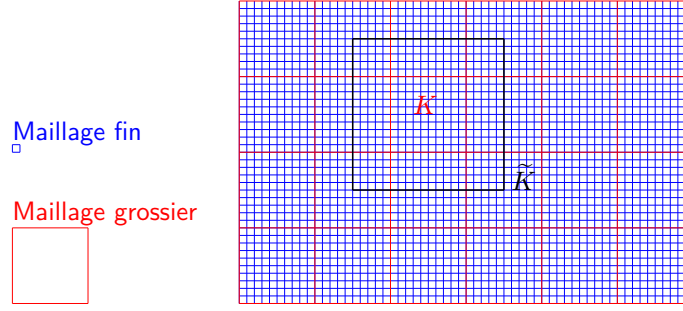


FIGURE 6.3 – Définition d'un maillage pour la méthode oversampling

où

$$\mathbf{u}^{*,n+1,K} = \frac{\int_{\tilde{K}} \mathbf{u}^{n+1}(x) dx}{\int_{\tilde{K}} \phi(x) dx}.$$

On construit ensuite la fonction  $\tilde{w}_i^{n+1,K}$  comme suit :

$$\forall \tilde{K} \in \mathcal{E}_H, \quad \tilde{w}_i^{n+1,K}(x) = \tilde{w}_i^{n+1,\tilde{K}}(x), \quad \forall x \in K.$$

Pour élément  $K \in \mathcal{E}_H$ , on définit le nombre  $\delta_K$  comme suit :

$$\delta_K = \text{dist}(\partial K, \partial \tilde{K}). \quad (6.7)$$

## 6.3 Stratégies de mise à jour des fonctions de base multi-échelles

Dans le problème du traceur, le champ de vitesse varie avec le temps sous l'effet d'un changement de la viscosité et/ou d'un changement des conditions aux limites. Les fonctions de bases multi-échelles doivent donc être réévaluées. Une mise à jour systématique de toutes les fonctions de base à chaque pas de temps est très coûteuse et inutile en pratique car la vitesse ne change pas de manière significative en tout point du réservoir. Deux stratégies peuvent donc être mises en oeuvre.

### 6.3.1 Stratégie 1

La première stratégie consiste à mettre à jour les fonctions de base multi-échelles toutes les  $m$  itérations, l'entier  $m$  étant fixé en début de simulation.

### 6.3.2 Stratégie 2

La seconde stratégie consiste à mettre à jour les fonctions de bases multi-échelles lorsqu'une variation significative de la viscosité est observée dans une maille grossière. On calcule, en d'autres termes, la quantité :

$$\varepsilon_K^{n+1} = \left| \int_K \mu(c^{n+1}(x)) dx - \int_K \mu(c^n(x)) dx \right| \quad (6.8)$$

et les fonctions de base associées à l'élément  $K$  sont mises à jour si  $\varepsilon_K^{n+1} > \varepsilon_s$  avec  $\varepsilon_s$  un seuil donné.

## 6.4 Résultats numériques

Dans cette section, on présente quelques résultats numériques obtenus avec la méthode multi-échelle présentée plus haut. Nous comparons en particulier les résultats obtenus avec cette méthode et ceux obtenus avec la méthode

classique décrite au chapitre 3. Dans cette section, la solution de référence désigne la solution numérique obtenue à partir du schéma DG sur le maillage fin  $\mathcal{E}_h$ . Et, pour étudier la robustesse de la méthode multi-échelle, nous la comparerons à la solution de référence.

### 6.4.1 Exemple 1 : Cas d'un champ de vitesse périodique

On reprend ici le cas d'un champ de vitesse périodique, introduit notamment dans [Oua13]. On considère le domaine  $\Omega = (0, 1)^2$ . On impose le champ de vitesse suivant

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x, y) = \begin{cases} -\delta \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_x^0, \\ \delta \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_y^0 \end{cases} \quad (6.9)$$

avec  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $b_x^0$  et  $b_y^0$  des constantes choisies selon le cas test considéré. Dans cet exemple, le maillage fin  $\mathcal{E}_h$  est constitué de 100 éléments dans chaque direction. Ici, on choisit  $\delta_K = 10h$  (voir (6.7) pour la définition) dans le cas où la méthode du domaine élargi est employée. On choisit  $\Delta t = 0.05$ .

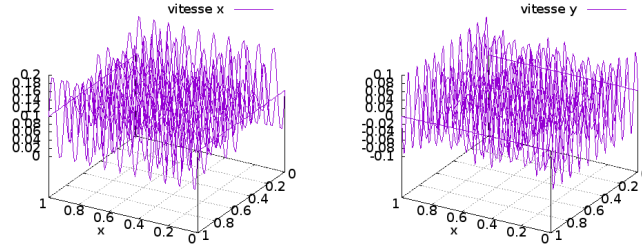


FIGURE 6.4 – Champs de vitesse avec  $\varepsilon = \delta = b_x^0 = 0.1$  et  $b_y^0 = 0$

**Test 1** Dans ce test, on considère la vitesse représentée sur la figure 6.4. Les solutions numériques sont représentées sur les figures 6.5(b) et 6.5(c). Le maillage grossier est un maillage Cartésien où chaque maille grossière est constituée de 25 éléments du maillage fin dans chaque direction. On peut voir sur la figure 6.5(b) l'impact du choix des conditions aux limites linéaires utilisées lors de la résolution des problèmes de cellules. La méthode du domaine élargi permet d'améliorer la qualité des fonctions de bases multi-échelles et on obtient alors une solution numérique de meilleure qualité représentée sur la figure 6.5(c). L'estimation d'erreur établie pour la méthode multi-échelle (5.16) comporte un terme de résonance en  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$ . Dans le cadre de la méthode multi-échelle proposée par T. Hou ([HW97]) pour une équation elliptique, l'emploi de la méthode oversampling améliore la qualité de la solution multi-échelle et au lieu d'un terme de résonance en  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$ , on obtient un terme en  $\frac{\varepsilon}{H}$ . Dans le cadre de la méthode multi-échelle étudiée dans cette thèse, il semble être également le cas (voir tableau 6.1 et tableau 6.2).

**Test 2 : Convection dominante** On considère maintenant la vitesse représentée sur la figure 6.6. Ici,  $\varepsilon = 1/10$ ,  $\delta = b_1 = 1/100$ ,  $b_2 = 0$  et  $\mathbf{D}^\varepsilon = 10^{-8}$ . Le nombre de peclét  $\mathbb{P}_e = \frac{\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{\|\mathbf{D}\|_{L^\infty(\Omega)}}} H = 200 H$ . Comme pour une discrétisation Galerkin Discontinue classique, on observe des instabilités au niveau des solutions numériques obtenues avec le schéma multi-échelle lorsque la convection domine la diffusion, ie  $(\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \gg \lambda_{min}$ .

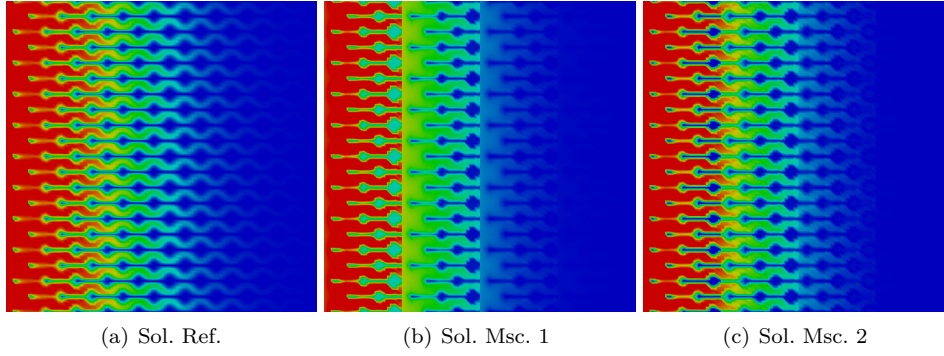


FIGURE 6.5 – Solutions au temps  $t = 7 \Delta t$ . La solution multi-échelle 6.5(b) a été obtenue en utilisant des conditions aux limites linéaires pour les problèmes de cellules tandis que la solution multi-échelle 6.5(c) a été obtenue avec la méthode oversampling.

$H$	1/4	1/5	1/10	1/20	1/25
$L^2$	0.0256998	0.02468	0.0430169	0.0572223	0.0655117
$H^1(\mathcal{E}_h)$	0.112606	0.088825	0.0737171	0.0605053	0.0817529

TABLE 6.1 – Ecarts relatifs entre la solution de référence et la solution multi-échelle obtenue avec la méthode "Oversampling" avec  $\varepsilon = 1/10$ ,  $\delta = b_1 = 1/10$  et  $b_2 = 0$ .

$H$	1/4	1/5	1/10	1/20	1/25
$L^2$	0.0391794	0.0399596	0.0524475	0.0298388	0.0419106
$H^1(\mathcal{E}_h)$	0.145108	0.119858	0.0851194	0.0543727	0.0537896

TABLE 6.2 – Ecarts relatifs entre la solution de référence et la solution multi-échelle obtenue en utilisant des conditions aux limites linéaires pour les problèmes de cellules avec  $\varepsilon = 1/10$ ,  $\delta = b_1 = 1/10$  et  $b_2 = 0$ .

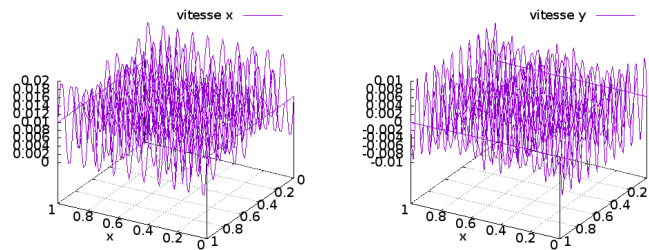


FIGURE 6.6 – Champs de vitesse avec  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\delta = b_x^0 = 0.01$ ,  $b_y^0 = 0$

Ce qui est en accord avec l'estimation d'erreur (5.16). Des méthodes de stabilisation pour certaines méthodes multi-échelles sont récemment proposées pour pallier à cette difficulté (voir [BLM15, Mad16]). Ici, on constate que l'impact du choix des conditions aux limites linéaires utilisées lors de la résolution des problèmes de cellule est plus important. On remarque également que la convergence est plus lente (voir tableau 6.3 et tableau 6.4). Ce qui est en accord avec l'estimation d'erreur (5.2).

$H$	1/4	1/5	1/10	1/20	1/25
$L^2$	0.0460731	0.0458836	0.0747679	0.0973751	0.0753918
$H^1(\mathcal{E}_h)$	0.188612	0.159867	0.12064	0.0868699	0.109438

TABLE 6.3 – Ecarts relatifs entre la solution de référence et la solution multi-échelle obtenue avec la méthode "Oversampling" avec  $\varepsilon = 1/10$ ,  $\delta = b_1 = 1/100$  et  $b_2 = 0$ .

$H$	1/4	1/5	1/10	1/20	1/25
$L^2$	0.056095	0.0556612	0.0694713	0.0398587	0.050912
$H^1(\mathcal{E}_h)$	0.215769	0.185355	0.1068	0.067771	0.0649741

TABLE 6.4 – Ecarts relatifs entre la solution de référence et la solution multi-échelle obtenue en utilisant des conditions aux limites linéaires pour les problèmes de cellules avec  $\varepsilon = 1/10$ ,  $\delta = b_1 = 1/100$  et  $b_2 = 0$ .

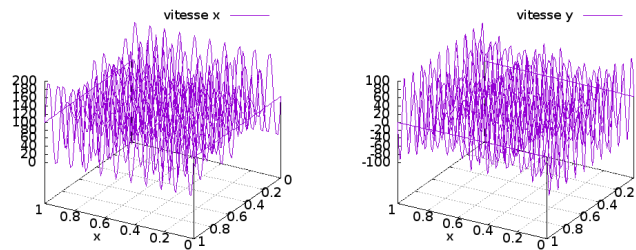


FIGURE 6.7 – Champs de vitesse avec  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\delta = b_x^0 = 10.0$  et  $b_y^0 = 0$

**Test 3 : Vitesses importantes** On considère maintenant la vitesse représentée sur la figure 6.7. Ici,  $\varepsilon = 1/10$ ,  $\delta = b_1 = 100\varepsilon$ ,  $b_2 = 0$  et  $\mathbf{D}^\varepsilon = 10^{-5}$ . Le nombre de peclét  $\mathbb{P}_e = \frac{\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{\|\mathbf{D}\|_{L^\infty(\Omega)}}} H = 2 \cdot 10^{9/2} H$ . La vitesse considérée est plus importante que la périodicité  $\varepsilon$ . Ce qui doit conduire, conformément à l'estimation d'erreur (5.16), à des erreurs plus importantes à cause du terme  $\left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|$ . Ce qui est confirmé numériquement (voir tableau 6.5).

$H$	1/4	1/5	1/10	1/20	1/25
$L^2$	0.0460731	0.0458836	0.0747679	0.0973751	0.0753918
$H^1(\mathcal{E}_h)$	0.188612	0.159867	0.12064	0.0868699	0.109438

TABLE 6.5 – Ecarts entre la solution de référence et la solution multi-échelle obtenue avec la méthode "Oversampling" avec  $\varepsilon = 1/10$ ,  $\delta = b_1 = 10.0$  et  $b_2 = 0$ .

### 6.4.2 Exemple 2 : Perméabilité homogène

On reprend l'exemple 3.5.2 introduit dans le chapitre 3. Les profils de concentrations sont représentés sur les figures 6.8 et 6.9. Les solutions multi-échelles représentées sur les figures 6.8(b) et 6.8(c), obtenues respectivement avec des conditions aux limites linéaires et des conditions aux limites améliorées (stratégie décrite au paragraphe 6.2.6), sont qualitativement proches du fait de l'absence d'hétérogénéité. Ici  $\mathcal{E}_H = 12 \times 22$ .



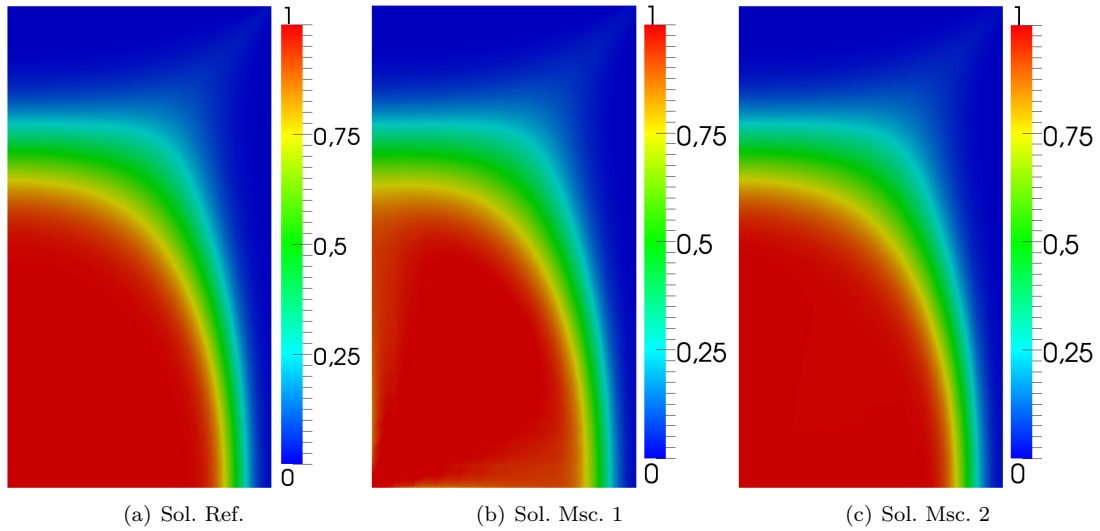


FIGURE 6.8 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 21 \Delta t$ . La solution multi-échelle 6.8(b) a été obtenue en utilisant des conditions aux limites linéaires pour les problèmes de cellules tandis que la solution multi-échelle 6.8(c) a été obtenue avec le choix décrit au paragraphe 6.2.6.

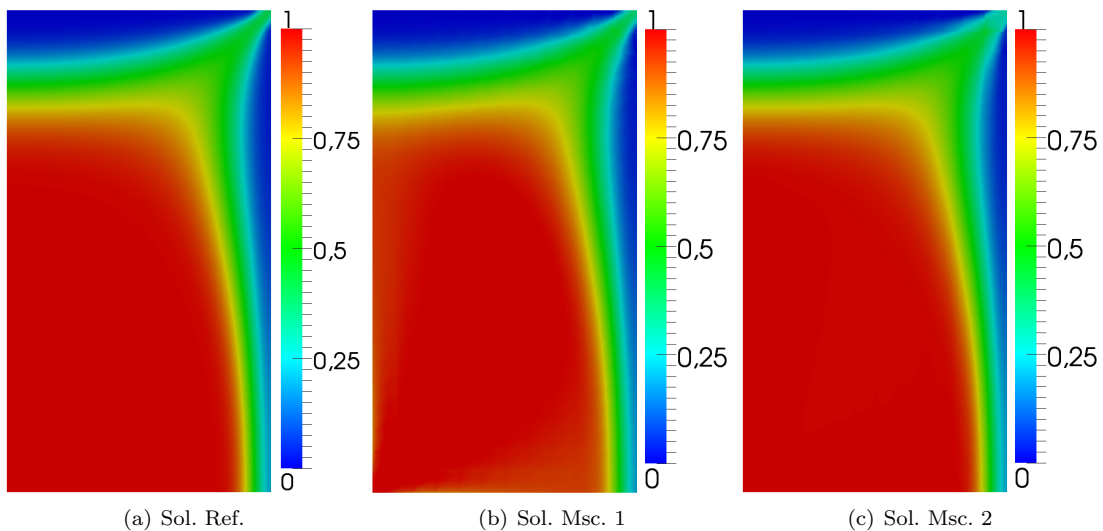


FIGURE 6.9 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 31 \Delta t$ . La solution multi-échelle 6.9(b) a été obtenue en utilisant des conditions aux limites linéaires pour les problèmes de cellules tandis que la solution multi-échelle 6.9(c) a été obtenue avec le choix décrit au paragraphe 6.2.6.

### 6.4.3 Exemple 3 : SPE10

On reprend l'exemple 3.5.3 introduit dans le chapitre 3. Nous testons différentes variantes de l'algorithme de résolution multi-échelle sur cet exemple où les champs de perméabilités sont très hétérogènes.

## Couche 26

### Impact du choix des conditions aux limites pour les problèmes de cellules

La solution multi-échelle représentée sur la figure 6.10(b) a été obtenue à partir de conditions aux limites linéaires et la figure 6.10(c) avec les conditions aux limites décrites au paragraphe 6.2.6. Les erreurs relatives avec la solution calculée sur le maillage fin sont données en normes  $L^2$  et  $H^1$  dans le tableau 6.6.

	Msc. 1	Msc. 2
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{L^2(\Omega)}}{\ c_h\ _{L^2(\Omega)}}$	0.0113988	0.0090247
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}{\ c_h\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}$	0.0124933	0.00933493

TABLE 6.6 – Erreurs relatives en fonction du choix des conditions aux limites pour la couche 26

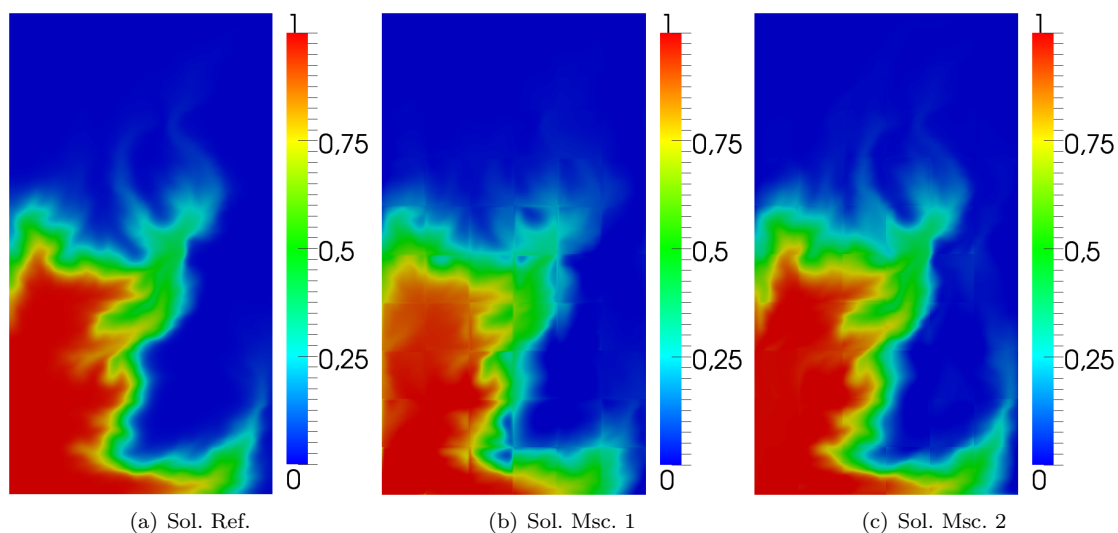


FIGURE 6.10 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 10 \Delta t$  sur la couche 26 du cas SPE10 avec les deux choix de conditions aux limites.

### Impact de la taille des mailles grossières

Toutes les solutions multi-échelles considérées ici sont obtenues en utilisant les conditions aux limites décrites au paragraphe 6.2.6. En comparant les figures 6.11(a)- 6.11(f), on peut voir que la solution multi-échelle converge qualitativement et quantitativement vers la solution de référence lorsque le pas du maillage grossier  $H$  tend vers le pas du maillage fin  $h$ . Ce qui est en concordance avec la théorie. Les erreurs relatives sont données dans le tableau 6.7.

### Solutions multi-échelles obtenues sur maillages généraux

On considère ici les maillages grossiers obtenus à partir du partitionneur Métis et représentés sur les figures 6.12(a)- 6.12(d). Les profils de concentration sont représentés sur les figures 6.13(a)- 6.13(e). Les erreurs relatives sont indiquées dans le tableau 6.8. Ici, aussi, toutes les solutions multi-échelles ont été obtenues avec la stratégie décrite au paragraphe 6.2.6.

	$\mathcal{E}_H = 24 \times 44$	$\mathcal{E}_H = 15 \times 20$	$\mathcal{E}_H = 12 \times 10$	$\mathcal{E}_H = 6 \times 10$	$\mathcal{E}_H = 3 \times 5$
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{L^2(\Omega)}}{\ c_h\ _{L^2(\Omega)}}$	0.000483469	0.00110849	0.00250603	0.0090247	0.022104
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}{\ c_h\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}$	0.000598711	0.0012722	0.00270341	0.00933493	0.0228682

TABLE 6.7 – Erreurs relatives entre la solution de référence et les solutions multi-échelles obtenue avec le choix décrit au paragraphe 6.2.6 en fonction du choix des dimensions du maillage grossier pour la couche 26.

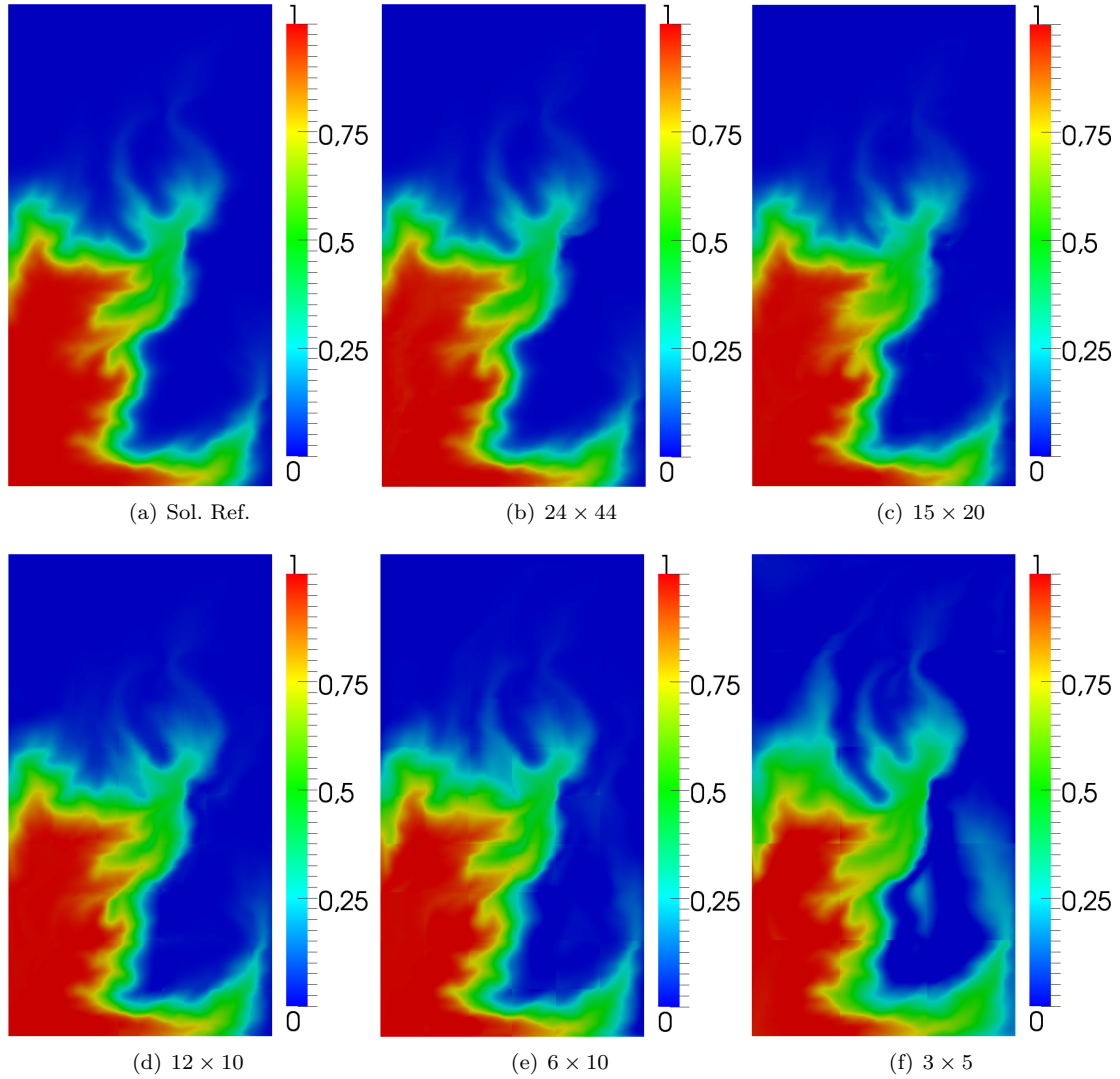


FIGURE 6.11 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 10 \Delta t$ . Toutes les solutions multi-échelles sont obtenues avec la stratégie décrite en 6.2.6 sur des maillages grossiers Cartésien. Les solution multi-échelles 6.11(b), 6.11(c), 6.11(d), 6.11(e) et 6.11(b) sont obtenues respectivement avec un maillage grossier Cartésien  $\mathcal{E}_H = 24 \times 44$ ,  $\mathcal{E}_H = 15 \times 20$ ,  $\mathcal{E}_H = 12 \times 10$ ,  $\mathcal{E}_H = 6 \times 10$  et  $\mathcal{E}_H = 3 \times 5$ .

#### Sans mise à jour des fonctions de bases multi-échelles

Toutes les solutions multi-échelles considérées ici ont été obtenues en utilisant la stratégie décrite au paragraphe 6.2.6. Le maillage grossier est Cartésien de taille  $\mathcal{E}_H = 5 \times 5$ . En comparant les solutions représentées

	Msc. 1	Msc. 2	Msc. 3	Msc. 4
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{L^2(\Omega)}}{\ c_h\ _{L^2(\Omega)}}$	0.000489101	0.00410948	0.010879	0.0258326
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}{\ c_h\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}$	0.000637571	0.00443068	0.0114181	0.0266279

TABLE 6.8 – Erreurs relatives entre la solution de référence et les solutions multi-échelles obtenue avec le choix décrit au paragraphe 6.2.6 en fonction du maillage grossier utilisé pour la couche 26.

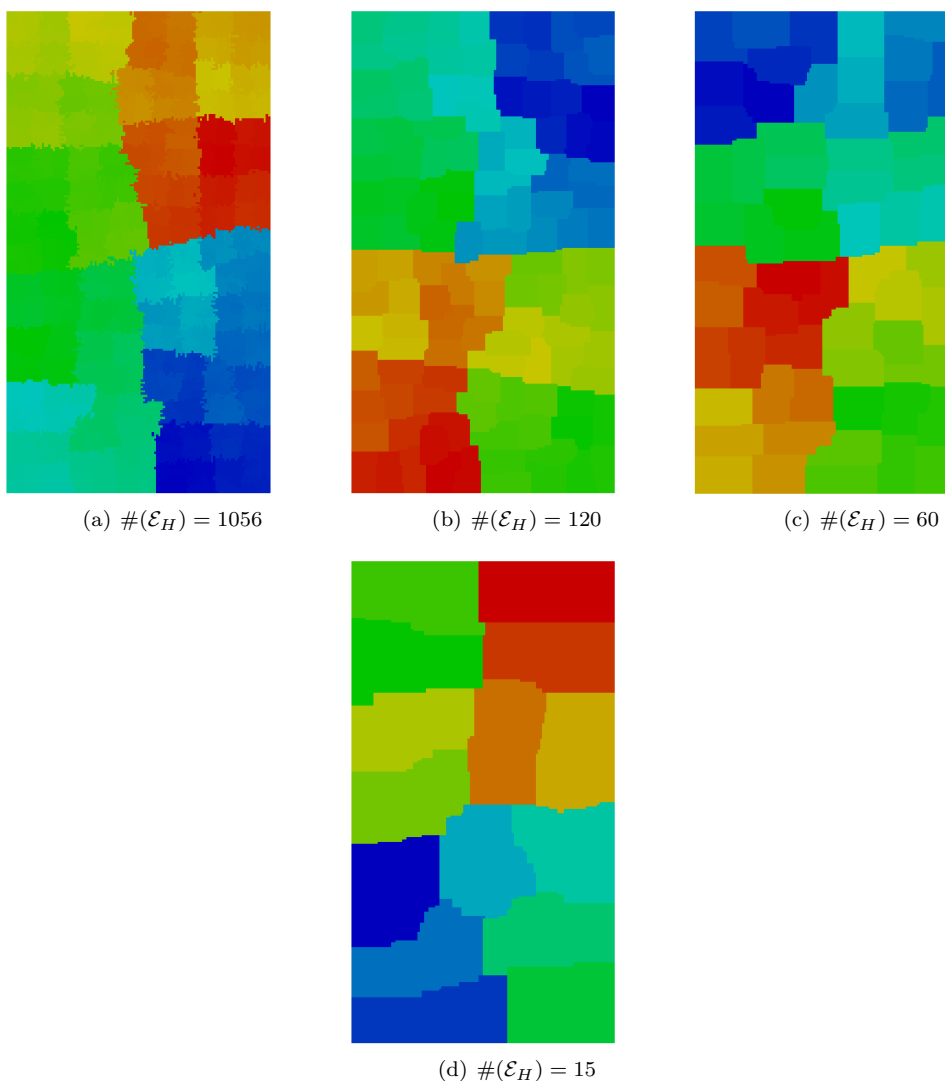
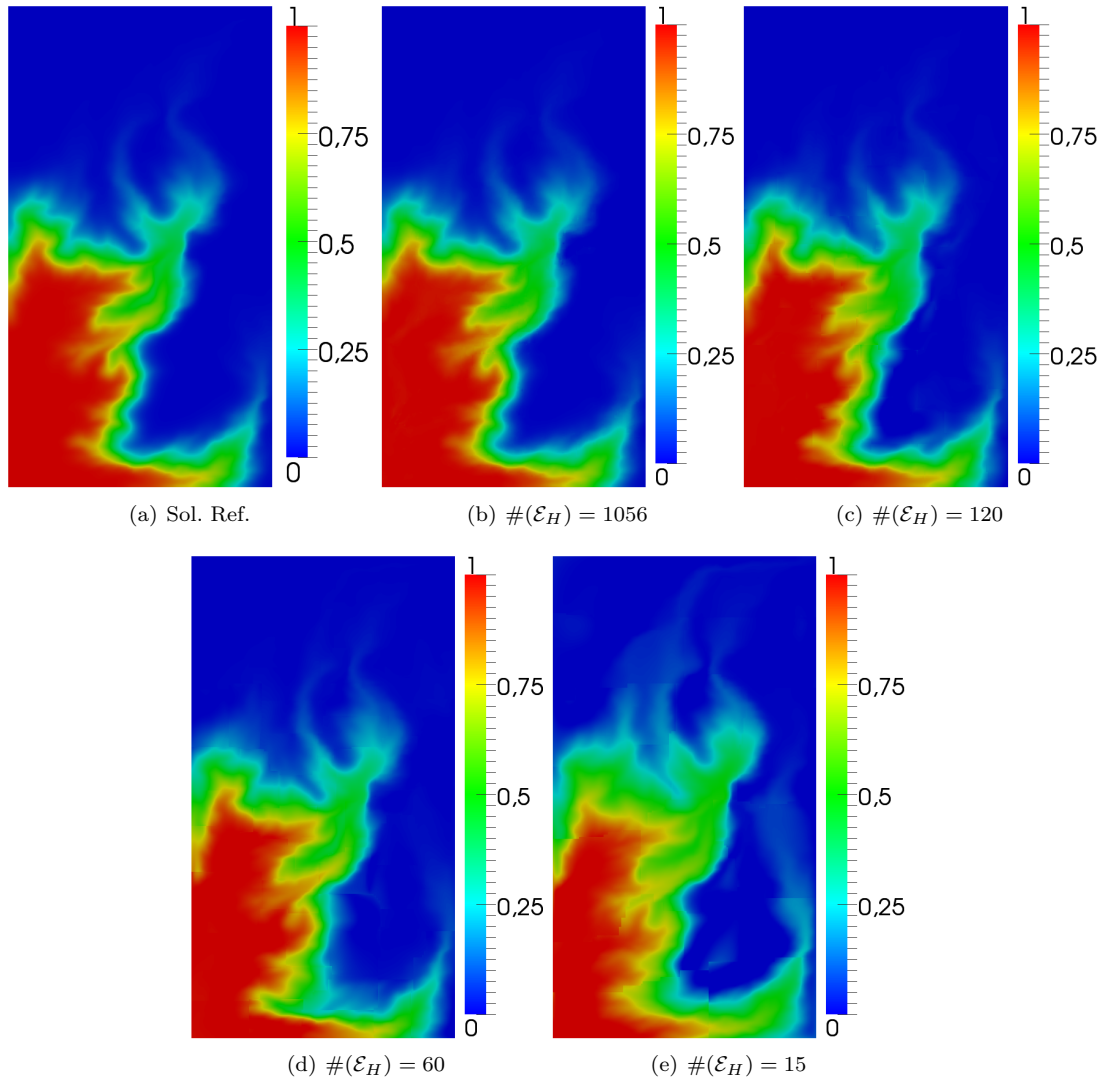


FIGURE 6.12 – Maillages grossiers obtenus avec le partitionneur Metis pour la couche 26.

sur les figures 6.14(a)–6.14(c), on constate que la solution multi-échelle obtenue sans mise à jour des fonctions multi-échelle est qualitativement proche de celle obtenue avec une mise à jour systématique des fonctions de bases multi-échelles. Ceci s’explique par le fait que fait le paramètre  $\mu$  varie faiblement.

FIGURE 6.13 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 10 \Delta t$  pour la couche 26.

#### Mise à jour régulière des fonctions de bases multi-échelles

On se place dans les mêmes conditions que le test précédent en mettant ici à jour les fonctions de base tous les 4 pas de temps. Les profils de concentrations sont représentés sur les figures 6.15(a)–6.15(c).

#### Mise à jour automatique des fonctions de bases multi-échelles

On se place dans les mêmes conditions que le test précédent en mettant ici à jour les fonctions de base en fonction des variations de la viscosité comme décrit au paragraphe 6.3.2. Ici  $\varepsilon_s = 0.001$ . Les profils de concentrations sont représentés sur les figures 6.16(a)–6.16(c).

#### Temps de simulation et erreurs relatives

On compare ici les temps de simulation et les écarts relatifs des solutions multi-échelles par rapport à la solution de référence. Ici, la solution Msc. 1 représente la solution multi-échelle avec une mise à jour systématique des fonctions de base multi-échelle à chaque pas temps, la solution Msc. 2 celle sans mise à jour des fonctions de

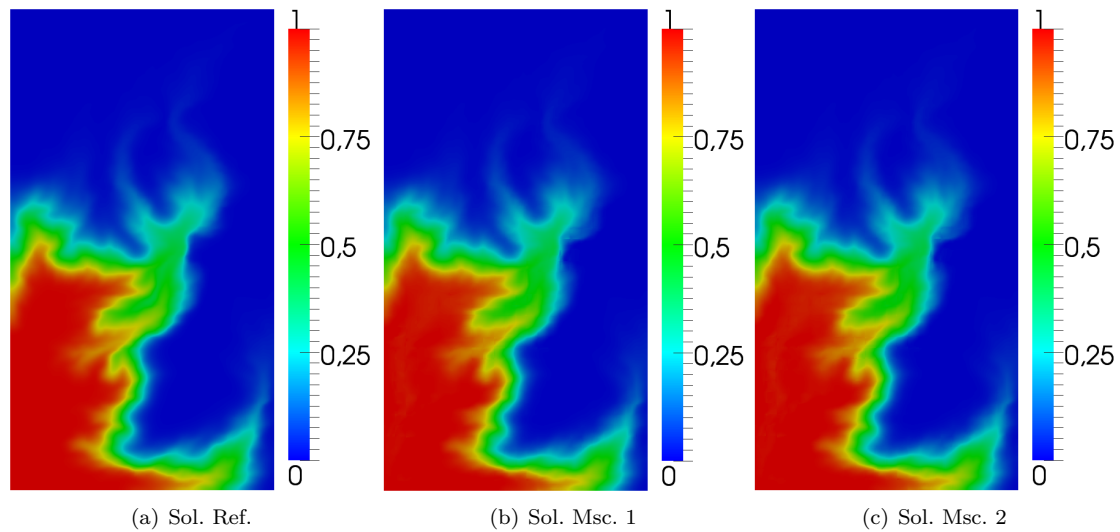


FIGURE 6.14 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 10 \Delta t$ . Solution multi-échelle 6.14(b) avec mise à jour systématique des fonctions de base. Solution multi-échelle 6.14(c) sans mise à jour des fonctions de base.

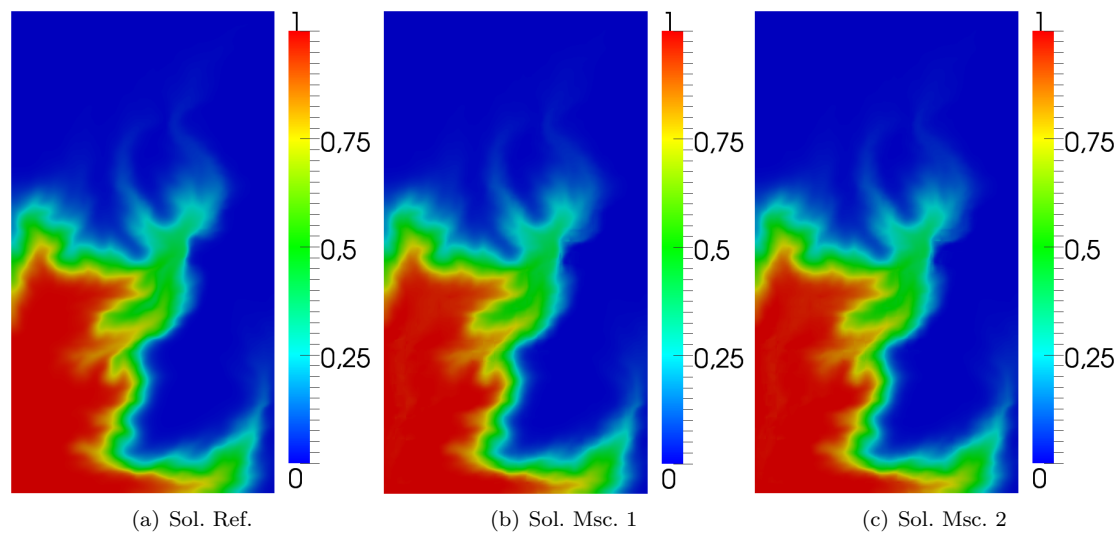


FIGURE 6.15 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 10 \Delta t$ . Solution multi-échelle 6.15(b) avec mise à jour systématique des fonctions de base. Solution multi-échelle 6.15(c) avec mise à jour des fonctions de base tous les 4 pas de temps.

base multi-échelle, la solution Msc. 3 celle avec la stratégie décrite au paragraphe 6.3.1 et la solution Msc. 4 celle avec la stratégie décrite au paragraphe 6.3.2.

sol. Ref	Msc. 1	Msc. 2	Msc. 3	Msc. 4
298.626	474.036	189.175	218.196	225.159

TABLE 6.9 – Temps de simulation des solutions fine et multi-échelles en considérant différentes stratégies de mise à jour des fonctions de base pour la couche 26.

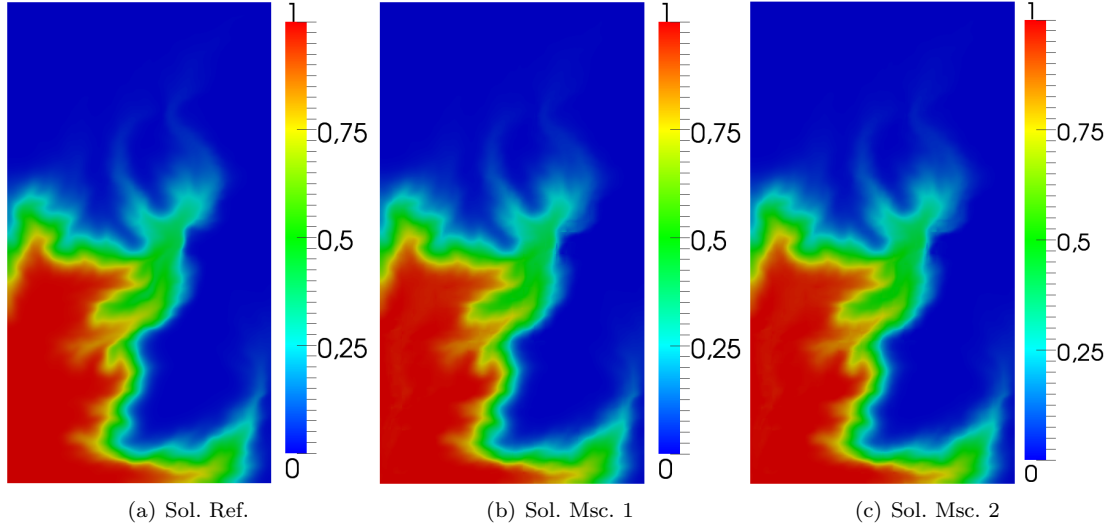


FIGURE 6.16 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 10 \Delta t$ . Solution multi-échelle 6.16(b) avec mise à jour systématique des fonctions de base. Solution multi-échelle 6.16(c) avec la stratégie 6.3.2 avec  $\varepsilon_s = 0.001$ .

	Msc. 1	Msc. 2	Msc. 3	Msc. 4
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{L^2(\Omega)}}{\ c_h\ _{L^2(\Omega)}}$	0.000483469	0.000450431	0.000476800	0.0004458
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}{\ c_h\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}$	0.000598711	0.000567773	0.00059111	0.0005595

TABLE 6.10 – Erreurs relatives des solutions multi-échelles en considérant différentes stratégies de mise à jour des fonctions de base pour la couche 26.

### Couche 39

On considère maintenant la couche 39 de l'exemple 3.5.3 introduit dans le chapitre 3.

#### Impact du choix des conditions aux limites pour les problèmes de cellules

La solution multi-échelle représentée sur la figure 6.18(b) a été obtenue à partir de conditions aux limites linéaires et la figure 6.18(c) avec les conditions aux limites décrites au paragraphe 6.2.6. Les erreurs relatives avec la solution calculée sur le maillage fin sont données en normes  $L^2$  et  $H^1$  dans le tableau 6.11.

	Msc. 1	Msc. 2
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{L^2(\Omega)}}{\ c_h\ _{L^2(\Omega)}}$	0.0213798	0.0185381
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}{\ c_h\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}$	0.0251836	0.0207458

TABLE 6.11 – Erreurs relatives en fonction du choix des conditions aux limites pour la couche 39.

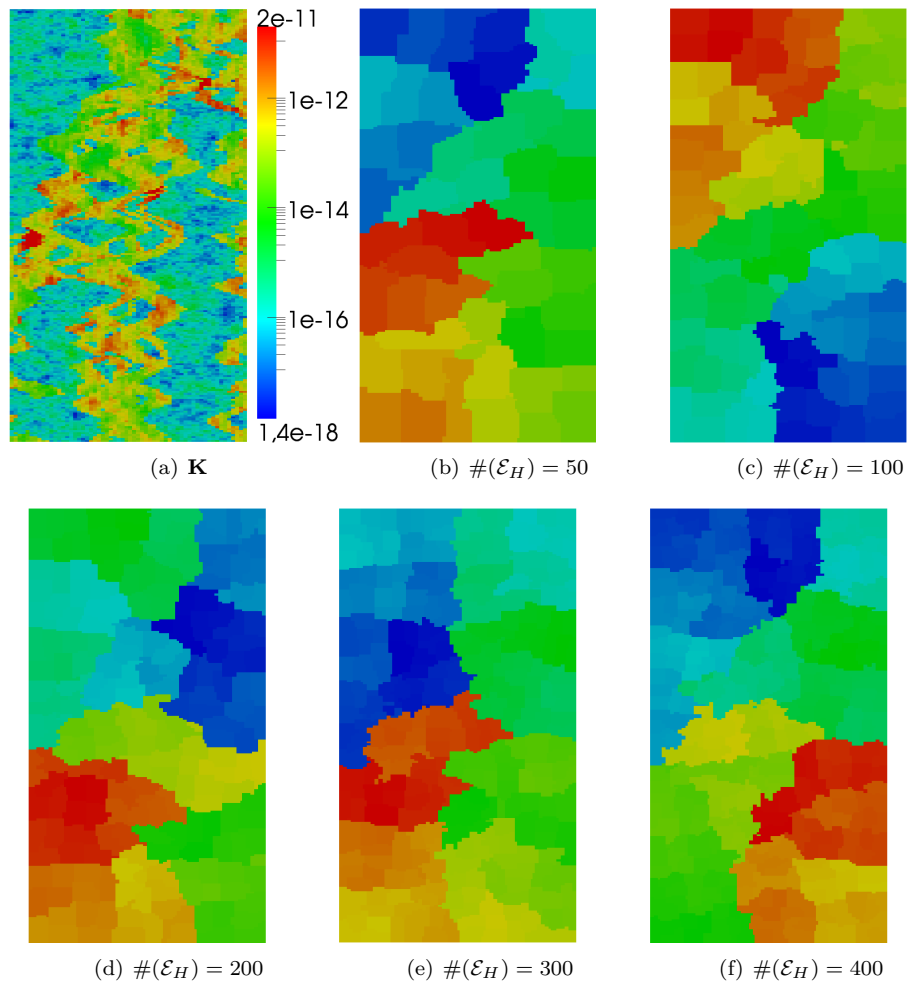


FIGURE 6.17 – Maillages grossiers obtenus avec le partitionneur Metis pour la couche 39.

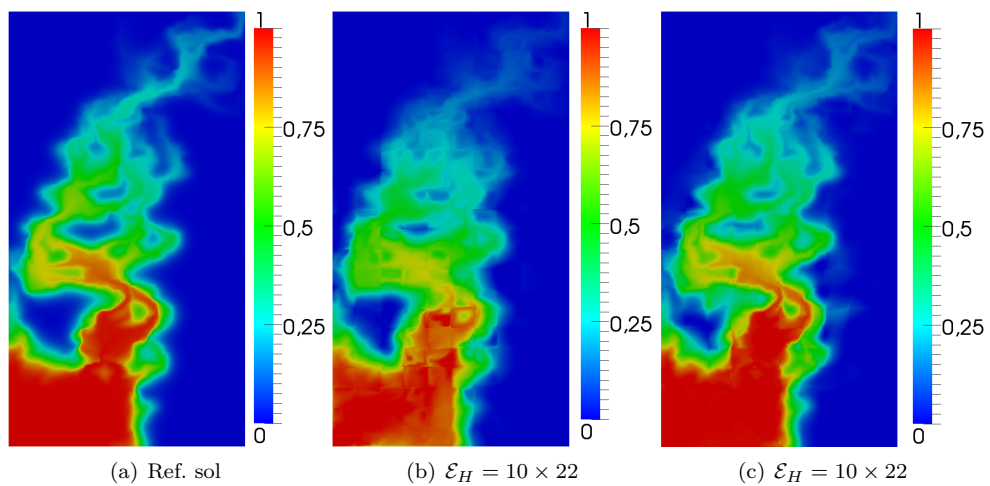


FIGURE 6.18 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 10 \Delta t$  sur la couche 39 du cas SPE10 avec les deux choix de conditions aux limites.



## Impact de la taille des mailles grossières

Toutes les solutions multi-échelles considérées ici sont obtenues en utilisant les conditions aux limites décrites au paragraphe 6.2.6. Des profils de concentration sont représentés sur les figures 6.19(b)- 6.19(e). Les erreurs relatives sont données dans le tableau. 6.12.

	$\mathcal{E}_H = 5 \times 10$	$\mathcal{E}_H = 10 \times 10$	$\mathcal{E}_H = 10 \times 22$	$\mathcal{E}_H = 24 \times 11$
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{L^2(\Omega)}}{\ c_h\ _{L^2(\Omega)}}$	0.0325963	0.0247353	0.0185381	0.0195193
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}{\ c_h\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}$	0.0345900	0.026803	0.0207458	0.0218423

TABLE 6.12 – Erreurs relatives entre la solution de référence et les solutions multi-échelles obtenue avec le choix décrit au paragraphe 6.2.6 en fonction du choix des dimensions du maillage grossier pour la couche 39.

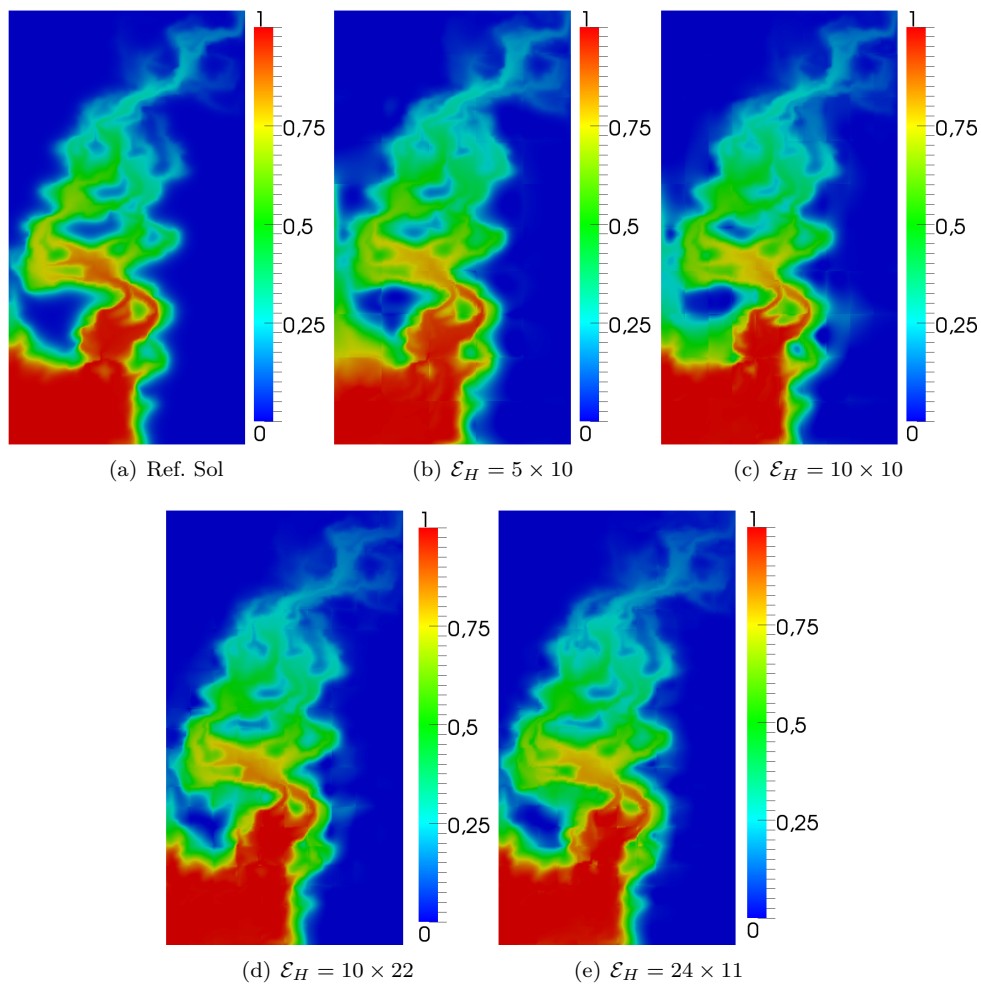


FIGURE 6.19 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 10 \Delta t$  sur la couche 39 du cas SPE10.

### Mise à jour automatique des fonctions de bases multi-échelles

On considère ici le maillage grossier cartésien  $\mathcal{E}_H = 10 \times 22$ . On compare les solutions multi-échelles suivant les différentes stratégies décrites dans ce chapitre. Les erreurs relatives entre la solution de référence et les solutions multi-échelles sont représentées dans le tableau 6.14.

	Msc. Sol 1	Msc. Sol 2	Msc. Sol 3	Msc. Sol 4
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{L^2(\Omega)}}{\ c_h\ _{L^2(\Omega)}}$	0.0178400	0.0195193	0.0179687	0.0179949
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}{\ c_h\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}$	0.0199827	0.0218423	0.020126	0.0201616

TABLE 6.13 – Erreurs relatives entre la solution de référence et les solutions multi-échelles obtenues pour différentes stratégies de mise à jour des fonctions de base pour la couche 39.

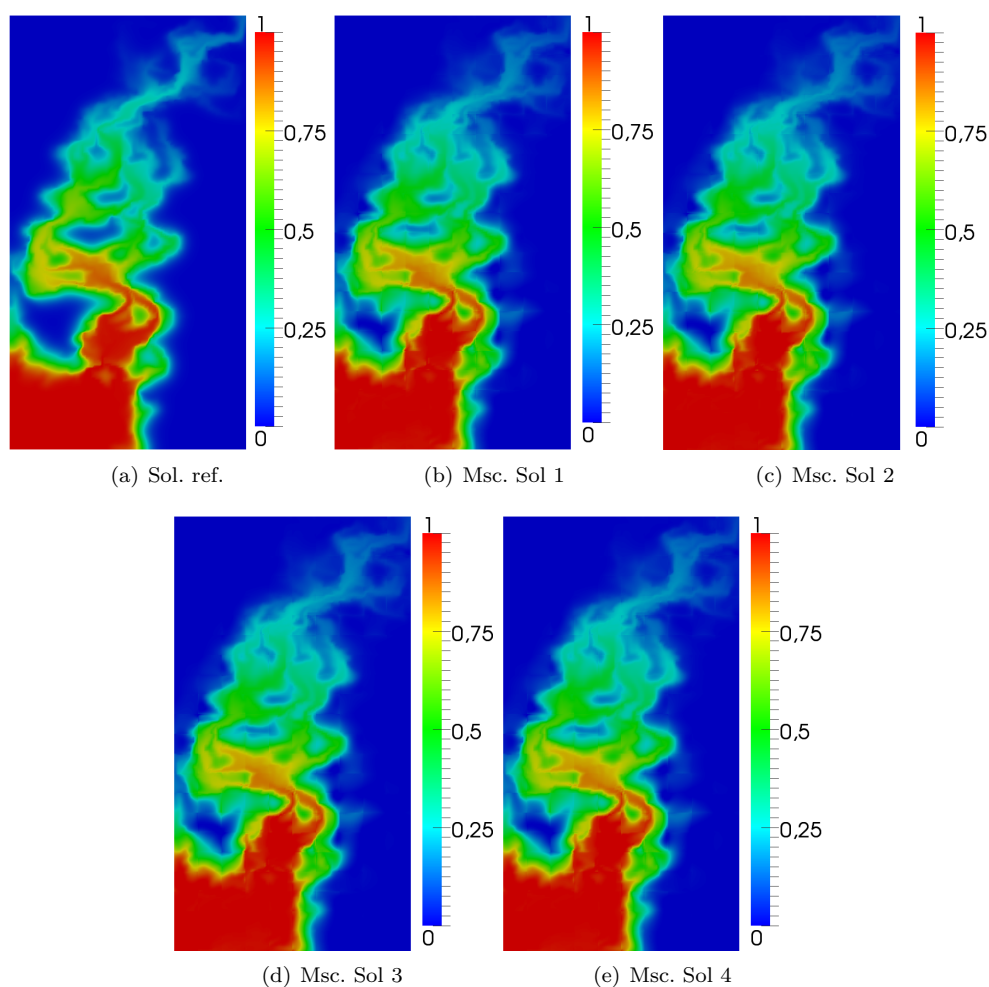


FIGURE 6.20 – Profils de concentration obtenus au temps  $10 \Delta t$ . Les solutions 6.20(b), 6.20(c), 6.20(d) et 6.20(e) représentent respectivement la solution obtenue sans mise à jour des fonctions de base multi-échelle, avec mise à jour automatique des fonctions de base, avec la stratégie 6.3.1 avec  $T_m = 4$  et avec la stratégie 6.3.2 avec  $\varepsilon_s = 0.001$ .

### Solutions multi-échelles obtenues sur maillages généraux

On considère ici les maillages grossiers obtenus à partir du partitionneur Métis et représentés sur les figures 6.17(b)- 6.17(f). Les profils de concentration sont représentés sur les figures 6.21(b)- 6.21(f). Les erreurs relatives sont indiquées dans le tableau 6.14. Ici, aussi, toutes les solutions multi-échelles ont été obtenues avec la stratégie décrite au paragraphe 6.3.2 avec  $\varepsilon_s = 0.001$ .

	$\#(\mathcal{E}_H) = 50$	$\#(\mathcal{E}_H) = 100$	$\#(\mathcal{E}_H) = 200$	$\#(\mathcal{E}_H) = 300$	$\#(\mathcal{E}_H) = 400$
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{L^2(\Omega)}}{\ c_h\ _{L^2(\Omega)}}$	0.0478892	0.0479958	0.0226605	0.0300792	0.0279459
$\frac{\ c_h - c_H^{MS}\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}{\ c_h\ _{H^1(\mathcal{E}_h)}}$	0.0506092	0.0502723	0.0252873	0.0330332	0.0309366

TABLE 6.14 – Erreurs relatives entre la solution de référence et les solutions multi-échelles obtenue avec le choix décrit au paragraphe 6.2.6 en fonction du maillage grossier utilisé pour la couche 39.

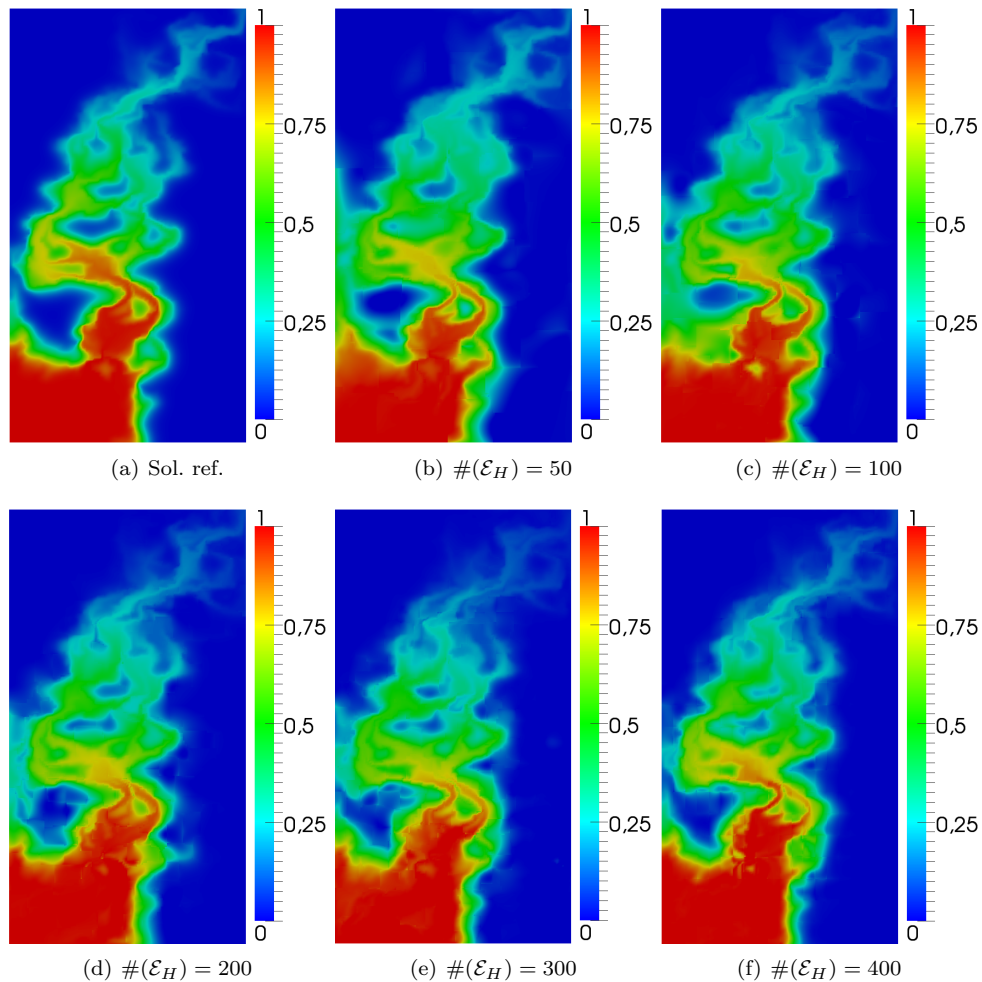


FIGURE 6.21 – Profils de concentration obtenus au temps  $t = 10 \Delta t$  pour la couche 39.



# Annexe A

## Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

**Lemme A.1.** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Soient  $\alpha, \beta$  et  $u$  des fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $\beta$  et  $u$  sont continues et la fonction  $\alpha$  intégrable sur  $I$ . On a alors les résultats suivants :

1. Si la fonction  $\beta$  est positive et la fonction  $u$  vérifie

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds$$

alors on a

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds, \quad \forall t \in I, t \geq a.$$

2. Si, de plus, la fonction  $\alpha$  est croissante, alors

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right), \quad \forall t \in I.$$

*Démonstration.* Posons, pour tout  $s \in I$ ,

$$v(s) = \exp\left(-\int_a^s \beta(r)dr\right) \int_a^s \beta(r)u(r)dr.$$

On a alors

$$v'(s) = \left(u(s) - \int_a^s \beta(r)u(r)dr\right) \beta(s) \exp\left(-\int_a^s \beta(r)dr\right).$$

Comme  $u(t) - \int_a^t \beta(s)u(s)ds \leq \alpha(t)$ , on a

$$v'(s) \leq \alpha(s)\beta(s) \exp\left(-\int_a^s \beta(r)dr\right).$$

En intégrant  $v'$  et en utilisant le fait que  $v(a) = 0$ , on a

$$v(t) \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(-\int_a^s \beta(r)dr\right) ds.$$

Or, d'après la définition de  $v$ , nous avons

$$\int_a^t \beta(r)u(r)dr = \exp\left(\int_a^t \beta(r)dr\right) v(t),$$

ce qui donne

$$\int_a^t \beta(r)u(r)dr \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds.$$

On en déduit ainsi que, pour tout  $t \in I$ ,

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds.$$

Ceci conclut la preuve du premier résultat.

Si nous supposons maintenant que la fonction  $\alpha$  est croissante, nous avons :

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(t)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds, \\ &\leq \alpha(t) - \left(\alpha(t) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right)\right)\Big|_{s=a}^{s=t}, \\ &\leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(r)dr\right). \end{aligned}$$

□

**Lemme A.2.** *Il existe une constant  $C_\Omega$  qui ne dépend que  $\Omega$  telle que l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$\forall u \in L^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \quad \left| \int_\Omega uv \right| \leq C_\Omega \|u\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \left| \int_\Omega u \right| \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Démonstration.* En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega uv \right| &= \left| \int_\Omega u \left( v - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v \right) + \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \int_\Omega v \right| \\ &\leq C_\Omega \|u\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{|\Omega|} \left| \int_\Omega u \right| \left| \int_\Omega v \right| \\ &\leq C_\Omega \|u\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \left| \int_\Omega u \right| \|v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En plus dans le cas où le domaine  $\Omega$  est convexe, la constante  $C_\Omega$  est majorée par  $\frac{\text{diam}(\Omega)}{\pi}$  (voir [PW60]). □

**Lemme A.3.** *Soit une fonction  $g \in L^\infty(Y)$  telle que  $\int_Y g(y)dy = 0$ . Alors, il existe  $\zeta \in H(\text{div}, Y) \cap (L^\infty(Y))^d$  telle que*

$$\begin{cases} -\text{div}\zeta(y) &= g(y), \quad \text{dans } Y \\ \zeta(y) \cdot \mathbf{n}(y) &= 0, \quad \text{sur } \partial Y. \end{cases}$$

*Démonstration.* On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\theta(y) = g(y), & \text{dans } Y \\ (\nabla\theta(y)) \cdot \mathbf{n}(y) = 0, & \text{sur } \partial Y \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

## Formulation variationnelle

On procède par approche variationnelle. On multiplie l'équation (A.1) par une fonction  $v \in \dot{H}^1(Y)$  et on intègre par partie, ce qui donne

$$\int_Y \nabla \theta(y) \cdot \nabla v(y) dy = \int_Y g(y)v(y) dy$$

Le second membre est bien défini car  $L^\infty(Y) \subset L^2(Y)$ .

Posons

$$a_{\#}(\theta, v) = \int_Y \nabla \theta(y) \cdot \nabla v(y) dy = \int_Y g(y)v(y) dy, \quad \forall \theta \in \dot{H}^1, \forall v \in \dot{H}^1(Y),$$

et

$$l(\theta, v) = \int_Y g(y)v(y) dy, \quad \forall v \in \dot{H}^1(Y).$$

Par la suite, on considère la formulation variationnelle suivante : trouver  $\theta \in \dot{H}^1(Y)$  solution :

$$\int_Y \nabla \theta(y) \cdot \nabla v(y) dy = \int_Y g(y)v(y) dy, \quad \forall v \in \dot{H}^1(Y). \quad (\text{A.2})$$

## Existence et unicité d'une solution

Pour démontrer l'existence et l'unicité du problème (A.2), nous allons appliquer le lemme de Lax-milgram. On rappelle que dans l'espace  $\dot{H}^1(Y)$ , la semi-norme  $|\cdot|_{H^1(Y)}$  est une norme équivalente à la norme  $H^1(Y)$ . La forme bilinéaire  $a_{\#}$  est bilinéaire est coercive. En effet, on a :

$$a_{\#}(\theta, \theta) = \int_Y \nabla \theta(y) \cdot \nabla \theta(y) dy = \|\nabla \theta\|_{L^2(Y)}^2.$$

La bilinéaire  $a_{\#}$  est continue. En effet, on a

$$a_{\#}(\theta, \theta) = \int_Y \nabla \theta(y) \cdot \nabla v(y) dy \leq \|\nabla \theta\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(Y)}, \quad \forall v \in \dot{H}^1(Y).$$

La forme linéaire  $l$  est continue. En effet, on a :

$$\left| \int_Y g(y)v(y) dy \right| \leq \|g\|_{L^2} \|v\| \leq C_W \|g\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(Y)}$$

avec  $C_W$  la constante de l'inégalité Poincaré-Wirtinger.

Par conséquent, par application du Théorème de Lax-Milgram, on a existence et unicité d'une solution à la formulation variationnelle (A.2).

## Equivalence

On a montré que toute solution de l'équation (A.1) est solution de la formulation variationnelle. Réciproquement, toute solution de la formulation variationnelle est solution de l'équation (A.1). En effet, soit  $w \in H^1(Y)$ , on pose  $v = w - \int_Y w$ , on a alors  $v \in \dot{H}^1(Y)$  et par conséquent on a

$$\int_Y \nabla \theta(y) \cdot \nabla w(y) dy = \int_Y g(y)w(y) dy, \quad (\text{A.3})$$

car  $g$  est à moyenne nulle.

Comme la fonction  $\theta \in H^1(Y)$  alors  $\theta$  est une distribution et toutes les distributions ont un laplacien faible. On peut prendre  $w \in C_c^\infty(Y)$  dans (A.3) puisque  $w$  n'a pas plus de contrainte sur sa moyenne

$$\int_Y \nabla \theta(y) \cdot \nabla w(y) dy = \langle \nabla \theta, \nabla w \rangle = -\langle \Delta \theta, w \rangle = \langle g, w \rangle.$$

Par conséquent au sens des distributions, on a  $-\Delta\theta = g$  et comme  $g \in L^2(Y)$ , alors l'égalité  $-\Delta\theta = g$  a lieu au sens  $L^2(Y)$ . Donc  $\nabla\theta \in H(\text{div}, Y)$  et la formule de Green est valable. Alors par une intégration par partie, on a

$$\int_Y (-\Delta\theta(y) - g(y))w(y) dy + \int_{\partial Y} (\nabla\theta(y) \cdot \mathbf{n}(y))w(y) dy = 0, \quad \forall w \in H^1(Y).$$

En utilisant  $\Delta\theta(y) - g(y) = 0$  dans  $Y$ , on obtient alors

$$\int_{\partial Y} (\nabla\theta(y) \cdot \mathbf{n}(y))w(y) dy = 0, \quad \forall w \in H^1(Y).$$

En utilisant le fait que l'image de  $H^1(Y)$  par l'application trace est dense dans  $L^2(\partial Y)$ , on a

$$(\nabla\theta(y)) \cdot \mathbf{n}(y) = 0, \quad \text{presque partout sur } \partial Y.$$

Ce qui prouve l'équivalence.

En utilisant le résultat démontré dans [Maz09], on a  $\nabla\theta \in (L^\infty(Y))^d$ . En posant  $\zeta = \nabla\theta$ , on a

$$-\text{div}\zeta(y) = g(y), \quad \text{dans } Y,$$

d'où le résultat voulu. □



## Annexe B

# Existence, unicité et régularité des problèmes de cellule

**Définition B.1.** On définit l'opérateur elliptique  $\mathcal{P}$  comme suit :

$$\mathcal{P}(u) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \partial_j (A_{jk} \partial_k u) + \sum_{j=1}^d \partial_j (B_j u) + Ru \quad (\text{B.1})$$

avec  $A$  une fonction de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $B$  une fonction de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et  $R$  une fonction de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On rappelle la définition d'un opérateur fortement elliptique défini dans ([LM], page 111)

**Définition B.2.** On dit l'opérateur  $\mathcal{P}$  (B.1) est dit fortement elliptique s'il existe une constante strictement positive  $\alpha$  telle que

$$\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d A_{jk} \xi_j \xi_k \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Nous avons le résultat suivant démontré dans [McL00][Théorème 4.16] :

**Théorème B.1.** Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts bornés de  $\mathbb{R}^d$  tels que  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  et on suppose que l'opérateur  $\mathcal{P}$  est fortement elliptique. Pour tout réel  $r \geq 0$ , si  $u \in H^1(\Omega_2)$  et  $f \in H^r(\Omega_2)$  tels que

$$\mathcal{P}(u) = f, \quad \text{dans } \Omega_2$$

et si les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_j$  et  $R$  sont  $C^{r,1}(\bar{\Omega}_2)$  alors  $u \in H^{r+1}(\Omega_1)$  et

$$\|u\|_{H^{r+1}(\Omega_1)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_2)} + C \|f\|_{H^r(\Omega_1)}$$

avec  $C$  une constante indépendante de  $\Omega_1$  et de  $\Omega_2$ .

**Lemme B.4.** On suppose que les hypothèses 4.1 sont vérifiées, alors il existe une unique solution  $w_i \in \dot{H}_{\#}^1(Y) \cap C^1(\bar{Y})$  solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(y) \cdot (\nabla_y w_i(y) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}_y (\mathbf{D}(y) (\nabla_y w_i(y) + \mathbf{e}_i)) = \phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i, & \forall y \in Y, \\ \int_Y w_i(y) dy = 0, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

*Démonstration.* On procède par approche variationnelle. On multiplie l'équation (4.7) par une fonction  $v \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  et on intègre par partie, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_Y \mathbf{u}(y) \cdot (\nabla w_i(y) + \mathbf{e}_i) v(y) dy + \int_Y \mathbf{D}(y) (\nabla w_i(y) + \mathbf{e}_i) \cdot \nabla v(y) dy - \int_{\partial Y} \mathbf{D}(y) (\nabla w_i(y) + \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma \\ = \int_Y \phi(y) (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) v(y) dy, \end{aligned}$$

ce qui donne encore

$$\begin{aligned} \int_Y \mathbf{u}(y) \cdot \nabla w_i(y) v(y) dy + \int_Y \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y) \cdot \nabla v(y) dy - \int_{\partial Y} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma \\ - \int_{\partial Y} (\mathbf{D}(y) \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma \\ = \int_Y \phi(y) (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) v(y) dy - \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot \mathbf{e}_i) v(y) dy - \int_Y (\mathbf{D}(y) \mathbf{e}_i) \cdot \nabla v(y) dy. \end{aligned}$$

Le terme de bord  $\int_{\partial Y} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma$  est nul. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma &= \int_{\Gamma_{\{y_1=0\}}} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma + \int_{\Gamma_{\{y_1=1\}}} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma \\ &+ \int_{\Gamma_{\{y_2=0\}}} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma + \int_{\Gamma_{\{y_2=1\}}} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma \\ &+ \int_{\Gamma_{\{y_3=0\}}} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma + \int_{\Gamma_{\{y_3=1\}}} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{n}_{Y|\Gamma_{\{y_1=0\}}} = -\mathbf{n}_{Y|\Gamma_{\{y_1=1\}}}$ ,  $\mathbf{n}_{Y|\Gamma_{\{y_2=0\}}} = -\mathbf{n}_{Y|\Gamma_{\{y_2=1\}}}$  et  $\mathbf{n}_{Y|\Gamma_{\{y_3=0\}}} = -\mathbf{n}_{Y|\Gamma_{\{y_3=1\}}}$  et en utilisant le fait que  $\mathbf{D}$  et  $w_i$  sont  $Y$ -périodiques, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y} (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma &= \int_{\Gamma_{\{y_1=0\}}} \left( \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)_{\Gamma_{\{y_1=0\}}} - \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)_{\Gamma_{\{y_1=1\}}} \right) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma \\ &+ \int_{\Gamma_{\{y_2=0\}}} \left( \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)_{\Gamma_{\{y_2=0\}}} - \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)_{\Gamma_{\{y_2=1\}}} \right) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma \\ &+ \int_{\Gamma_{\{y_3=0\}}} \left( \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)_{\Gamma_{\{y_3=0\}}} - \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)_{\Gamma_{\{y_3=1\}}} \right) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme les composantes du tenseur  $\mathbf{D}$  sont  $Y$ -périodiques alors, on a  $\int_{\partial Y} (\mathbf{D}(y) \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n}_Y v(y) d\sigma = 0$ . On obtient la formulation variationnelle suivante : Trouver  $w_i \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que

$$a(w_i, v) = l(v), \quad \forall v \in \dot{H}_{\#}^1(Y), \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\begin{aligned} a(w_i, v) &= \int_Y \mathbf{u}(y) \cdot \nabla w_i(y) v(y) dy + \int_Y \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y) \cdot \nabla v(y) dy \\ l(v) &= \int_Y \phi(y) (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) v(y) dy - \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot \mathbf{e}_i) v(y) dy - \int_Y (\mathbf{D}(y) \mathbf{e}_i) \cdot \nabla v(y) dy, \end{aligned}$$

Dans la suite, on pourra remarquer que la semi-norme  $|\cdot|_{H^1(Y)}$  est une norme équivalente à la norme  $H_{\#}^1(Y)$ . En effet, on a l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\left\| v - \int_Y v(y) dy \right\|_{L^2(Y)} \leq C_Y \|\nabla v\|_{L^2(Y)}, \quad \forall v \in H^1(Y).$$

avec  $C_Y$  une constante qui ne dépend que de  $Y$ . Et, comme  $\dot{H}_{\#}^1(Y) \subset H^1(Y)$  et pour tout  $v \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$ , on a  $\int_Y v(y) dy = 0$  alors on a

$$\|v\|_{L^2(Y)} \leq C_Y \|\nabla v\|_{L^2(Y)}, \quad \forall v \in \dot{H}_{\#}^1(Y).$$

Par conséquent, on a

$$\|\nabla v\|_{L^2(Y)} \leq \|v\|_{\dot{H}_{\#}^1(Y)} \leq \|v\|_{L^2(Y)} + \|\nabla v\|_{L^2(Y)} \leq (1 + C_Y) \|\nabla v\|_{L^2(Y)}, \quad \forall v \in \dot{H}_{\#}^1(Y).$$

Ce qui prouve l'équivalence des normes  $\|\cdot\|_{\dot{H}_{\#}^1(Y)}$  et  $|\cdot|_{H^1(Y)}$ .

### Equivalence

On a vu que toute solution du problème (4.7) est solution de la formulation variationnelle (B.3). Réciproquement, on montre que toute solution de la formulation variationnelle (B.3) est solution du problème (4.7) presque partout. En effet, pour tout  $\varphi \in C_{\#}^{\infty}(\bar{Y})$ , on pose  $v(y) = \varphi(y) - \frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(y) dy$  alors  $v \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  et en remplaçant dans la formulation variationnelle (B.3), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_Y \mathbf{u}(y) \cdot \nabla w_i(y) \left( \varphi(y) - \frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(y) dy \right) dy + \int_Y \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y) \cdot \nabla \varphi(y) dy \\ &= \int_Y \phi(y) (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) \left( \varphi(y) - \frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(y) dy \right) dy - \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot \mathbf{e}_i) \left( \varphi(y) - \frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(y) dy \right) dy \\ & \quad - \int_Y (\mathbf{D}(y) \mathbf{e}_i) \cdot \nabla \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Donc au sens des distributions, on a :

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{u} \cdot (\nabla_y w_i + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(\nabla_y w_i + \mathbf{e}_i)) - \phi(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i), \varphi \right\rangle \\ &= \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(y) \right) \left( \int_Y \mathbf{u}(y) \cdot (\nabla w_i(y) + \mathbf{e}_i) dy - \int_Y \phi(y) (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) dy \right). \end{aligned}$$

On peut remarquer la condition de comptabilité suivante :

$$\int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot (\nabla w_i + \mathbf{e}_i)) dy - \int_Y (\phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) dy = 0.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} & \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot (\nabla w_i + \mathbf{e}_i)) dy - \int_Y (\phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) dy \\ &= \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot (\nabla w_i)) dy + \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot (\mathbf{e}_i)) dy - \int_Y (\phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) dy \\ &= - \int_Y \operatorname{div}(\mathbf{u}(y) w_i(y)) dy + \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot \mathbf{e}_i) dy - \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot \mathbf{e}_i) dy \\ & \quad = - \int_{\partial Y} (\mathbf{u}(y) w_i(y)) \cdot \mathbf{n}_Y d\sigma \\ & \quad = 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que les composantes de la vitesse  $\mathbf{u}$  et la fonction  $w_i$  sont  $Y$ -périodiques. Par conséquent, on obtient

$$\left\langle \mathbf{u} \cdot (\nabla w_i + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(\nabla w_i + \mathbf{e}_i)), \varphi \right\rangle = \left\langle \phi(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i), \varphi \right\rangle, \quad \text{au sens des distributions.}$$

Puisque  $w_i \in H^1(Y)$  et  $\phi \in H^1(Y)$  alors  $\operatorname{div}(\mathbf{D}(\nabla w_i + \mathbf{e}_i)) \in L^2(Y)$  et par conséquent, on a

$$\mathbf{u}(y) \cdot (\nabla w_i(y) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(y) (\nabla w_i(y) + \mathbf{e}_i)) = \phi(y) (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i), \quad \text{presque partout.}$$

### Existence et unicité

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution, on applique le théorème de Lax-Milgram à la formulation variationnelle (B.3). Pour cela, nous devons vérifier la continuité de la forme bilinéaire  $a$  et sa coercivité et nous devons également vérifier la continuité de l'application  $l$ .

La forme bilinéaire  $a$  est coercive, ie :

$$a(w_i, w_i) \geq \lambda_{min} \|\nabla w_i\|_{L^2(Y)}^2.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} a(w_i, w_i) &= \int_Y \mathbf{u}(y) \cdot \nabla w_i(y) w_i(y) dy + \int_Y \mathbf{D}(y) \nabla w_i(y) \cdot \nabla w_i(y) dy \\ &\geq -\frac{1}{2} \int_Y \operatorname{div}(\mathbf{u}(y)) (w_i(y))^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\partial Y} \mathbf{u}(y) \cdot \mathbf{n}_Y (w_i(y))^2 dy + \lambda_{min} \|\nabla w_i\|_{L^2(Y)}^2 \\ &\geq \lambda_{min} \|\nabla w_i\|_{L^2(Y)}^2 \end{aligned}$$

car  $\operatorname{div}_y \mathbf{u} = 0$  et que les composantes de  $\mathbf{u}$  et  $w_i$  sont  $Y$ -périodiques.

La forme bilinéaire  $a$  est continue, ie :

$$a(w_i, v) \leq \|\nabla w_i\| \|\nabla v\|_{L^2(Y)}, \quad \forall v \in H_{\#}^1(Y).$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} &\int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot \nabla w_i) v(y) dy + \int_Y (\mathbf{D}(y) \nabla w_i(y)) \cdot \nabla v(y) dy \\ &\leq \|\mathbf{u} \cdot \nabla w_i\|_{L^2(Y)} \|v\|_{L^2(Y)} + \|\mathbf{D} \nabla w_i\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(Y)} \\ &\leq C_Y \left( \sup_{i \in \{1, \dots, d\}} \|\mathbf{u}_i\|_{L^\infty(Y)} \right) \|\nabla w_i\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(Y)} \\ &\quad + \left( \sup_{(i,j) \in \{1, \dots, d\}^2} \|\mathbf{D}_{i,j}\|_{L^\infty(Y)} \right) \|\nabla w_i\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(Y)} \\ &\preceq \|\nabla w_i\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(Y)}. \end{aligned}$$

La forme linéaire  $l$  est continue, ie

$$\left| \int_Y (\phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) v(y) dy - \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot \mathbf{e}_i) v(y) dy - \int_Y (\mathbf{D}(y) \mathbf{e}_i) \cdot \nabla v(y) dy \right| \leq \|\nabla v\|_{L^2(Y)}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_Y (\phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) v(y) dy - \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot \mathbf{e}_i) v(y) dy - \int_Y (\mathbf{D}(y) \mathbf{e}_i) \cdot \nabla v(y) dy \right| \\
& \leq \|\phi \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i\|_{L^2(Y)} \|v\|_{L^2(Y)} + \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i\|_{L^2(Y)} \|v\|_{L^2(Y)} \\
& \quad + \|\mathbf{D} \mathbf{e}_i\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(Y)} \\
& \leq \|\phi\|_{L^2(Y)} \left( \sup_{i \in (1, \dots, d)} \|\mathbf{u}_i^*\|_{L^\infty(Y)} \right) \|v\|_{L^2(Y)} \\
& \quad + \sqrt{|Y|} \left( \sup_{i \in (1, \dots, d)} \|\mathbf{u}_i\|_{L^\infty(Y)} \right) \|v\|_{L^2(Y)} \\
& \quad + \sqrt{|Y|} \left( \sup_{(i,j) \in (1, \dots, d)^2} \|\mathbf{D}_{i,j}\|_{L^\infty(Y)} \right) \|\nabla v\|_{L^2(Y)} \\
& \leq C_Y \|\nabla v\|_{L^2(Y)} + C_Y \|\nabla v\|_{L^2(Y)} + \|\nabla v\|_{L^2(Y)} \\
& \leq \|\nabla v\|_{L^2(Y)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, par application du théorème de Lax-Milgram, nous avons l'existence et l'unicité d'une solution  $w_i \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  à la formulation variationnelle (B.3).

### Régularité

Pour étudier la régularité de la solution du problème (4.7), nous allons appliquer le théorème B.1 avec  $r = 2$ . Pour cela, nous avons besoin de construire une fonction  $W$  appartenant à l'espace  $H^1$  dans un domaine contenant  $Y$  et solution d'un problème fortement elliptique telle que sa restriction à  $Y$  est égale à  $w_i$ .

On définit les domaines  $Y_{\mathbf{k}}$  obtenus par translation du domaine  $Y$  comme suit :

$$Y_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + Y, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d.$$

De même, pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ , on définit la fonction  $\varphi_{\mathbf{k}}$  sur  $Y_{\mathbf{k}}$  comme suit :

$$\varphi_{\mathbf{k}}(x) = w_i(y), \quad \forall x = y + \mathbf{k} \in Y_{\mathbf{k}}. \quad (\text{B.4})$$

On définit la fonction  $W$  comme suit :

$$W(x) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{\mathbf{k}}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

En utilisant la définition de  $W$ , on a  $W|_{Y_{\mathbf{k}}} = w_i \in H^1(Y)$  et en utilisant le fait que  $w_i$  est  $Y$ -périodique, alors  $W \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ . Il nous reste maintenant à démontrer que  $W$  est une solution d'un problème fortement elliptique. Pour cela, pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$  et pour toute fonction  $V \in C_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ , on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{u}(x) \cdot (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(x) (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i))) V(x) dx \\
& = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \int_{Y_{\mathbf{k}}} (\mathbf{u}(x) \cdot (\nabla \varphi_{\mathbf{k}}(x) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(x) (\nabla \varphi_{\mathbf{k}}(x) + \mathbf{e}_i))) V(x) dx.
\end{aligned}$$

Par changement de variable  $x = \mathbf{k} + y$ , on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{u}(x) \cdot (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(x) (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i))) V(x) dx \\
& = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y (\mathbf{u}(y_{\mathbf{k}} + y) \cdot (\nabla \varphi_{\mathbf{k}}(y_{\mathbf{k}} + y) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(y_{\mathbf{k}} + y) (\nabla \varphi_{\mathbf{k}}(y_{\mathbf{k}} + y) + \mathbf{e}_i))) V(y_{\mathbf{k}} + y) dy.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $\varphi_k$  et en utilisant le fait que les composantes du vecteur  $\mathbf{u}$  et les composante du tenseur  $\mathbf{D}$  sont  $Y$ -périodiques, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{u}(x) \cdot (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(x) (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i))) V(x) dx \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y (\mathbf{u}(y) \cdot (\nabla w_i(y) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(y) (\nabla w_i(y) + \mathbf{e}_i))) V(y_{\mathbf{k}} + y) dy. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.7), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{u}(x) \cdot (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(x) (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i))) V(x) dx \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \int_Y (\phi(y) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) V(y_{\mathbf{k}} + y) dy \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \int_{Y_{\mathbf{k}}} (\phi(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) V(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\phi(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i) V(x) dx. \end{aligned}$$

Ce qui donne encore

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{u}(x) \cdot (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(x) (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i)) - (\phi(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i)) V(x) dx = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\mathbf{u}(x) \cdot (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{D}(x) (\nabla W(x) + \mathbf{e}_i)) = \phi(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i, \quad \text{au sens des distributions.} \quad (\text{B.5})$$

Comme  $\mathbf{D}_{i,j}$  et  $\mathbf{u}_i$  sont dans  $C^2(\bar{Y})$  et  $\phi \in H^2(\Omega)$  et comme  $w_i = W_i$  dans  $Y$ , alors par application du théorème B.1 avec  $A_{i,j} = \mathbf{D}_{i,j}$ ,  $B_j = \mathbf{u}_j$ ,  $R = 0$  et  $f = \phi(x) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_i$ , on a  $w_i \in H^3(Y)$ . Par conséquent  $w_i \in C^1(\bar{Y})$ .  $\square$

**Lemme B.5.** *On suppose que les hypothèses 4.1 sont vérifiées, alors il existe une unique solution  $\tilde{w}_i^{\varepsilon,E} \in H^2(\bar{E})$  solution de :*

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon,E}(x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon,E}(x)) &= \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^{*,E} \cdot \mathbf{e}_i \quad \forall x \in E, \\ \tilde{w}_i^{\varepsilon,E}(x) &= x_i \quad \forall x \in \partial E, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

*Démonstration.* On procède par approche variationnelle. On commence par faire un relèvement. Soit une fonction  $g$  définie sur  $E$  par  $g(x) = x_i$  et on cherche  $\tilde{w}_i^{\varepsilon,E}$  sous la forme  $\tilde{w}_i^{\varepsilon,E} = \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} + g$  avec  $\tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} \in H_0^1(E)$ . On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x)) &= f \quad \forall x \in E, \\ \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) &= 0 \quad \forall x \in \partial E, \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

avec  $f \in H^1(E)$  définie par  $f = \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^{*,E} \cdot \mathbf{e}_i + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \mathbf{e}_i$ .

## Formulation variationnelle

On multiplie l'équation (B.7) par une fonction  $v \in H_0^1(E)$  ce qui donne :

$$\int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) v(x) dx - \int_E \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) v(x) dx = \int_E f(x) v(x) dx.$$

Par une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) v(x) dx + \int_E \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial E} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \cdot \mathbf{n}_E v(x) d\sigma \\ = \int_E f(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait  $v = 0$  sur  $\partial E$ , on obtient la formulation variationnelle suivante : trouver  $\nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} \in H_0^1(E)$  tel que

$$\int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) v(x) dx + \int_E \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \cdot \nabla v(x) dx = \int_E f(x) v(x) dx. \quad (\text{B.8})$$

## Equivalence

On a montré que toute solution de l'équation (B.7) est solution de la formulation variationnelle B.8. Réciproquement, nous allons montrer que toute solution de la formulation variationnelle B.8 est aussi solution de l'équation (B.7) dans un sens à préciser. Soit  $\varphi$  une fonction de l'espace  $C_c^\infty(E)$  alors comme  $C_c^\infty(E) \subset H_0^1(E)$  alors l'égalité suivante est vérifiée

$$\int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \varphi(x) dx + \int_E \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_E f(x) \varphi(x) dx.$$

Alors au sens des distributions, on a :

$$\left\langle \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) - f, \varphi \right\rangle = 0.$$

Ce qui donne :

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) - \operatorname{div} \left( \mathbf{D}^\varepsilon \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) - f = 0, \quad \text{au sens des distributions.}$$

## Existence et unicité

Nous allons utiliser le lemme de Lax-Milgram pour établir l'existence et l'unicité de la formulation variationnelle B.8. On rappelle que la semi-norme  $\|\nabla \varphi\|_{L^2(E)}$  est une norme dans l'espace  $H_0^1(E)$ . On commence par montrer que la forme bilinéaire suivante est coercive

$$\int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) v(x) dx + \int_E \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \cdot \nabla v(x) dx.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) dx + \int_E \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) dx \\ \geq \int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) dx + \lambda_{\min} \left\| \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} \right\|_{L^2(E)}^2 \\ \geq \lambda_{\min} \left\| \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} \right\|_{L^2(E)}^2, \end{aligned}$$

car  $\int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) dx = 0$ .

Nous allons montrer que la forme bilinéaire est continue :

$$\begin{aligned} & \int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) v(x) dx + \int_E \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right) \cdot \nabla v(x) dx \\ & \leq \left\| \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} \right\|_{L^2(E)} \|v\|_{L^2(E)} + \left\| \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}(x) \right\|_{L^2(E)} \|\nabla v\|_{L^2(E)} \\ & \leq C_E \left\| \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \right\|_{L^\infty(E)} \left\| \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} \right\|_{L^2(E)} \|\nabla v\|_{L^2(E)} + \lambda_{max} \left\| \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} \right\|_{L^2(E)} \|\nabla v\|_{L^2(E)} \\ & \leq \left( C_E \left\| \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \right\|_{L^\infty(E)} + \lambda_{max} \right) \left\| \nabla \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} \right\|_{L^2(E)} \|\nabla v\|_{L^2(E)} \end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme bilinéaire.

Nous allons montrer que la forme linéaire suivante est continue

$$\int_E f(x)v(x) dx = \int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^{*,E} \cdot \mathbf{e}_i + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \mathbf{e}_i \right) v(x) dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_E f(x)v(x) dx &= \int_E \left( \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^{*,E} \cdot \mathbf{e}_i + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \mathbf{e}_i \right) v(x) dx \\ &\leq \left\| \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon \mathbf{u}^{*,E} \cdot \mathbf{e}_i + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{e}_i \right\|_{L^2(E)} \|v\|_{L^2(E)} \\ &\leq C_E \left\| \frac{1}{\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \mathbf{u}^{*,E} \cdot \mathbf{e}_i + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{e}_i \right\|_{L^2(E)} \|\nabla v\|_{L^2(E)} \\ &\leq \frac{C_E}{\varepsilon} \left( \|\mathbf{u}^{*,E} \cdot \mathbf{e}_i\| \|\phi^\varepsilon\|_{L^2(E)} + \|\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{e}_i\|_{L^2(E)} \right) \|\nabla v\|_{L^2(E)} \end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme linéaire.

Par conséquent, en appliquant le lemme de Lax-Milgram, on a existence et unicité de la solution de la formulation variationnelle B.8.

### Régularité

$\tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}$  est solution d'une équation elliptique dans un domaine convexe et comme le second membre  $f \in H^1(E)$ , alors on montre que  $\tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E}$  appartient au moins à l'espace  $H_0^2(E)$ . Comme  $\tilde{w}_i^{\varepsilon,E} = \tilde{w}_{i,0}^{\varepsilon,E} + x_i$ , alors on en déduit que  $\tilde{w}_i^{\varepsilon,E} \in H^2(\bar{E})$ .  $\square$



## Annexe C

# Existence, unicité et régularité des problèmes d'évolution

**Définition C.3.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Soit  $V$  un espace de Hilbert. On définit l'espace  $\mathcal{W}(a, b; V, V^*)$  comme suit

$$\mathcal{W}(a, b; V, V^*) = \{v \in L^2(a, b; V), \partial_t v \in L^2(a, b; V^*)\}.$$

Nous avons les théorèmes suivants démontrés dans [DL00][page 473]

**Théorème C.2.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Soient  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert. On suppose que  $V$  est dense dans  $H$ . Soit  $v \in \mathcal{W}(a, b; V, V^*)$ . Alors la fonction  $v$  appartient à l'espace  $C^0([0, T]; H)$ .

**Théorème C.3.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Soient  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert. On suppose que  $V$  est dense dans  $H$ . Soient  $v, u \in \mathcal{W}(a, b; V, V^*)$ . Alors l'égalité suivante est vérifiée

$$\langle \partial_t u, v \rangle + \langle u, \partial_t v \rangle = (u(b), v(b)) - (u(a), v(a)). \quad (\text{C.1})$$

**Proposition C.1.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Soient  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert. On suppose que  $V$  est dense dans  $H$ . Soit  $u \in \mathcal{W}(a, b; V, V^*)$ . Alors l'égalité suivante est vérifiée dans  $\mathcal{D}'(]0, T[)$

$$\langle \partial_t u(t), v \rangle = \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad (\text{C.2})$$

**Définition C.4.** Soit l'opérateur  $D_k^h$  défini par

$$D_k^h(v) = \frac{v(x + h\mathbf{e}_k) - v(x)}{h}, \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (\text{C.3})$$

**Proposition C.2.** Les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\int_{\mathbb{R}^d} w D_k^{-h}(v) dx = \int_{\mathbb{R}^d} D_k^h(w)v dx, \quad \forall v, w \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (\text{C.4})$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_k^h(wv)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (w(x) D_k^h(v)(x) + D_k^h(w)(x) v^{h,k}(x)) dx, \quad \forall v, w \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (\text{C.5})$$

$$\|D_k^h(v)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad (\text{C.6})$$

avec  $v^{h,k} = v(x + h\mathbf{e}_k)$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} D_k^h(v) = \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (\text{C.7})$$

*Démonstration.* Soient  $v, w \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . On a

$$\int_{\mathbb{R}^d} w(x) D_k^{-h} v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{v(x - h\mathbf{e}_k) - v(x)}{h} w(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{v(x - h\mathbf{e}_k)}{h} w(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{v(x)}{h} w(x) dx.$$

Considérons le terme  $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{v(x - h\mathbf{e}_k)}{h} w(x) dx$ . On a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{v(x - h\mathbf{e}_k)}{h} w(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} v(y) \frac{w(y + h\mathbf{e}_k)}{h} dy,$$

où on a posé  $y = x - h\mathbf{e}_k$ . On en a déduit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} w(x) D_k^{-h} v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} v(z) \frac{w(z + h\mathbf{e}_k)}{h} dz - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{v(z)}{h} w(z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} v(z) \frac{w(z + h\mathbf{e}_k) - w(z)}{h} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} D_k^h(w(z)) v(z) dz. \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (C.4).

On établit maintenant l'égalité (C.5). Soient  $v, w \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} D_k^h(wv)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{w(x + h\mathbf{e}_k)v(x + h\mathbf{e}_k) - w(x)v(x)}{h} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{w(x + h\mathbf{e}_k)v(x + h\mathbf{e}_k)}{h} - \frac{w(x)v(x + h\mathbf{e}_k)}{h} + \frac{w(x)v(x + h\mathbf{e}_k)}{h} - \frac{w(x)v(x)}{h} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{w(x + h\mathbf{e}_k) - w(x)}{h} v(x + h\mathbf{e}_k) + w(x) \frac{v(x + h\mathbf{e}_k) - v(x)}{h} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} D_k^h(w(x)) v(x + h\mathbf{e}_k) + w(x) D_k^h(v(x)) dx, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (C.5).

Soit  $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Posons  $g(t) = v(x + t\mathbf{e}_k)$ . On a alors

$$D_k^h(v) = \frac{v(x + h\mathbf{e}_k) - v(x)}{h} = \frac{g(1) - g(0)}{h} = \int_0^1 \frac{g'(t)}{h} dt = \int_0^1 \mathbf{e}_k \cdot \nabla c(x + t h \mathbf{e}_k) dt.$$

Alors, pour  $1 \leq p < \infty$ , on a

$$\begin{aligned} \|D_k^h(v)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^1 \mathbf{e}_k \cdot \nabla c(x + t h \mathbf{e}_k) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla c(x + t h \mathbf{e}_k)|^p dt dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla c(x + t h \mathbf{e}_k)|^p dx dt \right)^{1/p} \leq \left( \int_0^1 \|\nabla c\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p dt \right)^{1/p} = \|\nabla c\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Pour  $p = \infty$ , on a

$$\|D_k^h(v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \left| \int_0^1 \mathbf{e}_k \cdot \nabla c(x + t h \mathbf{e}_k) dt \right| \leq \|\nabla c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

En utilisant la densité de l'espace  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ , on retrouve l'inégalité (C.6).

Soit  $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . On a  $\|D_k^h(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C$  avec  $C$  indépendant de  $h$ . Donc la suite  $(D_k^h(v))_h$  converge faiblement vers  $z$  appartenant à  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Identifions la limite  $z$ . Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ; d'une part,

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_k^h(v(x)) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} z(x) \varphi(x) dx$$

d'autre part, en utilisant (C.4), on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_k^h(v(x))\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} v(x)D_k^{-h}\varphi(x) dx.$$

Mais comme  $\varphi$  est une fonction régulière, à support compact, alors  $D_k^{-h}\varphi \rightarrow -\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .  
Donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x)D_k^{-h}\varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} v(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) dx = \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle.$$

Ce qui entraîne que  $z = \frac{\partial v}{\partial x_k}$ . Donc  $D_k^h(v) \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_k}$  faiblement. Mais d'après la semi-continuité inférieure par la limite faible, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|D_k^h(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq \|z\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Donc

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C.$$

□

**Proposition C.3.** *On suppose que les hypothèses 4.1 sont vérifiées. Alors, il existe une unique fonction  $c_\varepsilon$  dans l'espace*

$$L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$$

telle que

$$\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))$$

solution de

$$\begin{cases} \phi^\varepsilon(x)\partial_t c_\varepsilon(t, x) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^\varepsilon(x)\nabla c_\varepsilon(t, x)) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ c_\varepsilon(0, x) = c^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

*Démonstration. Formulation variationnelle*

La preuve de l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (C.8) se fera par approche variationnelle. Pour cela, on multiplie l'équation (C.8) par une fonction  $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ , ce qui donne :

$$\left\langle \phi^\varepsilon \partial_t c_\varepsilon(t), v \right\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d), H^1(\mathbb{R}^d)} - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} c_\varepsilon(t, x) \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x)\nabla c_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla v(x) dx = 0. \quad (\text{C.9})$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{u}^\varepsilon \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))^d$ ,  $\mathbf{D}^\varepsilon \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))^{d \times d}$  et  $\phi^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , on montre que l'équation (C.9) a bien un sens. Et, comme  $\phi$  ne dépend pas de  $t$  alors, on a

$$\frac{d}{dt} \left\langle \phi^\varepsilon c_\varepsilon(t), v \right\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d), H^1(\mathbb{R}^d)} - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} c_\varepsilon(t, x) \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x)\nabla c_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla v(x) dx = 0. \quad (\text{C.10})$$

Soit  $\Psi \in H_{0, T}^1(0, T)$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{d}{dt} \left( \left\langle \phi^\varepsilon c_\varepsilon(t), v \right\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d), H^1(\mathbb{R}^d)} \right) \Psi(t) dt \\ & - \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} c_\varepsilon(t, x) \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x)\nabla c_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla v(x) dx \right) \Psi(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) c_\varepsilon(t,x) v(x) dx \right) \Psi'(t) dt \\ & - \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} c_\varepsilon(t,x) \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla v(x) dx \right) \Psi(t) dt \\ & = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) c_\varepsilon(0,x) v(x) dx \right) \Psi(0) = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) c^0(x) v(x) dx \right) \Psi(0). \end{aligned}$$

On considère la formulation variationnelle suivante :

trouver  $c_\varepsilon \in L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^d))$  telle que, pour tout  $V \in L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap H_{0,T}^1(0,T; L^2(\mathbb{R}^d))$ , on a :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) c_\varepsilon(t,x) \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{1}{\varepsilon} c_\varepsilon(t,x) \mathbf{u}^\varepsilon(x) - \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \right) \cdot \nabla V(t,x) dx dt \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) c^0(x) V(0,x) dx. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

### Unicité et Existence

**Construction d'une solution de (C.11)** Nous allons utiliser la méthode de Galerkin pour montrer l'existence d'une solution. Comme l'espace de Hilbert  $H^1(\mathbb{R}^d)$  est séparable, il admet une base orthonormale (voir [Bre10])  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq \infty}$ . On définit l'espace  $V^N = \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ . On définit la suite  $(c^{N,\varepsilon})_{N \geq 1}$  solution du problème suivant : trouver  $c^{N,\varepsilon} : [0, t] \rightarrow V^N$  de la forme :

$$c^{N,\varepsilon}(t,x) = \sum_{s=1}^N \alpha_s^{N,\varepsilon}(t) \varphi_s(x)$$

avec  $\alpha_s^{N,\varepsilon} \in H^1(0,T)$ ,  $1 \leq s \leq N$ , solution de

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{\partial(\phi^\varepsilon(x) c^{N,\varepsilon}(t,x))}{\partial t} \right) \varphi_i(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c^{N,\varepsilon}(t,x) \cdot \nabla \varphi_i(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} c^{N,\varepsilon}(t,x) \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi_i(x) dx = 0, \\ \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ c^{N,\varepsilon}(0,x) = c_0^N(x) = P_N(c^0) = \sum_{s=1}^N (c^0, \varphi_s) \varphi_s(x). \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

$P_N$  représente l'opérateur de projection orthogonale sur  $V^N$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Comme  $\varphi_j, j = 1, \dots, N$  est une base pour  $V^N$ , l'équation (C.12) équivaut à résoudre le système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha}^{N,\varepsilon}(t) + \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}^{N,\varepsilon}(t) = 0, \\ \boldsymbol{\alpha}^{N,\varepsilon}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0, \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

où pour  $i, j = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad \mathbf{A}_{ij} = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla \varphi_j(x) \cdot \nabla \varphi_i(x) - \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi_i(x) \varphi_j(x) \right) dx, \\ \alpha_{0,i} &= \int_{\mathbb{R}^d} c^0(x) \varphi_i(x) dx. \end{aligned}$$

On remarque que les coefficients de  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{A}$  sont constants. La matrice  $\mathbf{M}$  est symétrique et grâce aux hypothèses faites sur  $\phi^\varepsilon$ , elle est définie positive, donc inversible. Par conséquent, le système (C.13) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha}^{N,\varepsilon}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}^{N,\varepsilon}(t) = 0, \\ \boldsymbol{\alpha}^{N,\varepsilon}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0. \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

C'est un système carré d'équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients bornés. Une extension classique du théorème de Cauchy-Lipschitz (voir [Wlo]) entraîne que (C.14) admet une unique solution  $\alpha^{N,\varepsilon} \in C^0([0,T])^N$  et en reportant cette information dans (C.14) on trouve que  $\alpha^{N,\varepsilon} \in W^{1,\infty}(0,T)^N$ . En multipliant la  $i^{\text{ème}}$  équation de (C.12) par  $\alpha_i$  et en sommant sur  $i$ , on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial(\phi(x)c^{N,\varepsilon}(t,x))}{\partial t} c^{N,\varepsilon}(t,x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c^{N,\varepsilon}(t,x) \cdot \nabla c^{N,\varepsilon}(t,x) - \int_{\mathbb{R}^d} c^{N,\varepsilon}(t,x) \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \nabla c^{N,\varepsilon}(t,x) dx = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(c^{N,\varepsilon}(t,x))^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c^{N,\varepsilon}(t,x) \cdot \nabla c^{N,\varepsilon}(t,x) dx = 0.$$

En intégrant de 0 à  $T$ , nous avons :

$$\frac{\phi_{\min}}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (c^{N,\varepsilon}(t,x))^2 dx + \lambda_{\min} \|\nabla c^{N,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) (c^{N,\varepsilon}(0))^2 dx.$$

On remarque que  $\|c^{N,\varepsilon}(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|c^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  car  $P_N$  est la projection sur  $V^N$  pour la norme  $L^2(\mathbb{R}^d)$  donc :

$$\|c^{N,\varepsilon}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{2\lambda_{\min}}{\phi_{\min}} \|\nabla c^{N,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \leq \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \|c^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \quad (\text{C.15})$$

et par conséquent  $\nabla c^{N,\varepsilon}$  est borné dans  $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)^d)$  et  $c^{N,\varepsilon}$  est bornée dans  $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$ . Il existe alors une sous suite de  $c^{N,\varepsilon}$  (encore notée par  $c^{N,\varepsilon}$ ) qui converge dans  $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$  faiblement et dans  $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$  \*-faiblement. Il existe  $c \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$  telle que :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} c^{N,\varepsilon}(t,x) \Psi(t,x) dx dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} c_\varepsilon(t,x) \Psi(t,x) dx dt, \quad \forall \Psi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)),$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla c^{N,\varepsilon}(t,x) \cdot \Psi(t,x) dx dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \Psi(t,x) dx dt, \quad \forall \Psi \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)^d).$$

**Passage à la limite** On voudrait montrer que la limite  $c_\varepsilon$  de la sous-suite de  $c^{N,\varepsilon}$  vérifie la formulation variationnelle (C.11). Puisque  $c^{N,\varepsilon}$  est assez régulière, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) \frac{\partial c^{N,\varepsilon}(t,x)}{\partial t} \varphi_j(x) dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) c^{N,\varepsilon}(t,x) \varphi_j(x) dx.$$

Soit  $\Psi \in H_{0,T}^1(0,T)$ , on a :

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi c^{N,\varepsilon}(t,x) \varphi_j(x) dx \right) \Psi(t) dt + \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c^{N,\varepsilon}(t,x) \cdot \nabla \varphi_j(x) dx \right) \Psi(t) dt$$

$$- \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} c^{N,\varepsilon}(t,x) \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi_j(x) dx \right) \Psi(t) dt = 0.$$

En intégrant par parties, on a :

$$- \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon c^{N,\varepsilon}(t,x) \varphi_j(x) dx \right) \Psi'(t) dt + \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c^{N,\varepsilon}(t,x) \cdot \nabla \varphi_j(x) dx \right) \Psi(t) dt$$

$$- \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} c^{N,\varepsilon}(t,x) \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi_j(x) dx \right) \Psi(t) dt = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon c^{N,\varepsilon}(0,x) \varphi_j(x) dx \right) \Psi(0).$$

On fixe  $j$  et on passe à la limite en  $N$ . On obtient :

$$- \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) c_\varepsilon(t,x) \varphi_j(x) dx \right) \Psi'(t) dt + \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla \varphi_j(x) dx \right) \Psi(t) dt$$

$$- \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} c_\varepsilon(t,x) \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi_j(x) dx \right) \Psi(t) dt = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon c_\varepsilon(0,x) \varphi_j(x) dx \right) \Psi(0).$$

En utilisant la densité de la base  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  dans  $H^1(\mathbb{R}^d)$ , on a  $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^d), \forall \Psi \in H_{0,T}^1(0,T)$  :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) c_\varepsilon(t,x) v(x) \right) \Psi'(t) dt + \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla v(x) \right) \Psi(t) dt \\ & - \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} c_\varepsilon(t,x) \frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x)}{\varepsilon} \cdot \nabla v(x) \right) \Psi(t) dt = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) c^0(x) v(x) dx \right) \Psi(0). \end{aligned}$$

L'ensemble des fonctions de la forme  $v\Psi$  avec  $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\Psi \in H_{0,T}^1(0,T)$  étant dense dans  $L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap H_{0,T}^1(0,T; L^2(\mathbb{R}^d))$ , alors  $c_\varepsilon$  vérifie la formulation variationnelle (C.11).

### Régularité

En utilisant le fait que  $c^0 \in H^3(\mathbb{R}^d)$ , on peut montrer l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{\phi_{min}} \left\| (\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla c_\varepsilon(T, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \frac{1}{\phi_{min}^2} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \left\| \nabla c_\varepsilon \right\|_{L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{\lambda_{max}}{\phi_{min}} \left\| \nabla c^0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

En effet, on prend  $v = \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}$  dans l'équation (C.10) ce qui est possible car  $\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} \in H^1(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

On obtient :

$$\left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t,x) \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx = 0.$$

Ce qui donne encore

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t,x) \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) dx \\ & \leq \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \left\| \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \left\| \nabla c_\varepsilon(t,x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité :  $2ab \leq a^2 + b^2$ , on a

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t,x) \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) dx \\ & \leq \frac{1}{2\delta} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \left\| \nabla c_\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{\delta}{2} \left\| \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Considérons le terme  $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla c_\varepsilon(t,x) dx \\ & = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbf{D}_{i,j}^\varepsilon(x) \partial_{x_i} c_\varepsilon(t,x) \partial_{t,x_j}^2 c_\varepsilon(t,x) dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{D}_{i,j}^\varepsilon = \mathbf{D}_{j,i}^\varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t,x) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbf{D}_{i,j}^\varepsilon(x) \partial_{x_i} c_\varepsilon(t,x) \partial_{x_j} c_\varepsilon(t,x) \right) \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x)). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) dx \leq \frac{1}{2\delta} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \|\nabla c_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{\delta}{2} \left\| \frac{\partial c_\varepsilon(t, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Ce qui donne encore

$$\left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| (\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla c_\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{2\delta} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \|\nabla c_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{\delta}{2} \left\| \frac{\partial c_\varepsilon(t, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

En intégrant sur  $[0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\phi^\varepsilon} \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla c_\varepsilon(T, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2\delta} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{\delta}{2} \left\| \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla c_\varepsilon(0, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne encore

$$\begin{aligned} & \left( \phi_{\min} - \frac{\delta}{2} \right) \left\| \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla c_\varepsilon(T, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2\delta} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla c_\varepsilon(0, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

En prenant  $\delta = \phi_{\min}$ , on a

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{\phi_{\min}} \left\| (\mathbf{D}^\varepsilon)^{1/2} \nabla c_\varepsilon(T, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \frac{1}{\phi_{\min}^2} \left\| \frac{\mathbf{u}^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{\lambda_{\max}}{\phi_{\min}} \|\nabla c^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

On souhaite maintenant montrer que  $c_\varepsilon \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^d))$ . L'ingrédient essentiel de la démonstration est la méthode de la "translation" (voir [AII05][page 133]).

On prend  $v = D_k^{-h} (D_k^h c_\varepsilon(t, x))$  dans l'équation (C.10) ce qui est possible car  $c_\varepsilon(t) \in H^1(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $t \in [0, T]$ . On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t, x) D_k^{-h} (D_k^h c_\varepsilon(t, x)) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) D_k^{-h} (D_k^h c_\varepsilon(t, x)) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla (D_k^{-h} (D_k^h c_\varepsilon(t, x))) dx = 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne encore

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla (D_k^{-h} (D_k^h c_\varepsilon(t, x))) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \left( -\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) \right) D_k^{-h} (D_k^h c_\varepsilon(t, x)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (C.4), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} D_k^h (\mathbf{D}^\varepsilon(x) \nabla c_\varepsilon(t, x)) \cdot \nabla D_k^h (c_\varepsilon(t, x)) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \left( -\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t, x) \right) D_k^{-h} (D_k^h c_\varepsilon(t, x)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (C.5), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^{\varepsilon,h,k}(x) \nabla D_k^h(c_\varepsilon(t,x))) \cdot \nabla D_k^h(c_\varepsilon(t,x)) \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla D_k^h(c_\varepsilon(t,x)) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( -\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) \right) D_k^{-h}(D_k^h c_\varepsilon(t,x)) \, dx. \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{D}^{\varepsilon,h,k}(x)_{i,j} = \mathbf{D}_{i,j}^\varepsilon(x + h\mathbf{e}_k)$ .

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \|\nabla D_k^h(c_\varepsilon)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)(x) \nabla c_\varepsilon(t,x) \cdot \nabla D_k^h(c_\varepsilon(t,x)) \, dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left( -\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) \right) D_k^{-h}(D_k^h c_\varepsilon) \, dx \right| \\ &\leq \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla D_k^h(c_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \left\| -\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|D_k^{-h} D_k^h r_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla D_k^h(c_\varepsilon(t,x))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \left\| -\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|D_k^{-h} D_k^h r_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $\|D_k^{-h} D_k^h c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla D_k^h c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ , on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \|\nabla D_k^h(c_\varepsilon)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla D_k^h(c_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \left\| -\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x) - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \nabla c_\varepsilon(t,x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla D_k^h c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne encore

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \|\nabla D_k^h(c_\varepsilon)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla D_k^h(c_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \left( \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla c_\varepsilon(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) \|\nabla D_k^h c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne encore

$$\begin{aligned} \|\nabla D_k^h(c_\varepsilon)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{\min}} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla c_\varepsilon(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout  $k = 1, \dots, d$ , on a

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial x_k}(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{\min}} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla c_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\phi^\varepsilon \partial_t c_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} |c_\varepsilon(t)|_{H^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{\min}} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla r_\varepsilon(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$



Finalement, on a

$$|c_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \left\| D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \\ + \frac{1}{\lambda_{\min}} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\phi^\varepsilon(x) \partial_t c_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}.$$

Considérons le terme  $\left\| D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ . Par définition, on a  $D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j} = D_k^h \mathbf{D}_{ij}^\varepsilon$ . Alors, on a

$$\left\| D_h(\mathbf{D}^\varepsilon)_{i,j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| D_k^h \mathbf{D}_{ij}^\varepsilon \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}^\varepsilon}{\partial x_k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}}{\partial y_k} \right\|_{L^\infty(Y)}.$$

Par conséquent, on a :

$$|c_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}}{\partial y_k} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \\ + \frac{1}{\lambda_{\min}} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \frac{\phi_{\max}}{\lambda_{\min}} \|\partial_t c_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}.$$

On en déduit que  $c_\varepsilon \in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))$ . □

**Proposition C.4.** *On suppose que les hypothèses 4.1 sont vérifiées. Alors, il existe une unique fonction  $c$  dans l'espace*

$$L^2(0,T;H^5(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T;W^{3,\infty}(\mathbb{R}^d))$$

telle que

$$\frac{\partial c}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$$

solution de

$$\begin{cases} \bar{\phi} \partial_t c(t,x) - \operatorname{div}(\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) &= 0 \quad \text{dans } (0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ c(0,x) &= c^0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

*Démonstration.* La preuve de l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (C.16) se fera par approche variationnelle. Pour cela, on multiplie l'équation (C.16) par une fonction  $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ , ce qui donne :

$$\left\langle \bar{\phi} \partial_t c(t), v \right\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d), H^1(\mathbb{R}^d)} + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) \cdot \nabla v(x) dx = 0. \quad (\text{C.17})$$

Soit  $\Psi \in H_{0,T}^1(0,T)$ , on a

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left( \left\langle \bar{\phi} c(t), v \right\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d), H^1(\mathbb{R}^d)} \right) \Psi(t) dt + \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) \cdot \nabla v(x) dx \right) \Psi(t) dt = 0.$$

Par intégration par parties, on a

$$- \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c(t,x) v(x) dx \right) \Psi'(t) dt - \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) \cdot \nabla v(x) dx \right) \Psi(t) dt \\ = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c(0,x) v(x) dx \right) \Psi(0) = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c^0(x) v(x) dx \right) \Psi(0).$$

On considère le formulation variationnelle suivante :

trouver  $c \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$  tel que, pour tout  $V \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)) \cap H_{0,T}^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$ , on a :

$$- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c(t,x) \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) \cdot \nabla V(t,x) dx dt = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c^0(x) V(0,x) dx \quad (\text{C.18})$$

### Unicité et Existence

**Construction d'une solution de (C.18)** Nous allons utiliser la méthode de Galerkin pour montrer l'existence d'une solution. Comme l'espace de Hilbert  $H^1(\mathbb{R}^d)$  est séparable, il admet une base orthonormale (voir [Bre10])  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq \infty}$ . On définit l'espace  $V^N = \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ . On définit la suite  $(c^N)_{N \geq 1}$  solution du problème suivant : trouver  $c^N : [0, t] \rightarrow V^N$  de la forme :

$$c^N(t, x) = \sum_{s=1}^N \alpha_s^N(t) \varphi_s(x)$$

avec  $\alpha_s^N \in H^1(0, T)$ ,  $1 \leq s \leq N$ , solution de

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{\partial(\bar{\phi} c^N(t, x))}{\partial t} \right) \varphi_i(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c^N(t, x) \cdot \nabla \varphi_i(x) dx = 0, & \forall i = 1, \dots, N, \\ c^N(0, x) = c_0^N(x) = P_N(c^0) = \sum_{s=1}^N (c^0, \varphi_s) \varphi_s(x). \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

$P_N$  représente l'opérateur de projection orthogonale sur  $V^N$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Comme  $\varphi_j, j = 1, \dots, N$  est une base pour  $V^N$ , l'équation (C.12) équivaut à résoudre le système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha}^N(t) + \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}^N(t) = 0, \\ \boldsymbol{\alpha}^N(0) = \boldsymbol{\alpha}_0, \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

où pour  $i, j = 1, \dots, N$

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad \mathbf{A}_{ij} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla \varphi_j(x) \cdot \nabla \varphi_i(x) dx, \quad \alpha_{0,i} = \int_{\mathbb{R}^d} c^0(x) \varphi_i(x) dx.$$

On remarque que les coefficients de  $\mathbf{M}$  sont constants et ceux de  $\mathbf{A}$  appartiennent à  $L^\infty(0, T)$ . La matrice  $\mathbf{M}$  est symétrique et inversible. Par conséquent, le système (C.20) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha}^N(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}^N(t) = 0, \\ \boldsymbol{\alpha}^N(0) = \boldsymbol{\alpha}_0. \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

C'est un système carré d'équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients bornés. Une extension classique du théorème de Cauchy-Lipschitz (voir [Wlo]) entraîne que (C.21) admet une unique solution  $\boldsymbol{\alpha}^N \in \mathcal{C}^0([0, T])^N$  et en reportant cette information dans (C.21) on trouve que  $\boldsymbol{\alpha}^N \in W^{1, \infty}(0, T)^N$ . En multipliant la  $i^{\text{ème}}$  équation de (C.19) par  $\alpha_i$  et en sommant sur  $i$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial(\phi(x) c^N(t, x))}{\partial t} c^N(t, x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c^N(t, x) \cdot \nabla c^N(t, x) dx &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(c^N(t, x))^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c^N(t, x) \cdot \nabla c^N(t, x) dx &= 0. \end{aligned}$$

On intègre de 0 à  $t$  :

$$\frac{\bar{\phi}}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (c^N(t, x))^2 dx + \|(\mathbf{D}^*)^{1/2} \nabla c^N\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 = \frac{\bar{\phi}}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (c^N(0))^2 dx,$$

On remarque que  $\|c^N(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|c^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  car  $P_N$  est la projection sur  $V^N$  pour la norme  $L^2(\mathbb{R}^d)$  donc :

$$\|c^N(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{2}{\bar{\phi}} \|(\mathbf{D}^*)^{1/2} \nabla c^N\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \leq \|c^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \quad (\text{C.22})$$

et par conséquent  $\nabla c^N$  est borné dans  $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)^d)$  et  $c^N$  est bornée dans  $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$ . Il existe alors une sous suite de  $c^N$  (encore notée par  $c^N$ ) qui converge dans  $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$  faiblement et dans  $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$  \*-faiblement. Il existe  $c \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$  telle que :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} c^N(t,x) \Psi(t,x) dx dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} c(t,x) \Psi(t,x) dx dt, \quad \forall \Psi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)),$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla c^N(t,x) \Psi(t,x) dx dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla c(t,x) \Psi(t,x) dx dt, \quad \forall \Psi \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)^d).$$

**Passage à la limite** On voudrait montrer que la limite  $c$  de la sous-suite de  $c^N$  vérifie la formulation variationnelle (C.11). Puisque  $c^N$  est assez régulière, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \frac{\partial c^N(t,x)}{\partial t} \varphi_j(x) dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c^N(t,x) \varphi_j(x) dx.$$

Soit  $\Psi \in H_{0,T}^1(0,T)$ , on a :

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c^N(t,x) \varphi_j(x) dx \right) \Psi(t) dt + \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c^N(t,x) \cdot \nabla \varphi_j(x) \right) dx \Psi(t) dt = 0.$$

En intégrant par parties, on a :

$$- \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c^N(t,x) \varphi_j(x) \right) \Psi'(t) dt + \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c^N(t,x) \cdot \nabla \varphi_j(x) \right) \Psi(t) dt = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c^N(0,x) \varphi_j(x) \right) \Psi(0).$$

On fixe  $j$  et on passe à la limite en  $N$ . On obtient :

$$- \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c(t,x) \varphi_j(x) \right) \Psi'(t) dt + \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c(t,x) \cdot \nabla \varphi_j(x) \right) \Psi(t) dt = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c(0,x) \varphi_j(x) \right) \Psi(0).$$

En utilisant la densité de la base  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  dans  $H^1(\mathbb{R}^d)$ , on a  $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^d), \forall \Psi \in H_{0,T}^1(0,T)$  :

$$- \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c(t,x) v(x) \right) \Psi'(t) dt + \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c(t,x) \cdot \nabla v(x) \right) \Psi(t) dt = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} c^0(x) v(x) dx \right) \Psi(0).$$

L'ensemble des fonctions de la forme  $v\Psi$  avec  $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\Psi \in H_{0,T}^1(0,T)$  étant dense dans  $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)) \cap H_{0,T}^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$ , alors la solution construite  $c$  vérifie la formulation variationnelle (C.18).

## Régularité

**Étape 1** En utilisant le fait que  $c^0 \in H^3(\mathbb{R}^d)$ , on peut montrer l'estimation suivante :

$$\bar{\phi} \left\| \frac{\partial c}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \left\| (\mathbf{D}^*)^{1/2} \nabla c(T,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \sup_{i,j} |\mathbf{D}_{i,j}^*| \left\| \nabla c^0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

En effet, en prenant  $v = \frac{\partial c}{\partial t}$  dans (C.17), on a

$$\left\| \sqrt{\bar{\phi}} \frac{\partial c}{\partial t}(t,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) dx = 0.$$

Considérons le terme  $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) dx$ .

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c(t,x) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla c(t,x) dx = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbf{D}_{i,j}^*(x) \partial_{x_i} c(t,x) \partial_{t,x_j}^2 c(t,x) dx.$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{D}_{i,j}^* = \mathbf{D}_{j,i}^*$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c(t,x) \cdot \nabla \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x) \cdot \nabla c(t,x)).$$

Par conséquent, on a

$$\left\| \sqrt{\bar{\phi}} \frac{\partial c}{\partial t}(t,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^* \nabla c(t,x) \cdot \nabla c(t,x) dx = 0$$

En intégrant sur  $[0, t]$ , on a

$$\left\| \sqrt{\bar{\phi}} \frac{\partial c}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{D}^*)^{1/2} \nabla c(T,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{D}^*)^{1/2} \nabla c(0,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Ce qui donne encore

$$\bar{\phi} \left\| \frac{\partial c}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{D}^*)^{1/2} \nabla c(T,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{2} \sup_{i,j} |\mathbf{D}_{i,j}^*| \left\| \nabla c(0,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

**Étape 2** On souhaite maintenant montrer que  $c \in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))$ . En prenant  $v = D_k^{-h} (D_k^h c(t,x))$  dans (C.17)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_t c(t,x) D_k^{-h} (D_k^h c(t,x)) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) \cdot \nabla (D_k^{-h} (D_k^h c(t,x))) dx = 0.$$

Ce qui donne encore

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) \cdot \nabla (D_k^{-h} (D_k^h c(t,x))) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_t c(t,x) D_k^{-h} (D_k^h c(t,x)) dx.$$

En utilisant l'inégalité (C.4), on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_k^h (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) \cdot \nabla D_k^h (c(t,x)) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_t c(t,x) D_k^{-h} (D_k^h c(t,x)) dx.$$

En utilisant l'inégalité (C.5), on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^{*,h,k}(x) \nabla D_k^h (c(t,x))) \cdot \nabla D_k^h (c(t,x)) dx + \int_{\mathbb{R}^d} D_h (\mathbf{D}^*) (x) \nabla c(t,x) \cdot \nabla D_k^h (c(t,x)) dx \\ = - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_t c(t,x) D_k^{-h} (D_k^h c(t,x)) dx. \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{D}^{*,h,k}(x)_{i,j} = \mathbf{D}_{i,j}^*(x + h\mathbf{e}_k)$ .

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \left\| \nabla D_k^h (c)(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d2})}^2 \\ \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} D_h (\mathbf{D}^*) (x) \nabla c(t,x) \cdot \nabla D_k^h (c(t,x)) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_t c(t,x) D_k^{-h} (D_k^h c) dx \right| \\ \leq \sup_{i,j} \left\| D_h (\mathbf{D}^*)_{i,j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \left\| \nabla c(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \left\| \nabla D_k^h (c) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| \bar{\phi} \partial_t c(t,x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \left\| D_k^{-h} D_k^h c \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $\left\| D_k^{-h} D_k^h c \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \nabla D_k^h c \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ , on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \left\| \nabla D_k^h (c)(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq \sup_{i,j} \left\| D_h (\mathbf{D}^*)_{i,j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \left\| \nabla c \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \left\| \nabla D_k^h (c) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| \bar{\phi} \partial_t c(t,x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \left\| \nabla D_k^h (c) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$\|\nabla D_k^h(c)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^*)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\bar{\phi} \partial_t c(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

En particulier, pour tout  $k = 1, \dots, d$ , on a

$$\left\| \nabla \frac{\partial c}{\partial x_k}(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^*)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\bar{\phi} \partial_t c(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

On en déduit alors

$$|c(t)|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^*)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{\lambda_{\min}} \|\bar{\phi} \partial_t c(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Finalement, on a

$$|c|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sup_{i,j} \|D_h(\mathbf{D}^*)_{i,j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla c\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} + \frac{\bar{\phi}}{\lambda_{\min}} \|\partial_t c\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}.$$

Comme  $\mathbf{D}_{i,j}^*$  est constant alors  $D_h(\mathbf{D}^*)_{i,j} = 0$ . Par conséquent, on a :

$$|c|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{\bar{\phi}}{\lambda_{\min}} \|\partial_t c\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}.$$

On en déduit que  $c \in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))$ .

**Récursivité** Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Comme  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ , alors on peut prendre  $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$  dans (C.17).

On obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_t c(t,x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) dx = 0.$$

Par intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_{x_k,t} c(t,x) \varphi(x) dx + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}_{i,j}^* \partial_{x_i} c(t,x) \partial_{x_j,x_k} \varphi(x) dx \\ & = - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_{x_k,t} c(t,x) \varphi(x) dx - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}_{i,j}^* \partial_{x_k,x_i} c(t,x) \partial_{x_j} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

En utilisant la régularité de  $c$ , on a  $\partial_{x_k,x_i} c(t,x) = \partial_{x_i,x_k} c(t,x)$  et de même, on a  $\partial_{x_k,t} c(t,x) = \partial_{t,x_k} c(t,x)$ . Alors on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_t c(t,x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{D}^* \nabla c(t,x)) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) dx \\ & = - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_{t,x_k} c(t,x) \varphi(x) dx - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}_{i,j}^* \partial_{x_i,x_k} c(t,x) \partial_{x_j} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_t \frac{c(t,x)}{\partial x_k} \varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbf{D}^* \nabla \frac{c(t,x)}{\partial x_k} \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0.$$

En utilisant la densité des fonctions  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  dans  $H^1(\mathbb{R}^d)$ , on en déduit que  $\frac{c(t,x)}{\partial x_k}$  vérifie l'équation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi} \partial_t \frac{c(t,x)}{\partial x_k} v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbf{D}^* \nabla \frac{c(t,x)}{\partial x_k} \right) \cdot \nabla v(x) dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

En répétant l'étape 1, on peut établir l'estimation suivante :

$$\bar{\phi} \left\| \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x_k} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}^2 + \left\| (\mathbf{D}^*)^{1/2} \nabla \frac{\partial c}{\partial x_k}(T, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \sup_{i,j} |\mathbf{D}_{i,j}^*| \left\| \nabla \frac{\partial c^0}{\partial x_k} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

En répétant l'étape 2, on peut établir l'estimation suivante :

$$\left| \frac{\partial c}{\partial x_k} \right|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{\bar{\phi}}{\lambda_{\min}} \left\| \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x_k} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}, \quad k \in [1 \dots d].$$

On en déduit alors que  $c \in L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^d))$ . Et recursivement, on montre que  $c \in L^2(0,T;H^5(\mathbb{R}^d))$ .

En utilisant les injections de Sobolev, on montre que  $H^5(\mathbb{R}^d) \subset W^{3,\infty}(\mathbb{R}^d)$ . On en déduit alors que  $c \in L^2(0,T;W^{3,\infty}(\mathbb{R}^d))$ .

□

# Bibliographie

- [ABCM02] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1749–1779, 2002.
- [ABMP10] G. Allaire, R. Brizzi, A. Mikelić, and A.L. Piatnitski. Two-scale expansion with drift approach to the Taylor dispersion for reactive transport through porous media. *Chem. Eng. Sci.*, 65(7) :2292–2300, 2010.
- [AE14] A. Assyr and H. M. Ernst. Discontinuous galerkin finite element heterogeneous multiscale method for advection–diffusion problems with multiple scales. *Numer. Math.*, 126(4) :589–633, 2014.
- [All05] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [APP12] G. Allaire, I. Pankratova, and A. Piatnitski. Homogenization and concentration for a diffusion equation with large convection in a bounded domain. *J. Funct. Anal.*, 262(1) :300–330, 2012.
- [AR07] G. Allaire and A.L. Raphael. Homogenization of a convection-diffusion model with reaction in a porous medium. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 344(8) :523–528, 2007.
- [Arb00] T. Arbogast. Numerical subgrid upscaling of two-phase flow in porous media. In *Numerical Treatment of Multiphase Flows in Porous Media : Proceedings of the International Workshop Held at Beijing, China, 2-6 August, 1999*, volume 552, pages 35–49. Springer, 2000.
- [Arn82] D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(4) :742–760, 1982.
- [Bab73] I. Babuška. The finite element method with penalty. *Math. Comput.*, 27(122) :221–228, 1973.
- [Bak77] G. A. Baker. Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. *Math. Comput.*, 31(137) :45–59, 1977.
- [BBC<sup>+</sup>12] F. Bassi, L. Botti, A. Colombo, D.A. Di Pietro, and P. Tesini. On the flexibility of agglomeration based physical space discontinuous galerkin discretizations. *J. Comput. phys.*, 231(1) :45–65, 2012.
- [BH82] A.N. Brooks and T.J. Hughes. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32(1) :199–259, 1982.
- [BHK] W. Bangerth, T. Heister, and G. Kanschat. deal.II *Differential Equations Analysis Library, Technical Reference*. <http://www.dealii.org>.
- [BJP03] A. Bourgeat, M. Jurak, and A.L. Piatnitski. Averaging a transport equation with small diffusion and oscillating velocity. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(2) :95–117, 2003.
- [BLM15] C. L. Bris, F. Legoll, and F. Madiot. A numerical comparison of some multiscale finite element approaches for convection-dominated problems in heterogeneous media. *arXiv preprint arXiv :1511.08453*, 2015.
- [BLP78] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North Holland, 1978.
- [BR97] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible navier–stokes equations. *J. Comput. phys.*, 131(2) :267–279, 1997.
- [Bre03] S. C. Brenner. Poincaré–friedrichs inequalities for piecewise  $h^1$  functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(1) :306–324, 2003.

- [Bre10] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [BS07] S. Brenner and R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2007.
- [BZ73] I. Babuška and M. Zlámal. Nonconforming elements in the finite element method with penalty. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(5) :863–875, 1973.
- [CC87] G. Chavent and B. Cockburn. The local projection p0p1-discontinuous-galerkin-finite element method for scalar conservation laws. 1987.
- [CCSY08] Z. Chen, M. Cui, T. Y. Savchuk, and X. Yu. The multiscale finite element method with nonconforming elements for elliptic homogenization problems. *Multiscale Model. Simul.*, 7(2) :517–538, 2008.
- [CH02] Z. Chen and T. Hou. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients. *Math. Comput.*, 72(242) :541–576, 2002.
- [Cia91] P.G. Ciarlet. *Handbook of numerical analysis, Finite element methods (Part I)*. North-Holland, 1991.
- [CR72] P. G. Ciarlet and P. A. Raviart. Interpolation theory over curved elements, with applications to finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1(2) :217–249, 1972.
- [CT90a] P. Caussignac and R. Touzan. Solution of three-dimensional boundary layer equations by a discontinuous finite element method, part i : Numerical analysis of a linear model problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 78(3) :249–271, 1990.
- [CT90b] P. Caussignac and R. Touzani. Solution of three-dimensional boundary layer equations by a discontinuous finite element method, part ii : Implementation and numerical results. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 79(1) :1–20, 1990.
- [DD76] J. Douglas and T. Dupont. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic galerkin methods. In *Computing methods in applied sciences*, pages 207–216. Springer, 1976.
- [DEGH10] J. Droniou, R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. A unified approach to mimetic finite difference, hybrid finite volume and mixed finite volume methods. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(265), 2010.
- [DL00] R. Dautray and J.-L. Lions. Evolution problems i. 2000.
- [DP05] P. Donato and A. Piatnitski. Averaging of nonstationary parabolic operators with large lower order terms. *Multi Scale Problems and Asymptotic Analysis. GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, 24 :153–165, 2005.
- [DPE12] D. A. Di Pietro and A. Ern. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, volume 69 of *Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag, 2012.
- [Dry03] M. Dryja. On discontinuous galerkin methods for elliptic problems with discontinuous coefficients. *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math.*, 3(1) :76–85, 2003.
- [EH09] Y. Efendiev and Th.Y. Hou. *Multiscale finite element methods : theory and applications*. Springer Verlag, 2009.
- [EHW00] Y. R. Efendiev, T. Y Hou, and X.-H. Wu. Convergence of a nonconforming multiscale finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(3) :888–910, 2000.
- [Elf15] D. Elfverson. A discontinuous galerkin multiscale method for convection-diffusion problems. 2015.
- [ESZ08] A. Ern, A. F. Stephansen, and P. Zunino. A discontinuous galerkin method with weighted averages for advection–diffusion equations with locally small and anisotropic diffusivity. *IMA J. Numer. Anal.*, 2008.
- [FM04] T.P. Fries and H.G. Matthies. A review of petrov–galerkin stabilization approaches and an extension to meshfree methods. *Technische Universitat Braunschweig, Brunswick*, 2004.
- [GL09] G. Gropellier and B. Lelandais. The arcane development framework. In *Proceedings of the 8th workshop on Parallel/High-Performance Object-Oriented Scientific Computing*, page 4. ACM, 2009.
- [GR12] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2012.



- 
- [GS06] E.H. Georgoulis and E. Süli. hp-version interior penalty discontinuous galerkin finite element methods on anisotropic meshes. *Int. J. Numer. Anal. Model*, 3(1) :52–79, 2006.
- [HFH89] T. J. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 73(2) :173–189, 1989.
- [HFM87] T. J. Hughes, L. P. Franca, and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Vi. convergence analysis of the generalized supg formulation for linear time-dependent multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 63(1) :97–112, 1987.
- [HL09] Th.Y. Hou and D. Liang. Multiscale analysis for convection dominated transport equations. *DCDS*, 23(1-2) :281–298, 2009.
- [HO10] P. Henning and M. Oehlberger. The heterogeneous multiscale finite element method for advection-diffusion problems with rapidly oscillating coefficients and large expected drift. *Netw. Heterog. Media*, 5(4) :711–744, 2010.
- [HS05] P. Houston and E. Süli. A note on the design of hp-adaptive finite element methods for elliptic partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 194(2) :229–243, 2005.
- [HW97] Th.Y. Hou and X.H. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *J. Comput. Phys.*, 134 :169–189, 1997.
- [JK07] V. John and P. Knobloch. On spurious oscillations at layers diminishing (sold) methods for convection–diffusion equations : Part i—a review. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 196(17) :2197–2215, 2007.
- [JLT03a] P. Jenny, S.H. Lee, and H.A. Tchelepi. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *J. Comput. Phys.*, 187(1) :47–67, 2003.
- [JLT03b] P Jenny, SH Lee, and HA Tchelepi. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *J. Comput. Phys.*, 187(1) :47–67, 2003.
- [JLT05] P Jenny, SH Lee, and HA Tchelepi. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media. *Multiscale Model. Simul.*, 3(1) :50–64, 2005.
- [KLN<sup>+</sup>09] S. Krogstad, K.A. Lie, H. Nilsen, J. Natvig, B. Skaflestad, and J. Aarnes. A multiscale mixed finite element solver for three phase black oil flow. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2009.
- [Lem13] S. Lemaire. *Discrétisations non-conformes d’un modèle poromécanique sur maillages généraux*. PhD thesis, Thèse de l’Université Paris-Est, 2013.
- [Les73] P. Lesaint. Finite element methods for symmetric hyperbolic equations. *Numer. Math.*, 21(3) :244–255, 1973.
- [Les76] P. Lesaint. Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d’éléments finis. Technical report, SIS-76-2190, 1976.
- [Li15] J. Li. High order discontinuous galerkin methods for simulating miscible displacement process in porous media with a focus on minimal regularity. 2015.
- [LM] JL Lions and E Magenes. Non-homogeneous boundary value problems, and applications.
- [LR74] P. Lesaint and P. A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*, (33) :89–123, 1974.
- [LR15] J. Li and B. Riviere. High order discontinuous galerkin method for simulating miscible flooding in porous media. *Comput. Geosci.*, 19(6) :1251–1268, 2015.
- [Mad16] F. Madiot. Multiscale finite element methods for advection diffusion problems. *PhD thesis, Université Paris-Est*, 2016.
- [Maz09] V. Maz’ya. Boundedness of the gradient of a solution to the neumann–laplace problem in a convex domain. *Comptes Rendus Mathématique*, 347(9) :517–520, 2009.
- [MBS00] A.M. Matache, I. Babuška, and C. Schwab. Generalized p-FEM in homogenization. *Numer. Math.*, 86(2) :319–375, 2000.

- [McL00] W. C. H. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge university press, 2000.
- [MM01] Christie M.A. and Blunt M.J. Tenth spe comparative solution project : A comparison of upscaling techniques. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 4(4) :308–317, 2001.
- [Nit72] J. Nitsche. On dirichlet problems using subspaces with nearly zero boundary conditions. *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*, pages 603–627, 1972.
- [NP12] N. Cuong Nguyen and J. Peraire. Hybridizable discontinuous galerkin methods for partial differential equations in continuum mechanics. *J. Comput. Phys.*, 231(18) :5955–5988, 2012.
- [OADE15] F. Ouaki, G. Allaire, S. Desroziers, and G. Enchéry. A priori error estimate of a multiscale finite element method for transport modeling. *SeMa Journal*, 67(1) :1–37, 2015.
- [Oua13] F. Ouaki. Etude de schémas multi-échelles pour la simulation de réservoir. *Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique*, 2013.
- [PW60] L. E Payne and H. F. Weinberger. An optimal poincaré inequality for convex domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 5(1) :286–292, 1960.
- [RH73] W. H. Reed and T. R. Hill. Triangularmesh methodsfor the neutrontransportequation. *Los Alamos Report LA-UR-73-479*, 1973.
- [Riv08] B. Rivière. *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations : theory and implementation*. SIAM, 2008.
- [SP80] É. Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Springer-Verlag, 1980.
- [SW05] S. Sun and M.F. Wheeler. Discontinuous galerkin methods for coupled flow and reactive transport problems. *Appl. Numer. Math.*, 52(2) :273–298, 2005.
- [Tez91] T.E. Tezduyar. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. *Advances in applied mechanics*, 28 :1–44, 1991.
- [WE03] E. Weinan and B. Engquist. The heterogeneous multiscale methods. *Comm. Math. Sci.*, 1(1) :87–132, 2003.
- [Whe78] M. F. Wheeler. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(1) :152–161, 1978.
- [Wlo] J. Wloka. *Partial differential equations*. 1987. *Cambridge University*.
- [ZKO94] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov, and O.A. Oleinik. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer Verlag, 1994.