Vérification de la validité du concept de surface somme par une approche statistique du contact élastique entre deux surfaces rugueuses

Ich Tach Tran

▶ **To cite this version:**

Ich Tach Tran. Vérification de la validité du concept de surface somme par une approche statistique du contact élastique entre deux surfaces rugueuses. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris, 2015. Français. NNT : 2015ECAP0010 . tel-01560669v2

HAL Id: tel-01560669

https://theses.hal.science/tel-01560669v2

Submitted on 10 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée par TRAN Ich Tach

Pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

École Doctorale : École Centrale Paris (ED287)

Spécialité : **Mécanique et Matériaux**

Laboratoire d'accueil : **LISMMA (EA2336)**

Vérification de la validité du concept de surface somme par une approche statistique du contact élastique entre deux surfaces rugueuses

---

Soutenue le 26/01/2015

Devant un jury composé de

M. Yannick DESPLANQUES	**Professeur des Universités**	**Président**
M. Alain LE BOT	**Directeur de Recherche**	**Rapporteur**
M. Benyebka BOU-SAÏD	**Professeur des Universités**	**Rapporteur**
M. François ROBBE-VALLOIRE	**Professeur des Universités**	**Directeur de thèse**
Mme. Muriel QUILLIEN	**Maitre de Conférences**	**Co-encadrante**
M. Abdeljalil JOURANI	**Maitre de Conférences**	**Examinateur**

Année 2015 École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur – ED287
Numéro d'Ordre : **2015ECAP0010** École Centrale Paris

À mes enfants Duc Huy et Ha Phuong

Résumé en français :

Les propriétés de surface, particulièrement microgéométriques, jouent un rôle essentiel dans tous les systèmes tribologiques. L'analyse de la répartition des efforts de contact dans l'interface entre surfaces rugueuses est indispensable à la prédiction du frottement, de l'usure, de l'adhérence, des résistances de contact électrique et thermique… De nombreux modèles ont été proposés ces dernières décennies pour prédire les efforts entre aspérités de surfaces rugueuses. Parmi ces modèles, les modèles statistiques sont majoritairement développés en considérant le contact ente une surface rugueuse équivalente, la surface somme - qui tient compte des microgéométries des deux surfaces en contact ainsi que de leur matériau - et un plan lisse. Cependant la validité de cette modélisation n'a pas été clairement démontrée. L'objectif de notre étude a été de développer un modèle statistique de contact entre deux surfaces rugueuses isotropes aléatoires puis de comparer les résultats obtenus pour ces deux surfaces avec ceux obtenus en considérant la surface somme définie classiquement à partir des deux surfaces rugueuses et un plan lisse. Les différences entre les résultats nous ont amenés à proposer une nouvelle modélisation de la surface somme.

Mot clés en français : Modèle statistique, microgéométrie, surface rugueuse, surface somme, aspérités.

Résumé en Anglais :

Surface properties, particularly micro-geometry, play a key role in all tribological systems. The analysis of the distribution of contact forces in the interface between rough surfaces is essential for the prediction of friction, wear, adhesion, electrical and thermal contact resistance... Many models have been proposed during the last decades to predict the forces between asperities of rough surfaces. Among these models, statistical models are mainly based on the contact between an equivalent rough surface, the sum surface - which combines micro-geometry of the two surfaces in contact and their material - and a smooth plane. However, the validity of this model has not been clearly demonstrated. The aim of our study was to develop a statistical model of the contact between two random isotropic rough surfaces and then compare the results with those obtained by considering the classical sum surface. The differences between the results have led us to propose a new definition for the sum surface.

Mot clés en Anglais: Statistical model, micro-geometry, rough surface, sum surface, asperities.

Remerciements

J'exprime toute ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Robbe-Valloire, mon directeur de thèse, pour ses orientations scientifique et pédagogique, pour tout le temps qu'il m'a consacré, pour ses judicieux conseils et remarques lors de la rédaction de mon mémoire. Il m'a laissé une grande liberté dans la recherche, mais a été toujours disponible pour mes questions. Sans lui, cette thèse n'aurait certainement jamais vu le jour.

Je voudrais remercier particulièrement Madame Quillien pour avoir encadré cette thèse. J'ai pu bénéficier de ses conseils et commentaires toujours constructifs, et qui ont permis de faire avancer les résultats plus loin que je ne l'imaginais et aussi pour la correction du français de mon mémoire.

Je remercie vivement l'ensemble des membres de mon jury de thèse : Monsieur le Professeur Yannick DESPLANQUES pour l'honneur qu'il m'a fait en le président, Monsieur le Professeur Benyebka BOU-SAÏD et Monsieur Alain LE BOT qui ont accepté d'examiner ce mémoire, d'y apporter un œil objectif et averti, Monsieur le Docteur Abdeljalil JOURANI pour sa participation au jury.

J'exprime toute ma gratitude à Madame le Professeur Inglebert pour m'avoir accueilli dans le laboratoire ainsi que pour son aide et ses encouragements.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur le Professeur BUI Huy Duong pour son aide lors de mon arrivée en France. J'ai eu l'immense chance de discuter avec lui de mon sujet et je le remercie pour ses conseils utiles.

Un grand merci à toute l'équipe de Tribologie et aux autres doctorants : Tony pour ses explications en tribologie, Isabelle pour son aide et sa bonne humeur, sans oublier Messaouda, Liu, Julien, Stephane, Etienne, Hugo, Satia et Philippe.

J'exprime enfin ma gratitude à ma femme qui a toujours été à mes côtés dans les moments difficiles et qui partage la vie avec moi.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES 1

NOTATIONS 5

INTRODUCTION 9

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE 11

1. INTRODUCTION 11

2. MODELE DE GREENWOOD-WILLIAMSON : MODELE GW 14

3. AUTRES MODELES DE CONTACT ENTRE SURFACES LISSE/RUGUEUSE 19

3.1. Les modèles à rayon non constant 20

3.1.1. Modèle de Whitehouse et Archard : modèle WA 20

3.1.2. Modèle de Francis 22

3.1.3. Modèle 1 de Robbe-Valloire : modèle FRV1 24

3.2. Modèles non isotropes 27

3.2.1. Modèle de Nayak 27

3.2.2. Modèle de Bush, Gibson, Thomas : modèle BGT 30

3.2.3. Modèle de McCool 33

3.3. Les modèles élasto-plastiques 37

3.3.1. Modèle de Chang, Etsion, Bogie : modèle CEB 37

3.3.2. Modèle élasto-plastique de FRV : modèle FRV2 40

3.4. Synthèse 43

4. LES MODELES DE CONTACT ENTRE SURFACES RUGUEUSES 45

4.1. Modèle de Greenwood – Tripp 45

4.2. Modèle de Yamada et al 48

5. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE 50

CHAPITRE 2. DEMARCHE 52

1. PÉRIMÈTRE DE L'ÉTUDE 53

1.1. Macrogéométrie 53
1.2. Aspect microgéométrique 54
1.3. Mode de déformation 57
2. DEMARCHE D'ETUDE 57
2.1. Etape 1 : Calcul du contact rugueux sur rugueux 57
2.2. Etape 2 : Calcul du contact surface somme sur lisse 59
2.3. Etape 3 : Comparaison 59
2.4. Etape 4 : Amélioration 59
CHAPITRE 3. CONTACT ENTRE DEUX LIGNES D'ASPERITES PERIODIQUES ... 60
1. INTRODUCTION 60
2. NOTATIONS UTILISEES POUR LES LIGNES D'ASPERITES 61
3. NOMBRE DE CONTACTS ENTRE DEUX LIGNES D'ASPERITES 62
3.1. Méthode statistique 63
3.2. Méthode déterministe 66
3.3. Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes 70
4. FORCE TOTALE 73
5. ANALYSE DU GLISSEMENT ENTRE DEUX LIGNES D'ASPERITES 79
6. CONCLUSION 81
CHAPITRE 4. CONTACT ENTRE DEUX SURFACES PÉRIODIQUES ISOTROPES . 83
1. INTRODUCTION 83
2. CONTACT ENTRE DEUX SURFACES PERIODIQUES ISOTROPES 83
2.1. Description du contact entre deux surfaces périodiques 83
2.2. Nombre de contacts 84
2.3. Force 87
2.4. Analyse du glissement entre les deux surfaces 89
3. CONTACT ENTRE SURFACE SOMME ET LISSE 93
3.1. Identification de la surface somme 93

3.2. Nombre de contacts 95
3.3. Force 96
3.4. Analyse du glissement entre surfaces somme et lisse 97
4. COMPARAISON : SOMME/LISSE ET RUGUEUX/RUGUEUX 99
5. IDENTIFICATION DE LA SURFACE SOMME PÉRIODIQUE RÉELLE .. 102
5.1. Surface somme avec équivalence du nombre de contacts 102
5.2. Equivalence en force normale 103
5.3. Synthèse du travail d'optimisation de la surface somme 104
6. IDENTIFICATION DE LA SURFACE SOMME RÉELLE 104
7. CONCLUSION 108
CHAPITRE 5. CONTACT ENTRE DEUX SURFACES ISOTROPES ALÉATOIRES 109
1. INTRODUCTION 109
2. DESCRIPTION DES SURFACES ALEATOIRES 110
3. CONTACT ENTRE DEUX SURFACES ALÉATOIRES 111
3.1. Introduction 111
3.2. Nombre de contacts 112
3.3. Force 114
3.4. Analyse du glissement entre les deux surfaces 117
4. CONTACT ENTRE SURFACES SOMME ET LISSE 120
4.1. Identification de la surface somme 120
4.2. Nombre de contacts 121
4.3. Force 122
4.4. Analyse du glissement entre surfaces somme et lisse 123
5. COMPARAISON ENTRE RUGUEUX/RUGUEUX ET SOMME/LISSE 126
5.1. Comparaison des formulations 126
5.2. Données pour la comparaison numérique 127
5.3. Analyse de l'influence des différents paramètres 129

5.3.1. Influence de l'altitude moyenne 129
5.3.2. Influence de l'écart-type 132
5.3.3. Influence de l'espacement 133
5.3.4. Influence du rayon 135
5.3.5. Synthèse 136
5.3.6. Cas d'une microgéométrie variable 137
6. IDENTIFICATION DE LA SURFACE SOMME RÉELLE 141
7. CONCLUSION 145
CONCLUSIONS GENERALES 147
BIBLIOGRAPHIE 150
LISTE DES FIGURES 153
LISTE DES TABLEAUX 156

NOTATIONS

A_0 : Aire apparente de la surface

a_0 : Rayon de contact

a_0 : Rayon moyen de contact

AR : Espacement équivalent des motifs de rugosité de la surface somme

AR_1 : Espacement des motifs de rugosité de la surface 1

AR_2 : Espacement des motifs de rugosité de la surface 2

d : Distance entre les deux plans moyens de chaque surface

d_1 : Altitude des sommets de la surface périodique 1 par rapport à la ligne moyenne

d_2 : Altitude des sommets de la surface périodique 2 par rapport à la ligne moyenne

E^* : Module équivalent d'élasticité

E_1 : Module d'Young de la surface 1

E_2 : Module d'Young de la surface 2

F_{max} : Force maximale entre deux aspérités

F_{moyp} : Moyenne des forces maximales entre aspérités de deux surfaces périodiques en glissement

F_{moya} : Moyenne des forces maximales entre aspérités de deux surfaces aléatoires en glissement

F_{moys} : Moyenne des forces maximales sur la surface somme (de deux surfaces aléatoires) lors du glissement.

F(x) : Force entre deux aspérités espacées de la distance x

F(r) : Force entre deux aspérités espacées de la distance r

F_{TOT} : Force totale entre deux lignes d'aspérités

F_p : Force totale entre deux surfaces périodiques

F_{sp} : Force totale entre surface somme (de deux surfaces périodiques) et surface lisse

F_a : Force totale entre deux surfaces aléatoires

F_{sa} : Force totale entre surface somme (de deux surfaces aléatoires) et surface lisse

F_{srp} : Force entre surface somme réelle (de deux surfaces périodiques) et surface lisse

F_{sra} : Force entre surface somme réelle (de deux surfaces aléatoires) et surface lisse

h : Altitude des aspérités de la surface somme de type périodique

h_1 : Altitude des aspérités de la surface 1 de type périodique

h_2 : Altitude des aspérités de la surface 2 de type périodique

L_0 : Longueur de contact dans le cas 2D périodique

m : Altitude moyenne des sommets des aspérités de la surface somme

m_1 : Altitude moyenne des sommets des aspérités de la surface 1

m_2 : Altitude moyenne des sommets des aspérités de la surface 2

N : Nombre d'aspérités de la surface somme

N_1 : Nombre d'aspérités de la surface 1

N_2 : Nombre d'aspérités de la surface 2

N_s : Nombre de contacts entre deux lignes d'aspérités périodiques calculé par méthode statistique

N_d : Nombre de contacts entre deux lignes d'aspérités périodiques calculé par méthode déterministe

N_{d1} : Nombre de contacts entre lignes d'aspérités périodiques calculé par méthode déterministe en choisissant la surface 1 comme référence

N_{d2} : Nombre de contacts entre deux lignes d'aspérités périodiques calculé par méthode déterministe en choisissant la surface 2 comme référence

N_p : Nombre de contacts entre deux surfaces périodiques

N_{sp} : Nombre de contacts entre surface somme (de deux surfaces périodiques) et surface lisse

N_a : Nombre de contacts entre deux surfaces aléatoires

N_{sa} : Nombre de contacts entre surface somme (de deux surfaces aléatoires) et surface lisse

N_{srp} : Nombre de contacts entre surface somme réelle et surface lisse (dans le cas de deux surfaces périodiques)

N_{sra} : Nombre de contacts entre surface somme réelle et surface lisse (dans le cas de deux surfaces aléatoires)

r : Distance latérale entre les sommets de deux aspérités en vis-à-vis

r_0 : Distance limite de contact entre deux aspérités en vis à vis

R : Rayon équivalent des aspérités

$\bar{r}_0$: Valeur moyenne de la distance limite de contact entre 2 aspérités en vis à vis.

R_1 : Rayon des aspérités de la surface 1

R_2 : Rayon des aspérités de la surface 2

T_1 : Intervalle de temps entre le passage de deux aspérités successives de la surface 2 sur une aspérité de la surface 1 (cas de 2 lignes d'aspérités)

T_2 : Temps entre le passage de deux aspérités successives de la surface 1 sur une aspérité de la surface 2 dans le contact entre deux surfaces périodiques 2D

T_{1p} : Temps moyen entre le passage de deux aspérités successives de la surface 2 sur une aspérité de la surface 1 dans le contact entre deux surfaces périodiques 3D

T_{2p} : Temps moyen entre le passage de deux aspérités successives de la surface 1 sur une aspérité de la surface 2 dans le contact entre deux surfaces périodiques 3D

T_{sp} : Intervalle de temps moyen entre 2 passages d'aspérités pour le contact surface somme (de deux surfaces périodiques) / surface lisse

T_{1a} : Temps moyen entre le passage de deux aspérités successives de la surface 2 sur une aspérité de la surface 1 dans le contact entre deux surfaces aléatoires

T_{2a} : Temps moyen entre le passage de deux aspérités successives de la surface 1 sur une aspérité de la surface 2 dans le contact entre deux surfaces aléatoires

T_{sa} : Intervalle de temps moyen entre deux passages d'aspérités pour le contact surface somme (de deux surfaces aléatoires) / surface lisse.

x : Distance latérale suivant la direction X entre les sommets de deux aspérités en vis-à-vis

x_0 : Distance entre la position limite de contact et la position du contact le plus intense

y : Distance latérale suivant la direction Y entre les sommets de deux aspérités en vis-à-vis

Lettres grecques

α : Angle entre la direction du glissement et la direction de la surface

σ : Ecart-type des altitudes des sommets des aspérités de la surface somme

σ_1 : Ecart-type des altitudes des sommets des aspérités de la surface 1

σ_2 : Ecart-type des altitudes des sommets des aspérités de la surface 2

ξ : Décalage entre deux aspérités de deux surfaces

η : Densité des aspérités de la surface somme

η_1 : Densité des aspérités de la surface 1

η_2 : Densité des aspérités de la surface 2

δ : Rapprochement de deux aspérités en contact

θ : Angle entre la direction de la force entre les deux aspérités et la direction verticale

ν_1 : Coefficient de Poisson de la surface 1

ν_2 : Coefficient de Poisson de la surface 2

INTRODUCTION

L’analyse de la répartition des efforts de contact dans l’interface entre surfaces rugueuses est indispensable à la prédiction du frottement, de l'usure, de l'adhérence, des résistances de contact électrique et thermique… De nombreux modèles ont été proposés au cours de ces dernières années pour la prédiction de l’aire réelle de contact entre les surfaces rugueuses. Le calcul du contact entre deux surfaces rugueuses est ramené au contact entre une surface rugueuse – qu’on appelle la surface somme – et une surface lisse. L'hypothèse d'un comportement équivalent entre les deux situations (rugueux sur rugueux et surface somme / lisse) est systématiquement évoquée mais jamais complètement vérifiée. L’objectif général de ce travail est d’ébaucher une comparaison de ces deux situations en utilisant l’approche statistique.

Notre travail comprend cinq parties principales.

Le premier chapitre développera les différents modèles statistiques de contact entre deux surfaces rugueuses disponibles dans la littérature.

Le deuxième chapitre présentera la démarche de travail : les différentes étapes de l’étude du contact entre deux surfaces et les limites de notre recherche.

Le troisième chapitre traite du contact entre deux lignes d’aspérités. Cette situation purement théorique va permettre de formaliser les outils de résolution des problèmes de contact entre deux surfaces rugueuses sur des concepts de microgéométries simples (profils 2D périodiques). Après avoir explicité les notations utilisées pour les surfaces périodiques 2D, on présentera les différentes méthodes de détermination du nombre de contacts entre deux surfaces puis la méthode de calcul de la force entre les deux lignes d’aspérités. Par ailleurs, on détaillera le calcul des principaux paramètres du contact. Enfin, on analysera le glissement entre deux surfaces.

Le quatrième chapitre traite du contact entre deux surfaces périodiques isotropes. Ce chapitre va permettre d’introduire les concepts complémentaires indispensables aux calculs 3D entre surfaces rugueuses. Comme précédemment on détaillera successivement les calculs du nombre de contacts et de la force entre deux surfaces périodiques isotropes. Après le rappel des méthodes utilisées pour construire la surface somme, une comparaison de deux modèles de contact : rugueux sur rugueux et somme sur lisse sera proposée. Elle débouchera vers des propositions d’amélioration du calcul de la surface somme.

Le cinquième chapitre traite du contact entre deux surfaces aléatoires. Ces surfaces aléatoires isotropes constituent les modèles les plus approchants des surfaces réelles isotropes (obtenues par exemple par sablage ou moulage en sable). Dans ce chapitre, les calculs du nombre de contacts et de la force totale entre deux surfaces selon les deux modèles (rugueux sur rugueux et somme sur lisse) sont présentés et comparés. Le constat de différences importantes entre ces deux modèles nous amènera à proposer des voies d'amélioration pour la détermination de la surface somme.

CHAPITRE 1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1. INTRODUCTION

Les propriétés de surface jouent un rôle essentiel dans tout système mécanique et particulièrement dans tous les systèmes tribologiques. Vu la diversité des propriétés fonctionnelles des surfaces (propriétés optiques et électromagnétiques, propriétés mécaniques en passant par les propriétés thermiques, chimiques et physico-chimiques), la caractérisation des propriétés de surface constitue un domaine extrêmement vaste qui englobe les aspects géométriques et microgéométriques [1]. Les procédés de fabrication des pièces peuvent induire des microgéométries de surface de grandes variétés qui sont capables de générer des comportements totalement différents. D'une manière très générale, la typologie des surfaces solides peut se présenter selon le schéma ci-dessous :

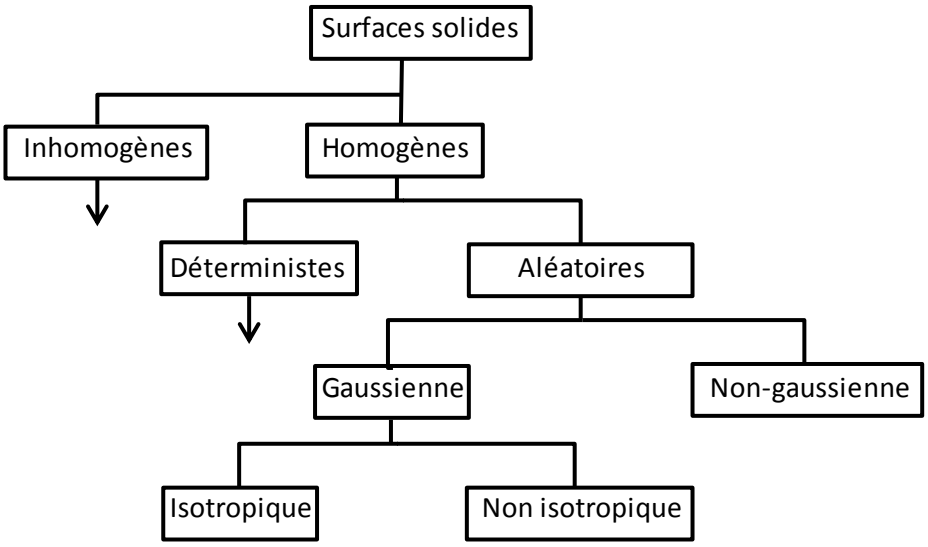


Figure 1 : Typologie des surfaces solides [2]

Dans les contacts mécaniques, on considère en général un contact entre deux solides topographiquement lisses pour déterminer la relation entre la charge appliquée, l'aire de contact et les contraintes de contact. Lorsque les deux surfaces sont lisses, il n'y a pas de problème : l'aire apparente de contact est égale à l'aire réelle de contact. Mais les contacts réels entre deux solides se produisent au niveau des sommets ou près des sommets des

aspérités en contact. L'aire apparente de contact calculée à partir de la théorie de Hertz est en général 10 à 100 fois supérieure à l'aire réelle de contact entre aspérités. La pression de contact au niveau des aspérités est donc 10 à 100 fois supérieure à celle calculée. La loi de frottement d'Amontons-Coulomb qui stipule que la force de frottement est proportionnelle à la charge est communément considérée comme une conséquence directe de la proportionnalité entre la charge appliquée et l'aire réelle de contact. Bowden et Tabor (1939) supposent que les aspérités des surfaces solides rugueuses subissent une déformation plastique dès qu'elles sont en contact et puisque la limite d'élasticité est considérée constante cela conduit à une proportionnalité directe entre la charge et l'aire de contact intime. Cependant, cela ne s'applique pas pour un certain nombre de surfaces techniques. Ainsi l'étude expérimentale de l'usure montre que pour des éléments de machine glissant les uns sur les autres pendant des millions de cycles, les aspérités peuvent se déformer plastiquement au cours des premiers cycles mais le chargement répété introduit des déformations permanentes et des contraintes résiduelles qui peuvent générer des contraintes stabilisées qui deviennent élastiques [3]. Il est donc fondamental de pouvoir déterminer avec précision l'aire réelle de contact entre deux surfaces rugueuses, son rôle est important dans le comportement des systèmes tribologiques vis-à-vis du frottement, de l'usure et de la lubrification notamment.

Les surfaces déterministes peuvent être étudiées par des méthodes analytiques relativement simples, mais la plupart des surfaces industrielles sont aléatoires [2]. Il en résulte une grande complexité mathématique. Cependant de nombreux modèles, permettant de tenir compte de la microgéométrie des surfaces, ont été développés depuis de nombreuses années, comme peuvent en témoigner les différentes revues sur ces modèles disponibles dans la littérature [3], [4] et [5]. Dans ce paragraphe nous nous limiterons aux modèles statistiques dérivés de l'approche proposée par Greenwood et Williamson (1966).

MODELES DE CONTACT MULTI-ASPERITES

Les modèles de surface aléatoire pour lesquels la forme du pic est une fonction déterministe sont généralement appelés « modèles multi-aspérités ».

Après les premiers travaux d'Archard [6] sur la nature multiéchelle du contact élastique entre surfaces rugueuses en 1957, Greenwood et Williamson ont introduit un modèle de contact basé sur les aspérités dont l'approche générale suppose une certaine forme pour les

propriétés statistiques de la surface [7]. La description mathématique des surfaces techniques est le premier pas dans la modélisation du contact entre surfaces rugueuses. La méthode statistique fournit un moyen de représentation de la nature aléatoire de la surface rugueuse dans laquelle les procédés d'analyses stochastiques sont combinés avec des mesures de surface. L'approche du contact entre aspérités multiples constitue une généralisation de la théorie du contact de Hertz avec la prise en compte des spécificités des surfaces.

La modélisation du contact commence par la détermination des équations représentant le contact entre une paire d'aspérités en tenant compte des déformations élastiques, élasto-plastiques ou complètement plastiques. Ainsi selon l'échelle du contact, les effets de plasticité peuvent dépendre de la profondeur d'indentation. Les surfaces réelles étant constituées de multiples aspérités, il est nécessaire de combiner les effets d'un grand nombre d'aspérités en contact. Mais, comme nous le verrons par la suite, dans certains cas, il est possible de traiter ces contacts comme non couplés les uns aux autres, on parle alors de modèle multi-aspérités non couplées. Dans ces modèles, la rugosité est représentée comme un jeu d'aspérités, souvent avec des paramètres distribués statistiquement tels que la hauteur ou la courbure des sommets. L'effet de chaque aspérité est local et considéré comme indépendant des autres aspérités ; l'effet cumulatif est la somme des actions des aspérités individuelles.

Mais dans d'autres applications industrielles, l'effet de couplage est important, il faut alors en tenir compte : ce sont les modèles multi-aspérités couplées. Les problèmes de contact sont plus compliqués mathématiquement car les équations d'élasticité doivent être résolues simultanément pour le solide.

Vu la complexité du problème, les déformations élastiques, élasto-plastiques et plastiques ne sont pas prises en compte dans un certain nombre de ces modèles qui ne traiteront que des cas purement élastique ou purement plastique.

Les modèles statistiques sont basés sur le calcul de la probabilité de contact $\mathcal{P}$ d'une aspérité donnée de hauteur z pour deux surfaces séparées d'une distance d soit :

$$\mathcal{P}(z > d) = \int_d^{\infty} p(z)dz$$

Nous allons commencer par détailler le modèle mathématique établi par Greenwood et Williamson en 1966 car il sert de base aux nombreux modèles établis par la suite. Nous avons

regroupé ces différents modèles en trois catégories en fonction des hypothèses qui diffèrent par rapport au modèle original de Greenwood et Williamson à savoir :

- Rayon constant,
- Surface isotrope,
- Élasticité avec introduction de la surface somme.

Nous nous attarderons ensuite sur les modèles de contact entre deux surfaces rugueuses.

2. MODELE DE GREENWOOD-WILLIAMSON : MODELE GW

Le contact entre des surfaces planes peut être déterminé par des conditions soit élastiques pour des surfaces très lisses soit plastiques pour des surfaces très rugueuses. Greenwood et Williamson [7] proposent un modèle de contact élastique entre des surfaces nominalement planes, communément appelé modèle GW et l'utilisent pour déterminer si la transition de contact élastique à plastique apparaît. Le contact considéré par les auteurs est un contact entre un plan et une surface nominalement plane couverte par un très grand nombre d'aspérités. Ils posent les hypothèses suivantes :

1. La surface rugueuse est isotrope.
2. Les aspérités, au moins près de leur sommet, sont sphériques.
3. Tous les sommets des aspérités ont le même rayon R mais leur hauteur varie aléatoirement.
4. Les aspérités sont suffisamment éloignées pour qu'il n'y ait pas d'interaction entre elles.
5. Il n'y a pas de déformation globale de la surface, seules les aspérités se déforment pendant le contact.

Comme les surfaces nominalement planes sont définies comme des surfaces pour lesquelles l'aire apparente de contact est grande, les contacts individuels sont alors dispersés et les forces agissant sur des points voisins n'influencent pas les autres. Cela permet de justifier l'hypothèse 4.

Ainsi, la probabilité qu'une aspérité ait une hauteur comprise entre z et z+dz au-dessus du plan de référence sera ϕ(z)dz.

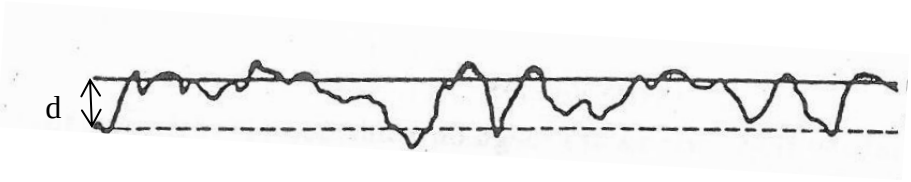


Figure 2 : Contact entre surfaces rugueuses [7]

Le comportement d'une aspérité individuelle est déterminé à partir des équations de Hertz [8]. Le rayon de contact a_1, l'aire A_1, la charge P_1, pour cette aspérité individuelle, peuvent être exprimés en fonction de l'interférence w :

$$w = z - d \tag{1}$$

w correspond à la distance pour laquelle les points en dehors de la zone déformée bougent ensemble pendant la déformation tels que :

$$a_1 = R^{1/2} w^{1/2} \tag{2}$$

$$A_1 = \pi R w \tag{3}$$

$$P_1 = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} w^{3/2} \tag{4}$$

Avec E' le module équivalent défini par :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \tag{5}$$

Si les deux surfaces viennent en contact jusqu'à ce que leurs plans de référence soient séparés d'une distance d, il y aura alors contact de toutes les aspérités dont la hauteur était initialement supérieure à d. La probabilité pour qu'il y ait contact pour n'importe quelle aspérité donnée de hauteur z est alors :

$$prob(z > d) = \int_d^{\infty} \phi(z)dz \tag{6}$$

Et s'il y a N aspérités en tout, le nombre d'aspérités en contact sera :

$$n = N \int_d^{\infty} \phi(z)dz \tag{7}$$

D'après (1) et (3), l'aire moyenne de contact est alors :

$$\int_d^{\infty} \pi R(z-d)\phi(z)dz \tag{8}$$

Et l'aire totale de contact attendue sera donnée par :

$$A = \pi NR \int_d^{\infty} (z-d)\phi(z)dz \tag{9}$$

De la même manière, la charge totale attendue est :

$$P = \frac{4}{3} NE^* R^{\frac{1}{2}} \int_d^{\infty} (z-d)^{\frac{3}{2}} \phi(z)dz \tag{10}$$

Les auteurs introduisent des variables adimensionnées. Les deux paramètres nécessaires au modèle, en plus du rayon de courbure R des aspérités, sont :

- l'écart type de la distribution de la hauteur des aspérités σ_p,
- la densité d'aspérités par unité de surface η d'où $N=\eta\mathcal{A}$ avec $\mathcal{A}$ l'aire nominale de contact.

Cela permet d'écrire :

- $n= \eta\mathcal{A} F_0(h)$: nombre de points de contact
- $A=\pi\eta \mathcal{A} R\sigma_p F_1(h)$: aire totale de contact
- $P=4/3\eta \mathcal{A} E'R^{1/2}\sigma_p{}^{3/2} F_{3/2}(h)$: charge

Dans ces trois relations, h la séparation (terme souvent utilisé) adimensionnée est égale à d/σ_p , et :

$$F_n(h) = \int_h^\infty (s-h)^n \phi^*(s) ds \tag{11}$$

$\phi*(s)$, avec $s = z/\sigma_p$, est la distribution des hauteurs adimensionnées ou fonction densité de probabilité des hauteurs (PDF), dimensionnée de sorte que son écart type soit égal à 1.

Les auteurs proposent deux types de distribution de hauteurs des aspérités : une distribution exponentielle ou une distribution gaussienne. Les résultats expérimentaux montrent que pour la plupart des surfaces la distribution de hauteur est gaussienne avec une très bonne approximation. La distribution exponentielle est néanmoins juste pour les 25 % d'aspérités les plus hautes de la plupart des surfaces. Les résultats obtenus en considérant une distribution exponentielle des aspérités conduisent les auteurs à suggérer que l'origine des lois de frottement, et particulièrement la proportionnalité entre aire et charge ne repose pas sur un écoulement plastique idéal des points de contact individuel mais simplement sur la distribution statistique de la rugosité de surface.

Avec une distribution exponentielle, la fonction densité de probabilité des hauteurs vaut :

$$\phi*(s) = e^{-s} \tag{12}$$

Alors : $n = \eta \mathcal{A} e^{-h}$, $A = \pi\eta R\sigma_p \mathcal{A} e^{-h}$ et $P = \pi^{1/2}(\eta R\sigma_p) E^* (\sigma_p/R)^{1/2} \mathcal{A} e^{-h}$

En éliminant h, on trouve une exacte proportionnalité entre la charge et le nombre de points de contacts et entre la charge et l'aire de contact.

Avec une distribution gaussienne, la fonction densité de probabilité des hauteurs vaut :

$$\phi*(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2s^2} \tag{13}$$

Et ainsi : $F_n(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^\infty (s-h)^n e^{-1/2s^2} ds$

A partir de ces équations, et en utilisant des valeurs physiques raisonnables pour les paramètres, les auteurs ont calculé les relations entre la charge et la séparation h, l'aire de contact et la pression moyenne. Ils montrent que pour une aire nominale donnée, l'aire de contact est presque exactement proportionnelle à la charge et qu'elle ne dépend pas de la pression nominale. Vu la similitude avec le comportement calculé en supposant un écoulement plastique idéal, où la pression moyenne est égale à la dureté, ils suggèrent qu'il existe une « dureté de contact élastique » qui contrôle l'aire de contact sous des conditions élastiques. Cette dureté, au moins pour une surface gaussienne, peut être prise égale à $0.25\ E'(\sigma_p/R)^{1/2}$; elle joue le même rôle dans les relations décrivant le contact élastique entre surfaces rugueuses que la dureté dans les discussions sur le contact plastique. En utilisant ce concept, l'aire de contact peut être calculée directement à partir de la charge du contact élastique aussi précisément que pour un contact plastique en utilisant la dureté classique.

Les auteurs montrent que, bien que la séparation h dépende de la pression nominale et non de la charge totale, elle est le lien qui permet aux autres variables (A et n) de n'être que fonction de la charge.

En considérant la limite d'un contact élastique comme étant l'instant où l'aire de contact plastique devient une certaine fraction convenue de l'aire de contact totale, les auteurs définissent un indice, « l'indice de plasticité » qui détermine simplement la charge critique à partir de laquelle la déformation passe d'élastique à plastique. Cet indice combine les propriétés matériaux et topographiques des solides en contact :

$$\psi = \left(\frac{E^*}{H}\right)\sqrt{\frac{\sigma_p}{R}} \tag{14}$$

Le domaine de variation de cet indice est grand mais si $\psi < 0.6$, le contact plastique ne pourra survenir que sous des pressions nominales très grandes alors que si $\psi > 1$, l'écoulement plastique se produira même avec de faibles pressions nominales. Des incertitudes demeurent quant au mode de déformation lorsque l'indice est compris entre 0.6 et 1. Mais, beaucoup de surfaces ont des indices de plasticité supérieurs à 1 et ainsi, excepté pour des surfaces particulièrement lisses, les aspérités se déformeront plastiquement sous des charges très faibles comme cela a été fréquemment supposé. Il existe néanmoins un certain nombre de

surfaces techniques qui ont des indices de plasticité dont les valeurs sont dans le domaine d'élasticité.

Greenwood et Williamson montrent que leurs travaux ne se limitent pas aux surfaces nominalement planes. Dans le cas du contact entre corps courbes rugueux, l'hypothèse de l'indépendance des contacts individuels n'est plus valide car le contact se limite à une partie de la surface en raison de la courbure globale des corps et les contacts sont alors suffisamment proches les uns des autres pour que la force sur l'un change la hauteur de ses voisins. La théorie classique de Hertz est alors une limite haute pour les surfaces rugueuses sous fortes charges. Cependant les pressions réelles au niveau des microcontacts (qui sont beaucoup plus élevées que les pressions hertziennes) sont du même ordre de grandeur que celles des surfaces nominalement planes, et sont également presque proportionnelles à $E^*(\sigma_p/R)^{1/2}$. Dans les deux cas, le facteur de proportionnalité varie faiblement avec la charge ; pour le contact entre des surfaces courbes il varie également avec la rugosité. Le nombre de contacts est grossièrement proportionnel à la charge et la taille moyenne de l'aire de contact est presque constante.

En résumé, le modèle GW est un modèle statistique de type lisse sur rugueux où le sommet des aspérités est hémisphérique avec un rayon de courbure constant et la hauteur des aspérités est supposée suivre une distribution gaussienne selon un plan moyen. Ce modèle est défini par trois paramètres : l'écart type de la distribution de la hauteur des aspérités σ_p, la densité d'aspérités par unité de surface η et le rayon de courbure des aspérités R qui est supposé constant. Il a été la base de nombreux développements dont les principaux vont être développés dans les paragraphes suivants.

3. AUTRES MODELES DE CONTACT ENTRE SURFACES LISSE/RUGUEUSE

Les développements du modèle GW sont très nombreux et il devient fastidieux d'être exhaustif. Nous choisissons ici de ne détailler que quelques développements sur les différents points suivants :

- Rayon non constant,
- Microgéométrie non isotrope,
- Mode de déformation pas seulement élastique.

3.1. Les modèles à rayon non constant

3.1.1. Modèle de Whitehouse et Archard : modèle WA

Comme nous venons de le voir, le modèle proposé par Greenwood et Williamson représente une surface rugueuse nominalement plate par une série de pics sphériques, chacun ayant le même rayon de courbure R avec une distribution gaussienne des hauteurs de pics. Mais Whitehouse et Archard [9] considèrent que cette représentation des surfaces aléatoires est incomplète ou imprécise. En plus de la distribution des hauteurs, Whitehouse et Archard vont donc également tenir compte de la distribution de leur rayon de courbure. Pour eux, si un profil de surface est de type aléatoire alors il peut être complètement défini (au sens statistique plutôt que déterministe) par deux paramètres : la distribution de hauteur et la fonction d'autocorrélation. Cela est équivalent à des aspérités ayant une distribution statistique à la fois des hauteurs et des rayons [4].

Leur étude porte principalement sur des profils ayant une distribution de hauteur gaussienne et une fonction d'autocorrélation exponentielle ce qui, selon eux, correspond à un nombre non négligeable de surfaces techniques ou en est une bonne approximation. Ce modèle est largement utilisé dans la théorie des processus aléatoires. Le modèle WA permet de simplifier de nombreux aspects mathématiques.

Les auteurs supposent que les surfaces sont isotropes mais leur théorie peut être étendue aux surfaces anisotropes. La fonction d'autocorrélation du profil est définie par :

$$C(\beta) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} s(x)s(x+\beta)dx \qquad (15)$$

Où $s(x)$ est la hauteur du profil pour une coordonnée x donnée et $s(x+\beta)$ est la hauteur de la coordonnée adjacente $(x+\beta)$ (Figure 3). Dans leur théorie, Whitehouse et Archard supposent que : $C(\beta)=exp(-\beta/\beta^*)$ avec β* la distance de corrélation. Quand $\beta = 2.3\ \beta^*$, $C(\beta)$ vaut 10 % et donc dans la suite, les auteurs prennent arbitrairement cet espacement comme celui pour lesquels deux points du profil atteignent juste les conditions où ils peuvent être considérés comme des événements indépendants.

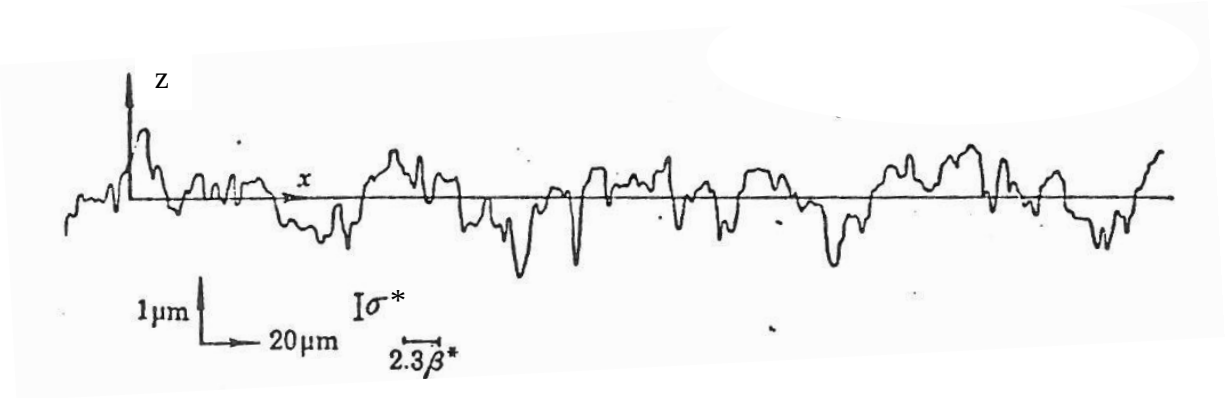


Figure 3 : Profil de surface montrant le système de coordonnées [9]

La signification physique de ce modèle est due au fait que les principales composantes d'un profil de surface correspondent à une bande couvrant les plus basses fréquences (plus grandes longueurs d'onde). Cela introduit l'aspect multiéchelle dans une représentation de modèle aléatoire.

La fonction densité de probabilité qui décrit la probabilité d'avoir une aspérité de hauteur adimensionnée *s* et de courbure adimensionnée *C* (C=courbure*ℓ^2/σ) est donnée par :

$$f^*(s,C) = \frac{exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right)}{2\pi\sqrt{2}} exp\left[-\left(s-\frac{1}{2}C\right)^2\right] \text{erf}\left(\frac{1}{2}C\right) \qquad (16)$$

ℓ représente la distance entre deux points consécutifs d'analyse.

L'étoile * est utilisée pour indiquer que les propriétés concernent des aspérités données et non les propriétés de tout le profil.

Greenwood et Williamson ont aussi étudié la distribution des hauteurs des pics proches d'une gaussienne mais la valeur moyenne et l'écart type de cette distribution diffèrent de celle des hauteurs des ordonnées.

Le modèle GW est essentiellement basé sur un concept physique alors que le modèle WA s'attache plutôt à étudier le contact entre des surfaces rugueuses en utilisant les mathématiques et la théorie du processus aléatoire. Scaraggi et al. ont montré que les résultats obtenus par les deux méthodes ne sont pas très différents [10]. Alors que le modèle GW nécessite 3 paramètres (l'écart type de la distribution de hauteur des aspérités σ_p, le rayon de courbure des aspérités R et la densité d'aspérité par unité de surface η), le modèle WA est complètement défini par l'écart type de la distribution de hauteur σ (rugosité moyenne quadratique Rq de la norme ISO NF 4287) et la distance de corrélation β^*. σ_p est

proportionnel à σ, R est proportionnel à β^{*2}/σ et η est à $1/\beta^{*2}$ d'où la relation σ_p R η = constante, vérifiée pour toutes les surfaces aléatoires quand le modèle GW est utilisé.

Onions et Archard [11], sur le même modèle que Whitehouse et Archard, mais en considérant une distribution gaussienne des hauteurs de surface plutôt que des hauteurs d'aspérités et des courbures de pics, ont déterminé les relations suivantes :

$n = \mathcal{A} F_n(d)/[5(2.3\beta^*)^2]$,

$A = 1/5\ \pi\ \mathcal{A} F_n(d)$ et

$P = 4\ \sigma\ E^*\ \mathcal{A} F_n(d)/[15(2.3\beta^*)]$,

avec $F_n(d) = \int_d^\infty \int_0^\infty \frac{f^*(s,C)}{N^*} dCdz$, N* est le rapport pics/ordonnée

Whitehouse et Phillips [12] ont étendu leur analyse à des surfaces aléatoires ayant une fonction d'autocorrélation plus générale.

3.1.2. Modèle de Francis

Francis [13] définit un nouveau modèle probabiliste pour le comportement mécanique de l'interface entre deux surfaces nominalement planes rugueuses qu'il considère plus réaliste que les modèles précédents. Le modèle GW dérive des expressions pour obtenir la charge totale P et l'aire de contact A en fonction de la distance d entre le plan et le niveau moyen des pics en fonction des trois paramètres topographiques R, σ_p et η. Mais :

- Un rayon de pic R constant n'est pas réaliste; pour une surface aléatoire R est une variable aléatoire;
- Les variables A(h) et P(h) ne peuvent pas être reliés à une séparation moyenne $\bar{h}$ des niveaux de surface moyens sans connaître, pour chaque surface, la hauteur moyenne de pic $\overline{z_p}$ au-dessus du niveau moyen de pics.

Dans son modèle, Francis suppose que le contact entre deux surfaces techniques nominalement planes est équivalent au contact entre une surface somme et un plan lisse. La surface somme est supposée être gaussienne et isotrope ce qui permet de décrire la hauteur et la courbure des pics 3D, variables aléatoires corrélées, par la fonction densité de probabilité dérivée par Nayak (voir paragraphe 3.2.1). En utilisant la fonction de forme de pic $A_0(z_p, R, \delta)$

qui est paraboloïde seulement au sommet, la distribution de hauteur de surface de l'ensemble des pics est faite pour se conformer à la distribution gaussienne de la surface somme aléatoire. Les microcontacts sont supposés mécaniquement indépendants et à l'intérieur de chaque microcontact les déplacements de surface $w_1(r)$ et $w_2(r)$ sont paraboloïdes, permettant ainsi de modéliser chaque microcontact par des relations fonctionnelles qui décrivent le comportement empirique d'une indentation sphérique isolée. La limite en charge de ce modèle est obtenue quand les microcontacts ne peuvent plus être considérés comme géométriquement discrets et mécaniquement indépendants. Chaque microcontact est supposé grossir sous indentation sphérique mutuelle permettant ainsi de balayer tout le domaine de déformation d'élastique hertzien à plastique. En sommant sur tous les microcontacts, l'aire de contact totale et la charge sont obtenues en fonction de la hauteur de la surface moyenne. Lorsque suffisamment de contacts ont fléchi, le comportement ne peut plus être considéré comme totalement élastique, la mécanique du contact dépend principalement de l'exposant de l'écrouissage, du rapport entre la limite d'élasticité et le module d'Young et du rapport mesurable entre le rayon moyen de pic et la moyenne quadratique de la hauteur de la surface somme.

En 1982, Francis a critiqué son propre modèle et les modèles d'aspérités probabilistes [14]. Il considère que ces modèles ont quatre principaux défauts :

- Les hypothèses concernant les distributions de probabilité de hauteur, de forme et de position latérale d'aspérités sont nombreuses.
- Cela demande de choisir quelle(s) échelle(s) d'aspérités est (sont) pertinente(s).
- Ces modèles se limitent à des aires de contact discret qui se déforment indépendamment les unes des autres.
- Ils ne peuvent pas prédire une géométrie discontinue.

Francis présente un nouveau modèle éléments finis déterministe pour les surfaces rugueuses en contact en prenant comme données d'entrée des profils ou des surfométries des deux surfaces.

3.1.3. Modèle 1 de Robbe-Valloire : modèle FRV1

La description des surfaces adoptée par Robbe-Valloire et al. [15] est basée sur un modèle probabiliste tenant compte de la variabilité des altitudes des sommets et des rayons de courbure des aspérités. L'analyse de la variabilité de l'espacement latéral entre deux aspérités consécutives et l'utilisation de paramètres spécifiques donnent une description des rayons et des altitudes des sommets applicables à un plus grand domaine de formes d'aspérités que celui obtenu habituellement à partir de la microgéométrie aléatoire [16]. Cette approche permet de décrire la rugosité et l'ondulation en utilisant les paramètres standardisés internationaux de la norme ISO 12085 éditée en 1996.

La norme ISO 12085 (1996) appelée « norme motifs – ligne enveloppe supérieure » définit un motif comme étant une portion de profil primaire comprise entre les points les plus hauts de deux saillies locales du profil, consécutives ou non. Un motif de rugosité numéroté i (Figure 4) est caractérisé par :

- Sa longueur ARi distance horizontale entre les pics du motif i
- Ses deux profondeurs Hj et Hj_{+1} mesurées perpendiculairement à la direction générale du profil, hauteurs des deux pics extrêmes du motif i

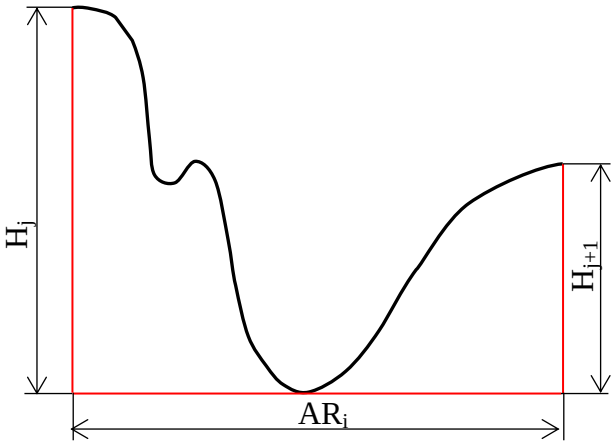


Figure 4 : Caractéristiques géométriques d'un motif

La profondeur moyenne des motifs de rugosité R est la moyenne arithmétique des profondeurs Hj des motifs de rugosité : $R = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} H_j$.

La moyenne quadratique des Hj est le paramètre SR.

Le pas moyen des motifs de rugosité est la moyenne arithmétique des longueurs ARi des motifs de rugosité : $AR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} AR_i$. La moyenne quadratique des valeurs ARi est le paramètre SAR.

Les paramètres d'ondulation sont obtenus à partir des motifs d'ondulation en ne conservant que les sommets des pics et en appliquant la même méthodologie que pour les paramètres de rugosité. Ces paramètres W, SW, AW et SAW quantifient respectivement la moyenne et la moyenne quadratique de l'amplitude des altitudes des sommets, la largeur des motifs d'ondulation et la moyenne quadratique de ces largeurs.

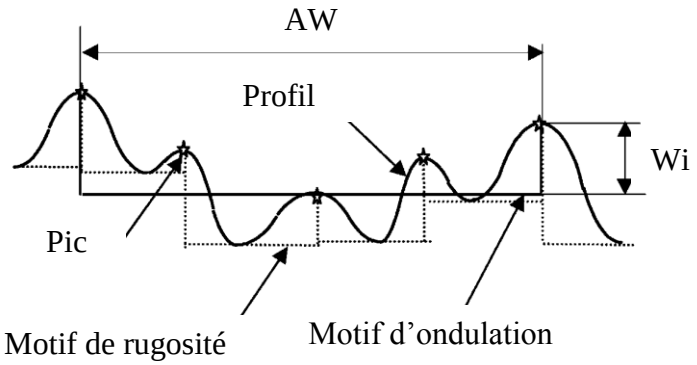


Figure 5 : Description d'un motif d'ondulation [15]

En approximant les sommets des pics par des sphères, Robbe-Valloire et al. déterminent la distribution statistique des valeurs de rayon dont la valeur moyenne RAD est égale à :

$$RAD = \frac{1}{16}\frac{AR^2 + SAR^2}{R} \tag{17}$$

En implémentant cette valeur dans le modèle GW en tant que rayon, ils obtiennent la moyenne quadratique SRAD de cette valeur :

$$SARD \cong \frac{1}{16}\frac{AR^2}{R}\sqrt{\frac{SR^2}{R^2} + 4\frac{SAR^2}{AR^2}} \tag{18}$$

Les caractéristiques du rayon (moyenne et moyenne quadratique) dépendent fortement de l'espacement entre deux aspérités consécutives.

A une distribution statistique gaussienne, les auteurs préfèrent une distribution log-normale, valable uniquement pour des valeurs positives :

$$f_1(R^*) = \frac{1}{aR^*\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2a^2}(logR^* - b^2)\right] \quad (19)$$

Avec $R^* = \frac{R}{SRAD}$, $a = \sqrt{log\left(\frac{SRAD^2}{RAD^2} + 1\right)}$ et $b = log\left(\frac{RAD}{SRAD}\right) - log\left(\frac{SRAD^2}{RAD^2} + 1\right)$

Contrairement aux modèles de Nayak (voir paragraphe 3.2.1) et WA, dans le modèle FRV1, la variabilité du rayon n'est pas une fonction de l'altitude des pics.

En utilisant les relations définies par Nayak concernant les densités d'aspérités, respectivement sur une surface D_s et sur un profil D_p (30), Robbe-Valloire obtient la relation suivante :

$$D_s = 1.2{D_p}^2 = \frac{1.2}{AR^2}$$

Les auteurs définissent l'altitude moyenne d'un sommet à partir de la ligne moyenne du profil par : $\bar{z} = \frac{R}{2}$ et la moyenne quadratique de la distribution verticale des pics par : $z_{rms} = 0.35\sqrt{W^2 + SW^2}$. Le coefficient 0.35 provient de l'hypothèse d'une distribution sinusoïdale des pics dans un motif d'ondulation.

Une distribution gaussienne des sommets donne la densité de probabilité pour qu'un sommet soit à l'altitude z soit :

$$f_2(z) = \frac{1}{z_{rms}\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - \bar{z}}{z_{rms}}\right)\right]$$

En couplant la distribution d'altitude et de rayon et en les considérant comme des variables indépendantes, la probabilité pour un pic d'être un sommet d'altitude z et de rayon R est donnée par :

$$f(z, R) = f_2(z) f_1(R)$$

Ce modèle est indépendant de la forme de la surface et peut donc être appliqué à une grande variété de surface. C'est un modèle qui restitue parfaitement la quasi-périodicité des profils mesurés sur des pièces tournées. Par contre pour des pièces rectifiées ou polies qui donnent des profils plus aléatoires, le modèle présente un taux de dispersion plus élevé pour des dimensions d'aspérités 3D.

3.2. Modèles non isotropes

3.2.1. Modèle de Nayak

Nayak considère que les modèles basés sur les aspérités (modèle GW), supposant que la surface rugueuse est composée par un plan moyen avec des pics et des vallées indépendantes distribués aléatoirement à sa surface et que le sommet des aspérités est sphérique, sont souvent invalides.

L'approche du contact entre une surface rugueuse et un plan lisse définie par Nayak [2] utilise les techniques de la théorie du processus aléatoire en se basant sur les travaux de Longuet-Higgins (1957) sur les surfaces aléatoires des océans. Les études précédentes sur l'analyse des surfaces solides avec ces techniques reposent sur deux hypothèses :

- Les statistiques de la surface sont les mêmes que celles d'un profil de la surface.
- Les aspérités ont des extrémités sphériques.

Or il est nécessaire de distinguer un pic sur un profil d'un sommet sur la surface. Un profil passera plus souvent sur le bord d'une aspérité que par son sommet. Le bord apparaîtra alors comme un pic sur le profil mais un pic d'une hauteur réduite. De même, le gradient de la surface moyenne n'est pas le même que la pente moyenne d'un profil. L'utilisation d'un profil conduit donc à minorer la probabilité de hauteur des sommets, à une courbure plus petite des sommets et à un gradient moyen plus faible que les valeurs qui existent pour une surface.

Pour une surface rugueuse de hauteur z(x,y) par rapport à un plan moyen de coordonnées cartésiennes (x,y,z), k_x et k_y sont les nombres d'onde dans les directions x et y respectivement. Nayak pose les variables suivantes :

$$\xi_1 = z,\ \xi_2 = \frac{\partial z}{\partial x}, \xi_3 = \frac{\partial z}{\partial y}, \xi_4 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \xi_5 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \xi_6 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{20}$$

Ce modèle a d'abord été développé pour des surfaces rugueuses isotropes. Pour une surface rugueuse isotrope aléatoire gaussienne, dans le cas d'un contact élastique, la distribution de probabilité conjointe $\mathcal{P}$ est égale à :

$$\mathcal{P}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6) = \frac{3\sqrt{3}}{16\pi^3} \frac{1}{{m_2}^2 m_4 (2\alpha - 3)^{1/2}} exp\left(-\frac{1}{2}\Xi\right) \tag{21}$$

Avec :

$$\Xi = \frac{2\alpha}{(2\alpha-3)m_0}{\xi_1}^2 + \frac{9(\alpha-1)}{4m_4(2\alpha-3)}\left({\xi_4}^2 + {\xi_6}^2\right) + \frac{3}{m_4}{\xi_5}^2 + \frac{3}{(2\alpha-3)m_2}\xi_1(\xi_4+\xi_6) - \frac{3(\alpha-3)}{2(2\alpha-3)m_4}\xi_4\xi_6 + \frac{1}{m_2}\left({\xi_2}^2 + {\xi_3}^2\right) \quad (22)$$

Avec : $$m_i = \iint_{-\infty}^{\infty} k^i \Phi(k_x, k_y)dk_x dk_y \quad (23)$$

$m_0 = \sigma^2$, σ rugosité moyenne quadratique

$$\alpha = \frac{m_0 m_4}{{m_2}^2} \quad (24)$$

En définissant : ${\xi_1}^* = \xi_1/\sigma$ et en utilisant la transformation $p_{sum}({\xi_1}^*) = p_{sum}(\xi_1)\left|\frac{\partial \xi_1}{\partial {\xi_1}^*}\right|$, cela permet de déterminer les statistiques suivantes au niveau de la surface :

- La distribution de probabilité des hauteurs des sommets :

$$p_{sum}(\xi^*) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left\{e^{-\frac{\alpha}{2\alpha-3}\xi^*}\left[\frac{3(2\alpha-3}{\alpha^2}\right]^{1/2} + \frac{3\sqrt{2\pi}}{2\alpha}e^{-1/2\xi^*}(1+erf\beta)\left({\xi^*}^2-1\right) + \sqrt{2\pi}\left[\frac{\alpha}{3(\alpha-1)}\right]^{\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{\alpha{\xi^*}^2}{2(\alpha-1)}\right](1+erf\gamma)\right\} \quad (25)$$

Avec : $$\beta = \left[\frac{3(2\alpha-3}{\alpha^2}\right]^{1/2}\xi^* \quad (26)$$

$$\gamma = \left[\frac{\alpha}{2(\alpha-1)(2\alpha-3)}\right]^{1/2}\xi^* \quad (27)$$

Et la densité spatiale des sommets : $Ds = \frac{1}{6\pi\sqrt{3}} \frac{m_4}{m_2}$ (28)

- La distribution de probabilité conjointe pour des sommets de hauteur $\xi_1{}^*$ et de courbure moyenne équivalente t_1 est :

$$p_{sum}(\xi_1{}^*, t_1) = \frac{\sqrt{3\frac{\alpha}{2\alpha-3}}}{2\pi} \exp\left(-\frac{\alpha}{2\alpha-3}\xi^{*2}\right) * \left(t_1{}^2 - 2 + 2e^{-\frac{1}{2t_1{}^2}}\right) exp\left\{-2\left[\frac{\alpha}{2\alpha-3}\right] t_1{}^2 + \left[\frac{\alpha}{2\alpha-3}\right]\left(\frac{12}{\alpha}\right)^{1/2}\right\} \quad (29)$$

Pour un profil, la densité spatiale des sommets est : $Dp = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{m_4}{m_2}\right)^{1/2}$ d'où la relation :

$$Ds \simeq 1.2\, Dp^2 \quad (30)$$

m_0, m_2 et m_4 sont les trois moments spectraux d'un profil de surface ; ils sont équivalents respectivement à la distribution des hauteurs, des pentes et des courbures d'un profil. Ce sont les moments de la densité spectrale de puissance (PSD) d'un profil $\Phi_0(s)$ obtenus par l'intersection d'une surface rigide aléatoire avec un plan perpendiculaire au plan moyen de la surface rugueuse elle-même [3]. En raison de l'isotropie de la surface [3], la PSD $\Phi_\theta(s)$ ne dépend pas de l'orientation du plan intersectant la surface, on peut alors choisir par exemple le plan $k_y = 0$ et écrire $\Phi_\theta(k_x) = \Phi_{\theta=0}(k_x) = \int dk_y \Phi(k_x, k_y)$ avec $\Phi(k_x, k_y) = \Phi(k)$, PSD de la surface.

Les sommets sont considérés comme étant des paraboloïdes avec des courbures principales κ_1 et κ_2 prises dans des directions orthogonales. La courbure moyenne $\overline{\kappa_m} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ n'est pas constante mais varie avec les hauteurs de sommet, les sommets les plus élevés ayant une courbure moyenne plus grande. α dépend de la largeur de la densité spectrale de puissance PSD surfacique.

Il est en principe possible d'étendre cette théorie à des surfaces gaussiennes anisotropes à partir de plusieurs profils parallèles obtenus dans des directions croisées, l'analyse pour les surfaces gaussiennes et isotropes peut être dupliquée. Pour les surfaces anisotropes, les caractéristiques de rugosité m_0, m_2 et m_4 se généralisent à neuf valeurs connues sous le nom de moments bi-spectraux et définies par 2 indices dont la somme fait 0, 2 ou 4 : m_{00}, m_{11}, m_{02}, m_{20}, m_{13}, m_{22}, m_{31}, m_{04} et m_{40} [2].

Si les surfaces ne sont ni isotropes ni gaussiennes, il est en principe possible de faire une analyse similaire.

Dans [17], Nayak montre que le modèle de processus aléatoire ci-dessus est approprié pour étudier le contact plastique de surfaces rugueuses si les surfaces sont gaussiennes isotropes. Cette étude sur le contact plastique est basée sur les travaux de Pullen et Williamson [18]. Le modèle de contact plastique proposé par Nayak est établi dans le cas du contact entre une surface rugueuse et un plan dur. Il montre ensuite que le contact entre deux surfaces rugueuses est équivalent au contact entre une surface rugueuse équivalente et un plan dur et donc à l'intersection de la surface rugueuse composite par un plan imaginaire.

3.2.2. Modèle de Bush, Gibson, Thomas : modèle BGT

Le modèle de Bush, Gibson, Thomas (modèle BGT) [19] est un modèle de contact élastique basé sur les hypothèses microgéométriques de Nayak décrites ci-dessus.

Le contact élastique [19] entre une surface rugueuse isotrope et un plan est traité en approximant les sommets du modèle de processus aléatoire par des paraboloïdes avec les mêmes courbures principales et en appliquant la solution classique de Hertz pour leur déformation. A partir du modèle de processus aléatoire, il est possible de déterminer le nombre moyen de points stationnaires (maxima, minima ou points cols (points selles)) par unité d'aire de surface, la distribution des hauteurs des maxima et la distribution des rayons principaux de courbure aux sommets. Ces maxima locaux sont les aspérités de surface.

Bush et al. présentent un modèle basé sur la supposition que le sommet de chaque aspérité est remplacé par un paraboloïde ayant la même hauteur et les mêmes courbures principales que l'aspérité considérée (Figure 6).

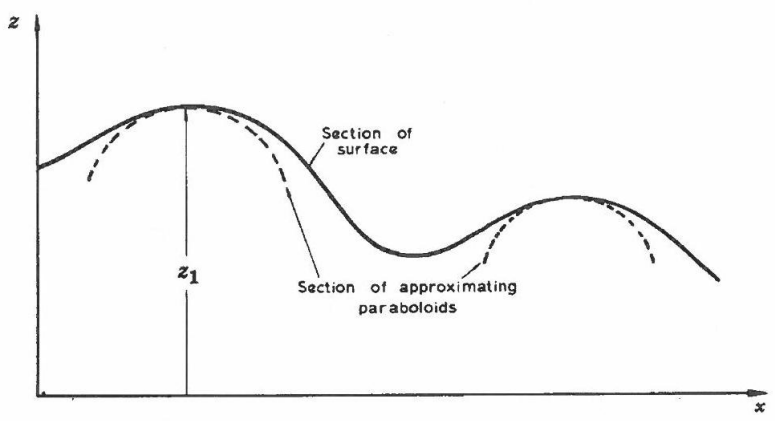


Figure 6 : Section de la surface selon [19]

Ainsi si le sommet d'une aspérité individuelle est approché, la différence entre l'élévation (et les gradients) de surface et la hauteur du paraboloïde (et ses gradients) approximée devient de plus en plus petite. L'approximation faite en remplaçant les sommets des aspérités par des sommets hémisphériques est moins bonne que celle faite avec des paraboloïdes au niveau des surfaces transversales. La théorie de Hertz permet de déterminer la force et l'aire de contact sur une seule aspérité. On observe alors des régions de chevauchement elliptique.

A partir du modèle de Nayak en utilisant la distribution de probabilité conjointe pour une surface, Bush et al. ont développé des calculs en se référant à l'ellipse de contact. Ils éliminent ainsi deux lacunes soulevées dans le modèle GW concernant le rayon et la hauteur en dérivant la fonction de densité de probabilité conjointe. L'aire et la charge sont exprimées en fonction de z et des dérivées premières et secondes de n'importe quel profil 2D z(x) de la surface rugueuse.

Ils aboutissent à la relation suivante :

$$\frac{F(t)}{A_c(t)} = \sqrt{\frac{m_2}{\pi}} E^* = \Omega \tag{31}$$

Soit à une relation linéaire asymptotique entre la charge F et l'aire réelle de contact Ac avec : $t = \frac{h}{\sqrt{m_o}}$.

Les auteurs aboutissent à la conclusion que le contact élastique d'une surface isotrope conduit à une stricte proportionnalité entre l'aire de contact et la charge pour des valeurs de h élevées et une relation approximativement linéaire pour de petites valeurs. L'aire de contact

élastique pour toutes les surface de ce type sera la même pour une même valeur de t et cette aire sera exactement la moitié de l'aire portante à la même hauteur. La variation de charge avec h dépend seulement d'un autre paramètre de surface, la pente moyenne absolue du profil. Le modèle développé n'est pas valide pour de faibles valeurs de h, valeurs qui augmentent avec l'augmentation de α. Le domaine d'application de ce modèle basé sur les aspérités est plus large en utilisant, pour représenter des aspérités, des paraboloïdes n'ayant aucun axe de révolution plutôt que des sommets sphériques.

Alors que le calcul de la force et de l'aire de contact moyennes avec le modèle GW nécessite uniquement l'intégration de la distribution de hauteur de sommet, le calcul correspondant pour le modèle BGT nécessite une intégration multi-dimensionnelle de la distribution conjointe de la hauteur de sommet et des courbures principales [20].

Bush et al. ont également comparé les résultats obtenus par les modèles GW et Nayak et relevé des différences. Dans le modèle GW, les sommets sont sphériques, la courbure des sommets est constante et la distribution des hauteurs des sommets est gaussienne. Les déplacements sont donnés en fonction de la distance de la surface plane au plan moyen de la distribution des sommets de la surface rugueuse et normalisé par rapport à cette distribution. Nayak a montré que les sommets, en général, ne sont pas sphériques, que leur courbure est fonction de la hauteur et que la distribution de hauteur est non gaussienne. Sa moyenne et son écart type ne coïncident pas avec ceux de la surface sauf quand $\alpha \to \infty$.

Carbone et al. [3] ont relevé des erreurs dans les tables présentant les valeurs calculées pour la charge et pour l'aire de contact par Bush et al.. Carbone et al. montrent que le rapport $F/(A_c\Omega)$ décroit de manière continue jusqu'à 1 quand t augmente. Ils supposent que c'est lié à une erreur dans le calcul de la charge et précisent que la relation linéaire asymptotique du modèle BGT ne peut être obtenue que pour de petites charges et des aires de contact non réalistes.

En 1976, Bush et al. définissent un nouvel indice de plasticité [21]. L'indice de plasticité introduit par Greenwood et Williamson détermine la charge à partir de laquelle un degré significatif de déformation plastique apparaît. Cette théorie, basée sur l'hypothèse que les sommets des aspérités ont une courbure constante, conduit à minimiser la déformation plastique car les aspérités les plus élevées impliquées dans le contact sont en générale moins arrondies que les plus basses. Les aspérités en contact ont une courbure plus grande que la courbure moyenne et atteindront donc la plasticité à des charges plus faibles. Bush et al.

prennent en compte la corrélation entre la hauteur de sommet et la courbure dans l'analyse de l'apparition de l'écoulement plastique d'où la définition de ce nouvel indice de plasticité Ψ :

$$\Psi = \sqrt{\frac{8}{3}}\left(\frac{E^*}{H}\right)\left(\frac{m_0 m_4 (1 - 0.8968/\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \quad (32)$$

Pour Greenwood et Williamson, le contact devient significativement plastique pour $\psi > 1$ alors que pour Bush et al., en utilisant le critère de Von Mises, $0.46 < \psi < 0.6$. Ces modèles statistiques prédisent que le contact restera élastique pour des valeurs plus élevées que celles définies par Onions et Archard où $0.35 < \psi < 0.6$.

Bush, Gibson et Keogh ont étendu le modèle précédent au contact entre des surfaces rugueuses fortement anisotropes avec des grains orientés dans une direction privilégiée [21]. Les aspérités sont représentées par des ellipsoïdes paraboliques à forte excentricité ayant leur demi-axe principal orienté dans la direction des grains. Cette direction sera choisie comme axe x. Pour ce modèle, cinq paramètres sont alors nécessaires pour décrire de telles surfaces : la variance de la hauteur de surface par rapport au plan moyen m_{00}, les deux pentes moyennes quadratiques m_{20}, m_{02} et les deux courbures principales quadratiques m_{40} et m_{04}. Ω a alors la même formulation que dans (31) en remplaçant m_2 par m_{02}.

3.2.3. Modèle de McCool

Le modèle développé par McCool en 1987 [22] est basé sur celui de GW mais avec comme données d'entrée des paramètres de rugosité fonctionnels fournis par un profilomètre classique : σ la rugosité moyenne quadratique de la norme NF ISO 4287 et Δ_q le paramètre lié à la fréquence défini comme la pente moyenne quadratique de la surface (norme NF ISO 4287).

De nombreux modèles, développés à partir de celui de Greenwood et Williamson mais avec des hypothèses moins restrictives, montrent que ce dernier est néanmoins précis dans ses prévisions [20]. C'est pourquoi McCool utilise le modèle GW pour modéliser les microcontacts.

Les trois paramètres d'entrée du modèle GW sont :

- La densité de surface des sommets η
- L'écart type de la distribution de probabilité des hauteurs de sommet σ_p
- Le rayon déterministe des extrémités sphériques des sommets R

Comme dans le modèle GW, le contact étudié par McCool est celui entre une surface rugueuse et un plan lisse. En plus des équations du modèle GW, McCool, comme Nayak, utilise les trois moments spectraux m_0, m_2 et m_4.

La densité spatiale des sommets est donnée par (29). Dans le modèle BGK, le rayon R est approximé par l'inverse de la courbure moyenne des sommets : $R=0.375(\pi/m_4)^{1/2}$ et l'écart type de la hauteur des sommets σ_p par $\sigma_p=(1 - 0.8968/\alpha)^{1/2}\, m_0^{1/2}$

Il est plus habituel en tribologie d'utiliser le plan moyen du profil comme référence plutôt que le plan moyen des sommets utilisé dans le modèle GW (voir Figure 7).

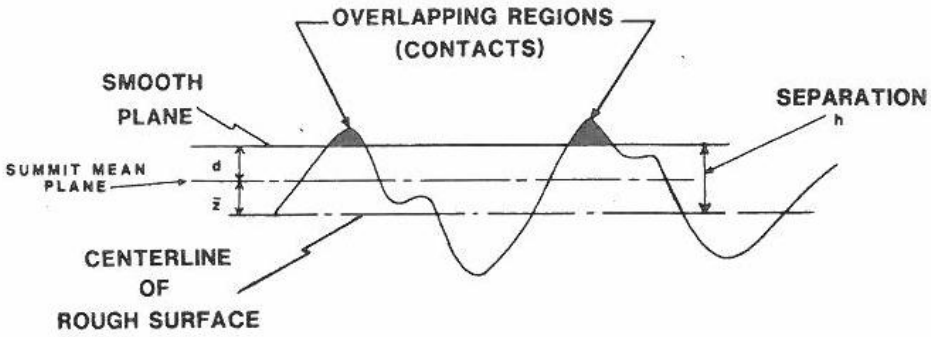


Figure 7 : Relation entre plans moyens de surface et de sommet [22]

Les auteurs estiment que le rapport h/σ_p est très peu différent de h/σ et ainsi $d/\ s\sigma$ peut être déterminé pour une valeur $h/\ \sigma_p$ fixée et des valeurs données de m_0, m_2 et m_4 à partir de la relation :

$$d/\sigma_p \ = \frac{\left[\left(\frac{h}{\sigma}\right) - 4(\pi\alpha)^{1/2}\right]}{(1 - 0.8969/\alpha)^{1/2}}$$

Quand deux surfaces rugueuses sont en contact, les auteurs utilisent le contact équivalent surface somme/plan lisse et les paramètres de la surface somme sont des paramètres composites ainsi : $m_i = (m_i)_1 + (m_i)_2$ avec i =1; 2, 4

Le modèle GW peut ainsi être complètement spécifié si m_0, m_2 et m_4 sont connus pour la surface somme isotrope équivalente. Ces valeurs peuvent être obtenues directement à partir d'un profil par des approximations des différences finies. Une autre méthode pour les déterminer est de les calculer en termes de spectre d'un profil *s(f)* si ce spectre est connu ou évalué. Grossièrement, le spectre est une fonction qui exprime comment les différentes fréquences présentes dans un profil aléatoire contribue à la variabilité totale du profil. Il a été montré de manière empirique que le spectre d'un profil de rugosité est quasi linéaire sur une échelle logarithmique avec parfois des pointes aux fréquences correspondant à l'espacement des stries d'usinage, de perturbations ou autres caractéristiques périodiques.

$$m_n = (2\pi)^n \int_{-f_1}^{f_2} f^n . s(f) df \quad n = 0, 2 \text{ ou } 4$$

Expérimentalement, il a été montré que le spectre *s(f)* est proportionnel à f^{-k} soit : $s(f) = cf^{-k}$, k est l'exposant spectral et correspond à la pente de log(s) en fonction de log(f).

f_1 et f_2 sont les fréquences spatiales, respectivement basse et haute, de la bande passante d'un profil.

Les paramètres σ et Δ_q peuvent être reliés aux moments spectraux m_0 et m_2 par les relations suivantes :

$$\sigma = {m_0}^{1/2} \tag{33}$$

$$\Delta_q = {m_2}^{1/2} \tag{34}$$

Le rapport σ / Δ_q vaut :

$$\sigma/\Delta_q = 1/2\pi \left\{ \frac{(3-k)}{(1-k)} \frac{\left[{f_2}^{1-k} - {f_1}^{1-k}\right]}{\left[{f_2}^{3-k} - {f_1}^{3-k}\right]} \right\}^{1/2} \tag{35}$$

m_4 peut alors être estimé égal à :

$$m_4 = (2\pi)^4 \frac{(1-k)}{(3-k)} \frac{\left[{f_2}^{5-k} - {f_1}^{5-k}\right]}{\left[{f_2}^{1-k} - {f_1}^{1-k}\right]} . m_0 \text{ avec } k \neq 1 \; ou \; 3 \tag{36}$$

k est déterminé à partir de (35) et (36) permet d'obtenir m_4.

Cette méthode est basée sur la supposition que la densité spectrale du profil diminue comme une puissance de la fréquence spatiale. L'avantage de ce modèle est qu'il nécessite en données d'entrée les paramètres σ et Δ_q qui sont des paramètres directement accessibles lors de mesures profilométriques.

Les modèles de microcontact prédisent le comportement moyen ie l'aire de contact moyenne, le rayon de contact moyen, la pression moyenne et non la variabilité autour de cette moyenne [23]. Une simulation de Monte Carlo est utilisée pour déterminer le 75^e et le 90^e percentiles des trois variables adimensionnées $A/\pi R\sigma$, $P[3/4E^* R^{1/2}\sigma^{3/2}]$ et $Pmax[\pi(R/\sigma)^{1/2}/(2E^*)]$ en fonction de la distance adimensionnée qui sépare deux surfaces rugueuses. Ces variables sont utilisées pour déterminer les percentiles correspondants des distributions du modèle GW de la fraction d'aire réelle de contact, du rayon de l'aire, de la charge et de la pression maximum du microcontact.

Quand les surfaces sont anisotropes, il existe deux directions orthogonales appelées directions principales le long desquelles la valeur m_2 du profil est, respectivement, un minimum et un maximum. La valeur de m_2, appelée m_{2e} pour une surface isotrope équivalente, peut être construite comme la moyenne harmonique : $m_{2e}=(m_{2max}.m_{2min})^{1/2}$. m_4, dans les mêmes directions, est obtenu de manière similaire.

McCool [20] et Gassel ont étendu la simulation de O'Callaghan et Cameron au cas anisotrope général avec comme données d'entrée au logiciel appelé ASPERSIM les neuf valeurs de moments bispectraux de chacune des surfaces et la distance h adimensionnée. En sortie ils trouvent la pression nominale $P/\mathcal{A}$, l'aire de contact relative $Ac/\mathcal{A}$ et le nombre de contacts pour une distance au plan moyen donnée. Les aspérités aléatoires sont générées par un échantillonnage de Monte-Carlo à partir de la distribution conjointe des courbures et des hauteurs de sommet. Ces aspérités sont traitées comme des paraboloïdes elliptiques pour calculer la déflexion hertzienne et l'aire.

McCool en traitant le cas d'une surface rugueuse anisotrope avec une distribution aléatoire des rayons des aspérités a assoupli deux des hypothèses du modèle GW : surface isotrope et même rayon R pour tous les sommets. Les résultats montrent un très bon accord entre les calculs de McCool et ceux du modèle plus simple GW.

3.3. Les modèles élasto-plastiques

De plus en plus de modèles récents proposent la prise compte de modes de déformation élastique puis plastique suivant l'intensité de la sollicitation sur l'aspérité concernée. Nous en détaillerons deux dont les principes restent voisins.

3.3.1. Modèle de Chang, Etsion, Bogie : modèle CEB

Le modèle défini par Chang, Etsion, Bogie [24] est un modèle d'aspérités élasto-plastiques basé sur la conservation de volume d'un volume contrôlé d'aspérités durant la déformation plastique.

Si dans le modèle GW, il est supposé que les pics ne fusionnent pas, cette supposition peut ne plus être vérifiée pour des charges de contact élevées ce qui se traduit par l'augmentation du rapport entre aire de contact réelle et aire apparente de contact. Comme on l'a vu précédemment, le modèle GW a été étendu pour inclure certains aspects tels que les surfaces courbes, deux surfaces rugueuses avec des aspérités désalignées (modèle de Greenwood et Tripp, paragraphe 4.1), des rayons de courbure des pics d'aspérités non uniformes (Hisakado 1974) et des aspérités paraboloïdes elliptiques (modèle BGT) et des surfaces anisotropes (Modèle Mc Cool). Dans tous ces modèles, la conservation de volume des aspérités déformées plastiquement n'est pas considérée. Francis a reconnu le problème de déformation plastique et traité le domaine de déformation complet d'un microcontact donné en utilisant des « fonctions connectées continues ». Pullen et Williamson, dont les travaux ont servi de base à Nayak, ont observé que le volume est conservé par une augmentation uniforme de la surface qui n'est pas en contact sous certaines contraintes et chargements spécifiques. Les hypothèses du modèle de contact plastique peuvent être valides pour des contacts très chargés quand les aspérités voisines fusionnent pour former des zones de contact larges. Cependant pour des contacts faiblement ou modérément chargés, pour lesquels un pourcentage élevé d'aspérités se déforme élastiquement, ces hypothèses ne sont pas réalistes.

Les modèles, précédemment décrits, de contact entre surfaces rugueuses sont valables pour deux cas extrêmes de contact soit faiblement chargé soit très chargé. Un modèle amélioré est nécessaire pour les contacts modérément chargés où les déformations des aspérités sont principalement élastiques mais où il y a aussi un pourcentage non négligeable d'aspérités au-dessus de leur limité d'élasticité. C'est l'objet du modèle CEB similaire au

modèle GW mais qui tient compte de la conservation de volume d'un certain volume contrôlé d'aspérités déformées plastiquement.

Le modèle CEB garde les cinq hypothèses de départ de GW. Effectivement les résultats obtenus par McCool avec une surface anisotrope et des aspérités de rayons différents donnent des résultats peu différents. Les deux hypothèses, surface isotrope et rayon des aspérités constant, sont donc conservées par Chang et al. car elles simplifient grandement les analyses et ne limitent pas la généralisation du modèle. Le modèle CEB considère, en se basant sur l'étude de Greenwood et Tripp (voir paragraphe 4.1), que le contact entre deux surfaces rugueuses peut être modélisé par un contact entre une surface rugueuse équivalente et un plan lisse.

Quand deux surfaces rugueuses sont en contact, deux plans de référence peuvent être pris. Le premier est la moyenne des hauteurs des aspérités et le deuxième est la moyenne des hauteurs de surface. Ce dernier est plus facilement obtenu expérimentalement que le premier et est plus pratique d'utilisation pour comparer les résultats des différents modèles.

Les équations du modèle CEB sont celles définies par le modèle GW à savoir (1), (3), (4) et (7).

Ils définissent la pression maximale de contact p_m sur une aspérité par :

$$p_m = \frac{2E^*}{\pi}\left(\frac{w}{R}\right)^{1/2} \tag{37}$$

en utilisant les mêmes notations que celles du modèle GW et ils relient cette pression de contact maximale au début de la déformation plastique à la dureté du matériau le plus mou par $p_m = KH$ avec K le facteur de pression de contact maximum. L'interférence w_c critique à partir de laquelle apparaît la déformation plastique est ainsi :

$$w_c = \left(\frac{\pi KH}{2E^*}\right)^2 \beta \tag{38}$$

Quand $w<w_c$, le contact est élastique et quand $w \geq w_c$, le contact est partiellement plastique et la dépendance de la charge de contact et de l'aire de contact avec w doit être déterminée par un nouveau modèle, modèle basé sur la conservation de volume d'une région de l'aspérité déformée plastiquement.

La déformation de l'aspérité est supposée localisée principalement à proximité du contact. A une certaine profondeur $\boldsymbol{\ell}$ sous le contact, l'aspérité ne se déforme pas. L'aspérité déformée est modélisée par un segment sphérique tronqué de hauteur $\boldsymbol{\ell}$ (Figure 8).

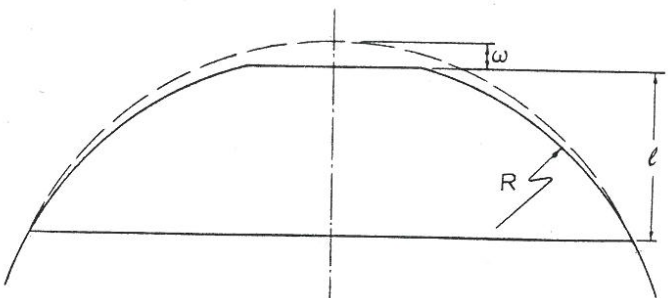


Figure 8 : Aspérité déformée plastiquement [24]

La conservation du volume permet d'obtenir l'aire de contact d'une aspérité plastiquement déformée a_{1p} qui est de la forme :

$$a_{1p} = \pi R w \left(2 - \frac{w_c}{w}\right) \tag{39}$$

Quand w est proche de w_c, l'aire de contact est proche de celle obtenue par un module purement élastique et quand $w > w_c$, l'aire de contact approche celle obtenue à partir d'un modèle purement plastique.

En supposant, pour toutes les aspérités plastiquement déformées, que la pression moyenne sur l'aire de contact est égale à KH alors la charge P_1p pour une aspérité est :

$$P_{1p} = \pi R w \left(2 - \frac{w_c}{w}\right) KH$$

Cette supposition est raisonnable puisque les aspérités dans les premiers cycles de déformation plastique ont des pressions de contact moyennes inférieures à KH alors que celles avec une interférence plastique relativement large auront une pression de contact moyenne proche de H.

Ce modèle de conservation du volume permet de déterminer l'aire de contact (40) et la charge (43) pour un contact élasto-plastique :

$$A = A_e(d) + A_p(d) \tag{40}$$

Avec :

$$A_e(d) = \eta \cancel{A} \pi R \int_d^{d+w_c} (z-d)\phi(z)dz \tag{41}$$

Et

$$A_p(d) = \eta \cancel{A} \pi R \int_{d+w_c}^{\infty} [2(z-d) - w_c]\phi(z)dz \tag{42}$$

Les indices e et p correspondent respectivement à : élastique et plastique.

$$P(d) = \eta \cancel{A} \pi E^* \left\{ \frac{4}{3} R^{1/2} \int_d^{d+w_c} (z-d)^{3/2}\phi(z)dz + \pi R K \frac{H}{E} \int_{d+w_c}^{\infty} [2(z-d) - w_c]\phi(z)dz \right\} \tag{43}$$

Chang et al. définissent également un nouvel indice de plasticité :

$$\psi = \frac{2E^*}{\pi K H} \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{3.717.10^{-4}}{(\eta R \sigma)^2}\right)$$

Ils comparent leur modèle élasto-plastique avec le modèle GW pour les contacts purement élastiques ainsi qu'avec celui de Pullen et Williamson (PW) pour les contacts purement plastiques pour une valeur de K=0.6 et des valeurs de ψ variant de 0.5 à 2.5. La différence entre le modèle CEB et le modèle GW augmente avec l'augmentation de l'indice de plasticité ou de la charge au contact. Pour des surfaces très lisses ou des matériaux très durs (faible ψ), le contact est principalement élastique d'où un bon accord entre les modèles CEB et GW. Quand la surface devient plus rugueuse ou le matériau plus mou, plus de contacts plastiques de produisent. Le modèle GW sous-estime la séparation comparée à CEB. Le modèle PW quant à lui surestime toujours la séparation pour une charge donnée.

Le modèle PW donne des résultats indépendants de l'indice de plasticité et peut être considéré comme la limite haute du modèle CEB.

3.3.2. Modèle élasto-plastique de FRV : modèle FRV2

Basé sur le modèle de description statistique développé au paragraphe 3.1.3, modèle FRV1, Robbe-Valloire et al. développent un modèle plus réaliste que les précédents concernant le comportement élasto-plastique des aspérités [25].

La description statistique peut être applicable à un large domaine de microgéométries de périodique à isotrope aléatoire. En tenant compte de la rugosité et de l'ondulation, la description de la microgéométrie résultante permet d'obtenir une analyse quantitative de la probabilité d'avoir une aspérité avec une altitude et un rayon au sommet donnés. Les analyses du comportement mécanique adoptent les résultats classiques d'indentation qui comporte trois étapes : déformations élastiques, élasto-plastiques et plastiques. L'indentation plastique inclut l'écoulement non uniforme. La description de la transition entre la déformation élastique et la déformation complètement plastique utilise une loi plus réaliste que la loi linéaire qui prévaut jusqu'à aujourd'hui.

Les travaux de Robbe-Valloire et al. se basent sur ceux réalisés par Johnson [26] et notamment sur les résultats d'indentation. Ils déterminent ainsi des relations adimensionnées décrivant le domaine de comportement élastique :

$$\overline{\Delta} \leq \overline{\Delta_e} \cong 27.4$$

$$\overline{A^2} = \overline{\Delta}$$

$$\overline{W_e} = \frac{2}{3}\overline{\Delta^{\frac{3}{2}}}$$

$\overline{\Delta}$ représente la valeur adimensionnée de l'interférence entre une aspérité et un plan, $\overline{\Delta_e}$ la valeur adimensionnée de l'interférence critique entre la déformation élastique et élasto-plastique d'un contact, $\overline{A}$ est l'aire de contact adimensionnée d'une simple aspérité et $\overline{W_e}$ la force normale adimensionnée sur une aspérité seule déformée élastiquement.

Concernant le comportement élasto-plastique, les relations établies par les auteurs sont les suivantes :

$$\overline{\Delta_e} \cong 27.4 \leq \overline{\Delta} \leq \overline{\Delta_{ep}} = 3976$$

$$\overline{A^2} = 2\overline{\Delta} - \overline{\Delta_e}$$

$$\overline{W_{ep}} = \frac{2\pi}{3}(2\overline{\Delta} - 27.4)\left[1.8 + ln\left(\frac{\sqrt{2\overline{\Delta}} - 27.4}{6}\right)\right]$$

$\overline{\Delta_{ep}}$ représente la valeur adimensionnée de l'interférence critique entre la déformation élasto-plastique et plastique d'un contact et $\overline{W_{ep}}$ la force normale adimensionnée sur une aspérité seule déformée élasto-plastiquement.

Concernant le comportement plastique, les relations sont les suivantes :

$$\overline{\Delta} \geq \overline{\Delta_{ep}} = 3976$$

$$\overline{A^2} = 2\overline{\Delta} - \overline{\Delta_e}$$

$$\overline{W_p} = 3\pi(2\overline{\Delta} - \overline{\Delta_e})$$

$\overline{W_p}$ représente la force normale adimensionnée sur une aspérité seule déformée plastiquement.

Les auteurs considèrent ensuite le contact entre deux surfaces rugueuses modélisées par un contact entre une surface somme et un plan. En se basant sur l'hypothèse du modèle GW supposant qu'une force normale agissant sur une aspérité n'influence par les contacts voisins entre aspérités, l'expression de la charge sur chaque aspérité dans un contact rugueux correspond à celle obtenue avec un seul contact, les différentes relations ci-dessus peuvent donc être utilisées.

La charge globale sur le contact F est la somme des charges totales F_e, F_{ep} et F_p. Cette expression analytique inclut les trois domaines de comportement élastique (e), élasto-plastique (ep) et plastique (p).

$$F_e = 1.2\frac{A_0}{AR^2}\frac{{\sigma_y}^3}{E^{*2}}\int_{z=d}^{z_{max}}\int_{R_e}^{R_{max}}\overline{W_e}R^2 f_2(z)f_1(R)dzdR$$

$$F_{ep} = 1.2\frac{A_0}{AR^2}\frac{{\sigma_y}^3}{E^{*2}}\int_{z=d}^{z_{max}}\int_{R_{ep}}^{R_e}\overline{W_{ep}}R^2 f_2(z)f_1(R)dzdR$$

$$F_p = 1.2\frac{A_0}{AR^2}\frac{{\sigma_y}^3}{E^{*2}}\int_{z=d}^{z_{max}}\int_{0}^{R_{ep}}\overline{W_{ep}}R^2 f_2(z)f_1(R)dzdR$$

De la même façon, ils déterminent le nombre d'aspérités en contact élastique N_e, en contact élasto-plastique N_{ep} et en contact plastique N_p ainsi que l'aire réelle de contact.

Les résultats théoriques obtenus à partir de ce modèle dans le cas du contact entre deux surfaces de même rugosité et de même matériau montrent qu'ils sont proches de ceux obtenus en considérant toutes les aspérités en contact élastique. Cela explique que les calculs élastiques soient en accord avec les résultats expérimentaux même si de la plasticité se produit dans le contact.

En comparant résultats expérimentaux et résultats théoriques des modèles FRV et GW, Nogueira et al. [27], comme beaucoup d'autres auteurs, montrent que si le modèle plus complet de FRV permet d'obtenir une plus grande concordance avec l'expérimentation, de bons résultats sont néanmoins obtenus à partir du modèle GW, malgré les hypothèses restrictives liées à ce modèle.

3.4. Synthèse

Ce paragraphe a pour objectif de dresser une synthèse des études menées sur le contact lisse/ rugueux. Il montre que cette synthèse est extrêmement délicate à réaliser tant le nombre d'articles décrivant cette situation est important. A partir des travaux fondateurs de Greenwood, les auteurs ont analysés de manière quasi exhaustive la validité de la plupart des hypothèses (forme des aspérités, taille des aspérités, isotropie des microgéométries, mode de déformation, indépendance des aspérités). Par contre, le faible nombre d'articles sur l'hypothèse de surface somme a retenu notre attention et nous allons détailler ces articles dans le paragraphe suivant. Mais avant, nous allons commencer par présenter les différentes stratégies de calcul de la surface somme à partir des paramètres de rugosité de chacune des deux pièces en contact.

Bien que le concept de surface somme repose sur un principe simple : celui d'associer la microgéométrie des deux pièces en contact, il est rarement fait allusion au calcul pratique des divers paramètres de rugosité de la surface somme.

L'information qui revient le plus souvent est l'association des écart-type de rugosité ou d'écart-type d'altitude de sommet.

Greenwood et Tripp ont ainsi montré que le contact entre deux surfaces rugueuses peut être modélisé par le contact d'un plan avec une surface rugueuse équivalente caractérisée par une courbure d'aspérité qui est la somme des courbures des aspérités des deux surfaces rugueuses :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{44}$$

La distribution de hauteur des pics de la surface équivalente est l'écart type donné par :

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_{p1}^2 + \sigma_{p2}^2} \tag{45}$$

La surface somme combine à la fois les aspects microgéométriques des deux surfaces rugueuses 1 et 2 et la déformabilité des deux matériaux constituant ces deux surface. Ces différentes relations, basées sur les paramètres de la norme « Motifs – Ligne enveloppe supérieure (ISO NF 12085) » sont les suivantes :

$$R = R_1 + R_2 \tag{46}$$

$$W = W_1 + W_2 \tag{47}$$

$$SR = \sqrt{{SR_1}^2 + {SR_2}^2} \tag{48}$$

$$SW = \sqrt{{SW_1}^2 + {SW_2}^2} \tag{49}$$

$$AR = \frac{1}{2}(AR_1 + AR_2) \tag{50}$$

L'élasticité de la surface somme est donnée classiquement par E*, relation (5). Concernant la plasticité de la surface somme, les auteurs attribuent à cette surface somme la plus faible des deux valeurs de limite d'élasticité des matériaux des surfaces 1 et 2.

4. LES MODELES DE CONTACT ENTRE SURFACES RUGUEUSES

Nous pouvons constater, dans le paragraphe précédent, le très grand nombre d'études menées sur le contact lisse rugueux. En revanche, pour le contact rugueux sur rugueux, le nombre d'études liées à des démarches statistiques reste très limité et nous n'avons identifié que deux études dont les conclusions ne sont pas claires concernant la validité de l'hypothèse de surface somme. Ces deux articles vont être détaillés ci-après.

4.1. Modèle de Greenwood – Tripp

Greenwood et Tripp ont déterminé si le problème de contact pouvait être simplifié en supposant une seule des surfaces rugueuses ou si considérer les deux surfaces comme rugueuses introduisait de nouvelles caractéristiques [28]. Cette analyse est basée sur des propriétés de surface mesurées mais les prévisions théoriques n'ont pas été vérifiées expérimentalement.

La surface rugueuse est représentée par un tableau d'aspérités identiques mais de hauteur différente par rapport à un plan de référence (passant par la moyenne de la distribution des hauteurs) ce qui permet de s'affranchir de la moyenne de la distribution de hauteur. Les aspérités en vis-à-vis ne sont pas alignées, le contact réel se produit donc entre le bombé de deux sommets.

Soit $\phi(z)$ la distribution des aspérités et $y = f(\rho)$ la forme de chaque aspérité par rapport à son sommet avec ρ et y respectivement les distances horizontale et verticale par rapport au sommet (Figure 9). Pour qu'il y ait contact, la hauteur d entre les deux plan moyens doit être inférieure à la somme de ces hauteurs : $d < z_1 + z_2 - 2f\left(\frac{r}{2}\right)$. L'« interférence » au contact peut ainsi être définie : $w = z_1 + z_2 - 2f\left(\frac{r}{2}\right) - d$. Pendant le chargement, l'aire de contact A et la force verticale P dépendront uniquement de l'interférence w et du désalignement r. Les définitions de z_1, z_2, r et d sont données par la Figure 9.

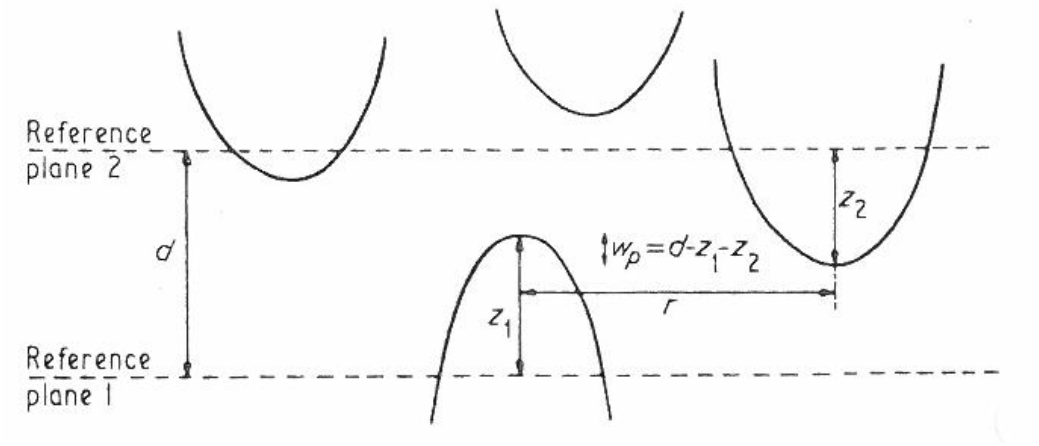


Figure 9 : Contact entre deux surfaces rugueuses

La valeur de la force sur la 1ère aspérité due à la seconde surface sera :

$$\int_{z_2} \int_{r} 2\pi\eta P(w,r)\phi(z_2) r \, dr dz_2$$

Avec η la densité de surface des pics des aspérités de chaque surface.

La force entre une paire d'aspérités avec des hauteurs données ne dépend pas des hauteurs individuelles z_1 et z_2 mais uniquement de leur somme ($z_1 + z_2$). En considérant la distribution des sommes des hauteurs comme la distribution de base $\phi_0(z)$ et en posant $z = z_1 + z_2$, la force totale entre les surfaces est alors :

$$P(d) = 2\pi\eta^2 \mathcal{A} \int_z \int_r P(w,r)\phi_0(z) r \, dr \, dz \qquad (51)$$

Avec $\mathcal{A}$ l'aire nominale de contact.

En analysant le contact entre une surface rugueuse et un plan à partir des relations ci-dessus, Greenwood et Tripp montrent que les seules différences entre une simple surface rugueuse et un plan et les deux surfaces rugueuses sont :

- Le remplacement des relations du contact simple par des relations généralisées trouvées en intégrant les relations précédentes sur tous les désalignements radiaux possibles
- Le remplacement de la distribution de hauteur des aspérités par la distribution de la somme des paires de hauteurs.

Les auteurs ont ensuite étudié deux modèles spécifiques l'un en élasticité, l'autre en plasticité en considérant des aspérités paraboloïdes. Ainsi $y = f(\rho) = \rho^2/2R$ avec R le rayon de courbure des aspérités. En utilisant la relation $z = s\,\sigma$, en déformation élastique, ils trouvent :

- $n = 4\pi(\eta R\sigma)\eta\mathcal{A}\,F_1(d/\sigma)$
- $A = \pi^2(\eta R\sigma)\,\mathcal{A}\,F_2(d/\sigma)$
- $P(d) = \frac{16\sqrt{2}}{15}\pi(\eta\,R\,\sigma)^2\,\mathcal{A}\,E^*(\sigma/R)^{1/2}\sigma_p{}^{3/2}\,F_{5/2}(d/\sigma)$

Avec $F_n(u)$ la fonction définie par (11).

En supposant que si la distribution des hauteurs d'aspérités est gaussienne avec un écart type σ_1, la distribution des sommes des hauteurs est également gaussienne avec un écart type $\sigma = \sigma_1\sqrt{2}$, les auteurs observent que la courbe représentant d/σ en fonction de la pression nominale diffèrent pour deux surfaces rugueuses par rapport à celle obtenue avec une surface équivalente contre un plan rugueux. Les deux courbes sont cependant parallèles et seule la séparation est réduite dans le cas de deux surfaces rugueuses. C'est un effet attendu du mésalignement possible des aspérités. La différence est plus importante si le contact considéré a lieu entre une surface rugueuse et un plan. Par contre, en échelle logarithmique, deux droites identiques sont obtenues pour l'aire de contact $A/\mathcal{A}$ en fonction de la pression nominale.

Pour des aspérités paraboloïdes, en déformation plastique, ils trouvent la relation suivante pour la force totale : $P(d) = \pi(\eta R\sigma)H\,\mathcal{A}\,F_1(d/\sigma)$ où H est la pression moyenne reliée à la dureté.

Les auteurs ont également étudié des aspérités coniques. Ils montrent que tant que la distribution des auteurs est gaussienne, le mode de déformation, la forme des aspérités et que les aspérités appartiennent à l'une ou l'autre surface, importent peu.

Greenwood et Tripp ont étendu le modèle de Zhuralev (1940) pour des aspérités non alignées et ont montré que le mésalignement conduit à une relation quasi proportionnelle entre l'aire de contact et la force à savoir $A \propto P^{12/13}$.

Leur conclusion majeure est que n'importe quel modèle de contact entre surfaces rugueuses peut être simulé par un modèle dans lequel une seule des surfaces est rugueuse.

4.2. Modèle de Yamada et al.

Yamada et al. [29] posent les hypothèses suivantes pour leur modèle :

- Les aspérités des surfaces rugueuses sont sphériques au moins à proximité de leur sommet et ont un rayon de courbure constant.
- Quand le haut des aspérités est projeté sur un plan parallèle à la surface, les points projetés sont distribués aléatoirement sur ce plan et aucune interférence ne se produit entre aspérités voisines.
- Le mécanisme de déformation de l'aspérité obéit à la théorie de Hertz et n'est pas influencé par la force de frottement agissant sur les contacts.

Les auteurs commencent par étudier le contact entre une surface rugueuse et un plan lisse en se basant sur le modèle GW puis entre deux surfaces rugueuses (Figure 10).

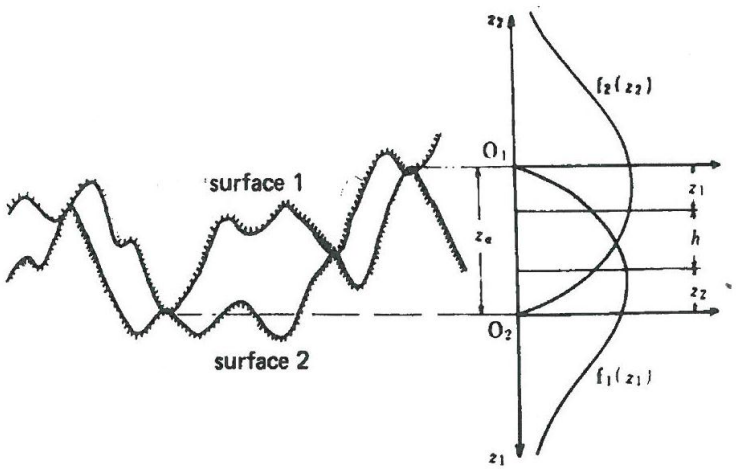


Figure 10 : Contact entre deux surfaces rugueuses [29]

Ils déterminent ainsi :

- la force normale (Figure 11) :

$$W = \frac{16\pi}{15} E^* \mathcal{A} \eta_1 \eta_2 (R_1 R_2 R_t)^{\frac{1}{2}} \int_0^{z_a} \int_0^{z_a - z_1} (z_a - z_1 - z_2)^{\frac{5}{2}} f_1(z_1) f_2(z_2) dz_2 dz_1 \quad (52)$$

Avec $R_t = R_1 + R_2$

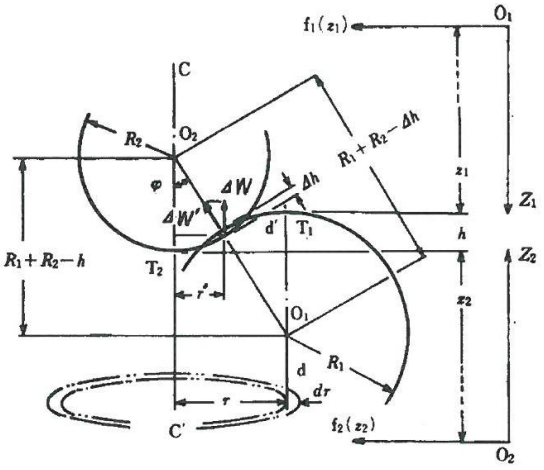


Figure 11 : Force normale produite par le contact entre des aspérités sphériques [29]

- La force de frottement (Figure 12) :

$$F = \pi^2 \mathcal{A}\, s\, \eta_1 \eta_2 R_1 R_2 \int_0^{z_a} \int_0^{z_a - z_1} (z_a - z_1 - z_2)^2 \, f_1(z_1) f_2(z_2) dz_2 dz_1 \qquad (53)$$

s : résistance au cisaillement dans l'aire de contact

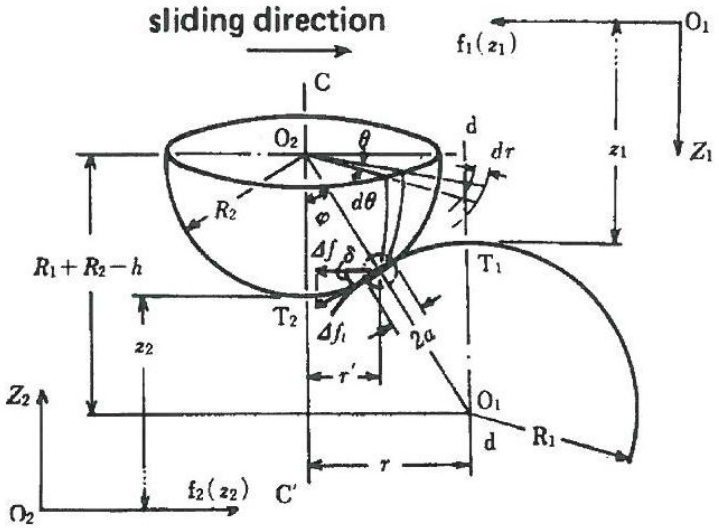


Figure 12 : Force de frottement produite par le contact entre deux aspérités sphériques [29]

- L'aire réelle de contact :

$$A = \pi^2 \mathcal{A}\, \eta_1 \eta_2 R_1 R_2 \int_0^{z_a} \int_0^{z_a - z_1} (z_a - z_1 - z_2)^2 \, f_1(z_1) f_2(z_2) dz_2 dz_1 \qquad (54)$$

- Le nombre de points de contact :

$$F = 2\pi\mathcal{A}\ \eta_1\eta_2 R_t \int_0^{z_a} \int_0^{z_a - z_1} (z_a - z_1 - z_2)\, f_1(z_1) f_2(z_2) dz_2 dz_1 \qquad (55)$$

f(z) la fonction densité de probabilité est calculée en utilisant :

- soit une distribution normale :

$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} exp\left\{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2}\right\} \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } f(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

- soit une distribution de Rayleigh, distribution réelle des hauteurs d'aspérités :

$$f(t) = \frac{t}{k^2} exp\left(-\frac{t^2}{2k^2}\right) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } f(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Où $k = \left(\frac{2}{4-\pi}\right)^{1/2}$

Ils observent alors que l'aire réelle de contact et le nombre de points de contact sont approximativement proportionnels à la charge mais que l'aire moyenne d'un point de contact et la pression moyenne des aires de contact réelles sont pratiquement indépendantes de la charge. Les valeurs expérimentales sont qualitativement en bon accord avec les valeurs calculées avec la distribution de Rayleigh dans le domaine des charges élevées. La valeur de la résistance en cisaillement à partir de la loi normale est supérieure à celle calculée à partir de la loi de Rayleigh dont les valeurs sont plus proches de celles obtenues par Bowden et Tabor.

5. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

L'analyse de la bibliographie dédiée aux modélisations statistiques de contact entre surfaces rugueuses met en lumière différents éléments.

Le premier point important concerne le rôle central indiscutable de la modélisation GW qui malgré ses hypothèses simplificatrices (rayon constant sur les aspérités, déformation élastique et microgéométrie isotrope) se révèle malgré tout, semble-t-il, très pertinente en terme de prédiction de la répartition des efforts dans le contact. En effet, les très nombreuses études réalisées depuis en relâchant certaines hypothèses montrent des résultats relativement voisins de ceux du modèle GW originel comme l'illustrent bien les courbes comparatives

entre les différents modèles établies par Carbone et al. [3]. Ceci reste vrai en particulier pour le rayon des aspérités, le mode de déformation et l'anisotropie des microgéométries.

Curieusement nous avons recensé peu d'études portant sur la validité de l'hypothèse de surface somme, et sur les stratégies de détermination de la surface somme à partir des deux surfaces en contact. Sur les deux articles présentant les approches statistiques du contact rugueux sur rugueux, un seul traite de comparaison et conclut, après une discussion très rapide, sur l'équivalence parfaite entre rugueux sur rugueux et lisse sur somme. L'autre article malheureusement ne porte pas sur la comparaison entre rugueux / rugueux et lisse sur surface somme mais discute la pertinence de la nature des lois de distribution des sommets. Dans le même ordre d'idée, peu d'études traitent de la méthodologie d'association des rugosités des deux surfaces pour déterminer la microgéométrie de la surface somme.

L'objectif de notre travail sera de tenter de combler ces lacunes en comparant les deux approches : rugueux sur rugueux, et lisse sur somme. Les résultats relativement divergents entre ces deux approches nous amèneront à proposer de nouvelles méthodes pour identifier une surface somme qui permet un meilleur accord.

CHAPITRE 2. DEMARCHE

Une des principales conclusions de l'étude bibliographique détaillée dans le chapitre précédent est que l'analyse du contact entre surfaces rugueuses est quasi – systématiquement remplacée par le contact entre une surface lisse souvent rigide et une surface somme qui associe les rugosités et les propriétés mécaniques de chacune des deux surfaces. L'hypothèse d'équivalence entre ces deux situations est unanimement admise et diverses stratégies d'association des rugosités sont proposées sans véritablement avoir été validées de manière rigoureuse.

Le travail que nous proposons consiste à travailler sur l'analyse de cette éventuelle équivalence entre le contact rugueux – rugueux et le contact lisse – surface somme. Pour ce faire nous adopterons une démarche relativement simple (Figure 13) qui consistera à analyser, dans un premier temps, le contact rugueux sur rugueux. Ensuite, avec les même hypothèses, nous analyserons le contact lisse – surface somme. La comparaison des deux situations, avec les différentes stratégies d'association des surfaces, permettra d'identifier, dans un premier temps, le domaine de validité de l'hypothèse de surface somme. Les points de divergence obtenus avec les modèles conventionnels de surface somme nous amèneront à proposer quelques améliorations du concept de surface somme.

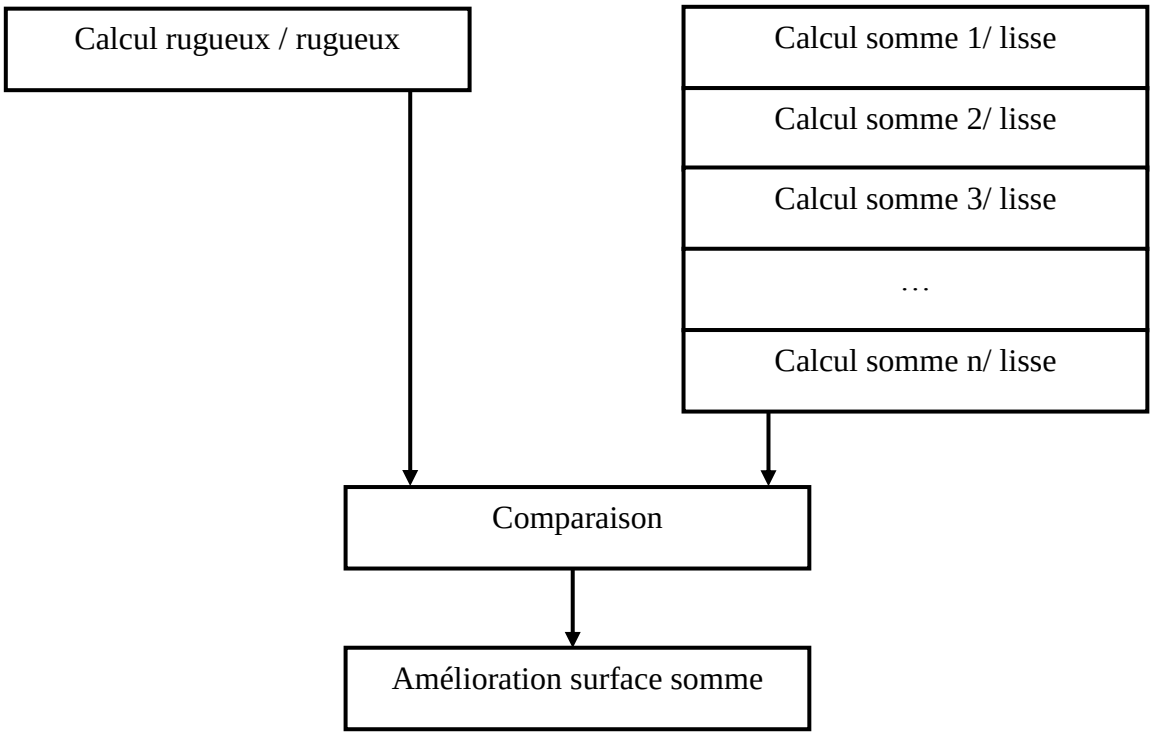


Figure 13 : Démarche de travail

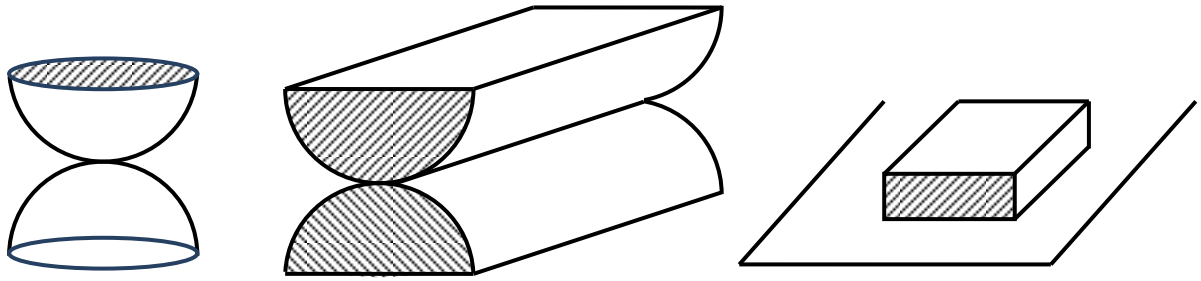
Avant de détailler cette démarche au paragraphe 2, compte tenu de la grande diversité de situations de contact entre surfaces rugueuses, nous allons préciser le périmètre de l'étude proposée.

1. PÉRIMÈTRE DE L'ÉTUDE

Dans ce paragraphe nous allons présenter la macrogéométrie du contact étudié, le type de microgéométries retenu et le mode de déformation des aspérités considéré.

1.1. Macrogéométrie

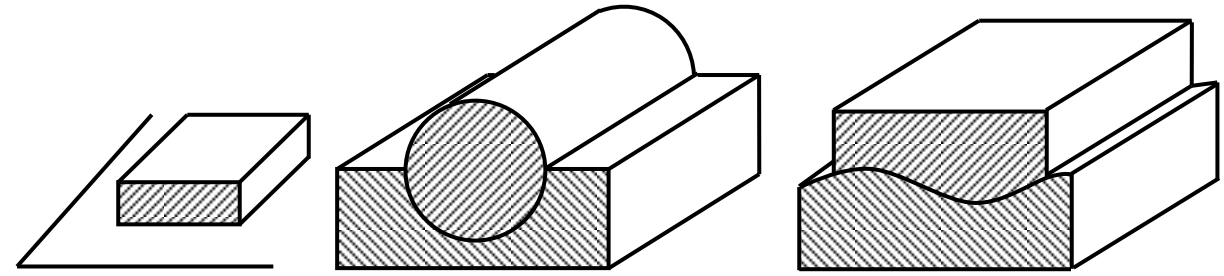
Il est usuel de distinguer trois types de macrogéométrie de contact : ponctuel, linéique et surfacique (Figure 14).



a-ponctuel b-linéique c-surfacique

Figure 14 : Types de macrogéométrie de contact

Le type de contact est identifié en analysant l'entendue du contact lorsque les deux pièces sont appliquées l'une sur l'autre, et ce en négligeant la microgéométrie, et sans aucune déformation des deux géométries. **Dans ce travail, nous nous limiterons au contact surfacique entre surfaces planes**, étant entendu que le contact surfacique peut s'appliquer à des géométries quasi quelconques à condition que les deux surfaces s'imbriquent parfaitement (Figure 15).



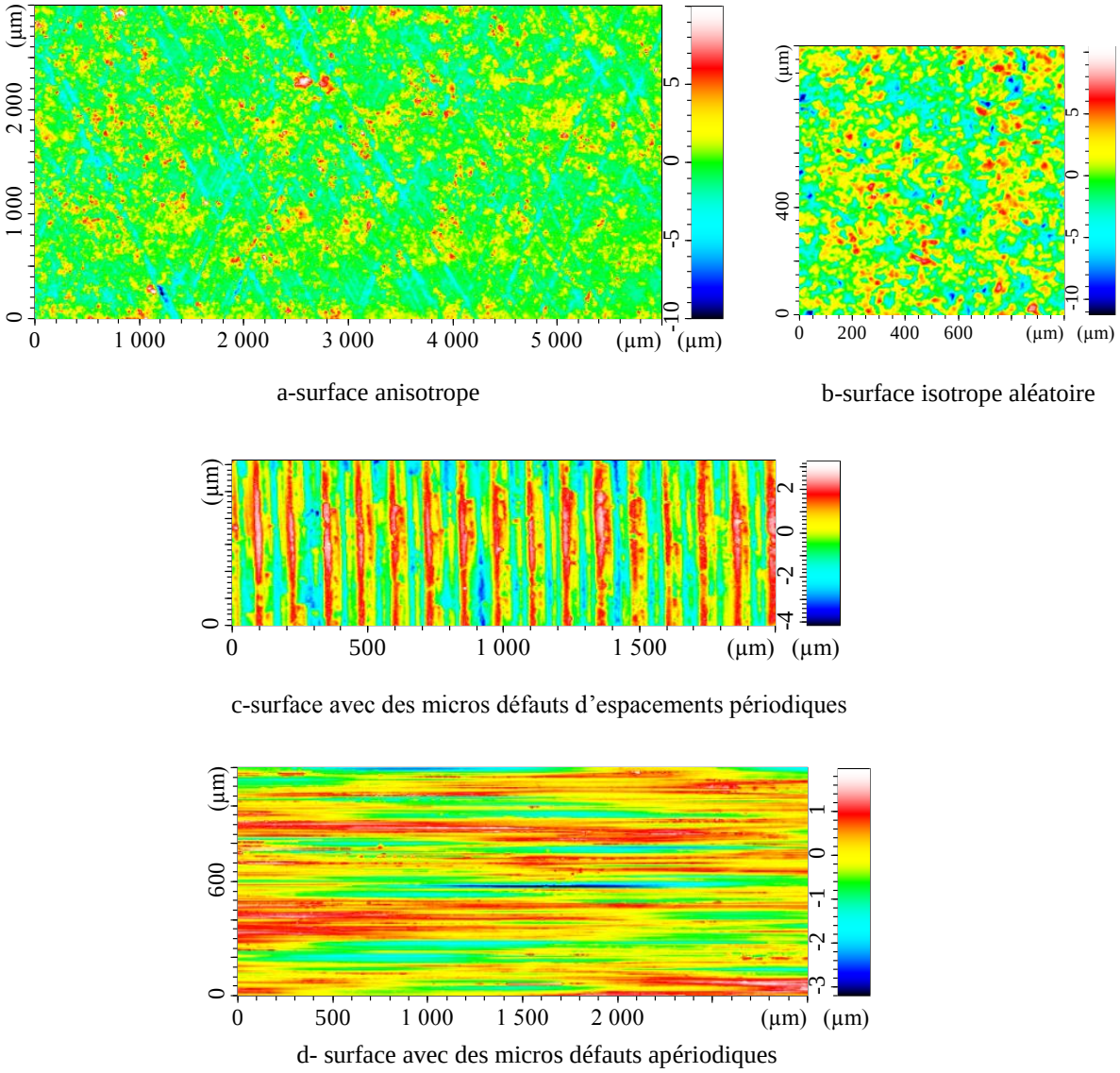
a - contact plan sur plan b - contact entre cylindres c - contact entre surfaces quelconques

Figure 15 : Contact surfacique entre surfaces planes

1.2. Aspect microgéométrique

Comme nous pouvons le constater sur les différents exemples de microgéométrie présentés dans la Figure 16 suivante, la microtopographie d'une surface réelle peut être très variée, et ce à différents niveaux :

- L'anisotropie,
- L'aspect multi échelle des micros défauts rencontrés.
- Le caractère aléatoire



a-surface anisotrope

b-surface isotrope aléatoire

c-surface avec des micros défauts d'espacements périodiques

d- surface avec des micros défauts apériodiques

Figure 16 : Exemples de microtopographie de surfaces réelles

Dans le cadre de cette étude, nous aborderons uniquement la situation d'isotropie parfaite (Figure 17).

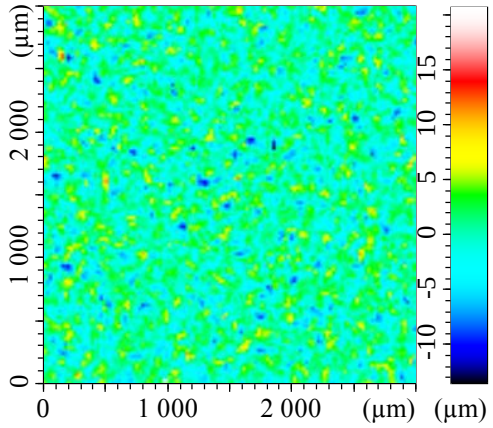


Figure 17 : Surface isotrope

L'aspect multi échelle est omniprésent dans les microgéométries réelles et il est d'ailleurs couramment admis de séparer les défauts en différentes échelles dont les dimensions sont normalisées (Figure 18) : forme, ondulation, microgéométrie, nanogéométrie.

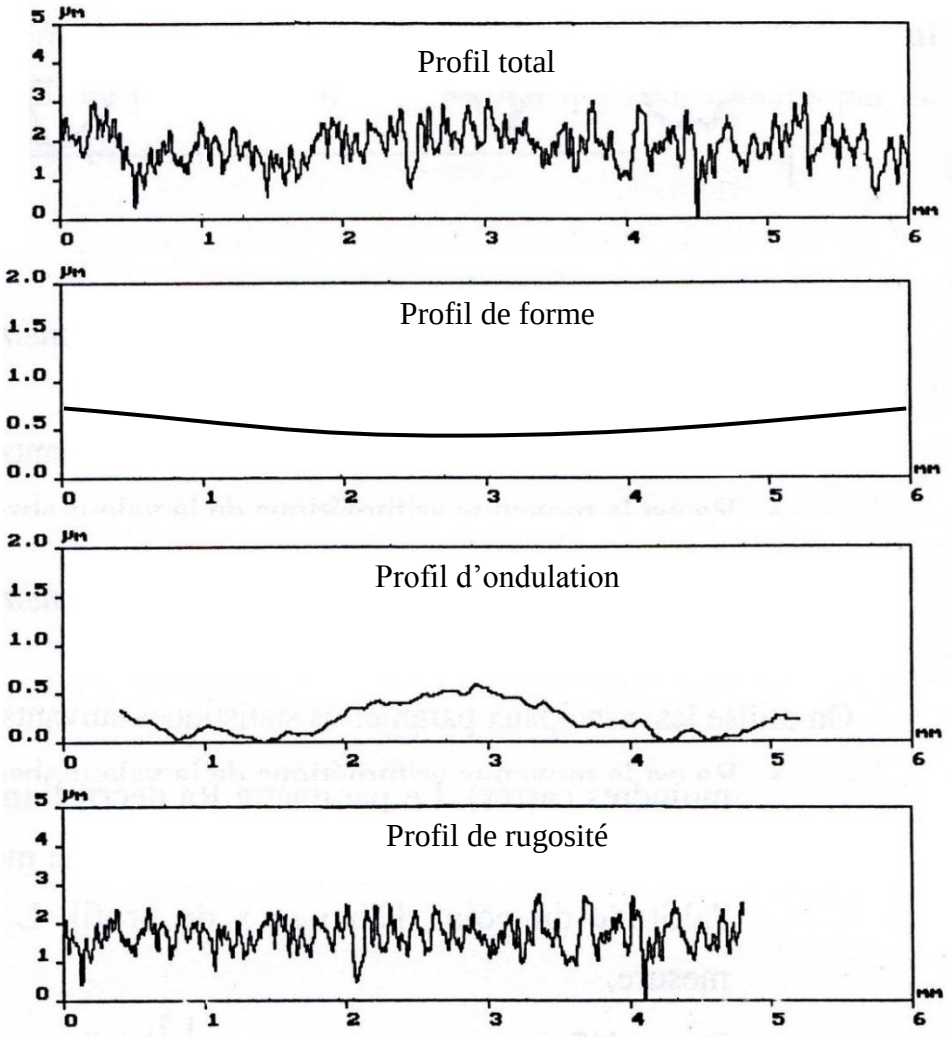


Figure 18 : Profil de la surface suivant différentes échelles d'après [30]

Dans le cadre de l'étude, nous ferons abstraction de ce caractère multi échelle en ne considérant que l'échelle microgéométrique (profil de rugosité). La surface rugueuse est donc approximée par une juxtaposition d'aspérités de forme arrondie (Figure 19) organisée autour d'un plan moyen (sans ajout de forme ou d'ondulation). De plus, les aspérités ont une forme définie exempte de micro relief.

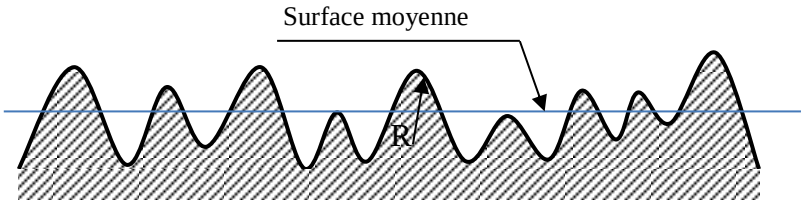


Figure 19 : Surface rugueuse avec des aspérités de forme arrondie

L'aspect aléatoire des microgéométries est incontournable. Il se traduit par des défauts de formes différentes, de tailles différentes et d'altitudes variables, chacun de ces éléments devant être décrit par des distributions statistiques plus ou moins étendues (Figure 20) suivant la répétabilité du processus de fabrication de la surface (usinage ou procédé sans enlèvement de matière).

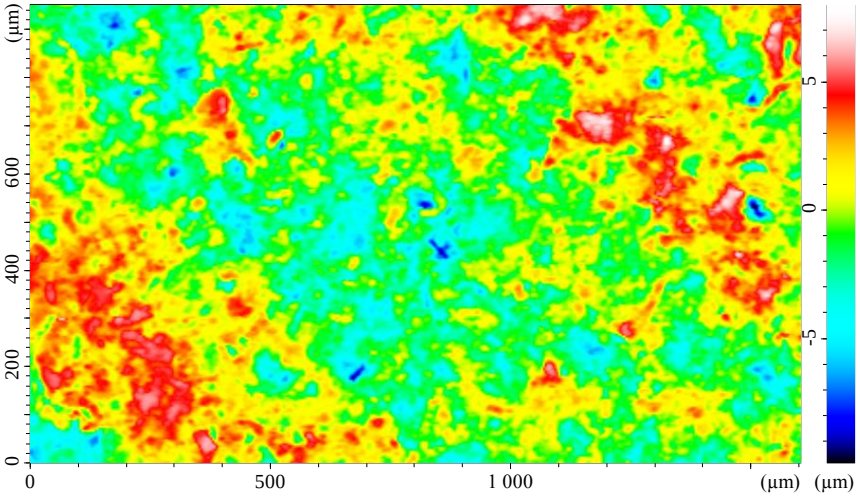
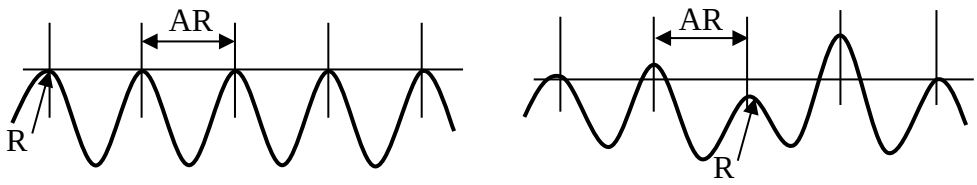


Figure 20 : Aspect aléatoire des microgéométries de la surface

Nous limiterons l'étude à des aspérités de forme circulaire, forme à laquelle il est d'ailleurs très souvent fait allusion dans la bibliographie en raison de la forme relativement arrondie des micro défauts de rugosité. Nous adopterons un rayon constant pour l'ensemble des aspérités d'une même surface ainsi qu'un espacement régulier entre les aspérités d'une même surface. Finalement, deux familles de microgéométries seront considérées (Figure 21) :

- Les microgéométries périodiques (schéma a de la Figure 21),
- Les microgéométries gardant des espacements réguliers mais ayant des altitudes d'aspérités aléatoires (schéma b de la Figure 21).



a - Microgéométries périodiques

b - Microgéométries d'aspérités d'altitudes aléatoires

Figure 21 : Familles de microgéométries étudiées

1.3. Mode de déformation

Le mode de déformation des aspérités est lui aussi relativement complexe. Comme il a été indiqué dans le chapitre bibliographique, même sous des sollicitations macroscopiques qui semblent faibles par rapport aux limites des matériaux, la localisation des contacts au niveau d'une faible fraction de la surface apparente de contact crée des concentrations de contraintes qui peuvent localement dépasser largement les limites du comportement élastique des matériaux. Les travaux les plus aboutis sur le contact rugueux prennent en compte la plastification des (micro) zones les plus chargées. Mais la gestion de modes de déformations multiples (élastique à plastique) étant déjà très complexe pour le contact lisse sur rugueux, nous avons dû nous limiter, pour l'étude du contact rugueux sur rugueux, à la prise en compte d'un mode de déformation unique. **Nous avons choisi le mode de déformation élastique qui reste valable pour les premiers stades de chargement.**

2. DEMARCHE D'ETUDE

Apres avoir détaillé le périmètre de l'étude, nous allons préciser maintenant les différentes étapes de l'étude de la validité de l'approximation de la surface somme.

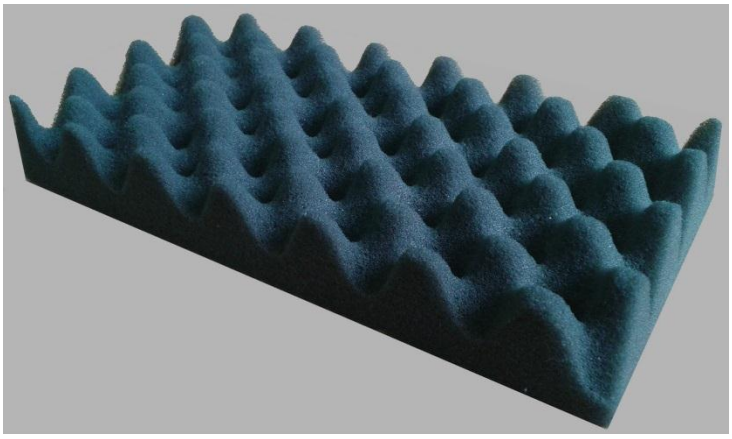
2.1. Etape 1 : Calcul du contact rugueux sur rugueux

Comme indiqué dans la partie bibliographique ce type de calcul a été peu abordé, d'une part en raison des complications de calculs qu'il introduit, et d'autre part en raison de la certitude, pour la plupart des auteurs, d'une excellente validité du concept de surface somme.

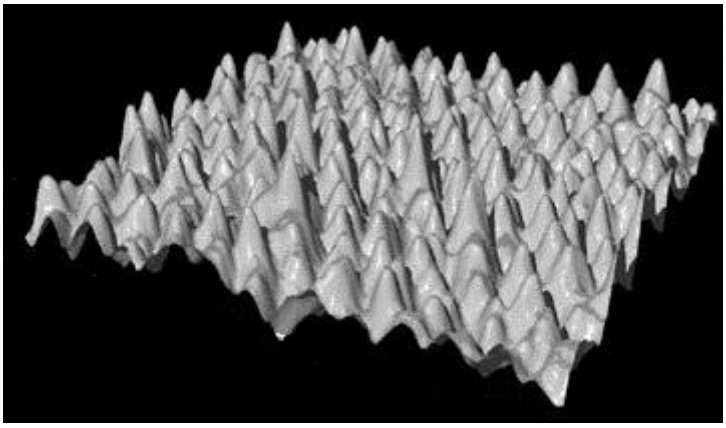
Le fait d'aborder des calculs novateurs nous a amené à traiter le sujet avec des microgéométries de complexité croissante ce qui a permis d'intégrer progressivement deux difficultés importantes des microgéométries : l'aspect 3D puis le caractère aléatoire.

La chronologie est illustrée en Figure 22 ci-dessous. Elle comprend successivement :

- L'étude sur deux lignes d'aspérités en contact. Cette approche se fera en considérant uniquement une rangée d'aspérités périodiques pour chaque surface. Cette situation associe les simplicités géométriques liées au calcul 2D et l'utilisation de surfaces périodiques.
- L'utilisation de surfaces périodiques isotropes. Les travaux sur ce type de surfaces permettent de lever les difficultés liées au passage 2D vers 3D.
- Le calcul avec des surfaces aléatoires 3D isotropes.



a) Surface périodique isotrope



b) Surface aléatoire isotrope

Figure 22 : Microgéométrie des surfaces étudiées

Les résultats obtenus avec chacune de ces géométries sont regroupés par chapitre : chapitre 3 pour l'approche 2D, chapitre 4 pour le 3D périodique et chapitre 5 pour le 3D aléatoire.

Il est évident que les deux premières familles de microgéométrie ont un faible intérêt pratique car elles restent assez éloignées de la microgéométrie réelle. En revanche, elles présentent un intérêt scientifique indiscutable en permettant de bien isoler et donc de caractériser les points essentiels du calcul rugueux sur rugueux.

2.2. Etape 2 : Calcul du contact surface somme sur lisse

Pour chaque famille 3D (périodique ou aléatoire), nous passerons en revue l'ensemble des possibilités d'association des deux surfaces rugueuses pour former la surface somme. Ces différentes options de surface somme seront injectées dans les lois de comportement existantes pour décrire le comportement du contact rugueux sur lisse. Dans un souci de comparaison objective avec les résultats du contact rugueux sur rugueux (étape 1), l'étude sera limitée aux formulations utilisant les mêmes hypothèses microgéométriques et mécaniques que celle utilisées pour le calcul rugueux sur rugueux réalisé en étape 1.

2.3. Etape 3 : Comparaison

La formulation rugueux sur rugueux (obtenue en étape 1) et les différentes options de formulation lisse sur somme (obtenues en étape 2) seront comparées, d'une part pour identifier la meilleure option, et d'autre part pour quantifier l'erreur commise en utilisant le concept de surface somme.

2.4. Etape 4 : Amélioration

Les écarts obtenus entre les deux formulations, même avec la meilleure version des concepts de surface somme, étant relativement importants dans une majorité de configuration, il nous a semblé intéressant d'optimiser le processus d'identification de la surface somme en se basant sur une méthodologie consistant à minimiser l'écart induit par la construction de la surface somme.

CHAPITRE 3. CONTACT ENTRE DEUX LIGNES D'ASPERITES PERIODIQUES

1. INTRODUCTION

Comme il a été évoqué dans le paragraphe méthodologique précédent, l'analyse du contact entre surfaces rugueuses quelconques est un objectif très difficile à atteindre en raison des difficultés de description de ces surfaces rugueuses quelconques et du peu d'études dédiées à un calcul entre deux surfaces rugueuses.

Dans ce chapitre, pour limiter au maximum les difficultés de description des surfaces, nous avons retenu le cas de deux lignes d'aspérités en contact ce qui permet d'utiliser une représentation profilométrique (Figure 23). De plus, nous retiendrons un profil périodique (espacements entre aspérités et altitudes des sommets constants).

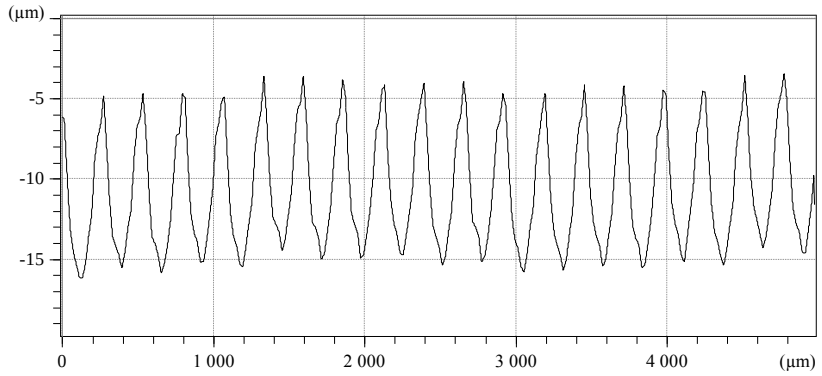


Figure 23 : Exemple de profil s'approchant du cas périodique

L'association de la possibilité d'avoir une approche 2D et la simplicité de la géométrie grâce à son caractère périodique va permettre de se concentrer dans ce chapitre sur les difficultés liées au traitement du problème rugueux sur rugueux.

Il est clair que ce type de géométrie est peu représentatif de surfaces réelles qui en général perdent à la fois le caractère 2D et le caractère périodique. Dans la suite du document, nous évoluerons vers des surfaces plus représentatives. Plus précisément, l'objectif des chapitres 4 et 5 sera justement de lever ces deux hypothèses de surface 2D et de microgéométries périodiques.

2. NOTATIONS UTILISEES POUR LES LIGNES D'ASPERITES

Pour des lignes d'aspérités périodiques comme celles présentées sur la Figure 23, nous avons retenu le paramétrage indiqué ci-dessous (Figure 24), basé sur 3 paramètres : la distance entre sommets consécutifs AR, le rayon R des aspérités, et l'amplitude h du profil.

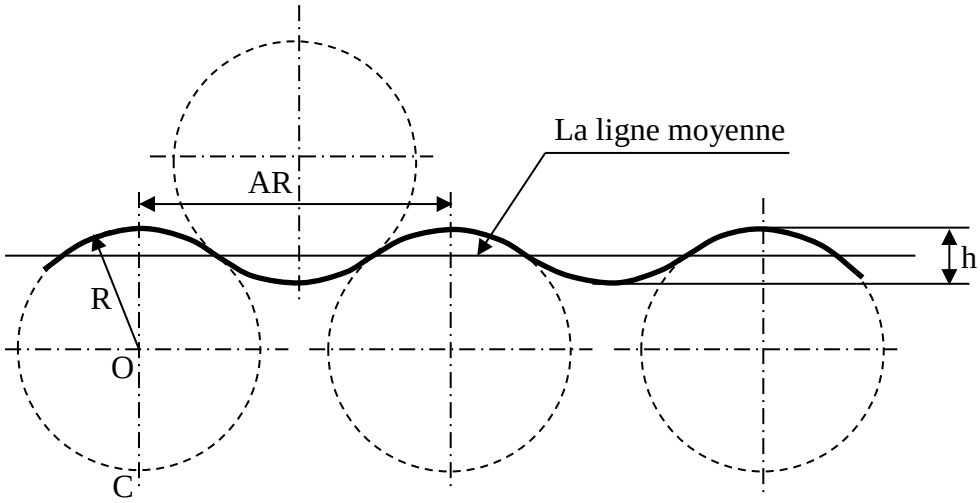


Figure 24 : Modèle géométrique de la ligne d'aspérité

Dans le cadre de cette étude, nous supposerons que le profil passant par le sommet de la ligne d'aspérités est constitué d'une continuité de cercles concaves et convexes tangents de même rayon R. Par ailleurs, toutes les aspérités ont même hauteur $d = \frac{h}{2}$ calculée à partir de la ligne moyenne (h est l'amplitude totale du motif).

On peut complètement déterminer les valeurs moyennes des espacements AR et les hauteurs des aspérités par mesures à l'aide d'un profilomètre. Cela correspond aux valeurs de AR et R/2 de la norme « Motifs-Ligne enveloppe supérieure » NF-ISO 12085.

Concernant la forme des aspérités, d'après les mesures sur surfaces réelles, on note que h << AR (pour la Figure 23 : h = 10 µm, AR = 250 µm).

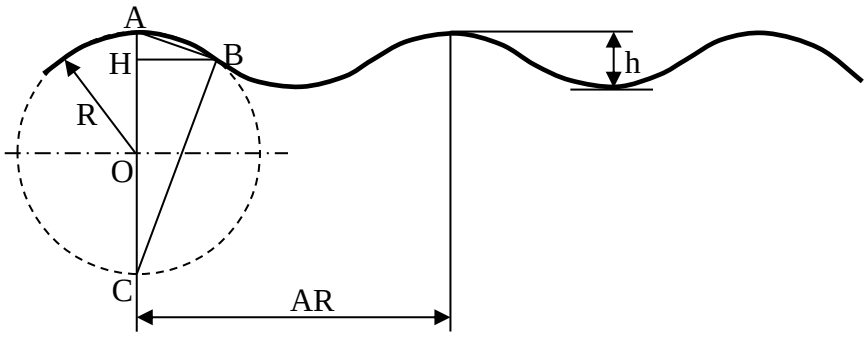


Figure 25 : Relation entre les paramètres du profil

En analysant la Figure 25, on constate que, dans le triangle ABC rectangle en B, l'existence de deux triangles semblables HAB et HBC nous permet d'établir les relations suivantes :

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HB}{HC} \Leftrightarrow \frac{h/2}{AR/4} = \frac{AR/4}{2R - h/2}$$

On note que h/2 est petit devant 2R donc, après élimination du terme infiniment petit, on obtient :

$$\boxed{R = \frac{AR^2}{16h}} \qquad (56)$$

Cette relation montre que les 3 paramètres proposés ne peuvent pas être choisis indépendamment les uns des autres.

3. NOMBRE DE CONTACTS ENTRE DEUX LIGNES D'ASPERITES

La problématique du contact entre deux lignes d'aspérités périodiques est présentée en Figure 26. On notera L_0 la longueur du contact. La ligne 1 aura $N_1 = L_0/AR_1$ aspérités et la ligne 2 aura $N_2 = L_0/AR_2$ aspérités.

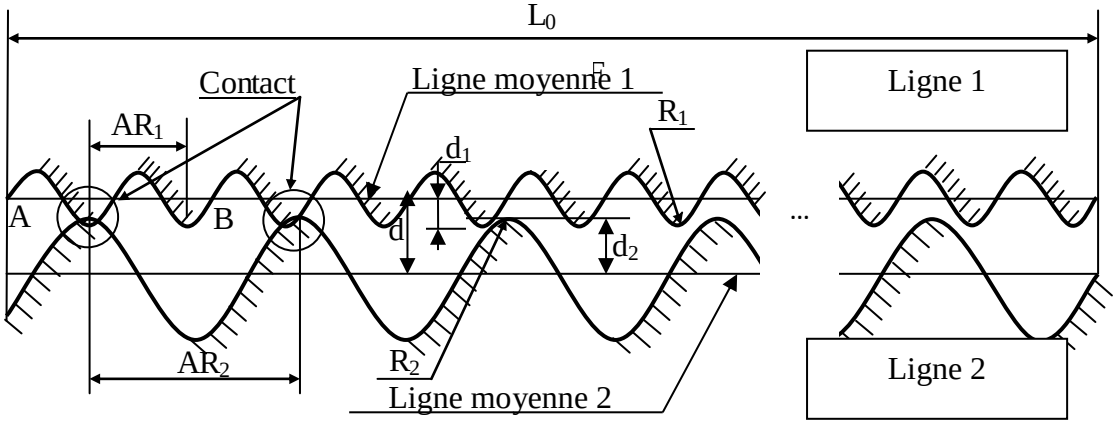


Figure 26 : Modèle de contact entre deux lignes d'aspérités périodiques

Les paramètres nécessaires pour caractériser cette ligne sont :

- R_i le rayon moyen des aspérités de la ligne i (i = 1 ou 2),
- AR_i l'espacement moyen des aspérités sur la ligne i (i = 1 ou 2),
- d la distance entre les lignes moyennes,

- d_i l'altitude des sommets de la ligne i (i = 1 ou 2) par rapport à la ligne moyenne ($d_i = h_i/2$).

Comme on ne considère ici que des aspérités périodiques, les aspérités de chacune des deux lignes sont à la même altitude. Néanmoins on constate, sur la Figure 26, que les contacts ne vont pas tous être identiques : ils vont être influencés par la distance latérale entre les sommets de deux aspérités en vis-à-vis (voir situations A et B de la Figure 26).

Nous allons proposer deux méthodes de calcul du nombre de contacts entre les deux lignes d'aspérités, l'une basée sur une approche statistique, l'autre basée sur une méthode déterministe.

3.1. Méthode statistique

Le principe de cette première détermination du nombre de contacts entre deux lignes d'aspérités périodiques consiste à prendre en compte ce décalage, que nous nommerons x, au moyen d'une méthode statistique. Pour une même interférence δ, la Figure 27 présente l'état du contact entre deux aspérités pour différentes valeurs de cette variable x. L'interférence δ est définie par : $\delta = d_1+d_2-d$ dans laquelle d, d_1, d_2 sont explicités sur la Figure 26.

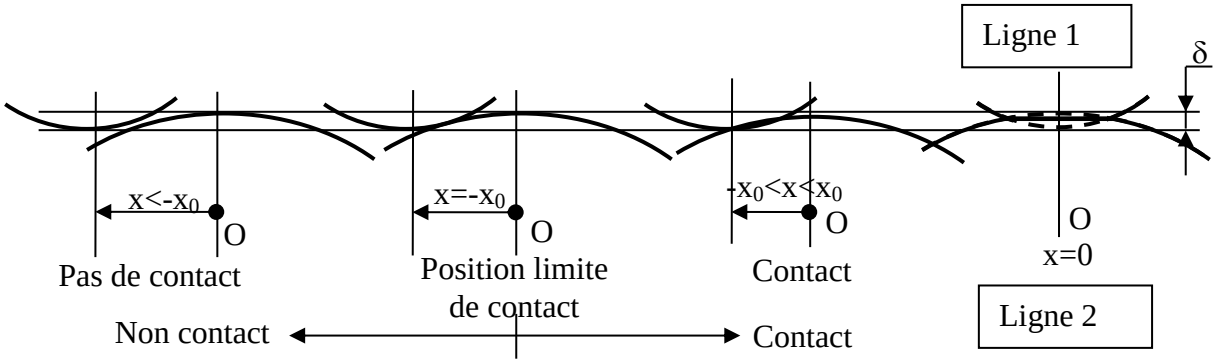


Figure 27 : Détail de l'état du contact entre deux aspérités

Par convention, on choisit l'origine du décalage au sommet de l'aspérité de la ligne 2 (ligne du bas) retenue. On constatera au niveau du résultat du calcul que le choix de cette convention est sans conséquence.

Pour une interférence δ donnée, le contact ne se produit que pour de faibles valeurs du décalage x entre deux aspérités. On définit x_0 comme étant la valeur de cette variable x qui correspond à la position limite de contact entre aspérités c'est-à-dire lorsque les deux aspérités

sont tangentes (Figure 27). En conséquence, bien que la distance x entre cette aspérité et l'aspérité de la ligne 1 la plus proche se situe dans l'intervalle allant de $-\frac{\mathrm{AR_1}}{2}$ à $+\frac{\mathrm{AR_1}}{2}$, le contact n'est obtenu que si $-x_0 \leq x \leq x_0$.

Pour identifier le nombre de contacts, nous proposons d'utiliser la fonction de distribution de cette variable x. On suppose que la variable x est uniformément répartie ; ceci correspond à des surfaces dé-corrélées l'une par rapport à l'autre. La densité de distribution de cette variable x vaut nécessairement $\frac{1}{\mathrm{AR_1}}$ (Figure 28). On rappelle que l'aire sous une fonction de densité de distribution doit être égale à l'unité.

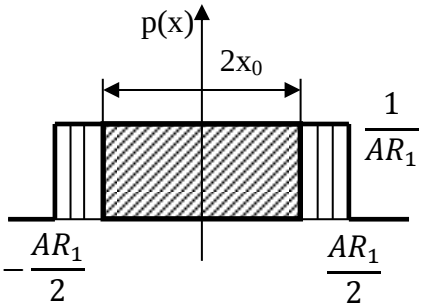


Figure 28 : Densité de distribution de la variable x

Compte tenu de cette distribution, la probabilité de contact ρ_2 d'une aspérité de la ligne 2 avec une aspérité de la ligne 1 vaut : $\rho_2 = \frac{2x_0}{\mathrm{AR_1}}$.

Le calcul vient d'être réalisé pour une aspérité de la ligne 2. Comme N_2 est le nombre total d'aspérités sur la ligne considérée, on en déduit le nombre de contacts entre les deux lignes d'aspérités :

$$N_s = N_2\rho_2 = \frac{2x_0N_2}{AR_1}$$

Comme $N_2 = L_0/AR_2$ on a donc :

$$N_s = \frac{2x_0L_0}{AR_1AR_2} \qquad (57)$$

On constate que l'écriture est symétrique en 1 et 2. Il reste à définir x_0.

La Figure 29 ci-après présente le début du contact paramétré par un décalage x_0 entre deux aspérités en vis-à-vis.

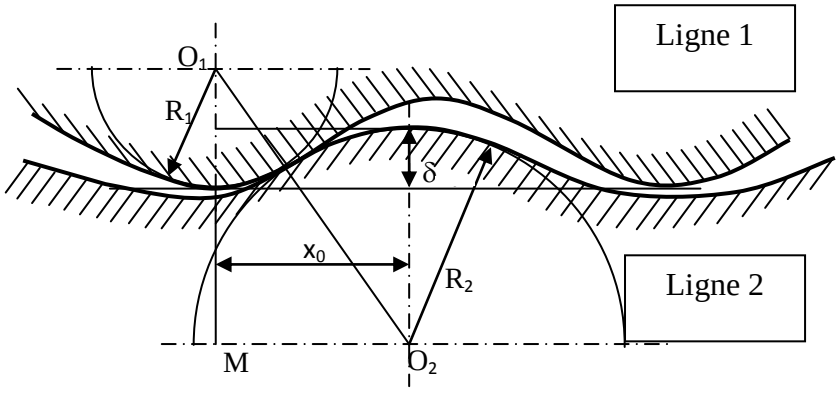


Figure 29 : Modèle géométrique pour déterminer x_0

En analysant la Figure 29, à partir du triangle O_1O_2M, on peut déterminer x_0 :

$$x_0 = O_2M = \sqrt{{O_1O_2}^2 - O_1M^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 + R_2 - \delta)^2}$$

Après élimination du terme infiniment petit δ par rapport à $2(R_1+R_2)$, on obtient :

$$x_0 = \sqrt{2\delta(R_1 + R_2)}$$

En remplaçant x_0 dans l'équation (57), on obtient le nombre total de contacts entre les deux lignes d'aspérités :

$$N_s = \frac{2\sqrt{2\delta(R_1 + R_2)}.L_0}{AR_1AR_2}$$

En remplaçant la valeur maximale d'écrasement δ par sa valeur $d_1 + d_2 - d$, on obtient alors :

$$\boxed{N_s = \frac{2\sqrt{2(d_1 + d_2 - d)(R_1 + R_2)}.L_0}{AR_1AR_2}} \quad (58)$$

Si on détaille le nombre de contacts ainsi déterminé, on observe que :

- Le nombre de contacts entre les deux lignes d'aspérités est proportionnel à la longueur de contact L_0 et inversement proportionnel à l'espacement AR_1 et AR_2 des aspérités sur les deux lignes, ce qui est relativement intuitif.

- Comme on s'y attendait, l'écriture du résultat est symétrique pour les deux lignes d'aspérités. Le fait de privilégier une ligne plutôt que l'autre au démarrage du calcul est sans conséquence sur le résultat final.
- De manière moins évidente, le nombre de contacts entre les deux lignes d'aspérités est proportionnel à la racine carrée de la somme des rayons ($R_1 + R_2$), ainsi qu'à la racine carrée de l'indentation.

Nous avons ainsi déterminé le nombre de contacts entre deux lignes d'aspérités. Cependant, ce résultat est conditionné par la réalité de l'hypothèse de distribution uniforme de la variable x. Par conséquent, nous allons nous orienter vers une autre méthode (n'utilisant pas cette hypothèse de distribution uniforme) pour analyser le poids de cette hypothèse, par comparaison des résultats obtenus avec les deux méthodes.

3.2. Méthode déterministe

La deuxième méthode pour calculer le nombre de contacts entre deux lignes d'aspérités est une méthode déterministe.

Nous nous fixons une origine donnée O correspondant au centre de la première aspérité de la ligne 2 (ici nous avons choisi la ligne 2, mais les résultats sont semblables en fixant une origine sur la ligne 1). La distance entre O et le centre de la première aspérité de l'autre ligne est ξ. Le modèle de contact entre les deux lignes est présenté Figure 30.

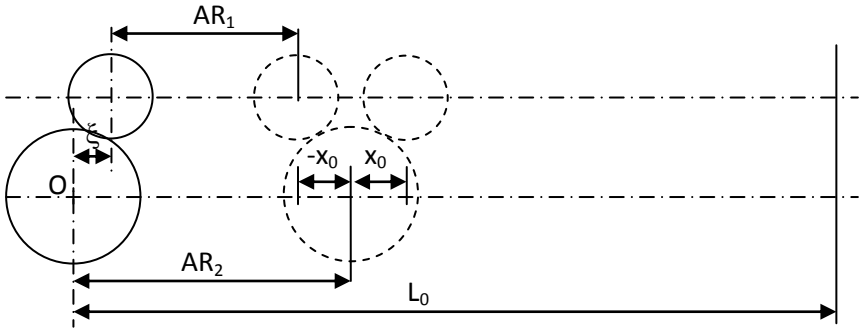


Figure 30 : Modèle de contacts entre les lignes d'aspérités

Avec le choix de l'origine, les sommets des aspérités de la ligne 2 sont positionnées aux abscisses $x_2 = k_2 AR_2$, ici $k_2 \in \mathbb{N}$ et les sommets des aspérités de la linge 1 sont positionnées aux abscisses $x_1 = \xi + k_1 AR_1$, $k_1 \in \mathbb{N}$.

Nous allons déterminer N_{d2}, le nombre de contacts entre les deux lignes d'aspérités en le détaillant aspérité par aspérité, sur la ligne 2 :

- Pour la première aspérité de la ligne 2, en utilisant les notations définies précédemment, nous devons considérer $k_2 = 0$. Il y a contact entre cette première aspérité de la ligne 2 et des aspérités de la ligne 1 s'il existe des valeurs de k_1 ($k_1 \in \mathbb{N}$) satisfaisant : $x_1 \leq x_0$ (Figure 31).

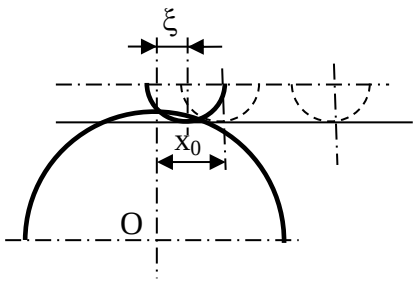


Figure 31 : Contacts avec une première aspérité de la ligne 2.

Le nombre de contacts entre la première aspérité de la ligne 2 et les aspérités de la ligne 1 est égal au nombre de racines entières (n_1) k_1 de l'inéquation suivante :

$$\xi + k_1 AR_1 \leq x_0 \Leftrightarrow k_1 \leq \frac{x_0 - \xi}{AR_1}$$

- Pour la deuxième aspérité de la ligne 2 (Figure 32) : $k_2 = 1$

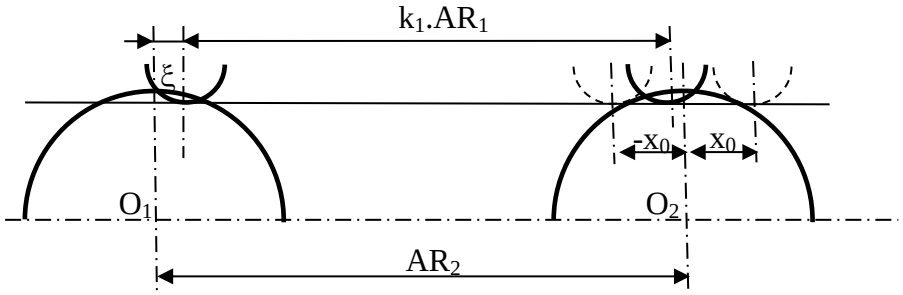


Figure 32 : Contacts avec la deuxième aspérité de la ligne 2

Il y a contact entre cette deuxième aspérité de la ligne 2 et des aspérités de la ligne 1 s'il existe des valeurs de k_1 ($k_1 \in \mathbb{N}$) satisfaisant :

$$AR_2 - x_0 \leq \xi + k_1 AR_1 \leq AR_2 + x_0$$

Le nombre de contacts entre cette deuxième aspérité de la ligne 2 et les aspérités de la ligne 1 est égal au nombre de racines entières (n_2) k_1 de l'inéquation suivante :

$$\frac{AR_2 - x_0 - \xi}{AR_1} \leq k_1 \leq \frac{AR_2 + x_0 - \xi}{AR_1}$$

- De manière générale, pour la i[ème] aspérité de la ligne 2 (Figure 33): $k_2 = i - 1$

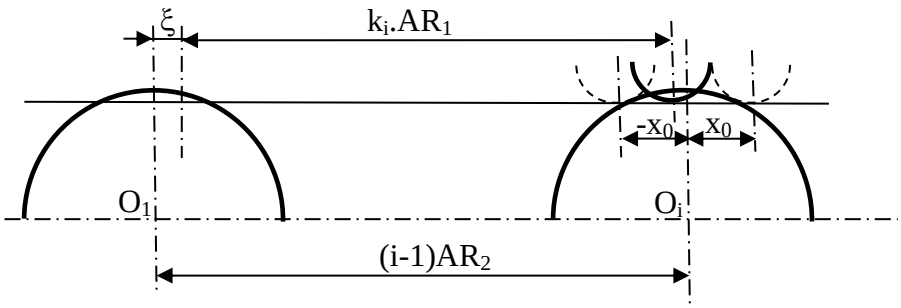


Figure 33 : Contacts avec la i-ème aspérité de la ligne 2

Il y a contact entre cette i[ème] aspérité et des aspérités de la ligne 1 s'il existe des valeurs de k_1 ($k_1 \in \mathbb{N}$) satisfaisant :

$$(i-1)AR_2 - x_0 \leq \xi + k_1 AR_1 \leq (i-1)AR_2 + x_0$$

Le nombre de contacts entre la i[ème] aspérité de la ligne 2 avec les aspérités de la ligne 1 est égal au nombre de racines entières (n_i) k_1 de l'inéquation suivante :

$$\frac{(i-1).AR_2 - x_0 - \xi}{AR_1} \leq k_1 \leq \frac{(i-1).AR_2 + x_0 - \xi}{AR_1}$$

En additionnant les valeurs de n_i, pour i allant de 1 à N_2 (N_2 nombre d'aspérités de la ligne 2), on obtient le nombre N_{d2} qui correspond au nombre de contacts entre deux lignes d'aspérités calculé par la méthode déterministe en choisissant la ligne 2 comme référence :

$$N_{d2} = \sum_{i=1}^{N_2} n_i \tag{59}$$

Dans laquelle :

$$n_i = \text{Partie entière}\left[\frac{(i-1).AR_2 + x_0 - \xi}{AR_1}\right] - \text{Partie entière}\left[\frac{(i-1).AR_2 - x_0 - \xi}{AR_1}\right]$$

Si on choisit la ligne 1 comme référence, le calcul est le même que ci-dessus et on obtient ainsi le nombre de contacts N_{d1} entre les deux lignes :

$$N_{d1} = \sum_{j=1}^{N_1} \mathrm{n_j} \tag{60}$$

Dans la formule (60), n_j est le nombre de racines entières k_2 de l'inéquation suivante :

$$\frac{(j-1).AR_1 - x_0 - \xi}{AR_2} \leq k_2 \leq \frac{(j-1).AR_1 + x_0 - \xi}{AR_2}$$

Soit :

$$\mathrm{n_j} = \text{Partie entière}\left[\frac{(j-1).AR_1 + x_0 - \xi}{AR_2}\right] - \text{Partie entière}\left[\frac{(j-1).AR_1 - x_0 - \xi}{AR_2}\right]$$

On constate que dans les diverses inégalités écrites, il n'y a pas de symétrie entre AR_1 et AR_2, ce qui ne permet pas de déduire une équivalence parfaite entre les deux calculs. De ce fait, nous avons utilisé des simulations pour vérifier la symétrie des résultats. L'implémentation de ces deux résultats sous Matlab nous permet de calculer le nombre de contacts N_{d1} et N_{d2} entre les deux lignes d'aspérités en se fixant les paramètres indiqués dans le Tableau 1 ci-dessous :

Tableau 1 : Valeurs des paramètres utilisés pour calculer le nombre de contacts

Paramètres imposés		**Valeur numérique**
Longueur de contact	L_0	100.10^{-3} m
Espacement des motifs de rugosité de la ligne 1	AR_1	100.10^{-6} m
Espacement des motifs de rugosité de la ligne 2	AR_2	(50 à 300).10^{-6} m
Distance de la position limite de contact à la position la plus intense	x_0	(5; 10; 15).10^{-6} m
Décalage entre deux premières aspérités de chaque ligne	ξ	(0 à 0,9).min[AR_1 , AR_2]

Du fait de la périodicité des surfaces, nous avons fait varier le décalage ξ de 0 à 0,9 fois la périodicité minimum entre les deux surfaces. Par ailleurs, nous avons choisi une valeur L_0 grande devant les valeurs de AR_1 et de AR_2 (près de 100 fois plus grande) de manière à être très représentatif sur le plan statistique. La ligne 1 a été fixée (AR_1=100μm) en privilégiant une valeur usuelle d'espacement d'aspérités sur les microgéométries. Par ailleurs, la ligne 2 pourra présenter des espacements variables entre aspérités (AR_2 compris entre 50 et 300 μm). Enfin, le résultat utilise comme dernière variable x_0, que nous avons choisie comprise entre 5 et 15 μm. Le nombre de contacts pour chaque combinaison de calcul correspond à la moyenne du nombre de contacts obtenu pour chaque valeur de ξ.

Dans un premier temps, nous avons comparé les résultats obtenus en prenant la ligne 2 comme référence (formule (59)) puis la ligne 1 (formule (60)). Après calcul, on obtient une équivalence parfaite entre les résultats de ces deux formules ; le choix de la référence n'a pas d'influence et le résultat semble symétrique entre les deux surfaces. Cette identité obtenue pour toutes les valeurs particulières testées (Tableau 1) doit probablement correspondre à une identité rigoureuse des deux expressions, ce qui doit se démontrer. Nous ne sommes pas parvenus à établir cette démonstration. On peut donc utiliser aussi bien la relation (59) que la (60) pour comparer le nombre de contacts avec celui obtenu par la méthode statistique. Dans le prochain paragraphe 3.3, on utilisera le résultat présenté dans la formule (59).

3.3. Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes

En raison de la symétrie des résultats, les calculs numériques ont été effectués en privilégiant une référence sur la ligne 2 (formule (59)). Nous les avons synthétisés sur la Figure 34 ci-après en paramétrant le résultat en fonction du rapport AR_2/AR_1 pour chacune des 3 valeurs de x_0 retenues.

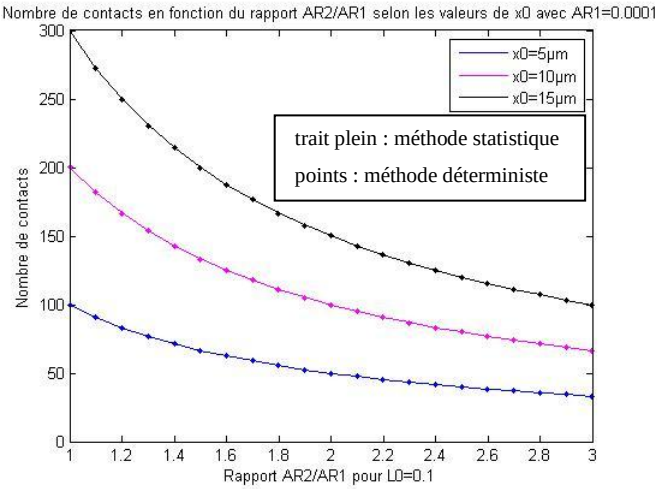


Figure 34 : Nombre de contacts suivant la valeur de x_0 pour les deux méthodes

La Figure 34 montre que les résultats des simulations et les valeurs données par l'approche statistique sont quasi-voisins avec des erreurs ne dépassant pas le pourcent. L'excellent accord entre les deux approches ne constitue pas une surprise pour des surfaces dé-corrélées ayant une distribution uniforme des écarts entre aspérités. En revanche, la surprise provient des surfaces corrélées, en particulier pour $AR_2/AR_1 = 1$. Dans ce cas, la Figure 35, ci-dessous, montre que l'écart latéral obtenu entre aspérités voisines est constant et dépend du décalage ξ. Si le décalage initial est nul, toutes les aspérités se touchent (Figure 35 de gauche). Si le décalage entre les premières aspérités en vis-à-vis empêche le contact, alors aucune aspérité n'est en contact avec la surface antagoniste (Figure 35 de droite). En conséquence, le nombre de contacts va dépendre, dans ce cas particulier, du décalage ξ.

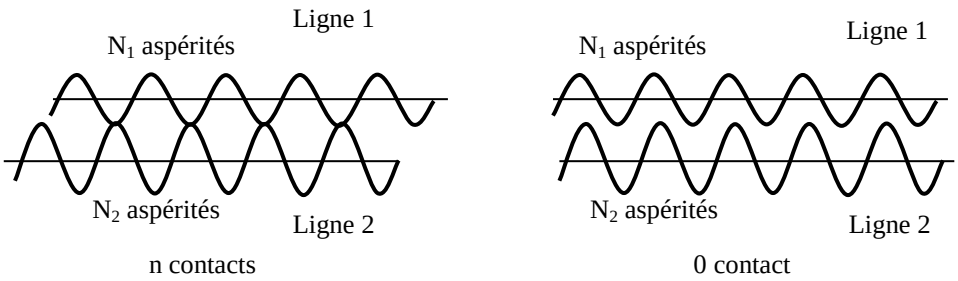


Figure 35 : Dépendance du nombre de contacts en fonction du décalage

Comme énoncé précédemment, le processus de calcul du nombre de contacts entre aspérités, par la méthode déterministe, fait une moyenne des nombres d'aspérités en contact obtenus avec des décalages variables entre 0 et 0,9 fois la périodicité la plus faible entre AR_1 et AR_2.

Examinons les résultats obtenus sur chacun des 10 décalages de 0 à 0,9AR_1, avec AR_2 variant de AR_1 à 3AR_1. Par commodité, nous avons choisi de ne représenter par une barre d'incertitude, que les valeurs extrêmes obtenues avec ces 10 décalages latéraux δ. On constate que les résultats obtenus sont extrêmement peu dispersés pour la majorité des situations testées puisque les barres d'incertitude ne sont mêmes pas visibles. Seuls quelques cas particuliers présentent des dispersions significatives. Il s'agit des profils corrélés (rapport entier ou multiple de 0,5). Dans le cas particulier $AR_2 = AR_1$ (Figure 36), il existe une variabilité très importante des nombres de contacts puisque l'on varie entre 0 et le nombre total d'aspérités (1000 dans notre cas).

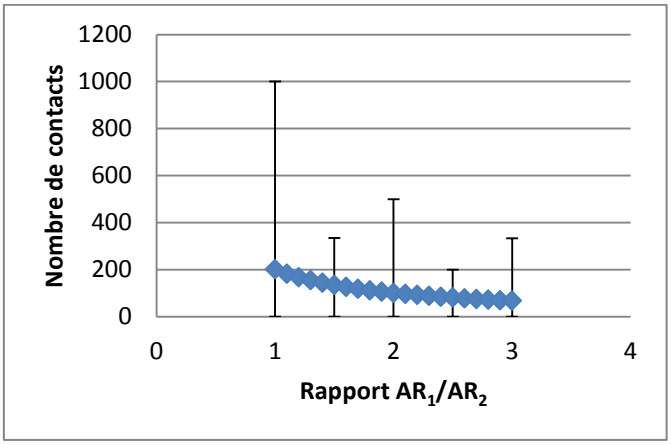


Figure 36 : Nombre de contacts en fonction du rapport AR_1/AR_2

Discussion : A titre de synthèse, les deux méthodes (statistique et déterministe) donnent des résultats identiques en terme de moyenne. L'hypothèse de distribution uniforme du décalage entre aspérité x semble admissible. Si l'approche statistique que nous avons proposée, est performante pour l'analyse de la valeur moyenne, elle ne décrit cependant pas la variabilité du nombre de contacts en fonction du décalage entre les surfaces. Notre objectif concernant l'évaluation du nombre moyen de contacts, nous privilégierons la méthode statistique pour calculer le nombre de contacts entre deux surfaces. Cette méthode servira notamment de base pour le calcul des cas plus complexes présentés aux Chapitre 4 et Chapitre 5.

4. FORCE TOTALE

Une position de contact avec interférence entre deux lignes d'aspérités correspond à l'existence d'un effort presseur qui est la somme des efforts existants sur les aspérités en contact dont nous avons quantifié le nombre dans les paragraphes précédents.

Pour calculer la force totale entre deux lignes d'aspérités (Figure 37) en plus des hypothèses détaillées précédemment, on pose les hypothèses suivantes :

- Les lignes sont séparées de d ;
- Le contact est statique et sans frottement : on assimile la normale au contact entre deux aspérités à la verticale ;
- Les aspérités voisines sont sans interaction l'une avec l'autre. La force sur un contact est calculée comme s'il était isolé du reste des contacts ;
- Les aspérités sont de forme sphérique de rayon R_i (i = 1 ou 2 suivant la ligne considérée, respectivement supérieure ou inférieure).

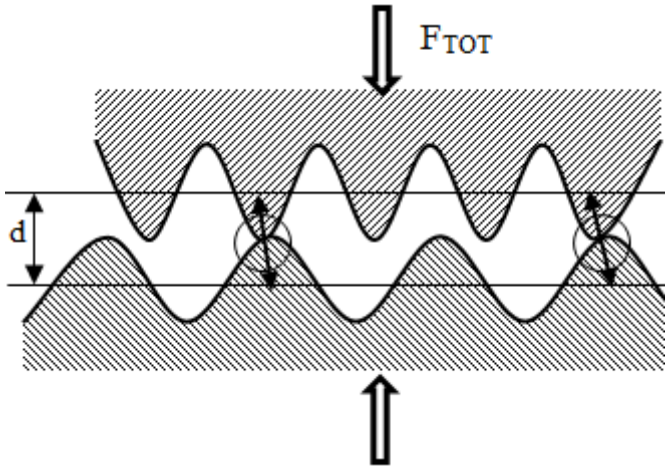


Figure 37 : Force entre deux lignes d'aspérités

Les forces vont intervenir sur les aspérités en contact (Figure 38).

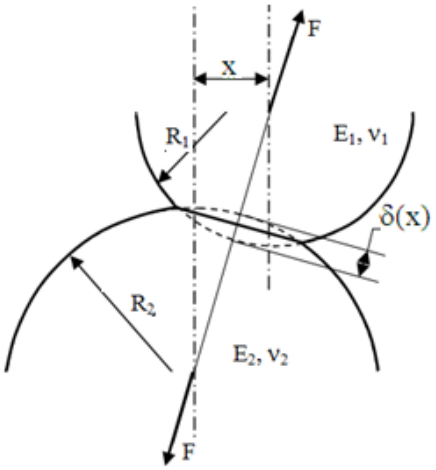


Figure 38 : Force entre deux aspérités

Comme dans le paragraphe précédent pour le calcul du nombre de contacts, on choisit l'origine du décalage au sommet d'une aspérité de la ligne 2 (ligne du bas). On constate que l'intensité de la force va être directement liée à la position x de l'aspérité. Cette variable x est comprise entre $-x_0$ et x_0, positions extrêmes des deux aspérités permettant de générer un effort normal. La valeur x = 0 correspond à une force maximale F (Figure 39).

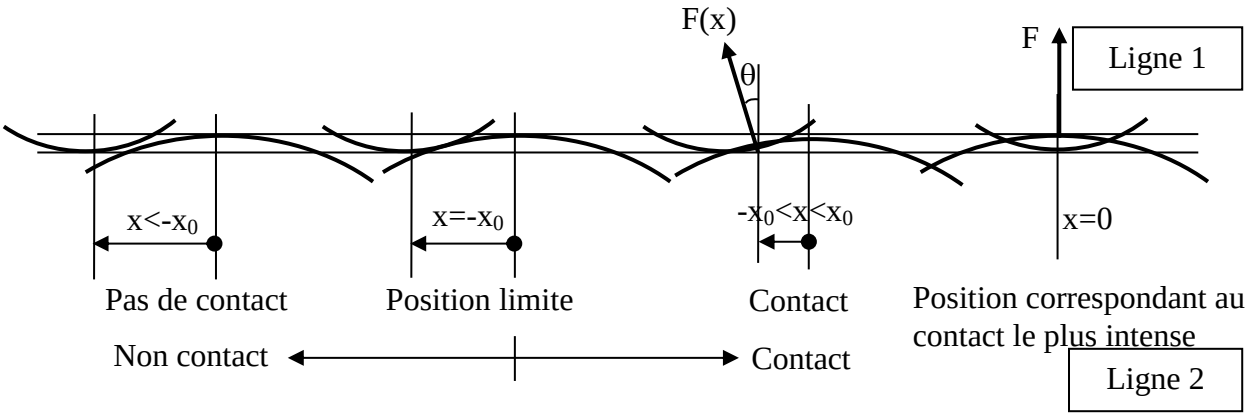


Figure 39 : Détail de la force entre deux aspérités

Intéressons-nous à un décalage latéral x quelconque. Suivant l'écart x entre les aspérités, comme énoncé ci-dessus, l'intensité du contact va donc varier. La direction de la force va également varier car, compte tenu de l'hypothèse de contact sans frottement, la force sera colinéaire à la droite reliant les centres des aspérités ; elle sera donc inclinée d'un angle θ. En admettant que les valeurs de décalage x sont très faibles devant les rayons des aspérités, les valeurs de θ (angle entre la direction de la force entre les deux aspérités et la direction verticale, Figure 39) vont rester faibles. On peut ajouter que la contribution de l'angle est un

terme du second ordre en θ. On peut donc négliger l'effet d'inclinaison et supposer que la direction de la force entre deux aspérités est toujours verticale. En utilisant la théorie de Hertz, on peut déterminer la force entre deux aspérités en contact [8] :

$$F(x) = \frac{4}{3} E^* R^{\frac{1}{2}} \delta(x)^{\frac{3}{2}} \tag{61}$$

Dans laquelle, E* est le module équivalent d'élasticité qui est défini par [7] au Chapitre 1, et que l'on rappelle ici :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} \tag{5}$$

R est le rayon équivalent moyen des aspérités [7] :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{44}$$

δ(x) est l'écrasement correspondant à chaque position de x, son calcul se fait par analyse purement géométrique. La Figure 40 présente une aspérité de la ligne 2 avec les différentes positions d'une aspérité de la ligne 1 représentées en pointillés ([31], [32]). On va considérer une position quelconque x : $-x_0 \leq x \leq x_0$.

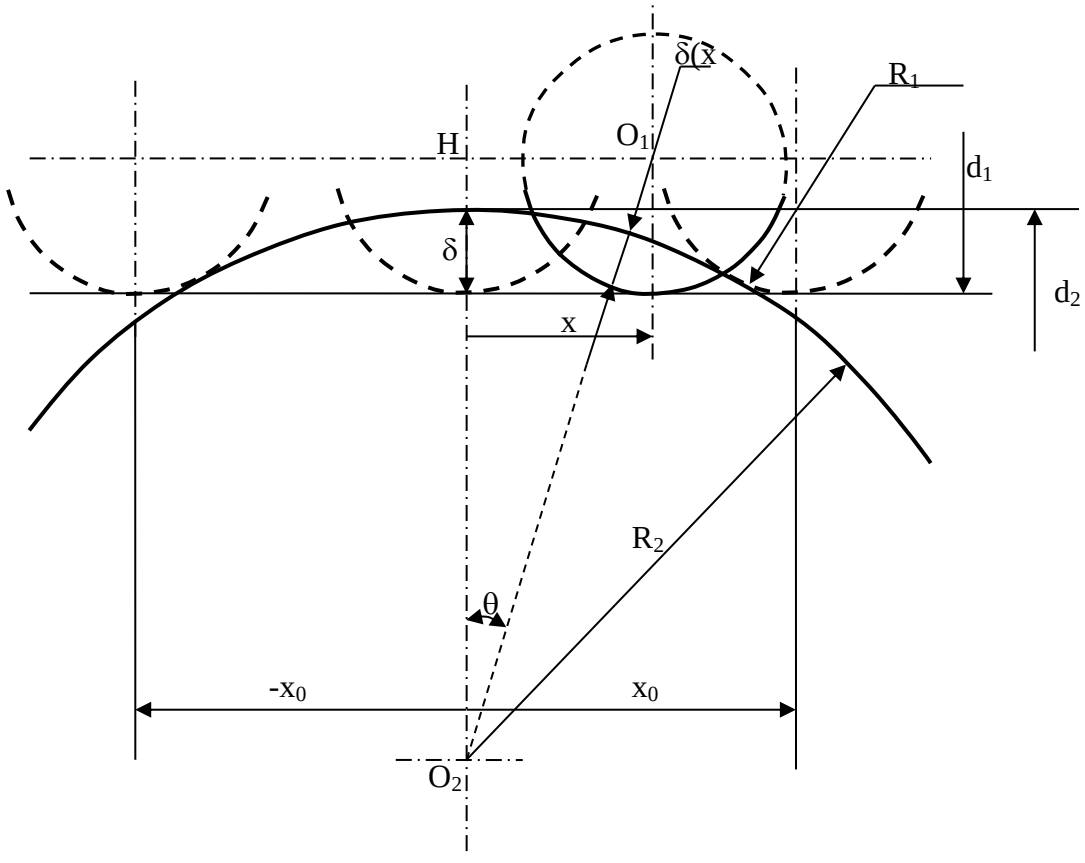


Figure 40 : Modèle géométrique pour calculer l'écrasement δ

La position est paramétrée par x ($-x_0 \leq x \leq x_0$). En considérant le triangle rectangle O_1O_2H, on peut écrire :

$$O_1O_2{}^2 = O_1H^2 + O_2H^2 \Leftrightarrow O_1O_2{}^2 = x^2 + O_2H^2$$

Soit : $[R_1 + R_2 - \delta(x)]^2 = x^2 + [R_1 + R_2 - \delta]^2$

Après élimination des termes infiniment petits $\delta(x)^2$ et δ^2 on obtient :

$$\delta(x) = \delta - \frac{x^2}{2(R_1 + R_2)} \tag{62}$$

La force entre deux aspérités en contact vaut alors :

$$F(x) = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (\delta - \frac{x^2}{2(R_1 + R_2)})^{3/2} \tag{63}$$

Nous avons vu que l'hypothèse de variable x uniformément répartie est parfaitement admissible même pour des périodicités corrélées. Cette distribution permet d'évaluer (Figure 41) la probabilité d'aspérités dans l'intervalle dx (zone hachurée sur la distribution).

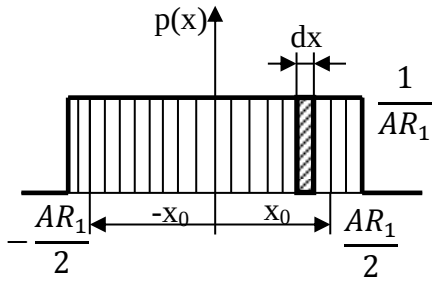


Figure 41 : Distribution des écarts latéraux entre aspérités

Si N_2 est le nombre total d'aspérités sur la ligne considérée, le nombre de contacts sur l'intervalle dx autour de la position x est :

$$dN = N_2 \frac{1}{AR_1} dx = \frac{L_0}{AR_1 AR_2} dx$$

Chacune de ces dN aspérités subit la force F(x). La force sur l'ensemble des aspérités en contact est obtenue par intégration sur l'ensemble des aspérités en contact, et est alors égale à :

$$F_{TOT} = \int_{-x_0}^{x_0} F(x) \frac{L_0}{AR_1 AR_2} dx = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (\delta - \frac{x^2}{2(R_1 + R_2)})^{3/2} \frac{L_0}{AR_1 AR_2} dx$$

$$= 2\int_0^{x_0} \frac{4}{3}\frac{L_0}{AR_1AR_2} E^* R^{1/2} (\delta - \frac{x^2}{2(R_1+R_2)})^{3/2} dx$$

Soit : $F_{TOT} = \frac{8}{3} E^* R^{1/2} \frac{L_0}{AR_1AR_2} \int_0^{x_0} \left(\delta - \frac{x^2}{2(R_1+R_2)}\right)^{3/2} dx = \frac{8}{3} E^* R^{1/2} \frac{L_0}{AR_1AR_2} . I$

Avec *I* ayant pour expression :

$$I = \int_0^{x_0} \left(\delta - \frac{x^2}{2(R_1+R_2)}\right)^{3/2} dx$$

Pour calculer cette intégrale, on pose : $a = \delta; b = \frac{1}{2(R_1+R_2)}$; et d'après (62), puisque $\delta(x_0) = 0 : x_0 = \sqrt{2\delta(R_1+R_2)}$

On obtient :

$$I = \int_0^{x_0} (a - bx^2)^{3/2} dx$$

L'intégration par partie de cette intégrale donne :

$$I = x(a - bx^2)^{3/2}\Big|_0^{x_0} - \int_0^{x_0} x\frac{3}{2}(a - bx^2)^{1/2}(-2bx)dx$$

$$\Leftrightarrow I = x_0(a - bx_0^2)^{3/2} - 3\int_0^{x_0} (a - bx^2)^{3/2} dx + 3a\int_0^{x_0} (a - bx^2)^{1/2} dx$$

$\Leftrightarrow I = x_0(a - bx_0^2)^{3/2} - 3I + 3aJ$

Avec $J = \int_0^{x_0} (a - bx^2)^{1/2} dx$

Posons $\sqrt{\frac{b}{a}}x = sint \rightarrow dx = \sqrt{\frac{a}{b}} costdt$

x=0→t=0

$x=x_0 \rightarrow t = arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}x_0$

$$J = \int_0^{x_0} (a - bx^2)^{1/2} dx = \sqrt{a}\int_0^{arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}x_0} cost\sqrt{\frac{a}{b}} costdt$$

$$J = \frac{a}{\sqrt{b}}\int_0^{arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}x_0} cos^2 tdt = \frac{a}{\sqrt{b}}\int_0^{arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}x_0} \frac{1 + cos2t}{2} dt$$

$$J = \frac{a}{\sqrt{b}}\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}sintcost\right)\Big|_0^{arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}x_0}$$

$$J = \frac{a}{\sqrt{b}}\left(\frac{1}{2}arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}x_0 + \frac{1}{2}x_0\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{1-\frac{b}{a}x_0^2}\right)$$

$$J = \frac{a}{2\sqrt{b}}arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}x_0 + \frac{1}{2}x_0\sqrt{a-bx_0^2}$$

On obtient ainsi :

$$I = \frac{1}{4}x_0(a-bx_0^2)^{3/2} + \frac{3}{8}ax_0(a-bx_0^2)^{1/2} + \frac{3a^2}{8\sqrt{b}}arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}x_0$$

Enfin, on trouve en remplaçant $\mathrm{a} = \delta; \mathrm{b} = \frac{1}{2(\mathrm{R_1}+\mathrm{R_2})}$; et $x_0 = \sqrt{2\delta(R_1+R_2)}$ par leur valeur :

$$I = \frac{3\delta^2\sqrt{2(R_1+R_2)}}{8}\arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{2(\mathrm{R_1}+\mathrm{R_2})\delta}}\sqrt{2\delta(R_1+R_2)}\right] = \frac{3\delta^2\sqrt{2(R_1+R_2)}}{8}\frac{\pi}{2}$$

Donc, la valeur de la force totale est:

$$F_{TOT} = \frac{8}{3}E^*R^{1/2}\frac{L_0}{AR_1AR_2}\left[\frac{3\pi\delta^2\sqrt{2(R_1+R_2)}}{16}\right]$$

$$\boxed{F_{TOT} = \frac{\pi}{2}E^*R^{1/2}\frac{L_0}{AR_1AR_2}\delta^2\sqrt{2(R_1+R_2)}} \quad (64)$$

Bien que les calculs aient été réalisés en donnant la priorité à la ligne 2 (ligne du bas), on observe, dans l'écriture du résultat, que les indices 1 et 2 sont symétriques. Le résultat aurait donc été identique si on avait fait le calcul sur la ligne 1 au lieu de la ligne 2.

5. ANALYSE DU GLISSEMENT ENTRE DEUX LIGNES D'ASPERITES

Le calcul précédent est réalisé en statique. Dans ce paragraphe on va analyser le glissement entre les deux lignes d'aspérités. On appelle v la vitesse de glissement supposée constante. Chaque aspérité d'une ligne voit passer périodiquement les aspérités de l'autre ligne. On suppose que la ligne 2 (en bas) est fixe (Figure 42). L'effort normal vu par chaque aspérité de la ligne 2 est périodique.

Pour ce calcul, on supposera de plus que les deux lignes d'aspérités restent en permanence séparées d'une distance d maintenue constante et que le glissement se fait à frottement nul. Comme nous pouvons le constater sur la Figure 42, le contact entre les aspérités est intermittent et nous nous proposons de déterminer les caractéristiques de l'évolution de l'effort entre aspérités en fonction du temps.

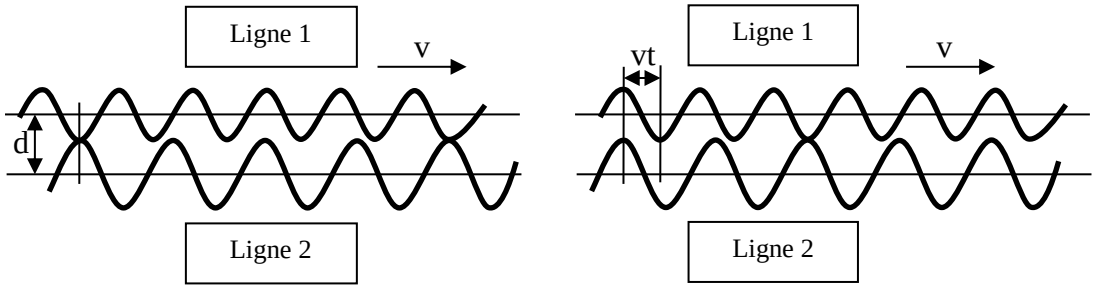


Figure 42 : Processus du glissement entre les deux lignes d'aspérités

Pour ce faire, nous allons considérer le glissement d'une aspérité de la ligne mobile 1 (traits en pointillés) sur une aspérité de la ligne 2 fixe (traits continus) (Figure 43).

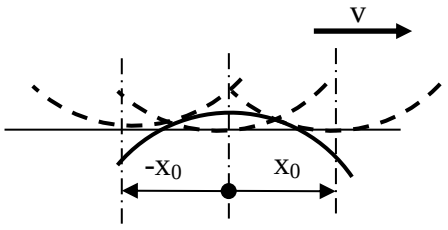


Figure 43 : Distance parcourue lors du contact

$2x_0$ étant la distance entre les positions extrêmes de contact, si Δt est la durée du contact entre aspérités, on a la relation : $\Delta t = \frac{2x_0}{v}$

L'intensité de la force maximale (Figure 44) correspond à deux aspérités en vis-à-vis (x = 0), cette force maximale vaut : $F_{max} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2}$

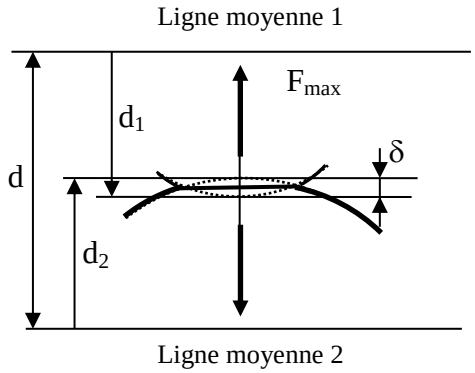


Figure 44 : Force maximale correspondant aux 2 aspérités en vis-à-vis

La valeur maximale du rapprochement entre deux aspérités, comme nous l'avons vu précédemment, vaut : $\delta = d_1 + d_2 - d$.

On obtient ainsi d'après (63) : $F_{max} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} [d_1 + d_2 - d]^{3/2}$

Le temps entre le passage de deux aspérités successives de la ligne 1 est déterminé par la formule : $T_2 = AR_1/v$.

En considérant une aspérité de la ligne 2, la chronologie des efforts qu'elle subit est donnée en Figure 45.

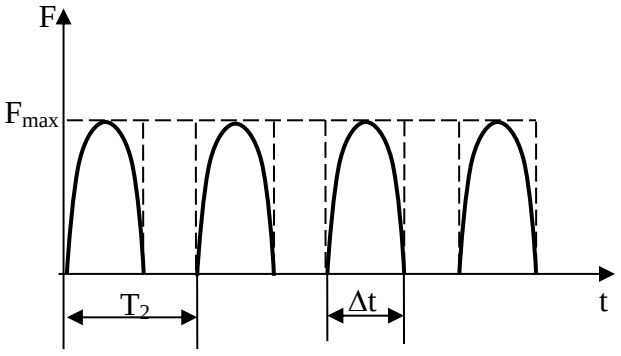


Figure 45 : Schéma de la force sur une aspérité de la ligne 2

De la même manière, chaque l'aspérité de la ligne 1 voit passer périodiquement les aspérités de la ligne 2 (Figure 46). L'effort normal vu par chacune des aspérités de la ligne 1 est périodique mais avec une périodicité différente de celle observée sur la ligne 2 :

$$T_1 = \frac{AR_2}{v}$$

Le temps de passage Δt sur l'aspérité et la force maximale F sont inchangés (principe de l'action sur réaction).

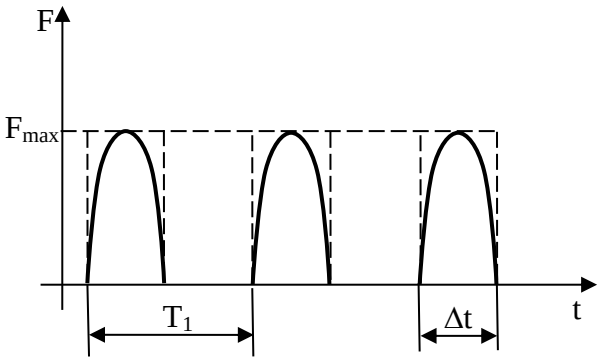


Figure 46 : Force sur une aspérité de la ligne 1

Discussion : La sollicitation a la même intensité sur les aspérités de chacune des deux lignes mais par contre le nombre de sollicitations va dépendre de la périodicité des aspérités de l'autre surface. Le mode de sollicitation des aspérités correspond à de la fatigue ondulée avec l'effort oscillant entre 0 et une sollicitation non nulle. Le niveau d'effort sur les deux surfaces est identique mais les endommagements de chacune des deux surfaces vont pouvoir être différents. **Les aspérités de la surface ayant la périodicité la plus grande seront sollicitées sur un plus grand nombre de cycles.**

6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié le contact entre deux lignes d'aspérités. Cette situation ne correspond pas à une situation réelle mais elle permet de montrer, grâce à un calcul simple (de type 2D), les aspects régissant la prise en compte des spécificités du calcul rugueux sur rugueux. En particulier nous avons déterminé le paramètre important dans le contact qui est x_0, distance limite entre les sommets d'aspérités antagonistes pour qu'il existe un contact. Cette valeur est liée au rayon des aspérités et au rapprochement entre les surfaces. Ce calcul sera également utilisé dans le prochain chapitre lors de l'étude du contact entre deux surfaces périodiques isotropes.

Ensuite, nous avons identifié le nombre de contacts entre deux lignes d'aspérités périodiques en faisant intervenir le décalage entre les sommets des aspérités en vis à vis par deux approches différentes : une méthode statistique et une méthode déterministe. Les résultats montrent que ces deux approches donnent les mêmes résultats. Dans les prochains

chapitres, nous n'utiliserons que la méthode statistique pour étudier le contact entre deux surfaces.

Avec les hypothèses données, nous avons également déterminé explicitement la force totale entre deux lignes d'aspérités. Ce calcul est intéressant car il montre l'influence des différents paramètres géométriques des deux surfaces (AR_1, AR_2, R_1 et R_2) et de leurs caractéristiques matériaux (E_1, E_2) ainsi que leur parfaite symétrie dans le résultat.

Nous avons ensuite analysé le glissement entre deux lignes d'aspérités périodiques puis déterminé la durée du contact entre deux aspérités (Δt), la valeur maximale (F_{max}) de la force sur chaque aspérité ainsi que le temps pour qu'une aspérité de cette ligne voit passer deux aspérités de l'autre surface. A titre de perspectives futures, ces résultats pourraient servir de base pour les calculs d'usure par fatigue des aspérités.

Les méthodes de calcul proposées vont pouvoir maintenant être appliquées aux surfaces et nous allons commencer, dans le chapitre 4 suivant, par l'analyse sur des surfaces isotropes périodiques.

CHAPITRE 4. CONTACT ENTRE DEUX SURFACES PÉRIODIQUES ISOTROPES

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons étendre les calculs entre deux surfaces rugueuses au cas du contact entre deux surfaces périodiques isotropes [31]. La particularité d'une surface isotrope périodique est de présenter, dans toutes les directions, un même espacement entre aspérités voisines (Figure 47). En conséquence, nous allons conserver les hypothèses utilisées pour les deux lignes d'aspérités dans le Chapitre 3 : pour chaque surface, les aspérités sont sphériques de même rayon R, de même hauteur h et l'espacement AR entre deux aspérités est constant, avec également la même relation (56) qui lie ces 3 paramètres :

$$R = \frac{AR^2}{16h}$$

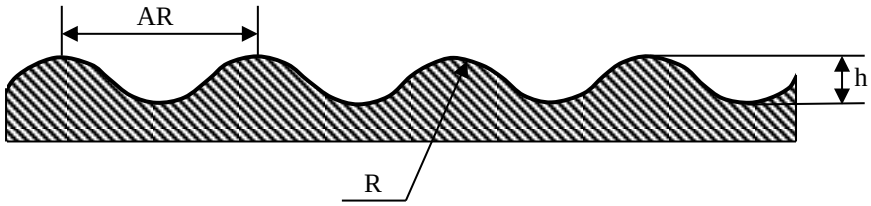


Figure 47 : Section d'une surface isotrope périodique.

Conformément à l'approche choisie, qui consiste à décrire la surface au moyen de la forme et de la position des aspérités, cette étude nécessite donc la connaissance de deux paramètres : la valeur du rayon des aspérités et l'espacement entre les aspérités puisque l'on suppose que les aspérités d'une même surface ont toutes la même altitude. Les paramètres des deux surfaces en vis-à-vis sont cependant, en général, différents.

2. CONTACT ENTRE DEUX SURFACES PERIODIQUES ISOTROPES

2.1. Description du contact entre deux surfaces périodiques

Dans le cas général d'un contact statique 3D, la position d'une aspérité de la surface supérieure par rapport à l'aspérité la plus proche de la surface en vis-à-vis n'est pas toujours identique (voir Figure 48). Nous utiliserons le même formalisme que celui du chapitre

précédent avec la surface 1 au-dessus et la surface 2 au-dessous. Le contact sera défini par le rapprochement δ entre les deux surfaces qui dépend de la distance entre les deux surfaces moyennes : $\delta = d_1 + d_2 - d$ (voir Figure 48). Par ailleurs, on notera A_0 l'étendue apparente du contact.

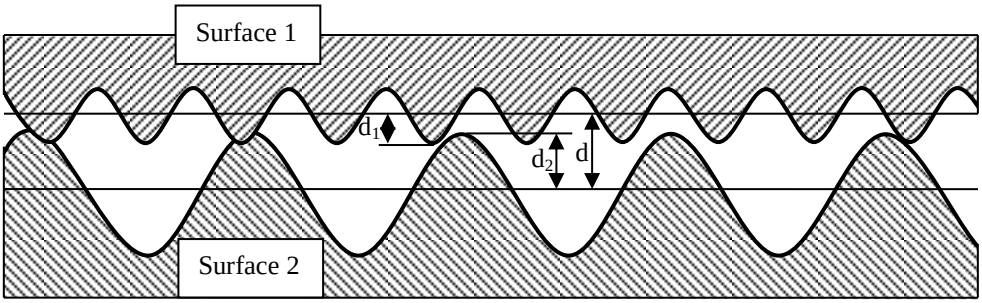


Figure 48 : Modèle du contact entre deux surfaces périodiques

En plus des hypothèses énoncées ci-dessus, d'autres hypothèses sont à prendre en compte dans ce chapitre : la distribution de l'espacement latéral entre aspérités de chaque surface est uniforme et les deux surfaces sont dé-corrélées.

2.2. Nombre de contacts

Avant de comptabiliser le nombre de contacts entre deux surfaces isotropes périodiques, considérons, dans le cas général de deux surfaces ayant des paramètres microgéométriques différents, la position spatiale de leurs sommets (Figure 49).

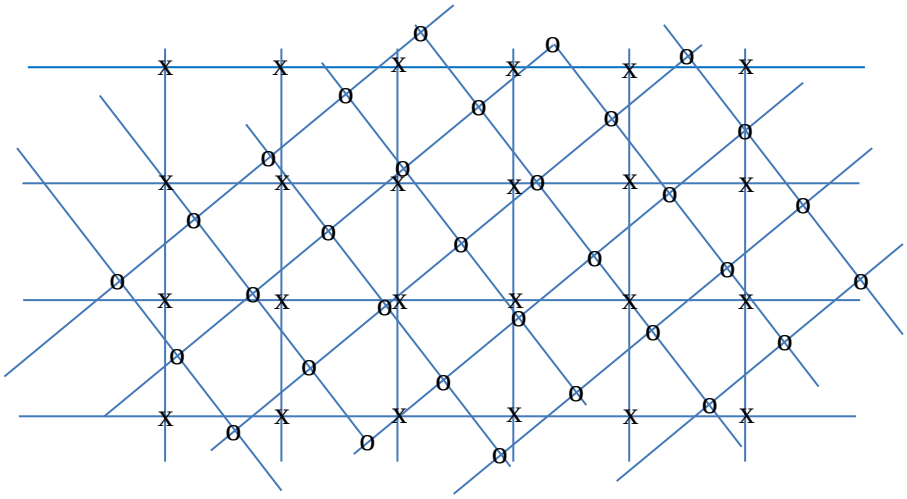


Figure 49: Distribution des sommets des aspérités de deux surfaces en vis-à-vis

(x – sommet d'aspérité de la surface 1 ; o – sommet d'aspérité de la surface 2)

D’une manière générale, deux aspérités en vis-à-vis peuvent présenter à la fois un décalage dans la direction x et un décalage dans la direction y (Figure 50). En raison du caractère isotropique du problème, les coordonnées polaires (r,θ) peuvent avantageusement remplacer les coordonnées x et y. Le décalage entre les deux sommets correspond à r et il est orienté dans la direction θ.

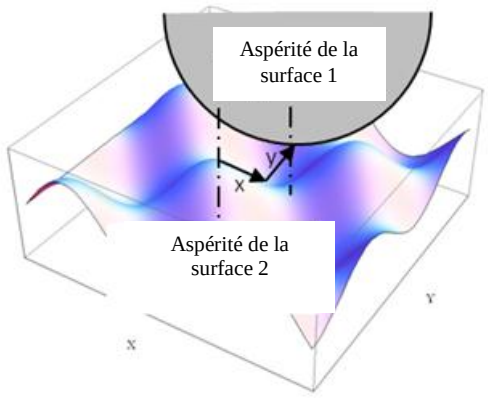


Figure 50 : Contact entre deux surfaces rugueuses périodiques

Si on choisit une aspérité de la surface 1 (nous discuterons plus tard l’impact de ce choix sur le résultat), le nombre d’aspérités de la surface 2 situées entre 0 et r autour de cette aspérité est alors : $\eta_2 \pi r^2$; η_2 est la densité de la surface 2 : $\eta_2 = \frac{N_2}{A_0} = \frac{1}{AR_2^2}$ avec A_0 l’aire apparente de contact entre les deux surfaces.

Le contact est obtenu si $r \leq r_0$, r_0 étant la distance maximale entre deux aspérités en contact (Figure 51). Ce paramètre r_0 joue le même rôle, en 3D, que le paramètre x_0 pour le calcul entre deux lignes d’aspérités (voir chapitre 3). Le calcul est donc similaire à celui de x_0, d’où $r_0 = \sqrt{2\delta(R_1 + R_2)}$. La Figure 51 présente les aspérités en contact (cercles rouges) caractérisées par des distances entre sommets inférieurs à r_0.

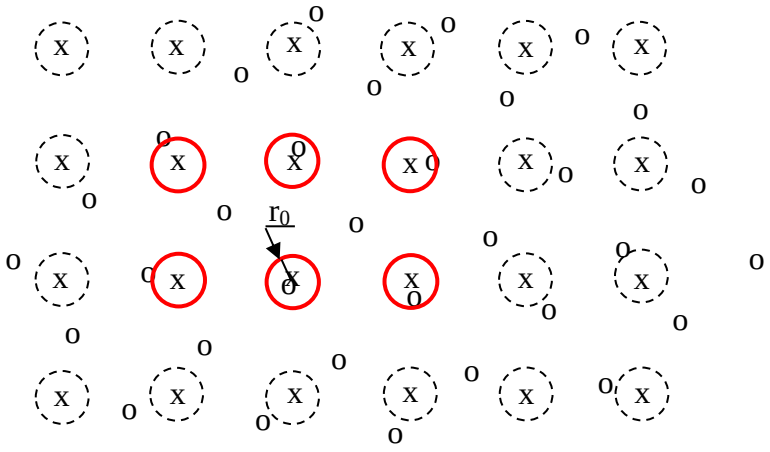


Figure 51 : Aspérités de la surface 2 en contact avec une aspérité de la surface 1

La probabilité de contact autour d'une aspérité donnée de la surface 1 est :

$$Prob = \eta_2 \pi r_0^2 = \frac{\pi r_0^2}{AR_2^2}$$

S'il y a N_1 aspérités sur la surface 1, le nombre de contacts entre les deux surfaces périodiques est :

$$N_p = N_1 \frac{\pi r_0^2}{AR_2^2} = \frac{A_0 \pi r_0^2}{AR_1^2 AR_2^2}$$

Soit en remplaçant r_0 par sa valeur :

$$\boxed{N_p = \frac{2\pi\delta A_0 (R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2}} \qquad (65)$$

Discussion

- Le nombre de contacts N_p donné par la relation (65) a été obtenu en choisissant la surface 1 comme référence. On constate que cette relation est parfaitement symétrique pour les deux surfaces. Le résultat aurait donc été identique en choisissant la surface 2 comme référence.
- Le nombre de contacts est directement proportionnel à l'aire de contact A_0, à la densité d'aspérités sur chaque surface ($\eta_1 = \frac{1}{AR_1^2}$ et $\eta_2 = \frac{1}{AR_2^2}$), ce qui correspond aux attentes.

- Enfin, le nombre de contacts est proportionnel à la somme des rayons $R_1 + R_2$ et au rapprochement δ; c'était la racine carrée de ces deux termes qui intervenait pour les surfaces périodiques 2D.

2.3. Force

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, le calcul en 3D consiste à prendre en compte l'effet du décalage entre aspérités, non seulement suivant x mais également suivant y. Le choix de la variable r permet de se ramener à un calcul sur un disque de rayon r_0, r_0 jouant un rôle analogue au paramètre x_0 défini dans le Chapitre 3. L'intensité de la force pour chaque contact est liée au rapprochement δ et au décalage r entre les sommets des deux surfaces.

La force normale pour un contact à la distance r vaut en se basant sur (61) : $F(r) = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta(r)^{3/2}$ avec $\delta(r) = \delta - \frac{r^2}{2(R_1+R_2)}$ par analogie avec δ(x) dans l'équation (62).

On a vu au paragraphe précédent que le nombre d'aspérités avec un décalage compris entre r et r + dr vaut :

$$dN = \frac{N_1}{AR_2^2} 2\pi r dr$$

La force pour ces dN aspérités vaut ainsi : $dF = \frac{N_1}{AR_2^2} 2\pi r dr . F(r)$

La force entre deux surfaces périodiques est donc :

$$F_p = \int_0^{r_0} \frac{N_1}{AR_2^2} 2\pi r \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \left(\delta - \frac{r^2}{2(R_1+R_2)}\right)^{3/2} dr$$

$$\Leftrightarrow F_p = \frac{8}{3} \pi E^* R^{1/2} \frac{N_1}{AR_2^2} \int_0^{r_0} r \left(\delta - \frac{r^2}{2(R_1+R_2)}\right)^{3/2} dr$$

$$\Leftrightarrow F_p = \frac{8}{3} \pi E^* R^{1/2} \frac{N_1}{AR_2^2} \int_0^{\sqrt{2\delta(R_1+R_2)}} r \left(\delta - \frac{r^2}{2(R_1+R_2)}\right)^{3/2} dr$$

Posons : $u = \delta - \frac{r^2}{2(R_1+R_2)}$

Quand $r = 0$ alors $u = \delta$ et quand $r = \sqrt{2\delta(R_1+R_2)} = r_0$ alors $u = 0$

$$du = -\frac{rdr}{R_1 + R_2}$$

D'où :

$$F_p = \frac{8}{3}\pi E^* R^{1/2} \frac{N_1}{AR_2^2} \int_0^{\delta} (R_1 + R_2) u^{3/2} du$$

$$\Leftrightarrow F_p = \frac{8}{3}\pi E^* R^{1/2} \frac{N_1}{AR_2^2} (R_1 + R_2) \frac{2}{5} u^{5/2} \Big|_0^{\delta}$$

$$\Leftrightarrow F_p = \frac{16}{15}\pi E^* R^{1/2} \frac{N_1}{AR_2^2} (R_1 + R_2) \delta^{5/2}$$

Avec :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ et } N_1 = \frac{A_0}{AR_1^2}\ ,\ N_2 = \frac{A_0}{AR_2^2}$$

D'où :

$$F_p = \frac{16}{15}\pi E^* A_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2} \delta^{5/2} \qquad (66)$$

La relation (66) amène quelques commentaires :

- La force normale entre les deux surfaces est directement proportionnelle à l'aire de contact ce qui constitue un résultat attendu. Par ailleurs, on retrouve la proportionnalité avec le module d'Young équivalent, hérité du comportement élastique des matériaux.
- La densité des aspérités sur chaque surface $\frac{1}{AR_1^2}$ et $\frac{1}{AR_2^2}$ intervient dans l'expression de la force, de manière équivalente à celle contenue dans l'expression du nombre de contacts.
- Enfin, les deux paramètres rayons d'aspérités et rapprochement apparaissent de manières différentes dans l'expression de la force et dans celle du nombre de contacts. Le rapprochement δ est, pour la force, à la puissance 5/2 alors qu'il est à la puissance 1 dans le nombre de contacts. L'influence du rayon intervient par deux facteurs. Le premier facteur $R_1 + R_2$ est identique pour les deux expressions

(son existence dans l'expression de la force est héritée du nombre de contacts). Le second facteur est le rayon équivalent, il provient des lois de contact entre aspérités, et n'apparaît donc que dans l'expression de la force, à la puissance 1/2.

2.4. Analyse du glissement entre les deux surfaces

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le glissement entre deux lignes d'aspérités avec le même rapprochement δ. On a alors montré que la valeur de la force maximale était constante et que la force sur chaque aspérité était périodique. Pour la surface périodique isotrope, en considérant la surface 1 mobile à une vitesse de glissement constante v et la surface 2 fixe, les aspérités en mouvement (celle de la surface 1 dans ce cas) ne vont pas forcément passer par le sommet des aspérités de la surface 2. En conséquence, le glissement se produit sur des aspérités dont le rapprochement δ n'est plus constant, ce qui va moduler l'intensité des forces. Par ailleurs, rien ne permet de supposer un espacement systématiquement régulier entre les chocs successifs entre aspérités. L'évolution de la force en fonction du temps est présentée schématiquement en Figure 52 pour les aspérités de la surface 1.

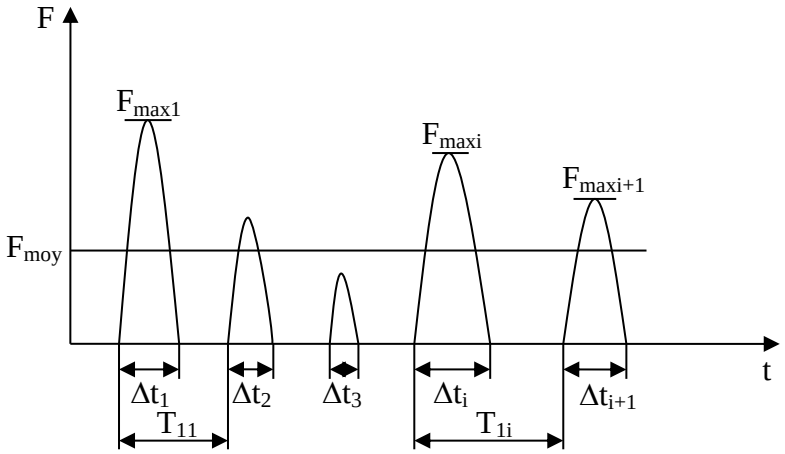


Figure 52 : Forme de la force sur une aspérité de la surface 1 en 3D.

Chaque aspérité de la surface 2 est soumise à la même force pendant le même temps Δt que les aspérités de la surface 1 (principe de l'action et de la réaction) mais la période à laquelle elle verra à nouveau la même force F_{maxi} diffère ($T_{1p} \neq T_{2p}$). La chronologie des efforts subis par une aspérité de la surface 2 est présentée en Figure 53.

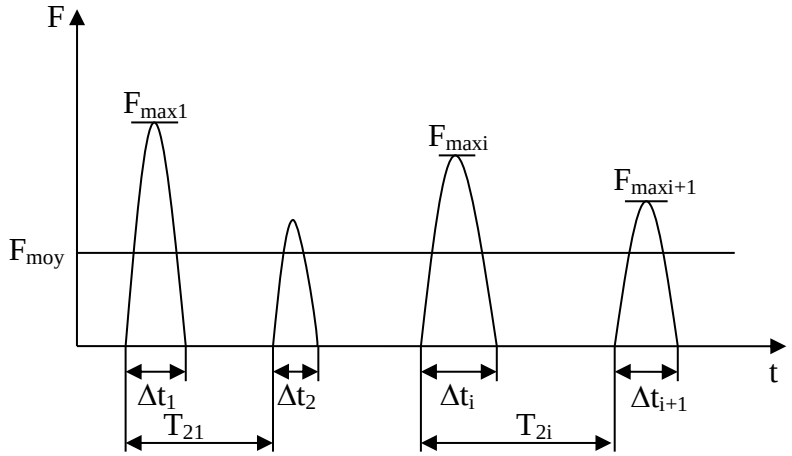


Figure 53 : Schéma de la force sur une aspérité de la surface 2 en 3D.

Δt_i, T_{1i}, T_{2i}, F_{maxi} n'ont pas, dans ce cas, des valeurs figées mais sont des grandeurs aléatoires. On s'intéressera donc à la détermination de leurs valeurs moyennes : Δt_{moy}, T_{1p}, T_{2p} et F_{moyp}.

Calcul de Δt_{moy}

Δt_{moy} est la durée moyenne des contacts entre aspérités Δt_i. Ces durées Δt_i vont dépendre de la position entre les sommets des aspérités. Si on suppose la direction de glissement dans la direction x (Figure 54), la durée de glissement est directement influencée par la distance y entre le sommet de l'aspérité de la surface 2 et le lieu de glissement de l'aspérité de la surface 1.

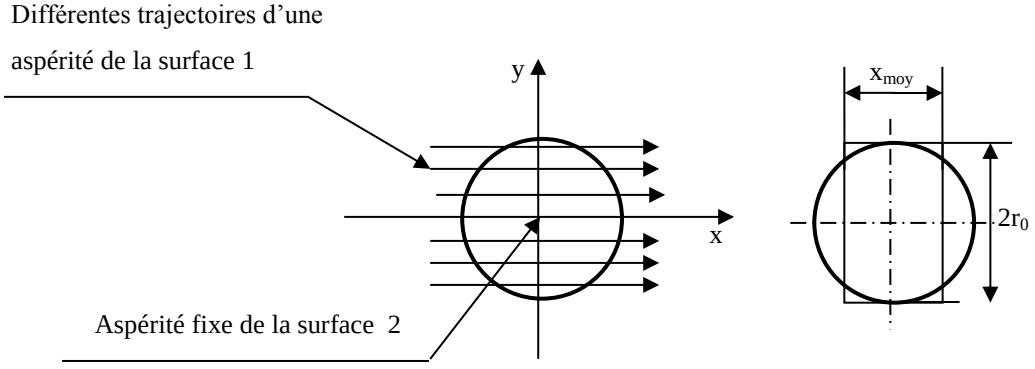


Figure 54 : Modèle de glissement entre les aspérités en 3D

Si $y = r_0$ alors le contact est instantané tandis que si $y = 0$ sa durée est maximale. On en déduit la distance moyenne de passage sur une aspérité soit :

$$x_{moy} = \frac{\text{Aire du cercle de rayon } r_0}{\text{diamètre de ce cercle}} = \frac{\pi r_0}{2}$$

Le temps moyen de passage sur une aspérité en 3D est :

$$\Delta t_{moy} = \frac{x_{moy}}{v} = \frac{\pi r_0}{2v} = \frac{\pi}{2v}\sqrt{2\delta(R_1 + R_2)}$$

Calcul de F_{moyp}

La force maximale lors du glissement entre deux aspérités est obtenue au milieu de la phase de glissement (x=0), et elle va dépendre du décalage en y. Ainsi elle sera maximale si $y = 0$ et nulle si $y = r_0$. La moyenne des pics de forces lors des chocs entre aspérités s'obtient en calculant la moyenne des forces sur y avec $x = 0$.

$$F_{moyp} = \frac{1}{r_0}\int_0^{r_0} F(0,y)dy = \frac{1}{r_0}\int_0^{r_0} \frac{4}{3}E^* R^{1/2}[\delta - \frac{y^2}{2(R_1 + R_2)}]^{3/2}dy$$

$$\Leftrightarrow F_{moyp} = \frac{4}{3r_0}E^* R^{1/2}\int_0^{r_0} [\delta - \frac{y^2}{2(R_1 + R_2)}]^{3/2}dy$$

$$\delta = \frac{r_0^2}{2(R_1 + R_2)} \rightarrow F_{moyp} = \frac{2}{3r_0}E^* R^{1/2}\frac{r_0^2}{(R_1 + R_2)}\int_0^{r_0} [1 - \frac{y^2}{r_0^2}]^{3/2}dy$$

Posons : $\frac{y}{r_0} = sinu$; Pour $y = 0 : u = 0$ et pour $y = r_0 : u = \frac{\pi}{2}$

$$F_{moyp} = \frac{2}{3r_0}E^* R^{1/2}\frac{r_0^2}{(R_1 + R_2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r_0 cos^4 u du$$

$$\Leftrightarrow F_{moyp} = \frac{2}{3}E^* R^{1/2}\frac{r_0^2}{(R_1 + R_2)}\left[\frac{3}{8}u + \frac{1}{4}sin2u + \frac{1}{32}sin4u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow F_{moyp} = \frac{\pi}{8}E^* R^{1/2}\frac{r_0^2}{(R_1 + R_2)}$$

Calcul de T_{moy}

Considérons une ligne, de longueur de vt, et ayant comme origine la position d'une aspérité de la surface mobile 1 à l'instant t = 0. Cette ligne décrit la position successive de l'aspérité considérée de la surface 1, pendant le temps t. Imaginons maintenant une bande de largeur 2 r_0 centrée sur cette ligne (Figure 55). Si une aspérité de la surface antagoniste 2 se retrouve dans cette bande, alors elle sera en contact, à un moment ou un autre entre les instants 0 et t, avec l'aspérité considérée de la surface 1, car située à moins de r_0 de celle-ci. Comme on peut le voir sur la Figure 55, toutes les aspérités de la surface 2 présentes dans cette bande seront interceptées par l'aspérité considérée de la surface 1. Dénombrer les aspérités présentes dans cette bande permet de comptabiliser le nombre de contacts existants pendant le temps t sur l'aspérité considérée de la surface 1.

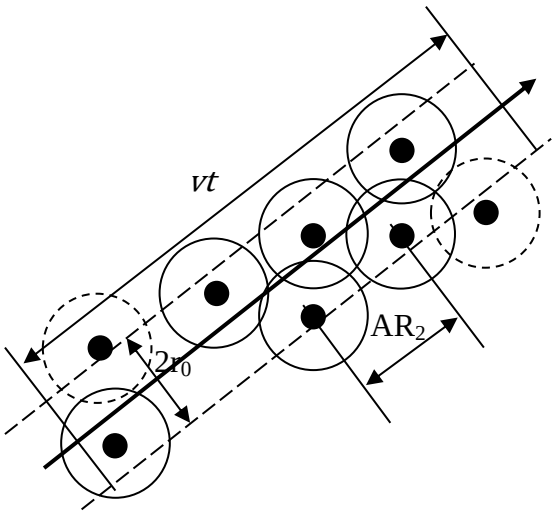


Figure 55 : Aspérités de la surface 2 (point) interceptées par une aspérité de la surface 1 en glissement

L'aire de cette bande est : $A = vt.\,2r_0$

Le nombre d'aspérités de la surface 2 sur cette bande est :

$$n_2 = \frac{A}{AR_2^2} = \text{nombre de chocs}$$

La période moyenne pour que l'aspérité considérée de la surface 1 passe sur deux aspérités de la surface 2 est définie par : $T_{1p} = \frac{t}{n_2} = \frac{AR_2^2}{2vr_0}$

Avec le même raisonnement, la période moyenne pour qu'une aspérité de la surface 2 passe sur deux aspérités de la surface 1 est définie par : $T_{2p} = \frac{t}{n_1} = \frac{AR_1^2}{2vr_0}$

Discussion

L'analyse du glissement entre deux surfaces périodiques montre que les paramètres Δt_i, T_{1i}, T_{2i}, F_{maxi} sont des grandeurs aléatoires. On ne peut pas déterminer ces valeurs mais on peut cependant calculer leurs valeurs moyennes : Δt_{moy}, T_{1p}, T_{2p} et F_{moyp}. La durée moyenne des contacts entre aspérités (Δt_{moy}) et la force maximale moyenne (F_{moyp}) sont symétriques pour les deux surfaces, mais pas les périodes moyennes (T_{1p}, T_{2p}) puisqu'elles dépendent non seulement de la vitesse glissement (v) entre les deux surfaces mais également respectivement des espacements AR_2 et AR_1 entre deux aspérités de chaque surface.

3. CONTACT ENTRE SURFACE SOMME ET LISSE

3.1. Identification de la surface somme

Comme nous l'avons vu au chapitre consacré à la bibliographie, dans la plupart des recherches, le calcul du contact entre deux surfaces rugueuses est souvent transformé en un contact entre une surface rugueuse déformable – qu'on appelle la surface somme – et une surface lisse et rigide.

Le principe de base de la construction de la surface somme consiste à maintenir la même distance entre les surfaces moyennes de la surface somme et de la surface lisse que celle existant entre les surfaces origines (Figure 56).

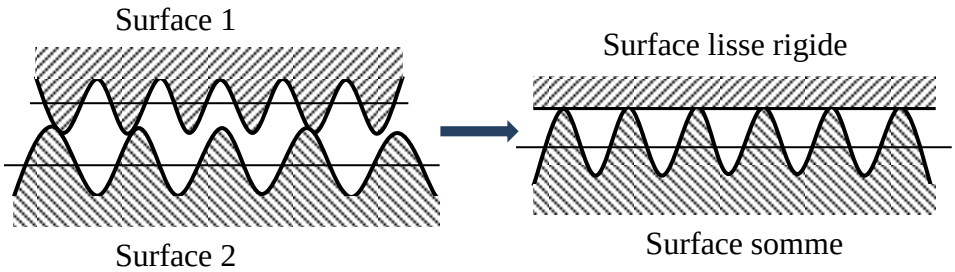


Figure 56 : Construction de la surface somme

Pour ce faire, les paramètres microgéométriques de chaque surface sont associés pour obtenir les paramètres de la surface somme qui combine donc les rugosités et les rayons de chacune des deux surfaces. Par ailleurs, la surface somme doit aussi combiner l'élasticité

des deux surfaces. Ainsi la surface somme est parfaitement définie au moyen du jeu de quatre paramètres suivants : le module d'élasticité (E*), le rayon équivalent des aspérités (R), l'espacement équivalent des motifs de rugosité (AR) et la hauteur moyenne des aspérités (h). Ces paramètres doivent être calculés à partir des paramètres des deux surfaces en contact.

Le module d'élasticité (E*) et le rayon moyen (R) des aspérités de la surface somme sont déterminés en utilisant les relations (5) et (44) de la théorie de Hertz définies aux chapitres précédents :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dans le cadre de cette étude, la surface somme garde les caractéristiques des surfaces de départ à savoir le caractère périodique, on a toujours les paramètres suivants : le rayon équivalent des aspérités (R) défini au Chapitre 3 par la relation (56), l'espacement équivalent des motifs de rugosité (AR) et la hauteur moyenne des aspérités (h) qui sont liés par la formulation ci-après :

$$R = \frac{AR^2}{16h}$$

La hauteur moyenne des motifs de rugosité (h) de la surface somme peut être définie, d'après la bibliographie [25], selon les deux formulations différentes ci-dessous :

$$h = h_1 + h_2 \tag{67}$$

ou

$$h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \tag{68}$$

Et par ailleurs, il existe un autre type de relation pour l'espacement équivalent des motifs de rugosité (AR) de la surface somme [25] défini au chapitre 1 :

$$AR = \frac{AR_1 + AR_2}{2} \tag{50}$$

Donc, la surface somme peut être déterminée, suivant les auteurs, de trois manières différentes (67), (68) ou (50), que nous allons détailler et comparer en analysant d'abord le nombre de contacts puis la force.

3.2. Nombre de contacts

Selon l'hypothèse de surface périodique, l'altitude des aspérités est constante. Le nombre de contacts entre surface somme et surface lisse est donc égal au nombre d'aspérités de la surface somme soit :

$$N_{sp} = \frac{A_0}{AR^2} \tag{69}$$

Nous allons maintenant exprimer ce nombre de contacts N_{sp} selon les formulations explicitées ci-dessus pour la surface somme.

En injectant la relation (56) dans la relation (67), il vient :

$$\frac{AR^2}{16R} = \frac{AR_1^2}{16R_1} + \frac{AR_2^2}{16R_2}$$

Combinée avec la définition de $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, nous obtenons :

$$AR^2 = \frac{AR_1^2 R_2 + AR_2^2 R_1}{R_1 + R_2}$$

Une première formulation pour le nombre de contacts entre surface somme et surface lisse s'écrit alors pour $h = h_1 + h_2$:

$$\boxed{N_{sp} = \frac{A_0(R_1 + R_2)}{AR_1^2 R_2 + AR_2^2 R_1}} \tag{70}$$

En reprenant la même méthodologie avec la relation (68), on a :

$$\frac{AR^2}{16R} = \sqrt{\left(\frac{AR_1^2}{16R_1}\right)^2 + \left(\frac{AR_2^2}{16R_2}\right)^2}$$

Combinée avec la relation définie pour R, nous obtenons :

$$AR^2 = \frac{\sqrt{AR_1^4 R_2^2 + AR_2^4 R_1^2}}{R_1 + R_2}$$

Le nombre de contacts entre surface somme et surface lisse pour $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ vaut alors :

$$\boxed{N_{sp} = \frac{A_0(R_1 + R_2)}{\sqrt{AR_1^4 R_2^2 + AR_2^4 R_1^2}}} \tag{71}$$

Enfin si on utilise la relation (50), on a la troisième formulation AR = (AR_1+AR_2)/2, alors :

$$N_{sp} = \frac{4A_0}{(AR_1 + AR_2)^2} \tag{72}$$

3.3. Force

La force sur chaque aspérité de la surface somme est identique car la surface somme est périodique (Figure 57). Elle vaut : $F_{max} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2}$

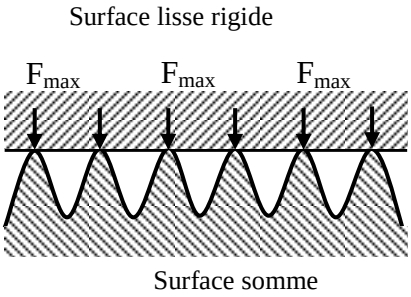


Figure 57 : Force dans le contact surfaces somme et lisse

Comme la surface est périodique, la force totale entre les surfaces est le produit de la force sur chaque aspérité par le nombre de contacts donc :

$$F_{sp} = N_{sp}.F_{max} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2} N_{sp} \tag{73}$$

Nous allons déterminer l'expression de la force totale à partir des trois formulations précédemment établies pour le nombre de contacts.

A partir de la relation (70), on obtient :

$$F_{sp} = \frac{4}{3} E^* A_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 R_2 + AR_2^2 R_1} \delta^{3/2} \tag{74}$$

Selon la relation (71), la force totale vaut :

$$F_{sp} = \frac{4}{3} E^* A_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} \frac{(R_1 + R_2)}{\sqrt{AR_1^4 R_2^2 + AR_2^4 R_1^2}} \delta^{3/2} \tag{75}$$

Enfin, à partir de la relation (72), on obtient :

$$F_{sp} = \frac{16}{3} E^* A_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/2} \frac{1}{(AR_1 + AR_2)^2} \delta^{3/2} \quad (76)$$

On retrouve fort logiquement des allures de fonction équivalentes car la distinction entre ces différentes expressions ne provient que de la manière d'assembler les deux surfaces de départ pour construire la surface somme.

3.4. Analyse du glissement entre surfaces somme et lisse

Comme pour le contact entre deux surfaces périodiques isotropes, nous allons, dans le cas du contact avec la surface somme, nous intéresser à l'évolution des efforts sur chacune des deux surfaces. La Figure 58 présente le modèle du contact entre surfaces somme et surface lisse.

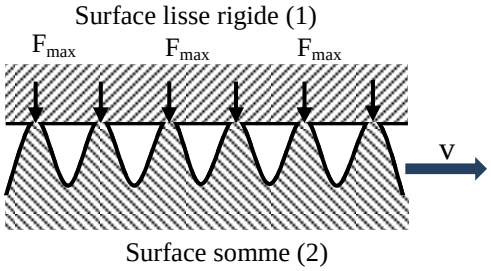


Figure 58 : Contact entre une surface rugueuse et une surface lisse

La force sur chaque aspérité de la surface somme (2) est constante, d'intensité F_{max} (Figure 59 à gauche). Par contre, si on considère un point de la surface lisse, la force n'est plus constante mais passe par un maximum qui est F_{max}. La chronologie des efforts subis par ce point est donnée Figure 59 à droite.

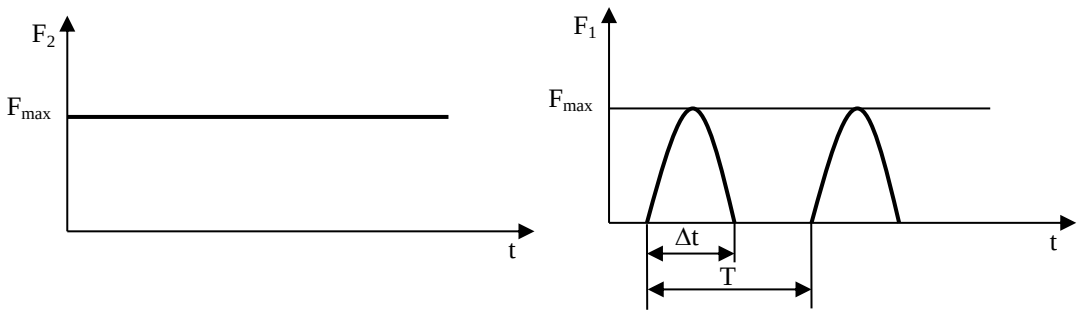


Figure 59 : Force sur une aspérité de la surface somme à gauche et une aspérité de la surface lisse à droite

La valeur maximale de la force sur une aspérité de la surface somme égale la force maximale sur un point de la surface lisse. Cette force maximale qui est déterminée, comme nous l'avons vu précédemment, par la relation (61) :

$$F_{max} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2}$$

Pour la surface lisse, le temps de passage (Δt) d'une aspérité de la surface somme sur un point de la surface lisse rigide est déterminé par la relation : $\Delta t = 2a_0/v$ avec $a_0 = R^{1/2}\delta^{1/2}$ le rayon de contact déterminé selon Hertz d'où :

$$\Delta t = \frac{2R^{1/2}\delta^{1/2}}{v}$$

On note que les deux surfaces combinées sont périodiques isotropes donc la surface somme est aussi périodique isotrope. Ainsi, la période moyenne entre deux passages d'aspérité est :

$$T_{sp} = \frac{AR}{v}$$

Discussion

- Dans le contact entre surface somme (périodique isotrope) et surface lisse rigide, la force sur chaque aspérité de la surface somme est constante. Par contre la force sur chaque point de la surface lisse est variable. L'intensité maximale de cette force est égale à la force sur une aspérité de la surface somme. La durée de passage d'une aspérité de la surface somme sur un point donné de la surface lisse est toujours constante et la période pour que deux aspérités consécutives passent sur ce point est également constante.
- Qualitativement, l'évolution des efforts, en utilisant la surface somme, reste très différent de celui obtenu avec le contact réel rugueux sur rugueux. Il est clair, à ce stade, que le concept de surface somme devra être utilisé avec beaucoup de réserve pour l'analyse des phénomènes basés sur l'évolution des efforts (fatigue du contact glissant ou roulant par exemple).

Analysons maintenant si les propositions de surface somme disponibles sont aptes à décrire quantitativement le contact statique entre deux surfaces rugueuses.

4. COMPARAISON : SOMME/LISSE ET RUGUEUX/RUGUEUX

Comme nous l'avons vu, il existe trois modélisations possibles de la surface somme. On va donc comparer chacun des résultats du modèle somme sur lisse avec le résultat du modèle de contact entre deux surfaces rugueuses que nous avons établi précédemment. Pour faciliter la comparaison, on étudiera les rapports entre les résultats du modèle rugueux sur rugueux et ceux du modèle somme sur lisse. Pour chacune des trois variantes, nous analyserons d'abord le nombre de contacts puis nous passerons à la force normale :

$$rapportN_p = \frac{N_p}{N_{sp}} = \frac{\frac{2\pi\delta A_0 (R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2}}{\frac{A_0}{AR^2}} = 2\pi\delta \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2} AR^2 \tag{77}$$

$$\begin{aligned} rapportF_p = \frac{F_p}{F_{sp}} &= \frac{\frac{16}{15}\pi E^* A_0 \delta^{5/2} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2}}{\frac{4}{3} E^* A_0 \delta^{3/2} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} \frac{1}{AR^2}} \\ &= \frac{4}{5}\pi\delta \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2} AR^2 \end{aligned} \tag{78}$$

On constate que les rapportN et rapportF ne diffèrent que d'un facteur multiplicateur : 2 pour le rapportN et 4/5 pour le rapportF. Ces deux rapports dépendent de la fonction *f* définie ci-dessous :

$$f = \pi\delta \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2} AR^2 \tag{79}$$

D'après ces résultats, si on arrive à obtenir le même nombre de contacts pour les deux modèles somme sur lisse et rugueux sur rugueux alors la force totale du modèle rugueux sur rugueux sera 0,4 fois plus faible que celle déterminée pour le modèle somme sur lisse.

Si la force totale est identique pour les deux modèles alors la différence du nombre de contacts entre les deux modèles, rugueux sur rugueux et somme sur lisse, sera exactement l'inverse du résultat précédent.

Il ne sera donc pas possible d'assurer une parfaite équivalence entre les résultats des deux modèles rugueux sur rugueux et somme sur lisse. Mais analysons maintenant les différences entre les trois variantes de surface somme.

a) Premier cas : la surface somme est définie par la formule (67) $h = h_1 + h_2$ ce qui donne :

$$AR^2 = \frac{(AR_1^2 R_2 + AR_2^2 R_1)}{R_1 + R_2}$$

(79) s'écrit alors : $f = \pi\delta \frac{(R_1+R_2)}{AR_1^2 AR_2^2} \frac{(AR_1^2 R_2 + AR_2^2 R_1)}{R_1+R_2} = \pi\delta \left(\frac{R_1}{AR_1^2} + \frac{R_2}{AR_2^2}\right)$ soit :

$$f = \frac{\pi\delta}{16}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) \qquad (80)$$

Dans le cas particulier où le contact a lieu entre deux surfaces identiques ($h_1 = h_2$), on a :

$$rapportN_p = \frac{\pi\delta}{4h_1} \text{ et } rapportF_p = \frac{\pi\delta}{10h_1}$$

Physiquement, nous avons $0 \leq \frac{\delta}{h_1} \leq 1$, donc $0 \leq rapportN_p < 0{,}8$ et $0 \leq rapportF_p \leq 0{,}3$ mais en réalité, très généralement, les microgéométries subissent de faibles indentations pour préserver les matériaux. Bien qu'il n'existe pas de valeurs bien définies, on peut considérer $0 \leq \frac{\delta}{h_1} \leq \frac{1}{10}$ donc on trouve $0 \leq rapport\ N_p < 0{,}08$ et $0 \leq rapport\ F_p \leq 0{,}03$. Ces deux rapports restent toujours très éloignés de 1 ce qui signifie que les deux modélisations restent très différentes quelle que soit la situation considérée. La surface somme construite sur la base de la somme des hauteurs de rugosité de chaque pièce décrit mal le contact rugueux.

b) Deuxième cas : la surface somme est définie par la formule (68) :

$$h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient dans ce cas :

$$f = \frac{\pi\delta}{16}\sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}} \qquad (81)$$

Dans le cas particulier du contact entre deux surfaces identiques ($h_1 = h_2$), on a :

$$f = \frac{\pi\delta\sqrt{2}}{16h_1}$$

$$\Rightarrow rapport\ N_p = \frac{\pi\delta\sqrt{2}}{8h_1} \text{ et } rapport\ F_p = \frac{\pi\delta\sqrt{2}}{20h_1}$$

Avec le même raisonnement que ci-dessus, on trouve $0 \leq rapport\ N_p < 0{,}06$ et $0 \leq rapport\ F_p \leq 0{,}02$. Les résultats obtenus restent similaires (et légèrement moins bons que les précédents). Le concept de surface somme défini sur la base d'une somme quadratique n'est pas satisfaisant.

c) Troisième cas : la surface somme est définie par la formule (50) $AR=(AR_1+AR_2)/2$. En remplaçant AR par cette valeur dans la formule (80), on obtient :

$$f = \pi\delta \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2} \left(\frac{AR_1 + AR_2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{\pi\delta}{4}(R_1 + R_2)\left(\frac{1}{AR_1} + \frac{1}{AR_2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{\pi\delta}{4}\frac{R_1}{AR_1^2}(1 + \frac{R_2}{R_1})\left(1 + \frac{AR_1}{AR_2}\right)^2$$

D'où :

$$f = \frac{\pi\delta}{64h_1}(1 + \frac{R_2}{R_1})\left(1 + \frac{AR_1}{AR_2}\right)^2 \quad (82)$$

Dans le cas du contact entre deux surfaces identiques, on obtient le même résultat que dans le premier cas :

$$rapportN_p = \frac{\pi\delta}{4h_1} \ et\ rapportF_p = \frac{\pi\delta}{10h_1}$$

Avec les modèles de surface somme définis dans la bibliographie, les résultats du contact entre surface somme et lisse sont très différents de ceux déterminés pour le contact entre deux surfaces rugueuses. Les trois modèles testés donnent des résultats très voisins mais le modèle où la surface somme est déterminée à partir de la formule (67) $h = h_1 + h_2$ est celui qui donne le meilleur résultat.

5. IDENTIFICATION DE LA SURFACE SOMME PÉRIODIQUE RÉELLE

Comme nous l'avons vu précédemment, la surface somme réelle est parfaitement définie au moyen du jeu des quatre paramètres suivants calculés à partir des paramètres des deux surfaces en contact : module d'élasticité E*, rayon équivalent R, espacement entre deux aspérités AR, et hauteur des aspérités h.

Les paramètres E* et R sont définis comme précédemment (voir (5) et (44), chapitre 3).

Par contre, aucune des trois variantes d'association des microgéométries n'a donné de résultat correct, avec notamment des erreurs d'au moins 1 ordre de grandeur sur les estimations du nombre d'aspérités en contact et de la force. Nous allons donc tenter de définir une nouvelle formulation pour le paramètre AR de telle sorte que les valeurs du nombre de contacts et de la force totale entre deux surfaces, quel que soit le modèle choisi (rugueux sur rugueux et somme sur lisse), soient identiques. Comme nous avons pu le signaler dans le paragraphe précédent il sera impossible d'assurer à la fois la similitude du nombre de contacts et de la force. En conséquence nous allons analyser séparément ces deux cas.

5.1. Surface somme avec équivalence du nombre de contacts

Commençons par égaliser le nombre de contacts entre les deux modèles (équations (65) et (69)) soit :

$$\frac{2\pi\delta A_0(R_1+R_2)}{AR_1^2AR_2^2}=\frac{A_0}{AR^2}$$

On obtient ainsi :

$$AR=\frac{AR_1.AR_2}{\sqrt{2\pi\delta(R_1+R_2)}}=\frac{AR_1.AR_2}{\sqrt{2\pi(R_1+R_2)}}.\frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

On a vu précédemment que pour des surfaces périodiques, les paramètres h, AR et R sont liés selon : $AR^2=16.h.R$

La hauteur des aspérités s'écrit alors :

$$h=\frac{AR_1^2AR_2^2}{32\pi R\delta(R_1+R_2)}=\frac{16h_1R_1.16h_2R_2}{32\pi\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\delta(R_1+R_2)}=\frac{8h_1h_2}{\pi\delta}$$

Discussion

Avec les valeurs des paramètres de la surface somme définis comme ci-dessus, la force totale entre surface somme et surface lisse et rigide est définie comme suit :

$$F_{sp} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2} \frac{A_0}{AR^2}$$

Soit :

$$F_{sp} = \frac{8}{3} \pi E^* A_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/2} \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2} \delta^{5/2}$$

Si on compare cette valeur avec la valeur de la force totale entre deux surfaces rugueuses déterminée par la relation (66), on retrouve bien la relation :

$$\frac{F_{sp}}{F_p} = \frac{5}{2}$$

Ainsi, à titre de synthèse, avec les valeurs des paramètres de la surface somme déterminées de telle sorte que le nombre de contacts pour les deux modèles (rugueux sur rugueux et somme sur lisse) soit identique, on constate que la force totale pour le modèle somme sur lisse est 2,5 fois supérieure à la valeur de la force du modèle rugueux sur rugueux, ce qui constitue un net progrès par rapport aux surfaces somme conventionnelles. Il est important de noter par ailleurs que s'il est possible théoriquement d'identifier la surface somme qui permet d'avoir une équivalence parfaite en terme de nombre d'aspérités, celle-ci dépend de la situation étudiée car δ intervient dans la formulation de la hauteur des aspérités de la surface somme. Outre la non unicité de la surface somme, le fait de ne pas connaître à priori la valeur de d constitue une limite à l'utilisation pratique de ce type de surface somme.

5.2. Equivalence en force normale

Si on définit la surface somme selon la condition d'équivalence en force normale, on va alors égaliser la force normale entre les deux modèles rugueux sur rugueux (66) et somme sur lisse (73), et obtient :

$$\frac{16}{15} \pi E^* A_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/2} \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2} \delta^{5/2} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2} \frac{A_0}{AR^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AR^2} = \frac{4}{5} \pi \delta \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2}$$

En remplaçant cette valeur dans (69) on trouve :

$$N_{sp} = \frac{A_0}{AR^2} = \frac{4}{5}\pi\delta A_0 \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2}$$

Si on compare cette valeur de N_{sp} avec la valeur du nombre de contacts entre deux surfaces rugueuses déterminée par la relation (65), on obtient :

$$\frac{N_{sp}}{N_p} = \frac{2}{5}$$

Ainsi, avec les valeurs des paramètres de la surface somme déterminées de telle sorte que la force normale pour les deux modèles soit identique, on constate que le nombre de contacts pour le modèle somme sur lisse est 0,4 fois la valeur du nombre de contacts du modèle rugueux sur rugueux.

5.3. Synthèse du travail d'optimisation de la surface somme

On ne peut donc pas trouver de paramètre AR pour la surface somme, dans le cas de surfaces périodiques, permettant d'obtenir les mêmes valeurs de nombre de contacts et de force totale que celles déterminées dans le cas du contact rugueux sur rugueux. Il ne semble donc pas possible de définir une surface somme périodique qui corresponde exactement au contact entre deux surfaces périodiques isotropes. De plus, les paramètres de surface somme s'en rapprochant le plus dépendent de la valeur d'indentation à priori variable (et dépendante de la charge) lors de l'analyse du contact. Dans le prochain paragraphe, on va tenter de poser un modèle de surface somme aléatoire pouvant correspondre exactement au contact entre deux surfaces périodiques.

6. IDENTIFICATION DE LA SURFACE SOMME RÉELLE

Si le contact entre deux surfaces périodiques ne peut se ramener à un contact avec une surface somme périodique, nous allons analyser dans ce paragraphe, s'il est possible d'identifier une surface somme aléatoire, au comportement en écrasement rigoureusement identique à celui des deux surfaces périodiques.

Le contact entre une surface somme aléatoire et une surface lisse, rigide est présentée sur la Figure 60, paramétré par une fonction Φ de densité des sommets.

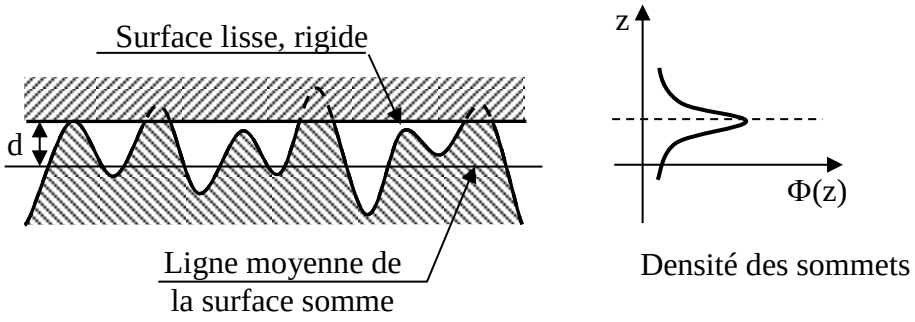


Figure 60 : Contact entre surface aléatoire et surface lisse

Dans ce cas, le nombre de contacts entre surfaces aléatoire et lisse a l'expression suivante [7] :

$$N_{srp} = \frac{A_0}{AR^2}\int_d^{\infty} \emptyset(z)dz$$

Φ(z) étant la fonction densité des altitudes des sommets de la surface somme réelle.

La force normale totale est calculée par la formule suivante [7] :

$$F_{srp} = \frac{4}{3}E^* R^{1/2}\frac{A_0}{AR^2}\int_d^{\infty}(z-d)^{3/2}\,\emptyset(z)dz$$

On va utiliser la même démarche qu'au paragraphe précédent en commençant par égaliser le nombre de contacts des deux modèles rugueux sur rugueux et somme aléatoire sur lisse. La fonction densité des altitudes des sommets de la surface somme réelle Φ(z) doit satisfaire les trois conditions suivantes pour toutes les valeurs d'indentation (d et δ) :

Egalité du nombre de spots de contact :

$$2\pi\delta A_0(R_1+R_2).\frac{1}{AR_1^2AR_2^2} = \frac{A_0}{AR^2}\int_d^{\infty}\emptyset(z)dz \qquad (83)$$

Distribution positive : $\emptyset(z) \geq 0$ (84)

Distribution d'aire unité : $$\int_{-\infty}^{+\infty}\emptyset(z)dz = 1 \qquad (85)$$

$\frac{A_0}{AR^2}$ est le nombre d'aspérités de la surface somme. On peut imaginer que la transformation du modèle de contact entre deux surfaces rugueuses en un modèle entre une

surface rugueuse (surface somme) et une surface lisse, implique que la surface somme permette d'obtenir potentiellement le nombre de contacts existants dans le contact rugueux sur rugueux. On peut ainsi choisir comme valeur de AR : AR = min$\{AR_1; AR_2\}$.

Les formules font intervenir deux variables d et δ qui sont liées (Figure 61) par la relation : $\delta = d_1 + d_2 - d$.

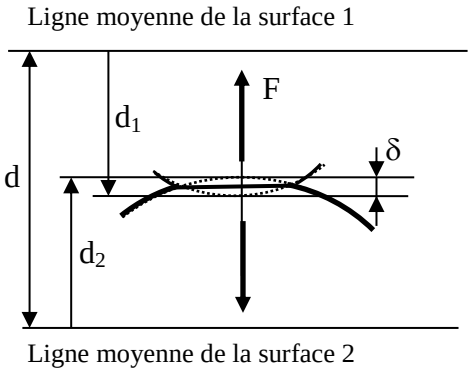


Figure 61 : Relation entre δ et d

Nous proposons de les réécrire en fonction de d et pour cela nous posons : $d_0 = d_1 + d_2$. La condition pour il y ait des contacts est : $\delta \geq 0$ ou $d \leq d_0$. Donc quand $d > d_0$, il n'y a plus contact entre les deux surfaces. La fonction Φ(z) doit donc s'annuler pour les valeurs de z supérieures à d_0.

La formule (84) peut ainsi s'écrire sous la forme : $\int_d^{d_0} \emptyset(z)dz = k(d_0 - d)$. On peut alors en déduire la fonction distribution des altitudes des sommets de la surface somme : $\emptyset(z) = k$ où $k = 2\pi(R_1 + R_2).\frac{max\{AR_1^2;AR_2^2\}}{AR_1^2 AR_2^2}$.

La distribution des altitudes des sommets de la surface somme est de type créneau, elle est présentée en Figure 62.

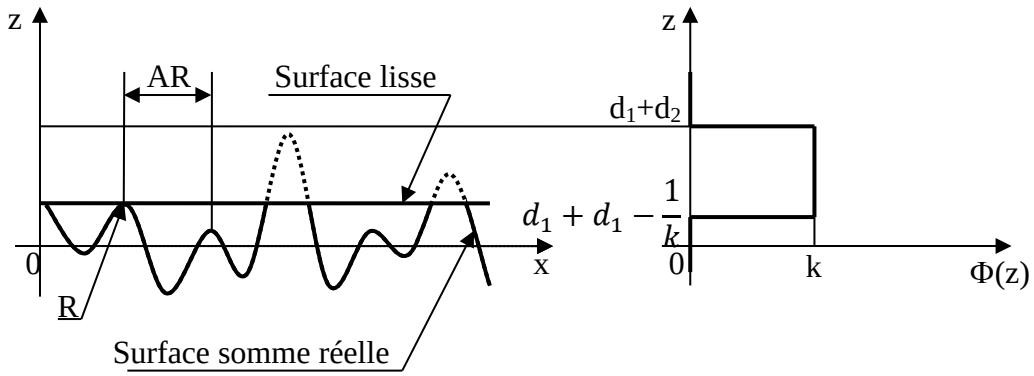


Figure 62 : Surface somme réelle et distribution des altitudes des sommets

La force normale totale du modèle surface somme est calculée par la formule suivante :

$$F_{srp} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \frac{A_0}{AR^2} \int_d^{d_0} (z - d)^{3/2} \, k dz$$

$$\Leftrightarrow F_{srp} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \frac{A_0}{AR^2} . 2\pi(R_1 + R_2) . \frac{AR^2}{AR_1^2 AR_2^2} . \frac{2}{5} (d_1 + d_2 - d)^{5/2}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow F_{srp} = \frac{16}{15} \pi E^* A_0 R^{1/2} . \frac{(R_1 + R_2)}{AR_1^2 AR_2^2} . (d_1 + d_2 - d)^{5/2}}$$

Cette force est égale à celle que l'on a trouvée pour la force totale entre deux surfaces rugueuses (voir équation (66)). Donc, lorsque l'on assure l'équivalence du nombre de contacts en toutes situations, la condition d'égalité de la force entre les deux modèles est satisfaite.

Ainsi, le contact entre deux surfaces rugueuses périodiques peut être remplacé par un contact entre une surface somme aléatoire et une surface lisse, rigide. Les paramètres de la surface somme sont déterminés de telle sorte que le nombre de contacts et la force totale pour les deux modèles soient identiques. **La surface somme aléatoire doit présenter une distribution des altitudes uniforme.**

Il est important de noter que les caractéristiques de la surface somme ainsi identifiée sont uniquement liées aux microgéométries de chaque surface et indépendantes de l'intensité de l'écrasement.

7. CONCLUSION

On a étudié le contact en régime élastique entre deux surfaces périodiques et isotropes. En utilisant la théorie de Hertz, on a pu déterminer la force entre deux aspérités. On a déterminé le nombre de contacts entre deux surfaces périodiques puis calculé la force totale entre les deux.

Comme dans le Chapitre 3, nous avons analysé le glissement entre deux surfaces pour déterminer la force maximale sur chaque aspérité, le temps de passage et la période de la force vus par une aspérité. Malgré le caractère périodique des microgéométries des deux surfaces en contact, l'ensemble des paramètres décrivant les transitoires d'effort entre aspérités deviennent des variables aléatoires pour lesquelles nous avons proposé une expression de leurs moyennes. Cette estimation pourrait servir de base pour un calcul futur de l'usure par fatigue des aspérités.

On a constaté qu'il y avait des différences significatives (de l'ordre d'un ordre de grandeur sur le nombre d'aspérités ou la force normale) dans les résultats entre le modèle de contact entre une surface somme, construite en utilisant la méthode traditionnelle, et une surface lisse rigide et le modèle de contact entre deux surfaces rugueuses périodiques. La principale origine de cette différence importante est liée au nombre d'aspérités en contact. Dans le cas du contact surface somme « traditionnelle » sur surface lisse, le nombre de contacts demeure constant alors qu'il augmente avec la charge normale pour le contact rugueux sur rugueux.

On a montré que l'on ne peut pas trouver une surface somme périodique pouvant satisfaire à la fois l'équivalence entre le nombre d'aspérités en contact et la force normale. Par contre nous avons proposé des surfaces somme périodiques satisfaisant l'une ou l'autre de ces conditions. La principale limite à l'utilisation de ces surfaces somme est leurs dépendances au niveau de l'indentation, surtout lorsque ce paramètre est inconnu.

En complément, nous avons pu déterminer une surface somme, non périodique, qui remplit simultanément les deux conditions suivantes : la force et le nombre de contacts calculés avec les deux modèles sont identiques. Cette surface somme n'est pas périodique mais dispose d'aspérités régulièrement espacées et a une distribution des altitudes des sommets en créneau. Les paramètres de la distribution sont uniquement dépendants des deux microgéométries en contact et la surface somme est valable sur toute la gamme d'indentation.

CHAPITRE 5. CONTACT ENTRE DEUX SURFACES ISOTROPES ALÉATOIRES

1. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à des surfaces isotropes périodiques. Ce type de surface est peu représentatif des surfaces réelles isotropes. Il s'agit classiquement de surfaces obtenues par moulage en sable ou par grenaillage (Figure 63).

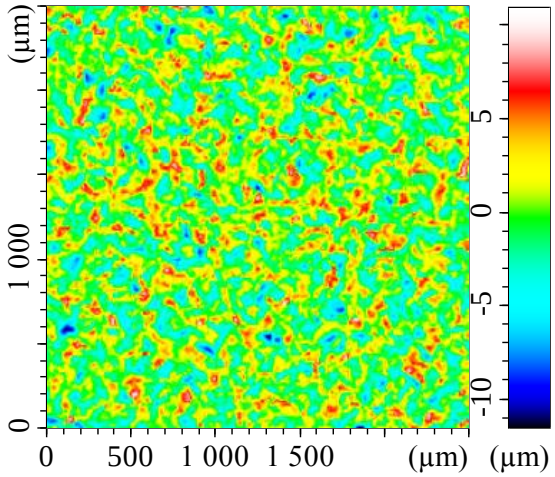


Figure 63 : Topographie d'une surface aléatoire

Pour une meilleure visualisation de la surface, il est possible de s'intéresser à un profil extrait de cette surfométrie dans n'importe quelle direction. Ce profil montre que les altitudes des sommets sont loin d'être périodiques et présentent une distribution statistique.

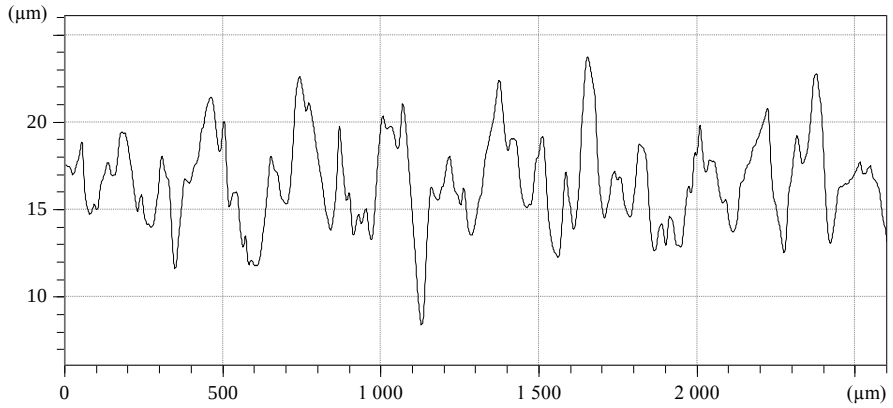


Figure 64 : Profil extrait de la surfométrie d'une surface aléatoire

Pour se rapprocher des surfaces réelles isotropes, nous allons étudier dans ce chapitre le contact entre deux surfaces isotropes possédant des aspérités d'altitudes aléatoires [32].

2. DESCRIPTION DES SURFACES ALEATOIRES

Chaque surface isotrope est aléatoire mais possède néanmoins les particularités suivantes :

- Les aspérités de la surface sont sphériques avec un même rayon constant,
- L'espacement entre deux aspérités consécutives est constant et identique sur toute la surface,
- La distribution de l'altitude des sommets des aspérités suit une loi Gaussienne.

En tenant compte des hypothèses détaillées précédemment, nous pouvons modéliser le profil conformément à ce qui est présenté en Figure 65. On note que l'altitude des sommets des aspérités (h) est très petite devant l'espacement entre deux aspérités (AR) : h << AR. Par ailleurs, nous supposons que le profil de la surface aléatoire est constitué d'une suite périodique de cercles concaves et convexes de même rayon R qui sont tangents.

Le paramétrage d'une telle surface est donné par la distance séparant deux aspérités AR, paramètre constant sur toute la surface. Par ailleurs, les aspérités de la surface ont des altitudes variables z, comptées à partir de la surface moyenne, qui suivent une loi Gaussienne.

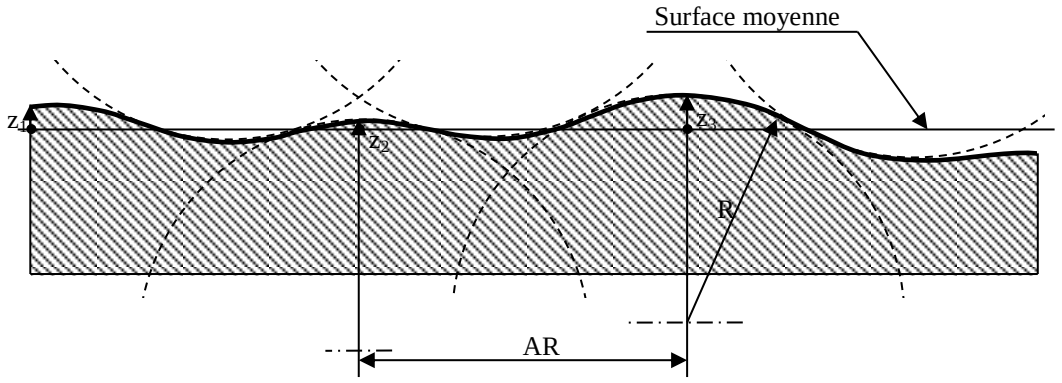


Figure 65 : Surface aléatoire considérée dans ce chapitre

Le modèle de la surface isotrope aléatoire et la distribution des altitudes des sommets correspondante sont présentés Figure 66.

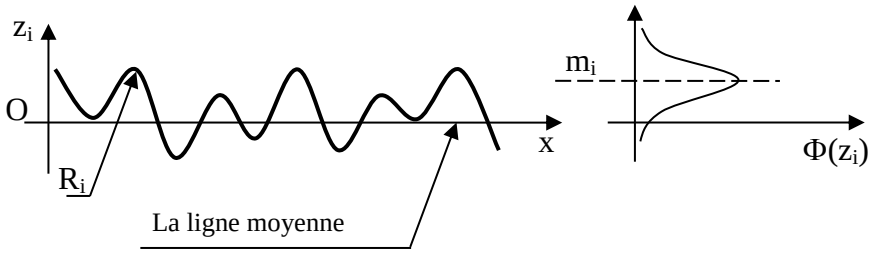


Figure 66 : Modèle de la surface aléatoire et distribution des altitudes des sommets

La distribution des altitudes des sommets des aspérités est donnée par la loi de Gauss suivante [7] :

$$\emptyset(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

Avec m et σ, respectivement moyenne et écart-type des altitudes des sommets des aspérités.

3. CONTACT ENTRE DEUX SURFACES ALÉATOIRES

3.1. Introduction

Considérons maintenant deux surfaces aléatoires gaussiennes en contact. Chaque surface est constituée d'aspérités dont les sommets sont de forme sphérique, de même rayon R et possède une densité uniforme η comme indiqué précédemment.

L'existence de contacts entre aspérités dépend de l'altitude des aspérités et de leur position latérale. Nous allons utiliser l'approche statistique classique pour prendre en compte les effets de non contact entre aspérités dus à de légers décalages r entre aspérités en vis-à-vis (Figure 67).

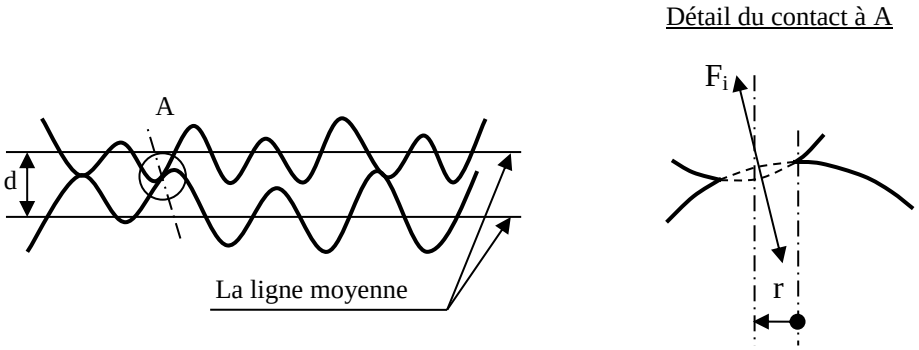


Figure 67 : Contact entre des surfaces aléatoires.

3.2. Nombre de contacts

Pour établir le nombre de contacts entre deux surfaces, nous allons choisir une aspérité de la surface 1 et déterminer, dans un premier temps, la probabilité d'avoir des aspérités de la surface 2 en contact suivant la morphologie définie en Figure 68 ci-dessous.

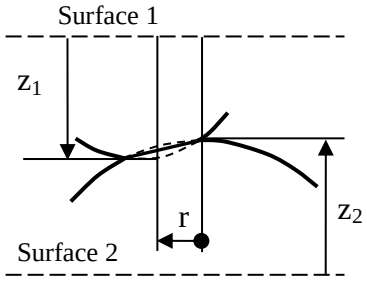


Figure 68 : Morphologie du contact entre deux aspérités de surfaces aléatoires

La situation décrite en Figure 68 nécessite que l'aspérité de la surface 1 soit à l'altitude z_1, que l'aspérité de la surface 2 soit à l'altitude z_2 et que ces deux aspérités soient latéralement espacées de r.

La probabilité pour avoir une aspérité de la surface i (i = 1 ou 2) avec une altitude comprise entre z_i et z_i+dz_i est : $\mathrm{Prob}(z_i, z_i + dz_i) = \emptyset(z_i)dz_i$ (Figure 69).

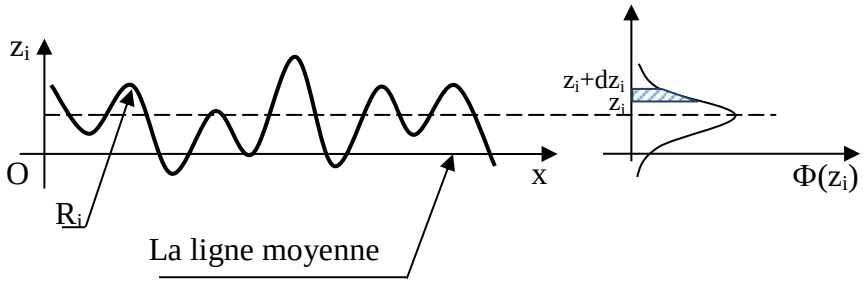


Figure 69 : Probabilité pour avoir une aspérité de la surface i (i = 1 ou 2) à une altitude donnée

La probabilité pour avoir une aspérité de la surface 2 située à une distance entre r et r+dr autour de l'aspérité de la surface 1 est (Figure 70) :

$$\mathrm{Prob}(r, r + dr) = \eta_2 2\pi r dr \text{ avec } \eta_2 = \frac{1}{AR_2{}^2}$$

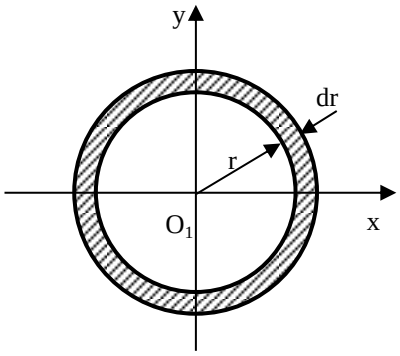


Figure 70 : Distribution des aspérités de la surface 2 autour d'une aspérité de la surface 1

La probabilité dProb d'avoir une aspérité dans la configuration présentée en Figure 70 est donc :

$$\mathrm{dProb} = \mathrm{Prob}(z_1, z_1 + \mathrm{d}z_1).\,\mathrm{Prob}(z_2, z_2 + \mathrm{d}z_2).\,\mathrm{Prob}(r, r + \mathrm{d}r)$$

Le nombre de contacts entre les deux surfaces dans cette configuration est :

$$\mathrm{d}N_a = (\mathrm{Nbre.\,sur1}).\,\mathrm{dProb}$$

avec $\mathrm{Nbre.\,sur1} = \eta_1 A_0 = \frac{A_0}{AR_1^2}$: le nombre d'aspérités de la surface 1.

Ainsi :

$$N_a = 2\pi\eta_1\eta_2 A_0 \int_{z_1}\int_{z_2}\int_{r} \emptyset(z_1)\emptyset(z_2)r\,dr\,dz_1\,dz_2$$

Avec r variant de 0 à r_0 position limite de contact qui peut être déterminée, comme on l'a vue aux chapitres précédents, par une analyse géométrique du contact, soit :

$$r_0 = \sqrt{2(z_1 + z_2 - d)(R_1 + R_2)}$$

Pour une distance d donnée entre deux surfaces moyennes, le nombre de contacts entre deux surfaces aléatoires est :

$$N_a = 2\pi A_0 \frac{1}{AR_1^2}\frac{1}{AR_2^2}(R_1 + R_2) \iint_{z_1+z_2\geq d} (z_1 + z_2 - d)\emptyset(z_1)\emptyset(z_2)\,dz_1\,dz_2 \qquad (86)$$

L'intégrale double ne peut se réduire dans le cas de fonctions de distribution $\emptyset(z_i)$ normales. Pour les applications numériques, il sera indispensable de passer par des approximations numériques de ces intégrales (méthode des trapèzes ou autre).

Discussion :

Le nombre de contacts entre deux surfaces aléatoires est proportionnel à l'aire nominale de contact (A_0) : plus cette aire est grande, plus le nombre de contacts est élevé. Ce résultat est tout à fait logique et est également compatible avec les résultats des études précédentes.

Le nombre de contact est proportionnel à la densité d'aspérités de chaque surface $\frac{1}{AR_1^2}$ et $\frac{1}{AR_2^2}$. Ce résultat attendu est également identique à celui obtenu dans le paragraphe précédent avec les surfaces périodiques.

Le terme $R_1 + R_2$ traduit l'influence de la forme des aspérités sur le nombre de contacts. Ce terme était déjà présent dans le cas de la surface périodique.

Enfin le dernier terme est non défini, il s'agit d'une intégrale double que l'on ne peut pas résoudre analytiquement dans le cas général d'une distribution gaussienne, ce qui ne facilitera pas l'analyse des résultats.

Dans le processus de calcul, nous avons commencé avec une surface spécifique (ici nous avons choisi la surface 1). Nous observons que l'écriture est totalement symétrique suivant les indices 1 et 2.

Enfin, le nombre de contacts entre deux surfaces aléatoires ne dépend pas des propriétés matériaux des deux surfaces, il ne dépend que de la microgéométrie de la surface.

3.3. Force

Comme dans les chapitres précédents, en utilisant la théorie de Hertz, on peut déterminer la force entre deux aspérités en contact :

$$F(r) = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta(r)^{3/2}$$

Le rapprochement δ(r) correspond au rapprochement entre deux aspérités (Figure 71) :

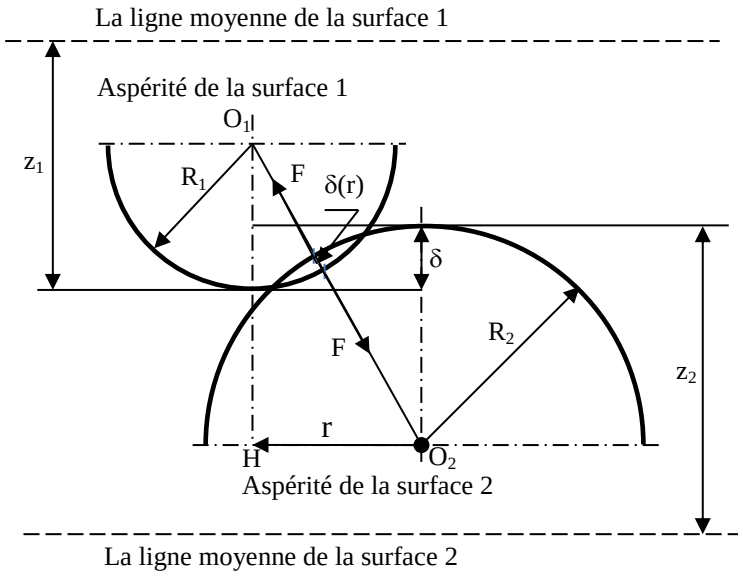


Figure 71 : Rapprochement entre 2 aspérités en contact

En reprenant le calcul déjà réalisé au chapitre 3, on obtient :

$$\delta(r) = z_1 + z_2 - d - \frac{r^2}{2(R_1 + R_2)}$$

La force entre deux aspérités en contact est :

$$F(r) = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \left[z_1 + z_2 - d - \frac{r^2}{2(R_1 + R_2)} \right]^{3/2}$$

Pour une distance d donnée entre deux surfaces moyennes, la force totale est calculée comme suit sur l'ensemble des aspérités en contact :

$$dF_a = dN_a . F(r)$$

Dans cette relation dN_a est le nombre de contacts entre les surfaces dans la configuration de la Figure 67, déjà explicité au paragraphe 3.2 de ce chapitre.

Donc, la force totale est :

$$F_a = \int \mathrm{d}N_a . F(r)$$

$$\Leftrightarrow F_a = \frac{8\pi}{3} E^* R^{1/2} A_0 \eta_1 \eta_2 \int_r \int_{z_1} \int_{z_2} r \left[z_1 + z_2 - d - \frac{r^2}{2(R_1 + R_2)} \right]^{3/2} \emptyset(z_1) \emptyset(z_2) dr dz_1 dz_2$$

Par intégration sur la variable r, variant de 0 à $r_0 = \sqrt{2(z_1 + z_2 - d)(R_1 + R_2)}$, il vient :

$$F_a = \frac{16\pi}{15} E^* \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} (R_1 + R_2) A_0 \frac{1}{AR_1^2} \frac{1}{AR_2^2} \iint_{z_1+z_2 \geq d} (z_1 + z_2 - d)^{5/2} \emptyset(z_1) \emptyset(z_2) dz_1 dz_2 \quad (87)$$

En supposant que les distributions d'altitudes des aspérités suivent une loi gaussienne, on obtient :

$$F_a = \frac{8}{15\sigma_1\sigma_2} E^* \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} (R_1 + R_2) A_0 \frac{1}{AR_1^2} \frac{1}{AR_2^2} \iint_{z_1+z_2 \geq d} (z_1 + z_2 - d)^{5/2} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_1 - m_1}{\sigma_1}\right)^2\right] exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_2 - m_2}{\sigma_2}\right)^2\right] dz_1 dz_2 \quad (88)$$

Comme pour le calcul du nombre d'aspérités en contact, l'expression de la force totale comporte une intégrale double, que l'on ne peut résoudre analytiquement, qui imposera donc l'utilisation de méthode numérique pour sa détermination.

Discussion : Comme le nombre d'aspérités en contact, la force totale entre deux surfaces aléatoires est fonction de l'aire nominale de contact (A_0), de la forme des aspérités (R_1, R_2), de l'espacement entre les aspérités sur chaque surface (AR_1, AR_2), de l'altitude et de la distribution des altitudes des aspérités sur chaque surface (z_1, z_2 et $\Phi(z_1)$, $\Phi(z_2)$). En outre, elle dépend aussi des caractéristiques des matériaux des deux surfaces (E^*). On constate que le résultat présente une écriture totalement symétrique vis-à-vis des paramètres des deux surfaces.

3.4. Analyse du glissement entre les deux surfaces

Nous venons d'étudier une situation statique du contact de deux surfaces rugueuses séparées d'une distance moyenne d. Analysons maintenant les évolutions des efforts entre aspérités lors d'un mouvement relatif de glissement entre les deux surfaces avec une distance normale d maintenue constante.

Si on considère une aspérité de la surface i (i=1 ou 2) et que l'on analyse l'évolution de l'effort sur cette aspérité lors du glissement, on obtient qualitativement une succession de changements d'intensité, de durée et d'espacement. Ces variations proviennent de deux causes, d'une part des décalages entre sommets et d'autre part de la variabilité des altitudes des sommets d'aspérités successives.

L'allure schématique de la valeur de la force exercée correspond au diagramme de la Figure 72 qui présente des pics de chargements variables en durée, en intensité et en espacement.

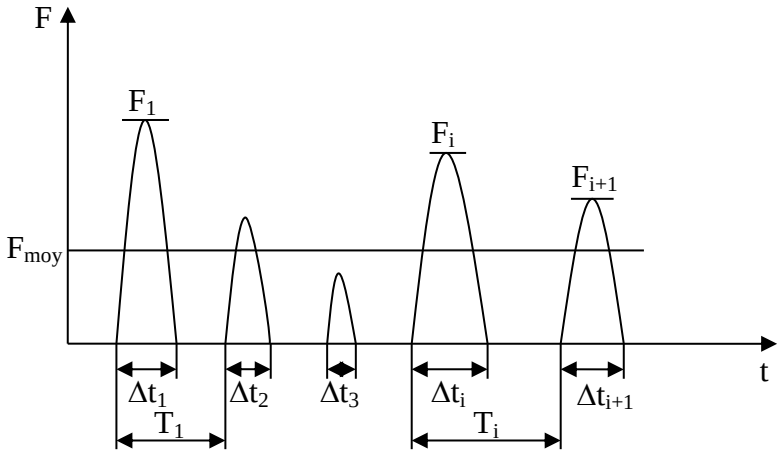


Figure 72 : Forme de la force sur une aspérité de la surface i.

Ces divers éléments : temps de passage sur l'aspérité (Δt), période de passage entre deux aspérités (T) et valeur de la force maximale (F_{max}) vont maintenant être quantifiés par une estimation de leurs valeurs moyennes.

Calcul de Δt_{moy}

Considérons deux aspérités en vis-à-vis d'altitudes z_1 et z_2 compatibles avec le contact ($z_1 + z_2 > d$). Le schéma présenté en Figure 73 détaille l'ensemble des possibilités de contact des aspérités de la surface 2 sur une aspérité de la sur face 1. Sur cette figure on

considère que le glissement est dans la direction x. Nous pouvons observer que le contact va exister pour les aspérités présentant un décalage y restant inférieur à la valeur r_0. La distance de glissement dépend de ce décalage.

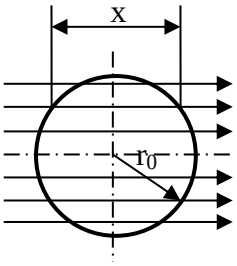


Figure 73 : Glissement entre des aspérités

La distance moyenne de passage sur ce type de contact est, comme au chapitre précédent :

$$x_{moy} = \frac{\pi r_0}{4}$$

Les aspérités ayant des altitudes variables, la valeur r_0 n'est pas une constante mais présente une distribution aléatoire induite par la distribution des altitudes des sommets. Ainsi une estimation de la distance moyenne sur l'ensemble des aspérités est :

$$x_{moy} = \frac{\pi \bar{r}_0}{4}$$

Le rayon moyen maximal $\bar{r}_0$ est déterminé comme suit :

$$\bar{r}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{d-z_1}^{+\infty} \emptyset(z_1)\, \emptyset(z_2) r_0(z_1 + z_2) dz_1 dz_2$$

$$\Leftrightarrow \bar{r}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{d-z_1}^{+\infty} \emptyset(z_1)\, \emptyset(z_2) \sqrt{2(z_1 + z_2 - d)(R_1 + R_2)} dz_1 dz_2$$

Le temps moyen de passage sur l'ensemble des aspérités, à vitesse de glissement v constante, est :

$$\Delta t_{moy} = \frac{x_{moy}}{v} = \frac{\pi}{4v} . \bar{r}_0$$

Calcul de F_{moy}

Considérons comme précédemment des aspérités d'altitudes données z_1 et z_2 et analysons les forces obtenues lors des différentes possibilités de passage présentées en Figure 73. L'intensité maximale de la force est atteinte lorsque le décalage dans le sens du mouvement (x dans notre cas) est nul. La force maximale va dépendre du décalage en y. Ainsi elle sera maximale si $y = 0$, et nulle si $y = \bar{r}_0$. La moyenne des maxima de force sur l'aspérité s'obtient en calculant la moyenne des forces sur y avec $x = 0$:

$$F_{moy} = \frac{1}{\bar{r}_0}\int_0^{\bar{r}_0} F(0,y)dy = \frac{1}{\bar{r}_0}\int_0^{\bar{r}_0} \frac{4}{3}E^* R^{1/2}\left[z_1 + z_2 - d - \frac{y^2}{2(R_1+R_2)}\right]^{3/2} dy$$

$$\Leftrightarrow F_{moy} = \frac{4}{3\bar{r}_0}E^* R^{1/2}\int_0^{\bar{r}_0}\left[z_1 + z_2 - d - \frac{y^2}{2(R_1+R_2)}\right]^{3/2} dr$$

Calcul de l'intervalle de temps moyen entre deux contacts

Considérons le trajet d'une aspérité de la surface 1 (Figure 74 de gauche) pendant un temps t arbitraire. Les aspérités de la surface 2 interceptées par cette aspérité de la surface 1 correspondent à celles qui s'écartent de moins de r_0 de sa trajectoire. La valeur de r_0 dépendant de l'altitude des aspérités, nous assimilerons cette situation à celle correspondant à la même distribution spatiale des aspérités mais avec une valeur r_0 constante prise comme moyenne des r_0 (Figure 74 de droite). Nous sommes ramenés au dénombrement des aspérités dans une bande de largeur $2\bar{r}_0$ et de longueur de vt.

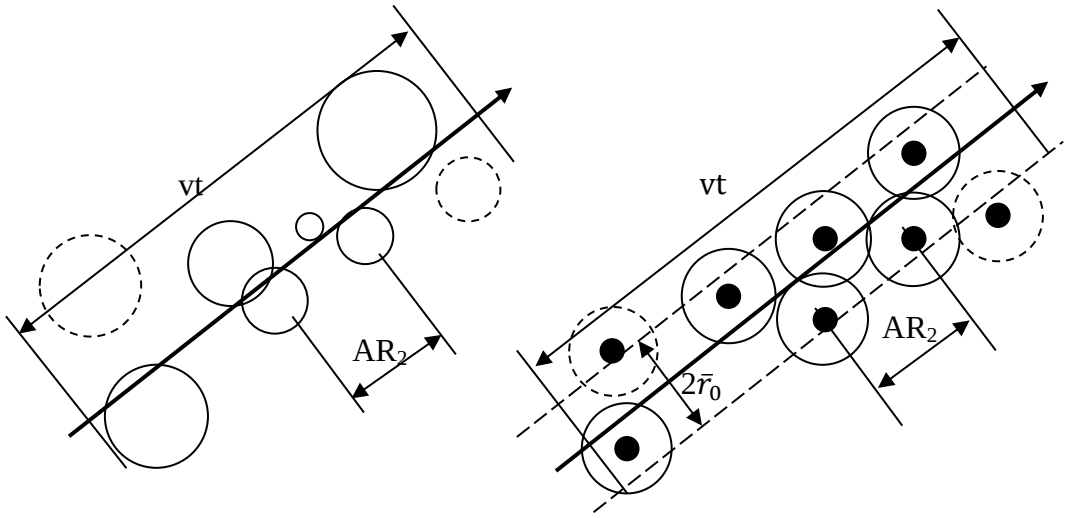


Figure 74 : Bande des aspérités en glissement

L'aire de cette bande est : $A = vt.2\bar{r}_0$

Le nombre de contacts dans cette bande est : $n = \frac{A}{AR_j^2} = nombre\ de\ chocs$

La période moyenne est définie par : $T_{ia} = \frac{t}{n} = \frac{AR_j^2}{2v\bar{r}_0}$ avec i = 1 ou 2 et j = 2 ou 1.

On constate que le temps moyen de passage (Δt_{moy}) sur l'ensemble des aspérités et la force moyenne (F_{moy}) sur l'aspérité pour chaque surface sont identiques pour les deux surfaces, par contre la période moyenne entre le passage de deux aspérités successives de la surface 2 sur une aspérité de la surface 1 (T_{1a}) est différente du temps moyen entre le passage de deux aspérités successives de la surface 1 sur une aspérité de la surface 2 (T_{2a}). Il dépend de l'espacement (AR_1, AR_2) entre deux aspérités de chaque surface.

Ces valeurs pourront servir de base pour le calcul en fatigue des aspérités quand du glissement se produit entre les deux surfaces.

4. CONTACT ENTRE SURFACES SOMME ET LISSE

Dans ce paragraphe, nous considérons le contact entre la surface somme de deux surfaces aléatoires et une surface lisse. Nous allons supposer que la surface somme ainsi définie est de nature similaire à chacune des deux surfaces de départ. Ainsi la surface somme est constituée d'aspérités dont les sommets sont de forme sphérique, avec un même rayon R et un même espacement AR. Les sommets des aspérités ont des altitudes variables z, comptées à partir de la ligne moyenne du profil, altitudes qui suivent une loi normale :

$$\emptyset(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

Avec m et σ, respectivement moyenne et écart-type des altitudes des sommets des aspérités.

La démarche classique d'utilisation de la surface somme consiste à définir la surface somme puis à calculer son écrasement face à une surface lisse rigide.

4.1. Identification de la surface somme

La surface somme est parfaitement définie au moyen du jeu des cinq paramètres suivants : module équivalent d'élasticité (E*), rayon équivalent des aspérités (R), espacement entre deux aspérités (AR), altitude moyenne des sommets des aspérités (m) et écart-type des

altitudes des sommets des aspérités (σ). L'écart-type doit être calculé à partir des paramètres des deux surfaces aléatoires en contact.

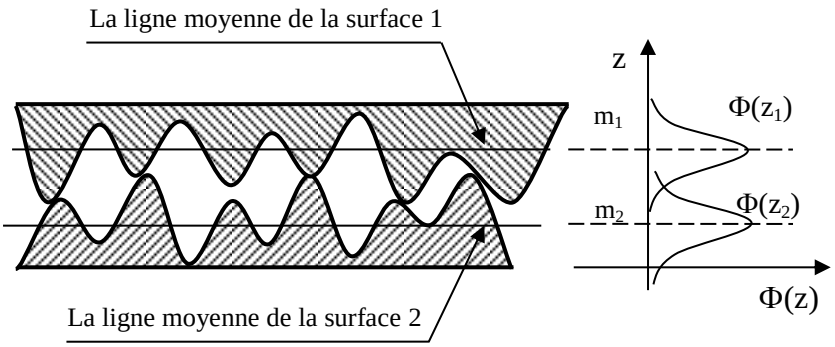


Figure 75 : Distribution des altitudes des aspérités en contact

Comme précédemment, le module équivalent d'élasticité (E*) de la surface somme est déterminé par la formule (5) et le rayon équivalent des aspérités (R) par la formule (50) du Chapitre 3. Par ailleurs, pour la définition de l'écart-type des altitudes des sommets des aspérités (σ), nous préconisons l'utilisation de la relation usuelle [33]:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

La moyenne des altitudes des sommets des aspérités m est calculée par la formule [25] :

$$m = m_1 + m_2$$

Avec un raisonnement analogue à celui développé au paragraphe 6 du Chapitre 4, nous trouvons que l'espacement entre deux aspérités de la surface somme peut être défini par :

$$AR = \min\{AR_1, AR_2\}$$

Nous nous proposons donc de comparer le contact entre la surface somme (définie à partir des paramètres ci-dessus) et une surface lisse, rigide avec le contact entre deux surfaces aléatoires rugueuses.

4.2. Nombre de contacts

Le contact entre une surface somme aléatoire et une surface lisse a été explicité dans diverses situations de comportement mécanique des matériaux (élastique jusqu'à plastique). Ici, nous ne considérerons que le cas d'un comportement élastique généralisé sur l'ensemble

des aspérités (Figure 76) qui correspond à l'hypothèse retenue pour le contact rugueux sur rugueux.

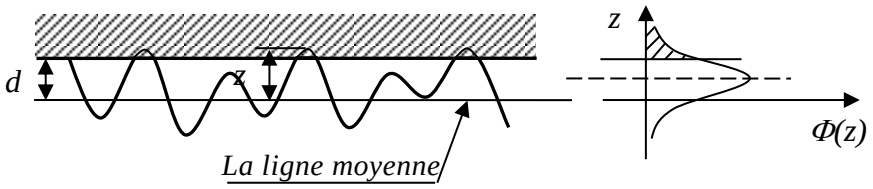


Figure 76 : Modèle du contact entre surface somme (aléatoire) et lisse

Pour une position donnée d de la surface lisse (comptée à partir de la ligne moyenne de la surface somme aléatoire), le nombre de contacts entre les deux surfaces, sur une étendue A_0, peut être déterminé par l'une ou l'autre expression suivante :

$$N_{sa} = \frac{A_0}{AR^2}\int_d^\infty \emptyset(z)dz = \frac{A_0}{\min\{AR_1^2, AR_2^2\}}\int_d^\infty \emptyset(z)dz \quad (89)$$

Ou :

$$N_{sa} = \frac{A_0}{\min\{AR_1^2, AR_2^2\}}\int_d^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)^2\right]dz \quad (90)$$

Cette relation (90) sera comparée ultérieurement à la formule (86) établie pour le contact entre deux surfaces rugueuses.

Discussion :

Le nombre de contacts entre une surface somme aléatoire et une surface lisse, rigide dépend de l'aire nominale de contact (A_0), de l'espacement entre les aspérités (AR) et de la distribution de l'altitude des sommets des aspérités (Φ(z)). Le nombre de contacts N_{sa} ne peut pas se déterminer analytiquement, on le calculera donc numériquement.

4.3. Force

Pour une position donnée d de la surface somme, la force sur une aspérité d'altitude z est déterminée par : $F(z) = \frac{4}{3}E^* R^{1/2}\delta(z-d)^{3/2}$

La force totale est : $F_{sa} = \int_d^\infty F(z)dN(z) = \int_d^\infty F(z)\frac{A_0}{AR^2}\emptyset(z)dz$

On obtient alors :

$$F_{sa} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \frac{A_0}{AR^2} \int_d^{\infty} (z-d)^{3/2} \emptyset(z) dz$$

$$\Leftrightarrow F_{sa} = \frac{4}{3} E^* \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/2} \frac{A_0}{\min\{AR_1^2, AR_2^2\}} \int_d^{\infty} (z-d)^{3/2} \emptyset(z) dz \quad (91)$$

Cette formule (91) sera comparée à la formule (88) au paragraphe 5.

Comme pour le nombre d'aspérités en contact, la force totale ne peut pas être calculée analytiquement, le calcul se fait en utilisant une méthode numérique.

4.4. Analyse du glissement entre surfaces somme et lisse

Le modèle de contact entre une surface somme et une surface lisse est présenté Figure 77, dans lequel la surface somme est construite à partir de deux surfaces aléatoires tel qu'indiqué ci-dessus.

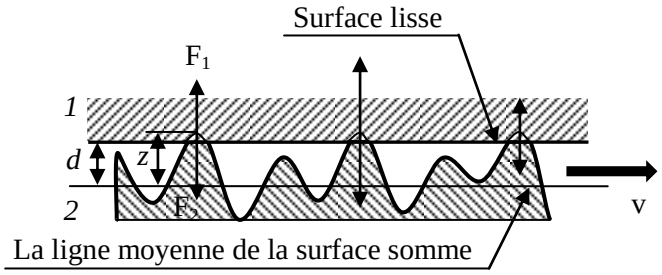


Figure 77 : Contact entre une surface somme (aléatoire) et une surface lisse

Considérons un point de la surface lisse, rigide (surface 1). Quand il y a interaction entre la surface somme et la surface lisse en ce point, la force résultante, en ce point de la surface lisse, a une intensité qui dépend de l'altitude du sommet de l'aspérité de la surface somme et vaut :

$$F(z) = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2}$$

Relation dans laquelle δ est le rapprochement de la surface somme en ce point $\delta = z - d$ donc, on obtient :

$$F(z) = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (z-d)^{3/2}$$

Quand la surface somme glisse avec la vitesse *v*, la force au point considéré a l'allure présentée Figure 78.

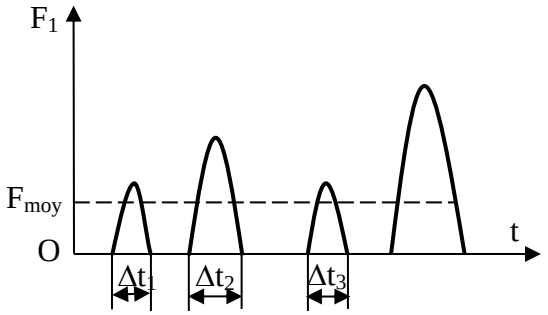


Figure 78 : Intensité de la force en un point donné de la surface lisse

Calcul de Δt_{moy}

L'aire moyenne de contact est [7] :

$$A_1 = \int_d^\infty \pi R(z-d)\emptyset(z)dz$$

Le contact entre chaque aspérité de la surface somme et lisse étant circulaire, son rayon moyen $\bar{a}_0$ vaut :

$$\bar{a}_0 = \sqrt{\int_d^\infty R(z-d)\emptyset(z)dz}$$

Le temps moyen de passage est :

$$\Delta t_{moy} = \frac{2\bar{a}_0}{v} = \frac{2\sqrt{\int_d^\infty R(z-d)\emptyset(z)dz}}{v}$$

Calcul de F_{moy}

La force moyenne est :

$$F_{moy} = \frac{4}{3}E^* R^{1/2}\int_d^\infty (z-d)^{3/2}\,\emptyset(z)dz$$

Calcul de l'intervalle de temps moyen entre deux contacts

Considérons une bande de largeur de $2\bar{a}_0$ et de longueur de vt comme présentée Figure 79. Un raisonnement identique à celui du paragraphe 3.4 de ce chapitre montre que cette bande contient le nombre d'aspérités de la surface somme interceptées par un point de la surface lisse.

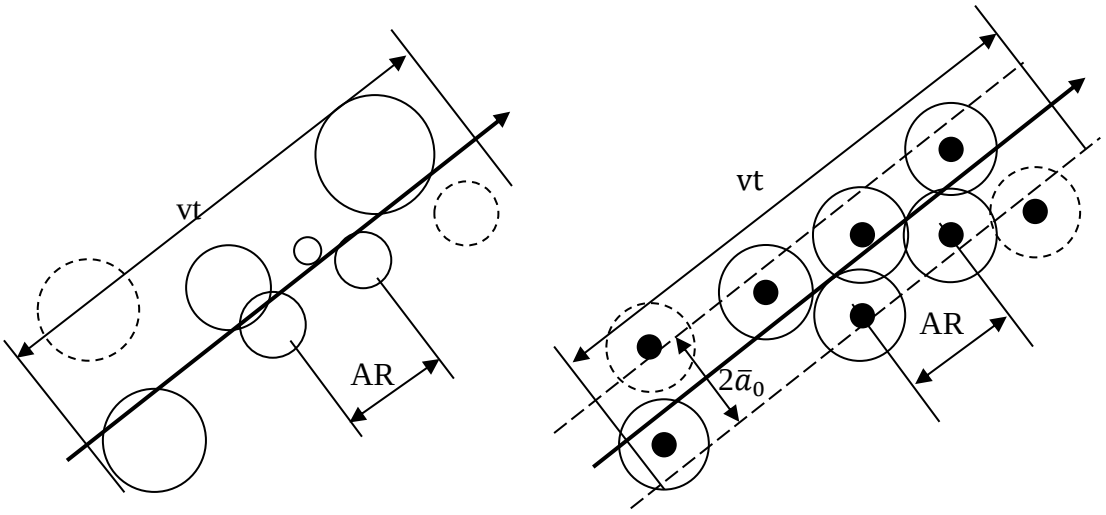


Figure 79 : Bande des aspérités en glissement

L'aire de cette bande est : $A = vt.2\bar{a}_0$

Le nombre de contacts dans cette bande est : $n = \frac{A}{AR^2} = nombre\ de\ chocs$

La période moyenne est définie par : $T_{sa} = \frac{t}{n} = \frac{AR^2}{2v\bar{a}_0}$

Maintenant, intéressons-nous à une aspérité de la surface somme en contact avec la surface lisse. La force sur cette aspérité est constante quand il y a interaction entre les deux surfaces. La valeur de cette force est déterminée par :

$$F_2 = \frac{4}{3}E^* R^{1/2}(z-d)^{3/2}$$

Dans laquelle z est l'altitude de l'aspérité considérée. Pour les autres aspérités d'altitudes différentes, la valeur de la force sur ces aspérités est systématiquement constante mais avec une intensité différente en raison de la dépendance de la force avec l'altitude de l'aspérité. On peut déterminer la force moyenne sur toutes aspérités de la surface somme par :

$$F_{moy} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \int_d^{\infty} (z-d)^{3/2} \emptyset(z) dz$$

La force moyenne obtenue sur toutes les aspérités de la surface somme en contact avec la surface lisse est présentée sur la Figure 80.

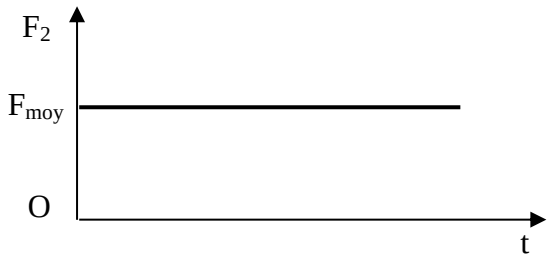


Figure 80 : Force sur une aspérité de la surface somme en contact avec la surface lisse

L'évolution, au cours du temps, de l'effort sur toute aspérité en contact est complètement différente de celle obtenue pour un point de la surface lisse (comparer Figure 78 et Figure 80). L'aspérité restant en permanence sous sollicitation, on retrouve une fois de plus la non-représentativité de la surface somme vis-à-vis des successions de chocs caractéristiques de deux surfaces rugueuses en glissement.

5. COMPARAISON ENTRE RUGUEUX/RUGUEUX ET SOMME/LISSE

5.1. Comparaison des formulations

Pour pouvoir identifier plus facilement la différence entre les résultats des deux modèles : contact entre deux surfaces aléatoires et contact entre une surface somme et une surface lisse rigide, on rappelle les résultats en commençant par la formulation du nombre de contacts.

Le nombre de contacts entre deux surfaces aléatoires est :

$$N_a = 2\pi A_0 \frac{1}{AR_1^2} \frac{1}{AR_2^2} (R_1 + R_2) \int_{z_1=-\infty}^{+\infty} \int_{z_2=d-z_1}^{+\infty} (z_1 + z_2 - d) \emptyset(z_1)\, \emptyset(z_2) dz_1 dz_2 \qquad (86)$$

Le nombre de contacts entre une surface somme (de deux surfaces aléatoires) et une surface lisse, rigide est :

$$N_{sa} = \frac{A_0}{AR^2}\int_d^{\infty} \emptyset(z)dz = \frac{A_0}{\min\{AR_1^2, AR_2^2\}}\int_d^{\infty} \emptyset(z)dz \quad (89)$$

D'après les formules (86) et (89), on peut observer que le nombre de contacts entre une surface somme et une surface lisse et le nombre de contacts entre deux surfaces aléatoires diffèrent. Seul le terme A_0 est commun aux deux formulations. L'intégration est différente avec une intégrale simple pour (89) et une double pour (86) ; de plus l'intégrale de (89) ne dépend que de $\emptyset(z)$ (exposant z égal à 0) alors que l'intégrale de (86) dépend de $z\,\emptyset(z)$ (exposant z égal à 1).

La force totale entre deux surfaces aléatoires est déterminée selon la formule (87) :

$$F_a = \frac{16\pi}{15} E^* \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} (R_1 + R_2) A_0 \frac{1}{AR_1^2}\frac{1}{AR_2^2}\int_{z_1=-\infty}^{+\infty}\int_{z_2=d-z_1}^{+\infty} (z_1 + z_2 - d)^{5/2}\emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1 dz_2 \quad (87)$$

La force totale entre une surface somme (de deux surfaces aléatoires) et une surface lisse, rigide est déterminée selon la formule (91) :

$$F_{sa} = \frac{4}{3}E^* \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} \frac{A_0}{\min\{AR_1^2, AR_2^2\}}\int_d^{\infty} (z-d)^{3/2}\,\emptyset(z)dz \quad (91)$$

Pour le calcul de la force totale, d'après les formules (87) et (91), on observe, entre les deux modèles, des différences similaires à celles énoncées ci-dessus. Si les termes *E**, *R* et A_0 sont identiques, les intégrations et les exposants de z sont, eux par contre, différents : intégrale simple d'un côté contre double de l'autre et exposant en z égal à 3/2 pour (91) contre 5/2 pour (87).

5.2. Données pour la comparaison numérique

Les formulations ci-dessus ne pouvant pas être calculées analytiquement, nous allons donc, dans la section suivante, les déterminer en utilisant des méthodes numériques. Les paramètres utilisés pour le calcul numérique sont obtenus à partir de mesures réalisées sur le Surfascan 3S Somicronic (Tableau 2).

Tableau 2 : Principaux paramètres des surfaces aléatoires

Paramètres	Surface 1	Surface 2
Altitude moyenne des sommets	$m_1 = 5$ µm	$m_2 = (0,1 \text{ à } 1)m_1$
Ecart-type des altitudes des sommets	$\sigma_1 = 1$ µm	$\sigma_2 = (0,1 \text{ à } 1)\sigma_1$
Espacement entre deux aspérités	$AR_1 = 200$ µm	$AR_2 = (0,1 \text{ à } 1)AR_1$
Rayon de l'aspérité	$R_1 = 250$ µm	$R_2 = (0,1 \text{ à } 1)R_1$

Dans ce calcul, les paramètres microgéométriques de la surface 1 sont constants, et étape par étape, chacun des paramètres de la surface 2 seront changés ce qui permettra d'étudier successivement l'influence de l'altitude moyenne des sommets, de l'écart-type, de l'espacement et des rayons d'aspérités. L'aire apparente de contact entre deux surfaces est choisie égale à 100 mm^2. La force appliquée sur les deux surfaces est comprise entre 100 et 5000 N ce qui correspond à une pression apparente de contact variant entre 1 et 50 MPa, couvrant l'essentiel des cas pratiques. Pour chaque jeu de paramètres, nous allons obtenir deux courbes d'écrasement (Figure 81), l'une pour le contact rugueux sur rugueux (pointillés rouges), et l'autre pour le contact avec la surface somme (trait continu noir). Notre objectif étant de quantifier les écarts entre ces deux courbes, nous avons choisi de ne retenir les écarts sur d que pour les deux valeurs extrêmes d'effort (100 et 5000 N).

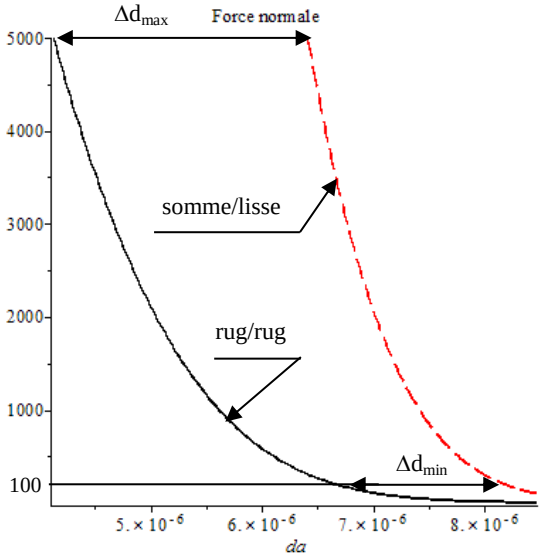


Figure 81 : Différence de force normale entre deux modèles

Δd_{max} correspond à la force maximale F = 5000 N et vaut :

$$\Delta d_{max} = d_{sa}(5000) - d_a(5000)$$

Dans laquelle $d_{sa}(5000)$ représente la distance entre surfaces somme et lisse quand la force appliquée est de 5000 N et $d_a(5000)$ la distance entre deux surfaces aléatoires pour une même force appliquée de 5000 N.

Δd_{min} correspondand à la force minimale F = 100 N :

$$\Delta d_{min} = d_{sa}(100) - d_a(100)$$

Dans laquelle $d_{sa}(100)$ représente la distance entre surfaces somme et lisse quand la force appliquée est de 100 N et $d_a(100)$ la distance entre deux surfaces aléatoires pour le même effort d'application de 100 N.

En outre, nous nous intéresserons aussi à la différence du nombre de contacts entre les deux modèles. Comme pour l'écrasement, nous ne considérerons que les écarts pour les valeurs extrêmes de force (100 et 5000 N) :

$$\Delta N_{max} = N_{sa}(5000) - N_a(5000)$$

$$\Delta N_{min} = N_{sa}(100) - N_a(100)$$

Dans laquelle : $N_{sa}(5000)$ est le nombre de contacts entre surfaces somme et lisse quand la force appliquée est égale à 5000 N ; $N_a(5000)$ le nombre de contacts entre deux surfaces aléatoires quand la force appliquée est de 5000 N ; $N_{sa}(100)$ le nombre de contacts entre surfaces somme et lisse quand la force appliquée est de 100 N ; $N_a(100)$ le nombre de contacts entre deux surfaces aléatoires quand la force appliquée est égale à 100 N.

5.3. Analyse de l'influence des différents paramètres

5.3.1. Influence de l'altitude moyenne

Dans le premier cas, on va s'intéresser à des changements de l'altitude moyenne des sommets de la surface 2 avec des valeurs comprises entre 0,5 et 5 µm, l'altitude des sommets de la surface 1 étant maintenue constante et égale à 5 µm. Les valeurs de $\Delta d = d_{sa} - d_a$ (d_{sa} : distance entre les lignes moyennes de la surface somme et de la surface lisse ; d_a : distance entre deux surfaces moyennes dans le modèle rugueux sur rugueux) en fonction de l'altitude moyenne des aspérités sur la surface 2 sont présentées sur la Figure 82.

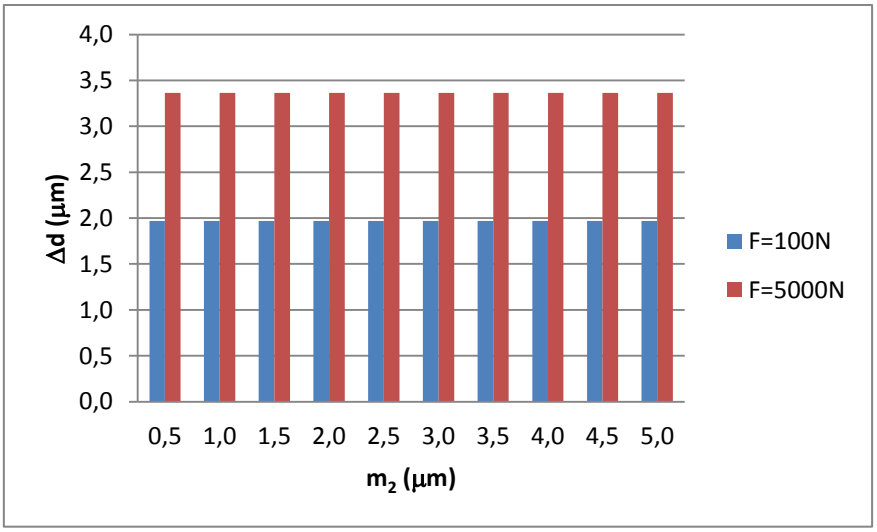


Figure 82 : Erreur commise sur d avec le concept de surface somme.

Quand on change la valeur de l'altitude moyenne des sommets de la surface 2, l'écart entre les deux modèles demeure toujours constant. A charge normale donnée, il est compris entre 2 et 3,5 µm suivant la force de chargement normale du contact. Plus le chargement augmente, plus l'écart est important (2 µm pour 1 MPa et 3,5 µm pour 50 MPa). Donc l'écart Δd entre les deux modèles ne dépend que de l'effort normal appliqué au contact et ce quelle que soit la valeur de l'altitude moyenne m_2 des sommets de la surface 2, les autres paramètres microgéométriques étant fixés.

On va s'intéresser maintenant à la valeur relative de l'écart qui permet de quantifier véritablement l'erreur commise avec l'approximation de la surface somme. Les résultats sont présentés sur la Figure 83.

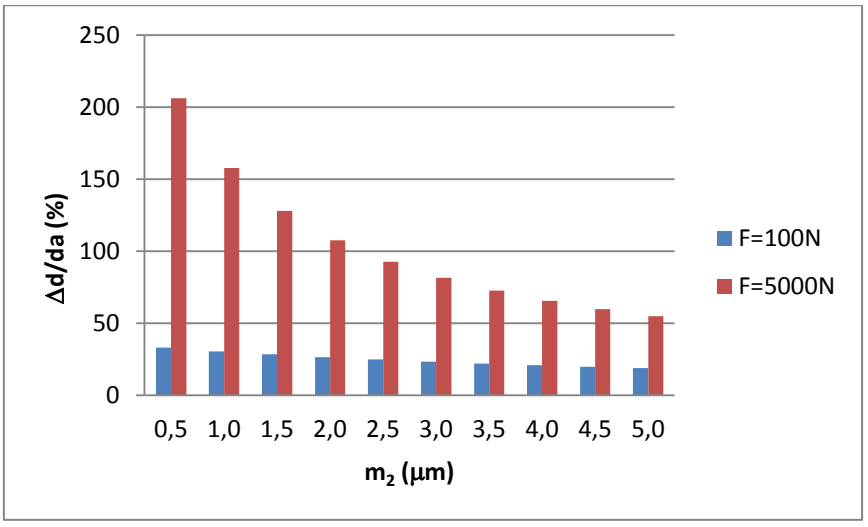


Figure 83 : Erreur relative commise sur d avec le concept de surface somme

A partir de ces résultats, on constate que quand la pression est faible (1MPa), la valeur relative $\frac{\Delta d}{d_a}$ ne change pas beaucoup, mais atteint des valeurs de l'ordre de 20%. Le modèle de surface somme n'est pas parfait mais reste acceptable. Si la pression est plus grande, l'erreur relative devient nettement plus importante et dépasse largement les 50% (et peut même atteindre 200%) ce qui montre que, dans ce cas, le modèle de surface somme n'est absolument pas apte à décrire l'espacement entre surfaces.

La différence entre le nombre de contacts entre les deux modèles est présentée sur la Figure 84.

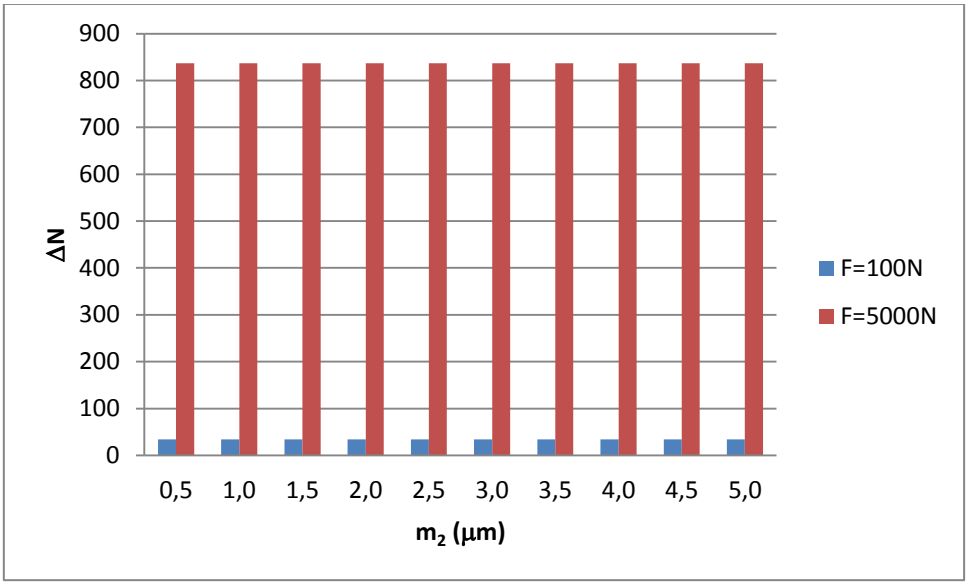


Figure 84 : Erreur commise sur N avec le concept de surface somme

Pour les mêmes raisons que celles développées pour la valeur de la force, les écarts entre les deux modèles sont indépendants de l'altitude moyenne des sommets. La valeur relative $\frac{\Delta N}{N_a}$ est présentée sur la Figure 85.

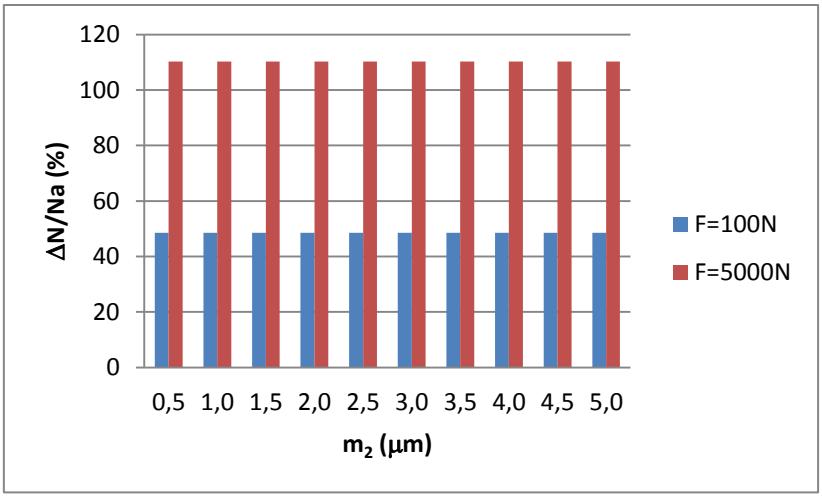


Figure 85 : Erreur relative commise sur N avec le de surface somme

La valeur relative $\frac{\Delta N}{N_a}$ reste identique et élevée quelle que soit la valeur de l'altitude moyenne des sommets de la surface 2 et ne dépend que de la valeur de l'effort normal appliqué au contact. Dans le domaine de forces exploré, le modèle de surface somme induit des erreurs importantes (supérieures à 50 %) sur le dénombrement des contacts.

5.3.2. Influence de l'écart-type

Dans ce paragraphe, on va étudier l'influence de l'écart-type de l'altitude des sommets sur la différence entre les deux modèles. Comme précédemment, on va faire varier un seul paramètre, l'écart-type de la surface 2 de 0,1 à 1 µm. Quand on réduit l'écart-type de 1 à 0,1 µm, la surface 2 se rapproche d'une surface périodique. Les différences sur la distance entre les deux modèles sont présentées sur la Figure 86.

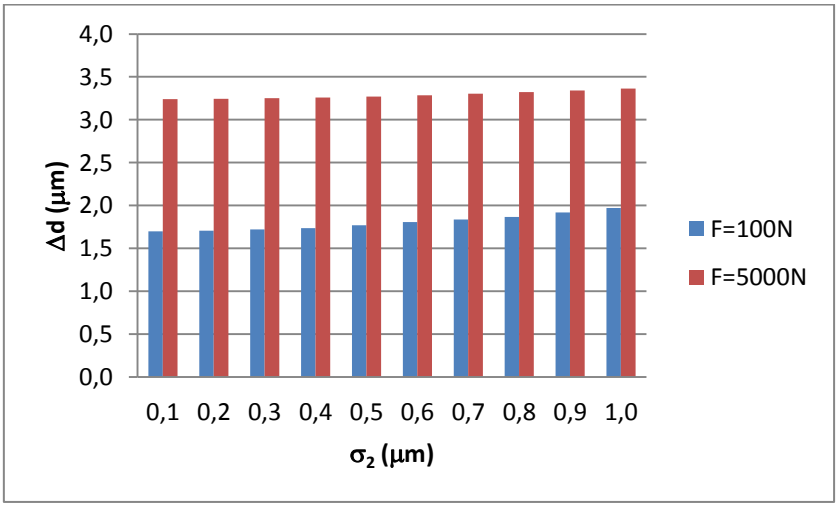


Figure 86 : Influence de l'écart-type sur la différence Δd entre les deux modèles

Il n'y a pas de changement significatif de Δd (rapport de distance entre les deux modèles) quand on change la valeur de l'écart-type de la surface 2. Dans le domaine de chargement étudié (de 100 à 5000 N), cela correspond à une erreur relative de 20 à 60%.

L'erreur relative sur le nombre de contacts entre les deux modèles est présentée sur la Figure 87.

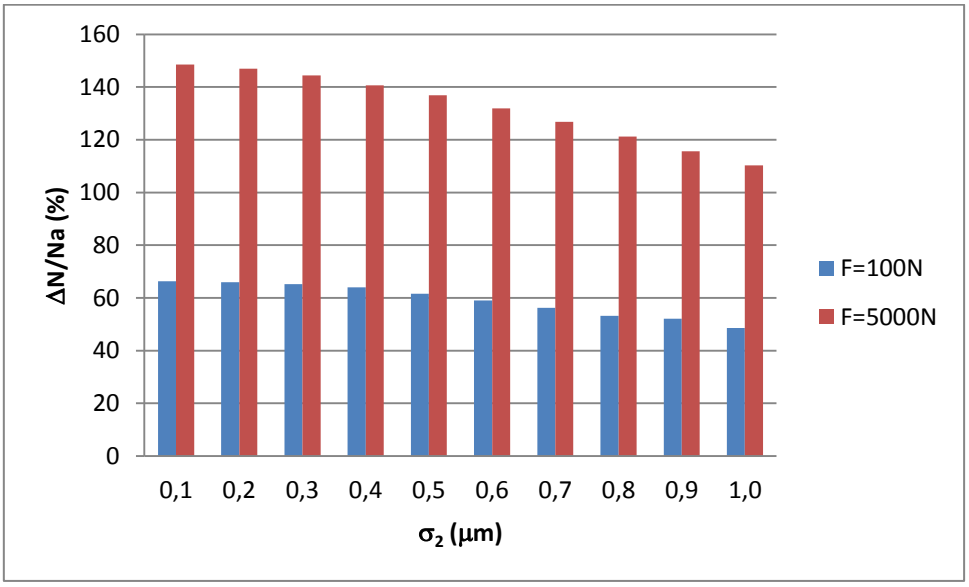


Figure 87 : Erreur relative sur le nombre de contacts

Les résultats obtenus montrent qu'avec une pression comprise entre 1 et 50 MPa, quand l'écart-type de la surface 2 varie de 0,1 à 1 µm, l'erreur relative sur le nombre de contacts entre les deux modèles varie de 150 à 50% suivant le chargement. Ces valeurs sont trop importantes pour considérer la validité du modèle classique de surface somme.

5.3.3. Influence de l'espacement

Maintenant on va voir l'influence de l'espacement entre aspérités sur l'erreur commise en utilisant le modèle de surface somme. Dans ce cas, l'espacement AR_2 de la surface 2 varie entre 200 et 20 µm. L'erreur relative sur Δd est présentée sur la Figure 88.

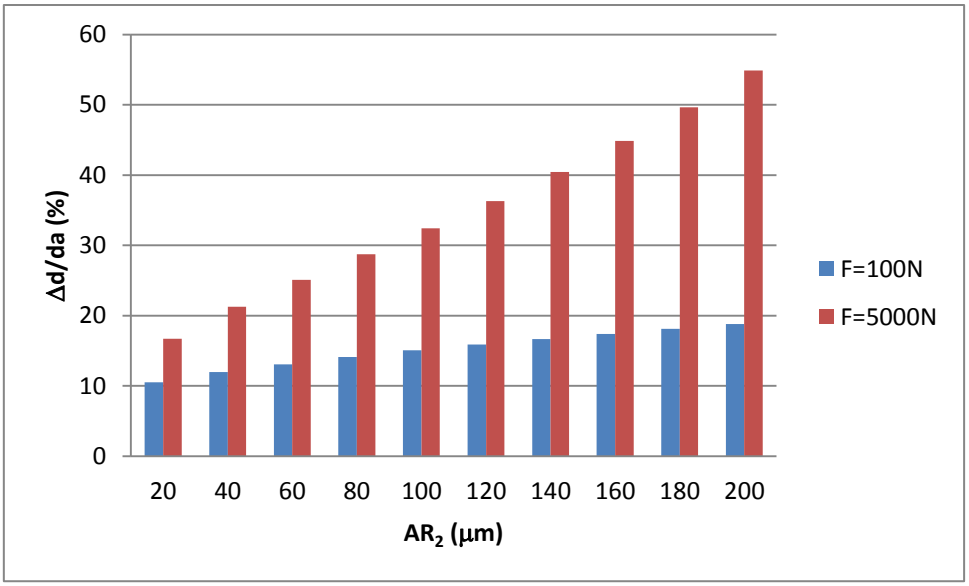


Figure 88 : Erreur relative sur la distance en fonction de l'espacement latéral AR_2

De manière globale, l'erreur diminue lorsque l'espacement entre aspérités diminue. Quand la force normale est faible (F=100 N), l'erreur relative ne varie pas beaucoup (de 10 à 20%), les deux modèles sont donc très proches. Mais quand la force normale est élevée (F=5000 N), l'erreur relative croit rapidement avec l'augmentation du paramètre espacement de 15 à 55%.

L'évolution de l'erreur relative sur le nombre de contacts entre les deux modèles en fonction de la variable espacement est présentée sur la Figure 89.

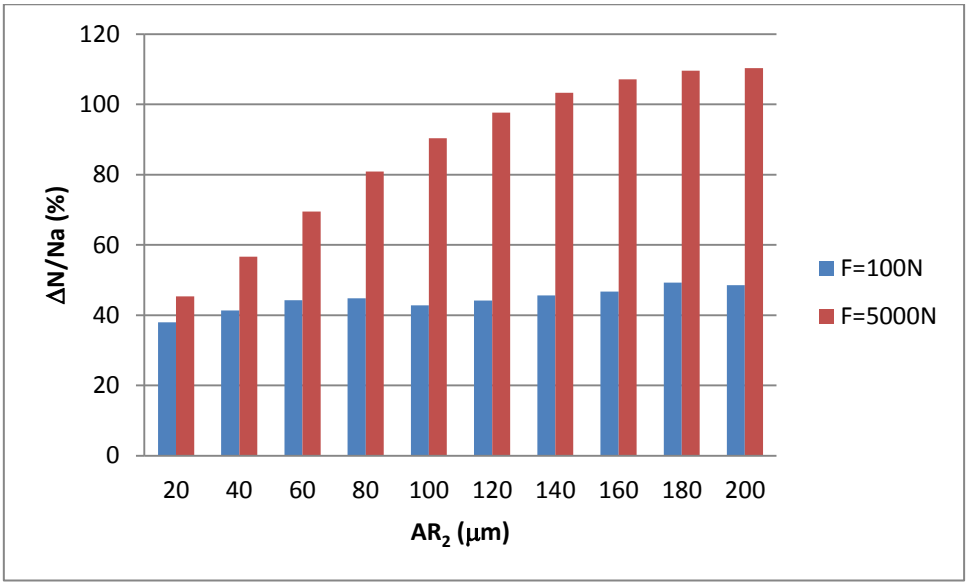


Figure 89 : Erreur relative sur le nombre de contacts

Comme il a été remarqué pour la distance d, nous constatons une diminution de l'erreur sur le nombre d'aspérités en contact avec la réduction du pas entre aspérités. Toutefois, dans le domaine des petits espacements (AR_2 = 50) et des faibles forces, l'erreur relative sur le nombre de contacts reste malgré tout élevée de l'ordre de 40%.

5.3.4. Influence du rayon

L'influence de la valeur du rayon sur l'erreur relative sur la distance, commise en utilisant le modèle de surface somme, est présentée sur la Figure 90. Les résultats montrent une influence très forte du rayon : lorsque l'on réduit le rayon moyen des aspérités, l'erreur relative augmente. D'après ce résultat, le modèle de la surface somme sur lisse est plus proche du modèle rugueux sur rugueux quand le rayon moyen des aspérités des deux surfaces est grand.

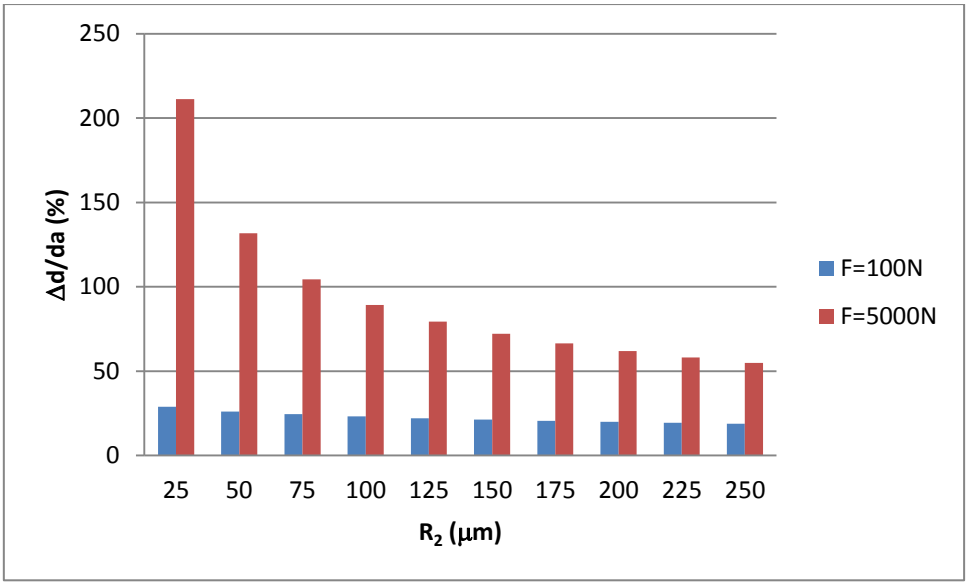


Figure 90 : Influence du rayon sur l'erreur relative sur la distance

Enfin, on va voir l'influence du rayon moyen sur l'erreur relative commise sur le nombre de contacts avec le concept de surface somme. Les résultats sont présentés sur la Figure 91.

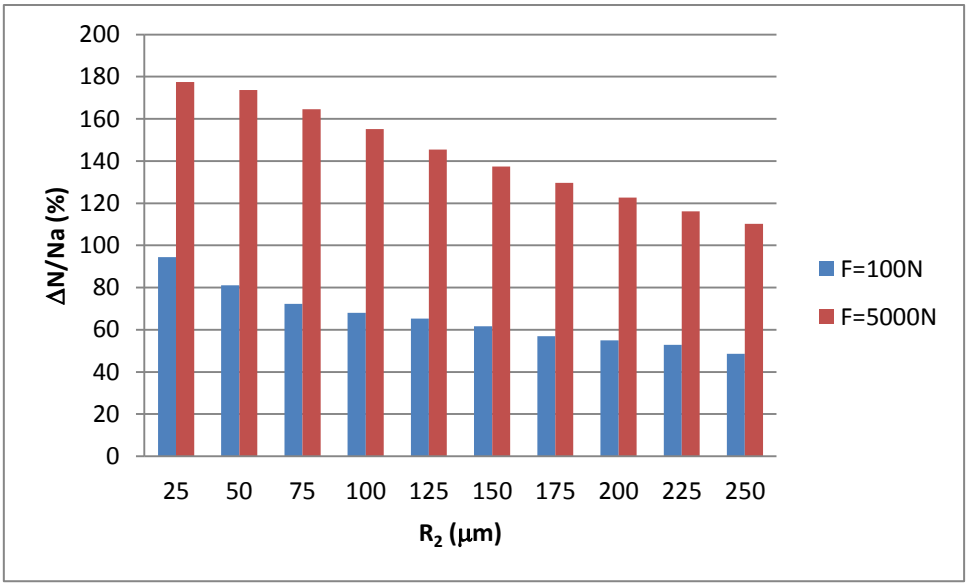


Figure 91 : Influence du rayon sur l'erreur relative sur le nombre de contacts

L'erreur relative sur le nombre d'aspérités suit la même loi que celle obtenue sur d. Les faibles rayons conduisent à des erreurs importantes sur le dénombrement d'aspérités avec le concept de surface somme. Dans la gamme de rayons étudiée, les erreurs relatives dépassent les 50%, et montrent que le concept de surface somme est très perfectible.

5.3.5. Synthèse

On a étudié l'influence individuelle de chaque paramètre microgéométrique sur l'erreur induite par l'utilisation du concept de surface somme. Pour chacun de ces paramètres, nous avons pu observer des influences variables :

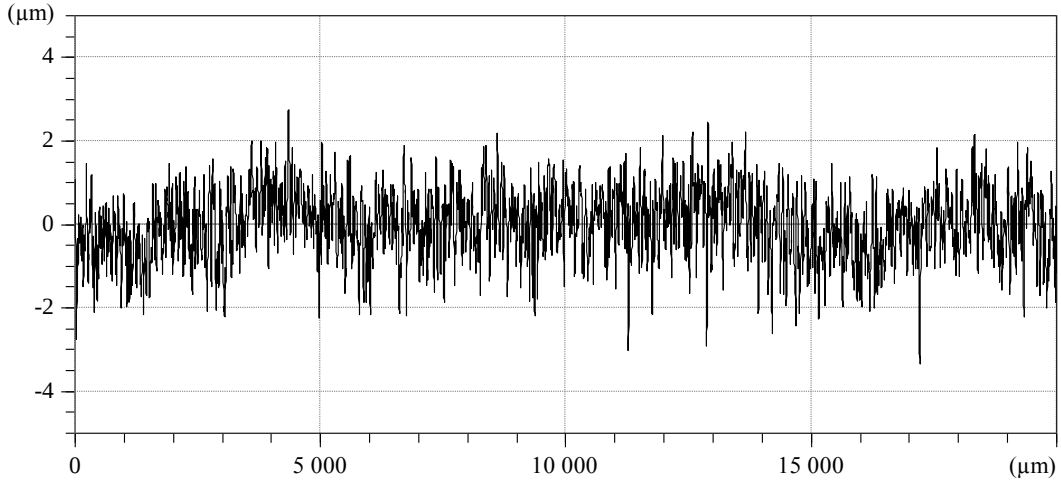
- Pas d'influence pour le changement de moyenne des altitudes des sommets
- Influence faible de l'écart-type des altitudes de sommet d'aspérités
- Diminution nette de l'erreur si l'espacement latéral entre aspérité diminue
- Augmentation importante de l'erreur si le rayon des aspérités diminue

Par contre, indépendamment de ces diversités, nous avons toujours observé une grande similitude entre les erreurs sur d et les erreurs sur le nombre de contacts. Les deux types d'erreurs : distance (Δd) et nombre de contacts (ΔN) semblent intimement liés et en conséquence une amélioration de la prédiction du nombre de contacts constitue une voie à privilégier pour perfectionner le concept de surface somme. Ce point sera mis en application dans le paragraphe 6 de ce chapitre.

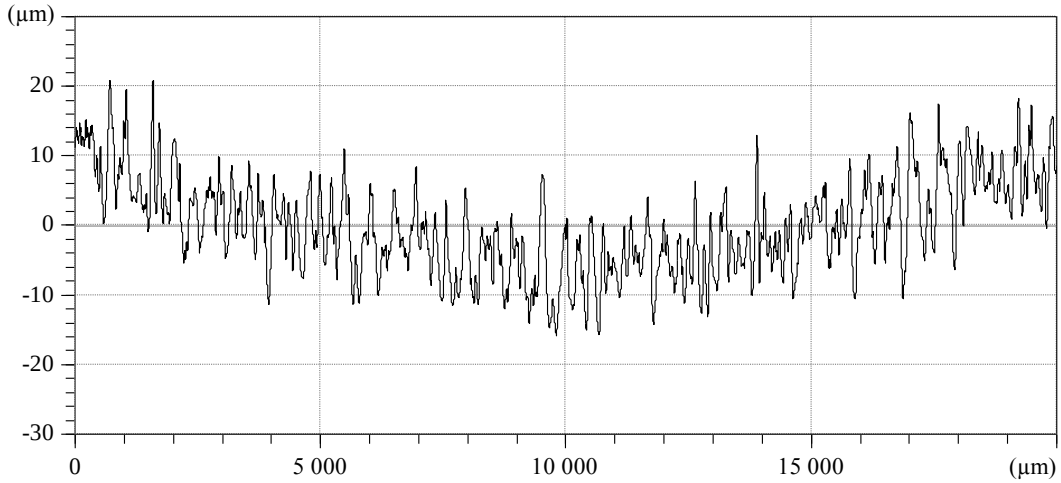
Enfin, il faut avoir à l'esprit que lorsque la microgéométrie d'une surface varie, l'ensemble des paramètres peut varier simultanément, ce qui constitue une situation sensiblement différente de celle étudiée jusqu'à présent, situation que nous allons détailler maintenant.

5.3.6. Cas d'une microgéométrie variable

Pour ce faire, nous nous sommes basés sur des mesures de microgéométries réalisées sur deux pièces obtenues par grenaillage et présentant des reliefs variables (cales visotactiles grenaillées). Les profils de mesures déterminés sur une longueur de mesure de 20 mm sont présentés en Figure 92.



a) Profil de grenaillage fin



b) Profil de grenaillage de référence

Figure 92 : Profil de de mesure

Les valeurs des paramètres de rugosité sont présentées dans le Tableau 3.

Tableau 3 : Valeurs des paramètres de rugosité de deux pièces

	W (µm)	R (µm)	AR (µm)
Grenaillage fin	1,4 à 1,9	2,4 à 2,6	120 à 130
Grenaillage de référence	7,7 à 8,6	11,2 à 12,3	260 à 295

Pour déterminer les paramètres statistiques des surfaces, nous avons utilisé les relations suivantes [15] :

Altitude moyenne des aspérités : $m = \frac{R}{2}$

Ecart type des altitudes des sommets : $\sigma = 0.3*W$

Rayon de l'aspérité : $Rayon = \frac{AR^2}{32m}$

Le Tableau 4 présente les paramètres statistiques des trois surfaces qui serviront de base aux calculs présentés ci-après. Ces trois microgéométries s'inspirent des deux mesures réalisées. Nous avons conservé les deux mesures qui constituent les valeurs extrêmes (en arrondissant sensiblement les valeurs des paramètres), et ajouté une microgéométrie intermédiaire (grenaillage moyen) avec des paramètres de rugosité interpolés.

Tableau 4 : Principaux paramètres des surfaces

	Grenaillage fin (1)	Grenaillage moyen (2)	Grenaillage de référence (3)
Altitude moyenne des sommets (µm)	1,25	2,5	5
Ecart-type des altitudes des sommets (µm)	0,5	1	1
Espacement entre deux aspérités (µm)	125	150	200
Rayon moyen d'aspérité (µm)	400	300	250

Nous pouvons observer dans ce tableau que lorsque la microgéométrie de grenaillage évolue, l'ensemble des quatre paramètres microgéométriques changent. Lorsque la rugosité augmente, l'altitude moyenne, l'écart-type des sommets et l'espacement augmentent tandis

que le rayon moyen des aspérités diminue. Nous avons retenu deux configurations de contact entre surfaces grenaillées : soit les deux surfaces en contact sont identiques, soit chaque surface est en contact avec la surface 3 prise comme surface de référence. La force appliquée au contact varie comme précédemment entre 100 à 5000 N.

Cas de surfaces identiques en contact : L'erreur relative sur la distance d entre deux surfaces moyennes est présentée sur la Figure 93.

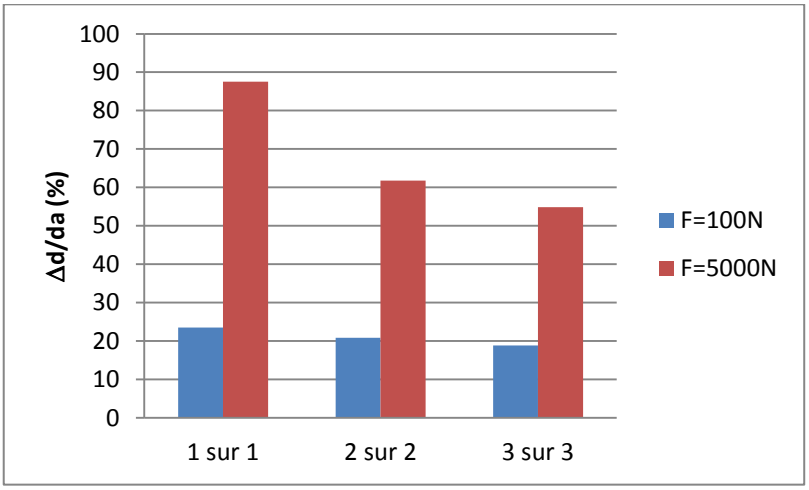


Figure 93 : Erreur relative sur la distance entre surfaces identiques

Quand la force appliquée sur le contact de deux surfaces identiques est faible, l'erreur relative entre les deux modèles reste faible et acceptable ($\Delta d/da \approx 20\%$). Plus les surfaces sont rugueuses, plus l'erreur relative entre les deux modèles diminue. L'erreur commise augmente significativement avec le chargement et dépasse 50% avec une pression de 50 MPa.

L'erreur relative sur le nombre de contacts est présentée sur la Figure 94.

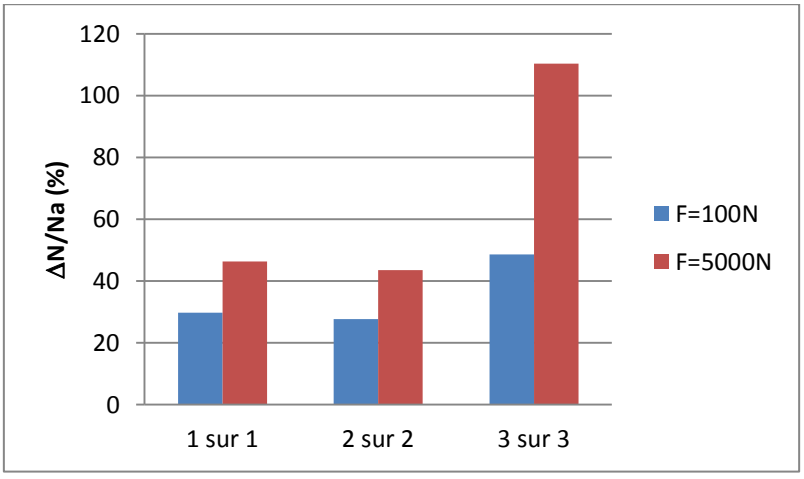


Figure 94 : Erreur relative du nombre de contacts entre surfaces identiques

Nous retrouvons des erreurs acceptables dans le cas du faible chargement avec des erreurs significatives pour les chargements importants (50 MPa), erreurs qui augmentent lorsque le relief des pièces augmente.

Utilisation de la surface 3 comme surface référence

L'erreur relative sur la distance entre les deux modèles est présentée sur la Figure 95.

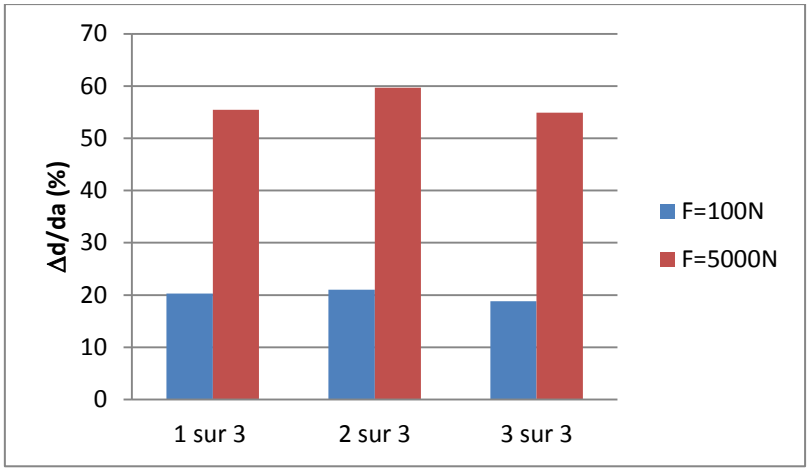


Figure 95 : Erreur relative sur la distance entre surface i (i = 1 à 3) et surface 3 choisie comme référence

On constate, pour chaque valeur de la force normale, que l'erreur relative sur la distance est pratiquement constante (Δd/da ≈ 20%) quand la force est de 100 N et varie de 50 à 60% quand la force est de 5000 N.

L'erreur sur le nombre de contacts entre les deux modèles est présentée sur la Figure 96.

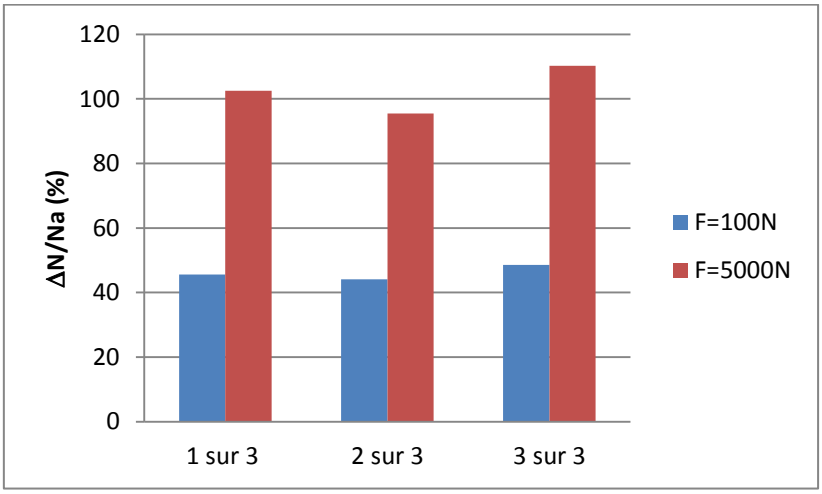


Figure 96 : Erreur relative sur le nombre de contacts avec la surface 3 surface de référence

Comme l'erreur relative sur la distance d, cette erreur est constante pour chaque valeur de la force normale, mais fortement dépendante du chargement. Quand la force est faible, l'erreur est approximativement de 40% et de 100% quand la force est maximale (5000 N).

A titre de synthèse de ces calculs sur surfaces réelles grenaillées, nous pouvons formuler les remarques suivantes :

- Les résultats obtenus sur surfaces réelles sont sensiblement différents de ceux obtenus sur surfaces théoriques avec variation d'un seul paramètre. En raison de la variation de plusieurs paramètres, on observe une combinaison des effets dont la principale conséquence est une réduction sensible des erreurs : la valeur maximale de l'erreur relative du nombre de contacts ($\Delta N/Na$) est égale à 110%, celle de la distance ($\Delta d/da$) est égale à 90% tandis que les valeurs correspondantes pour les surfaces théoriques sont, respectivement, de 180% (si seul σ_2 varie) et 210% (si seul R_2 varie).

- Mais, de nouveau, nous observons des erreurs relatives importantes puisqu'elles ne sont jamais inférieures à 20% pour une faible charge et à 50% pour une charge élevée. Cela montre que la modélisation de la surface somme est à perfectionner.

- Avec les surfaces réelles grenaillées, nous retrouvons une forte similitude entre les niveaux d'erreur sur l'espacement et le nombre d'aspérités en contact ce qui confirme qu'une amélioration significative du modèle de surface somme peut être obtenue en perfectionnant l'identification du nombre de contacts. Ce type de perfectionnement sera proposé dans le paragraphe 6 de ce chapitre.

6. IDENTIFICATION DE LA SURFACE SOMME RÉELLE

Nous avons pu observer précédemment que la grande majorité des simulations réalisées dans le paragraphe précédent souligne que le concept de surface somme induit des erreurs significatives tant sur l'écrasement des aspérités que sur le dénombrement des aspérités en contact. Dans ce paragraphe nous allons tenter d'améliorer ce concept de surface somme. Pour ce faire, on va appliquer la même démarche que celle développée dans le Chapitre 4 pour déterminer la surface somme réelle dans le cas du contact entre deux surfaces aléatoires.

Les paramètres de la surface somme : module d'élasticité E^*, rayon de l'aspérité R, espacement entre deux motifs AR, écart-type de l'altitude des sommets σ et moyenne des altitudes des sommets des aspérités m sont définis dans le paragraphe 3.1 du Chapitre 4. Ici, on va déterminer la fonction « distribution des altitudes des sommets des aspérités de la surface somme Φ(z) », de sorte que les deux modèles donnent des résultats identiques. Commençons par égaliser le nombre de contacts des deux modèles pour toutes les valeurs de d (distance entre les deux surfaces moyennes), c'est-à-dire :

$$\frac{dN_{sa}}{dd} = \frac{dN_a}{dd}$$

Pour le modèle du contact entre surface somme et lisse, on a :

$$\frac{dN_{sa}}{dd} = \frac{d}{dd}\left(\frac{A_0}{AR^2}\int_d^{\infty} \emptyset(z)dz\right) = -\frac{A_0}{AR^2}\emptyset(d) \qquad (92)$$

Pour le modèle du contact entre deux surfaces aléatoires, on a :

$$\frac{dN_a}{dd} = \frac{d}{dd}\left(2\pi A_0 \frac{1}{AR_1^2}\frac{1}{AR_2^2}(R_1 + R_2)\int_{z_1=-\infty}^{+\infty}\int_{z_2=d-z_1}^{+\infty}(z_1 + z_2 - d)\emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1dz_2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN_a}{dd} = 2\pi A_0 \frac{1}{AR_1^2}\frac{1}{AR_2^2}(R_1 + R_2)\int_{z_1=-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dd}\left(\int_{z_2=d-z_1}^{+\infty}(z_1 + z_2 - d)\emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1dz_2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN_a}{dd} = 2\pi A_0 \frac{1}{AR_1^2}\frac{1}{AR_2^2}(R_1 + R_2)\int_{z_1=-\infty}^{+\infty}\left(\left[\int_{z_2=d-z_1}^{+\infty}\frac{d}{dd}\{(z_1 + z_2 - d)\emptyset(z_1)\emptyset(z_2)\}dz_1dz_2\right] - [(z_1 + d - z_1 - d)\emptyset(z_1)\emptyset(z_2)]\right)$$

$$\frac{dN_a}{dd} = -2\pi A_0 \frac{1}{AR_1^2}\frac{1}{AR_2^2}(R_1 + R_2)\int_{z_1=-\infty}^{+\infty}\int_{z_2=d-z_1}^{+\infty}\emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1dz_2 \qquad (93)$$

En égalisant (92) et (93), on obtient :

$-\frac{A_0}{AR^2}\emptyset(d) = -2\pi A_0 \frac{1}{AR_1^2}\frac{1}{AR_2^2}(R_1 + R_2)\int_{z_1=-\infty}^{+\infty}\int_{z_2=d-z_1}^{+\infty}\emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1dz_2$ d'où :

$$\emptyset(d) = 2\pi \frac{\min\{AR_1^2, AR_2^2\}}{AR_1^2 AR_2^2}(R_1 + R_2) \int_{z_1=-\infty}^{+\infty} \int_{z_2=d-z_1}^{+\infty} \emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1 dz_2 \quad (94)$$

En remplaçant, dans la formule (91), l'expression de la fonction « distribution des altitudes des sommets » déterminée par (94), on trouve l'expression de la force totale entre surfaces somme et lisse :

$$F_{sa} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \frac{A_0}{AR^2} \int_d^{\infty} (z-d)^{3/2} \emptyset(z) dz$$

$$\Leftrightarrow F_{sa} = \frac{8\pi}{3} E^* R^{1/2} \frac{A_0}{AR^2} \frac{\min\{AR_1^2, AR_2^2\}}{AR_1^2 AR_2^2} (R_1 + R_2) \int_d^{\infty} \int_{z_1=-\infty}^{+\infty} \int_{z_2=z-z_1}^{+\infty} (z-d)^{3/2} \emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1 dz_2 dz$$

$$\Leftrightarrow F_{sa} = \frac{8\pi}{3} E^* R^{1/2} (R_1 + R_2) \frac{A_0}{AR_1^2 AR_2^2} \int_{z=d}^{\infty} \int_{z_1=-\infty}^{+\infty} \int_{z_2=z-z_1}^{+\infty} (z-d)^{3/2} \emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1 dz_2 dz$$

$$\Leftrightarrow F_{sa} = \frac{8\pi}{3} E^* R^{1/2} (R_1 + R_2) \frac{A_0}{AR_1^2 AR_2^2} \int_{z_1=-\infty}^{+\infty} \int_{z_2=z-z_1}^{+\infty} \int_{z=d}^{z_1+z_2} (z-d)^{3/2} \emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1 dz_2 dz$$

$$\Leftrightarrow F_{sa} = \frac{16\pi}{15} E^* R^{1/2} (R_1 + R_2) \frac{A_0}{AR_1^2 AR_2^2} \int_{z_1=-\infty}^{+\infty} \int_{z_2=z-z_1}^{+\infty} (z_1 + z_2 - d)^{5/2} \emptyset(z_1)\emptyset(z_2)dz_1 dz_2 \quad (95)$$

A partir des expressions (87) et (95), on constate que la force totale pour les deux modèles est identique. Ainsi, la fonction « distribution des altitudes des sommets des aspérités de la surface somme » déterminée en (94) est satisfaisante. Cherchons la distribution de la surface somme connaissant les distributions des deux surfaces rugueuses. Ces deux surfaces possèdent les paramètres présentés dans le tableau 5 ci-dessous :

Tableau 5 : Paramètres des distributions des deux surfaces rugueuses

Paramètre	Surface 1	Surface 2
Altitude moyenne des sommets	$m_1 = 1{,}25$ µm	$m_2 = 5$ µm
Ecart-type des altitudes des sommets	$\sigma_1 = 0{,}5$ µm	$\sigma_2 = 1$ µm
Espacement entre deux aspérités	$AR_1 = 125$ µm	$AR_2 = 200$ µm
Rayon de l'aspérité	$R_1 = 400$ µm	$R_2 = 250$ µm

La distribution des altitudes des sommets des aspérités de la surface somme est présentée sur la Figure 97 :

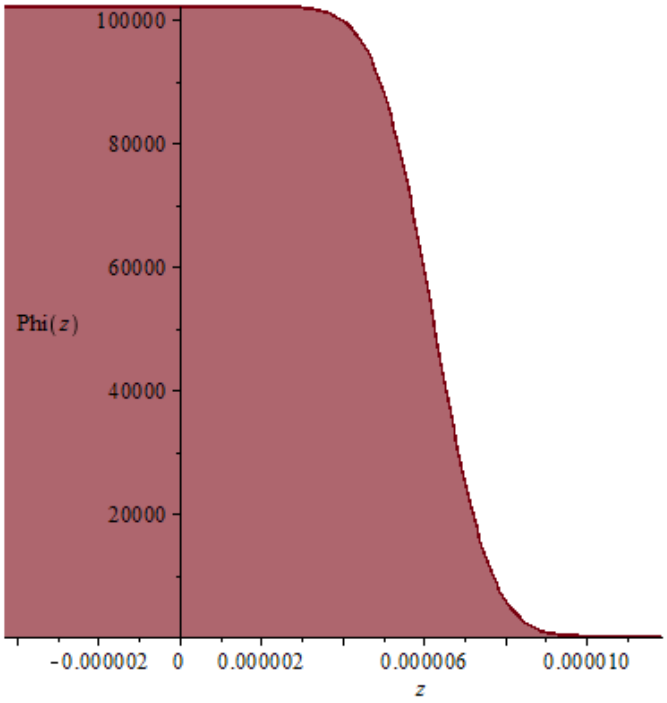


Figure 97 : Distribution des altitudes des sommets des aspérités de la surface somme

Discussion :

- On constate que la distribution des altitudes des sommets des aspérités de la surface somme ne suit pas une loi gaussienne. Comme nous l'avons observé pour les surfaces périodiques, la surface somme exacte ne peut pas avoir la même allure de distribution des altitudes de sommets que les surfaces de départ.

- La distribution est de forme relativement compliquée. De plus, elle n'est pas définie pour une fonction analytique mais doit être calculée numériquement (point par point) en raison des trois intégrales non définies. On comprend aisément que son utilisation risque d'être laborieuse sous sa forme exacte.
- En revanche, nous n'excluons pas la possibilité d'en simplifier la forme pour la rendre plus accessible et en particulier, une perspective à court terme est de l'approximer par la forme en créneau obtenue pour la distribution des altitudes des sommets des aspérités de la surface somme réelle de deux surfaces périodiques (Chapitre 4, Figure 62). Son expression résulte d'une combinaison des distributions normales de chacune des deux surfaces qui nécessite un calcul numérique.

7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié le contact élastique entre deux surfaces à rugosités isotropes aléatoires. Nous avons pu calculer le nombre de contacts et la force totale entre les deux surfaces rugueuses. Puis, nous avons analysé le glissement entre deux surfaces rugueuses. Dans ce paragraphe, nous avons déterminé la valeur moyenne de la force maximale (F_{moy}) sur chaque aspérité, le temps moyen (Δt_{moy}) de passage et la période de la force (T_{1a}, T_{2a}) vus par une aspérité. Pour l'ensemble de ces paramètres, l'approche statistique permet d'accéder à des formulations analytiques mais une majorité d'entre elles contiennent une ou plusieurs intégrales qui ne peuvent être résolues et qui sont héritées de la loi normale de distribution. Une approche numérique est indispensable pour le calcul au cas par cas de ces intégrales.

On a ensuite étudié le contact entre une surface somme et une surface lisse, rigide en partant des paramètres classiquement utilisés dans la littérature pour la définition de la surface somme. Nous avons alors constaté que, si la distribution des altitudes des sommets des aspérités de la surface somme suit une loi Gaussienne, les résultats des deux modèles ne sont pas identiques. On a également analysé le glissement entre une surface somme et une surface lisse et mis en évidence les différences avec le modèle de contact entre deux surfaces rugueuses.

Comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent sur les surfaces périodiques, il est possible de déterminer complètement la surface somme, pour les surfaces aléatoires, de façon

à assurer des résultats identiques pour les deux modèles « rugueux sur rugueux » et « somme sur lisse ». La surface somme ainsi obtenue ne dépend que de la géométrie des surfaces de départ. Elle est isotrope mais n'a pas une distribution normale des altitudes des sommets.

CONCLUSIONS GENERALES

L'objectif de cette thèse est de perfectionner l'analyse de l'impact de la microgéométrie des surfaces en contact sur le comportement de l'assemblage. Une avancée importante a été obtenue en 1966 par Greenwood et Williamson qui ont introduit l'approche statistique pour analyser une situation particulière reposant sur les différentes hypothèses suivantes :

- Sommet des aspérités de forme sphérique avec un rayon constant
- Déformation élastique des aspérités
- Espacement latéral régulier entre aspérité
- Microgéométrie isotrope
- Distribution normale des altitudes des aspérités
- Indépendance de comportement des aspérités
- Contact entre une surface lisse et une surface rugueuse somme associant les rugosités

Depuis, la plupart des travaux ont permis de justifier la pertinence de la plupart des hypothèses utilisées dans cette approche. Mais il est important de noter que peu de travaux ont porté sur la validité de l'équivalence entre contacts rugueux sur rugueux et rugueux sur lisse.

Notre travail a précisément porté sur ce thème et a consisté à comparer les résultats induits dans ces deux situations de calcul, tous les autres paramètres étant maintenus constants.

La première partie du travail fut d'analyser par approche statistique le cas rugueux sur rugueux, peu développé dans la littérature et avec quelquefois des résultats ou conclusions contradictoires. La prise en compte des deux rugosités complique l'approche statistique qui, pour être menée à bien, nous a conduit à travailler sur des microgéométries simplifiées au départ puis de plus en plus réalistes. En particulier, au chapitre 3, le fait de travailler uniquement sur deux lignes d'aspérités périodiques – une situation absolument pas réaliste – a permis de poser les bases du calcul statistique rugueux sur rugueux avec une approche 2D mathématiquement plus simple. Les perfectionnements apportés ont consisté à introduire, dans un premier temps, l'approche 3D avec un travail, détaillé au chapitre 4, sur des surfaces isotropes régulières. Ensuite l'approche statistique a intégré les perturbations des altitudes des sommets sur les deux surfaces. Le chapitre 5 traite du contact entre surfaces rugueuses avec une distribution normale des altitudes de sommets.

Ces travaux ont permis de confirmer les résultats obtenus dans les travaux de Yamada. Ils montrent que l'on ne peut, semble-t-il, pas simplifier les formulations de contact pour faire

apparaitre une surface rugueuse somme aléatoire. Par ailleurs, l'écriture des résultats est peu accessible avec en particulier une double intégrale non calculable, et ce, malgré les hypothèses de calcul simplificatrices telles que déformation élastique des aspérités, même rayon de courbure des aspérités, espacement latéral régulier des aspérités ….

La seconde partie du travail a porté sur l'analyse des résultats obtenus avec les surfaces somme conventionnelles (utilisant les principes d'association classiquement utilisés). Le recensement bibliographique a permis d'identifier différentes démarches de combinaison des microgéométries de départ. Nous avons cherché à tester de manière exhaustive ces différentes approches de création de la surface somme en privilégiant les situations de contact suivantes : soit comprenant deux rugosités identiques en contact, soit avec deux rugosités inspirées de microgéométrie isotropes réelles obtenues par grenaillage. Comme critère de comparaison des deux modélisations, nous avons retenu le principe d'une force imposée sur l'interface avec quantification du nombre d'aspérités en contact et de la distance entre les plans moyens des deux surfaces. Sur toute cette variété de situations, nous avons constaté que l'approximation de surface somme conduisait à des résultats très différents de ceux obtenus avec les deux surfaces rugueuses. Hormis pour des faibles charges, les écarts relatifs entre les deux modélisations, et pour les deux paramètres de comparaison (nombre d'aspérités en contact et distance d entre plan moyen) sont supérieurs à 50 % ce qui constitue un niveau d'écart non admissible.

La troisième partie du travail a donc porté sur des propositions de voies d'amélioration du concept de surface somme. Ces propositions se déclinent en deux niveaux. Un premier niveau consiste à conserver une surface somme de même nature que les deux surfaces de départ en contact. Ce principe a montré ses limites, en particulier dans le cas de surfaces périodiques, car nous avons prouvé, pour tout cas de contact, qu'il n'est pas possible d'assurer à la fois un même niveau de nombre de contacts et de distance d entre plan moyen.

Pour les surfaces périodiques comme pour les surfaces aléatoires, nous avons proposé une démarche d'identification de la surface somme rigoureusement équivalente au contact entre surfaces rugueuses. Dans les deux cas, la surface somme obtenue n'est pas de même nature que les surfaces de départ. En particulier, pour les surfaces périodiques (avec sommets d'aspérités à la même altitude), la surface somme exacte présente une distribution des latitudes de sommet en créneau. Pour les surfaces aléatoires, la distribution de la surface est

définie malheureusement par une formulation avec une intégrale double qui nécessite une détermination par voie numérique.

Conscient que la complexité du formalisme de surface somme que nous avons défini va probablement être un frein important à son utilisation, notre perspective privilégiée va consister à travailler sur une simplification de son formalisme en tentant si possible de ne pas trop dénaturer sa performance. Par ailleurs, il nous semble important à titre de perspective complémentaire d'analyser la pertinence de ce nouveau concept de surface somme dans le cas de mode de déformation d'aspérités différents (totalement plastique, puis élastique à plastique suivant le niveau de sollicitation sur l'aspérité).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. GRAS, Tribologie - Principes et solutions industrielles, DUNOD, 2008.

[2] R. NAYAK, «Random process model of rough surfaces ,» *J. Lub. Tech.,* vol. 93, pp. 398-407, 1971.

[3] G. CARBONE et F. BOTTIGLIONE, «Asperity contact theories: Do they predict linearity between contact area and load ?,» *Jour. Mech. Phys. of Solids,* vol. 56, pp. 2555-2572, 2008.

[4] G. ADAMS et M. NOSONOVSKY, «Contact modeling - forces,» *Tribology International,* vol. 33, pp. 431-442, 2000.

[5] G. LIU, Q. WANG et C. LIN, «A survey of current models for simulating the contact between rough surfaces,» *Tribology Transactions,* vol. 42, pp. 581-591, 1999.

[6] J. ARCHARD, «Elastic deformation and the laws of friction,» *Proc. R. Soc. A243,* pp. 190-205, 1957.

[7] J. GREENWOOD et J. WILLIAMSON, «Contact of nominally flat surfaces,» *Proc. R. Soc. A,* pp. 295-300, 1966.

[8] H. HERTZ, «Über die Berührung fester elastische Körper (on the contact of elastic solids),» *J. Reine und angewandte Math.,* vol. 92, p. 156, 1881.

[9] D. WHITEHOUSE et J. ARCHARD, «The proporties of random surfaces of significance in their contact,» *Proc. Roy. Soc. Lond. A,* vol. 316, pp. 97-121, 1970.

[10] M. SCARAGGI, C. PUTIGNANO et G. CARBONE, «Elastic contact of rough surface: A simple criterion to make isotropic roughness equivalent to 1D one,» *Wear,* vol. 297, pp. 811-817, 2013.

[11] R. ONIONS et J. ARCHARD, «The contact of surfaces having a random structure,» *Jour. of Phys. D, Apll. Phys.,* vol. 6, pp. 289-304, 1973.

[12] D. WHITEHOUSE et M. PHILLIPS, «Discrete properties of random surfaces,» *Philos. Trans. R. Soc. A 290,* vol. (1369), pp. 267-298, 1978.

[13] H. FRANCIS, «Application of spherical indentation mechanics to reversible and irreversible contact between rough surfaces,» *Wear,* vol. 45, pp. 221-269, 1977.

[14] H. FRANCIS, «A finite surface element model for plane-strain elastic contacty,» *Wear,* vol. 76, pp. 221-245, 1982.

[15] F. ROBBE-VALLOIRE, «Statistical analysis of asperities on a rough surface,» *Wear,* vol. 249, pp. 401-408, 2001.

[16] F. ROBBE-VALLOIRE, B. PAFFONI, R. PROGRI et R. GRAS, «Modélisation du frottement mixte entre surfaces parallèle fonctionnant en environnement lubrifié,» *Actes des Journées Internationales Francophones de Tribologie, Neuchâtel,* pp. 197-203, 1997.

[17] P. NAYAK, «Random process model of rough surfaces in plastic contact,» *Wear,* vol. 26, pp. 305-333, 1973.

[18] J. PULLEN et J. P. B. WILLIAMSON, «On the plastic contact of rough surfaces,» *Proc. Royal Soc. A327,* pp. 159-173, 1972.

[19] A. BUSH, R. GIBSON et T. THOMAS, «The elastic contact of a rough surface,» *Wear,* vol. 35, pp. 87-111, 1975.

[20] J. I. McCOOL, «Comparison of models for the contact of rough surfaces,» *Wear,* vol. 107, pp. 37-60, 1986.

[21] A. BUSH, R. GIBSON et G. KEOGH, «The limit of elastic deformation in the contact of rough surfaces,» *Mech. Res. Comm.,* vol. 3, pp. 169-174, 1976.

[22] J. I. McCOOL, «Relating profile instrument to the functional performance of rough surfaces,» *Journal of Tribology,* vol. 109, pp. 264-270, Apr 1987.

[23] J. I. McCool, «The distribution of microcontact area, load, pressure, and flash temperature under the Greenwood-Williamson model,» *Journal of tribology,* vol. 110,

pp. 106-111, 1988.

[24] W. CHANG, I. ETSION et D. BOGY, «An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces,» *Journal of tribology,* vol. 109, pp. 257-263, 1987.

[25] F. ROBBE-VALLOIRE, B. PAFFONI et R. PROGRI, «Load transmission by elastic, elasto-plastic or fully plastic deformation of rough interface asperities,» *Mech. of Mat.,* vol. 33, pp. 617-633, 2001.

[26] K. L. JOHNSON, Contact mechanics, Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[27] I. NOGUEIRA, F. ROBBE-VALLOIRE et R. GRAS, «Experimental validations of elastic to plastic asperity-based models using normal indentations of rough surfaces,» *Wear,* vol. 269, pp. 709-718, 2010.

[28] J. A. GREENWOOD et J. H. TRIPP, «The contact of two nominally flat rough surfaces,» *Proc. Instn Mech. Engrs,* vol. 185, pp. 625-633, 1970-71.

[29] K. YAMADA, N. TAKEDA, J. KAGAMI et T. NAOI, «Mechanisms of elastic contact and friction between rough surfaces,» *Wear,* vol. 48, pp. 15-34, 1978.

[30] F. ROBBE-VALLOIRE, «Modélisations des microgéométries de surface: application à la modélisation du comportement tribologique,» Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2000.

[31] I. TRAN, F. ROBBE-VALLOIRE et M. QUILLIEN, «Validity of the sum surface assumption in the case of static contact between rough periodic surfaces,» chez *5th World tribology congress*, Torino, Italy, 2013.

[32] I. TRAN, F. ROBBE-VALLOIRE et M. QUILLIEN, «Approche statistique du contact entre surfaces aléatoires gaussiennes,» *Actes des Journées Internationales Francophones de Tribologie, Lyon,* pp. 43-51, 2013.

[33] P.W.O'CALLAGHAN et S.D.PROBERT, «Prediction and measurement of true areas of contact between solids,» *Wear,* vol. 120, pp. 29-49, 1987.

LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Typologie des surfaces solides [2] 11
Figure 2 : Contact entre surfaces rugueuses [7] 15
Figure 3 : Profil de surface montrant le système de coordonnées [9] 21
Figure 4 : Caractéristiques géométriques d'un motif 24
Figure 5 : Description d'un motif d'ondulation [15] 25
Figure 6 : Section de la surface selon [19] 31
Figure 7 : Relation entre plans moyens de surface et de sommet [22] 34
Figure 8 : Aspérité déformée plastiquement [24] 39
Figure 9 : Contact entre deux surfaces rugueuses 46
Figure 10 : Contact entre deux surfaces rugueuses 48
Figure 11 : Force normale produite par le contact entre des aspérités sphériques 49
Figure 12 : Force de frottement produite par le contact entre deux aspérités sphériques 49
Figure 13 : Démarche de travail 52
Figure 14 : Types de macrogéométrie de contact 53
Figure 15 : Contact surfacique entre surfaces planes 53
Figure 16 : Exemples de microtopographie de surfaces réelles 54
Figure 17 : Surface isotrope 55
Figure 18 : Profil de la surface suivant différentes échelles d'après [30] 55
Figure 19 : Surface rugueuse avec des aspérités de forme arrondie 56
Figure 20 : Aspect aléatoire des microgéométries de la surface 56
Figure 21 : Familles de microgéométries étudiées 57
Figure 22 : Microgéométrie des surfaces étudiées 58
Figure 23 : Exemple de profil s'approchant du cas périodique 60
Figure 24 : Modèle de la surface périodique utilisée 61
Figure 25 : Relation entre les paramètres du profil 61
Figure 26 : Modèle de contact entre deux surfaces périodiques 2D 62
Figure 27 : Détail de l'état du contact entre deux aspérités 63
Figure 28 : Densité de distribution de la variable x 64
Figure 29 : Modèle géométrique pour déterminer x_0 65
Figure 30 : Modèle de contacts entre les surfaces 66
Figure 31 : Contacts avec une première aspérité de la surface 2. 67
Figure 32 : Contacts avec la deuxième aspérité de la surface 2 67
Figure 33 : Contacts avec la i-ème aspérité de la surface 2 68
Figure 34 : Nombre de contacts suivant la valeur de x_0 pour les deux méthodes 71
Figure 35 : Dépendance du nombre de contacts en fonction du décalage 71

Figure 36 : Nombre de contacts en fonction du rapport AR_1/AR_2 72
Figure 37 : Force dans le contact entre deux surfaces 74
Figure 38 : Détail de la force entre deux aspérités 74
Figure 39 : Modèle géométrique pour calculer la force totale en 2D 75
Figure 40 : Distribution des écarts latéraux entre aspérités 76
Figure 41 : Processus du glissement entre les deux surfaces 79
Figure 42 : Distance parcourue lors du contact 79
Figure 43 : Force maximale correspondant aux 2 aspérités en vis-à-vis 80
Figure 44 : Schéma de la force sur une aspérité de la surface 2 80
Figure 45 : Force sur une aspérité de la surface 1 81
Figure 46 : Section d'une surface isotrope périodique. 83
Figure 47 : Modèle du contact entre deux surfaces périodiques 84
Figure 48: Distribution des sommets des aspérités de deux surfaces en vis-à-vis 84
Figure 49 : Contact entre deux surfaces rugueuses périodiques 85
Figure 50 : Aspérités de la surface 2 en contact avec une aspérité de la surface 1 86
Figure 51 : Forme de la force sur une aspérité de la surface 1 en 3D. 89
Figure 52 : Schéma de la force sur une aspérité de la surface 2 en 3D. 90
Figure 53 : Modèle de glissement entre les aspérités en 3D 90
Figure 54 : Aspérités de la surface 2 (point) interceptées par une aspérité de la surface 1 en glissement 92
Figure 55 : Construction de la surface somme 93
Figure 56 : Force dans le contact surfaces somme et lisse 96
Figure 57 : Contact entre une surface rugueuse et une surface lisse 97
Figure 58 : Force sur une aspérité de la surface somme à gauche et une aspérité de la surface lisse à droite 97
Figure 59 : Contact entre surface aléatoire et surface lisse 105
Figure 60 : Relation entre δ et d 106
Figure 61 : Surface somme réelle et distribution des altitudes des sommets 107
Figure 62 : Topographie d'une surface aléatoire 109
Figure 63 : Profil extrait de la surfométrie d'une surface aléatoire 109
Figure 64 : Surface aléatoire considérée dans ce chapitre 110
Figure 65 : Modèle de la surface aléatoire et distribution des altitudes des sommets 111
Figure 66 : Contact entre des surfaces aléatoires. 111
Figure 67 : Morphologie du contact entre deux aspérités de surfaces aléatoires 112
Figure 68 : Probabilité pour avoir une aspérité de la surface i (i = 1 ou 2) à une altitude donnée 112
Figure 69 : Distribution des aspérités de la surface 2 autour d'une aspérité de la surface 1 113

Figure 70 : Rapprochement entre 2 aspérités en contact 115
Figure 71 : Forme de la force sur une aspérité de la surface i. 117
Figure 72 : Glissement entre des aspérités 118
Figure 73 : Bande des aspérités en glissement 119
Figure 74 : Distribution des altitudes des aspérités en contact 121
Figure 75 : Modèle du contact entre surface somme (aléatoire) et lisse 122
Figure 76 : Contact entre une surface somme (aléatoire) et une surface lisse 123
Figure 77 : Intensité de la force en un point donné de la surface lisse 124
Figure 78 : Bande des aspérités en glissement 125
Figure 79 : Force sur une aspérité de la surface somme en contact avec la surface lisse 126
Figure 80 : Différence de force normale entre deux modèles 128
Figure 81 : Erreur commise sur d avec le concept de surface somme. 130
Figure 82 : Erreur relative commise sur d avec le concept de surface somme 130
Figure 83 : Erreur commise sur N avec le concept de surface somme 131
Figure 84 : Erreur relative commise sur N avec le de surface somme 132
Figure 85 : Influence de l'écart-type sur la différence Δd entre les deux modèles 132
Figure 86 : Erreur relative sur le nombre de contacts 133
Figure 87 : Erreur relative sur la distance en fonction de l'espacement latéral AR_2 134
Figure 88 : Erreur relative sur le nombre de contacts 134
Figure 89 : Influence du rayon sur l'erreur relative sur la distance 135
Figure 90 : Influence du rayon sur l'erreur relative sur le nombre de contacts 136
Figure 91 : Profil de de mesure 137
Figure 92 : Erreur relative sur la distance entre surfaces identiques 139
Figure 93 : Erreur relative du nombre de contacts entre surfaces identiques 139
Figure 94 : Erreur relative sur la distance entre surface i (i = 1 à 3) et surface 3 choisie comme référence 140
Figure 95 : Erreur relative sur le nombre de contacts avec la surface 3 surface de référence 140
Figure 96 : Distribution des altitudes des sommets des aspérités de la surface somme 144

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Valeurs des paramètres utilisés pour calculer le nombre de contacts 69
Tableau 2 : Principaux paramètres des surfaces aléatoires 128
Tableau 3 : Valeurs des paramètres de rugosité de deux pièces 138
Tableau 4 : Principaux paramètres des surfaces 138
Tableau 5 : Paramètres des distributions des deux surfaces rugueuses 144