



**HAL**  
open science

# Modèles hétérogènes en mécanique des fluides : phénomènes de congestion, écoulements granulaires et mouvement collectif

Charlotte Perrin

► **To cite this version:**

Charlotte Perrin. Modèles hétérogènes en mécanique des fluides : phénomènes de congestion, écoulements granulaires et mouvement collectif. Physique mathématique [math-ph]. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAM023 . tel-01562845

**HAL Id: tel-01562845**

**<https://theses.hal.science/tel-01562845>**

Submitted on 17 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Charlotte Perrin**

Thèse dirigée par **Didier Bresch**

préparée au sein du **LAMA**  
et de l'**École Doctorale MSTII**

# Modèles hétérogènes en mécanique des fluides : phénomènes de congestion, écoulements granulaires et mouvement collectif

Thèse soutenue publiquement le **8 juillet 2016**,  
devant le jury composé de :

**M. Jean–Paul Vila**

Professeur, INSA Toulouse, Président

**M. Yann Brenier**

Directeur de Recherche, CNRS, Rapporteur

**M. Thierry Gallouët**

Professeur, Université Aix–Marseille, Rapporteur

**Mme. Anne-Laure Dalibard**

Professeur, UPMC Paris 6, Examinatrice

**Mme. Paola Goatin**

Directrice de Recherche, INRIA, Examinatrice

**M. Bertrand Maury**

Professeur, Université Paris Sud, Examineur

**M. Sebastian Noelle**

Professeur, RWTH Aachen University, Examineur

**M. Didier Bresch**

Directeur de Recherche, CNRS, Directeur de thèse

**M. Pierre-Emmanuel Jabin**

Professeur, University of Maryland, Invité





---

## Résumé

Cette thèse est dédiée à la description et à l'analyse mathématique de phénomènes d'hétérogénéités et de congestion dans les modèles de la mécanique des fluides. On montre un lien rigoureux entre des modèles de congestion douce de type Navier-Stokes compressible qui intègrent des forces de répulsion à très courte portée entre composants élémentaires ; et des modèles de congestion dure de type compressible/incompressible décrivant les transitions entre zones libres et zones congestionnées. On s'intéresse ensuite à la modélisation macroscopique de mélanges formés par des particules solides immergées dans un fluide. On apporte dans ce cadre une première réponse mathématique à la question de la transition entre les régimes de suspensions dictés par les interactions hydrodynamiques et les régimes granulaires dictés par les contacts entre les particules solides. On met par cette démarche en évidence le rôle crucial joué par les effets de mémoire dans le régime granulaire. Cette approche permet également un nouveau point de vue pour l'étude mathématique des fluides avec viscosité dépendant de la pression. On s'intéresse enfin à la modélisation microscopique et macroscopique du trafic routier. Des schémas numériques originaux sont proposés afin de reproduire avec robustesse des phénomènes de persistance d'embouteillages.

## Abstract

This thesis is dedicated to the description and the mathematical analysis of heterogeneities and congestion phenomena in fluid mechanics models. A rigorous link between soft congestion models, based on the compressible Navier–Stokes equations which take into account short–range repulsive forces between elementary components ; and hard congestion models which describe the transitions between free/compressible zones and congested/incompressible zones. We are interested then in the macroscopic modelling of mixtures composed solid particles immersed in a fluid. We provide a first mathematical answer to the question of the transition between the suspension regime dictated by hydrodynamical interactions and the granular regime dictated by the contacts between the solid particles. The method highlights the crucial role played by the memory effects in the granular regime. This approach enables also a new point of view concerning fluids with pressure-dependent viscosities. We finally deal with the microscopic and the macroscopic modelling of vehicular traffic. Original numerical schemes are proposed to robustly reproduce persistent traffic jams.

---

# Remerciements

Comme le veut la tradition, je vais tenter de dresser la très longue liste des personnes qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Je remercie par avance tous ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette liste mais qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont aidée durant ces trois années.

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse Didier Bresch qui fut un encadrant formidable. Je le remercie tout particulièrement de m'avoir fait découvrir le monde de la recherche et proposé tout au long de ces trois années des sujets passionnants. Je lui suis également profondément reconnaissante pour sa disponibilité et ses encouragements. Il a su me remotiver dans les moments importants et ses conseils avisés m'ont été précieux.

Je suis très reconnaissante à Yann Brenier et Thierry Gallouët d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Leurs travaux sont une réelle source d'inspiration. Je suis très honorée de l'attention et de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je remercie Jean-Paul Vila qui a accepté la lourde tâche de présider ce jury, les discussions que nous avons eues m'ont beaucoup éclairée. Je tiens à remercier très chaleureusement Bertrand Maury d'avoir accepté de faire partie de ce jury. Ses travaux m'ont beaucoup inspirée pour cette thèse, je le remercie pour sa disponibilité et les nombreux échanges que nous avons eus. Je suis également très honorée de compter Anne-Laure Dalibard, Paola Goatin, Pierre-Emmanuel Jabin et Sebastian Noelle parmi les membres de ce jury et les remercie de leur intérêt pour mes travaux.

Ce travail est le fruit de plusieurs collaborations et de nombreux échanges, je tiens à remercier ici tous ceux sans qui cette thèse aurait pris une forme bien différente. J'espère que nous aurons la possibilité de poursuivre ces échanges à l'avenir. Merci d'abord à Ewelina Zatorska avec qui j'ai eu la chance de travailler au début de ma thèse. Je tiens aussi à la remercier pour ses relectures attentives et ses conseils. Merci à Bertrand Maury et Sylvain Faure d'avoir proposé ce projet CEMRACS, merci à Mathieu Fabre et Mathieu Laurière d'avoir partagé cette expérience avec moi.

Merci également à Christian Ruyer-Quil et Georg Dietze avec qui j'ai eu la chance d'échanger sur la physique des films tombants, à Stéphane Labbé qui a eu la gentillesse et la patience de répondre à mes nombreuses questions d'ordre numérique. Un grand merci enfin à mon « grand frère », Julien Olivier, ses relectures et ses conseils m'ont été précieux.

En remontant un peu dans le passé, je profite de cette occasion pour exprimer toute

## REMERCIEMENTS

---

ma gratitude aux professeurs de l'ENS Rennes (ex Ker Lann), en particulier à Arnaud Debussche et Michel Pierre, qui m'ont donné la chance d'intégrer le département de mathématiques et transmis leur goût de l'analyse et des mathématiques appliquées.

Merci également aux professeurs de l'ENS de Lyon et de Lyon 1 qui ont renforcé mon affection pour l'analyse des EDP pendant mon Master 2. Je remercie tout particulièrement Miguel Rodrigues et Thomas Lepoutre qui m'ont encouragée à contacter Didier Bresch.

Je reviens au présent pour évoquer le cadre de travail idéal que fut le LAMA, un grand grand merci à tous les membres du LAMA. Merci d'abord au directeur Philippe Briand pour sa disponibilité. Merci également à ceux qui m'ont aidée dans mes petits problèmes administratifs et informatiques du quotidien : Nadine, Claudia, Céline et Yvan.

Merci à tous les membres de l'équipe EDP. J'ai beaucoup appris au contact de tous, merci pour votre disponibilité en particulier à l'occasion du groupe de discussion. Une bonne ambiance passe forcément par la salle café, je remercie ceux avec qui j'ai régulièrement partagé ces moments de détente : Stéphane, Christian (fantastique tuteur d'enseignement !), Stéphane, Jimmy, Céline, Tom, Paul-Éric, Frédéric, Patrick et tous les autres bien sûr.

Un grand merci à Marguerite qui m'a proposé de collaborer sur plusieurs projets scientifiques et sportifs, un jour on arrivera à jouer en double...

Merci Michel, mon autre « grand frère », pour son soutien et sans qui ces nombreuses heures au laboratoire auraient été bien plus ennuyeuses.

Je finis par remercier les doctorants et postdocs du LAMA, en particulier ceux qui ont partagé le quotidien du bureau 20b : Beni, Jérémy, Paul, Bilal, Ralf, Rodrigo, Lama, Federico. Je souhaite bon courage à tous ceux qui arrivent dans la dernière ligne droite !

Parce qu'il y a une vie en dehors des mathématiques, je remercie donc tous mes amis qui m'ont supportée au cours de ces trois années et sans qui ce moment aurait été bien moins agréable. Je remercie très fort les grenoblois pour les nombreuses fois où j'ai pu profiter du gîte et du couvert : Morane, Ianis, Anne-Laure, Alban, Alice, Jean-Baptiste, Carolina, Jo. Je n'oublie pas non plus tous les amis Rennais ou ex-Rennais !

Sans le soutien et la confiance de mes parents et de mon frère je n'aurais jamais pu franchir toutes ces étapes, cette thèse est un peu la leur. Enfin à toi Simon, merci pour tout !

# Présentation

Cette thèse est dédiée à la modélisation et à l'étude de phénomènes d'hétérogénéités en mécanique des fluides. Nos travaux se concentrent en particulier sur les problématiques liées à la congestion, d'abord d'un point de vue général avec la prise en compte d'une contrainte de densité maximale dans les équations de Navier-Stokes, puis plus spécifiquement dans le cadre de la modélisation des milieux granulaires immergés, des mouvements de foules et du trafic routier.

Dans une première partie, nous introduisons les difficultés relatives à la prise en compte d'hétérogénéités dans la modélisation macroscopique des fluides. Nous posons les cadres physiques et théoriques dans lesquels notre travail s'inscrit et nous énonçons les principaux résultats obtenus durant cette thèse.

La seconde partie est consacrée à l'étude des contraintes de congestion et des possibles effets d'hétérogénéités dans les modèles fluides de type Navier-Stokes. Deux approches sont développées afin de prendre en compte une contrainte de densité maximale de congestion : l'approche dite de congestion douce qui consiste à prendre à compte au sein de la pression des forces de répulsion à très courte portée entre composants élémentaires ; et l'approche dite de congestion dure couplant zones libres/compressibles et zones congestionnées/incompressibles. Nous établissons le lien mathématique entre ces deux types de modèles en considérant la limite singulière des modèles de congestion douce quand la portée des forces de répulsion tend vers 0.

Cette partie est composée de trois chapitres. Le premier chapitre traite le cas de la dimension un avec une contrainte de densité maximale constante. Il a fait l'objet d'une note publiée aux *Compte Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences* intitulée "Singular limit of a Navier–Stokes system leading to a free/congested zones two-phase model". Le second chapitre étend les précédents résultats au cas de la dimension trois avec la prise en compte d'une densité maximale hétérogène. Ces résultats sont issus d'un article publié dans *Communications in Partial Differential Equations* intitulé "Free/Congested Two-Phase Model from Weak Solutions to Multi-Dimensional Compressible Navier–Stokes Equations". Enfin nous présentons dans le troisième chapitre de cette partie des schémas numériques permettant d'illustrer le lien entre modèles de congestion douce et modèles de congestion dure dans le cas de la dimension un avec contrainte maximale constante.

Dans la troisième partie dédiée aux milieux granulaires immergés, nous nous intéressons à la question d'une éventuelle transition entre modèles de suspensions et modèles granu-



lares. Nous proposons pour cela des lois de comportement permettant d'établir pour la première fois mathématiquement une telle correspondance. Ces résultats mettent en évidence sur le modèle granulaire l'importance d'une variable appelée potentiel d'adhésion qui décrit des effets de mémoire au sein de l'écoulement. Ce travail donne également une nouvelle approche pour un problème mathématique assez largement ouvert qui concerne l'étude des fluides incompressibles avec viscosité dépendant de la pression.

Dans un premier chapitre nous développons les arguments théoriques permettant de démontrer en dimension deux le passage à la limite des modèles de suspensions vers les modèles granulaires. Ce chapitre est tiré d'un article à paraître dans *Applied Mathematics Research eXpress* sous le titre "Pressure Dependent Viscosity Model for Granular Media Obtained from Compressible Navier–Stokes Equations". Dans le deuxième chapitre nous reprenons ces arguments dans le cas de la dimension un où des termes de traînée peuvent être négligés et nous proposons un premier schéma numérique permettant d'illustrer le lien entre le régime de suspension et le régime granulaire. Ce chapitre est l'objet d'un article de conférence (soumis) intitulé "Modelling of phase transitions in one–dimensional granular flows".

Enfin dans la dernière partie de ce manuscrit, nous nous intéressons au trafic piétonnier et automobile. Ce travail initié dans le cadre d'un projet au CEMRACS 2015 a pour but de reproduire numériquement des phénomènes de bouchons persistants observables en pratique sur une autoroute en amont d'un accident qui s'est produit sur la voie d'en face. La prise en compte dans les schémas numériques du comportement des automobilistes à hauteur de l'accident nous permet de retrouver de façon robuste ce phénomène de bouchon stable. Cette étude a fait l'objet d'un article soumis aux actes du CEMRACS "Non classical solution of a conservation law arising in vehicular traffic or crowd modelling".

# Table des matières

Remerciements . . . . .	v
Présentation . . . . .	vii
Table des matières . . . . .	ix
<b>1 Introduction et contributions de la thèse</b>	<b>1</b>
1 Hétérogénéités et mécanique des fluides . . . . .	2
2 Quelques rappels sur la modélisation des écoulements fluides . . . . .	6
2.1 Variables macroscopiques de l'écoulement . . . . .	7
2.2 Lois de conservation . . . . .	8
2.3 Tenseur des contraintes : lois de comportement et lois d'état . . . . .	10
2.4 Phénomènes de compressibilité . . . . .	26
3 Modèles pour la prise en compte d'effets de congestion . . . . .	30
3.1 Modèles discrets . . . . .	31
3.2 Modèles de congestion dure et contrainte d'exclusion . . . . .	33
3.3 Modèles de congestion douce . . . . .	38
3.4 Transition entre modèles soft et modèles hard . . . . .	42
4 Les milieux granulaires immergés . . . . .	45
4.1 Difficultés relatives aux viscosités dépendant de la pression . . . . .	48
4.2 Lien entre les milieux granulaires immergés et les suspensions . . . . .	50
4.3 Viscosités dépendant de la pression, une nouvelle approche . . . . .	59
5 Application en modélisation du mouvement de foules et du trafic routier . . . . .	60
5.1 Introduction générale . . . . .	61
5.2 Obtention de bouchons stationnaires en trafic routier . . . . .	68
<b>I Phénomènes de congestion</b>	<b>71</b>
<b>2 Le cas homogène en dimension un</b>	<b>77</b>
1 Introduction . . . . .	77
2 Modelling . . . . .	78
3 One-dimensional case . . . . .	79
3.1 Existence result for the singular compressible model . . . . .	80
3.2 Recovering of the two-phase system . . . . .	82

<b>3</b>	<b>Cas hétérogène en dimension supérieure</b>	<b>85</b>
1	Introduction . . . . .	85
2	Formulation of the main problem . . . . .	90
3	Weak solutions of the singular compressible system . . . . .	93
3.1	Basic level of approximation . . . . .	93
3.2	Uniform estimates . . . . .	96
3.3	Passage to the limit . . . . .	102
4	Recovering of the two-phase system . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Illustrations numériques</b>	<b>119</b>
1	Introduction . . . . .	119
2	Numerical simulation of fluid flows at all Mach numbers . . . . .	121
3	Time discretization of the singular Navier–Stokes equations . . . . .	125
4	Space discretization of the one–dimensional singular equations . . . . .	129
5	Discussion on the asymptotic consistency . . . . .	131
6	Numerical results . . . . .	132
<b>II</b>	<b>Milieux granulaires immergés</b>	<b>139</b>
<b>5</b>	<b>Des suspensions denses aux milieux granulaires</b>	<b>145</b>
1	The suspension and the two–phase granular systems . . . . .	151
1.1	A model for suspension flows . . . . .	152
1.2	Main results . . . . .	155
1.3	Sketch of the proof . . . . .	158
2	Existence of solutions to the suspension model . . . . .	160
2.1	Global existence of approximate $\kappa$ -entropy solutions . . . . .	160
2.2	Existence of weak solutions for the suspension model . . . . .	167
3	Recovering the two-phase granular system . . . . .	175
4	Incompressible flows with pressure dependent viscosity . . . . .	180
<b>6</b>	<b>Le cas unidimensionnel</b>	<b>185</b>
1	Introduction . . . . .	185
2	Phase transitions in one–dimensional granular flows . . . . .	186
3	Numerical simulation . . . . .	197
<b>III</b>	<b>Application en modélisation du trafic routier</b>	<b>207</b>
<b>7</b>	<b>Solution non-classique d’une loi de conservation en trafic routier</b>	<b>209</b>
1	Introduction . . . . .	210
2	Microscopic models for traffic jams . . . . .	211
2.1	The discrete Follow-the-Leader model . . . . .	212
2.2	Inclusion of a buffer zone . . . . .	215

2.3	Macroscopic limit passage . . . . .	216
3	Conservation laws for congestion . . . . .	218
3.1	Upwind/downwind numerical scheme . . . . .	219
3.2	Local modification of the numerical scheme . . . . .	221
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>229</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>235</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Chapitre 1

## Introduction et contributions de la thèse

Le but de ce chapitre d'introduction est à la fois de poser les cadres physiques et mathématiques de la mécanique des fluides dans laquelle cette thèse s'inscrit et de présenter les résultats théoriques et numériques obtenus au cours de ces travaux.

Après une présentation générale dans la Section 1 des enjeux soulevés par la modélisation des fluides présentant une caractéristique d'hétérogénéité, nous revenons dans la Section 2 sur les principes de base de la mécanique des milieux continus permettant la description des fluides dans des conditions standards d'écoulement. Nous mettons en lien les outils de l'analyse mathématique avec les principes physiques régissant l'écoulement d'un fluide et nous abordons dans ce cadre des phénomènes d'hétérogénéités simples.

Nous nous intéressons ensuite plus précisément aux hétérogénéités en lien avec les phénomènes de congestion. Nous présentons dans la Section 3 deux points de vue sur cette question et établissons un lien mathématique rigoureux entre ces deux approches. Cette problématique de la congestion est ensuite reprise et adaptée dans le cadre de la modélisation des milieux granulaires immergés à la Section 4. Nous abordons enfin dans la Section 5 une autre application des équations fluides avec contrainte de congestion qui est celle de la modélisation macroscopique des foules et du trafic routier.

# 1 Hétérogénéités et mécanique des fluides

La modélisation mathématique doit appréhender aujourd'hui des systèmes physiques, biologiques ou environnementaux de plus en plus complexes. Cette complexité repose souvent sur la multitude de paramètres mis en jeu ou la très grande dimension du système. Ce sont des phénomènes par nature hétérogènes. De manière générale l'hétérogénéité peut se présenter sous la forme

- d'un problème multi-échelles, en temps ou en espace ;
- d'un problème multi-processus où des dynamiques différentes coexistent.

En un certain sens, tous les phénomènes physiques sont multi-échelles et multi-processus et il convient au mathématicien, en accord avec le physicien ou le biologiste, d'isoler les phénomènes particuliers qu'un modèle mathématique doit décrire. On fixe ainsi en conséquence les limites du modèle en question.

Pour illustrer ceci, considérons deux phénomènes physiques élémentaires : le transport et la diffusion qui seront à la base des modèles que nous considérerons en mécanique des fluides. Dans le premier cas, le transport d'une quantité  $m$  à une vitesse  $u$  s'exprime mathématiquement au moyen de l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t m + u \cdot \nabla m = 0 \tag{1.1}$$

ou encore, si  $u$  est constant (et plus largement si  $\operatorname{div} u = 0$ ), par

$$\partial_t m + \operatorname{div}(mu) = 0. \tag{1.2}$$

Cette équation est bien connue par exemple dans le cas où  $u$  est constant puisqu'on est capable de déterminer une solution explicite, qui n'est en dimension un que la translatée par  $u$  de la donnée initiale  $m_0$ .

Le second processus physique qui sera à la base des écoulements de fluides est la diffusion, qui est un phénomène de transfert irréversible tendant à homogénéiser une certaine quantité (chaleur, concentration d'une espèce, etc). Ce processus est caractérisé par un coefficient de diffusion  $\nu$  et s'exprime mathématiquement au travers de l'équation

$$\partial_t m - \operatorname{div}(\nu \nabla m) = 0 \tag{1.3}$$

qui s'écrit encore, si  $\nu$  est constant,

$$\partial_t m - \nu \Delta m = 0. \tag{1.4}$$

Comme pour l'équation de transport, les solutions explicites sont connues en dimension un et pour des géométries simples. Plus généralement on est capable d'assurer sur le plan théorique le caractère bien posé au sens de l'existence, l'unicité d'une solution ainsi que la dépendance continue de cette solution par rapport à la donnée initiale.

La prise en compte d'hétérogénéités dans les coefficients  $u$  et  $\nu$  : hétérogénéité en temps,

en espace, effets d'anisotropie, dépendance en  $m$ , etc, est de manière générale délicate car beaucoup d'arguments mathématiques peuvent tomber en défaut. En particulier on remarquera que l'équivalence entre (1.1) et (1.2), et entre (1.3) et (1.4) n'est plus vraie.

Un exemple simple de tel phénomène de transport hétérogène en dimension un est l'équation de Burgers (sans viscosité)

$$\partial_t m + m \partial_x m = 0$$

qui est souvent utilisée pour modéliser des phénomènes de propagation d'onde en hydrodynamique et en acoustique. Pour cette dynamique, il est bien connu que des chocs, c'est-à-dire des discontinuités, peuvent apparaître en temps fini même si la donnée initiale est régulière. Ces profils de solutions pouvant être pertinents pour la physique du problème, il convient alors d'élargir la notion de solutions aux fonctions qui ne sont plus nécessairement régulières, ni même continues a priori. C'est le cadre des *solutions faibles*. S'il est difficile de donner une définition générale des solutions faibles, celle-ci est cependant toujours basée sur une formulation variationnelle des équations. Une solution faible sera ainsi une solution (globale en temps) de l'équation au sens des distributions, mais plusieurs critères additionnels liés par exemple à une énergie peuvent être inclus dans la définition. Ce qui sera le cas dans nos différentes études.

Nous serons dans ce cadre amenés à considérer des systèmes en lien avec l'équation des milieux poreux

$$\partial_t m - \Delta m^\alpha = 0, \quad \alpha > 1$$

qui est utilisée dans la modélisation des écoulements dans des milieux poreux mais également pour l'écoulement de films liquides sous l'action de la gravité ainsi que pour des phénomènes de radiations dans les plasmas.

Cette équation peut d'abord être vue comme une extension hétérogène de l'équation de transport (1.2)

$$\partial_t m - \operatorname{div}(mu) = 0, \quad u = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \nabla m^{\alpha-1}$$

où la vitesse est donnée comme une fonction d'un gradient de pression  $p(m) = m^{\alpha-1}$  par une loi dite de Darcy ; mais elle peut également être interprétée comme un phénomène de diffusion hétérogène

$$\partial_t m - \operatorname{div}(\kappa \nabla m) = 0, \quad \kappa = \alpha m^{\alpha-1}.$$

Sous cette forme, il apparaît que l'existence globale d'une solution classique est conditionnée à la non-dégénérescence de l'opérateur du second ordre, c'est-à-dire à la condition  $\kappa(m) > 0$  et donc  $m > 0$ . Malheureusement cette stricte positivité peut être perdue en temps fini et, comme pour l'équation de Burgers, le cadre des solutions faibles est adapté pour étudier le système au-delà du temps de dégénérescence.

Nous ferons le lien à la Section 2.3.3 (ainsi qu'au Chapitre 6) avec les équations de Navier-Stokes compressible. Considérons le système d'équations (Navier-Stokes compressible à viscosité variable  $\mu(\rho) = \rho^\alpha$  sans pression) en dimension un

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) - \partial_x(\rho^\alpha \partial_x u) = 0 \end{cases}$$



On remarque alors qu'il admet formellement des solutions du type

$$\rho, \quad u = -\frac{\partial_x \rho^\alpha}{\rho} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \partial_x \rho^{\alpha-1}$$

et ainsi la dynamique des milieux poreux donnée par l'équation d'évolution de la densité  $\rho$  dans laquelle on a remplacé la vitesse  $u$

$$\partial_t \rho - \partial_{xx}^2 \rho^\alpha = 0.$$

Nous exploiterons particulièrement ce lien en dimension supérieure dans le cadre des équations de Navier-Stokes avec pression (mis en évidence par HASPOT dans [96] au travers de la notion de *quasi-solution*) afin de prendre en compte des effets d'hétérogénéité en densité (où le gradient  $\nabla \rho$  est non nul) dans un fluide. Nous modéliserons et analyserons également dans cette thèse plusieurs autres phénomènes d'hétérogénéité à partir des équations de Navier-Stokes. Nous nous intéresserons par exemple aux interactions entre composants élémentaires à l'échelle microscopique et à leurs conséquences à l'échelle macroscopique, nous montrerons en particulier qu'elles peuvent s'exprimer au travers d'une contrainte de densité maximale, appelée aussi contrainte de *close packing*.

Nous étudierons dans ce cadre des mélanges biphasiques, les deux phases pouvant être *dispersées* ou *séparées*. Le premier cas concerne par exemple les liquides contenant des bulles de gaz, les suspensions colloïdales, les milieux granulaires immergés (écoulements sanguins, coulées pyroclastiques, etc., voir la Figure 1.1). Dans le cas de phases séparées on peut par exemple penser aux écoulements en conduites fermées, aux écoulements souterrains, aux cas d'objets flottants (Figure 1.2).

Nous proposerons des modèles susceptibles de décrire les deux états possibles du mélange, l'état où les deux phases coexistent et l'état où l'une des deux phases disparaît. Nous avons représenté dans la Figure 1.2 cette situation pour l'écoulement d'un liquide dans une conduite fermée, ou d'un écoulement souterrain, où le liquide peut être en surface libre avec un couche d'air entre la surface libre et le haut de la conduite, mais il peut aussi être "en charge" là où le liquide est directement en contact avec le haut de la conduite et où la phase gazeuse a disparu. La modélisation d'écoulement où le liquide est partiellement en charge peut également s'appliquer aux cas d'objets flottants (icebergs, convertisseur d'énergie marémotrice sur la Figure 1.2, etc.).

Dans le cadre du mouvement collectif ces problématiques rejoignent celles de la modélisation de la congestion et des transitions de phases entre zones libres et zones congestionnées/embouteillages (voir Figure 1.3).

En particulier pour les applications au trafic routier nous nous attacherons à reproduire la persistance de certains embouteillages due à des perturbations locales du comportement des automobilistes.

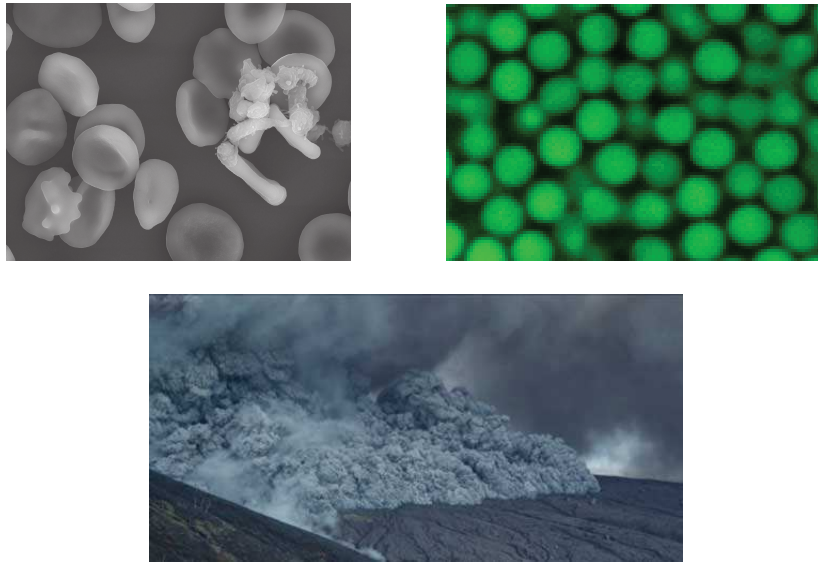


FIGURE 1.1 – Exemples de suspensions et de milieux granulaires immergés. En haut à gauche : écoulement sanguin ([http://remf.dartmouth.edu/Blood\\_cells\\_SEM/images](http://remf.dartmouth.edu/Blood_cells_SEM/images)), en haut à droite : suspension colloïdale ([www.physics.emory.edu/faculty/weeks](http://www.physics.emory.edu/faculty/weeks)), en bas : coulée pyroclastique sur l'île de Montserrat



FIGURE 1.2 – Exemples d'écoulements partiellement en charge : à droite : écoulement dans une conduite forcée ([energie.edf.com](http://energie.edf.com)), à gauche : cas d'un objet flottant (convertisseur d'énergie marémotrice).

Nous essayons dans la suite de ce chapitre d'expliquer les mécanismes physiques de ces hétérogénéités et nous proposons des outils d'analyse mathématique qui permettent de les modéliser.



FIGURE 1.3 – Exemples de mouvements collectifs. À gauche file de voitures (The Mathematical Society of Traffic Flow <http://traffic.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/>), à droite un troupeau de moutons (Projet ANR Panurge).

## 2 Quelques rappels sur la modélisation des écoulements fluides

Le but de cette section est de présenter les outils standards à la base des travaux de cette thèse pour la modélisation et l'analyse mathématique des écoulements de fluides . Elle ne contient pas en elle-même de contribution originale mais elle permet de situer les résultats de thèses au regard de la théorie "classique" des équations fluides. Le lecteur pourra, s'il est familier avec le formalisme et les outils mathématiques utilisés pour les équations de Navier-Stokes, passer directement aux sections suivantes qui présentent les principaux apports de cette thèse.

Nous revenons ainsi dans la présente section sur les principes de la mécanique des milieux continus qui mènent aux équations de Navier-Stokes. Ces équations sont en fait des équations de bilan (ou dites de conservation) qui sont complétées par des lois de comportement permettant de caractériser les propriétés intrinsèques du matériau au repos et sa réponse aux contraintes qui lui sont exercées. Nous verrons qu'au travers de ces lois de comportement beaucoup de phénomènes d'hétérogénéité simples peuvent être pris en compte.

**Continuité du milieu et mécanique des fluides.** Il n'est pas tout à fait évident de définir la notion de fluide car elle est souvent confondue avec l'état physique d'un corps, liquide ou gaz. Une définition adéquate du caractère fluide d'un matériau doit en fait intégrer selon ANCEY et COUSSOT [54] à la fois les propriétés physiques et mécaniques du matériau :

« On considère qu'un fluide est formé en plaçant dans un volume délimité de l'espace un certain nombre d'éléments de formes, de tailles et de natures variées (atomes, molécules, billes de verre, cailloux, etc.). Ces éléments interagissent de manières diverses et sont distribués dans l'espace de façon désordonnée à longue distance. Enfin les propriétés mécanique du

*fluide, après un temps de repos suffisant, ne varient pas sensiblement lorsque les éléments sont redistribués dans l'espace d'une manière quelconque et plus ou moins aléatoire. »*

La description du mouvement d'un fluide à partir des mouvements individuels de chacun de ses éléments microscopiques peut être en pratique très difficile avec les outils techniques actuels en terme de puissance de calcul mais aussi en terme de modélisation, puisqu'il faudrait être capable de déterminer la nature et l'influence des force d'interactions jusqu'à l'échelle moléculaire voire atomique . . .

Une approche alternative, dite *approche macroscopique*, consiste à ne plus distinguer ces éléments microscopiques.

Considérons un petit volume de fluide (dit aussi particule de fluide) contenant un grand nombre d'éléments microscopiques (molécules ou atomes) dont taille est à la fois très petite devant les échelles de longueur caractéristiques de l'écoulement mais aussi très grande devant le libre parcours moyen des molécules. Sous les conditions précédentes il est alors possible de décrire le fluide comme un *milieu continu* et d'introduire des variables macroscopiques représentatives de l'écoulement. Ces quantités seront alors des quantités moyennées au sens où elles seront les moyennes sur toutes les molécules constituant le volume élémentaire. Pour notre description, nous considérerons dans un premier temps que ces variables sont des fonctions suffisamment régulières de l'espace et du temps. En particulier, il est nécessaire que la différence entre les valeurs des variables associées à deux particules de fluides voisines soit négligeable devant la différence entre les valeurs prises à l'échelle de la longueur caractéristique de l'écoulement.

## 2.1 Variables macroscopiques de l'écoulement

Afin de décrire l'écoulement d'un fluide nous devons introduire plusieurs variables qui vont nous permettre de caractériser à la fois le comportement mécanique mais aussi l'état physique du système.

La vitesse est la variable qui va décrire les mouvements relatifs des particules de fluide entre elles. Deux notions de vitesses peuvent être associées à l'écoulement, elles reposent sur deux approches différentes de description du mouvement.

La première approche dite *eulérienne* fixe une position  $x$  et un instant  $t$  d'observation. Dans cette approche, la vitesse  $u$  est définie comme la vitesse moyenne de la particule de fluide se trouvant au temps  $t$  à la position  $x$ .

La seconde approche, appelée approche *lagrangienne*, consiste à suivre la trajectoire d'un élément de fluide donné au cours du temps. Étant donnée une particule de fluide qui, à l'instant initial, était située à la position  $x$ , on définit sa trajectoire  $t \mapsto X_x(t)$  appelée *caractéristique*. La vitesse lagrangienne de la particule de fluide,  $U_x$  est alors définie comme la dérivée temporelle de la caractéristique

$$U_x(t) = \frac{dX_x}{dt}(t),$$

on a alors

$$U_x(t) = u(t, X_x(t)).$$

Dans l'approche lagrangienne une quantité scalaire  $f(t, X_x(t))$  évolue alors au cours du temps le long des trajectoires, ce qui s'exprime au travers de l'opérateur de *dérivée partielle*, ou *dérivée matérielle*

$$\frac{D}{Dt}f = \partial_t f + U_x(t) \cdot \nabla f.$$

Une fois la vitesse définie, il nous reste à caractériser l'état physique du fluide. Pour ce faire nous introduisons la *densité* notée  $\rho$  qui correspond au nombre d'éléments microscopiques dans une particule de fluide.

L'état physique du fluide est aussi décrit par la température  $T$  qui rend compte de l'agitation des éléments au sein du fluide. Dans le cas d'un gaz la température est proportionnelle aux fluctuations de la vitesse à l'échelle microscopique.

Dans la suite de notre étude, nous supposerons que la température est constante dans les fluide que nous considérerons.

**Remarque :** Il est par ailleurs possible de définir des quantités macroscopiques susceptibles de rendre en compte d'effets d'hétérogénéités précis. C'est alors le procédé de moyennisation qui traduira ces effets d'hétérogénéité. Par exemple dans le cas d'un mélange biphasique dispersé (des bulles de gaz dans un liquide ou des particules solides immergées dans un fluide) un procédé de *moyennisation d'ensemble* (moyenne sur l'ensemble des réalisations possibles, voir ISHII [108] et DREW, PASSMAN [65]) peut être mis en œuvre. Ceci conduit à un système d'équations aux dérivées partielles dont les variables sont : la densité moyenne pour chaque phase ; la vitesse moyenne de chaque phase et une nouvelle variable de fraction volumique de chaque phase qui caractérise l'état du mélange.

Beaucoup d'autres procédés de moyennisation sont utilisés en pratique. Par exemple la moyennisation de Reynolds traduit les effets de turbulence et la moyennisation de Favre (pondération par la masse) permet de traiter les effets de fluctuation en densité. Nous reviendrons sur les effets de fluctuation en densité plus en détails dans la Section 2.3.3.

## 2.2 Lois de conservation

**Conservation de la masse.** Ce principe exprime le fait qu'en l'absence de source de création de matière, la masse d'un système, qui correspond à l'intégrale de la densité, se conserve au cours du temps. Au sein d'un volume  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , la variation de la masse dans  $\Omega$  est égale au flux de masse au travers de  $\partial\Omega$ . Ceci se traduit mathématiquement sous la forme de l'équation suivante

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \, dv \right) = - \int_{\partial\Omega} \rho (u \cdot n) \, d\sigma$$

où  $n$  est la normale sortante à  $\Omega$ . La formule de Stokes nous permet alors de remplacer l'intégrale de surface du membre de droite par une intégrale de volume

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \, dv \right) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho u) \, dv.$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout volume élémentaire de fluide, on en déduit l'expression locale du principe de conservation de la masse

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \tag{1.5}$$

L'équation précédente exprime alors une vision eulérienne de l'écoulement.

**Conservation de la quantité de mouvement.** Ce principe résulte directement de l'application du principe fondamental de la dynamique aux éléments de volume élémentaire du fluide. Selon ce principe, l'accélération que subit un corps est égale à la somme des forces s'exerçant sur lui divisé par sa masse. Considérons un volume de fluide  $\Omega$  soumis à une force de volume de densité  $b$  et à l'ensemble des contraintes s'exerçant sur sa surface extérieure  $\Sigma$ . L'accélération de la particule de fluide se trouvant à l'instant  $t$  à la position  $x$  s'exprime au travers de la dérivée particulaire comme

$$a(t, x) = \partial_t u(t, x) + u \cdot \nabla u(t, x).$$

Le principe de la dynamique donne alors

$$\int_{\Omega} \rho (\partial_t u + u \cdot \nabla u) \, dv = \int_{\Omega} b \, dv + \int_{\partial\Omega} (\Sigma \cdot n) \, ds$$

ce qui nous permet d'en déduire localement l'équation

$$\rho \partial_t u + \rho u \cdot \nabla u = b + \operatorname{div} \Sigma.$$

En combinant avec l'équation de la masse la précédente équation s'écrit encore

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = b + \operatorname{div} \Sigma. \tag{1.6}$$

Cette équation est appelée conservation de la quantité de mouvement ou équation des moments.

**Conditions au bord.** Dans le cas d'un domaine borné  $\Omega$ , on imposera de manière naturelle une condition de non-pénétration

$$(u \cdot n)|_{\partial\Omega} = 0.$$

On peut aussi imposer l'absence de frottement au niveau du bord (condition *no-slip*), ce qui revient avec la condition précédente, à imposer une condition de Dirichlet homogène sur la vitesse

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$



Dans ce travail nous nous intéresserons au cas de conditions au bord de Dirichlet sur la vitesse ou au cadre périodique pour lequel la densité et la vitesse sont supposées périodiques en espace.

Dans la pratique d'autres conditions peuvent être utilisées comme les conditions de Navier pour prendre en compte du frottement sur les bords, des conditions d'entrée/sortie sur une partie du bord  $\partial\Omega$ , ...

**Energie.** De manière générale, une équation supplémentaire doit être adjointe à l'équation de la masse et des moments afin de décrire les variations d'énergie en fonction des phénomènes de transport/diffusion au sein du système. L'équation satisfaite par l'énergie totale du système s'écrit

$$\partial_t(\rho\mathcal{E}) + \operatorname{div}(\rho\mathcal{E}u) - \operatorname{div}(k\nabla T) - \operatorname{div}(\Sigma.u) = b \cdot u.$$

En l'absence de variation d'entropie (nous avons supposé l'écoulement isentropique en négligeant les variations de température), l'équation de conservation de l'énergie interne découle directement des précédentes équations de la masse et des moments. Nous reviendrons dans le détail sur ce point dans la Section 2.3.2.

**Remarque :** Dans la cas où le système considéré présente une discontinuité, des conditions supplémentaires dites *conditions de saut* doivent être ajoutées afin d'assurer la conservation globale au sein du système. De manière générale (*c.f.* [66]), elles s'expriment sous la forme

$$[\rho\Psi(u - u_i) + J] \cdot n = m$$

où  $\Psi$  représente la variable à conserver,  $u_i$  est la vitesse locale de l'interface,  $n$  la normale unitaire,  $[v]$  est le saut de la variable  $v$  de part et d'autre de l'interface, enfin  $m$  est un terme source de la quantité  $\Psi$ .

## 2.3 Tenseur des contraintes : lois de comportement et lois d'état

Nous avons donné au paragraphe précédent les équations de la masse et des moments gouvernant l'écoulement d'un fluide quand la température est supposée constante. En dimension trois d'espace, le système formé par les quatre équations (masse et moments pour chacune des directions) fait alors intervenir les inconnues de densité  $\rho$ , de vitesse  $u_1, u_2, u_3$  et de contrainte  $\Sigma_{i,j}$ . Le nombre d'inconnues est donc plus grand que le nombre d'équations que nous avons à notre disposition, afin de fermer le système il est nécessaire d'imposer des relations supplémentaires entre ces inconnues.

On appelle *loi de comportement d'un matériau* la relation entre le tenseur des contraintes  $\Sigma$  et les inconnues  $\rho, u$ . D'un point de vue mécanique, on cherche donc à déterminer les efforts entre des volumes élémentaires de fluide situés de part et d'autre d'une surface en fonction du mouvement de ces éléments et potentiellement d'autres paramètres structure

du milieu. On peut alors considérer le tenseur des contraintes comme la trace à l'échelle macroscopique des effets moléculaires microscopiques ayant lieu au sein des volumes élémentaires du fluide.

Nous commençons par rappeler la propriété fondamentale de symétrie du tenseur des contraintes  $\Sigma$  qui nous permet ensuite d'exprimer la loi de comportement comme somme d'une contribution au repos, c'est la pression, et d'une partie "visqueuse" qui s'oppose aux déformations subie par le fluide. Il reste enfin à exprimer la pression ainsi que le tenseur de dissipation visqueuse en fonction des inconnues  $\rho$  et  $u$ . On s'intéressera en particulier à la prise en compte des variations de la densité dans la pression au travers des *lois d'état* mais aussi dans le tenseur de dissipation visqueuse.

### 2.3.1 Forme de la loi de comportement

On peut montrer (voir par exemple OSWALD [147] ou BOYER, FABRIE [24]) que le tenseur  $\Sigma$  est symétrique. Ce résultat permet de réduire le nombre d'inconnues du système, mais il reste quand même des lois à prescrire afin de fermer le système.

Dans les paragraphes qui suivent nous commençons par rappeler les outils mathématiques permettant de décrire les déformations mécaniques des particules de fluides, nous caractérisons ensuite au moyen de ces outils le tenseur des contraintes  $\Sigma$  dans le cas d'un fluide simple n'admettant pas de configuration privilégiée. C'est le cas des fluides newtoniens que nous explicitons. Nous abordons finalement la question des fluides plus complexes pour lesquels il existe une configuration privilégiée dont on doit tenir compte dans la loi de comportement au travers d'une inconnue supplémentaire appelée paramètre d'état.

**Déformations d'un fluide, tenseur des taux de déformation.** Soit un élément de fluide à un instant  $t$  situé à la position  $x$ , on note  $u(t, x)$  sa vitesse. Afin de caractériser les déformations subies par le fluide au voisinage de cet élément, on exprime la variation de vitesse entre cet élément et un élément de fluide voisin situé à l'instant  $t$  à la position  $x + dx$ . Au premier ordre en  $dx$ , la vitesse du second élément de fluide s'écrit alors comme la somme de la vitesse  $u(t, x)$  et d'un accroissement  $du$  avec

$$du_i = \sum_{j=1}^d \partial_j u_i(t, x) dx_j.$$

On voit ainsi apparaître le tenseur gradient de  $u$ , matrice de dimension  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , que nous noterons dans la suite  $\nabla u$ . Ce tenseur peut se décomposer comme somme d'une partie symétrique

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

et d'une partie anti-symétrique

$$A(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla^t u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j).$$



*Partie symétrique*  $D(u)$ . C'est cette matrice qui intervient dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement car, comme nous l'avons rappelé le tenseur des contraintes  $\Sigma$  est symétrique. On l'appelle tenseur des taux de déformations.

Afin d'identifier les différentes déformations mises en jeu on décompose  $D(u)$  en deux matrices dont l'une est diagonale, isotrope (les termes diagonaux sont tous égaux)

$$D(u) = \frac{\operatorname{div}(u)}{d} \mathbf{I} + \left( D(u) - \frac{\operatorname{div}(u)}{d} \mathbf{I} \right) \quad (1.7)$$

$\mathbf{I}$  étant la matrice identité. La partie diagonale est alors associée à la dilatation volumique de l'élément de fluide car elle fait intervenir  $\operatorname{div} u$ . On l'appelle partie isotrope du tenseur des taux de déformation.

Tandis que la partie à diagonale nulle est appelée partie déviateur du tenseur des taux de déformation et correspond aux déformations à volume fixé.

*Partie antisymétrique*  $A(u)$ . La matrice  $A(u)$  encode elle les rotations subies par le fluide. Elle est proportionnelle à la vorticité  $\omega$

$$\omega = 2 A(u).$$

Pour plus de détails, nous référons aux livres de GUYON, HULIN, PETIT [93] et de OSTWALD [147].

**Décomposition du tenseur des contraintes.** On décompose le tenseur des contraintes en distinguant les contraintes s'exerçant au repos, qui s'appliquent de manière isotrope sur la composante normale, de celles qui sont liées aux déformations

$$\Sigma = -p \mathbf{I} + \mathbb{S} \quad (1.8)$$

On appelle la quantité scalaire  $p$  *pression hydrostatique* et le tenseur  $\mathbb{S}$  *tenseur des contraintes visqueuses*.

**Remarque :** Il y a dans la littérature généralement une ambiguïté sur la notion de pression qui soit recoupe celle que nous avons considérée c'est-à-dire l'ensemble des contraintes au repos, soit recouvre l'ensemble des contrainte de compression c'est-à-dire l'ensemble des contraintes normales s'exerçant sur un volume élémentaire de fluide. Dans ce dernier cas il faut alors aussi prendre en compte la partie normale du tenseur de dissipation visqueuse  $\mathbb{S}$ .

**Fluides newtoniens.** L'hypothèse des fluides newtoniens consiste à supposer que la dépendance de  $\mathbb{S}$  par rapport à  $D(u)$  est linéaire. La loi de comportement s'écrit alors sous la forme

$$\Sigma = -p \mathbf{I} + \mathbb{S} = (-p + \lambda \operatorname{div} u) \mathbf{I} + 2\mu D(u). \quad (1.9)$$

Les coefficients  $\mu$ ,  $\lambda + \frac{2}{d}\mu$  (c.f. (1.7)) sont appelés respectivement *viscosité de cisaillement* et *viscosité de compression* (ou de *volume*). Par abus de langage nous désignerons dans la suite par viscosité de volume le coefficient  $\lambda$ .

Une première approche consiste à considérer ces coefficients constants. En toute généralité ils peuvent néanmoins présenter des propriétés d'hétérogénéité en dépendant par exemple de la densité, de la température ou de la direction d'espace (effet d'anisotropie pour des écoulements géophysiques). La théorie cinétique dans le cas des gaz monoatomiques fournit un cas particulier où on peut justifier physiquement un lien entre  $\lambda$  et  $\mu$

$$\lambda = -\frac{2}{d}\mu, \quad \mu > 0.$$

Plus généralement il n'existe pas de relation universelle liant  $\lambda$  à  $\mu$  mais on suppose pour des raisons de structure mathématique que nous détaillerons plus tard, que

$$\mu > 0, \quad \lambda + \frac{2}{d}\mu > 0. \tag{1.10}$$

On remarquera que cette relation autorise en particulier le coefficient  $\lambda$  à prendre des valeurs négatives.

**Configuration naturelle d'un fluide, notion de paramètre d'état.** Pour des matériaux constitués d'éléments de beaucoup plus grande taille que les molécules d'un liquide ordinaire la prise en compte de l'état du système peut s'avérer cruciale (voir ANCEY, COUSSOT [54]). C'est le cas comme nous le verrons des milieux granulaires immergés où des particules solides de grandes tailles sont immergés dans un fluide. Les interactions entre les composants du mélange peuvent alors varier sensiblement en fonction des déformations qu'ils ont subies auparavant ou de leurs positions relatives. Cet état peut *a priori* être caractérisé par une variable scalaire locale qu'on notera  $\Pi$  mais pourrait aussi être caractérisé par un tenseur afin de prendre en compte des effets d'anisotropie. La loi de comportement prescrit alors la relation entre le tenseur des contraintes  $\Sigma$ , le tenseur des déformations  $D(u)$  et l'état instantané du fluide  $\Pi$ ,

$$\Sigma = f(D(u), \Pi). \tag{1.11}$$

Une équation supplémentaire, donnant les variations de  $\Pi$  en fonction de l'histoire des caractéristiques de l'écoulement, est alors être adjointe au système.

De manière plus générale encore les lois de comportement peuvent être exprimées au travers d'une relation implicite

$$F(\Sigma, \Pi, D(u)) = 0,$$

Le lecteur pourra consulter à ce sujet l'article de MORGAN [141], ou l'article de RAJAGOPAL et al. [133]. Le caractère implicite de la relation autorise alors plusieurs configurations naturelles pour le fluide et ainsi plusieurs réponses possibles aux contraintes.

### 2.3.2 Pression hydrostatique et lois d'états

Nous souhaitons préciser ici la notion de pression hydrostatique qui exprime dans (1.8) l'ensemble des contraintes s'exerçant sur une particule de fluide à l'état de repos.

Dans le cas d'un fluide standard dans des conditions normales d'écoulement, la pression est liée à la distribution globale des molécules du fluide. On parle d'origine entropique de la pression (voir ISRAELACHVILI [109]), celle-ci est alors définie au travers de la *loi d'état* comme une fonction des variables thermodynamiques de densité et de température.

Dans le cas de fluides complexes, ce qui sera par exemple le cas comme nous le verrons en mouvement collectif ou pour les suspensions (particules solides immergées dans un fluide), la pression peut aussi contenir des termes d'interaction locale entre particules élémentaires, ces interactions pouvant être d'origines physiques diverses (mécanique, électrostatique, sociale dans le cas des foules, etc.).

Nous abordons dans cette section seulement les origines entropiques au travers des lois de la thermodynamique. Les forces d'interaction mutuelle entre composants élémentaires seront abordées dans la Section 3.3.

**Thermodynamique et pression.** Dans la plupart des modèles mathématiques, il est supposé de manière implicite que le temps caractéristique de l'écoulement est très grand de telle sorte que l'on peut raisonnablement supposer le système à l'équilibre thermodynamique à chaque instant. Les principes de base de la thermodynamique (premier et second principe) nous permettent alors de dériver la relation suivante dite de Maxwell (dérivée de celle de Gibbs) qui lie l'énergie interne  $e$ , la température  $T$ , la pression  $p$  et le volume spécifique  $v$

$$de = c_v dT + \left( T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right) dv$$

où  $c_v$  est la capacité calorifique isochore par unité de masse. C'est-à-dire que  $c_v dT$  représente la quantité de chaleur nécessaire pour augmenter de  $dT$  la température d'un système à volume spécifique  $v$  constant.

Cette relation de Maxwell s'écrit encore en terme de densité  $\rho = 1/v$

$$de = c_v dT - \frac{1}{\rho^2} \left( T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho - p \right) d\rho. \quad (1.12)$$

De manière générale l'énergie interne spécifique et la pression sont des fonctions de la densité  $\rho$  et de la température  $T$ . On appelle *loi d'état* l'expression de la pression

$$p(\rho, T)$$

et la relation de Maxwell nous permet alors d'en déduire l'expression de  $e(\rho, T)$ . L'approche énergétique consiste à l'inverse à prescrire la loi de l'énergie interne spécifique  $e(\rho, T)$  et à en déduire la loi d'état en pression. Nous verrons que cette approche énergétique est essentielle si l'on veut modéliser certains effets d'hétérogénéité au sein d'un fluide. Les lois les plus couramment utilisées dans les études mathématiques sont

- la loi d'état des gaz parfaits

$$pv = kT \quad \text{ou encore} \quad p(\rho, T) = k\rho T \quad (1.13)$$

où  $k$  est une constante qui dépend du gaz étudié ;

- la loi d'état de Van der Waals pour les gaz réels

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) \left(1 - \frac{b}{v}\right) = k\frac{T}{v} \quad \text{ou encore} \quad p(\rho, T) = \frac{k\rho T}{1 - b\rho} - a\rho^2 \quad (1.14)$$

dans laquelle on prend en compte au travers de  $b > 0$  le *covolume* c'est-à-dire grossièrement la taille des molécules du gaz, et des forces attractives entre les molécules via la constante  $a > 0$ .

**Fluides barotropes.** C'est le cas où l'on considère que la pression ne dépend que de la densité  $\rho$ . La relation de Maxwell (1.12) s'écrit alors sous la forme

$$e'(\rho) = \frac{p(\rho)}{\rho^2}. \quad (1.15)$$

Avec cette relation entre l'énergie interne spécifique et la pression, nous pouvons alors exprimer l'évolution en temps de l'énergie interne totale  $\rho e(\rho)$  en fonction des variables l'écoulement. Il suffit en effet pour cela d'écrire à partir de l'équation de conservation de la masse

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0$$

l'équation satisfaite par  $\partial_t(\rho e(\rho))$ . De manière générale pour une fonction  $\beta$  régulière, l'équation de conservation de la masse se réécrit en multipliant par  $\beta'(\rho)$

$$\partial_t \beta(\rho) + \operatorname{div}(\beta(\rho)u) + (\beta'(\rho)\rho - \beta(\rho))\operatorname{div} u = 0$$

Nous trouvons ici pour l'énergie interne

$$\partial_t(\rho e(\rho)) + \operatorname{div}(\rho e(\rho)u) + (\rho e(\rho) + \rho^2 e'(\rho) - \rho e(\rho))\operatorname{div} u = 0$$

ce qui grâce à la relation de Maxwell (1.15) se réécrit

$$\partial_t(\rho e(\rho)) + \operatorname{div}(\rho e(\rho)u) + p(\rho)\operatorname{div} u = 0. \quad (1.16)$$

On retrouve alors l'évolution de l'énergie interne totale en intégrant sur l'espace  $\Omega$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e(\rho) \, dx = \int_{\Omega} (\nabla p \cdot u) \, dx \quad (1.17)$$

qui est l'intégrale qui apparaît lorsqu'on teste l'équation de conservation de la quantité de mouvement par la vitesse  $u$  (pour obtenir l'inégalité d'énergie justement).

Introduisons à présent le coefficient adiabatique  $\gamma$ , rapport entre  $c_p$  la capacité calorifique isobare (*i.e.* à pression constante) et  $c_v$  la capacité calorifique isochore que nous avons présentée plus haut. Le coefficient adiabatique peut aussi s'interpréter en termes de degré de liberté des molécules du gaz (*c.f.* [164]), il dépend de la composition du gaz et de la dimension d'espace. Pour les gaz parfaits, nous avons

$$p = (\gamma - 1)\rho e$$

et dans le cas d'une transformation adiabatique, sans transfert de chaleur, la *loi de Laplace* nous donne l'existence d'une constante  $a > 0$  telle que

$$p(\rho) = a\rho^\gamma. \tag{1.18}$$

En terme d'énergie on obtient alors

$$\rho e(\rho) = a \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1}$$

et l'on retrouve la loi d'état couramment utilisée dans les études mathématiques des fluides compressibles (voir par exemple [130], [76]). Dans la pratique, des valeurs pertinentes physiquement pour le coefficient adiabatique  $\gamma$  sont en dimension 3 :  $5/3$  pour les gaz monoatomiques,  $7/5$  pour les gaz diatomiques (utilisé généralement pour l'air) et en dimension 2 :  $2$  et  $5/3$  respectivement.

Une propriété importante satisfaite par la loi de pression (1.18) est la monotonie qui peut être reliée par des arguments issus de la thermodynamique au fait que le système est dans un état d'équilibre. Un changement d'état ne peut pas survenir spontanément au sein du système, c'est ce qu'on appelle la *stabilité thermodynamique*.

Mathématiquement cette propriété est essentielle dans les premières études parues sur les équations de Navier-Stokes compressibles car elle fournit les résultats de convergence cruciaux dont ont besoin LIONS [130] et FEIREISL [76] pour montrer la stabilité des solutions faibles du système de Navier-Stokes compressible avec viscosités constantes (voir par exemple [130] Section 5.5 ou [78] Section 10.11). Elle a cependant été affaiblie d'abord par FEIREISL [75] (voir aussi [67]) aux pressions qui sont monotones seulement à partir d'une certaine densité ce qui permet de traiter le cas d'une loi d'état de Van der Waals (1.14). Plus récemment, BRESCH et JABIN dans [38, 39] ont étendu les précédents résultats de LIONS et FEIREISL à des pressions du type

$$\forall \rho \geq 0 \quad C^{-1}\rho^\gamma - C \leq p(\rho) \leq C\rho^\gamma + C, \quad |p'(\rho)| \leq \bar{p}\rho^{\gamma-1}, \quad \bar{p} > 0$$

pour lesquelles aucune hypothèse de monotonie n'est imposée, seulement un contrôle lipschitz.

**Remarque :** Si depuis les résultats récents de PLOTNIKOV et WEIGANT [157], nous savons qu'il est possible de traiter mathématiquement en dimension deux d'espace une large gamme de coefficients adiabatiques ( $\gamma \geq 1$ ) pour la loi d'état (1.18), en dimension trois en revanche, la question de l'existence globale de solution faible reste ouverte pour des coefficients  $\gamma < 3/2$ . Le principal obstacle étant la compacité du terme convectif  $\rho u \otimes u$ . Nous renvoyons sur ce point au livre de NOVOTNÝ et STRASKRABA [146].

**Hétérogénéité et pression.** Nous nous plaçons ici dans le cas où la pression  $p$  (et donc l'énergie interne  $e$ ) est une fonction du rapport  $\rho/\rho^*$ ,  $\rho^*$  étant une densité de référence (par exemple une densité maximale comme le covolume  $b$  dans la loi d'état de Van der Waals (1.14)) constante en temps mais qui varie en espace à l'intérieur du domaine d'étude  $\rho^*(x)$ . Nous supposons que la relation thermodynamique de Maxwell reste satisfaite c'est-à-dire que

$$\rho^2 e'(\rho/\rho^*) = p(\rho/\rho^*).$$

En suivant les mêmes principes que dans le cas homogène on peut obtenir l'équation d'évolution de  $\rho e(\rho/\rho^*)$ . La relation de Maxwell nous donne à présent

$$\partial_t(\rho e(\rho/\rho^*)) + \operatorname{div}(\rho e(\rho/\rho^*)u) + p(\rho/\rho^*)\operatorname{div}(\rho^*u) = 0 \quad (1.19)$$

et par intégration en espace nous en déduisons que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e(\rho/\rho^*) dx = \int_{\Omega} (\rho^* \nabla p(\rho/\rho^*) \cdot u) dx \quad (1.20)$$

L'approche énergétique, via la relation de Maxwell, nous conduit ainsi à considérer dans l'équation des moments un terme de "pression" du type

$$\rho^* \nabla p \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right) \quad (1.21)$$

et non pas du type  $\nabla p(\rho/\rho^*)$  comme nous aurait a priori conduit à le faire l'approche "mécaniste", au travers du tenseur des contraintes (1.8).

**Remarque :** Ce terme de pression hétérogène peut alternativement être interprété et exprimé comme une force volumique. On introduit pour cela la fonction  $P$  telle que

$$P'(\rho/\rho^*) = \frac{p'(\rho/\rho^*)}{\rho/\rho^*}$$

ce qui permet de réécrire (1.21) sous la forme volumique

$$\rho \nabla P \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right). \quad (1.22)$$

### 2.3.3 Lois de viscosités

Nous nous intéressons à présent au tenseur des forces visqueuses

$$\mathbb{S} = \mu \mathbb{D}(u) + \lambda \operatorname{div} u \mathbb{I}$$

qui exprime les dissipations d'énergie lors des mouvements relatifs entre les éléments de fluide. On retrouve mathématiquement cette notion de dissipation d'énergie en testant l'équation des moments

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p - \nabla((\lambda + 2\mu/d)\operatorname{div} u) - 2\operatorname{div} \left( \mu \left( \mathbb{D}(u) - \frac{\operatorname{div} u}{d} \mathbb{I} \right) \right) = 0$$

par la vitesse  $u$  et par des intégrations par partie (nous annulons les termes de bords en supposant par exemple des conditions de périodicité en espace)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathcal{E}(t, x) dx + \int_{\Omega} \left( \lambda + \frac{2\mu}{d} \right) (\operatorname{div} u)^2 dx + \int_{\Omega} \mu \left| \operatorname{D}(u) - \frac{2\mu}{d} (\operatorname{div} u) \mathbf{I} \right|^2 dx = 0 \quad (1.23)$$

où  $\rho \mathcal{E}$  est l'énergie totale somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne spécifique

$$\rho \mathcal{E} = \frac{\rho |u|^2}{2} + \rho e(\rho).$$

Sous l'hypothèse (1.10) ( $\mu > 0$ ,  $\lambda + 2\mu/d > 0$ ) on garantit la positivité des deux intégrales restantes, et on voit ainsi que les coefficients de viscosité  $\lambda$  et  $\mu$  caractérisent les dissipations d'énergie lors des déformations du fluide. Au niveau microscopique ce phénomène est lié à un transport de quantité de mouvement dû aux collisions entre composants élémentaires (voir [147]).

**Viscosités constantes.** Le cas où les viscosités sont constantes fait l'objet de très nombreuses études. Il permet de garantir un effet régularisant des équations sur le champ de vitesse que l'on retrouve au travers de l'estimation d'énergie (1.23). Sous l'hypothèse d'une donnée initiale d'énergie totale finie avec une vitesse initiale  $u^0 \in (L^2(\Omega))^d$ , les termes de dissipations dans l'équation (1.23) nous permettent d'espérer l'existence d'une solution en vitesse plus régulière en espace

$$u \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^d).$$

Du point de vue de la stabilité d'une suite  $(\rho_n, u_n)$  de solutions faibles du système de Navier-Stokes compressible, ce contrôle des dérivées en espace de la vitesse nous permet en particulier le passage à la limite faible dans le terme convectif non-linéaire  $\rho u \otimes u$ . Explicitons ce point important pour la suite de notre étude. Nous souhaitons passer à la limite dans la formulation faible et donc dans l'intégrale suivante

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\rho_n u_n \otimes u_n) : \nabla \zeta dx dt, \quad \zeta \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega).$$

L'estimation d'énergie du terme cinétique nous donne seulement la compacité faible-\* de  $\sqrt{\rho_n} u_n$  dans  $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^d)$ . En supposant des conditions périodiques au bord nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho_n |u_n|^2 dx dt = \langle \rho_n u_n, u_n \rangle_{L_t^2 H_x^{-1}, L_t^2 H_x^1}$$

avec  $u_n$  qui converge faiblement dans  $L^2(0, T; (H^1(\Omega))^d)$  (contrôle de la dissipation visqueuse) et  $\rho_n u_n$  qui converge fortement par un lemme d'Aubin-Lions (voir [24], on doit assurer en particulier un contrôle de la dérivée temporelle) dans  $L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^d)$ . Ceci nous permet ainsi de conclure quant à la convergence faible du terme convectif.

Les coefficients de viscosité sont par ailleurs essentiels dans la preuve d'existence de solutions faibles globales en temps (et plus précisément pour le passage à la limite dans le terme non-linéaire de pression) de Lions [130] et Feireisl [76] au travers de la notion de *flux effectif*. Cette quantité apparaît naturellement en prenant formellement la divergence de l'équation des moments. Le terme de pression additionné aux termes de viscosité donne alors

$$\Delta (p - (2\mu + \lambda)\operatorname{div} u).$$

Cette expression tendrait à montrer que nous avons une certaine régularité et donc une certaine compacité sur le flux effectif :  $p - (2\mu + \lambda)\operatorname{div} u$ . Des estimations de commutateurs permettent de montrer qu'on a effectivement une sorte de compacité faible du flux effectif assurant ainsi, suivant la loi d'état choisie, la convergence forte de la densité et par suite le passage à la limite dans le terme non-linéaire de pression.

**Viscosités dépendant de la densité.** Dans le vide où  $\rho = 0$ , les équations de Navier-Stokes compressibles précédentes avec viscosités constantes, au lieu de dégénérer et d'aboutir à des équations du type  $0 = 0$ , donnent à la limite

$$2\operatorname{div} (\mu \mathbf{D} (u)) + \nabla (\lambda \operatorname{div} u) = 0.$$

Ceci laissant à supposer qu'il existerait une vitesse "résiduelle" dans le vide satisfaisant ce problème elliptique mais qui ne semble pas avoir beaucoup de sens d'un point de vue physique.

HOFF et SERRE dans [103] ont montré que le problème à viscosités constantes est mal posé au sens où on perd la continuité par rapport à la donnée initiale sur l'exemple en dimension un de gouttelettes séparées par du vide. Même si la généralisation de cet exemple en dimension supérieure reste ouverte aujourd'hui (voir [165]), il n'en demeure pas moins que l'équation elliptique obtenue dans les zones de vide si l'on conserve des viscosités constantes reste difficile à interpréter d'un point de vue physique.

Nous sommes donc amenés à considérer des coefficients de viscosité  $\lambda$  et  $\mu$  qui s'annulent lorsque la densité tend vers 0. La viscosité  $\mu$  varie ainsi en fonction de la densité  $\rho$  au sein du fluide, ceci nous permet d'associer aux fluctuations de densité une longueur caractéristique (voir l'article de revue de BRESCH et DESJARDINS [32])

$$L_\mu = \frac{\mu(\rho)}{|\nabla \mu(\rho)|}.$$

Dans des conditions d'écoulement standards où le nombre de Reynolds,  $\operatorname{Re} = \frac{\rho^0 V^0 L^0}{\mu^0}$ , est de l'ordre de l'unité, ceci nous donne une vitesse caractéristique  $V_\mu$  associée à ces variations en viscosité

$$V_\mu = \frac{\mu(\rho)}{\rho L_\mu} = \frac{|\nabla \mu(\rho)|}{\rho}.$$

Le cas où  $\mu(\rho) = \nu \rho$  est particulièrement intéressant puisqu'il correspond au régime dilué des suspensions colloïdales (ensemble de particules solides en suspension dans un



fluide visqueux qui sont animées d'un mouvement brownien) étudié par EINSTEIN au début du siècle (voir aussi NELSON [143]). Nous y reviendrons à la Section 4. EINSTEIN identifie la précédente vitesse  $v = \nu \frac{\nabla \rho}{\rho}$  comme celle qui contrebalance à l'équilibre les effets osmotiques c'est-à-dire les phénomènes de diffusion issus des gradients de densité de particules. La dynamique de ces particules peut alors être décrite au niveau continu par l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t \rho = -\operatorname{div}(v_{\text{eff}} \rho) + \nu \Delta \rho$$

où  $v_{\text{eff}}$  représente la vitesse effective des particules. En exprimant le terme de diffusion au moyen de la vitesse osmotique  $\nu \Delta \rho = \operatorname{div}(\rho v)$ , on obtient

$$\partial_t \rho = -\operatorname{div}(u \rho)$$

où  $u = v_{\text{eff}} - v$  est la vitesse correspond donc au transport de la masse. Nous mettons ainsi en évidence (voir aussi NELSON [143] Chapitre 13) les différentes dynamiques et vitesses mises en jeu : celle des effets osmotiques, c'est-à-dire celle due aux gradients de densité  $v = \nu \frac{\nabla \rho}{\rho} = \nu \nabla \log \rho$ , celle liée au transport de masse  $u$  (appelée *current velocity* dans [143]) et enfin  $v_{\text{eff}} = u + v$  qui somme ces deux dynamiques et que l'on appellera *vitesse effective*.

**Remarque :** Plus généralement, l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t \rho = -\operatorname{div}(b \rho) + \nu \Delta \rho$$

représente l'évolution de la densité de probabilité du processus stochastique  $X(t)$  solution d'une équation différentielle stochastique

$$dX(t) = -b(X(t)) dt + \sqrt{2\nu} dW(t)$$

où  $b$  est un champ extérieur auquel est soumis la particule et  $W$  un bruit blanc. Dans le cas où le champ  $b$  dérive d'un potentiel  $b = \nabla \Psi$ , JORDAN, KINDERLEHRER, OTTO [116] interprètent l'équation de Fokker-Planck via une approche variationnelle comme une dynamique de flot gradient. Ceci leur permet, au moyen de la théorie du transport optimal, de définir un schéma d'approximation discret en temps de type descente de gradient. Cet algorithme est maintenant usuellement appelé *algorithme JKO*. Beaucoup d'autres équations paraboliques ont été reformulées depuis en terme de dynamique de flot gradient et ont été analysées au moyen des outils du transport optimal. Cette approche reste largement ouverte pour les systèmes de Navier-Stokes. En dimension un, BRENIER [25] est cependant parvenu récemment à utiliser les outils du transport optimal sur un système de Navier-Stokes unidimensionnel. Par analogie avec l'équation de la chaleur

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \quad \text{où} \quad v = -\frac{\partial_x \rho}{\rho},$$

il justifie un système de Navier-Stokes unidimensionnel avec viscosité dépendant de la densité à partir d'un système différentiel stochastique. De manière assez surprenante, la

démonstration repose sur une relation entre la viscosité et la pression, qui, dans le cas où  $\mu(\rho) = \varepsilon\rho$  est une relation de proportionnalité et conduit au système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2) + \lambda \varepsilon \partial_x \rho - \partial_x(\varepsilon \rho \partial_x v) = 0 \end{cases}$$

**Remarque :** Il existe également un lien entre cette dynamique de diffusion et la théorie de l'information. En effet, l'énergie cinétique associée à la vitesse osmotique

$$\int_{\Omega} \rho \left| \nu \frac{\nabla \rho}{\rho} \right|^2 dx = \int_{\Omega} \rho |\nu \nabla \log(\rho)|^2 dx$$

n'est alors rien d'autre que l'*information de Fisher* utilisée à des fins statistiques en théorie de l'information qui caractérise la distribution d'un système. En théorie des équations aux dérivées partielles, on parlera plutôt d'entropie du système (voir [177]).

Dans le cas général d'une viscosité dépendant de la densité  $\mu(\rho)$  qui correspondrait à une extension de la notion d'information de Fisher (voir [172]), le système de Navier-Stokes s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) - \nabla(\lambda(\rho) \operatorname{div} u) - 2 \operatorname{div}(\mu(\rho) \mathbf{D}(u)) = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Pour ce système il n'est malheureusement pas possible de reproduire les arguments de compacité de LIONS et FEIREISL, l'une des principales raisons étant que l'estimation d'énergie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathcal{E}(t, x) dx + \int_{\Omega} \left( \lambda(\rho) + \frac{2\mu(\rho)}{d} \right) (\operatorname{div} u)^2 dx \\ + 2 \int_{\Omega} \mu(\rho) \left| \mathbf{D}(u) - \frac{\operatorname{div} u}{d} \mathbf{I} \right|^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

ne garantit plus la régularité en espace du champ de vitesse  $u$  puisque la viscosité  $\mu(\rho)$  est maintenant autorisée à s'annuler dans les zones de vide  $\{\rho = 0\}$ . Les arguments de compacité pour le terme convectif non-linéaire  $\rho u \otimes u$  ou pour les termes de diffusion, qui s'appuyaient précédemment sur une borne  $L^2(0, T; (H^1(\Omega))^d)$  de la vitesse, deviennent ainsi caducs. En autorisant les viscosités  $\mu(\rho)$ ,  $\lambda(\rho)$  à s'annuler, la technique du flux effectif utilisée par LIONS tombe elle aussi en défaut et la convergence forte de la densité, indispensable pour identifier la limite des termes non linéaires de pression, est perdue.

Dans leurs travaux, BRESCH et DESJARDINS réutilisent la notion de vitesse osmotique associé au phénomène de diffusion (qu'on appellera aussi *vitesse de drift*), en introduisant

$$v_{\text{eff}} = u + 2 \frac{\nabla \mu(\rho)}{\rho} = u + 2 \nabla \varphi(\rho) \quad \text{avec} \quad s \varphi'(s) = \mu'(s). \quad (1.26)$$

L'équation de conservation de la masse se réécrit au moyen de cette vitesse comme une équation de transport/diffusion

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v_{\text{eff}}) - 2\Delta\mu(\rho) = 0 \quad (1.27)$$

et semble faire apparaître au travers de la viscosité  $\mu(\rho)$  un effet de régularisation en densité ou tout au moins d'une fonction de la densité. Cet effet de régularisation n'était pas présent dans le cas à viscosités constantes.

Ceci a été formalisé mathématiquement par BRESCH, DESJARDINS [29,30] au moyen d'une nouvelle estimation entropie (correspondant à l'information de Fisher du système). Pour l'obtenir, écrivons l'équation d'évolution de  $\mu(\rho)$

$$\partial_t \mu(\rho) + \operatorname{div}(\mu(\rho)u) + (\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho))\operatorname{div} u = 0$$

qui par différentiation donne

$$\partial_t \nabla \mu(\rho) + \operatorname{div}(\nabla \mu(\rho) \otimes u) + \operatorname{div}(\mu(\rho)\nabla^t u) + \nabla((\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho))\operatorname{div} u) = 0$$

ou encore

$$\partial_t \nabla \mu(\rho) + \operatorname{div}(\nabla \mu(\rho) \otimes u) + \operatorname{div}(\mu(\rho) D(u)) - \operatorname{div}(\mu(\rho) A(u)) + \nabla((\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho))\operatorname{div} u) = 0$$

et qui correspond à l'équation de la quantité de mouvement associée à la vitesse de drift  $\rho \left( \frac{\nabla \mu(\rho)}{\rho} \right) = \nabla \mu(\rho)$ . En additionnant avec la loi de conservation de la quantité de mouvement associée à  $u$ , on obtient l'équation de la quantité de mouvement effective  $\rho v_{\text{eff}}$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_{\text{eff}}) + \operatorname{div}(\rho v_{\text{eff}} \otimes u) + \nabla p(\rho) \\ - \nabla [(\lambda(\rho) - 2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho)))\operatorname{div} u] - 2\operatorname{div}(\mu(\rho) A(u)) = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Nous soulignons ici l'importance du coefficient 2 dans l'expression de la vitesse de drift  $v = 2 \frac{\nabla \mu(\rho)}{\rho}$  qui a permis la simplification du terme symétrique de diffusion  $2\operatorname{div}(\mu(\rho) D(u))$ .

Cette simplification est cruciale car, comme l'observèrent BRESCH et DESJARDINS, lorsqu'on teste l'équation (1.28) par  $v_{\text{eff}}$ , elle permet d'aboutir, sous réserve d'une relation entre  $\lambda$  et  $\mu$ , à une estimation d'entropie supplémentaire.

En effet, couplés à l'équation de conservation de la masse, les deux premiers termes de (1.28) font apparaître l'énergie cinétique de  $v_{\text{eff}}$  tandis que le troisième terme est à l'origine de deux contributions : la première est l'énergie interne spécifique  $\rho e(\rho)$  que nous avons déjà dans l'estimation d'énergie ; la seconde étant un nouveau terme de dissipation

$$2 \int_{\Omega} \nabla p(\rho) \cdot \nabla \varphi(\rho) \, dx = 2 \int_{\Omega} \frac{p'(\rho)\mu'(\rho)}{\rho} |\nabla \rho|^2 \, dx.$$

Du fait de sa structure anti-symétrique, le dernier terme est lui aussi compatible avec l'estimation et est à l'origine d'un unique terme de dissipation

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu(\rho) A(\rho)) \cdot (u + 2\nabla \varphi(\rho)) &= 2 \int_{\Omega} \mu(\rho) A(\rho) \cdot \nabla u \\ &= 2 \int_{\Omega} \mu(\rho) |A(u)|^2 \end{aligned}$$

Malheureusement le terme de gradient

$$\nabla [(\lambda(\rho) - 2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho))) \operatorname{div} u]$$

n'est pas en revanche compatible au sens où, l'intégrale

$$\int_{\Omega} \nabla [(\lambda(\rho) - 2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho))) \operatorname{div} u] \cdot \nabla \varphi(\rho)$$

n'a pas de signe et ne semble pas pouvoir être "absorbée" par les autres termes de l'estimation. En imposant la relation algébrique

$$\lambda(\rho) = 2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho)) \quad (1.29)$$

BRESCH et DESJARDINS éliminent cette difficulté et aboutissent à

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{\rho |v_{\text{eff}}|^2}{2} + \rho e(\rho) \right) dx + 2 \int_{\Omega} \frac{\mu'(\rho) p'(\rho)}{\rho} |\nabla \rho|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \mu(\rho) |A(u)|^2 dx = 0 \quad (1.30)$$

communément appelée *BD entropie*. Sous des hypothèses adéquates de dégénérescence de la viscosité (voir dans le détail [30]), on peut alors montrer la régularité en espace de la densité et donc de la convergence forte. Ceci permet de conclure directement quant à la convergence du terme non-linéaire de pression.

Pour conclure quant à la stabilité des solutions faibles de (1.24) il reste à passer à la limite dans le terme de convectif  $\rho u \otimes u$  (la limite des termes de diffusion s'en déduit) comme nous le décrivions auparavant. Ce passage à la limite n'est pas trivial et repose sur des estimations supplémentaires (voir MELLET et VASSEUR [140]) que nous détaillerons au Chapitre 5.

Enfin, la construction effective de solutions faibles satisfaisant l'estimation d'énergie et d'entropie reste délicate même sous les hypothèses garantissant la stabilité des solutions. Des éléments de preuve sont proposés par BRESCH, DESJARDINS dans [31] mais on ne trouvera dans la littérature que des démonstrations concernant le cas où  $\mu(\rho) = \nu\rho$  et  $\lambda(\rho) = 0$  ([180], [175]).

**Remarque :** S'il n'existe pas à notre connaissance de justification physique ou expérimentale de la relation algébrique (1.29) qui lie  $\lambda$  et  $\mu$  pour des fluides généraux, elle apparaît pourtant de manière assez naturelle dans le cadre des équations d'Euler-Korteweg qui font intervenir un terme de tension de surface.

Dans [28], BRESCH, COUDERC, NOBLE, VILA observent effectivement que le système d'Euler-Korteweg

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) = \operatorname{div} K \end{cases}$$

où le tenseur des forces de tension de surface  $K$  est donné par

$$K = \left( \rho \operatorname{div}(K(\rho) \nabla \rho) + \frac{1}{2}(K(\rho) - \rho K'(\rho)) |\nabla \rho|^2 \right) \mathbf{I} - K(\rho) \nabla \rho \otimes \nabla \rho,$$

peut se réécrire sous une formulation augmentée en utilisant

$$\operatorname{div} K = \nabla(\lambda(\rho)\Delta\varphi(\rho)) + 2\operatorname{div}(\mu(\rho)\nabla\nabla\varphi(\rho))$$

où  $\mu$  est tel que  $\mu'(\rho) = \frac{\sqrt{\rho K(\rho)}}{2}$  et  $\varphi, \lambda$  satisfont les mêmes relations qu'auparavant

$$\lambda(\rho) = 2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho)), \quad \rho\varphi'(\rho) = \mu'(\rho).$$

Ce calcul repose en fait sur une extension de l'identité de Bohm (en théorie quantique)

$$2\rho\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) = \operatorname{div}(\rho\nabla\nabla\log\rho)$$

correspondant au cas  $K(\rho) = \frac{c}{\rho}$ , qui s'exprime plus généralement comme

$$\rho\nabla\left(\sqrt{K(\rho)}\Delta\left(\int_0^\rho\sqrt{K(s)}\,ds\right)\right) = 2\operatorname{div}(\mu(\rho)\nabla\nabla\varphi(\rho)) + 2\nabla((\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho))\Delta\varphi(\rho))$$

avec les notations précédentes. Ceci confirme ainsi la pertinence d'une telle relation algébrique liant  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Remarque :** Au travers de l'équation (1.27), nous avons exprimé l'équation de la masse comme une équation de transport/diffusion en mettant ainsi au jour des effets de régularisation en densité. On fait également le lien avec l'équation des milieux poreux

$$\partial_t\rho - 2\Delta\mu(\rho) = 0$$

déjà évoquée en introduction à la Section 1. Les solutions de cette équation correspondent aux solutions du type  $\rho, u = -\frac{\nabla\mu(\rho)}{\rho} = -\nabla\varphi(\rho)$  du système de Navier-Stokes (1.24) où l'on néglige les forces de pression  $p(\rho) = 0$ . Ce lien et ces effets de régularisation ont été particulièrement exploités dans les travaux de HASPOT [96], HASPOT, ZATORSKA [97] afin de montrer rigoureusement la convergence des modèles de Navier-Stokes "fortement" compressible (*i.e.* à très grand nombre de Mach, voir également la section suivante sur les régimes de compressibilité) vers l'équation des milieux poreux en dimension un.

Nous avons précédemment mis en évidence dans le cas  $\mu(\rho) = \nu\rho$  la coexistence de deux dynamiques pour l'équation de Fokker-Planck. Nous allons à présent essayer de préciser d'un point de vue mathématique ce couplage des dynamiques dans le cas du système de Navier-Stokes compressible avec viscosité  $\mu(\rho)$ . Soit  $(\rho, u)$  une solution faible de (1.24) qui satisfait l'inégalité d'énergie (1.25) et de BD entropie (1.30). Cette solution faible satisfait alors toute combinaison convexe de ces inégalités

$$(1 - \kappa) \times \text{Énergie} + \kappa \times \text{BD Entropie}, \quad \kappa \in (0, 1)$$

c'est-à-dire l'inégalité

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \left( (1 - \kappa) \frac{\rho |u|^2}{2} + \kappa \frac{\rho |v_{\text{eff}}|^2}{2} + \rho e(\rho) \right) dx \\
 & + 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\mu'(\rho) p'(\rho)}{\rho} |\nabla \rho|^2 dx + 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \mu(\rho) |A(u)|^2 dx dt \\
 & + (1 - \kappa) \int_0^T \int_{\Omega} \left( \lambda(\rho) + \frac{2\mu(\rho)}{d} \right) (\text{div } u)^2 dx dt \\
 & + 2(1 - \kappa) \int_0^T \int_{\Omega} \mu(\rho) \left| D(u) - \frac{\text{div } u}{d} I \right|^2 dx dt \\
 & \leq \int_{\Omega} \left( (1 - \kappa) \frac{m_0^2}{2\rho_0} + \kappa \frac{\rho |v_{\text{eff}}|^2(0)}{2} + \rho_0 e(\rho_0) \right) dx
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Au travers du paramètre  $\kappa$  nous exprimons la notion de mélange au sein de l'écoulement, la vitesse  $u$  étant associée à une densité  $(1 - \kappa)\rho$  et la vitesse  $v_{\text{eff}} = u + 2\nabla\varphi(\rho)$  à la densité  $\kappa\rho$ . En développant l'énergie cinétique totale sous la forme

$$(1 - \kappa) \frac{\rho |u|^2}{2} + \kappa \frac{\rho |u + 2\nabla\varphi(\rho)|^2}{2} = \frac{\rho |u + 2\kappa\nabla\varphi(\rho)|^2}{2} + \kappa(1 - \kappa) \frac{\rho |2\nabla\varphi(\rho)|^2}{2}$$

on fait apparaître deux vitesses : une *vitesse de mélange*

$$w = u + 2\kappa\nabla\varphi(\rho),$$

et une *vitesse de drift*,

$$v = 2\nabla\varphi(\rho)$$

qui étend pour des lois  $\mu(\rho)$  générales la notion de vitesse osmotique  $v = \nu\nabla \log(\rho)$ .

Cette dynamique à deux vitesses dans les équations de Navier-Stokes compressible a été identifiée récemment par BRESCH, DESJARDINS et ZATORSKA dans [36] qui expriment le système (1.24) sous la forme d'un système augmenté en les variables  $(\rho, w, v)$ . L'énergie cinétique du système correspond alors à une hydrodynamique à deux vitesses étudiée par SHUGRIN [167], SHUGRIN, GAVRILYUK [86] où  $u_1 = u$ ,  $u_2 = u + 2\nabla\varphi(\rho)$ ,  $\rho_1 = (1 - \kappa)\rho$ ,  $\rho_2 = \kappa\rho$ . Dans [27], BRENNER exprime également les équations de Navier-Stokes au moyen de deux vitesses avec  $v = K\nabla \log \rho$ . Le modèle qu'il propose avec équation en température a par exemple été étudié du point de vue mathématique par FEIREISL et VASSEUR [80].

Au moyen d'une formulation augmentée sur les variables  $(\rho, w, v)$ , BRESCH, DESJARDINS et ZATORSKA sont alors capables de montrer la construction de solutions faibles pour (1.24) (incluant des termes de traînée ou de pression froide) dans le cas de viscosités générales  $\mu(\rho)$ . Les solutions construites satisfont alors l'estimation de  $\kappa$ -entropie (1.31) et sont appelées solutions faibles  $\kappa$ -entropiques.

Nous soulignons le fait que les solutions  $\kappa$ -entropiques sont en un certain sens "plus faibles" que celles considérées précédemment, puisque nous ne leur imposons que de satisfaire (1.31)

(pour tout  $\kappa \in (0, 1)$ ) alors qu'auparavant nous leur imposons de satisfaire les deux inégalités d'énergie ( $\kappa = 0$ ) et de BD entropie ( $\kappa = 1$ ).

Nous serons amenés aux Chapitres 5 et 6 (voir également la Section 4) à considérer les solutions faibles  $\kappa$ -entropiques dans le cadre de notre étude sur les suspensions granulaires. Nous montrerons également l'importance d'une formulation augmentée des équations de Navier-Stokes auxquelles on ajoute l'équation en viscosité (obtenue grâce à (1.29))

$$\partial_t \mu(\rho) + \operatorname{div}(\mu(\rho)u) = -\frac{\lambda(\rho)\operatorname{div} u}{2}$$

qui permettra d'établir un lien mathématique entre modèles de suspensions et modèles granulaires.

## 2.4 Phénomènes de compressibilité

### 2.4.1 Hypothèse d'incompressibilité, limite faible nombre de Mach

Si dans un gaz la densité  $\rho$  de matière peut varier sensiblement dans le système, dans un liquide en revanche cette densité varie assez peu dans des conditions normales d'écoulement. Il est alors courant de supposer la densité indépendante des variations de pression (incompressibilité), c'est-à-dire de supposer

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0. \tag{1.32}$$

En écrivant alors la divergence de la vitesse au moyen de la dérivée matérielle de la densité on a

$$\operatorname{div} u = -\frac{1}{\rho} \frac{D}{Dt} \rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{D}{Dt} p$$

on aboutit alors au fait que l'écoulement est *isovolume*, *i.e.*

$$\operatorname{div} u = 0.$$

La condition précédente est aussi appelée *contrainte d'incompressibilité*.

En imposant l'homogénéité du fluide, c'est-à-dire que  $\rho(t, x) = \rho^0 > 0$ , le système des équations de Navier-Stokes se réécrit

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi - 2\operatorname{div}(\mu D(u)) = 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

Même si la densité est constante, les contraintes de pression au repos ne sont pas nulles. Elles s'expriment au travers de la quantité  $\pi$  qui peut être interprétée physiquement comme un terme de fluctuation de la pression thermodynamique et du point de vue mathématique comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité  $\operatorname{div} u = 0$ .

De manière plus générale on peut se demander dans quelle mesure il est raisonnable de supposer  $\operatorname{div} u = 0$  selon les régimes d'écoulements, c'est-à-dire en fonction des forces

prédominantes au sein de fluide. Cette question fait l'objet d'une discussion dans le livre de BOYER et FABRIE [24] (Chapitre 1). L'idée est d'introduire les nombres adimensionnés qui vont caractériser les différents effets. On remarque tout d'abord que la quantité

$$c = \sqrt{\frac{1}{\partial\rho/\partial p}}$$

est homogène à vitesse, c'est la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans le fluide. On peut alors comparer cette vitesse avec la vitesse caractéristique de l'écoulement  $V^0$ , le rapport est un nombre sans dimension appelé *nombre de Mach*

$$\text{Ma} = \frac{V^0}{c}.$$

Introduisons également le nombre de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho^0 V^0 L^0}{\mu^0}$$

qui compare les forces inertielles (liées au terme de convection  $\rho u \otimes u$ ) et visqueuses au sein de l'écoulement. Une analyse dimensionnelle (voir les détails dans [24]) permet de montrer que la condition d'incompressibilité est raisonnable si :

- dans le cas d'un régime turbulent correspondant à des valeurs non négligeables du nombre de Reynolds,

$$\text{Ma} \ll 1;$$

- et dans le cas de d'un régime laminaire où Re est petit,

$$\text{Ma} \ll \sqrt{\text{Re}}$$

ce qui peut être éventuellement beaucoup plus restrictif que la condition précédente.

Les phénomènes de compressibilité sont ainsi liés au nombre de Mach mais peuvent être couplés à d'autres effets comme on le voit avec la turbulence au travers du nombre de Reynolds Re. De manière plus générale, on pourra s'intéresser au couplage des effets de faible compressibilité avec des effets de rotation (liés au nombre de Rossby), de tension de surface (liés au nombre de Weber) (voir par exemple FANELLI [72]), des effets de température (liés au nombre de Péclet), etc.

**Limite faible nombre de Mach.** L'adimensionnement des équations du système de Navier-Stokes (ici à viscosités constantes), fait naturellement apparaître le nombre de Mach en facteur du terme de pression

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \text{div}(\rho u \otimes u) + \frac{1}{\text{Ma}^2} \nabla p(\rho) - \nabla(\lambda \text{div} u) - 2\text{div}(\mu \text{D}(u)) = 0 \end{cases}$$



les autres nombres caractéristiques ayant été supposés constants égaux à 1. On peut se demander du point de vue de l'analyse mathématique si les solutions de ce système convergent, et en quel sens, vers les solutions du modèle de Navier-Stokes incompressible quand le nombre de Mach  $Ma = \varepsilon$  tend vers 0. D'un point de vue formel, les équations précédentes nous indiquent que

$$\rho = \rho^0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

où  $\rho^0$  est une constante en temps et en espace. La pression thermodynamique  $p$  doit elle converger vers une pression constante  $p^0 = p(\rho^0)$  et il existe  $\pi$  tel que

$$p(\rho) - p^0 \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^2 \pi$$

$$\nabla p(\rho) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^2 \nabla \pi$$

Ainsi la quantité  $\pi$  apparaissant dans les équations incompressibles ne doit ainsi pas être interprétée comme une pression mais plutôt comme un terme de fluctuation de pression (voir [181]).

Un très grand nombre d'études mathématiques traitent du problème de la limite faible nombre de Mach vers les équations incompressible dans une variété de cadres physiques et mathématiques : Navier-Stokes, Euler, systèmes avec température, données initiales bien ou mal préparées, domaine entier ou borné sous des conditions au bord adéquates, solutions fortes ou faibles, ...

Pour les détails de ces résultats nous renvoyons le lecteur vers [2], [83], [134] et les références s'y trouvant.

**Remarque :** Rappelons ici, et nous y reviendrons en détails au Chapitre 4, que le changement de nature du système lors du passage à la limite singulière  $Ma = \varepsilon \rightarrow 0$  est également à l'origine d'importantes difficultés d'ordre numérique.

En effet les discrétisations classiques des équations de Navier-Stokes compressibles imposent des pas de temps de plus en plus petits quand le nombre de Mach tend vers 0. Nous verrons des techniques de discrétisation traitant spécifiquement les termes singuliers de pression qui permettent d'assurer une discrétisation indépendante du nombre de Mach et le bon comportement des solutions numériques à la limite faible nombre de Mach.

**Un autre exemple de limite incompressible.** On pourrait également s'intéresser à la limite singulière des solutions du système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) - \nabla \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{div} u \right) - 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(u)) = 0 \end{cases}$$

quand le paramètre  $\varepsilon$  tend vers 0. À la limite on contraindrait alors la vitesse à satisfaire la condition d'incompressibilité  $\operatorname{div} u = 0$ , la densité n'étant pas a priori contrainte à être

constante. Si le problème, en tant que tel, n'a jamais été traité mathématiquement, il est cependant pertinent sur le plan physique comme nous le verrons à la Section 4 ainsi qu'aux Chapitres 5 et 6 pour des suspensions (particules solides immergées dans un fluide visqueux) en régime très concentrés où la densité en particules solides est très proche de 1

$$\rho = 1 - \varepsilon.$$

Les forces de viscosité associées à  $\lambda$  sont alors singulières au voisinage de  $\rho = 1$ , de la forme (voir également [127])

$$\nabla \left( \frac{\lambda^0}{(1 - \rho)^\beta} \operatorname{div} u \right) = \nabla \left( \frac{\lambda^0}{\varepsilon^\beta} \operatorname{div} u \right), \quad \beta \geq 1.$$

Dans ce cas, la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  impose  $\operatorname{div} u = 0$  et  $\rho = 1$ . Ceci traduit l'"incompressibilité" du mélange à l'état où toutes les particules solides sont collées les uns contre les autres.

#### 2.4.2 Hétérogénéités et limites anélastiques

On a considéré précédemment que seul le nombre de Mach tendait vers 0, il est cependant possible que l'échelle du nombre de Mach soit couplée avec d'autres termes du système compressible. Cela peut être le cas par exemple avec les forces extérieures telles que la gravité, dont l'échelle caractéristique est donnée par le nombre de Froude.

L'idée est que la densité doit converger quand le nombre de Mach tend vers 0 vers une densité limite  $\rho^0 = \rho^0(x)$  non-constante qui permette de prendre en compte des effets de stratification. C'est un cas particulièrement intéressant pour la modélisation des écoulements atmosphériques (voir par exemple [123]) mais aussi pour les écoulements à faible profondeur pour lequel la stratification (sur la hauteur de fluide) est imposée par la bathymétrie ([37]).

À la limite, la contrainte  $\operatorname{div} u = 0$  est remplacée par la *contrainte anélastique* qui tient compte de l'hétérogénéité de la densité à la limite

$$\operatorname{div}(\rho^0 u) = 0 \tag{1.34}$$

Pour des systèmes de type Navier-Stokes où la limite singulière est traitée au moyen d'estimations d'énergie, nous renvoyons en particulier aux études de MASMOUDI [135], BRESCH et al. [37] et FEIREISL et al. [77, 78]. Concernant les systèmes de type Euler comme par exemple les équations d'Euler avec topographie ou les équations suivantes d'Euler hétérogène

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla(c(x)\rho^\gamma) = 0 \end{cases}$$

où la fonction  $c$  encode les effets d'hétérogénéités, BRESCH et MÉTIVIER [40] utilisent une reformulation du système qui permet d'obtenir une structure particulièrement intéressante

de la partie singulière du système. En effet, en introduisant dans le cadre du système d'Euler hétérogène précédent les nouvelles variables

$$\Psi = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{(c^{1/\gamma} \rho)^{\gamma-1} - 1}{\varepsilon}, \quad q = \frac{1}{\varepsilon(\gamma - 1)} \log \left( 1 + \varepsilon(\gamma - 1) \frac{\Psi}{\gamma} \right)$$

on obtient alors le système

$$\begin{cases} c^{-1/\gamma}(\partial_t q + u \cdot \nabla q) + \frac{\operatorname{div}(c^{-1/\gamma} u)}{\varepsilon} = 0 \\ c^{-1/\gamma}(\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \frac{\nabla \Psi}{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

La structure antisymétrique (par rapport aux variables  $c^{-1/\gamma} u$  et  $\Psi$ ) du terme singulier en  $\varepsilon$  permet alors de déduire des estimations uniformes en  $\varepsilon$  et donc l'existence de solutions fortes dont le temps d'existence est indépendant de  $\varepsilon$ . Cette structure fait aussi clairement apparaître les contraintes du modèle limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 : la seconde équation impose formellement  $\nabla \Psi = 0$  à la limite et donc, du fait de l'hétérogénéité de  $c$ , l'égalité

$$\rho^0 = c^{-1/\gamma},$$

tandis que la première impose la contrainte anélastique  $\operatorname{div}(c^{-1/\gamma} u) = 0$ , *i.e*

$$\operatorname{div}(\rho^0 u) = 0.$$

Nous prendrons en compte à la Section 3 ainsi qu'au Chapitre 3 de tels effets d'hétérogénéité au sein d'une contrainte maximale de densité  $\rho < \rho^*(x)$  et donc d'une pression hétérogène  $p \left( \frac{\rho}{\rho^*(x)} \right)$ .

### 3 Modèles pour la prise en compte d'effets de congestion

Il y a deux approches essentiellement pour la modélisation de la congestion, l'idée étant dans les deux cas d'assurer une contrainte maximale sur la densité (ou selon le problème considéré, sur une concentration, fraction volumique, ou encore dans le cas d'un écoulement en conduite fermé sur la hauteur d'eau). La première de ces approches (voir [136]), appelée approche *hard* ou *dure*, consiste à introduire une contrainte additionnelle, que nous appellerons d'exclusion, qui ne s'exerce que dans les zones congestionnées où la densité atteint effectivement la densité maximale. Dans la seconde approche, dite approche *soft* ou *douce*, on modélise des forces d'interactions répulsives entre composants élémentaires qui jouent un rôle de barrière et qui deviennent singulières au voisinage de la densité maximale.

Dans cette section nous allons dans un premier temps présenter deux situations à l'échelle microscopique permettant de mieux comprendre le principe des modèles de congestion douce et dure. Nous introduirons dans un second temps le pendant de ces approches à l'échelle macroscopique et présenterons enfin les résultats de cette thèse concernant le lien rigoureux entre modèles de congestion douce et modèles de congestion dure dans le cadre des équations de Navier-Stokes avec viscosités constantes.

### 3.1 Modèles discrets

**Système sphère / paroi.** Un modèle élémentaire pour comprendre les différentes approches de la congestion, est le système discret considéré par MAURY [135] décrivant le mouvement (en 1d) d'une sphère au voisinage d'un mur. Dans ce contexte, l'état de congestion correspond au cas où la sphère est en contact avec le mur. Le premier modèle proposé dans [135] prend en compte des forces hydrodynamiques dues à la viscosité du fluide situé entre la sphère et la paroi. Ce sont des forces de lubrification qui tendent à tenir éloignée la sphère de la paroi. La dynamique du système est donnée par l'équation

$$\begin{cases} \ddot{q} = -\frac{\dot{q}}{q} + f(t) \\ q(0) = q^0 > 0, \quad \dot{q}(0) = u^0 \end{cases} \quad (1.35)$$

où  $-\frac{\dot{q}}{q}$  représente les effets de lubrification dont nous parlons et  $f$  est un terme de forçage (par exemple la gravité). Le terme de lubrification assure que pour tout temps  $q(t) > 0$  et donc qu'il n'y a pas de contact entre la sphère et la paroi.

MAURY s'intéresse ensuite au cas où la viscosité du fluide notée  $\varepsilon$  tend vers 0. Les forces de lubrification  $\varepsilon \frac{\dot{q}}{q}$  deviennent ainsi négligeables sauf dans un voisinage de plus en plus petit de la paroi. De plus, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il existe une sous-suite  $(q_\varepsilon, \gamma_\varepsilon = \varepsilon \log q_\varepsilon)$  qui converge vers  $(q, \gamma)$  une solution du système

$$\begin{cases} \dot{q} = -\gamma + u^0 + \int_0^t f(s) ds \\ \gamma \leq 0, \quad q \geq 0, \quad q\gamma = 0 \\ q(0) = q^0 > 0, \quad \dot{q}(0) = u^0 \end{cases} \quad (1.36)$$

La relation d'exclusion à la limite  $q\gamma = 0$  traduit les deux états possibles du système : *libre* quand  $q > 0$  et alors la sphère est séparée du mur et  $\gamma$  vaut 0 ; *collé* quand la sphère est en contact avec le mur,  $q = 0$ , et  $\gamma$  est activé. Elle joue le rôle d'un *potentiel d'adhésion*. Le système ne peut repasser à l'état libre  $q > 0$  tant que  $\gamma$  reste strictement négatif, cela représente en quelque sorte des effets de mémoire du système dans l'état collé  $q = 0$ .

Ainsi deux approches peuvent être considérées dans le cadre ce système sphère/paroi. La première en considérant des forces de lubrification singulières qui empêchent le contact de la sphère avec la paroi, c'est l'approche douce. La seconde modélisant les deux états *libre* et *collé* du système au moyen d'une variable  $\gamma$ , le potentiel d'adhésion, qui s'active uniquement dans l'état *collé*. C'est l'approche dure. La transition entre modèle soft (de congestion douce) et hard (de congestion dure) consiste à voir le potentiel d'adhésion  $\gamma$  comme la limite des forces de lubrification quand la viscosité du fluide tend vers 0.

**Bouchons collants.** Remplaçons le système sphère/paroi précédent par  $n$  bouchons (ou blocs) alignés. On suppose que ces bouchons sont *collants* au sens où, dès qu'une collision

entre deux blocs se produit, ces deux blocs restent collés et forment ensuite un unique bloc. Ce système a été introduit par BOUCHUT, BRENIER, CORTES, RIPOLL [21] pour modéliser la dynamique de bulles de gaz dans des conduites. Notons  $m_i = b_i - a_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  les tailles des blocs de liquide avec

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_n;$$

$u_i$  leur vitesse. Le nombre  $n$  de blocs au cours du temps est constant par morceaux : tant que deux blocs ne se rencontrent pas,  $n$  reste constant, les vitesses restent aussi les mêmes et  $\dot{a}_i = \dot{b}_i = u_i$  ; quand une collision se produit entre  $k$  blocs, on suppose que ceux-ci restent collés et forment un nouveau bloc de taille la somme des tailles des  $k$  blocs en question. Le nombre de blocs total est donc diminué de  $k - 1$ .

Dans le cas de deux blocs, de tailles  $m_l = a_l - b_l$ ,  $m_r = a_r - b_r$  et de vitesses  $u_l, u_r$  ( $u_l > u_r$ ), qui se collisionnent au temps  $t^*$  et à la position  $x^* = b_l(t^*) = a_r(t^*)$ , la vitesse du nouveau bloc formé est

$$u^* = \frac{u_l(x^* - a_l(t^*)) + u_r(b_r(t^*) - x^*)}{b_r(t^*) - a_l(t^*)}.$$

Si on suppose qu'il n'y a pas de chocs élastiques lors d'une collision (cf [137]) une variable  $\pi$  est activée qui joue le rôle du potentiel  $-\gamma$  introduit pour le système sphère/paroi. Plus précisément l'expression de  $\pi$  est la suivante

$$\pi(t^*, x) = \begin{cases} (u_l - u^*)(x - a_l(t^*)) & \text{si } a_l(t^*) \leq x \leq x^* \\ (u^* - u_r)(b_r(t^*) - x) & \text{si } x^* \leq x \leq b_r(t^*) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.37)$$

Introduisons à présent la fraction volumique du bloc  $i$

$$\alpha_i(t, x) = \mathbf{1}_{\{a_i(t) < x < b_i(t)\}}$$

et la fraction volumique  $\alpha$  totale du système

$$\alpha(t, x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t, x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{a_i(t) < x < b_i(t)\}}.$$

Le moment est défini comme

$$\alpha(t, x)u(t, x) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \mathbf{1}_{\{a_i(t) < x < b_i(t)\}}.$$

On peut alors montrer (*c.f.* [21], [13]) que le système formé des blocs collants satisfait au sens faible le système d'équations aux dérivées partielles suivant

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + \partial_x(\alpha u) = 0 \\ \partial_t(\alpha u) + \partial_x(\alpha u^2 + \pi) = 0 \\ (1 - \alpha) \pi = 0, \quad \pi \geq 0 \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

où  $\pi$  est défini par (1.37).

Cette dynamique des bouchons est essentielle pour la prise en compte de contraintes de congestion dans les modèles macroscopiques pour la congestion, d'abord d'un point de vue théorique puisqu'elle permet, comme le verrons un peu plus loin, de justifier des modèles de type Euler sous contrainte. D'un point de vue numérique ensuite, puisque ce modèle discret peut être implémenté pour simuler des modèles continus (voir BOUCHUT et al. [21], MAURY et PREUX [137])

## 3.2 Modèles de congestion dure et contrainte d'exclusion

### 3.2.1 Système d'Euler sous contrainte

Reprenons le système macroscopique décrivant la dynamiques des bouchons collants

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + \partial_x(\alpha u) = 0 \\ \partial_t(\alpha u) + \partial_x(\alpha u^2 + \pi) = 0 \\ (1 - \alpha) \pi = 0, \quad \pi \geq 0 \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (1.38)$$

Là où la fraction volumique  $\alpha$  est strictement plus petite que 1, la contrainte d'exclusion impose  $\pi = 0$  et on retrouve le système des gaz sans pression étudié en autres par BOUCHUT [20], BRENIER et GRENIER [26], NATILE et SAVARE [142] ou encore CAVALLETTI, SEDJRO, WESTDICKENBERG [46]. Ce système de gaz sans pression a par ailleurs été obtenu par JABIN et REY [110] comme limite hydrodynamique d'un modèle cinétique de gaz granulaire (quand le nombre de Knudsen tend vers 0).

Là où  $\alpha = 1$  on obtient un système incompressible, on peut voir  $\pi$  comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité  $\partial_x u = 0$ .

**Dérivation formelle à partir d'écoulements biphasiques.** Dans [21], BOUCHUT et al. dérivent formellement le système (1.38) à partir des équations du système biphasique gaz (compressible) / liquide(incompressible)

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_i \rho_i) + \partial_x(\alpha_i \rho_i u_i) = 0 \\ \partial_t(\alpha_i \rho_i u_i) + \partial_x(\alpha_i \rho_i u_i^2) + \alpha_i \partial_x p_i + \tau_i = M_i^D \end{cases}$$

en imposant les fermetures suivantes :

- égalités des pressions dans les deux phases

$$p_l = p_g = a \rho_g^\gamma$$

- des termes de fluctuation dans chaque phase

$$\tau_l = C_p \rho_l (u_g - u_l)^2 \partial_x \alpha \quad \tau_g = 0,$$

cette fermeture ayant été proposée par LAHEY [126] (voir [34] pour d'autres fermetures possibles)

- des termes de traînée à l'interface

$$M_l^D = -M_g^D = \mu\alpha(1 - \alpha)\rho_l(u_g - u_l).$$

On considère le ratio entre la densité caractéristique du gaz  $\rho_0$  et la densité (constante) du liquide :  $\varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho_l}$  que l'on suppose très petit avec également l'hypothèse que  $u_g - u_l = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Formellement, à l'ordre 0 en  $\varepsilon$  sur le modèle adimensionné et sans hypothèse supplémentaire, on obtient le système des gaz sans pression en les variables  $(\alpha_l, u_l)$ , pour lequel nous avons rappelé précédemment que des phénomènes de concentration (apparition de masses de Dirac) se produisent en temps fini.

Ceci n'est pas compatible avec la condition "physique"  $\alpha \leq 1$ . BOUCHUT, BRENIER, CORTES, RIPOLL [21] proposent alors de tenir compte d'une pression résiduelle du gaz à la limite, *i.e.*

$$\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi$$

qui est activée dans les zones où  $\alpha_l = 1$  au travers de la relation d'exclusion

$$(1 - \alpha_l)\pi = 0.$$

Le système obtenu est alors exactement le système "hybride" compressible / incompressible d'Euler (1.38).

**Existence de solutions faibles.** L'existence de solutions faibles pour le système (1.38) est démontrée rigoureusement par BERTHELIN dans [13].

Les principales étapes de la preuve consistent à approcher une donnée initiale

$$\alpha^0 \in L^1(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \alpha^0 \leq 1, \quad u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$$

par un système de  $n$  bouchons collants que nous avons définis auparavant. En montrant des inégalités d'entropie d'Oleinik sur le système des bouchons collants on garantit en particulier un principe du maximum et la compacité de la vitesse  $u_n$  quand le nombre de blocs initiaux  $n$  tend vers l'infini.

**Remarque :** Ce résultat a été étendu par BERTHELIN et al. [15] aux systèmes de type Aw-Rascle avec contraintes. Nous reparlerons de ces modèles à la Section 5 pour la description la formation d'embouteillages en trafic routier.

**Remarque :** Un travail est actuellement en cours en collaboration avec M. WESTDICKENBERG afin de justifier le modèle d'Euler sous contrainte (1.38) par les outils du transport optimal et de différentiabilité des projections métriques utilisés dans l'article de CAVALETTI, SEDJRO, WESTDICKENBERG [46] pour le système sans contrainte.

**Remarque :** Précédemment, nous avons supposé que la contrainte maximale  $\alpha^*$  était constante égale à 1, il peut cependant être intéressant pour certaines applications, notamment en trafic routier, de considérer une contrainte maximale *hétérogène* en espace. C'est le cas traité par exemple par BERTHELIN et al. [16], BERTHELIN et BROIZAT [14] où  $\alpha^*$  dépend du nombre de voies sur la chaussée et/ou de la vitesse des automobilistes.

C'est le cas également pour des écoulements en conduite fermée où la section de la conduite varie en espace, ou dans le cas d'objets flottants (voir Figure 1.2). Dans l'approximation onde longue, le système est décrit par les équations de Saint-Venant avec la contrainte supplémentaire sur la hauteur d'eau  $h \leq h^*$ ,  $h^*(x)$  étant la hauteur de la conduite. Ce type de modèle a été étudié d'un point de vue théorique et numérique par BOURDARIAS, ERSOY, GERBI [23] au moyen d'une formulation cinétique.

Dans le cas d'un objet flottant on aura une hauteur  $h^*$  finie en présence de l'objet et infinie en-dehors.

### 3.2.2 Système de Navier-Stokes sous contrainte

Nous étendons maintenant notre étude aux systèmes de Navier-Stokes en introduisant des termes de dissipation visqueuse (les viscosités sont supposées constantes). En dimension supérieure à un avec une contrainte de densité maximale hétérogène  $\rho^*$ , le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \rho^* \nabla \pi - \nabla(\lambda \operatorname{div} u) - 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(u)) = 0 \\ (\rho^* - \rho) \pi = 0, \quad \pi \geq 0 \\ 0 \leq \rho \leq \rho^* \\ \operatorname{div}(\rho^* u) = 0 \quad \text{dans } \{\rho = \rho^*\} \end{cases} \quad (1.39)$$

**Dérivation mathématique par relaxation de la contrainte.** La première justification mathématique des modèles hybrides de type Navier-Stokes est fournie par LIONS et MASMOUDI dans [131]. Elle concerne le cas homogène  $\rho^* = 1$  en dimension trois.

La preuve de LIONS et MASMOUDI consiste à relaxer la contrainte maximale en considérant le système approché

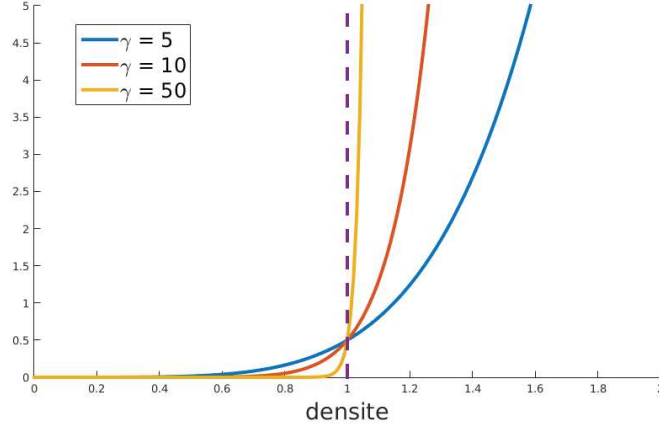
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \pi_n(\rho) - \nabla(\lambda \operatorname{div} u) - 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(u)) = 0 \end{cases}$$

de type Navier-Stokes compressible avec la loi de pression barotrope des gaz parfaits

$$\pi_n(\rho) = a \rho^{\gamma_n}.$$

En supposant que l'exposant adiabatique  $\gamma_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , la pression  $\pi_n$  tend vers une pression limite  $\pi$  qui, comme précédemment n'est activée que dans les zones de congestion  $\{\rho = 1\}$  comme on peut le voir sur la Figure 1.4.




 FIGURE 1.4 – Comportement de la pression  $p = a\rho^\gamma$  quand  $\gamma$  devient grand

À  $n$  fixé l'existence de solutions faibles au problème approché est assurée par le résultat de LIONS [130]. L'estimation d'énergie ainsi qu'une estimation spécifique de la pression permettent d'obtenir la compacité nécessaire pour passer à la limite dans la formulation faible des équations. En particulier  $\pi_n(\rho_n)$  et  $\rho_n\pi_n(\rho_n)$  convergent au sens des mesures positives vers des limites qu'on notera respectivement  $\pi$  et  $\pi^1$ . L'équation limite des moments montre en fait un peu plus de régularité sur la pression limite  $\pi$  ce qui permet de donner un sens au produit  $\rho\pi$  à la limite. Comme conséquence de la compacité faible du flux effectif  $\pi - (2\mu + \lambda)\operatorname{div} u$  et de la convergence forte de la suite des densités, on peut directement identifier  $\pi^1 = \rho\pi$ . Enfin, LIONS et MASMOUDI prouvent que la relation d'exclusion

$$\pi = \pi^1 = \rho\pi$$

est satisfaite au sens des distributions.

Dans [125], LABBÉ et MAITRE utilisent également ce procédé de relaxation afin de justifier un modèle simplifié de problème à frontière libre de type compressible/incompressible pour l'effet Leidenfrost

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \pi - 2\mu^0 \operatorname{div}(\rho D(u)) - \kappa \rho \nabla \Delta \rho = 0 \\ (1 - \rho)\pi = 0, \quad \pi \geq 0 \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \{\rho = 1\} \end{array} \right.$$

qui fait intervenir des forces de capillarité  $\operatorname{div} K = \kappa \rho \nabla \Delta \rho$  et où la viscosité n'est plus constante, dépend de la densité  $\mu = \mu^0 \rho$  et dégénère dans le vide  $\{\rho = 0\}$ . Ce modèle est approché par un système de type Navier-Stokes Korteweg avec pression  $\pi_n(\rho) = a\rho^{\gamma_n}$

et viscosité dépendant de la densité qui correspond au système Shallow-Water étudié par BRESCH, DESJARDINS, LIN [35]. L'analyse mise en œuvre par LABBÉ et MAITRE consiste alors à justifier dans ce cadre la limite singulière  $n \rightarrow +\infty$  vers le modèle à frontière libre compressible/incompressible en précisant en particulier l'estimation de BD entropie (introduite à la Section 2.3.3).

**Remarque :** Nous insistons sur le fait qu'au niveau approché, à  $n$  fixé, la contrainte est relaxée et  $\rho_n$  peut dépasser 1. Du point de vue de la modélisation on peut se demander si une telle approximation est pertinente du point de vue de la physique du problème. Si dans le cadre de certaines applications (par exemple celui des croissances tumorales que nous abordons dans le paragraphe suivant) ceci correspond bien à la physique, cela ne semble en revanche pas pertinent par exemple pour des écoulements en conduite fermée.

*Limite "Mesa".* Ce procédé de relaxation dans le cadre de l'équation des milieux poreux

$$\partial_t u = \Delta u^m$$

ainsi que l'étude du passage à limite  $m \rightarrow +\infty$  est appelé *problème mesa*, on pourra par exemple consulter les articles de CAFFARELLI et FRIEDMAN [44] et de FRIEDMAN et HÖLLIG [81]. L'appellation "mesa" vient du fait que la solution limite  $u_\infty$  a un profil de type plateau et coïncide en dehors de ces plateaux avec la donnée initiale  $u_0$ .

Dans le cadre de la modélisation de la croissance tumorale PERTHAME, QUIROS et VAZQUEZ [154] s'intéressent à l'équation des milieux poreux avec terme source

$$\partial_t \rho = \Delta \rho^m + \rho \phi(p)$$

où  $p$  est la pression "homéostatique" donnée par

$$p(\rho) = \frac{m}{m-1} \rho^{m-1}$$

et  $\phi$ , la fonction source, est supposée strictement décroissante, nulle pour une pression maximale  $p_M$ . Par passage à la limite "mesa"  $m \rightarrow +\infty$  il obtiennent à la limite un modèle de type Hele-Shaw

$$\partial_t \rho_\infty = \Delta \rho_\infty + \rho_\infty \phi(p_\infty)$$

avec

$$p_\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \rho < 1 \\ \geq 0 & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

ce qui peut aussi se réécrire en terme de relation d'exclusion

$$(1 - \rho_\infty) p_\infty = 0., \quad p_\infty \geq 0.$$

Cette approche a été étendue par PERTHAME et al. dans [153] pour un milieu actif et par PERTHAME, VAUCHELET dans [155] avec la prise en compte d'effets visco-plastiques.

### 3.3 Modèles de congestion douce

Le principe des modèles de congestion soft dans le cadre des équations de Navier-Stokes repose sur la modélisation, au sein du terme de pression, de forces singulières de nature répulsive au voisinage de la contrainte maximale de congestion  $\rho^*$ . Ces forces représentent alors au niveau macroscopique les interactions ayant lieu à l'échelle des composants élémentaires.

Dans les paragraphes qui suivent nous rappelons les origines physiques de telles forces de répulsion. Nous montrons ensuite comment mathématiquement on tient compte de la singularité du terme de pression et comment au travers des estimations d'énergie on assure la contrainte de congestion au sens stricte  $\rho < \rho^*$ . Nous énonçons enfin des résultats d'existence de solutions pour les systèmes de Navier-Stokes avec pression singulière.

#### 3.3.1 Pression singulière et interactions à l'échelle microscopique

Nous avons considéré dans la Section 2.3.2 la pression sous une approche thermodynamique comme une "force entropique". Sous cette approche le système physique évolue vers un état d'équilibre macroscopique qui maximise son entropie.

Dans le cadre de la problématique de congestion nous souhaitons revenir sur une autre interprétation de la pression cette fois en termes d'interactions microscopiques entre composants élémentaires. En effet, notre intuition est qu'au voisinage de la congestion où les composants élémentaires sont très proches les uns des autres, les forces d'interaction répulsives deviennent prépondérantes à l'échelle discrète et vont aussi dicter la dynamique globale du fluide à l'échelle macroscopique au travers de la loi de pression.

**Potentiel d'interaction répulsif entre composants élémentaires.** Nous nous intéressons donc aux interactions répulsives ayant lieu à l'échelle microscopique entre composants élémentaires, ici les molécules de fluide (constituées d'atomes eux-mêmes composés d'un noyau et d'un nuage d'électrons) mais ce type de force microscopique pourrait aussi s'appliquer pour la modélisation des foules en prenant en compte des forces de nature sociale.

Lorsque deux molécules sont très proches l'une de l'autre, d'une distance de l'ordre de la taille des molécules, une force de répulsion extrêmement forte apparaît afin d'empêcher le chevauchement des nuages électroniques des atomes respectifs. Cette force détermine la distance à laquelle deux atomes ou deux molécules peuvent se rapprocher.

Il existe plusieurs types possibles d'interaction de répulsion ("exchange repulsion", "hard core repulsion", "steric repulsion" ou encore pour les ions la "Born repulsion", elles sont détaillées dans [109]), elles sont caractérisées par une action à très courte portée et une dégénérescence lorsque les deux molécules se rencontrent. Leur origine physique peut être soit quantique soit chimique.

Beaucoup de formules empiriques sont proposés dans la pratique, mais il est malheureusement très difficile à cette échelle de caractériser précisément tous les potentiels d'interaction

mutuelle. Deux types de potentiels sont largement utilisés dans les applications, le potentiel sphères dures et le potentiel puissance (voir Figure 1.5) :

- comme son nom l'indique, dans l'approche "sphères dures" les atomes sont considérés comme "incompressibles", la force de répulsion est nulle pour une distance interatomique supérieur au rayon de la sphère dure (ou rayon de van der Waals) noté  $\sigma$ . De manière analogue pour une molécule on peut définir le rayon de la sphère associée. Le potentiel d'interaction de type sphères dures s'exprime de la façon suivante en fonction du rayon interatomique  $r$

$$\Psi(r) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } r = \sigma \\ 0 & \text{pour } r > \sigma \end{cases} \quad (1.40)$$

- le potentiel en loi puissance est une approche relaxée du potentiel sphères dures où

$$\Psi(r) = \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n. \quad (1.41)$$

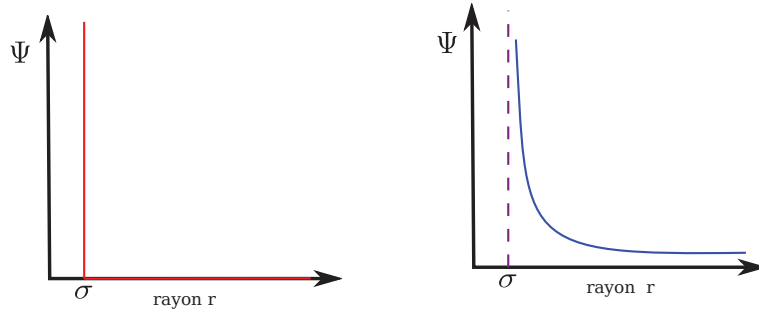


FIGURE 1.5 – Potentiels d'interaction mutuelle  $\Psi$  en fonction du rayon interatomique  $r$  entre deux composants élémentaires. À gauche le potentiel sphères dures, à droite le potentiel puissance.

Dans le cadre des modèles de congestion soft, nous sommes donc intéressés par les potentiels du type loi puissance qui exprime la répulsion croissante quand deux molécules se rapprochent l'une de l'autre.

Il existe aussi à l'échelle microscopique des forces intermoléculaires de nature attractives qui assurent la cohésion des molécules. Pour une description de la nature de ces forces nous renvoyons une nouvelle fois au livre de ISRAELACHVILI [109]. Nous négligerons dans la suite d'éventuelles forces attractives entre composants élémentaires et nous concentrerons sur l'influence des termes répulsifs singuliers dans la dynamique des équations de Navier-Stokes.

**Pression résultant des forces d'interactions microscopiques.** Comme expliqué par ISRAELACHVILI dans [109] (Chapitre 2), à partir du potentiel d'interaction on peut calculer l'énergie propre d'une molécule notée  $\mu^i$  comme la somme de tous les potentiels d'interaction de la molécule de fluide considéré

$$\mu^i = \int_{\sigma}^{\infty} \Psi^i(r) \rho 4\pi r^2 dr$$

à l'équilibre thermodynamique  $\mu^i = \mu$ , la pression est ensuite obtenue via la formule

$$p = \int_0^{\rho} s \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T ds.$$

Ce calcul nous permet de donner par exemple une interprétation microscopique de la loi de Van der Waals

$$p = \frac{k\rho T}{1 - b\rho} - a\rho^2$$

comme résultante de forces d'interaction de nature attractive à moyenne portée (forces de cohésion à l'échelle de la molécule), représentées par la constante  $a$ , et de forces répulsives à très courte portée quand la distance entre les molécules est très proche de la taille moléculaire  $\sigma$  ( $b = \frac{2}{3}\pi\sigma^3$ ).

**Remarque :** En présence d'un milieu hétérogène, les molécules et la nature des interactions peuvent différer d'un endroit à l'autre du fluide. Le rayon  $\sigma$  qui est propre aux molécules mises en jeu (et potentiellement à la nature de l'interaction) peut ainsi varier. La conséquence à l'échelle macroscopique est l'apparition une contrainte de densité maximale hétérogène : par exemple  $\rho^* = 1/b(x)$  pour la loi précédente de Van der Waals.

### 3.3.2 Systèmes de Navier-Stokes avec pression singulière.

En incluant ces forces d'interactions microscopiques (éventuellement hétérogènes) dans une composante  $\pi(\rho/\rho^*)$  de la pression totale on obtient le système de Navier-Stokes sous contrainte de densité maximale

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) + \rho^* \nabla \pi(\rho/\rho^*) - \operatorname{div} \mathbb{S} = 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

La pression  $\pi$  étant infinie lorsque  $\rho \geq \rho^*$ , on adjoint au système la condition de densité maximale

$$0 \leq \rho < \rho^*. \quad (1.43)$$

Le terme  $\nabla p$ , non singulier, est une composante supplémentaire du terme de pression qui joue le rôle d'une force entropique loin des zones de congestion quand la composante  $\pi$  est négligeable. Dans la suite, nous supposons que  $p$  suit la loi des gaz parfaits

$$p(\rho) = a\rho^\gamma, \quad a > 0, \gamma \geq 1.$$

Ce type de pression singulière est utilisé également pour des modèles champ de phases de mélanges par FEIREISL, PETZELTOVÁ, ROCCA, SCHIMPERNA [79] où la dynamique du système de Navier-Stokes est couplée avec une équation de Cahn-Hilliard.

**Remarque :** Comme nous l'avions précédemment expliqué à la Section 2.3.2, du fait de l'hétérogénéité de  $\rho^*$  il est nécessaire de garantir la compatibilité avec une approche "énergétique" de la pression, en considérant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement une résultante de la forme

$$\rho^* \nabla \pi(\rho/\rho^*) \quad \text{ou} \quad \rho \nabla \tilde{\pi}(\rho/\rho^*) \quad \text{avec} \quad \tilde{\pi}'(\rho/\rho^*) = \frac{\pi'(\rho/\rho^*)}{\rho/\rho^*}.$$

Le premier résultat que nous énonçons montre l'existence en dimension un de solutions régulières au problème (1.42)–(1.43) dans le cas homogène  $\rho^* = 1$ .

**Théorème 1 (Chapitre 2, Bresch, Perrin, Zatorska [41])** *On se place sur l'intervalle  $\Omega = (0, L)$  en imposant des conditions de Dirichlet homogènes aux limites sur la vitesse. On suppose que  $\mathbb{S} = \nu \partial_x u$  avec  $\nu > 0$  et qu'initialement  $(\rho^0, u^0) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ,  $0 < \rho^0 < 1$ . Pour tout  $T > 0$ , il existe une solution régulière  $(\rho, u)$  qui satisfait les régularités suivantes*

$$\begin{aligned} \rho &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \\ u &\in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

*ainsi que la contrainte au sens strict*

$$0 < c \leq \rho(t, x) \leq C < 1.$$

Ce résultat, démontré au Chapitre 2, repose sur un passage en coordonnées lagrangiennes et sur l'obtention d'une estimation d'énergie qui permet de borner l'énergie libre associée au potentiel singulier  $\pi$ . C'est cette borne qui permet de conclure quant à la contrainte de non-congestion  $\rho < \rho^*$ .

En dimension trois, il n'existe pas de résultat d'existence de solutions fortes pour les équations de Navier-Stokes compressible avec pression barotrope. Nous généralisons donc le résultat précédent en dimension trois avec une contrainte hétérogène  $\rho^*(x)$ , dans le cadre des solutions faibles. Le résultat d'existence s'appuie ainsi sur la théorie de LIONS [130] et FEIREISL [74].

**Théorème 2 (Chapitre 3, Perrin, Zatorska [151])** *Soit  $T > 0$ , on se place dans un ouvert borné régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . On impose des conditions de Dirichlet homogènes au bord*

sur la vitesse. On suppose que  $\rho^* \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\rho^* \geq c > 0$ , que la dégénérescence de la pression est suffisamment grande, i.e.  $\beta \geq 3$  et qu'initialement

$$0 \leq \rho^0 < 1, \quad \rho^0 e \left( \frac{\rho^0}{\rho^*} \right) \in L^1(\Omega)$$

$$(\rho u)(0) = m^0 \in (L^2(\Omega))^3, \quad m^0 \mathbf{1}_{\{\rho^0=0\}} = 0 \quad \text{pp dans } \Omega$$

$$\frac{|m^0|^2}{\rho^0} \mathbf{1}_{\{\rho^0>0\}} \in L^1(\Omega)$$

ainsi qu'une condition supplémentaire liée à l'hétérogénéité de  $\rho^*$

$$M^0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho^0(x) dx < \inf_{x \in \Omega} \rho^*(x)$$

Alors il existe  $(\rho, u)$  une solution faible globale du système (1.42)–(1.43).

Ce résultat sera démontré au Chapitre 3. Notre preuve s'appuie sur une régularisation préalable du système afin d'éliminer la singularité du terme de pression. Supposons que  $\pi$  soit de la forme

$$\pi(\rho/\rho^*) = a \frac{(\rho/\rho^*)^\alpha}{(1 - \rho/\rho^*)^\beta}, \quad \alpha, \beta > 1$$

et soit  $\delta \in (0, 1)$ . On définit le problème approché des équations (1.42) où la pression  $\pi$  est remplacée par la pression tronquée  $\pi_\delta$

$$\pi_\delta(\rho/\rho^*) = \begin{cases} \pi(\rho/\rho^*) & \text{si } \frac{\rho}{\rho^*} \leq 1 - \delta \\ a \frac{(\rho/\rho^*)^\alpha}{\delta^\beta} & \text{si } \frac{\rho}{\rho^*} > 1 - \delta \end{cases}$$

À  $\delta > 0$  fixé l'existence de solutions faibles globales est assurée par la théorie de LIONS et FEIREISL. En montre alors les estimations nécessaires, en particulier l'équi-intégrabilité du terme de pression singulière, pour passer à la limite  $\delta \rightarrow 0$  dans le système.

### 3.4 Transition entre modèles soft et modèles hard

Nous avons vu (cf Section 3.1 et [135]) qu'au niveau discret sur le système sphère/paroi, il est possible de montrer rigoureusement la convergence du modèle soft vers le modèle hard en faisant tendre la viscosité du fluide vers 0. Nous avons également vu qu'au niveau microscopique, le potentiel d'interaction de type loi puissance  $\Psi(r) = \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n$  tendait vers le potentiel sphères dures quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On peut ainsi se poser la question de la transition entre le modèle de congestion soft (1.42) et un modèle de congestion hard qui correspondrait au niveau microscopique au potentiel d'interaction sphères dures. Pour ce

faire caractérisons la portée de la pression répulsion par un paramètre  $\varepsilon > 0$  en posant par exemple

$$\pi_\varepsilon \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right) = \varepsilon \frac{(\rho/\rho^*)^\alpha}{(1 - \rho/\rho^*)^\beta}. \quad (1.44)$$

Diminuer  $\varepsilon$ , les puissances  $\alpha$  et  $\beta$  étant fixées, revient alors à considérer au niveau microscopique la limite  $n \rightarrow +\infty$  du potentiel d'interaction loi puissance. Nous illustrons sur la Figure 1.6 le comportement de la pression macroscopique  $\pi_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On retrouve également formellement à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la contrainte d'exclusion

$$(1 - \rho) \pi_0 = 0, \quad \pi_0 \geq 0$$

qui est l'équivalent macroscopique du potentiel sphères dures.

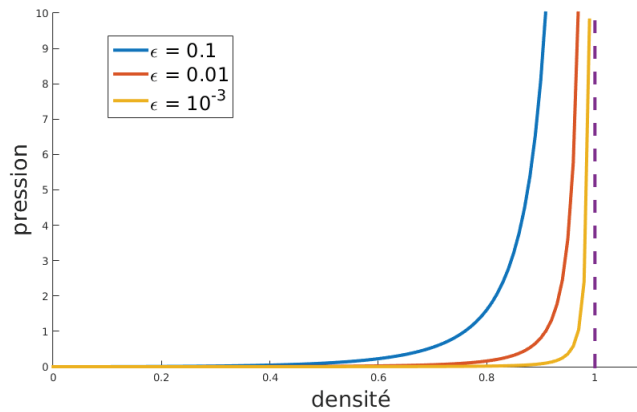


FIGURE 1.6 – Comportement de la pression singulière  $\pi_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

**Analogie avec une limite faible nombre de Mach locale.** L'étude de cette transition entre modèles de congestion soft et modèles de congestion hard est à mettre en lien avec les limites singulières de compressibilité (limite faible nombre de Mach et limite anelastique) que nous avons présentées à la Section 2.4. On voit dans l'expression de la pression singulière (1.44) la compétition entre deux effets : la tendance  $\varepsilon \rightarrow 0$  qui peut être potentiellement compensée par la tendance du système à congestionner lorsque  $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho^*$ . Plus précisément on obtient à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , une pression  $\pi$  strictement positive là où  $\rho_\varepsilon > \rho^*(1 - \varepsilon^{1/\beta})$ .

La limite singulière correspond donc à une limite faible nombre de Mach (ou limite anelastique dans le cas hétérogène) *locale*.



**Résultats obtenus : convergence des modèles soft vers les modèles hard.** On considère le système d'équations de Navier-Stokes compressibles

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) + \nabla p(\rho) + \rho^* \nabla \pi_\varepsilon \begin{pmatrix} \rho_\varepsilon \\ \rho^* \end{pmatrix} \\ -2\operatorname{div}(\mu(\rho_\varepsilon)D(u_\varepsilon)) - \nabla(\lambda(\rho_\varepsilon)\operatorname{div}(u_\varepsilon)) = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

dans le domaine borné  $\Omega$ . Nous énonçons deux résultats, l'un en dimension un dans le cas d'une densité maximale  $\rho^*$  constante, l'autre en dimension trois et densité maximale hétérogène concernant le passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Théorème 3 (Chapitre 2, Bresch, Perrin, Zatorska [41])** *Sous les conditions du Théorème 1, il existe une sous-suite  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon, \pi_\varepsilon)_\varepsilon$  de solutions de (1.45) telle que*

$$\rho_\varepsilon \leq C_\varepsilon < 1$$

et

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon &\rightarrow \rho && \text{in } \mathcal{C}([0, T] \times [0, L]), \\ u_\varepsilon &\rightarrow u && \text{in } L^2(0, T; \mathcal{C}[0, L]), \\ \pi_\varepsilon(\rho_\varepsilon) &\rightarrow \pi && \text{in } \mathcal{M}^+((0, T) \times (0, L)), \end{aligned}$$

où  $(u, \rho, \pi)$  est solution du problème à frontière libre

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p(\rho) + \partial_x \pi - \nu \partial_{xx}^2 u = 0 \\ (1 - \rho)\pi = 0, \quad \pi \geq 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

Nous montrerons au Chapitre 4 des simulations numériques illustrant la transition du modèle de congestion soft (1.45) vers le modèle de congestion hard (1.46) dans le cas homogène en dimension un. Nous nous appuyons pour cela sur l'analogie qui peut être faite avec les limites singulières de type faible nombre de Mach en introduisant une décomposition du terme de pression singulière qui nous permet de garantir, à la fois la stabilité du schéma quelle que soit la valeur du paramètre  $\varepsilon$ , mais aussi une dynamique incompressible des solutions numériques au voisinage des zones de congestion.

En dimension supérieure à un, il n'existe pas de théorie d'existence de solutions fortes globales en temps. Les solutions fortes existent jusqu'à un temps  $T^*$  qui a priori peut dépendre du paramètre  $\varepsilon$ . Afin de passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans le système (1.45) et garantir un temps d'existence strictement positif à la limite, on se place dans le cadre des solutions faibles qui sont solutions de (1.45) au sens des distributions.

**Théorème 4 (Chapitre 3, Perrin, Zatorska [151])** *Sous les conditions du Théorème 2, il existe une sous-suite de solutions faibles  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon, \pi_\varepsilon)$  de (1.45) qui converge quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers  $(\rho, u, \pi)$  solution faible du système*

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq \rho^* \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) + \rho^* \nabla \pi - \nabla(\lambda \operatorname{div} u) - 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(u)) = 0 \\ (\rho^* - \rho)\pi = 0, \quad \pi \geq 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

**Remarque :** Si la convergence de la pression singulière  $\pi_\varepsilon$  vers  $\pi$  a lieu au sens des mesures positives, on est tout de même capable de montrer un peu plus de régularité sur la limite  $\pi$  grâce à l'équation des moments limite, typiquement

$$\pi \in W^{-1,\infty}(0, T; W^{1,2}(\Omega)) + L^p(0, T; L^q(\Omega)), \quad p, q > 1.$$

Comme nous le justifierons au Chapitre 3, ceci nous permet de donner un sens au produit  $\rho\pi$  et donc à la relation d'exclusion  $(\rho^* - \rho)\pi = 0$  (au sens des distributions).

## 4 Les milieux granulaires immergés

Nous allons dans cette section reprendre les outils mathématiques des sections précédentes dans le cadre de la modélisation des milieux granulaires immergés. On désigne par milieu granulaire immergé une collection de particules solides macroscopiques plongées dans un fluide dont la dynamique est régie par les collisions entre les particules solides. On parlera de suspension quand ce sont les interactions hydrodynamiques qui sont prédominantes au sein de l'écoulement.

Par un processus de moyennisation d'ensemble, on peut modéliser un milieu granulaire immergé comme un mélange biphasique entre une phase solide (indiquée  $s$ ) de densité constante  $\rho^s$  et de fraction volumique  $\Phi$ , et une phase fluide (indiquée  $f$ ) dont la densité  $\rho^f$  est supposée elle aussi constante (*c.f* [111], [4])

$$\begin{cases} \partial_t(\Phi \rho^s) + \operatorname{div}(\Phi \rho^s u^s) = 0 \\ \partial_t((1 - \Phi) \rho^f) + \operatorname{div}((1 - \Phi) \rho^f u^f) = 0 \\ \partial_t(\Phi \rho^s u^s) + \operatorname{div}(\Phi \rho^s u^s \otimes u^s) - \operatorname{div} \Sigma^s = \rho^s \Phi g + f \\ \partial_t((1 - \Phi) \rho^f u^f) + \operatorname{div}((1 - \Phi) \rho^f u^f \otimes u^f) - \operatorname{div} \Sigma^f = \rho^f (1 - \Phi) g - f \end{cases} \quad (1.48)$$

La fermeture du système s'établit en exprimant les lois de comportements de :  $\Sigma^s$  le tenseur qui provient des collisions entre les particules solides;  $\Sigma^f$  le tenseur qui tient compte des contraintes au sein du fluide; et de la force  $f$  d'interaction entre les deux phases. Le processus de moyennisation ne permettant malheureusement pas de donner une expression des  $\Sigma^i$  et de  $f$  en fonction des variables moyennées, nous sommes contraints de proposer

des lois empiriques pour ces lois de comportement. Nous nous appuyons pour cela sur le livre de ANDREOTTI, FORTERRE et POULIQUEN [4].

On considère généralement  $f$  comme somme de la force d'Archimède (fonction du tenseur total  $\Sigma^f$  et pas seulement de la pression) et d'une force de traînée

$$f = \Phi \operatorname{div} \Sigma^f + \rho^f \beta(\Phi)(u^f - u^s).$$

**Remarque :** Cette expression de la traînée est valable pour des régimes d'écoulement laminaires. Pour des régimes turbulents, il est pertinent de supposer des forces de traînée dépendant de manière quadratique de la vitesse (voir [4] Section 2.3.1) sous la forme

$$\rho^f \beta(\Phi) |u^f - u^s| (u^f - u^s). \quad (1.49)$$

Intéressons nous maintenant aux tenseurs des contraintes fluides et solides  $\Sigma^{f,s}$ . Dans le régime dense que nous allons considérer on peut supposer que seule la partie isotrope du tenseur des contraintes fluide est non-négligeable, *i.e.*

$$\Sigma^f = -P^f \mathbf{I}.$$

Ce n'est pas le cas pour la phase solide

$$\Sigma^s = -P^s \mathbf{I} + \Sigma_{\text{dev}}^s$$

où la partie déviatorique  $\Sigma_{\text{dev}}^s$  n'est pas négligeable et est très complexe à modéliser. Nous rappelons que  $P^{f,s}$  est une pression "totale" au sens où elle contient en plus de la pression à l'équilibre, une composante liée aux déformations volumiques du fluide

$$P^s = p^s - \left( \lambda^s + \frac{2}{d} \mu^s \right) \operatorname{div} u^s, \quad P^f = p^f - \lambda^f \operatorname{div} u^f.$$

JOP, FORTERRE et POULIQUEN ont proposé récemment dans [115] une rhéologie basée une nouvelle quantité adimensionnée appelée *nombre inertiel* notée  $\mathcal{I}$ . Le nombre inertiel représente le rapport entre deux temps caractéristiques, le temps microscopique de réarrangement dû à la pression de confinement ici  $P^s$ , et le temps macroscopique qui est l'inverse du cisaillement moyen

$$\mathcal{I} = \frac{t_{\text{micro}}(P^s)}{t_{\text{macro}}}$$

Par une analyse dimensionnelle, en cisaillement simple, les auteurs obtiennent l'expression de la rhéologie  $\mu(\mathcal{I})$

$$\Sigma_{\text{dev}}^s = \mu(\mathcal{I}) P^s, \quad \Phi = \Phi(\mathcal{I}).$$

C'est une loi de friction qui exprime le fait que la dynamique du milieu granulaire est gouvernée par les contacts entre les grains. La notation  $\mu(\mathcal{I})$ , correspondant à un coefficient de friction effectif, ne doit pas être confondue avec la notation  $\mu$  utilisée dans tout ce manuscrit pour la viscosité de cisaillement.

La partie tangentielle du tenseur des contrainte est ainsi liée à la pression  $P^s$  ce que nous n'avions pas considéré pour la modélisation des fluides "standards" à la Section 2. Le système diphasique (1.48) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Phi + \operatorname{div}(\Phi u^s) = 0 \\ \partial_t(1 - \Phi) + \operatorname{div}((1 - \Phi)u^f) = 0 \\ \partial_t(\Phi \rho^s u^s) + \operatorname{div}(\Phi \rho^s u^s \otimes u^s) + \nabla P^s - \operatorname{div} \Sigma_{\text{dev}}^s(P^s) \\ \quad = \rho^s \Phi g - \Phi \nabla P^f + \rho^f \beta(\Phi)(u^f - u^s) \\ \partial_t((1 - \Phi) \rho^f u^f) + \operatorname{div}((1 - \Phi) \rho^f u^f \otimes u^f) + (1 - \Phi) \nabla P^f \\ \quad = \rho^f (1 - \Phi) g + \Phi \nabla P^f - \rho^f \beta(\Phi)(u^f - u^s) \end{array} \right. \quad (1.50)$$

Comme pour les mélanges gaz/liquide étudiés par BOUCHUT, BRENIER, CORTES et RIPOLL [21] (*c.f.* Section 3.2), nous faisons l'hypothèse que la densité du fluide est négligeable devant la densité des particules solides  $\rho^f/\rho^s \ll 1$  et que la vitesse relative des deux phases  $u^f - u^s$  est négligeable également. À la limite on obtiendrait un système du type

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Phi + \operatorname{div}(\Phi u^s) = 0 \\ \partial_t(\Phi u^s) + \operatorname{div}(\Phi u^s \otimes u^s) + \nabla P^s + \nabla P^f - \operatorname{div} \Sigma_{\text{dev}}^s(P^s) = \Phi g \\ (\Phi^* - \Phi)P^f = 0, \quad P^f \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.51)$$

Dans le cadre des mélanges liquides/gaz étudiés par BOUCHUT et al., l'hypothèse d'égalité des pressions dans les deux phases  $p_l = p_g$  permettait d'obtenir un système fermé. Dans notre cas, il ne semble pas pertinent de supposer l'égalité des pressions  $P^f$  et  $P^s$ .

Il existe dans la littérature d'autres types de fermetures qui permettent de supposer que  $P^f$  et  $P^s$  ne sont pas égales. Une loi de fermeture célèbre pour les modèles granulaires de type particules solides/gaz (les deux phases étant encore indicées  $s$  et  $f$  respectivement) est la fermeture de Baer-Nunziato [9] qui consiste en une relaxation de la contrainte d'égalité des pressions. Ce terme de relaxation de pression est alors vu comme un terme source dans l'équation d'évolution de la fraction volumique solide qui s'écrit

$$\partial_t \Phi + u_m \cdot \nabla \Phi = \frac{P}{\tau_p}$$

où  $u_m$  est la vitesse de mélange et

$$P = \Phi(1 - \Phi)(P^s - P^f),$$

et  $\tau_p > 0$  est le paramètre de relaxation (on vérifie qu'à la limite  $\tau_p \rightarrow 0$  on impose  $P = 0$  et donc l'égalité des pressions  $P^f = P^s$ ).

Dans [84], GALLOUËT, HELLUY, HÉRARD et NUSSBAUM imposent cette relation de fermeture pour un mélange biphasique compressible solide/gaz (avec température mais sans

termes de dissipation visqueuse) avec l'introduction d'une contrainte granulaire  $R > 0$ . Le terme source s'écrit alors

$$P = \Phi(1 - \Phi)(P^s + R - P^f).$$

GALLOUËT et al. montrent que cette contrainte granulaire  $R$  ne peut pas être choisie arbitrairement si l'on souhaite préserver la structure dissipative pour l'entropie et étudient, théoriquement et numériquement, le cas où les deux phases satisfont une loi d'état des gaz parfaits modifiée du type

$$P^i = (\gamma^i - 1)\rho^i e^i - \gamma^i \pi^i, \quad \pi^i > 0$$

et

$$R = \kappa(\alpha^s \rho^s)^{\gamma^s}.$$

Comparativement à l'étude de GALLOUËT et al. nous considérons que les deux phases sont incompressibles et nous tenons compte de forces de dissipations liées à la friction entre les particules solides. De manière analogue, nous nous attendons à ce que la loi de comportement  $\mu(P^s)$  ne puisse pas être choisie arbitrairement si l'on veut assurer le caractère bien posé du système. Nous ne souhaitons cependant pas imposer de manière *ad hoc* la relation de fermeture entre  $P^s$  et  $P^f$  et la loi de comportement  $\mu(P^s)$ .

L'approche que nous poursuivons dans cette section consiste à interpréter les modèles d'écoulements granulaires comme limites de modèles de suspensions. En justifiant ce passage à la limite on mettra ainsi en évidence des lois de comportement et des relations de fermeture qui assurent le caractère bien posé du système granulaire.

Dans ce but nous commencerons par rappeler les difficultés mathématiques liées à la structure d'un système tel que (1.51) où la viscosité  $\mu$  dépend de la pression. Nous décrirons ensuite les régimes de suspensions et énoncerons les résultats de cette thèse concernant la limite singulière de modèles de suspensions vers des modèles granulaires du type (1.51).

## 4.1 Difficultés relatives aux viscosités dépendant de la pression

Si la question des fluides avec viscosité dépendant de la pression est plutôt bien connue depuis les travaux de BRESCH, DESJARDINS, LIN [35] dans le cas compressible puisqu'elle se ramène à l'étude des fluides avec viscosité dépendant de la densité, elle reste encore très largement ouverte mathématiquement dans le cas incompressible. La première étude mathématique relative au caractère bien posé de ce type d'équations semble être celle de M. RENARDY [159] (1986). Dans son étude, RENARDY s'intéresse au système incompressible

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - 2\operatorname{div}(\nu(p) D(u)) = f \end{cases} \quad (1.52)$$

où la seconde équation peut être réécrite en développant le terme visqueux

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + (\mathbf{I} - 2\nu'(p) D(u)) \cdot \nabla p - \nu(p) \Delta u = 0$$

Une des premières remarques que l'on peut faire à propos de ce système est que, contrairement au cas classique où la pression n'intervenait qu'au travers de son gradient, il est nécessaire ici de prescrire la moyenne de la pression ou sa valeur à une frontière comme dans le cas des écoulements à surface libre.

Une seconde différence, bien plus importante encore que la précédente, est la potentielle perte d'ellipticité de l'équation en pression. En effet dans le cas classique où la viscosité  $\nu$  est constante, en prenant la divergence de l'équation des moments, la pression satisfait le problème de Poisson

$$\Delta p = F(f, u, \nabla u)$$

ce qui garantit son existence et son unicité (à une constante près). Dans le cas présent où la viscosité dépend de la pression, l'opérateur Laplacien est remplacé par l'opérateur non-linéaire du second ordre

$$\operatorname{div} \left( (I - 2\nu'(p) D(u)) \nabla p \right) \tag{1.53}$$

qui est dégénéré quand  $D(u) = 1/(2\nu'(p)) I$ .

Le système est ainsi mal posé de manière générale.

Le premier résultat de RENARDY concerne l'existence locale de solutions fortes. L'idée est d'assurer le caractère elliptique du problème non-linéaire satisfait par la pression en faisant en sorte que les valeurs propres de  $D(u)$  restent strictement inférieures à  $1/(2\nu'(p))$ . Pour cela RENARDY se place dans le cas d'une dépendance de la viscosité en pression au plus linéaire ce qui permet de minorer  $1/\nu'(p)$  par  $\frac{1}{\lim_{p \rightarrow +\infty} \nu'(p)} > 0$ .

Plus récemment, GAZZOLA dans [88] (1997) utilise d'autres techniques de projection afin d'obtenir un résultat d'existence, locale une nouvelle fois, de solutions fortes. Ces techniques lui permettent de traiter l'exemple de la loi de viscosité de Barus de type exponentielle,  $\nu(p) = \nu_0 \exp(\alpha p)$ , cas qui n'était pas compatible avec les hypothèses de RENARDY. En contrepartie, GAZZOLA suppose la présence d'une force extérieure  $f$  conservative ou "quasiment" conservative  $f \sim \nabla g$ . La solution  $(\bar{u}, \bar{p}) = (0, \nabla g)$  est alors un équilibre du système et on montre l'existence et l'unicité au voisinage de cet équilibre par projection de l'équation des moments sur les espaces de Helmholtz-Weyl.

Le seul résultat d'existence globale de solutions pour les systèmes incompressibles avec viscosité dépendant de la pression a été obtenu par MÅLEK, NEČAS et RAJAGOPAL dans [132]. Leur hypothèse de modélisation fondamentale consiste à sortir du cadre des fluides newtoniens en prenant en compte des effets de rhéofluidification au sein du fluide. Ceci s'exprime mathématiquement par une dépendance supplémentaire de la viscosité vis-à-vis du tenseur des déformations  $D(u)$

$$\nu(p, |D(u)|^2).$$

On peut voir formellement en quoi cette dépendance est intéressante en revenant à l'équation en pression (1.53) où l'opérateur d'ordre deux en pression devient

$$\operatorname{div} \left( \left( I - 2 \frac{\partial \nu}{\partial p}(p, |D(u)|^2) D(u) \right) \nabla p \right).$$

En prenant des lois de viscosité du type

$$\nu(p, |D(u)|^2) = (1 + \gamma(p) + |D(u)|^2)^{(r-2)/2}, \quad r \in (1, 2]$$

avec par exemple (d'autres dépendances plus générales en  $p$  et  $D(u)$  sont possibles, plusieurs sont proposées dans [133])

$$\gamma(p) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}},$$

on peut alors garantir que

$$\max \left| 2 \frac{\partial \nu}{\partial p}(p, |D(u)|^2) D(u) \right| < 1$$

pour tout champ de vitesse  $u$  et ainsi la non-dégénérescence de l'opérateur elliptique en pression.

Au vu des résultats existant dans la littérature, il semblerait donc que le système (1.52) soit tel quel mal posé au sens où il n'est pas possible d'avoir une théorie d'existence globale de solutions faibles sans condition sur la donnée initiale. La dépendance supplémentaire de la viscosité par rapport au tenseur  $D(u)$  introduite par MÅLEK, NEČAS et RAJAGOPAL permet d'établir les estimations cruciales pour résoudre l'équation en pression, ce qui n'était pas possible dans le cas d'une dépendance unique en la pression.

Nous reviendrons à la Section 4.3 sur l'étude des fluides incompressibles avec viscosité dépendant de la pression. Nous proposerons une nouvelle approche basée sur l'étude des milieux granulaires de la Section 4.2 et l'introduction d'effets de mémoire qui s'expriment dans le terme de dissipation visqueuse et au travers d'une équation de transport supplémentaire. Nous montrerons que cette nouvelle structure est obtenue comme limite naturelle d'une modèle de suspension.

## 4.2 Lien entre les milieux granulaires immergés et les suspensions

Le but de cette section est définir un modèle du type (1.51) qui serait bien posé au sens où l'on serait capable de garantir l'existence globale de solutions faibles, avec une viscosité  $\mu^s(P^s)$  et une relation de fermeture entre  $P^s$  et  $P^f$ .

**Modèle unidimensionnel.** Ce type de modèle granulaire a été introduit de manière formelle en dimension un par LEFEBVRE–LEPOT et MAURY dans [127]

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p = f \\ \partial_t \gamma + \partial_x(\gamma u) = -p \\ \gamma \leq 0, \quad \rho \leq 1, \quad \gamma(1 - \rho) = 0 \end{cases} \quad (1.54)$$

Dans ce modèle, la fraction volumique est représentée par la variable de densité  $\rho$ , la pression solide  $P^s$  correspond à la variable  $-\gamma$  et la pression fluide  $P^f$  à la variable  $p$ . Comparativement au système (1.51) la contribution de la pression solide dans l'équation des moments a été négligée et la fermeture du système se fait au travers de l'équation

$$\partial_t \gamma + \partial_x(\gamma u) = -p.$$

C'est un modèle hybride qui couple des zones libres/compressibles ( $\rho < 1$ ), où la dynamique est celle des équations d'Euler sans pression, et des zones congestionnées/incompressibles ( $\rho = 1$ ) où la dynamique est donnée par les équations

$$\begin{cases} \partial_x u = 0, & \gamma \leq 0 \\ \partial_t u + \partial_x p = f \\ \partial_t \gamma + u \partial_x \gamma = -p \end{cases}$$

Ce système est introduit par LEFEBVRE-LEPOT et MAURY comme la limite formelle du modèle

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) - \partial_x \left( \frac{\varepsilon}{1-\rho} \partial_x u \right) = f \end{cases} \quad (1.55)$$

quand le paramètre  $\varepsilon$ , représentant la viscosité du fluide, tend vers 0. La pression  $p$  dans le modèle limite (1.54) est ainsi la limite de ces forces de lubrification  $-\frac{\varepsilon}{1-\rho} \partial_x u$  et l'équation liant  $\gamma$  à  $p$  peut être vue comme la limite de

$$\partial_t \gamma_\varepsilon + \partial_x(\gamma_\varepsilon u) = \frac{\varepsilon}{1-\rho} \partial_x u.$$

Cette dernière équation n'est en fait qu'une réécriture de l'équation de conservation de la masse si  $\gamma_\varepsilon$  est défini par la relation

$$\gamma'_\varepsilon(\rho)\rho - \gamma_\varepsilon(\rho) = \frac{\varepsilon}{1-\rho}.$$

La limite  $\gamma$  est appelée *potentiel d'adhésion* par analogie avec la variable  $\gamma$  du modèle sphère/paroi (MAURY [135]) présenté à la Section 3.1. Activée uniquement dans les zones congestionnées ( $(1-\rho)\gamma = 0$ ), elle garde en mémoire les contraintes subies par le fluide.

Dans la littérature ce concept de potentiel d'adhésion s'exprime au travers de la notion de *paramètre de structure* que nous avons introduit dans la Section 2.3.1 pour la description générale des lois de comportement.

L'idée est que dans un système constitué de particules assez grandes comme dans une suspension, l'énergie de déplacement fournie à ces particules macroscopiques n'est pas instantanément restituée par agitation thermique. L'énergie à fournir pour déplacer ces éléments macroscopiques varie ainsi en fonction de l'énergie emmagasinée par l'élément et



dépend des contraintes subies par le fluide au cours du temps. On est donc amené à décrire l'état instantané d'énergie du fluide comme fonction de l'histoire de l'écoulement au travers d'une variable scalaire locale notée  $W$  (voir [53, 54]).

Il semble difficile du point de vue de la modélisation de décrire précisément l'influence de  $W$  sur la loi de comportement et l'on préfère décrire dans la littérature physique plutôt l'évolution en temps d'un paramètre de structure noté généralement  $\lambda$  dans la littérature mais que nous noterons  $\Pi$  afin d'éviter les confusions avec le coefficient de viscosité. Ce paramètre de structure peut par exemple représenter le nombre de contacts entre les particules solides ou la taille des agrégats. L'énergie d'adhésion est alors une fonction du paramètre de structure  $W(\Pi)$ .

Nous retrouvons le concept d'énergie d'adhésion directement sur la structure des équations (1.54) en posant

$$\Pi = -\gamma, \quad W(\Pi) = \frac{|\partial_x \Pi|^2}{2} = \frac{|\partial_x \gamma|^2}{2}$$

En effet, par analogie avec la dérivation de la BD entropie de BRESCH et DESJARDINS (cf [29] et Section 2.3.3) on peut introduire une *vitesse effective*

$$v = u - \partial_x \gamma.$$

Cette vitesse effective satisfait dans les zones incompressibles où  $\rho = 1$ ,  $\partial_x u = 0$ ,

$$\partial_t v + u \partial_x v = f$$

par élimination du terme de pression  $\partial_x p$ . L'énergie totale du système dans les zones incompressibles n'est alors plus seulement l'énergie cinétique  $\frac{|u|^2}{2}$  liée à la vitesse  $u$ , mais  $\frac{|v|^2}{2} = \frac{|u - \partial_x \gamma|^2}{2}$ , ce qui justifie la définition de l'énergie de cohésion  $W$ .

**Prise en compte de la pression solide.** Nous souhaitons prendre en compte dans l'équation des moments du système (1.54) l'influence de la pression solide  $P^s$ . Cette pression correspond on le rappelle au potentiel  $-\gamma$ . D'après le modèle (1.51) décrit en introduction, ceci nous conduit à rajouter deux contributions dans l'équation des moments du système (1.54) : une dans la pression totale  $\partial_x P^s$  ainsi qu'une autre de type dissipation visqueuse  $\partial_x(\mu(P^s)\partial_x u)$ . En l'absence de terme de forçage, on obtient donc le système suivant en dimension un

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x P^s + \partial_x p - \partial_x(\mu(P^s)\partial_x u) = 0 \\ \partial_t P^s + \partial_x(P^s u) = p \\ (1 - \rho)P^s = 0, \quad P^s \geq 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases} \quad (1.56)$$

La généralisation de ce système macroscopique en dimension supérieure n'est pas du tout triviale. La difficulté réside dans la définition de l'état congestionné en terme de

concentration maximale et dans la description à l'échelle macroscopique des réseaux de contacts entre les grains. Il existe effectivement plusieurs notions de concentration maximale pour les suspensions. Dans [53], COUSSOT distingue en dimension deux, trois notions différentes de concentration maximale pour des particules assimilées à des disques de même rayon. La première notion de concentration maximale possible exprime le nombre maximal de particules que l'on peut disposer dans une aire donnée. Cette concentration correspond à un arrangement cristallin parfait et vaut 0.74. En réalité ce type d'arrangement cristallin n'est jamais réalisé si les grains sont répartis aléatoirement lors de la préparation. La concentration maximale avoisine alors plutôt 0.55. Sous l'effet de vibrations et de la gravité, les particules peuvent s'arranger un peu mieux et la concentration atteint 0.64. C'est cette notion qui est la plus largement utilisée dans la littérature et que nous reprenons. On l'appelle concentration de *close packing* ou *concentration d'entassement maximal*. En toute généralité la valeur de concentration maximale  $\Phi^*$  devrait dépendre de la configuration des particules qui est fonction de l'histoire de l'écoulement (préparation initiale du mélange, contraintes subies au cours du temps, etc.).

Concernant la question de la modélisation des réseaux de contacts entre les grains, ceux-ci devraient s'exprimer au travers de termes non-locaux dans les équations et dépend fortement de la notion de concentration maximale choisie. Comme le rappellent ANDREOTTI, FORTERRE, POULIQUEN [4], la modélisation de telles contraintes reste largement ouverte à l'heure actuelle.

Dans notre étude nous ne tiendrons pas compte des contraintes non-locales, mais nous garderons une contribution (de type fluide newtonien)

$$-2\operatorname{div}(\mu(P^s) D(u))$$

qui exprime à l'état congestionné les contraintes dues à la friction entre les grains. Cette friction est, au travers de la pression  $P^s$  et de l'équation liant  $P^s$  à  $p$ , une fonction de l'histoire de l'écoulement. Le système s'écrit ainsi

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \operatorname{div}(\Phi u) = 0 \\ \partial_t(\Phi u) + \operatorname{div}(\Phi u \otimes u) + \nabla P^s + \nabla p - 2\operatorname{div}(\mu(P^s) D(u)) = 0 \\ \partial_t P^s + \operatorname{div}(P^s u) = p \\ (\Phi^* - \Phi)P^s = 0, \quad P^s \geq 0, \quad 0 \leq \Phi \leq \Phi^* \end{cases} \quad (1.57)$$

La pression solide  $P^s$  joue le rôle du paramètre de structure  $\Pi$  ou du potentiel d'adhésion  $-\gamma$  introduit précédemment. Comme dans le cas de la dimension un on peut introduire une vitesse effective

$$v = u + \nabla P^s.$$

En supposant que la friction est proportionnelle à la pression

$$\mu(P^s) = P^s,$$

l'équation des moment en terme de vitesse effective s'écrit

$$\partial_t(\Phi v) + \operatorname{div}(\Phi u \otimes v) + \nabla P^s - 2\operatorname{div}(\mu(P^s) A(u)) = 0$$

où la pression fluide  $p$  a disparu. Dans les zones congestionnées où  $\Phi = \Phi^*$  et  $\operatorname{div} u = 0$ , on obtient l'estimation d'énergie suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|u + \nabla P^s|^2}{2} + \int_{\Omega} |\nabla P^s|^2 + 2 \int_{\Omega} \mu(P^s) |A(u)|^2 = 0. \quad (1.58)$$

On retrouve ainsi la notion d'énergie de cohésion  $W$  au travers du gradient  $\nabla P^s$ . La dernière intégrale traduit la dissipation d'énergie par friction entre les grains dans les zones congestionnées, dissipations qu'il était normal de négliger en dimension un.

**Régimes de suspension et transition vers le régime granulaire.** Dans le cadre de cette thèse, nous avons eu pour but de justifier mathématiquement les modèles (1.56) et (1.57) à partir de modèles de suspension du type de celui proposé par LEFEBVRE–LEPOT et MAURY (1.55) où des forces de lubrifications singulières sont prises en compte.

Cette question répond à un enjeu de modélisation physique majeur comme ANDREOTTI, FORTERRE et POULIQUEN le soulignent dans [4]

*« La distinction entre un modèle granulaire immergé et une suspension dense qui serait contrôlée par les interactions hydrodynamiques est loin d'être évidente et la question d'une éventuelle transition entre un régime granulaire et un régime de suspension reste ouverte. »* p.323

*« [...] Le rôle respectif des contacts et des interactions hydrodynamiques dans la rhéologie des milieux denses, ainsi que l'expression des lois de comportement pertinentes restent des problèmes largement ouverts »* p.330

Attardons-nous un instant sur la modélisation des suspensions qui, comme nous l'avons rappelé, sont des collections de particules solides macroscopiques immergées dans un fluide visqueux dont la dynamique est régie par les interactions hydrodynamiques.

À l'échelle microscopique des grains, les forces hydrodynamiques sont les forces de lubrification au sein du fluide interstitiel qui empêchent le contact entre les grains. On peut montrer que cette force qui dépend de la viscosité du fluide est, aux faibles distances, inversement proportionnelle à la distance séparant les deux particules (voir [120]). Au niveau macroscopique, la lubrification s'exprime au travers de forces dissipatives : quand deux particules se rapprochent il faut évacuer le fluide entre les deux particules ce qui coûte de l'énergie, de même lorsqu'elles s'éloignent il faut remplir l'espace libre avec du fluide ce qui coûte également de l'énergie.

Dans [127], LEFEBVRE–LEPOT et MAURY justifient rigoureusement en dimension un l'obtention du modèle de suspension (1.55) à partir d'un modèle d'interaction "microscopique" à l'échelle des particules solides. La dissipation visqueuse  $\partial_x \left( \frac{1}{1-\rho} \partial_x u \right)$  résulte de la force répulsive entre deux particules due à la lubrification :  $F_{1 \rightarrow 2} = -\frac{u_2 - u_1}{d}$  où  $d$  est la taille de la couche de liquide située entre les deux particules solides et  $u_{1,2}$  leur vitesse.

DURAND développe également une approche "microscopique" pour les suspensions dans [68]. Il obtient formellement à partir de l'équation de Liouville (qui représente la conservation de la probabilité de présence des particules) les trois équations de transport qui modélisent l'écoulement d'une suspension : le transport de la masse, de la quantité de mouvement et de la pression cinétique qui représente la "température macroscopique". Le système est fermé en supposant que le moment d'ordre trois, c'est à dire le flux de chaleur cinétique, est nul.

Les équations fluides font intervenir en particulier des forces de dissipation au sein d'une pression dite *pression de dissipation*, ou *pression de lubrification*. Ces forces de dissipation qui sont dues au déplacement des particules et aux forces de lubrification et correspondent en fait aux dissipations visqueuses du mélange. Les équations obtenues dans [68] font également intervenir une *pression d'interaction* qui ne dépend pas elle de la vitesse des particules. Cette pression d'interaction, qui n'était pas prise en compte dans le système de LEFEBVRE-LEPOT et MAURY, représente les effets des potentiels d'interaction mutuelle entre les particules solides. Nous avons introduit cette notion dans la Section 3.3.

Sous certaines hypothèses *ad hoc*, en supposant en particulier qu'une particule n'interagit qu'avec des particules situées à une distance inférieure à une certaine distance coupure, DURAND obtient des lois théoriques pour ces pressions d'interaction et de lubrification. Il montre que la pression d'interaction ainsi que la pression de lubrification sont des fonctions de la fraction volumique de grains, qui s'annulent quand  $\Phi = 0$  et divergent vers  $+\infty$  au voisinage de  $\Phi = \Phi^*$ .

On peut trouver dans la littérature (voir par exemple COUSSOT [53], ANDREOTTI, FORTERRE, POULIQUEN [4]), d'autres approches qui consistent à prescrire directement à partir des données expérimentales la loi de comportement d'une suspension. S'il semble acquis que la pression de lubrification (*i.e.* la viscosité) diverge au voisinage d'une fraction volumique de grains maximale, il n'y a cependant pas de consensus général sur l'expression de ces lois de comportement ni au voisinage de  $\Phi = \Phi^*$  ni au voisinage de  $\Phi = 0$ . Une loi largement utilisée pour les régimes denses est la loi empirique de Krieger-Dougherty

$$\mu(\Phi) = \mu_0 \left( 1 - \frac{\Phi}{\Phi^*} \right)^{-2,5\Phi^*}$$

La question de la présence ou non d'une pression d'interaction dans les équations semble elle aussi délicate. Selon le type de particules solides considérées la pression d'interaction peut jouer un rôle prédominant dans la dynamique de l'écoulement. C'est le cas par exemple des suspensions colloïdales qui mettent en jeu des particules solides de très petite taille. Cette très petite taille implique que les phénomènes de diffusion brownienne sont non négligeables et l'on doit également tenir compte d'interactions électrostatiques et de Van der Waals entre particules solides. Au niveau macroscopique ce sont ces forces d'interaction qui, au travers de la pression d'interaction, peuvent conduire à des phénomènes de transition vitreuse (voir [53]).

### 4.2.1 Résultats obtenus

Dans notre approche, nous proposons un cadre mathématique et des lois générales de comportements qui assurent l'existence de solutions faibles pour les suspensions et qui nous permettent d'établir mathématiquement le lien avec les régimes granulaires dominés par les contacts entre les grains. Pour ce faire nous réécrivons le système de suspension sous la forme générale

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \operatorname{div}(\Phi u) = 0 \\ \partial_t(\Phi u) + \operatorname{div}(\Phi u \otimes u) + \nabla \pi(\Phi) - \nabla(\lambda(\Phi) \operatorname{div} u) \\ - 2 \operatorname{div}(\mu(\Phi) \mathbb{D}(u)) + r \beta(\Phi) |u| u = 0 \end{cases} \quad (1.59)$$

où  $\pi(\Phi)$  représente la pression d'interaction (issues des interactions mutuelles entre particules),  $\lambda(\Phi)$  et  $\mu(\Phi)$  sont les coefficients de viscosité qui caractérisent les dissipations d'énergie dues aux forces de lubrifications. Nous avons également réintroduit un terme de traînée turbulente  $\beta(\Phi)|u|u$  dû à l'interaction entre les phases solides et liquides (*c.f.* (1.49)). Nous rappelons que les coefficients  $\pi(\Phi)$ ,  $\lambda(\Phi)$  et  $\mu(\Phi)$  sont d'après [68] et les expériences physiques [4, 53] des fonctions singulières au voisinage de la fraction volumique maximale  $\Phi^*$ . Nous supposons également qu'elles s'annulent quand la fraction volumique  $\Phi$  tend vers 0. Concernant le coefficient de traînée  $\beta(\Phi)$ , on pourra trouver dans [4] des expressions (dans le cas laminaire) pour différents régimes de concentration, il peut éventuellement diverger également au voisinage de la fraction volumique maximale. En dimension un il semble raisonnable de le négliger. En dimension supérieure, nous supposons dans la suite que ce coefficient n'est pas singulier

$$\beta(\Phi) = r\Phi, \quad r > 0.$$

Nous nous sommes ainsi ramenés à un système de type Navier-Stokes compressible avec des lois de viscosité  $\mu, \lambda$  dépendant de la densité (de manière équivalente de la fraction volumique) dégénérées en 0 (et singulières en  $\Phi^*$ ). Nous avons présenté ce type de systèmes dans le cas non-singulier à la Section 2.3.3. La théorie de stabilité des solutions faibles (BRESCH, DESJARDINS [30], MELLET, VASSEUR [140]) et la théorie d'existence de solutions faibles  $\kappa$ -entropiques (BRESCH, DESJARDINS, ZATORSKA [36]) reposent comme nous l'avons vu sur l'introduction de la vitesse effective

$$v = u + 2\nabla\varphi(\Phi) \quad \text{où} \quad \varphi'(\Phi) = \frac{\mu'(\Phi)}{\Phi}.$$

C'est cette vitesse effective qui permet d'obtenir l'estimation de BD entropie ou de  $\kappa$ -entropie pourvu que la viscosité de volume  $\lambda$  et la viscosité de cisaillement  $\mu$  satisfassent la relation algébrique

$$\lambda(\Phi) = 2(\mu'(\Phi)\Phi - \mu(\Phi)). \quad (1.60)$$

Nous décidons donc d'imposer cette relation dans notre modèle de suspension (1.59). Les viscosités  $\mu$  et  $\lambda$  étant singulières au voisinage de  $\Phi^*$ , cette relation impose en particulier que l'ordre de la dégénérescence de  $\lambda$  au voisinage de  $\Phi^*$  est plus élevé que celui de  $\mu$ . Ce

point sera crucial dans notre étude.

En ce qui concerne la loi de la pression d'interaction  $\pi$ , nous savons d'après les travaux de MELLET et VASSEUR [140] qu'une hypothèse liant le comportement de  $\pi$  et  $\mu$  est nécessaire afin de fermer l'estimation Mellet-Vasseur dans le cas non-singulier. Nous verrons précisément dans les Chapitres 5 et 6 qu'une relation linéaire entre viscosité de cisaillement et pression est nécessaire afin d'obtenir la compacité du terme de pression dans le modèle de suspension.

Dans ce cadre nous montrons au Chapitre 5 l'existence globale de solutions faibles en dimension deux satisfaisant une inégalité de type  $\kappa$ -entropie (1.31).

**Théorème 5 (Chapitre 5, Perrin [150])** *Soient  $\Omega = \mathbb{T}^2$ ,  $T > 0$  et une donnée initiale  $(\Phi^0, m^0)$ ,  $\Phi^0 < \Phi^*$ , de  $\kappa$ -entropie finie. Il existe une valeur du paramètre  $r(T) > 0$  pour laquelle on peut construire une solution faible globale du système de suspension suivant*

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \operatorname{div}(\Phi u) = 0 \\ \partial_t(\Phi u) + \operatorname{div}(\Phi u \otimes u) + \nabla \pi(\Phi) - \nabla(\lambda(\Phi) \operatorname{div} u) \\ - 2 \operatorname{div}(\mu(\Phi) D(u)) + r \Phi |u| u = 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

où

$$\mu(\Phi) = c_\mu(\mu^1(\Phi) + \Phi), \quad (1 - \Phi)\mu^1(\Phi) \xrightarrow{\Phi \rightarrow \Phi^*} +\infty, \quad \mu^1(\Phi) \underset{0}{\sim} C\Phi$$

$$\pi(\Phi) = c_\pi \mu^1(\Phi), \quad c_\mu, c_\pi > 0$$

$$\lambda(\Phi) = 2(\mu'(\Phi)\Phi - \mu(\Phi)).$$

**Remarque :** La question des lois de pression et de viscosités singulières est intéressante au-delà du cadre des suspensions. On retrouve en fait de manière assez naturelle des lois de pression et de viscosités singulières pour des écoulements biphasiques dispersés (par exemples des bulles de gaz dans un liquides) pour lesquels on souhaite garantir la co-existence des deux phases. Ce type de modèles est particulièrement utilisé en ingénierie pétrolière, par exemple dans les travaux de EVJE et de ses collaborateurs [69, 70, 82] pour la modélisation et la simulation d'écoulements liquide/gaz dans les puits de pétrole.

Maintenant que nous avons un cadre mathématique adéquat pour les suspensions nous pouvons nous intéresser à la question de la transition vers les régimes granulaires dominés par les contacts entre les grains. LEFEBVRE–LEPOT et MAURY abordent formellement cette question en faisant tendre la viscosité du fluide  $\varepsilon$  dans le système 1d (1.55) tend vers 0.

Nous procédons de manière similaire sur notre système avec pression d'interaction en introduisant un paramètre  $\varepsilon$  dans la loi  $\mu^1$ , en posant par exemple

$$\mu_\varepsilon^1(\Phi) = \varepsilon \frac{\Phi}{(1 - \Phi)^\beta}$$

ou une dépendance plus complexe le cas du singularité de type exponentielle au voisinage de  $\Phi^*$  (cas que nous traiterons au Chapitre 5). Nous montrons qu'en dimension un on assure la compacité des solutions qui nous permet de passer à la limite faible dans les équations

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_\varepsilon + \partial_x(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_x(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon^2) + \partial_x \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) - \partial_x(\lambda_\varepsilon(u_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon) - \partial_x(c_\mu(\mu_\varepsilon^1(\rho_\varepsilon) + \Phi_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (1.62)$$

Le point original de ce passage à la limite est l'utilisation de l'équation de transport liant  $\mu_\varepsilon = c_\mu(\Phi + \mu_\varepsilon^1)$  à  $\lambda_\varepsilon$

$$\partial_t \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) + \partial_x(\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) u_\varepsilon) = -\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon \quad (1.63)$$

qui est issue de la relation algébrique  $\lambda_\varepsilon(s) = \mu_\varepsilon'(s)s - \mu_\varepsilon(s)$ . En effet cette équation garantit le contrôle du produit  $\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon$  et nous retrouvons à la limite comme LEFEBVRE–LEPOT et MAURY le système d'équations hybride compressible/incompressible avec une équation liant potentiel d'adhésion, ici  $-\Pi = -\overline{\pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}$ , et pression  $\Lambda = \overline{\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon}$ . La notation  $\overline{\cdot}$  désigne ici la limite faible des suites de fonctions dépendant de  $\varepsilon$ .

**Théorème 6 (Chapitre 6, Perrin [149])** *Soit  $T > 0$ , il existe une sous-suite de solutions faibles  $(\Phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  du système (1.62) qui converge faiblement quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers  $(\Phi, u, \Pi, \Lambda)$  une solution faible du système*

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \partial_x(\Phi u) = 0 \\ \partial_t(\Phi u) + \partial_x(\Phi u^2) + \partial_x \Pi - \partial_x \Lambda - c_\mu \partial_x((\Phi + \Pi/c_\pi) \partial_x u) = 0 \\ \partial_t \Pi + \partial_x(\Pi u) = -\frac{c_\pi}{c_\mu} \Lambda \\ 0 \leq \Phi \leq \Phi^* \\ (\Phi^* - \Phi) \Pi = 0, \quad \Pi \geq 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

Nous montrerons également au Chapitre 6 des simulations numériques qui illustrent le comportement asymptotique hybride compressible/incompressible du modèle de suspension quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

En dimension deux, un coefficient 2 supplémentaire apparaît dans le tenseur des contraintes  $-2\text{div}(\mu_\varepsilon D(u))$  et ainsi dans la relation algébrique liant  $\lambda_\varepsilon$  à  $\mu_\varepsilon$

$$\lambda_\varepsilon(\Phi) = 2(\mu_\varepsilon'(\Phi)\Phi - \mu_\varepsilon(\Phi)).$$

Nous obtenons de même la transition vers les modèles granulaires. Le terme de traînée joue alors un rôle crucial (comme dans le Théorème 5) pour le passage à la limite dans les termes non-linéaires de convection  $\Phi_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ .



**Théorème 7 (Chapitre 5, Perrin [150])** *Soit  $T > 0$ , il existe  $r > 0$  et une sous-suite de solutions  $(\Phi_\varepsilon, u_\varepsilon, \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon), \lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)\text{div } u_\varepsilon)$  de (1.61) qui converge faiblement vers une solution faible  $(\Phi, u, \Pi, -p)$  du modèle granulaire hybride*

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \text{div}(\Phi u) = 0 \\ \partial_t(\Phi u) + \text{div}(\Phi u \otimes u) + \nabla \Pi - \nabla \Lambda \\ \quad - 2\text{div}(c_\mu(\Pi/c_\pi + \Phi) D(u)) + r\Phi|u|u = 0 \\ 0 \leq \Phi \leq \Phi^* \\ \partial_t \Pi + \text{div}(u\Pi) = -\frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda \\ (\Phi^* - \Phi)\Pi = 0, \quad \Pi \geq 0 \end{cases} \quad (1.65)$$

On retrouve ainsi les modèles granulaires (1.56) en dimension un et (1.57) en dimension deux que nous avons introduits précédemment. Le rôle du potentiel d'adhésion, en lien avec l'énergie d'adhésion du système joué par  $(-)\Pi$ , la pression  $(-)\Lambda$  limite du produit  $(-)\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)\text{div } u_\varepsilon$  est à la limite le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité  $\text{div } u = 0$ . La relation de fermeture entre les deux pressions que nous cherchions est ainsi l'équation de transport

$$\partial_t \Pi + \text{div}(u\Pi) = -\frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda.$$

### 4.3 Viscosités dépendant de la pression, une nouvelle approche

Grâce au précédent résultat qui établit la convergence d'un modèle compressible avec viscosités et pression singulières vers un modèle compressible / incompressible avec viscosité dépendant du potentiel  $\Pi$ , nous en déduisons l'existence de solutions faibles globales pour un modèle entièrement incompressible.

**Théorème 8 (Chapitre 5, Perrin [150])** *Soient  $\Omega = \mathbb{T}^2$ ,  $T > 0$ . Pour toute donnée initiale  $(u^0, \Pi^0) \in (L^2(\Omega))^2 \times (L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega))$  telle que*

$$\text{div } u^0, \quad \Pi^0 > 0$$

*et pour  $r > 0$  suffisamment petit, il existe une solution faible globale du système*

$$\begin{cases} \text{div } u = 0 \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi - \nabla \Lambda - 2\text{div}(c_\mu(\Pi/c_\pi + 1) D(u)) + r|u|u = 0 \\ \partial_t \Pi + u \cdot \nabla \Pi = -\frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda \end{cases} \quad (1.66)$$

Ce résultat repose sur une approximation adéquate de type suspension où densité initiale  $\rho_\varepsilon^0$  (qui dépend de  $\Pi^0$ ) converge vers 1 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nous montrerons au Chapitre 5 qu'on peut trouver une telle condition initiale qui est de  $\kappa$ -entropie finie ce qui nous permet d'appliquer le résultat du Théorème 7.



Nous pouvons alors mettre en lien notre résultat avec la théorie des fluides incompressibles avec viscosité dépendant de la pression présentés à la Section 4.1. Comparativement au système (1.52), nous n'avons plus le problème de la dégénérescence de l'opérateur

$$\operatorname{div} \left( (I - 2\nu'(p) D(u)) \nabla p \right)$$

puisque dans notre cas le multiplicateur de Lagrange est  $\Lambda$  et que nous avons considéré une viscosité ne dépendant que du potentiel  $\Pi$ . Pour le système (1.66) quand  $u$  et  $\Pi$  sont fixés, le multiplicateur de Lagrange  $\Lambda$  satisfait une équation de Poisson qui est obtenue formellement en prenant la divergence de l'équation des moments. La structure mathématique la plus intéressante est celle issue du modèle de suspension qui fait apparaître naturellement la vitesse effective

$$v_{\text{eff}} = u + 2c_\mu \nabla (\Pi/c_\pi + 1).$$

Elle permet d'obtenir une estimation du type (1.58) et donne ainsi directement le contrôle du gradient du potentiel  $\Pi$ .

## 5 Application en modélisation du mouvement de foules et du trafic routier

Nous nous intéressons à présent à un autre domaine d'application de la mécanique des fluides qui est celui de la modélisation des foules et du trafic routier. Comme pour les milieux granulaires, les modèles macroscopiques pour les assemblées de piétons ou de voitures ont pour but de reproduire la dynamique globale issue des interactions microscopiques entre les agents, piétons ou automobilistes. Nous nous plaçons dans le cadre d'un trafic piétonnier ou automobile normal, hors de toute situation de panique, et nous intéressons comme dans les sections précédentes aux phénomènes de congestion.

Plus précisément nous souhaitons reproduire l'apparition et la persistance d'embouteillage dans des situations normales sans engorgement. Concrètement, on observe ce type de ralentissements sur des routes où un accident a lieu sur la voie d'en face, l'embouteillage persiste alors tant qu'il subsiste des traces de l'accident.

Du point de vue numérique, l'objectif est mettre en place un schéma numérique basé sur l'intuition physique de la prise en compte de la congestion : un agent va essentiellement voir la densité de personnes devant lui, dans son champ de vision. Ce schéma doit alors être capable de reproduire de façon robuste ces phénomènes de persistance d'embouteillage. Enfin sur le plan théorique, nous voulons identifier sur des modèles aussi "simples" que possible, un cadre de solutions physiquement pertinentes pour le mouvement collectif qui reproduisent les phénomènes de congestion observés en pratique.

Ce travail a été initié dans le cadre du projet CEMRACS 2015 "Crowd Motion" proposé par S. FAURE et B. MAURY auquel j'ai participé ainsi que M. FABRE et M. LAURIÈRE. Il a donné lieu à un proceeding :

Non classical solution of a conservation law arising in vehicular traffic or crowd modelling.  
M. FABRE, S. FAURE, M. LAURIÈRE, B. MAURY, C. PERRIN.

Nous présentons dans un premier temps les approches microscopiques et macroscopiques classiques dans la modélisation des foules et du trafic routier.

## 5.1 Introduction générale

Du point de vue expérimental il peut être très compliqué, bien plus a priori que pour les milieux granulaires, de faire des expériences à l'échelle réelle du fait du très grand nombre de personnes à mobiliser mais aussi du fait du comportement des agents qui est naturellement modifié dans le cadre d'une expérience. Il est alors crucial de pouvoir établir des modèles mathématiques qu'on pourra ensuite implémenter sur ordinateur afin d'optimiser les structures, de fluidifier le trafic et bien sûr de prévoir d'éventuels risques. Du point de vue de la modélisation, l'enjeu par rapport aux sections précédentes est de prendre en compte, au-delà des effets mécaniques, des effets psychologiques qui, on l'imagine, jouent un rôle crucial dans la dynamique globale. La contrainte de congestion peut alors être d'origine mécanique (taille finie des voitures et des personnes) ou sociale (distance de sécurité entre les voitures, distance de confort d'un piéton par rapport à ses voisins, etc.)

Si nous avons décrit dans les sections précédentes uniquement des modèles macroscopiques pour les fluides, nous allons dans cette section aborder aussi des approches microscopiques pour le mouvement de foule et le trafic routier. La description microscopique nous permettra en effet d'introduire des caractéristiques psychologiques précises du comportement individuel des agents et il s'agira ensuite d'exprimer ces caractéristiques au niveau macroscopique afin d'en comprendre les effets globaux sur la dynamique de la foule ou du trafic automobile.

L'étude du trafic routier est un sujet relativement ancien puisque les premiers travaux sur le sujet remontent aux travaux de GREENSHIELD [90] en 1935. Les premiers modèles mathématiques pour le trafic routier apparaissent ensuite dans les années 1950 avec CHANDLER, HERMAN, MONTROLL [47] pour une approche microscopique, et LIDTHILL, WHITHAM [129], RICHARDS [161] pour une approche continue. Depuis lors, la modélisation des phénomènes collectifs n'a cessé de nourrir les études mathématiques, tant théoriques que numériques, surtout ces vingt dernières années en modélisation des foules depuis les travaux de HUGHES [106] et HELBING [98].

Nous tachons dans les paragraphes qui suivent de présenter succinctement le cadre mathématique général des modèles microscopiques et macroscopiques dans notre optique de modélisation des phénomènes de congestion et de la prise en compte d'aspects psychologiques simples. Pour une présentation plus complète et d'autres approches (notamment cinétique et granulaire) nous renvoyons le lecteur vers l'article de BELLOMO et DOGBE [11] et les références s'y trouvant.

**Point de vue général sur les approches microscopiques.** Du point de vue microscopique, la description d'une assemblée d'agents, foule de piétons ou file de voitures, consiste à suivre individuellement les agents dont la trajectoire, et éventuellement la vitesse, est déterminée par ses interactions avec les autres agents. Ceci est généralement modélisé au moyen d'un système d'équations différentielles couplées, les modèles correspondant sont appelés modèles *modèles Individus Centrés*.

On distingue parmi les modèles ceux d'ordre 1 et ceux d'ordre 2 en temps selon la prise en compte ou non de l'inertie. Dans les modèles d'ordre 1, où l'inertie est négligée, les agents atteignent instantanément la vitesse souhaitée. Du point de vue mathématique, le système consiste en  $N$  équations différentielles où la vitesse de chaque individu  $v_i$  est une fonction donnée de la distance aux autres agents qu'il perçoit. En dimension 1, pour des agents dont les positions respectives sont notées  $x_N < x_{N-1} < \dots < x_1$ , l'agent  $i$  est influencé par tous ceux qui le précèdent ( $i - 1, \dots, 1$ ) et le système différentiel s'écrit

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, \dots, x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Ce système peut se généraliser en dimension deux en considérant l'interaction d'un agent avec les agents entrant dans son champ de vision et prendre en compte des effets d'orientation.

Dans les modèles d'ordre 2 la vitesse des individus n'est plus prescrite mais devient une inconnue du système qui satisfait une équation différentielle supplémentaire

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_i, v_1, \dots, v_i) \end{cases}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Le système partage alors la même structure que les systèmes mécaniques régis par les principes de la mécanique newtonienne, l'accélération (ou plutôt la quantité de mouvement) est donnée comme la somme des forces d'interactions. Il est important toutefois de noter qu'il n'y a pas de principe de réciprocité : si l'agent  $i$  perçoit et modifie sa dynamique en fonction de celle de l'agent  $i - 1$ , ce dernier n'est pour sa part pas influencé par l'agent  $i$  puisqu'il n'est pas dans son champ de perception.

D'autres approches microscopiques non basées sur des systèmes différentiels peuvent être envisagées, c'est le cas des modèles de type *Automates Cellulaires* [43].

Mentionnons également que dans des situations de très forte densité de personnes, il est également important de se donner une dynamique des contacts entre les individus en faisant l'analogie entre mouvement de foule et écoulement d'un milieu granulaire. C'est l'approche poursuivie par MAURY et VENEL dans [138, 139]. FAURE et MAURY [73] ont ensuite montré que ces modèles reproduisaient des phénomènes *Faster is Slower* et des ondes *Stop-and-Go* observés en pratique.

Nous n'aborderons dans notre étude que des modèles unidimensionnel d'ordre 1 en temps pour lesquels la vitesse d'un agent ne dépend que de la distance à l'agent qui le

précède

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_{i-1} - x_i), \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}. \quad (1.67)$$

La vitesse est alors choisie comme une fonction croissante de la distance qui vaut 0 pour des distances inférieures à une distance de sécurité  $\delta^*$  (voir Figure 1.7) ce qui permet de garantir le non-chevauchement des agents.

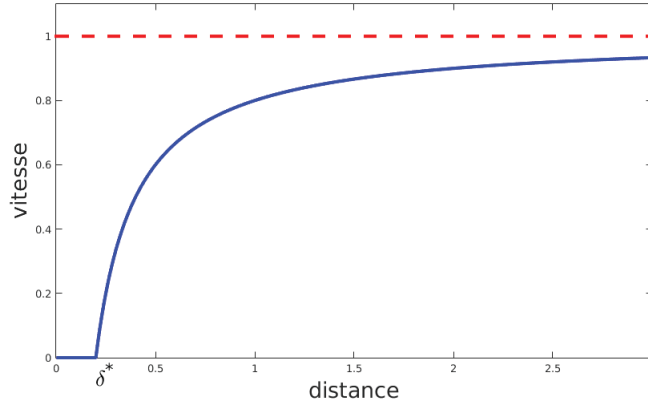


FIGURE 1.7 – Vitesse microscopique  $v(\delta) = \left(1 - \frac{\delta^*}{\delta}\right)_+$ .

**Point de vue général sur les approches macroscopiques.** Dans une approche macroscopique, une foule ou une file de voitures est assimilée à un milieu continu dont l'évolution est décrite au moyen des variables moyennées de densité  $\rho$ , vitesse moyenne  $u$ , etc., que nous avons introduites au début de ce chapitre. L'équation de base est alors l'équation de conservation de masse

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \quad (1.68)$$

Comme à l'échelle microscopique, on distingue les modèles d'ordre 1 et d'ordre 2 en temps. Les équations de Navier-Stokes (ou plutôt d'Euler car les effets de viscosité peuvent être négligés) avec prise en compte de la congestion introduites à la Section 3 sont des exemples de modèles macroscopiques d'ordre 2. En y incluant un terme de relaxation en vitesse on obtient les modèles de Payne-Whitham [148, 178].

DAGANZO remet en cause l'utilisation de ces modèles dans son article [55]. Ses critiques (voir aussi [99]) concernent en particulier le fait que les modèles de Payne-Whitham peuvent faire apparaître des vitesses négatives. Plus généralement dans ces modèles on perd l'anisotropie que nous avons mise en évidence sur les modèles microscopiques avec le principe de non-réciprocité (une particule est influencée par les particules dans son champ de vision qui la précèdent, mais pas par celles se situant derrière elle). En lien avec cette question, on observe également que la vitesse de certaines caractéristiques dans les modèles de

Payne-Whitham est plus grande que la vitesse macroscopique des véhicules ce qui n'est pas satisfaisant d'un point de vue physique car cela signifie qu'une partie de l'information se déplace plus vite que les voitures elles-mêmes...

S'appuyant sur ces critiques AW et RASCLE introduisent dans [8] (ainsi que ZHANG [182]) un nouveau modèle macroscopique d'ordre 2 pour le trafic routier basé l'introduction d'une nouvelle vitesse  $w$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho w) + \partial_x(\rho u w) = 0 \end{cases} \quad (1.69)$$

où

$$w = u + P(\rho)$$

et  $P$  est un facteur d'anticipation. C'est une fonction croissante de la densité ce qui assure le fait que la vitesse  $u$ , à laquelle la densité est transportée, diminue quand la densité augmente. Par rapport aux modèles de Payne-Whitham ce système présente maintenant des vitesses caractéristiques plus petites que la vitesse macroscopique des véhicules, ce qui répond à l'une des critiques de DAGANZO.

BERTHELIN et al [15] établissent dans ce cadre le lien rigoureux entre modèle de congestion soft (la fonction  $P$  est alors singulière au voisinage d'une densité maximale) et modèle de congestion hard dans le même esprit que ce que nous avons présenté à la Section 3.

En ce qui concerne, les modèles macroscopiques d'ordre 1, de la même façon qu'au niveau microscopique nous avons prescrit la vitesse de chaque agent comme une fonction de la positions des agents voisins, nous ferons le système formé par l'équation (1.68) en exprimant la vitesse  $u$  comme une fonction de la densité, ce sont les modèles introduits par LIDTHILL, WHITHAM [129] et RICHARDS [161] appelés *modèles LWR*

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u(\rho)) = 0$$

Dans la suite, nous supposons que la vitesse macroscopique est le produit d'une vitesse désirée  $U_{\text{des}}$  (objectif commun, sortie, etc.) et d'une fonction de saturation  $\beta(\rho)$  due à la congestion

$$u = U_{\text{des}} \beta(\rho) \quad (1.70)$$

Nous considérerons dans notre étude que  $U_{\text{des}}$  est une constante. La fonction  $\beta$  doit quant à elle être prescrite à partir du *diagramme fondamental* (voir [55], [166]) qui représente le flux  $f(\rho)$  en fonction de la densité  $\rho$ . On considère usuellement que  $\beta$  est une fonction décroissante sur  $[0, 1]$ , les lois de Greenshield  $\beta(\rho) = 1 - \rho$ , Pipes-Munjal  $\beta(\rho) = 1 - \rho^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  ou les lois exponentielles  $\beta(\rho) = \exp(-\alpha\rho^2)$  sont des exemples utilisés en pratique. Dans notre étude nous nous concentrerons sur un modèle LWR avec une loi de Greenshield dont le diagramme fondamental est représenté sur la Figure 1.8.

D'autres modèles macroscopiques d'ordre 1 peuvent être considérés avec par exemple une vitesse macroscopique non-locale, c'est le cas étudié par exemple BLANDIN et GOATIN dans [19] qui permet de restaurer l'anisotropie et la dépendance de la vitesse en fonction

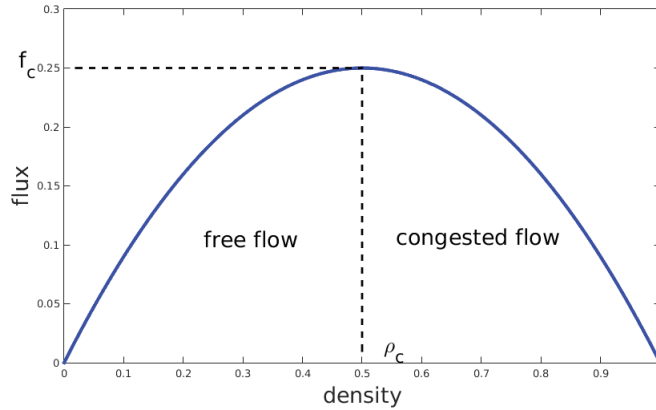


FIGURE 1.8 – Diagramme fondamental de Greenshield  $\rho \mapsto f(\rho) = \rho(1-\rho)$ . Ce diagramme fait apparaître deux régimes de trafic : le régime libre pour  $\rho < \rho_c$  et le régime congestionné pour  $\rho \geq \rho_c$ . La valeur maximale du flux  $f_c$  s'appelle la capacité.

du trafic en aval et pas en amont. Un noyau d'interaction est aussi considéré ce qui permet de pondérer l'influence du trafic à longue distance.

Dans le cadre du mouvement de foules, les modèles les plus populaires sont basés sur les travaux de HUGHES [106] où la vitesse  $U_{\text{des}}$  est déduite à partir d'un potentiel  $\phi$

$$U_{\text{des}} = -\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

et  $\phi$  est solution d'une équation eikonale

$$|\nabla\phi| = c \quad \text{dans } \Omega, \quad \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma^*.$$

Ceci exprime l'idée de l'objectif commun  $\Gamma^*$  à atteindre tout en minimisant un coût  $c$  qui peut éventuellement dépendre de  $\rho$  pour prendre en compte le fait qu'on souhaite éviter les zones de congestion. Pour ces modèles on montre en dimension un des résultats d'existence d'une unique solution faible entropique dans [62] (l'équation eikonale est remplacée par une équation elliptique) et dans [3].

**Remarque :** On peut faire le lien entre ces modèles de Hughes et les modèles de Keller-Segel utilisés en migration cellulaire étudiés sur le plan théorique par exemple par DALIBARD et PERTHAME dans [152].

**Remarque :** Plus généralement BEN BELGACEM et JABIN donnent dans [12] des résultats de compacité (en dimension supérieure à un) pour une large classe d'équations de continuité non-linéaires ce qui permet d'établir un cadre général d'existence de solutions faibles entropiques pour des modèles de type trafic routier ou mouvement de foule.

**Lien entre descriptions microscopiques et descriptions macroscopiques.** La question du lien rigoureux entre modèles microscopiques et modèles macroscopiques dans le cadre du mouvement de foule ou du trafic routier représente un enjeu important. D’abord sur le plan de la modélisation et de la théorie puisque cela permettrait de mieux comprendre et de justifier les modèles macroscopiques utilisés dans la pratique qui ont parfois été introduits de manière *ad hoc*. Et réciproquement, par une approche descendante du continu vers le discret, cela permettrait en observant à l’échelle macroscopique les phénomènes globaux comme l’apparition de zones de congestion et leur propagation, de préciser et de calibrer les lois de comportements individuels à l’échelle microscopique qui sont bien souvent mal connues.

Sur le plan numérique ce lien est aussi important car l’approche particulière microscopique fournit une discrétisation éventuellement utilisable pour la simulation du modèle continu macroscopique.

La plupart des résultats mathématiques montrant le passage à la limite des modèles microscopiques vers les modèles macroscopiques sont relativement récents. Mentionnons en particulier, dans le cas des modèles d’ordre 2 en temps, le résultat de AW et al. qui justifient dans [7] à partir d’un modèle FTL d’ordre 2 le modèle de Aw-Rascle (1.69) qui avait auparavant été introduit dans [8] de manière *ad hoc* pour répondre à certaines déficiences des modèles macroscopiques d’ordre 2 en temps.

Dans le cadre des modèles d’ordre 1 en temps, le problème de la convergence de modèles microscopiques (1.67) vers les modèles LWR

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho \beta(\rho)) = 0 \tag{1.71}$$

a tout d’abord été abordé par COLOMBO et ROSSI [51] qui montrent que, sous l’hypothèse de la convergence presque partout de la densité discrète

$$\rho_N = \sum_i \frac{\delta_N^*}{x_i - x_{i+1}}$$

alors la limite  $\rho$  est bien une solution faible de (1.71). DI FRANCESCO et ROSINI montrent rigoureusement ce passage à la limite dans [63]. Ils ont besoin pour cela de travailler dans le cadre de la topologie de Wasserstein et montrent sous des conditions adéquates sur la vitesse des estimations assurant la compacité des solutions microscopiques. De plus, DI FRANCESCO et ROSINI prouvent que les solutions microscopiques convergent vers l’unique solution entropique de la loi de conservation scalaire (1.71).

D’autres résultats ont été depuis établis dans des cadres plus complexes, en prenant par exemple en compte des effets non-locaux comme dans [89].

**Condition d’entropie pour les modèles macroscopiques.** Nous avons précédemment cité des résultats mathématiques d’existence de solutions faibles entropiques. Nous allons à présent préciser la notion de solution entropique et son sens dans le cadre du trafic routier ou du mouvement de foule. Considérons la loi de conservation scalaire

$$\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0.$$



On appelle solution faible entropique de cette équation sur  $\mathbb{R}$ , une solution faible  $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  telle que pour toute fonction convexe  $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  appelée entropie, et pour tout flux d'entropie associé  $g$  tel que  $g'(s) = \eta'(s)f'(s)$  presque-partout, on ait

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (\eta(\rho)\partial_t \zeta + g(\rho)\partial_x \zeta) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(\rho^0)\zeta(0) \, dx \geq 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$$

Afin de caractériser ces solutions entropiques et en particulier de déterminer les discontinuités "admissibles"

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_- & \text{si } x < \sigma t \\ \rho_+ & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

où  $\sigma$  est la vitesse de déplacement de la discontinuité, on peut reformuler l'inégalité d'entropie pour les couples entropie/flux d'entropie (voir [164])

$$\begin{aligned} \eta_k(\rho) &= |\rho - k|, & k &\in [0, 1] \\ g_k(\rho) &= \operatorname{sgn}(\rho - k)(f(\rho) - f(k)) \end{aligned}$$

Une discontinuité  $(\rho_-, \rho_+)$  est alors admissible si et seulement si pour tout  $a \in [0, 1]$  (en considérant  $k = a\rho_- + (1 - a)\rho_+$ )

$$[af(\rho_-) + (1 - a)f(\rho_+) - f(a\rho_- + (1 - a)\rho_+)] \operatorname{sgn}(\rho_+ - \rho_-) \leq 0.$$

Une conséquence de cette inégalité dans le cas où  $f$  est continûment dérivable est la condition de Lax

$$f'(\rho_+) \leq \sigma \leq f'(\rho_-).$$

Si  $f$  est strictement concave, les seuls chocs admissibles sont alors les chocs tels que  $\rho_- < \rho_+$ . C'est le cas par exemple du flux de Greenshield  $f(\rho) = \rho(1 - \rho)$  représenté sur la Figure 1.8 que nous étudierons par la suite. Nous renvoyons le lecteur également à l'article de HERBIN et LECLERCQ [102] qui traite de flux affines par morceaux donc non continûment dérivables et non strictement concaves. Dans [5], ANSORGE affirme la pertinence d'une telle condition d'entropie puisqu'elle correspond selon lui au comportement réel des automobilistes sur la route. Il s'appuie en particulier sur l'exemple d'automobilistes stoppés devant un feu qui vient de passer au vert. La condition d'entropie impose alors aux voitures de démarrer et au bouchon de se dissoudre. Dans la situation "inverse", la condition d'entropie va exprimer le fait que les automobiliste ne s'arrêtent pas en amont d'un embouteillage mais entrent dans le bouchon ce qui augmente la densité et propage la zone de congestion dans la direction opposée au trafic.

ANSORGE interprète ainsi la condition d'entropie comme ce qu'il appelle le *driver's ride impulse* et propose d'ajouter cette condition au système LWR.

Dans notre travail nous nous sommes attachés à sortir justement de ce cadre des solutions faibles entropiques afin de reproduire d'autres types de solutions, de type chocs non-entropiques. Ces solutions sont également pertinentes du point de vue physique puisque l'on observe dans la pratique des embouteillages qui ne se dissolvent pas.



## 5.2 Obtention de bouchons stationnaires en trafic routier

Nous nous concentrons à présent sur la situation physique suivante : un accident se produit sur une route, il génère un embouteillage sur cette voie mais aussi sur la voie d'en face. Dans la pratique on observe la persistance de ce bouchon sur la voie d'en face jusqu'à ce que toute trace de l'accident ait disparu. Comme nous l'avons dit précédemment et comme nous l'illustrons dans [71] ce type de phénomène ne correspond pas aux solutions classiques entropiques des modèles macroscopiques LWR (de type Greenshield)

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho \beta(\rho)) = 0, \quad \beta(\rho) = 1 - \rho. \quad (1.72)$$

Les travaux récents de COLOMBO, ROSSI [51] et DI FRANCESCO, ROSINI [63] montrent le lien du modèle macroscopique LWR (1.72) avec son pendant microscopique de type FTL. Pour le voir formellement, on introduit  $N$  le nombre d'automobilistes au niveau discret,  $\delta_N^*$  la taille des voitures qui est telle que  $\delta_N^* N = M$  où  $M = \int \rho dx$  est la masse totale du système.

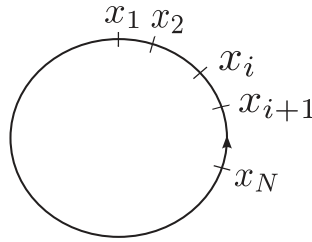


FIGURE 1.9 – Situation microscopique avec  $N$  voitures roulant sur une route circulaire

On utilise alors l'opérateur de discrétisation (voir [51] adapté au cas d'une route circulaire)

$$E_N : \rho \mapsto \begin{cases} x_1 = 2\pi \\ x_{i+1} = \max\{x < x_i, \int_x^{x_i} \rho(x) dx = \delta_N^*\} \end{cases}$$

Le modèle discret associé à (1.72) est alors le modèle FTL

$$\frac{dx_{i+1}}{dt} = 1 - \frac{\delta_N^*}{x_i - x_{i+1}}. \quad (1.73)$$

La démarche que nous avons mise en œuvre dans [71], présentée au Chapitre 7, consiste à prendre en compte directement le comportement des automobilistes au voisinage de l'accident au niveau du modèle discret FTL (1.73). Plus précisément, nous considérons que dans une zone au voisinage de l'accident les automobilistes regardent l'accident sur la voie d'en face, ne s'arrêtent pas complètement mais "oublent" la voiture qui les précède et gèlent leur vitesse avant de repartir une fois l'accident dépassé. Les simulations microscopiques (voir Figure 1.10) qui incluent cette zone de gel montrent la persistance d'embouteillages

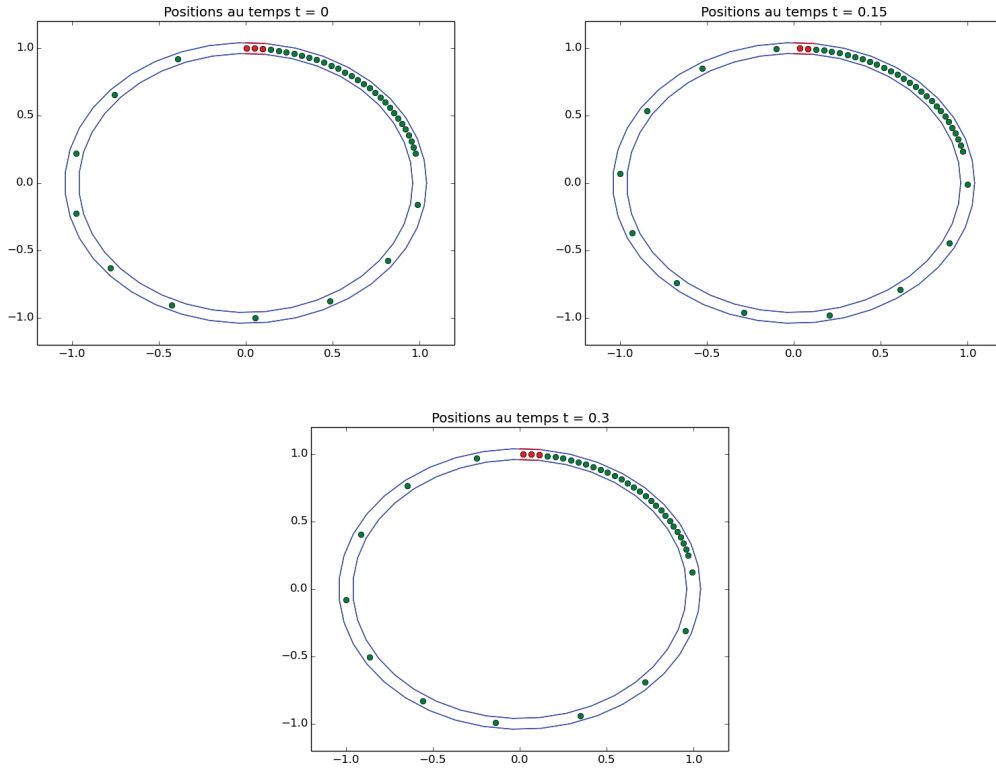


FIGURE 1.10 – Simulation du modèle FTL avec prise en compte d’une zone de gel de la vitesse à hauteur d’un accident (en haut en rouge). Les voitures dont la vitesse est gelée apparaissent en rouge. On observe la stabilité du bouchon en amont de l’accident pour des instants successifs.

en amont de l’accident comme observé en pratique.

Du point de vue mathématique, la taille de la zone de gel étant petite et ajustée dans notre cas sur la taille  $\delta_N^*$  des voitures, on s’attend à la convergence de la densité discrète

$$\rho_N = \sum_i \frac{\delta_N^*}{x_i - x_{i+1}} \mathbf{1}_{[x_{i+1}, x_i]}$$

vers une solution faible du modèle continu (1.72) qui correspond à un choc non-entropique. Nous montrons dans [71] des simulations allant dans ce sens.

L’enjeu est alors de capturer numériquement ces solutions non-entropiques directement à partir du modèle macroscopique. Nous proposons d’abord une discrétisation spécifique du terme de congestion  $\beta(\rho)$  susceptible de rendre compte de la propagation de l’information dans le système. Concrètement, on exprime au niveau de la discrétisation spatiale du flux  $\rho\beta(\rho)$  la propagation dans le sens de l’écoulement (upwind) du transport de masse  $\rho$

et la propagation en sens inverse (downwind) de l'information de congestion  $\beta(\rho)$ . Cette discrétisation aval de  $\beta(\rho)$  exprime le fait que les automobilistes adaptent leur vitesse par rapport à ce qui se passe devant eux dans une situation normale sans accident. Ceci nous conduit à considérer le schéma explicite en temps décentré amont/aval en espace

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} (\rho_i^n \beta(\rho_{i+1}^n) - \rho_{i-1}^n \beta(\rho_i^n)) = 0.$$

Nous montrons que ce schéma est alors consistant avec la condition d'entropie. Afin de sélectionner des bouchons stables au niveau macroscopique, nous prenons en compte sur une cellule qui correspond à la position de l'accident sur la voie d'en face, le fait que l'automobiliste ne voit plus la congestion du trafic devant lui et conserve sa vitesse. Sur cette cellule le flux sera entièrement décentré amont.

Nous reproduisons numériquement des bouchons stables dont les profils correspondent bien à ceux trouvés dans les simulations microscopiques. Nous montrons de plus que ce schéma capture de façon robuste ces bouchons stables en considérant différents types de perturbations.

Première partie  
Phénomènes de congestion



---

## Résumé

Nous nous proposons dans cette partie d'établir et d'illustrer, dans le cadre des équations de Navier-Stokes à viscosités constantes, le lien rigoureux entre modèles de congestion douce et modèles de congestion dure, avec de possibles effets d'hétérogénéité dans la contrainte de congestion.

Plus précisément nous montrons la convergence quand  $\varepsilon$  tend vers 0 des solutions du modèle *soft*, de type Navier-Stokes compressible

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) + \rho^* \nabla \pi_\varepsilon(\rho_\varepsilon/\rho^*) - \operatorname{div} \mathbb{S} = 0 \\ 0 \leq \rho_\varepsilon < \rho^* \quad \text{p.p.} \end{cases}$$

avec pression singulière

$$\pi_\varepsilon(\rho/\rho^*) = \begin{cases} \varepsilon \frac{(\rho/\rho^*)^\alpha}{(1 - \rho/\rho^*)^\beta} & \text{si } \rho/\rho^* < 1 \\ +\infty & \text{si } \rho/\rho^* \geq 1 \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta > 1$$

vers les solutions du modèle *hard* avec contrainte d'exclusion

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) + \rho^* \nabla \Pi - \operatorname{div} \mathbb{S} = 0 \\ 0 \leq \rho \leq \rho^* \\ (\rho^* - \rho) \Pi = 0, \quad \Pi \geq 0 \end{cases}$$

qui peut être vu comme un problème à frontière libre entre des phases non-congestionnées  $\{\rho < \rho^*\}$  et des phases congestionnées  $\{\rho = \rho^*\}$ .

D'un point de vue la modélisation mathématique des phénomènes de congestion, l'objectif est de comprendre l'influence des termes singuliers dans les équations du système "soft" et leur rôle de *barrière* sur la densité. Nous souhaitons aussi comprendre l'influence d'une possible hétérogénéité dans la contrainte maximale  $\rho^*(x)$ .

Du point de vue de l'analyse mathématique tant théorique que numérique, le problème limite de congestion hard est difficile à traiter directement, l'interface entre phases congestionnées et phases non-congestionnées étant a priori irrégulière. Il n'est par exemple pas exclu que des zones non-congestionnées apparaissent au sein d'une zone initialement congestionnée. La première étude mathématique du modèle de congestion hard est due à LIONS et MASMOUDI [131]. Ils considèrent pour cela un système compressible où la contrainte maximale de congestion (supposée constante égale à 1 dans leur étude) est relaxée au travers d'une pression de type puissance  $\pi_n = a\rho^{\gamma_n}$ ,  $a$  étant une constante positive fixée. En faisant tendre l'exposant adiabatique  $\gamma_n$  vers  $+\infty$  ils obtiennent ainsi des solutions faibles du système de congestion hard. Cependant, il peut être potentiellement problématique du

---

point de vue physique ou du point de vue numérique d'autoriser la contrainte de congestion  $\rho \leq \rho^*$  à être violée. Ceci motive donc une étude rigoureuse du lien mathématique des modèles de congestion dure avec des modèles de congestion douce qui empêchent les zones de congestion de se former.

Dans les deux premiers chapitres nous nous intéressons aux aspects théoriques du passage à la limite des modèles soft vers les modèles hard. En particulier nous souhaitons montrer que les termes singuliers au travers des estimations d'énergie assurent la contrainte de congestion "stricte",  $\rho < \rho^*$  presque partout. Nous souhaitons également justifier rigoureusement l'apparition de la contrainte d'exclusion  $(\rho^* - \rho)\Pi = 0$  qui est introduite de manière *ad hoc* dans les modèles de congestion dure.

De manière générale, la principale difficulté réside dans l'obtention des estimations uniformes par rapport au paramètre  $\varepsilon$  afin obtenir la compacité des solutions  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  du modèle de congestion douce. En particulier nous montrons des estimations d'énergie du type

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2}{2} + \rho_\varepsilon e_\varepsilon(\rho_\varepsilon/\rho^*) \right) dx + \mathcal{D}_\varepsilon(t) = 0$$

qui donnent un contrôle a priori sur l'énergie interne  $e_\varepsilon$  telle que  $e'_\varepsilon(s) = \pi_\varepsilon(s)/s^2$  mais qui ne suffisent pas pour contrôler la pression elle-même uniformément par rapport au paramètre  $\varepsilon$ . Il faut alors utiliser des outils mathématiques plus poussés afin de garantir la compacité du terme de pression. Nous introduisons pour ce faire l'opérateur de Bogovskii qui inverse en quelque sorte l'opérateur de divergence. Une fois les estimations nécessaires obtenues nous pouvons passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la pression convergeant seulement au sens des mesures positives vers une limite  $\Pi$ . À la limite nous montrons grâce à l'équation des moments que la pression  $\Pi$  est en fait un peu plus régulière, ce qui va nous permettre de donner un sens au produit  $\rho \Pi$  et à la contrainte d'exclusion

$$(\rho^* - \rho)\Pi = 0$$

obtenue grâce au contrôle de la pression  $\pi_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$ .

Dans le premier chapitre nous nous attachons à justifier les points précédents dans le cadre unidimensionnel avec densité maximale constante égale à 1. Ces simplifications nous permettent de nous placer dans un cadre de solutions fortes régulières pour le problème de congestion soft. L'existence, la régularité des solutions et la contrainte de congestion sont prouvées au moyen d'un passage en coordonnées lagrangiennes.

Dans le second chapitre nous étendons ce résultat au cadre tridimensionnel et hétérogène où  $\rho^*$  dépend de la variable d'espace  $x$ . L'existence de solutions fortes globales en temps pour les équations de Navier-Stokes compressible en dimension supérieure à un restant un problème ouvert à l'heure actuelle, nous nous plaçons dans le cadre des solutions faibles construites par P. L. LIONS [130] et E. FEIREISL [74]. Dans ce cadre l'existence de solutions faible pour le modèle avec loi de pression singulière est non triviale. Pour le montrer nous introduisons un problème approché où la pression singulière a été tronquée.

---

Nous passons ensuite à la limite par rapport au paramètre de troncature afin d'obtenir une solution faible globale du système de congestion douce. Comme nous l'avons rappelé cela nécessite l'utilisation de l'inégalité d'énergie et de l'estimation en pression obtenue via l'opérateur de Bogovskii. Mais cela ne garantit malheureusement qu'une convergence au sens des mesures sur la pression. Afin d'assurer une convergence au sens  $L^1$ , nous montrons une propriété supplémentaire d'équi-intégrabilité sur la pression. Nous suivons dans cette démarche l'article de FEIREISL *et al.* [79].

La question de l'hétérogénéité est l'autre point crucial de cette seconde section. Elle intervient dès le début de notre étude car nous devons montrer la compatibilité du système de congestion douce tronqué en pression avec celui de LIONS et FEIREISL. L'existence des solutions faibles pour Navier-Stokes compressible se basant sur les estimations liées à l'énergie il est indispensable que la loi de pression soit compatible avec celle-ci. Nous montrons, que les lois de pressions hétérogènes du type

$$\nabla \left( \frac{1}{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*}} \right)^\gamma$$

proposées dans [58] ou [14] (pour des systèmes de type Euler), ne permettent pas de dériver l'inégalité d'énergie et donc ne sont admissibles pour notre étude. En revenant à la relation entre énergie interne et pression, nous montrons qu'une pression hétérogène adéquate est, comme écrit introduction, du type

$$\rho^* \nabla \left( \frac{\left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)^\alpha}{\left( 1 - \frac{\rho}{\rho^*} \right)^\beta} \right).$$

Enfin dans le dernier chapitre de cette partie, nous présentons nos travaux en cours concernant la simulation numérique des modèles de congestion douce et l'illustration de la limite singulière vers les modèles de congestion dure.

Les difficultés numériques de discrétisation des équations sont essentiellement liées à la singularité du terme de pression. Par analogie avec les limites faible nombre de Mach et en se basant sur les travaux de DEGOND, HUA et NAVORET [58], nous proposons des schémas de discrétisation traitant spécifiquement le terme de pression singulière. On assure par cette discrétisation la contrainte de congestion  $\rho_\varepsilon < \rho^*$ . Nos premières simulations réalisées en dimension un et pour une contrainte maximale constante  $\rho^* = 1$ , confirment que la contrainte de congestion est bien satisfaite et que dans les zones où la densité est proche de la congestion, le comportement de la solution numérique est proche de l'incompressible.



---

# Chapitre 2

## Le cas homogène en dimension un

Ce chapitre concerne le lien entre un modèle de congestion soft de type Navier-Stokes compressible avec contrainte de densité maximale homogène  $\rho^* = 1$  et un modèle de congestion hard de type compressible/incompressible.

Ce chapitre est issu d'une note aux Comptes Rendus écrite en collaboration avec Didier BRESCH et Ewelina ZATORSKA

Singular limit of a Navier-Stokes system leading to a free/congested zones two-phase model.

D. BRESCH, C. PERRIN, E. ZATORSKA.

*C. R. Acad. Sci. Paris*, 352 :8, p. 685–690 (2014).

### 1 Introduction

Macroscopic approaches for modelling the motion of crowd have been recently proposed in various papers where the swarm is identified through a density  $\rho = \rho(t, x)$ , see for instance an interesting review paper by B. MAURY [136]. The density is transported through a vector field  $u(t, x)$  which itself solves an equation expressing the variation of velocity for each individual under some factors. The following system is obtained

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = F(\rho, u), \end{cases} \quad (2.1)$$

where  $F$  is an appropriate differential operator that has to be defined depending on the applications; for instance, repulsive/attractive terms may be included to model congestion.

For modelling the traffic jams, some systems that mix free/congested regions have been also proposed, namely

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \pi = 0 \\ 0 \leq \rho \leq \rho^*, \quad (\rho - \rho^*)\pi = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

for a given function  $\rho^*$ . The interested reader is referred to paper by BERTHELIN [13] in which the existence of solutions to system (2.2) was proven for  $\rho^* = \text{const.}$  using the

convergence of some special solutions, called the sticky blocks. For various extensions of this work (when  $\rho^*$  depends on the velocity or on the number of lanes in the portion of the road) we refer to a recent work of BERTHELIN and BROIZAT [14] and the references therein.

Formal justification of system (2.2) from (2.1) with  $F(\rho, u)$  being a gradient of a specific singular pressure term has been given by P. DEGOND *et al.* in [58] (see also the proposed numerical scheme for  $\rho^* = 1$ ). Note that a more complex model than (2.2) has been also formally derived by these authors for collective motion (namely with the extra constraint on the velocity  $|u| = 1$ ).

The main objective of this note is to justify mathematically the viscous version of (2.2) as a limit of the isentropic compressible Navier-Stokes equations. This limit will be obtained by introducing a small parameter  $\varepsilon$  in front of a singular pressure and by letting  $\varepsilon \rightarrow 0$ . The important feature of such system is that it preserves the constraint  $0 \leq \rho^\varepsilon \leq 1$  for any  $\varepsilon > 0$  fixed.

## 2 Modelling

We consider the system of compressible barotropic Navier-Stokes equations

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) - 2\operatorname{div}(\mu(\rho^\varepsilon)D(u^\varepsilon)) \\ \quad - \nabla(\lambda(\rho^\varepsilon)\operatorname{div}(u^\varepsilon)) + \nabla p_1(\rho^\varepsilon) + \nabla p_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

in a fixed bounded domain  $\Omega$ .

In the above system  $p_1$  is the barotropic pressure

$$p_1(\rho^\varepsilon) = a(\rho^\varepsilon)^\alpha \quad a \geq 0, \quad \alpha > 1 \quad (2.4)$$

while  $p_2^\varepsilon$  is the singular pressure in the spirit of [45, 74]

$$p_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon) = \varepsilon(\rho^\varepsilon)^\gamma P(\rho^\varepsilon), \quad \gamma > 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.5)$$

$P(\cdot) \in \mathcal{C}^1(0, 1)$  is strictly increasing function, such that

$$\lim_{\rho^\varepsilon \rightarrow \rho_*^-} P(\rho^\varepsilon) = +\infty \quad (2.6)$$

and  $\rho_* = 1$  stands for the upper threshold of the density.

We supplement system (2.3) with the following initial conditions

$$\rho^\varepsilon(x)|_{t=0} = \rho_0^\varepsilon(x), \quad u^\varepsilon(0)|_{t=0} = u_0^\varepsilon(x) \quad x \in \Omega \quad (2.7)$$

where

$$0 \leq \rho_0^\varepsilon \leq 1, \quad \int_{\Omega} \rho_0^\varepsilon = M \quad (2.8)$$

and the Dirichlet boundary conditions

$$u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0.$$

Our concern is to investigate the limit when  $\varepsilon$  tends to zero and justify that  $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon, p^\varepsilon(\rho^\varepsilon))$  tends (in some sense) to  $(\rho, u, \pi)$  which satisfies the following free boundary problem

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) \\ - 2\operatorname{div}(\mu(\rho)D(u)) - \nabla(\lambda(\rho)\operatorname{div}(u)) + \nabla p_1(\rho) + \nabla \pi = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

with

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1, \\ \pi \geq 0, \quad (1 - \rho)\pi = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Such free boundary system has been derived by LIONS and MASMOUDI [131] where they considered a pressure term  $p_\gamma(\rho) = a\rho^\gamma$  with  $\gamma$  tending to  $+\infty$ . The same limit has been studied in [125] with viscosities depending on the density when some surface tension is included. However, such form of pressure does not guarantee the congestion constraint  $0 \leq \rho^\gamma \leq 1$  for fixed  $\gamma$ , which is a problem for numerical investigation, as mentioned in the recent paper by MAURY [136]. We will see that the pressure  $P_\varepsilon$  defined in (2.5) plays a role of a barrier and implies that the constraint  $0 \leq \rho^\varepsilon \leq 1$  is automatically satisfied for any  $\varepsilon > 0$ . This, however, asks for a special behaviour of  $P(\cdot)$  close to 1.

An important example of such barrier used for instance in Self-Organized Hydrodynamics [57], [58] is of the form

$$p^\varepsilon(\rho^\varepsilon) = \varepsilon \left( \frac{1}{\frac{1}{\rho^\varepsilon} - 1} \right)^\gamma = \varepsilon \left( \frac{\rho^\varepsilon}{1 - \rho^\varepsilon} \right)^\gamma.$$

### 3 One-dimensional case

The aim of this section is to prove the global-in-time existence of regular solutions to system (2.3) when  $\Omega = [0, L]$  and  $\mu, \lambda$  are positive constants. We will also perform the limit passage leading to the free boundary system (2.9–2.10). More precisely we prove the following results

**Theorem 1** *Let  $\varepsilon, \mu, \lambda$  be fixed positive constants and let  $(u^0, \rho^0) \in H_0^1(0, L) \times H^1(0, L)$  with  $0 < \rho^0 < 1$ . Assume that the singular pressure satisfies*

$$P(\rho) = (1 - \rho)^{-\beta} \quad (2.11)$$

*with  $\beta, \gamma > 1$ . Then there exists a regular solution  $(u^\varepsilon, \rho^\varepsilon)$  to (2.3–2.6) such that*

$$\rho^\varepsilon \in L^\infty(0, T; H^1(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))$$

$$u^\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(0, L)) \cap L^\infty(0, T; L^2(0, L))$$

*uniformly with respect to  $\varepsilon$  and there exist constants  $c$  and  $C(\varepsilon)$  s.t.*

$$0 < c \leq \rho^\varepsilon \leq C(\varepsilon) < 1. \quad (2.12)$$

**Remark 2** *The full regularity and uniqueness of this solution for  $\varepsilon$  fixed can also be proved, see Theorem 4 below. However the proof relies on the estimates which strongly depend on  $\varepsilon$ .*

**Theorem 3** *Under assumptions of the previous theorem, there exists a subsequence already denoted  $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon, \pi^\varepsilon)$  s.t.*

$$\begin{aligned}\rho^\varepsilon &\rightarrow \rho && \text{in } \mathcal{C}([0, T] \times [0, L]), \\ u^\varepsilon &\rightarrow u && \text{in } L^2(0, T; \mathcal{C}[0, L]), \\ \pi^\varepsilon &= p_2^\varepsilon \rightharpoonup \pi && \text{in } \mathcal{M}^+((0, T) \times (0, L)),\end{aligned}$$

where  $(u, \rho, \pi)$  satisfies (2.9–2.10).

### 3.1 Existence result for the singular compressible model

As mentioned before, Theorem 1 may be obtained as a corollary of a stronger result formulated below in Theorem 4 by use of Lagrangian coordinates.

We drop the index  $\varepsilon$  when no confusion can arise and we define

$$x = \int_0^x \rho(\tau, s) ds, \quad \tau = t. \quad (2.13)$$

Using (2.13) and denoting  $\nu = 2\mu + \lambda$ , system (2.3) may be transformed into the following one

$$\begin{cases} \rho_\tau + \rho^2 u_x = 0 \\ u_\tau - \nu(\rho u_x)_x + (p_1(\rho))_x + (p_2^\varepsilon(\rho))_x = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

with the Dirichlet boundary conditions

$$u|_{x=0} = u|_{x=M} = 0$$

and the initial data

$$\rho|_{\tau=0} = \rho_0, \quad u|_{\tau=0} = u_0, \quad \text{in } [0, M], \quad (2.15)$$

such that

$$0 < \rho_0 < 1. \quad (2.16)$$

For the above system we will prove the following theorem.

**Theorem 4** *Assume that  $(u^0, \rho^0) \in H_0^1(0, M) \times H^1(0, M)$  and that (2.16) is satisfied. Then system (2.14–2.15) possesses a global unique solution  $(\rho, u)$  such that*

$$\begin{aligned}\rho &\in L^\infty(0, T; H^1(0, M)), \quad \rho_\tau \in L^2((0, T) \times (0, M)) \\ u_x &\in L^\infty(0, T; L^2(0, M)) \cap L^2(0, T; H^1(0, M)).\end{aligned} \quad (2.17)$$

Moreover there exist positive constants  $c_\rho, C_\rho$  such that

$$0 < c_\rho \leq \rho^\varepsilon \leq C_\rho(\varepsilon) < 1. \quad (2.18)$$

There exist some results about local in time solvability of system (2.3-2.8), even for three-dimensional domains [169], in case of barotropic pressure law. Note however, that in this proof the only property of pressure that matters is its monotonicity. Therefore, in order to show global in time existence it is enough to prove uniform in time estimates. This will be a purpose of the following paragraphs.

**Bounds on the density and regularity of the velocity.** To deduce bounds on the density we combine the basic energy inequality for system (2.14)

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^M \left( \frac{u^2}{2} + \int_0^\rho [p_1(s) + p_2^\varepsilon(s)] s^{-2} ds \right) dx + \nu \int_0^M \rho |u_x|^2 dx = 0. \quad (2.19)$$

with the estimate given by testing the momentum equation by  $\frac{\rho_x}{\rho}$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \int_0^M \left( \frac{\nu}{2} \left( \frac{\rho_x}{\rho} \right)^2 + \frac{u\rho_x}{\rho} \right) dx + \int_0^M (p_1)'(\rho) \frac{|\rho_x|^2}{\rho} dx \\ & + \int_0^M (p_2^\varepsilon)'(\rho) \frac{|\rho_x|^2}{\rho} dx = \int_0^M \rho |u_x|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

More precisely, we have

$$\sup_{\tau \in (0, T)} \int_0^M ((\log \rho)_x)^2(\tau) dx + \int_0^T \int_0^M \left| (p_2^\varepsilon)'(\rho) \frac{(\rho_x)^2}{\rho} \right| dx d\tau \leq c. \quad (2.21)$$

The lower bound is deduced from the control of the first integral while the upper bound comes from the control of the second term and an integrability argument ( $\beta > 1$ ).

Having proven bounds from below and above for  $\rho$  it is natural to expect that  $u$  is more regular than it follows from the energy estimate. Testing the momentum equation (2.14) by  $-u_{xx}$  we get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^M u_x^2 dx + \nu \int_0^M \rho u_{xx}^2 dx = \\ & - \nu \int_0^M \rho_x u_x u_{xx} dx + \int_0^M (p_1)'(\rho) \rho_x u_{xx} dx + \int_0^M (p_2^\varepsilon)'(\rho) \rho_x u_{xx} dx. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Thanks to the uniform bounds on the density, we get

$$u \in L^\infty(0, T; H^1(0, M)) \cap L^2(0, T; H^2(0, M)).$$

**Uniqueness.** For convenience we denote  $r(\tau, x) = \rho^{-1}(\tau, x)$ . Let us assume that there exist two different solutions of system (2.14)  $(\rho_1, u_1)$  and  $(\rho_2, u_2)$  corresponding to the same initial data (2.7-2.8). Denote  $v = u_1 - u_2$ ,  $\psi = r_1 - r_2$ , then  $(\psi, \omega)$  satisfy the following system of equations

$$\begin{cases} \psi_\tau = v_x \\ v_\tau + [p_1(\rho_1) - p_1(\rho_2) + p_2^\varepsilon(\rho_1) - p_2^\varepsilon(\rho_2)]_x = \nu [\rho_1 u_{1,x} - \rho_2 u_{2,x}]_x. \end{cases} \quad (2.23)$$

With the regularity proven in the previous steps and the monotonicity of the pressures  $p_1$  and  $p_2^\varepsilon$  it is straightforward to deduce

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^M (v^2 + \psi^2) dx \leq c \int_0^M (v^2 + \psi^2) dx,$$

and we can conclude that the solution is unique thanks Gronwall Lemma. This completes the proof of Theorem 4.

Note that coming back to Eulerian coordinates is possible since

$$\partial_t h(t, x) = \partial_\tau h(\tau, x) - u(\tau, x) \rho(\tau, x) \partial_x h(\tau, x)$$

$$\partial_x h(t, x) = \rho(\tau, x) \partial_x h(\tau, x).$$

This observation, together with bounds obtained above implies the statement of Theorem 1.  $\square$

### 3.2 Recovering of the two-phase system

In this subsection we prove Theorem 3. We first focus on estimates which are uniform with respect to  $\varepsilon$  and then we perform the limit passage. The basic energy equality (2.19) for system (2.3) in the Eulerian coordinates reads

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \left( \frac{1}{2} \rho^\varepsilon |u^\varepsilon|^2 + \rho(e_1(\rho^\varepsilon) + e_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon)) \right) + \int_0^L |\partial_x u^\varepsilon|^2 = 0 \quad (2.24)$$

with

$$e_1(\rho^\varepsilon) = \frac{a}{\alpha - 1} (\rho^\varepsilon)^{\alpha-1}, \quad e_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon) = \int_0^{\rho^\varepsilon} \frac{p_\varepsilon^2(s)}{s^2} ds.$$

As in [131], the bound on  $\rho e_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon)$  does not provide bound for  $p_2^\varepsilon$  uniform with respect to  $\varepsilon$ . To solve this problem we perform a Bogovskii-type of estimate. Note that the ingredients to conclude will be different than those in [131].

**Uniform estimate on the pressure in  $L^1((0, T) \times (0, L))$ .** We test the momentum equation by

$$\phi(t, x) = \psi(t) \left( \int_0^x \rho^\varepsilon(t, y) dy - \bar{\rho}^\varepsilon \right)$$

where  $\bar{\rho}^\varepsilon = \frac{1}{L} \int_0^L \rho^\varepsilon(x, t) dx$  and  $\psi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty((0, L))$ . This test function gives

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \psi \int_0^L (p_1(\rho^\varepsilon) + p_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon)) (\rho^\varepsilon - \bar{\rho}^\varepsilon) dx dt = & \\
 & - \int_0^T \psi' \int_0^L \rho^\varepsilon u^\varepsilon \left( \int_0^x \rho^\varepsilon(t, y) dy - \bar{\rho}^\varepsilon \right) dx dt \\
 & + \int_0^T \psi \bar{\rho}^\varepsilon \int_0^L \rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 dx dt \\
 & + \nu \int_0^T \psi \int_0^L u_x (\rho^\varepsilon - \bar{\rho}^\varepsilon) dx dt
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

The right-hand-side is controlled by the energy estimate and by the uniform bound on the density. Therefore we obtain in particular that

$$\int_0^T \psi \int_0^L p_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon) (\rho^\varepsilon - \bar{\rho}^\varepsilon) dx dt \leq c$$

uniformly with respect to  $\varepsilon$ . We then split the expression on the left-hand-side into two terms

$$I_1 = \int_{\{\rho^\varepsilon < (\bar{\rho}_0 + 1)/2\}} \varepsilon p_2(\rho^\varepsilon) \left( \rho^\varepsilon - \frac{1}{L} \int_0^L \rho^\varepsilon(y) dy \right) dx dt \tag{2.26}$$

and

$$I_2 = \int_{\{\rho^\varepsilon \geq (\bar{\rho}_0 + 1)/2\}} \varepsilon p_2(\rho^\varepsilon) \left( \rho^\varepsilon - \frac{1}{L} \int_0^L \rho^\varepsilon(y) dy \right) dx dt. \tag{2.27}$$

We can conclude that  $I_1$  is bounded because it concerns points such that  $\rho^\varepsilon$  is far away from singularity (recall that  $\bar{\rho}_0 < 1$ ). Concerning  $I_2$  we may write

$$I_2 \geq \frac{1 - \bar{\rho}_0}{2} \int_{\{\rho^\varepsilon \geq (\bar{\rho}_0 + 1)/2\}} \varepsilon p_2(\rho^\varepsilon) dx dt \tag{2.28}$$

which means that  $p_2^\varepsilon = \varepsilon p_2(\rho^\varepsilon)$  is bounded in  $L^1((0, T) \times (0, L))$ . At the same time  $p_2^\varepsilon \rho^\varepsilon$  is bounded in  $L^1((0, T) \times \Omega)$  uniformly with respect to  $\varepsilon$ .

**Passage to the limit**  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Using the Arzelà-Ascoli theorem we prove that

$$\rho^\varepsilon \rightarrow \rho \quad \text{in } \mathcal{C}([0, T] \times [0, L]),$$

and the uniform bounds for the density imply that also  $p_1(\rho^\varepsilon) \rightarrow p_1(\rho)$  strongly in  $\mathcal{C}([0, T] \times [0, L])$ .

On the other hand, thanks to the uniform bounds on the pressure, we have up to a subsequence

$$\begin{aligned}
 p_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon) &\rightharpoonup \pi \quad \text{in } \mathcal{M}^+((0, T) \times (0, L)), \\
 \rho^\varepsilon p_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon) &\rightharpoonup \pi_1 \quad \text{in } \mathcal{M}^+((0, T) \times (0, L)),
 \end{aligned}$$



but with the strong convergence of  $\rho^\varepsilon$  we immediately identify the second limit as

$$\rho^\varepsilon p_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon) \rightharpoonup \rho\pi \quad \text{in } \mathcal{M}^+((0, T) \times (0, L)). \quad (2.29)$$

Concerning the convergence of the velocity, up to a subsequence, we have that

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0, T; H_0^1(0, L)),$$

and

$$u^\varepsilon \rightharpoonup^* u \quad \text{in } L^\infty(0, T; L^2(0, L)).$$

Therefore

$$\rho^\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup \rho u \quad \text{in } L^4((0, T) \times (0, L)).$$

In addition  $(\rho^\varepsilon u^\varepsilon)_x$  is uniformly bounded in  $L^2((0, T) \times (0, L))$ . From the momentum equation and the  $L^1$  bound on the pressure  $p_2^\varepsilon$  we also know that

$$(\rho^\varepsilon u^\varepsilon)_t \in L^1(0, T; W^{-1,1}(0, L)).$$

Then, application of the Aubin-Lions lemma (its generalization to the case of non-reflexive spaces due to Simon [168]) yields

$$\rho^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow \rho u \quad \text{in } L^2(0, T; \mathcal{C}[0, L]).$$

From this, the uniform bound from below for  $\rho$  and the strong convergence of  $\rho^\varepsilon$ , we verify the strong convergence of  $u^\varepsilon$ .

To sum up we have proven that  $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon, p_2^\varepsilon)$  converges in  $\mathcal{C}([0, T] \times [0, L]) \times L^2(0, T; \mathcal{C}[0, L]) \times \mathcal{M}^+((0, T) \times (0, L))$  (in the sense specified above) to  $(\rho, u, \pi)$  which satisfies system (2.9).

In order to conclude it remains to show that  $(\rho, \pi)$  satisfies the relation

$$\rho\pi = \pi. \quad (2.30)$$

Due to singularity of the pressure  $p_2^\varepsilon$ , we cannot use the same argument as in [131]. Nevertheless, thanks to (2.11) we may write

$$\varepsilon \rho^\varepsilon p_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon) = -\varepsilon \frac{(\rho^\varepsilon)^\gamma}{(1 - \rho^\varepsilon)^{\beta-1}} + \varepsilon p_2^\varepsilon(\rho^\varepsilon). \quad (2.31)$$

Letting  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we see that the left-hand-side and the second term on the right-hand-side converge in the sense of measures to  $\rho\pi$ ,  $\pi$ , respectively, while the middle term vanishes. Indeed, since  $\beta > 1$ , the constraint  $0 \leq \rho^\varepsilon \leq 1$  and the uniform bound on  $p_2^\varepsilon$  yield that

$$\left\| \varepsilon^{\frac{\beta-1}{\beta}} \frac{(\rho^\varepsilon)^\gamma}{(1 - \rho^\varepsilon)^{\beta-1}} \right\|_{L^p((0, T) \times (0, L))} \leq c$$

uniformly with respect to  $\varepsilon$  with  $p = \frac{\beta}{\beta-1}$ .  $\square$

# Chapitre 3

## Cas hétérogène en dimension supérieure

Ce chapitre présente l'extension des résultats du chapitre 2 en dimension supérieure à un, ici égale à trois, avec la prise en compte d'hétérogénéités dans la contrainte de densité maximale  $\rho^*(x)$ .

Ce chapitre est issu d'une publication écrite en collaboration avec Ewelina ZATORSKA

Free/congested Two-Phase Model from Weak Solutions to Multi-dimensional Compressible Navier-Stokes Equations.

C. PERRIN, E. ZATORSKA.

*Communication in Partial Differential Equations*, 40 :8, p. 1558–1589 (2015).

### 1 Introduction

Macroscopic models of moving crowd identify the swarm through some density that is transported by a velocity vector field, see for instance a review paper by B. MAURY [136]. For example, to describe the traffic jams, one may use the one-dimensional fluid model describing two-phase flow

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \alpha + \partial_x(\alpha u) &= 0 \\ \partial_t(\alpha u) + \partial_x(\alpha u^2 + \pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } (0, T) \times \mathbb{R} \quad (3.1)$$

with the following restrictions

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad (1 - \alpha)\pi = 0. \quad (3.2)$$

Here  $\alpha$  denotes the liquid volume fraction that plays the role of the crowd density,  $u$  denotes the velocity and  $\pi \geq 0$  denotes some singular pressure term appearing only when  $\alpha = 1$ . System (3.1-3.2) is known in the literature as the *pressureless gas system with unilateral constraints* and has been studied for example by F. BERTHELIN in [13]. It can be interpreted as a coupling of two systems in the respective domains where  $\alpha < 1$  (liquid-gas mixture) and where  $\alpha = 1$  (pure liquid). This system can be formally derived from bi-fluid system (see f.i. F. BOUCHUT *et al.* in [21] where a hierarchy for gas-liquid two-phase flows is also presented).

A generalization of (3.1-3.2) to the multi-dimensional viscous case is described by the compressible/incompressible Navier-Stokes type of system

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega \quad (3.3a) \\ 0 \leq \rho \leq \rho^* \quad \text{in } (0, T) \times \Omega \quad (3.3b) \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p + \rho^* \nabla \pi - \operatorname{div} \mathbb{S} = \mathbf{0} \quad \text{in } (0, T) \times \Omega \quad (3.3c) \\ \operatorname{div}(\rho^* u) = 0 \quad \text{in } \{\rho = \rho^*\} \quad (3.3d) \\ \pi \geq 0 \quad \text{in } \{\rho = \rho^*\} \quad (3.3e) \\ \pi = 0 \quad \text{in } \{\rho < \rho^*\} \quad (3.3f) \end{array} \right.$$

in which the homogeneous congestion constraint  $\alpha \leq 1$  has been replaced by the inhomogeneous one  $\rho \leq \rho^*(x)$ .

The unknowns here are the density  $\rho$ , the velocity vector field  $u$  and the pressure  $\pi$ , which is the Lagrange multiplier associated with the incompressibility constraint  $\operatorname{div}(\rho^* u) = 0$  a.e. in  $\{\rho = \rho^*\}$ . Note that as in the previous example,  $\pi$  is apparent only in the congested regions  $\{\rho = \rho^*\}$ . In fact, conditions (3.3e), (3.3f) can be rewritten as one constraint

$$\rho \pi = \rho^* \pi \geq 0. \quad (3.4)$$

Furthermore, the stress tensor  $\mathbb{S}$  and the internal pressure  $p$  are known functions of  $\rho$  and  $u$  which are typical for barotropic flow of Newtonian fluid, i.e.

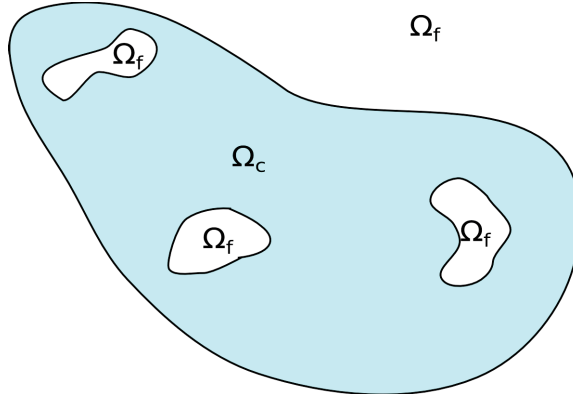
$$\mathbb{S}(u) = 2\mu D(u) + \lambda \operatorname{div} u \mathbf{I}, \quad \mu > 0, \quad 2\mu + \lambda > 0,$$

$$p(\rho) = \rho^\gamma, \quad \gamma > 1.$$

System (3.3) mixes the free flow and congested regions denoted by  $\Omega_f(t)$  and  $\Omega_c(t)$  respectively, where

$$\Omega_f(t) = \{x : \rho(t, x) < \rho^*(x)\}, \quad \Omega_c(t) = \{x : \rho(t, x) = \rho^*(x)\}.$$

It can be thus seen as a free boundary problem, in which the the free interface separating  $\Omega_c$  from  $\Omega_f$  can become very irregular, as it is illustrated on the figure below.



The objective of this paper is to mathematically justify that the solution to problem (3.3) can be obtained as a limit of  $(\rho_n, u_n)$ — the solutions to the barotropic compressible Navier-Stokes equations

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \rho_n + \operatorname{div}(\rho_n u_n) &= 0 \\ \partial_t(\rho_n u_n) + \operatorname{div}(\rho_n u_n \otimes u_n) + \nabla p + \rho^* \nabla \pi_n - \operatorname{div} \mathbb{S} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

where  $\pi_n$  is some approximation of the limit pressure  $\pi$ . We want to find an approximation that would guarantee uniform boundedness of the sequence approximating the density  $\rho_n \leq \rho^*$ . This feature is very important for numerical purposes, see for example [136].

Below we present two possible ways of approximating the pressure  $\pi$  appearing in the limit system (3.3).

**The barotropic pressure.** The first kind of approximation uses the classical barotropic pressure

$$\pi_n = \pi_{\gamma_n} = a \left( \frac{\rho_n}{\rho^*} \right)^{\gamma_n} \quad (3.6)$$

with  $a > 0$  fixed and the adiabatic exponent  $\gamma_n > 1$  being the approximation parameter. Mathematical analysis of system (3.5) with the above pressure for fixed  $\gamma_n$  is based on the existence theory for barotropic Navier-Stokes equations developed by P.-L. LIONS in [130] and E. FEIREISL in [74].

In this framework, only the homogeneous case  $\rho^* = 1$  has been studied. It has been justified by P.-L. LIONS and N. MASMOUDI in [131] that the limit system (3.3) may be recovered from (3.5-3.6) letting  $\gamma_n \rightarrow \infty$ . Later on, S. LABBÉ and E. MAITRE performed the same limit passage for more complex system. They considered the viscosity coefficients  $\mu, \lambda$  depending on the density and an additional surface tension term in the momentum equation (3.3)<sub>3</sub>.

A similar asymptotic limit has been studied also for a model of tumour growth by B. PERTHAME, F. QUIRÓS and J.L. VÁZQUEZ [154]. They used the cell population density model with the pressure of the form  $\frac{m}{m-1} (\rho/\rho^*)^{m-1}$  with parameter  $m > 1$  and the maximum packing density for the cells denoted by  $\rho^*$  which is constant. In the limit  $m \rightarrow \infty$  they obtained a free boundary model of Hele-Shaw type.

**The singular pressure.** The second approximation uses a pressure that becomes singular close to some threshold value of the density  $\rho^*$ , for example

$$\pi_{\varepsilon_n} = \varepsilon_n \frac{\left( \frac{\rho_n}{\rho^*} \right)^\alpha}{\left( 1 - \frac{\rho_n}{\rho^*} \right)^\beta} \quad (3.7)$$

with  $\beta, \alpha > 0$  fixed and  $\varepsilon_n > 0$  being the approximation parameter.

Such type of degeneracy of the pressure can be used to model various phenomena. It

appears in kinetic theory of dense gases where the interaction between the molecules is strongly repulsive at very short distance. The mutual reluctance of neighbouring molecules to share a certain amount of space (covolume) leads to the Van der Waals equation of state (see [48])

$$\pi = \frac{NRT}{V - Nb} - a \frac{N^2}{V^2},$$

where  $N$  is the number of molecules,  $V$  the volume. The two terms on the right-hand side (r.h.s.) represent respectively the repulsive and attractive forces. We see that the pressure becomes singular when  $Nb$  approaches  $V$ , which corresponds to the state where motion is no longer possible. Other equations of state, modifying the representation of repulsive forces, were proposed for instance by N.F. CARNAHAN and K.E. STARLING in [45].

Similar form of the pressure has been also recently considered by P. DEGOND, J. HUA and L. NAVORET to model collective motion in [58], by F. BERTHELIN, P. DEGOND, M. DELITALA, M. RACLE in [15] and by F. BERTHELIN and collaborators in [16] to model traffic flow . Their approximation is of the form  $\nabla \pi_{\varepsilon_n}$  with

$$\pi_{\varepsilon_n} = \frac{\varepsilon_n}{\left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho^*}\right)^\beta},$$

while in (3.5) we take  $\rho^* \nabla \pi_{\varepsilon_n}$ . However, as we will see later on, the factor  $\rho^*$  is necessary in order to obtain the energy equality when  $\rho^*$  is non-constant.

Finally, systems involving such kind of degeneration are used in the theory of granular flows (see [4] and [156]). For instance, F.M. AUZERAIS, R. JACKSON and W.B. RUSSEL proposed in [6] a model for sedimentation using an empirical pressure of the form

$$\pi = \frac{C_0 \phi^s}{\phi^* - \phi}$$

with  $2 \leq s \leq 5$ . In this framework the density of the fluid is replaced by  $\phi$ —the volume fraction of the solid phase ( $0 \leq \phi \leq 1$ ) with some constant threshold value  $\phi^* = 0.64$  corresponding to the random close packing.

From the mathematical point of view, the first result for system (3.5) with singular pressure is due to E. FEIREISL, H. PETZELTOVÁ, E. ROCCA and G. SCHIMPERNA, [74]. They studied a model of two-phase compressible fluid flow with a Cahn-Hilliard type equation for a phase variable. As a corollary of their result we get the existence of global in time weak solution for (3.5) and (3.7) with  $\rho^* = const.$ ,  $\beta > 3$  and  $\varepsilon_n > 0$  being fixed.

To our knowledge, the justification of the limit passage  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , which formally gives system (3.3), is still an open problem in the general case. The only result so far concerns the one-dimensional homogeneous ( $\rho^* = 1$ ) case, studied by D. BRESCH, C. PERRIN and E. ZATORSKA in [41]. First of all they proved that for  $\beta, \gamma > 1$  and  $\varepsilon > 0$  fixed there exists

a regular solution  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  to

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) &= 0, \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2) + \partial_x p(\rho_\varepsilon) + \varepsilon \partial_x \frac{\rho_\varepsilon^\gamma}{(1-\rho_\varepsilon)^\beta} - (\lambda + \mu) \partial_{xx}^2 u_\varepsilon &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

such that

$$0 < c \leq \rho_\varepsilon \leq C(\varepsilon) < 1, \quad (3.9)$$

for some constants  $c$  and  $C(\varepsilon)$ . Secondly, they justified that system (3.3) possesses a weak solution being a limit of regular solutions to (3.8).

The main difficulty in justifying the limit passage in both approaches is that the energy estimate does not give a uniform bound on the pressure term. More precisely, when  $\rho^* = 1$ , the energy estimate for the power law pressure (3.6) reads

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho_n |u_n|^2 + \frac{a}{\gamma_n - 1} \rho_n^{\gamma_n} \right) dx + \int_{\Omega} (\mu |\nabla u_n|^2 + (\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} u_n)^2) dx = 0$$

but it does not imply that  $\rho^{\gamma_n}$  is bounded uniformly with respect to  $\gamma_n \rightarrow \infty$ .

Similarly, for the degenerate pressure (3.7) we have

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho_n |u_n|^2 + \rho_n \Gamma_{\varepsilon_n}(\rho_n) \right) dx + \int_{\Omega} (\mu |\nabla u_n|^2 + (\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} u_n)^2) dx = 0$$

with

$$\Gamma_{\varepsilon_n}(\rho_n) = \int_0^{\rho_n} \frac{\pi_{\varepsilon_n}(s)}{s^2} ds,$$

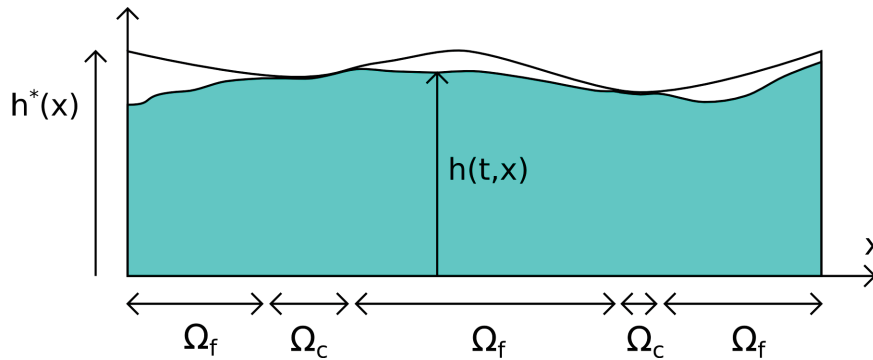
but this does not yield the uniform pressure estimate either. Indeed, take for instance  $\pi_{\varepsilon_n} = \varepsilon_n \rho_n^2 (1 - \rho_n)^{-4}$  for which  $\Gamma_{\varepsilon_n} = \varepsilon_n / (3(1 - \rho_n)^3)$ , then the growth of  $\rho_n \Gamma_{\varepsilon_n}$  around singularity is one order less than of  $\pi_{\varepsilon_n}$ . Additional information on the pressure is thus necessary and requires more sophisticated tools such as application of the Bogovskii operator.

The most important difference in these two ways of approximation lies in the uniform estimate of the density. Indeed, approximation  $\pi_{\gamma_n} = \rho_n^{\gamma_n}$  does not guarantee the validity of the congestion constraint  $0 \leq \rho_n \leq 1$  for fixed  $\gamma_n$ . The main advantage of approximation based on (3.7) is the validity of this restriction uniformly with respect to  $\varepsilon_n$ . In fact, the degenerate pressure plays the role of natural barrier (see [136] by B. MAURY) and makes the second approach more suitable for numerical schemes.

Our goal is therefore to extend the result from the previous work [41] to the global weak solutions framework in the multi-dimensional space case. The main difference between the one-dimensional case and the multi-dimensional case, is that in the latter, *the sufficiently regular solutions are not known to exist*. Therefore, the strong convergence of the density and validity of the congestion constraint (3.4) cannot be deduced directly from the *a priori* estimates. Eventually, the validity of the r.h.s. inequality in (3.9) follows from an additional

level of approximation using truncations of singular part of the pressure. However, recovering system (3.3) after this step requires *equi-integrability of the pressure term*, for which some restriction of the strength of singularity need to be imposed. The equi-integrability of the pressure similar to (3.7) for  $\rho^* = \text{const.}$  and  $\beta > 3$  was proved by E.FEIREISL *et al.* in [74] and we heavily rely on their approach to this issue.

The purpose of the paper is also to generalize [41] to the heterogeneous case, i.e. when the constant upper bound on the density is replaced by a prescribed function  $\rho^* = \rho^*(x) > 0$ . This generalization has many applications. For instance, in [14], F. BERTHELIN and D. BROIZAT use a non-constant maximal constraint to study the dynamics of traffic jams and the influence of the number of lanes on the road. Note that in [16], still for the modeling of traffic jams, the authors consider a maximal density dependent on the velocity which leads to a dependence upon  $t$  and  $x$ ,  $\rho^* = \rho^*(t, x)$ . It is also important in the study of models of flow through the closed pipes of non-uniform height  $h^*(x)$  as said by F. BERTHELIN in [13]. In these models, the surface of the flowing fluid described by  $h$  may be either free when  $h < h^*$  or additionally pressurized when it touches the pipe wall  $h = h^*$ , see the picture below.



The study of the non-viscous systems can be found in C. BOURDARIAS, M. ERSOY, S. GERBI [23], see also references therein.

## 2 Formulation of the main problem

System (3.3) is supplemented with the homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.10)$$

We assume that the threshold density  $\rho^* = \rho^*(x) > 0$  is a  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  function and that the initial data

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad (\rho u)|_{t=0} = m_0 \quad (3.11)$$

satisfy

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho_0(x) < \rho^*(x) \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad p(\rho_0) \in L^1(\Omega), \\ m_0 \in (L^2(\Omega))^3, \quad m_0 \mathbf{1}_{\{\rho_0=0\}} = 0 \quad \text{a.e. in } \Omega, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{|m_0|^2}{\rho_0} \mathbf{1}_{\{\rho_0>0\}} \in L^1(\Omega), \\ M_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_0 \, dx < \inf_{x \in \Omega} \rho^*(x). \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Remark :** Condition (3.13) plays an essential role in the proof of uniform  $L^1((0, T) \times \Omega)$  bound for a sequence approximating  $\pi$ . Note that in the case  $\rho^*$  constant, condition (3.13) is directly satisfied since  $\rho_0 < \rho^*$ .

Below we introduce the notion of a weak solution to system (3.3).

**Definition 1 (Weak solution of the limit system)** *A triple  $(\rho, u, \pi)$  is called a weak solution to (3.3) with (3.10) and (3.11) if equations*

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p + \rho^* \nabla \pi - \operatorname{div} \mathbb{S} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

*are satisfied in the sense of distributions, the divergence free condition  $\operatorname{div}(\rho^* u) = 0$  is satisfied a.e. in  $\{\rho = \rho^*\}$ , the constraint  $0 \leq \rho \leq \rho^*$  is satisfied a.e. in  $(0, T) \times \Omega$ , and the following regularity properties hold*

$$\begin{aligned} \rho &\in \mathcal{C}([0, T]; L^p(\Omega)), \quad 1 \leq p < \infty, \\ u &\in L^2(0, T; (W_0^{1,2}(\Omega))^3), \quad \frac{|m|^2}{\rho} \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \\ \pi &\in \mathcal{M}^+((0, T) \times \Omega). \end{aligned}$$

Moreover,  $\pi$  is sufficiently regular so that the condition

$$(\rho - \rho^*)\pi = 0. \quad (3.14)$$

*is satisfied in the sense of distributions.*

**Remark :** Similarly to the homogeneous case studied by P.-L. LIONS and N. MASMOUDI in [131], we can prove that the constraint (3.3)<sub>2</sub> and the divergence free condition (3.3)<sub>4</sub> are "compatible" (see Lemma 4). More precisely, if  $u$  belongs to  $L^2(0, T; (W_0^{1,2}(\Omega))^3)$ ,  $\rho$  belongs to  $L^2((0, T) \times \Omega)$  and the couple  $(\rho, u)$  satisfies the continuity equation (3.3)<sub>1</sub>, then (3.3)<sub>2</sub> and (3.3)<sub>4</sub> with  $0 \leq \rho_0 \leq \rho^*$  are equivalent. As it will be explained later, this fact is a natural consequence of the renormalized theory applied to the equations satisfied by the quantities  $\rho/\rho^*$  and  $\rho - \rho^*$ .

Now we define the notion of weak solution to approximate system (3.5) with the approximate pressure of the form

$$\pi_\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon \frac{r^\alpha}{(1-r)^\beta} & \text{if } r < 1 \\ \infty & \text{if } r \geq 1 \end{cases} \quad \alpha, \beta > 3.$$



**Definition 2 (Weak solution of the approximate system)** A pair  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  is called a weak solution to (3.5) if it satisfies

- the approximate continuity equation

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon \partial_t \phi \, dx \, dt + \int_\Omega \rho_0 \phi(0) \, dx + \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla \phi \, dx \, dt \\ = \int_\Omega (\rho_\varepsilon \phi)(T) \, dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

for all  $\phi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$ ;

- the approximate momentum equation

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \partial_t \varphi \, dx \, dt + \int_\Omega m_0 \cdot \varphi(0) \, dx \\ + \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) : \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \mathbb{S} : \nabla \varphi \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_\Omega p \operatorname{div} \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \pi_\varepsilon \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right) \operatorname{div} (\rho^* \varphi) \, dx \, dt \\ = \int_\Omega (m_\varepsilon \cdot \varphi)(T) \, dx, \end{aligned} \quad (3.16)$$

for all  $\varphi \in (\mathcal{D}([0, T] \times \Omega))^3$ .

The objective of this paper is to justify that the weak solution from Definition 1 can be obtained as a limit of weak solutions from Definition 2.

The main theorem of this paper reads.

**Theorem 5** 1. Let  $\varepsilon > 0$  be fixed, then there exists a global weak solution  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  to (3.5) in the sense of Definition 2, moreover,

$$0 \leq \rho_\varepsilon \leq \rho^*. \quad (3.17)$$

2. For  $\varepsilon \rightarrow 0$ , there exists a subsequence  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon, \pi_\varepsilon)$  converging to  $(\rho, u, \pi)$  a solution of system (3.3) in the sense of Definition 1. More precisely

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon &\rightarrow \rho \quad \text{weakly in } L^p((0, T) \times \Omega) \quad \forall 1 \leq p < +\infty, \\ u_\varepsilon &\rightarrow u \quad \text{weakly in } L^2(0, T; (W_0^{1,2}(\Omega))^3), \\ \pi_\varepsilon &\rightarrow \pi \quad \text{weakly in } \mathcal{M}^+((0, T) \times \Omega). \end{aligned}$$

The paper is organized as follows. In Section 3 we present in details the approximation procedure and prove the first part of Theorem 5. Then, in Section 4, we recover the original system by letting  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Section 4 is the Appendix in which we recall some basic facts about the Bogovskii operator, the Riesz transform and the renormalized continuity equation that are used in several places in the course of the proof.

### 3 Weak solutions of the singular compressible system

In order to prove the first part of Theorem 5, we consider further approximation with additional truncation parameter  $\delta$  and artificial pressure  $\kappa\rho^K$  where  $K$  is sufficiently large positive number that will be determined later on. Then we will show that (3.15-3.16) can be recovered by letting  $\delta \rightarrow 0$  and  $\kappa \rightarrow 0$  respectively. In this section  $\varepsilon$  is fixed and we drop it when no confusion can arise.

#### 3.1 Basic level of approximation

For fixed  $\kappa, \delta > 0$ , we consider the basic level of approximation

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\delta + \operatorname{div}(\rho_\delta u_\delta) &= 0 \\ \partial_t(\rho_\delta u_\delta) + \operatorname{div}(\rho_\delta u_\delta \otimes u_\delta) + \nabla p(\rho_\delta) + \rho^* \nabla \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) - \operatorname{div} \mathbb{S} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

with the approximate pressure given by

$$\pi_{\kappa, \delta}(s) = \kappa s^K + \begin{cases} \varepsilon \frac{s^\alpha}{(1-s)^\beta} & \text{if } s < 1 - \delta, \\ \varepsilon \frac{s^\alpha}{\delta^\beta} & \text{if } s \geq 1 - \delta. \end{cases} \quad (3.19)$$

For all parameters fixed, the approximate pressure  $\pi_{\kappa, \delta}$  is a monotone increasing function of  $\rho$ . For such pressure the issue of existence of global in time weak solutions is a straightforward adaptation of the proof from the case of barotropic system see for example [130], [78] or [146]. Below we will only make some general comments concerning the *a priori* estimates that are necessary to state the analogous existence result.

First of all, let us formally write the basic energy equality. Multiplying the second equation of (3.18) by  $u$ , integrating by parts and using the mass equation we easily get

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_\delta |u_\delta|^2 \, dx + \int_{\Omega} (\nabla p + \rho^* \nabla \pi_{\kappa, \delta}) \cdot u_\delta \, dx + \int_{\Omega} \mathbb{S} : \nabla u_\delta \, dx = 0.$$

Let us explain how to deal with the term coming from the pressure for reader's convenience

but also to check that everything works with the heterogeneous maximal density :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\nabla p + \rho^* \nabla \pi_{\kappa, \delta}) \cdot u_{\delta} \, dx &= \int_{\Omega} \gamma \rho_{\delta}^{\gamma-2} \nabla \rho_{\delta} \cdot (\rho_{\delta} u_{\delta}) \, dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \frac{\rho^*}{\rho_{\delta}} \pi'_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) \nabla \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) \cdot (\rho_{\delta} u_{\delta}) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_{\delta}^{\gamma-1} + Q_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) \right) \cdot (\rho_{\delta} u_{\delta}) \, dx \\
 &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_{\delta}^{\gamma-1} + Q_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) \right) \operatorname{div} (\rho_{\delta} u_{\delta}) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_{\delta}^{\gamma-1} + Q_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) \right) \partial_t \rho_{\delta} \, dx
 \end{aligned}$$

where we denoted  $Q'_{\kappa, \delta}(r) = \frac{\pi'_{\kappa, \delta}(r)}{r}$ . Therefore, the energy equality reads

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho_{\delta} |u_{\delta}|^2 + \frac{1}{\gamma-1} \rho_{\delta}^{\gamma} + \rho_{\delta} \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) \right) \, dx \\
 + \int_{\Omega} \mathbb{S} : \nabla u_{\delta} \, dx = 0
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

with  $\Gamma_{\kappa, \delta}$  such that  $\Gamma_{\kappa, \delta}(r) + r \Gamma'_{\kappa, \delta}(r) = Q_{\kappa, \delta}(r)$ . To find the expression of  $\Gamma_{\kappa, \delta}$  in terms of  $\pi_{\kappa, \delta}$ , we use the definition of  $Q_{\kappa, \delta}$ , integrate by part and use that  $[\pi_{\kappa, \delta}(r)/r]|_{r=0} = 0$ . We get

$$\Gamma_{\kappa, \delta}(s) = \int_0^s \frac{\pi_{\kappa, \delta}(r)}{r^2} \, dr. \tag{3.21}$$

Integrating (3.20) with respect to time gives rise to the following estimates

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in [0, T]} \left( \|\sqrt{\rho_{\delta}} u_{\delta}(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho_{\delta}(t)\|_{L^{\gamma}(\Omega)} + \left\| \rho_{\delta} \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) (t) \right\|_{L^1(\Omega)} \right) \leq C, \\
 \int_0^T \|u_{\delta}\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \, dt \leq C.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

In particular, since

$$\rho_{\delta} \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) = \rho_{\delta} \int_0^{\rho_{\delta}} \frac{\pi_{\kappa, \delta}(s)}{s^2} \, ds \geq \frac{\kappa}{K-1} \rho_{\delta}^K$$

we obtain that  $\rho_{\delta}$  is bounded in  $L^{\infty}(0, T; L^K(\Omega))$ .

**Remark :** This computation shows that the approximate pressure of the form

$$\varepsilon \rho^* \nabla \frac{\left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)^{\alpha}}{\left( 1 - \frac{\rho}{\rho^*} \right)^{\beta}}$$

gives a good contribution to the energy. The form of the so-called potential energy from (3.20) is a natural extension of the one obtained in [41] and [74] to the heterogeneous case. This would not be the case for the approximation

$$\varepsilon \nabla \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*}\right)^\beta}$$

proposed in [14] or [58].

The above estimate may be used to improve integrability of  $\rho_\delta$ . Indeed, taking  $K$  sufficiently large, say  $K > 4$ , we can test (3.16) by

$$\varphi = \frac{\psi(t)}{\rho^*} \mathcal{B} \left( \rho_\delta - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho_\delta(y) dy \right),$$

where  $\mathcal{B}$  is the Bogovskii operator (for definition and properties see Lemma 5 and Proposition 4 in Appendix). The details of this testing will be given in Section 3.2. In particular, it gives an additional control (but not uniform with respect to  $\kappa$ ) for the density

$$\|\rho_\delta\|_{L^{K+1}((0,T)\times\Omega)} \leq C. \quad (3.23)$$

Combination of these estimates can be used to deduce that

$$\|\rho_\delta |u_\delta|^2\|_{L^2(0,T;L^{\frac{6K}{4K+3}}(\Omega))} + \|\rho_\delta u_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2K}{K+1}}(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^{\frac{6K}{K+6}}(\Omega))} \leq C. \quad (3.24)$$

These observations allow us to apply methods developed for the barotropic system from [78, 130] to justify the following statement.

**Proposition 1 (Existence of weak solutions)** *Let  $\varepsilon, \kappa, \delta$  be fixed and positive. Then, there exists a couple  $(\rho_\delta, u_\delta)$  solving (3.18-3.19) in the sense of distributions on  $(0, T) \times \Omega$  with the following regularity properties*

$$\begin{aligned} \rho_\delta &\in L^\infty(0, T; L^K(\Omega)) \cap L^{K+1}((0, T) \times \Omega), \\ \rho_\delta &\in \mathcal{C}([0, T]; L_{\text{weak}}^K(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^p(\Omega)), \quad 1 \leq p < K, \\ \rho_\delta &\geq 0 \quad \text{a.e in } (0, T) \times \Omega, \\ u_\delta &\in L^2(0, T; (W_0^{1,2}(\Omega))^3), \\ \rho_\delta |u_\delta|^2 &\in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; L^{\frac{6K}{4K+3}}(\Omega)), \\ \rho_\delta u_\delta &\in \mathcal{C}([0, T]; (L_{\text{weak}}^{\frac{2K}{K+1}}(\Omega))^3) \cap L^2(0, T; (L^{\frac{6K}{K+6}}(\Omega))^3) \end{aligned} \quad (3.25)$$

and such that the energy inequality

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \left( \frac{1}{2} \rho_\delta |u_\delta|^2 + \frac{1}{\gamma-1} \rho_\delta^\gamma + \rho_\delta \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \right) dx + \int_\Omega (\mathbb{S} : \nabla u_\delta) dx \leq 0 \quad (3.26)$$

is satisfied in the sense of distributions with respect to time.

Moreover  $(\rho_\delta, u_\delta)$  extended by 0 outside  $\Omega$  is the renormalized solution to the continuity equation in the sense of Definition 3.

### 3.2 Uniform estimates

The goal of this subsection is to provide estimates which are uniform with respect to  $\delta$ . One of them is estimate (3.22). Note, however, that it does not assure boundedness of the singular part of the pressure  $\pi_{\kappa,\delta}$ . In fact, such a bound follows from Bogovskii estimate announced in the previous section and giving rise to (3.23). We now check that this estimate ensures also the uniform  $L^1((0, T) \times \Omega)$  for the pressure.

**$L^1$  bound of the pressure.** From estimates (3.22) it follows that  $\rho_\delta \in L^K((0, T) \times \Omega)$  with  $K \geq 4$ , therefore we can test the momentum equation by

$$\varphi(t, x) = \frac{\psi(t)}{\rho^*} \mathcal{B}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta), \quad \psi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty((0, T)), \quad \psi \geq 0,$$

where we denoted  $\bar{\rho}_\delta = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho_\delta dy$ . We then obtain

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \psi \pi_{\kappa,\delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) (\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \psi p(\rho_\delta) \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \partial_t(\rho_\delta u_\delta) \cdot \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta (u_\delta \otimes u_\delta) : \nabla \varphi \, dx \, dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \mathbb{S} : \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \psi p(\rho_\delta) \frac{\bar{\rho}_\delta}{\rho^*} \, dx \, dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \psi p(\rho_\delta) \nabla \left( \frac{1}{\rho^*} \right) \cdot \mathcal{B}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) \, dx \, dt \\ &= \sum_{i=1}^5 I_i \end{aligned} \tag{3.27}$$

A priori estimates obtained in (3.22) allow to control the r.h.s. Indeed for the first term we may write

$$I_1 = - \int_0^T \int_\Omega \psi' \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \mathcal{B}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \psi \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \partial_t \mathcal{B}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) \, dx \, dt.$$

Therefore, if only  $K > 3$  and since  $\psi, \psi'$  and  $(\rho^*)^{-1}$  are bounded in  $L^\infty((0, T) \times \Omega)$  and

thanks to the mass equation we get

$$\begin{aligned}
 |I_1| &\leq C \int_0^T \|\rho_\delta\|_{L^3(\Omega)} \|u_\delta\|_{L^6(\Omega)} \|\mathcal{B}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta)\|_{L^2(\Omega)} dt \\
 &\quad + C \int_0^T \|\rho_\delta\|_{L^3(\Omega)} \|u_\delta\|_{L^6(\Omega)} \|\mathcal{B}(\operatorname{div}(\rho_\delta u_\delta))\|_{L^2(\Omega)} dt \\
 &\leq C \int_0^T \|\rho_\delta\|_{L^3(\Omega)} \|u_\delta\|_{L^6(\Omega)} \|\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta\|_{L^{6/5}(\Omega)} dt \\
 &\quad + C \int_0^T \|\rho_\delta\|_{L^3(\Omega)} \|u_\delta\|_{L^6(\Omega)} \|\rho_\delta u_\delta\|_{L^2(\Omega)} dt \\
 &\leq C \int_0^T \|\rho_\delta\|_{L^3(\Omega)}^2 \|u_\delta\|_{L^6(\Omega)} dt \\
 &\quad + C \int_0^T \|\rho_\delta\|_{L^3(\Omega)}^2 \|u_\delta\|_{L^6(\Omega)}^2 dt \\
 &\leq C.
 \end{aligned}$$

Similarly, for the second term, we have

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^T \int_\Omega \psi \frac{\rho_\delta}{\rho^*} (u_\delta \otimes u_\delta) : \nabla \mathcal{B}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) dx dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_\Omega \psi \rho_\delta (u_\delta \otimes u_\delta) \nabla \left( \frac{1}{\rho^*} \right) \cdot \mathcal{B}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) dx dt,
 \end{aligned}$$

thus

$$\begin{aligned}
 |I_2| &\leq C \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta |u_\delta|^2 (|\nabla \mathcal{B}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta)| + |\mathcal{B}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta)|) dx dt \\
 &\leq C \int_0^T \|\rho_\delta\|_{L^3(\Omega)}^2 \|u_\delta\|_{L^6(\Omega)}^2 dt \leq C.
 \end{aligned}$$

For the stress tensor  $I_3$  we may write

$$|I_3| \leq C \int_0^T \|\nabla u_\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\rho_\delta\|_{L^2(\Omega)} dt \leq C.$$

The remaining pressure terms  $I_4$  and  $I_5$  can be easily controlled using the uniform  $L^\infty(0, T; L^K(\Omega))$  bound for  $\rho_\delta$  obtained in (3.22), if only  $K$  is sufficiently large

$$|I_4| \leq C \int_0^T \|\rho_\delta\|_{L^1(\Omega)} \|\rho_\delta\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma dt \leq C$$

for  $K > \gamma$  and

$$|I_5| \leq C \int_0^T \|\rho_\delta\|_{L^{\frac{2\gamma K}{K-1}}(\Omega)}^\gamma \|\rho_\delta u_\delta\|_{L^{\frac{2K}{K+1}}(\Omega)} dt \leq C$$

for  $K > 2\gamma + 1$ . Note that in the above estimate we essentially use the  $L^\infty((0, T) \times \Omega)$  bound on  $\nabla \left( \frac{1}{\rho^*} \right)$ , which follows from assumptions on  $\rho^*$  in Theorem 5. Collecting these estimates, we verify that the l.h.s. of (3.27) is bounded uniformly with respect to  $\delta$ . Now, let us split the first term into two parts as follows

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_\Omega \psi \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) (\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) \, dx \, dt \\
 &= \int_0^T \int_\Omega \psi \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) (\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) \mathbf{1}_{\left\{ \rho_\delta < \frac{\inf \rho^* + M_0}{2} \right\}} \, dx \, dt \\
 & \quad + \int_0^T \int_\Omega \psi \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) (\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) \mathbf{1}_{\left\{ \rho_\delta \geq \frac{\inf \rho^* + M_0}{2} \right\}} \, dx \, dt
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

In the first integral, the term  $\pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)$  is far from the singularity  $\rho^*$ , so the integral is finite. For the second integral we may write

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_\Omega \psi \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) (\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) \mathbf{1}_{\left\{ \rho_\delta \geq \frac{\inf \rho^* + M_0}{2} \right\}} \, dx \, dt \\
 & \geq \frac{\inf \rho^* - M_0}{2} \int_0^T \int_\Omega \psi \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \mathbf{1}_{\left\{ \rho_\delta \geq \frac{\inf \rho^* + M_0}{2} \right\}} \, dx \, dt.
 \end{aligned}$$

Thanks to (3.13), we deduce from the second integral of (3.28) that

$$\int_0^T \int_\Omega \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \, dx \, dt \leq C$$

and then the control of the first integral of (3.28) yields

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_\delta \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \, dx \, dt \leq C.$$

In particular, as mentioned in (3.23),  $\rho_\delta$  is bounded in  $L^{K+1}((0, T) \times \Omega)$  uniformly with respect to  $\delta$ , but not uniformly with respect to  $\kappa$ .

**Equi-integrability of the pressure.** In order to perform the limit passage  $\delta \rightarrow 0$  and to recover system (3.15-3.16) with parameter  $\kappa$ , the weak limit of  $\pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)$  has to be more regular than merely a positive measure. To show that it converges weakly in  $L^1((0, T) \times \Omega)$

to  $\pi_\kappa\left(\frac{\rho_\kappa}{\rho^*}\right)$  we want to apply the DE LA VALLÉE-POUSSIN criterion and we test the momentum equation by

$$\varphi(t, x) = \frac{\psi(t)}{\rho^*} \mathcal{B} \left( \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) - \overline{\eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)} \right), \quad \psi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty((0, T)), \quad \psi \geq 0,$$

where

$$\eta_\delta(s) = \begin{cases} \log(1-s) & \text{if } s \leq 1-\delta, \\ \log(\delta) & \text{if } s > 1-\delta. \end{cases} \quad (3.29)$$

This testing results in

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \psi \left( \pi_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) + \frac{p(\rho_\delta)}{\rho^*} \right) \left( \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) - \overline{\eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)} \right) dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \partial_t(\rho_\delta u_\delta) \cdot \varphi dx dt - \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon(u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) : \nabla \varphi dx dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \mathbb{S} : \nabla \varphi dx dt - \int_0^T \int_\Omega \psi p(\rho_\delta) \nabla \left( \frac{1}{\rho^*} \right) \cdot \mathcal{B} \left( \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) - \overline{\eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)} \right) dx dt \\ &= \sum_{i=1}^4 J_i. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Similarly as in the previous paragraph, the most demanding term  $J_1$  equals to

$$\begin{aligned} J_1 &= - \int_0^T \int_\Omega \psi' \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \mathcal{B} \left( \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) - \overline{\eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)} \right) dx dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \psi \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \partial_t \mathcal{B} \left( \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) - \overline{\eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)} \right) dx dt \end{aligned}$$

We can generalize the notion of renormalized solutions of the continuity equation (see the Appendix and [146] section 6.2) to functions

$$b_k(s) = \begin{cases} b(s) & \text{if } s \in [0, k) \\ b(k) & \text{if } s \in [k, \infty) \end{cases} \quad \text{with } b \in \mathcal{C}^1[0, \infty)$$

to deduce that  $\eta_\delta$  satisfies the equation

$$\begin{aligned} & \partial_t \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) + \operatorname{div} \left( \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) u_\delta \right) + \left( (\eta_\delta)'_+ \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \frac{\rho_\delta}{\rho^*} - \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \right) \operatorname{div} u_\delta \\ &+ (\eta_\delta)'_+ \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \nabla \log \rho^* = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$



In the above formula  $(\eta_\delta)'_+$  denotes the right derivative of  $\eta_\delta$

$$(\eta_\delta)'_+(s) = \begin{cases} \frac{1}{1-s} & \text{if } s < 1 - \delta \\ 0 & \text{if } s \geq 1 - \delta \end{cases}.$$

We thus obtain

$$\begin{aligned} J_1 &= - \int_0^T \int_\Omega \psi' \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \mathcal{B} \left( \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) - \overline{\eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)} \right) dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega \psi \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \mathcal{B} \left( \operatorname{div} \left( \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) u_\delta \right) \right) dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega \psi \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \mathcal{B} [F_\delta] dx dt \end{aligned} \quad (3.32)$$

where we denoted

$$\begin{aligned} F_\delta &= \left( \eta'_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \frac{\rho_\delta}{\rho^*} - \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \operatorname{div} u_\delta + \eta'_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \nabla \log \rho^* \\ &\quad - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \left[ \left( \eta'_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \frac{\rho_\delta}{\rho^*} - \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \right) \operatorname{div} u_\delta + \eta'_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \frac{\rho_\delta}{\rho^*} u_\delta \cdot \nabla \log \rho^* \right] dy. \end{aligned}$$

Therefore, to control the last integral of  $J_1$  we need bounds on  $\eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)$  and  $\eta'_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \frac{\rho_\delta}{\rho^*}$ . To simplify, we assume that  $\alpha, \beta$  are integers. For  $\frac{\rho_\delta}{\rho^*} < 1 - \delta$  we have

$$\begin{aligned} \rho_\delta \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) &\geq \rho_\delta \int_0^{\frac{\rho_\delta}{\rho^*}} \varepsilon \frac{s^{\alpha-2}}{(1-s)^\beta} ds \\ &= \varepsilon \rho_\delta \int_{1-\frac{\rho_\delta}{\rho^*}}^1 \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{s^\beta} ds \\ &= \varepsilon \rho_\delta \sum_{k=0}^{\alpha-2} \binom{\alpha-2}{k} (-1)^k \int_{1-\frac{\rho_\delta}{\rho^*}}^1 s^{k-\beta} ds \\ &= \frac{\varepsilon \rho_\delta}{\beta-1} \frac{1}{\left(1-\frac{\rho_\delta}{\rho^*}\right)^{\beta-1}} - \frac{\varepsilon \rho_\delta}{\beta-1} \\ &\quad + \varepsilon \rho_\delta \sum_{k=1}^{\alpha-2} \binom{\alpha-2}{k} (-1)^k \int_{1-\frac{\rho_\delta}{\rho^*}}^1 s^{k-\beta} ds \\ &\geq \frac{\varepsilon \rho_\delta}{\left(1-\frac{\rho_\delta}{\rho^*}\right)^{\beta-1}} \left( \frac{1}{\beta-1} - \delta C(\alpha, \beta, \delta) \right) - C_2 \end{aligned}$$

where, in the last inequality,  $C_2$  controls all the non-degenerate terms. The constant  $C(\alpha, \beta, \delta)$  is such that  $\lim_{\delta \rightarrow 0} |C| < +\infty$  and it controls all the degenerate terms of lower order. Taking  $\delta$  sufficiently small, we ensure that

$$\delta |C(\alpha, \beta, \delta)| < \frac{1}{2(\beta - 1)}.$$

Thus it follows that

$$\rho_\delta \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \geq C_1 \frac{\varepsilon \rho_\delta}{\left(1 - \frac{\rho_\delta}{\rho^*}\right)^{\beta-1}} - C_2, \quad C_1 > 0. \quad (3.33)$$

Now, since for  $\frac{\rho_\delta}{\rho^*} < 1 - \delta$

$$\eta'_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_\delta}{\rho^*}\right)}$$

we obtain using the Young inequality ( $\beta > 3$ )

$$C_1 |\rho_\delta \eta'_\delta(\rho_\delta)|^2 \leq \rho_\delta \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) + C_2.$$

This inequality is still satisfied for  $\frac{\rho_\delta}{\rho^*} \geq 1 - \delta$  because  $\eta' \equiv 0$  on this set.

Concerning the control of  $\eta_\delta$ , if  $\frac{\rho_\delta}{\rho^*} < 1 - \delta$  we observe that

$$(1 - R)^{\beta-1} |\log(1 - R)|^q \xrightarrow{R \rightarrow 1^-} 0 \quad \forall 1 \leq q < \infty$$

which proves that there exists  $C_1$  and  $C_2$  uniform with respect to  $\delta$  such that

$$C_1(q, \varepsilon, \beta) \left| \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \right|^q \leq \rho_\delta \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) + C_2(q, \varepsilon, \beta) \quad \forall q \in [1, \infty). \quad (3.34)$$

Since  $\eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right)$  is constant for  $\frac{\rho_\delta}{\rho^*} \geq 1 - \delta$ , we deduce that this inequality is satisfied for all  $\frac{\rho_\delta}{\rho^*}$ .

These estimates allow to control  $\mathcal{B}[F_\delta]$  from (3.32) uniformly in  $L^2(0, T; L^q(\Omega))$  with  $q < 3/2$ . So, the full integrand in the third term of  $J_1$  is controlled provided  $\rho_\delta u_\delta \in L^2(0, T; (L^p(\Omega))^3)$  with  $p > 3$ , which due to (3.24) asks for  $K > 6$ .

The other  $J_k$  from (3.30) are bounded thanks to (3.34) similarly as in the case of  $L^1$  bound on the pressure obtained in previous paragraph.

Finally, from (3.30) we deduce that

$$\int_0^T \int_\Omega \pi_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \eta_\delta \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) dx dt \leq C, \quad (3.35)$$

which implies, thanks to the DE LA VALLÉE-POUSSIN criterion, the equi-integrability of the pressure  $\pi_\delta$ .

### 3.3 Passage to the limit

First, let us perform the limit passage  $\delta \rightarrow 0$ . In fact the second limit passage  $\kappa \rightarrow 0$  is an immediate consequence of the first one and of new uniform estimates. Indeed, as it will turn out at the end of this subsection, after letting  $\delta$  to 0 one recovers estimate (3.17). This estimate can be used to substitute all  $\kappa$ -dependent estimates used to pass to the limit with  $\delta$ .

We start with an observation that according to (3.22), there exist subsequences  $\rho_\delta, u_\delta$  such that

$$\begin{aligned} \rho_\delta &\longrightarrow \rho && \text{weakly-}^* \text{ in } L^\infty(0, T; L^K(\Omega)), \\ u_\delta &\longrightarrow u && \text{weakly in } L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega))^3). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Let us recall now a result concerning the compactness of functions in time and space. For  $X$  a separable Banach space, we define the space

$$\mathcal{C}([0, T]; X_{\text{weak}}) = \{f : [0, T] \rightarrow X; \langle f, v \rangle_{X^*, X} \in \mathcal{C}([0, T]) \text{ for any } v \in X\}.$$

**Lemma 1 ([146] p. 301)** *Let  $1 < p, q < +\infty$  and let  $\Omega$  be a bounded Lipschitz domain of  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Assume that  $(g_n)$  is a sequence of functions defined on  $[0, T]$  with values in  $L^q(\Omega)$  such that*

- $g_n \in \mathcal{C}([0, T]; L^q_{\text{weak}}(\Omega))$ ;
- $(g_n)$  is uniformly continuous in  $W^{-1,p}(\Omega)$ ;
- $(g_n)$  is uniformly bounded in  $L^q(\Omega)$ .

*Then there exists  $g \in \mathcal{C}([0, T]; L^q_{\text{weak}}(\Omega))$  such that*

$$g_n \longrightarrow g \quad \text{in } \mathcal{C}([0, T]; L^q_{\text{weak}}(\Omega))$$

*at least for a chosen subsequence.*

Directly from the continuity equation it follows that  $\rho_\delta$  is equi-continuous with values in  $W^{-1, \frac{2K}{K+1}}(\Omega)$ . Moreover  $\rho_\delta$  belongs to  $\mathcal{C}([0, T]; L^K_{\text{weak}}(\Omega))$  and is uniformly bounded in  $L^\infty(0, T; L^K(\Omega))$ , thus by Lemma 1 we verify that

$$\rho_\delta \longrightarrow \rho \quad \text{in } \mathcal{C}([0, T]; L^K_{\text{weak}}(\Omega)). \quad (3.37)$$

Similarly, we prove that

$$\rho_\delta u_\delta \longrightarrow \rho u \quad \text{in } \mathcal{C}([0, T]; (L^{\frac{2K}{K+1}}_{\text{weak}}(\Omega))^3). \quad (3.38)$$

Indeed, from the momentum equation we conclude that  $\rho_\delta u_\delta$  is equi-continuous with values in  $W^{-1,1}(\Omega)$ . Moreover, on account of (3.24) it is uniformly bounded in  $L^\infty(0, T; (L^{\frac{2K}{K+1}}(\Omega))^3)$  and belongs to  $\mathcal{C}([0, T]; (L^{\frac{2K}{\text{weak}}(\Omega)})^3)$ , thus Lemma 1 yields

$$\rho_\delta u_\delta \longrightarrow \overline{\rho u} \quad \text{in } \mathcal{C}([0, T]; (L^{\frac{2K}{\text{weak}}(\Omega)})^3) \quad (3.39)$$

It remains to identify the limit of the product, we can check that the product  $\rho u$  at the limit is in  $\mathcal{C}([0, T]; (L^{\frac{2K}{\text{weak}}(\Omega)})^3)$  since

$$\int_{\Omega} (\rho|u|)^{\frac{2K}{K+1}} dx \leq \left( \int_{\Omega} \rho|u|^2 dx \right)^{\frac{K}{K+1}} \left( \int_{\Omega} \rho^K dx \right)^{\frac{1}{K+1}} < +\infty$$

and

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho u \cdot \xi dx \right) \in L^1((0, T)), \quad \forall \xi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \Omega)$$

by considering the limit momentum equation.

Let us now recall the following lemma (see for instance [130] Lemma 5.1).

**Lemma 2** *Let  $g_n, h_n$  converge weakly to  $g, h$  respectively in  $L^{p_1}(0, T; L^{p_2}(\Omega))$  and  $L^{q_1}(0, T; L^{q_2}(\Omega))$  where  $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$ . We assume in addition that*

- $\partial_t g_n$  is bounded in  $L^1(0, T; W^{-m,1}(\Omega))$  for some  $m \geq 0$  independent of  $n$ .
- $\|h_n - h_n(t, \cdot + \xi)\|_{L^{q_1}(0, T; L^{q_2}(\Omega))} \rightarrow 0$  as  $|\xi| \rightarrow 0$ , uniformly in  $n$ .

Then  $g_n h_n$  converges to  $gh$  in  $\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$ .

We already have the weak convergences of  $\rho_\delta, u_\delta$  by (3.36), and the control of the time derivative  $\partial_t \rho_\delta$  in  $L^1(0, T; W^{-1, \frac{2K}{K+1}}(\Omega))$  thanks to the mass equation. Using the bound on  $u_\delta$  in  $L^2(0, T, (H^1(\Omega))^3)$  we can apply the previous lemma to  $g = \rho, h = u$  to get the convergence of  $\rho_\delta u_\delta$  towards  $\rho u$  in the sense of distributions. Comparing this limit with (3.39) we deduce the convergence (3.38).

**Remark :** The strong convergence of  $\rho_\delta u_\delta$  towards  $\rho u$  in  $L^p(0, T; (W^{-1,2}(\Omega))^3)$  for all  $p < +\infty$  can be obtained with the following lemma due to Aubin, Lions and Simon (see [168] or [24] for the following statement).

**Lemma 3** *Let  $B_0 \subset B_1 \subset B_2$  be three Banach spaces. We assume that the embedding of  $B_1$  in  $B_2$  is continuous and that the embedding of  $B_0$  in  $B_1$  is compact.*

*Let  $p, r$  such that  $1 \leq p, r \leq +\infty$ , for  $T > 0$  we define*

$$E_{p,r} = \left\{ v \in L^p(0, T; B_0), \frac{dv}{dt} \in L^r(0, T; B_2) \right\}.$$

- *If  $p < +\infty$ , the embedding of  $E_{p,r}$  in  $L^p(0, T; B_1)$  is compact.*

- If  $p = +\infty$  and  $r > 1$  the embedding of  $E_{p,r}$  in  $\mathcal{C}([0, T]; B_1)$  is compact.

As said previously,  $\rho_\delta u_\delta$  is bounded in  $L^\infty(0, T; (L^{\frac{2K}{K+1}}(\Omega))^3)$  and the momentum equation gives a bound on  $\partial_t(\rho_\delta u_\delta)$  in  $L^1(0, T; (W^{-1,1}(\Omega))^3)$ . Since  $K$  is strictly larger than  $3/2$ ,  $L^{\frac{2K}{K+1}}(\Omega)$  is compactly embedded in  $W^{-1,2}(\Omega) \subset W^{-1,1}(\Omega)$ . We can thus apply the Aubin-Lions-Simon Lemma to the sets

$$B_0 = L^{\frac{2K}{K+1}}(\Omega), \quad B_1 = W^{-1,2}(\Omega), \quad B_2 = W^{-1,1}(\Omega)$$

which yields the strong convergence of  $\rho_\delta u_\delta$  in  $L^p(0, T; (W^{-1,2}(\Omega))^3)$  for all  $p < +\infty$ .

**Passage to the limit in the continuity and the momentum equations.** Convergences (3.37) and (3.38) allow us to pass to the limit in the approximate continuity equation, which is now satisfied in the sense of distributions on  $(0, T) \times \Omega$ .

To pass to the limit in the momentum equation we need to justify the convergence in the nonlinear terms. For the convective term we have

$$\rho_\delta u_\delta \otimes u_\delta \longrightarrow \rho u \otimes u \quad \text{weakly in } L^q((0, T) \times \Omega) \quad (3.40)$$

for some  $q > 1$ . It follows from (3.24) which gave us uniform bound on  $\rho_\delta |u_\delta|^2$  in  $L^2(0, T; L^p(\Omega))$  with  $p = \frac{6K}{4K+3} > 1$ , the convergence established in (3.38) and in (3.36) together with compact imbeddings.

Finally, thanks to (3.35) we deduce existence of a subsequence such that

$$\pi_{\kappa,\delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \rightharpoonup \overline{\pi_{\varepsilon,\kappa} \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} \quad \text{weakly in } L^1((0, T) \times \Omega), \quad (3.41)$$

however, identification of the limit term cannot be done yet, since  $\rho_\delta$  is only known to converge weakly to  $\rho$ . Nevertheless, with these convergences at hand, the passage to the limit in the continuity equation is automatic. Letting  $\delta \rightarrow 0$  in the weak formulation of the momentum equation, we get

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \rho u \cdot \partial_t \varphi \, dx \, dt + \int_\Omega m_0 \cdot \varphi(0) \, dx \\ & + \int_0^T \int_\Omega \rho(u \otimes u) : \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \mathbb{S} : \nabla \varphi \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega \overline{p(\rho)} \operatorname{div} \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \overline{\pi_{\varepsilon,\kappa} \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} \operatorname{div} (\rho^* \varphi) \, dx \, dt = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

satisfied for any  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})^3$  such that  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ .

The final step is to identify

$$\overline{p(\rho)} = p(\rho), \quad \text{and} \quad \overline{\pi_{\varepsilon,\kappa} \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} = \pi_{\varepsilon,\kappa} \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right). \quad (3.43)$$

To do that we need to show the strong convergence of the density.

**Strong convergence of the density.** Proving the strong convergence of the density is a standard difficulty in the study of compressible Navier-Stokes equations (see [130], [146]). The main ingredients are the theory of renormalized solutions to the continuity equation (whose definition is recalled in Appendix with the main existence result) and the compactness of a quantity called *the effective flux*. We follow in this part the standard theory of compressible Navier-Stokes equations.

The renormalized version of the continuity equation (3.75) with  $b(\rho_\delta) = \rho_\delta \log \rho_\delta$  (we extend  $\rho_\delta$  and  $u_\delta$  by 0 outside  $\Omega$ ) reads

$$\partial_t(\rho_\delta \log \rho_\delta) + \operatorname{div}(\rho_\delta \log \rho_\delta u_\delta) = -\rho_\delta \operatorname{div} u_\delta \quad \text{in } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3). \quad (3.44)$$

We now want to pass to the limit  $\delta \rightarrow 0$  in the above equality. Due to (3.77) with  $\lambda_1 = 1$  and the weak-\* convergence of  $\rho_\delta$  in  $L^\infty(0, T; L^K(\Omega))$  established in previous paragraph, we have

$$\begin{aligned} b(\rho_\delta) &\longrightarrow \overline{b(\rho)} \quad \text{weakly-* in } L^\infty(0, T; L^{\frac{K}{2}}(\Omega)) \\ (\rho_\delta b'(\rho_\delta) - b(\rho_\delta)) \operatorname{div} u_\delta &\rightarrow \overline{(\rho b'(\rho) - b(\rho)) \operatorname{div} u} \quad \text{weakly in } L^2(0, T; L^{\frac{2K}{K+4}}(\Omega)) \end{aligned}$$

To prove the convergence in the term  $\rho_\delta \log \rho_\delta u_\delta$  we need the Lemma 2. This result applied to  $g_\delta = \rho_\delta \log \rho_\delta$  and  $h_\delta = u_\delta$  gives the convergence of  $\rho_\delta \log \rho_\delta u_\delta$  to  $\overline{\rho \log \rho} u$ , and, passing to the limit  $\delta \rightarrow 0$  in (3.44), we check that

$$\partial_t(\overline{\rho \log \rho}) + \operatorname{div}(\overline{\rho \log \rho} u) = -\overline{\rho \operatorname{div} u} \quad (3.45)$$

in the sense of distributions.

Comparing (3.45) and the renormalized continuity equation satisfied by the limit functions  $\rho, u$  with  $b(\rho) = \rho \log \rho$  we obtain

$$\partial_t(\overline{\rho \log \rho} - \rho \log \rho) + \operatorname{div}[(\overline{\rho \log \rho} - \rho \log \rho)u] = -\overline{\rho \operatorname{div} u} + \rho \operatorname{div} u. \quad (3.46)$$

We will exploit this equality to show compactness of the, so called, effective viscous flux. To derive a key equality for this reasoning, we introduce the the inverse divergence operator  $\mathcal{A} = \nabla \Delta^{-1}$  and the double Riesz transform  $\mathcal{R} = \nabla \otimes \nabla \Delta^{-1}$  specified by (3.73) and (3.74) in Appendix, where we also recall some of their basic properties.

Applying the operator  $\nabla \Delta^{-1}$  to the approximate continuity equation, we get

$$\partial_t \nabla \Delta^{-1}(\rho_\delta \mathbf{1}_\Omega) + \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}(\rho_\delta u_\delta) = 0.$$

Due to Lemma 6, it follows that  $\nabla \Delta^{-1}(\rho_\delta \mathbf{1}_\Omega) \in L^{\alpha+1}(0, T; W^{1, \alpha+1}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; W^{1, \alpha}(\Omega))$  and  $\partial_t \nabla \Delta^{-1}(\rho_\delta \mathbf{1}_\Omega) \in L^2((0, T) \times \Omega)$ . Thus

$$\varphi_\delta = \psi \phi \nabla \Delta^{-1}[\mathbf{1}_\Omega \rho_\delta]$$

with  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  and  $\psi \in \mathcal{D}((0, T))$  is an admissible test function for the momentum equation. After straightforward calculation we obtain

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \psi \int_{\Omega} \phi \rho_{\delta} \left[ p(\rho_{\delta}) + \rho^* \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) - (2\mu + \lambda) \operatorname{div} u_{\delta} \right] dx dt \\
 &= - \int_0^T \psi \int_{\Omega} \left[ p(\rho_{\delta}) + \rho^* \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) \right] \partial_i \phi \mathcal{A}_i(\rho_{\delta} \mathbf{1}_{\Omega}) dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \psi \int_{\Omega} \phi \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) \partial_i \rho^* \mathcal{A}_i(\rho_{\delta} \mathbf{1}_{\Omega}) dx dt \\
 &\quad + (\mu + \lambda) \int_0^T \psi \int_{\Omega} \partial_i \phi \operatorname{div} u_{\delta} \mathcal{A}_i(\rho_{\delta} \mathbf{1}_{\Omega}) dx dt \\
 &\quad + \mu \int_0^T \psi \int_{\Omega} \partial_j \phi \partial_j u_{\delta}^i \mathcal{A}_i(\rho_{\delta} \mathbf{1}_{\Omega}) dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \psi \int_{\Omega} \partial_j \phi \rho_{\delta} u_{\delta}^i u_{\delta}^j \mathcal{A}_i(\rho_{\delta} \mathbf{1}_{\Omega}) dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \partial_t \psi \int_{\Omega} \phi \rho_{\delta} u_{\delta}^i \mathcal{A}_i(\rho_{\delta} \mathbf{1}_{\Omega}) dx dt \\
 &\quad + \int_0^T \psi \int_{\Omega} u_{\delta}^j [\rho_{\delta} \mathbf{1}_{\Omega} \mathcal{R}_{ij}(\rho_{\delta} u_{\delta}^i \phi) - \rho_{\delta} u_{\delta}^i \phi \mathcal{R}_{ij}(\rho_{\delta} \mathbf{1}_{\Omega})] dx dt
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Using the convergences established above and the properties of operator  $\mathcal{A}_i$  (Lemma 6), we may pass to the limit  $\delta \rightarrow 0$  in all the terms of the above formula except the last one. Since  $\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{ij}(f)g = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{ij}(g)f$ , for all  $f \in L^r(\mathbb{R}^3)$ ,  $g \in L^{r'}(\mathbb{R}^3)$  we deduce that the last term can be rewritten as

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \psi \int_{\Omega} \rho_{\delta} [u_{\delta}^j \mathcal{R}_{ij}(\rho_{\delta} u_{\delta}^i \phi) - \mathcal{R}_{ij}(\rho_{\delta} u_{\delta}^i \phi u_{\delta}^j)] dx dt \\
 &= \int_0^T \psi \int_{\Omega} \rho_{\delta} [u_{\delta}^j, \mathcal{R}_{ij}](\phi \rho_{\delta} u_{\delta}^i) dx dt.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Due to (3.22) and (3.24), Lemma 8 may be applied to control

$$[u_{\delta}, \mathcal{R}](\phi \rho_{\delta} u_{\delta}) \text{ in } L^1(0, T; W^{1, q}(\Omega)) \text{ with } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha + 6}{6\alpha} = \frac{2\alpha + 3}{3\alpha},$$

so, since  $\alpha > 3$ ,  $q \in (1, \frac{3}{2})$ .

Next, we identify the limit of  $[u_{\delta}, \mathcal{R}](\phi \rho_{\delta} u_{\delta})$ . Due to (3.40) we already know that  $\mathcal{R}_{ij}(\rho_{\delta} u_{\delta}^i u_{\delta}^j)$  converges weakly to  $\mathcal{R}_{ij}(\rho u^i u^j)$  thus we only have to justify the weak convergence of  $u_{\delta}^j \mathcal{R}_{ij}(\rho_{\delta} u_{\delta}^i)$ . This easily follows by application of Lemma 2 to  $g_{\delta} = \mathcal{R}_{ij}(\phi \rho_{\delta} u_{\delta}^i)$  and  $h_{\delta} = u_{\delta}^j$ . Thus, Lemma 7 yields

$$[u_{\delta}^j, \mathcal{R}_{ij}](\phi \rho_{\delta} u_{\delta}^i) \text{ converges weakly to } [u^j, \mathcal{R}_{ij}](\phi \rho u^i) \text{ in } L^1(0, T, L^p(\Omega)), \tag{3.49}$$

for  $p$  such that  $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , namely

$$p < \frac{3q}{3-q} = \frac{3\alpha}{\alpha+3}.$$

Observe that since  $\alpha > 3$  thus  $p \leq 3/2$  and therefore the integral on the r.h.s. of (3.48) is bounded provided  $\rho_\delta \in L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega))$  with  $p' \geq 3$ , which is satisfied for  $K \geq 3$ . Finally, applying once more Lemma 2 this time with  $g_\delta = \rho_\delta$  and  $h_\delta = [u_\delta^j, \mathcal{R}_{ij}](\phi \rho_\delta u_\delta^i)$  we identify the limit of (3.48). Therefore, passing to the limit  $\delta \rightarrow 0$  in (3.47), we obtain

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \psi \int_\Omega \phi \rho_\delta \left[ p(\rho_\delta) + \rho^* \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) - (2\mu + \lambda) \operatorname{div} u_\delta \right] dx dt \\ &= - \int_0^T \psi \int_\Omega \left[ \overline{p(\rho)} + \rho^* \overline{\pi_\varepsilon \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} \right] \partial_i \phi \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\ & \quad - \int_0^T \psi \phi \int_\Omega \overline{\pi_\varepsilon \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} \partial_i \rho^* \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\ & \quad + (\mu + \lambda) \int_0^T \psi \int_\Omega \partial_i \phi \operatorname{div} u \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\ & \quad + \mu \int_0^T \psi \int_\Omega \partial_j \phi \partial_j u^i \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\ & \quad - \int_0^T \psi \int_\Omega \partial_j \phi \rho u^i u^j \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt - \int_0^T \partial_t \psi \int_\Omega \phi \rho u^i \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\ & \quad + \int_0^T \psi \int_\Omega \rho [u^j, \mathcal{R}_{ij}] (\phi \rho u^i) dx dt. \end{aligned} \tag{3.50}$$

This is to be compared with analogous expression obtained for a limit momentum equation



(3.42) with  $\varphi = \psi \phi \nabla \Delta^{-1}[\mathbf{1}_\Omega \rho]$ , where  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  and  $\psi \in \mathcal{D}((0, T))$ , we have

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \psi \int_\Omega \phi \rho \left[ \overline{p(\rho)} + \rho^* \pi_\varepsilon \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right) - (2\mu + \lambda) \operatorname{div} u \right] dx dt \\
 &= - \int_0^T \psi \int_\Omega \left[ \overline{p(\rho)} + \rho^* \pi_\varepsilon \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right) \right] \partial_i \phi \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\
 & \quad - \int_0^T \psi \phi \int_\Omega \overline{\pi_\varepsilon \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} \partial_i \rho^* \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\
 & \quad + (\mu + \lambda) \int_0^T \psi \int_\Omega \partial_i \phi \operatorname{div} u \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\
 & \quad + \mu \int_0^T \psi \int_\Omega \partial_j \phi \partial_j u^i \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\
 & \quad - \int_0^T \psi \int_\Omega \partial_j \phi \rho u^i u^j \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt - \int_0^T \partial_t \psi \int_\Omega \phi \rho u^i \mathcal{A}_i(\rho \mathbf{1}_\Omega) dx dt \\
 & \quad + \int_0^T \psi \int_\Omega \rho [u^j, \mathcal{R}_{ij}] (\phi \rho u^i) dx dt.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Comparing (3.50) with (3.51) we get

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \psi \int_\Omega \phi \rho_\delta \left[ p(\rho_\delta) + \rho^* \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) - (2\mu + \lambda) \operatorname{div} u_\delta \right] dx dt \\
 &= \int_0^T \psi \int_\Omega \phi \rho \left[ \overline{p(\rho)} + \rho^* \pi_\kappa \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right) - (2\mu + \lambda) \operatorname{div} u \right] dx dt.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

On one hand, due to monotonicity of  $p(\rho)$  we have

$$\int_0^T \int_\Omega \phi (p(\rho_\delta) \rho_\delta - \overline{p(\rho)} \rho) dx dt \geq 0.$$

On the other hand, since  $r \mapsto \pi_{\kappa, \delta}(r)$  is non-decreasing for fixed  $\delta$  and  $\pi_{\kappa, \delta^1}(\cdot) \geq \pi_{\kappa, \delta^2}(\cdot)$  provided  $\delta^1 \leq \delta^2$ , therefore

$$\begin{aligned}
 & \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \phi \rho^* \left( \pi_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \rho_\delta - \overline{\pi_\kappa \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} \rho \right) dx dt \\
 & \geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \phi \rho^* \left( \pi_{\kappa, \delta^0} \left( \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \right) \rho_\delta - \overline{\pi_\kappa \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} \rho \right) dx dt \\
 & \geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \phi \rho^* \left( \overline{\pi_{\kappa, \delta^0} \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} - \overline{\pi_\kappa \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)} \right) \rho dx dt,
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

where the last inequality is again a consequence of the monotonicity of  $\pi_{\delta^0}$  for any fixed  $\delta^0$ . Now, one can see that the r.h.s. vanishes due to the strong convergence of  $\pi_{\kappa, \delta^0} \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)$  to  $\overline{\pi_{\kappa} \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)}$  for  $\delta^0 \rightarrow 0$ . This follows from the equi-integrability of the singular pressure (3.35).

These inequalities imply that (3.52) can be reduced to

$$\int_0^T \int_{\Omega} \overline{\rho \operatorname{div} u} \, dx \, dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} \rho \operatorname{div} u \, dx \, dt.$$

Coming back to (3.46) and using the convexity of the function  $s \mapsto s \log s$  we get

$$\overline{\rho \log \rho} = \rho \log \rho$$

which yields the strong convergence of  $\rho_{\delta}$  in  $L^p((0, T) \times \Omega)$ ,  $p < \alpha + 1$ .

Having disposed of the problem of strong convergence of the density, we can identify the limits (3.43) in the momentum equation (3.42).

In addition, using Mosco convergence, one can let  $\delta \rightarrow 0$  also in the energy inequality (3.26), we have

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho |u|^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \rho^{\gamma} + \rho \Gamma_{\kappa} \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right) \right) dx + \int_{\Omega} (\mathbb{S} : \nabla u) \, dx \leq 0 \quad (3.54)$$

satisfied in the sense of distributions on  $(0, T)$ .

**Upper bound on the limit density.** To conclude this section, let us prove the uniform bound for limit density  $\rho_{\varepsilon}$ , which is the main advantage of our approximation scheme in comparison with [131]. Recall that the basic energy estimate (3.22) implies in particular that

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \rho_{\delta} \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) dx \leq C.$$

Thus, the upper bound for  $\rho_{\kappa}$  follows from

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_{\delta} \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) dx &\geq \int_{\Omega} \rho_{\delta} \Gamma_{\kappa, \delta} \left( \frac{\rho_{\delta}}{\rho^*} \right) \mathbf{1}_{\{\rho_{\delta}/\rho^* \geq 1-\delta\}} dx \\ &\geq \int_{\Omega} \rho_{\delta} \left( \int_0^{1-\delta} \frac{s^{\alpha-2}}{(1-s)^{\beta}} ds \right) \mathbf{1}_{\{\rho_{\delta}/\rho^* \geq 1-\delta\}} dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} \rho_{\delta} \left( \int_{\delta}^1 \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{s^{\beta}} ds \right) \mathbf{1}_{\{\rho_{\delta}/\rho^* \geq 1-\delta\}} dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} \rho_{\delta} \left( \sum_{k=0}^{\alpha-2} \binom{\alpha-2}{k} (-1)^k \int_{\delta}^1 s^{k-\beta} ds \right) \mathbf{1}_{\{\rho_{\delta}/\rho^* \geq 1-\delta\}} dx \\ &= \frac{\varepsilon}{\beta-1} \int_{\Omega} \rho_{\delta} \left( \frac{1}{\delta^{\beta-1}} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{\rho_{\delta}/\rho^* \geq 1-\delta\}} dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega} \rho_{\delta} \left( \sum_{k=1}^{\alpha-2} \binom{\alpha-2}{k} (-1)^k \int_{\delta}^1 s^{k-\beta} ds \right) \mathbf{1}_{\{\rho_{\delta}/\rho^* \geq 1-\delta\}} dx \end{aligned}$$

Similarly to (3.33) we get

$$\geq \varepsilon \frac{C_1(\varepsilon, \alpha, \beta)}{\delta^{\beta-1}} \left| \left\{ \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \geq 1 - \delta \right\} \right| - C_2(\varepsilon, \alpha, \beta)$$

which implies that  $\left| \left\{ \frac{\rho_\delta}{\rho^*} \geq 1 - \delta \right\} \right| \leq C(\varepsilon)\delta^{\beta-1}$ . Recall that  $\beta > 3$ , thus finally, after letting  $\delta \rightarrow 0$  we obtain  $\left| \left\{ \frac{\rho_\kappa}{\rho^*} \geq 1 \right\} \right| = 0$ , which implies (3.17).

Having obtained this uniform bound, passage to the limit  $\kappa \rightarrow 0$  is just a repetition of the steps from above and thus,

$$0 \leq \rho_{\varepsilon, \kappa} \leq \rho^* \quad \text{a.e} \quad (3.55)$$

and the first part of Theorem 5 is proved  $\square$

## 4 Recovering of the two-phase system

The purpose of this section is to perform the last limit passage, i.e.  $\varepsilon \rightarrow 0$  and so to prove the second part of Theorem 5.

**Uniform bounds.** We first summarize what kind of uniform estimates are available at this level of approximation. Directly from (3.54) it follows that

$$\begin{aligned} (\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2)_{\{\varepsilon > 0\}} & \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \\ (\rho_\varepsilon)_{\{\varepsilon > 0\}} & \text{ is bounded in } L^\infty((0, T) \times \Omega) \\ \left( \rho_\varepsilon \Gamma_\varepsilon \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right) \right)_{\{\varepsilon > 0\}} & \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \\ (u_\varepsilon)_{\{\varepsilon > 0\}} & \text{ is bounded in } L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega))^3). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Next, since the density sequence is uniformly bounded in  $L^\infty((0, T) \times \Omega)$ , we can test the momentum equation by

$$\phi(t, x) = \frac{\psi(t)}{\rho^*} \mathcal{B}(\rho_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon), \quad \psi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty((0, T)), \quad \psi \geq 0,$$

to get the uniform bound for the pressure

$$\int_0^T \int_\Omega \pi_\varepsilon \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right) dx dt \leq C, \quad \text{and} \quad \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon \pi_\varepsilon \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right) dx dt \leq C. \quad (3.57)$$

**Passage to the limit in the continuity and the momentum equations.** Using the approximate continuity and momentum equations we may repeat the steps leading to (3.37) to get

$$\rho_\varepsilon \longrightarrow \rho \quad \text{in } \mathcal{C}([0, T]; L_{\text{weak}}^p(\Omega)) \quad \forall 1 \leq p < +\infty. \quad (3.58)$$

Moreover, the compensated compactness Lemma 2 allows to justify the convergence of  $\rho_\varepsilon u_\varepsilon$  and  $\rho_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$  in the sense of distributions to  $\rho u$  and  $\rho u \otimes u$  respectively. These observations are sufficient in order to pass to the limit in the approximate continuity equation in order to obtain (3.15).

Further, thanks to (3.57) we can extract the subsequences such that

$$\begin{aligned} \pi_\varepsilon \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right) &\longrightarrow \pi \quad \text{weakly in } \mathcal{M}_+((0, T) \times \Omega), \\ \rho_\varepsilon \pi_\varepsilon \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right) &\longrightarrow \pi_1 \quad \text{weakly in } \mathcal{M}_+((0, T) \times \Omega). \end{aligned}$$

This allows us to pass to the limit in the momentum equation (3.42), we obtain

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \rho u \cdot \partial_t \varphi \, dx \, dt + \int_\Omega m_0 \cdot \varphi(0) \, dx \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \rho (u \otimes u) : \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \mathbb{S} : \nabla \varphi \, dx \, dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \overline{p(\rho)} \operatorname{div} \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \pi \operatorname{div} (\rho^* \varphi) \, dx \, dt = 0, \end{aligned} \tag{3.59}$$

where the last product of the l.h.s. has to be understood in the sense of distribution since  $\pi$  is merely a measure. In particular, this justifies the regularity imposed on  $\rho^*$  (that it belongs to  $\mathcal{C}^1$ ).

As in the previous section, we still need to identify the limit  $\overline{p(\rho)}$  but also to prove that the limit measure  $\pi$  satisfies the constraint from (3.14).

**Strong convergence of the density.** The strong convergence of the sequence approximating the density will allow us to identify

$$\overline{p(\rho)} = p(\rho). \tag{3.60}$$

In order to prove that, we need to derive a variant of the effective viscous flux equality (3.52). The basic idea is the same as previously, we want to test the approximate momentum equation (3.57) by  $\nabla \Delta^{-1}[\mathbf{1}_\Omega \rho_\varepsilon]$ , which is now bounded in  $L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega))$ , pass to the limit and compare it with analogous expression obtained for the limit equation (3.59). Note, however, that we do not have enough regularity on the limit pressure  $\pi$  to test the limit momentum equation by  $\nabla \Delta^{-1}[\mathbf{1}_\Omega \rho]$ .

To justify this step we regularize in time and space the weak limits  $\rho$  and  $\pi$  by means of standard multipliers. Indeed, taking in (3.59) the supremum over  $\varphi = \frac{\phi}{\rho^*}$  for all  $\phi \in \mathcal{D}((0, T) \times \Omega)$  and using the uniform estimates, we can verify that the limit pressure  $\pi$  is more regular. Indeed, considering the limit momentum equation

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \operatorname{div}(\mathbb{S}) + \nabla p + \rho^* \nabla \pi = 0$$

satisfied in the sense of distributions, we can divide this equation by  $\rho^*$  and apply the operator  $\nabla\Delta^{-1}$  to obtain

$$\pi \in W^{-1,\infty}(0, T; W^{1,2}(\Omega)) + L^p(0, T; L^q(\Omega)) \quad p, q > 1. \quad (3.61)$$

On the other hand, from the continuity equation, we easily get

$$\rho \in \mathcal{C}([0, T]; L^p) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; W^{-1,2}(\Omega)) \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Therefore for  $\rho_n = \rho * \omega_n$ ,  $\pi_n = \pi * \omega_n$ , where  $\omega_n$  is a mollifying sequence, we have the following convergences

$$\begin{aligned} \rho_n &\longrightarrow \rho \quad \text{in } \mathcal{C}([0, T]; L^p_{\text{weak}}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], W^{-1,2}(\Omega)) \\ \pi_n &\longrightarrow \pi \quad \text{in } W^{-1,\infty}(0, T; W^{1,2}(\Omega)) + L^p(0, T; L^q(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Then the product  $\rho\pi$  can be expressed as

$$\rho\pi = \rho_n\pi_n + (\rho - \rho_n)\pi_n + \rho(\pi - \pi_n) \quad (3.63)$$

and we can apply Lemma 2 to pass to the limit in the r.h.s. With this justification, the same computations as in the previous section, give rise to the effective flux equality

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} \psi \phi (\rho^* \pi_1 + \overline{\rho p(\rho)} - (\lambda + 2\mu) \overline{\rho \operatorname{div} u}) \, dx \, dt \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} \phi (\rho^* \rho \pi + \overline{\rho p(\rho)} - (\lambda + 2\mu) \rho \operatorname{div} u) \, dx \, dt = 0, \end{aligned}$$

where  $\phi \in \mathcal{D}_+(\Omega)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}_+((0, T))$ . Therefore

$$\begin{aligned} &(2\mu + \lambda) \int_0^T \int_{\Omega} \psi \phi (\overline{\rho \operatorname{div} u} - \rho \operatorname{div} u) \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \psi \phi (\overline{p(\rho)\rho} - \overline{p(\rho)}\rho + \rho^* \pi_1 - \rho^* \rho \pi) \, dx \, dt \\ &\geq \int_0^T \int_{\Omega} \psi \phi \rho^* (\pi_1 - \rho \pi) \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (3.64)$$

where the last inequality is a consequence of monotonicity of  $p(\rho)$ .

In order to treat the r.h.s. of (3.64) we show that

$$\pi_1 = \rho^* \pi \quad (3.65)$$

a.e. in  $(0, T) \times \Omega$ . To prove this fact we first observe that

$$\begin{aligned}
 \rho_\varepsilon \pi_\varepsilon \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right) &= \varepsilon \rho_\varepsilon \frac{\left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^\alpha}{\left( 1 - \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^\beta} \\
 &= \varepsilon \rho^* \frac{\left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^\alpha}{\left( 1 - \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^\beta} + \varepsilon (\rho_\varepsilon - \rho^*) \frac{\left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^\alpha}{\left( 1 - \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^\beta} \\
 &= \rho^* \pi_\varepsilon \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right) - \varepsilon \frac{\rho^* \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^\alpha}{\left( 1 - \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^{\beta-1}}.
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Then, letting  $\varepsilon \rightarrow 0$  and using the  $L^1((0, T) \times \Omega)$  bound on  $\pi_\varepsilon$ , we show that

$$\varepsilon \frac{\rho^* \left( \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^\alpha}{\left( 1 - \frac{\rho_\varepsilon}{\rho^*} \right)^{\beta-1}} \longrightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^{\beta/(\beta-1)}((0, T) \times \Omega).$$

Therefore, passing to the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (3.66), we arrive at (3.65). Inserting this into (3.64) we may deduce that

$$(2\mu + \lambda) \int_0^T \int_\Omega \psi \phi (\overline{\rho \operatorname{div} u} - \rho \operatorname{div} u) \, dx \, dt \geq \int_0^T \int_\Omega \psi \phi \rho^* (\rho^* - \rho) \pi \, dx \, dt \geq 0,$$

where the last inequality follows from the fact that  $\rho \leq \rho^*$  a.e. in  $(0, T) \times \Omega$ .

Note that both pairs  $(\rho, u)$  and  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  satisfy the renormalized continuity equation (3.75), thus the above equality implies that taking  $b(\rho_\varepsilon) = \rho_\varepsilon \log \rho_\varepsilon$  we pass to the weak limit and compare with the equation on  $\rho \log \rho$ . The same arguments as in the previous section show that  $\rho_\varepsilon$  converges to  $\rho$  strongly in  $L^p((0, T) \times \Omega)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

**Recovery of the congestion constraint.** The strong convergence of the density enables also to identify the limit in the singular pressure, we have

$$\pi_1 = \rho \pi, \tag{3.67}$$

where the meaning to the product on the r.h.s. is given as in (3.63). Finally, comparing (3.65) with (3.67) we get that

$$\rho^* \pi = \pi_1 = \rho \pi,$$

which gives the congestion constraint (3.14).

**The divergence free condition.** To justify that the limit triple  $(\rho, u, \pi)$  is a solution to system (3.3) in the sense of Definition (1) one has to check that the divergence free condition  $\operatorname{div}(\rho^*u) = 0$  is satisfied a.e. in  $\{\rho = \rho^*\}$ . We will show that it follows from a certain compatibility between (3.3a) and conditions (3.3b),(3.3d) for the limit system. We have the following generalization of Lemma 2.1 from [131] to the heterogeneous case.

**Lemma 4** *Let  $u \in L^2(0, T; (W_0^{1,2}(\Omega))^3)$  and  $\rho \in L^2((0, T) \times \Omega)$  such that*

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \quad \rho(0) = \rho_0$$

*then the following two assertions are equivalent*

- (i)  $\operatorname{div}(\rho^*u) = 0$  a.e on  $\{\rho \geq \rho^*\}$  and  $0 \leq \rho_0 \leq \rho^*$ ,
- (ii)  $0 \leq \rho(x, t) \leq \rho^*(x)$ .

*Proof.* We first prove implication (ii)  $\rightarrow$  (i). Denote  $R = \frac{\rho}{\rho^*}$ , then  $R$  satisfies the equation

$$\partial_t R + \operatorname{div}(Ru) + Ru \cdot \nabla \log \rho^* = 0. \quad (3.68)$$

Let  $\beta \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ , multiplying the previous equation by  $\beta'$  we get

$$\partial_t \beta(R) + \operatorname{div}(\beta(R)u) + (\beta'(R)R - \beta(R))\operatorname{div} u + \beta'(R)Ru \cdot \nabla \log \rho^* = 0. \quad (3.69)$$

Due to assumptions  $0 \leq R \leq 1$ , using in (3.69)  $\beta(R) = R^k$  for any integer  $k$ , we obtain

$$\partial_t R^k + \operatorname{div}(R^k u) + (k-1)R^k \operatorname{div} u + kR^k u \cdot \nabla \log \rho^* = 0.$$

Since  $R^k \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ , thus  $\partial_t R^k \in W^{-1, \infty}((0, T) \times \Omega)$ . On the other hand,  $|R^k u| \leq |Ru| \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , so  $\operatorname{div}(R^k u)$  is bounded in  $L^\infty(0, T; W^{-1, 2}(\Omega))$  and  $R^k \operatorname{div} u$  is bounded in  $L^2((0, T) \times \Omega)$ . As a conclusion, we see that  $kR^k(\operatorname{div} u + u \cdot \nabla \log \rho^*)$  is a bounded distribution. Hence, letting  $k$  go to infinity we justify that

$$R^k(\operatorname{div} u + u \cdot \nabla \log \rho^*) \rightharpoonup 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega).$$

However, we also know that

$$R^k(\operatorname{div} u + u \cdot \nabla \log \rho^*) \rightarrow \mathbf{1}_{\{R=1\}}(\operatorname{div} u + u \cdot \nabla \log \rho^*) \quad \text{a.e. in } (0, T) \times \Omega$$

and since  $|R^k(\operatorname{div} u + u \cdot \nabla \log \rho^*)| \leq |\operatorname{div} u + u \cdot \nabla \log \rho^*|$ , where  $\operatorname{div} u, u \cdot \nabla \log \rho^* \in L^2((0, T) \times \Omega)$ , we get

$$\operatorname{div} u + u \cdot \nabla \log \rho^* = 0 \quad \text{a.e. on } \{R = 1\}.$$

To prove the implication (i)  $\rightarrow$  (ii) we set  $d(\rho) = \rho - \rho^*$  which satisfies the equation

$$\partial_t d + \operatorname{div}(du) + \operatorname{div}(\rho^* u) = 0. \quad (3.70)$$

Let us next consider  $b(d)$  the positive part of  $d(\rho)$ , regularized around 0 in the following way

$$b_\eta(s) = \begin{cases} b(s) & \text{if } |s| \geq \eta, \\ \frac{1}{4\eta}(s + \eta)^2 & \text{if } |s| < \eta. \end{cases}$$

Multiplying (3.70) by  $b'_\eta(d)$ , we obtain the equation

$$\partial_t b_\eta(d) + \operatorname{div}(b_\eta(d)u) + (b'_\eta(d)d - b_\eta(d))\operatorname{div} u + b'_\eta(d)\operatorname{div}(\rho^* u) = 0. \quad (3.71)$$

Note that

$$b_\eta(d)'d - b_\eta(d) = \begin{cases} 0 & \text{if } |\rho - \rho^*| \geq \eta, \\ \frac{1}{4\eta}(d^2 - \eta^2) & \text{if } |\rho - \rho^*| < \eta, \end{cases}$$

and that for  $\eta \rightarrow 0$ ,  $b'_\eta(d)d - b_\eta(d)$ ,  $b'_\eta(d)$  converge strongly in  $L^2((0, T) \times \Omega)$  to 0 and  $b'_+(d)$  respectively, where  $b'_+$  is defined by

$$b'_+(d) = \begin{cases} 0 & \text{if } \rho < \rho^* \\ 1 & \text{if } \rho \geq \rho^* \end{cases}.$$

Thus letting  $\eta \rightarrow 0$  in (3.71) we get

$$\partial_t b(d) + \operatorname{div}(b(d)u) + b'_+(d)\operatorname{div}(\rho^* u) = 0. \quad (3.72)$$

By assumption,  $\operatorname{div}(\rho^* u) = 0$  on  $\{\rho \geq \rho^*\}$  and  $b(d)(t = 0) = 0$ . Therefore, integrating (3.72) over  $(0, t) \times \Omega$ , we obtain  $\int_\Omega b(d)(t) \, dx = \int_\Omega b(d)(0) \, dx = 0$  for  $t \geq 0$ . Since  $b(d)$  is a nonnegative function, we conclude that  $d \leq 0$ , which means that  $\rho \leq \rho^*$ .  $\square$

The above result together with estimate (3.55) guarantee that the second part of Theorem 5 is proven.  $\square$

## Appendix

**The Bogovskii operator.** The Bogovskii operator is defined in the following lemma.

**Lemma 5 ([146], lemma 3.17)** *Let  $\Omega$  be a bounded Lipschitz domain in  $\mathbb{R}^3$ . Then there exists a linear operator  $\mathcal{B}_\Omega = (\mathcal{B}_\Omega^1, \mathcal{B}_\Omega^2, \mathcal{B}_\Omega^3)$  with the following properties :*

$$\mathcal{B}_\Omega : \overline{L^p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))^3, \quad 1 < p < \infty;$$

$$\operatorname{div}(\mathcal{B}_\Omega(f)) = f \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad f \in \overline{L^p}(\Omega);$$



$$\|\nabla \mathcal{B}_\Omega(f)\|_{L^p(\Omega)} \leq c(p, \Omega) \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad 1 < p < \infty$$

If  $f = \operatorname{div}(g)$ , with  $g \in L^p(\Omega)$ ,  $\operatorname{div}(g) \in L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , then

$$\|\mathcal{B}_\Omega(f)\|_{L^q(\Omega)} \leq c(q, \Omega) \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

where  $\overline{L^p(\Omega)} = \{f \in L^p(\Omega) : \int_\Omega f(y) dy = 0\}$ .

**Proposition 2 ([78], Theorem 10.11)** *Let  $\Omega$  be a bounded Lipschitz domain in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B}_\Omega$  can be uniquely extended as a bounded linear operator*

$$\mathcal{B}_\Omega : [\overline{W^{1,p'}}(\Omega)]^* = \{f \in [W^{1,p'}(\Omega)]^*; \langle f, 1 \rangle = 0\} \rightarrow (L^p(\Omega))^3$$

in such way that

$$-\int_\Omega \mathcal{B}_\Omega(f) \cdot \nabla v = \langle f, v \rangle_{\{[\overline{W^{1,p'}}(\Omega)]^*, W^{1,p'}\}}, \quad \forall v \in W^{1,p'}(\Omega);$$

$$\|\mathcal{B}_\Omega(f)\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|f\|_{[\overline{W^{1,p'}}(\Omega)]^*}.$$

**The Riesz transform.** The inverse divergence operator  $\mathcal{A} = \nabla \Delta^{-1}$  and the double Riesz transform  $\mathcal{R} = \nabla \otimes \nabla \Delta^{-1}$  are defined as

$$\mathcal{A}_j[v] = (\nabla \Delta^{-1})_j v = -\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} \mathcal{F}(v) \right), \quad (3.73)$$

$$\mathcal{R}_{i,j}[v] = \partial_i \mathcal{A}_j[v] = (\nabla \otimes \nabla \Delta^{-1})_{i,j} v = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \mathcal{F}(v) \right). \quad (3.74)$$

Here, the inverse Laplacian is identified through the Fourier transform  $\mathcal{F}$  and the inverse Fourier transform  $\mathcal{F}^{-1}$  as

$$(-\Delta)^{-1}(v) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{|\xi|^2} \mathcal{F}(v) \right).$$

In what follows we recall some of the basic properties of these operators.

**Lemma 6** *The operator  $\mathcal{R}$  is a continuous linear operator from  $L^p(\mathbb{R}^3)$  into  $L^p(\mathbb{R}^3)$  for any  $1 < p < \infty$ . In particular, the following estimate holds true :*

$$\|\mathcal{R}[v]\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq c(p) \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \quad \text{for all } v \in L^p(\mathbb{R}^3).$$

*The operator  $\mathcal{A}$  is a continuous linear operator from  $L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$  into  $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ , and from  $L^p(\mathbb{R}^3)$  into  $L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$  for any  $1 < p < 3$ .*

Moreover,

$$\|\nabla \mathcal{A}[v]\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(p) \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, \quad 1 < p < \infty.$$

The proof of this lemma can be found e.g. in [78], Section 10.16. In what follows we present two important properties of commutators involving Riesz operator. The first result is a straightforward consequence of the *Div-Curl* lemma, its proof can be found in [74], Lemma 5.1.

**Lemma 7** *Let*

$$\mathbf{V}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{V} \quad \text{weakly in } L^p(\mathbb{R}^3), \quad r_\varepsilon \rightharpoonup r \quad \text{weakly in } L^q(\mathbb{R}^3),$$

where

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s} < 1.$$

Then

$$\mathbf{V}_\varepsilon \mathcal{R}(r_\varepsilon) - r_\varepsilon \mathcal{R}(\mathbf{V}_\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{V} \mathcal{R}(r) - r \mathcal{R}(\mathbf{V}) \quad \text{weakly in } L^s(\mathbb{R}^3).$$

The next lemma can be deduced from the general results of Bajšanski and Coifman [10], and Coifman and Meyer [50].

**Lemma 8** *Let*  $w \in W^{1,r}(\mathbb{R}^3)$  *and*  $\mathbf{V} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  *be given, where*  $1 < r < 3$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{1}{3} < \frac{1}{s} < 1$ . *Then for all such*  $s$  *we have*

$$\|\mathcal{R}[w\mathbf{V}] - w\mathcal{R}[\mathbf{V}]\|_{W^{\alpha,s}(\mathbb{R}^3)} \leq c(s, p, r) \|w\|_{W^{1,r}(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{V}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

where  $\alpha$  is given by  $\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{3} - \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ .

Here,  $W^{\alpha,s}(\mathbb{R}^3)$  for  $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$  denotes the Sobolev-Slobodeckii space (see e.g. [173]). The proof can be found in [78], Section 10.17.

**The renormalized continuity equation.** Below we recall the definition of the renormalized solution to the continuity equation.

**Definition 3** *The pair*  $(\rho, u)$  *is called a renormalized solution to the continuity equation, if equation (3.3a) holds in*  $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$  *provided that*  $\rho, u$  *is prolonged by 0 outside*  $\Omega$  *and equation*

$$\partial_t b(\rho) + \operatorname{div} (b(\rho)u) + (\rho b'(\rho) - b(\rho)) \operatorname{div} u = 0, \tag{3.75}$$

*holds in*  $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$  *provided that*  $\rho, u$  *is prolonged by 0 outside*  $\Omega$ , *for any function*  $b \in \mathcal{C}[0, \infty) \cap \mathcal{C}^1(0, \infty)$ , *such that*  $sb'(s) \in \mathcal{C}[0, \infty)$ .

The following result is a consequence of technique introduced and developed by DiPerna and Lions [64].

**Lemma 9** *Let  $\rho \in L^p((0, T) \times \Omega)$ ,  $p \geq 2$ ,  $\rho \geq 0$ , a.e. in  $\Omega$  and  $u \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$  satisfy continuity equation*

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0$$

*in  $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$  (prolonged by 0 outside  $\Omega$ ). Then the renormalized continuity equation (3.75) holds in  $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$  for any function  $b$  satisfying*

$$b \in \mathcal{C}[0, +\infty) \cap \mathcal{C}^1(0, +\infty), \quad |b'(t)| \leq ct^{-\lambda_0} \quad t \in (0, +\infty), \quad \lambda_0 < 1 \quad (3.76)$$

*and growth conditions at infinity*

$$|b'(t)| \leq ct^{\lambda_1}, \quad t \geq 1 \quad \text{where } c > 0, \quad -1 < \lambda_1 \leq \frac{p}{2} - 1. \quad (3.77)$$

A general reference here is [78], Section 10.18, see also [146].

# Chapitre 4

## Illustrations numériques

Nous présentons dans ce chapitre les travaux numériques en cours concernant la simulation numérique des modèles de congestion douce qui illustrent la transition de ces modèles compressible vers les régimes hybrides compressible/incompressible des modèles de congestion dure.

Nous proposons et comparons pour cela deux schémas numériques basés sur l’analogie avec les limites faible nombre de Mach.

Dans un premier temps nous rappelons les principales difficultés et techniques numériques mises en œuvre dans la littérature concernant la simulation d’écoulements à tout nombre de Mach. Celles-ci reposent principalement sur une discrétisation spécifique du terme de pression.

Nous adaptons dans les Sections 3 et 4 ces techniques pour les équations de Navier-Stokes avec pression singulière. Nous nous appuyons pour cela sur les schémas mis en place par DEGOND, HUA, NAVORET [58] dans le cadre des équations d’Euler et nous proposons deux schémas pour traiter la viscosité additionnelle.

La suite de ce chapitre est rédigée en anglais.

### 1 Introduction

There are basically two approaches for the numerical treatment of a sharp interface such as the one which separates compressible and incompressible phases in our hard congestion model. The first one corresponding to the so-called *front tracking methods* consists in following explicitly the free boundary. The evolution interface is described by the displacement of a finite number of points whose positions are computed at each time step. Famous methods falling into this category are for instance ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) method and the MAC method (Marker-And-Cell). On the contrary, in *front capturing methods*, the boundary is characterized implicitly by means of an auxiliary function as done in the VOF (Volume-Of-Fluid) and Level Set methods. We refer to [176] and the reference therein for an introduction and a global overview of the methods employed for Free Boundary Problems.

In our situation, we have seen that the interface between the compressible domain and the incompressible one may be very irregular. If initially the whole domain is uncongested, congested zones may appear and disappear during the evolution of the system. This may be the source of difficulties if we want to simulate the hard congestion system via front-tracking algorithms.

The implementation of our approximate soft congestion system for small values of the parameter  $\varepsilon$  represents an interesting alternative to capture the phase transitions in the limit system since we have proved the rigorous link between two systems at the continuous level. Because, this transition zone is encoded by the density and the pressure, this method can be related to front-capturing algorithms presented before.

The question that we address in this study is to find time and space discretizations of the soft congestion model which allow to capture the behaviour of the solutions of the limit hard congestion system as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Indeed, it is not because the pressure is singular that the numerical solution (computed by means of standart numerical schemes for compressible flows) will automatically satisfy the congestion constraint.

Since the pressure of the soft congestion system becomes stiffer and stiffer as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , it is crucial to develop a scheme which is uniformly stable with respect to the parameter  $\varepsilon$ . We will have furthermore to pay attention to the accuracy of the scheme which can be problematic for singular systems. The final aim of the numerical analysis is to ensure the asymptotic consistency of the scheme with the limit system and to mimic as far as possible the theoretical arguments given in the previous sections.

These two properties of uniform stability and asymptotic consistency form what is usually called the *Asymptotic Preserving (AP) property*.

The singular limit passage that we study links a fully compressible system with a two-phase compressible / incompressible system. In that sense it can be related to local low Mach number limits in compressible flows for which a very large literature exists, as we will see in the next section. For the sequel, we will have to keep in mind the important difference between the two situations which is due to the physical interpretation of the singular limit passage. In the low Mach number case, the singular behaviour is entirely encoded in the Mach number which can be seen as an external parameter of the adimensionalized pressure. In our case, the singular limit is the result of a compensation of two effects : the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  and the congestion effects as  $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho^*$ . This difference will be crucial for the discretization of our equations.

From a more general point of view, our problem falls into the category of stiff problems which require for stability and accuracy an implicit treatment of some parts of the equations, especially of the stiff terms. In view of the asymptotic consistency, one needs to adapt the time and space discretizations in order make appear, in a way or another, the limit system in the discretized equations.

In the sequel we will present first the main ideas of numerical schemes designed to deal with all Mach flows. We will then adapt the methods to design a relevant numerical scheme

for our singular limit which involves a congestion constraint.

## 2 Numerical simulation of fluid flows at all Mach numbers

**Presentation of the problem.** Let us consider for that purpose the isentropic Navier-Stokes equations written as

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \frac{1}{\operatorname{Ma}^2} \nabla p(\rho) - \operatorname{div} \mathbb{S}(u) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

where the Mach number  $\operatorname{Ma}$  is defined as the ratio between the characteristic speed of the flow and the speed of sound. Formally, if the speed of the flow becomes negligible compared the speed of sound, *i.e.*  $\operatorname{Ma} = \varepsilon \rightarrow 0$ , and if we expand the variable with respect to  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^{(0)} + \varepsilon^2 \rho^{(2)} + \dots \\ u &= u^{(0)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

then the limit system obtained at order 0 in  $\varepsilon$  corresponds to the homogeneous incompressible Navier-Stokes equations

$$\begin{cases} \rho(t, x) = \rho^{(0)} \\ \operatorname{div} u^{(0)} = 0 \\ \partial_t u^{(0)} + (u^{(0)} \cdot \nabla) u^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla p^{(2)} - \operatorname{div} \mathbb{S}(u^{(0)}) = 0 \end{cases}$$

This limit passage has been proved theoretically by KLAINERMAN and MAJDA [121]. From a numerical point of view, it is a well-known fact that standard numerical methods that have been developed for compressible flows break down or do not function properly when  $\operatorname{Ma} = \varepsilon \lesssim 0.2$ . Indeed, for classical shock-capturing explicit schemes, the stability condition (CFL condition) requires the time step  $\Delta t$  to be such that

$$\Delta t \leq \nu \frac{\Delta x}{|u_{\max}| + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{p'(\rho_{\max})}}$$

for some  $\nu \in [0, 1]$ . Moreover one needs to ensure that the local numerical diffusion, given by

$$\Delta x \frac{|u_{\max}| + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{p'(\rho_{\max})}}{2\nu}$$

does not dominate the physical viscosity  $\mathbb{S}$  and does not perturb the global behaviour of the solution. This requires that  $\Delta t = o(\varepsilon \Delta x) = o(\varepsilon^2)$  which tends thus very rapidly to 0 and which is not compatible with the limit incompressible equations where usually only  $\Delta t = O(\Delta x)$  is imposed.

Moreover, as identified by GIULLARD and VIOZAT [92] (see also DELLACHERIE [61]), if the pressure fluctuations on the continuous compressible system are of order  $\varepsilon^2$ , a standard upwind scheme produces only the variations of order one in  $\varepsilon$ . This reveals, in addition to the previous problem of stability, a problem of accuracy in the approximation of the gradient of the pressure.

**Methods.** Numerous studies have been conducted since many years to tackle this issue. The first approach developed by TURKEL [174] relies on the introduction of preconditioning matrices which alter the eigenvalues of the system and reduce the stiffness of the problem. However, in most cases, these methods are applied to steady-state systems because of the loss of accuracy in time when one multiplies the time-derivative by the preconditioning matrix. Moreover, studies show that the schemes based on preconditioning are not accurate in compressible regions where the Mach number is of order one.

An other approach has been proposed to develop all-speed schemes, efficient for both fully compressible and low Mach number regimes, are the *pressure-correction methods*. These methods, originally used for incompressible flows, consist basically in two steps performed sequentially : first a predicted velocity is computed by means of a semi-explicit discretization of the momentum equation, second the pressure is evaluated through an elliptic equation and the velocity is updated by taking into account this correction of pressure. The elliptic equation (or Helmholtz equation) on the pressure is the corner stone of the schemes, it describes the propagation of the acoustic waves at high speed. The first pressure-correction method for compressible flows, the so-called ICE (Implicit Continuous Eulerian) method has been first developed by HARLOW and AMSDEN [95] and it has been the purpose of many works since then. We will not give an exhaustive overview of all the pressure-correction methods existing in the literature, we refer to the recent works of HERBIN, KHERIJI, LATCHÉ [85, 101, 119] for a more precise description. However, since the formulation of these methods is not always conservative they may lead to incorrect wave speeds. To preserve the conservability, time semi-implicit discretizations have been introduced : the mass flux as well as the pressure in the momentum equation are treated implicitly while all the other terms are treated explicitly. By doing so the convective flux and the pressure flux are decoupled in the resolution, as we can see by writing

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \operatorname{div}((\rho u)^{n+1}) = 0 \end{array} \right. \quad (4.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \operatorname{div}(\rho u \otimes u)^n + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla p(\rho^{n+1}) = 0 \end{array} \right. \quad (4.2b)$$

and by combining the equation, for instance as

$$\frac{(4.2a)_n - (4.2a)_{n-1}}{\Delta t} - \operatorname{div} (4.2b)$$

to obtain the elliptic equation

$$\frac{\rho^{n+1} - 2\rho^n + \rho^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta p(\rho^{n+1}) - \nabla^2 : (\rho u \otimes u)^n = 0.$$

The full implicit treatment of the pressure ensures a stability condition which is uniform with respect to the parameter  $\varepsilon$  but induces a lot of diffusion.

Splitting of the pressure between a stiff part, treated implicitly, and a non-stiff part, treated explicitly are used to preserve an uniform stability condition and reduce the numerical diffusion. As a first work in this direction, one can cite the paper of KLEIN [122] whose splitting relies on the asymptotic expansion of the pressure with respect to the Mach number. The pressure correction  $p^{(2)}$  is treated implicitly while the lower orders are treated explicitly. Other propositions of splitting of the pressure have been proposed, such aso

$$p(\rho) = \underbrace{\alpha p(\rho)}_{\text{explicit}} + \underbrace{\frac{1 - \alpha \varepsilon^2}{\varepsilon^2} p(\rho)}_{\text{implicit}}$$

where  $\alpha$  is an *ad hoc* parameter which satisfies  $\alpha \leq 1/\varepsilon^2$ . The choice of  $\alpha$  depends on the space and time steps and on the fluid speed. This scheme is used by DEGOND and TANG in [60] and by CORDIER, DEGOND and KUMBARO in [52] for the full Euler and Navier-Stokes. Later HAACK, JIN and LIU [94] have proposed an other splitting

$$p(\rho) = \underbrace{\frac{p(\rho) - a(t)\rho}{\varepsilon^2}}_{\text{explicit}} + \underbrace{\frac{a(t)\rho}{\varepsilon^2}}_{\text{implicit}}$$

where the mass flux is also split as

$$\rho u = \underbrace{\alpha \rho u}_{\text{explicit}} + \underbrace{(1 - \alpha) \rho u}_{\text{implicit}}.$$

Then, by choosing

$$a(t) = \min p'(\rho),$$

the authors ensure that the wave speeds will always be real and thus that the explicit part of the system will be hyperbolic.

Recently SCHÜTZ and NOELLE in [163] have proposed a new class of splittings for stiff linear hyperbolic systems based on characteristic decomposition which enables to cancel the commutator corresponding to coupled effects of the stiff and the non-stiff part of the flux and which improves the stability of the scheme. This analysis has led to the so-called RS-IMEX splittings where the implicit and explicit parts of the flux are determined by means of a linearization of the flux around a reference solution (RS). This has been applied in [117] to isentropic Euler equations.

Let us finally mention an additional method called *Gauge method* which is based on the Hodge (also called Gauge) decomposition of the velocity or momentum and introduced



by DEGOND, JIN, LIU [59] The compressible velocity, or momentum in order to keep a conservative scheme, is decomposed between a divergence free part and an irrotational part

$$q = a - \nabla\varphi, \quad \operatorname{div} a = 0.$$

The idea of this decomposition comes from the formal expansion of the variables

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^{(0)} + \varepsilon^2 \rho^{(2)} + \dots \\ a &= a^{(0)} + \dots \\ \varphi &= \varepsilon^2 \varphi^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

where we observe that the divergence-free part  $a$  corresponds to a "slow variable" while the potential  $\varphi$  corresponds to a "fast variable". It seems then natural to decouple this two dynamics in the resolution of the momentum.

Once the elliptic equation on the correction pressure is computed, the potential associated to the irrotational part can be determined from the mass equation using the fact that

$$\Delta\varphi = -\operatorname{div} q = \partial_t \rho,$$

Then divergence free part  $a$  is updated by the momentum equation with a total pressure which is the sum of the pressure and of  $\varphi$ . Even if this method is less developed in the literature due to the complexity of the schemes, we will use this method for our compressible Navier-Stokes equations with singular pressure because we expect that it is more robust to capture the incompressible regimes (see also [58]).

**Asymptotic preserving schemes.** In [113] (see also [114]), JIN introduces a consistency criterion for numerical schemes. Let us consider a continuous problem  $(\mathcal{P}^\varepsilon)$  which depends on a small parameter  $\varepsilon$  and which converges as  $\varepsilon \rightarrow 0$  towards the problem  $(\mathcal{P})$ . A numerical scheme is said to be Asymptotic Preserving (AP), if *it preserves the discrete analogy of the asymptotic passage from  $(\mathcal{P}^\varepsilon)$  to  $(\mathcal{P})$* . The scheme at  $\varepsilon$  fixed gives then a stable and consistent discretization of  $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ , and as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , the discretization parameters being fixed, the numerical scheme is a stable and consistent discretization of the limit system  $(\mathcal{P})$ . We illustrate this concept on Figure 4.1.

Additionally, if the scheme is stable uniformly with respect to  $\varepsilon$ , the scheme is said Asymptotically Stable (AS). Of course, the two concepts are linked, but it may happen that a scheme enjoys one of the properties without the other one. In [1], the authors show that an IMEX splitting, even with two parts which are stable with respect to the CFL condition, gives an unconditionally unstable scheme in  $L^2$  norm. If an asymptotically stable and asymptotic preserving scheme is used, a uniform accuracy for all range of  $\varepsilon$  is expected.

An asymptotic preserving scheme enjoys many advantages compared with a model coupling strategy which would solve  $(\mathcal{P}^\varepsilon)$  in the part where  $\varepsilon$  is not too small and  $(\mathcal{P})$  where  $\varepsilon$  is very small. Indeed, a AP/AS scheme will switch automatically from one model

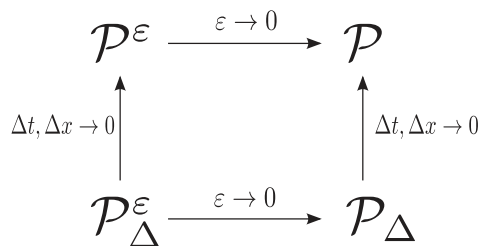


FIGURE 4.1 – AP property.

to the other, whereas a scheme based on a domain decomposition requires furthermore transmission conditions between the different domains as well as an approximation of the geometry of the interface which can move in time.

The design of AP schemes for the low Mach number limits has been the purpose of several studies in the recent years : DEGOND et al. [56] for a Euler system in a magnetic field, DEGOND, TANG [60] and HAACK, JIN, LIU [94], NOELLE et al. [145] for the isentropic Euler/Navier-Stokes equations, DEGOND, JIN, LIU [59] by using a Gauge method, CORDIER, DEGOND, KUMBARO [52] for the full Euler and Navier–Stokes equations, GRENIER, VILA, VILLEDIEU [91] for two–phase flows.

In order to prove the AP property, the IMEX splitting of the equations is crucial as explained by DEGOND and TANG [60]. In particular it is important to treat implicitly the flux in the mass equation as presented in (4.2).

### 3 Time discretization of the singular Navier–Stokes equations

We are looking for a specific splitting and resulting IMEX discretization of the singular pressure which will ensure the uniform stability of the scheme with respect to the parameter  $\varepsilon$  and the consistency in the congested regions. We follow in our approach the study of DEGOND, HUA and NAVORET [58] and add the effect of a constant viscosity.

**Difficultes compared to the low Mach number limit.** Our singular system, with homogeneous maximal density constraint, writes as

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) + \nabla \pi_\varepsilon(\rho_\varepsilon) - \operatorname{div} \mathbb{S}(u_\varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

with

$$\pi_\varepsilon(\rho) = \varepsilon \left( \frac{\rho}{1 - \rho} \right)^\gamma, \quad \gamma > 1.$$

The limit passage as  $\varepsilon \rightarrow 0$  towards a congested results therefore from the combination of both effects :  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $\rho_\varepsilon \rightarrow 1$  sufficient fast to ensure that  $\pi_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \rightarrow \pi > 0$ .

Compared to the low Mach number limit, the first difficulty to deal with is the singularity of the pressure  $\pi_\varepsilon$  as  $\rho \rightarrow 1$ . In particular we have to ensure that the numerical solutions do not exceed the maximal density constraint and the numerical oscillations on the density close to this constraint have to be controlled.

Furthermore, we expect that the splittings of pressure introduced in the literature for the low Mach limit will fail both in terms of stability and accuracy in our case. Indeed it is not sufficient for us to split the pressure with an explicit part uniformly bounded with respect to  $\varepsilon$ , since it is the derivative of the pressure

$$\pi'_\varepsilon(\rho) = \varepsilon \frac{\rho^{\gamma-1}}{(1-\rho)^{\gamma+1}},$$

stiffer than  $\pi_\varepsilon$  close to 1, which is involved in the speed of waves

$$\lambda = u_\varepsilon \pm \sqrt{\pi'_\varepsilon(\rho)} = u_\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{\rho^{\gamma-1}}{(1-\rho)^{\gamma+1}}}.$$

**IMEX splitting.** For the mass equation we treat implicitly the flux

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \operatorname{div}(\rho u)^{n+1} = 0 \quad (4.4)$$

In the momentum, only the stiff part is treated implicitly

$$\frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \operatorname{div}(\rho u \otimes u)^n + \nabla \pi_\varepsilon(\rho^{n+1}) - \operatorname{div} \mathbb{S}(u^n) = 0 \quad (4.5)$$

We decompose thus the pressure  $\pi_\varepsilon$  into two parts

$$\pi_\varepsilon(\rho) = \pi_\varepsilon^{\operatorname{im}}(\rho) + \pi_\varepsilon^{\operatorname{ex}}(\rho) \quad (4.6)$$

which depend on an additional parameter denoted  $\delta$

$$\pi_\varepsilon^{\operatorname{ex}}(\rho) = \begin{cases} \frac{\pi_\varepsilon(\rho)}{2} & \text{if } \rho \leq 1 - \delta \\ \frac{1}{2} \left[ \pi_\varepsilon(1 - \delta) + (\rho - 1 + \delta) \pi'_\varepsilon(1 - \delta) + \frac{1}{2} (\rho - 1 + \delta)^2 \pi''_\varepsilon(1 - \delta) \right] & \text{if } \rho > 1 - \delta \end{cases}$$

In order to ensure that the contribution of  $\pi_\varepsilon^{\operatorname{ex}}$  in the elliptic equation satisfied by the pressure (see (4.7)) remains bounded with respect to  $\varepsilon$ , we need to choose  $\delta$  big enough such that the second derivative of  $\pi_\varepsilon^{\operatorname{ex}}$  remains bounded with respect to  $\varepsilon$ . An appropriate choice is then

$$\delta = \varepsilon^{1/(\gamma+2)}.$$

The second part  $\pi_\varepsilon^{\operatorname{im}}$ , defined as the difference between the total potential  $\pi_\varepsilon$  and  $\pi_\varepsilon^{\operatorname{ex}}$ , supports the singularity close to  $\rho = 1$ . We illustrate this splitting on Figure 4.2. The

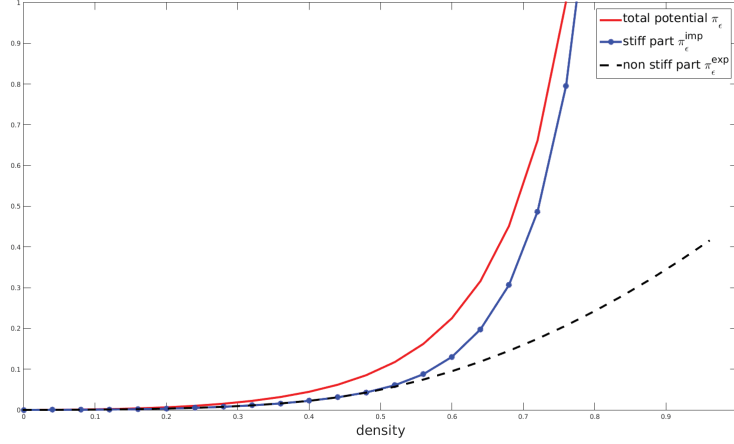


FIGURE 4.2 – Splitting of  $\pi_\varepsilon$  into a singular part  $\gamma_\varepsilon^{\text{im}}$  and a bounded one  $\pi_\varepsilon^{\text{ex}}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\delta = \varepsilon^{1/(\gamma+2)}$

idea is now to treat implicitly in time the singular part  $\pi_\varepsilon^{\text{im}}$  and explicitly  $\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}$ . The CFL condition computed from  $\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\max |u_\varepsilon| + \sqrt{|(\pi_\varepsilon^{\text{ex}})'(\rho_\varepsilon)|}}$$

is thus no longer stiff which avoids the time step problems that we had on the original system.

Denoting  $q = \rho u$  the momentum, we take the divergence of the momentum equation (4.5) to get

$$\operatorname{div} q^{n+1} = \operatorname{div} q^n - \Delta t \nabla^2 : \left( \frac{(q^n \otimes q^n)^2}{\rho^n} \right) - \Delta t \Delta \pi_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n) - \Delta t \Delta \pi_\varepsilon^{\text{im}}(\rho^{n+1}) + \Delta t \nabla^2 : \mathbb{S}(u^n)$$

inserting it then in (4.4), we obtain the reformulated time-discretized equation

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon^{n+1} - (\Delta t)^2 \Delta (\pi_\varepsilon^{\text{im}})(\rho_\varepsilon^{n+1}) \\ = \rho^n - \Delta t \operatorname{div} q_\varepsilon^n + (\Delta t)^2 \nabla^2 : \left( \frac{(q^n \otimes q^n)^2}{\rho^n} \right) - (\Delta t)^2 \Delta \pi_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n) - (\Delta t)^2 \nabla^2 : \mathbb{S}(u^n) \end{aligned} \quad (4.7)$$

The idea this equation in terms of  $\pi_\varepsilon^{\text{im}}(\rho^{n+1}) = (\pi_\varepsilon^{\text{im}})^{n+1}$  writing that  $\rho^{n+1} = \rho((\pi_\varepsilon^{\text{im}})^{n+1})$ . The main point is that we want to ensure the constraint  $\rho^n \leq 1$ , which is not directly guaranteed by the equation in  $\rho^{n+1}$ . The second point is that we ensure positivity of  $(\pi_\varepsilon^{\text{im}})^{n+1}$  (and thus of  $\rho^{n+1}$ ) because the equation is elliptic and satisfies a maximum principle.

**Gauge Method.** We are now looking for a method to recover  $q^{n+1}$ . To do so, DEGOND, HUA and NAVORET in [58] propose two types of methods. In the first one, called the *Direct Method* one solves directly the discrete momentum equation (4.5). The other method, called *Gauge Method* has been introduced for the low Mach limit by DEGOND, LIN and LIU in [59]. The idea is to decompose the momentum as

$$q^{n+1} = a^{n+1} - \nabla\varphi^{n+1}$$

between a divergence-free part  $a$  (slow variable) and an irrotational part  $\nabla\varphi^{n+1}$  (fast variable). The momentum  $q^{n+1}$  is then computed via the following procedure

$$\Delta\varphi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}(\rho^{n+1} - \rho^n) \quad (4.8)$$

$$\Delta P^{n+1} = -\nabla^2 : \left( \frac{(q^n \otimes q^n)^2}{\rho^n} \right) - \Delta\pi_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n) + \nabla^2 : \mathbb{S}(u^n) \quad (4.9)$$

$$a^{n+1} = a^n - \Delta t \nabla^2 : \left( \frac{(q^n \otimes q^n)^2}{\rho^n} \right) - \Delta t \nabla\pi_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n) + \Delta t \nabla P^{n+1} + \Delta t \nabla^2 : \mathbb{S}(u^n) \quad (4.10)$$

$$q^{n+1} = a^{n+1} - \nabla\varphi^{n+1}. \quad (4.11)$$

**Remark :** Note that the "total pressure"  $P^{n+1}$  is in fact defined as

$$P^{n+1} = (\pi_\varepsilon^{\text{im}})^{n+1} - \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t}.$$

With this decomposition of the momentum  $q$  and the specific treatment of the irrotational part  $\nabla\varphi$ , one can expect the Gauge method to capture with robustness the incompressible (congested) regions. It is nevertheless difficult to formalize this intuition, but the numerical simulations in the test cases of [58] confirm this fact. Indeed, the Direct method creates some numerical oscillations at transitions between compressible and incompressible zones that are less important with the Gauge method. Note that the Gauge scheme presents also some drawbacks compared to the Direct method, in particular it is more diffusive in low density regions.

Since we are particularly interested by the high density regions and the influence of the viscosity on the dynamics in these zones, we decide to implement the Gauge scheme.

## Alternative treatment of the viscosity

In the previous time semi-discretization we chose to include the viscosity directly in the system. This leads us to treat explicitly this viscosity, otherwise it would be impossible to solve, as we propose, the pressure equation as a first step. As we will see in the simulations, the explicit treatment modifies the CFL stability condition of the Euler part and it may become problematic for relatively large viscosity coefficients.

We propose here an alternative to treat the viscosity fully implicitly without further stability condition. Our method consists in splitting the effects of viscosity by solving first the Euler system by the Gauge method and by solving in a second time a diffusion equation. The time-semi-discretization scheme then reads as

$$\rho_\varepsilon^{n+1} - (\Delta t)^2 \Delta(\pi_\varepsilon^{\text{im}})(\rho_\varepsilon^{n+1}) \quad (4.12)$$

$$= \rho^n - \Delta t \operatorname{div} q_\varepsilon^n + (\Delta t)^2 \nabla^2 : \left( \frac{(q^n \otimes q^n)^2}{\rho^n} \right) - (\Delta t)^2 \Delta \pi_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n)$$

$$\Delta \varphi^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} (\rho^{n+1} - \rho^n) \quad (4.13)$$

$$\Delta P^{n+1/2} = -\nabla^2 : \left( \frac{(q^n \otimes q^n)^2}{\rho^n} \right) - \Delta \pi_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n) \quad (4.14)$$

$$a^{n+1/2} = a^n - \Delta t \nabla^2 : \left( \frac{(q^n \otimes q^n)^2}{\rho^n} \right) - \Delta t \nabla \pi_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n) + \Delta t \nabla P^{n+1/2} \quad (4.15)$$

$$q^{n+1/2} = a^{n+1/2} - \nabla \varphi^{n+1/2} \quad (4.16)$$

$$\rho^{n+1} \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} - \operatorname{div} \mathbb{S}(u^{n+1}) = 0 \quad (4.17)$$

## 4 Space discretization of the one-dimensional singular equations

In this section we present the full discretization that we adopt for our one-dimensional numerical scheme. As DEGOND, HUA and NAVORET, we discretize the equations by means of centered finite differences. For simplicity, we only detail the case where the viscosity is included explicitly in the scheme.

In the following, the domain  $\Omega = [0, 1]$  (with periodic boundary conditions) is discretized as

$$x_0 = 0 < \dots < x_i = i\Delta x < \dots < x_M = 1.$$

We will denote  $\rho_i^n$ ,  $q_i^n$  and  $u_i^n$ ,  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,  $i \in \{0, \dots, M\}$ , the approximations of  $\rho$ ,  $q$ ,  $u$  at the discrete time  $t_n = n\Delta t$  and at position  $x_i = i\Delta x$ .

In order to explain the space discretization of (4.7)–(4.8)–(4.10)–(4.11), we first present the discretization of the Navier-Stokes system on  $(\rho, q)$  which is based on a finite volume approach.

The classical Rusanov scheme (also called local Lax-Friedrichs scheme [128]) for the conservation law

$$\partial_t U + \partial_x f(U) = 0$$

writes as

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0$$

with a numerical flux  $F_{i-1/2}^n$  which consists in a centered finite difference and which includes an artificial numerical diffusion  $C_{i-1/2}^n$

$$F_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} [f(U_i^n) + f(U_{i-1}^n) - C_{i-1/2}^n(U_i^n - U_{i-1}^n)]$$

the diffusion coefficient being computed as

$$C_{i-1/2}^n = \max |f'(U)|, \quad U \in [\min(U_{i-1}^n, U_i^n), \max(U_{i-1}^n, U_i^n)].$$

We apply this method to discretize the hyperbolic part of the Navier-Stokes system and we use a classical discretization of the Laplacian for the viscous term

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\Delta t} + \frac{G_{i+1/2}^n - G_{i-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{\nu}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = 0 \quad (4.19)$$

with

$$\begin{aligned} F_{i-1/2}^n &= \frac{1}{2} [q_i^{n+1} + q_{i-1}^{n+1} - C_{i-1/2}^n(\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)] \\ G_{i-1/2}^n &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(q_i^n)^2}{\rho_i^n} + \frac{(q_{i-1}^n)^2}{\rho_{i-1}^n} + \pi_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho_i^n) + \pi_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho_{i-1}^n) - C_{i-1/2}^n(q_i^n - q_{i-1}^n) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\pi_\varepsilon^{\text{im}}(\rho_i^{n+1}) + \pi_\varepsilon^{\text{im}}(\rho_{i-1}^{n+1})] \\ C_{i-1/2}^n &= \max \{ |u_i^n| + \sqrt{(\pi_\varepsilon^{\text{ex}})'(\rho_i^n)}, |u_{i-1}^n| + \sqrt{(\pi_\varepsilon^{\text{ex}})'(\rho_{i-1}^n)} \} \end{aligned}$$

We can then deduce the discretized pressure equation

$$\begin{aligned} & - \frac{(\Delta t)^2}{4(\Delta x)^2} [(\pi_\varepsilon^{\text{im}})_{i+1}^{n+1} - 2(\pi_\varepsilon^{\text{im}})_i^{n+1} + (\pi_\varepsilon^{\text{im}})_{i-1}^{n+1}] + \rho((\pi_\varepsilon^{\text{im}})_i^{n+1}) \\ &= \rho_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{i+1}^n - q_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [C_{i+1/2}^n(\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) - C_{i-1/2}^n(\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)] \\ &\quad + \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} [G_{i+3/2}^n - G_{i+1/2}^n - G_{i-1/2}^n + G_{i-3/2}^n] \\ &\quad + \nu \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^3} [u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n] \end{aligned}$$

Several discretizations of the Laplacian may be employed to solve the elliptic equation on the potential  $\varphi$ . The one that we choose corresponds to the so-called Gauge 1 method

in [58]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Delta x)^2} [\varphi_{i+1}^{n+1} - 2\varphi_i^{n+1} + \varphi_{i-1}^{n+1}] \\ &= \frac{1}{\Delta t} (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) - \frac{1}{2\Delta x} [C_{i+1/2}^n (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) - C_{i-1/2}^n (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)] \end{aligned}$$

We recall that we impose periodic boundary conditions on the domain. These periodic boundary conditions are also used to simplify the expression and the discretization of (4.10) on divergence-free part  $a$

$$a^{n+1} = a^n - \frac{\Delta t}{2} \sum_i [C_{i+1/2}^n (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) - C_{i-1/2}^n (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)]$$

and finally, by discretizing the gradient of  $\varphi$  with centred difference, we can update the momentum

$$q_i^{n+1} = a^{n+1} - \frac{1}{2\Delta x} (\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i-1}^{n+1}).$$

## 5 Discussion on the asymptotic consistency

We have thus build a numerical scheme which is uniformly stable with respect to the small parameter  $\varepsilon$ . The question now is to determine whether we recover or not as  $\varepsilon \rightarrow 0$  a discretization of the hybrid system

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \pi - \operatorname{div} \mathbb{S}(u) = 0 \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ (1 - \rho)\pi = 0, \quad \pi \geq 0 \end{cases}$$

which is the theoretical limit of the singular continuous system (4.3).

In the inviscid case, DEGOND, HUA, NAVORET address this question from a formal point of view. In particular they point out the difficulty to characterize the transition between congested and uncongested parts. Instead of considering the parts where  $\{\rho = 1\}$  they consider the congested parts where the limit pressure  $\pi$  is activated  $\{\pi > 0\}$ . In these zones they are able to prove that the scheme is asymptotically consistent with the limit system meaning that the limit of the numerical density is equal to 1 and the incompressibility constraint on the numerical velocity is satisfied.

In the first case where the viscosity is treated explicitly, we can follow the arguments of DEGOND et al.. Indeed, considering a region where the limit pressures  $\pi^n = \lim_{\varepsilon} \pi_{\varepsilon}^n$  and  $\pi^{n+1} = \lim_{\varepsilon} \pi_{\varepsilon}^{n+1}$  are positive, we directly deduce that the density in this zone is equal to 1 :  $\rho^n = \lim_{\varepsilon} \rho_{\varepsilon}^n = 1$ ,  $\rho^{n+1} = \lim_{\varepsilon} \rho_{\varepsilon}^{n+1} = 1$ . The way that we treat numerically the viscosity does not impact the equality (obtained by substitution of (4.11)–(4.10)–(4.8) in (4.7))

$$\frac{\rho_{\varepsilon}^n - \rho_{\varepsilon}^{n+1}}{\Delta t} = -\operatorname{div} q_{\varepsilon}^{n+1}$$



which gives at the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\operatorname{div} q^{n+1} = 0 \quad \implies \quad \operatorname{div} u^{n+1} = 0.$$

Remark that we assumed that  $\pi^{n+1} > 0$  because we cannot avoid declustering waves to appear in the system, there is nothing to prevent the jumps on the pressure which may reach instantaneously 0. Moreover we are not able to characterize the asymptotic consistency in the whole domain both in compressible and incompressible regions.

In the second case where the viscosity is treated implicitly in an additional diffusion step (4.17), we ensure with the same arguments that asymptotically  $u^{n+1/2}$  (the inviscid velocity) is divergence-free in the congested zones. To deduce the same for the final viscosity  $u^{n+1}$  we come back to (4.17)

$$\rho_\varepsilon^{n+1} \frac{u_\varepsilon^{n+1} - u_\varepsilon^{n+1/2}}{\Delta t} - \nu \partial_{xx}^2 u_\varepsilon^{n+1} = 0$$

Formally we can expect that  $\|\partial_x u_\varepsilon^{n+1}\|_{L^2}$  will converge to 0 as  $\varepsilon \rightarrow 0$  in the congested zones by taking the divergence of this equation and testing it by  $\partial_x u_\varepsilon^{n+1}$ .

## 6 Numerical results

We have implemented both schemes (with explicit or implicit treatment of the viscosity) in the one-dimensional domain  $\Omega = (0, 1)$  supplemented by periodic boundary conditions. We present here the simulations from the first scheme (4.7)–(4.11) with the explicit treatment of the viscosity. We set

$$\Delta x = 5.10^{-3}, \quad \Delta t = 5.10^{-5}.$$

In the test case that we present, the initial density is assumed to be constant and far from the maximal density which means that the pressure is constant, almost zero if  $\varepsilon$  is small, while the velocity is sinusoidal in order to produce a congestion effect around the value  $x = 0.5$

$$\rho^0 = 0.7, \quad u^0 = 2 \sin(2\pi x).$$

This initial data is represented on Figure 4.3.

As explained before, our explicit discretization is relevant for small values of the viscosity parameter, for our simulations we choose  $\mu = 0.01$ . Concerning the singular pressure, we set  $\gamma = 2$  and  $\varepsilon = 10^{-4}$ . We have then represented on Figures 4.4–4.5–4.6 the evolution of the density, the velocity and the pressure at times  $t = 0.05, 0.07, 0.1$ .

On the simulation we observe the congestion appearing at the middle of the channel, this is illustrated on Figure 4.5 by the apparition of a red zone on the horizontal axis of the density. This zone corresponds to the regions where  $\rho_\varepsilon > 1 - \varepsilon^{1/\beta}$  which is thus an approximation of the congested zone at the limit where  $\{\pi > 0\}$ .

As theoretically expected the velocity is flat in the red regions, which illustrates the incompressibility constraint satisfied by the limit solution in congested zones.

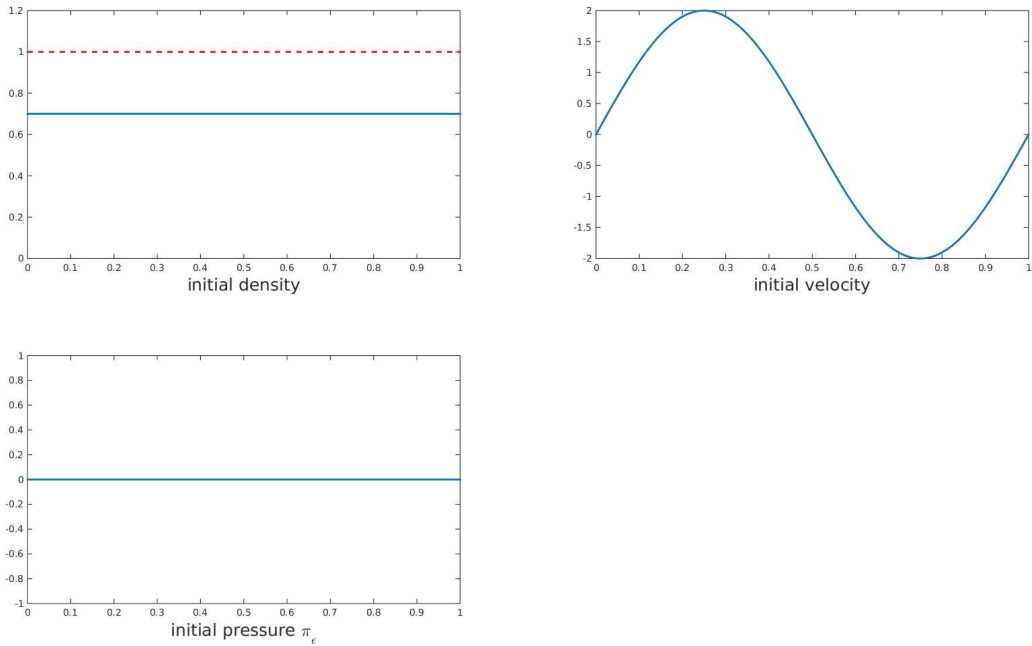


FIGURE 4.3 – Initial density, velocity and pressure,  $\gamma = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\delta = \varepsilon^{1/(\gamma+2)}$ ,  $\mu = 0.01$

This first result is encouraging since we manage to ensure the maximal density constraint and we are able to reproduce congested zones with incompressible dynamics. Nevertheless we observe oscillations on the pressure at the "transitions" between free and congested parts which were already there on the inviscid system. Further studies will be conducted in order to determine their origine.

## Comparison between the two schemes

In the previous simulations, we have only implemented the first numerical scheme which consists in treating the viscosity explicitly. Classically an explicit treatment of the diffusion terms is relevant for small values of the viscosities. We would like to compare here the explicit treatment of the viscosity with the alternative scheme that we proposed where the viscosity is treated implicitly.

Using the previous set of parameters, one can observe on Figure 4.7 as we expected that the second scheme is much more diffusive and cannot therefore reproduce the congestion in this case.

Now if we compare the two schemes for larger values of the viscosity  $\mu_0$ , the explicit treatment of the viscosity may be problematic since it introduces an additional restriction

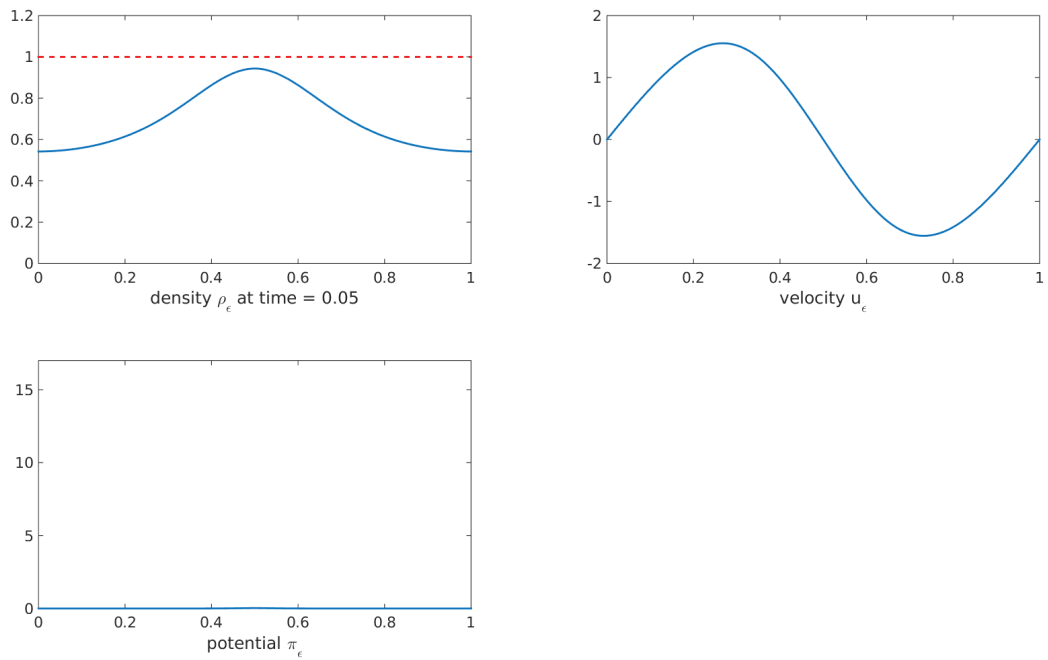


FIGURE 4.4 – Density, velocity and pressure at time  $t = 0.05$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\delta = \varepsilon^{1/(\gamma+2)}$ ,  $\mu = 0.01$

on the stability condition. That is what is illustrated on Figure 4.8, where all the parameters are the same except the viscosity which now  $\mu_0 = 0.5$ . We observe instabilities on the "explicit" scheme due to the large viscosity.

We have thus illustrated the drawbacks of both schemes, either in terms of stability or for capturing the congested zones. A lot of work has to be done to study more precisely the schemes in terms of stability and convergence as  $\varepsilon \rightarrow 0$  in order to determine the relevance of each method and to propose a possible coupling between the two approaches.

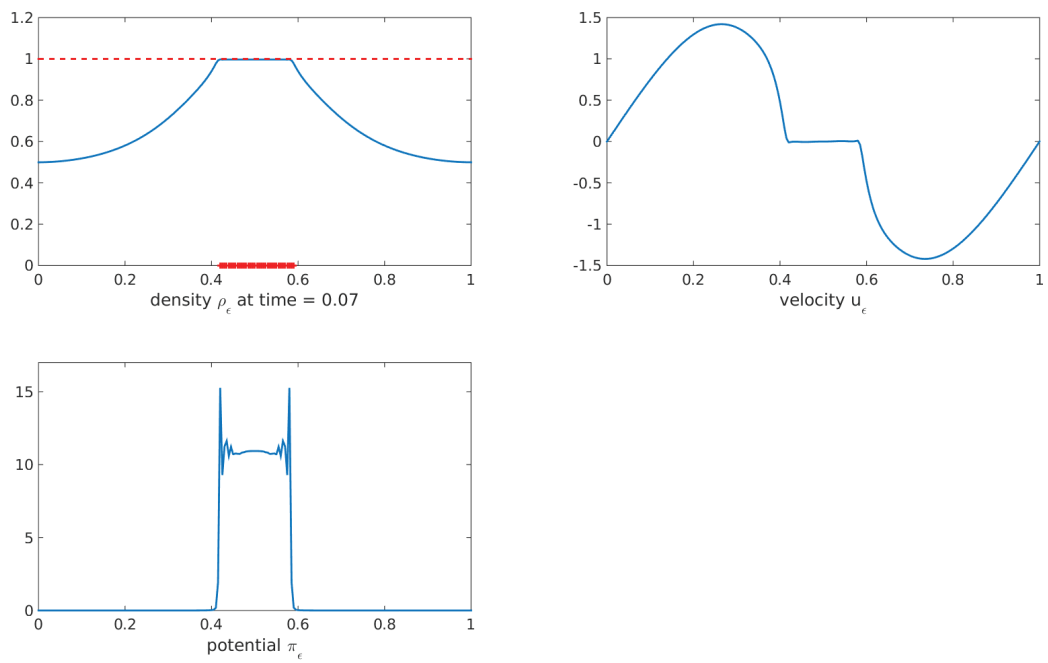


FIGURE 4.5 – Density, velocity and pressure at time  $t = 0.07$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\delta = \varepsilon^{1/(\gamma+2)}$ ,  $\mu = 0.01$

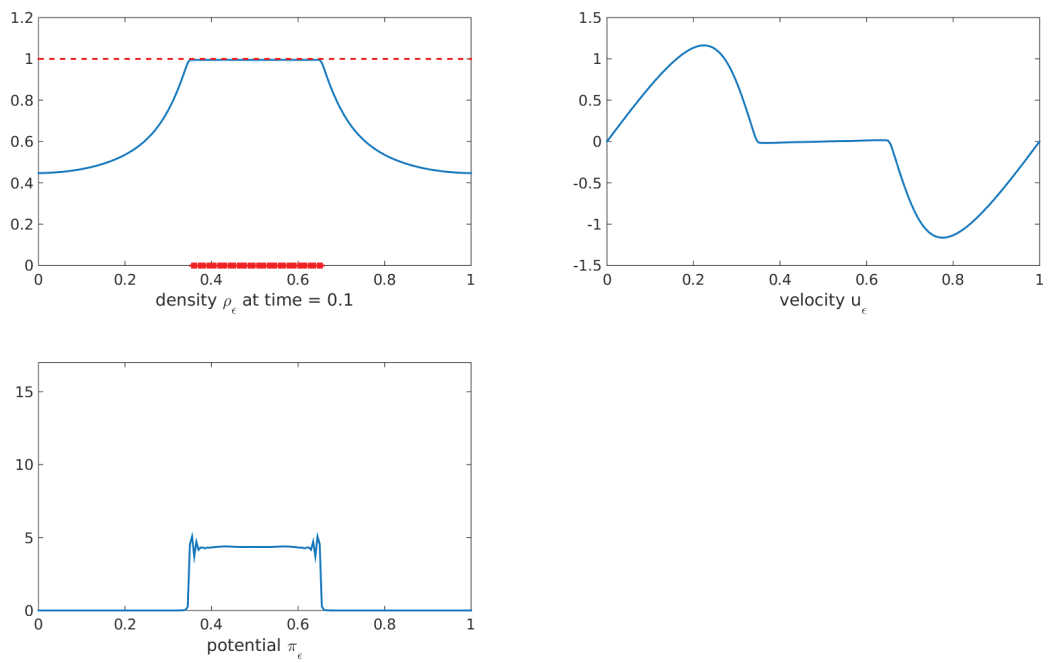


FIGURE 4.6 – Density, velocity and pressure at time  $t = 0.1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\delta = \varepsilon^{1/(\gamma+2)}$ ,  $\mu = 0.01$

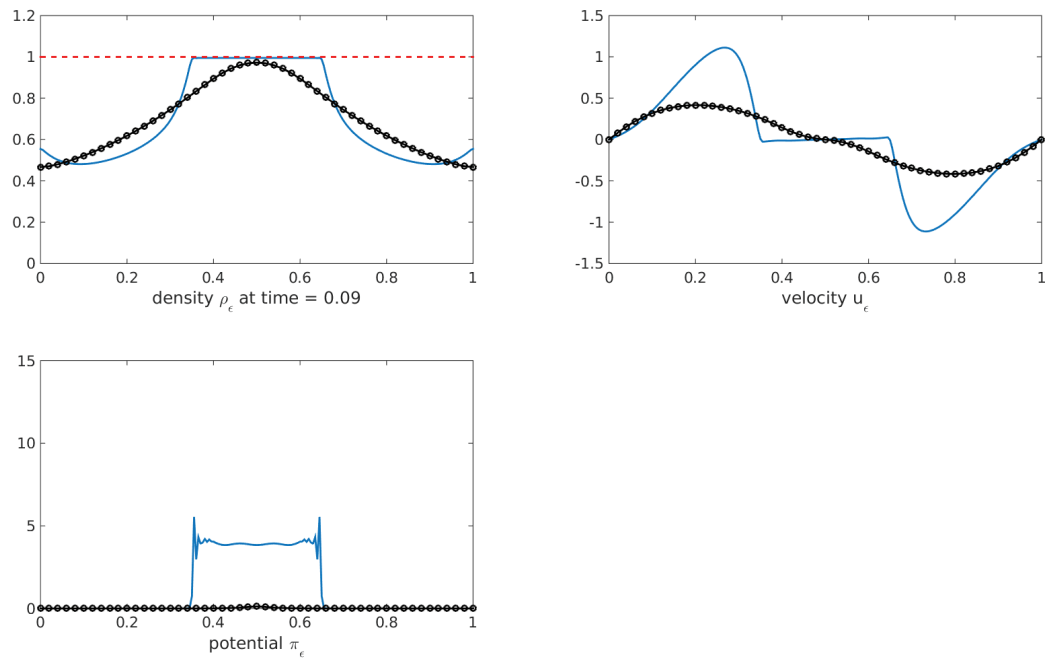


FIGURE 4.7 – First comparison between the "explicit scheme" and the "implicit scheme" with  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\mu = 0.01$ . With the implicit treatment of the viscosity (line with circles in black), the scheme is much more diffusive than with the explicit treatment (solid line in blue).

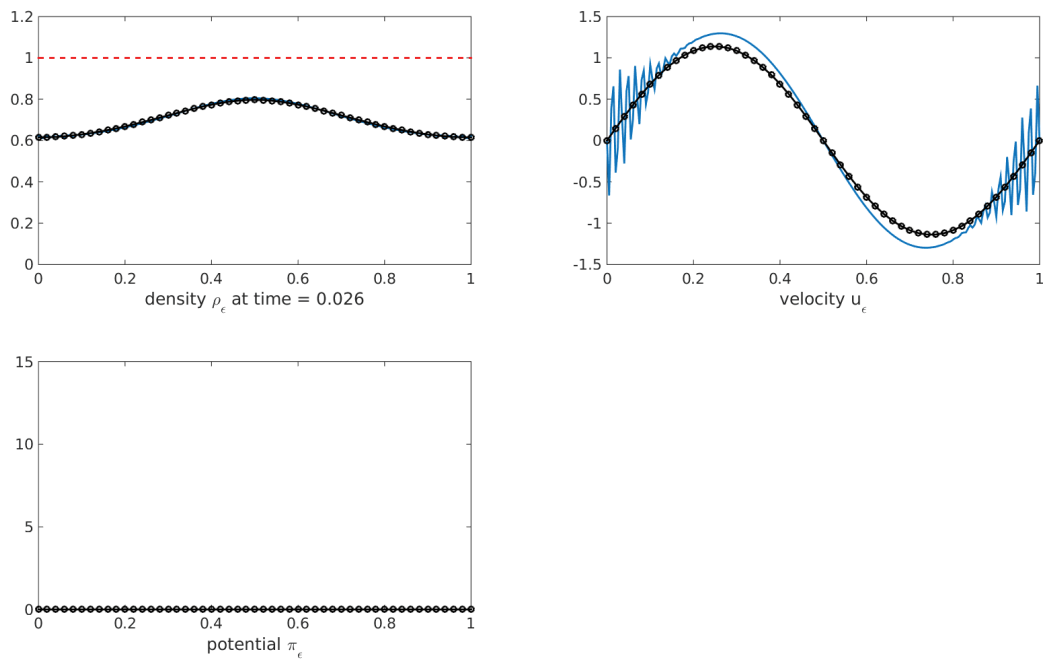


FIGURE 4.8 – Second comparison for a larger value of the viscosity,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\mu = 0.5$ . With the explicit treatment of the viscosity (solid line in blue) the scheme becomes unstable.

Deuxième partie

Milieux granulaires immergés





---

## Résumé

Nous nous intéressons dans cette partie à la modélisation de mélanges formés par des particules solides en immersion dans un fluide. On distingue usuellement deux régimes d'écoulement pour ce type de mélanges, celui des milieux granulaires dicté par les contacts entre les grains et celui des suspensions dicté par les interactions hydrodynamiques. Nous proposons dans cette partie un cadre mathématique permettant d'établir rigoureusement la transition entre ces deux régimes et apportons ainsi une première réponse mathématique à une question ouverte sur le plan physique (voir ANDREOTTI, FORTERRE, POULIQUEN [4]).

Dans les régimes de suspensions, nous prenons en compte d'une part des forces de lubrification au sein du fluide interstitiel qui, à l'échelle des particules solides, empêchent le contact entre les grains ; et d'autre part des forces d'interaction mutuelle entre les grains eux-mêmes. Ces deux types de forces s'expriment à l'échelle du mélange comme des fonctions de la fraction volumique de grains  $\Phi$  qui deviennent singulières lorsque  $\Phi$  tend vers  $\Phi^*$  la fraction volumique maximale. Par cette singularité, nous exprimons à l'échelle macroscopique le fait que les forces répulsives d'interaction et de lubrification empêchent la formation de zones congestionnées où  $\Phi = \Phi^*$ . Nous nous proposons d'étudier le système de suspension de type Navier-Stokes compressible

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Phi_\varepsilon + \operatorname{div}(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon) + \operatorname{div}(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) + \nabla \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) - \nabla(\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \operatorname{div} u_\varepsilon) \\ \quad - 2 \operatorname{div}(\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \mathbf{D}(u_\varepsilon)) + r \Phi_\varepsilon |u_\varepsilon| u_\varepsilon = 0 \\ 0 \leq \Phi < \Phi^* \end{array} \right. \quad (4.20)$$

où les forces singulières s'expriment aux travers des coefficients de pression  $\pi_\varepsilon$  et viscosités  $\mu_\varepsilon, \lambda_\varepsilon$ . Nous introduisons également les effets d'une force de traînée  $r \Phi_\varepsilon |u_\varepsilon| u_\varepsilon$ ,  $r > 0$ , qui résulte de l'interaction fluide/particules solides.

Dans ce cadre mathématique, la stabilité des solutions faibles quand le paramètre  $\varepsilon > 0$  est fixé, requiert en particulier la relation algébrique

$$\lambda_\varepsilon(\Phi) = 2(\mu'_\varepsilon(\Phi)\Phi - \mu_\varepsilon(\Phi)).$$

Afin d'assurer l'existence globale de solutions faibles, le système (4.20) est régularisé par troncature des termes de pression et de viscosités. On montre ensuite des estimations d'entropie similaires à celles de BRESCH, DESJARDINS, ZATORSKA [36] qui assurent l'existence de solutions faibles au système régularisé et, par passage à la limite, du modèle de suspension.

En imposant une relation (affine) entre la viscosité  $\mu_\varepsilon$  et  $\pi_\varepsilon$ , du type

$$\mu_\varepsilon(\Phi) = c_\mu(\pi_\varepsilon(\Phi)/c_\pi + \Phi)$$

on peut à nouveau établir la compacité des solutions, cette fois par rapport au paramètre  $\varepsilon$  et retrouver à la limite un système de type granulaire avec formation de zones

congestionnées et viscosité dépendant de la pression. Ce passage à la limite est original car contrairement aux étapes précédentes, les estimations d'entropies ne donnent pas de borne uniforme en  $\varepsilon$  sur la viscosité  $\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$ . C'est la relation algébrique liant  $\lambda_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$ , s'exprimant au travers de l'équation

$$\partial_t \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) + \operatorname{div}(\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)u_\varepsilon) = -\frac{\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)\operatorname{div} u_\varepsilon}{2},$$

qui montre la compacité faible du produit  $\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)\operatorname{div} u_\varepsilon$ . On obtient ainsi la convergence faible du produit vers une quantité  $\Lambda$  assimilée à une pression dans le modèle limite

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Phi + \operatorname{div}(\Phi u) = 0 \\ 0 \leq \Phi \leq \Phi^* \\ \partial_t(\Phi u) + \operatorname{div}(\Phi u \otimes u) + \nabla \Pi - \nabla \Lambda \\ \quad - 2c_\mu \operatorname{div}((\Pi/c_\pi + \Phi)D(u)) + r\Phi|u|u = 0 \\ \Phi \Pi = \Phi^* \Pi \geq 0 \\ \partial_t \Pi + \operatorname{div}(\Pi u) = -\frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Le système biphasique obtenu décrit les transitions entre phases congestionnées (incompressibles) où  $\Phi = \Phi^*$  et phases libres (compressibles) où  $\Phi < \Phi^*$ . La pression  $-\Lambda$  est liée à la contrainte d'incompressibilité  $\operatorname{div} u = 0$  dans les zones de concentration maximale où  $\Phi = \Phi^*$ .

L'originalité de ce système vient du potentiel  $\Pi$  qui peut être assimilé à un paramètre de structure. Activée uniquement dans les zones congestionnées ( $(\Phi^* - \Phi)\Pi = 0$ ), cette variable supplémentaire exprime les effets de mémoire au sein du matériau et intervient dans la loi de comportement  $\mu = c_\mu(\Pi/c_\pi + \Phi)$ . Le système granulaire est alors fermé au moyen d'une équation de transport qui lie  $\Pi$  à la pression  $\Lambda$ .

Ces résultats sont prouvés dans le Chapitre 5 dans le cas de la dimension deux. Nous démontrons également un corollaire important de cette limite singulière qui concerne la justification d'un modèle granulaire complètement incompressible. Ce résultat fait écho aux résultats récents concernant les modèles de fluides incompressibles avec viscosité dépendant de la pression. Nous montrons l'importance du potentiel  $\Pi$  qui assure une estimation d'entropie supplémentaire et l'existence de solutions faibles globales en temps.

Dans le second chapitre de cette partie nous traitons plus particulièrement le cas de la dimension un. Dans le système unidimensionnel, nous négligeons les forces de traînée  $r\Phi|u|u$  mais obtenons une estimation d'entropie supplémentaire, appelée estimation Mellet-Vasseur, qui compense la perte du terme de traînée dans les arguments de compacité. Nous illustrons le résultat de convergence théorique par des simulations numériques. La mise en place d'un schéma numérique pour le modèle de suspension qui satisfasse la propriété d'*Asymptotic Preserving* semble loin d'être évidente. Nous proposons un schéma qui traite séparément les effets de la pression singulière et de la viscosité aussi singulière. Nous

---

montrons sur ces premières simulations que la contrainte maximale de congestion est satisfaite et nous observons numériquement une dynamique quasiment incompressible dans les zones où  $\Phi$  est très proche de  $\Phi^*$ .

---

# Chapitre 5

## Des suspensions denses aux milieux granulaires

Dans ce chapitre nous établissons un cadre mathématique permettant de montrer rigoureusement le lien entre suspensions et milieux granulaires immergés. Ce travail est issu de la publication suivante :

Pressure dependent viscosity model for granular media obtained from compressible Navier-Stokes equations.

C. PERRIN

*À paraître dans Appl Math Res Express.*

### Introduction

In most of mathematical studies on the Navier-Stokes equations it is assumed that the viscosity is either constant or depends on the temperature and on the density in the compressible case. However, it is known that viscosities in real fluids, even incompressible ones, may vary not only with the temperature but also with the pressure. In his seminal paper [170] on fluid motion, Stokes already mentioned the possibility that the viscosity of a fluid may depend on the pressure. As explained by J. HRON, J. MÁLEK and K.R. RAJAGOPAL in [104] such dependence is for instance relevant for fluids at high pressures and flows involving lubricants. Another example of pressure-dependent viscosities is provided by the theory of dense granular flows. In [162], D. SCHAEFFER derives a pressure-dependent viscosity model for incompressible granular flows which takes into account the specific dissipation mechanism in such flows. Instead of being due to momentum transfer between colliding molecules as in ordinary fluids, the dissipation in granular media is due to friction between sliding particles. This leads SCHAEFFER to consider a viscous dissipation proportional to pressure stress. More recently P. JOP, Y. FORTERRE and O. POULIQUEN propose in [115] a constitutive law based on a dimensionless number, the "inertial number"  $I$ . In their model, called "the  $\mu(I)$ -rheology", the volume fraction is linked to the inertial number  $\Phi = \Phi(I)$  and there exists a relation between the pressure  $P$ , the shear stress  $\tau$

and the shear rate  $D(u)$ ,  $u$  being the velocity of the fluid

$$\tau = \mu(I)P \quad \text{with} \quad I = \frac{2d}{(P/\varrho_s)^{0.5}} |D(u)|,$$

$d$  and  $\varrho_s$  being respectively the particle diameter and the particle density.

An important feature of granular flows is the existence of a maximal volume fraction  $\Phi^*$ , a constant approximatively equal to 0.64 which corresponds to the random close packing. Taking account of such a congestion constraint leads to propose a model which can describe both the free/compressible regions where  $\Phi < \Phi^*$  and the congested/incompressible regions corresponding to  $\Phi = \Phi^*$ . The problem can thus be seen as a free boundary problem between the two subdomains. In dimension one, A. LEFEBVRE-LEPOT and B. MAURY in [127] proposed the following system which takes account of the previous constraints

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \partial_x(\Phi u) = 0 \\ 0 \leq \Phi \leq \Phi^* \\ \partial_t(\Phi u) + \partial_x(\Phi u^2) + \partial_x p = 0 \\ \partial_t P_a + \partial_x(P_a u) = -p \\ P_a \leq 0, \quad P_a(\Phi^* - \Phi) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

The idea of the variable  $P_a$  comes from [135] where it is seen as the adhesion potential of a single particle against a wall and measures in a certain sense smallness of the wall-particle distance.

This article proposes to investigate a certain generalization of the previous system in the two-dimensional case

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \operatorname{div}(\Phi u) = 0 & (5.2a) \\ 0 \leq \Phi \leq \Phi^* & (5.2b) \\ \partial_t(\Phi u) + \operatorname{div}(\Phi u \otimes u) + \nabla \Pi - \nabla \Lambda \\ \quad - 2\operatorname{div}(c_\mu(\Phi + \Pi/c_\pi)D(u)) + r\Phi|u|u = 0 & (5.2c) \\ \partial_t \Pi + \operatorname{div}(\Pi u) = -\frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda & (5.2d) \\ \Pi \geq 0, \quad \Pi(\Phi^* - \Phi) = 0 & (5.2e) \end{cases}$$

where  $c_\pi, c_\mu$  are two positive constants. Note that compared to (5.1), we have three extra terms namely  $\nabla \Pi$ ,  $-2\operatorname{div}((\Phi + \Pi)D(u))$  and  $r\Phi|u|u$ . The first two terms encode respectively the effect of some pressure law in the suspension model and the effect of the shear viscosity coming from the multi-dimensional setting whereas the last term,  $r\Phi|u|u$ , represents the drag effects.

In [41] and [151], we developed a procedure for the rigorous derivation of such hybrid compressible/incompressible systems, in the constant viscosity case, from compressible Navier-Stokes equations with singular pressure law. The singular limit passage between

the fully compressible system and the hybrid system consists then of a kind of local low Mach number limit in the congested subdomain. We follow this idea in the present paper and approximate system (5.2) by a compressible Navier-Stokes system with singular (close to  $\Phi^*$ ) pressure  $\pi_\varepsilon$ . We also consider, and this is new compared to [41] and [151], volume fraction dependent viscosities  $\mu_\varepsilon, \lambda_\varepsilon$  singular close to  $\Phi^*$

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_\varepsilon + \operatorname{div}(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 & (5.3a) \\ \partial_t(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon) + \operatorname{div}(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) + \nabla \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) + r \Phi_\varepsilon |u_\varepsilon| u_\varepsilon \\ \quad - \nabla(\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \operatorname{div} u_\varepsilon) - 2 \operatorname{div}(\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) D(u_\varepsilon)) = 0 & (5.3b) \end{cases}$$

It is then expected that  $\pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$  converges towards  $\Pi$ ,  $\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$  towards  $\Phi + \Pi/c_\pi$  and  $\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \operatorname{div} u_\varepsilon$  towards  $\Lambda$ . As explained in [151], the singular pressure  $\pi_\varepsilon$  is not only useful for numerics, since it ensures automatically the constraint  $\Phi_\varepsilon \leq \Phi^*$ , but is also relevant from a physical point of view. It is indeed well-known in the kinetic theory of dense gases (see [48]) that the interaction between the molecules becomes strongly repulsive at very short distance. This effect comes essentially from an electrostatic force due to the fact that the electron clouds of different atoms or molecules cannot mix together. Several empirical formula have been proposed to describe this force (see for instance the general book [53], or the famous paper [45] for a particular potential called the Carnahan-Starling potential), the common point of all of them is to consider singular potentials going to infinity faster than all the other forces involved in the model. Coming back to the theory of granular media, such repulsive pressures are also taken into account in the description of granular gases. In the gas regime, B. ANDREOTTI, Y. FORTERRE and O. POULIQUEN describe in their book [4] the kinetic theory that has been developed based on the principles of Boltzmann and Enskog. In particular some models involve the Carnahan-Starling potential.

In the liquid regime of granular flows, one needs then to take account not only of the singular pressure but also of a singular viscosity. Studying experimentally the case of suspensions (mixtures of fluid and grain in a dilute regime), one can define an effective viscosity of the mixture which is shown to vary with the volume fraction  $\Phi$  and which is expected to diverge close to the maximal volume fraction  $\Phi^*$  (see the books previously mentioned : [4] and [53]). As for the kinetic theory, only empirical laws are available. From a mathematical point of view, to the author's knowledge, there are few mathematical studies on fluid models with singular viscosities. However, one can cite the interesting paper [127], where A. LEFEBVRE-LEPOT and B. MAURY study a simple model in one space dimension of aligned spheres interacting through lubrication forces. From solutions of the discrete model, they construct a micro-macro operator and prove the weak convergence of the solutions towards global weak solutions of the continuous Stokes system ( $\Phi^* = 1$ )

$$\begin{cases} -\partial_x \left( \frac{1}{1-\Phi} \partial_x u \right) = \Phi f \\ \partial_t \Phi + \partial_x(\Phi u) = 0. \end{cases}$$

To the author's knowledge, this seems to be the first mathematical justification of the presence of a singular viscosity in a coupled system.



For singular (close to  $\Phi^*$ ) viscosities and asymptotic two-phase description, it seems that nothing is known concerning mathematical justification. The problem has been envisaged by A. LEFEBVRE-LEPOT and B. MAURY in [127]. At the end of this paper they suggest that the singular system

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \partial_x(\Phi u) = 0 \\ \partial_t(\Phi u) + \partial_x(\Phi u^2) - \partial_x \left( \frac{\varepsilon}{1-\Phi} \partial_x u \right) = \Phi f \end{cases}$$

could converge as  $\varepsilon \rightarrow 0$  towards the hybrid system (5.1) with  $\Phi^* = 1$ .

Note that in the one-dimensional setting  $\operatorname{div}$  and  $\nabla$  are the same and also that they do not consider pressure in the momentum equation. This is the main difference between our mathematically justified asymptotic system (5.2) and the proposed limit system (5.1).

In this paper we want to take account of convection and of a singular pressure, a natural question is then to know if we have to impose a relationship between the singular viscosities and the singular pressure. An interesting remark for our study which can be found in [4] is basically the following : if one wants to describe within the same framework suspensions and immersed granular media (described by the  $\mu(I)$ -rheology introduced before), one has to ensure the compatibility of the two formulations by imposing the same divergence in the viscosity and the pressure close to  $\Phi^*$ . This is the approach followed in this paper where the shear viscosity  $\mu_\varepsilon$  and the pressure  $\pi_\varepsilon$  increase exponentially close to  $\Phi^* > 0$

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon(\Phi) &= c_\mu \left[ \frac{\Phi}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1-\Phi/\Phi^*} \right) - 1 \right) + \Phi \right], \quad c_\mu > 0 \\ \lambda_\varepsilon(\Phi) &= 2c_\mu \varepsilon^a \frac{\Phi^2}{\Phi^* \left( 1 - \frac{\Phi}{\Phi^*} \right)^2} \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1-\Phi/\Phi^*} \right) \\ \pi_\varepsilon(\Phi) &= c_\pi \frac{\Phi}{\varepsilon} \left( \frac{\Phi}{\Phi^*} \right)^\gamma \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1-\Phi/\Phi^*} \right) - 1 \right), \quad c_\pi > 0 \end{aligned}$$

with  $a > 1$  and  $\gamma \geq 0$ .

The mathematical justification of the limit passage  $\varepsilon \rightarrow 0$  from a compressible model of type (5.3) with a singular pressure  $\pi_\varepsilon$  towards a two-phase model of type (5.2) has been the subject of two recent articles, [41] and [151] respectively in the one-dimensional setting and in the three-dimensional setting with an additional heterogeneity in the congestion constraint. Nevertheless, these papers concern only constant viscosities and cannot therefore cover the case of dense suspensions for which we have seen that the viscosities depend on the volume fraction. To answer this question we need to carefully study the compatibility between the estimates derived from compressible Navier-Stokes equations with volume fraction-dependent viscosities and the singular limit passage  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

More precisely, considering "degenerate viscosities" (meaning that viscosity  $\mu(\rho)$  vanishes on the vacuum,  $\rho = 0$ ), one cannot deduce from the energy estimate a control on the gradient of the velocity contrary to the constant case. To deal with this difficulty, D. BRESCH and B. DESJARDINS proposed in [30], [31] a new entropy for the compressible Navier Stokes system with degenerate viscosities. First for the shallow water viscosity  $\mu(\rho) = \mu^0 \rho$ ,  $\lambda(\rho) = 0$  (see also [29]), then for more general viscosities  $\mu(\rho)$ ,  $\lambda(\rho)$  satisfying the algebraic relation  $\lambda(\rho) = 2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho))$ . The idea is to introduce the effective velocity  $w = u + 2\nabla\varphi(\rho)$  where  $\varphi$  is linked to the viscosity by the relation

$$\varphi'(\rho) = \frac{\mu'(\rho)}{\rho}$$

and to derive the energy associated to this velocity. In [33], D. BRESCH, B. DESJARDINS and D. GÉRARD-VARET proved the stability of the solutions for the compressible Navier-Stokes equations with additional terms such as drag terms of type  $\rho|u|u$ , or a singular (close to 0) pressure. With no extra terms, the stability result is given by a new estimate derived by A. MELLET and A. VASSEUR in [140]. This estimate provides then the extra-integrability on  $\sqrt{\rho}u$  necessary to pass to the limit in the convective term of the momentum equation  $\rho u \otimes u$ .

In the shallow water case  $\mu(\rho) = \rho$ ,  $\lambda(\rho) = 0$  with friction (drag term such as  $\rho|u|u$ ) or cold pressure (pressure which is singular close to the vacuum  $\{\rho = 0\}$ ), D. BRESCH and B. DESJARDINS gave some hints in [31] to built a sequence of approximate solutions compatible with the BD entropy and E. ZATORSKA in [179], [180] gave the complete proof of existence of weak solutions. Note that for the shallow water system with no drag terms nor cold pressure it is also possible to construct global weak solutions. The idea developed by A. VASSEUR and C. YU in [175] is to consider the system with drag terms and a quantum potential, then to construct a smooth multiplier allowing to get the Mellet-Vasseur estimate which does not depend on the drag. It is then possible to let the drag term go to 0 in the equations to recover weak solutions of the classical compressible Navier-Stokes system.

For the general Navier-Stokes system with the algebraic relation  $\lambda(\rho) = 2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho))$  construction of approximate solutions satisfying the energy and the BD entropy is not easy even with the hints given in [31]. In [36], D. BRESCH, B. DESJARDINS and E. ZATORSKA propose a new concept of global weak solutions called  $\kappa$ -entropy solutions which is based on a generalization of the BD entropy. Considering the energy associated to the velocity  $w = u + 2\kappa\nabla\varphi$ , where  $\kappa \in (0, 1)$  is a fixed parameter, they derive the  $\kappa$ -entropy estimate. This notion of weak solution is weaker than the previous based on the energy and the BD entropy in the sense that a global weak solution of the compressible Navier-Stokes equations which satisfies the energy and the BD entropy is also a  $\kappa$ -entropy solution for all  $0 \leq \kappa \leq 1$ . Yet, the opposite claim may not be true.

In the framework of degenerate viscosities, to the knowledge of the author, the only work justifying the limit passage from the compressible system towards the two-phase

model concerns the shallow water equations ( $\mu(\rho) = \rho$ ,  $\lambda(\rho) = 0$ ) with capillarity and a power law pressure  $a\rho^\gamma$  with  $\gamma \rightarrow +\infty$  (see [125]). Moreover the authors need to multiply the weak formulation of the momentum equation by  $\rho$  to deal with the possible vacuum states  $\rho = 0$ .

The objective of the present paper is to address first the global existence of weak solutions in the two-dimensionnal periodic setting to the suspension model (5.3) with the singular pressure  $\pi_\varepsilon$  and singular viscosities  $\mu_\varepsilon, \lambda_\varepsilon$  introduced before and an additional friction term necessary to ensure the limit passage in the convective term  $\Phi_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ , as explained previously. In dimension 2, imposing the same divergence on  $\pi_\varepsilon$  and  $\mu_\varepsilon$  we prove the global existence of  $\kappa$ -entropy solutions satisfying the constraint  $0 \leq \Phi_\varepsilon \leq \Phi^*$ .

The second part of the article consists of the justification of the singular limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  towards the two-phase system (5.2) modelling a granular media. Compared to the previous work with constant viscosities [151], it is interesting to note that the singularity of the viscosity simplifies some compactness arguments and brings more regularity on the limit pressure. Indeed, the  $\kappa$ -entropy gives then a control in dimension 2 of all the powers of  $\mu_\varepsilon$  and in particular, since we have chosen the same divergence on the pressure and the viscosity, this implies a control of the singular pressure  $\pi_\varepsilon$  with no need of additional estimate.

All this study strongly relies on the uniform  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  controls,  $p \in [1, +\infty)$  of the singular (close to  $\Phi^*$ ) coefficients derived from the  $\kappa$ -entropy estimate due to the fact that the space dimension is equal to 2.

As a corollary of our result, if  $\Pi^0 > 0$ , taking as initial volume fraction  $\Phi^0 = \Phi^*$  and approximating system (5.2) by (5.3) with an appropriate initial datum  $(u_\varepsilon^0, \Pi^0(\Phi_\varepsilon^0), \Phi_\varepsilon^0)$  converging to  $(u^0, \Pi^0, \Phi^*)$ , we obtain weak solutions to the fully incompressible system

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 & (5.4a) \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{1}{\Phi^*} \nabla(\Pi - \Lambda) - 2c_\mu \operatorname{div} \left( \left( \frac{\Pi/c_\pi}{\Phi^*} + 1 \right) \mathbb{D}(u) \right) + r|u|u = 0 & (5.4b) \\ \Pi \geq 0, \quad \partial_t \Pi + \operatorname{div}(u\Pi) = -\frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda & (5.4c) \end{cases}$$

There have been few mathematical studies concerning incompressible flows with general pressure dependent viscosities. Most of the works, see for instance the interesting review paper [133] by J. MÁLEK and K.R. RAJAGOPAL or the article [42], deal with a viscosity depending on both the pressure and the shear rate

$$\mu = \mu(p, |\mathbb{D}(u)|^2)$$

with an implicit relation between the Cauchy stress tensor and the shear rate  $\mathbb{D}(u)$ . This is also the case in the model derived by D. SCHAEFFER in [162] where the dependence of the viscosity with respect to the pressure is linear

$$\mu = \mu^0 p |\mathbb{D}(u)|^{-1}.$$

The author proves that this system may then lead to violent instabilities in the flow and that it is thus ill-posed in some sense. Concerning the purely pressure-dependent viscosity case, it seems that there is no global existence theory. In [160], M. RENARDY confirms the physical relevance of a linear dependence of viscosity with respect to the pressure ; indeed he proves that pressure driven parallel flow exists only if the viscosity is a linear function of the pressure. But M. RENARDY can establish (*c.f.* [159]) existence and uniqueness of solutions only under a restriction on the velocity field : the eigenvalues of  $D(u)$  have to be strictly less than

$$\frac{1}{\lim_{p \rightarrow \infty} \mu'(p)}.$$

Later, F. GAZZOLA showed in [88] a local existence result without the previous restrictions, but for small data and assuming an exponential dependence of the viscosity with respect to the pressure .

We obtain here a first global existence result of weak solutions to an incompressible pressure-dependent viscosity model. As usually the case for granular flows (*c.f.* [4], [162]) we assumed a linear dependence of the viscosity with respect to pressure. The important role played by the pressure  $\Pi$  in our mathematical result has to be noted since it is this additional variable which provides, via the equation (5.4c), the additional estimate necessary to prove the stability of the solutions of the incompressible system (5.4). The mathematical justification of such memory effects, rigorously justified in a discrete setting by B. MAURY in [135], seems new for continuous systems.

## 1 The suspension and the two-phase granular systems

As mentioned in the introduction our study restricts in dimension 2. To ensure the sufficient controls and the compactness of all singular quantities, in all the paper  $\Omega$  will be the periodic domain  $\mathbb{T}^2$ . We consider the two-phase granular system

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Phi + \operatorname{div}(\Phi u) = 0 \\ 0 \leq \Phi \leq \Phi^* \\ \partial_t \Pi + \operatorname{div}(\Pi u) = -\frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda \\ \partial_t(\Phi u) + \operatorname{div}(\Phi u \otimes u) + \nabla \Pi - \nabla \Lambda \\ \quad - 2c_\mu \operatorname{div}((\Pi/c_\pi + \Phi) D(u)) + r\Phi|u|u = 0 \\ \Phi \Pi = \Phi^* \Pi \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.5a) \\ (5.5b) \\ (5.5c) \\ (5.5d) \\ (5.5e) \end{array}$$

with  $\Phi^*$  a positive constant which represents the maximal volume fraction and  $r > 0$  a small coefficient which will be determined in the proof. We supplement the system by initial conditions

$$\Phi|_{t=0} = \Phi^0, \quad (\Phi u)|_{t=0} = m^0$$

$$\Pi^0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega) \quad (5.6)$$

with

$$0 \leq \Phi^0 \leq \Phi^*$$

$$\begin{aligned} m^0 \in (L^2(\Omega))^2, \quad m^0 \mathbf{1}_{\{\Phi^0=0\}} = 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \\ \frac{|m^0|^2}{\Phi^0} \mathbf{1}_{\{\Phi^0>0\}} \in L^1(\Omega) \end{aligned} \quad (5.7)$$

**Remark :** As said above, the parameter  $r$  is small, precisely it is taken sufficiently small to ensure the compatibility of the system with the  $\kappa$ -entropy inequality as it will be explained in Section 2.1.

## 1.1 A model for suspension flows

We approximate the previous two-phase system by mean of a singular perturbation, we will call this perturbed system the "suspension model"

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_\varepsilon + \operatorname{div}(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon) = 0, \\ \partial_t(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon) + \operatorname{div}(\Phi_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) + \nabla \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) + r \Phi_\varepsilon |u_\varepsilon| u_\varepsilon \\ - 2 \operatorname{div}(\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) D(u_\varepsilon)) - \nabla(\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \operatorname{div} u_\varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (5.8a)$$

$$(5.8b)$$

The viscosities are defined by

$$\mu_\varepsilon(\Phi) = c_\mu (\mu_\varepsilon^1(\Phi) + \Phi) = \begin{cases} c_\mu \left[ \frac{\Phi}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi}{\Phi^*}} \right) - 1 \right) + \Phi \right] & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} < 1 \\ +\infty & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} \geq 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

with  $a > 1$  and the algebraic relation introduced by BRESCH and DESJARDINS in [30]

$$\lambda_\varepsilon(\Phi) = 2(\mu'_\varepsilon(\Phi)\Phi - \mu_\varepsilon(\Phi)). \quad (5.10)$$

The singular pressure is related to these viscosities and is defined by

$$\pi_\varepsilon(\Phi) = c_\pi \left( \frac{\Phi}{\Phi^*} \right)^\gamma \mu_\varepsilon^1(\Phi) = \begin{cases} c_\pi \frac{\Phi}{\varepsilon} \left( \frac{\Phi}{\Phi^*} \right)^\gamma \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi}{\Phi^*}} \right) - 1 \right) & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} < 1 \\ +\infty & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} \geq 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

with

$$\gamma \geq 0. \quad (5.12)$$

**Remark :** Formally we observe that  $a > 0$  ensures the convergence to 0 as  $\varepsilon \rightarrow 0$  of the singular terms  $\mu_\varepsilon^1$ ,  $\lambda_\varepsilon$  and  $\pi_\varepsilon$  on the set  $\{\Phi < \Phi^*\}$  but we will see in the proof of Lemma 11 that we need  $a > 1$  to guarantee the convergence of  $(1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^*)\pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$  towards 0 and obtain (5.5e).

The system (5.8a)–(5.8b) is supplemented by initial data  $(\Phi_\varepsilon^0, m_\varepsilon^0)$

$$0 \leq \Phi_\varepsilon^0 < \Phi^* \quad (5.13)$$

$$\frac{|m_\varepsilon^0|^2}{\Phi_\varepsilon^0} = 0 \quad \text{a.e. on } \{x \in \Omega; \Phi_\varepsilon^0(x) = 0\}, \quad \frac{|m_\varepsilon^0|^2}{\Phi_\varepsilon^0} \in L^1(\Omega) \quad (5.14)$$

$$\frac{\nabla \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon^0}} \in (L^2(\Omega))^2, \quad \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0) \in L^1(\Omega) \quad (5.15)$$

$$\Phi_\varepsilon^0 e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0) \in L^1(\Omega) \quad (5.16)$$

where  $e_\varepsilon$  is such that

$$e'_\varepsilon(\Phi) = \frac{\pi_\varepsilon(\Phi)}{\Phi^2},$$

and where all the bounds are uniform with respect to  $\varepsilon$ .

Let us now introduce the notion of weak solution for system (5.8a)–(5.8b).

**Definition 4 ( $\kappa$ -entropy solutions of (5.8))** *Let  $T > 0$  and  $\kappa \in (0, 1)$ ,  $(\Phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  is called a  $\kappa$ -entropy solution to system (5.8a)–(5.8b), under the initial conditions (5.13)–(5.16) if it satisfies*

- $\text{meas}\{(t, x) : \Phi_\varepsilon(t, x) \geq 1\} = 0$ ;
- *the mass equation in the weak sense*

$$-\int_0^T \int_\Omega \Phi_\varepsilon \partial_t \xi - \int_0^T \int_\Omega \Phi_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla \xi = \int_\Omega \Phi_\varepsilon^0 \xi(0) \quad \forall \xi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega); \quad (5.17)$$

- *the momentum equation in the weak sense*

$$\begin{aligned} & -\int_0^T \int_\Omega \Phi_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \partial_t \zeta - \int_0^T \int_\Omega (\Phi_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) : \nabla \zeta - \int_0^T \int_\Omega \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \text{div} \zeta \\ & + r \int_0^T \int_\Omega \Phi_\varepsilon |u_\varepsilon| u_\varepsilon \cdot \zeta + 2 \int_0^T \int_\Omega \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \text{D}(u_\varepsilon) : \nabla \zeta \\ & + \int_0^T \int_\Omega \lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \text{div} u_\varepsilon \text{div} \zeta = \int_\Omega m_\varepsilon^0 \cdot \zeta(0) \end{aligned} \quad (5.18)$$

for all  $\zeta \in (\mathcal{D}([0, T] \times \Omega))^2$ .

- the  $\kappa$ -entropy inequality

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t \in [0, T]} \left[ \int_{\Omega} \Phi_{\varepsilon} \left( \frac{|u_{\varepsilon} + 2\kappa \nabla \varphi_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})|^2}{2} + \kappa(1 - \kappa) \frac{|2\nabla \varphi_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})|^2}{2} \right) + \Phi_{\varepsilon} e_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) \right] \\
 & + r \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) + r \int_0^T \int_{\Omega} \Phi_{\varepsilon} |u_{\varepsilon}|^3 \\
 & + 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) |A(u_{\varepsilon})|^2 + 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \mu'_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) \frac{\pi'_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})}{\Phi_{\varepsilon}} |\nabla \Phi_{\varepsilon}|^2 \\
 & + 2(1 - \kappa) \int_0^T \left[ \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) |D(u_{\varepsilon})|^2 + \int_{\Omega} (\mu'_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) \Phi_{\varepsilon} - \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})) |\operatorname{div} u_{\varepsilon}|^2 \right] \\
 & \leq C(r)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

where  $\varphi_{\varepsilon}$  is such that

$$\varphi'_{\varepsilon}(\Phi) = \frac{\mu'_{\varepsilon}(\Phi)}{\Phi},$$

and  $C(r)$  is a constant which depends only on  $r$  and on the initial data  $(\Phi_{\varepsilon}^0, m_{\varepsilon}^0)$ .

**Remark :**  $D(u)$  and  $A(u)$  are respectively the symmetric and the antisymmetric parts of the gradient defined by

$$D(u) = \frac{\nabla u + \nabla^t u}{2}, \quad A(u) = \frac{\nabla u - \nabla^t u}{2}.$$

**Remark :** To prove the stability of the solutions the integrals of the diffusion terms

$$2 \int_0^T \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) D(u_{\varepsilon}) : \nabla \zeta + \int_0^T \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) \operatorname{div}(u_{\varepsilon}) \operatorname{div} \zeta$$

should be understood in the following sense

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^T \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) D(u_{\varepsilon}) : \nabla \zeta &= - \int_0^T \int_{\Omega} \sqrt{\Phi_{\varepsilon}} u_{\varepsilon}^j \left( \frac{\partial_i \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})}{\sqrt{\Phi_{\varepsilon}}} \partial_i \zeta^j + \frac{\mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})}{\sqrt{\Phi_{\varepsilon}}} \partial_{ii}^2 \zeta^j \right) \\
 & - \int_0^T \int_{\Omega} \sqrt{\Phi_{\varepsilon}} u_{\varepsilon}^i \left( \frac{\partial_j \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})}{\sqrt{\Phi_{\varepsilon}}} \partial_i \zeta^j + \frac{\mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})}{\sqrt{\Phi_{\varepsilon}}} \partial_{ij}^2 \zeta^j \right)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

and

$$\int_0^T \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}) \operatorname{div} u_{\varepsilon} \operatorname{div} \zeta = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\lambda_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})}{\sqrt{\mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})}} \sqrt{\mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})} \operatorname{div} u_{\varepsilon} \operatorname{div} \zeta. \tag{5.21}$$

**Remark :** Compared to the work of BRESCH, DESJARDINS, ZATORSKA [36], we have the additional integral

$$r \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon})$$

which allows us to deduce the control of  $\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$  in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  for  $p \in [1, +\infty)$  if we combine it with the control of  $\nabla\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$  in  $L^\infty(0, T; (L^q(\Omega))^2)$  for all  $q \in [1, 2)$ . Note that this control strongly relies on the presence of the drag term in the equations.

**Remark :** It would be also possible in the analysis to consider the case of pressure and viscosities singular close to  $\Phi^*$  as power laws, namely

$$\pi_\varepsilon(\Phi) = c_\pi \frac{\varepsilon\Phi}{\left(1 - \frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^\beta}, \quad \beta > 1$$

as proposed in [127], keeping the relationship between the coefficients  $\mu_\varepsilon$ ,  $\pi_\varepsilon$  and  $\lambda_\varepsilon$ . The existence of weak solutions when  $\varepsilon$  is fixed works exactly in the same way. Modifying slightly the arguments, one can also prove the limit passage  $\varepsilon \rightarrow 0$  towards the same hybrid model satisfying  $(\Phi^* - \Phi)\Pi = 0$ .

More generally, we can consider any general singular viscosity/pressure which ensures the singularity of the potential energy  $e_\varepsilon$  associated to the pressure  $\pi_\varepsilon$  because, as we will see in Lemma 10, this is the degeneracy of this energy which ensures the maximal constraint  $\Phi_\varepsilon \leq \Phi^*$ .

## 1.2 Main results

Under the conditions previously stated, we are able to build global weak solutions of the system (5.8a)–(5.8b).

**Theorem 6 (Existence for the suspension model)** *Let  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  and  $(\Phi_\varepsilon^0, m_\varepsilon^0)$  an initial data satisfying (5.13)–(5.16). There exists  $r > 0$ , which depends on  $T$ , such that there exists a  $\kappa$ -entropy solution  $(\Phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  to the suspension model (5.8a)–(5.8b) in the sense of Definition 4.*

Thanks to the previous existence result we can address now the question of the singular limit passage  $\varepsilon \rightarrow 0$  towards the two-phase system.

**Theorem 7 (Existence for the two-phase system)** *Let  $T > 0$ ,  $(\Phi^0, m^0, \Pi^0)$  and  $(\Phi_\varepsilon^0, m_\varepsilon^0)$  satisfy respectively (5.6)–(5.7) and (5.13)–(5.16). We assume that  $\Phi_\varepsilon^0 \rightarrow \Phi^0$  in  $L^p(\Omega)$  for all  $p \in [1, +\infty)$ ,  $m_\varepsilon^0/\sqrt{\Phi_\varepsilon^0} \rightarrow m^0/\sqrt{\Phi^0}$  in  $(L^2(\Omega))^2$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Let  $r$  such that we can apply Theorem 6. Then there exists a subsequence  $(\Phi_\varepsilon, u_\varepsilon, \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon), \lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)\text{div } u_\varepsilon)$  converging*



to  $(\Phi, u, \Pi, \Lambda)$  solution of

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_0^T \int_{\Omega} \Phi \partial_t \xi - \int_0^T \int_{\Omega} \Phi u \cdot \nabla \xi = \int_{\Omega} \Phi^0 \xi(0) \quad (5.22a) \\ 0 \leq \Phi \leq \Phi^* \quad a.e. \text{ in } (0, T) \times \Omega \quad (5.22b) \\ - \int_0^T \int_{\Omega} \Pi \partial_t \xi - \int_0^T \int_{\Omega} \Pi u \cdot \nabla \xi + \langle \frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda, \xi \rangle = \int_{\Omega} \Pi^0 \xi(0) \quad (5.22c) \\ - \int_0^T \int_{\Omega} \Phi u \cdot \partial_t \zeta - \int_0^T \int_{\Omega} (\Phi u \otimes u) : \nabla \zeta - \int_0^T \int_{\Omega} \Pi \operatorname{div} \zeta + \langle \Lambda, \operatorname{div} \zeta \rangle \\ + r \int_0^T \int_{\Omega} \Phi |u| u \cdot \zeta + 2c_\mu \langle (\Pi/c_\pi + \Phi) D(u), \nabla \zeta \rangle = \int_{\Omega} m^0 \cdot \zeta(0) \quad (5.22d) \\ \Phi \Pi = \Phi^* \Pi \geq 0 \quad a.e. \text{ in } (0, T) \times \Omega \quad (5.22e) \end{array} \right.$$

for all  $\xi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$ ,  $\zeta \in (\mathcal{D}([0, T] \times \Omega))^2$  and where the terms  $\langle \frac{\Lambda}{2}, \xi \rangle$  and  $\langle \Lambda, \operatorname{div} \zeta \rangle$  have to be understood as the duality pairing between the distribution  $\Lambda$  and the test functions  $\xi$ ,  $\operatorname{div} \zeta$ . Moreover, the limit has the following regularity

$$\Phi \in \mathcal{C}([0, T]; L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \quad \text{for all } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\Pi \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega)),$$

$$\sqrt{\Pi + \Phi} |D(u)| \in L^2((0, T) \times \Omega),$$

$$\sqrt{\Phi} |u| \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

$$\Lambda \in W^{-1,\infty}(0, T; L^p(\Omega)) + L^\infty(0, T; W^{-1,q}(\Omega)) \quad \text{for all } p \in [1, +\infty), q \in [1, 2).$$

**Remark :** We observe that we get much more regularity on the limit pressure  $\Pi$  than in the constant viscosities case [151]. As we will see in the proof, this is a consequence of the  $\kappa$ -entropy and the relationship satisfied by  $\mu_\varepsilon$  and  $\pi_\varepsilon$ . In particular this regularity gives a sense to the product

$$\begin{aligned} \langle \Pi D(u), \nabla \zeta \rangle &= - \int_0^T \int_{\Omega} \sqrt{\Phi} u^j \left( \frac{\partial_i \Pi}{\sqrt{\Phi}} \partial_i \zeta^j + \frac{\Pi}{\sqrt{\Phi}} \partial_{ii}^2 \zeta^j \right) \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \sqrt{\Phi} u^i \left( \frac{\partial_j \Pi}{\sqrt{\Phi}} \partial_i \zeta^j + \frac{\Pi}{\sqrt{\Phi}} \partial_{ij}^2 \zeta^j \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

The difficulty in the proof of Theorem 7, compared to the case  $\varepsilon > 0$  relies on the fact that at the limit  $\varepsilon = 0$  we do not have  $\operatorname{meas} \{(t, x) : \Phi(t, x) = \Phi^*\} = 0$ . We then need

to carefully study the control that we have on the singular coefficients taking into account the possible convergence of  $\Phi_\varepsilon$  towards  $\Phi^*$ .

**Remark :** Due to the weak convergences of the singular quantities  $\pi_\varepsilon, \mu_\varepsilon$ , it seems not possible to extend the existence result to more general viscosities  $\mu(\pi)$ , such as for instance Barus (exponential) viscosities considered by MÅLEK and RAJAGOPAL [133]. At the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ , if the shear viscosity is a nonlinear function of the pressure, we cannot identify its weak limit as the viscosity of the limit pressure  $\Pi$  in Lemma 11.

It should be finally noted that we imposed to the viscosity to be the sum of the pressure and the volume fraction and not proportional to pressure. This is crucial to perform the limit passage  $\varepsilon \rightarrow 0$  and to provide a control of the volume fraction which is uniform with respect to  $\varepsilon$ . As we will see just after, this assumption ensures also that the incompressible limit system has a non-degenerate (bounded away from 0) viscosity.

**Global existence of weak solutions to an incompressible Navier-Stokes system with pressure dependent viscosity.** As in the constant viscosities case studied by P.-L. LIONS and N. MASMOUDI in [131], we prove in Section 4 the compatibility on the limit system between the constraint (5.22b) and the divergence free condition

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{a.e. in } \{\Phi = \Phi^*\}. \quad (5.24)$$

If initially the two-phase system is entirely congested, meaning that  $\Phi^0 = \Phi^*$ ,  $\Pi^0 > 0$  and  $\operatorname{div} u^0 = 0$ , then, considering the approximated singular system (5.8a)–(5.8b) with initially  $\Phi_\varepsilon^0 = \Phi^* \left(1 - \varepsilon^a \frac{\Phi^*}{\Pi^0/c_\pi}\right)$ , the previous theorem will give us the existence of global weak solutions for the incompressible system with pressure dependent viscosity.

**Theorem 8 (Existence for the incompressible system)** *Let  $T > 0$ ,  $(u^0, \Pi^0)$  such that  $u^0 \in (L^2(\Omega))^2$ ,  $\operatorname{div} u^0 = 0$  and  $\Pi^0 > 0$ , with*

$$\Pi^0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega).$$

*There exists a global weak solution to the pressure dependent incompressible system for all  $\xi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$ ,  $\zeta \in (\mathcal{D}([0, T] \times \Omega))^2$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} u = 0 \\ - \int_0^T \int_\Omega \Pi \partial_t \xi - \int_0^T \int_\Omega \Pi u \cdot \nabla \xi + \left\langle \frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda, \xi \right\rangle = \int_\Omega \Pi^0 \xi(0) \\ - \int_0^T \int_\Omega u \cdot \partial_t \zeta - \int_0^T \int_\Omega (u \otimes u) : \nabla \zeta - \int_0^T \int_\Omega \frac{\Pi}{\Phi^*} \operatorname{div} \zeta + r \int_0^T \int_\Omega |u| u \cdot \zeta \\ + \left\langle \frac{\Lambda}{\Phi^*}, \operatorname{div} \zeta \right\rangle + 2c_\mu \langle (\Pi/(c_\pi \Phi^*) + 1) \operatorname{D}(u), \nabla \zeta \rangle = \int_\Omega u^0 \cdot \zeta(0), \end{array} \right. \quad (5.25a)$$

$$(5.25b)$$

$$(5.25c)$$

satisfying

$$\begin{aligned} \Pi &\geq 0, \quad \Pi \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \\ \Lambda &\in W^{-1,\infty}(0, T; L^p(\Omega)) + L^\infty(0, T; W^{-1,q}(\Omega)), \quad \forall p \in [1, +\infty), q \in [1, 2), \\ u &\in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2) \cap L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega))^2). \end{aligned}$$

**Remark :** We can recover the regularity of the potential  $\Pi$  directly from the system (5.25a)–(5.25c) using the BD-entropy (see for instance [29]). To simplify the explanation, we drop the drag term of the momentum equation. Taking the gradient of

$$\partial_t \Pi + \operatorname{div}(\Pi u) = -\frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda$$

and dividing by  $\Phi^*$ , we have

$$\partial_t \nabla \left( \frac{\Pi}{\Phi^*} + 1 \right) + \operatorname{div} \left( u \otimes \nabla \left( \frac{\Pi}{\Phi^*} + 1 \right) \right) + \operatorname{div} \left( \left( \frac{\Pi}{\Phi^*} + 1 \right) \nabla^t u \right) + \frac{c_\pi}{2\Phi^* c_\mu} \nabla \Lambda = 0$$

Then, introducing the effective velocity  $w = u + 2c_\mu \nabla \left( \frac{1}{c_\pi \Phi^*} \Pi + 1 \right)$ ,  $w$  satisfies,

$$\partial_t w + \operatorname{div}(u \otimes w) + \frac{\nabla \Pi}{\Phi^*} - 2c_\mu \operatorname{div} \left( \left( \frac{\Pi}{c_\pi \Phi^*} + 1 \right) A(u) \right) + \cancel{\frac{\nabla \Lambda}{\Phi^*}} - \cancel{\frac{\nabla \Lambda}{\Phi^*}} = 0.$$

Finally, multiplying this last equation by  $w$  and integrating, since  $u$  is divergence free, we get

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |w|^2 + \int_\Omega \left| \frac{\nabla \Pi}{\Phi^*} \right|^2 + 2c_\mu \int_\Omega \left( \frac{\Pi}{c_\pi \Phi^*} + 1 \right) |A(u)|^2 = 0$$

which ensures that  $w$  is in  $L^\infty(0, T; (W^{1,2}(\Omega))^2)$  if initially  $u^0 \in (L^2(\Omega))^2$  and  $\Pi^0 \in W^{1,2}(\Omega)$ .

### 1.3 Sketch of the proof

The proof of Theorem 6 is not a direct consequence of the theory of the  $\kappa$ -entropy developed in [36] since the pressure and the viscosities are singular close to  $\Phi^*$ . To deal with this difficulty we first add a parameter  $\delta$  in order to truncate these singular terms.

Then we add an artificial pressure  $\vartheta \nabla p(\Phi) = \vartheta \nabla \frac{\Phi^2}{2}$ ,  $\vartheta > 0$  in order to control the gradient of the density. The approximate system reads as

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_{\vartheta,\delta} + \operatorname{div}(\Phi_{\vartheta,\delta} u_{\vartheta,\delta}) = 0 & (5.26a) \\ \partial_t(\Phi_{\vartheta,\delta} u_{\vartheta,\delta}) + \operatorname{div}(\Phi_{\vartheta,\delta} u_{\vartheta,\delta} \otimes u_{\vartheta,\delta}) + \vartheta \nabla p(\Phi_{\vartheta,\delta}) + \nabla \pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_{\vartheta,\delta}) + r \Phi_{\vartheta,\delta} |u_{\vartheta,\delta}| u_{\vartheta,\delta} \\ \quad - 2 \operatorname{div}(\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_{\vartheta,\delta}) D(u_{\vartheta,\delta})) - \nabla(\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_{\vartheta,\delta}) \operatorname{div}(u_{\vartheta,\delta})) = 0 & (5.26b) \end{cases}$$

with

$$\pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi) = \begin{cases} c_\pi \frac{\Phi}{\varepsilon} \left( \frac{\Phi}{\Phi^*} \right)^\gamma \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi}{\Phi^*}} \right) - 1 \right) & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} \leq 1 - \delta \\ c_\pi \frac{\Phi}{\varepsilon} \left( \frac{\Phi}{\Phi^*} \right)^\gamma \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{\delta} \right) - 1 \right) & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} > 1 - \delta \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi) = \begin{cases} c_\mu \left[ \frac{\Phi}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi}{\Phi^*}} \right) - 1 \right) + \Phi \right] & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} \leq 1 - \delta \\ c_\mu \left[ \frac{\Phi}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{\delta} \right) - 1 \right) + \Phi \right] & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} > 1 - \delta \end{cases} \quad (5.28)$$

If we denote  $(\mu_{\varepsilon,\delta})'_+$  the right-derivative of  $\mu_{\varepsilon,\delta}$ ,  $\lambda_{\varepsilon,\delta}$  is related to  $\mu_{\varepsilon,\delta}$  via the algebraic condition

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi) &= 2((\mu_{\varepsilon,\delta})'_+(\Phi)\Phi - \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi)) \\ &= \begin{cases} 2c_\mu \varepsilon^a \frac{\Phi^2}{\Phi^* \left(1 - \frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^2} \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi}{\Phi^*}} \right) & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} < 1 - \delta \\ 0 & \text{if } \frac{\Phi}{\Phi^*} \geq 1 - \delta \end{cases} \end{aligned} \quad (5.29)$$

The proof of Theorem 6 will consist of two limit passages, first  $\delta \rightarrow 0$  then  $\vartheta \rightarrow 0$ .

**Remark :** One could try to extend the procedure of VASSEUR and YU in [175] and derive a control on  $\Phi|u|^2 \log(1 + |u|^2)$  but it seems not possible to get a uniform estimate with respect to  $\varepsilon$  or even  $\delta$ . This is the reason why we need to keep the turbulent term in the momentum equation (5.26b).

## Organization of the paper

The rest of this article is coarsely divided in three parts. The first part concerns the proof of Theorem 6, namely the existence of weak solutions for what we call the "suspension model" (5.8a)–(5.8b) with singular viscosities  $\mu_\varepsilon$ ,  $\lambda_\varepsilon$  and singular pressure  $\pi_\varepsilon$ . The main part, corresponding to Theorem 7, consists of passing from solutions of this suspension model towards solutions of the two-phase system of granular type (5.22a)–(5.22e). Finally using this result we approximate the incompressible model (5.25a)–(5.25c) by an appropriate suspension system and prove therefore the existence of global weak solutions for (5.25a)–(5.25c) as stated in Theorem 8.

## 2 Existence of solutions to the suspension model

### 2.1 Global existence of approximate $\kappa$ -entropy solutions

We first need to prove the approximate system containing all the parameters  $\varepsilon, \delta$ , admits global weak solutions. We recall in the following definition the notion of  $\kappa$ -entropy solutions for system (5.26a)–(5.26b).

**Definition 5 ( $\kappa$ -entropy solutions for (5.26))** *Let  $T > 0$ ,  $\kappa \in (0, 1)$ ,  $(\Phi_\delta, u_\delta)$  is called a  $\kappa$ -entropy solution to system (5.26a)–(5.26b) if it satisfies*

- the mass equation in the weak sense

$$-\int_0^T \int_\Omega \Phi_\delta \partial_t \xi - \int_0^T \int_\Omega \Phi_\delta u_\delta \cdot \nabla \xi = \int_\Omega \Phi_\varepsilon^0 \xi(0) \quad \forall \xi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega) \quad (5.30)$$

- the momentum equation in the weak sense,  $\forall \zeta \in (\mathcal{D}([0, T] \times \Omega))^2$

$$\begin{aligned} & -\int_0^T \int_\Omega \Phi_\delta u_\delta \cdot \partial_t \zeta - \int_0^T \int_\Omega (\Phi_\delta u_\delta \otimes u_\delta) : \nabla \zeta - \vartheta \int_0^T \int_\Omega p(\Phi_\delta) \operatorname{div} \zeta \\ & - \int_0^T \int_\Omega \pi_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \operatorname{div} \zeta + r \int_0^T \int_\Omega \Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \cdot \zeta \\ & + 2 \int_0^T \int_\Omega \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \mathbf{D}(u_\delta) : \nabla \zeta + \int_0^T \int_\Omega \lambda_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \operatorname{div}(u_\delta) \operatorname{div} \zeta \\ & = \int_\Omega m_\varepsilon^0 \cdot \zeta(0) \end{aligned} \quad (5.31)$$

- the  $\kappa$ -entropy inequality

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \int_\Omega \Phi_\delta \left( \frac{|u_\delta + 2\kappa \nabla \varphi_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} + \kappa(1 - \kappa) \frac{|2\nabla \varphi_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} \right) \\ & + \sup_{t \in [0, T]} \int_\Omega \left( \vartheta \frac{\Phi_\delta^2}{2} + \Phi_\delta e_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) + r \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \right) \\ & + 2\kappa \int_0^T \int_\Omega \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_r) |A(u_\delta)|^2 + 2\kappa \int_0^T \int_\Omega \mu'_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \left( \vartheta + \frac{\pi'_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}{\Phi_\delta} \right) |\nabla \Phi_\delta|^2 \\ & + 2(1 - \kappa) \int_0^T \left[ \int_\Omega \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) |\mathbf{D}(u_\delta)|^2 + \int_\Omega (\mu'_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \Phi_\delta - \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)) |\operatorname{div} u_\delta|^2 \right] \\ & + r \int_0^T \int_\Omega \Phi_\varepsilon |u_\delta|^3 \leq C(r) \end{aligned} \quad (5.32)$$

where  $\varphi_{\varepsilon, \delta}$  is such that

$$\varphi'_{\varepsilon, \delta}(\Phi) = \frac{\mu'_{\varepsilon, \delta}(\Phi)}{\Phi}.$$

**Remark :** In the previous  $\kappa$ -entropy, we recover the kinetic energies

$$\Phi_\delta \frac{|u_\delta + 2\kappa \nabla \varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} + \kappa(1 - \kappa) \Phi_\delta \frac{|2\nabla \varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2}$$

associated respectively to the mixture velocity and the drift velocity. We recognize also the specific internal energy associated to the singular pressure

$$\Phi_\delta e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta).$$

The dissipation is due to the different viscosities and to the drag term.

**Remark :**  $C(r)$  is a constant which depends only on  $r$  and on the initial data  $(\Phi_\varepsilon^0, m_\varepsilon^0)$ . As we will show later on, this constant will derive from a non-linear Gronwall inequality.

In [36], D. BRESCH, B. DESJARDINS and E. ZATORSKA base their construction of approximate solutions to an augmented formulation involving the variables

$$\Phi \quad w = u + 2\kappa \nabla \varphi(\Phi) \quad v = 2\nabla \varphi(\Phi).$$

In our framework this augmented system writes as

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Phi_\delta + \operatorname{div}(\Phi_\delta w_\delta) - 2\kappa \Delta \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) = 0 \quad (5.33a) \\ \partial_t(\Phi_\delta w_\delta) + \operatorname{div}(\Phi_\delta u_\delta \otimes w_\delta) - 2(1 - \kappa) \operatorname{div}(\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \nabla w_\delta) - 2\kappa \operatorname{div}(\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) A(w_\delta)) \\ \quad + \vartheta \nabla p(\Phi_\delta) + \nabla \pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) + 4(1 - \kappa) \kappa \operatorname{div}(\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \nabla^2 \varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) \\ \quad - \nabla((\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) - 2\kappa(\mu'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \Phi_\delta - \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta))) \operatorname{div} u_\delta) + r \Phi_\delta |u_\delta| u_\delta = 0 \quad (5.33b) \\ \partial_t(\Phi_\delta \nabla \varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) + \operatorname{div}(\Phi_\delta u_\delta \otimes \nabla \varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) - 2\kappa \operatorname{div}(\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \nabla^2 \varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) \\ \quad + \operatorname{div}(\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \nabla^t w_\delta) + \nabla((\mu'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \Phi_\delta - \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) \operatorname{div} u_\delta) = 0 \quad (5.33c) \\ w_\delta = u_\delta + 2\kappa \nabla \varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \quad (5.33d) \end{array} \right.$$

*Justification of the  $\kappa$ -entropy inequality :* Following the steps of D. BRESCH, B. DESJARDINS and E. ZATORSKA [36], we multiply (5.33b) by  $w_\delta = u_\delta + 2\kappa \nabla \varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  and we combine

it with the equation (5.33c) tested by  $4\kappa(1 - \kappa)\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$ , we get

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[ \Phi_\delta \left( \frac{|u_\delta + 2\kappa\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} + \kappa(1 - \kappa) \frac{|2\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} \right) \right] (t) \\
 & + \int_{\Omega} \left[ \vartheta \frac{\Phi_\delta^2}{2} + \Phi_\delta e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \right] (t) + r \int_0^t \int_{\Omega} \Phi_\delta |u_\delta|^3 \\
 & + 2\kappa \int_0^t \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) |A(u_\delta)|^2 + 2\kappa \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\mu'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \pi'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\Phi_\delta} |\nabla\Phi_\delta|^2 \\
 & + 2(\kappa - 1) \int_0^t \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) |D(u_\delta)|^2 + 2(\kappa - 1) \int_0^t \int_{\Omega} (\mu'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\Phi_\delta - \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) (\operatorname{div} u_\delta)^2 \\
 & = \int_{\Omega} \left[ \Phi_\varepsilon^0 \left( \frac{|m_\varepsilon^0/\Phi_\varepsilon^0 + 2\kappa\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\varepsilon^0)|^2}{2} + \kappa(1 - \kappa) \frac{|2\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\varepsilon^0)|^2}{2} \right) \right] \\
 & + \int_{\Omega} \left[ \vartheta \frac{(\Phi_\varepsilon^0)^2}{2} + \Phi_\varepsilon^0 e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\varepsilon^0) \right] - 2\kappa r \int_0^t \int_{\Omega} \Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \cdot \nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

In addition, the renormalized continuity equation writes

$$\partial_t (\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) + \operatorname{div} (\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) u_\delta) = -\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \operatorname{div} u_\delta$$

which gives, after multiplication by  $r$  and integration in time and space,

$$r \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)(t) + r \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{2} \operatorname{div} u_\delta = 0. \tag{5.35}$$

Adding then (5.35) and (5.34)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[ \Phi_\delta \left( \frac{|u_\delta + 2\kappa\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} + \kappa(1 - \kappa) \frac{|2\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} \right) \right] (t) \\
 & + \int_{\Omega} \left[ \vartheta \frac{\Phi_\delta}{2} + \Phi_\delta e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) + r\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \right] (t) + r \int_0^t \int_{\Omega} \Phi_\delta |u_\delta|^3 \\
 & + 2\kappa \int_0^t \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) |A(u_\delta)|^2 + 2\kappa \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\mu'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \pi'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\Phi_\delta} |\nabla\Phi_\delta|^2 \\
 & + 2(\kappa - 1) \int_0^t \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) |D(u_\delta)|^2 + 2(\kappa - 1) \int_0^t \int_{\Omega} (\mu'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\Phi_\delta - \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) (\operatorname{div} u_\delta)^2 \\
 & = \int_{\Omega} \left[ \Phi_\varepsilon^0 \left( \frac{|m_\varepsilon^0/\Phi_\varepsilon^0 + 2\kappa\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\varepsilon^0)|^2}{2} + \kappa(1 - \kappa) \frac{|2\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\varepsilon^0)|^2}{2} \right) \right] \\
 & + \int_{\Omega} \left[ \vartheta \frac{(\Phi_\varepsilon^0)^2}{2} + \Phi_\varepsilon^0 e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\varepsilon^0) \right] - r \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{2} \operatorname{div} u_\delta \\
 & - 2\kappa r \int_0^t \int_{\Omega} \Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \cdot \nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

We now have to control the last two integrals of the right-hand side in the previous relation :

$$J_1 = \frac{r}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \operatorname{div} u_\delta, \quad J_2 = 2\kappa r \int_0^t \int_{\Omega} \Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta).$$

*Control of  $J_1 = \frac{r}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \operatorname{div} u_\delta$ .* Unfortunately it is not possible to control  $J_1$  uniformly with respect to all the parameters directly by the left-hand side of (5.36). The idea is to apply in a certain sense the operator  $(-\Delta)^{-1} \operatorname{div}$  to the momentum equation where  $\Delta^{-1}$  denotes the inverse operator of the Laplace operator. For each function  $f$  such that  $\int_{\Omega} f = 0$  we denote  $g = (-\Delta)^{-1} f$  the unique periodic function such that  $-\Delta g = f$  and  $\int_{\Omega} g = 0$ . Therefore we can obtain the equality

$$\begin{aligned} r \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{2} \operatorname{div} u_\delta &= \frac{r}{2} \int_{\Omega} (-\Delta)^{-1} \operatorname{div} (\Phi_\delta u_\delta)(t) - \frac{r}{2} \int_{\Omega} (-\Delta)^{-1} \operatorname{div} (m_\varepsilon^0) \\ &\quad - \frac{r}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \Delta^{-1} \partial_i \partial_j (\Phi_\delta u_\delta^i u_\delta^j) \\ &\quad + \frac{r}{2} \vartheta \int_0^t \int_{\Omega} p(\Phi_\delta) + \frac{r}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \\ &\quad + r \int_0^t \int_{\Omega} \Delta^{-1} \partial_i \partial_j \left[ \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \left( \frac{\partial_i u_\delta^j + \partial_j u_\delta^i}{2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{r^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (-\Delta)^{-1} \operatorname{div} (\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta) \\ &= \sum_{k=1}^7 I_k \end{aligned} \tag{5.37}$$

In order to fully justify the previous equation, it suffices to take in the weak formulation (5.31) the test function

$$\zeta_1(t) \nabla \Delta^{-1}(\zeta_2(x)), \quad \zeta_1 \in \mathcal{C}^\infty((0, T)), \quad \zeta_2 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} \zeta_2(x) = 0.$$

We refer to [78] Section 2.2.6 for a similar computation and to Section 10.16 for properties of the singular operators involved in the previous equation.

Before studying each integral  $I_k$  of the previous equation let us explain how the norms of  $\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  are treated. By the Gagliardo–Nirenberg inequality, see for instance [144] (Theorem p.12 with  $j = 0$  and  $m = 1$  and Remark 5.), we have

$$\|\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^q(\Omega)} \leq C \left( \|\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^1(\Omega)}^\theta \|\nabla \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^{\tilde{q}}(\Omega)}^{1-\theta} + \|\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^1(\Omega)} \right)$$

for all  $\tilde{q} \in [1, 2)$ ,

$$q \in \left( 1, \frac{2\tilde{q}}{2-\tilde{q}} \right)$$



and where

$$\frac{1}{q} = \theta + \frac{1 - \theta}{2\tilde{q}/(2 - \tilde{q})}.$$

We obtain then

$$\begin{aligned} \|\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^q(\Omega)} &\leq C_1 \|\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^1(\Omega)}^{\alpha_1} + C_2 \left\| \frac{\nabla \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\Phi_\delta}} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\sqrt{\Phi_\delta}\|_{L^{2\tilde{q}/(2-\tilde{q})}(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^1(\Omega)}^{\alpha_1} + \frac{C_2}{\nu} \left\| \frac{\nabla \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\Phi_\delta}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \nu \|\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^{\tilde{q}/(2-\tilde{q})}(\Omega)} \end{aligned}$$

If we consider now  $\tilde{q}$  such that

$$q \in \left( \frac{\tilde{q}}{2 - \tilde{q}}, \frac{2\tilde{q}}{2 - \tilde{q}} \right)$$

and  $\nu > 0$  small enough the last term can be absorbed by the left-hand side and replacing  $\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  by  $r\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  we deduce that

$$\|r\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^q(\Omega)} \leq C \left( \|r\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^1(\Omega)}^{\alpha_1} + \left\| \frac{\nabla \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\Phi_\delta}} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\alpha_2} \right) \quad (5.38)$$

with  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  two positive constants depending only on  $q$ . We come back now to (5.37) and detail the control of each integral. Thanks to the regularity properties and conservation of mass we have for  $I_1$  (and the same for  $I_2$ )

$$|I_1| \leq r \int_{\Omega} |(-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(\Phi_\delta u_\delta)| \leq Cr \|\sqrt{\Phi_\delta}\|_{L^\infty L^2} \|\sqrt{\Phi_\delta} u_\delta\|_{L^\infty L^2} \leq Cr \|\sqrt{\Phi_\delta} u_\delta\|_{L^\infty L^2}$$

which can be absorbed by the left-hand side provided that  $r$  is small enough.

Concerning the convective term in  $I_3$ , we use the estimate due to the drag and the control of  $\Phi_\delta^{\gamma+1}$ , this control coming from the splitting

$$\begin{aligned} \|\Phi_\delta^{\gamma+1}\|_{L^1(\Omega)} &= \|\Phi_\delta^{\gamma+1} (\mathbf{1}_{\{\Phi_\delta \leq \Phi^*/2\}} + \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta \geq \Phi^*/2\}})\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C + C \|\Phi_\delta e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq r \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta^{-1} \partial_i \partial_j (\Phi_\delta u_\delta^i u_\delta^j)| \leq Cr \|\Delta^{-1} \partial_i \partial_j (\Phi_\delta |u_\delta|^2)\|_{L^1 L^{3(\gamma+1)/(3+2\gamma)}} \\ &\leq Cr \|\Phi_\delta^{1/3} \Phi_\delta^{2/3} |u_\delta|^2\|_{L^1 L^{3(\gamma+1)/(3+2\gamma)}} \\ &\leq Cr^{1/3} \|\Phi_\delta^{1/3}\|_{L^3 L^{3(\gamma+1)}} \|r^{2/3} \Phi_\delta^{2/3} |u_\delta|^2\|_{L^{3/2} L^{3/2}} \\ &\leq Cr^{1/3} \|\Phi_\delta\|_{L^1 L^{\gamma+1}}^{1/3} \|r^{1/3} \Phi_\delta^{1/3} u_\delta\|_{L^3 L^3}^2 \\ &\leq Cr^{1/3} \|\Phi_\delta e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^1 L^1}^{1/3} \|r^{1/3} \Phi_\delta^{1/3} u_\delta\|_{L^3 L^3}^2 \end{aligned}$$

Concerning the pressure terms, they have a positive sign and we do not need to control them. The integral of the drag can be controlled as follows

$$\begin{aligned}
 |I_7| &\leq r^2 \int_0^t \int_{\Omega} (-\Delta)^{-1} \operatorname{div} (\Phi_{\delta} |u_{\delta}| u_{\delta}) \\
 &\leq Cr \|r^{1/3} \Phi_{\delta}^{1/3} r^{2/3} \Phi_{\delta}^{2/3} |u_{\delta}|^2\|_{L^1 L^q} \quad \text{for all } q > 1 \\
 &\leq Cr \|r^{1/3} \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})\|_{L^3 L^{3q/(3-2q)}} \|r^{2/3} \Phi_{\delta}^{2/3} |u_{\delta}|^2\|_{L^{3/2} L^{3/2}} \\
 &\leq Cr \left( \|r \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})\|_{L^3 L^1}^{\alpha_1} + \left\| \frac{\nabla \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}} \right\|_{L^3 L^2}^{\alpha_2} \right) \|r^{1/3} \Phi_{\delta}^{1/3} u_{\delta}\|_{L^3 L^3}^2.
 \end{aligned}$$

Finally, the last integral  $I_6$ , coming from the viscosity  $\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) \operatorname{D}(u_{\delta})$ , is the most difficult

$$I_6 = r \int_0^t \int_{\Omega} \Delta^{-1} \partial_i \partial_j \left[ \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) \left( \frac{\partial_i u_{\delta}^j + \partial_j u_{\delta}^i}{2} \right) \right].$$

We see then that it is sufficient to control the gradient part, namely

$$r \int_0^t \int_{\Omega} \Delta^{-1} \partial_i \partial_j (\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) \partial_i u_{\delta}^j),$$

the remaining term can be then treated exactly in the same way. Writing that

$$\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) \partial_i u_{\delta}^j = \partial_i (\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) u_{\delta}^j) - \partial_i (\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})) u_{\delta}^j$$

we observe that the first term combined with the operator  $\Delta^{-1} \partial_i \partial_j$  and the integration over  $\Omega$  will give us 0. We get

$$\begin{aligned}
 &r \int_0^t \int_{\Omega} \Delta^{-1} \partial_i \partial_j (\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) \partial_i u_{\delta}^j) \\
 &\leq Cr \|\nabla \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) u_{\delta}\|_{L^1 L^q} \\
 &\leq Cr^{1-1/3-1/6} \left\| \frac{\nabla \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}} \right\|_{L^3 L^2} \|r^{1/3} \Phi_{\delta}^{1/3} u_{\delta}\|_{L^3 L^3} \|r^{1/6} \Phi_{\delta}^{1/6}\|_{L^3 L^{6q/(6-5q)}} \\
 &\leq Cr^{1/2} \left\| \frac{\nabla \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}} \right\|_{L^3 L^2} \|r^{1/3} \Phi_{\delta}^{1/3} u_{\delta}\|_{L^3 L^3} \|r \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})\|_{L^3 L^{q/(6-5q)}}^{1/6}
 \end{aligned}$$

for all  $q \in (1, 6/5)$  and (5.38) yields

$$\begin{aligned}
 &r \int_0^t \int_{\Omega} \Delta^{-1} \partial_i \partial_j (\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) \partial_i u_{\delta}^j) \\
 &\leq Cr^{1/2} \left( \|r \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})\|_{L^3 L^1}^{\alpha_1} + \left\| \frac{\nabla \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}} \right\|_{L^3 L^2}^{\alpha_2} \right) \|r^{1/3} \Phi_{\delta}^{1/3} u_{\delta}\|_{L^3 L^3}.
 \end{aligned}$$

This concludes the control of the integral  $\int_0^t \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) \operatorname{div} u_{\delta}$  in (5.36).

Control of  $J_2 = 2\kappa r \int_0^t \int_\Omega \Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)$ . It remains then in (5.36) to control the integral coming from the drag

$$\begin{aligned} J_2 &= 2\kappa r \int_0^T \int_\Omega |u_\delta| u_\delta \cdot \nabla \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \\ &= -2\kappa r \int_0^T \int_\Omega \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) |u_\delta| \operatorname{div}(u_\delta) - 2\kappa r \int_0^T \int_\Omega \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \frac{u_\delta^i}{|u_\delta|} u_\delta^j \partial_j u_\delta^i \end{aligned}$$

Splitting  $\nabla u_\delta$  between its symmetric and its skew-symmetric part, we get

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq c(\Omega) \kappa r \int_0^T \int_\Omega |\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)| |\nabla u_\delta| |u_\delta| \\ &\leq c(\Omega) \kappa r \int_0^T \int_\Omega |\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)| |\operatorname{D}(u_\delta)| |u_\delta| + c(\Omega) \kappa r \int_0^T \int_\Omega |\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)| |\operatorname{A}(u_\delta)| |u_\delta| \\ &\leq \frac{c(\Omega) \kappa r^{2/3}}{\sqrt{2(1-\kappa)}} \left\| \frac{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}}{\Phi_\delta^{1/3}} \right\|_{L^6 L^6} \left\| \sqrt{2(1-\kappa)} \sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)} \operatorname{D}(u_\delta) \right\|_{L^2 L^2} \|r^{1/3} \Phi_\delta^{1/3} |u_\delta|\|_{L^3 L^3} \\ &\quad + c(\Omega) \sqrt{\kappa} r^{2/3} \left\| \frac{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}}{\Phi_\delta^{1/3}} \right\|_{L^6 L^6} \left\| \sqrt{2\kappa} \sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)} \operatorname{A}(u_\delta) \right\|_{L^2 L^2} \|r^{1/3} \Phi_\delta^{1/3} |u_\delta|\|_{L^3 L^3} \\ &\leq C_1 r^{2/3} \left\| \sqrt{2(1-\kappa)} \sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)} \operatorname{D}(u_\delta) \right\|_{L^2 L^2}^2 + C_2 r^{2/3} \left\| \sqrt{2\kappa} \sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)} \operatorname{A}(u_\delta) \right\|_{L^2 L^2}^2 \\ &\quad + C_3 r^{2/3} \|r^{1/3} \Phi_\delta^{1/3} |u_\delta|\|_{L^3 L^3}^3 + C r^{2/3} \left\| \frac{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}}{\Phi_\delta^{1/3}} \right\|_{L^6 L^6}^6 \end{aligned} \tag{5.39}$$

For  $r$  small enough we can ensure that

$$\max(C_1, C_2, C_3) r^{2/3} \leq \frac{1}{2}$$

and absorb the first three terms of  $I$  by the left-hand side of (5.36). Splitting the last term into two parts

$$\left\| \frac{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}}{\Phi_\delta^{1/3}} \right\|_{L^6 L^6} \leq \left\| \frac{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}}{\Phi_\delta^{1/3}} \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta \leq \Phi^*/2\}} \right\|_{L^6 L^6} + \left\| \frac{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}}{\Phi_\delta^{1/3}} \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta > \Phi^*/2\}} \right\|_{L^6 L^6}$$

we have on one hand

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}}{\Phi_\delta^{1/3}} \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta \leq \Phi^*/2\}} &\leq \Phi_\delta^{1/6} \left[ \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{2}\right) - 1 \right)} + 1 \right] \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta \leq \Phi^*/2\}} \\ &\leq C \Phi_\delta^{1/6} \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta \leq \Phi^*/2\}} \end{aligned}$$

which is bounded in  $L^\infty((0, T) \times \Omega)$  and on the other hand,

$$\frac{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}}{\Phi_\delta^{1/3}} \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta > \Phi^*/2\}} \leq C \sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)} \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta > \Phi^*/2\}}.$$

Using again (5.38)

$$\|\sqrt{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}\mathbf{1}_{\{\Phi_\delta > \Phi^*/2\}}\|_{L^6L^6} \leq C \left( \|\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\|_{L^{12}L^1}^{\alpha_1} + \left\| \frac{\nabla\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\Phi_\delta}} \right\|_{L^{12}L^2}^{\alpha_2} \right).$$

Finally, coming back to (5.36), there exists  $\alpha > 1$  and  $\alpha_r > 0$  such that

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \Phi_\delta \left( \frac{|u_\delta + 2\kappa\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} + \kappa(1-\kappa)\frac{|2\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} \right) \right] (t) \\ & + \int_{\Omega} [\Phi_\delta e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) + r\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)](t) + \frac{r}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\vartheta p(\Phi_\delta) + \pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) + \frac{r}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \Phi_\delta |u_\delta|^3 \\ & + 2\kappa \int_0^t \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) |A(u_\delta)|^2 + 2\kappa \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\mu'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\pi'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\Phi_\delta} |\nabla\Phi_\delta|^2 \\ & + 2(\kappa-1) \int_0^t \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) |D(u_\delta)|^2 + 2(\kappa-1) \int_0^t \int_{\Omega} (\mu'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)\Phi_\delta - \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)) (\operatorname{div} u_\delta)^2 \\ & \leq \int_{\Omega} \left[ \Phi_\varepsilon^0 \left( \frac{|m_\varepsilon^0/\Phi_\varepsilon^0 + 2\kappa\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\varepsilon^0)|^2}{2} + \kappa(1-\kappa)\frac{|2\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\varepsilon^0)|^2}{2} \right) \right] \\ & \quad + \int_{\Omega} \left[ \vartheta \frac{(\Phi_\varepsilon^0)^2}{2} + \Phi_\varepsilon^0 e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\varepsilon^0) \right] + Cr^{\alpha_r} \\ & \times \int_0^t \left( \int_{\Omega} \left[ \Phi_\delta \left( \frac{|u_\delta + 2\kappa\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} + \kappa(1-\kappa)\frac{|2\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)|^2}{2} \right) + \Phi_\delta e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) + r\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \right] \right)^\alpha \end{aligned}$$

For  $r$  small enough we can use a nonlinear generalization of the Gronwall Lemma on the interval  $[0, T]$ , see for instance [18] or [24] (Lemma II.4.12 p.90, with  $f(y) = r^{\alpha_r}y^\alpha$ ).

Hence we have closed the  $\kappa$ -entropy inequality which allows us to use the existence result of D. BRESCH, B. DESJARDINS and E. ZATORSKA [36].

**Proposition 3** *Let  $T > 0$ ,  $\varepsilon, \delta$  be fixed, there exists  $r > 0$ , depending only on  $T$ , such that there exists a global  $\kappa$ -entropy solution to system (5.26). In particular we have the following regularities*

$$\sqrt{\Phi_\delta}|w_\delta| \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \sqrt{\Phi_\delta}|\nabla\varphi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)| \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (5.40)$$

$$\Phi_\delta e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad \Phi_\delta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (5.41)$$

$$r\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad r\Phi_\delta|u_\delta|^3 \in L^1((0, T) \times \Omega) \quad (5.42)$$

$$\sqrt{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}\nabla u_\delta \in (L^2((0, T) \times \Omega))^2, \quad \sqrt{\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}\operatorname{div} u_\delta \in L^2((0, T) \times \Omega) \quad (5.43)$$

$$\sqrt{\mu'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)} \left( \vartheta + 2\frac{\pi'_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\Phi_\delta} \right) \nabla\Phi_\delta \in (L^2((0, T) \times \Omega))^2. \quad (5.44)$$

## 2.2 Existence of weak solutions for the suspension model

We aim here at proving Theorem 6 by letting the parameters  $\delta$  and  $\vartheta$  go to 0. More precisely, we try in this section to derive the uniform controls dealing with viscosities

and pressures which become singular as  $\delta \rightarrow 0$  and using the friction term to ensure the compactness of the approximate solutions. Passing to the limit  $\delta \rightarrow 0$  in the equations, we prove that the limit volume fraction satisfies the maximal volume fraction constraint

$$0 \leq \Phi_{\varepsilon, \vartheta}(t, x) \leq \Phi^* \quad \text{a.e. on } (0, T) \times \Omega$$

Finally we perform the limit passage  $\vartheta \rightarrow 0$  which means that we eliminate the artificial pressure  $\vartheta \nabla \frac{\Phi^2}{2}$ . This step does not present additional difficulty and will be briefly explained in the final remark.

**Estimates.** We recall that the singular terms write as

$$\pi_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) = \begin{cases} c_\pi \frac{\Phi_\delta}{\varepsilon} \left( \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} \right)^\gamma \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*}} \right) - 1 \right) & \text{if } \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} \leq 1 - \delta \\ c_\pi \frac{\Phi_\delta}{\varepsilon} \left( \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} \right)^\gamma \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{\delta} \right) - 1 \right) & \text{if } \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} > 1 - \delta \end{cases}$$

$$\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) = \begin{cases} c_\mu \left[ \frac{\Phi_\delta}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*}} \right) - 1 \right) + \Phi_\delta \right] & \text{if } \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} \leq 1 - \delta \\ c_\mu \left[ \frac{\Phi_\delta}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{\delta} \right) - 1 \right) + \Phi_\delta \right] & \text{if } \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} > 1 - \delta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) &= 2((\mu_{\varepsilon, \delta})'_+(\Phi_\delta)\Phi_\delta - \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)) \\ &= \begin{cases} 2c_\mu \varepsilon^a \frac{\Phi_\delta^2}{\Phi^* \left(1 - \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*}\right)^2} \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*}} \right) & \text{if } \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} < 1 - \delta \\ 0 & \text{if } \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} \geq 1 - \delta \end{cases} \end{aligned}$$

*Control of  $\Phi_\delta$ .* Thanks to the  $\kappa$ -entropy inequality and to the bound  $\mu'_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \geq 1$  we ensure that

$$\nabla \sqrt{\Phi_\delta} \quad \text{is bounded in } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2)$$

and then that  $\Phi_\delta$  is bounded in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  for all  $p \in [1, +\infty)$ . Moreover

$$\|\sqrt{\vartheta} \sqrt{\mu'_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)} |\nabla \Phi_\delta|\|_{L^2 L^2} \leq C$$

which means that  $\nabla \Phi_\delta$  is bounded in  $(L^2((0, T) \times \Omega))^2$ .

*Control of  $\Phi_\delta u_\delta$ .* For the momentum we directly have  $\Phi_\delta |u_\delta| = \sqrt{\Phi_\delta} \sqrt{\Phi_\delta} |u_\delta|$  bounded in  $L^\infty(0, T; L^q(\Omega))$  for all  $q \in [1, 2)$  and  $\nabla(\Phi_\delta u_\delta)$  bounded in  $L^2(0, T; (L^1(\Omega))^2)$  by writing that

$$\nabla(\Phi_\delta u_\delta) = \sqrt{\Phi_\delta} \sqrt{\Phi_\delta} \nabla u_\delta + 2\sqrt{\Phi_\delta} u_\delta \otimes \nabla \sqrt{\Phi_\delta}.$$

In addition, the drag contribution in the  $\kappa$ -entropy inequality provides

$$\Phi_\delta |u_\delta| = \Phi_\delta^{2/3} \Phi_\delta^{1/3} |u_\delta| \quad \text{bounded in } L^3(0, T; L^q(\Omega)) \quad \forall q \in [1, 3).$$

*Controls of the viscosities.* Thanks to the  $\kappa$ -entropy we control uniformly  $\sqrt{\Phi_\delta} |\nabla \varphi_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)|$  in  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . If we set  $V_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)$  such that

$$V'_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) = \sqrt{\Phi_\delta} \varphi'_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) = \frac{\mu'_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\Phi_\delta}} \quad (5.45)$$

we deduce that  $\nabla V_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)$  is bounded in  $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2)$ , coming back to the viscosity  $\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)$ , using the bound  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ ,  $p < +\infty$ , on  $\Phi_\delta$  we obtain

$$\nabla \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) = \sqrt{\Phi_\delta} \nabla V_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \quad \text{bounded in } L^\infty(0, T; (L^q(\Omega))^2), \quad \forall q \in [1, 2). \quad (5.46)$$

Since we control  $\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)$  uniformly in  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$  we deduce that

$$\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) \quad \text{bounded in } L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), \quad \forall p \in [1, +\infty). \quad (5.47)$$

$$\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta) |D(u_\delta)| \quad \text{bounded in } L^2(0, T; L^q(\Omega)), \quad \forall q \in [1, 2). \quad (5.48)$$

We next bound the other viscosity coefficient  $\lambda_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)$  by comparison with

$$\mu_{\varepsilon, \delta}^1(\Phi_\delta) = \begin{cases} \frac{\Phi_\delta}{\varepsilon} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*}}\right) - 1 \right) & \text{if } \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} < 1 - \delta \\ \frac{\Phi_\delta}{\varepsilon} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \delta}\right) - 1 \right) & \text{if } \frac{\Phi_\delta}{\Phi^*} \geq 1 - \delta \end{cases} \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \quad p < +\infty$$

Indeed, the ratio for  $\Phi_\delta/\Phi^* \leq 1 - \delta$  reads as

$$\frac{\lambda_{\varepsilon, \delta}(\Phi_\delta)}{(\mu_{\varepsilon, \delta}^1(\Phi_\delta))^2} = \frac{2c_\mu \varepsilon^a \Phi_\delta^2 \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\delta/\Phi^*}\right)}{\Phi^* (1 - \Phi_\delta/\Phi^*)^2} \times \frac{\varepsilon^2}{\Phi_\delta^2 \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\delta/\Phi^*}\right) - 1 \right)^2}.$$

Using the fact that

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\delta/\Phi^*}\right) - 1 &= \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\delta/\Phi^*}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\delta/\Phi^*}\right)\right) \\ &\geq \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\delta/\Phi^*}\right) (1 - \exp(-\varepsilon^{1+a})) \end{aligned}$$

we get then

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{(\mu_{\varepsilon,\delta}^1(\Phi_\delta))^2} &\leq C(\varepsilon)\varepsilon^{-a} \frac{\varepsilon^{2(1+a)}}{(1-\Phi_\delta/\Phi^*)^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon^{1+a}}{1-\Phi_\delta/\Phi^*}\right) \\ &\leq C(\varepsilon) \end{aligned}$$

because  $X \mapsto X^2 \exp(-X)$  is a bounded function on  $(0, +\infty)$ . Since  $\varepsilon$  is fixed at this stage, we can conclude to the control of  $\lambda_{\varepsilon,\delta}$

$$\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \text{ bounded in } L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), \forall p \in [1, +\infty) \quad (5.49)$$

and in addition

$$\frac{\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}} = \frac{\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)^2} \mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)^{3/2} \text{ bounded in } L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), \forall p \in [1, +\infty). \quad (5.50)$$

To pass to the limit in the diffusion terms written as in (5.20)–(5.21), we need also to control the quantity  $\frac{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\Phi_\delta}}$ . Let  $\underline{\Phi} \in (0, 1)$ , on the set  $\{\Phi_\delta/\Phi^* \geq \underline{\Phi}\}$ ,

$$\frac{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\Phi_\delta}} \leq \frac{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\underline{\Phi}}\sqrt{\Phi^*}}$$

is bounded in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ ,  $p < \infty$ . On the other set  $\{\Phi_\delta/\Phi^* \leq \underline{\Phi}\}$ ,  $\Phi_\delta$  is far from  $\Phi^*$  and then

$$\frac{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\Phi_\delta}} \leq \frac{c_\mu \sqrt{\Phi_\delta}}{\varepsilon} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1-\Phi_\delta/\Phi^*}\right) - 1 \right) + c_\mu \sqrt{\Phi_\delta} \leq C \sqrt{\Phi_\delta}$$

which is still bounded in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  for all  $p < \infty$ . Therefore, in both cases

$$\frac{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)}{\sqrt{\Phi_\delta}} \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), \quad p \in [1, +\infty). \quad (5.51)$$

*Control of the singular pressure.* Since we have the relation

$$\pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) = c_\pi \left(\frac{\Phi_\delta}{\Phi^*}\right)^\gamma \mu_{\varepsilon,\delta}^1(\Phi_\delta)$$

We can deduce directly controls on the singular pressure

$$\pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), \quad p \in [1, +\infty). \quad (5.52)$$

and

$$\begin{aligned} \nabla \pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) &= c_\pi \gamma \frac{\Phi_\delta^{\gamma-1}}{(\Phi^*)^\gamma} \mu_{\varepsilon,\delta}^1(\Phi_\delta) \nabla \Phi_\delta + c_\pi \left(\frac{\Phi_\delta}{\Phi^*}\right)^\gamma \nabla \mu_{\varepsilon,\delta}^1(\Phi_\delta) \\ &\text{bounded in } L^2(0, T; (L^q(\Omega))^2), \quad q \in [1, 2). \end{aligned} \quad (5.53)$$

**Remark :** Compared to the work done with constant viscosities in [151], the singular viscosities via the  $\kappa$ -entropy estimate (5.32) provide directly an uniform control of the singular pressure without additional estimates using the Bogovskii operator. In addition, we have much more integrability in the present case thanks to the  $\kappa$ -entropy which controls finally  $\nabla\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi)$  and consequently all the powers of  $\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi)$  and  $\pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi)$ . In comparison, with constant viscosities we only get  $\pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi)$  bounded in  $L^1((0, T) \times \Omega)$  which forces us to derive an additionnal estimate in order to prove the equi-integrability of the sequence.

**Convergences.** Following the classical steps of the stability of weak solutions of Navier-Stokes equations with degenerate viscosities (see for instance [140]), we prove first that the volume fraction  $\Phi_\delta$  converges to  $\Phi_{\varepsilon,\vartheta}$  a.e. and in  $\mathcal{C}([0, T]; L^p(\Omega))$  for all  $p \in [1, +\infty)$  thanks to the Aubin-Lions-Simon lemma (see [168]). This convergence leads then to the strong convergence of the pressures  $p(\Phi_\delta)$  and  $\pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  in  $\mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega))$ .

Using again the Aubin-Lions-Simon lemma, we get the strong convergence in  $L^2(0, T; L^q(\Omega))$  for all  $q \in [1, 2)$  and the convergence a.e. of  $m_\delta = \Phi_\delta u_\delta$  towards some  $m$ . Since  $m_\delta/\sqrt{\Phi_\delta}$  is bounded in  $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2)$ , Fatou's lemma provides

$$\int_{\Omega} \liminf_{\delta} \frac{|m_\delta|^2}{\Phi_\delta} < +\infty$$

which implies in particular that  $m = 0$  a.e. on the vacuum set  $\{\Phi_{\varepsilon,\vartheta} = 0\}$ . Therefore we can define a limit velocity  $u_{\varepsilon,\vartheta}$  such that

$$u_{\varepsilon,\vartheta}(t, x) = \begin{cases} \frac{m(t, x)}{\Phi_{\varepsilon,\vartheta}(t, x)} & \text{if } \Phi_{\varepsilon,\vartheta} \neq 0 \\ 0 & \text{if } \Phi_{\varepsilon,\vartheta} = 0 \end{cases}$$

Finally  $\Phi_\delta u_\delta$  converges a.e. and strongly to  $\Phi_{\varepsilon,\vartheta} u_{\varepsilon,\vartheta}$  in  $(L^2((0, T) \times \Omega))^2$ . At the limit we recover the maximal volume fraction constraint

**Lemma 10** *At the limit  $\delta \rightarrow 0$ , we have  $\text{meas} \{(t, x) : \Phi_{\varepsilon,\vartheta}(t, x) \geq \Phi^*\} = 0$ .*



*Proof.* This result is based on the control of the singular potentiel energy when  $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
 & \Phi_\delta e_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta) \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta/\Phi^* \geq 1-\delta\}} \\
 & \geq \Phi_\delta \left( \int_0^{\Phi^*(1-\delta)} \frac{\pi_{\varepsilon,\delta}(s)}{s^2} ds \right) \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta/\Phi^* \geq 1-\delta\}} \\
 & \geq \frac{\Phi_\delta}{(\Phi^*)^2(1-\delta)^2} \left( \int_0^{\Phi^*(1-\delta)} \pi_{\varepsilon,\delta}(s) ds \right) \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta/\Phi^* \geq 1-\delta\}} \\
 & \geq \frac{c_\pi \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta/\Phi^* \geq 1-\delta\}}}{\varepsilon \Phi^*(1-\delta)} \left( \int_0^{\Phi^*(1-\delta)} s \left( \frac{s}{\Phi^*} \right)^\gamma \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1-s/\Phi^*} \right) - 1 \right) ds \right) \\
 & \geq \frac{c_\pi \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta/\Phi^* \geq 1-\delta\}}}{\varepsilon \Phi^*(1-\delta)} \left( \int_0^{\Phi^*(1-\delta)} s \left( \frac{s}{\Phi^*} \right)^\gamma \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1-s/\Phi^*} \right) ds \right) \\
 & \geq \frac{\varepsilon^a c_\pi \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta/\Phi^* \geq 1-\delta\}}}{1-\delta} \int_0^{1-\delta} \Phi^* \frac{\tau^{\gamma+1}}{1-\tau} d\tau \\
 & \geq (C_\varepsilon^1(-\log \delta) - C_\varepsilon^2) \mathbf{1}_{\{\Phi_\delta/\Phi^* \geq 1-\delta\}}
 \end{aligned}$$

Integrating over  $\Omega$  and letting  $\delta$  go to 0 we recover at the limit

$$\text{meas} \{(t, x) : \Phi_{\varepsilon,\vartheta}(t, x) \geq \Phi^*\} = 0.$$

We can also prove the strong convergence of the singular terms  $\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$ ,  $\pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  and  $\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  in  $L^p((0, T) \times \Omega)$  for all  $p \in [1, +\infty)$ . Indeed we have previously seen that  $\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$ ,  $\pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  and  $\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  are bounded in  $L^p((0, T) \times \Omega)$  for all  $p \in [1, +\infty)$ . Besides  $\Phi_\delta$  converges a.e. and strongly to  $\Phi_{\varepsilon,\vartheta}$  and we ensure that  $\text{meas} \{(t, x) : \Phi_{\varepsilon,\vartheta}(t, x) \geq \Phi^*\} = 0$ . Therefore we guarantee that  $\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$ ,  $\pi_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  and  $\lambda_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)$  converge a.e. towards  $\mu_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta})$ ,  $\pi_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta})$  and  $\lambda_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta})$  respectively. The Dominated Convergence Theorem finally provides the strong convergence of  $\mu_{\varepsilon,\delta}$ ,  $\pi_{\varepsilon,\delta}$  and  $\lambda_{\varepsilon,\delta}$  in  $L^p((0, T) \times \Omega)$  for all  $p \in [1, +\infty)$ .

*Convergence in the drag term.* We want to show that

$$\int_0^T \int_\Omega |\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta - \Phi_{\varepsilon,\vartheta} |u_{\varepsilon,\vartheta}| u_{\varepsilon,\vartheta}| \longrightarrow 0$$

For that purpose, we introduce  $R > 0$  and split the previous integral into three parts

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_\Omega |\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta - \Phi_{\varepsilon,\vartheta} |u_{\varepsilon,\vartheta}| u_{\varepsilon,\vartheta}| dx dt \\
 & \leq \int_0^T \int_\Omega |\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \mathbf{1}_{\{|u_\delta| \leq R\}} - \Phi_{\varepsilon,\vartheta} |u_{\varepsilon,\vartheta}| u_{\varepsilon,\vartheta} \mathbf{1}_{\{|u_{\varepsilon,\vartheta}| \leq R\}}| dx dt \\
 & \quad + \int_0^T \int_\Omega |\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \mathbf{1}_{\{|u_\delta| \geq R\}}| dx dt \\
 & \quad + \int_0^T \int_\Omega |\Phi_{\varepsilon,\vartheta} |u_{\varepsilon,\vartheta}| u_{\varepsilon,\vartheta} \mathbf{1}_{\{|u_{\varepsilon,\vartheta}| \geq R\}}| dx dt
 \end{aligned}$$

First we have  $\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta = \Phi_\delta^{-1} \Phi_\delta^2 |u_\delta| u_\delta$  which converges a.e. to  $\Phi_{\varepsilon,\vartheta}^{-1} \Phi_{\varepsilon,\vartheta}^2 |u_{\varepsilon,\vartheta}| u_{\varepsilon,\vartheta}$  on the set  $\{\Phi_{\varepsilon,\vartheta} > 0\}$  thanks to the convergence a.e. on  $(0, T) \times \Omega$  of  $\Phi_\delta u_\delta$  and  $\Phi_\delta$ . In addition

$$|\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \mathbf{1}_{\{|u_\delta| \leq R\}}| \leq R^2 \Phi_\delta \rightarrow 0 \quad \text{on} \quad \{\Phi_{\varepsilon,\vartheta} = 0\}$$

Therefore we get the convergence a.e. of  $\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta$  to  $\Phi_{\varepsilon,\vartheta} |u_{\varepsilon,\vartheta}| u_{\varepsilon,\vartheta}$  and the Dominated Convergence Theorem gives the convergence to 0 of the first integral,

$$\int_0^T \int_\Omega |\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \mathbf{1}_{\{|u_\delta| \leq R\}} - \Phi_{\varepsilon,\vartheta} |u_{\varepsilon,\vartheta}| u_{\varepsilon,\vartheta} \mathbf{1}_{\{|u_{\varepsilon,\vartheta}| \leq R\}}| \, dx \, dt \rightarrow 0.$$

Concerning the two remaining integrals we use the control given by the  $\kappa$ -entropy and we write

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega |\Phi_\delta |u_\delta| u_\delta \mathbf{1}_{\{|u_\delta| \geq R\}}| \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega |\Phi_{\varepsilon,\vartheta} |u_{\varepsilon,\vartheta}| u_{\varepsilon,\vartheta} \mathbf{1}_{\{|u_{\varepsilon,\vartheta}| \geq R\}}| \, dx \, dt \\ & \leq \frac{1}{R} \left( \int_0^T \int_\Omega \Phi_\delta |u_\delta|^3 \mathbf{1}_{\{|u_\delta| \geq R\}} \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \Phi_{\varepsilon,\vartheta} |u_{\varepsilon,\vartheta}|^3 \mathbf{1}_{\{|u_{\varepsilon,\vartheta}| \geq R\}} \, dx \, dt \right) \\ & \leq \frac{C}{R} \end{aligned}$$

Letting  $R$  go to  $+\infty$ , we obtain the strong convergence in  $(L^1((0, T) \times \Omega))^2$  of the turbulent drag term towards  $\Phi_{\varepsilon,\vartheta} |u_{\varepsilon,\vartheta}| u_{\varepsilon,\vartheta}$ .

*Convergence in the convective term.* For  $\sqrt{\Phi_\delta} u_\delta$  we develop the same idea as for the turbulent drag term and we decompose the integral between the small and the large velocities

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \left| \sqrt{\Phi_\delta} u_\delta - \sqrt{\Phi_{\varepsilon,\vartheta}} u_{\varepsilon,\vartheta} \right|^2 \, dx \, dt \\ & \leq \int_0^T \int_\Omega \left| \sqrt{\Phi_\delta} u_\delta \mathbf{1}_{\{|u_\delta| \leq R\}} - \sqrt{\Phi_{\varepsilon,\vartheta}} u_{\varepsilon,\vartheta} \mathbf{1}_{\{|u_{\varepsilon,\vartheta}| \leq R\}} \right|^2 \, dx \, dt \\ & \quad + \int_0^T \int_\Omega \left| \sqrt{\Phi_\delta} u_\delta \mathbf{1}_{\{|u_\delta| \geq R\}} \right|^2 \, dx \, dt \\ & \quad + \int_0^T \int_\Omega \left| \sqrt{\Phi_{\varepsilon,\vartheta}} u_{\varepsilon,\vartheta} \mathbf{1}_{\{|u_{\varepsilon,\vartheta}| \geq R\}} \right|^2 \, dx \, dt \end{aligned}$$

As previously we can show the convergence a.e. of  $\sqrt{\Phi_\delta} u_\delta$  to  $\sqrt{\Phi_{\varepsilon,\vartheta}} u_{\varepsilon,\vartheta}$  and the Dominated Convergence Theorem gives the convergence to 0 of the first integral. For the two last integrals we observe that we can split  $\Phi |u|^2$  as

$$\Phi |u|^2 = \Phi^{1/3} \Phi^{2/3} |u|^2$$

and by the Hölder inequality with  $1 < q < 3/2$  we get

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \Phi |u|^2 \mathbf{1}_{\{|u_{\delta}| \geq R\}} dx dt \\ & \leq \left( \int_0^T \int_{\Omega} \Phi^{q'/3} dx dt \right)^{1/q'} \left( \int_0^T \int_{\Omega} \Phi^{2q/3} |u|^{2q} dx dt \right)^{1/q} \\ & \leq \frac{C}{R^{(3-2q)/q}} \left( \int_0^T \int_{\Omega} \Phi |u|^3 dx dt \right)^{1/q} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

We conclude that

$$\sqrt{\Phi_{\delta}} u_{\delta} \text{ converges strongly to } \sqrt{\Phi_{\varepsilon, \vartheta}} u_{\varepsilon, \vartheta} \text{ in } (L^2((0, T) \times \Omega))^2.$$

*Convergence in the diffusion terms.* Since  $\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) |D(u_{\delta})|$  and  $\lambda_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) \operatorname{div} u_{\delta}$  are bounded in  $L^2(0, T; L^q(\Omega))$  for all  $q \in [1, 2)$ , we deduce that they converge weakly in  $L^2(0, T; L^q(\Omega))$  for all  $q \in [1, 2)$  towards  $\underline{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi)} D(u)$  and  $\underline{\lambda_{\varepsilon, \delta}(\Phi)} \operatorname{div} u$  respectively.

Remember that the diffusion terms make sense in the weak formulation of the momentum equation if they are written under the form

$$\begin{aligned} 2 \int_0^T \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) D(u_{\delta}) : \nabla \zeta &= - \int_0^T \int_{\Omega} \sqrt{\Phi_{\delta}} u_{\delta}^j \left( \frac{\partial_i \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}} \partial_i \zeta^j + \frac{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}} \partial_{ii}^2 \zeta^j \right) \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \sqrt{\Phi_{\delta}} u_{\delta}^i \left( \frac{\partial_j \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}} \partial_i \zeta^j + \frac{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}} \partial_{ij}^2 \zeta^j \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

For the first integral we have the strong convergence in  $(L^2((0, T) \times \Omega))^2$  of  $\sqrt{\Phi_{\delta}} u_{\delta}$  towards  $\sqrt{\Phi_{\varepsilon, \vartheta}} u_{\varepsilon, \vartheta}$  and the weak convergence in  $L^2((0, T) \times \Omega)$  of  $\frac{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}}$  towards  $\frac{\mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon, \vartheta})}{\sqrt{\Phi_{\varepsilon, \vartheta}}}$  thanks to the control (5.51).

Recall that we define  $V_{\varepsilon, \delta}$  such that (5.45) which allows us to write for the second integral

$$\frac{\nabla \mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\Phi_{\delta}}} = \sqrt{\Phi_{\delta}} \nabla \varphi_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta}) = \nabla V_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})$$

and we can prove that  $\nabla V_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})$  weakly converges in  $(L^2((0, T) \times \Omega))^2$  towards  $\nabla V_{\varepsilon}$ . By uniqueness of the limit in the sense of distribution we have  $\sqrt{\Phi_{\varepsilon, \vartheta}} \nabla V_{\varepsilon} = \nabla \mu_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon, \vartheta})$ . Thus we can pass to the limit in the weak formulation (5.54) to obtain (5.20).

For the other diffusion term,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\lambda_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}} \sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})} \operatorname{div} u_{\delta} \operatorname{div} \zeta$$

we can prove the strong convergence in  $L^2((0, T) \times \Omega)$  of the first part  $\frac{\lambda_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}{\sqrt{\mu_{\varepsilon, \delta}(\Phi_{\delta})}}$ . Indeed we have the bound (5.50) and the convergence a.e. since  $\Phi_{\delta}$  converges strongly to  $\Phi_{\varepsilon, \vartheta}$  and

$\Phi_{\varepsilon,\vartheta} < \Phi^*$  a.e.. On the other hand  $\sqrt{\mu_{\varepsilon,\delta}(\Phi_\delta)} \operatorname{div} u_\delta$  converges weakly in  $L^2((0,T) \times \Omega)$  towards  $\sqrt{\mu_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta})} \operatorname{div} u_{\varepsilon,\vartheta}$  (this is the previous point). We deduce then the convergence of the integral towards

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\lambda_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta})}{\sqrt{\mu_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta})}} \sqrt{\mu_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta})} \operatorname{div} u_{\varepsilon,\vartheta} \operatorname{div} \zeta$$

Note finally that, at the limit  $\delta = 0$ , we have the relation

$$\pi_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta}) = c_\pi \left( \frac{\Phi_{\varepsilon,\vartheta}}{\Phi^*} \right)^\gamma \mu_\varepsilon^1(\Phi_{\varepsilon,\vartheta}), \quad (5.55)$$

**Remark on the limit passage  $\vartheta \rightarrow 0$  :** Since at this stage we ensure that  $\Phi_{\varepsilon,\vartheta}$  is bounded in  $L^\infty((0,T) \times \Omega)$  we can deduce a control of  $\nabla \Phi_{\varepsilon,\vartheta}$  which does not depend on  $\vartheta$ . Indeed, thanks to the  $\kappa$ -entropy inequality (5.32) we have

$$\frac{\mu'_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta})}{\sqrt{\Phi_{\varepsilon,\vartheta}}} |\nabla \Phi_{\varepsilon,\vartheta}| = \sqrt{\Phi_{\varepsilon,\vartheta}} |\nabla \varphi_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta})| \quad \text{bounded in } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

Then, since  $\mu'_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon,\vartheta}) \geq 1$  and  $\Phi_{\varepsilon,\vartheta} \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$ , we get that

$$|\nabla \Phi_{\varepsilon,\vartheta}| \quad \text{is bounded in } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \quad (5.56)$$

We can then pass to the limit  $\vartheta \rightarrow 0$  in the equations to obtain system (5.8).

### 3 Recovering the two-phase granular system

The aim of this section is to rigorously prove the limit passage from the suspension model (5.8) towards the two-phase system (5.22). What differs from the previous section is that at the limit volume fraction  $\Phi$  can reach the constraint  $\Phi^*$  on a set of positive measure. We expect then that the bounds on the diffusion terms will be more subtle because the singular terms involve the quantity

$$\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \frac{\Phi_\varepsilon}{\Phi^*}}.$$

We see the competition between  $\varepsilon^{1+a}$  which tends to 0 and  $1 - \frac{\Phi_\varepsilon}{\Phi^*}$  which can tend to 0 possibly faster than  $\varepsilon^{1+a}$ . In particular we do not have a uniform control on  $\lambda_\varepsilon$  and to pass to the limit in the corresponding diffusion term we will need to consider the renormalized continuity equation.

**Estimates.** *Control of the volume fraction.* From the previous step, we know that  $\Phi_\varepsilon$  is in  $L^\infty((0, T) \times \Omega)$  since it is bounded by  $\Phi^*$ . As it has been explained for the limit passage  $\vartheta \rightarrow 0$ , we have in addition an uniform control of the gradient  $\nabla\Phi_\varepsilon$  in  $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2)$  since

$$|\nabla\Phi_\varepsilon| \leq \sqrt{\Phi^*} \frac{\sqrt{\mu'_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}}{c_\mu \sqrt{\Phi_\varepsilon}} |\nabla\Phi_\varepsilon| \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

*Integrability given by the drag term.* As previously we ensure extra-integrability of  $\sqrt{\Phi_\varepsilon}u_\varepsilon$  thanks to the the turbulent drag term present in the momentum equation

$$\Phi_\varepsilon^{1/3}|u_\varepsilon| \quad \text{is bounded in} \quad L^3((0, T) \times \Omega). \quad (5.57)$$

*Control of the singular coefficients.* Since the  $\kappa$ -entropy (5.19) gives

$$\frac{|\nabla\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)|}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

and

$$r\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0, T; L^1(\Omega)),$$

since moreover  $\Phi_\varepsilon \leq \Phi^*$ , then

$$\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega))$$

Thanks to the relationship between  $\pi_\varepsilon$  and  $\mu_\varepsilon^1$  we deduce that

$$\begin{aligned} \nabla\pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) &= c_\pi \gamma \frac{\Phi_\varepsilon^{\gamma-1}}{(\Phi^*)^\gamma} \mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon) \nabla\Phi_\varepsilon + c_\pi \left( \frac{\Phi_\varepsilon}{\Phi^*} \right)^\gamma \nabla\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon) \\ &\quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0, T; (L^q(\Omega))^2), \quad \forall q \in [1, 2). \end{aligned} \quad (5.58)$$

As for the previous step  $\delta \rightarrow 0$ , we need a control of the quantity  $\frac{\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}}$ . Let  $\underline{\Phi} \in (0, 1)$ , on the set  $\{\Phi_\varepsilon/\Phi^* \geq \underline{\Phi}\}$ ,

$$\frac{\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} \leq \frac{\mu_\varepsilon(\Phi_\delta)}{\sqrt{\underline{\Phi}}\sqrt{\Phi^*}}$$

is bounded in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ ,  $p < \infty$ . On the other set  $\{\Phi_\varepsilon/\Phi^* \leq \underline{\Phi}\}$ ,  $\Phi_\varepsilon$  is far from  $\Phi^*$  and then uniformly in  $\varepsilon$

$$\frac{\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} \leq c_\mu \frac{\sqrt{\Phi_\varepsilon}}{\varepsilon} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^*}\right) - 1 \right) \sqrt{\Phi_\varepsilon} \leq C\sqrt{\Phi_\varepsilon}$$

which is still bounded in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  for all  $p \in [1, \infty)$ . Therefore, in both cases

$$\frac{\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), \quad p \in [1, +\infty). \quad (5.59)$$

**Passage to limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ .** With all these estimates we can now pass to the limit in the weak formulations of the mass and the momentum equations. The main convergence arguments remain the same as those presented in the previous section. We ensure with the Aubin-Lions-Simon lemma the strong convergence of the density  $\Phi_\varepsilon$  towards  $\Phi$  in  $\mathcal{C}([0, T], L^p(\Omega))$  for all  $p \in [1, +\infty)$  and the limit gradient of the density  $\nabla\Phi$  is bounded in  $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2)$ . We can also obtain the strong convergence of the momentum  $\Phi_\varepsilon u_\varepsilon$  towards  $m$ , define a limit velocity  $u$  equal to 0 on the set  $\{\Phi = 0\}$  and such that  $m = \Phi u$ . The procedure to pass to the limit in the turbulent drag term and the convective term is the same as previously and consists essentially in splitting the integral (for instance of the convective term)

$$\int_0^T \int_\Omega |\sqrt{\Phi_\varepsilon} u_\varepsilon - \sqrt{\Phi} u|^2$$

between small and large velocities. The Dominated Convergence Theorem gives the convergence to 0 for the small velocities whereas we need (5.57) to control the integral for the large velocities.

With the previous controls we get that

$$\begin{cases} \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \longrightarrow \Pi & \text{weakly-* in } L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega)) \\ & \forall q \in [1, 2) \\ \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) = c_\mu(\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon) + \Phi_\varepsilon) \longrightarrow c_\mu(\bar{\mu} + \Phi) & \text{weakly-* in } L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \end{cases}$$

**Lemma 11** *At the limit  $\varepsilon = 0$  we have*

$$(\Phi^* - \Phi)\bar{\mu} = 0 \tag{5.60}$$

$$(\Phi^* - \Phi)\Pi = 0 \tag{5.61}$$

and the equality

$$c_\pi \bar{\mu} = \left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^\gamma \Pi = \Pi. \tag{5.62}$$

In particular,

$$\Pi \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega)).$$

*Proof.* When  $\varepsilon > 0$  we have

$$\begin{aligned} (1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^*)\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon) &= \frac{\Phi_\varepsilon(1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^*)}{\varepsilon} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^*}\right) - 1 \right) \\ &= \varepsilon^a \Phi_\varepsilon \frac{1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^*}{\varepsilon^{1+a}} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^*}\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

We need to consider separately three different subsets

$$\Omega^1 = \{\exists b < a, \text{ s.t. } \forall \varepsilon, 1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^* \geq \varepsilon^b\}, \quad \Omega^2 = \{\exists c > 1 + a, \text{ s.t. } \forall \varepsilon, 1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^* \leq \varepsilon^c\},$$

$$\Omega^3 = \{\forall \varepsilon, \varepsilon^{1+a} \leq 1 - \Phi_\varepsilon/\Phi^* \leq \varepsilon^a\}$$

- on  $\Omega^1$ , this is the case where

$$\frac{1}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*} \right) - 1 \right) \rightarrow 0$$

and for which we have directly the convergence of  $(1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*) \mu_\varepsilon^1$  to 0.

- on  $\Omega^2$ , the most singular case, we have

$$X = \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*} \rightarrow +\infty$$

and if  $p > 0$  and  $X$  is large enough (or  $\varepsilon$  small enough), we can ensure that

$$\frac{1}{X} \leq (\exp(X) - 1)^p.$$

Using the fact that  $\Phi_\varepsilon$  is bounded away from 0, we get

$$\begin{aligned} (1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*) \mu_\varepsilon^1 &\leq \varepsilon^a \Phi_\varepsilon \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*} \right) - 1 \right)^{1+p} \\ &\leq \varepsilon^{a+1+p} \Phi_\varepsilon^{-p} \frac{\Phi_\varepsilon^{1+p}}{\varepsilon^{1+p}} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*} \right) - 1 \right)^{1+p} \\ &= C \varepsilon^{a+1+p} \Phi_\varepsilon^{-p} (\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon))^{1+p} \end{aligned}$$

which tends to 0 since  $\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon)$  is bounded in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  for all  $p \in [1, +\infty)$ .

- on  $\Omega^3$ , the intermediate case, we ensure that

$$\exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*} \right) - 1 \leq C$$

then, since we assumed that  $a > 1$

$$\begin{aligned} (1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*) \mu_\varepsilon^1 &\leq C \varepsilon^a \Phi_\varepsilon \frac{1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*}{\varepsilon^{1+a}} \\ &\leq C \varepsilon^{a-1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Thus, in every case,  $(1 - \Phi_\varepsilon / \Phi^*) \mu_\varepsilon^1$  converges strongly to 0 in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  for all  $p \in [1, +\infty)$ . With the same arguments, since  $\pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) = c_\pi \left( \frac{\Phi_\varepsilon}{\Phi^*} \right)^\gamma \mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon)$  has the same divergence close to  $\Phi^*$ , and since  $\Phi_\varepsilon$  is in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ , for all  $p \in [1, +\infty)$ , we ensure that

$$(1 - \Phi / \Phi^*) \Pi = 0.$$

By the strong convergence of  $\Phi_\varepsilon$  and the weak convergences of  $\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$  and  $\pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$  we get in addition

$$\Pi = c_\pi \left( \frac{\Phi}{\Phi^*} \right)^\gamma \bar{\mu}.$$

Combined with two previous constraints,  $\Pi = c_\pi \bar{\mu} = 0$  on  $\{\Phi < \Phi^*\}$ , it gives finally

$$\Pi = c_\pi \bar{\mu} \quad \text{a.e. on } (0, T) \times \Omega$$

and since  $\bar{\mu}$  lies in  $L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega))$ ,

$$\Pi \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega)). \quad \square$$

Finally

$$\begin{cases} \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \longrightarrow \Pi & \text{weakly-* in } L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega)) \\ & \forall q \in [1, 2) \\ \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) = c_\mu(\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon) + \Phi_\varepsilon) \longrightarrow c_\mu(\Pi/c_\pi + \Phi) & \text{weakly-* in } L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \end{cases}$$

Concerning the diffusion term  $\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) D(u_\varepsilon)$ , the weak formulation writes as

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \sqrt{\Phi_\varepsilon} u_\varepsilon^j \left( \frac{\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} \partial_{ij}^2 \zeta^j + \frac{\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} \partial_{ii}^2 \zeta^j \right) \\ & - \int_0^T \int_\Omega \sqrt{\Phi_\varepsilon} u_\varepsilon^i \left( \frac{\partial_j \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} \partial_i \zeta^j + \frac{\partial_i \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} \partial_i \zeta^j \right) \end{aligned}$$

The first integral converges to

$$c_\mu \int_0^T \int_\Omega \sqrt{\Phi} u^j \left( \frac{\Pi/c_\pi + \Phi}{\sqrt{\Phi}} \partial_{ij}^2 \zeta^j + \frac{\Pi/c_\pi + \Phi}{\sqrt{\Phi}} \partial_{ii}^2 \zeta^j \right)$$

since  $\frac{\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}}$  converges weakly-\* in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  for all  $p \in [1, +\infty)$ . We recall that

$$\frac{\partial_j \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} = \partial_j V_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$$

converges weakly in  $L^2((0, T) \times \Omega)$  and by uniqueness of the limit in the sense of distribution

$$\sqrt{\Phi} \nabla V = c_\mu \nabla(\Pi/c_\pi + \Phi).$$

Therefore the second integral converges to

$$c_\mu \int_0^T \int_\Omega \sqrt{\Phi} u^i \left( \frac{\partial_j(\Pi/c_\pi + \Phi)}{\sqrt{\Phi}} \partial_i \zeta^j + \frac{\partial_i(\Pi/c_\pi + \Phi)}{\sqrt{\Phi}} \partial_i \zeta^j \right).$$



*Transport equation relating  $\Pi$  and  $\Lambda$ .*

Let us write the renormalized continuity equation on  $\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon)$ ,

$$\partial_t \mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon) + \operatorname{div}(\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon) u_\varepsilon) + \frac{1}{2c_\mu} \lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \quad (5.63)$$

or if we write the weak formulation

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon) \partial_t \xi - \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon}} \sqrt{\Phi_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \nabla \xi \\ & - \frac{1}{2c_\mu} \langle \lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \operatorname{div} u_\varepsilon, \xi \rangle = \int_\Omega \mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon^0) \xi(0) \end{aligned}$$

for  $\xi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$ . Using the convergence already mentioned :  $\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon)$  converges weakly-\* in  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  for all  $p \in [1, +\infty)$  towards  $\Pi$ ,  $\mu_\varepsilon^1(\Phi_\varepsilon)/\sqrt{\Phi_\varepsilon}$  converges weakly in  $L^2((0, T) \times \Omega)$  towards  $\Pi/(c_\pi \sqrt{\Phi})$  and  $\sqrt{\Phi_\varepsilon} u_\varepsilon$  converges strongly to  $\sqrt{\Phi} u$  in  $(L^2((0, T) \times \Omega))^2$ , we deduce that  $\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \operatorname{div} u_\varepsilon$  converges in the sense of distributions towards a weak limit denoted by  $\Lambda$  and belonging to  $W^{-1, \infty}(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{-1, q}(\Omega))$  for all  $p \in [1, +\infty)$ ,  $q \in [1, 2)$ . Moreover the equation (5.22c) is satisfied in the sense of distributions

$$\partial_t \Pi + \operatorname{div}(\Pi u) = -\frac{c_\pi}{2c_\mu} \Lambda$$

This completes the proof of Theorem 7.

## 4 Incompressible flows with pressure dependent viscosity

This last section is devoted to the proof of Theorem 8. Our first goal is to show that the limit continuity equation (5.22a) associated to the constraint  $0 \leq \Phi \leq \Phi^*$  is compatible with the incompressibility condition  $\operatorname{div} u = 0$  on the set  $\{\Phi = \Phi^*\}$ . Next we prove that the suspension model with initial density  $\Phi_\varepsilon^0 = \Phi^*(1 - \varepsilon^a \Phi^*/(\Pi^0/c_\pi))$  approximates thanks to Theorem 7 the fully incompressible system with pressure dependent viscosity.

We need to extend the compatibility lemma given by P.-L. LIONS and N. MASMOUDI in [131] to the case of degenerate viscosities.

**Proposition 4 (Compatibility relation)** *Let  $(\Phi, u)$  be such that*

$$\begin{aligned} & \Phi \in L^p((0, T) \times \Omega) \quad \forall p \in [1, +\infty), \quad |\nabla \Phi| \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ & \sqrt{\Phi} |\nabla u| \in L^2((0, T) \times \Omega), \quad \Phi |u| \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega)) \quad \text{with } q > 1 \end{aligned}$$

*satisfying the continuity equation*

$$\partial_t \Phi + \operatorname{div}(\Phi u) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \quad \Phi(0) = \Phi^0.$$

*Then the following assertions are equivalent*

1.  $\operatorname{div} u = 0$  a.e. on  $\{\Phi \geq \Phi^*\}$  and  $0 \leq \Phi^0 \leq \Phi^*$ .

2.  $0 \leq \Phi \leq \Phi^*$

*Proof.*

- (1  $\implies$  2) As in [131], we set

$$\beta(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0 \\ r & \text{if } 0 \leq r \leq \Phi^* \\ \Phi^* & \text{if } r > \Phi^* \end{cases}$$

and  $\beta_\eta$  a regular approximation of  $\beta$  such that  $\beta_\eta(r) = \beta(r)$  on

$$(-\infty, -\eta) \cup (\eta, \Phi^* - \eta) \cup (\Phi^* + \eta, +\infty)$$

and such that

$$(\beta_\eta)'(\Phi)\Phi - \beta_\eta(\Phi) \leq C\sqrt{\Phi}.$$

Since  $|\nabla\Phi| \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , we can multiply the continuity equation by  $\beta_\eta'(\Phi)$  and obtain

$$\partial_t \beta_\eta(\Phi) + \operatorname{div}(\beta_\eta(\Phi)u) + ((\beta_\eta)'(\Phi)\Phi - \beta_\eta(\Phi))\operatorname{div} u = 0 \quad (5.64)$$

We have that  $\beta_\eta(\Phi)$  converges pointwise and in  $L^2((0, T) \times \Omega)$  to  $\beta(\Phi)$ . Moreover

$$((\beta_\eta)'(\Phi)\Phi - \beta_\eta(\Phi))\operatorname{div} u = \frac{(\beta_\eta)'(\Phi)\Phi - \beta_\eta(\Phi)}{\sqrt{\Phi}} \sqrt{\Phi} \operatorname{div} u \text{ is bounded in } L^2((0, T) \times \Omega)$$

and converges to  $\mathbf{1}_{\{\Phi \geq \Phi^*\}} \operatorname{div} u$ . Then passing to the limit in (5.64) with respect to  $\eta$  and using the assumption  $\operatorname{div} u = 0$  on  $\{\Phi \geq \Phi^*\}$ , we get

$$\partial_t \beta(\Phi) + \operatorname{div}(\beta(\Phi)u) = 0. \quad (5.65)$$

To conclude we set  $d = \beta(\Phi) - \Phi$ , regularizing the function  $|d|$ , we show as previously that  $|d|$  satisfies

$$\begin{cases} \partial_t |d| + \operatorname{div}(|d|u) = 0 \\ |d|(0) = 0 \end{cases}$$

Then integrating in space we get

$$\int_{\Omega} |d|(t) = \int_{\Omega} |d|(0) = 0$$

and therefore

$$d(t) = 0 \quad \text{for all } t$$

which means that  $\beta(\Phi) = \Phi$  or

$$0 \leq \Phi \leq \Phi^*.$$

- (2  $\implies$  1) Assuming that  $0 \leq \Phi \leq \Phi^*$ , equation (5.65) holds for  $\beta(\Phi) = \left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^k$ , for any integer  $k$ , since  $\Phi^*$  is a constant

$$\partial_t \left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^k + \operatorname{div} \left( \left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^k u \right) = (1-k) \left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^k \operatorname{div} u \quad (5.66)$$

On the left-hand side we have

$$\partial_t \left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^k \in W^{-1,\infty}(0, T; L^p(\Omega)) \quad , \quad \operatorname{div} \left( \left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^k u \right) \in L^\infty(0, T, W^{-1,q}(\Omega))$$

for all  $p \in [1, \infty)$  and for a  $q \in (1, +\infty)$ , which shows that the right-hand side of (5.66) is a bounded distribution. Then, if we let  $k$  go to  $+\infty$  we obtain

$$\left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^k \operatorname{div} u \longrightarrow 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega).$$

On the other hand,  $\left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^k \operatorname{div} u$  converges pointwise to  $\mathbf{1}_{\{\Phi=\Phi^*\}} \operatorname{div} u$  and since

$$\left| \left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right)^k \operatorname{div} u \right| \leq \frac{\Phi^{k-1/2}}{(\Phi^*)^k} \sqrt{\Phi} |\operatorname{div} u| \quad \text{is bounded in} \quad L^2((0, T) \times \Omega)$$

we conclude by uniqueness of the limit in the sense of distribution that

$$\mathbf{1}_{\{\Phi=\Phi^*\}} \operatorname{div} u = 0. \quad \square$$

## Existence for the incompressible system with additional drag

Let us prove now the Theorem 8, we consider for that the approximate initial data

$$u_\varepsilon^0 \in (L^2(\Omega))^2, \quad \Phi_\varepsilon^0 = \Phi^* \left( 1 - \varepsilon^a \frac{c_\pi \Phi^*}{\Pi^0} \right) \quad (5.67)$$

such that

$$\sqrt{\Phi_\varepsilon^0} u_\varepsilon^0 \rightarrow \sqrt{\Phi^*} u^0 \quad \text{in} \quad (L^2(\Omega))^2$$

with  $\varepsilon$  small enough to ensure

$$1 - \varepsilon^a \frac{c_\pi \Phi^*}{\operatorname{ess\,inf} \Pi^0} > 0.$$

The approximate initial volume fraction obviously satisfies hypothesis (5.13), is positive thanks to the previous assumption and bounded uniformly with respect to  $\varepsilon$  in  $W^{1,2}(\Omega)$ .

One can also check condition (5.14), i.e.  $|m_\varepsilon^0|^2/\Phi_\varepsilon^0 \in L^1(\Omega)$  since  $\Phi_\varepsilon^0$  is far from 0 and  $|m_\varepsilon^0| = \Phi_\varepsilon^0 |u_\varepsilon^0|$  is in  $L^2(\Omega)$ .

The approximate pressure  $\pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0)$  converges a.e. to  $\Pi^0 > 0$  since  $a > 1$  and

$$\begin{aligned} \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0) &= c_\pi \left( \frac{\Phi_\varepsilon^0}{\Phi^*} \right)^\gamma \frac{\Phi_\varepsilon^0}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon^0/\Phi^*} \right) - 1 \right) \\ &= c_\pi \Phi^* \left( 1 - \varepsilon^a \frac{c_\pi \Phi^*}{\Pi^0} \right)^{\gamma+1} \frac{\exp(\varepsilon \Pi^0 / (c_\pi \Phi^*)) - 1}{\varepsilon} \\ &= c_\pi \Phi^* \left( 1 - \varepsilon^a (\gamma + 1) \frac{c_\pi \Phi^*}{\Pi^0} + o(\varepsilon^a) \right) \left( \frac{\Pi^0}{c_\pi \Phi^*} + \varepsilon \frac{(\Pi^0)^2}{(c_\pi \Phi^*)^2} + o(\varepsilon) \right) \\ &= \Pi^0 + \varepsilon \frac{(\Pi^0)^2}{c_\pi \Phi^*} + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Let us check now that (5.15) and (5.16) are also satisfied. We have

$$\begin{aligned} \nabla \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0) &= c_\mu \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon^{1+a}}{1 - \Phi_\varepsilon^0/\Phi^*} \right) - 1 \right) + \varepsilon^a \frac{\Phi_\varepsilon}{\Phi^* (1 - \Phi_\varepsilon^0/\Phi^*)^2} \right] \nabla \Phi_\varepsilon^0 \\ &= \varepsilon^a c_\mu \left( \frac{c_\pi \Phi^*}{\Pi^0} \right)^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \exp \left( \frac{\varepsilon \Pi^0}{c_\pi \Phi^*} \right) - 1 \right) + \varepsilon^{-a} \frac{\Phi_\varepsilon}{\Phi^*} \frac{(\Pi^0)^2}{(c_\pi \Phi^*)^2} \right] \nabla \left( \frac{\Pi^0}{c_\pi} \right) \end{aligned}$$

then we can bound

$$|\nabla \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0)| \leq c_\mu \left[ \left( \frac{c_\pi \Phi^*}{\Pi^0} \right)^2 \left( \exp \left( \frac{\Pi^0}{c_\pi \Phi^*} \right) - 1 \right) + 1 \right] \left| \nabla \left( \frac{\Pi^0}{c_\pi} \right) \right|$$

Therefore, thanks to the control of  $\Pi^0$  in  $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$  we deduce that  $\mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0)$  is controlled in  $W^{1,2}(\Omega)$ . Finally, since  $\Phi_\varepsilon^0$  is bounded by below, we check the condition (5.15)

$$\left\| \frac{\nabla \mu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0)}{\sqrt{\Phi_\varepsilon^0}} \right\|_{L^2} \leq C$$

Concerning condition (5.16), we establish the following control

$$\begin{aligned}
 \Phi_\varepsilon^0 e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^0) &= \Phi_\varepsilon^0 \int_0^{\Phi_\varepsilon^0} \frac{\pi_\varepsilon(s)}{s^2} ds \\
 &= c_\pi \frac{\Phi_\varepsilon^0}{\varepsilon(\Phi^*)^\gamma} \int_0^{\Phi_\varepsilon^0} s^{\gamma-1} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1-s/\Phi^*}\right) - 1 \right) ds \\
 &\leq c_\pi \frac{\Phi_\varepsilon^0}{\varepsilon(\Phi^*)^\gamma} \int_0^{\Phi_\varepsilon^0} s^{\gamma-1} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon^{1+a}}{1-\Phi_\varepsilon^0/\Phi^*}\right) - 1 \right) ds \\
 &\leq c_\pi \frac{\Phi_\varepsilon^0}{\varepsilon(\Phi^*)^\gamma} \int_0^{\Phi_\varepsilon^0} s^{\gamma-1} \left( \exp\left(\frac{\varepsilon \Pi^0}{c_\pi \Phi^*}\right) - 1 \right) ds \\
 &\leq c_\pi \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon \Pi^0}{c_\pi \Phi^*}\right) - 1}{\varepsilon^\gamma} \frac{(\Phi_\varepsilon^0)^{\gamma+1}}{(\Phi^*)^\gamma} \\
 &\leq c_\pi \frac{\exp(\Pi^0/(c_\pi \Phi^*)) - 1}{\gamma} \Phi_\varepsilon^0
 \end{aligned}$$

The last quantity is then bounded in  $L^1((0, T) \times \Omega)$  as desired since  $\Pi^0$  is in  $L^\infty(\Omega)$  and  $\Phi_\varepsilon^0$  is in  $L^1(\Omega)$ . This proves the condition (5.16).

If we consider now the solution  $(\Phi_\varepsilon, u_\varepsilon, \pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon))$  of (5.8a)–(5.8b) with initial data  $(\Phi_\varepsilon^0, m_\varepsilon^0)$ , by the conservation of the mass we have

$$\Phi^* \left( 1 - \varepsilon^a \frac{c_\pi \Phi^*}{\text{ess inf } \Pi^0} \right) |\Omega| \leq \int_\Omega \Phi_\varepsilon^0 = \int_\Omega \Phi_\varepsilon < \Phi^* |\Omega| \quad (5.68)$$

and therefore

$$\int_\Omega \Phi_\varepsilon \rightarrow \Phi^* |\Omega|. \quad (5.69)$$

Theorem 7 ensures the a.e. convergence of  $\Phi_\varepsilon$  towards a limit  $\Phi$ . Moreover,  $\Phi_\varepsilon$  satisfies the constraint

$$0 \leq \Phi_\varepsilon \leq \Phi^* \quad (5.70)$$

Then, necessarily by conditions (5.69)–(5.70) we have  $\Phi = \Phi^*$  a.e. on  $(0, T) \times \Omega$  which proves with Proposition 4 the existence of a global weak solution  $(u, \Pi, \Lambda)$  to

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{div } u = 0 \quad (5.71a) \\
 - \int_0^T \int_\Omega \Pi \partial_t \xi - \int_0^T \int_\Omega \Pi u \cdot \nabla \xi + \frac{c_\pi}{2c_\mu} \langle \Lambda, \xi \rangle = \int_\Omega \Pi^0 \xi(0) \quad (5.71b) \\
 - \int_0^T \int_\Omega u \cdot \partial_t \zeta - \int_0^T \int_\Omega (u \otimes u) : \nabla \zeta - \int_0^T \int_\Omega \frac{\Pi}{\Phi^*} \text{div } \zeta + r \int_0^T \int_\Omega |u| u \\
 \quad + \langle \frac{\Lambda}{\Phi^*}, \text{div } \zeta \rangle + 2c_\mu \langle (\Pi/(c_\pi \Phi^*) + 1) \text{D}(u), \nabla \zeta \rangle = \int_\Omega u^0 \cdot \zeta(0), \quad (5.71c)
 \end{array} \right.$$

# Chapitre 6

## Le cas unidimensionnel

Nous présentons ici une variante du modèle du Chapitre précédent en dimension un où les forces de traînée sont négligées. Nous abordons également dans ce cadre la question de la transition entre suspensions et milieux granulaires du point de vue numérique. Un schéma numérique et des simulations sont présentés dans la seconde section. Ces résultats sont issus de l'article

Modelling of phase transitions in one-dimensional granular flows.

C. PERRIN

*Soumis.*

### 1 Introduction

We are interested in this paper in the macroscopic behaviour of a collection of solid particles immersed in a fluid. Our goal is to describe this system in the one-dimensional setting by means of continuous PDEs and precisely we want to model the transitions between the two states of the mixture : *free* when the density of solid particles is strictly less than 1 ; *congested* when the discrete particles are stuck to each other and the macroscopic density is equal to 1. We are particularly interested in the derivation of such system from a regime of suspensions where the motion is dictated by the hydrodynamical interactions and lubrications forces. As explained by ANDREOTTI, FORTERRE and POULIQUEN in [4] it represents an important issue for the global understanding of granular media : "*Note that the distinction between an immersed granular medium and a dense suspension dominated by hydrodynamic interactions is far from obvious and the question of a possible transition between a granular regime and a suspension regime remains open*".

This question has been first addressed by LEFEBVRE-LEPOT and MAURY in [127], who derived from a microscopic system the following continuous one-dimensional model for suspensions

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) - \partial_x \left( \frac{\varepsilon}{1-\rho} \partial_x u \right) = \rho f \end{cases}$$

where the lubrication forces are taken into account through the singular viscous term. At the microscopic scale these forces prevents the contact between the solid particles. At the continuous scale, the singularity of the viscosity when the density gets closer to 1, imposes the maximal constraint  $\rho < 1$ . Letting then  $\varepsilon$ , the parameter representing the viscosity of the interstitial fluid, go to 0, they propose an original limit two-phase system

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p = \rho f \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ \partial_t \gamma + \partial_x(\gamma u) = -p \\ (1 - \rho)\gamma = 0, \quad \gamma \leq 0 \end{cases}$$

The pressure  $p$  is then the limit of the lubrication forces  $\frac{\varepsilon}{1 - \rho} \partial_x u$  and is activated only in the congested regions. The idea of an additional variable  $\gamma$  is inspired by the previous work of MAURY [135] in the case of a single particle which collides a solid wall. After the collision, the potential  $\gamma$  is activated, takes negative values, and the particle remains glued until  $\gamma$  hits 0 again. In the present situation,  $\gamma$  reflects the same ideas of adhesion between the solid particles when there are stuck to each other, it keeps track of the constraints undergone by the particles in clusters.

We propose in this paper to justify rigorously the limit passage between systems for suspension flows with singular lubrication forces and systems for granular flows with transitions between compressible and incompressible phases and adhesion potential. For that purpose we introduce an additional viscosity which does not depend on the parameter  $\varepsilon$  in order to apply classical energy and compactness methods. Compared to the multi-dimensional case treated in [150], the analysis is simplified due to an additional entropy estimate usually called *Mellet-Vasseur estimate*. It gives thus a first mathematical answer to the physical intuition of ANDREOTTI, FORTERRE and POULIQUEN [4] that "*the rheology of immersed granular media and suspension could be described within the same framework*".

We then illustrate the singular limit passage by designing a numerical scheme of the singular system for suspension flows. Our method relies on a previous work of DEGOND, HUA and NAVORET [58] concerning compressible Euler systems with singular pressure. The numerical simulations are in line with the theoretical results, we observe the good incompressible behaviour in the congested zones as  $\varepsilon$  goes to 0.

## 2 Phase transitions in one-dimensional granular flows

In [127], A. LEFEBVRE-LEPOT and B. MAURY introduce for the first time a system modelling transitions between compressible and incompressible phases inside granular

flows. It reads as

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p = \rho f \\ \partial_t \gamma + \partial_x(\gamma u) = -p \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ (1 - \rho)\gamma = 0, \quad \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

The free / compressible part, corresponding to the subdomain where  $\{\rho < 1\}$  is described by pressureless Euler equations, while in the congested part  $\{\rho = 1\}$  we have the incompressible constraint  $\partial_x u = 0$ . Observe that in the congested domain, two additional variables are activated : the "pressure"  $p$  and  $\gamma$ , called *adhesion potential*, which keeps track of the constraints undergone by the granular media.

A formal analysis of the system reveals the interesting structure provided by the adhesion potential and more precisely by its gradient. By deriving with respect to  $x$  the third equation on  $\gamma$  and using the fact  $\gamma = 0$  where  $\rho < 1$ , we get

$$\partial_t(\partial_x \gamma) + \partial_x((\partial_x \gamma)u) = -\partial_x p$$

It leads us to consider the *effective velocity*

$$v_{\text{eff}} = u - \partial_x \gamma \quad (6.2)$$

and by doing so the pressure contribution disappears from the new momentum equation (we recall that  $\gamma$  and  $\partial_x u$  are equal to 0 where  $\rho = 1$ )

$$\partial_t(\rho v_{\text{eff}}) + \partial_x(\rho u v_{\text{eff}}) = \rho f. \quad (6.3)$$

Testing then this equation by  $v_{\text{eff}}$  and integrating in space we get

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho |v_{\text{eff}}|^2}{2} dx \leq \left( \int_{\Omega} \rho |f|^2 dx \right)^2 \left( \int_{\Omega} \rho |v_{\text{eff}}|^2 dx \right)$$

and thus by using the bound on  $\rho$  and a Gronwall inequality, we deduce the entropy inequality

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \frac{\rho |v_{\text{eff}}|^2}{2} dx \leq C(\|f\|_{L^2}) \int_{\Omega} \frac{\rho^0 |v_{\text{eff}}^0|^2}{2} dx.$$

The system (6.1) can be compared with the pressureless Euler system under maximal constrained derived by BOUCHUT, BRENIER, CORTES, RIPOLL [21] and studied also by BERTHELIN in [13] and by MAURY, PREUX in [137] (where an additional non-elastic collision law is added)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x \pi = 0 \\ (1 - \rho)\pi = 0, \quad \pi \geq 0 \end{cases} \quad (6.4)$$



where the memory effects in the congested domain are neglected and the adhesion potential is equal to 0.

LEFEBVRE–LEPOT and MAURY [127] present the biphasic system (6.1) as the formal limit of a compressible model where lubrication forces due to the viscosity of the interstitial fluid are taken into account. The system reads as

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2) - \partial_x(\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon) = \rho_\varepsilon f \end{cases} \quad (6.5)$$

where the lubrication forces are known to be singular when the density of solid particles approaches 1 :  $\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 - \rho_\varepsilon}$ . It seems nevertheless not obvious to rigorously prove the compactness of the solutions  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  to system (6.5) as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , in particular in the convective term  $\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2$  and in the diffusion term  $\frac{\varepsilon}{1 - \rho_\varepsilon} \partial_x u_\varepsilon$ . Indeed, the energy estimate provides

$$\sup_{[0, T]} \int_{\Omega} \frac{\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2}{2} dx + \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{1 - \rho_\varepsilon} (\partial_x u_\varepsilon)^2 dx dt \leq C$$

but does not yield any bound on the velocity  $u_\varepsilon$  in the regions of low density where the viscosity tend to 0. One can try to derive a similar structure as for the limit system by introducing the function  $\varphi_\varepsilon$  such that  $\varphi'_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = \frac{\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}{\rho_\varepsilon}$  and which satisfies therefore

$$\partial_t(\rho_\varepsilon \partial_x \varphi_\varepsilon(\rho_\varepsilon)) + \partial_x(\rho_\varepsilon \partial_x \varphi_\varepsilon(\rho_\varepsilon) u_\varepsilon) + \partial_x(\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon) = 0$$

Then, it leads to the following equation on the effective velocity  $v_\varepsilon = u_\varepsilon + \partial_x \varphi_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$

$$\partial_t(\rho_\varepsilon v_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon v_\varepsilon) = 0$$

where we recover the same structure as in (6.3). Unfortunately, the limit passage  $\varepsilon \rightarrow 0$  using only these estimates seems out of reach due to the lack of control of  $\partial_x \rho_\varepsilon$ .

**Remark :** If, similarly to HASPOT [96] we consider an initial velocity such that  $u_\varepsilon^0 = -\partial_x \varphi_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0)$ , *i.e.*  $v_\varepsilon^0 = 0$ , then the previous equation (via the energy inequality) gives that  $u_\varepsilon = -\partial_x \varphi_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$ . By injecting then, the velocity (and  $\varphi_\varepsilon$ ) into the mass equation, we recover a type of porous media equation

$$\partial_t \rho_\varepsilon - \partial_x \left( \frac{\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}{\rho_\varepsilon} \partial_x \rho_\varepsilon \right) = 0.$$

which is also used in the modelling of thin films with singular pressure (see for instance BERTOZZI, GRÜN, WITELSKI [17]). Rewriting it as

$$\partial_t \rho_\varepsilon - \partial_{xx}^2 P_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = 0$$

and expressing the evolution equation satisfied by  $P_\varepsilon$

$$\partial_t P_\varepsilon(\rho_\varepsilon) - P'_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_{xx}^2 P_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = 0$$

we obtain a bound on  $\partial_x P_\varepsilon$  in  $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$  (by testing the equation by  $-\partial_{xx}^2 P_\varepsilon$ ) if initially  $\partial_x P_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0)$  is bounded in  $L^2$ . In the spirit of the work of PERTHAME, QUIROS, VAZQUEZ [154], it would be interesting to investigate a possible Hele-Shaw asymptotic as  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\partial_t \rho - \partial_x Q = 0, \quad \text{with} \quad (1 - \rho)Q = 0$$

where  $Q$  would be the weak limit of  $\partial_x P_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$ . It is however not trivial to prove this limit passage and in particular the exclusion relation satisfied by  $Q$ . This work is in progress and will be the purpose of a forthcoming paper.

## Addition of extra viscosity

We propose an alternative model for which we can rigorously prove the transition between a regime of suspension with lubrication forces and a regime of granular flows. It preserves the memory effects identified by LEFEBVRE–LEPOT and MAURY and is also consistent with the theory of ANDREOTTI, FORTERRE and POULIQUEN [4]. As explained before the main obstacle in the previous system (6.1) is that it cannot be derived from the compressible system (6.5) via an energy method because we cannot rely our estimates on the singular viscosity appearing in (6.5). To avoid this difficulty, we add an additional viscosity of the form  $\partial_x(\rho \partial_x u)$  which does not depend on  $\varepsilon$ .

The model that we investigate throughout this paper is the following one

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) - \partial_x \gamma + \partial_x p - \mu_0 \partial_x((\rho - \gamma) \partial_x u) = 0 \\ 0 \leq \rho \leq 1, \quad (1 - \rho)\gamma = 0, \quad \gamma \leq 0 \\ \partial_t \gamma + \partial_x(\gamma u) = -\frac{c_\gamma}{c_\lambda} p \end{cases} \quad (6.6)$$

defined on  $\Omega = (0, 1)$ . For simplicity we will assume periodic boundary conditions.

In addition to the viscous term  $-\partial_x(\rho \partial_x u)$  we have also added in (6.8) the pressure  $-\partial_x \gamma$ . Although this term is not crucial from a theoretical point of view, our numerical simulations in Section 3 strongly rely on this pressure. Remark that this additional pressure is activated only in the congested zones due to the exclusion relation  $(1 - \rho)\gamma = 0$ .

We introduce in the last equation two constants  $c_\gamma, c_\lambda > 0$  representing the dimension of  $\gamma$  and  $p$  respectively. We will see that effectively  $p$  is the limit of the singular viscous forces  $-\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon$  and has not then the same physical interpretation as  $\gamma$ . The constants  $c_\gamma, c_\lambda$  enable us to keep in mind the physical dimensions of the different quantities. Formally, letting  $c_\gamma \rightarrow 0$  we recover with  $\Pi = p$  the constraint system (6.4) (with additional viscosity). By reducing  $c_\gamma$  we neglect thus  $\gamma$  and the memory effects in the granular system.

The system (6.6) is the one-dimensional counterpart of the two-dimensional model introduced by the author in [150]. Remark that in dimension two, a turbulent drag term of the form  $\alpha\rho|u|u$  was necessary to pass to the limit in the convective term  $\rho u \otimes u$ . In dimension one, as we will see below we can derive an additional estimate called the *Mellet-Vasseur estimate* which ensures the sufficient integrability of  $\sqrt{\rho_\varepsilon}|u_\varepsilon|$  necessary to pass to limit and allows us to avoid such additional drag terms.

We propose to construct global weak solutions to (6.6) from a compressible system similar to (6.5) with singular lubrication forces.

Let the viscosity  $\lambda_\varepsilon$  depend on the density of solid particles and such that

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} (1 - \rho)\lambda_\varepsilon(\rho) > 0. \quad (6.7)$$

In the domain  $\Omega = (0, 1)$  supplemented by periodic boundary conditions, we consider the singular system for suspension flows

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) - \partial_x \gamma_\varepsilon(\rho) - \partial_x \left( \left( \mu_0 \rho - \frac{c_\lambda}{c_\gamma} \gamma_\varepsilon(\rho) \right) \partial_x u \right) - \partial_x(\lambda_\varepsilon(\rho) \partial_x u) = 0 \\ 0 \leq \rho < 1 \end{cases} \quad (6.8)$$

where the  $\gamma_\varepsilon$  is related to  $\lambda_\varepsilon$  through

$$-\lambda_\varepsilon(\rho) = \frac{c_\lambda}{c_\gamma} (\gamma'_\varepsilon(\rho)\rho - \gamma_\varepsilon(\rho)). \quad (6.9)$$

Under condition (6.7), we ensure that  $\gamma_\varepsilon(\rho)$  is also singular as  $\rho$  approaches 1. For technical reasons we assume additionally that for very small densities,  $\gamma_\varepsilon(\rho)$  degenerates like  $\rho$ , *i.e.* that

$$\gamma_\varepsilon(\rho) \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} C\rho.$$

Note that the total viscosity of the system has been thus split into two parts : the first one  $\lambda_\varepsilon$  corresponds to the singular viscosity introduced by LEFEBVRE–LEPOT and MAURY ; the additional one  $\mu_\varepsilon(\rho) = \mu_0\rho - c_\lambda/c_\gamma\gamma_\varepsilon(\rho)$  is the one which will provide the entropy inequality that we need to pass to the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Initially we assume that  $(\rho_\varepsilon^0, m_\varepsilon^0)$  satisfies

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho_\varepsilon^0 < 1, \quad \partial_x \sqrt{\rho_\varepsilon^0}, \frac{\partial_x \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0)}{\sqrt{\rho_\varepsilon^0}} \in L^2(0, 1) \\ \frac{|m_\varepsilon^0|^2}{\rho_\varepsilon^0} = 0 \quad \text{a.e. on } \{x \in (0, 1), \rho_\varepsilon^0 = 0\}, \quad \frac{|m_\varepsilon^0|^2}{\rho_\varepsilon^0} \in L^1(0, 1) \end{aligned}$$

**Theorem 9** *Under the previous assumptions, there exists a subsequence of weak solutions  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  to system (6.8) such that*

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon &\rightarrow \rho \quad \text{in } \mathcal{C}([0, T] \times [0, 1]) \\ \sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon &\rightarrow \sqrt{\rho} u \quad \text{in } L^2((0, T) \times (0, 1)) \\ \sqrt{\rho_\varepsilon} \partial_x u_\varepsilon &\rightharpoonup \sqrt{\rho} \partial_x u \quad \text{weakly in } L^2((0, T) \times (0, 1)) \\ \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) &\rightharpoonup \gamma \quad \text{weakly-}^* \text{ in } L^\infty((0, T) \times (0, 1)) \\ \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon &\rightharpoonup -p \quad \text{weakly-}^* \text{ in } W^{-1, \infty}(0, T; W^{-1, 2}(0, 1)) \end{aligned}$$

where  $(\rho, u, \gamma, p)$  is a solution in the distributional sense to the granular system (6.6).

The relation (6.9) between  $\gamma_\varepsilon$  and  $\lambda_\varepsilon$  on the approximate system is crucial to pass to the limit in the equations. Indeed, it leads to the equation

$$\partial_t \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) + \partial_x (\gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) u_\varepsilon) = \frac{c_\gamma}{c_\lambda} \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon \quad (6.10)$$

which, as we will see later on, guarantees the compactness of the product  $\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon$ . Note that this compactness could not be derived from the classical a priori estimates (energy, BD entropy) because of the singularity of the viscosity  $\lambda_\varepsilon$  when  $\rho_\varepsilon$  is close to 1.

The singular limit passage between the compressible system (6.8) with singular pressure and viscosities and the final compressible/incompressible system (6.6) is then an analogue of a *local low Mach number limit*. The low Mach limit takes place in the regions where the approximate density  $\rho_\varepsilon$  goes to 1 faster than  $\varepsilon$  goes to 0 in such a way that the limit potential  $\gamma = \lim \gamma_\varepsilon < 0$ . The critical rate of convergence being imposed by the order of the degeneracy of  $\gamma_\varepsilon$  close to 1. For instance, if

$$\gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = -\varepsilon \left( \frac{\rho_\varepsilon}{1 - \rho_\varepsilon} \right)^\beta, \quad \beta > 0$$

then the low Mach number limit takes place where  $\rho_\varepsilon > 1 - \varepsilon^{1/\beta}$ .

## A priori estimates on the approximate system

Let us briefly explain the a priori estimates necessary to obtain the convergence of weak solutions to system (6.8) towards weak solutions to (6.6). There are three inequalities to derive : the classical energy estimate, but also the so-called the BD and the Mellet-Vasseur entropy inequalities usually derived to prove the stability of weak solutions of compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities. For simplicity we will denote

$$\begin{aligned} \nu_\varepsilon(\rho) &= \mu_0 \rho + \lambda_\varepsilon(\rho) - \frac{c_\lambda}{c_\gamma} \gamma_\varepsilon(\rho) \\ \mu_\varepsilon(\rho) &= \mu_0 \rho - \frac{c_\lambda}{c_\gamma} \gamma_\varepsilon(\rho) \end{aligned}$$

- *the energy inequality* is given by

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 \left[ \frac{\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2}{2} + \rho_\varepsilon e_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \right] + \int_0^T \int_0^1 \nu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) |\partial_x u_\varepsilon|^2 \\ & \leq \int_0^1 \left[ \frac{\rho_\varepsilon^0 |u_\varepsilon^0|^2}{2} + \rho_\varepsilon^0 e_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0) \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

where  $e_\varepsilon$  denotes the specific internal energy associated to  $-\gamma_\varepsilon$  which is such that  $e'_\varepsilon(s) = -\gamma_\varepsilon(s)/s^2$ .

- *BD entropy* : thanks to the mass equation, equation (6.10) can be rewritten as

$$\partial_t \left( \frac{c_\lambda}{c_\gamma} \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) - \mu_0 \rho_\varepsilon \right) + \partial_x \left( \left( \frac{c_\lambda}{c_\gamma} \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) - \mu_0 \rho_\varepsilon \right) u_\varepsilon \right) = \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon \quad (6.12)$$

or

$$\partial_t \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) + \partial_x (\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) u_\varepsilon) = -\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon.$$

Defining then  $\Gamma_\varepsilon$  such that

$$\Gamma'_\varepsilon(\rho) = -\frac{\mu'_\varepsilon(\rho)}{\rho} = \frac{(c_\lambda/c_\gamma) \gamma'_\varepsilon(\rho) - \mu_0}{\rho}.$$

we get by derivation of the previous equation

$$\partial_t (\rho_\varepsilon \partial_x \Gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon)) + \partial_x (\rho_\varepsilon \partial_x \Gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) u_\varepsilon) - \partial_x (\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon) = \partial_x (\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon).$$

This leads us to consider the new velocity

$$v_{\text{eff}} = u_\varepsilon - \partial_x \Gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$$

which satisfies the simplified equation

$$\partial_t (\rho_\varepsilon v_{\text{eff}}) + \partial_x (\rho_\varepsilon u_\varepsilon v_{\text{eff}}) - \partial_x \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = 0$$

where the singular viscous terms have disappeared. Finally, testing the equation by  $v_{\text{eff}}$  and combining it with (6.12) and the energy estimate we get

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \int_\Omega \left[ \frac{\rho_\varepsilon |v_{\text{eff}}|^2}{2} + \rho_\varepsilon e_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \right] dx + \int_0^T \int_\Omega \gamma'_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \Gamma'_\varepsilon(\rho_\varepsilon) (\partial_x \rho_\varepsilon)^2 dx dt \\ & \leq \int_\Omega \left[ \frac{\rho_\varepsilon^0 |v_{\text{eff}}^0|^2}{2} + \rho_\varepsilon^0 e_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0) \right] dx \end{aligned}$$

As in the multi-dimensional work [150], we expect to control  $\mu_\varepsilon$  thanks to this estimate, nevertheless the equation gives only a control of  $\sqrt{\rho_\varepsilon} \partial_x \varphi_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$ . In order to use the compact embeddings between Sobolev spaces we have to guarantee a bound in

$L^1$  of  $\mu_\varepsilon$  which is not a consequence of the previous estimates. The idea is to combine the BD entropy with the estimate of  $\mu_\varepsilon$

$$\int_0^1 \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) dx = \int_0^t \int_0^1 \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon dx$$

it remains then to control the right-hand side by integrating the momentum equation in time and twice in space. We do not reproduce the computations and refer to Chapter 5 (or [150]) for details. At the end, we get

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \int_\Omega \left[ \frac{\rho_\varepsilon |v_{\text{eff}}|^2}{2} + \rho_\varepsilon e_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \right] dx + \sup_{[0, T]} \int_\Omega \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) dx \\ & + \int_0^T \int_\Omega \gamma'_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \Gamma'_\varepsilon(\rho_\varepsilon) (\partial_x \rho_\varepsilon)^2 dx dt \leq C \int_\Omega \left[ \frac{\rho_\varepsilon^0 |v_{\text{eff}}^0|^2}{2} + \rho_\varepsilon^0 e_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0) \right] dx \end{aligned} \quad (6.13)$$

Remark (see details in 5) that the computation also gives

$$\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon \quad \text{bounded in} \quad L^1((0, T) \times (0, 1)). \quad (6.14)$$

- *Mellet-Vasseur inequality* : we test the momentum equation by  $|u_\varepsilon|^\delta u_\varepsilon$  for  $\delta > 0$

$$\int_0^1 (\rho_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon + \rho_\varepsilon u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon) |u_\varepsilon|^\delta u_\varepsilon - \int_0^1 \partial_x (\nu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon) |u_\varepsilon|^\delta u_\varepsilon - \int_0^1 \partial_x \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) |u_\varepsilon|^\delta u_\varepsilon = 0$$

Then

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta + 2} \int_0^1 \rho_\varepsilon \partial_t (|u_\varepsilon|^{\delta+2}) + \frac{1}{\delta + 2} \int_0^1 \rho_\varepsilon u_\varepsilon \partial_x (|u_\varepsilon|^{\delta+2}) + (\delta + 1) \int_0^1 \nu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) |u_\varepsilon|^\delta |\partial_x u_\varepsilon|^2 \\ & = -(\delta + 1) \int_0^1 \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) |u_\varepsilon|^\delta \partial_x u_\varepsilon \end{aligned}$$

using the mass equation and the energy estimate we get for  $\eta \in (0, 2)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta + 2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^{\delta+2} + (\delta + 1) \int_0^1 \nu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) |u_\varepsilon|^\delta |\partial_x u_\varepsilon|^2 \\ & \leq C(\delta) \int_0^1 \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) (\partial_x u_\varepsilon)^2 + C(\delta) \int_0^1 \frac{|\gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon)|^2}{\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)} |u_\varepsilon|^{2\delta} \\ & \leq C(\delta) + C(\delta) \left( \int_0^1 \left( \frac{|\gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon)|^2}{\rho_\varepsilon^{\eta/2} \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)} \right)^{2/(2-\eta)} \right)^{(2-\eta)/2} \left( \int_0^1 \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^{2\delta/\eta} \right)^{\eta/2} \\ & \leq C(\delta) + C(\delta) \left( \int_0^1 \left( \frac{\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}{\rho_\varepsilon^{\eta/2}} \right)^{2/(2-\eta)} \right)^{(2-\eta)/2} \left( \int_0^1 \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^{2\delta/\eta} \right)^{\eta/2} \end{aligned}$$

The integral of  $\frac{\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}{\rho_\varepsilon^{\eta/2}}$  is controlled thanks to the BD entropy (6.13). Indeed we control  $\partial_x \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$  in  $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ ,  $\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$  in  $L^1((0, T) \times (0, 1))$ . By a Sobolev embedding  $\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$  is then bounded in  $L^\infty((0, T) \times (0, 1))$ . Since moreover  $\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) > \mu_0 \rho_\varepsilon$  the ratio  $\frac{\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}{\rho_\varepsilon^{\eta/2}}$  is not singular close to the vacuum. The last integral is also controlled if we choose for instance  $\delta \in (0, 2)$  and  $\eta = \delta$  since  $\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2$  is bounded in  $L^1((0, T) \times (0, 1))$  via the energy inequality (6.11). If moreover we assume that initially

$$\int_0^1 \rho_\varepsilon^0 |u_\varepsilon^0|^{\delta+2} dx \leq C$$

we get therefore the Mellet-Vasseur inequality

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^{\delta+2} dx \leq C \quad (6.15)$$

**Remark :** Compared to the multi-dimensional case treated in [150], the Mellet-Vasseur estimate is possible due to the positive sign of the integrals coming from the viscosities. In dimension two, testing the equation by  $(1 + \ln(1 + |u_\varepsilon|^2))u_\varepsilon$  we are not able to control the integral

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla(\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \operatorname{div} u_\varepsilon) \cdot (1 + \ln(1 + |u_\varepsilon|^2))u_\varepsilon \\ & = \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)(1 + \ln(1 + |u_\varepsilon|^2))(\operatorname{div} u_\varepsilon)^2 + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \frac{2u_\varepsilon^i u_\varepsilon^j}{1 + |u_\varepsilon|^2} \partial_i u_\varepsilon^j \operatorname{div} u_\varepsilon \end{aligned}$$

Indeed, the first integral has a positive sign but in the second, due to the cross derivatives  $\partial_i u_\varepsilon^k$ , we cannot use the control of  $\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)(\operatorname{div} u_\varepsilon)^2$ . Since  $\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$  is more singular than  $\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we cannot control the integral by means of  $\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$ .

## Compactness arguments

Thanks to (6.11), (6.13) and (6.15) we are then able to pass to the limit in the weak formulations of the equations. Except the convergence of the viscous term  $\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon$ , the procedure is standard and follow the steps of [30] or [140] that we reproduce here for the convenience of the reader.

The control of  $\sqrt{\rho_\varepsilon} v_{\text{eff}} = \sqrt{\rho_\varepsilon}(u_\varepsilon + \partial_x \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon))$  given by the BD inequality (6.13) leads directly to the strong convergence of  $\rho_\varepsilon$  and the weak convergence of  $\gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$  towards  $\rho$  and  $\gamma$  respectively.

The next step of the proof consists in proving the strong convergence of  $\rho_\varepsilon u_\varepsilon$  and  $\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon$ .

First, we have from the energy estimate and the maximal constraint on  $\rho_\varepsilon$  that  $m_\varepsilon = \sqrt{\rho_\varepsilon} \sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon$  is bounded in  $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ . By differentiation we have

$$\partial_x m_\varepsilon = \underbrace{2\partial_x \sqrt{\rho_\varepsilon}}_{\in L^\infty L^2} \underbrace{\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon}_{\in L^\infty L^2} + \underbrace{\sqrt{\rho_\varepsilon}}_{\in L^\infty} \underbrace{\sqrt{\rho_\varepsilon} \partial_x u_\varepsilon}_{\in L^2 L^2}$$

from which we deduce that

$$\partial_x m_\varepsilon \text{ is bounded in } L^2(0, T; L^1(0, 1)),$$

$$m_\varepsilon \text{ is bounded in } L^2(0, T; W^{1,1}(0, 1)).$$

On the other hand, thanks to the bound on  $\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon$  in  $L^1((0, T) \times (0, 1))$ , the analysis of the momentum equation gives that

$$\partial_t m_\varepsilon \text{ is bounded in } L^1(0, T; W^{-1,1}(0, 1)).$$

We can then apply the Aubin-Lions-Simon Lemma (see Chapter 3 or [24]) to the sets  $B_0 = W^{1,1}(0, 1)$ ,  $B_1 = L^p(0, 1)$  ( $p \in [1, +\infty)$ ) and  $B_2 = W^{-1,1}(0, 1)$  : we have the continuous embeddings of  $B_0$  in  $B_1$  and of  $B_1$  in  $B_2$  and the compact embedding of  $B_0$  in  $B_1$ . Finally we deduce that there exists  $m$  such that

$$m_\varepsilon \longrightarrow m \quad \text{a.e. in } (0, T) \times (0, 1). \quad (6.16)$$

and strongly in  $L^2(0, T; L^p(0, 1))$  for all  $p \in [1, +\infty)$ .

Now, since  $m_\varepsilon / \sqrt{\rho_\varepsilon} = \sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon$  is bounded  $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ , by the Fatou lemma

$$\int_\Omega \liminf \frac{m_\varepsilon^2}{\rho_\varepsilon} dx \leq \liminf \int_\Omega \frac{m_\varepsilon^2}{\rho_\varepsilon} dx \leq C$$

and we deduce that

$$m(t, x) = 0 \quad \text{on } \{\rho(t, x) = 0\}.$$

We can thus define a limit velocity  $u$  by

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{m(t, x)}{\rho(t, x)} & \text{if } \rho(t, x) \neq 0 \\ 0 & \text{if } \rho(t, x) = 0 \end{cases}$$

The Mellet-Vasseur estimate (6.15) provides a bound of  $\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^{\delta+2}$  in  $L^\infty(0, T; L^1(0, 1))$  necessary to prove the strong convergence of  $\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon$  in  $L^2((0, T) \times (0, 1))$ . Let us explain more precisely this point. Thanks to the Fatou Lemma we ensure that the limit  $\rho |u|^{\delta+2}$  is bounded in  $L^\infty(0, T; L^1(0, 1))$ . To prove the strong convergence of  $\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon$  we introduce



a constant  $M > 0$  and consider separately the small velocities  $|u| \leq M$  and the large velocities  $|u| > M$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_0^1 |\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon - \sqrt{\rho} u|^2 \\
 & \leq 2 \int_0^T \int_0^1 |\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon \mathbf{1}_{\{|u_\varepsilon| \leq M\}} - \sqrt{\rho} u \mathbf{1}_{\{|u| \leq M\}}|^2 \\
 & \quad + 4 \int_0^T \int_0^1 \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \mathbf{1}_{\{|u_\varepsilon| > M\}} + 4 \int_0^T \int_0^1 \rho |u|^2 \mathbf{1}_{\{|u| > M\}}
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Thanks to the a.e. convergence of  $\rho_\varepsilon$ ,  $m_\varepsilon$  and the definition of  $u$  at the limit, we have

$$\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon \mathbf{1}_{\{|u_\varepsilon| \leq M\}} \longrightarrow \sqrt{\rho} u \mathbf{1}_{\{|u| \leq M\}} \quad \text{a.e. on } \{(t, x), \rho(t, x) \neq 0\}$$

and on the other hand

$$\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon \mathbf{1}_{\{|u_\varepsilon| \leq M\}} \leq M \sqrt{\rho_\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{a.e. on } \{(t, x), \rho(t, x) = 0\}$$

due to the convergence a.e. of  $\rho_\varepsilon$ . Then, the dominated convergence theorem gives the convergence of the first integral of (6.17) towards 0. For the two remaining integrals we use the bound given by the Mellet-Vasseur estimate to obtain

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_0^1 \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \mathbf{1}_{\{|u_\varepsilon| > M\}} & \leq \int_0^T \int_0^1 \rho_\varepsilon \frac{|u_\varepsilon|^{\delta+2}}{|u_\varepsilon|^\delta} \mathbf{1}_{\{|u_\varepsilon| > M\}} \\
 & \leq \frac{1}{M^\delta} \int_0^T \int_0^1 \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^{\delta+2} \mathbf{1}_{\{|u_\varepsilon| > M\}} \\
 & \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

and, coming back to (6.17),

$$\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon \longrightarrow \sqrt{\rho} u \quad \text{strongly in } L^2((0, T) \times (0, 1)). \tag{6.18}$$

With the previous convergence we can then pass to the limit into the diffusion term  $\partial_x(\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon)$ . The weak formulation writes as

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_0^1 \partial_x(\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon)\xi & = - \int_0^T \int_0^1 \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon \partial_x \xi \\
 & = \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial_x \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}{\sqrt{\rho_\varepsilon}} \sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon \partial_x \xi + \int_0^T \int_0^1 \frac{\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}{\sqrt{\rho_\varepsilon}} \sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon \partial_{xx}^2 \xi
 \end{aligned}$$

for  $\xi \in \mathcal{D}((0, T) \times (0, 1))$ . We can then check that  $\frac{\mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}{\sqrt{\rho_\varepsilon}}$  and  $\frac{\partial_x \mu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}{\sqrt{\rho_\varepsilon}}$  converge weakly in  $L^2((0, T) \times (0, 1))$  towards  $\frac{\mu_0 \rho - c_\lambda / c_\gamma \gamma}{\sqrt{\rho}}$  and  $\frac{\partial_x (\mu_0 \rho - c_\lambda / c_\gamma \gamma)}{\sqrt{\rho}}$  respectively.

We finally pass to the limit in the singular viscous term  $\partial_x(\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)u_\varepsilon)$ . Contrary to  $\mu_\varepsilon$ , the coefficient  $\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$ , alone, is not controlled, but the product  $\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon$  is. To conclude we come back to the additional equation

$$\partial_t \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) + \partial_x(\gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon)u_\varepsilon) = \frac{c_\gamma}{c_\lambda} \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon$$

from which we deduce that

$$p_\varepsilon \text{ is bounded in } W^{-1,\infty}(0, T; L^\infty(0, 1)) + L^\infty(0, T; W^{-1,2}(0, 1)).$$

There exists thus  $p$  such that

$$p_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon \longrightarrow p \text{ weakly-}^* \text{ in } W^{-1,\infty}(0, T; L^\infty(0, 1)) + L^\infty(0, T; W^{-1,2}(0, 1))$$

We can then pass to the weak limit both in (6.8) and in the additional equation (6.10) to get the result of the theorem.

**Remark :** The important issue would be now to pass to the limit  $\mu_0 \rightarrow 0$  in the final equations (6.6) to recover the system (6.1) introduced by LEFEBVRE-LEPOT and MAURY. This limit passage seems not possible by means of the previous compactness arguments because the additional viscosity provides the necessary bounds for the strong convergence of the density.

Another possibility but which is beyond the scope of this paper, would be the adaptation of compactness arguments for the vanishing viscosity limit in pressureless systems used by BOUDIN in [22]. This work is in progress and will be the purpose of a forthcoming paper.

### 3 Numerical simulation

We propose in this section to simulate the singular compressible system (6.8) for small values of  $\varepsilon$ . Our goal is to find a good discretization able to capture the behaviour of the solutions of the biphasic system (6.6) as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Bringing together all the viscous terms, the system rewrites as

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2) - \partial_x \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) - \partial_x(\nu_\varepsilon(\rho_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

where

$$\nu_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = \mu_0 \rho_\varepsilon - \frac{c_\lambda}{c_\gamma} \gamma'_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \rho_\varepsilon$$

To simplify we will consider a potential  $\gamma_\varepsilon$  such that

$$\gamma_\varepsilon(\rho) = -\varepsilon \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right)^\beta, \quad \beta > 1.$$

## Congestion

The first property that our numerical scheme has to guarantee, is the maximal density constraint  $\rho_\varepsilon < 1$ . We will introduce in our scheme a specific splitting and time discretization of the singular pressure which ensures that this constraint is automatically satisfied. Even though the maximal constraint cannot be reached by the numerical solution, we have an approximation of the phase transitions in the limit system. Indeed if the approximate density is such that  $1 - \rho_\varepsilon < \varepsilon^{1/\beta}$  then the limit potential  $\gamma = \lim_\varepsilon \gamma_\varepsilon$  is activated. Restricting thus the notion of a congested region on the limit system as a region where  $\gamma < 0$  we can define at  $\varepsilon$  fixed *quasi congested regions* as the regions where  $\{\rho_\varepsilon > 1 - \varepsilon^{1/\beta}\}$ . If  $\varepsilon$  is small enough and if our scheme is not too much diffusive when the density is high, we can expect from our previous theoretical results to observe approximated phase transitions on the numerical solutions.

## Difficulties

We are looking for a numerical scheme able to capture the limit behaviour given by equations (6.6) as  $\varepsilon \rightarrow 0$  and especially the phase transitions between congested and uncongested zones. This problem mix then several scales, the reference macroscopic scale and the small scale  $\varepsilon^{1/\beta}$  which encodes the transitions between the compressible and the incompressible zones. Generally speaking we ask for the stability of the scheme as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , meaning the discretization should not depend on  $\varepsilon$ , and for the asymptotic consistency with equations (6.6). This is the so-called *Asymptotic Preserving (AP) property* introduced by JIN [113].

Our problem is closely related to dealing with low Mach numbers in compressible systems. Let us mention the global ideas of the most commonly used techniques on this problem. It is a well-known fact that techniques employed for conservative compressible systems fail to reproduce the incompressible behaviour in domains where the Mach number goes to 0 and the speed of the acoustic waves becomes very large. Several ideas have been proposed to tackle this issue among which *preconditioning methods* (see [174]) which consist in multiplying the time derivatives by an appropriate matrix in order to alter the stiff eigenvalues of the system, and *pressure correction methods*, which extend to the compressible setting the projection techniques introduced by CHORIN [49], TEMAM [171] in the incompressible framework (see for instance the works of HARLOW, AMSDEN [95] or more recently the works of HERBIN, KHERIJI, LATCHÉ [101]). We are interested in this last category and more precisely in the recent techniques of implicit/explicit (IMEX) discretizations proposed for instance by KLEIN [122], DEGOND *et al.* [56], DEGOND and TANG [60], CORDIER, DEGOND, KUMBARO [52], NOELLE *et al.* [145]. These methods consist in splitting the pressure into a stiff and a non-stiff part, the first one being treated implicitly in time whereas the non-stiff part is treated explicitly. The implicit treatment of the stiff part enables then the stability with respect to the propagation of the acoustic waves.

## IMEX splitting of the pressure

Usually the splitting of the pressure relies on physical arguments as explained by Klein [122] and depends specifically of the considered situation. In our case we need to capture the "almost" incompressible behaviour of the solution in congested regions but also the "almost" pressureless dynamics in uncongested regions. This specific issue has been adressed by DEGOND, HUA and NAVORET in [58] for the singular Euler system

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \varepsilon \nabla \left( \frac{1}{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*}} \right)^\gamma = 0 \\ 0 \leq \rho \leq \rho^* \end{cases}$$

We propose here to base our numerical investigations of the viscous system (6.19) on the IMEX scheme introduced by DEGOND, HUA and NAVORET by splitting our scheme into two steps : first we solve of the Euler part of the system, then we add the effect of the viscosity by solving a heat equation. Let us briefly explain the idea developed in [58] that we reproduce for the inviscid part of our system

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2) - \partial_x \gamma_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

which is hyperbolic. Its characteristic speeds

$$u_\varepsilon \pm \sqrt{-(\gamma'_\varepsilon(\rho_\varepsilon))} = u_\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon \frac{\rho_\varepsilon^{\beta-1}}{(1-\rho_\varepsilon)^{\beta+1}}}$$

are not bounded uniformly with respect to  $\varepsilon$  since we may have in the approximated congested zones  $1 - \rho_\varepsilon < \varepsilon^s < \varepsilon^{1/(\beta+1)}$ . This implies for classical explicit schemes a stringent Courant–Friedrichs–Levy (CFL) condition

$$\Delta t \leq \frac{\sigma \Delta x}{\max |u_\varepsilon| + \sqrt{|\gamma'_\varepsilon(\rho_\varepsilon)|}}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1$$

and imposes very small time steps  $\Delta t$ . A fully explicit scheme will be then inefficient even for reasonably small values of  $\varepsilon$ . It is known also that a full implicit discretization of the pressure may be also problematic because it induces a lot of diffusion. As previously said, the idea is then to mix an explicit and an implicit treatment of the pressure. We decompose thus the potential  $\gamma_\varepsilon$  into two parts

$$\gamma_\varepsilon(\rho) = \gamma_\varepsilon^{\text{im}}(\rho) + \gamma_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho) \tag{6.20}$$

which depend on an additional parameter denoted  $\delta$

$$\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho) = \begin{cases} \frac{\gamma_\varepsilon(\rho)}{2} & \text{if } \rho \leq 1 - \delta \\ \frac{1}{2} \left[ \gamma_\varepsilon(1 - \delta) + (\rho - 1 + \delta)\gamma'_\varepsilon(1 - \delta) + \frac{1}{2}(\rho - 1 + \delta)^2\gamma''_\varepsilon(1 - \delta) \right] & \text{if } \rho > 1 - \delta \end{cases}$$

In order to ensure that the contribution of  $\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}$  in the elliptic equation satisfied by the pressure (see Equation (6.22)) remains bounded with respect to  $\varepsilon$ , we need to choose  $\delta$  big enough such that the second derivative of  $\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}$  remains bounded with respect to  $\varepsilon$ . An appropriate choice is then

$$\delta = \varepsilon^{1/(\beta+2)}.$$

The second part  $\gamma_\varepsilon^{\text{im}}$ , defined as the difference between the total potential  $\gamma_\varepsilon$  and  $\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}$ , supports the singularity close to  $\rho = 1$ . We illustrate this splitting on Figure 6.1. The

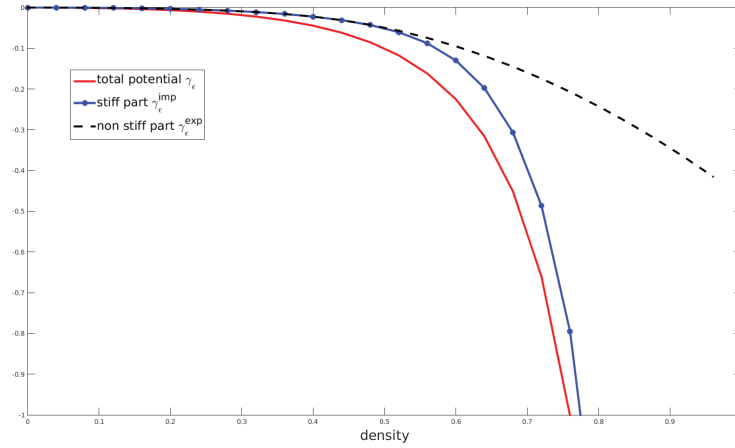


FIGURE 6.1 – Splitting of  $\gamma_\varepsilon$  into a singular part  $\gamma_\varepsilon^{\text{im}}$  and a bounded one  $\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}$ ,  $\beta = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\delta = \varepsilon^{1/(\beta+2)}$

idea is now to treat implicitly in time the singular part  $\gamma_\varepsilon^{\text{im}}$  and explicitly  $\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}$ . The CFL condition computed from  $\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{\sigma}{\max |u_\varepsilon| + \sqrt{|(\gamma_\varepsilon^{\text{ex}})'(\rho_\varepsilon)|}}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1$$

is thus no longer stiff which avoids the time step restrictions that we had on the original system.

## Discretization of the equations

We introduce  $\rho^n$ ,  $u^n$  and  $v^{n+1/2}$  the numerical approximations of the density  $\rho$ , the velocity of the full system  $u$  and  $v$  the velocity of the hyperbolic part of the system respectively, at the discrete times  $t^n = n\Delta t$ ,  $t^{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$ ,  $\Delta t$  being the time step. We describe in the sequel only the time-discretization of the equation and refer to [58] for the full discretization in time and space. First we solve  $(\rho^{n+1/2}, q^{n+1/2} = \rho^{n+1/2}v^{n+1/2})$  the numerical solution of the Euler part, by treating implicitly the flux in the mass equation and only the singular pressure  $\gamma_\varepsilon^{\text{im}}$  in the momentum equation

$$\begin{cases} \frac{\rho^{n+1/2} - \rho^n}{\Delta t/2} + \partial_x(q^{n+1/2}) = 0 & (6.21a) \\ \frac{q^{n+1/2} - q^n}{\Delta t/2} + \partial_x\left(\frac{(q^n)^2}{\rho^n}\right) - \partial_x(\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n)) - \partial_x(\gamma_\varepsilon^{\text{im}}(\rho^{n+1/2})) = 0 & (6.21b) \end{cases}$$

and then we will have to compute the velocity  $u^{n+1}$  from the density  $\rho^{n+1} = \rho^{n+1/2}$  and  $q^{n+1/2} = (\rho v)^{n+1/2}$ , by taking into account the viscosity.

Concerning the solving of the hyperbolic part, the first step consist in a reformulation of the system to obtain the elliptic equation satisfied by the singular pressure  $(\gamma_\varepsilon^{\text{im}})^{n+1/2}$ . For that purpose we replace the momentum  $q^{n+1/2}$  in (6.21a) by taking the divergence of the momentum equation (6.21b). Seeing the density as a function of this potential  $\rho^{n+1/2} = \rho((\gamma_\varepsilon^{\text{im}})^{n+1/2})$ , we obtain a nonlinear elliptic equation on  $\gamma_\varepsilon^{\text{im}}$

$$\begin{aligned} \rho((\gamma_\varepsilon^{\text{im}})^{n+1/2}) + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \partial_{xx}^2(\gamma_\varepsilon^{\text{im}})^{n+1/2} \\ = \rho^n - \frac{\Delta t}{2}q^n + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) [\partial_{xx}^2((q^n)^2/\rho^n) - \partial_{xx}^2\gamma_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n)] \end{aligned} \quad (6.22)$$

The solving of this non-linear equation is performed by means of a quasi-Newton method. Once this pressure  $(\gamma_\varepsilon^{\text{im}})^{n+1/2}$  is computed, we invert numerically (as we did in the previous Newton iterations) the function  $\rho \mapsto \gamma_\varepsilon^{\text{im}}(\rho)$ , which gives us the new density  $\rho^{n+1/2}$  which satisfies automatically the maximal constraint  $\rho^{n+1/2} < 1$ . This is also done via the Newton method.

To compute the momentum  $q^{n+1/2}$  of this Euler system, two methods are possible. The first one consists in solving directly the momentum equation, while the second relies on the Gauge decomposition of the momentum

$$q = a - \partial_x\phi$$

where  $a$  is the divergence-free part, *i.e.* constant in our one-dimensional setting, and  $\phi$  is the irrotational part. The numerical test cases done in [58] show that both methods have drawbacks. The direct method creates oscillations on the velocity in congested part, while the Gauge method is diffusive in uncongested part. Since the last method is expected to

be more efficient to capture the transitions between the congested and the uncongested regions, we propose to implement it for our simulations.

We compute numerically

$$\partial_{xx}^2 \phi^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t/2} (\rho^{n+1/2} - \rho^n) \quad (6.23)$$

$$a^{n+1/2} = a^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{(q^n)^2}{\rho^n} - \gamma_\varepsilon^{\text{ex}}(\rho^n) - \gamma_\varepsilon^{\text{im}}(\rho^{n+1/2}) \right]_{x=0}^{x=1} \quad (6.24)$$

which gives the new momentum

$$\rho^{n+1/2} v^{n+1/2} = q^{n+1/2} = a^{n+1/2} - \partial_x \phi^{n+1/2} \quad (6.25)$$

We have imposed additionally periodic boundary conditions to solve (6.22) and (6.23).

We do not write the full discretization in space for the Euler system (6.21) which is exactly the one used by DEGOND, HUA and NAVORET, namely a local Lax-Friedrichs scheme with a centered flux to which we also add numerical diffusion. We refer to [58] concerning the choice of the artificial numerical diffusion introduced in the numerical fluxes. In particular this choice imposes additionally that

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \geq \frac{1}{2 \left( \sqrt{|(\gamma_\varepsilon^{\text{ex}})'(\rho^n)|} + \sqrt{|\gamma_\varepsilon'(\rho^n)|} \right)}$$

in order to damp out the numerical oscillations.

Concerning the viscosity that we did not treat yet, we compute now the new velocity  $u^{n+1}$  from  $\rho^{n+1} = \rho^{n+1/2}$  and  $v^{n+1/2}$  with the equation

$$\rho^{n+1} \frac{u^{n+1} - v^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \partial_x (\nu(\rho^{n+1}) \partial_x u^{n+1}) = 0 \quad (6.26)$$

We have treated implicitly the diffusion term, because the viscosity  $\mu$  tends to  $+\infty$  close to the congestion constraint and this would lead to a too much restrictive stability condition if it is treated explicitly.

## Discussion of the asymptotic consistency

The splitting that we employed which consists in treating separately the viscosity from the hyperbolic part is expected to be diffusive in the quasi-congested regions where the singular viscosity is activated. The question is to determine whether this diffusion impacts the asymptotic consistency of the scheme. Obviously the numerical scheme is adjusted for the hyperbolic part of our equations. For this part we recover easily the incompressibility constraint in quasi-congested regions at the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Indeed, in regions where both

$\gamma^n, \gamma^{n+1} < 0$  we have on the approximate system  $\rho_\varepsilon^n, \rho_\varepsilon^{n+1} > 1 - \varepsilon^{1/\beta}$ . Then the numerical scheme ensures that

$$\|\partial_x(\rho_\varepsilon v_\varepsilon)^{n+1/2}\|_{L^\infty} = \left\| \frac{\rho_\varepsilon^{n+1/2} - \rho_\varepsilon^n}{\Delta t/2} \right\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{\Delta t} \varepsilon^{1/\beta}$$

and thus the incompressibility at the limit

$$\partial_x v_\varepsilon^{n+1/2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Unfortunately we are not able to deduce the same for  $u^{n+1}$  computed from

$$\rho_\varepsilon^{n+1} \frac{u_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^{n+1}}{\Delta t/2} - \partial_x (\nu(\rho_\varepsilon^{n+1}) \partial_x u_\varepsilon^{n+1}) = 0$$

Indeed the estimate of the  $L^2$  norm of  $\partial_x u_\varepsilon^{n+1}$ , obtained by derivation with respect to  $x$  and multiplication by  $\partial_x u_\varepsilon^{n+1}$ , involves in particular the integral

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \partial_{xx}^2 (\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon^{n+1}) \partial_x u_\varepsilon^{n+1}) \partial_x u_\varepsilon^{n+1} \\ & = \int_0^1 \partial_x \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon^{n+1}) \partial_x u_\varepsilon^{n+1} \partial_{xx}^2 u_\varepsilon^{n+1} + \int_0^1 \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon^{n+1}) (\partial_{xx}^2 u_\varepsilon^{n+1})^2 \end{aligned}$$

where the first integral cannot be bounded uniformly with respect to  $\varepsilon$ .

Nevertheless, the following numerical simulations seem to show that the incompressibility constraint is satisfied at the limit  $\partial_x u_\varepsilon^{n+1} \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  in the congested parts.

The designing of an Asymptotic Preserving scheme for the singular viscous system (6.8) will be the purpose of future work, it asks of course for a specific time-discretization of the singular viscous term. We also intend to propose a numerical discretization which does not involve the pressure  $-\partial_x \gamma_\varepsilon$  in order to drop this term from the momentum equation which is a priori possible from theory as mentioned in the previous section.

## Numerical results

For our numerical simulations, we do not have reference solution to compare with. Nevertheless, if initially we impose

$$\rho^0(x) = 0.7, \quad u^0(x) = \sin(2\pi x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

as represented on Figure 6.2, we can expect a concentration the fluid at the middle of the domain and the apparition of congestion if the viscosity is not too high. We have represented on Figures 6.3–6.4 the numerical solution computed from the solving of (6.22)–(6.23)–(6.24)–(6.25)–(6.26) for the following set of parameters

$$\varepsilon = 10^{-4}, \quad \beta = 2, \quad \mu_0 = 0.5, \quad c_\lambda = 0.5, \quad c_\gamma = 1$$



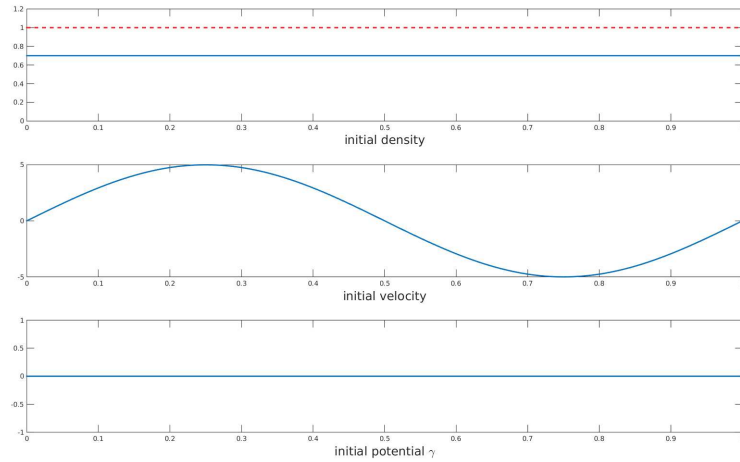


FIGURE 6.2 – Periodic initial data

with

$$\Delta x = 5.10^{-3}, \quad \Delta t = 10^{-4}.$$

We observe on Figures 6.3–6.4 that the density effectively concentrates at the middle of the domain and flattens as it approaches the maximal constraint. A congested region (in red on the horizontal axis) appears where  $\rho_\varepsilon > 1 - \varepsilon^{1/\beta}$ .

At the same time, the velocity becomes flat, almost 0, in the congested part which show numerically that the incompressibility constraint is satisfied even with our splitting of the singular viscosity.

Finally we have represented the potential  $\gamma_\varepsilon$  and  $p_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon$ . As expected from the theory, when  $\varepsilon$  is small  $\gamma_\varepsilon$  is activated only in the congested region as well as  $p_\varepsilon$ . Moreover, if at the beginning  $\lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$  may take very large values, it is compensated after some time by the divergence of the velocity  $\partial_x u_\varepsilon$ .

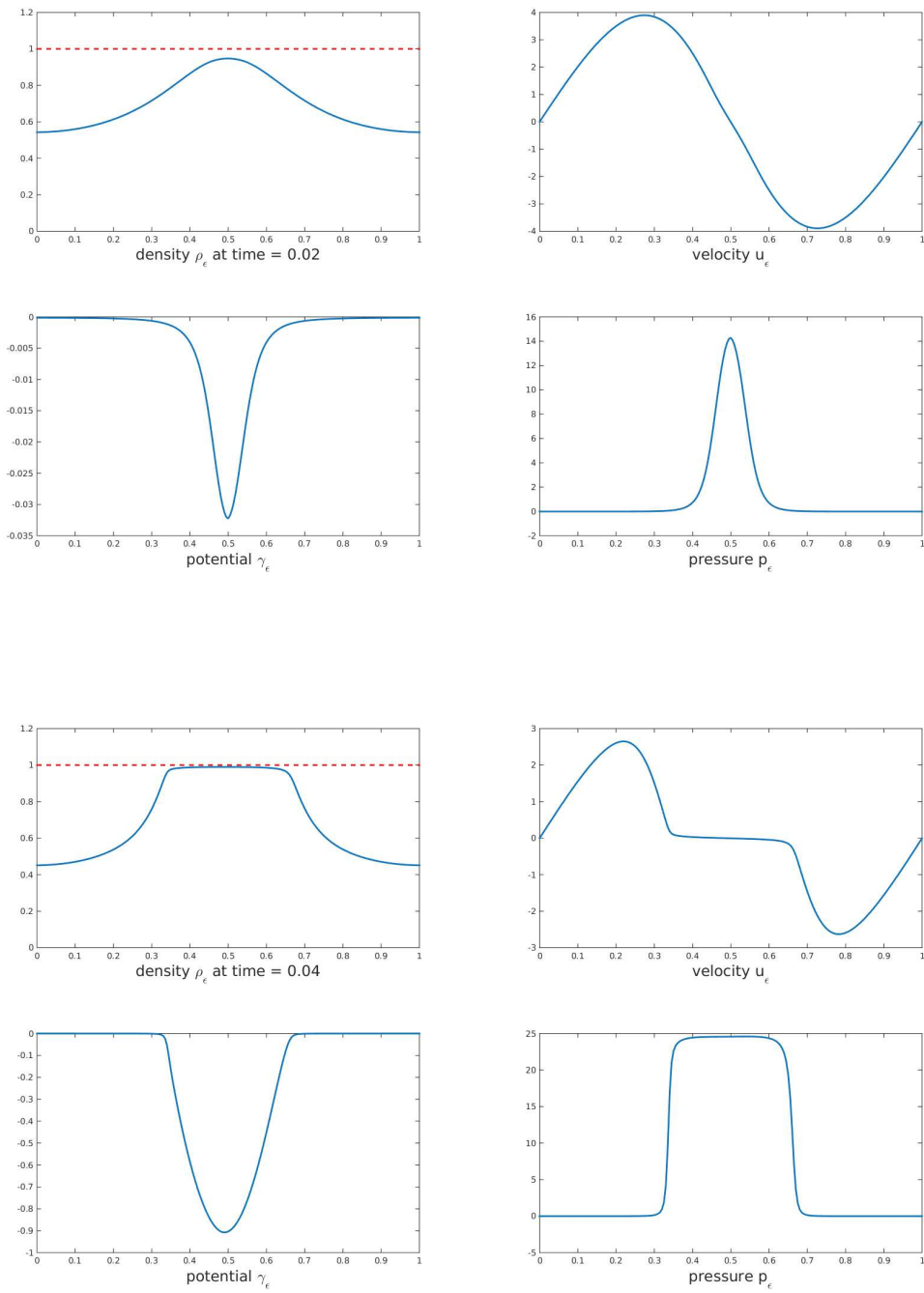


FIGURE 6.3 – Variables  $\rho_\epsilon$ ,  $u_\epsilon$ ,  $\gamma_\epsilon$  and  $p_\epsilon = -\lambda_\epsilon \partial_x u_\epsilon$  at times  $t = 0.02$  and  $t = 0.04$  for  $\epsilon = 10^{-4}$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_0 = 0.5$ ,  $c_\lambda = 0.5$ ,  $c_\gamma = 1$ .

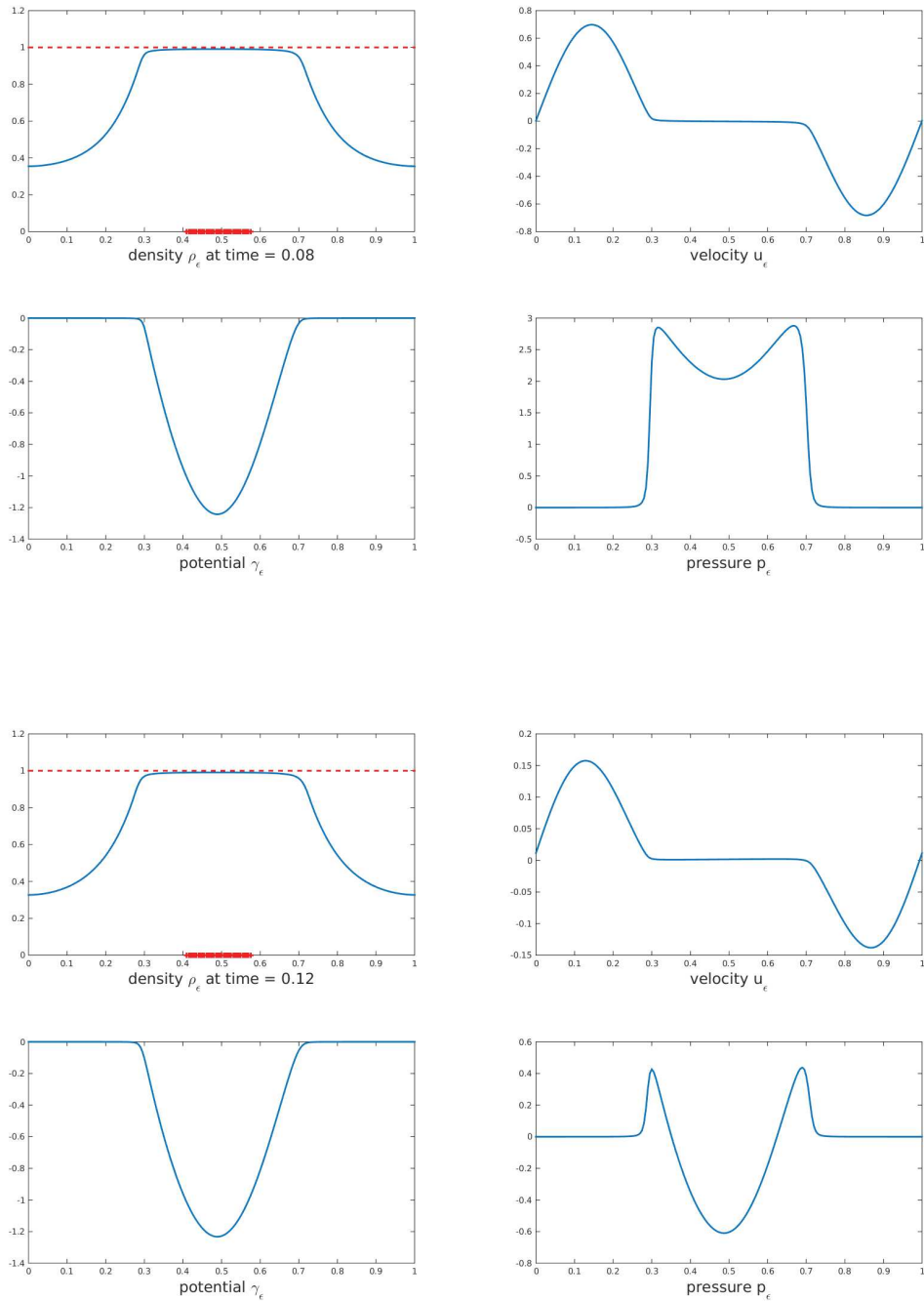


FIGURE 6.4 – Variables  $\rho_\epsilon$ ,  $u_\epsilon$ ,  $\gamma_\epsilon$  and  $p_\epsilon = -\lambda_\epsilon \partial_x u_\epsilon$  at times  $t = 0.08$  and  $t = 0.12$  for  $\epsilon = 10^{-4}$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_0 = 0.5$ ,  $c_\lambda = 0.5$ ,  $c_\gamma = 1$ . The congested domain appears in red on the horizontal axis.

## Troisième partie

# Application en modélisation du trafic routier



# Chapitre 7

## Solution non-classique d'une loi de conservation en trafic routier

Nous nous intéressons dans cette dernière partie à la modélisation et à la simulation numérique de phénomènes particuliers observés dans le contexte des mouvements de foules et du trafic routier, plus particulièrement le phénomène d'apparition et de persistance de bouchons en amont de points critiques sans cause réelle de ralentissement. Nous considérons notamment le cas d'un bouchon persistant sur une autoroute en amont d'un accident qui s'est produit sur la voie d'en face. Cette situation n'est pas reproduite par la plupart des modèles, qu'ils soient microscopiques ou macroscopiques, car elle correspond à un phénomène qui n'a pas d'équivalent en dynamique des gaz, pour lesquels seules les solutions dites entropiques sont en général considérées comme correspondant à un comportement observable dans la réalité. L'approche que nous proposons, aux niveaux microscopique et macroscopique, consiste à prendre en compte le comportement particulier des agents humains au voisinage de la discontinuité, et permet d'observer numériquement de façon robuste le phénomène de bouchon stable.

Ce travail, initié dans le cadre du CEMRACS15 est issu du projet "Crowd Motion" porté par S. Faure et B. Maury. Il a donné lieu à un proceeding

Non classical solution of a conservation law arising in vehicular traffic,  
M. FABRE, S. FAURE, M. LAURIÈRE, B. MAURY, C. PERRIN.

## 1 Introduction

Modelling crowd motion and traffic has become in the recent years a major challenge for the applied mathematics community. Among all the issues raised by crowd and vehicular traffic behaviours we are particularly interested in the modelling of congestion phenomenon, how traffic jams appear, persist and disappear. There are mainly three approaches to model crowd and traffic motion, each corresponding to a specific scale : microscopic scale (each entity is individually followed), macroscopic scale (the collection of entities is described by a local density), and mesoscopic scale (kinetic description). In this paper we will focus on the first two descriptions, the interested reader is referred to [11] for a review of the kinetic models.

The most direct way to describe the motion of a crowd or of a collection of vehicles is to represent each agent, pedestrian or car, individually and to follow the trajectory of each agent, taking into account all the interactions with the surrounding agents. In one-dimensional situations (agents evolving on a one-lane road or in a corridor), a simple description of the dynamics is provided by Follow-The-Leader models used for instance in [47]– [87]. In this context congestion is handled by introducing short-range correction terms which mimic some repulsion when an agent gets closer to the agent next to him. This is the approach adopted in Follow-The-Leader models where the velocity is supposed to decrease with the inter-agent distance, and is taken to be zero at a minimal distance corresponding to the size of the agents, which is not negligible in the discrete description. Note that such models are not based on classical mechanics principles : interaction terms are not symmetric, since each agent is influenced by the agent that lies in front of him, with *no reciprocity*.

Another mathematical description widely used consists in considering the crowd or the assembly of vehicles as a continuous medium, and to work with averaged variables : the average velocity of agents in an elementary volume, and the density, which corresponds to the number of agents per unit volume (or length in the one-dimensional setting). We then make an analogy with fluids by writing a balance equation expressing at the macroscopic level the conservation of the number of agents. If one wants to simulate the behaviour of a large number of agents, the macroscopic description may be attractive compared to the microscopic description for the computational cost and for the relative ease with which one can calibrate the model due to the low number of parameters. As we shall see, although such models are based on principles that are similar to the Follow-The-Leader approach, the “directionality of influence” that we previously mentioned will disappear in the expression of interaction terms. This very distinction between the two approaches will play a crucial role in the present paper.

Intuitively, discrete models like the Follow-The-Leader models should converge towards continuous conservation laws. This issue has been the object of few and relatively recent mathematical works. In [7], the authors prove a mathematical link between the discrete solutions of a second order (in time) Follow-The-Leader model for car traffic, with a semi-discretization in time of a macroscopic solution to a system of conservation laws called

Aw-Rascle model. The formal idea consists in letting the number of vehicles go to infinity while imposing a particular scaling in time and space which ensures that the density and the velocity remain fixed.

Concerning first order Follow-The-Leader models, which neglect the effects of inertia in the motion, this question has been treated by Colombo and Rossi in [51] and by Di Francesco and Rosini in [63]. In the latter, the authors prove that the discrete solutions satisfy a discrete inequality of Oleinik's type which yields strong controls of the semi-discrete density, and the strong convergence towards the unique entropy solution of the limit conservation law.

In this paper, we are interested in particular phenomena that can be observed and experimentally reproduced, both for cars and for pedestrians. We shall focus here on the case of cars, and the typical situation we have in mind is the following : an accident takes place on a freeway, instantaneously stops the traffic on both lanes. Traffic is frozen upstream the accident, and a jam is also created *on the opposite lane* due to drivers' curiosity. Although there is no physical obstacle on this lane, it can be commonly observed that this jam persists until every trace of the accident have been removed. As it will be detailed, macroscopic and microscopic standard models fail to reproduce this persistence of a jam. We propose here to model this type of phenomenon at the microscopic level by locally perturbing the classical Follow-The-Leader model. We shall consider that the behavior of the agents is modified in a small buffer zone, that corresponds to the zone in which the accident in the opposite lane can be seen. The "psychological" basis of the modification is the following : when entering in direct visual contact with the accident, people cannot help looking at it, and they no longer look to the vehicle upfront, that may already be accelerating. Yet, because of the presence of police forces and / or moral considerations, they do not completely stop. We shall consider that they keep the velocity they had when entering in the buffer zone. By letting the number of agents increases, the numerical solution is expected to converge to a solution of a macroscopic conservation law. The situation we will obtain, as expected, corresponds to what is observed in practice : a congested zone upstream the "accident", at low velocity, and a dilute zone downstream, at high velocity. Since characteristics go leftward on the left hand side of the discontinuity, and rightward on the right hand side, it corresponds to a non-classical solution, *i.e.* a non-entropy solution, whereas the entropy solutions are usually considered as the "physical solutions" and the most common numerical schemes are built to select this type of solutions.

Directly considering the macroscopic model, we will show that a local modification of a standard numerical scheme (consistent with the entropy conditions), is sufficient to capture stable traffic jams.

## 2 Microscopic models for traffic jams

We consider the one-dimensional domain  $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$  supplemented by periodic boundary conditions. By doing so we aim at modelling the dynamics of vehicles on a circular



road. We will focus in this section on a first order Follow-The-Leader model (denoted FTL) where the vehicles reach instantaneously the desired velocity, which is a given function of the distance with the previous vehicle. Starting with an initial congested distribution of vehicles on the circular road, we will show that the FTL model predicts a relaxation towards the uniform distribution with constant velocity for all the vehicles and constant distances between them. We will then try to perturb this dynamics by introducing a buffer zone which corresponds to the zone where the drivers look at the opposite lane and forget to follow the previous car. Finally, by letting numerically the number of cars increase, we want to approximate the continuous density of vehicles which is a solution to an appropriate conservation law.

## 2.1 The discrete Follow-the-Leader model

The Follow-The-Leader (FTL) model has been first introduced to model car traffic. It expresses the fact that each driver *follows* the car in front of him by adjusting his speed according to the distance between them. Let us consider  $N$  cars, whose positions and speeds are denoted respectively by  $x_i$  and  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , where the  $(i + 1)$ st car follows the  $i$ th car. Then the FTL model consists of  $N$  differential equations : for  $i = 1, \dots, N$  :

$$\frac{dx_{i+1}}{dt}(t) = v_{i+1}(t) = \varphi(\delta_i(t)), \quad (7.1)$$

where  $\delta_i = x_i - x_{i+1}$  is the distance between the  $i$ -th car and the following one. By periodicity we define  $\delta_N = x_N - x_1$ . The function  $\varphi$  is assumed to be concave, increasing and with nonnegative values. Here, we will consider the particular function

$$\varphi(\delta) = v_{\max} \left( 1 - \frac{\delta^*}{\delta} \right) \mathbf{1}_{\{\delta > \delta^*\}}, \quad (7.2)$$

where  $\delta^* > 0$  represents the approximate size of a car, and  $v_{\max}$ , the maximal velocity, is the velocity the cars would have if there were nobody in front of them. We have represented this function on Figure 7.1. The interested reader is referred to [87] concerning general FTL models.

The equations (7.1) can be rewritten as : for  $i = 1, \dots, N$  :

$$\frac{d\delta_i}{dt}(t) = \varphi(\delta_{i-1}(t)) - \varphi(\delta_i(t)).$$

**Equilibrium of the basic system.** Associated to this model, there exists a unique periodic solution which corresponds to the uniform distribution of the distances. All the distances and the velocities are then respectively equal to

$$\delta_{\text{eq}} = \frac{2\pi}{N}, \quad v_{\text{eq}} = v_{\max} \left( 1 - \frac{\delta^*}{\delta_{\text{eq}}} \right).$$

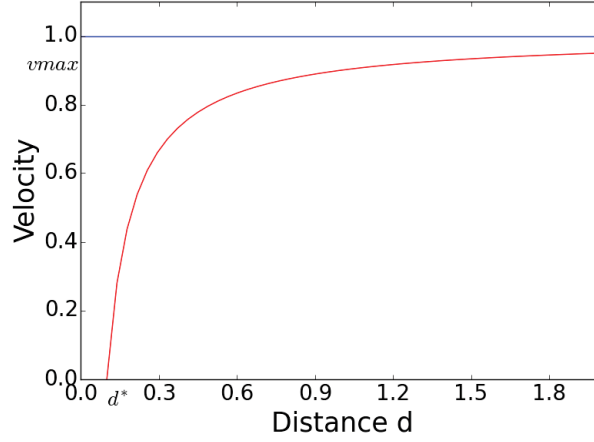


FIGURE 7.1 – Velocity of the FTL model. Parameters  $v_{\max} = 1$  and  $\delta^* = 0.1$ .

In the previous equations, we implicitly assume that the number of vehicles on the road is not too large, namely

$$N < \frac{2\pi}{\delta^*}.$$

Introducing the discrete entropy

$$S(\Delta) = \sum_i \delta_i \log \delta_i \quad \text{for } \Delta = (\delta_i)_{i=1,\dots,N}$$

one can show that the discrete entropy decreases in time and is minimal for the uniform distribution. Let us recall the main steps allowing to prove this fact. By replacing the distance  $\delta_i$  by  $\frac{\delta_i}{2\pi}$  we can assume that  $\sum \delta_i = 1$ . Differentiating the entropy  $S$  with respect to time and using the periodicity, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S(\Delta) &= \sum_i (\log \delta_i + 1) \frac{d}{dt} \delta_i \\ &= \sum_i (\log \delta_i + 1) (\varphi(\delta_{i-1}) - \varphi(\delta_i)) \\ &= \sum_i \log \delta_i (\varphi(\delta_{i-1}) - \varphi(\delta_i)) \end{aligned}$$

If the distribution is uniform then we get 0. Otherwise, we can split the sum into two parts depending on the sign of  $\delta_{i-1} - \delta_i$  :

$$I_1 = \{(i-1, i), \delta_{i-1} < \delta_i\}, \quad I_2 = \{(i-1, i), \delta_{i-1} \geq \delta_i\}$$

the concavity of the function  $\varphi$  leads to

$$\frac{d}{dt}S(\Delta) < \varphi'(1) \sum_{I_1} \log(\delta_i) (\delta_{i-1} - \delta_i) + \varphi'(\delta^*) \sum_{I_2} \log(\delta_i) (\delta_{i-1} - \delta_i)$$

Rearranging the sums we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S(\Delta) &< \varphi'(1) \left( \sum_i \log(\delta_i)(\delta_{i-1} - \delta_i) \right) + (\varphi'(\delta^*) - \varphi'(1)) \sum_{I_2} \log(\delta_i)(\delta_{i-1} - \delta_i) \\ &< \varphi'(1) \left( \sum_i \log(\delta_i)(\delta_{i-1} - \delta_i) \right) \\ &< \varphi'(1) \sum_i \log \left( \frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} \right) \delta_i \end{aligned}$$

Using the fact that  $\sum_i \delta_i = 1$  and the concavity of the logarithm we finally obtain

$$\frac{d}{dt}S(\Delta) < \varphi'(1) \log \left( \sum_i \frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} \delta_i \right) = \varphi'(1) \log \left( \sum_i \delta_{i+1} \right) = 0.$$

The entropy is therefore a global and strict Lyapunov functional for the considered equilibrium point, which asserts global asymptotic stability.

**Behaviour in presence of high density.** Starting from an initial distribution where cars are concentrated in a small region, the system evolves towards the stable solution where the distances are uniform. In other words, a relaxation leads to the dissolution of the jam, as illustrated by Figure 7.2.

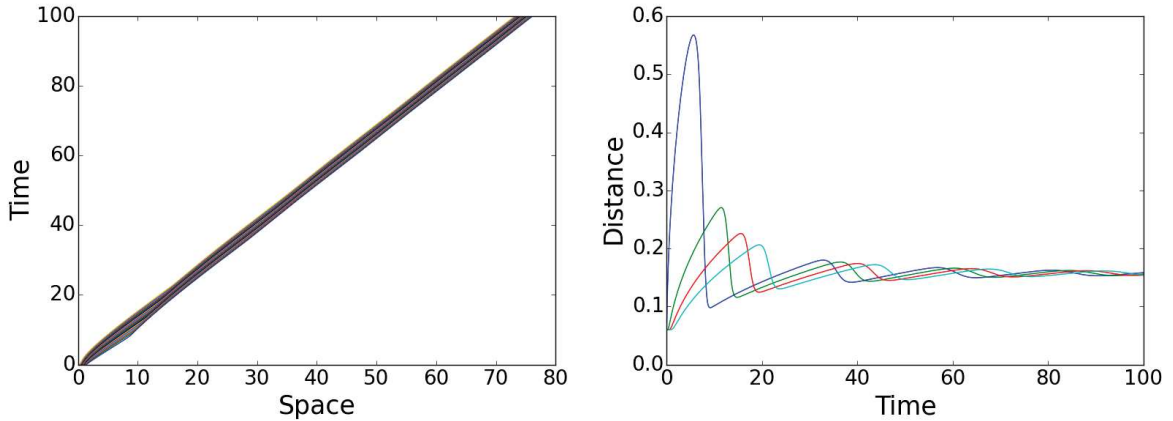


FIGURE 7.2 – Relaxation of the FTL model ( $N = 40$  vehicles) which can be seen on the trajectories (on the left for one out of every two vehicles), or on the evolution of the distances (on the right for four cars :  $i = 1, 10, 20$  and  $40$ ). Parameters  $v_{\max} = 1$  and  $\delta^* = 0.04$ .

We have represented the trajectories of some cars, as well as the distances between them and the cars in front of them. We observe that after some time, the trajectories coincide

with lines with a common slope which is the inverse of the uniform velocity  $v_{\text{eq}}$ . After some oscillations, the distances seem to converge towards the uniform distance  $\delta_{\text{eq}}$ .

## 2.2 Inclusion of a buffer zone

In order to model the persistence of some traffic jams, we propose to include in the domain a buffer zone where the velocities are “frozen”. In other words, drivers go through this zone with a constant velocity, equal to the velocity they had when they entered this buffer zone. This encodes the following behavior : the driver looks at the accident on the opposite lane, while maintaining his place. Let us denote  $Z_{FTL}$  the normal zone where the drivers behave according to the FTL model, and  $Z_f = \mathbb{T} \setminus Z_{FTL}$  the buffer zone.

The model writes : for every  $i = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} \frac{dx_{i+1}}{dt}(t) = \varphi(\delta_i(t)) & \text{if } x_{i+1} \in Z_{FTL} \\ \frac{d^2x_{i+1}}{dt^2}(t) = 0 & \text{if } x_{i+1} \in Z_f. \end{cases} \quad (7.3)$$

**Size of the buffer zone.** In order to see an effect of this zone on the dynamics, we need to ensure that there is always at least one car whose velocity is frozen. The buffer zone then needs to be large enough compared with the size  $\delta^*$  of the cars, the expected velocity in traffic jam  $v_i$ , and the time step  $\Delta t$ .

In our simulations we have fixed the length of frozen zone  $L_f$  as

$$L_f = 3\delta^*,$$

and we have taken the time step  $\Delta t$  such that it is much smaller than the critical time step  $\Delta t_c$  :

$$\Delta t \ll \Delta t_c = \frac{L_f}{v_i}.$$

We can thereby ensure that the cars spend several time steps in the buffer zone, which can modify the FTL dynamics.

**Behaviour in presence of high density.** Starting from an initial situation where the buffer zone is congested, we expect the system to remain congested. Intuitively, this is for the following reason : when a driver enters the buffer zone, he is stuck in the jam so his speed is very low. Then he slowly passes through the buffer zone, and even when the vehicle in front of him exits from the buffer zone and accelerates due to the dynamics imposed by the FTL model, he will keep the same speed. This maintains the jam behind him. Thus locally freezing the car response can be expected to maintain the presence of a jam.

We observe on the simulations that we do not have any more the relaxation process as in the normal FTL model (see Figure 7.2), and it seems that the traffic jam is persistent.

On Figure 7.3 are represented the trajectories of the cars. After some time, we observe periodicity of the movement which corresponds to a stable traffic jam.

We have also represented on Figure 7.3 the velocities of four following cars from the time they enter into the traffic jam until they leave the buffer zone. We observe first an alignment of the velocities with the velocity imposed initially on the traffic jam. In this regime, the evolution of the velocities is continuous due to the FTL dynamics. Then, the driver enters into the buffer zone. When he finally leaves the buffer zone, he is subject to a speed jump which corresponds to the transition between the buffer zone and the FTL dynamics.

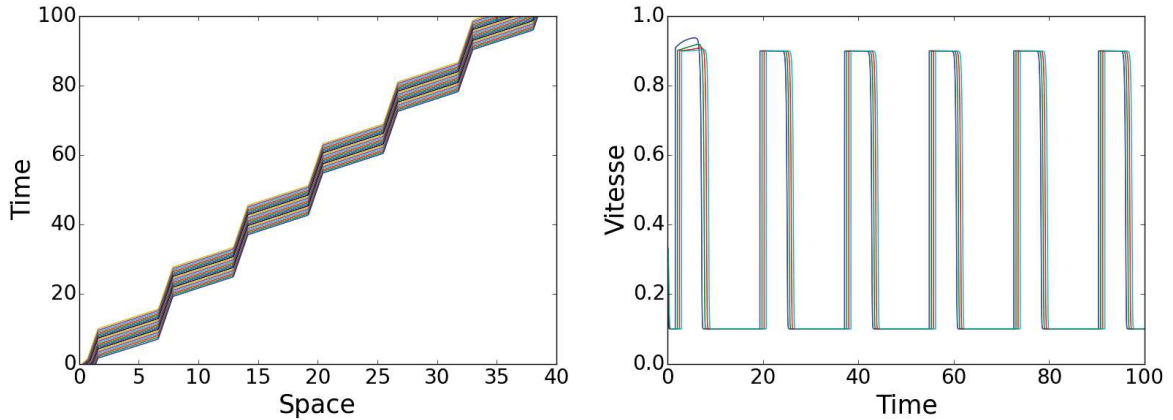


FIGURE 7.3 – Trajectories (on the left for one out of every two vehicles), and evolution of the velocities of four following vehicles (on the right). Parameters  $N = 40$ ,  $v_{\max} = 1$  and  $\delta^* = 0.04$ .

### 2.3 Macroscopic limit passage

Basing our numerical investigations on the recent paper of Colombo and Rossi [51], we introduce the micro-macro operator for a fixed integer  $N$  :

$$C_N : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \mapsto \rho_N = \sum_i \frac{\delta_N^*}{x_i - x_{i+1}} \mathbf{1}_{[x_{i+1}, x_i]},$$

where  $\delta_N^*$  is the length of a car (and so it corresponds to the minimal distance between two cars). This operator  $C_N$  associates to the discrete distribution  $X$  of the vehicles a piecewise constant density  $\rho_N$ . We expect  $\rho_N$  to converge almost everywhere when  $N \rightarrow +\infty$  to the solution of a macroscopic conservation law.

For our simulations we set

$$\delta_N^* = \frac{1}{N},$$

so that  $N\delta_N^*$  is constant. The size  $L_f$  of the buffer zone is, as previously, related to the size of the vehicles by

$$L_f = 3\delta_N^*.$$

Note that this quantity converges to 0 as the number of cars  $N$  goes to infinity. Formally, we expect then that the microscopic model coupling FTL dynamics and the buffer zone converges towards the same macroscopic model as the single FTL model. This conservation law is

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v(\rho)) = 0$$

In order to link this macroscopic velocity  $v$  with the velocity  $\varphi$  of the discrete FTL model we express the compatibility between the two descriptions on the discrete density  $\rho_N$  (see for instance [51] eq (2.4)). Let  $x \in [0, 2\pi]$ , it exists  $i \in \{1, \dots, N\}$  such that  $\rho_N(x) = \delta^*/\delta_i$ , replacing then  $\delta_i$  in the expression of the velocity of the FTL model we get

$$\varphi(\delta_i) = \varphi\left(\frac{\delta^*}{\rho_N(x)}\right) = v_{\max} \left(1 - \frac{\delta^*}{\delta^*/\rho_N(x)}\right) = v_{\max}(1 - \rho_N(x)).$$

The velocity involved in the limit conservation law is therefore  $v(\rho) = v_{\max}(1 - \rho)$ .

We have represented in Figure 7.4 the discrete density  $\rho_N$  computed from the model coupling FTL dynamics and the buffer zone. The profile of this discrete density seems to be stable, it consists of a high density zone before and in the buffer zone corresponding to the traffic jam and of a low density zone outside the traffic jam.

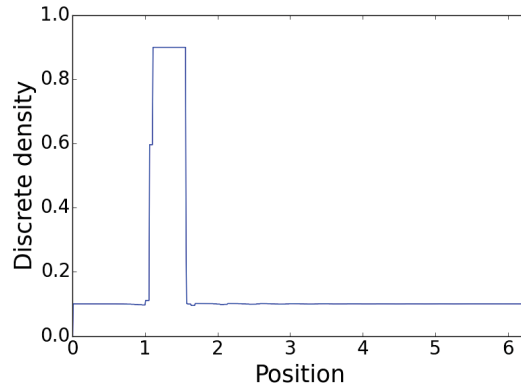


FIGURE 7.4 – Discrete density  $\rho_N$  for  $N = 200$  cars, stationary state. Parameters  $v_{\max} = 1$  and  $\delta^* = 1/N = 0.005$ .

We want to recover in the next section this type of solution directly on the limit conservation law.

### 3 Conservation laws for congestion

In the previous section we have let numerically the number of vehicles increase and thus constructed an approximate solution of a macroscopic model modelling a traffic jam. Historically, macroscopic systems based on the principles of the continuum mechanics have been first introduced for traffic flow modelling. The most famous model has been derived in 1955 by Lightwill and Whitham [129] and completed one year later by Richards [161] who added the notion of shock wave in the model. This system, still widely used, is commonly called LWR model.

Macroscopic models for crowd motion appear in the 1970's in Henderson's papers, see for instance [100]. His approach relies on an analogy with Boltzmann kinetic models assuming conservation of the momentum and of energy. Nevertheless the conservation of momentum and energy does not seem relevant for crowds, and the first macroscopic model which deals with the specific features of crowds was introduced by Helbing in 1992 [98]. It is still based on the Boltzmann equation but it develops the notions of pressure or temperature in the specific framework of pedestrians.

Nowadays most of the mathematical studies rely on a second type of models introduced in 2000 by Hughes in [105,107] which remind in their form the LWR model. Three assumptions are necessary to derive the model : firstly the velocity of pedestrians is determined by the density of surrounding pedestrians and their characteristics, secondly pedestrians have the same destination and thirdly the pedestrians seek to minimize their estimated travel time which might imply avoiding extremely high densities.

Other macroscopic models have been also developed, for a review of these models and detailed comparison we refer to [11,124].

We restrict our study to the LWR models for vehicular traffic. Let us describe more precisely in this framework what are the equations composing the model. On a closed and bounded interval  $\Omega$ , the physical principle of mass conservation for the crowd is expressed by the conservation law

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0$$

where  $\rho$  denotes the density of cars,  $u$  the mean velocity of the agents in an elementary volume. Both are considered as functions of time and space. We prescribe the velocity  $u$  as a function of the density, it will be the product of a desired velocity  $U$  and  $\beta(\rho)$  representing the effects of saturation

$$\partial_t \rho(t, x) + \partial_x(\rho(t, x)\beta(\rho(t, x))U) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \Omega \quad (7.4)$$

The function  $\beta$  is then assumed to be strictly decreasing on  $[0, 1]$ . In the literature several expressions have been proposed for the function  $\beta$ . Among them one can cite those of

- Greenshields :  $\beta(\rho) = (1 - \rho)$ ,
- Pipes-Munjaj :  $\beta(\rho) = (1 - \rho^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ ,
- Underwood :  $\beta(\rho) = e^{-\rho}$ ,

- Greenberg (modified) :  $\beta(\rho) = [\log(\frac{1}{\alpha})]^{-1} \log(\frac{1}{\rho+\alpha})$ ,  $\alpha > 0$ .

The functions  $\beta$  are chosen to fit with the so-called fundamental diagram which represents the experimental flux of cars as function of the density of cars as explained in [112] or [11]. Our previous study on the microscopic system leads us to consider a function of Greenshields type,

$$\beta(\rho) = 1 - \rho.$$

In the rest of this section we will first describe in the one-dimensional periodic setting a new numerical scheme for dealing with congestion effects, we prove that the numerical scheme is appropriate for entropy solutions and therefore does not capture the stable congested numerical solutions which has been exhibited in the previous section. We propose then a local modification of the scheme which reproduces at the macroscopic level the ideas of the microscopic buffer zone.

### 3.1 Upwind/downwind numerical scheme

The domain  $\Omega = \mathbb{T}$  is the one-dimensional interval  $[0, 2\pi]$  with periodic boundary conditions as it has been done in the microscopic section. It means that there is one entrance at  $x = 0$  and one exit at  $x = 2\pi$  with an inflow at  $x = 0$  equal to the outflow at  $x = 2\pi$ . In this situation the desired velocity can be considered as a positive constant ; to simplify we take  $U = 1$ .

Our numerical scheme is a finite volume scheme which aims to reproduce the physical transport of the information. The information of the transport of the mass is propagating upwind whereas the information of congestion can be seen as an information propagating downwind. Our scheme is based on separate treatment of these two informations.

We discretize the interval  $[0, 2\pi]$  with a uniform grid of step size  $\Delta x$ , and discretize the time scale  $[0, T]$  uniformly with a step size  $\Delta t$ , such that  $1/\Delta x$  and  $T/\Delta t$  are two integers, denoted respectively by  $N_h$  and  $N_t$ . The points in space and time are indexed in  $\{0, \dots, N_h\}$  and  $\{0, \dots, N_t\}$  respectively. Let  $\rho_i^n$  be the approximation of  $\rho$  on  $[(i-1)\Delta x, i\Delta x]$  at time  $n\Delta t$ . Our explicit scheme then writes : for each  $i \in \{2, \dots, N_h - 1\}$ ,

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} [\rho_i^n \beta(\rho_{i+1}^n) - \rho_{i-1}^n \beta(\rho_i^n)] = 0, \quad (7.5)$$

with the periodic boundary condition

$$\rho_1^n \beta(\rho_1^n) = \rho_{N_h}^n \beta(\rho_{N_h}^n). \quad (7.6)$$

**Properties of the numerical scheme.** Our numerical scheme is under conservative form as we can see by writing

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n)$$



$$\text{with } g_{i+1/2}^n = g(\rho_i^n, \rho_{i+1}^n) = \rho_i^n \beta(\rho_{i+1}^n)$$

We directly check that the scheme is consistent, *i.e.*  $g(\rho, \rho) = \rho\beta(\rho)$ . It is moreover monotone under the CFL condition

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( 1 + \max_{w \in [0,1]} |\beta'(w)| \right) \leq 1. \quad (7.7)$$

We recall that (see for instance the reference book written by Godlewski and Raviart [158]) a numerical scheme

$$\rho_i^{n+1} = H(\rho_{i-1}^n, \rho_i^n, \rho_{i+1}^n)$$

is said to be monotone if the function  $H$  is an increasing function in each argument. In our case, the function  $g$  defining the numerical flux is increasing with respect to the first variable and decreasing with respect to its second variable since the function  $\beta$  is assumed to be decreasing. These two points prove that  $H$  is increasing with the first and the last variable. It remains to show that it is also increasing with the second variable. For that purpose, we differentiate  $H$  with respect to the second variable

$$\partial_{v_2} H(\rho_{i-1}, v_2, \rho_{i+1}) = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\beta(\rho_{i+1}) - \rho_{i-1} \beta'(v_2))$$

we observe that the CFL condition ensures the positivity of  $\partial_{v_2} H$  and thus the monotonicity of our numerical scheme.

As a by-product of the consistency and monotonicity properties, we get the  $L^\infty$ -stability and the consistency with the entropy condition. We refer for these two points again to [158], Theorem 3.2 and Theorem 4.2.

**Stationary solutions.** We are interested now by the determination of the stationary solutions of our model with the periodic boundary conditions. The stationary solutions are characterized by a constant flux denoted  $\phi$  such that

$$\rho\beta(\rho) = \phi \quad a.e..$$

By definition of  $\beta$ , the flux function  $\rho \mapsto \rho\beta(\rho)$  is strictly increasing on  $[0, 1/2]$  from 0 to  $1/4$  and strictly decreasing on  $[1/2, 1]$  from  $1/4$  to 0. Then, if  $\phi < 1/4$ , there exist exactly two solutions to the equation  $\rho_\pm$  with  $\rho_- < \rho_c < \rho_+$ .

A unique ‘‘physical’’ (weak) solution to the conservation law is usually selected thanks to an additional entropy criterion (for the classical theory concerning classical entropy solutions we refer to Serre [164]). If we assume moreover that our flux is strictly concave on  $[0, 1]$ , which is the case for  $\beta(\rho) = 1 - \rho$ , then the entropy criterion selects the admissible stationary shocks

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_- & \text{if } x < x^* \\ \rho_+ & \text{if } x > x^* \end{cases}, \quad x^* \in (0, 1).$$

We come back to this notion of physical solution and entropy solutions below. Therefore there are only three entropy stationary solutions of the conservation law

$$\rho = \rho_-, \quad \rho = \rho_+, \quad \rho = \begin{cases} \rho_- & \text{if } x < x^* \\ \rho_+ & \text{if } x > x^* \end{cases}.$$

As we have seen previously, our upwind/downwind numerical scheme satisfies a monotonicity property which ensures the consistency with the discrete entropy criterion. Therefore our numerical scheme should converge as  $\Delta x$  and  $\Delta t$  go to 0 towards the unique entropy solution of the system, and this is what is observed on the numerical simulations, as shown in Figure 7.5.

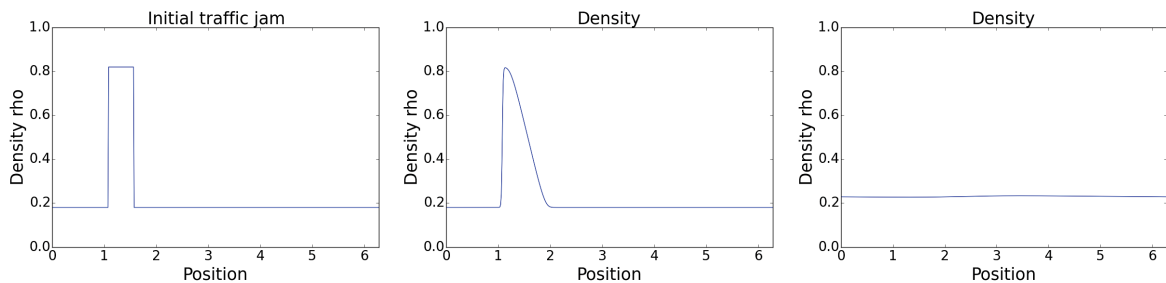


FIGURE 7.5 – initial traffic jam and relaxation towards a constant distribution

We have exhibited in the previous section a microscopic stationary solution whose profile does not correspond to the above stationary entropy solutions. It seems then reasonable to try to leave the framework of entropy solution, taking also into account the fact that a car does not behave like a gas molecule.

In the rest of this section we propose a local modification of the upwind/downwind scheme for the macroscopic conservation law in order to capture the potential stable traffic jams.

### 3.2 Local modification of the numerical scheme

We aim here at designing a local (one-cell) modification of the numerical scheme to capture the traffic jam observed at the microscopic level. To that purpose, we come back to the idea of the buffer zone introduced on the microscopic FTL model. It was a zone in which the pedestrians have a constant velocity, and do not take into account the possible effects of congestion. Here we only modify how the information of congestion is taken into account, instead of imposing a downwind discretization of the saturation function  $\beta$ , we discretize in an upwind manner the whole flux. By doing so we preserve the consistency of

the scheme.

The scheme writes as

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} [\rho_{i-1}^n (1 - \rho_i^n) - \rho_i^n (1 - \rho_{i+1}^n)], \quad \forall i \neq i_0, i_0 + 1 \\ \frac{\rho_{i_0}^{n+1} - \rho_{i_0}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} [\rho_{i_0-1}^n (1 - \rho_{i_0}^n) - \rho_{i_0}^n (1 - \rho_{i_0}^n)] \\ \frac{\rho_{i_0+1}^{n+1} - \rho_{i_0+1}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} [\rho_{i_0}^n (1 - \rho_{i_0}^n) - \rho_{i_0+1}^n (1 - \rho_{i_0+2}^n)] \end{array} \right. \quad (7.8)$$

This numerical modification is the macroscopic counterpart of the buffer zone, or, in other words, it is the residual microscopic effect of the buffer zone at the continuous limit. We can numerically compare the microscopic simulation with the buffer zone and the macroscopic simulation with local modification on one cell whose position corresponds to the discrete position of the buffer zone exit. To do so we start with a macroscopic initial density which is discretized theoretically via the operator (*c.f.* [51])

$$E_N : \rho \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x_N = 2\pi \\ x_i = \max \left\{ x < x_{i+1}, \int_x^{x_{i+1}} \rho(y) dy = \delta_N^* \right\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\} \end{array} \right. \quad (7.9)$$

where  $\delta_N^* N = M$  if initially  $\int \rho^0(x) dx = M$ . Thanks to this local modification of the numerical flux, we are able to capture the stable traffic jam, equivalent to that obtained with the microscopic coupled FTL-buffer zone scheme. The results are represented on Figure 7.6.

**Stability under perturbations.** In order to test the stability of a traffic jam we consider two types of perturbations : first a “physical perturbation” based on microscopic considerations and then a random one.

The physical perturbations that we impose on the traffic jam consists in perturbing two neighbour cells by the same amplitude, but with opposite signs. Doing so, we ensure that the perturbed density has the same total mass as before. The density on the buffer cell remains unchanged. Physically, this perturbation expresses that following fact : if a driver reduces his distance to his predecessor, he will also increase the distance to his successor. The numerical results are represented on Figure 7.7. Both on microscopic and macroscopic simulations we recover after some time the traffic jam. The jam appears to be stable under such perturbations which keep unchanged the density at the buffer cells.

If now we perturb the initial data by a white noise, stable traffic jams appear and are persistent. On Figure 7.8 we compare three random initial data with same mass but for different values in the neighbourhood of the buffer cell. We observe that different stable traffic jams are obtained at time  $T = 200$ . The jam is then characterized by the jump at the buffer cell. It seems then that even for small random perturbations of a stable traffic jam,

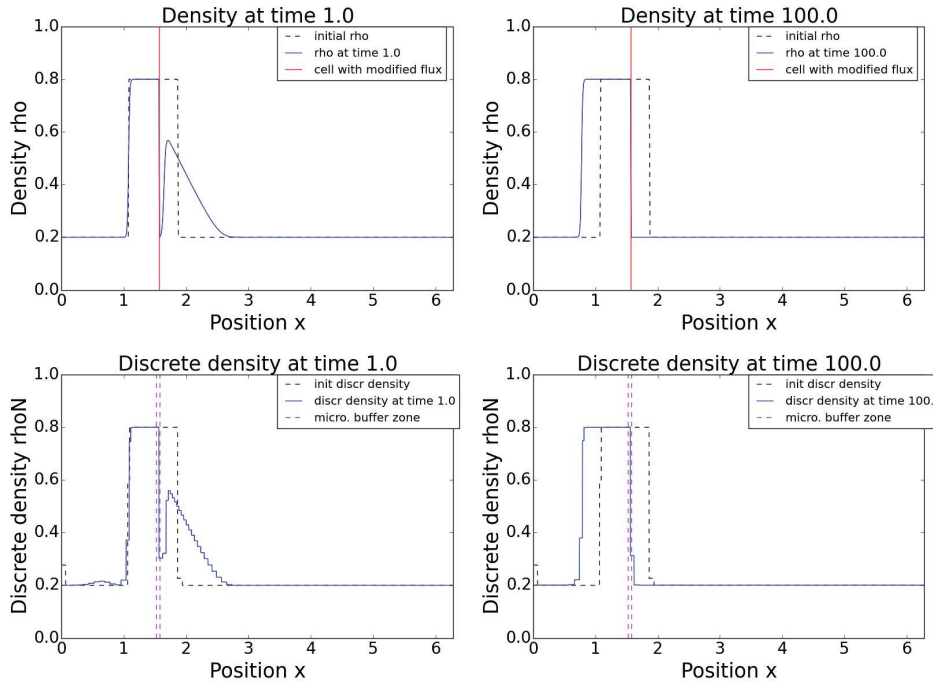


FIGURE 7.6 – Stable jam from macroscopic (top) and microscopic (bottom) point of view. Parameters  $N = 96$ ,  $v_{\max} = 1$  and  $\delta^* = 0.018$ .

we can obtain a different stable solution if the jump just after the buffer cell is modified. For a fixed total mass, the numerical simulations show thus a continuum of possible macroscopic traffic jams characterized by the jump at the buffer cell. They seem stable under perturbations which preserve the density in the neighbourhood of the buffer cell.

**Acknowledgements** : The authors would like to thank F. Lagoutière for his fruitful suggestions. This project is supported by ANR Project Isotace (ANR-12-MONU-0013).

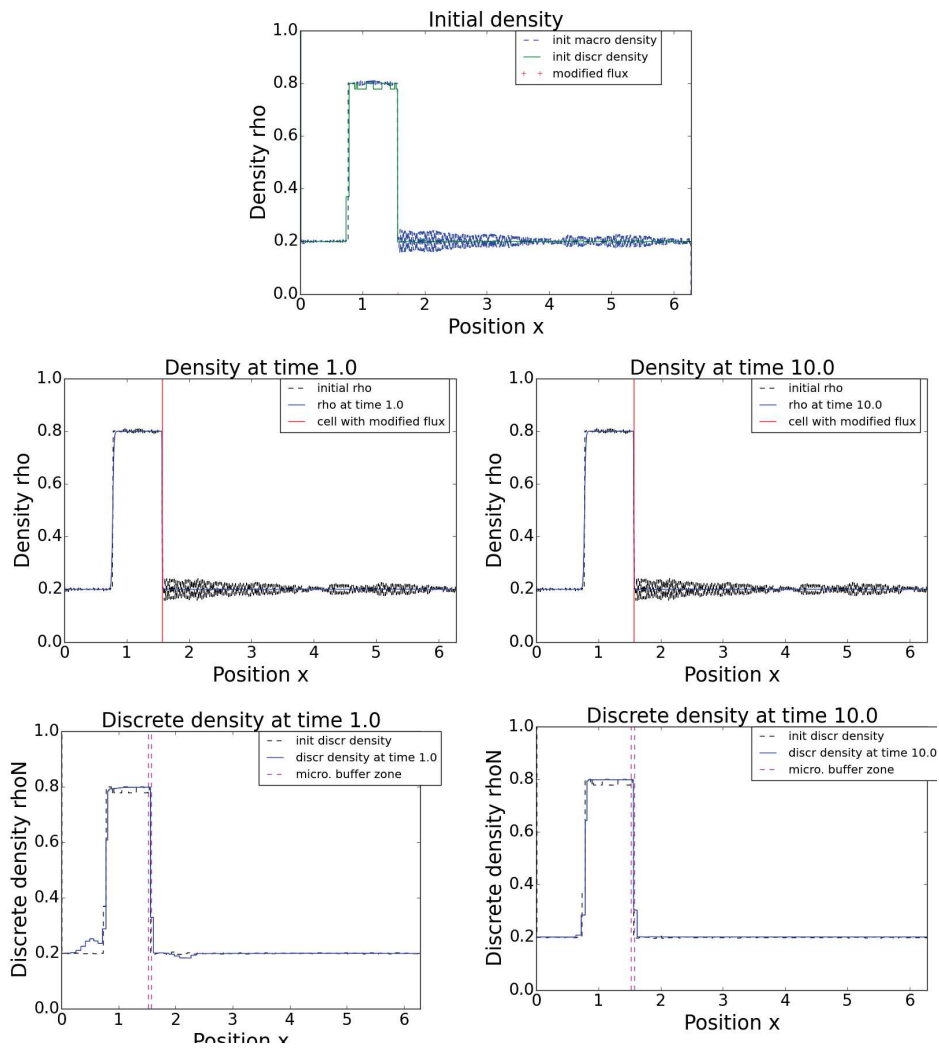


FIGURE 7.7 – Perturbed initial density and convergence towards the stable jam from macroscopic and microscopic point of view

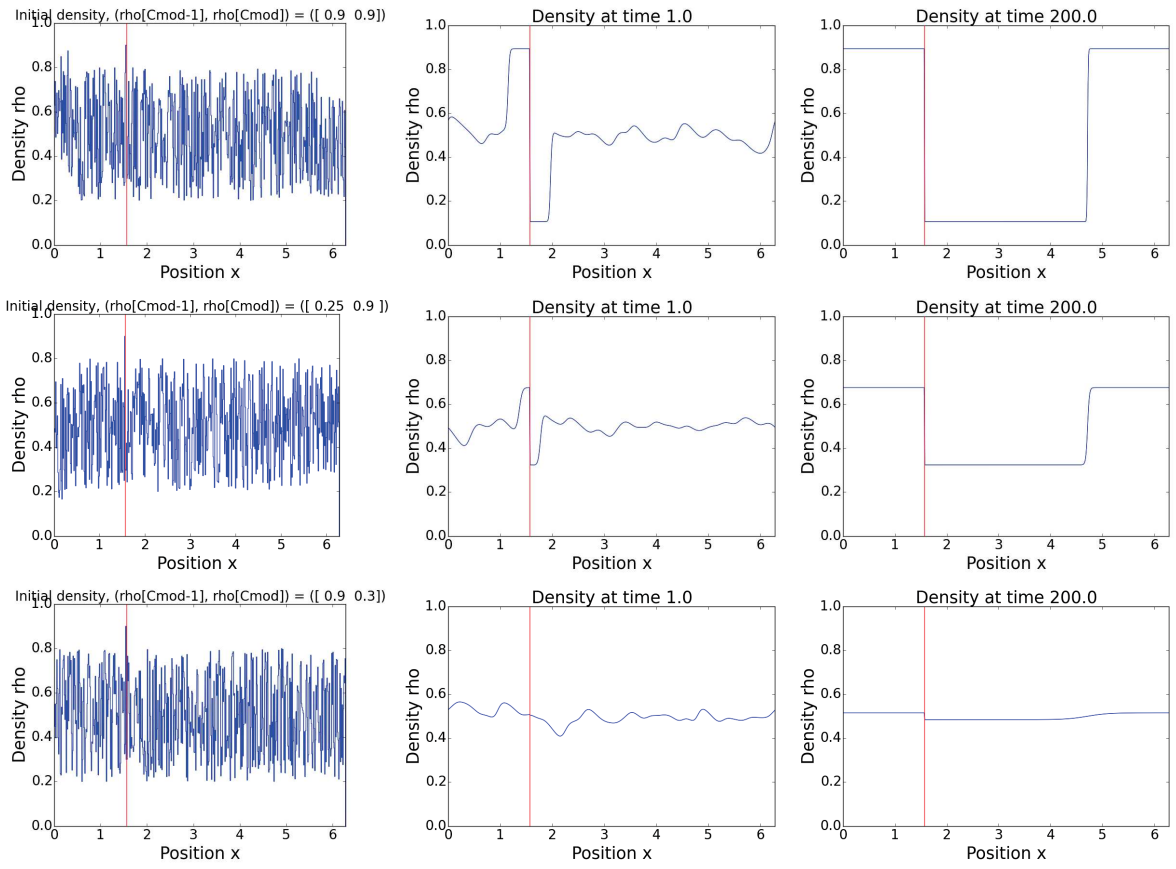


FIGURE 7.8 – Comparison between random initial data of same mass. Parameters  $N = 96$ ,  $v_{\max} = 1$  and  $\delta^* = 0.018$ .



## Conclusion et perspectives





# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons traité de plusieurs phénomènes d'hétérogénéités et de congestion dans les milieux fluides. Notre étude a porté à la fois sur des aspects de modélisation, d'analyse théorique (existence de solutions, limites singulières) et d'analyse numérique (mise en place de schémas numériques, implémentations).

Dans le cadre général des équations de Navier-Stokes, nous avons établi les premiers résultats théoriques montrant le lien entre modèles de congestion douce de type Navier-Stokes compressible avec lois de pressions singulières, et modèles de congestion dure vus comme des problèmes à frontière libre entre phases congestionnées/incompressibles et phases non-congestionnées/compressibles. Notre analyse se base sur l'obtention d'estimation uniformes de la pression que l'inégalité d'énergie seule ne peut pas fournir et nous justifions la relation d'exclusion

$$(\rho^* - \rho)\Pi = 0$$

à la limite, traduisant l'activation de la pression  $\Pi$  dans les zones de congestion où  $\rho = \rho^*$ . Nous expliquons comment la prise en compte d'une hétérogénéité dans la contrainte de densité maximale  $\rho^*$  impacte la structure du système et quelles sont les lois de pression hétérogènes qui sont compatibles avec l'équation d'énergie.

Nous avons également illustré numériquement la transition entre modèles de congestion douce et modèles de congestion dure. La discrétisation des modèles de congestion soft pour des valeurs petites du paramètre  $\varepsilon$  fait apparaître plusieurs difficultés sur le plan de la stabilité numérique mais aussi de la précision et de la consistance asymptotique avec le modèle de congestion dure. Par analogie avec les difficultés rencontrées pour la simulation d'écoulement à tout nombre de Mach, on propose une discrétisation implicite/explicite du terme de pression singulière dans le cas de la dimension un et d'une contrainte de densité maximale homogène  $\rho^* = 1$ . Ce schéma se base sur les travaux de DEGOND, HUA, NAVO-RET dans le cas non-visqueux et nous comparons deux méthodes afin de prendre en compte les effets de la viscosité supplémentaire. Elle est soit intégrée directement dans le schéma et discrétisée explicitement en temps, soit traitée implicitement en temps et séparément dans une étape de calcul supplémentaire. La deuxième méthode est très diffusive et ne capture donc pas bien les transitions entre phases congestionnées et phases libres quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La

première méthode l'est beaucoup moins, mais la discrétisation explicite en temps introduit une restriction supplémentaire sur le pas de temps et peut être ainsi instable pour des valeurs plus importantes de la viscosité.

Beaucoup de travail reste à faire sur le plan numérique, nous envisageons pour cela plusieurs pistes d'investigation. Dans un premier temps, il serait intéressant de s'interroger plus précisément en dimension un sur la consistance asymptotique des schémas pour les deux régimes compressible et incompressible du modèle limite. En complément de cette étude, il serait également souhaitable d'obtenir des estimations d'erreur sur ces schémas numériques.

Plus généralement nous envisageons de développer un schéma bidimensionnel, ainsi qu'un schéma dans le cas d'une contrainte maximale hétérogène.

Sur le plan théorique, un travail est actuellement en cours en collaboration avec M. WESTDICKENBERG concernant le modèle d'Euler sous contraintes (1.38). Notre but est de montrer l'existence de solutions faibles pour ce système par les outils du transport optimal et les outils de projection utilisés par CAVALETTI, SEDJRO, WESTDICKENBERG dans [46]. Ceci permettrait de généraliser les résultats théoriques de BERTHELIN et donnerait également une nouvelle interprétation de la pression  $\pi$ .

Nous avons étendu et adapté la démarche de la première partie au cadre des milieux granulaires immergés que nous avons modélisés comme des mélanges biphasiques compressible/incompressible. Nous avons proposé un modèle de type suspension avec forces de lubrification qui converge lorsque la portée de ces forces tend vers 0 vers un régime granulaire compressible/incompressible. Nous répondons mathématiquement à un problème ouvert sur le plan de la physique (voir [4]). Nous mettons également en évidence et justifions par notre approche l'importance des effets de mémoire au sein d'un écoulement granulaire introduits par MAURY (2007), LEFEBVRE–LEPOT, MAURY (2012).

Nos résultats s'appuient sur l'obtention d'une estimation de type  $\kappa$ -entropie introduite par BRESCH, DESJARDINS, ZATORSKA (2015), couplée à l'équation en viscosité qui lie  $\mu_\varepsilon$  et  $\lambda_\varepsilon$  grâce à la relation algébrique  $\lambda_\varepsilon(s) = 2(\mu'(s)s - \mu_\varepsilon(s))$ . En imposant une dépendance linéaire de la viscosité  $\mu_\varepsilon$  par rapport à la pression  $\pi_\varepsilon$ , toutes deux singulières, nous montrons des résultats de compacité et de convergence faible des solutions vers un modèle granulaire hybride. L'originalité de ce travail repose sur le manque de compacité de la suite  $(\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon))_\varepsilon$ , c'est l'équation en viscosité qui permet de passer à la limite faible dans le produit  $\lambda_\varepsilon \operatorname{div} u_\varepsilon$  qui converge vers une "pression"  $\Lambda$ . Ainsi l'explosion de  $\lambda_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$  dans les zones de congestion est compensée par la condition d'incompressibilité à la limite  $\operatorname{div} u = 0$ . À la limite le système granulaire présente donc deux pressions qui ne sont actives que dans les zones de congestion :  $-\Lambda$  le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $\operatorname{div} u = 0$

et  $\Pi$  la limite de  $\pi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$ . Ces deux pressions sont liées par une équation de transport qui n'est rien d'autre que la limite de l'équation en viscosité liant  $\mu_\varepsilon$  et  $\lambda_\varepsilon$ . Le potentiel  $\Pi$  exprime ainsi au travers de cette équation de transport les effets de mémoire dans les zones de concentration maximale.

En dimension un nous montrons sur le plan théorique qu'une estimation d'entropie supplémentaire peut être obtenue. Mise en évidence par Mellet et Vasseur, elle permet d'obtenir une intégrabilité supplémentaire sur  $\sqrt{\Phi_\varepsilon}u_\varepsilon$  nécessaire au passage à la limite dans le terme non-linéaire de convection  $\Phi_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ . Cette intégrabilité peut alternativement être obtenue au moyen de termes de traînée du type  $\Phi|u|u$  comme nous l'expliquons en dimension deux dans le Chapitre 5.

Nous avons proposé un schéma numérique pour la simulation des écoulements de suspension. Du fait de la singularité du terme du coefficient de viscosité nous avons traité séparément les effets de viscosité. Les résultats de ces premières simulations sont encourageants au sens où nous arrivons garantir la contrainte de densité maximale et à reproduire un phénomène de congestion avec transitions entre zones congestionnées/incompressibles et zones libres/compressibles. Du point de vue du schéma utilisé, on assure une condition stabilité indépendante du paramètre  $\varepsilon$ . Même si nos premières observations semblent favorables, il reste néanmoins difficile du fait de la singularité du terme de viscosité de garantir la consistance asymptotique du schéma dans les zones de congestion.

En corollaire des résultats théoriques sur les milieux granulaires immergés nous proposons une nouvelle approche pour les fluides incompressibles avec viscosité dépendant de la pression. Concernant ce type de systèmes seuls des résultats partiels d'existence locale de solutions fortes étaient connus antérieurement (RENARDY, GAZZOLA) sous des conditions restrictives en particulier sur le champ de vitesse. Au lieu de prendre en compte des effets rhéofluidifiants, c'est-à-dire de prendre en compte une dépendance supplémentaire de la viscosité par rapport au cisaillement  $\nu(p, |D(u)|^2)$  comme MÁLEK, NEČAS, RAJAGOPAL, nous considérons une dépendance de la viscosité par rapport au potentiel  $\nu(\Pi)$ . Le potentiel  $\Pi$  est vu comme une variable qui caractérise l'état du système. L'équation supplémentaire liant  $\Pi$  et  $\Lambda$  exprime les effets de mémoire au sein de l'écoulement. C'est l'introduction de cette variable supplémentaire qui nous permet d'assurer une estimation d'entropie supplémentaire et l'existence globale de solution faible via un modèle de type suspension.

Nous envisageons d'approfondir et d'étendre ces résultats tant du point de la modélisation et de la théorie que du point de vue numérique.

Il s'agirait en premier lieu de poursuivre nos travaux numériques avec la mise au point d'un schéma qui serait plus en adéquation avec la théorie continue que nous avons mise en place. Plus précisément il faudrait s'appuyer sur l'équation supplémentaire liant viscosité et pression et sur l'estimation de  $\kappa$ -entropie afin de proposer une discrétisation pertinente du modèle. Ceci permettrait ensuite d'étudier l'influence du potentiel d'adhésion compa-

rativement aux autres dynamiques mises en jeu dans le système.

Sur le plan théorique, il serait important comme au Chapitre 3 de considérer des contraintes maximales  $\Phi^*(x)$  non constantes. La compatibilité des lois de pression et de viscosités hétérogènes avec les différentes estimations d'énergie et d'entropie nécessite alors une réflexion autour de l'expression de ces lois ainsi qu'autour des relations algébriques liant  $\mu$ ,  $\lambda$  et  $\pi$ . C'est un travail actuellement en cours avec E. ZATORSKA.

Il serait également intéressant de développer notre approche sur les modèles introduits par KAZHIKHOV et VAIGANT [118] où

$$\mu(\rho) = 1, \quad \lambda(\rho) = \rho^\beta, \quad p(\rho) = a\rho^\gamma, \quad \beta > 0, \gamma \geq 0.$$

Il s'agirait ainsi de conserver une viscosité de cisaillement  $\mu$  constante mais d'étudier la possible dépendance de la viscosité volume  $\lambda$  par rapport à la pression  $p$  dans un cadre singulier avec une contrainte de densité maximale. C'est un travail actuellement en cours avec S. NECASOVA.

Une autre perspective concerne la modélisation des termes de traînée qui sont des forces d'interaction entre la phase liquide et la phase solide. Nous avons considéré dans notre étude une force de traînée  $\Phi|u|u$  mais il pourrait être pertinent de considérer plus généralement une force du type

$$\beta(\Phi)|u|^\alpha u, \quad \alpha \geq 0$$

où la fonction  $\beta(\Phi)$  devient singulière au voisinage de la densité maximale de grains  $\Phi^*$ . Il s'agirait alors de comprendre l'éventuel lien entre ces forces de traînée et les forces de dissipations visqueuses que, d'une certaine manière, nous avons pressenti au Chapitre 5 pour l'obtention de l'estimation de  $\kappa$ -entropie.

De manière plus générale, il est important de discuter de la pertinence physique des modèles utilisés, de leurs domaines de validité. Pour cela ils devront être confrontés à des mesures expérimentales.

Enfin dans le cadre du projet CEMRACS, nous nous sommes proposés de reproduire un phénomène de bouchon persistant que l'on peut observer en pratique sur des autoroutes en amont d'accidents se produisant sur la voie opposée. Cette situation n'a pas d'équivalent en dynamique des gaz et nous avons dû adapter modèles et schémas numériques, basés sur le cadre entropique de la dynamique des gaz, afin de simuler de telles situations. Nous avons pour cela considéré deux échelles, microscopique et macroscopique, de modélisation et avons dans les deux cas pris en compte une perturbation locale du comportement des automobilistes.

À l'échelle macroscopique de la loi de conservation, cette perturbation s'exprime numériquement par la modification locale du décentrement du flux numérique. Nous avons alors montré que cette modification permettait de capturer de façon robuste des bouchons persistants. Une des questions est alors de déterminer si la solution capturée numériquement correspond ou pas à un choc non-entropique du modèle LWR de départ ou à une solution d'une loi de conservation modifiée localement. Ce travail est actuellement en cours.

Nous souhaiterions également avec les membres du projet poursuivre notre étude sur des modèles légèrement modifiés qui prennent en compte de phénomènes de retard "psychologique". Ces modèles nous permettraient de développer éventuellement une étude théorique : existence de solutions à l'échelle microscopique, existence de bouchons persistants, lien micro/macro.



# Bibliographie

- [1] ABARBANEL, S., DUTH, P., AND GOTTLIEB, D. Splitting methods for low Mach number Euler and Navier–Stokes equations. *Computers & fluids* 17, 1 (1989), 1–12.
- [2] ALAZARD, T. A minicourse on the low Mach number limit. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S* 1, 3 (2008), 365–404.
- [3] AMADORI, D., GOATIN, P., AND ROSINI, M. D. Existence results for hughes' model for pedestrian flows. *Journal of Mathematical Analysis and applications* 420, 1 (2014), 387–406.
- [4] ANDREOTTI, B., FORTERRE, Y., AND POULIQUEN, O. *Les milieux granulaires : Entre fluide et solide*. EDP sciences, Les Ulis, 2012.
- [5] ANSORGE, R. What does the entropy condition mean in traffic flow theory? *Transportation Research Part B : Methodological* 24, 2 (1990), 133–143.
- [6] AUZERAIS, F., JACKSON, R., AND RUSSEL, W. The resolution of shocks and the effects of compressible sediments in transient settling. *Journal of Fluid Mechanics* 195 (1988), 437–462.
- [7] AW, A., KLAR, A., RASCLE, M., AND MATERNE, T. Derivation of continuum traffic flow models from microscopic Follow-The-Leader models. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 63, 1 (2002), 259–278.
- [8] AW, A., AND RASCLE, M. Resurrection of " second order" models of traffic flow. *SIAM journal on applied mathematics* 60, 3 (2000), 916–938.
- [9] BAER, M., AND NUNZIATO, J. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials. *International journal of multiphase flow* 12, 6 (1986), 861–889.
- [10] BAJŠANSKI, B., AND COIFMAN, R. On singular integrals. In *Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill. (1967)*, pp. 1–17.
- [11] BELLOMO, N., AND DOGBE, C. On the modeling of traffic and crowds : A survey of models, speculations, and perspectives. *SIAM review* 53, 3 (2011), 409–463.



- [12] BEN BELGACEM, F., AND JABIN, P.-E. Compactness for nonlinear continuity equations. *Journal of Functional Analysis* 264, 1 (2013), 139–168.
- [13] BERTHELIN, F. Existence and weak stability for a pressureless model with unilateral constraint. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12, 02 (2002), 249–272.
- [14] BERTHELIN, F., AND BROIZAT, D. A model for the evolution of traffic jams in multi-lane. *Kinetic and Related Models* 5, 04 (2012), 697–728.
- [15] BERTHELIN, F., DEGOND, P., DELITALA, M., AND RASCLE, M. A model for the formation and evolution of traffic jams. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 187, 2 (2008), 185–220.
- [16] BERTHELIN, F., DEGOND, P., LE BLANC, V., MOUTARI, S., RASCLE, M., AND ROYER, J. A traffic-flow model with constraints for the modeling of traffic jams. *Math. Models Methods in Appl. Sci.* 18 (2008), 1269–1298.
- [17] BERTOZZI, A. L., GRÜN, G., AND WITELSKI, T. P. Dewetting films : bifurcations and concentrations. *Nonlinearity* 14, 6 (2001), 1569.
- [18] BIHARI, I. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. *Acta Mathematica Hungarica* 7, 1 (1956), 81–94.
- [19] BLANDIN, S., AND GOATIN, P. Well-posedness of a conservation law with non-local flux arising in traffic flow modeling. *Numerische Mathematik* 132, 2 (2016), 217–241.
- [20] BOUCHUT, F. On zero pressure gas dynamics. *Advances in kinetic theory and computing* 22 (1994), 171–190.
- [21] BOUCHUT, F., BRENIER, Y., CORTES, J., AND RIPOLL, J.-F. A hierarchy of models for two-phase flows. *Journal of NonLinear Science* 10, 6 (2000), 639–660.
- [22] BOUDIN, L. A solution with bounded expansion rate to the model of viscous pressureless gases. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 32, 1 (2000), 172–193.
- [23] BOURDARIAS, C., ERSOY, M., AND GERBI, S. A mathematical model for unsteady mixed flows in closed water pipes. *Science China Mathematics* 55, 2 (2012), 221–244.
- [24] BOYER, F., AND FABRIE, P. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier–Stokes equations and related models*, vol. 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] BRENIER, Y. Approximation of a simple Navier–Stokes model by monotonic rearrangement. *arXiv preprint arXiv :1211.1764* (2012).
- [26] BRENIER, Y., AND GRENIER, E. Sticky particles and scalar conservation laws. *SIAM journal on numerical analysis* 35, 6 (1998), 2317–2328.

- 
- [27] BRENNER, H. Navier–Stokes revisited. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 349, 1 (2005), 60–132.
- [28] BRESCH, D., COUDERC, F., NOBLE, P., AND VILA, J.-P. A generalization of the quantum bohm identity : Hyperbolic CFL condition for Euler–Korteweg equations. *Comptes Rendus Mathematique* 354, 1 (2016), 39–43.
- [29] BRESCH, D., AND DESJARDINS, B. Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Communications in mathematical physics* 238, 1-2 (2003), 211–223.
- [30] BRESCH, D., AND DESJARDINS, B. Quelques modeles diffusifs capillaires de type Korteweg. *Comptes Rendus Mecanique* 332, 11 (2004), 881–886.
- [31] BRESCH, D., AND DESJARDINS, B. On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier–Stokes models. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 86, 4 (2006), 362–368.
- [32] BRESCH, D., AND DESJARDINS, B. Global existence of weak solutions to the compressible Navier–Stokes equations in several dimensions : Total energy formulation. *preprint* (2016).
- [33] BRESCH, D., DESJARDINS, B., AND GÉRARD-VARET, D. On compressible Navier–Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *J. Math. Pures Appl.* 87, 2 (2007), 227–235.
- [34] BRESCH, D., DESJARDINS, B., GHIDAGLIA, J.-M., GRENIER, E., AND HILLAIRET, M. Multifluid models including compressible fluids. *preprint* (2016).
- [35] BRESCH, D., DESJARDINS, B., AND LIN, C.-K. On some compressible fluid models : Korteweg, lubrication, and shallow water systems. *Comm. Partial Differential Equations* 28, 3–4 (2003), 843–868.
- [36] BRESCH, D., DESJARDINS, B., AND ZATORSKA, E. Two-velocity hydrodynamics in fluid mechanics : Part II existence of global  $\kappa$ -entropy solutions to the compressible Navier–Stokes systems with degenerate viscosities. *J. Math. Pures Appl.* 104, 4 (2015), 801–836.
- [37] BRESCH, D., GISCLON, M., AND LIN, C.-K. An example of low Mach (Froude) number effects for compressible flows with nonconstant density (height) limit. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 39, 03 (2005), 477–486.
- [38] BRESCH, D., AND JABIN, P.-E. Global existence of weak solutions for compressible Navier–Stokes equations : Thermodynamically unstable pressure and anisotropic viscous stress tensor. *arXiv preprint arXiv :1507.04629* (2015).

- [39] BRESCH, D., AND JABIN, P.-E. Global weak solutions of PDEs for compressible media : A compactness criterion to cover new physical situations. *arXiv preprint arXiv :1602.04373* (2016).
- [40] BRESCH, D., AND MÉTIVIER, G. Anelastic limits for Euler-type systems. *Applied Mathematics Research eXpress* 2010, 2 (2010), 119–141.
- [41] BRESCH, D., PERRIN, C., AND ZATORSKA, E. Singular limit of a Navier–Stokes system leading to a free/congested zones two-phase model. *Comptes Rendus Mathématique* 352, 9 (2014), 685–690.
- [42] BULÍČEK, M., MAJDOUB, M., AND MÁLEK, J. Unsteady flows of fluids with pressure dependent viscosity in unbounded domains. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 11, 5 (2010), 3968–3983.
- [43] BURSTEDDE, C., KLAUCK, K., SCHADSCHNEIDER, A., AND ZITTARTZ, J. Simulation of pedestrian dynamics using a two-dimensional cellular automaton. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 295, 3 (2001), 507–525.
- [44] CAFFARELLI, L. A., AND FRIEDMAN, A. Asymptotic behavior of solutions of ut. *Indiana University mathematics journal* 36, 4 (1987), 711–728.
- [45] CARNAHAN, N. F., AND STARLING, K. E. Intermolecular repulsions and the equation of state for fluids. *AIChE Journal* 18, 6 (1972), 1184–1189.
- [46] CAVALLETTI, F., SEDJRO, M., AND WESTDICKENBERG, M. A Simple Proof of Global Existence for the 1D Pressureless Gas Dynamics Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 47, 1 (2015), 66–79.
- [47] CHANDLER, R. E., HERMAN, R., AND MONTROLL, E. W. Traffic dynamics : studies in car following. *Operations research* 6, 2 (1958), 165–184.
- [48] CHAPMAN, S., AND COWLING, T. G. *The mathematical theory of non-uniform gases : an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases*. Cambridge university press, 1970.
- [49] CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of computational physics* 2, 1 (1967), 12–26.
- [50] COIFMAN, R. R., AND MEYER, Y. On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals. *Transactions of the American Mathematical Society* (1975), 315–331.
- [51] COLOMBO, R. M., AND ROSSI, E. On the micro-macro limit in traffic flow. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 131 (2014), 217–235.

- 
- [52] CORDIER, F., DEGOND, P., AND KUMBARO, A. An asymptotic-preserving all-speed scheme for the Euler and Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics* 231, 17 (2012), 5685–5704.
- [53] COUSSOT, P. *Rhéophysique la matière dans tous ses Etats*. EDP sciences, Les Ulis, 2012.
- [54] COUSSOT, P., AND ANCEY, C. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP Sciences, Les Ulis, 1999.
- [55] DAGANZO, C. F. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow. *Transportation Research Part B : Methodological* 29, 4 (1995), 277–286.
- [56] DEGOND, P., DELUZET, F., SANGAM, A., AND VIGNAL, M.-H. An asymptotic preserving scheme for the Euler equations in a strong magnetic field. *Journal of Computational Physics* 228, 10 (2009), 3540–3558.
- [57] DEGOND, P., AND HUA, J. Self-organized hydrodynamics with congestion and path formation in crowds. *Journal of Computational Physics* 237 (2013), 299–319.
- [58] DEGOND, P., HUA, J., AND NAVORET, L. Numerical simulations of the Euler system with congestion constraint. *Journal of Computational Physics* 230, 22 (2011), 8057–8088.
- [59] DEGOND, P., JIN, S., AND LIU, J.-G. Mach-number uniform asymptotic-preserving gauge schemes for compressible flows. *BULLETIN-INSTITUTE OF MATHEMATICS ACADEMIA SINICA* 2, 4 (2007), 851.
- [60] DEGOND, P., AND TANG, M. All speed method for the Euler equation in the low Mach number limit. *Communications in Computational Physics* 10 (2011), 1–31.
- [61] DELLACHERIE, S. Analysis of godunov type schemes applied to the compressible euler system at low mach number. *Journal of Computational Physics* 229, 4 (2010), 978–1016.
- [62] DI FRANCESCO, M., MARKOWICH, P. A., PIETSCHMANN, J.-F., AND WOLFRAM, M.-T. On the hughes’ model for pedestrian flow : The one-dimensional case. *Journal of Differential Equations* 250, 3 (2011), 1334–1362.
- [63] DI FRANCESCO, M., AND ROSINI, M. D. Rigorous derivation of nonlinear scalar conservation laws from Follow-The-Leader type models via many particle limit. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* (2015), 1–41.
- [64] DIPERNA, R. J., AND LIONS, P.-L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Inventiones mathematicae* 98, 3 (1989), 511–547.

- [65] DREW, D. A., AND PASSMAN, S. L. *Theory of multicomponent fluids*, vol. 135. Springer Science & Business Media, 2006.
- [66] DREW, D. A., AND PASSMAN, S. L. *Theory of multicomponent fluids*, vol. 135. Springer Science & Business Media, 2006.
- [67] DUCOMET, B., FEIREISL, E., PETZELTOVA, H., AND STRASKRABA, I. Global in time weak solutions for compressible barotropic self-gravitating fluids. *Discrete and continuous dynamical systems 11* (2004), 113–130.
- [68] DURAND, F. Modélisation microscopique d'un pâte granulaire, 2002.
- [69] EVJE, S., AND KARLSEN, K. H. Global weak solutions for a viscous liquid-gas model with singular pressure law. *Commun. Pure Appl. Anal 8*, 6 (2009), 1867–1894.
- [70] EVJE, S., AND WEN, H. Global solutions of a viscous gas-liquid model with unequal fluid velocities in a closed conduit. *SIAM Journal on Mathematical Analysis 47*, 1 (2015), 381–406.
- [71] FABRE, M., FAURE, S., LAURIÈRE, M., MAURY, B., AND PERRIN, C. Non classical solution of a conservation law arising in vehicular traffic or crowd modelling. *Submitted*.
- [72] FANELLI, F. A singular limit problem for rotating capillary fluids with variable rotation axis. *arXiv preprint arXiv :1504.02903* (2015).
- [73] FAURE, S., AND MAURY, B. Crowd motion from the granular standpoint. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 25*, 03 (2015), 463–493.
- [74] FEIREISL, E. On compactness of solutions to the compressible isentropic Navier-Stokes equations when the density is not square integrable. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 42*, 1 (2001), 83–98.
- [75] FEIREISL, E. Compressible Navier–Stokes equations with a non-monotone pressure law. *Journal of Differential Equations 184*, 1 (2002), 97–108.
- [76] FEIREISL, E. *Dynamics of viscous compressible fluids*, vol. 26. Oxford University Press, 2004.
- [77] FEIREISL, E., MÁLEK, J., NOVOTNÝ, A., AND STRAŠKRABA, I. Anelastic approximation as a singular limit of the compressible Navier–Stokes system. *Communications in Partial Differential Equations 33*, 1 (2008), 157–176.
- [78] FEIREISL, E., AND NOVOTNÝ, A. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*. Springer Science & Business Media, 2009.

- 
- [79] FEIREISL, E., PETZELTOVÁ, H., ROCCA, E., AND SCHIMPERNA, G. Analysis of a phase-field model for two-phase compressible fluids. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20, 07 (2010), 1129–1160.
- [80] FEIREISL, E., AND VASSEUR, A. New perspectives in fluid dynamics : Mathematical analysis of a model proposed by Howard Brenner. In *New Directions in Mathematical Fluid Mechanics*. Springer, 2009, pp. 153–179.
- [81] FRIEDMAN, A., AND HÖLLIG, K. On the mesa problem. *Journal of mathematical analysis and applications* 123, 2 (1987), 564–571.
- [82] FRIIS, H. A., AND EVJE, S. Global weak solutions for a gas-liquid model with external forces and general pressure law. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 71, 2 (2011), 409–442.
- [83] GALLAGHER, I. Résultats récents sur la limite incompressible. *Séminaire Bourbaki* 46 (2005), 29–58.
- [84] GALLOUËT, T., HELLUY, P., HÉRARD, J.-M., AND NUSSBAUM, J. Hyperbolic relaxation models for granular flows. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 44, 02 (2010), 371–400.
- [85] GASTALDO, L., HERBIN, R., KHERIJI, W., LAPUERTA, C., AND LATCHÉ, J.-C. Staggered discretizations, pressure correction schemes and all speed barotropic flows. In *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives*. Springer, 2011, pp. 839–855.
- [86] GAVRILYUK, S., AND SHUGRIN, S. Media with equations of state that depend on derivatives. *Journal of applied mechanics and technical physics* 37, 2 (1996), 177–189.
- [87] GAZIS, D. C., HERMAN, R., AND ROTHERY, R. W. Nonlinear Follow-The-Leader models of traffic flow. *Operations research* 9, 4 (1961), 545–567.
- [88] GAZZOLA, F. A note on the evolution Navier-Stokes equations with a pressure-dependent viscosity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 48, 5 (1997), 760–773.
- [89] GOATIN, P., AND ROSSI, F. A traffic flow model with non-smooth metric interaction : well-posedness and micro-macro limit. *arXiv preprint arXiv :1510.04461* (2015).
- [90] GREENSHIELD, B. A study of capacity. In *Proceedings of the Highway Research Board* 14 (1935), 967–976.
- [91] GRENIER, N., VILA, J.-P., AND VILLEDIEU, P. An accurate low-Mach scheme for a compressible two-fluid model applied to free-surface flows. *Journal of Computational Physics* 252 (2013), 1–19.



- [92] GUILLARD, H., AND VIOZAT, C. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Computers & fluids* 28, 1 (1999), 63–86.
- [93] GUYON, E., HULIN, J.-P., PETIT, L., AND DE GENNES, P. G. *Hydrodynamique physique*. EDP sciences, Les Ulis, 2001.
- [94] HAACK, J., JIN, S., AND LIU, J.-G. An all-speed asymptotic-preserving method for the isentropic Euler and Navier–Stokes equations. *Communications in Computational Physics* 12, 04 (2012), 955–980.
- [95] HARLOW, F. H., AND AMSDEN, A. A. A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics* 8, 2 (1971), 197–213.
- [96] HASPOT, B. Porous media equations, fast diffusions equations and the existence of global weak solution for the quasi-solutions of compressible Navier–Stokes equations. hyperbolic problems : Theory, numerics, applications. In *Hyperbolic problems : theory, numerics, applications—proceedings of the 14th international conference on hyperbolic problems held in Padova* (2014), pp. 667–674.
- [97] HASPOT, B., AND ZATORSKA, E. From the highly compressible Navier-Stokes equations to the Porous Medium equation-rate of convergence. *arXiv preprint arXiv :1504.04219* (2015).
- [98] HELBING, D. A fluid dynamic model for the movement of pedestrians. *arXiv preprint cond-mat/9805213* (1998).
- [99] HELBING, D., AND JOHANSSON, A. On the controversy around Daganzo’s requiem for and Aw-Rascle’s resurrection of second-order traffic flow models. *The European Physical Journal B* 69, 4 (2009), 549–562.
- [100] HENDERSON, L. On the fluid mechanics of human crowd motion. *Transportation research* 8, 6 (1974), 509–515.
- [101] HERBIN, R., KHERIJI, W., AND LATCHE, J.-C. Staggered schemes for all speed flows. In *ESAIM : Proceedings* (2012), vol. 35, EDP Sciences, pp. 122–150.
- [102] HERBIN, R., AND LECLERCQ, L. “A note on the Entropy Solutions of the Hydrodynamic Model of Traffic Flow” revisited. *Transportation Science* 45, 1 (2011), 138–142.
- [103] HOFF, D., AND SERRE, D. The failure of continuous dependence on initial data for the Navier-Stokes equations of compressible flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 51, 4 (1991), 887–898.
- [104] HRON, J., MÁLEK, J., AND RAJAGOPAL, K. Simple flows of fluids with pressure–dependent viscosities. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (2001), vol. 457, The Royal Society, pp. 1603–1622.

- 
- [105] HUGHES, R. The flow of large crowds of pedestrians. *Mathematics and Computers in Simulation* 53, 4 (2000), 367–370.
- [106] HUGHES, R. L. A continuum theory for the flow of pedestrians. *Transportation Research Part B : Methodological* 36, 6 (2002), 507–535.
- [107] HUGHES, R. L. The flow of human crowds. *Annual review of fluid mechanics* 35, 1 (2003), 169–182.
- [108] ISHII, M., AND HIBIKI, T. *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [109] ISRAELACHVILI, J. N. *Intermolecular and surface forces : revised third edition*. Academic press, 2011.
- [110] JABIN, P.-E., AND REY, T. Hydrodynamic limit of granular gases to pressureless Euler in dimension 1. *arXiv preprint arXiv :1602.09103* (2016).
- [111] JACKSON, R. *The dynamics of fluidized particles*. Cambridge University Press, 2000.
- [112] JELIĆ, A., APPERT-ROLLAND, C., LEMERCIER, S., AND PETTRÉ, J. Properties of pedestrians walking in line : Fundamental diagrams. *Physical Review E* 85, 3 (2012), 036111.
- [113] JIN, S. Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations. *SIAM Journal on Scientific Computing* 21, 2 (1999), 441–454.
- [114] JIN, S. Asymptotic preserving (AP) schemes for multiscale kinetic and hyperbolic equations : a review. *Lecture Notes for Summer School on “Methods and Models of Kinetic Theory”(M&MKT), Porto Ercole (Grosseto, Italy)* (2010), 177–216.
- [115] JOP, P., FORTERRE, Y., AND POULIQUEN, O. A constitutive law for dense granular flows. *Nature* 441, 7094 (2006), 727–730.
- [116] JORDAN, R., KINDERLEHRER, D., AND OTTO, F. The variational formulation of the Fokker–Planck equation. *SIAM journal on mathematical analysis* 29, 1 (1998), 1–17.
- [117] KAISER, K., SCHÜTZ, J., SCHÖBEL, R., AND NOELLE, S. A new stable splitting for the isentropic Euler equations.
- [118] KAZHIKHOV, A. V., AND VAIGANT, V. A. On existence of global solutions to the two-dimensional Navier–Stokes equations for a compressible viscous fluid. *Siberian Mathematical Journal* 36, 6 (1995), 1108–1141.
- [119] KHERIJI, W. *Pressure correction schemes for compressible flows*. Theses, Université de Provence - Aix-Marseille I, Nov. 2011.



- [120] KIM, S., AND KARRILA, S. J. *Microhydrodynamics : principles and selected applications*. Courier Corporation, 2013.
- [121] KLAINERMAN, S., AND MAJDA, A. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Communications on pure and applied Mathematics* 34, 4 (1981), 481–524.
- [122] KLEIN, R. Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics I : One-dimensional flow. *Journal of Computational Physics* 121, 2 (1995), 213–237.
- [123] KLEIN, R. Asymptotic analyses for atmospheric flows and the construction of asymptotically adaptive numerical methods. *ZAMM· Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 80, 11-12 (2000), 765–785.
- [124] KORMANOVÁ, A., ET AL. A review on macroscopic pedestrian flow modelling. *Acta Informatica Pragensia* 2, 2 (2014), 39–50.
- [125] LABBÉ, S., AND MAITRE, E. A free boundary model for Korteweg fluids as a limit of barotropic compressible Navier–Stokes equations. *Methods and Applications of Analysis* 20, 2 (2013), 165–178.
- [126] LAHEY JR, R. The prediction of phase distribution and separation phenomena using two-fluid models. *Boiling Heat Transfer* 85 (1992).
- [127] LEFEBVRE-LEPOT, A., AND MAURY, B. Micro-macro modelling of an array of spheres interacting through lubrication forces. *Advances in Mathematical Sciences and Applications* 21, 2 (2011), 535.
- [128] LEVEQUE, R. J. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, vol. 31. Cambridge university press, 2002.
- [129] LIGHTHILL, M. J., AND WHITHAM, G. B. On kinematic waves. II. a theory of traffic flow on long crowded roads. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (1955), vol. 229, The Royal Society, pp. 317–345.
- [130] LIONS, P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol. 2 : Compressible Fluids. In *Oxford Lecture Ser. Math. Appl.*, vol. 10. Clarendon Press Oxford, 1998.
- [131] LIONS, P.-L., AND MASMOUDI, N. On a free boundary barotropic model. In *Annales de l’IHP Analyse non linéaire* (1999), vol. 16, pp. 373–410.
- [132] MÁLEK, J., NEČAS, J., AND RAJAGOPAL, K. R. Global analysis of the flows of fluids with pressure-dependent viscosities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 165, 3 (2002), 243–269.

- 
- [133] MÁLEK, J., AND RAJAGOPAL, K. Mathematical properties of the solutions to the equations governing the flow of fluids with pressure and shear rate dependent viscosities. *Handbook of mathematical fluid dynamics 4* (2007), 407–444.
- [134] MASMOUDI, N. Examples of singular limits in hydrodynamics. *Handbook of differential equations : evolutionary equations 3* (2007), 195–275.
- [135] MAURY, B. A gluey particle model. In *ESAIM : Proceedings* (2007), vol. 18, EDP Sciences, pp. 133–142.
- [136] MAURY, B. Prise en compte de la congestion dans les modeles de mouvements de foules. *Actes des Colloques Caen 2012-Rouen 2011* (2012).
- [137] MAURY, B., AND PREUX, A. Pressureless Euler equations with maximal density constraint : a time-splitting scheme. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01224008> (2015).
- [138] MAURY, B., AND VENEL, J. A mathematical framework for a crowd motion model. *Comptes Rendus Mathematique 346*, 23 (2008), 1245–1250.
- [139] MAURY, B., AND VENEL, J. A discrete contact model for crowd motion. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis 45*, 01 (2011), 145–168.
- [140] MELLET, A., AND VASSEUR, A. On the barotropic compressible Navier–Stokes equations. *Communications in Partial Differential Equations 32*, 3 (2007), 431–452.
- [141] MORGAN, A. Some properties of media defined by constitutive equations in implicit form. *International Journal of Engineering Science 4*, 2 (1966), 155–178.
- [142] NATILE, L., AND SAVARÉ, G. A Wasserstein approach to the one-dimensional sticky particle system. *SIAM Journal on Mathematical Analysis 41*, 4 (2009), 1340–1365.
- [143] NELSON, E. *Dynamical theories of Brownian motion*, vol. 2. 1967.
- [144] NIRENBERG, L. *On elliptic partial differential equations*. Springer, 2011.
- [145] NOELLE, S., BISPEN, G., ARUN, K., LUKACOVA-MEDVIDOVA, M., AND MUNZ, C.-D. An asymptotic preserving all Mach number scheme for the Euler equations of gas dynamics. *SIAM J. Sci. Comput 36* (2014), 989–1024.
- [146] NOVOTNY, A., AND STRASKRABA, I. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*. Oxford University Press, New York, 2004.
- [147] OSWALD, P. *Rhéophysique : Ou comment coule la matière*. Belin, 2005.
- [148] PAYNE, H. J. Models of freeway traffic and control. *Mathematical models of public systems* (1971).

- [149] PERRIN, C. Modelling of phase transitions in one-dimensional granular flows. *submitted*.
- [150] PERRIN, C. Pressure dependent viscosity model for granular media obtained from compressible Navier–Stokes equations. *to appear in Appl. Math. Res. Express* (2016).
- [151] PERRIN, C., AND ZATORSKA, E. Free/congested two-phase model from weak solutions to multi-dimensional compressible Navier–Stokes equations. *Communications in Partial Differential Equations* 40, 8 (2015), 1558–1589.
- [152] PERTHAME, B., AND DALIBARD, A.-L. Existence of solutions of the hyperbolic keller-segel model. *Transactions of the American Mathematical Society* 361, 5 (2009), 2319–2335.
- [153] PERTHAME, B., QUIRÓS, F., TANG, M., AND VAUCHELET, N. Derivation of a Hele-Shaw type system from a cell model with active motion. *arXiv preprint arXiv :1401.2816* (2014).
- [154] PERTHAME, B., QUIRÓS, F., AND VÁZQUEZ, J. L. The Hele–Shaw asymptotics for mechanical models of tumor growth. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 212, 1 (2014), 93–127.
- [155] PERTHAME, B., AND VAUCHELET, N. Incompressible limit of a mechanical model of tumour growth with viscosity. *Phil. Trans. R. Soc. A* 373, 2050 (2015), 20140283.
- [156] PITMAN, E. B., AND LE, L. A two-fluid model for avalanche and debris flows. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 363, 1832 (2005), 1573–1601.
- [157] PLOTNIKOV, P. I., AND WEIGANT, W. Steady 3d viscous compressible flows with adiabatic exponent. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 104, 1 (2015), 58–82.
- [158] RAVIART, P., AND GODLEWSKI, E. Hyperbolic systems of conservation laws. *Ellipses, Paris* (1991).
- [159] RENARDY, M. Some remarks on the Navier–Stokes equations with a pressure-dependent viscosity. *Communications in Partial Differential Equations* 11, 7 (1986), 779–793.
- [160] RENARDY, M. Parallel shear flows of fluids with a pressure-dependent viscosity. *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 114, 2 (2003), 229–236.
- [161] RICHARDS, P. I. Shock waves on the highway. *Operations research* 4, 1 (1956), 42–51.

- 
- [162] SCHAEFFER, D. G. Instability in the evolution equations describing incompressible granular flow. *Journal of differential equations* 66, 1 (1987), 19–50.
- [163] SCHÜTZ, J., AND NOELLE, S. Flux splitting for stiff equations : A notion on stability. *Journal of Scientific Computing* 64, 2 (2015), 522–540.
- [164] SERRE, D. *Systems of Conservation Laws 1 : Hyperbolicity, entropies, shock waves*. Cambridge University Press, 1999.
- [165] SERRE, D. Five open problems in compressible mathematical fluid dynamics. *Methods and Applications in Analysis* 20 (2013), 197–210.
- [166] SEYFRIED, A., STEFFEN, B., KLINGSCH, W., AND BOLTES, M. The fundamental diagram of pedestrian movement revisited. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2005, 10 (2005), P10002.
- [167] SHUGRIN, S. Two-velocity hydrodynamics and thermodynamics. *Journal of applied mechanics and technical physics* 35, 4 (1994), 522–537.
- [168] SIMON, J. Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ . *Ann. Mat. Pura Appl.* 146, 1 (1986), 65–96.
- [169] SOLONNIKOV, V. Solvability of the initial-boundary-value problem for the equations of motion of a viscous compressible fluid. *Journal of Soviet Mathematics* 14, 2 (1980), 1120–1133.
- [170] STOKES, G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. In *Mathematical and Physical Papers vol.1*. Cambridge University Press, 2009, pp. 75–129.
- [171] TEMAM, R. Sur l’approximation de la solution des équations de Navier–Stokes par la méthode des pas fractionnaires (II). *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 33, 5 (1969), 377–385.
- [172] TOSCANI, G. Score functions, generalized relative Fisher information and applications. *preprint* (2016).
- [173] TRIEBEL, H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North Holland, 1978.
- [174] TURKEL, E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of computational physics* 72, 2 (1987), 277–298.
- [175] VASSEUR, A. F., AND YU, C. Existence of global weak solutions for 3D degenerate compressible Navier–Stokes equations, 2015.
- [176] VIGNEAUX, P. *Méthodes Level Set pour des problèmes d’interface en microfluidique*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2007.

- [177] VILLANI, C. Decrease of the Fisher information for solutions of the spatially homogeneous Landau equation with Maxwellian molecules. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 10, 02 (2000), 153–161.
- [178] WHITHAM, G. B. *Linear and nonlinear waves*, vol. 42. John Wiley & Sons, 2011.
- [179] ZATORSKA, E. On the flow of chemically reacting gaseous mixture. *Journal of Differential Equations* 253, 12 (2012), 3471–3500.
- [180] ZATORSKA, E. Fundamental problems to equations of compressible chemically reacting flows. *PhD dissertation* (2013).
- [181] ZEYTOUNIAN, R. K. *Theory and applications of viscous fluid flows*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [182] ZHANG, H. M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research Part B : Methodological* 36, 3 (2002), 275–290.



---

## RÉSUMÉ

Cette thèse est dédiée à la description et à l'analyse mathématique de phénomènes d'hétérogénéités et de congestion dans les modèles de la mécanique des fluides. On montre un lien rigoureux entre des modèles de congestion douce de type Navier-Stokes compressible qui intègrent des forces de répulsion à très courte portée entre composants élémentaires ; et des modèles de congestion dure de type compressible/incompressible décrivant les transitions entre zones libres et zones congestionnées. On s'intéresse ensuite à la modélisation macroscopique de mélanges formés par des particules solides immergées dans un fluide. On apporte dans ce cadre une première réponse mathématique à la question de la transition entre les régimes de suspensions dictés par les interactions hydrodynamiques et les régimes granulaires dictés par les contacts entre les particules solides. On met par cette démarche en évidence le rôle crucial joué par les effets de mémoire dans le régime granulaire. Cette approche permet également un nouveau point de vue pour l'étude mathématique des fluides avec viscosité dépendant de la pression. On s'intéresse enfin à la modélisation microscopique et macroscopique du trafic routier. Des schémas numériques originaux sont proposés afin de reproduire avec robustesse des phénomènes de persistance d'embouteillages.

---

---

## ABSTRACT

This thesis is dedicated to the description and the mathematical analysis of heterogeneities and congestion phenomena in fluid mechanics models. A rigorous link between soft congestion models, based on the compressible Navier–Stokes equations which take into account short–range repulsive forces between elementary components ; and hard congestion models which describe the transitions between free/compressible zones and congested/incompressible zones. We are interested then in the macroscopic modelling of mixtures composed solid particles immersed in a fluid. We provide a first mathematical answer to the question of the transition between the suspension regime dictated by hydrodynamical interactions and the granular regime dictated by the contacts between the solid particles. The method highlights the crucial role played by the memory effects in the granular regime. This approach enables also a new point of view concerning fluids with pressure-dependent viscosities. We finally deal with the microscopic and the macroscopic modelling of vehicular traffic. Original numerical schemes are proposed to robustly reproduce persistent traffic jams.

---